OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 65.

ABHANDLUNG

UEBER DIE

FUNCTIONEN ZWEIER VARIABLER

MIT VIER PERIODEN.

VON

GEORG ROSENHAIN.

(1851.)

HELM ENGELMANN IN LEIPZIG.

Ankündigung.

Der grossartige Aufschwung, welchen die Naturwissenscha in unserer Zeit erfahren haben, ist, wie allgemein anerkannt w nicht zum kleinsten Masse durch die Ausbildung und Verbreit der Unterrichtsmittel, der Experimentalvorlesungen, Lab torien u. s. w., bedingt. Während aber durch die vorhande Einrichtungen zwar die Kenntniss des gegenwärtigen Inhaltes Wissenschaft auf das erfolgreichste vermittelt wird, haben h stehende und weitblickende Männer wiederholt auf einen Ma hinweisen müssen, welcher der gegenwärtigen wissenschaftlic Ausbildung jüngerer Kräfte nur zu oft anhaftet. Es ist dies Fehlen des historischen Sinnes und der Mangel Kenntniss jener grossen Arbeiten, auf welchen Gebäude der Wissenschaft ruht.

Diesem Mangel soll durch die Herausgabe der Klassi der exakten Wissenschaften abgeholfen werden. In handlic Form und zu billigem Preise sollen die grundlegenden Abhandl gen der gesammten exakten Wissenschaften den Kreisen der Leh den und Lernenden zugänglich gemacht werden. Es soll dadu ein Unterrichtsmittel beschafft werden, welches das Eindrin in die Wissenschaft gleichzeitig belebt und vertieft. Dasselbe aber auch ein Forschungsmittel von grosser Bedeutung. D in jenen grundlegenden Schriften ruhten nicht nur die Keime, wel inzwischen sich entwickelt und Früchte getragen haben, sond es ruhen in ihnen noch zahllose andere Keime, die noch der E wicklung harren, und dem in der Wissenschaft Arbeitenden Forschenden bilden jene Schriften eine unerschöpfliche Fundgr von Anregungen und fördernden Gedanken.

Die Klassiker der exakten Wissenschaften sol ihrem Namen gemäss die rationellen Naturwissenschaften, von Mathematik bis zur Physiologie umfassen und werden Abhandlun aus den Gebieten der Mathematik, Astronomie, Phys Chemie (einschliesslich Krystallkunde) und Physiologie e halten.

Die allgemeine Redaktion führt von jetzt ab Profes Dr. Arthur von Oettingen (Leipzig); die einzelnen Ausga werden durch hervorragende Vertreter der betreffenden Wiss schaften besorgt werden. Die Leitung der einzelnen Abtheilu

Fortsetzung auf der dritten Seite des

Abhandlung

über die

FUNCTIONEN ZWEIER VARIABLER

mit vier Perioden,

welche die Inversen sind

der ultra-elliptischen Integrale erster Klasse.

Von

GEORG ROSENHAIN
Professor zu Breslau.

(1851.)

Herausgegeben

von

H. Weber.

Aus dem Französischen übersetzt

von

A. Witting.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1895.

(Diese Abhandlung hat den grossen Preis für Mathematik von der Akademie der Wissenschaften in Paris erhalten in Folge des Ausschreibens für 1846. Sie ist beim Secretariat am 30. Sept. 1846 eingegangen.)

[361]

Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden.

Von

Georg Rosenhain

Professor zu Breslau.

Mém. des savants Bd. IX, 1851.

Das Wenige verschwindet leicht dem Blick,
Der Vorwärts sieht, wie viel noch übrig bleibt.
(Iphigenia von Goethe.)

Wenn es sich um den Nachweis handelt, dass von zwei Functionen eine die Inverse der andern ist, so giebt es immer zwei verschiedene Methoden des Vorgehens, da man ja entweder von der einen Function oder von der andern ausgehen kann. Uebrigens können diese beiden Methoden ganz unabhängig von einander sein; denn wenn man die Umkehrung einer gegebenen Function gefunden hat, so wird, um das umgekehrte Problem zu lösen, nicht immer der kürzeste und am wenigsten complicirte Weg der sein, seine Schritte rückwärts zu lenken, besonders nicht, wenn die Function in Form eines Integrales oder einer unendlichen Reihe gegeben ist. Das merkwürdigste Beispiel eines solchen Dualismus der Methoden bietet die Geschichte der elliptischen Functionen. Die berühmten Mathematiker [362] *Abel* und *Jacobi*, welche zuerst die Idee fassten, die Grenze eines elliptischen Integrales als Function des Integrales selbst zu betrachten, und die, durch diese ebenso geistreiche wie fruchtbare Methode geleitet, eine neue Theorie der elliptischen Functionen*) geschaffen haben, gingen zuerst aus von dem Integral

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2 \cdot 1-k^2x^2}},$$

und wie man weiss, gelangte der erste mit Hülfe des Multiplicationstheorems, der andere mittels seines Transformationstheorems zu der inversen Function $x = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = \sin \mathrm{am}\, u$, wo B und A Functionen von u sind, die zugleich mit dem Argument u endlich, reell oder imaginär sind. Die Functionen A und B waren in Form von unendlichen Reihen schon von *Fourier* in seiner Wärmetheorie behandelt worden und es würde möglich gewesen sein, dass irgend ein gewandter Mathematiker die doppelte Periodicität des Bruches $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ bemerkt und diese zum Gegenstand seiner Arbeiten gemacht hätte, und dann würde er ohne Zweifel den Zusammenhang mit dem elliptischen Integral gefunden haben. Seitdem hat *Jacobi* in seinen Königsberger Universitätsvorlesungen diesen Weg verfolgt. Er sprach dort von den Functionen A und B und er konnte in einfachster Weise aus der Gleichung

$$\mathrm{A} - \mathrm{B}x = 0$$

die andere Gleichung

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{1-x^2 \cdot 1-k^2x^2}$$

entwickeln; und diese neue Methode hängt in keiner Beziehung von der alten ab, obwohl diese geschichtlich jener vorausgegangen war.

Für die Theorie der ultra-elliptischen Integrale**) und

*) Dem Beispiele *Jacobi*'s folgend unterscheide ich zwischen den Integralen der drei Gattungen und den elliptischen Functionen $\sin \mathrm{am}\, u$, $\cos \mathrm{am}\, u$, $\Delta \mathrm{am}\, u$ und wegen ihrer Periodicität belege ich die letzteren vorzugsweise mit dem Namen Functionen: dieselbe Unterscheidung mache ich bei den *Abel*'schen Functionen und Integralen.

**) Da das umfassende *Abel*'sche Theorem alle Integrale algebraischer Functionen einer Variablen beherrscht, und da es, nach den Bemerkungen von *Jacobi*, selbst auf vielfache Integrale algebraischer Functionen allgemeinster Form mit beliebig vielen beinahe auch für die Theorie der allgemeinen *Abel*'schen Integrale ist der Stand [363] der Dinge gegenwärtig derselbe wie damals für die elliptischen Integrale, als *Abel* und *Jacobi* ihre berühmten Entdeckungen machten. Für die erste Klasse ultra-elliptischer Integrale, auf welche ich mich hier beschränke, muss das Umkehrungsproblem nach den von *Jacobi* gemachten Vorschlägen folgendermaassen ausgesprochen werden:

»Sei X eine rationale ganze Function 6. oder 5. Grades von x, Y desgl. von y; sei ferner

$$(1) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Pi(x) \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \Pi_1(x)$$

$$(2) \text{ und } \Pi(x) + \Pi(y) = u, \qquad \Pi_1(x) + \Pi_1(y) = u_1,$$

so wird verlangt, die drei Coefficienten L, M, N der quadratischen Gleichung

$$(3) \qquad \mathrm{L} + \mathrm{M}t + \mathrm{N}t^2 = 0,$$

deren zwei Wurzeln x und y sind, als Function von u und u_1 zu finden«.

Ohne Frage wird man zur directen Auflösung der so gestellten Aufgabe von den Gleichungen (2) ausgehen müssen, welche die Argumente u und u_1 als Function der Grenzen x und y der Integrale $\Pi(x)$, $\Pi_1(x)$, $\Pi(y)$, $\Pi_1(y)$ geben.

Dieser Weg würde dem analog sein, welcher *Jacobi* und *Abel* zu ihren Entdeckungen über die elliptischen Functionen geführt hat; aber es ist äusserst schwer, hier Methoden anzuwenden denen ähnlich, welchen jene Mathematiker gefolgt sind, da man in dem allgemeinen Fall, von dem wir reden, an Stelle einer Gleichung mit einer Veränderlichen immer zwei simultane Gleichungen zwischen zwei Variablen zu betrachten hat, deren Coefficienten nicht mehr so einfache Functionen der Wurzeln sind, wie die Coefficienten einer Gleichung mit einer Variablen es von dieser sind. Nur in einem speciellen, aber sehr bemerkenswerthen Falle konnte ich dies Problem direct lösen,

---

Variablen ausgedehnt werden kann, so halte ich es für angemessen, den von *Legendre* vorgeschlagenen Namen der ultra-elliptischen Integrale für die Integrale der algebraischen Functionen von x beizubehalten, welche von dieser Variabeln nur durch eine quadratische Gleichung abhängen, und den Namen der *Abel*'schen Integrale für die Integrale von beliebigen algebraischen Functionen zu behalten.

nämlich dann, wenn irgend zwei der Factoren [**364**] des Polynoms X einander gleich sind; dann reduciren sich die Integrale $\Pi(x)$ und $\Pi_1(x)$ auf elliptische Integrale 3. Gattung und die drei Grössen L, M, N drücken sich mit Hülfe bekannter Formeln der elliptischen Functionen ohne Schwierigkeit in u und u_1 aus, von denen x und y dreifach periodische Functionen werden.

Ich habe es daher vorgezogen, die Sache von der entgegengesetzten Seite anzufassen, d. h. von der quadratischen Gleichung (3) zu den Gleichungen (2) überzugehen. Damit dies möglich war, musste man die Form der Coefficienten L, M, N der Gleichung (3) errathen können, und dies ist mir durch Verallgemeinerung der Reihen gelungen, in welche sich die Zähler und der gemeinsame Nenner der drei elliptischen Functionen $\sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$ entwickeln lassen, und indem ich mich durch die Form der dreifach periodischen Functionen leiten liess, die ich bereits gefunden hatte. Diese Reihe ist von der Form

$$(4)\qquad \Sigma e^{am^2+bm+c} = e^c\,\Sigma e^{am^2+bm},$$

wo e die Basis der *Neper*'schen Logarithmen ist, a, b, c beliebige Grössen und das Summenzeichen Σ ausgedehnt werden soll über alle ganzen Zahlen für m. Man erhält in der That durch die Reihe (4) in der Bezeichnung der Fundamenta nova *Jacobi*'s die Ausdrücke, deren Quotienten den Functionen $\sqrt{k}\sin\operatorname{am}(u,k)$, $\sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\operatorname{am}(u,k)$, $\frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\operatorname{am}(u,k)$ gleich sind, wenn man setzt $-\frac{\pi K'}{K} = \log q$ für a, $\alpha u + \beta$ für b, und wenn man die Constanten α, β, c passend bestimmt.

Denn setzt man $c = 0$, $\alpha = \frac{i\pi}{K}$, $\beta = i\pi$, so nimmt jene Reihe die Form des gemeinsamen Nenners an:

$$\theta(u) = \Sigma(-1)^m q^{m^2} e^{m\frac{i\pi u}{K}} = 1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - \dots$$

Ebenso muss man, um den Zähler von $\frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\operatorname{am}(u,k)$:

$$\theta(u+K) = \Sigma q^{m^2} e^{2m\frac{i\pi u}{2K}} = 1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} + \dots$$

[**365**] zu erhalten, $c = 0$, $\alpha = \frac{i\pi}{K}$, $\beta = 0$ annehmen. Setzt man ferner

$$c = \tfrac{1}{4}\log q + \frac{i\pi u}{2K} - \frac{i\pi}{2}, \quad -\alpha = \frac{i\pi}{K}, \quad \beta = \log q + i\pi,$$

so wird besagte Reihe der Zähler von $\sqrt{k}\sin\mathrm{am}(u, k)$:

$$\mathrm{H}(u) = -i\Sigma^{(-1)^m} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{\frac{(2m+1)}{2}\frac{i\pi u}{K}}$$

$$= 2q^{\frac{1}{4}} \sin\frac{\pi u}{2K} - 2q^{\frac{9}{4}} \sin\frac{3\pi u}{2K} + \ldots$$

Macht man endlich

$$c = \tfrac{1}{4}\log q + \frac{i\pi u}{2K}, \quad \alpha = \frac{i\pi}{K}, \quad \beta = \log q,$$

so entspringt der Zähler von $\sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\mathrm{am}(u, k)$:

$$\mathrm{H}(u + K) = \Sigma q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{\frac{(2m+1)}{2}\frac{i\pi u}{K}}$$

$$= 2q^{\frac{1}{4}} \cos\frac{\pi u}{2K} + 2q^{\frac{9}{4}} \cos\frac{3\pi u}{2K} + \ldots$$

In diesen Formeln liest man ohne Mühe das Gesetz, nach welchem sie sich mit Hülfe eines Moduls q zusammensetzen aus dem Zähler und dem Nenner der einfach periodischen Function $\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$, und nach demselben Gesetze habe ich mir aus den Zählern und dem gemeinsamen Nenner der dreifach periodischen Functionen neue Reihen geschaffen, um sie an die Stelle der Zähler und des Nenners der vierfach periodischen Functionen zu setzen oder an die Stelle der Coefficienten L, M, N der quadratischen Gleichung (3).

Die neuen so gefundenen Reihen sind, wie man sehen wird, alle von derselben Form:

$$(5) \qquad \Sigma_m \Sigma_n e^{\alpha m^2 + \beta mn + \gamma n^2 + \delta m + \varepsilon n + \zeta}$$

$$= e^{\zeta} \Sigma_m \Sigma_n e^{\alpha m^2 + \beta mn + \gamma n^2 + \delta m + \varepsilon n},$$

[**366**] wo die doppelte Summation auszudehnen ist über alle ganzen Werthe von m und n, und sie unterscheiden sich von einander nur durch die Werthe der drei Grössen δ, ε, ζ,

welche lineare Ausdrücke der Argumente u und u_1 bedeuten, während die Constanten α, β, γ die Stelle von drei Moduln einnehmen. Der Quotient von irgend zwei dieser Reihen stellt sich überdies als vierfach periodische Function von u und u_1 heraus.

Noch auf eine andere Weise kann man, zur Erweiterung der Definition, von Formel (4) zu Formel (5) übergehen: nämlich indem man die Reihe (4) als Summe von Exponentialgrössen definirt, bei der jedes Glied dieselbe allgemeinste Function 2. Grades $am^2 + bm + c$ seines ganzen Index m zum Exponenten hat, und indem man diese Definition auf eine Doppelreihe von Exponentialgrössen ausdehnt.

Durch das *Abel*'sche Theorem zur Addition der Integrale geführt, und durch die Eigenschaften der dreifach periodischen Functionen geleitet, setzte ich drei Reihen von der Form (5) an Stelle von N, $\mathrm{L} + a_1 \mathrm{M} + a_1^2 \mathrm{N}$, $\mathrm{L} + a_2 \mathrm{M} + a_2^2 \mathrm{N}$, wo a_1 und a_2 irgend zwei Werthe von x bedeuten, die das Polynom X zu Null machen, und da so die quadratische Gleichung (3) bestimmt war, hatte ich das folgende Problem zu lösen:

»Sei gegeben die quadratische Gleichung

$$0 = \mathrm{L} + \mathrm{M}t + \mathrm{N}t^2 = \mathrm{N}(t - x)(t - y),$$

deren Coefficienten L, M, N Functionen von zwei Argumenten u und u_1 sind, die einen einzigen und endlichen Werth haben, für alle endlichen, reellen oder imaginären Werthe ihrer Argumente, und deren Wurzeln x und y periodische Functionen von u und u_1 sind, mit vier conjugirten Periodenpaaren, so verlangt man die partiellen Differentialquotienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du_1}{dx}$, $\frac{du_1}{dy}$ nur in x und y auszudrücken.

Ausgenommen die Zerfällung in einfache Factoren, unterwerfen sich die Reihen (5) [367] ohne Schwierigkeit durchweg ähnlichen Methoden, wie die in der Theorie der elliptischen Functionen auf die Transcendenten der Form (4) angewendeten. Ich konnte also einer Methode folgen analog der, die *Jacobi* in seinen Vorlesungen benutzt hatte, um von den Transcendenten (1) zu den elliptischen Integralen zu gelangen und ich fand auf diese Weise als Lösung der vorliegenden Frage für die Ausdrücke von $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du_1}{dx}$, $\frac{du_1}{dy}$

genau dieselben, wie die aus der Differentiation der Gleichungen (2)

$$u = \Pi(x) + \Pi(y), \qquad u_1 = \Pi_1(x) + \Pi_1(y).$$

hervorgehenden.

Capitel I.

Ueber die dreifach periodischen Functionen.

1.

Die gebrochenen Ausdrücke der dreifach periodischen Functionen, welche die Inversen der elliptischen Integrale dritter Gattung sind, fliessen, ohne die mindeste Rechnung, aus den Gleichungen, deren sich *Jacobi* in seinen Vorlesungen bediente, um von den Reihen H und θ zu den elliptischen Integralen erster Gattung überzugehen. Es wird demnach angemessen sein, hier in wenig Worten die Entwickelung jener Gleichungen zu geben, und dies um so mehr, als ihre Kenntniss die Lösung des analogen Problems über die ultra-elliptischen Integrale erster Klasse auch bedeutend erleichtert.

Zur Abkürzung der Formeln werde ich Gebrauch machen von den durch *Jacobi* in seinen Vorlesungen benutzten Zeichen und setzen

[368]

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\vartheta(v, q) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nv} = 1 - q(e^{2v} + e^{-2v}) \\
&\qquad + q^4(e^{4v} + e^{-4v}) - q^9(e^{6v} + e^{-6v}) + \ldots \\
\vartheta_1(v, q) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{(2n+1)v} = q^{\frac{1}{4}}(e^{v} - e^{-v}) \\
&\qquad - q^{\frac{9}{4}}(e^{3v} - e^{-3v}) + q^{\frac{25}{4}}(e^{5v} - e^{-5v}) + \ldots \\
\vartheta_2(v, q) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{(2n+1)v} = q^{\frac{1}{4}}(e^{v} + e^{-v}) \\
&\qquad + q^{\frac{9}{4}}(e^{3v} + e^{-3v}) + q^{\frac{25}{4}}(e^{5v} + e^{-5v}) + \ldots \\
\vartheta_3(v, q) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2} e^{2nv} = 1 + q(e^{2v} + e^{-2v}) \\
&\qquad + q^4(e^{4v} + e^{-4v}) + q^9(e^{6v} + e^{-6v}) + \ldots
\end{aligned}\right.$$

Man hat also nach diesen Formeln

$$\vartheta(v, q) = \theta\left(\frac{2Kv}{i\pi}, k\right), \text{ oder } \vartheta\left(\frac{i\pi u}{2K}, q\right) = \theta(u, k),$$

$$\vartheta_1(v, q) = i\mathrm{H}\left(\frac{2Kv}{i\pi}, k\right), \text{ oder } \vartheta_1\left(\frac{i\pi u}{2K}, q\right) = i\mathrm{H}(u, k),$$

wo $i = \sqrt{-1}$. Gelegentlich benutze ich auch die Zeichen der *Fundamenta nova*; aber zur gleichmässigeren Bezeichnung werde ich $\theta_1(u, k)$ für $\mathrm{H}(u, k)$ schreiben und setzen

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(u + K, k) = \theta_1(u + K, k) &= \theta_2(u, k), \\ \theta(u + K, k) &= \theta_3(u, k), \end{aligned}$$

sodass man hat

[369]

$$(7)\quad \begin{cases} \vartheta(v, q) = \theta\left(\dfrac{2Kv}{i\pi}, k\right), & \theta(u, k) = \vartheta\left(\dfrac{i\pi u}{2K}, q\right), \\ \vartheta_1(v, q) = i\theta_1\left(\dfrac{2Kv}{i\pi}, k\right), & i\theta_1(u, k) = \vartheta_1\left(\dfrac{i\pi u}{2K}, q\right), \\ \vartheta_2(v, q) = \theta_2\left(\dfrac{2Kv}{i\pi}, k\right), & \theta_2(u, k) = \vartheta_2\left(\dfrac{i\pi u}{2K}, q\right), \\ \vartheta_3(v, q) = \theta_3\left(\dfrac{2Kv}{i\pi}, k\right), & \theta_3(u, k) = \vartheta_3\left(\dfrac{i\pi u}{2K}, q\right), \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\theta_1(u, k)}{\theta(u, k)} = \sqrt{k} \cdot \sin\operatorname{am}(u, k), \\ \dfrac{\theta_2(u, k)}{\theta(u, k)} = \sqrt{\dfrac{k}{k'}} \cos\operatorname{am}(u, k), \\ \dfrac{\theta_3(u, k)}{\theta(u, k)} = \dfrac{1}{\sqrt{k'}} \Delta\operatorname{am}(u, k). \end{cases}$$

Die Moduln q und k werde ich jedoch nur in den Formeln hinzufügen, in denen Functionen ϑ oder θ mit verschiedenen Moduln auftreten.

2.

Sei m eine beliebige ganze positive oder negative Zahl; dann hat man

$$(9)\begin{cases} \vartheta(v+im\pi)=\vartheta(v), \quad \vartheta_2(v+im\pi)=(-1)^m\vartheta_2(v), \\ \vartheta_3(v+im\pi)=\vartheta_3(v), \quad \vartheta_1(v+im\pi)=(-1)^m\vartheta_1(v), \\ \vartheta\left(v+\frac{2m+1}{2}i\pi\right)=\vartheta_3(v), \quad \vartheta_2\left(v+\frac{2m+1}{2}i\pi\right) \\ \qquad\qquad =(-1)^{\frac{2m+1}{2}}\vartheta_1(v), \\ \vartheta_3\left(v+\frac{2m+1}{2}i\pi\right)=\vartheta(v), \quad \vartheta_1\left(v+\frac{2m+1}{2}i\pi\right) \\ \qquad\qquad =(-1)^{\frac{2m+1}{2}}\vartheta_2(v). \end{cases}$$

Die Functionen $\vartheta(v)$, $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$ sind also einfach periodisch und zwar ist der Periodenindex $i\pi$ für $\vartheta(v)$ [370] $\vartheta_3(v)$, $2i\pi$ für $\vartheta_1(v)$ und $\vartheta_2(v)$. Dasselbe hat statt für die Functionen:

$$(10)\begin{cases} e^{\frac{v^2}{\log q}}\vartheta(v)=\sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n e^{\frac{(v+n\log q)^2}{\log q}}, \\ e^{\frac{v^2}{\log q}}\vartheta_1(v)=\sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n e^{\frac{\left(v+\frac{2n+1}{2}\log q\right)^2}{\log q}}, \\ e^{\frac{v^2}{\log q}}\vartheta_3(v)=\sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{(v+n\log q)^2}{\log q}}, \\ e^{\frac{v^2}{\log q}}\vartheta_2(v)=\sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\left(v+\frac{2n+1}{2}\log q\right)^2}{\log q}}, \end{cases}$$

aber der Periodenindex ist $\log q$ für $e^{\frac{v^2}{\log q}}\vartheta_2(v)$ und $e^{\frac{v^2}{\log q}}\vartheta_3(v)$, $2\log q$ für $e^{\frac{v^2}{\log q}}\vartheta(v)$ und $e^{\frac{v^2}{\log q}}\vartheta_1(v)$, denn es ist:

$$(11)\begin{cases} e^{\frac{(v+m\log q)^2}{\log q}}\vartheta_3(v+m\log q)=e^{\frac{v^2}{\log q}}\vartheta_3(v), \\ e^{\frac{(v+m\log q)^2}{\log q}}\vartheta_2(v+m\log q)=e^{\frac{v^2}{\log q}}\vartheta_2(v), \\ e^{\frac{(v+m\log q)^2}{\log q}}\vartheta(v+m\log q)=(-1)^m e^{\frac{v^2}{\log q}}\vartheta(v), \\ e^{\frac{(v+m\log q)^2}{\log q}}\vartheta_1(v+m\log q)=(-1)^m e^{\frac{v^2}{\log q}}\vartheta_1(v). \end{cases}$$

Weiter hat man

$$
(12)\quad \begin{cases}
e^{\frac{(v+\frac{2m+1}{2}\log q)^2}{\log q}}\,\vartheta_3\left(v+\frac{2m+1}{2}\log q\right) = e^{\frac{v^2}{\log q}}\,\vartheta_2(v), \\[2ex]
e^{\frac{(v+\frac{2m+1}{2}\log q)^2}{\log q}}\,\vartheta_2\left(v+\frac{2m+1}{2}\log q\right) = e^{\frac{v^2}{\log q}}\,\vartheta_3(v), \\[2ex]
e^{\frac{(v+\frac{2m+1}{2}\log q)^2}{\log q}}\,\vartheta\left(v+\frac{2m+1}{2}\log q\right) \\
\qquad\qquad = (-1)^m\, e^{\frac{v^2}{\log q}}\,\vartheta_1(v), \\[2ex]
e^{\frac{(v+\frac{2m+1}{2}\log q)^2}{\log q}}\,\vartheta_1\left(v+\frac{2m+1}{2}\log q\right) \\
\qquad\qquad = (-1)^{m+1}\, e^{\frac{v^2}{\log q}}\,\vartheta(v).
\end{cases}
$$

3.

Aus der Form (10) der Functionen $\vartheta_r(v)$ entwickelt *Jacobi* die merkwürdigen Formeln, um die es sich handelt, mittels des sehr einfachen algebraischen Satzes*), dass die Gleichungen:

$$
(13)\quad \begin{cases}
2v_1 = v + v' + v'' + v''', \\
2v_1' = v + v' - v'' - v''', \\
2v_1'' = v - v' + v'' - v''', \\
2v_1''' = v - v' - v'' + v''',
\end{cases}
$$

geben

$$
(14)\quad v^2 + v'^2 + v''^2 + v'''^2 = v_1^2 + v_1'^2 + v_1''^2 + v_1'''^2.
$$

Durch Multiplication der vier Functionen ϑ_3, welche die vier Argumente v, v', v'', v''' besitzen, erhält man

$$
(15)\quad \vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v')\,\vartheta_3(v'')\,\vartheta_3(v''') = e^{-\frac{v^2+v'^2+v''^2+v'''^2}{\log q}}\,\Sigma e^{\frac{P}{\log q}},
$$

*) *Jacobi* erwähnt seine Methode in einem an *Hermite* gerichteten Briefe (6. August 1845), der vor kurzem in *Crelle*'s Journal veröffentlicht ist.

[**372**] wo

$$P = (v + n \log q)^2 + (v' + n' \log q)^2 + (v'' + n'' \log q)^2 + (v''' + n''' \log q)^2.$$

und wo die Summirung über alle positiven und negativen Werthe der vier ganzen Zahlen n, n', n'', n''' auszudehnen ist.

Transformirt man nun den Ausdruck P durch die Formeln (13), so wird

$$P = (v_1 + n_1 \log q)^2 + (v_1' + n_1' \log q)^2 + (v_1'' + n_1'' \log q)^2 + (v_1''' + n_1''' \log q)^2,$$

wo

$$\begin{aligned} 2n_1 &= n + n' + n'' + n''', \\ 2n_1' &= n + n' - n'' - n''', \\ 2n_1'' &= n - n' + n'' - n''', \\ 2n_1''' &= n - n' - n'' + n''', \end{aligned}$$

und wo die Variablen v_1, v_1', v_1'', v_1''' und v, v', v'', v''' durch die Formeln (13) und (14) von einander abhängen. Man sieht also, dass das Product $\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v')\,\vartheta_3(v'')\,\vartheta_3(v''')$ sich der Form nach nicht ändert, wenn man die Grössen n_1, n_1', n_1'', n_1''', v_1, v_1', v_1'', v_1''' an Stelle von n, n', n'', n''', v, v', v'', v''' setzt. Aber nur die äussere Form des Productes erleidet keine Aenderung durch diese Substitution; denn die ganzen Zahlen $2n$, $2n'$, $2n''$, $2n'''$ sind alle vier gerade, während die Zahlen $2n_1$, $2n_1'$, $2n_1''$, $2n_1'''$ alle vier zugleich gerade oder ungerade sind, je nachdem es die Summe $n + n' + n'' + n'''$ ist, und in der transformirten Summe $\Sigma e^{\frac{P}{\log q}}$ kann man für $2n_1$, $2n_1'$, $2n_1''$, $2n_1'''$ nicht nach Belieben vier gerade oder vier ungerade Zahlen setzen, sondern nur solche, welche die vier Zahlen

$$\begin{aligned} 2n &= n_1 + n_1' + n_1'' + n_1''', \\ 2n' &= n_1 + n_1' - n_1'' - n_1''', \\ 2n'' &= n_1 - n_1' + n_1'' - n_1''', \\ 2n''' &= n_1 - n_1' - n_1'' + n_1''', \end{aligned}$$

zu geraden machen.

[**373**] Um dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, unterwirft *Jacobi* die Zahlen $2n$, $2n'$, $2n''$, $2n'''$ derselben Bedingung, der die Zahlen $2n_1$, $2n_1'$, $2n_1''$, $2n_1'''$ folgen, nämlich zugleich gerade oder ungerade zu sein. Wird der Sinn der Zeichen n, n', n'', n''' in dieser Weise erweitert, so erhält man den Werth des Ausdrucks

$$e^{-\frac{v^2+v'^2+v''^2+v'''^2}{\log q}} \sum e^{\frac{\mathrm{P}}{\log q}}$$

durch die Substitution von v_1, v_1', v_1'', v_1''', n_1, n_1', n_1'', n_1''' für v, v', v'', v''', n, n', n'', n'''; denn setzt man für $2n$, $2n'$, $2n''$, $2n'''$ alle möglichen Systeme von vier geraden Zahlen und dann diejenigen von vier ungeraden Zahlen, so erhält man für $2n$, $2n'$, $2n''$, $2n'''$ dieselben Werthsysteme, nur in anderer Anordnung. Bei der so erweiterten Definition der Zeichen n, n', n'', n''' ist aber das zweite Glied der Gleichung (15), nämlich

$$e^{-\frac{v^2+v'^2+v''^2+v'''^2}{\log q}} \sum e^{\frac{\mathrm{P}}{\log q}}$$

nicht gleich $\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v')\,\vartheta_3(v'')\,\vartheta_3(v''')$, sondern gleich

$$\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v')\,\vartheta_3(v'')\,\vartheta_3(v''') + \vartheta_2(v)\,\vartheta_2(v')\,\vartheta_2(v'')\,\vartheta_2(v'''),$$

wo das Glied $\vartheta_2(v)\,\vartheta_2(v')\,\vartheta_2(v'')\,\vartheta_2(v''')$ dem Theil von $\sum e^{\frac{\mathrm{P}}{\log q}}$ entspricht, in welchem $2n$, $2n'$, $2n''$, $2n'''$ ungerade Zahlen sind.

Man hat also den folgenden Satz:

»Verbindet man die Argumente v, v', v'', v''' und v_1, v_1', v_1'', v_1''' unter einander durch die Gleichungen

$$(16)\quad \begin{cases} 2v_1 = v+v'+v''+v''', & 2v = v_1+v_1'+v_1''+v_1''', \\ 2v_1' = v+v'-v''-v''', & 2v' = v_1+v_1'-v_1''-v_1''', \\ 2v_1'' = v-v'+v''-v''', & 2v'' = v_1-v_1'+v_1''-v_1''', \\ 2v_1''' = v-v'-v''+v''', & 2v''' = v_1-v_1'-v_1''+v_1''', \end{cases}$$

[374] so wird

$$(17)\quad \begin{cases} \quad\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v')\,\vartheta_3(v'')\,\vartheta_3(v''') + \vartheta_2(v)\,\vartheta_2(v')\,\vartheta_2(v'')\,\vartheta_2(v''') \\ = \vartheta_3(v_1)\,\vartheta_3(v_1')\,\vartheta_3(v_1'')\,\vartheta_3(v_1''') + \vartheta_2(v_1)\,\vartheta_2(v_1')\,\vartheta_2(v_1'')\,\vartheta_2(v_1''').\end{cases}$$

Dies ist die fundamentale Formel, aus der man mit Hülfe der Formeln (9), (11) und (12) eine Menge anderer zieht, wenn man irgendwelchen der Argumente v, v', v'', v''' die Hälften von $i\pi$ und $\log q$ hinzufügt.

Setzt man $v+\frac{i\pi}{2}$, $v'+\frac{i\pi}{2}$, $v''+\frac{i\pi}{2}$, $v'''-\frac{i\pi}{2}$ für v, v', v'', v''', so wird die Gleichung (17)

$$(18)\quad \begin{cases} \quad\vartheta(v)\,\vartheta(v')\,\vartheta(v'')\,\vartheta(v''') - \vartheta_1(v)\,\vartheta_1(v')\,\vartheta_1(v'')\,\vartheta_1(v''') \\ = \vartheta(v_1)\,\vartheta(v_1')\,\vartheta(v_1'')\,\vartheta(v_1''') - \vartheta_1(v_1)\,\vartheta_1(v_1')\,\vartheta_1(v_1'')\,\vartheta_1(v_1'''),\end{cases}$$

und setzt man in (17) und (18) v''' durch $v''' + i\pi$, so erhält man aus diesen Gleichungen die zwei folgenden:

$$(19)\begin{cases} \quad \vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v')\,\vartheta_3(v'')\,\vartheta_3(v''') - \vartheta_2(v)\,\vartheta_2(v')\,\vartheta_2(v'')\,\vartheta_2(v''') \\ = \vartheta(v_1)\,\vartheta(v_1')\,\vartheta(v_1'')\,\vartheta(v_1''') + \vartheta_1(v_1)\,\vartheta_1(v_1')\,\vartheta_1(v_1'')\,\vartheta_1(v_1'''), \end{cases}$$

$$(20)\begin{cases} \quad \vartheta(v)\,\vartheta(v')\,\vartheta(v'')\,\vartheta(v''') + \vartheta_1(v)\,\vartheta_1(v')\,\vartheta_1(v'')\,\vartheta_1(v''') \\ = \vartheta_3(v_1)\vartheta_3(v_1')\vartheta_3(v_1'')\vartheta_3(v_1''') - \vartheta_2(v_1)\vartheta_2(v_1')\vartheta_2(v_1'')\vartheta_2(v_1'''), \end{cases}$$

die man auch durch Vertauschung der Argumente v, v', v'', v''' mit v_1, v_1', v_1'', v_1''' auseinander ableiten kann.

4.

Aus diesem soeben gefundenen System von vier Formeln leitet man drei andere ab, indem man v und v' nach einander um $\frac{i\pi}{2}$, $\frac{1}{2}\log q$ und $\frac{i\pi + \log q}{2}$ vermehrt, und ein viertes, indem man in den vier Formeln eines beliebigen der letzteren $v' + \frac{1}{2}\log q$ und $v'' + \frac{1}{2}\log q$ für v' und v'' setzt. So hat man fünf Systeme **[375]** von je vier Formeln, alle von der Form der Gleichungen (13) oder vielmehr in der Form von Summen und Differenzen je zweier dieser Gleichungen, und diese kann man in eine einzige Gleichung von der Form (14) zusammenfassen. So findet man fünf Summen von vier Quadraten, deren Werthe unverändert bleiben, wenn man in ihnen für v, v', v'', v''' die Grössen v_1, v_1', v_1'', v_1''' der Gleichungen (16) setzt, und von denen jede die Stelle von vier Formeln von der Form (13) vertritt, nämlich die folgenden Summen:

$$(21)\begin{cases} 1. \begin{cases} \quad \{\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v')\,\vartheta_3(v'')\,\vartheta_3(v''')\}^2 + \{\vartheta_2(v)\,\vartheta_2(v')\,\vartheta_2(v'')\,\vartheta_2(v''')\}^2 \\ + \{\vartheta_1(v)\,\vartheta_1(v')\,\vartheta_1(v'')\,\vartheta_1(v''')\}^2 + \{\vartheta(v)\,\vartheta(v')\,\vartheta(v'')\,\vartheta(v''')\}^2 \end{cases} \\ 2. \begin{cases} \quad \{\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v')\,\vartheta(v'')\,\vartheta(v''')\}^2 + \{\vartheta_2(v)\,\vartheta_2(v')\,\vartheta_1(v'')\,\vartheta_1(v''')\}^2 \\ + \{\vartheta_1(v)\,\vartheta_1(v')\,\vartheta_2(v'')\,\vartheta_2(v''')\}^2 + \{\vartheta(v)\,\vartheta(v')\,\vartheta_3(v'')\,\vartheta_3(v''')\}^2 \end{cases} \\ 3. \begin{cases} \quad \{\vartheta_2(v)\,\vartheta_2(v')\,\vartheta_3(v'')\,\vartheta_3(v''')\}^2 + \{\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v')\,\vartheta_2(v'')\,\vartheta_2(v''')\}^2 \\ + \{\vartheta_1(v)\,\vartheta_1(v')\,\vartheta(v'')\,\vartheta(v''')\}^2 + \{\vartheta(v)\,\vartheta(v')\,\vartheta_1(v'')\,\vartheta_1(v''')\}^2 \end{cases} \\ 4. \begin{cases} \quad \{\vartheta_2(v)\,\vartheta_2(v')\,\vartheta(v'')\,\vartheta(v''')\}^2 + \{\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v')\,\vartheta_1(v'')\,\vartheta_1(v''')\}^2 \\ + \{\vartheta_1(v)\,\vartheta_1(v')\,\vartheta_3(v'')\,\vartheta_3(v''')\}^2 + \{\vartheta(v)\,\vartheta(v')\,\vartheta_2(v'')\,\vartheta_2(v''')\}^2 \end{cases} \\ 5. \begin{cases} \quad \{\vartheta_1(v)\,\vartheta(v')\,\vartheta_3(v'')\,\vartheta_2(v''')\}^2 + \{\vartheta(v)\,\vartheta_1(v')\,\vartheta_2(v'')\,\vartheta_3(v''')\}^2 \\ + \{\vartheta_3(v)\,\vartheta_2(v')\,\vartheta_1(v'')\,\vartheta(v''')\}^2 + \{\vartheta_2(v)\,\vartheta_3(v')\,\vartheta(v'')\,\vartheta_1(v''')\}^2 \end{cases} \end{cases}$$

Ich habe die vier Glieder so geordnet, dass man unter Beibehaltung dieser Reihenfolge die besagten Gleichungen der Form (13) ohne Zweideutigkeit der Vorzeichen zusammensetzen kann: d. h. dass man hat:

$$(22)\quad \begin{cases} 2\mathrm{M}\ (v_1) = \mathrm{M}(v) + \mathrm{M}'(v) + \mathrm{M}''(v) + \mathrm{M}'''(v), \\ 2\mathrm{M}'\ (v_1) = \mathrm{M}(v) + \mathrm{M}'(v) - \mathrm{M}''(v) - \mathrm{M}'''(v), \\ 2\mathrm{M}''\ (v_1) = \mathrm{M}(v) - \mathrm{M}'(v) + \mathrm{M}''(v) - \mathrm{M}'''(v), \\ 2\mathrm{M}'''\ (v_1) = \mathrm{M}(v) - \mathrm{M}'(v) - \mathrm{M}''(v) + \mathrm{M}'''(v), \end{cases}$$

wenn man mit $\mathrm{M}(v)$, $\mathrm{M}'(v)$, $\mathrm{M}''(v)$, $\mathrm{M}'''(v)$ d. i. vier Glieder irgend eines der Ausdrücke (21) ihrer Ordnung nach bezeichnet, und [376] mit $\mathrm{M}(v_1)$, $\mathrm{M}'(v_1)$, $\mathrm{M}''(v_1)$, $\mathrm{M}'''(v_1)$ die nämlichen Functionen in den v_1, v_1', v_1'', v_1''' wie $\mathrm{M}(v)$, $\mathrm{M}(v')$, $\mathrm{M}(v'')$, $\mathrm{M}(v''')$ in den v, v', v'', v'''.

5.

Wenn man das elliptische Integral dritter Gattung als Specialform des ultra-elliptischen Integrals

$$\int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{x\,(1-x)\,(1-k^2 x)\,(1-\lambda^2 x)\,(1-\mu^2 x)}},$$

dem Fall $\lambda=\mu$ entsprechend betrachtet, so kann man nach *Jacobi's* Vorgang das Umkehrungsproblem folgendermaassen aussprechen:

Gegeben die Gleichungen

$$(23)\quad \begin{cases} u = \displaystyle\int_0^{x_1} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{(1-\lambda^2 x)\sqrt{x\cdot 1-x\cdot 1-k^2 x}} \pm \int_0^{x_2} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{(1-\lambda^2 x)\sqrt{x\cdot 1-x\cdot 1-k^2 x}} \\ v = \displaystyle\int_0^{x_1} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{(1-\lambda^2 x)\sqrt{x\cdot 1-x\cdot 1-k^2 x}} \pm \int_0^{x} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{(1-\lambda^2 x)\sqrt{x\cdot 1-x\cdot 1-k^2 x}} \end{cases}$$

gesucht die Ausdrücke x_1 und x_2 in u und v.

Zur Vereinfachung der Formeln setze ich

$$2\alpha=1,\ 2\beta=-\lambda^2,\ \sqrt{x_1}=\sin\operatorname{am}(u_1,k),\ \pm\sqrt{x_2}=\sin\operatorname{am}(u_2,k),$$

so dass die erste der Gleichungen (23) die Form annimmt:

$$u = u_1 + u_2.$$

Um in der anderen die Constanten α' und β' passend zu bestimmen, bediente ich mich der Formel der *Fundamenta nova*:

$$\Pi(u, a) = k^2 \sin\mathrm{am}\, a \cos\mathrm{am}\, a\, \Delta\mathrm{am}\, a \int_0^u \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u\, du}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \cdot \sin^2 \mathrm{am}\, u}$$

$$= u\,\mathrm{Z}(a) + \tfrac{1}{2} \log \frac{\theta(u-a)}{\theta(u+a)},$$

[377] wo bekanntlich $\mathrm{Z}(a) = \dfrac{d \log \theta(a)}{d a}$; und ich setze

$$\lambda^2 = k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,(a, k) \qquad 2\alpha' = -\mathrm{Z}(a)$$
$$2\beta' = k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a\, \mathrm{Z}(a) + k^2 \sin\mathrm{am}\, a \cos\mathrm{am}\, a\, \Delta\mathrm{am}\, a,$$

so dass man hat

$$\int_0^{x_1} \frac{\alpha' + \beta' x \cdot dx}{1 - \lambda^2 x \cdot \sqrt{x \cdot 1 - x \cdot 1 - k^2 x}} = \Pi(u_1, a) - u_1\,\mathrm{Z}(a)$$
$$= \tfrac{1}{2} \log \frac{\theta(u_1 - a)}{\theta(u_1 + a)}.$$

Bei solcher Festlegung der Coefficienten $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ nehmen die Gleichungen (23) die folgende Form an

$$(24) \quad \begin{cases} u = u_1 + u_2, \\ v = \tfrac{1}{2} \log \dfrac{\theta(u_1 - a)}{\theta(u_1 + a)} + \tfrac{1}{2} \log \dfrac{\theta(u_2 - a)}{\theta(u_2 + a)}, \end{cases}$$

und die Aufgabe ist,

$$\sqrt{x_1} = \sin\mathrm{am}\, u_1, \quad \sqrt{x_2} = \sin\mathrm{am}\, u_2,$$

oder symmetrische Functionen dieser Grössen als Functionen der Argumente u und v auszudrücken.

6.

Mit Hilfe der Gleichungen (21) und (22) kann man

$$e^{2v} = \frac{\theta(u_1 - a)\, \theta(u_2 - a)}{\theta(u_1 + a)\, \theta(u_2 + a)}$$

auf drei verschiedene Weisen ausdrücken; und die Auflösung der vorgelegten Aufgabe reducirt sich auf die einer linearen Gleichung mit einer Veränderlichen. Setzt man $v''' = -v - v' - v''$, also $v_1 = 0$, $v_1' = v + v'$, $v_1'' = v + v''$, [378] $v_1''' = -(v' + v'')$, so erhält man aus den zwei ersten und der vierten der Formeln (21) nachstehende drei Doppelgleichungen:

$$
(25a)\left\{\begin{aligned}
1.\quad \vartheta(0)\,\vartheta(v+v')\,\vartheta(v+v'')\,\vartheta(v'+v'') &= \vartheta(v)\,\vartheta(v')\,\vartheta(v'')\,\vartheta(v+v'+v'')\\
&\quad+\vartheta_1(v)\,\vartheta_1(v')\,\vartheta_1(v'')\,\vartheta_1(v+v'+v'')\\
&=\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v')\,\vartheta_3(v'')\,\vartheta_3(v+v'+v'')\\
&\quad-\vartheta_2(v)\,\vartheta_2(v')\,\vartheta_2(v'')\,\vartheta_2(v+v'+v'')\\
2.\quad \vartheta_3(0)\,\vartheta_3(v+v')\,\vartheta(v+v'')\,\vartheta(v'+v'') &= \vartheta(v)\,\vartheta(v')\,\vartheta_3(v'')\,\vartheta_3(v+v'+v'')\\
&\quad-\vartheta_2(v)\,\vartheta_2(v')\,\vartheta_1(v'')\,\vartheta_1(v+v'+v'')\\
&=\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v')\,\vartheta(v'')\,\vartheta(v+v'+v'')\\
&\quad+\vartheta_1(v)\,\vartheta_1(v')\,\vartheta^2(v'')\,\vartheta_2(v+v'+v'')\\
3.\quad \vartheta_2(0)\,\vartheta_2(v+v')\,\vartheta(v+v'')\,\vartheta(v'+v'') &= \vartheta(v)\,\vartheta(v')\,\vartheta_2(v'')\,\vartheta_2(v+v'+v'')\\
&\quad-\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(v')\,\vartheta_1(v'')\,\vartheta_1(v+v'+v'')\\
&=\vartheta_2(v)\,\vartheta_2(v')\,\vartheta(v'')\,\vartheta(v+v'+v'')\\
&\quad+\vartheta_1(v)\,\vartheta_1(v')\,\vartheta_3(v'')\,\vartheta_3(v+v'+v'')
\end{aligned}\right.
$$

Macht man jetzt

$$
v = \frac{i\pi u_1}{2\,\mathrm{K}} \qquad v' = \frac{i\pi u_2}{2\,\mathrm{K}} \qquad v'' = \frac{i\pi a}{2\,\mathrm{K}},
$$

so kann man diese Gleichungen folgendermaassen schreiben:

$$
(25\,b)\left\{\begin{aligned}
1.\quad \Theta(0)\,\Theta(u)\,\Theta(u_1+a)\,\Theta(u_2+a) &= \Theta(u_1)\,\Theta(u_2)\,\Theta(a)\,\Theta(u+a)\\
&\quad+\Theta_1(u_1)\,\Theta_1(u_2)\,\Theta_1(a)\,\Theta_1(u+a)\\
&=\Theta_3(u_1)\,\Theta_3(u_2)\,\Theta_3(a)\,\Theta_3(u+a)\\
&\quad-\Theta_2(u_1)\,\Theta_2(u_2)\,\Theta_2(a)\,\Theta_2(u+a),\\
2.\quad \Theta_3(0)\,\Theta_3(u)\,\Theta(u_1+a)\,\Theta(u_2+a) &= \Theta(u_1)\,\Theta(u_2)\,\Theta_3(a)\,\Theta_3(u+a)\\
&\quad+\Theta_2(u_1)\,\Theta_2(u_2)\,\Theta_1(a)\,\Theta_1(u+a)\\
&=\Theta_3(u_1)\,\Theta_3(u_2)\,\Theta(a)\,\Theta(u+a)\\
&\quad-\Theta_1(u_1)\,\Theta_1(u_2)\,\Theta_2(a)\,\Theta_2(u+a),\\
3.\quad \Theta_2(0)\,\Theta_2(u)\,\Theta(u_1+a)\,\Theta(u+a) &= \Theta(u_1)\,\Theta(u_2)\,\Theta_2(a)\,\Theta_2(u+a)\\
&\quad+\Theta_3(u_1)\,\Theta_3(u_2)\,\Theta_1(a)\,\Theta_1(u+a)\\
&=\Theta_2(u_1)\,\Theta_2(u_2)\,\Theta(a)\,\Theta(u+a)\\
&\quad-\Theta_1(u_1)\,\Theta_1(u_2)\,\Theta_3(a)\,\Theta_3(u+a);
\end{aligned}\right.
$$

und wenn man jede dieser letzteren durch diejenige dividirt, welche herauskommt, indem man $-a$ an Stelle von $+a$ setzt, so findet man für e^{2v} folgende drei Ausdrücke:

$$
(26)\quad\begin{cases}
e^{2v} = \dfrac{\theta(u_1)\,\theta(u_2)\,\theta(a)\,\theta(u-a) - \theta_1(u_1)\,\theta_1(u_2)\,\theta_1(a)\,\theta_1(u-a)}{\theta(u_1)\,\theta(u_2)\,\theta(a)\,\theta(u+a) + \theta_1(u_1)\,\theta_1(u_2)\,\theta_1(a)\,\theta_1(u+a)}, \\[2ex]
e^{2v} = \dfrac{\theta(u_1)\,\theta(u_2)\,\theta_3(a)\,\theta_3(u-a) - \theta_2(u_1)\,\theta_2(u_2)\,\theta_1(a)\,\theta_1(u-a)}{\theta(u_1)\,\theta(u_2)\,\theta_3(a)\,\theta_3(u+a) + \theta_2(u_1)\,\theta_2(u_2)\,\theta_1(a)\,\theta_1(u+a)}, \\[2ex]
e^{2v} = \dfrac{\theta(u_1)\,\theta(u_2)\,\theta_2(a)\,\theta_2(u-a) - \theta_3(u_1)\,\theta_3(u_2)\,\theta_1(a)\,\theta_1(u-a)}{\theta(u_1)\,\theta(u_2)\,\theta_2(a)\,\theta_2(u+a) + \theta_3(u_1)\,\theta_3(u_2)\,\theta_1(a)\,\theta_1(u+a)}.
\end{cases}
$$

Aus diesen Gleichungen endlich gewinnt man die gesuchten Ausdrücke in u und v für

$$
\frac{\theta_1(u_1)\,\theta_1(u_2)}{\theta(u_1)\,\theta(u_2)} = k \sin\operatorname{am} u_1 \sin\operatorname{am} u_2 = \pm k\sqrt{x_1 x_2}\,, \qquad [379]
$$

$$
\frac{\theta_3(u_1)\,\theta_2(u_2)}{\theta(u_1)\,\theta(u_2)} = \frac{k}{k'}\cos\operatorname{am} u_1 \cos\operatorname{am} u_2 = \frac{k}{k'}\sqrt{1-x_1\cdot 1-x_2}\,,
$$

$$
\frac{\theta_3(u_1)\,\theta_3(u_2)}{\theta(u_1)\,\theta(u_2)} = \frac{1}{k'}\,\Delta\operatorname{am} u_1\,\Delta\operatorname{am} u_2 = \frac{1}{k'}\sqrt{1-k^2x_1\cdot 1-k^2x}\,,
$$

nämlich

$$
(27)\quad\begin{cases}
\pm k\sqrt{x_1x_2} = \dfrac{\theta(a)}{\theta_1(a)}\,\dfrac{e^{-v}\theta(u-a) - e^{v}\theta(u+a)}{e^{-v}\theta_1(u-a) + e^{v}\theta_1(u+a)} \\[2ex]
\dfrac{k}{k'}\sqrt{1-x_1\cdot 1-x_2} = \dfrac{\theta_3(a)}{\theta_1(a)}\,\dfrac{e^{-v}\theta_2(u-a) - e^{v}\theta_2(u+a)}{e^{-v}\theta_1(u-a) + e^{v}\theta_1(u+a)} \\[2ex]
\dfrac{1}{k'}\sqrt{1-k^2x_1\cdot 1-k^2x_2} = \dfrac{\theta_2(a)}{\theta_1(a)}\,\dfrac{e^{-v}\theta_3(u-a) - e^{v}\theta_3(u+a)}{e^{-v}\theta_1(u-a) + e^{v}\theta_1(u+a)}.
\end{cases}
$$

Zur Auswerthung von $\sqrt{1-\lambda^2x_1\cdot 1-\lambda^2x_2}$ kann man sich der bekannten Gleichung bedienen

$$
1-\lambda^2x_1 = 1-k^2\sin^2\operatorname{am} a\,\sin^2\operatorname{am} u_1 = 1-\frac{\theta_1^{\,2}(a)\,\theta_1^{\,2}(u_1)}{\theta^2(a)\,\theta^2(u_1)}
$$

$$
= \frac{\theta^2(0)\,\theta(u_1+a)\,\theta(u_1-a)}{\theta^2(a)\,\theta^2(u_1)}\,,
$$

welche giebt

$$
\sqrt{1-\lambda^2x_1\cdot 1-\lambda^2x_2} = \frac{\theta^2(0)\sqrt{\theta(u_1+a)\,\theta(u_2+a)\,\theta(u_1-a)\,\theta(u_2-a)}}{\theta^2(a)\,\theta(u_1)\,\theta(u_2)}
$$

$$
= e^{v}\,\frac{\theta^2(0)\,\theta(u_1+a)\,\theta(u_2+a)}{\theta^2(a)\,\theta(u_1)\,\theta(u_2)}.
$$

Nun hat man aber aus der ersten der Formeln (25b)

$$\frac{\vartheta(0)\,\vartheta(u)\,\vartheta(u_1+a)\,\vartheta(u_2+a)}{\vartheta(a)\,\vartheta(u_1)\,\vartheta(u_2)} = \vartheta(u+a) + \frac{\vartheta_1(a)\,\vartheta_1(u_1)\,\vartheta_1(u_2)\,\vartheta_1(u+a)}{\vartheta(a)\,\vartheta(u_1)\,\vartheta(u_2)};$$

und hieraus mit Hülfe der ersten der Gleichungen (27)

$$\frac{\vartheta(0)\,\vartheta(u)\,\vartheta(u_1+a)\,\vartheta(u_2+a)}{\vartheta(a)\,\vartheta(u_1)\,\vartheta(u_2)} = \frac{\vartheta(u+a)\,\vartheta_1(u-a)+\vartheta(u-a)\,\vartheta_1(u+a)}{e^{-v}\,\vartheta_1(u-a)+e^{v}\,\vartheta_1(u+a)}\,e^{-v};$$

aus dem Ausdruck (21.5) zieht man endlich für $v=v'$, $v''=v'''$

$$\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\{\vartheta(u-a)\,\vartheta_1(u+a)+\vartheta(u+a)\,\vartheta_1(u-a)\} = 2\,\vartheta_2(a)\,\vartheta_3(a)\,\vartheta(u)\,\vartheta_1(u)$$

[380] und man erhält:

$$(28)\quad \sqrt{(1-\lambda^2 x_1)(1-\lambda^2 x_2)} = \frac{\vartheta(0)\,\vartheta_2(a)\,\vartheta_3(a)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta(a)}\cdot\frac{2\,\vartheta_1(u)}{e^{-v}\,\vartheta_1(u-a)+e^{v}\,\vartheta_1(u+a)}.$$

Wir haben also vier symmetrische Functionen von x_1 und x_2 von der Form $(1-bx_1)(1-bx_2)$ ausgedrückt in u und v. Aus drei beliebigen dieser Functionen, die wir mit $(1-bx_1)(1-bx_2)$, $(1-b_1x_1)(1-b_1x_2)$, $(1-b_2x_1)(1-b_2x_2)$ bezeichnen und von denen man eine durch $b_2=0$ auf die Einheit reduciren kann, entwickelt man leicht die quadratische Gleichung, deren Wurzeln x_1 und x_2 sind. Mit Hülfe der *Lagrange*'schen Interpolationsformel oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch Partialbruchzerlegung von

$$\frac{(Z-x_1)(Z-x_2)}{(1-bZ)(1-b_1Z)(1-b_2Z)},$$

erhält man diese Gleichung unter der folgenden Form:

$$0 = \frac{(1-bx_1)(1-bx_2)}{(b-b_1)(b-b_2)}\,\frac{1}{1-bZ} + \frac{(1-b_1x_1)(1-b_1x_2)}{(b_1-b_2)(b_1-b)}\,\frac{1}{1-b_1Z}$$
$$+\frac{(1-b_2x_1)(1-b_2x_2)}{(b_2-b)(b_2-b_1)}\,\frac{1}{1-b_2Z} = \frac{(Z-x_1)(Z-x_2)}{(1-bZ)(1-b_1Z)(1-b_2Z)}.$$

Damit die zwei unter einander gleichen Ausdrücke verschwinden, muss Z eine der Grössen x_1 und x_2 vorstellen; übrigens kann, wenn Z eine beliebige Grösse ist, dieselbe Identität dazu dienen, um eine Beziehung daraus zu folgern, welche zwischen drei Grössen von der Form $1-bx_1 \cdot 1-bx_2$ besteht. Man braucht dazu nur den Coefficienten von Z^{-1} der Entwickelung dieser Gleichung nach fallenden Potenzen von Z zu nehmen.

7.

Da die soeben gefundenen Functionen von u und v nur ein Specialfall der Functionen mit vier Perioden, der Umkehrungen der ultra-elliptischen Integrale erster Gattung sind, so will ich mich dabei nicht lange aufhalten; nur will ich noch [**381**] zeigen, dass sie in der That eine dreifache Periodicität mit conjugirten Periodenindices besitzen.

Die Gleichungen (27) und (28) zeigen, dass die Ausdrücke von $x_1 x_2$, $1-x_1 \cdot 1-x_2$, $1-k^2 x_1 \cdot 1-k^2 x_2$, und $1-\lambda^2 x_1 \cdot 1-\lambda^2 x_2$ in u und v ihren Werth nicht verändern, wenn man

$$u \text{ um } 2\mathrm{K} \text{ und } v \text{ um } 0,$$

$$u \text{ um } 2i\mathrm{K}' \text{ und } v \text{ um } \frac{i\pi a}{\mathrm{K}},$$

$$u \text{ um } 0 \text{ und } v \text{ um } i\pi$$

vermehrt.

Die Grenzen x_1 und x_2 der beiden durch die Gleichungen (23) verbundenen elliptischen Integrale mit den beiden Argumenten u und v sind also wirklich dreifach periodische Functionen dieser Argumente und zwar ist ihre Periodicität so, dass zu den drei Indices $2\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}'$, 0 von u in derselben Ordnung die drei Indices 0, $\frac{i\pi a}{\mathrm{K}}$, $i\pi$ von v conjugirt sind.

Nach den Untersuchungen von *Jacobi* über die Periodicität der inversen Functionen der ultra-elliptischen Integrale müssen die Indices von u und v den Werthen entsprechen, welche die bestimmten Integrale

$$2\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{x \cdot 1-x \cdot 1-k^2 x \cdot 1-\lambda^2 x \cdot 1-\mu^2 x}},$$

$$2\int \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{\sqrt{x \cdot 1-x \cdot 1-k^2 x \cdot 1-\lambda^2 x \cdot 1-\mu^2 x}},$$

genommen zwischen den Grenzen $-\infty$ und 0; 0 und 1; 1 und $\frac{1}{k^2}$; $\frac{1}{k^2}$ und $\frac{1}{\lambda^2}$; $\frac{1}{\lambda^2}$ und $\frac{1}{\mu^2}$; $\frac{1}{\mu^2}$ und ∞ annehmen, wenn $\mu = \lambda$ wird.

Sei $x \cdot 1 - x \cdot 1 - k^2 x \cdot 1 - \lambda^2 x \cdot 1 - \mu^2 x = (x, k, \lambda, \mu)$, so hat *Jacobi* gezeigt, dass

$$
29)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{(\mathrm{A} + \mathrm{B}x)\,dx}{V(x, k, \lambda, \mu)} - \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{(\mathrm{A} + \mathrm{B}x)\,dx}{V(x, k, \lambda, \mu)} + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} \frac{(\mathrm{A} + \mathrm{B}x)\,dx}{V(x, k, \lambda, \mu)} = 0, \\
&\int_{-\infty}^0 \frac{(\mathrm{A} + \mathrm{B}x)\,dx}{V(x, k, \lambda, \mu)} - \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{(\mathrm{A} + \mathrm{B}x)\,dx}{V(x, k, \lambda, \mu)} + \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{(\mathrm{A} + \mathrm{B}x)\,dx}{V(x, k, \lambda, \mu)} = 0;
\end{aligned}
\right.
$$

[382] wo in der ersten Gleichung $V(x, k, \lambda, \mu)$ und in der zweiten $V-(x, k, \lambda, \mu)$ positiv bleiben muss für alle Werthe von x zwischen den Integrationsgrenzen.

Man wird also in diesen Gleichungen setzen müssen

$$
30)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\text{wenn } x < \frac{1}{\lambda^2} \lim(\lambda = \mu)\{V(x,k,\lambda,\mu)\} = (1-\lambda^2 x)\sqrt{x \cdot 1 - x \cdot 1 - k^2 x} \\
&\text{wenn } x > \frac{1}{\lambda^2} \lim(\lambda = \mu)\{V(x,k,\lambda,\mu)\} = (1-\lambda^2 x)\sqrt{x \cdot 1 - x \cdot 1 - k^2 x}
\end{aligned}
\right.
$$

indem man mit $\lim(\lambda = \mu)\{f(\lambda, \mu)\}$ die Grenze bezeichnet, gegen welche die Function $f(\lambda, \mu)$ convergirt, wenn λ und μ gegen eine gegebene Grenze convergiren.

Nach dieser Festsetzung lässt die erste der Gleichungen (29) erkennen, dass man nur einen einzigen reellen Index für jedes der Argumente u und v hat, der aus dem Integral

$$\int_0^1 \frac{(A+Bx)\,dx}{1-\lambda^2 x\cdot\sqrt{x\cdot 1-x\cdot 1-k^2x}} = \lim(\lambda=\mu)\left\{\int_0^1 \frac{(A+Bx)\,dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}}\right\}$$

hervorgeht, wenn man in ihm nach einander $\alpha+\beta x$ und $\alpha'+\beta' x$ an Stelle von $A+Bx$ setzt. Die Grenze, gegen welche jedes der beiden anderen Integrale der Gleichung (29, 1) convergirt, wenn $\lambda-\mu$ gegen 0 convergirt, ist Unendlich; dennoch hat ihre Differenz einen endlichen Grenzwerth, nämlich das Integral $\int_0^1 \frac{(A+Bx)\,dx}{1-\lambda^2x\cdot\sqrt{x\cdot 1-x\cdot 1-k^2x}}$; und wenn $A=2\alpha=1$, $B=2\beta=-\lambda^2$, so erhält man die bekannte Beziehung

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\cdot 1-x\cdot 1-k^2x}} = \int_{\frac{1}{k^2}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x\cdot 1-x\cdot 1-k^2x}},$$

unter Beobachtung der zweiten der Formeln (30).

[**383**] Die in der Formel (29, 2) enthaltenen Integrale convergiren alle drei gegen endliche Grenzen, wenn $\lambda-\mu$ gegen 0 convergirt. Denn man findet durch die Substitution $x=\frac{1}{\lambda^2-y(\lambda^2-\mu^2)}$:

$$\pm\lim(\lambda=\mu)\left\{\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{(A+Bx)\,dx}{\sqrt{-(x,k,\lambda,\mu)}}\right\} = \frac{(B+A\lambda^2)\,\pi i}{\sqrt{\lambda^2\cdot 1-\lambda^2\cdot k^2-\lambda^2}},$$

wodurch die Gleichung (29, 2) die Form annimmt

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{(A+Bx)\,dx}{1-\lambda^2x\cdot\sqrt{x\cdot 1-x\cdot 1-k^2x}} - \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{(A+Bx)\,dx}{1-\lambda^2x\cdot\sqrt{x\cdot 1-x\cdot 1-k^2x}}$$
$$=\pm\frac{(B+A\lambda^2)\,i\pi}{\sqrt{\lambda^2\cdot 1-\lambda^2\cdot k^2-\lambda^2}}.$$

Für $A=\alpha$, $B=\beta$ zieht man daraus die bekannte Formel

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x\cdot 1-x\cdot 1-k^2x}} - \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{dx}{\sqrt{x\cdot 1-x\cdot 1-k^2x}} = 0,$$

und für $A = \alpha'$, $B = \beta'$ kommt:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha'+\beta'x)\,dx}{(1-\lambda^2 x)\sqrt{x\cdot 1-x\cdot 1-k^2x}} - \int_{1}^{\frac{1}{k^2}} \frac{(\alpha'+\beta'x)\,dx}{1-\lambda^2 x\cdot\sqrt{x\cdot 1-x\cdot 1-k^2x}} = \frac{i\pi}{2}$$

Nun hat man aber aus bekannten Formeln über die elliptischen Functionen

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{(\alpha'+\beta'x)\,dx}{1-\lambda^2 x\cdot\sqrt{x\cdot 1-x\cdot 1-k^2x}} = \frac{i\pi a}{2\mathrm{K}} + \frac{i\pi}{2};$$

$$\int_{1}^{\frac{1}{k^2}} \frac{(\alpha'+\beta'x)\,dx}{1-\lambda^2 x\cdot\sqrt{x\cdot 1-x\cdot 1-k^2x}} = \frac{i\pi a}{2\mathrm{K}};$$

die Periodicitätsindices der Argumente u und v drücken sich also durch bestimmte Integrale folgendermaassen aus:

[384]

$$2\mathrm{K} = 2\lim(\lambda=\mu)\left\{\int_0^1 \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}}\right\} \text{ und}$$

$$0 = 2\lim(\lambda=\mu)\left\{\int_0^1 \frac{(\alpha'+\beta'x)\,dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}}\right\};$$

$$2i\mathrm{K}' = 2\lim(\lambda=\mu)\left\{\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}}\right\} \text{ und}$$

$$\frac{i\pi a}{\mathrm{K}} = 2\lim(\lambda=\mu)\left\{\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{(\alpha'+\beta'x)\,dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}}\right\};$$

$$0 = 2\lim(\lambda=\mu)\left\{\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}}\right\} \text{ und}$$

$$i\pi = 2\lim(\lambda=\mu)\left\{\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{(\alpha'+\beta'x)\,dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}}\right\}.$$

8.

Vor Abschluss dieses Gebietes muss ich noch eine wichtige Bemerkung machen. Bezeichnet man den gemeinsamen Nenner der Ausdrücke (27) mit $t(u, v)$, so können sie auch folgendermaassen geschrieben werden:

$$
(31)\quad \begin{cases}
1.\ \pm\sqrt{k\lambda\lambda}\sqrt{x_1 x_2} = \dfrac{e^{i\pi\frac{2u+iK'}{4K}}\, t\left(u+iK', v+\dfrac{i\pi a}{2K}+\dfrac{i\pi}{2}\right)}{t(u, v)}; \\[2ex]
2.\ \sqrt{\dfrac{k\lambda\lambda}{k_1\lambda_1\lambda_1}}\sqrt{1-x_1\cdot 1-x_2} = \dfrac{i\,e^{i\pi\frac{2u+iK'}{4K}}\, t\left(u+K+iK', v+\dfrac{i\pi a}{2K}+\dfrac{i\pi}{2}\right)}{t(u, v)} \\[2ex]
3.\ \sqrt{\dfrac{\lambda\lambda}{k_1\lambda_k\lambda_k}}\sqrt{1-k^2 x_1\cdot 1-k^2 x_2} = \dfrac{t(u+K, v)}{t(u, v)},
\end{cases}
$$

wo $k_1{}^2 = 1 - k^2$, $\lambda_1{}^2 = 1 - \lambda^2$, $\lambda_k{}^2 = k^2 - \lambda^2$; und man sieht, dass die Zähler der drei Ausdrücke aus dem gemeinsamen Nenner $t(u, v)$ hervorgehen, wenn man in ihm die Argumente u und v um die Hälften ihrer conjugirten Indices vermehrt, abgesehen von einem einfachen Factor. Da es aber drei Paare conjugirter Indices giebt, [385] so erhält man aus $t(u, v)$, wenn die Vermehrung der Argumente u und v auf alle möglichen Weisen ausgeführt wird, im ganzen $2^3 - 1 = 7$ neue Functionen, denn so gross ist die Zahl aller Combinationen ohne Wiederholung der verschiedenen Klassen, die man mit drei Dingen machen kann.

Dividirt man diese sieben Functionen durch $t(u, v)$, so ergeben sich ausser den drei Quotienten, welche die zwei Glieder der Gleichungen (31) bilden, noch vier weitere, welche sich indessen weniger einfach als jene durch x_1 und x_2 ausdrücken, trotzdem sie von u und v durchaus nicht complicirter abhängen. Zur Aufsuchung ihrer Werthe in x_1 und x_2 kann man sich entweder des *Abel*'schen Theorems über die Addition von Integralen bedienen, oder der oben gegebenen Formeln über die Functionen $\vartheta(u)$; man findet:

(31)

$$4.\quad \frac{\lambda}{\lambda_1\lambda_k}\,\frac{\sqrt{1-\lambda^2x_2}\cdot\sqrt{x_1\cdot 1-x_1\cdot 1-k^2x_1}\mp\sqrt{1-\lambda^2x_1}\cdot\sqrt{x_2\cdot 1-x_2\cdot 1-k^2x_2}}{x_2-x_1} = \frac{it\left(u,v+\frac{i\pi}{2}\right)}{t(u,v)},$$

$$5.\quad \frac{\sqrt{k}}{\lambda_1\lambda_k}\,\frac{\sqrt{1-\lambda^2x_1}\cdot\sqrt{x_1\cdot 1-x_2\cdot 1-k^2x_2}\mp\sqrt{1-\lambda^2x_2}\cdot\sqrt{x_2\cdot 1-x_1\cdot 1-k^2x_1}}{x_2-x_1} = \frac{ie^{i\pi\frac{2u+iK'}{4KK}}\,t\left(u+iK',v+\frac{i\pi a}{2K}\right)}{t(u,v)};$$

$$6.\quad \frac{1}{\lambda_k}\sqrt{\frac{k}{k_1}}\,\frac{\sqrt{1-\lambda^2x_2}\cdot\sqrt{1-x_2\cdot x_1\cdot 1-k^2x_1}\mp\sqrt{1-\lambda^2x_1}\cdot\sqrt{1-x_1\cdot x_2\cdot 1-k^2x_2}}{x_2-x_1} = -\frac{e^{i\pi\frac{2u+iK'}{4KK}}\,t\left(u+K+iK',v+\frac{i\pi a}{2K}\right)}{t(u,v)},$$

$$7.\quad \frac{1}{\lambda_1\sqrt{k_1}}\,\frac{\sqrt{1-\lambda^2x_2}\cdot\sqrt{1-k^2x_2\cdot x_1\cdot 1-x_1}\mp\sqrt{1-\lambda^2x_1}\cdot\sqrt{1-k^2x_1\cdot x_2\cdot 1-x_2}}{x_2-x_1} = -\frac{it\left(u+K,v+\frac{i\pi}{2K}\right)}{t(u,v)};$$

und ebenso erhält man ausser der oben gegebenen Gleichung

$$8.\quad \frac{k}{\lambda_1\lambda_k}\sqrt{1-\lambda^2x_1\cdot 1-\lambda^2x_2} = \frac{2\theta(a)\,\theta_1(u)}{\theta(o)\,t(u,v)},$$

die drei folgenden:

386]

(32)

$$9.\quad \frac{\sqrt{k}}{\lambda_1\lambda_k}\sqrt{1-\lambda^2x_1\cdot 1-\lambda^2x_2}\,\frac{\sqrt{x_1\cdot 1-x_2\cdot 1-k^2x_2}\mp\sqrt{x_2\cdot 1-x_1\cdot 1-k^2x_1}}{x_2-x_1} = -\frac{2\theta(a)\,\theta(u)}{\theta(o)\,t(u,v)},$$

$$10.\quad \frac{\sqrt{k}}{\lambda_1\lambda_k\sqrt{k_1}}\sqrt{1-\lambda^2x_1\cdot 1-\lambda^2x_2}\,\frac{\sqrt{x_1\cdot 1-k^2x_1\cdot 1-x_2}\mp\sqrt{x_2\cdot 1-k^2x_2\cdot 1-x_1}}{x_2-x_1} = -\frac{2\theta(a)\,\theta_3(u)}{\theta(o)\,t(u,v)},$$

$$11.\quad \frac{k}{\lambda_1 \lambda_k \sqrt{k_1}} \sqrt{1-\lambda^2 x_1 \cdot 1-\lambda^2 x_2}\, \frac{\sqrt{x_1 \cdot 1-x_1 \cdot 1-k^2 x_2} \mp \sqrt{x_2 \cdot 1-x_2 \cdot 1-k^2 x_1}}{x_2-x_1} = -\frac{2\theta'(a)\,\theta_2(u)}{\theta(o)\,t(u,v)}.$$

Diese elf Functionen zu drei Perioden haben, wie man sieht, eine analoge Form, wie die einfach periodischen Kreis- oder Exponentialfunctionen. Die Form der sieben ersten entspricht der der trigonometrischen Tangenten, und die der vier letzten gleicht der Form der Secanten.

Capitel II.

Neue Reihen, deren Quotienten die gesuchten Functionen zweier Variablen mit vier Perioden bilden.

1.

Die Reihe $\vartheta_3(v)$ hat die Form

$$\vartheta_3(v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2} e^{2nv} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2} (e^{2nv} + e^{-2nv});$$

sie setzt sich also zusammen nach einem klaren und einfachen Gesetz aus Functionen von der Form $e^v + e^{-v}$ und einem Modul q. Nach einem ähnlichen Gesetz habe ich Reihen zu zwei Variablen gebildet vermittelst Functionen von der Form $e^v \vartheta_r(w+A, q) \mp e^{-v} \vartheta_r(w-A, q)$, welche wir soeben als Zähler und Nenner der dreifach periodischen Functionen gefunden haben, und mit Hülfe eines dritten [387] Moduls p, indem wir darauf Acht haben, dass die Quotienten zweier beliebiger so erhaltener Reihen in Bezug auf die Argumente v und w eine vierfache Periodicität mit conjugirten Perioden-indices zeigen.

Man erkennt leicht, dass zu dem Ende diese neuen Reihen von der Form sein müssen:

$$(32)\quad 1+\sum_{m=1}^{m=\infty} p^{m^2}\{e^{2mv}\vartheta_r(w+2m\mathrm{A},q)+e^{-2mv}\vartheta_r(w-2m\mathrm{A},q)\}$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} p^{m^2}e^{2mv}\vartheta_r(w+2m\mathrm{A},q),$$

wo r ein beliebiger der vier Indices 0, 1, 2, 3 ist.

Die vier Reihen $\vartheta_r(w, q)$ sind von der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{an^2+bn+c},$$

wo $a=\log q$ und b und c lineare ganze Ausdrücke in w sind. Ebenso werden die neuen Reihen, sechzehn an Zahl, wie wir in der Folge sehen werden, alle umfasst von der analogen Form

$$(33)\qquad \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\alpha m^2+\beta n^2+\gamma mn+\delta m+\varepsilon n+\zeta},$$

wo $\alpha=\log p$, $\beta=\log q$, $\gamma=4\,\mathrm{A}$ und δ, ε, ζ lineare ganze Ausdrücke in v und w sind, wie schon weiter oben bemerkt.

2.

Ich gehe aus von der Reihe, die aus Formel (33) entsteht, wenn man dort $\zeta=0$, $\delta=2v$, $\varepsilon=2w$ setzt; oder aus (32) für $r=3$, und ich [388] bezeichne sie durch $\varphi_{3,3}(v, w, p, q, \mathrm{A})$ oder einfach durch $\varphi_{3,3}(v, w)$, wenn man nur Functionen derselben Moduln p, q, A betrachtet.

Nach dieser Festsetzung hat man

$$(34)\quad \begin{cases} 1.\ \varphi_{3.3}(v,w)=\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} p^{m^2}e^{2mv}\vartheta_3(w+2m\mathrm{A},q)\\ \qquad\qquad\ =\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2}e^{2nw}\vartheta_3(v+2n\mathrm{A},p)\\ \text{oder auch}\\ 2.\ \varphi_{3.3}(v,w)=\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{m^2\log p+n^2\log q+4mn\mathrm{A}+2mv+2nw},\\ \text{und folglich}\\ 3.\ \varphi_{3,3}(iv,iw)=1+\displaystyle\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} 2p^{m^2}q^{n^2}\{e^{4mn\mathrm{A}}\cos 2(mv+nw)\\ \qquad\qquad\qquad +e^{-4mn\mathrm{A}}\cos 2(mv-nw)\}\end{cases}$$

Damit die Reihe $\varphi_{3,3}(v, w)$ convergirt, genügt es, dass $\log p$, $\log q$ und $4A^2 - \log p \log q$ oder, wenn sie imaginär sind, dass ihre Moduln negativ sind.

In der That, da man hat

$$m^2 \log p + n^2 \log q + 4mnA = \frac{(m \log p + 2nA)^2}{\log p} + \frac{n^2 (\log p \log q - 4A^2)}{\log p}$$
$$= \frac{(n \log q + 2mA)^2}{\log q} + \frac{m^2 (\log p \log q - 4A^2)}{\log q}\,,$$

folglich

$$m^2 \log p + n^2 \log q + 4mnA = \frac{(m \log p + 2nA)^2}{2 \log p} + \frac{(n \log q + 2mA)^2}{2 \log q}$$
$$+ m^2 \frac{\log p \log q - 4A^2}{2 \log q} + n^2 \frac{\log p \log q - 4A^2}{2 \log p}\,,$$

so kann man die Reihe $\varphi_{3,3}(v, w)$ aus dieser anderen

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{m^2 \frac{\log p \log q - 4A^2}{2 \log q} + 2mv} \times e^{n^2 \frac{\log p \log q - 4A^2}{2 \log p} + 2nw}$$
$$= \vartheta_3\left(v, e^{\frac{\log p \log q - 4A^2}{2 \log q}}\right) \cdot \vartheta_3\left(w, e^{\frac{\log p \log q - 4A^2}{2 \log p}}\right)$$

[389] ableiten, indem man hier das den Indices m und n entsprechende Glied multiplicirt mit der Grösse

$$e^{\frac{(m \log p + 2nA)^2}{2 \log p} + \frac{(n \log q + 2mA)^2}{2 \log q}}\,;$$

nun ist aber, wenn $\log p$, $\log q$ und $4A^2 - \log p \log q$ negativ sind, diese Grösse immer kleiner als die Einheit*) und gleichzeitig convergirt die vorstehende Reihe für alle endlichen, reellen und imaginären Werthe von v und w; folglich wird in diesem Falle die Reihe $\varphi_{3,3}(v, w)$ noch viel rascher convergiren.

Nehmen wir also an, dass die drei Grössen $\log p$, $\log q$, $4A^2 - \log p \log q$ immer negativ sind, so hat die Reihe $\varphi_{3,3}(v, w)$, wie wir soeben gesehen haben, einen einzigen endlichen Werth für alle endlichen, reellen und imaginären Werthe der beiden Argumente v und w. Ich bemerke noch, dass die Reihe sich für $A = 0$ auf das Product $\vartheta_3(v, p)\,\vartheta_3(w, q)$ reducirt.

*) Ausgenommen für $m = n = 0$, wo sie der Einheit gleich ist.

3.

Die Reihe $\varphi_{3,3}(v, w)$ ist eine doppelt periodische Function von v und w mit den conjugirten Indicespaaren $i\pi$, o und o, $i\pi$; denn man hat

(35) $$\left.\begin{aligned}\varphi_{3,3}(v + ai\pi, w) &= \varphi_{3,3}(v, w)\\ \varphi_{3,3}(v, w + ai\pi) &= \varphi_{3,3}(v, w)\end{aligned}\right\}$$

wo a eine beliebige ganze Zahl ist. Die Beziehung, welche hier zwischen den vier Periodicitätsindices statt hat, giebt dieser doppelten Periodicität keinen speciellen Charakter; denn substituirt man $v = av_1 + bw_1$, $w = cv_1 + dw_1$, so kann man die vier Constanten a, b, c, d so bestimmen, dass die vier Periodicitätsindices für die transformirte Function gegebene Grössen sind.

[390] Multiplicirt man nun die Function $\varphi_{3,3}(v, w)$ mit $e^{\frac{v^2}{\log p}}$, so zeigt das Product noch eine doppelte Periodicität, aber seine Paare conjugirter Indices werden $\log p$, $2\mathrm{A}$ und o, $i\pi$ sein; denn man erhält

(36) $$e^{\frac{v^2}{\log p}}\varphi_{3,3}(v, w) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\frac{(v + m\log p)^2}{\log p}}\,\vartheta_3(w + 2m\mathrm{A}, q)$$

und diese Function verändert sich nicht, wenn man an Stelle von v und w setzt $v + \log p$, $w + 2\mathrm{A}$, oder v, $w + i\pi$.

Ebenso sieht man, dass die Function von v und w

(37) $$e^{\frac{w^2}{\log q}}\varphi_{3,3}(v, w) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{(w + n\log q)^2}{\log q}}\,\vartheta_3(v + 2n\mathrm{A}, p)$$

doppelt periodisch ist mit den Paaren conjugirter Indices $i\pi$, o und $2\mathrm{A}$, $\log q$.

4.

Die beiden letzten Gleichungen geben

$$\varphi_{3,3}(v, w) = e^{\mathrm{M}}\varphi_{3,3}\{(v + \beta\log p + 2\gamma\mathrm{A}), (w + 2\beta\mathrm{A} + \gamma\log q)\},$$

wo

$$\mathrm{M} = \beta^2\log p + \gamma^2\log q + 4\beta\gamma\mathrm{A} + 2\beta v + 2\gamma w,$$

und β und γ beliebige ganze Zahlen bezeichnen; ich stelle mir die Aufgabe, die einfachste Function von v und w zu finden, welche multiplicirt mit $\varphi_{3,3}(v, w)$ das Product doppelt periodisch macht mit den Paaren conjugirter Indices $\log p$, $2\mathrm{A}$ und $2\mathrm{A}$, $\log q$. Bezeichnet man diesen Factor mit $e^{f(v,w)}$, so sieht man, dass $f(v, w)$ nur die Form

$$f(v, w) = a v^2 + b w^2 - 4 c v w$$

[391] haben kann, denn er muss unabhängig sein von β und γ und der Bedingung genügen:

$$\begin{aligned} f\{(v + \beta \log p + 2\gamma \mathrm{A}), (w + \gamma \log q + 2\beta \mathrm{A})\} - f(v, w) \\ = \beta^2 \log p + \gamma^2 \log q + 4\beta\gamma \mathrm{A} + 2\beta v + 2\gamma w. \end{aligned}$$

Diese Bedingung giebt zur Bestimmung von a, b, c die Gleichungen:

$$\begin{aligned} & a(\beta \log p + 2\gamma \mathrm{A}) - 2c(\gamma \log q + 2\beta \mathrm{A}) - \beta = 0, \\ & b(\gamma \log q + 2\beta \mathrm{A}) - 2c(\beta \log p + 2\gamma \mathrm{A}) - \gamma = 0, \\ & (\beta \log p + 2\gamma \mathrm{A})\{a(\beta \log p + 2\gamma \mathrm{A}) - 2c(\gamma \log q + 2\beta \mathrm{A}) - \beta\} \\ & + (\gamma \log q + 2\beta \mathrm{A})\{b(\gamma \log q + 2\beta \mathrm{A}) - 2c(\beta \log p + 2\gamma \mathrm{A}) - \gamma\} = 0, \end{aligned}$$

deren dritte aus den beiden ersten hervorgeht. Da sie unabhängig von den Werthen von β und γ erfüllt sein müssen, so erhält man aus ihnen:

$$\begin{aligned} a \log p - 4c\mathrm{A} &= 1, & b \log q - 4c\mathrm{A} &= 1, \\ a\mathrm{A} - c \log q &= 0, & b\mathrm{A} - c \log p &= 0, \end{aligned}$$

folglich:

$$a = \frac{\log q}{\log p \log q - 4\mathrm{A}^2}, \quad b = \frac{\log p}{\log p \log q - 4\mathrm{A}^2},$$

$$c = \frac{\mathrm{A}}{\log p \log q - 4\mathrm{A}^2},$$

und

$$(38) \qquad f(v, w) = \frac{v^2 \log q + w^2 \log p - 4\mathrm{A} v w}{\log p \log q - 4\mathrm{A}^2}.$$

Man erhält die Function $f(v, w)$ unter einer andern Form, wenn man direct der in der analytischen Geometrie angewandten Methode folgt, um den Coordinatenanfangspunkt von einem beliebigen Punkt der Ebene in den Mittelpunkt eines Kegelschnittes zu verlegen. Man hat dazu nur zu setzen $\beta + \mathrm{v} - \mathrm{v}$ und $\gamma + \mathrm{w} - \mathrm{w}$ für β und γ in dem Ausdrucke

$$\beta^2 \log p + \gamma^2 \log q + 4\beta\gamma \mathrm{A} + 2\beta v + 2\gamma w$$

[392] und in der Entwickelung nach Potenzen von $(\beta + \mathrm{v})$, $(\gamma + \mathrm{w})$ dann v und w so zu bestimmen, dass die mit den ersten Potenzen multiplicirten Glieder verschwinden. v und w müssen also den Gleichungen genügen

$$\mathrm{v} \log p + 2\mathrm{w}\mathrm{A} = v$$
$$\mathrm{w} \log q + 2\mathrm{v}\mathrm{A} = w,$$

woraus folgt:

$$\mathrm{v} = \frac{v \log q - 2\mathrm{A}w}{\log p \log q - 4\mathrm{A}^2}, \qquad \mathrm{w} = \frac{w \log p - 2\mathrm{A}v}{\log p \log q - 4\mathrm{A}^2},$$

und

$$\beta^2 \log p + \gamma^2 \log q + 4\beta\gamma\mathrm{A} + 2\beta v + 2\gamma w + \mathrm{v}^2 \log p + \mathrm{w}^2 \log q + 4\mathrm{A}\mathrm{v}\mathrm{w}$$
$$= (\beta + \mathrm{v})^2 \log p + (\gamma + \mathrm{w})^2 \log q + 4\mathrm{A}(\beta + \mathrm{v})(\gamma + \mathrm{w});$$

denn man hat

$$v\mathrm{v} + w\mathrm{w} = \mathrm{v}^2 \log p + \mathrm{w}^2 \log q + 4\mathrm{A}\mathrm{v}\mathrm{w}.$$

Also hat man auch

$$\mathrm{v}v + \mathrm{w}w = \frac{v^2 \log q + w^2 \log p - 4\mathrm{A}vw}{\log p \log q - 4\mathrm{A}^2};$$

setzt man also

$$\mathrm{F}(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = \mathrm{v}^2 \log p + \mathrm{w}^2 \log q + 4\mathrm{A}\mathrm{v}\mathrm{w},$$

so hat man

$$v\mathrm{v} + w\mathrm{w} = f(v, w) = \mathrm{F}(\mathrm{v}, \mathrm{w}),$$

und

$$\beta^2 \log p + \gamma^2 \log q + 4\beta\gamma\mathrm{A} + 2\beta v + 2\gamma w = \mathrm{F}(\mathrm{v} + \beta, \mathrm{w} + \gamma) - \mathrm{F}(\mathrm{v}, \mathrm{w})$$
$$= f\{(v + \beta \log p + 2\gamma\mathrm{A}), (w + 2\beta\mathrm{A} + \gamma \log q)\} - f(v, w);$$

daraus folgt:

(39) $$e^{f(v,w)} \varphi_{3,3}(v, w) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{f\{(v + m \log p + 2n\mathrm{A}),\, (w + n \log q + 2m\mathrm{A})\}}$$

(40) $$= e^{\mathrm{F}(\mathrm{v},\mathrm{w})} \varphi_{3,3}(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\mathrm{F}(\mathrm{v}+m,\, \mathrm{w}+n)}$$

[393] wo

$$(41)\quad \begin{cases} \mathrm{v}\log p + 2\,\mathrm{A}\,\mathrm{w} = v\,, \\ \mathrm{w}\log q + 2\,\mathrm{A}\,\mathrm{v} = w\,, \end{cases} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{v\log q - 2\,\mathrm{A}\,w}{\log p\,\log q - 4\,\mathrm{A}^2} &= \mathrm{v} \\ \frac{w\log p - 2\,\mathrm{A}\,v}{\log p\,\log q - 4\,\mathrm{A}^2} &= \mathrm{w} \end{aligned}\right\}\quad (42)$$

und

$$(43)\qquad f(v,w) = \frac{v^2\log q + w^2\log p - 4\,\mathrm{A}\,v\,w}{\log p\,\log q - 4\,\mathrm{A}^2}$$

$$= \mathrm{F}(\mathrm{v},\mathrm{w}) = \mathrm{v}^2\log p + \mathrm{w}^2\log q + 4\,\mathrm{A}\,\mathrm{v}\,\mathrm{w}\,.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass $e^{f(v,w)}\,\varphi_{3,3}(v,w)$ eine doppelt periodische Function von v und w ist mit den Paaren conjugirter Indices $\log p$, $2\,\mathrm{A}$ und $2\,\mathrm{A}$, $\log q$; in v und w ausgedrückt werden die Paare conjugirter Indices 1,0 und 0,1.

Drücken wir noch $e^{f(v,w)}\,\varphi_{3,3}(v,w)$ in v und w und in w und v aus; man hat nach den Formeln (41) und (42):

$$f(v,w) = \mathrm{F}(\mathrm{v},\mathrm{w}) = \frac{v^2}{\log p} + \frac{\log p\,\log q - 4\,\mathrm{A}^2}{\log p}\,\mathrm{w}^2 = \mathrm{M}(v,\mathrm{w})$$

$$= \frac{w^2}{\log q} + \frac{\log p\log q - 4\mathrm{A}^2}{\log q}\,\mathrm{v}^2 = \mathrm{N}(w,\mathrm{v})\,,$$

folglich

$$(44)\quad e^{\frac{v^2}{\log p} + \frac{\log p\,\log q - 4\,\mathrm{A}^2}{\log p}\mathrm{w}^2}\,\varphi_{3,3}(v,w)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\log p\,\log q - 4\,\mathrm{A}^2}{\log p}(\mathrm{w}+n)^2}\; e^{\frac{(v+2\,n\,\mathrm{A})^2}{\log p}}\,\vartheta_3(v+2\,n\mathrm{A},p)\,,$$

$$(45)\quad e^{\frac{w^2}{\log q} + \frac{\log p\,\log q - 4\,\mathrm{A}^2}{\log p}\mathrm{v}^2}\,\varphi_{3,3}(v,w)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\frac{\log p\,\log q - 4\,\mathrm{A}^2}{\log q}(\mathrm{v}+m)^2}\; e^{\frac{(w+2\,m\,\mathrm{A})^2}{\log p}}\,\vartheta_3(w+2\,m\mathrm{A},q)\,;$$

worin

$$e^{\frac{(v+2\,n\,\mathrm{A})^2}{\log p}}\,\vartheta_3\{v+2\,n\,\mathrm{A},p\} \text{ und } e^{\frac{(w+2\,m\,\mathrm{A})^2}{\log q}}\,\vartheta_3\{w+2\,m\,\mathrm{A},q\}\,,$$

[394] für ihre Werthe

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\frac{\{v+2n\mathrm{A}+m\log p\}^2}{\log p}} \quad \text{und} \quad \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\{w+2m\mathrm{A}+n\log q\}^2}{\log q}}$$

gesetzt sind. Man sieht also aus diesen Gleichungen, dass die doppelt periodische Function $e^{f(v,w)}\varphi_{3,3}(v,w)$ ausgedrückt in v und w die Paare conjugirter Indices $\log p$, o und $2\,\mathrm{A}$, 1 hat; dass aber die Paare conjugirter Indices $\log q$, o und $2\,\mathrm{A}$, 1 werden, wenn man sie als Function der Argumente w und v betrachtet.

5.

Man kann sich der beiden letzten Formen von $e^{f(v,w)}\varphi_{3,3}(v,w)$ bedienen, um die Beziehungen aufzufinden, welche zwischen den Functionen $\varphi_{3,3}$ mit reellen Argumenten und denen mit Argumenten von der Form iv, w oder von der Form v, iw bestehen. Die erstere erhält man durch Entwickelung der Form (44) nach dem Cosinus und Sinus der Vielfachen des Arguments $\frac{2v\pi}{\log p}$, in Rücksicht auf welche allein dieselbe einfach periodisch ist mit dem Periodenindex 2π; und man hat ebenso die andere Beziehung zwischen den Functionen $\varphi_{3,3}$ mit reellen Argumenten und denen mit Argumenten von der Form v und iw durch Entwickelung der Form (45) von $e^{f(v,w)}\varphi_{3,3}(v,w)$ nach den Cosinus und Sinus von $\frac{2w\pi}{\log q}$. Aber eine dieser Entwickelungen genügt, da die andere durch Vertauschung der Argumente v und w und der Moduln p und q unter einander aus ihr hervorgeht.

Durch Combination dieser beiden Beziehungen leitet man die Formel zur Reduction der Functionen $\varphi_{3,3}(v,w)$ mit Argumenten von der Form iv, iw auf die mit reellen Argumenten ab und diese letztere muss dieselbe sein, wie die, welche man durch Entwickelung der Form (40) von $e^{f(v,w)}\varphi_{3,3}(v,w)$ nach den Functionen Cosinus und Sinus der Vielfachen von $2\,\mathrm{v}\pi$ und $2\,\mathrm{w}\pi$ findet.

[**395**] Man hat also nur die Entwickelung einer der beiden Formen (44) und (45) auszuführen: nehmen wir die Form (44).

Man erkennt, dass, um hier die Entwickelung nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von $\frac{2v\pi}{\log p}$ zu erhalten, man in dieser Weise nur die Function $e^{\frac{(v+2n\mathrm{A})^2}{\log p}}\,\vartheta_3(v+2n\mathrm{A},p)$ zu entwickeln hat, und dass ihre Entwickelung allein nach Potenzen der Cosinus der Vielfachen von $\frac{v+2n\mathrm{A}}{\log p}\,2\pi$ läuft.

Diese aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannte Reihe wird durch die Formel dargestellt:

$$\frac{\theta(iu+\mathrm{K},k)}{\theta(o,k)}=\sqrt{\frac{k}{k'}}\,e^{\frac{\pi u^2}{4\mathrm{KK}'}}\,\frac{\theta(u+\mathrm{K}',k')}{\theta(o,k')};$$

sie wurde von *Jacobi* in seinen *Fundamenta nova* (S. 165) entwickelt und kann mit Hülfe der Formeln

$$\theta(o,k)=\sqrt{\frac{2k'\mathrm{K}}{\pi}},\quad \theta(o,k')=\sqrt{\frac{2k\mathrm{K}'}{\pi}}$$

in die Form gebracht werden

$$\theta(iu+\mathrm{K},k)=\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}}\,e^{\frac{\pi u^2}{4\mathrm{KK}'}}\,\theta(u+\mathrm{K}',k');$$

oder nach unserer Bezeichnung

$$\theta_3(iu,k)=\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}}\,e^{\frac{\pi u^2}{4\mathrm{KK}'}}\,\theta_3(u,k'),$$

oder auch

$$e^{\frac{\pi u^2}{4\mathrm{KK}'}}\,\theta_3(u,k)=\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}}\,\theta_3(iu,k').$$

Setzt man endlich $\frac{i\pi u}{2\mathrm{K}}=v$, $\frac{i\pi u}{2\mathrm{K}'}=v'$, $\log p=-\frac{\pi\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}$, $\log p'=-\frac{\pi\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}$, so erhält man

$$(46)\qquad e^{\frac{v^2}{\log p}}\,\vartheta_3(v,p)=\sqrt{-\frac{\pi}{\log p}}\,\vartheta_3(iv',p'),$$

[396] wo

$$\log p'\cdot\log p=\pi^2,\qquad v'=\frac{\pi v}{\log p},\qquad v=\frac{\pi v'}{\log p'}.$$

Mit Hülfe dieser Formel*) (46) erhält man aus den Gleichungen (44) und (45) die beiden folgenden Sätze:

Lehrsatz I.

$$(47)\quad e^{\frac{v^2}{\log q}}\varphi_{3,3}(v,w,p,q,A) = \sqrt{-\frac{\pi}{\log p}}\,\varphi_{3,3}(iv',w',p',q',A')$$

wo

$$\log p\cdot\log p' = \pi^2 = \frac{\log p\log q - 4A^2}{\log q}\cdot\frac{\log p'\log q' - 4A'^2}{\log q'}$$

$$\log q' = \frac{\log p\log q - 4A^2}{\log p},\quad \log q = \frac{\log p'\log q' - 4A'^2}{\log p'}$$

*) In seinen Vorlesungen hat *Jacobi* die Formel (46) aus der Entwickelung der Reihe

$$e^{\frac{v^2}{\log p}}\vartheta_3(v,p) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\frac{(v+m\log p)^2}{\log p}},$$

nach den Cosinus der Vielfachen von $\frac{2\pi v}{\log p} = 2v'$ hergeleitet. Der Coefficient von $2\cos 2nv'$ ist bekanntlich gleich

$$\frac{1}{2\pi}\Sigma_m\int_{a-2\pi}^{a+2\pi} e^{\frac{\log p}{4\pi^2}(2v'+2m\pi)^2}\cos 2nv'\cdot dv',$$

wo a eine beliebige Grösse ist. Um den Werth der Summe dieser Integrale zu finden, überträgt er die Summirung auf die Grenzen, indem er in dem Gliede mit Index m, $2x$ an Stelle von $2v'+2m\pi$ setzt. So erhält er für diese Summe den Werth

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2\frac{\log p}{\pi^2}}\cos 2nx\,dx = \frac{1}{\sqrt{-\log p}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos\left\{\frac{2n\pi x}{\sqrt{-\log p}}\right\}dx$$

$$= \sqrt{-\frac{\pi}{\log p}}\,e^{\frac{n^2\pi^2}{\log p}},$$

folglich

$$e^{\frac{v^2}{\log p}}\vartheta_3(v,p) = \sqrt{-\frac{\pi}{\log p}}\left\{1+2\Sigma e^{\frac{n^2\pi^2}{\log p}}\cos 2nv'\right\}$$

$$= \sqrt{-\frac{\pi}{\log p}}\,\vartheta(iv',p').$$

$$A' = \frac{i\pi A}{\log p}, \qquad iA = \frac{\pi A}{\log p'},$$

$$\begin{cases} v' = \dfrac{\pi v}{\log p} \\ v = \dfrac{\pi v'}{\log p'} \end{cases} \qquad \begin{cases} w' = \dfrac{w \log p - 2 A v}{\log p}, \\ w = \dfrac{w' \log p' - 2 i A' v'}{\log p'}. \end{cases}$$

[397] Lehrsatz II.

$$(48) \quad e^{\frac{w^2}{\log q}} \varphi_{3,3}(v, w, p, q, A) = \sqrt{-\frac{\pi}{\log q}}\, \varphi_{3,3}(v_1, iw_1, p_1, q_1, A_1),$$

wo

$$\log q \cdot \log q_1' = \pi^2 = \frac{\log p \log q - 4A^2}{\log p} \cdot \frac{\log p_1 \log q_1 - 4A_1^2}{\log p_1},$$

$$\log p_1 = \frac{\log p \log q - 4A^2}{\log q}, \qquad \log p = \frac{\log p_1 \log q_1 - 4A_1^2}{\log q_1},$$

$$A_1 = \frac{i\pi A}{\log q}, \qquad w_1 = \frac{\pi w}{\log q}, \qquad v_1 = \frac{v \log q - 2Aw}{\log q},$$

$$iA = \frac{\pi A_1}{\log q_1}, \qquad w = \frac{\pi w_1}{\log q_1}, \qquad v = \frac{v_1 \log q_1 - 2iA_1 w_1}{\log q_1}.$$

Setzt man endlich iv', iw', p', q', A' an Stelle von v, w, p, q, A in dem zweiten Lehrsatze und combinirt ihn in dieser Form mit dem ersten, so erhält man den folgenden

Lehrsatz III.

$$(49) \quad e^{f(v, w, p, q, A)} \varphi_{3,3}(v, w, p, q, A)$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{\log p \log q - 4A^2}} \varphi_{3,3}(iv_1', iw_1', p_1', q_1', A_1').$$

wo

$$\log p \cdot \log p_1' = \log q \cdot \log q_1' = \pi^2 - 4AA_1'$$

[398] oder

$$\log p \cdot \log p_1' + 4AA_1' = \log q \cdot \log q_1' + 4AA_1' = \pi^2,$$
$$A \log p_1' + A_1' \log q = 0$$

$$(\log p \log q - 4\,A^2)(\log p_1' \log q_1' - 4\,A_1'^2) = \pi^4,$$
$$A \log q_1' + A_1' \log p = 0$$

$$\log p_1' = \frac{\pi^2 \log q}{\log p \log q - 4\,A^2}, \quad \log q_1' = \frac{\pi^2 \log p}{\log p \log q - 4\,A^2},$$
$$A_1' = -\frac{\pi^2 A}{\log p \log q - 4\,A^2},$$

$$\log p = \frac{\pi^2 \log q_1'}{\log p_1' \log q_1' - 4\,A_1'^2}, \quad \log q = \frac{\pi^2 \log p_1'}{\log p_1' \log q_1' - 4\,A_1'^2},$$
$$A = -\frac{\pi^2 A_1'}{\log p_1' \log q_1' - 4\,A_1'^2},$$

$$v_1' = \pi\,\frac{v \log q - 2\,A\,w}{\log p \log q - 4\,A^2}, \quad w_1' = \pi\,\frac{w \log p - 2\,A\,v}{\log p \log q - 4\,A^2},$$

$$v = \pi\,\frac{v_1' \log q_1' - 2\,A_1' w_1'}{\log p_1' \cdot \log q_1' - 4\,A_1'^2}, \quad w = \pi\,\frac{w_1' \log p_1' - 2\,A_1' v_1'}{\log p_1' \log q_1' - 4\,A_1'^2},$$

$$v_1' = \frac{v}{\pi} \log p_1' + 2\,A_1' \frac{w}{\pi}, \quad w_1' = \frac{w}{\pi} \log q_1' + 2\,A_1' \frac{v}{\pi},$$

$$v = \frac{v_1'}{\pi} \log p + 2\,A \frac{w_1'}{\pi}. \quad w = \frac{w_1'}{\pi} \log q + 2\,A \frac{v_1'}{\pi}.$$

Da nun $\frac{v_1'}{\pi}$, $\frac{w_1'}{\pi}$ gerade die Functionen von v und w sind, die ich oben mit v und w bezeichnet habe, so sieht man, dass der letzte Lehrsatz in der That die Entwickelung der Formel (40) nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von $2\,\mathrm{v}\pi$ und $2\,\mathrm{w}\pi$ giebt.

Die Formeln der drei vorstehenden Lehrsätze sind so angeordnet, dass sie deutlich ihre Umkehrbarkeit erkennen lassen. Man kann hier, ohne etwas zu ändern, für $\log p$, $\log q$ ihre vollständigen Werthe $\log p + 2\,\mu i \pi$, $\log q + 2\,\mu' i \pi$ setzen, ja sogar $\log p + (2\,\mu + 1)\,i\pi$, $\log q + (2\,\mu' + 1)\,i\pi$, wenn man nur zugleich $v + \frac{i\pi}{2}$, $w + \frac{\pi i}{2}$ für v und w setzt; auch $2\,A$ kann in allen den vorstehenden Formeln um $\nu i \pi$ vermehrt werden, ohne dass sie ihre Gültigkeit verlieren, wobei μ, μ', ν irgend welche ganze Zahlen bedeuten. Substituirt man also in den Formeln der drei vorstehenden Lehrsätze $\log p + \mu i \pi$, $\log q + \mu' i \pi$, $2\,A + \nu i \pi$ für

p, q, [399] $2A$, und beachtet, dass man zugleich $v + \frac{i\pi}{2}$ für v setzt, wenn μ ungerade ist, und $w + \frac{i\pi}{2}$ für w, wenn es μ' ist, so erhält man allgemeinere Theoreme, welche mehrfach wiederholt alle die verschiedenen Formen geben, die eine und dieselbe Function $\varphi_{3,3}(v, w)$ annehmen kann. Aber die Zeit mangelt mir, um dieses Gebiet weiter zu behandeln, und ich muss mich auf die gegebenen Formeln beschränken, deren man sich, wie man sehen wird, bedienen kann, um von der analytischen Transformation der Function $\varphi_{3,3}(v, w)$, welche von der Theilung des Periodenindex $i\pi$ abhängt, zu den anderen überzugehen, welche von der Theilung der anderen Indices abhängen.

6.

Die Function $\varphi_{3,3}(v, w)$ hat mit der Function $\vartheta_3(v)$ die Eigenschaft gemein, dass die Potenzen und die Producte einer beliebigen Anzahl dieser Functionen linear durch Functionen derselben Form, aber mit verschiedenen Moduln ausgedrückt werden können. Um diese Ausdrücke zu finden, bilde ich das Product der n Functionen $\varphi_{3,3}(v + a_h, w + b_h)$, welche den n Werthen $1, 2, 3, \ldots n$ des Index h entsprechen: bezeichnet man durch

$$\prod_{h=1}^{h=n} S_h \text{ das Product } S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \ldots S_{n-1} \cdot S_n,$$

so erhält man aus der Gleichung

$$\varphi_{3,3}(v + a_h, w + b_h, p, q, A) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} p^{m^2} e^{2m(v+a_h)} \vartheta_3\{w + b_h + 2mA, q\},$$

das gesuchte Product

$$(50) \quad \left\{ \prod_{h=1}^{h=n} \varphi_{3,3}(v + a_h, w + b_h, p, q, A) \right.$$

$$= \Sigma \left[\begin{array}{l} p^{m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2} e^{2(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)v + 2(m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_n a_n)} \\ \qquad \times \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta_3\{w + b_h + 2m_h A, q\} \end{array} \right]$$

[400] wo die Summe über alle positiven und negativen Werthe der n ganzen Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ausgedehnt werden muss. Die Bildung des gesuchten Productes hängt also ab von der des folgenden

$$\prod_{h=1}^{h=n} \vartheta_3\{w+\alpha_h, q\}.$$

Um dies als lineare Function von Transcendenten der Form ϑ_3 auszudrücken, bediene ich mich der elementaren Methode, deren Princip *Jacobi* in dem oben erwähnten Briefe an *Hermite* auseinandergesetzt hat (s. Journal für Mathematik von *Crelle*, Bd. XXXII, S. 176), und ich muss erwähnen, dass ich erst nach Kenntnissnahme dieses Briefes den Ausdruck des behandelten Productes gefunden habe.

7.

Man hat

$$(51)\quad \begin{cases} \prod\limits_{h=1}^{h=n} \vartheta_3(w+\alpha_h, q) \end{cases}$$
$$= \sum q^{m_1^2+m_2^2+\ldots+m_n^2} e^{2(m_1+m_2+\ldots+m_n)w+2(m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+\ldots+m_n\alpha_n)},$$

wobei die Summe über alle ganzen Werthe von $m_1, m_2, \ldots, m_n$ auszudehnen ist. Seien nun $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ beliebige ganze Zahlen, nur der einen einzigen Bedingung unterworfen, dass ihre Summe positiv und kleiner als n ist; seien ferner

$$(52)\quad \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = \sum \mu_h = a \\ \mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_n^2 = \sum \mu_n^2 = g_a \\ \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \cdots + \mu_n\alpha_n = \sum \mu_h\alpha_h = h_a, \end{cases}$$

so ist $a \geqq o$, und $a < n$, und setzt man $m_h = \mu_h + b$, so wird

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + \cdots + m_n &= \sum m_h = a + nb \\ m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2 &= \sum m_h^2 = g_a + 2anb + nb^2 \\ m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_n\alpha_n &= \sum m_h\alpha_h = h_a + bs, \end{aligned}$$

wo

$$s = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \sum \alpha_h.$$

[401] Durch Substitution dieser Werthe wird das zweite Glied der Gleichung (51)

$$\sum_{a=0}^{a=n-1} \mathrm{P}_a e^{2aw} \sum_{b=-\infty}^{b=+\infty} q^{nb^2} e^{2b(nw+..+a\log q)}$$
$$= \sum_{a=0}^{a=n-1} \mathrm{P}_a e^{2aw} \vartheta_3\{nw+s+a\log q,\ q^n\}.$$

wo

$$\mathrm{P}_a = \Sigma_\mu q^{g_a} e^{2h_a} = \Sigma_\mu q^{\mu_1^2+\mu_2^2\ldots+\mu_n^2} e^{2(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2+\ldots+\mu_n\alpha_n)},$$

und wo die letzte durch Σ_μ bezeichnete Summe über alle Systeme von n Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ zu erstrecken ist, deren Summe gleich a ist. Man findet also

$$(53)\quad \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta_3(w+\alpha_h, q) = \sum_{a=0}^{a=n-1} \mathrm{P}_a e^{2aw} \vartheta_3\{nw+s+a\log q, q^n\},$$

und indem man hier $w+\frac{ki\pi}{n}$ für w setzt

$$(54)\quad \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta_3\left\{w+a_h+\frac{ki\pi}{n}, q\right\}$$
$$= \sum_{a=0}^{a=n-1} \mathrm{P}_a e^{\frac{2aki\pi}{n}} e^{2aw} \vartheta_3\{nw+s+a\log q, q^n\}.$$

Diese Formel stellt ein System von n linearen Gleichungen in Bezug auf die n Functionen $\vartheta_3(nw+s+a\log q. q^n)$ dar, entsprechend den n Werthen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ von k und das System der inversen Gleichungen ist nach den bekannten Eigenschaften der Einheitswurzeln in der Formel enthalten:

$$(55)\quad n\mathrm{P}_a e^{2aw} \vartheta_3\{nw+s+a\log q, q^n\}$$
$$= \sum_{k=0}^{k=n-1} e^{-\frac{2kai\pi}{n}} \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta_3\left\{w+\alpha_h+\frac{ki\pi}{n}, q\right\}.$$

Setzt man hier $w=0$ oder gleich einem anderen constanten Werthe, so hat man die Coefficienten P_a ausgedrückt durch Functionen ϑ_3 mit constanten Argumenten.

[**402**] Mit Hülfe der Formel

$$(56)\quad nq^{a^2} e^{2aw} \vartheta_3\{nw+an\log q, q^{n^2}\}$$
$$= \sum_{m=0}^{m=n-1} e^{-\frac{2ami\pi}{n}} \vartheta_3\left(w+\frac{mi\pi}{n}, q\right),$$

welche geradenwegs aus der Definition der Reihe $\vartheta_3(w)$ folgt und die in die Form

$$(57)\quad n q^{\frac{a^2}{n}} e^{2aw}\, \vartheta_3\{nw + a\log q\,,\, q^n\} = \sum_{m=o}^{m=n-1} e^{-\frac{2ami\pi}{n}}\, \vartheta_3\{w + \frac{mi\pi}{n}\,,\, q^{\frac{1}{n}}\}$$

gebracht werden kann, entsteht aus der Gleichung (53)

$$(58)\quad n \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta_3\{w+\alpha_h\,,q\} = \sum_{m=o}^{m=n-1} Q_m\, \vartheta_3\{w + \frac{s}{n} + \frac{mi\pi}{n}\,,\, q^{\frac{1}{n}}\},$$

wo

$$Q_m = \sum_{a=o}^{a=n-1} e^{-\frac{2ami\pi}{n}}\, q^{-\frac{a^2}{n}}\, e^{-\frac{2as}{n}}\, P_a\,;$$

und wenn man hier $w + \frac{k}{n}\log q$ an Stelle von w setzt, so erhält man für die n Werthe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ von k, n Gleichungen von der Form:

$$(59)\quad n \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta_3\{w+\alpha_h + \frac{k}{n}\log q\,,\, q\}$$

$$= \sum_{m=o}^{m=n-1} Q_m\, q^{-\frac{k^2}{n}}\, e^{-2k\frac{nw+s}{n}}\, e^{-\frac{2kmi\pi}{n}}\, \vartheta_3\{w + \frac{s}{n} + \frac{mi\pi}{n}\,,\, q^{\frac{1}{n}}\},$$

deren n inverse Gleichungen in der folgenden enthalten sind:

$$(60)\quad Q_m\, \vartheta_3\{w + \frac{s}{n} + \frac{mi\pi}{n}\,,\, q^{\frac{1}{n}}\}$$

$$= \sum_{k=o}^{k=n-1} e^{\frac{2kmi\pi}{n}}\, q^{\frac{k^2}{n}}\, e^{2k\frac{nw+s}{n}} \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta_3\{w+\alpha_h + \frac{k\log q}{n}\,,\, q\},$$

aus der man die Werthe der constanten Coefficienten Q_m ziehen kann, ausgedrückt durch Functionen ϑ_3 mit constanten Argumenten.

Zu den letzten Formeln kann man auch kommen mit Hülfe der Gleichung

$$\vartheta\,(w', q') = \sqrt{-\frac{\log q}{\pi}}\; e^{\frac{w^2}{\log q}}\, \vartheta_3\,(w, q),$$

[403] wo

$$w' = -\frac{i\pi w}{\log q}, \quad \log q \log q' = \pi^2\,.$$

Transformirt man mit Hülfe dieser Formel die Gleichung

$$\prod_{h=1}^{h=n} \vartheta_3\{w'+a'_h, q'\}$$
$$= \sum_{m=o}^{m=n-1} \mathrm{P}'_m e^{2mw'} \vartheta_3\{nw'+s'+m\log q', q'^n\},$$

wo

$$a_h' = -\frac{i\pi a_h}{\log q}, \quad \Sigma a'_h = s', \quad \Sigma \mu_h a'_h = h'_m, \quad \Sigma \mu^2_h = g_m,$$
$$\Sigma \mu_h = m, \quad \mathrm{P}'_m = \Sigma_\mu e^{g_m \log q' + 2h'_m},$$

so erhält man

$$n \prod_{h=1}^{h=n} \vartheta_3\{w+a_n, q\} = \sum_{m=o}^{m=n-1} \mathrm{Q}_m \vartheta_3\{w+\frac{s}{n}+\frac{mi\pi}{n}, q^{\frac{1}{n}}\}$$

und

$$\mathrm{Q}_m = n^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{-\pi}{\log q}\right\}^{\frac{n-1}{2}} \Sigma_\mu e^{\frac{b^2_m - nc_m}{n\log q}},$$

wo

$$c_m = \sum_{h=1}^{h=n} (a_h+\mu_h i\pi)^2, \quad b_m = s+mi\pi = \Sigma(a_h+\mu_h i\pi),$$

und wo die mit Σ_μ bezeichnete Summe über alle ganzen Werthe von $\mu_1, \mu_2 \ldots, \mu_h$ auszudehnen ist, welche der Gleichung $\Sigma\mu_h = m$ Genüge leisten. Dieser Ausdruck ist weniger complicirt als der oben gefundene.

8.

Mit Hülfe dieser Beziehungen zwischen den Functionen ϑ_3 erzielt man ohne Mühe analoge Relationen zwischen den allgemeineren Functionen [404] $\varphi_{3,3}(v, w)$, indem man genau dieselben Ueberlegungen anstellt, die zu jenen führten.

Man findet so zunächst die Formel

$$(61) \quad \prod_{h=1}^{h=n} \varphi_{3,3}\{v+a_h, w+b_h, p, q, \mathrm{A}\}$$
$$= \sum_{\beta=o}^{\beta=n-1} \sum_{\gamma=o}^{\gamma=n-1} \mathrm{A}_{\beta,\gamma} e^{2\beta v+2\gamma w} \times$$
$$\varphi_{3.3}\{(nv+\Sigma a_h+\beta\log p+2\gamma\mathrm{A}), (nw+\Sigma b_h+2\beta\mathrm{A}+\gamma\log q), p^n, q^n, n\mathrm{A}\},$$

der Beziehung (53) zwischen den Functionen $\vartheta_3(w, q)$ und $\vartheta_3(nw, q^n)$ entsprechend und wo

$$(62)\quad A_{\beta,\gamma} = \Sigma_{\mu,\nu}\, e^{\sum\limits_{h=1}^{h=n}\{\mu_h^2 \log p + \nu_h^2 \log q + 4 A \mu_h \nu_h + 2\mu_h a_h + \nu_h b_h\}},$$

während die durch $\Sigma_{\mu,\nu}$ bezeichnete Summe über alle ganzen Werthe von $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ auszudehnen ist, welche den Gleichungen genügen

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = \beta \qquad \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n = \gamma.$$

Mit Hülfe der drei Lehrsätze, die wir oben für die Functionen $\varphi_{3,3}$ mit complementären Moduln p, q, A und p', q', A'; p, q, A und p_1, q_1, A_1; p, q, A und p'_1, q'_1, A'_1 gefunden haben, oder auch mittelst der Gleichungen

$$(63)\quad \sum_{k=o}^{k=n-1} e^{-\frac{2k\beta i\pi}{n}} \varphi_{3,3}\{v + \frac{ki\pi}{n}, nw, p^{\frac{1}{n}}, q^n, A\}$$
$$= np^{\beta^2} e^{2\beta v} \varphi_{3,3}\{nv + \beta \log p, nw + 2\beta A, p^n, q^n, nA\},$$

$$(64)\quad \sum_{l=0}^{l=n-1} e^{-\frac{2l\gamma i\pi}{n}} \varphi_{3,3}\{nv, w + \frac{li\pi}{n}, p^n, q^{\frac{1}{n}}, A\}$$
$$= nq^{\gamma^2} e^{2\gamma w} \varphi_{3,3}\{nv + 2\gamma A, nw + \gamma \log q, p^n, q^n, nA\},$$

$$(65)\quad \sum_{k=0}^{k=n-1} \sum_{l=0}^{l=n-1} e^{-\frac{k\beta + l\gamma}{n} 2i\pi} \varphi_{3,3}\{v + \frac{ki\pi}{n}, w + \frac{li\pi}{n}, p^{\frac{1}{n}}, q^{\frac{1}{n}}, \frac{A}{n}\}$$
$$= n^2 p^{\beta^2} e^{2\beta(v + \gamma A)} \cdot q^{\gamma^2} e^{2\gamma(w + \beta A)} \times$$
$$\varphi_{3,3}\{nv + \beta \log p + 2\gamma A, nw + 2\beta A + \gamma \log q, p^n, q^n, nA\},$$

[405] welche geradenwegs aus der Definition der Function $\varphi_{3,3}$ resultiren, zieht man aus der Gleichung (61) die drei folgenden:

$$(66)\quad \prod_{h=1}^{h=n} \varphi_{3,3}\{v + a_h, w + b_h, p, q, A\}$$
$$= \sum_{k=0}^{k=n-1} \sum_{l=0}^{l=n-1} B_{k,l}\, \varphi_{3,3}\left\{v + \frac{\Sigma a_h}{n} + \frac{ki\pi}{n}, w + \frac{\Sigma b_h}{n} + \frac{li\pi}{n}, p^{\frac{1}{n}}, q^{\frac{1}{n}}, \frac{A}{n}\right\},$$

$$(67)\quad \prod_{h=1}^{h=n} \varphi_{3,3}\{v + a_h, w + b_h, p, q, A\}$$
$$= \sum_{k=0}^{k=n-1} \sum_{\gamma=0}^{\gamma=n-1} C_{k,\gamma}\, e^{2\gamma w} \times$$
$$\varphi_{3,3}\left\{v + \frac{\Sigma a_h}{n} + \frac{ki\pi}{n} + \frac{2\gamma A}{n}, nw + \Sigma b_h + \gamma \log q, p^{\frac{1}{n}}, q^n, A\right\},$$

$$(68)\quad \prod_{h=1}^{h=n} \varphi_{3,3}\{v+a_h,\, w+b_h,\, p,\, q,\, A\} = \sum_{\beta=0}^{\beta=n-1}\sum_{l=0}^{l=n-1} D_{\beta,l}\, e^{2\beta v} \times$$

$$\varphi_{3,3}\left\{nv+\Sigma a_h+\beta\log q,\, w+\frac{\Sigma b_h}{n}+\frac{li\pi}{n}+\frac{2\beta A}{n},\, p^n,\, q^{\frac{1}{n}},\, A\right\};$$

wo $B_{k,l}$, $C_{k,\gamma}$, $D_{\beta,l}$ Constante sind, die von den Moduln p, q, A und den $2n$ Incrementen a_h, b_h der Argumente v und w abhängen. Man erhält daraus die Ausdrücke in zwei verschiedenen Formen: die eine, linear in den $A_{\beta,\gamma}$, wird unter Benutzung der Gleichungen (63), (64), (65) gefunden, um von der Formel (61) zu den drei Gleichungen (66), (67), (68) überzugehen; die andere mehr zusammengezogene entsteht, wenn man sich der drei Sätze (47), (48), (49) bedient. Um jedoch die Darlegung nicht mit zu viel Formeln zu beschweren, unterdrücken wir hier einige dieser Ausdrücke, um so mehr als wir vorziehen, die Constanten $B_{k,l}$, $C_{k,\gamma}$, $D_{\beta,l}$ durch Functionen $\varphi_{3,3}$ mit constanten Argumenten auszudrücken.

Zur Abkürzung der Formeln setze ich:

406] $$v+\frac{ki\pi}{n}=v_k,\quad v+\frac{\beta\log p}{n}=v_\beta',\quad v+\frac{2\gamma A}{n}=v_\gamma'',$$

$$w+\frac{li\pi}{n}=w_l,\quad w+\frac{2\beta A}{n}=w_\beta',\quad w+\frac{\gamma\log q}{n}=w_\gamma'',$$

$$v+\frac{ki\pi}{n}+\frac{\beta\log p}{n}=v_{k,\beta},\qquad v+\frac{ki\pi}{n}+\frac{2\gamma A}{n}=v_{k,\gamma}',$$

$$w+\frac{li\pi}{n}+\frac{2\beta A}{n}=w_{l,\beta},\qquad w+\frac{li\pi}{n}+\frac{\gamma\log q}{n}=w_{l,\gamma}',$$

$$v+\frac{\beta\log p}{n}+\frac{2\gamma A}{n}=v_{\beta,\gamma}'',$$

$$w+\frac{2\beta A}{n}+\frac{\gamma\log q}{n}=w_{\beta,\gamma}''.$$

Setzt man für v, w in der Gleichung (61) v_k, w_l, in Gleichung (66) $v_{\beta,\gamma}''$, $w''_{\beta,\gamma}$, in Gleichung (67) v_β', $w_{l,\beta}$, in Gleichung (68) $v_{k,\gamma}'$, w''_γ, so erhält man die folgenden vier Gleichungen:

$$69)\quad \prod_{h=1}^{h=n} \varphi_{3,3}\{v_k + a_h,\, w_l + b_h,\, p,\, q,\, A\}$$
$$= \Sigma_\beta \Sigma_\gamma e^{\frac{\beta k + \gamma l}{n} 2 i \pi} A_{\beta,\gamma}\, e^{2\beta v + 2\gamma w} \times$$
$$\varphi_{3,3}\{n v_{\beta,\gamma}'' + \Sigma a_h,\, n w_{\beta,\gamma}'' + \Sigma b_h,\, p^n,\, q^n,\, nA\},$$

$$70)\quad p^{\frac{\beta^2}{n}} q^{\frac{\gamma^2}{n}} e^{\frac{4\beta\gamma A}{n} + 2\beta\left(v + \frac{\Sigma a_h}{n}\right) + 2\gamma\left(w + \frac{\Sigma b_h}{n}\right)} \times$$
$$\prod_{h=1}^{h=n} \varphi_{3,3}\{v_{\beta,\gamma}'' + a_h,\, w_{\beta,\gamma}'' + b_h,\, p,\, q,\, A\}$$
$$= \Sigma_k \Sigma_l e^{\frac{k\beta + l\gamma}{n}} B_{k,l}\, \varphi_{3,3}\left\{v_k + \frac{\Sigma a_h}{n},\, w_l + \frac{\Sigma b_h}{n},\, p^{\frac{1}{n}},\, q^{\frac{1}{n}},\, \frac{A}{n}\right\},$$

$$71)\quad p^{\frac{\beta^2}{n}} e^{2\beta\left(v + \frac{\Sigma a_h}{n}\right)} \prod_{h=1}^{h=n} \varphi_{3,3}\{v_\beta' + a_h,\, w_{l,\beta} + b_h,\, p,\, q,\, A\}$$
$$= \Sigma_k \Sigma_\gamma e^{\frac{\gamma l - k\beta}{n} 2 i \pi} C_{k,\gamma}\, e^{2\gamma w}\, \varphi_{3,3}\left\{v_{k,\gamma}' + \frac{\Sigma a_h}{n},\, n w_\gamma'' + \Sigma b_h,\, p^{\frac{1}{n}},\, q^n,\, A\right\},$$

407]

$$72)\quad q^{\frac{\gamma^2}{n}} e^{2\gamma\left(w + \frac{\Sigma b_h}{n}\right)} \prod_{h=1}^{h=n} \varphi_{3,3}\{v_{k,\gamma}' + a_h,\, w_\gamma'' + b_h,\, p,\, q,\, A\}$$
$$= \Sigma_\beta \Sigma_l e^{\frac{\beta k - l\gamma}{n} 2 i \pi} D_{\beta,l}\, e^{2\beta v}\, \varphi_{3,3}\left\{n v_\beta' + \Sigma a_h,\, w_{l,\beta} + \frac{\Sigma b_h}{n},\, p^n,\, q^{\frac{1}{n}},\, A\right\}.$$

Jede dieser Formeln stellt ein System von n^2 Gleichungen dar, den Werthen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ von k und l, von β und γ, von β und l, von k und γ entsprechend; sie sind linear und zwar die n^2 Gleichungen des ersten Systems in Bezug auf die n^2 Grössen

$$\varphi_{3,3}\{n v_{\beta,\gamma}'' + \Sigma a_h,\, n w_{\beta,\gamma}'' + \Sigma b_h,\, p^n,\, q^n,\, nA\},$$

die des zweiten in Rücksicht auf die n^2 Grössen

$$\varphi_{3,3}\left\{v_k + \frac{\Sigma a_h}{n},\, w_l + \frac{\Sigma b_h}{n},\, p^{\frac{1}{n}},\, q^{\frac{1}{n}},\, \frac{A}{n}\right\},$$

die des dritten für die n^2 Grössen

$$\varphi_{3,3}\left\{v_{k,\gamma}' + \frac{\Sigma a_h}{n},\, n w_\gamma'' + \Sigma b_h,\, p^{\frac{1}{n}},\, q^n,\, A\right\},$$

endlich die des vierten in den n^2 Grössen

$$\varphi_{3,3}\left\{n v_\beta' + \Sigma a_h,\ w_{l,\beta} + \frac{\Sigma b_h}{n},\ p^n,\ q^{\frac{1}{n}},\ A\right\}.$$

Zieht man sie betreffs dieser Grössen zusammen, so erhält man

(73) $$n^2 A_{\beta,\gamma}\, e^{2\beta v + 2\gamma w} \times$$
$$\varphi_{3,3}\{n v_{\beta,\gamma}'' + \Sigma a_h,\ n w_{\beta,\gamma}'' + \Sigma b_h,\ p^n,\ q^n,\ nA\}$$
$$= \Sigma_k \Sigma_l\, e^{-\frac{k\beta + l\gamma}{n} 2i\pi} \prod_{h=1}^{h=n} \{v_k + a_h,\ w_l + b_h,\ p,\ q,\ A\},$$

(74) $$n^2 B_{k,l}\, \varphi_{3,3}\left\{v_k + \frac{\Sigma a_h}{n},\ w_l + \frac{\Sigma b_h}{n},\ p^{\frac{1}{n}},\ q^{\frac{1}{n}},\ \frac{A}{n}\right\}$$
$$= \Sigma_\beta \Sigma_\gamma\, p^{\frac{\beta^2}{n}} q^{\frac{\gamma^2}{n}} e^{4\beta\gamma \frac{A}{n} + 2\beta\left(v_k + \frac{\Sigma a_h}{n}\right) + 2\gamma\left(w_l + \frac{\Sigma b_h}{n}\right)} \times$$
$$\prod_{h=1}^{h=n} \varphi_{3,3}\{v_{\beta,\gamma}'' + a_h,\ w_{\beta,\gamma}'' + b_h,\ p,\ q,\ A\},$$

[408]

(75) $$n^2 C_{k,\gamma}\, e^{2\gamma w}\, \varphi_{3,3}\left\{v_{k,\gamma}' + \frac{\Sigma a_h}{n},\ n w_\gamma'' + \Sigma b_h,\ p^{\frac{1}{n}},\ q^n,\ A\right\}$$
$$= \Sigma_\beta \Sigma_l\, e^{\frac{\beta k - l\gamma}{n} 2i\pi}\, p^{\frac{\beta^2}{n}}\, e^{2\beta\left(v + \frac{\Sigma a_h}{n}\right)} \times$$
$$\prod_{h=1}^{h=n} \varphi_{3,3}\{v_\beta' + a_h,\ w_{l,\beta} + b_h,\ p,\ q,\ A\},$$

(76) $$n^2 D_{\beta,l}\, e^{2\beta v}\, \varphi_{3,3}\left\{n v_\beta' + \Sigma a_h,\ w_{l,\beta} + \frac{\Sigma b_h}{n},\ p^n,\ q^{\frac{1}{n}},\ A\right\}$$
$$= \Sigma_k \Sigma_\gamma\, e^{-\frac{k\beta - \gamma l}{n} 2i\pi}\, q^{\frac{\gamma^2}{n}}\, e^{2\gamma\left(w + \frac{\Sigma b_h}{n}\right)} \times$$
$$\prod_{h=1}^{h=n} \varphi_{3,3}\{v_{k,\gamma}' + a_h,\ w_\gamma'' + b_h,\ p,\ q,\ A\}.$$

Diese Gleichungen geben die Werthe der Constanten $A_{\beta,\gamma}$, $B_{k,l}$, $C_{k,\gamma}$, $D_{\beta,l}$ ausgedrückt durch Functionen $\varphi_{3,3}$ mit constanten Argumenten; sie sind zugleich die Quelle der Formeln zur Transformation und Multiplication der ultra-elliptischen Integrale erster Klasse, während aus den inversen Gleichungen (69), (70), (71), (72) die Formeln zur inversen Transformation und zur Division derselben Integrale entstehen.

Capitel III.

Die Functionen mit vier Perioden, welche die Inversen der ultra-elliptischen Integrale erster Klasse sind.

1.

Zur Abkürzung der folgenden Formeln führe ich besondere Zeichen für die fünfzehn Functionen ein, welche man aus $\varphi_{3,3}(v,w)$ erhält, wenn man in ihnen die beiden Argumente v und w um die Hälften der vier Paare von Periodenindices $i\pi$ und 0, 0 und $i\pi$, $\log p$ und $2\,\mathrm{A}$, $2\,\mathrm{A}$ und $\log q$ verändert, von denen die ersten beiden zu den zwei Perioden von $\varphi_{3,3}(v,w)$ gehören, die beiden anderen zu denen von $e^{f(v,w)}\,\varphi_{3,3}(v,w)$.

[409] Entsprechend der für die Function $\vartheta(v)$ angenommenen Bezeichnung setze ich

$$(77)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi_{3,r}(v,w) &= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} p^{m^2} e^{2mv}\, \vartheta_r(w+2m\mathrm{A},\, q),\\
\varphi_{r,3}(v,w) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2} e^{2nw}\, \vartheta_r(v+2n\mathrm{A},\, p),\\
\varphi_{0,r}(v,w) &= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m p^{m^2} e^{2mv}\, \vartheta_r(w+2m\mathrm{A},\, q),\\
\varphi_{r,0}(v,w) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nw}\, \vartheta_r(v+2n\mathrm{A},\, p),\\
\varphi_{2,r}(v,w) &= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} p^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{(2m+1)v}\, \vartheta_r\{w+[2m+1]\mathrm{A},q\},\\
\varphi_{r,2}(v,w) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{(2n+1)w}\, \vartheta_r\{v+[2n+1]\mathrm{A},p\},\\
\varphi_{1,r}(v,w) &= \sum (-1)^m p^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{(2m+1)v}\, \vartheta_r\{w+[2m+1]\,\mathrm{A},q\},\\
\varphi_{r,1}(v,w) &= \sum (-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{(2n+1)w}\, \vartheta_r\{v+[2n+1]\,\mathrm{A},p\},
\end{aligned}\right.$$

wo r einen beliebigen der vier Indices 0, 1, 2, 3 bezeichnet und wo man das Zeichen ϑ ohne Index für ϑ_0 zu setzen hat. Bezeichnet man noch mit s einen der vier Indices 0, 1, 2, 3, so hat man nach der durch die Formeln (77) gegebenen Definition von $\varphi_{r,s}(v,w)$

$$(78)\qquad \varphi_{r,s}(v,w,p,q,A) = \varphi_{s,r}(w,v,q,p,A),$$

$$(79)\quad \begin{cases} \varphi_{r,3}\left\{v, w+\frac{2m+1}{2}i\pi\right\} = \varphi_{r,0}(v,w), \\ \varphi_{r,0}\left\{v, w+\frac{2m+1}{2}i\pi\right\} = \varphi_{r,3}(v,w), \\ \varphi_{r,2}\left\{v, w+\frac{2m+1}{2}i\pi\right\} = (-1)^{\frac{2m+1}{2}}\varphi_{r,1}(v,w), \\ \varphi_{r,1}\left\{v, w+\frac{2m+1}{2}i\pi\right\} = (-1)^{\frac{2m+1}{2}}\varphi_{r,2}(v,w), \end{cases}$$

[410]

$$(80)\quad \begin{cases} e^{\frac{\left\{w+\frac{2m+1}{2}\log q\right\}^2}{\log q}}\varphi_{r,3}\left\{\left[v+\frac{2m+1}{2}2A\right], \left[w+\frac{2m+1}{2}\log q\right]\right\} \\ \qquad = e^{\frac{w^2}{\log q}}\varphi_{r,2}(v,w), \\ e^{\frac{\left\{w+\frac{2m+1}{2}\log q\right\}^2}{\log q}}\varphi_{r,2}\left\{\left[v+\frac{2m+1}{2}2A\right], \left[w+\frac{2m+1}{2}\log q\right]\right\} \\ \qquad = e^{\frac{w^2}{\log q}}\varphi_{r,3}(v,w), \\ e^{\frac{\left\{w+\frac{2m+1}{2}\log q\right\}^2}{\log q}}\varphi_{r,0}\left\{\left[v+\frac{2m+1}{2}2A\right], \left[w+\frac{2m+1}{2}\log q\right]\right\} \\ \qquad = (-1)^m e^{\frac{w^2}{\log q}}\varphi_{r,1}(v,w), \\ e^{\frac{\left\{w+\frac{2m+1}{2}\log q\right\}^2}{\log q}}\varphi_{r,1}\left\{\left[v+\frac{2m+1}{2}2A\right], \left[w+\frac{2m+1}{2}\log q\right]\right\} \\ \qquad = -(-1)^m e^{\frac{w^2}{\log q}}\varphi_{r,0}(v,w). \end{cases}$$

Diese Formeln zeigen, dass eine jede der sechzehn Functionen $\varphi_{r,s}(v,w)$ die Form $e^{\alpha+\beta v+\gamma w}\varphi_{3,3}(v,w)$ hat und dass sie demnach alle sechzehn in der folgenden Formel begriffen sind:

$$\varphi_{r,s}(v, w, p, q, A)$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{m^2 \log p + n^2 \log q + 4mnA + 2ma_{r,s} + 2nb_{r,s} + c_{r,s}},$$

wo $a_{r,s}$, $b_{r,s}$, $c_{r,s}$ lineare Functionen von v und w sind, deren Bestimmung für die verschiedenen Werthe von r und s nach der für $\varphi_{r,s}(v, w)$ gegebenen Definition leicht ist.

Alle die Sätze, die oben für die Function $\varphi_{3,3}(v, w)$ bewiesen wurden, haben mithin gleichermaassen statt für die übrigen fünfzehn Functionen $\varphi_{r,s}(v, w)$; und um auf die letzteren bezügliche Formeln zu haben, braucht man nur in den für die Form $\varphi_{3,3}(v, w)$ aufgestellten die beiden Argumente v und w um die Hälften der vier Paare conjugirter Periodenindices und um alle Combinationen dieser Hälften zu verändern.

Bezeichnet man mit M die Summe irgendwelcher ganzen Vielfachen der vier zum Argumente v gehörenden Periodenindices, nämlich $i\pi$, 0; $\log p$, $2A$, und mit N die Summe derselben Vielfachen [411] der conjugirten Indices des Argumentes w, nämlich 0, $i\pi$; $2A$, $\log q$, so erkennt man aus der Definition von $\varphi_{r,s}(v, w)$, dass

$$\varphi_{r,s}(v + M, w + N) = \pm e^{\alpha + \beta v + \gamma w} \varphi_{r,s}(v, w),$$

wo α, β, γ Constanten sind, die nur von M und N abhängen, folglich für alle Werthe von r und s die gleichen sind, man sieht also, dass das Quadrat des Quotienten von zwei beliebigen der sechzehn Functionen $\varphi_{r,s}(v, w)$ eine Function von v und w ist mit vier Paaren conjugirter Periodenindices:

$$i\pi \text{ und } 0;\ 0 \text{ und } i\pi;\ \log p \text{ und } 2A;\ 2A \text{ und } \log q.$$

2.

Im ersten Capitel war die Gleichung gefunden

$$(81)\quad \left\{\begin{aligned} &\vartheta_3(w)\ \vartheta_3(w')\ \vartheta_3(w'')\ \vartheta_3(w''') \\ &+ \vartheta_2(w)\ \vartheta_2(w')\ \vartheta_2(w'')\ \vartheta_2(w''') \\ &= \vartheta_3(w_1)\ \vartheta_3(w_1')\ \vartheta_3(w_1'')\ \vartheta_3(w_1''') \\ &+ \vartheta_2(w_1)\ \vartheta_2(w_1')\ \vartheta_2(w_1'')\ \vartheta_2(w_1''') \end{aligned}\right.$$

wo

$$(82)\quad \begin{cases} 2\,w_1 = w + w' + w'' + w''' \\ 2\,w_1' = w + w' - w'' - w''' \\ 2\,w_1'' = w - w' + w'' - w''' \\ 2\,w_1''' = w - w' - w'' + w''' \end{cases}$$

Der Beweis dieses Satzes gründete sich auf die Eigenschaft der vier Grössen w_1, w_1', w_1'', w_1''', der Gleichung

$$(83)\quad w_1^2 + w_1'^2 + w_1''^2 + w_1'''^2 = w^2 + w'^2 + w''^2 + w'''^2$$

Genüge zu leisten; denn man konnte in dem zweiten Gliede der Gleichung [**412**]

$$e^{\frac{w^2 + w'^2 + w''^2 + w'''^2}{\log q}} \{\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(w')\,\vartheta_3(w'')\,\vartheta_3(w''') + \vartheta_2(w)\,\vartheta_2(w')\,\vartheta_2(w'')\,\vartheta_2(w''')\}$$
$$= \Sigma\, e^{\frac{1}{\log q}\{(w + m\log q)^2 + (w' + m'\log q)^2 + (w'' + m''\log q)^2 + (w''' + m'''\log q)^2\}}$$
$$+ \Sigma\, e^{\frac{1}{\log q}\left\{\left(w + \frac{2m+1}{2}\log q\right)^2 + \left(w' + \frac{2m'+1}{2}\log q\right)^2 + \left(w'' + \frac{2m''+1}{2}\log q\right)^2 + \left(w''' + \frac{2m'''+1}{2}\log q\right)^2\right\}}$$

alle Exponenten mit Hülfe der Formeln (82) und (83) transformiren, ohne dass ihre Form sich änderte.

Mit Hülfe ganz derselben Formeln findet man analoge Relationen zwischen den Functionen $\varphi_{r,s}(v, w)$.

Sei

$$\begin{aligned} 2\,v_1 &= v + v' + v'' + v''', & 2\,w_1 &= w + w' + w'' + w''', \\ 2\,v_1' &= v + v' - v'' - v''', & 2\,w_1' &= w + w' - w'' - w''', \\ 2\,v_1'' &= v - v' + v'' - v''', & 2\,w_1' &= w - w' + w'' - w''', \\ 2\,v_1''' &= v - v' - v'' + v''', & 2\,w_1''' &= w - w' - w'' + w'''; \end{aligned}$$

sei ferner

$$\begin{aligned} M = {} & \varphi_{3,3}(v, w)\;\varphi_{3,3}(v', w')\;\varphi_{3,3}(v'', w'')\;\varphi_{3,3}(v''', w''') \\ & + \varphi_{3,2}(v, w)\;\varphi_{3,2}(v', w')\;\varphi_{3,2}(v'', w'')\;\varphi_{3,2}(v''', w''') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M' = {} & \varphi_{2,3}(v, w)\;\varphi_{2,3}(v', w')\;\varphi_{2,3}(v'', w'')\;\varphi_{2,3}(v''', w''') \\ & + \varphi_{2,2}(v, w)\;\varphi_{2,2}(v', w')\;\varphi_{2,2}(v'', w'')\;\varphi_{2,2}(v''', w''') \end{aligned}$$

und M_1, M_1' dieselben Functionen in v_1, w_1; v_1', w_1'; v_1'', w_1''; v_1''', w_1''' wie M und M' in den Argumenten v, w ohne untere Indices; da man nun hat

$$e^{\frac{v^2}{\log p}}\,\varphi_{3,r}(v, w) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\frac{(v + m\log p)^2}{\log p}}\,\vartheta_r\{w + 2\,m\,A,\, q\},$$

[413]

$$e^{\frac{v^2}{\log p}}\varphi_{2,r}(v,w)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}e^{\frac{\left(v+\frac{2m+1}{2}\log p\right)^2}{\log p}}\vartheta_r\{w+(2m+1)A,q\};$$

so findet man durch genau dieselben Schlüsse, deren wir uns zur Ableitung der Gleichung (81) bedienten [und mit Hülfe dieser selben Gleichung], dass der Ausdruck $M+M'$ seinen Werth nicht ändert, wenn man in ihm für die Argumente $v, w, v', w', v'', w'', v''', w'''$ der Reihe nach die Argumente $v_1, w_1, v_1', w_1', v_1'', w_1'', v_1''', w_1'''$ setzt, d. h. man hat

$$M+M'=M_1+M_1'.$$

Setzen wir noch

$$\begin{aligned}M''=\;&\varphi_{1,3}(v,w)\,\varphi_{1,3}(v',w')\,\varphi_{1,3}(v'',w'')\,\varphi_{1,3}(v''',w''')\\&+\varphi_{1,2}(v,w)\,\varphi_{1,2}(v',w')\,\varphi_{1,2}(v'',w'')\,\varphi_{1,2}(v''',w'''),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M'''=\;&\varphi_{0,3}(v,w)\,\varphi_{0,3}(v',w')\,\varphi_{0,3}(v'',w'')\,\varphi_{0,3}(v''',w''')\\&+\varphi_{0,2}(v,w)\,\varphi_{0,2}(v',w')\,\varphi_{0,2}(v'',w'')\,\varphi_{0,2}(v''',w'''),\end{aligned}$$

und bezeichnen die gleichen Functionen der Argumente $v_1, w_1, v_1', w_1', v_1'', w_1'', v_1''', w_1'''$ mit M_1'', M_1''', so wird:

$$(84)\quad\left\{\begin{array}{ll}1.\; M+M'=M_1+M_1', & 2.\; M''-M'''=M_1''-M_1''',\\ 3.\; M-M'=M_1''+M_1''', & 4.\; M''+M'''=M_1-M_1',\end{array}\right.$$

Die Gleichung (84, 2) leitet sich aus (84, 1) ab, wenn man hier $v+\frac{i\pi}{2}$, $v'+\frac{i\pi}{2}$, $v''+\frac{i\pi}{2}$, $v'''+\frac{i\pi}{2}$ für v, v', v'', v''' setzt; und aus diesen beiden Gleichungen findet man die zwei anderen (84, 3) und (84, 4) durch Substitution von $v'''+i\pi$ für v'''.

3.

Die vier Formeln (84) können in die folgende Form gebracht werden

$$(85)\quad\left\{\begin{array}{l}2M_1\;\;\,=M+M'+M''+M'''\\ 2M_1'\;\,=M+M'-M''-M'''\\ 2M_1''\,=M-M'+M''-M'''\\ 2M_1'''=M-M'-M''+M''',\end{array}\right.$$

[**414**] und wie ich es schon für die analogen zwischen den Functionen $\vartheta(v)$ gefundenen Relationen gemacht habe, stelle ich noch jedes System von vier Formeln der Form (85) durch die eine einzige Gleichung dar

$$(86)\quad M^2 + M'^2 + M''^2 + M'''^2 = M_1{}^2 + M_1{}'^2 + M_1{}''^2 + M_1{}'''^2,$$

indem ich immer die vier Terme jedes Gliedes so ordne, dass man unter Beibehaltung dieser Reihenfolge ohne Zweideutigkeit der Vorzeichen zu den Gleichungen (85) zurückkehren kann.

Lässt man in den Gleichungen (85) die Argumente v, w, v', w', v'', w'', v''', w''' sich um die Hälften der vier conjugirten Periodenindices ändern, so entsteht eine grosse Anzahl von Systemen zu je vier Formeln derselben Art (85), deren jedes ich durch nur eine Gleichung der Form (86) repräsentire und dabei die Glieder dieser Gleichung ebenso ordne. Um aber den Text nicht mit zu grossem Formelapparate zu belasten, habe ich dieselben in eine Tabelle verwiesen.

Sei $M_1^{(r)}$ ein beliebiger der vier Ausdrücke M_1, M_1', M_1'', M_1''' und $M^{(r)}$ ein beliebiger unter M, M', M'', M''', so ist die Formeltabelle so construirt, dass sie $M^{(r)}$ und $M_1^{(r)}$ in der symbolischen Form

$$(87)\quad \begin{cases} M^{(r)} = a^{(r)}m \cdot b^{(r)}m' \cdot c^{(r)}m'' \cdot d^{(r)}n''' \\ \qquad\quad \pm\, a^{(r)}n \cdot b^{(r)}n' \cdot c^{(r)}n'' \cdot d^{(r)}n''' \\ M_1^{(r)} = a_1^{(r)}m_1 \cdot b_1^{(r)}m_1' \cdot c_1^{(r)}m_1'' \cdot d_1^{(r)}m_1''' \\ \qquad\quad \pm\, a_1^{(r)}n_1 \cdot b_1^{(r)}n_1' \cdot c_1^{(r)}n_1'' \cdot d_1^{(r)}n_1''' \end{cases}$$

giebt.

Die durch Punkte getrennten Buchstabenpaare stellen die Indices r und s der Functionen $\varphi_{r,s}$ dar, aus denen sich die Ausdrücke $M^{(r)}$ und $M_1^{(r)}$ zusammensetzen, und diese Paare sind so geordnet, dass die symbolischen Formeln (87) an Stelle der folgenden stehen:

$$(88)\begin{cases} M^{(r)} = \varphi_{a^{(r)},m}(v, w) \cdot \varphi_{b^{(r)},m'}(v', w') \cdot \varphi_{c^{(r)},m''}(v'', w'') \cdot \varphi_{d^{(r)},m'''}(v''', w''') \\ \qquad\quad \pm\, \varphi_{a^{(r)},n}(v, w) \cdot \varphi_{b^{(r)},n'}(v', w') \cdot \varphi_{c^{(r)},n''}(v'', w'') \cdot \varphi_{d^{(r)},n'''}(v''', w''') \\ M_1^{(r)} = \varphi_{a_1^{(r)},m_1}(v_1, w_1) \cdot \varphi_{b_1^{(r)},m'_1}(v'_1, w'_1) \cdot \varphi_{c_1^{(r)},m''_1}(v''_1, w''_1) \cdot \varphi_{d_1^{(r)},m'''_1}(v'''_1, w'''_1) \\ \qquad\quad \pm\, \varphi_{a_1^{(r)},n_1}(v_1, w_1) \cdot \varphi_{b_1^{(r)},n'_1}(v'_1, w'_1) \cdot \varphi_{c_1^{(r)},n''_1}(v''_1, w''_1) \cdot \varphi_{d_1^{(r)},n'''_1}(v'''_1, w'''_1) \end{cases}$$

[**415**] Jede Seite der Tabelle enthält zwei Colonnen von Ausdrücken der Form (87). Die Zeilen der ersten Colonne gehören zu je vier zu derselben Gleichung der Form (86), da

die Indices r, s der acht Functionen $\varphi_{r, s}$, aus denen sich die Grösse $M^{(r)}$ zusammensetzt, dieselben sind, wie die der acht Functionen, durch welche die Grösse $M_1^{(r)}$ ausgedrückt ist. Deshalb finden sich zur Seite jedes Systemes von vier Linien dieser Colonne die Zeichen M und M_1, M' und M'_1, M'' und M''_1, M''' und M'''_1. In der zweiten Colonne dagegen enthält jedes System von acht Linien die symbolischen Werthe (87) der acht zu zwei Formeln der Form (86) gehörenden Grössen $M^{(r)}$, $M_1^{(r)}$, welche auseinander hervorgehen, indem man die Argumente v_1, w_1; v'_1, w'_1; v''_1, w''_1; v'''_1, w'''_1 mit den Argumenten v, w; v', w'; v'', w''; v''', w''' vertauscht. Ich konnte also zur Seite jedes Systemes von acht Linien der zweiten Colonne die Zeichen setzen: M oder M_1; M' oder M'_1; M'' oder M_1''; M''' oder M_1'''; M_1 oder M; M'_1 oder M'; M_1'' oder M''; M_1''' oder M'''; die ersten Zeichen eines jeden Paares $\{M^{(r)}$ oder $M_1^{(r)}\}$ und $\{M_1^{(r)}$ oder $M^{(r)}\}$ gehören zu der ersten, die letzten Zeichen zu der anderen von den zwei Formeln der Form (86), welche in diesem System von acht Linien enthalten sind.

Zwei aufeinanderfolgende Systeme von vier Linien der ersten Colonne und das danebenstehende System von acht Linien der zweiten Colonne sind unter dieselbe Nummer n gesetzt und unterschieden durch die zur Seite der Zahl n geschriebenen Buchstaben a, b, c, d. Ich habe die Formeln so numerirt, weil die vier Formeln der Form (86), die durch dieselbe Nummer (n) bezeichnet sind, die Eigenschaft haben, dass, wenn man für die erste der beiden Formeln, deren Elemente in der ersten Colonne stehen, hat

$$M^{(r)} = A^{(r)} + B^{(r)}, \qquad M_1^{(r)} = A_1^{(r)} + B_1^{(r)},$$

und für die zweite

$$M^{(r)} = C^{(r)} - D^{(r)}, \qquad M_1^{(r)} = C_1^{(r)} - D_1^{(r)},$$

[416] man dann für die erste der in der zweiten Colonne enthaltenen Formeln

$$M^{(r)} = A^{(r)} - B^{(r)}, \qquad M_1^{(r)} = C_1^{(r)} + D_1^{(r)},$$

und für die zweite

$$M^{(r)} = C^{(r)} + D^{(r)}, \qquad M_1^{(r)} = A_1^{(r)} - B_1^{(r)}.$$

Drei beliebige eines derartigen Systems von vier Formeln entstehen aus der vierten, wenn man in ihr $w + \frac{i\pi}{2}$, $w' + \frac{i\pi}{2}$, $w'' + \frac{i\pi}{2}$, $w''' + \frac{i\pi}{2}$ für w, w', w'', w''' substituirt und wenn man dann in diesen zwei Formeln $w''' + i\pi$ für w''' setzt.

4.

Aus den in der eben erläuterten Formeltabelle enthaltenen Gleichungen zieht man leicht die Relationen, welche zwischen den sechzehn Functionen $\varphi_{r,s}(v, w)$ mit denselben Argumenten v, w und denselben Moduln p, q, A bestehen.

Betrachten wir zunächst diejenigen, welche man zwischen den Functionen $\varphi_{r,s}(0,0)$ erhält, die ich einfach mit $\varphi_{r,s}$ bezeichnen will. Es sind an Zahl zehn; denn man hat $\varphi_{r,1} = 0$, $\varphi_{1,r} = 0$, wenn r einer der drei Indices 0, 2, 3 ist.

Setzt man die Argumente v, w, v', w', v'', w'', v''', w''' gleich Null, so verschwinden die Argumente v_1, w_1 etc. ebenfalls und die in der Tabelle unter 1, 2, ..., 16 enthaltenen Formeln geben in diesem Falle die folgenden Gleichungen:

$$(89)\quad \begin{cases} \varphi^4_{3,3} - \varphi^4_{0,0} = \varphi^4_{2,0} + \varphi^4_{3,2} = \varphi^4_{0,2} + \varphi^4_{2,3}. \\ \varphi^4_{3,3} - \varphi^4_{1,1} = \varphi^4_{3,0} + \varphi^4_{3,2} = \varphi^4_{0,3} + \varphi^4_{2,3}. \\ \varphi^4_{3,3} - \varphi^4_{2,2} = \varphi^4_{3,0} + \varphi^4_{0,2} = \varphi^4_{0,3} + \varphi^4_{2,0}. \end{cases}$$

[417]

$$(90)\quad \begin{cases} 1.\ \varphi^2_{0,0}\ \varphi^2_{3,3} = \varphi^2_{0,3}\ \varphi^2_{3,0} + \varphi^2_{1,1}\ \varphi^2_{2,2}, \\ 2.\ \varphi^2_{0,0}\ \varphi^2_{2,2} = \varphi^2_{0,2}\ \varphi^2_{2,0} + \varphi^2_{1,1}\ \varphi^2_{3,3}, \\ 3.\ \varphi^2_{2,2}\ \varphi^2_{3,3} = \varphi^2_{2,3}\ \varphi^2_{3,2} + \varphi^2_{1,1}\ \varphi^2_{0,0}, \\ 4.\ \varphi^2_{0,3}\ \varphi^2_{3,3} = \varphi^2_{0,2}\ \varphi^2_{3,2} + \varphi^2_{0,0}\ \varphi^2_{3,0}, \\ 5.\ \varphi^2_{0,3}\ \varphi^2_{2,3} = \varphi^2_{0,2}\ \varphi^2_{2,2} + \varphi^2_{0,0}\ \varphi^2_{2,0}, \\ 6.\ \varphi^2_{2,3}\ \varphi^2_{3,3} = \varphi^2_{2,2}\ \varphi^2_{3,2} + \varphi^2_{2,0}\ \varphi^2_{3,0}, \\ 7.\ \varphi^2_{3,0}\ \varphi^2_{3,3} = \varphi^2_{2,0}\ \varphi^2_{2,3} + \varphi^2_{0,0}\ \varphi^2_{0,3}, \\ 8.\ \varphi^2_{3,0}\ \varphi^2_{3,2} = \varphi^2_{2,0}\ \varphi^2_{2,2} + \varphi^2_{0,0}\ \varphi^2_{0,2}, \\ 9.\ \varphi^2_{3,2}\ \varphi^2_{3,3} = \varphi^2_{2,2}\ \varphi^2_{2,3} + \varphi^2_{0,2}\ \varphi^2_{0,3}, \\ 10.\ \varphi^2_{0,3}\ \varphi^2_{3,2} = \varphi^2_{0,2}\ \varphi^2_{3,3} + \varphi^2_{1,1}\ \varphi^2_{2,0}, \\ 11.\ \varphi^2_{0,3}\ \varphi^2_{2,2} = \varphi^2_{0,2}\ \varphi^2_{2,3} + \varphi^2_{1,1}\ \varphi^2_{3,0}, \\ 12.\ \varphi^2_{0,0}\ \varphi^2_{3,2} = \varphi^2_{0,2}\ \varphi^2_{3,0} + \varphi^2_{1,1}\ \varphi^2_{2,3}, \end{cases}$$

$$(90)\begin{cases} 13.\ \varphi^2_{3,0}\,\varphi^2_{2,3} = \varphi^2_{2,0}\,\varphi^2_{3,3} + \varphi^2_{1,1}\,\varphi^2_{0,2}, \\ 14.\ \varphi^2_{3,0}\,\varphi^2_{2,2} = \varphi^2_{2,0}\,\varphi^2_{3,2} + \varphi^2_{1,1}\,\varphi^2_{0,3}, \\ 15.\ \varphi^2_{0,0}\,\varphi^2_{2,3} = \varphi^2_{2,0}\,\varphi^2_{0,3} + \varphi^2_{1,1}\,\varphi^2_{3,2}. \end{cases}$$

Das sind die algebraischen Relationen, welche zwischen den zehn Functionen $\varphi_{r,s}$ bestehen, und es sind die einzig möglichen, wenigstens wenn die Moduln p, q, A von einander unabhängig sind; denn bringt man drei beliebige der Gleichungen (90) in die Form $1 = k^2 + k^2_1$, $1 = \lambda^2 + \lambda^2_1$, $1 = \mu^2 + \mu^2_1$, so können die Verhältnisse der zehn Grössen $\varphi_{r,s}$ algebraisch durch k^2, λ^2, μ^2 ausgedrückt werden; und substituirt man ihre Ausdrücke in die anderen Gleichungen (90) und (89), so sind diese identisch erfüllt.

Ich wähle als solche drei Gleichungen die Formeln (90, 7), (90, 8), (90, 9) und setze

$$(91)\begin{cases} k^2 = \dfrac{\varphi^2_{2,2}\,\varphi^2_{2,3}}{\varphi^2_{3,2}\,\varphi^2_{3,3}}, \quad \lambda^2 = \dfrac{\varphi^2_{2,0}\,\varphi^2_{2,2}}{\varphi^2_{3,0}\,\varphi^2_{3,2}}, \quad \mu^2 = \dfrac{\varphi^2_{2,0}\,\varphi^2_{2,3}}{\varphi^2_{3,0}\,\varphi^2_{3,3}}, \\ k^2_1 = \dfrac{\varphi^2_{0,2}\,\varphi^2_{0,3}}{\varphi^2_{3,2}\,\varphi^2_{3,3}}, \quad \lambda^2_1 = \dfrac{\varphi^2_{0,0}\,\varphi^2_{0,2}}{\varphi^2_{3,0}\,\varphi^2_{3,2}}, \quad \mu^2_1 = \dfrac{\varphi^2_{0,0}\,\varphi^2_{0,3}}{\varphi^2_{3,0}\,\varphi^2_{3,3}}, \end{cases}$$

Aus den Gleichungen

$$1 = k^2 + k^2_1, \qquad 1 = \lambda^2 + \lambda^2_1, \qquad 1 = \mu^2 + \mu^2_1,$$

folgt, dass die Grössen k^2, λ^2, μ^2; k^2_1, λ^2_1, μ^2_1 alle kleiner als die Einheit sind, da sie positive Grössen sind. Man erkennt ohne Mühe, dass

$$k^2 - \lambda^2 > 0, \qquad \lambda^2 - \mu^2 > 0, \qquad \text{oder } k^2 > \lambda^2 > \mu^2,$$

folglich

$$\mu^2_1 - \lambda^2_1 > 0, \quad \lambda^2_1 - k^2_1 > 0, \quad \text{oder } \mu^2_1 > \lambda^2_1 > k^2_1;$$

[**418**] denn man hat mit Hülfe der Gleichungen (90, 4), (90, 3) und (90, 14)

$$k^2 - \lambda^2 = \frac{\varphi^2_{2,2}}{\varphi^2_{3,2}}\,\frac{\varphi^2_{3,0}\varphi^2_{2,3} - \varphi^2_{2,0}\varphi^2_{3,3}}{\varphi^2_{3,0}\,\varphi^2_{3,3}} = \frac{\varphi^2_{2,2}}{\varphi^2_{3,2}}\,\frac{\varphi^2_{1,1}\varphi^2_{0,2}}{\varphi^2_{3,0}\varphi^2_{3,3}} > 0,$$

$$\lambda^2 - \mu^2 = \frac{\varphi^2_{2,0}}{\varphi^2_{3,0}}\,\frac{\varphi^2_{2,2}\varphi^2_{3,3} - \varphi^2_{2,3}\varphi^2_{3,2}}{\varphi^2_{3,2}\,\varphi^2_{3,3}} = \frac{\varphi^2_{2,0}}{\varphi^2_{3,0}}\,\frac{\varphi^2_{1,1}\varphi^2_{0,0}}{\varphi^2_{3,2}\varphi^2_{3,3}} > 0,$$

$$k^2 - \mu^2 = \frac{\varphi^2_{2,3}}{\varphi^2_{3,3}}\,\frac{\varphi^2_{3,0}\varphi^2_{2,2} - \varphi^2_{2,0}\varphi^2_{3,2}}{\varphi^2_{3,2}\,\varphi^2_{3,0}} = \frac{\varphi^2_{2,3}}{\varphi^2_{3,3}}\,\frac{\varphi^2_{1,1}\varphi^2_{0,3}}{\varphi^2_{3,2}\varphi^2_{3,0}} > 0.$$

Ich werde mich hier der Modularbezeichnung *Richelot*'s bedienen, welcher auch schon die Zeichen

$$k^2_{\,1} = 1 - k^2, \qquad \lambda^2_{\,1} = 1 - \lambda^2, \qquad \mu^2_{\,1} = 1 - \mu^2,$$

entlehnt sind; ich setze

$$\lambda^2_{\,k} = k^2 - \lambda^2, \quad \mu^2_{\,k} = k^2 - \mu^2, \quad \mu^2_{\,\lambda} = \lambda^2 - \mu^2.$$

Danach hat man ausser den Gleichungen 91) die folgenden:

$$\lambda^2_{\,k} = \frac{\varphi^2_{1,1}\,\varphi^2_{0\cdot 2}\,\varphi^2_{2\cdot 2}}{\varphi^2_{3,0}\,\varphi^2_{3,2}\,\varphi^2_{3,3}}, \qquad \mu^2_{\,\lambda} = \frac{\varphi^2_{1\cdot 1}\,\varphi^2_{0\cdot 0}\,\varphi^2_{2\cdot 0}}{\varphi^2_{3,0}\,\varphi^2_{3,2}\,\varphi^2_{3,3}},$$

$$\mu^2_{\,k} = \frac{\varphi^2_{1\cdot 1}\,\varphi^2_{0,3}\,\varphi^2_{2\cdot 3}}{\varphi^2_{3,0}\,\varphi^2_{3,2}\,\varphi^2_{3,3}},$$

$$92)\left\{\begin{array}{ll}
1.\ \dfrac{\varphi^4_{0\,0}}{\varphi^4_{3,3}} = \dfrac{k^2\mu^2_{\,1}\mu^2_{\,\lambda}}{\lambda^2\mu^2_{\,k}}, & 5.\ \dfrac{\varphi^4_{2\cdot 0}}{\varphi^4_{3,3}} = \dfrac{k^2_{\,1}\mu^2\mu^2_{\,\lambda}}{\lambda^2_{\,1}\mu^2_{\,k}}, \\[2ex]
2.\ \dfrac{\varphi^4_{0\cdot 2}}{\varphi^4_{3,3}} = \dfrac{k^2_{\,1}\mu^2\lambda^2_{\,k}}{\lambda^2\mu^2_{\,k}}, & 6.\ \dfrac{\varphi^4_{2\cdot 3}}{\varphi^4_{3,3}} = \dfrac{k^2\mu^2}{\lambda^2}, \\[2ex]
3.\ \dfrac{\varphi^4_{0\cdot 3}}{\varphi^4_{3,3}} = \dfrac{k^2_{\,1}\mu^2_{\,1}}{\lambda^2_{\,1}}, & 7.\ \dfrac{\varphi^4_{1\cdot 1}}{\varphi^4_{3,3}} = \dfrac{\lambda^2_{\,k}\mu^2_{\,\lambda}}{\lambda^2\lambda^2_{\,1}}, \\[2ex]
4.\ \dfrac{\varphi^4_{2\cdot 2}}{\varphi^4_{3,3}} = \dfrac{k^2\mu^2_{\,1}\lambda^2_{\,k}}{\lambda^2\mu^2_{\,k}}, & 8.\ \dfrac{\varphi^4_{3\cdot 0}}{\varphi^4_{3,3}} = \dfrac{k^2k^2_{\,1}\mu^2_{\,\lambda}}{\lambda^2\lambda^2_{\,1}\mu^2_{\,k}}. \\[2ex]
\multicolumn{2}{c}{9.\ \dfrac{\varphi^4_{3\cdot 2}}{\varphi^4_{3,3}} = \dfrac{\mu^2\mu^2_{\,1}\lambda^2_{\,k}}{\lambda^2\lambda^2_{\,1}\mu^2_{\,k}}.}
\end{array}\right.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Formeln (89), so erhält man Gleichungen zwischen den drei Grössen k^2, λ^2, μ^2, die man ohne Rechnung als identisch erkennt mit Hülfe der bekannten identischen Formeln:

$$0 = \frac{1-bx_1\cdot 1-bx_2}{b-b_1\cdot b-b_2\cdot b-b_3} + \frac{1-b_1x_1\cdot 1-b_1x_2}{b_1-b_2\cdot b_1-b_3\cdot b_1-b}$$
$$+ \frac{1-b_2x_1\cdot 1-b_2x_2}{b_2-b_3\cdot b_2-b\cdot b_2-b_1} + \frac{1-b_3x_1\cdot 1-b_3x_2}{b_3-b\cdot b_3-b_1\cdot b_3-b_2};$$

$$1 = b_1 b_2\,\frac{1-bx_1\cdot 1-bx_2}{b-b_1\cdot b-b_2} + b_2 b\,\frac{1-b_1x_1\cdot 1-b_1x_2}{b_1-b_2\cdot b_1-b}$$
$$+ b b_1\,\frac{1-b_2x_1\cdot 1-b_2x_2}{b_2-b\cdot b_2-b_1},$$

419 [deren letzte aus der ersten für $b_3 = 0$ entsteht], indem man hier für b, b_1, b_2, b_3, x_1, x_2 in passender Auswahl 0, 1, k^2, λ^2, μ^2, ∞ setzt.

Die Gleichungen (90) werden, da man sie in die Form

$$1 = a^2 + a^2_1$$

bringen kann, durch Substitution der Ausdrücke (92) noch leichter verificirt. Von den fünfzehn Systemen der zwei Grössen a^2 und a^2_1, die man so in k^2, λ^2, μ^2 ausgedrückt erhält, sind zwölf gleich den zwölf Moduln und ihren Complementen, zu denen *Richelot* durch Transformation des ultra-elliptischen Integrals mit Hülfe einer rationalen Substitution ersten Grades gelangte.

Die drei unter dieser Zahl von zwölf complementären Modularsystemen nicht enthaltenen Systeme sind die, welche aus den Gleichungen (90, 2), (90, 10), (90, 13) hervorgehen, nämlich:

$$\frac{\varphi^2_{0\cdot 2}\,\varphi^2_{2\cdot 0}}{\varphi^2_{0,0}\,\varphi^2_{2,2}} = \frac{\mu^2 k^2_1}{\mu^2_1 k^2} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi^2_{1\cdot 1}\,\varphi^2_{3\cdot 3}}{\varphi^2_{0,0}\,\varphi^2_{2,2}} = \frac{\mu^2 k}{\mu^2_1 k^2},$$

$$\frac{\varphi^2_{0\cdot 2}\,\varphi^2_{3\cdot 3}}{\varphi^2_{0,3}\,\varphi^2_{3,2}} = \frac{\lambda^2_1}{\mu^2_1} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi^2_{1\cdot 1}\,\varphi^2_{2\cdot 0}}{\varphi^2_{0,3}\,\varphi^2_{3,2}} = \frac{\mu^2 \lambda}{\mu^2_1},$$

$$\frac{\varphi^2_{2\cdot 0}\,\varphi^2_{3\cdot 3}}{\varphi^2_{3,0}\,\varphi^2_{2,3}} = \frac{\lambda^2}{k^2} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi^2_{1\cdot 1}\,\varphi^2_{0\cdot 2}}{\varphi^2_{3,0}\,\varphi^2_{2,3}} = \frac{\lambda^2 k}{k^2}.$$

Indessen kann man auf dieselbe Weise auch zu diesen gelangen, wenn man sich nur nicht, wie es *Richelot* thut, auf solche Substitutionen allein beschränkt, welche zur canonischen Form des Integrales zurückführen.

5.

Setzt man in der Tabelle

$$v'' = v''' = 0, \quad w'' = w''' = 0, \quad v' = v, \quad w' = w,$$

so folgt auch

$$v_1'' = v_1''' = 0, \quad w_1'' = w_1''' = 0, \quad v_1' = v_1 = v, \quad w_1' = w_1 = w;$$

420 man erhält also durch diese Substitution algebraische Gleichungen zwischen den sechzehn Functionen $\varphi_{r,s}(v, w)$ mit demselben Argumentenpaar v, w. Diese Relationen sind homogen in Bezug auf die Functionen $\varphi_{r,s}(v, w)$, geben also

Beziehungen zwischen den Quotienten irgend einer der Functionen und den fünfzehn andern, und diese Beziehungen sind so geartet, dass man durch irgend zwei der Quotienten die dreizehn anderen algebraisch ausdrücken kann. Indessen ist die Art, auf welche diese von den zwei als unabhängig gewählten abhängen, nicht für alle dreizehn dieselbe. Es giebt immer drei, deren Quadrate mit den Quadraten jener zwei Quotienten, die wir als unabhängige Variable betrachten, durch drei lineare Gleichungen verbunden sind, während das Quadrat jedes der zehn andern von jenen durch eine quadratische Gleichung abhängt, deren Coefficienten lineare Functionen sind.

Ich habe die Quotienten

$$\frac{\varphi^2_{1,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi^2_{2,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

gewählt, um die dreizehn andern auszudrücken.

Die Formeln (6 d), (16 b) oder (16 c) und (12 b) oder (12 c) der Tabelle — die letzteren unter Umkehrung der Ordnung der Indices r, s der Functionen $\varphi_{r,s}$ — geben

$$(94)\quad \begin{cases} 1 = -\dfrac{\varphi^2_{3,0}}{\varphi^2_{2,0}}\dfrac{\varphi^2_{1,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} + \dfrac{\varphi^2_{0,0}}{\varphi^2_{2,0}}\dfrac{\varphi^2_{2,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} + \dfrac{\varphi^2_{1,1}}{\varphi^2_{2,0}}\dfrac{\varphi^2_{3,1}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}, \\[2ex] 1 = -\dfrac{\varphi^2_{3,3}}{\varphi^2_{2,3}}\dfrac{\varphi^2_{1,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} + \dfrac{\varphi^2_{0,3}}{\varphi^2_{2,3}}\dfrac{\varphi^2_{2,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} + \dfrac{\varphi^2_{1,1}}{\varphi^2_{2,3}}\dfrac{\varphi^2_{3,2}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}, \\[2ex] 1 = -\dfrac{\varphi^2_{3,2}}{\varphi^2_{2,2}}\dfrac{\varphi^2_{1,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} + \dfrac{\varphi^2_{0,2}}{\varphi^2_{2,2}}\dfrac{\varphi^2_{2,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} + \dfrac{\varphi^2_{1,1}}{\varphi^2_{2,2}}\dfrac{\varphi^2_{3,3}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}, \end{cases}$$

oder durch Substitution der Ausdrücke (92) des vorigen Paragraphen

$$(95)\quad \begin{cases} 1 = -\dfrac{k}{\lambda\mu}\dfrac{\varphi^2_{1,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} + \dfrac{k\lambda_1\mu_1}{k_1\lambda\mu}\dfrac{\varphi^2_{2,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} + \dfrac{\lambda_k\mu_k}{k_1\lambda\mu}\dfrac{\varphi^2_{3,1}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}, \\[2ex] 1 = -\dfrac{\lambda}{\mu k}\dfrac{\varphi^2_{1,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} + \dfrac{\lambda\mu_1 k_1}{\lambda_1\mu k}\dfrac{\varphi^2_{2,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} + \dfrac{\mu_\lambda\lambda_k}{\lambda_1\mu k}\dfrac{\varphi^2_{3,2}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}, \\[2ex] 1 = -\dfrac{\mu}{k\lambda}\dfrac{\varphi^2_{1,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} + \dfrac{\mu k_1\lambda_1}{\mu_1 k\lambda}\dfrac{\varphi^2_{2,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} + \dfrac{\mu_k\mu_\lambda}{\mu_1 k\lambda}\dfrac{\varphi^2_{3,3}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}. \end{cases}$$

[**421**] Statt nun drei der fünf in diesen Gleichungen enthaltenen Quotienten $\dfrac{\varphi_{r,s}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)}$ durch die beiden anderen auszudrücken, betrachte ich sie alle fünf als algebraische Functionen derselben

Variablen x_1 und x_2, weil dadurch die Symmetrie der Formeln besser gewahrt bleibt. Durch Vergleichung der Form der Gleichungen (95) mit der identischen Gleichung

$$(96)\quad 1 = b_1 b_2 \frac{1 - bx_1 \cdot 1 - bx_2}{b - b_1 \cdot b - b_2} + b_2 b \frac{1 - b_1 x_1 \cdot 1 - b_1 x_2}{b_1 - b_2 \cdot b_1 - b} + b b_1 \frac{1 - b_2 x_1 \cdot 1 - b_2 x_2}{b_2 - b \cdot b_2 - b_1}$$

sieht man, dass jedem der fünf betrachteten Quotienten die Form $\mathrm{B} \cdot 1 - bx_1 \cdot 1 - bx_2$ gegeben werden kann, wobei die Constanten B und b so zu bestimmen sind, dass die Gleichungen (95) die Form der identischen Gleichung (96) annehmen.

Setzen wir also

$$\frac{\vartheta^2_{1,0}(v, w)}{\vartheta^2_{0,0}(v, w)} = \mathrm{B} \cdot 1 - bx_1 \cdot 1 - bx_2,$$

$$\frac{\vartheta^2_{2,0}(v, w)}{\vartheta^2_{0,0}(v, w)} = \mathrm{B}_1 \cdot 1 - b_1 x_1 \cdot 1 - b_1 x_2,$$

$$\frac{\vartheta^2_{3,1}(v, w)}{\vartheta^2_{0,0}(v, w)} = \mathrm{C} \cdot 1 - cx_1 \cdot 1 - cx_2,$$

$$\frac{\vartheta^2_{3,2}(v, w)}{\vartheta^2_{0,0}(v, w)} = \mathrm{L} \cdot 1 - lx_1 \cdot 1 - lx_2,$$

$$\frac{\vartheta^2_{3,3}(v, w)}{\vartheta^2_{0,0}(v, w)} = \mathrm{M} \cdot 1 - mx_1 \cdot 1 - mx_2,$$

so erhalten wir zwischen den Constanten B, B_1, C, L, M, b, b_1, c, l, m, k, λ, μ die folgenden Gleichungen:

$$\frac{b_1 c}{b - b_1 \cdot b - c} = -\frac{k\mathrm{B}}{\lambda\mu}, \quad \frac{bc}{b_1 - b \cdot b_1 - c} = \frac{k\lambda_1\mu_1}{k_1\lambda\mu}\mathrm{B}_1,$$

$$\frac{bb_1}{c - b \cdot c - b_1} = \frac{\lambda_k \mu_k}{k_1 \lambda \mu}\mathrm{C},$$

$$\frac{b_1 l}{b - b_1 \cdot b - l} = -\frac{\lambda\mathrm{B}}{\mu k}, \quad \frac{bl}{b_1 - b \cdot b_1 - l} = \frac{\lambda\mu_1 k_1}{\lambda_1 \mu k}\mathrm{B}_1,$$

$$\frac{bb_1}{l - b \cdot l - b_1} = \frac{\mu_\lambda \lambda_k}{\lambda_1 \mu k}\mathrm{L},$$

$$\frac{b_1 m}{b - b_1 \cdot b - m} = -\frac{\mu\mathrm{B}}{k\lambda}, \quad \frac{bm}{b_1 - b \cdot b_1 - m} = \frac{\mu k_1 \lambda_1}{\mu_1 k \lambda}\mathrm{B}_1,$$

$$\frac{bb_1}{m - b \cdot m - b_1} = \frac{\mu_k \mu_\lambda}{\mu_1 k \lambda}\mathrm{M}.$$

[422] aus denen man zieht

$$\frac{\lambda^2_k}{b} = \frac{k^2}{c} - \frac{\lambda^2}{l}, \qquad \frac{\mu^2_\lambda}{b_1} = \frac{\lambda^2}{l} - \frac{\mu^2}{m},$$

$$\frac{\lambda^2_k}{b_1} = \frac{k^2\lambda^2_1}{c} - \frac{\lambda^2\lambda^2_1}{l}, \qquad \frac{\mu^2_\lambda}{b_1} = \frac{\lambda^2\mu^2_1}{l} - \frac{\mu^2\lambda^2_1}{m}.$$

Von den Constanten b, b_1, c, l, m können also irgend zwei beliebig gewählt werden und ich setze zur Vereinfachung der Formeln $b = \infty$, $b_1 = 1$. Man findet sodann

$$B = 0, \quad B\,b^2 = -k\lambda\mu, \qquad B_1 = -\frac{k\lambda\mu}{k_1\lambda_1\mu_1},$$

$$c = k^2, \quad l = \lambda^2, \quad m = \mu^2, \qquad C = \frac{\lambda\mu}{k_1\lambda_k\mu_k},$$

$$L = \frac{\mu k}{\lambda_1\mu_\lambda\lambda_k}, \qquad M = \frac{k\lambda}{\mu_1\mu_k\mu_\lambda};$$

folglich:

$$(97)\left\{\begin{array}{ll}
1. & \dfrac{\varphi^2_{1,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = -k\lambda\mu\cdot x_1\cdot x_2, \\[2ex]
2. & \dfrac{\varphi^2_{2,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = -\dfrac{k\lambda\mu}{k_1\lambda_1\mu_1}\cdot(1-x_1)\cdot(1-x_2), \\[2ex]
3. & \dfrac{\varphi^2_{3,1}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = \dfrac{\lambda\mu}{k_1\lambda_k\mu_k}\cdot(1-k^2x_1)\cdot(1-k^2x_2), \\[2ex]
4. & \dfrac{\varphi^2_{3,2}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = \dfrac{\mu k}{\lambda_1\mu_\lambda\lambda_k}\cdot(1-\lambda^2x_1)\cdot(1-\lambda^2x_2), \\[2ex]
5. & \dfrac{\varphi^2_{3,3}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = \dfrac{k\lambda}{\mu_1\mu_k\mu_\lambda}\cdot(1-\mu^2x_1)\cdot(1-\mu^2x_2).
\end{array}\right.$$

Damit die Ausdrücke in x_1 und x_2 aller fünfzehn Quotienten $\dfrac{\varphi^2_{r,s}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$ an derselben Stelle vereinigt sind, füge ich zu den fünf vorhergehenden die zehn andern hinzu, welche, wie oben bereits bemerkt, weniger einfache Functionen von x_1 und x_2 als jene sind; ich werde sie erst dann beweisen.

[423]

$$6.\quad \frac{\varphi^2_{3,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = -\frac{x_1 x_2 \cdot 1 - x_1 \cdot 1 - x_2}{k_1 \lambda_1 \mu_1 (x_2 - x_1)^2} \left\{ \frac{\sqrt{(x_1\, k\lambda\mu)}}{x_1 \cdot 1 - x_1} \pm \frac{\sqrt{(x_2\, k\lambda\mu)}}{x_2 \cdot 1 - x_2} \right\}^2,$$

$$7.\quad \frac{\varphi^2_{0,1}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = -\frac{\lambda\mu \cdot 1-\lambda^2 x_1 \cdot 1-\lambda^2 x_2 \cdot 1-\mu^2 x_1 \cdot 1-\mu^2 x_2}{\lambda_1 \mu_1 \lambda_k \mu_k (x_2 - x_1)^2} \left\{ \frac{\sqrt{(x_1\, k\lambda\mu)}}{1-\lambda^2 x_1 \cdot 1-\mu^2 x_1} \pm \frac{\sqrt{(x_2\, k\lambda\mu)}}{1-\lambda^2 x_2 \cdot 1-\mu^2 x_2} \right\}^2,$$

$$8.\quad \frac{\varphi^2_{0,2}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = -\frac{\mu k \cdot 1-\mu^2 x_1 \cdot 1-\mu^2 x_2 \cdot 1-k^2 x_1 \cdot 1-k^2 x_2}{\mu_1 k_1 \mu_\lambda \lambda_k (x_2 - x_1)^2} \left\{ \frac{\sqrt{(x_1\, k\lambda\mu)}}{1-\mu^2 x_1 \cdot 1-k^2 x_1} \pm \frac{\sqrt{(x_2\, k\lambda\mu)}}{1-\mu^2 x_2 \cdot 1-k^2 x_2} \right\}^2,$$

$$9.\quad \frac{\varphi^2_{0,3}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = -\frac{k\lambda \cdot 1-k^2 x_1 \cdot 1-k^2 x_2 \cdot 1-\lambda^2 x_1 \cdot 1-\lambda^2 x_2}{k_1 \lambda_1 \mu_k \mu_\lambda (x_2 - x_1)^2} \left\{ \frac{\sqrt{(x_1\, k\lambda\mu)}}{1-k^2 x_1 \cdot 1-\lambda^2 x_1} \pm \frac{\sqrt{(x_2\, k\lambda\mu)}}{1-k^2 x_2 \cdot 1-\lambda^2 x_2} \right\}^2,$$

97)

$$10.\quad \frac{\varphi^2_{1,1}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = \frac{k \cdot 1 - x_1 \cdot 1 - x_2 \cdot 1 - k^2 x_1 \cdot 1 - k^2 x_2}{\lambda_1 \mu_1 \lambda_k \mu_k (x_2 - x_1)^2} \left\{ \frac{\sqrt{(x_1\, k\lambda\mu)}}{1 - x_1 \cdot 1 - k^2 x_1} \pm \frac{\sqrt{(x_2\, k\lambda\mu)}}{1 - x_2 \cdot 1 - k^2 x_2} \right\}^2,$$

$$11.\quad \frac{\varphi^2_{1,2}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = \frac{\lambda \cdot 1 - x_1 \cdot 1 - x_2 \cdot 1 - \lambda^2 x_1 \cdot 1 - \lambda^2 x_2}{\mu_1 k_1 \mu_\lambda \lambda_k (x_2 - x_1)^2} \left\{ \frac{\sqrt{(x_1\, k\lambda\mu)}}{1 - x_1 \cdot 1 - \lambda^2 x_1} \pm \frac{\sqrt{(x_2\, k\lambda\mu)}}{1 - x_2 \cdot 1 - \lambda^2 x_2} \right\}^2,$$

$$12.\quad \frac{\varphi^2_{1,3}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = \frac{\mu \cdot 1 - x_1 \cdot 1 - x_2 \cdot 1 - \mu^2 x_1 \cdot 1 - \mu^2 x_2}{k_1 \lambda_1 \mu_k \mu_\lambda (x_2 - x_1)^2} \left\{ \frac{\sqrt{(x_1\, k\lambda\mu)}}{1 - x_1 \cdot 1 - \mu^2 x_1} \pm \frac{\sqrt{(x_2\, k\lambda\mu)}}{1 - x_2 \cdot 1 - \mu^2 x_2} \right\}^2,$$

$$13.\quad \frac{\varphi^2_{2,1}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = \frac{k x_1 x_2 \cdot 1 - k^2 x_1 \cdot 1 - k^2 x_2}{k_1 \lambda_k \mu_k (x_2 - x_1)^2} \left\{ \frac{\sqrt{(x_1\, k\lambda\mu)}}{x_1 \cdot 1 - k^2 x_1} \pm \frac{\sqrt{(x_2\, k\lambda\mu)}}{x_2 \cdot 1 - k^2 x_2} \right\}^2,$$

$$(97)\begin{cases} 14.\quad \dfrac{\varphi^2_{2,2}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = \dfrac{\lambda\cdot x_1 x_2\cdot 1-\lambda^2 x_1\cdot 1-\lambda^2 x_2}{\lambda_1\mu_\lambda\lambda_k\,(x_2-x_1)^2} \\ \qquad\qquad \left\{\dfrac{\sqrt{(x_1 k\lambda\mu)}}{x_1\cdot 1-\lambda^2 x_1}\pm\dfrac{\sqrt{(x_2 k\lambda\mu)}}{x_2\cdot 1-\lambda^2 x_2}\right\}^2, \\ 15.\quad \dfrac{\varphi^2_{2,3}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = \dfrac{\mu\cdot x_1 x_2\cdot 1-\mu^2 x_1\cdot 1-\mu^2 x_2}{\mu_1\mu_k\mu_\lambda\,(x_2-x_1)^2} \\ \qquad\qquad \left\{\dfrac{\sqrt{(x_1 k\lambda\mu)}}{x_1\cdot 1-\mu^2 x_1}\pm\dfrac{\sqrt{(x_2 k\lambda\mu)}}{x_2\cdot 1-\mu^2 x_2}\right\}^2, \end{cases}$$

wo wie früher

$$(xk\lambda\mu) = x\cdot 1-x\cdot 1-k^2x\cdot 1-\lambda^2x\cdot 1-\mu^2x.$$

Die erste dieser Formeln ist die Wurzel der quadratischen Gleichung, die aus den folgenden beiden

$$(98)\quad \varphi_{3,3}\varphi_{3,2}\varphi_{3,1}(v,w)\varphi_{3,0}(v,w)-\varphi_{2,3}\varphi_{2,2}\varphi_{2,0}(v,w)\varphi_{2,1}(v,w) \\ -\varphi_{0,3}\varphi_{0,2}\varphi_{0,0}(v,w)\varphi_{0,1}(v,w)=0,$$

$$(99)\begin{cases}\varphi^2_{1,1}\varphi^2_{0,1}(v,w)=\varphi^2_{0,0}\varphi^2_{1,0}(v,w)-\varphi^2_{3,0}\varphi^2_{2,0}(v,w)+\varphi^2_{2,0}\varphi^2_{3,0}(v,w), \\ \varphi^2_{1,1}\varphi^2_{2,1}(v,w)=\varphi^2_{2,0}\varphi^2_{1,0}(v,w)+\varphi^2_{3,0}\varphi^2_{0,0}(v,w)-\varphi^2_{0,0}\varphi^2_{3,0}(v,w),\end{cases}$$

durch Elimination von $\varphi_{2,1}(v,w)$, $\varphi_{0,1}(v,w)$ entsteht. Diese Gleichungen leiten sich ab aus den Formeln, die unter Nummer (25 *a*), (5 *d*) und (2 *d*) der Tabelle stehen. Mittels der Gleichungen (97) erhält man so

[**424**]
$$0=\frac{\varphi^4_{3,0}(v,w)}{\varphi^4_{0,0}(v,w)}-2\,\mathrm{P}\frac{\varphi^2_{3,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}+\mathrm{Q} \\ =\left\{\frac{\varphi^2_{3,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}-\mathrm{B}_1\right\}\cdot\left\{\frac{\varphi^2_{3,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}-\mathrm{B}_2\right\},$$

oder

$$2\,\mathrm{P}=\mathrm{B}_1+\mathrm{B}_2$$

$$=-2\,\frac{x_2\cdot 1-x_2\cdot 1-kx^2_1\cdot 1-\lambda^2x_1\cdot 1-\mu^2x_1+x_1\cdot 1-x_1\cdot 1-k^2x_2\cdot 1-\lambda^2x_2\cdot 1-\mu^2x_2}{k_1\lambda_1\mu_1\,(x_2-x_1)^2},$$

$$\mathrm{Q}=\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$$

$$=\left\{\frac{x_2\cdot 1-x_2\cdot 1-k^2x_1\cdot 1-\lambda^2x_1\cdot 1-\mu^2x_1-x_1\cdot 1-x_1\cdot 1-k^2x_2\cdot 1-\lambda^2x_2\cdot 1-\mu^2x_2}{k_1\lambda_1\mu_1\,(x_2-x_1)^2}\right\}^2,$$

woraus für B_1 und B_2 die im zweiten Gliede der Gleichung (97, 6) enthaltenen Werthe folgen. Man kann auch die

Coefficienten P und Q unmittelbar durch die symmetrischen Functionen von x_1 und x_2 ausdrücken, welche die zweiten Glieder der fünf ersten Gleichungen (97) bilden, aber sie nehmen eine complicirtere Form an; aus dem Grunde zog ich die vorstehenden Formeln vor, welche besser die Natur dieser Ausdrücke sehen lassen, obwohl der Zähler und Nenner von Q einen gemeinsamen Factor haben.

Nachdem wir die Gleichung (97, 6) gefunden haben, entstehen die andern mit Hülfe der folgenden Gleichungen:

$$
(100)\quad\left\{
\begin{aligned}
1.\ \ \varphi^2_{1,1}\,\varphi^2_{0,1}(v,w) - \varphi^2_{2,0}\,\varphi^2_{3,0}(v,w) &= \varphi^2_{0,0}\,\varphi^2_{1,0}(v,w) - \varphi^2_{3,0}\,\varphi^2_{2,0}(v,w) \\
&= \varphi^2_{2,2}\,\varphi^2_{3,2}(v,w) - \varphi^2_{2,3}\,\varphi^2_{3,3}(v,w), \\
2.\ \ \varphi^2_{1,1}\,\varphi^2_{0,2}(v,w) - \varphi^2_{2,3}\,\varphi^2_{3,0}(v,w) &= \varphi^2_{0,0}\,\varphi^2_{1,0}(v,w) - \varphi^2_{3,3}\,\varphi^2_{2,0}(v,w) \\
&= \varphi^2_{2,2}\,\varphi^2_{3,1}(v,w) - \varphi^2_{2,0}\,\varphi^2_{3,3}(v,w), \\
3.\ \ \varphi^2_{1,1}\,\varphi^2_{0,3}(v,w) - \varphi^2_{2,2}\,\varphi^2_{3,0}(v,w) &= \varphi^2_{0,2}\,\varphi^2_{1,0}(v,w) - \varphi^2_{3,2}\,\varphi^2_{2,0}(v,w) \\
&= \varphi^2_{2,3}\,\varphi^2_{3,1}(v,w) - \varphi^2_{2,0}\,\varphi^2_{3,2}(v,w), \\
4.\ \ \varphi^2_{1,1}\,\varphi^2_{1,1}(v,w) + \varphi^2_{3,0}\,\varphi^2_{3,0}(v,w) &= \varphi^2_{2,0}\,\varphi^2_{2,0}(v,w) + \varphi^2_{0,0}\,\varphi^2_{0,0}(v,w) \\
&= \varphi^2_{3,3}\,\varphi^2_{3,3}(v,w) - \varphi^2_{3,2}\,\varphi^2_{3,2}(v,w), \\
5.\ \ \varphi^2_{1,1}\,\varphi^2_{1,2}(v,w) + \varphi^2_{3,3}\,\varphi^2_{3,0}(v,w) &= \varphi^2_{2,3}\,\varphi^2_{2,0}(v,w) + \varphi^2_{0,3}\,\varphi^2_{0,0}(v,w) \\
&= \varphi^2_{3,0}\,\varphi^2_{3,3}(v,w) - \varphi^2_{3,2}\,\varphi^2_{3,1}(v,w), \\
6.\ \ \varphi^2_{1,1}\,\varphi^2_{1,3}(v,w) + \varphi^2_{3,2}\,\varphi^2_{3,0}(v,w) &= \varphi^2_{2,2}\,\varphi^2_{2,0}(v,w) + \varphi^2_{0,2}\,\varphi^2_{0,0}(v,w) \\
&= \varphi^2_{3,0}\,\varphi^2_{3,2}(v,w) - \varphi^2_{3,3}\,\varphi^2_{3,1}(v,w), \\
7.\ \ \varphi^2_{1,1}\,\varphi^2_{2,1}(v,w) + \varphi^2_{0,0}\,\varphi^2_{3,0}(v,w) &= \varphi^2_{2,0}\,\varphi^2_{1,0}(v,w) + \varphi^2_{3,0}\,\varphi^2_{0,0}(v,w) \\
&= \varphi^2_{0,3}\,\varphi^2_{3,3}(v,w) - \varphi^2_{0,2}\,\varphi^2_{3,2}(v,w), \\
8.\ \ \varphi^2_{1,1}\,\varphi^2_{2,2}(v,w) + \varphi^2_{0,3}\,\varphi^2_{3,0}(v,w) &= \varphi^2_{2,3}\,\varphi^2_{1,0}(v,w) + \varphi^2_{3,3}\,\varphi^2_{0,0}(v,w) \\
&= \varphi^2_{0,0}\,\varphi^2_{3,3}(v,w) - \varphi^2_{0,2}\,\varphi^2_{3,1}(v,w), \\
9.\ \ \varphi^2_{1,1}\,\varphi^2_{2,3}(v,w) + \varphi^2_{0,2}\,\varphi^2_{3,0}(v,w) &= \varphi^2_{2,2}\,\varphi^2_{1,0}(v,w) + \varphi^2_{3,2}\,\varphi^2_{0,0}(v,w) \\
&= \varphi^2_{0,0}\,\varphi^2_{3,2}(v,w) - \varphi^2_{0,3}\,\varphi^2_{3,1}(v,w).
\end{aligned}
\right.
$$

[425] Diese Formeln resultiren aus denjenigen, welche die Tabelle unter den Nummern 5, 7, 11, 1, 2, 3, 4, 6, 8 enthält. Sie sind so ausgewählt, dass sie die Ausdrücke der noch unbekannten neun Quotienten $\frac{\varphi_{r,s}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)}$ durch die sechs andern geben, deren Ausdrücke in x_1 und x_2 wir bereits gefunden haben.

Die andern diesen ähnlichen Relationen folgen aus den sechzehn ersten Nummern der Tabelle ohne die mindeste Rechnung. Man erhält achtundvierzig in der Form der Doppelgleichungen*) (100), welche selbst in ihnen enthalten sind. Dagegen giebt es hundertundzwanzig Gleichungen von der Form (98). Um sie alle zu erhalten, muss man in der Tabelle setzen $v = v'''$, $w = w'''$, $v' = v'' = 0$, $w' = w''$, woraus folgt $v_1 = v_1''' = v$, $w_1 = w_1''' = w$, $v_1' = v_1'' = w_1' = w_1'' = 0$. Alle diese Gleichungen zwischen den Functionen $\varphi_{r,s}(v,w)$ desselben Argumentenpaares v, w haben zwei Dimensionen; aber es giebt noch andere mit vier Dimensionen. Man erhält sie aus der Formeltabelle durch $v = v' = v'' = v'''$, $w = w' = w'' = w'''$. Vier von diesen entstehen aus Nummer (1) der Tabelle und diese sind aus den vierten Potenzen der acht Functionen $\varphi_{r,s}(v,w)$ zusammengesetzt. Die Glieder einiger sind die Producte von zwei Quadraten $\varphi^2_{r,s}(v,w)$ und diese bestehen zwischen allen sechzehn; und einige andere selbst unter acht Functionen $\varphi_{r,s}(v,w)$. Endlich giebt es zwanzig, die auch alle sechzehn Functionen $\varphi_{r,s}(v,w)$ enthalten, die aber in jedem ihrer vier Glieder vier verschiedene Factoren $\varphi_{r,s}(v,w)$ haben.

Unvorhergesehene Zufälle haben mich verhindert, diese Abhandlung rechtzeitig zu vollenden. Jetzt ist der für die Concurrenz festgesetzte Termin so nahe, dass ich kaum Zeit habe kurz zu zeigen, dass die soeben für x_1 und x_2 und v und w gefundenen Ausdrücke in der That den Gleichungen

[426]

$$(101)\quad \begin{cases} v = \int_{a_1}^{x_1} \frac{(A+Bx)\,dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}} + \int_{a_2}^{x_2} \frac{(A+Bx)\,dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}}, \\ w = \int_{a_1}^{x_1} \frac{(A'+B'x)\,dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}} + \int_{a_2}^{x_2} \frac{(A'+B'x)\,dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}}, \end{cases}$$

*) Diese bestehen zwischen vier Functionen, während die andern sechs enthalten.

genügen und dass diese Lösung der Gleichungen (101) für die Unbekannten x_1 und x_2 nicht nur einen Specialfall umfasst, wie man auf Grund der offenbar besonderen Beziehung glauben könnte, die zwischen den vier Paaren conjugirter Periodenindices der periodischen Functionen $x_1(v, w)$, $x_2(v, w)$ feststeht, sondern dass diese Beziehung unabhängig von den Werthen der Moduln k, λ, μ statt hat. Wenn ich es trotzdem wage, diese unvollendete Abhandlung dem Urtheil der Academie zu unterbreiten, so ist dies durch die Meinung begründet, dass sie, auch so wie sie ist, einiges Licht über die vorgelegte Frage verbreitet; überdies wird man, ebenso wie ich von den Functionen zweier Variabler mit drei Perioden zu denen mit vieren fortgeschritten bin, auch periodische Functionen von drei und noch mehr Variablen finden können, welche die Umkehrungen von ultra-elliptischen Integralen höherer Ordnung sind.

Was die Vorzeichen der Quadratwurzeln der für die fünfzehn Quotienten $\frac{\varphi_{r,s}{}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}{}^2(v, w)}$ gefundenen algebraischen Ausdrücke anlangt, so bin ich aus Mangel an Zeit gezwungen, mich auf die Bemerkung zu beschränken, dass diese Vorzeichen von denen der fünfzehn Quotienten $\frac{\varphi_{r,s}(v, w)}{\varphi_{0,0}(v, w)}$ abhängen werden. Um diese letzteren Vorzeichen zu entwickeln, genügt es, den Weg zu untersuchen, welchem die sechzehn Functionen $\varphi_{r,s}(iv', iw')$ folgen, wenn v' und w' beide von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen; denn diesen sind, wie man gesehen hat, die Functionen $\varphi_{r,s}(v, w)$ mit reellen Argumenten proportional.

6.

Setzt man in der Tabelle

[427]
$$v'' = v, \quad v''' = v',$$
$$w'' = w, \quad w''' = w',$$

folglich

$$v_1 = v + v', \quad v_1'' = v - v', \quad v_1' = 0, \quad v_1''' = 0,$$
$$w_1 = w + w', \quad w_1'' = w - w', \quad w_1' = 0, \quad w_1''' = 0,$$

so erhält man Gleichungen zwischen den Functionen $\varphi_{r,s}(v, w)$ mit den vorstehenden Argumentenpaaren, in denen man unmittelbar sowohl die Additionsformeln als auch die Ausdrücke der partiellen Differentialquotienten der Functionen $\dfrac{\varphi_{r,s}(v, w)}{\varphi_{0,0}(v, w)}$ besitzt. Die Gleichungen, um die es sich handelt, geben als Summen

$$\begin{aligned}&\varphi_{r,s}(v+v',\ w+w')\ \varphi_{0,0}(v-v',\ w-w')\\ +\ &\varphi_{0,0}(v+v',\ w+w')\ \varphi_{r,s}(v-v',\ w-w')\end{aligned}$$

sechs verschiedene Ausdrücke und ebensoviel für die Differenz ihrer beiden Glieder. Unter der Zahl dieser Formeln finden sich auch die folgenden, bei denen ich $v_1 = v + v'$, $w_1 = w + w'$, $v_1' = v - v'$, $w_1' = w - w'$ setzte:

$$102)\ \left\{\begin{aligned}
1.\ \tfrac{1}{2}\varphi_{2,0}\varphi_{3,0}\{&\varphi_{1,0}(v_1, w_1)\varphi_{0,0}(v_1', w_1') - \varphi_{0,0}(v_1, w_1)\varphi_{1,0}(v_1', w_1')\}\\
&= \varphi_{2,0}(v, w)\,\varphi_{3,0}(v, w)\,\varphi_{0,0}(v', w')\,\varphi_{1,0}(v', w')\\
&- \varphi_{2,1}(v, w)\,\varphi_{3,1}(v, w)\,\varphi_{1,1}(v', w')\,\varphi_{0,1}(v', w')\\
&= \varphi_{2,3}(v, w)\,\varphi_{3,3}(v, w)\,\varphi_{0,3}(v', w')\,\varphi_{1,3}(v', w')\\
&- \varphi_{2,2}(v, w)\,\varphi_{3,2}(v, w)\,\varphi_{1,2}(v', w')\,\varphi_{0,2}(v', w').\\
2.\ \tfrac{1}{2}\varphi_{2,2}\varphi_{3,2}\{&\varphi_{1,0}(v_1, w_1)\varphi_{0,0}(v_1', w_1') - \varphi_{0,0}(v_1, w_1)\varphi_{1,0}(v_1', w_1')\}\\
&= \varphi_{2,0}(v, w)\,\varphi_{3,0}(v, w)\,\varphi_{0,2}(v', w')\,\varphi_{1,2}(v', w')\\
&- \varphi_{2,3}(v, w)\,\varphi_{3,3}(v, w)\,\varphi_{0,1}(v', w')\,\varphi_{1,1}(v', w')\\
&= \varphi_{2,2}(v, w)\,\varphi_{3,2}(v, w)\,\varphi_{0,0}(v', w')\,\varphi_{1,0}(v', w')\\
&- \varphi_{2,1}(v, w)\,\varphi_{3,1}(v, w)\,\varphi_{0,3}(v', w')\,\varphi_{1,3}(v', w').\\
3.\ \tfrac{1}{2}\varphi_{2,3}\varphi_{3,3}\{&\varphi_{1,0}(v_1, w_1)\varphi_{0,0}(v_1', w_1') - \varphi_{0,0}(v_1, w_1)\varphi_{1,0}(v_1', w_1')\}\\
&= \varphi_{2,0}(v, w)\,\varphi_{3,3}(v, w)\,\varphi_{0,0}(v', w')\,\varphi_{1,3}(v', w')\\
&- \varphi_{2,2}(v, w)\,\varphi_{3,2}(v, w)\,\varphi_{0,1}(v', w')\,\varphi_{1,1}(v', w')\\
&= \varphi_{2,3}(v, w)\,\varphi_{3,3}(v, w)\,\varphi_{0,0}(v', w')\,\varphi_{1,0}(v', w')\\
&- \varphi_{2,1}(v, w)\,\varphi_{3,1}(v, w)\,\varphi_{0,2}(v', w')\,\varphi_{1,2}(v', w').
\end{aligned}\right.$$

$$103)\ \left\{\begin{aligned}
1.\ \tfrac{1}{2}\varphi_{2,0}\varphi_{0,0}\{&\varphi_{2,0}(v_1, w_1)\varphi_{0,0}(v_1', w_1') - \varphi_{0,0}(v_1, w_1)\varphi_{2,0}(v_1', w_1')\}\\
&= \varphi_{3,3}(v, w)\,\varphi_{1,3}(v, w)\,\varphi_{3,3}(v', w')\,\varphi_{1,3}(v', w')\\
&- \varphi_{3,2}(v, w)\,\varphi_{1,2}(v, w)\,\varphi_{3,2}(v', w')\,\varphi_{1,2}(v', w')\\
&= \varphi_{3,0}(v, w)\,\varphi_{1,0}(v, w)\,\varphi_{3,0}(v', w')\,\varphi_{1,0}(v', w')\\
&- \varphi_{3,1}(v, w)\,\varphi_{1,1}(v, w)\,\varphi_{3,1}(v', w')\,\varphi_{1,1}(v', w'),
\end{aligned}\right.$$

$$(103)\left\{\begin{aligned}
2.\ \tfrac{1}{2}\varphi_{2,2}\varphi_{0,2}\{\varphi_{2,0}(v_1,w_1)\varphi_{0,0}(v_1',w_1')-\varphi_{0,0}(v_1,w_1)\varphi_{2,0}(v_1',w_1')\}
&= \varphi_{3,2}(v,w)\,\varphi_{1,2}(v,w)\,\varphi_{3,0}(v',w')\,\varphi_{1,0}(v',w')\\
&\quad-\varphi_{3,1}(v,w)\,\varphi_{1,1}(v,w)\,\varphi_{3,3}(v',w')\,\varphi_{1,3}(v',w')\\
&= \varphi_{3,0}(v,w)\,\varphi_{1,0}(v,w)\,\varphi_{3,2}(v',w')\,\varphi_{1,2}(v',w')\\
&\quad-\varphi_{3,3}(v,w)\,\varphi_{1,3}(v,w)\,\varphi_{3,1}(v',w')\,\varphi_{1,1}(v',w'),\\
3.\ \tfrac{1}{2}\varphi_{2,3}\varphi_{0,3}\{\varphi_{2,0}(v_1,w_1)\varphi_{0,0}(v_1',w_1')-\varphi_{0,0}(v_1,w_1)\varphi_{2,0}(v_1',w_1')\}
&= \varphi_{3,3}(v,w)\,\varphi_{1,3}(v,w)\,\varphi_{3,0}(v',w')\,\varphi_{1,0}(v',w')\\
&\quad-\varphi_{3,1}(v,w)\,\varphi_{1,1}(v,w)\,\varphi_{3,2}(v',w')\,\varphi_{1,2}(v',w')\\
&= \varphi_{3,0}(v,w)\,\varphi_{1,0}(v,w)\,\varphi_{3,3}(v',w')\,\varphi_{1,3}(v',w')\\
&\quad-\varphi_{3,2}(v,w)\,\varphi_{1,2}(v,w)\,\varphi_{3,1}(v',w')\,\varphi_{1,1}(v',w').
\end{aligned}\right.$$

[**428**] Entwickelt man die Glieder dieser Gleichungen nach steigenden Potenzen von v' und w' und vergleicht dann die Coefficienten von v' und w', so erhält man die partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{d\dfrac{\varphi_{1,0}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)}}{dv} \qquad \frac{d\dfrac{\varphi_{1,0}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)}}{dw},$$

ausgedrückt durch die Functionen $\dfrac{\varphi_{r,s}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)}$. Die neun Functionen $\varphi_{r,s}(v,w)$, welchen den Werthen 0, 2, 3 der Indices r und s entsprechen, und die Function $\varphi_{1,1}(v,w)$ ändern ihren Werth nicht, wenn man zugleich $-v$ für v und $-w$ für w setzt, sind also gerade Functionen von v und w, enthalten mithin nur Glieder gerader Dimensionen; daraus folgt, dass ihre ersten Differentialquotienten für $v=0$, $w=0$ verschwinden. Ich werde die totalen Differentiale durch den Buchstaben d und die partiellen durch d bezeichnen; gelegentlich werde ich mich indessen auch der *Lagrange*'schen Bezeichnung bedienen und setzen

$$df(v,w)=f'(v)\,dv+f'(w)\,dw,$$

oder

$$df(v,w)=\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v}\,dv+\frac{\mathrm{d}f(w)}{\mathrm{d}w}\,dw;$$

überdies will ich die Werthe von $f'(v)$ und $f'(w)$ für $v=w=0$ mit $f'(v)_0$ und $f'(w)_0$ bezeichnen.

Aus der Gleichheit des ersten und dritten Gliedes der Doppelgleichung (102, 1) und aus der zwischen den beiden ersten Gliedern der Gleichung (103, 1) erhält man auf solche Weise die folgenden Formeln:

$$
(104)\quad\begin{cases}
1.\ \varphi_{2,0}\,\varphi_{3,0}\,\varphi^2_{0,0}(v,w)\,\dfrac{d\dfrac{\varphi_{1,0}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)}}{dv} \\
\qquad = \varphi_{0,3}\,\varphi'_{1,3}(v)_0\,\varphi_{3,3}(v,w)\,\varphi_{2,3}(v,w) \\
\qquad - \varphi_{0,2}\,\varphi'_{1,2}(v)_0\,\varphi_{3,2}(v,w)\,\varphi_{2,2}(v,w), \\
2.\ \varphi_{2,0}\,\varphi_{3,0}\,\varphi^2_{0,0}(v,w)\,\dfrac{d\dfrac{\varphi_{1,0}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)}}{dw} \\
\qquad = \varphi_{0,3}\,\varphi'_{1,3}(w)_0\,\varphi_{3,3}(v,w)\,\varphi_{2,3}(v,w) \\
\qquad - \varphi_{0,2}\,\varphi'_{1,2}(w)_0\,\varphi_{3,2}(v,w)\,\varphi_{2,2}(v,w),
\end{cases}
$$

[429]

$$
(105)\quad\begin{cases}
1.\ \varphi_{2,0}\,\varphi_{0,0}\,\varphi^2_{0,0}(v,w)\,\dfrac{d\dfrac{\varphi_{2,0}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)}}{dv} \\
\qquad = \varphi_{3,3}\,\varphi'_{1,3}(v)_0\,\varphi_{3,3}(v,w)\,\varphi_{1,3}(v,w) \\
\qquad - \varphi_{3,2}\,\varphi'_{1,2}(v)_0\,\varphi_{3,2}(v,w)\,\varphi_{1,2}(v,w), \\
2.\ \varphi_{2,0}\,\varphi_{0,0}\,\varphi^2_{0,0}(v,w)\,\dfrac{d\dfrac{\varphi_{2,0}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)}}{dw} \\
\qquad = \varphi_{3,3}\,\varphi'_{1,3}(w)_0\,\varphi_{3,3}(v,w)\,\varphi_{1,3}(v,w) \\
\qquad - \varphi_{3,2}\,\varphi'_{1,2}(w)_0\,\varphi_{3,2}(v,w)\,\varphi_{1,2}(v,w),
\end{cases}
$$

auf welche ich mich beschränken werde.

7.

Setzt man in diesen Gleichungen für die Functionen $\dfrac{\varphi_{r,s}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)}$ die algebraischen Ausdrücke (97) in x_1 und x_2, so geben sie die Ausdrücke der Differentialquotienten

$$
\frac{d\sqrt{x_1 x_2}}{dv},\quad \frac{d\sqrt{x_1 x_2}}{dw},\quad \frac{d\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}}{dv},\quad \frac{d\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}}{dw}
$$

durch symmetrische Functionen von x_1 und x_2, folglich auch diejenigen von dv und dw. Um zu beweisen, dass man hierdurch wirklich erhält:

$$(106)\quad \begin{cases} 1.\ dv = \dfrac{B + Cx_1}{\varepsilon_1 \sqrt{(x_1 k \lambda \mu)}} dx_1 + \dfrac{B + Cx_2}{\varepsilon_2 \sqrt{(x_2 k \lambda \mu)}} dx_2, \\ 1.\ dw = \dfrac{B' + C'x_1}{\varepsilon_1 \sqrt{(x_1 k \lambda \mu)}} dx_1 + \dfrac{B' + C'x_2}{\varepsilon_2 \sqrt{(x_2 k \lambda \mu)}} dx_2, \end{cases}$$

wo B, C, B′, C′ Constante sind und ε_1 und ε_2 die Vorzeichen + oder — von $\sqrt{(x_1 k \lambda \mu)}$ und $\sqrt{(x_2 k \lambda \mu)}$ bedeuten, betrachte ich die ähnlichen Gleichungen

$$(107)\quad \begin{cases} du = \dfrac{1 - \lambda^2 x_1}{\varepsilon_1 \sqrt{(x_1 k \lambda \mu)}} dx_1 + \dfrac{1 - \lambda^2 x_2}{\varepsilon_2 \sqrt{(x_2 k \lambda \mu)}} dx_2, \\ du' = \dfrac{1 - \mu^2 x_1}{\varepsilon_1 \sqrt{(x_1 k \lambda \mu)}} dx_1 + \dfrac{1 - \mu^2 x_2}{\varepsilon_2 \sqrt{(x_2 k \lambda \mu)}} dx_2, \end{cases}$$

Man wird nun haben

$$du = a\,dv + b\,dw$$
$$du' = a'\,dv + b'\,dw$$

430 und wenn man mit f eine beliebige Function von v und w bezeichnet, so folgt: $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v} = a\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} + a'\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u'}$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}w} = b\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} + b'\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u'}$.

Die Gleichungen (107) geben

$$(108)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1-\mu^2 x_2 \cdot \varepsilon_1 \sqrt{(x_1 k \lambda \mu)}}{\mu_\lambda^2 \cdot x_2 - x_1}, & \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}u'} = -\dfrac{1-\lambda^2 x_2 \cdot \varepsilon_1 \sqrt{(x_1 k \lambda \mu)}}{\mu_\lambda^2 \cdot x_2 - x_1}, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}u} = -\dfrac{1-\mu^2 x_1 \cdot \varepsilon_2 \sqrt{(x_2 k \lambda \mu)}}{\mu_\lambda^2 \cdot x_2 - x_1}, & \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}u'} = \dfrac{1-\lambda^2 x_1 \cdot \varepsilon_2 \sqrt{(x_2 k \lambda \mu)}}{\mu_\lambda^2 \cdot x_2 - x_1}, \end{cases}$$

wo ich zur bequemeren Schreibweise der Formeln Punkte an Stelle der Klammern gesetzt habe, die anzeigen, dass alle Glieder vor dem Punkt mit allen nachfolgenden zu multipliciren sind.

Man hat folglich

$$(109)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\sqrt{x_1 x_2}}{\mathrm{d}u} = \dfrac{\sqrt{1-\mu^2 x_1 \cdot 1-\mu^2 x_2}}{2\mu^2_\lambda}\ \dfrac{\sqrt{x_1 x_2}\sqrt{1-\mu^2 x_1 \cdot 1-\mu^2 x_2}}{x_2 - x_1} \\ \qquad\qquad \left\{\dfrac{\varepsilon_1 \sqrt{(x_1 k \lambda \mu)}}{x_1 \cdot 1-\mu^2 x_2} - \dfrac{\varepsilon_2 \sqrt{(x_2 k \lambda \mu)}}{x_2 \cdot 1-\mu^2 x_2}\right\}, \end{cases}$$

$$
(109)\quad\begin{cases}
\dfrac{d\sqrt{x_1 x_2}}{du'} = -\dfrac{\sqrt{1-\lambda^2 x_1\cdot 1-\lambda^2 x_2}}{2\,\mu_\lambda^2}\,\dfrac{\sqrt{x_1 x_2}\,\sqrt{1-\lambda^2 x_1\cdot 1-\lambda^2 x_2}}{x_2-x_1}\\
\qquad\qquad\left\{\dfrac{\varepsilon_1\sqrt{x_1 k\lambda\mu}}{x_1\cdot 1-\lambda^2 x_1}-\dfrac{\varepsilon_2\sqrt{x_2 k\lambda\mu}}{x_2\cdot 1-\lambda^2 x_2}\right\},\\[2ex]
\dfrac{d\sqrt{1-x_1\cdot 1-x_2}}{du} = -\dfrac{\sqrt{1-\mu^2 x_1\cdot 1-\mu^2 x_2}}{2\,\mu_\lambda^2}\,\dfrac{\sqrt{1-x_1\cdot 1-x_2}\,\sqrt{1-\mu^2 x_1\cdot 1-\mu^2 x_2}}{x_2-x_1}\\
\qquad\qquad\left\{\dfrac{\varepsilon_1\sqrt{x_1 k\lambda\mu}}{1-x_1\cdot 1-\mu^2 x_1}-\dfrac{\varepsilon_2\sqrt{x_2 k\lambda\mu}}{1-x_2\cdot 1-\mu^2 x_2}\right\},\\[2ex]
\dfrac{d\sqrt{1-x_1\cdot 1-x_2}}{du'} = \dfrac{\sqrt{1-\lambda^2 x_1\cdot 1-\lambda^2 x_2}}{2\,\mu_\lambda^2}\,\dfrac{\sqrt{1-x_1\cdot 1-x_2}\,\sqrt{1-\lambda^2 x_1\cdot 1-\lambda^2 x_2}}{x_2-x_1}\\
\qquad\qquad\left\{\dfrac{\varepsilon_1\sqrt{x_1 k\lambda\mu}}{1-x_1\cdot 1-\lambda^2 x_1}-\dfrac{\varepsilon_2\sqrt{x_2 k\lambda\mu}}{1-x_2\cdot 1-\lambda^2 x_2}\right\}.
\end{cases}
$$

Nun haben wir aber gefunden, dass, wenn man setzt

$$
i\sqrt{k\lambda\mu}\,\sqrt{x_1 x_2} = \frac{\varphi_{1,0}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)},\quad \sqrt{1-x_1\cdot 1-x_2} = i\,\frac{\varphi_{2,0}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)},
$$

man auch hat

$$
\sqrt{\frac{k\lambda}{\mu_1\,\mu_k\,\mu_\lambda}}\,\sqrt{1-\mu^2 x_1\cdot 1-\mu^2 x_2} = \frac{\varphi_{3,3}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)},
$$

$$
\sqrt{\frac{\mu k}{\lambda_1\,\mu_\lambda\,\lambda_k}}\,\sqrt{1-\lambda^2 x_1\cdot 1-\lambda^2 x_2} = \frac{\varphi_{3,2}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)},
$$

$$
\frac{\sqrt{\lambda}\,\sqrt{x_1 x_2}\,\sqrt{1-\lambda^2 x_1\cdot 1-\lambda^2 x_2}}{\sqrt{\lambda_1\,\mu_\lambda\,\lambda_k}\,(x_2-x_1)}\times
\left\{\frac{\varepsilon_1\sqrt{x_1 k\lambda\mu}}{x_1\cdot 1-\lambda^2 x_1}-\frac{\varepsilon_2\sqrt{x_2 k\lambda\mu}}{x_2\cdot 1-\lambda^2 x_2}\right\} = \frac{\varphi_{2,2}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)},
$$

[431] $$
\frac{\sqrt{\mu}\,\sqrt{x_1 x_2}\,\sqrt{1-\mu^2 x_1\cdot 1-\mu^2 x_2}}{\sqrt{\mu_1\,\mu_k\,\mu_\lambda}\,(x_2-x_1)}\times
\left\{\frac{\varepsilon_1\sqrt{x_1 k\lambda\mu}}{x_1\cdot 1-\mu^2 x_1}-\frac{\varepsilon_2\sqrt{x_2 k\lambda\mu}}{x_2\cdot 1-\mu^2 x_2}\right\} = \frac{\varphi_{2,3}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)},
$$

$$\frac{\sqrt{\lambda}\sqrt{1-x_2\cdot 1-x_2}\sqrt{1-\lambda^2 x_1\cdot 1-\lambda^2 x_2}}{\sqrt{\mu_1 k_1 \mu_\lambda \lambda_k}\,(x_2-x_1)}\times$$
$$\left\{\frac{\varepsilon_1\sqrt{(x_1 k\lambda\mu)}}{1-x_1\cdot 1-\lambda^2 x_1}-\frac{\varepsilon_2\sqrt{(x_2 k\lambda\mu)}}{1-x_2\cdot 1-\lambda^2 x_2}\right\}=\frac{\varphi_{1,2}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)},$$

$$\frac{\sqrt{\mu}\sqrt{1-x_1\cdot 1-x_2}\sqrt{1-\mu^2 x_1\cdot 1-\mu^2 x_2}}{\sqrt{k_1\lambda_1\mu_k\mu_\lambda}\,(x_2-x_1)}\times$$
$$\left\{\frac{\varepsilon_1\sqrt{(x_1 k\lambda\mu)}}{1-x_1\cdot 1-\mu^2 x_1}-\frac{\varepsilon_2\sqrt{(x_2 k\lambda\mu)}}{1-x_2\cdot 1-\mu^2 x_2}\right\}=\frac{\varphi_{1,3}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)},$$

also aus den Gleichungen (109) folgt

$$(110)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sqrt{k\lambda\mu}\;\frac{d\sqrt{x_1x_2}}{du}=\frac{\mu_1\mu_k}{2\,\mu_\lambda}\,\frac{\varphi_{3,3}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)}\,\frac{\varphi_{2,3}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)},\\
&\sqrt{k\lambda\mu}\;\frac{d\sqrt{x_1x_2}}{du'}=-\frac{\lambda_1\lambda_k}{2\,\mu_\lambda}\,\frac{\varphi_{3,2}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)}\,\frac{\varphi_{2,2}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)},\\
&\sqrt{\frac{k\lambda\mu}{k_1\lambda_1\mu_1}}\;\frac{d\sqrt{1-x_1\cdot 1-x_2}}{du}=-\frac{\mu_k}{2\,\mu_k}\,\frac{\varphi_{3,3}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)}\,\frac{\varphi_{1,3}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)},\\
&\sqrt{\frac{k\lambda\mu}{k_k\lambda_1\mu_1}}\;\frac{d\sqrt{1-x_1\cdot 1-x_2}}{du'}=\frac{\lambda_k}{2\,\mu_\lambda}\,\frac{\varphi_{2,2}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)}\,\frac{\varphi_{1,2}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)},\\
&\mu_1=\frac{\varphi_{0,0}\;\varphi_{0,3}}{\varphi_{3,3}\;\varphi_{3,0}},\\
&\lambda_1=\frac{\varphi_{0,0}\;\varphi_{0,2}}{\varphi_{3,0}\;\varphi_{3,2}},\\
&\frac{\mu_\lambda}{\mu_k}=\frac{\varphi_{2,0}\;\varphi_{0,0}}{\varphi_{2,3}\;\varphi_{0,3}},\\
&\frac{\mu_\lambda}{\lambda_k}=\frac{\varphi_{2,0}\;\varphi_{0,0}}{\varphi_{2,2}\;\varphi_{0,2}}.
\end{aligned}\right.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Formeln (104) und (105), so sieht man, dass

$$(111)\quad\left\{\begin{aligned}
i\,\frac{\mathrm{d}\sqrt{x_1x_2}}{\mathrm{d}v}&=\frac{2\,\mu_\lambda}{\mu_k}\,\frac{\varphi_{3,3}\,\varphi'_{1,3}(v)_0}{\varphi_{2,0}\,\varphi_{0,0}}\,\frac{\mathrm{d}\sqrt{x_1x_2}}{\mathrm{d}u}\\
&+\frac{2\,\mu_\lambda}{\mu_k}\,\frac{\varphi_{3,2}\,\varphi'_{1,2}(v)_0}{\varphi_{2,0}\,\varphi_{0,0}}\,\frac{\mathrm{d}\sqrt{x_1x_1}}{\mathrm{d}u'},
\end{aligned}\right.$$

$$(111)\quad \left\{\begin{aligned} i\,\frac{\mathrm{d}\sqrt{x_1 x_2}}{\mathrm{d}w} &= \frac{2\mu_\lambda}{\mu_k}\,\frac{\varphi_{3,3}\,\varphi'_{1,3}(w)_0}{\varphi_{2,0}\,\varphi_{0,0}}\,\frac{\mathrm{d}\sqrt{x_1 x_2}}{\mathrm{d}u} \\ &+ \frac{2\mu_\lambda}{\mu_k}\,\frac{\varphi_{3,2}\,\varphi'_{1,2}(w)_0}{\varphi_{2,0}\,\varphi_{0,0}}\,\frac{\mathrm{d}\sqrt{x_1 x_2}}{\mathrm{d}u'}, \end{aligned}\right.$$

$$(112)\quad \left\{\begin{aligned} i\,\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x_1\cdot 1-x_2}}{\mathrm{d}v} &= \frac{2\mu_\lambda}{\mu_k}\,\frac{\varphi_{3,3}\,\varphi'_{1,3}(v)_0}{\varphi_{2,0}\,\varphi_{0,0}}\,\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x_1\cdot 1-x_2}}{\mathrm{d}u} \\ &+ \frac{2\mu_\lambda}{\lambda_k}\,\frac{\varphi_{3,2}\,\varphi'_{1,2}(v)_0}{\varphi_{2,0}\,\varphi_{0,0}}\,\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x_1\cdot 1-x_2}}{\mathrm{d}u'}. \\ i\,\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x_1\cdot 1-x_2}}{\mathrm{d}w} &= \frac{2\mu_\lambda}{\mu_k}\,\frac{\varphi_{3,3}\,\varphi'_{1,3}(w)_0}{\varphi_{2,0}\,\varphi_{0,0}}\,\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x_1\cdot 1-x_2}}{\mathrm{d}u} \\ &+ \frac{2\mu_\lambda}{\lambda_k}\,\frac{\varphi_{3,2}\,\varphi'_{1,2}(w)_0}{\varphi_{2,0}\,\varphi_{0,0}}\,\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x_1\cdot 1-x_2}}{\mathrm{d}u'}, \end{aligned}\right.$$

folglich auch

$$\begin{aligned} idu &= adv + bdw, &\qquad (ab'-ba')dv &= ib'du - ibdu', \\ idu' &= a'dv + b'dw, &\qquad (ab'-ba')dw &= -ia'du + iadu', \end{aligned}$$

[**432**] wo

$$\begin{aligned} a &= \frac{2\mu_\lambda}{\mu_k}\,\frac{\varphi_{3,3}\,\varphi'_{1,3}(v)_0}{\varphi_{2,0}\,\varphi_{0,0}} = 2\,\frac{\varphi_{3,3}\,\varphi'_{1,3}(v)_0}{\varphi_{2,3}\,\varphi_{0,3}}, \\ b &= \frac{2\mu_\lambda}{\mu_k}\,\frac{\varphi_{3,3}\,\varphi'_{1,3}(w)_0}{\varphi_{2,0}\,\varphi_{0,0}} = 2\,\frac{\varphi_{3,3}\,\varphi'_{1,3}(w)_0}{\varphi_{2,3}\,\varphi_{0,3}}, \\ a' &= \frac{2\varphi_\lambda}{\lambda_k}\,\frac{\varphi_{3,2}\,\varphi'_{1,2}(v)_0}{\varphi_{2,0}\,\varphi_{0,0}} = 2\,\frac{\varphi_{3,2}\,\varphi'_{1,2}(v)_0}{\varphi_{0,2}\,\varphi_{2,2}}, \\ b' &= \frac{2\mu_\lambda}{\lambda_k}\,\frac{\varphi_{3,2}\,\varphi'_{1,2}(w)_0}{\varphi_{2,0}\,\varphi_{0,0}} = 2\,\frac{\varphi_{3,2}\,\varphi'_{1,2}(w)_0}{\varphi_{0,2}\,\varphi_{2,2}}. \end{aligned}$$

Setzt man also

$$(113)\quad \left\{\begin{aligned} dv &= \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}x_1}{\varepsilon_1\sqrt{(x_1\,k\,\lambda\,\mu)}}\,dx_1 + \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}x_2}{\varepsilon_2\sqrt{(x_2\,k\,\lambda\,\mu)}}\,dx_2, \\ dw &= \frac{\mathrm{B}'-\mathrm{C}'x_1}{\varepsilon_1\sqrt{(x_1\,k\,\lambda\,\mu)}}\,dx_1 + \frac{\mathrm{B}'-\mathrm{C}'x_2}{\varepsilon_2\sqrt{(x_2\,k\,\lambda\,\mu)}}\,dx_2, \end{aligned}\right.$$

so findet man

$$B = i\,\frac{b'-b}{ab'-ba'}, \qquad C = i\,\frac{b'\lambda^2-b\mu^2}{ab'-ba'},$$

$$B' = i\,\frac{a-a'}{ab'-ba'}. \qquad C' = i\,\frac{a\mu^2-a'\lambda^2}{ab'-ba'}.$$

Aus der Tabelle erhält man

$$(114)\quad \frac{b'-b}{2}\,\varphi_{2,3}\,\varphi_{0,3}\,\varphi_{0,2}\,\varphi_{2,2}$$
$$= \varphi_{2,3}\,\varphi_{0,3}\,\varphi_{3,2}\,\varphi'_{1,2}(w)_0 - \varphi_{3,3}\,\varphi_{0,2}\,\varphi_{2,2}\,\varphi'_{1,3}(w)_0$$
$$= \varphi_{0,0}\,\varphi_{1,1}\,\varphi_{2,0}\,\varphi'_{3,1}(w)_0,$$

und diese Gleichung besteht noch, wenn man $\varphi'(v)_0$ für $\varphi'(w)_0$, a für b, a' für b' setzt. Es giebt zwanzig Formeln von vorstehender Form, deren jede zwischen drei andern der sechs Grössen $\varphi'_{r,1}(w)_0$, $\varphi'_{1,r}(w)_0$ besteht, und dieselben Gleichungen müssen auch durch die sechs constanten Grössen $\varphi'_{r,1}(v)_0$, $\varphi'_{1,r}(v)_0$ erfüllt werden. Unter der Zahl dieser Formeln findet sich auch die folgende:

$$(115)\quad \frac{\lambda^2 b'-\mu^2 b}{2}\,\frac{\varphi^2_{3,0}}{\varphi^2_{2,0}}\,\varphi_{0,2}\,\varphi_{0,3}\,\varphi_{3,2}\,\varphi_{3,3} = \varphi_{0,3}\varphi_{2,2}\varphi_{3,3}\varphi'_{1,2}(w)_0$$
$$- \varphi_{2,3}\varphi_{0,2}\varphi_{3,2}\varphi'_{1,3}(w)_0$$
$$= \varphi_{0,0}\varphi_{1,1}\varphi_{3,0}\varphi'_{2,1}(w)_0$$

$$\frac{\lambda^2 a'-\mu^2 a}{2}\,\frac{\varphi^2_{3,0}}{\varphi^2_{2,0}}\,\varphi_{0,2}\,\varphi_{0,3}\,\varphi_{3,2}\,\varphi_{3,3} = \varphi_{0,0}\varphi_{1,1}\varphi_{3,0}\varphi'_{2,1}(v)_0.$$

[433] Bezeichnet man mit $\chi(v, w)$, $\psi(v, w)$ irgend zwei der sechs Functionen $\varphi_{r,s}(v, w)$, welche für $v = w = 0$ verschwinden, so kann man den Werth der Functionaldeterminante

$$\chi'(v)\,\psi'(w) - \psi'(v)\,\chi'(w)$$

für $v = w = 0$ rational ausdrücken durch die Werthe, welche die zehn andern Functionen $\varphi_{r,s}$ an der Nullstelle der beiden Argumente annehmen. Mit Hülfe der in Capitel II (§ 8) gefundenen Formeln bin ich zu diesen Ausdrücken gelangt, von denen einer ist

$$(116)\quad \frac{ab'-ba'}{4}\,\frac{\varphi_{0,2}\,\varphi_{2,2}\,\varphi_{2,3}\,\varphi_{0,3}}{\varphi_{3,2}\,\varphi_{3,3}} = \varphi'_{1,3}(v)_0\,\varphi'_{1,2}(w)_0$$
$$- \varphi'_{1,3}(w)_0\,\varphi'_{1,2}(v)_0$$
$$= \varphi_{1,1}\,\varphi_{0,0}\,\varphi_{2,0}\,\varphi_{3,0}.$$

Von diesem kann man leicht zu den übrigen vierzehn gelangen mit Hülfe der Gleichungen, welche zwischen drei beliebigen der sechs constanten Grössen $\varphi'_{1,r}(v)_0$, $\varphi'_{r,1}(v)_0$ statt haben; denn da die Grössen $\varphi'_{1,r}(w)_0$, $\varphi'_{r,1}(w)_0$ denselben Gleichungen genügen müssen, so erhält man die Verhältnisse der Werthe, welche die fünfzehn Ausdrücke

$$\chi'(v)\,\psi'(w) - \chi'(w)\,\psi'(v)$$

für $v = 0$, $w = 0$ annehmen.

Man hat also zufolge dieser Formeln

$$2\,\mathrm{B} = 2\,i\,\frac{b'-b}{ab'-ba'} = \quad i\,\frac{\varphi'_{3,1}(w)_0}{\varphi_{3,0}\,\varphi_{3,2}\,\varphi_{3,3}},$$

$$2\,\mathrm{B}' = 2\,i\,\frac{a-a'}{ab'-ba'} = -i\,\frac{\varphi'_{3,1}(v)_0}{\varphi_{3,0}\,\varphi_{3,2}\,\varphi_{3,3}},$$

$$2\,\mathrm{C} = 2\,i\,\frac{b'\lambda^2-b\mu^2}{ab'-ba'} = \quad i\,\frac{\varphi_{2,0}\,\varphi_{2,2}\,\varphi_{2,3}}{\varphi_{3,0}\,\varphi_{3,2}\,\varphi_{3,3}}\;\frac{\varphi'_{2,1}(w)_0}{\varphi_{3,0}\,\varphi_{3,2}\,\varphi_{3,3}}$$

$$= \quad i\,\sqrt{k\lambda\mu}\;\frac{\varphi'_{2,1}(w)_0}{\varphi_{3,0}\,\varphi_{3,2}\,\varphi_{3,3}}.$$

$$2\,\mathrm{C}' = 2\,i\,\frac{a\mu^2-a'\lambda^2}{ab'-ba'} = -i\,\frac{\varphi_{2,0}\,\varphi_{2,2}\,\varphi_{2,3}}{\varphi_{3,0}\,\varphi_{3,2}\,\varphi_{3,3}}\;\frac{\varphi'_{2,1}(v)_0}{\varphi_{3,0}\,\varphi_{3,2}\,\varphi_{3,3}}$$

$$= -i\,\sqrt{k\lambda\mu}\;\frac{\varphi'_{2,1}(v)_0}{\varphi_{3,0}\,\varphi_{3,2}\,\varphi_{3,3}}.$$

In der Theorie der elliptischen Functionen giebt es unter den den Functionen $\varphi_{r,s}(v, w)$ analogen vier Functionen $\vartheta_r(v, q)$ eine einzige, die für $v = 0$ verschwindet, nämlich $\vartheta_1(v, q)$; unter den Differentialquotienten $\vartheta'_r(v)$ ist dagegen $\vartheta'_1(v)$ der einzige, der für $v = 0$ nicht verschwindet; [434] man kann aber $\vartheta'_1(0)$ mittels der bekannten Gleichung $\vartheta'_1(0) = \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)$ durch die drei Functionen $\vartheta_r(0)$ ausdrücken. In der Theorie der ultra-elliptischen Functionen ist die analoge Eigenschaft der Functionen $\varphi_{r,s}(v, w)$ durch die Gleichungen von der Form (116) dargestellt. Die partiellen Differentialquotienten $\varphi'_{2,1}(v)_0$, $\varphi'_{2,1}(w)_0$, $\varphi'_{3,1}(v)_0$, $\varphi'_{3,1}(w)_0$ können, für sich allein betrachtet, nicht auf die Werthe $\varphi_{r,s}(0,0)$ reducirt werden, wohl aber hat die aus ihnen zusammengesetzte Functional-Determinante diese Eigenschaft der Function $\vartheta'_1(v)$ bewahrt; dies ist der vollkommenen

Analogie conform, welche zwischen den Differentialquotienten der Function einer Variablen und den Functional-Determinanten herrscht und die von *Jacobi* in den ausgezeichneten Abhandlungen, die der berühmte Mathematiker über diesen Gegenstand veröffentlicht hat, bewiesen ist.

Nimmt man in den vorstehenden Gleichungen u und u' reell, so werden v und w imaginär von der Form it, it', und man erkennt aus der quadratischen Gleichung, deren Wurzeln x_1 und x_2 sind, dass in diesem Falle die eine der Wurzeln zwischen 0 und 1, die andere zwischen $\frac{1}{k^2}$ und $\frac{1}{\lambda^2}$ liegt und mit Hülfe der Ausdrücke von x_1 und x_2 in t und t' erhält man ohne Schwierigkeit die Gleichungen:

$$\frac{i\pi}{2} = \mathrm{B}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}} - \mathrm{C}\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}},$$

$$0 = \mathrm{B}\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}} - \mathrm{C}\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}},$$

$$0 = \mathrm{B}'\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}} - \mathrm{C}'\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}},$$

$$\frac{i\pi}{2} = \mathrm{B}'\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}} - \mathrm{C}'\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}},$$

Wenn u und u' den Factor i haben, so sind v und w reell und man findet für die algebraischen Ausdrücke von x_1, x_2 Entwickelungen in v und w, die ganz verschieden von denen des vorigen Falles sind.

[435] Indessen wird man den Gleichungen zwischen v, w und den ultra-elliptischen Integralen die Form des vorigen Falles geben können, wenn man mittels des Lehrsatzes III im Capitel II § 5 zu den complementären Moduln μ_1, λ_1, k_1 übergeht. Die Grenzen der transformirten Integrale liegen in den Intervallen 0 und 1, $\frac{1}{\mu_1{}^2}$ und $\frac{1}{\lambda_1{}^2}$, und ebenso wie im vorhergehenden Falle findet man die Gleichungen zwischen den über die ganzen Intervalle ausgedehnten bestimmten Integralen.

Kehrt man dann zu den Moduln k, λ, μ zurück, so nehmen diese Gleichungen die Form an

$$\tfrac{1}{2}\log p = \mathrm{B}\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}} - \mathrm{C}\int_{-\infty}^{0}\frac{x\,dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}},$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{B}'\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}} - \mathrm{C}'\int_{-\infty}^{0}\frac{x\,dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}},$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{B}\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}} - \mathrm{C}\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}},$$

$$\tfrac{1}{2}\log q = \mathrm{B}'\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}} - \mathrm{C}'\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}}.$$

Eliminirt man aus diesen acht Gleichungen zwischen den bestimmten Integralen die Constanten A, B, C, B′, C′, so kommt:

$$o = \int_{-\infty}^{0}\frac{x\,dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}}\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}} - \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}}\int_{0}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}}$$

$$-\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}}\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}} + \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}}\frac{dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}}\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{x\,dx}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}},$$

[436] oder

118) $$0 = \int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{1}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{-(xk\lambda\mu)\,(yk\lambda\mu)}} - \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}}\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{-(xk\lambda\mu)\,(yk\lambda\mu)}}.$$

Dies aber ist die neue Beziehung zwischen den bestimmten Integralen, deren ich schon Erwähnung gethan habe. Um zu beweisen, dass sie identisch ist, d. h. unabhängig von den Werthen k, λ, μ besteht, versuchte ich sie zuerst mit Hülfe des *Abel*'schen Theorems über die Addition von Integralen algebraischer Functionen abzuleiten, das ja nach einer Bemerkung *Jacobi*'s auf vielfache Integrale ausgedehnt werden kann; aber ich zog daraus nur das negative Resultat, dass die Gleichung

$$o = \frac{(x-y)\,dx\,dy}{1-(xk\lambda\mu)\cdot(yk\lambda\mu)} - \frac{(x_1-y_1)\,dx_1\,dy_1}{1-(x_1k\lambda\mu)\cdot(y_1k\lambda\mu)}$$

kein algebraisches Integral besitzt, wenn die Variabeln x, y, x_1, y_1 in den Intervallen, um die es sich handelt, genommen werden. Ich griff danach zur Reihenentwickelung der zwei Doppelintegrale und zwar nach Potenzen von $\lambda^2-\mu^2$, wobei ich sie alle beide derselben Reihe gleich fand. Aber die Vergleichung der beiden Entwickelungen und die Ableitung ihrer Restglieder erfordern auch eine recht mühevolle Rechnung und es ist hier sehr schwierig, die allgemeinen Glieder in eine elegante Form zu bringen. Gerade zu rechter Zeit finde ich daher einen directen Beweis, der ohne die mindeste Rechnung allein durch die Kraft der Ueberlegungen zeigt, dass die Gleichung (116) unabhängig von den Werthen der Moduln k, λ, μ statt hat. Er gründet sich auf die Eigenschaften mehrdeutiger continuirlicher Functionen und deshalb will ich zuvor einige Worte über diese Functionen sagen.

Ich nenne eine Function von x mehrdeutig, wenn deren Definition mehrere Functionen zugleich umfasst. Sie wird also im Allgemeinen für jeden Werth der Variabeln gerade so viel Werthe haben, wie sie verschiedene Interpretationen zulässt, und [437] genau so viel verschiedene continuirliche Werthsysteme wird sie geben, wenn man das Argument x sich continuirlich ändern lässt. Definirt man aber den Werth der Function für $x=a$ in eindeutiger Weise dadurch, dass man ein bestimmtes System auswählt, welchem man für $x=a$ den Werth der Function zu entnehmen hat, so giebt es dann keine Ungewissheit mehr über die Werthe der Function, welche den Werthen von x entsprechen, die wenig von a verschieden sind. Denn nach dem Continuitätsprincip muss einem continuirlichen Wege der Variabeln immer eine continuirliche Aenderung der Function entsprechen. Man kann demnach nicht ohne willkürlich die Continuität zu zerstören von einem Werthsystem der Function zu einem andern übergehen, ausser wenn das Argument x auf einem continuirlichen Wege zu einem Werthe b gelangt, für welchen zwei oder mehr dieser Systeme dieselben Werthe ergeben. Ist ein solcher Werth b einmal erreicht, so beginnt dieselbe Unbestimmtheit wiederum und man wird von neuem beliebig das System wählen können, in welchem man die Werthe der Function zu nehmen hat, die den wenig von b verschiedenen Werthen des Argumentes x entsprechen.

Indessen giebt es Fälle, in denen man die wiederholte Rückkehr dieser Unbestimmtheit dadurch verhindern kann, dass man die Definition der Function in engere Grenzen einschliesst, welche die Auswahl unter den verschiedenen Systemen weniger willkürlich machen.

Wenden wir diese Principien an auf das Integral

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{A + Bx}{\sqrt{X}}\, dx$$

wo

$$X = a_1 - x \cdot a_2 - x \cdot a_3 - x \cdot a_4 - x \cdot a_5 - x \cdot a_6 - x$$

und

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6.$$

Dies Integral hat gar keinen bestimmten Sinn, wenigstens nicht bevor man [**438**] über das Zeichen der Quadratwurzel für jedes durch a_m und a_{m+1} eingeschlossene Intervall übereingekommen ist. Aber nach der Definition eines Integrales als unendliche Summe kann man das vorgelegte Integral und allgemein das Integral einer doppeldeutigen Function auf zwei verschiedene Weisen betrachten. Bei der einen betrachtet man das Integral der beiden Functionen $+\frac{A + Bx}{\sqrt{X}}$, $-\frac{A + Bx}{\sqrt{X}}$, ohne Unterschied in demselben Zeichen $\frac{A + Bx}{\sqrt{X}}$ begriffen, nur mit Rücksicht auf Einhaltung des Continuitätsprincipes, indem man allein an den Grenzen eines Intervalles a_m, a_{m+1} das Zeichen der zu integrirenden Function wechselt. Unter diesem Gesichtspunkte, welcher nichts der Integraldefinition widerstreitendes hat, kann das vorgelegte Integral jeden möglichen reellen oder imaginären Werth besitzen, denn man kann, von a_m nach a_{m+1} gelangt, ohne das Continuitätsgesetz zu verletzen, so oft man will zu a_m und von da wieder nach a_{m+1} zurückkehren und das Zeichen der zu integrirenden Function wechseln, so oft man zu einem dieser Werthe kommt, wenn man nur zuletzt an der oberen Grenze x des vorgelegten Integrales anhält.

Auf diese Art hat *Jacobi* in seinen Vorlesungen bewiesen, dass die Grenze eines vorgelegten Integrales eine periodische Function des Integrales selbst ist.

Von dem andern Gesichtspunkte aus betrachtet man im Gegentheil dies Integral nur einer der beiden in demselben Zeichen $\sqrt{X}$ begriffenen Functionen. Hat man also diejenige ausgewählt, deren Integral man bestimmen will, so ist alles bestimmt, wenn die Integrationsgrenzen nicht die des Intervalles a_m, a_{m+1} überschreiten; sie können sie sogar erreichen, ohne dass dadurch eine Unbestimmtheit des Vorzeichens entsteht; denn bei a_{m+1} angelangt, kann man nicht wie in dem anderen Falle nach Zeichenänderung zu a_m zurückkehren, denn das Vorzeichen ist, wenigstens für dies Intervall, zuvor durch die Definition von $\sqrt{X}$ bestimmt. Wenn allerdings die Integration weiter ausgedehnt werden soll, wird die Wahl des Vorzeichens willkürlich; indessen kann man immer von vornherein die Definition desjenigen der beiden Functionen entgegengesetzten Vorzeichens, deren [**439**] Integral man finden will, so festlegen, dass die Wahl nur für eine einzige Grenze a_m zweier aufeinander folgender Intervalle willkürlich bleibt.

Zu dem Ende definire ich $\sqrt{X}$ als Product der sechs Factoren $\sqrt{a_m - x}$ und lasse das Vorzeichen von $\sqrt{X}$ von den Vorzeichen dieser einfachen Factoren abhängen. Damit dies nun in vollkommen bestimmter Weise möglich ist, sage ich, dass ich von den beiden Werthen von $\sqrt{a_m - x}$ nur denjenigen f_m betrachten will, der positiv ist, wenn x sich zwischen $-\infty$ und a_m befindet, und ich verlange den Werth des Integrals $\int_{-\infty}^{x} \frac{(A + Bx)\,dx}{f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6}$, wie wenn die Factoren f_m vollkommen bestimmte Functionen von x wären. Die einzige Schwierigkeit ist nun zu sagen, welches der Werth einer Function f_m ist, die definirt ist als $+\sqrt{a_m - x}$ für $-\infty < x < a_m$, wenn a_m von x überschritten wird. Und hier nun tritt die willkürliche Wahl des Vorzeichens ein, denn man kann sagen, dass für $a_m < x < +\infty$ der Werth der Function f_m (gemäss der Definition positiv für das andere Intervall) entweder $+i\sqrt{x - a_m}$ oder $-i\sqrt{x - a_m}$ ist; die Wahl aber, die für eine der Functionen f_m zwischen diesen zwei Werthen getroffen wurde, muss dann nach der für alle übereinstimmenden Definition auch für die übrigen dieselbe sein; sei also

$$-\infty < x_0 < a_1,\; a_1 < x_1 < a_2,\; a_2 < x_2 < a_3,\; a_3 < x_3 < a_4,$$
$$a_4 < x_4 < a_5,\; a_5 < x_5 < a_6,\; a_6 < x_6 < \infty;$$

seien ferner $\sqrt{X_0}$, $\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}$, $\sqrt{X_3}$, $\sqrt{X_4}$, $\sqrt{X_5}$, $\sqrt{X_6}$ die Werthe, welche $\sqrt{X}$ annimmt, wenn man darin für x der Reihe nach x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 setzt; dann hat man nach der gegebenen Definition:

$$\sqrt{X_0} = \sqrt{a_1-x_0\cdot a_2-x_0\cdot a_3-x_0\cdot a_4-x_0\cdot a_5-x_0\cdot a_6-x_0}$$

$$\sqrt{X_1} = i\sqrt{x_1-a_1\cdot a_2-x_1\cdot a_3-x_1\cdot a_4-x_1\cdot a_5-x_1\cdot a_6-x_1}$$

$$\sqrt{X_2} = -\sqrt{x_2-a_1\cdot x_2-a_2\cdot a_3-x_2\cdot a_4-x_2\cdot a_5-x_2\cdot a_6-x_2}$$

[440]

$$\sqrt{X_3} = -i\sqrt{x_3-a_1\cdot x_3-a_2\cdot x_3-a_3\cdot a_4-x_3\cdot a_5-x_3\cdot a_6-x_3}$$

$$\sqrt{X_4} = +\sqrt{x_4-a_1\cdot x_4-a_2\cdot x_4-a_3\cdot x_4-a_4\cdot a_5-x_4\cdot a_6-x_4}$$

$$\sqrt{X_5} = i\sqrt{x_5-a_1\cdot x_5-a_2\cdot x_5-a_3\cdot x_5-a_4\cdot x_5-a_5\cdot a_6-x_5}$$

$$\sqrt{X_6} = -\sqrt{x_6-a_1\cdot x_6-a_2\cdot x_6-a_3\cdot x_6-a_4\cdot x_6-a_5\cdot x_6-a_6}$$

folglich

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(A+Bx)}{\sqrt{X}}\,dx = \int_{-\infty}^{a_1}\frac{(A+Bx_0)}{\sqrt{X_0}}\,dx_0 + \int_{a_2}^{a_3}\frac{(A+Bx_2)}{\sqrt{X_2}}\,dx_2$$
$$+\int_{a_4}^{a_5}\frac{(A+Bx_4)}{\sqrt{X_4}}\,dx_4 + \int_{a_1}^{a_2}\frac{A+Bx_1}{\sqrt{X_1}}\,dx_1 + \int_{a_3}^{a_4}\frac{A+Bx_3}{\sqrt{X_3}}\,dx_3$$
$$+\int_{a_5}^{a_6}\frac{A+Bx_5}{\sqrt{X_5}}\,dx_5 + \int_{a_6}^{\infty}\frac{A+Bx_6}{\sqrt{X_6}}\,dx_6 .$$

Das erste Glied dieser Gleichung ist gleich Null, da die Integrationsgrenzen zusammenfallen, wenn man x durch $\frac{1}{x}$ ersetzt; das zweite Glied hat die Form $M+Ni$, und setzt man noch

$$\int_{a_6}^{\infty}\frac{(A+Bx_6)}{\sqrt{X_6}}\,dx_6 + \int_{-\infty}^{a_1}\frac{(A+Bx_0)}{\sqrt{X_0}}\,dx_0 = \int_{a_6}^{a_1}\frac{(A+Bx_6)}{\sqrt{X_6}}\,dx_6 ,$$

so hat man

$$0 = \int_{a_1}^{a_2} \frac{A+Bx_1}{\sqrt{X_1}}\,dx_1 + \int_{a_3}^{a_4} \frac{(A+Bx_3)}{\sqrt{X_3}}\,dx_3 + \int_{a_5}^{a_6} \frac{A+Bx_5}{\sqrt{X_5}}\,dx_5$$

$$0 = \int_{a_2}^{a_3} \frac{(A+Bx_2)}{\sqrt{X_2}}\,dx_2 + \int_{a_4}^{a_5} \frac{(A+Bx_4)}{\sqrt{X_4}}\,dx_4 + \int_{a_6}^{a_1} \frac{(A+Bx_6)}{\sqrt{X_6}}\,dx_6$$

Jede dieser Gleichungen steht, wie man weiss, an Stelle von zwei Gleichungen, da diese Summen unabhängig von den Werthen von A und B verschwinden müssen. Setzt man hier für die sechs Grössen $\sqrt{X_m}$ ihre Werthe, so erhält man diese Gleichungen in der Form, welche *Jacobi* in seiner berühmten Abhandlung über die vierfach periodischen Functionen gegeben hat.

[**441**] Aus den vier unter den beiden letzten Gleichungen enthaltenen zieht man unmittelbar

$$M = \int_{a_1}^{a_2}\int_{a_2}^{a_3} \frac{(x_1-y_2)\,dx_1\,dy_2}{\sqrt{X_1}\,\sqrt{Y_2}} + \int_{a_4}^{a_5}\int_{a_5}^{a_6} \frac{(x_4-y_5)\,dx_4\,dy_5}{\sqrt{X_4}\,\sqrt{Y_5}},$$

$$M = \int_{a_2}^{a_3}\int_{a_3}^{a_4} \frac{(x_2-y_3)\,dx_2\,dy_3}{\sqrt{X_2}\,\sqrt{Y_3}} + \int_{a_5}^{a_6}\int_{a_6}^{a_1} \frac{(x_5-y_6)\,dx_5\,dy_6}{\sqrt{X_5}\,\sqrt{Y_6}}.$$

$$M = \int_{a_3}^{a_4}\int_{a_4}^{a_5} \frac{(x_3-y_4)\,dx_3\,dy_4}{\sqrt{X_3}\,\sqrt{Y_4}} + \int_{a_6}^{a_1}\int_{a_1}^{a_2} \frac{(x_6-y_1)\,dx_6\,dy_1}{\sqrt{X_6}\,\sqrt{Y_1}}.$$

wo $\sqrt{Y_m}$ dieselbe Function von y_m ist, wie $\sqrt{X_m}$ von x_m.

Diese Summe M von zwei Doppelintegralen, die unter den drei vorstehenden Formen dargestellt ist, ist immer gleich Null.

Um dies zu beweisen, bemerke ich zuvor, dass der Werth von M nur von den Differenzen der sechs Grössen a_m abhängt, denn substituirt man $v-b$ für x_m, $w-b$ für y_m, so erhält man dasselbe Resultat, wie wenn man a_m+b für a_m setzt. Ueberdies ist M auch eine symmetrische Function der sechs Grössen a_m, denn sie ändert sich nicht, wenn man irgend zwei jener Grössen mit einander vertauscht. Dies sieht man ohne Mühe, indem man erstens beachtet, dass jeder der drei für M gegebenen Ausdrücke die Form des folgenden, der dritte die des ersten annimmt, sobald man für jede Grösse a_m

die folgende a_{m+1}, für die sechste aber a_6 die erste a_1 setzt: dann bemerke man, dass M sich nicht ändert, wenn man a_1 der Reihe nach mit beliebigen drei der fünf andern Grössen a_m vertauscht. Der Beweis dieser letzten Eigenschaft wird sehr erleichtert, wenn man die Form M passend wählt, an welcher man die genannte Vertauschung vornehmen will; und da das behandelte Integral verschwindet, wenn seine oberen und unteren Grenzen zusammenfallen, so kann man sich ohne Mühe überzeugen, dass M in der That die zweite Eigenschaft besitzt. Man braucht dazu nur **442**] die verschiedenen Werthe $\sqrt{X_m}$ zu beachten, welche $\sqrt{X}$ in den verschiedenen durch a_m und a_{m+1} begrenzten Intervallen besitzt, sowie auf die Definition von $\sqrt{a_m - x}$ Rücksicht zu nehmen.

M ist eine symmetrische Function der Grössen a_m und hängt gleichzeitig nur von den Differenzen dieser Grössen ab; sie kann demnach allein von den Quadraten dieser Differenzen abhängen, wird sich folglich nicht ändern, wenn man $-a_m$ für jede der sechs Grössen a_m setzt. Substituirt man mithin $-x$ und $-y$ für x und y, so erhält man dasselbe Resultat, wie wenn man $-a_m$ für a_m gesetzt hätte; nichtsdestoweniger ändert sich M durch diese Substitution in $-$M; man hat also M $=-$ M oder M $= 0$.

Setzt man endlich $\sqrt{X_m} = i^m \sqrt{X}$, $\sqrt{Y_m} = i^m \sqrt{Y}$, um die Formeln durch die gebräuchlichen Zeichen auszudrücken, so erhält man:

$$0 = \int_{a_1}^{a_2}\int_{a_2}^{a_3} \frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{-XY}} - \int_{a_4}^{a_5}\int_{a_5}^{a_6} \frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{-XY}}.$$

$$0 = \int_{a_2}^{a_3}\int_{a_3}^{a_4} \frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{-XY}} - \int_{a_5}^{a_6}\int_{a_6}^{a_1} \frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{-XY}}.$$

$$0 = \int_{a_3}^{a_4}\int_{a_4}^{a_5} \frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{-XY}} - \int_{a_6}^{a_1}\int_{a_1}^{a_2} \frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{-XY}},$$

und setzt man $a_1 = -\infty$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = \frac{1}{k^2}$, $a_5 = \frac{1}{\lambda^2}$, $a_6 = \frac{1}{\mu^2}$, so kommt:

$$0=\int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{1}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}\sqrt{(yk\lambda\mu)}}-\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}}\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}\sqrt{(yk\lambda\mu)}},$$

$$0=\int_{0}^{1}\int_{1}^{\frac{1}{k^2}}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}\sqrt{(yk\lambda\mu)}}-\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}\sqrt{(yk\lambda\mu)}},$$

$$0=\int_{1}^{\frac{1}{k^2}}\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}\sqrt{(yk\lambda\mu)}}+\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(xk\lambda\mu)}\sqrt{(yk\lambda\mu)}}.$$

Tabelle der Formeln.

(Siehe Seite 53.)

Auszug.

	(1, *a*)		(1, *b*) und (1, *c*)
M u. M_1	33·33·33·33 + 32·32·32·32	M od. M_1	33·33·33·33 — 32·32·32·32
M' u. M_1'	23·23·23·23 + 22·22·22·22	M' od. M_1'	23·23·23·23 — 22·22·22·22
M'' u. M_1''	13·13·13·13 + 12·12·12·12	M'' od. M_1''	13·13·13·13 — 12·12·12·12
M''' u. M_1'''	03·03·03·03 + 02·02·02·02	M''' od. M_1'''	03·03·03·03 — 02·02·02·02
	(1, *d*)		
M u. M_1	30·30·30·30 — 31·31·31·31	M_1 od. M	30·30·30·30 + 31·31·31·31
M' u. M_1'	20·20·20·20 — 21·21·21·21	M_1' od. M'	20·20·20·20 + 21·21·21·21
M'' u. M_1''	10·10·10·10 — 11·11·11·11	M_1'' od. M''	10·10·10·10 + 11·11·11·11
M''' u. M_1'''	00·00·00·00 — 01·01·01·01	M_1''' od. M'''	00·00·00·00 + 01·01·01·01
	(2, *a*)		(2, *b*) und (2, *c*)
M u. M_1	33·33·03·03 + 32·32·02·02	M od. M_1	33·33·03·03 — 32·32·02·02
M' u. M_1'	23·23·13·13 + 22·22·12·12	M' od. M_1'	23·23·13·13 — 22·22·12·12
M'' u. M_1''	13·13·23·23 + 12·12·22·22	M'' od. M_1''	13·13·23·23 — 12·12·22·22
M''' u. M_1'''	03·03·33·33 + 02·02·32 32	M''' od. M_1'''	03·03·33·33 — 02·02·32·32
	(2, *d*)		
M u. M_1	30·30·00·00 — 31·31·01·01	M_1 od. M	30·30·00·00 + 31·31·01·01
M' u. M_1'	20·20·10·10 — 21·21·11·11	M_1' od. M'	20·20·10·10 + 21·21·11·11
M'' u. M_1''	10·10·20·20 — 11·11·21·21	M_1'' od. M''	10·10·20·20 + 11·11·21·21
M''' u. M_1'''	00·00·30·30 — 01·01·31·31	M_1''' od. M'''	00·00·30·30 + 01·01·31·31
	(3, *a*)		(3. *b*) und (3, *c*)
M u. M_1	30·30·33·33 — 31·31·32·32	M od. M_1	30·30·33·33 + 31·31·32·22
M' u. M_1'	20·20·23·23 — 21·21·22·22	M' od. M_1'	20·20·23·23 + 21·21·22·22
M'' u. M_1''	10·10·13·13 — 11·11·12·12	M'' od. M_1''	10·10·13·13 + 11·11·12·12
M''' u. M_1'''	00·00·03·03 — 01·01·02·02	M''' od. M_1'''	00·00·03·03 + 01·01·02·02
	(3, *d*)		
M u. M_1	33·33·30·30 + 32·32·31·31	M_1 od. M	33·33·30·30 — 32·32·31·31
M' u. M_1'	23·23·20 20 + 22·22·21·21	M_1' od. M'	23·23·20·20 — 22·22·21·21
M'' u. M_1''	13·13·10·10 + 12·12·11·11	M_1'' od. M''	13·13·10·10 — 12·12·11·11
M''' u. M_1'''	03·03·00·00 + 01·01·02·02	M_1''' od. M'''	03·03·00·00 — 01·01·02·02

	(4, *a*)		(4, *b*) und (4, *c*)
M u. M_1	30·30·03·03 — 31·31·02·02	M od. M_1	30·30·03·03 + 31·31·02·02
M' u. M_1'	20·20·13·13 — 21·21·12·12	M' od. M_1'	20·20·13·13 + 21·21·12·12
M'' u. M_1''	10·10·23·23 — 11·11·22·22	M'' od. M_1''	10·10·23·23 + 11·11·22·22
M''' u. M_1'''	00·00·33·33 — 01·01·32·32	M''' od. M_1'''	00·00·33·33 + 01·01·32·32
	(4, *d*)		
M u. M_1	33·33·00·00 + 32·32·01·01	M_1 od. M	33·33·00·00 — 32·32·01·01
M' u. M_1'	23·23·10·10 + 22·22·11·11	M_1' od. M'	23·23·10·10 — 22·22·11·11
M'' u. M_1''	13·13·20·20 + 12·12·21·21	M_1'' od. M''	13·13·20·20 — 12·12·21·21
M''' u. M_1'''	03·03·30·30 + 02·02·31·31	M_1''' od. M'''	03·03·30·30 — 02·02·31·31
	(5, *a*)		(5, *b*) und (5, *c*)
M u. M_1	23·23·33·33 + 22·22·32·32	M od. M_1	23·23·33·33 — 22·22·32·32
M' u. M_1'	33·33·23·23 + 32·32·22·22	M' od. M_1'	33·33·23·23 — 32·32·22·22
M'' u. M_1''	03·03·13·13 + 02·02·12·12	M'' od. M_1''	03·03·13·13 — 02·02·12·12
M''' u. M_1'''	13·13·03·03 + 12·12·02·02	M''' od. M_1'''	13·13·03·03 — 12·12·02·02
	(5, *d*)		
M u. M_1	20·20·30·30 — 21·21·31·31	M_1 od. M	20·20·30·30 + 21·21·31·31
M' u. M_1'	30·30·20·20 — 31·31·21·21	M_1' od. M'	30·30·20·20 + 31·31·21·21
M'' u. M_1''	00·00·10·10 — 01·01·11·11	M_1'' od. M''	00·00·10·10 + 01·01·11·11
M''' u. M_1'''	10·10·00·00 — 11·11·01·01	M_1''' od. M'''	10·10·00·00 + 11·11·01·01
	(6, *a*)		(6, *b*) und (6, *c*)
M u. M_1	23·23·03·03 + 22·22·02·02	M od. M_1	23·23·03·03 — 22·22·02·02
M' u. M_1'	33·33·13·13 + 32·32·12·12	M' od. M_1'	33·33·13·13 — 32·32·12·12
M'' u. M_1''	03·03·23·23 + 02·02·22·22	M'' od. M_1''	03·03·23·23 — 02·02·22·22
M''' u. M_1'''	13·13·33·33 + 12·12·32·32	M''' od. M_1'''	13·13·33·33 — 12·12·32·32
	(6, *d*)		
M u. M_1	20·20·00·00 — 21·21·01·01	M_1 od. M	20·20·00·00 + 21·21·01·01
M' u. M_1'	30·30·10·10 — 31·31·11·11	M_1' od. M'	30·30·10·10 + 31·31·11·11
M'' u. M_1''	00·00·20·20 — 01·01·21·21	M_1'' od. M''	00·00·20·20 + 01·01·21·21
M''' u. M_1'''	10·10·30·30 — 11·11·31·31	M_1''' od. M'''	10·10·30·30 + 11·11·31·31
	(7, *a*)		(7, *b*) und (7, *c*)
M u. M_1	20·20·33·33 — 21·21·32·32	M od. M_1	20·20·33·33 + 21·21·32·32
M' u. M_1'	30·30·23·23 — 31·31·22·22	M' od. M_1'	30·30·23·23 + 31·31·22·22
M'' u. M_1''	00·00·13·13 — 01·01·12·12	M'' od. M_1''	00·00·13·13 + 01·01·12·12
M''' u. M_1'''	10·10·03·03 — 11·11·02·02	M''' od. M_1'''	10·10·03·03 + 11·11·02·02
	(7, *d*)		
M u. M_1	23·23·30·30 + 22·22·31·31	M_1 od. M	23·23·30·30 — 22·22·31·31
M' u. M_1'	33·33·20·20 + 32·32·21·21	M_1' od. M'	33·33·20·20 — 32·32·21·21
M'' u. M_1''	03·03·10·10 + 02·02·11·11	M_1'' od. M'''	03·03·10·10 — 02·02·11·11
M''' u. M_1'''	13·13·00·00 + 12·12·01·01	M_1''' od. M'''	13·13·00·00 — 12·12·01·01

	8. *a*		8. *b* und 8. *c*
M u. M_1	20·20·03·03 — 21·21·02·02	M od. M_1	20·20·03·03 — 21·21·02·02
M' u. M_1'	30·30·13·13 — 31·31·12·12	M' od. M_1'	30·30·13·13 — 31·31·12·12
M'' u. M_1''	00·00·23·23 — 01·01·22·22	M'' od. M_1''	00·00·23·23 — 01·01·22·22
M''' u. M_1'''	10·10·33·33 — 11·11·32·32	M''' od. M_1'''	10·10·33·33 — 11·11·32·32
	8. *d*		
M u. M_1	23·23·00·00 — 22·22·01·01	M_1 od. M	23·23·00·00 — 22·22·01·01
M' u. M_1''	33·33·10·10 — 32·32·11·11	M_1' od. M'	33·33·10·10 — 32·32·11·11
M'' u. M_1''	03·03·20·20 — 02·02·21·21	M_1'' od. M''	03·03·20·20 — 02·02·21·21
M''' u. M_1'''	13·13·30·30 — 12·12·31·31	M_1''' od. M'''	13·13·30·30 — 12·12·31·31
	9. *a*		9. *b* und 9. *c*
M u. M_1	22·22·33·33 — 23·23·32·32	M od. M_1	22·22·33·33 — 23·23·32·32
M' u. M_1'	32·32·23·23 — 33·33·22·22	M' od. M_1'	32·32·23·23 — 33·33·22·22
M'' u. M_1''	02·02·13·13 — 03·03·12·12	M'' od. M_1''	02·02·13·13 — 03·03·12·12
M''' u. M_1'''	12·12·03·03 — 13·13·02·02	M''' od. M_1'''	12·12·03·03 — 13·13·02·02
	9. *d*		
M u. M_1	21·21·30·30 — 20·20·31·31	M_1 od. M	21·21·30·30 — 20·20·31·31
M' u. M_1'	31·31·20·20 — 30·30·21·21	M_1' od. M'	31·31·20·20 — 30·30·21·21
M'' u. M_1''	01·01·10·10 — 00·00·11·11	M_1'' od. M''	01·01·10·10 — 00·00·11·11
M''' u. M_1'''	11·11·00·00 — 10·10·01·01	M_1''' od. M'''	11·11·00·00 — 10·10·01·01
	11. *a*		11. *b* und 11. *c*
M u. M_1	21·21·33·33 — 20·20·32·32	M od. M_1	21·21·33·33 — 20·20·32·32
M' u. M_1'	31·31·23·23 — 30·30·22·22	M' od. M_1'	31·31·23·23 — 30·30·22·22
M'' u. M_1''	01·01·13·13 — 00·00·12·12	M'' od. M_1''	01·01·13·13 — 00·00·12·12
M''' u. M_1'''	11·11·03·03 — 10·10·02·02	M''' od. M_1'''	11·11·03·03 — 10·10·02·02
	11. *d*		
M u. M_1	22·22·30·30 — 23·23·31·31	M_1 od. M	22·22·30·30 — 23·23·31·31
M' u. M_1'	32·32·20·20 — 33·33·21·21	M_1' od. M'	32·32·20·20 — 33·33·21·21
M'' u. M_1''	02·02·10·10 — 03·03·11·11	M_1'' od. M''	02·02·10·10 — 03·03·11·11
M''' u. M_1'''	12·12·00·00 — 13·13·01·01	M_1''' od. M'''	12·12·00·00 — 13·13·01·01
	12. *a*		12. *b* und 12. *c*
M u. M_1	21·21·03·03 — 20·20·02·02	M od. M_1	21·21·03·03 — 20·20·02·02
M' u. M_1'	31·31·13·13 — 30·30·12·12	M' od. M_1'	31·31·13·13 — 30·30·12·12
M'' u. M_1''	01·01·23·23 — 00·00·22·22	M'' od. M_1''	01·01·23·23 — 00·00·22·22
M''' u. M_1'''	11·11·33·33 — 10·10·32·32	M''' od. M_1'''	11·11·33·33 — 10·10·32·32
	12. *d*		
M u. M_1	22·22·00·00 — 23·23·01·01	M_1 od. M	22·22·00·00 — 23·23·01·01
M' u. M_1'	32·32·10·10 — 33·33·11·11	M_1' od. M'	32·32·10·10 — 33·33·11·11
M'' u. M_1''	02·02·20·20 — 03·03·21·21	M_1'' od. M''	02·02·20·20 — 03·03·21·21
M''' u. M_1'''	12·12·30·30 — 13·13·31·31	M_1''' od. M'''	12·12·30·30 — 13·13·31·31

	(14, *a*)		(14, *b*) und (14, *c*)
M u. M_1	32·32·03·03 + 33·33·02·02	M od. M_1	32·32·03·03 — 33·33·02·02
M' u. M_1'	22·22·13·13 + 23·23·12·12	M' od. M_1'	22·22·13·13 — 23·23·12·12
M'' u. M_1''	12·12·23·23 + 13·13·22·22	M'' od. M_1''	12·12·23·23 — 13·13·22·22
M''' u. M_1'''	02·02·33·33 + 03·03·32·32	M''' od. M_1'''	02·02·33·33 — 03·03·32·32
	(14, *d*)		
M u. M_1	31·31·00·00 — 30·30·01·01	M_1 od. M	31·31·00·00 + 30·30·01·01
M' u. M_1'	21·21·10·10 — 20·20·11·11	M_1' od. M'	21·21·10·10 + 20·20·11·11
M'' u. M_1''	11·11·20·20 — 10·10·21·21	M_1'' od. M''	11·11·20·20 + 10·10·21·21
M''' u. M_1'''	01·01·30·30 — 00·00·31·31	M_1''' od. M'''	01·01·30·30 + 00·00·31·31
	(16, *a*)		(16, *b*) und (16, *c*)
M u. M_1	31·31·03·03 — 30·30·02·02	M od. M_1	31·31·03·03 + 30·30·02·02
M' u. M_1'	21·21·13·13 — 20·20·12·12	M' od. M_1'	21·21·13·13 + 20·20·12·12
M'' u. M_1''	11·11·23·23 — 10·10·22·22	M'' od. M_1''	11·11·23·23 + 10·10·22·22
M''' u. M_1'''	01·01·33·33 — 00·00·32·32	M''' od. M_1'''	01·01·33·33 + 00·00·32·32
	(16, *d*)		
M u. M_1	32·32·00·00 + 33·33·01·01	M_1 od. M	32·32·00·00 — 33·33·01·01
M' u. M_1'	22·22·10·10 + 23·23·11·11	M_1' od. M'	22·22·10·10 — 23·23·11·11
M'' u. M_1''	12·12·20·20 + 13·13·21·21	M_1'' od. M''	12·12·20·20 — 13·13·21·21
M''' u. M_1'''	02·02·30·30 + 03·03·31·31	M_1''' od. M'''	02·02·30·30 — 03·03·31·31
	(17, *a*)		(17, *b*) und (17, *c*)
M u. M_1	13·03·23·33 + 12·02·22·32	M od. M_1	13·03·23·33 — 12·02·22·32
M' u. M_1'	03·13·33·23 + 02·12·32·22	M' od. M_1'	03·13·33·23 — 02·12·32·22
M'' u. M_1''	23·33·13·03 + 22·32·12·02	M'' od. M_1''	23·33·13·03 — 22·32·12·02
M''' u. M_1'''	33·23·03·13 + 32·22·02·12	M''' od. M_1'''	33·23·03·13 — 32·22·02·12
	(17, *d*)		
M u. M_1	10·00·20·30 — 11·01·21·31	M_1 od. M	10·00·20·30 + 11·01·21·31
M' u. M_1'	00·10·30·20 — 01·11·31·21	M_1' od. M'	00·10·30·20 + 01·11·31·21
M'' u. M_1''	20·30·10·00 — 21·31·11·01	M_1'' od. M''	20·30·10·00 + 21·31·11·01
M''' u. M_1'''	30·20·00·10 — 31·21·01·11	M_1''' od. M'''	30·20·00·10 + 31·21·01·11
	(23, *a*)		(23, *b*) und (23, *c*)
M u. M_1	11·01·33·23 — 10·00·32·22	M od. M_1	11·01·33·23 + 10·00·32·22
M' u. M_1'	01·11·23·33 — 00·10·22·32	M' od. M_1'	01·11·23·33 + 00·10·22·32
M'' u. M_1''	31·21·13·03 — 30·20·12·02	M'' od. M_1''	31·21·13·03 + 30·20·12·02
M''' u. M_1'''	21·31·03·13 — 20·30·02·12	M''' od. M_1'''	21·31·03·13 + 20·30·02·12
	(23, *d*)		
M u. M_1	12·02·30·20 + 13·03·31·21	M_1 od. M	12·02·30·20 — 13·03·31·21
M' u. M_1'	02·12·20·30 + 03·13·21·31	M_1' od. M'	02·12·20·30 — 03·13·21·31
M'' u. M_1''	32·22·10·00 + 33·23·11·01	M_1'' od. M''	32·22·10·00 — 33·23·11·01
M''' u. M_1'''	22·32·00·10 + 23·33·01·11	M_1''' od. M'''	22·32·00·10 — 23·33·01·11

	(25. *a*)		(25. *b*) und (25. *c*)
M u. M_1	31·30·32·33 + 30·31·33·32	M od. M_1	31·30·32·33 — 30·31·33·32
M' u. M_1'	21·20·22·23 + 20·21·23·22	M' od. M_1'	21·20·22·23 — 20·21·23·22
M'' u. M_1''	11·10·12·13 + 10·11·13·12	M'' od. M_1''	11·10·12·13 — 10·11·13·12
M''' u. M_1'''	01·00·02·03 + 00·01·03·02	M''' od. M_1'''	01·00·02·03 — 00·01·03·02
	(25. *d*)		
M u. M_1	32·33·31·30 — 33·32·30·31	M_1 od. M	32·33·31·30 — 33·32·30·31
M' u. M_1'	22·23·21·20 — 23·22·20·21	M_1' od. M'	22·23·21·20 + 23·22·20·21
M'' u. M_1''	12·13·11·10 — 13·12·10·11	M_1'' od. M''	12·13·11·10 + 13·12·10·11
M''' u. M_1'''	02·03·01·00 — 03·02·00·01	M_1''' od. M'''	02·03·01·00 + 03·02·00·01
	(26. *a*)		(26. *b*) und (26. *c*)
M u. M_1	31·30·02·03 + 30·31·03·02	M od. M_1	31·30·02·03 — 30·31·03·02
M' u. M_1'	21·20·12·13 + 20·21·13·12	M' od. M_1'	21·20·12·13 — 20·21·13·12
M'' u. M_1''	11·10·22·23 + 10·11·23·22	M'' od. M_1''	11·10·22·23 — 10·11·23·22
M''' u. M_1'''	01·00·32·33 + 00·01·33·32	M''' od. M_1'''	01·00·32·33 — 00·01·33·32
	(26. *d*)		
M u. M_1	32·33·01·00 — 33·32·00·01	M_1 od. M	32·33·01·00 + 33·32·00·01
M' u. M_1'	22·23·11·10 — 23·22·10·11	M_1' od. M'	22·23·11·10 + 23·22·10·11
M'' u. M_1''	12·13·21·20 — 13·12·20·21	M_1'' od. M''	12·13·21·20 + 13·12·20·21
M''' u. M_1'''	02·03·31·30 — 03·02·30·31	M_1''' od. M'''	02·03·31·30 + 03·02·30·31
	(28. *a*)		(28. *b*) und (28. *c*)
M u. M_1	21·20·03·02 + 20·21·02·03	M od. M_1	21·20·03·02 — 20·21·02·03
M' u. M_1'	31·30·13·12 + 30·31·12·13	M' od. M_1'	31·30·13·12 — 30·31·12·13
M'' u. M_1''	01·00·23·22 + 00·01·22·23	M'' od. M_1''	01·00·23·22 — 00·01·22·23
M''' u. M_1'''	11·10·33·32 + 10·11·32·33	M''' od. M_1'''	11·10·33·32 — 10·11·32·33
	(28. *d*)		
M u. M_1	22·23·00·01 — 23·22·01·00	M_1 od. M	22·23·00·01 + 23·22·01·00
M' u. M_1'	32·33·10·11 — 33·32·11·10	M_1' od. M'	32·33·10·11 + 33·32·11·10
M'' u. M_1''	02·03·20·21 — 03·02·21·20	M_1'' od. M''	02·03·20·21 + 03·02·21·20
M''' u. M_1'''	12·13·30·31 — 13·12·31·30	M_1''' od. M'''	12·13·30·31 + 13·12·31·30
	(33. *a*)		(33. *b*) und (33. *c*)
M u. M_1	21·30·32·23 + 20·31·33·22	M od. M_1	21·30·32·23 — 20·31·33·22
M' u. M_1'	31·20·22·33 + 30·21·23·32	M' od. M_1'	31·20·22·33 — 30·21·23·32
M'' u. M_1''	01·10·12·03 + 00·11·13·02	M'' od. M_1''	01·10·12·03 — 00·11·13·02
M''' u. M_1'''	11·00·02·13 + 10·01·03·12	M''' od. M_1'''	11·00·02·13 — 10·01·03·12
	(33. *d*)		
M u. M_1	22·33·31·20 — 23·32·30·21	M_1 od. M	22·33·31·20 + 23·32·30·21
M' u. M_1'	32·23·21·30 — 30·22·20·31	M_1' od. M'	32·23·21·30 + 30·22·20·31
M'' u. M_1''	02·13·11·00 — 03·12·10·01	M_1'' od. M''	02·13·11·00 — 03·12·10·01
M''' u. M_1'''	12·03·01·10 — 13·02·00·11	M_1''' od. M'''	12·03·01·10 + 13·02·00·11

	(43, *a*)		(43, *b*) und (43, *c*)
M u. M_1	31·01·33·03 — 30·00·32·02	M od. M_1	31·01·33·03 + 30·00·32·02
M' u. M_1'	21·11·23·13 — 20·10·22·12	M' od. M_1'	21·11·23·13 + 20·10·22·12
M'' u. M_1''	11·21·13·23 — 10·20·12·22	M'' od. M_1''	11·21·13·23 + 10·20·12·22
M''' u. M_1'''	01·31·03·33 — 00·30·02·32	M''' od. M_1'''	01·31·03·33 + 00·30·02·32
	(43, *d*)		
M u. M_1	32·02·30·00 + 33·03·31·01	M_1 od. M	32·02·30·00 — 33·03·31·01
M' u. M_1'	22·12·20·10 + 23·13·21·11	M_1' od. M'	22·12·20·10 — 23·13·21·11
M'' u. M_1''	12·22·10·20 + 13·23·11·21	M_1'' od. M''	12·22·10·20 — 13·23·11·21
M''' u. M_1'''	02·32·00·30 + 03·33·01·31	M_1''' od. M'''	02·32·00·30 — 03·33·01·31
	(50, *a*)		(50, *b*) und (50, *c*)
M u. M_1	21·01·03·23 — 20·00·02·22	M od. M_1	21·01·03·23 + 20·00·02·22
M' u. M_1'	31·11·13·33 — 30·10·12·32	M' od. M_1'	31·11·13·33 + 30·10·12·32
M'' u. M_1''	01·21·23·03 — 00·20·22·02	M'' od. M_1''	01·21·23·03 + 00·20·22·02
M''' u. M_1'''	11·31·33·13 — 10·30·32·12	M''' od. M_1'''	11·31·33·13 + 10·30·32·12
	(50, *d*)		
M u. M_1	22·02·00·20 + 23·03·01·21	M_1 od. M	22·02·00·20 — 23·03·01·21
M' u. M_1'	32·12·10·30 + 33·13·11·31	M_1' od. M'	32·12·10·30 — 33·13·11·31
M'' u. M_1''	02·22·20·00 + 03·23·21·01	M_1'' od. M''	02·22·20·00 — 03·23·21·01
M''' u. M_1'''	12·32·30·10 + 13·33·31·11	M_1''' od. M'''	12·32·30·10 — 13·33·31·11

Anmerkungen.

Zu S. 4. Die von *Rosenhain* hier vorgeschlagene Unterscheidung zwischen ultra-elliptischen (hyperelliptischen) und *Abel*'schen Functionen ist seitdem allgemein angenommen und gebraucht. Eine derartige Unterscheidung hat sich als nothwendig erwiesen, seitdem man die besondere Stellung genauer kennen gelernt hat, die den Integralen mit einer Quadratwurzel unter den allgemeinen algebraischen Integralen zukommt.

Zu S. 4. Auf diese hier von *Rosenhain* als Einleitung in die Theorie der ultra-elliptischen Functionen vorgetragene Lösung des Problems der Umkehrung von elliptischen Integralen dritter Gattung bezieht sich eine Bemerkung von *Jacobi* (Sur la rotation d'un corps, extrait d'une lettre adressée à l'académie des sciences de Paris 17. März 1850, *Crelle*'s Journal, Bd. 39, Mathematische Werke S. 351), die in deutscher Uebersetzung etwa so lautet:

»Ich habe früher die Studenten der Mathematik der Universität Königsberg auf diese fundamentalen Eigenschaften der elliptischen Integrale dritter Gattung aufmerksam gemacht, wodurch sich diese Integrale den *Abel*'schen oder hyperelliptischen Integralen nähern. Dies hat Herrn *Rosenhain*, einen jener Schüler, der dieser Universität zu wohlbegründetem Ruhme gereicht, veranlasst, in einer akademischen Abhandlung die elliptischen Integrale der dritten Gattung derselben analytischen Behandlung zu unterwerfen, die ich für die *Abel*'schen Integrale vorgeschlagen hatte. Seitdem ist dieser gelehrte Mathematiker dazu gelangt, in expliciter Weise die Functionen darzustellen, die bei der ersten Klasse der hyperelliptischen Functionen die Rolle der Functionen θ spielen, eine grosse und schöne Entdeckung, die vor Kurzem von der Akademie der Wissenschaften in Paris gekrönt wurde«.

Zu S. 29. Die Bedingung für die Convergenz der Reihe $\varphi_{3,3}$ *u. w.* ist hier für den Fall imaginärer p, q, A nicht genau angegeben. Die Bedingung ist für diesen Fall die, dass die drei Werthe, die man erhält, wenn man in

$$\log p,\ \log q,\ 4\,A^2 - \log p\,\log q$$

$\log p$, $\log q$, A durch ihre reellen Theile ersetzt, negativ werden (d. h. dass der reelle Theil von

$$x^2 \log p + 4\,x\,y\,A + y^2 \log q$$

eine negative quadratische Form der Variablen x, y sei).

Zu S. 36. Die drei hier aufgeführten Lehrsätze, durch welche rein imaginäre Argumente der Functionen φ auf reelle zurückgeführt werden, sind specielle Fälle der allgemeinen linearen Transformation der Theta-Functionen, die von *Jacobi* für die elliptischen Functionen in Vorlesungen ausgeführt und als »Theorie der unendlich vielen Formen der Theta-Function« bezeichnet ist. Den weiteren Ausbau dieser Theorie für die hyperelliptischen Functionen verdanken wir besonders *Hermite*.

Zu S. 77. Um zu beweisen, dass die durch die Quotienten der φ-Functionen dargestellten vierfach periodischen Functionen, als deren Umkehrung sich die Summen von je zwei ultra-elliptischen Integralen erster Gattung ergeben haben, nicht nur specielle Integrale dieser Art liefern, ist noch zu zeigen, dass zwischen den drei Moduln dieser ultra-elliptischen Integrale, die als Functionen der drei Variablen p, q, A definirt sind, keine Relation besteht, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass eine gewisse bilineare Relation zwischen den Perioden der Integrale identisch befriedigt ist. Der Beweis, den *Rosenhain* hiervon giebt, der sich übrigens nur auf reelle Moduln bezieht, ist sehr bemerkenswerth. Er enthält, wenn auch noch verhüllt, den Grundgedanken des Verfahrens, der klar und einfach erst bei *Riemann* auftritt, nachdem die Erweiterung des Integralbegriffs durch Einführung der complexen Wege der Variablen in die Theorie aufgenommen ist. Die Mehrdeutigkeit der Function, die *Rosenhain* umständlich analytisch definirt, wird klar und anschaulich erst durch die Einführung der *Riemann*'schen mehrblättrigen Fläche. *Rosenhain* kennt und benutzt von der *Riemann*'schen Fläche, wenn der Ausdruck gestattet ist, nur einzelne Fäden.

Zu Seite 85. Die Tabelle, die im Original 51 Gruppen von 16 Formeln umfasst, ist hier nur in einem Auszug abgedruckt, wobei jedoch darauf Bedacht genommen ist, dass die im Text gebrauchten Formeln alle vorkommen. Eines so grossen Formelapparates bedarf heutzutage die Theorie nicht mehr, nachdem eine zweckmässige Bezeichnung und Begriffsbildung, namentlich der durch *Riemann* ausgebildete Begriff der Theta-Charakteristik, eine zusammenfassende Darstellung der Formeln gestattet. Die unendlichen Reihen, die *Rosenhain* durch φ bezeichnet, deren Quotienten ihm die vierfach periodischen Functionen liefern, werden jetzt fast ausschliesslich durch die Buchstaben θ oder ϑ (Theta-Functionen) bezeichnet. Die Unterscheidung der einzelnen Functionen geschieht noch auf verschiedene Weise. Die von dem Herausgeber in verschiedenen Abhandlungen im Anschluss an *Riemann* und *Hermite* gebrauchte Bezeichnung dieser Functionen ist die

$$\vartheta \begin{Bmatrix} g_1, g_2 \\ h_1, h_2 \end{Bmatrix} (v_1, v_2) =$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1, n_2}\, e^{\pi i \psi\left(n_1+\frac{g_1}{2},\, n_2+\frac{g_2}{2}\right) + 2\pi i\left(\left(n_1+\frac{g_1}{2}\right)\left(v_1+\frac{h_1}{2}\right)+\left(n_2+\frac{g_2}{2}\right)\left(v_2+\frac{h_2}{2}\right)\right)},$$

worin

$$\psi(n_1, n_2) = a_{1,1} n_1^2 + 2\, a_{1,2} n_1 n_2 + a_{2,2} n_2^2$$

eine quadratische Form der beiden Variablen n_1, n_2 mit wesentlich positivem imaginärem Theil ist, worin ferner g_1, g_2, h_1, h_2 ganze Zahlen bedeuten, die gleich 0 oder 1 gesetzt werden können, und worin der Complex

$$\begin{Bmatrix} g_1, g_2 \\ h_1, h_2 \end{Bmatrix}$$

die Charakteristik der Theta-Function heisst. Um zu der *Rosenhain*'schen Bezeichnung zurückzukehren, hat man zu setzen

$$\begin{aligned} \pi i a_{1,1} &= \log p, \quad \pi i a_{2,2} = \log q, \\ \pi i a_{1,2} &= \pi i a_{2,1} = 2\,\mathrm{A}, \\ \pi i v_1 &= v, \quad \pi i v_2 = w. \end{aligned}$$

In der folgenden kleinen Tabelle, die dem Werke von *Krause*: »Die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung« (Leipzig, B. G. Teubner, 1886) entnommen ist, sind die verschiedenen Bezeichnungen, die für die 16 Theta-Functionen in Gebrauch sind, zusammengestellt.

Rosenhain	*Göpel*	*Hermite*	*Weierstrass*	*Weber*
φ_{33}	P'''	ϑ_{0000}	ϑ_5	$\vartheta\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$
φ_{23}	Q'''	ϑ_{1000}	ϑ_{01}	$\vartheta\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$
φ_{32}	R'''	ϑ_{0100}	ϑ_4	$\vartheta\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$
φ_{22}	S'''	ϑ_{1100}	ϑ_{23}	$\vartheta\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$
φ_{00}	P	ϑ_{0011}	ϑ_0	$\vartheta\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$
φ_{01}	iR	ϑ_{0111}	$i\vartheta_{04}$	$-\vartheta\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$
φ_{10}	iQ	ϑ_{1011}	$i\vartheta_1$	$-i\vartheta\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$
φ_{11}	S	ϑ_{1111}	$-\vartheta_{14}$	$-\vartheta\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$
φ_{03}	P''	ϑ_{0001}	ϑ_{12}	$\vartheta\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$
φ_{02}	R''	ϑ_{0101}	ϑ_{03}	$\vartheta\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$
φ_{13}	iQ''	ϑ_{1001}	$i\vartheta_{02}$	$-i\vartheta\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$
φ_{12}	iS''	ϑ_{1101}	$i\vartheta_{13}$	$-i\vartheta\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$
φ_{30}	P'	ϑ_{0010}	ϑ_{34}	$\vartheta\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$
φ_{31}	iR'	ϑ_{0110}	$i\vartheta_3$	$-i\vartheta\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$
φ_{20}	Q'	ϑ_{1010}	ϑ_2	$\vartheta\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$
φ_{21}	iS'	ϑ_{1110}	$i\vartheta_{24}$	$-i\vartheta\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

übernahmen: für Astronomie Prof. Dr. Bruns (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. Wangerin (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. Groth (München), für Pflanzenphysiologie Prof. Dr. W. Pfeffer (Leipzig), für Chemie Prof. Dr. W. Ostwald (Leipzig), für Physik Prof. Dr. Arthur von Oettingen (Leipzig).

Um
Jedem z
ist der
$\mathcal{M}$ —.25
doch m

Au

sind bi

Nr. 5.

» 14.

» 17.

» 19. [redacted]

» 46. Rechnung ... (1697) ... kel.

» 47. ... ge

» 60.

» 64. ... iodi ... der Ab ... Web ... (... S.).

» 65.