

WANDSWORTH

S. 1426. B57.

5. 1426. D. 1.

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU GÖTTINGEN.

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.

NEUE FOLGE. BAND I.

AUS DEN JAHREN 1897—1900.



MIT SIEBEN TAFELN, DREI PLÄNEN DER STERNWARTE NEBST VERZEICHNISS
DER GRÖßEREN INSTRUMENTE UND EINER STERNKARTE.

BERLIN.

WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG.

1900.

Inhalt.

A. v. Koenen, Ueber Fossilien der Unteren Kreide am Ufer des Mungo in Kamerun. Mit 4 Tafeln.

A. v. Koenen, Nachtrag zu Ueber Fossilien der Unteren Kreide am Ufer des Mungo in Kamerun. Mit 3 Tafeln.

Martin Brendel, Theorie der kleinen Planeten. Erster Theil.

Wilhelm Schur, Ableitung relativer Oerter des Mondes gegen die Sonne aus heliometrischen Messungen von Sehnenlängen ausgeführt auf der Sternwarte zu Göttingen während der partiellen Sonnenfinsternisse von 1890 Juni 16/17 (Beobachter: Schur, Ambronn und Hayn) und von 1891 Juni 6 (Beobachter: Schur). Mit drei Plänen der Sternwarte nebst Verzeichniss der grösseren Instrumente.

Wilhelm Schur, Vermessung der beiden Sternhaufen η und χ Persei mit dem sechszölligen Heliometer der Sternwarte in Göttingen, verbunden mit einer Uebersicht aller bis zum Jahre 1900 ausgeführten Instrumental-Untersuchungen. Mit einer Sternkarte.

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND 1. Nro. 1.

Ueber

Fossilien der Unteren Kreide

am Ufer des Mungo in Kamerun.

Von



A. von Koenen.

Mit 4 Tafeln.

Berlin.

Weidmannsche Buchhandlung.

1897.

Göttinge, d. 24. 5. 98.

Frauen

Dulau aus Long.

London.

Erstreckt die Mitteilung, dass sowohl
Bd. XI und N. F. Bd. I nicht erschienen
ist. Die Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft
der Wissenschaften zu Göttingen wird durch die Verlagsmann,
sich Druckausgabe zu beziehen.

Hochachtung! L. Horstmann, Göttingen.

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN,
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE,
NEUE FOLGE BAND 1. Nro. 1.

Ueber

Fossilien der Unteren Kreide

am Ufer des Mungo in Kamerun.

Von

A. von Koenen.

Mit 4 Tafeln.

Berlin.

Weidmannsche Buchhandlung.

1897.

Ueber Fossilien der Unteren Kreide am Ufer des Mungo in Kamerun.

Von

A. von Koenen.

Mit 4 Tafeln.

Vorgelegt in der Sitzung vom 6. Februar 1897.

Herr Professor Wohltmann hatte auf einer Reise nach Kamerun, über welche er zuerst in der Illustrierten Landwirthschaftlichen Zeitung (1896, Jahrgang 16 Nr. 48, 50 und 52) berichtete, auch wichtige Beobachtungen über die geologischen Verhältnisse von Kamerun gemacht und namentlich am linken Ufer des Mungo zwischen Mundame und Eliki mürbe, feinkörnige Sandsteine und feste Kalke mit Fossilien aufgefunden. Da er sofort die Wichtigkeit dieses Fundes erkannte, so brachte er mehrere grosse Ammoniten etc. mit nach Deutschland und übergab mir das ganze Material zur näheren Untersuchung, indem er es zugleich bis auf einige Doubletten gütigst dem Geologischen Museum zu Göttingen verehrte.

Aus Kamerun führt nun Stromer von Reichenbach in seiner sehr werthvollen Arbeit „die Geologie der deutschen Schutzgebiete in Afrika“ (München und Leipzig 1896) S. 171 von vereinzelt Stellen nach den Angaben von Dusén Kalksandsteine und Sandsteine sowie Thonschiefer mit Konkretionen an, in welchen zum Theil schlecht erhaltene Steinkerne von Mollusken und Fischreste gefunden wurden, letztere nach dem Ausspruch von Dames Formen der unteren Kreide. Aehnliche Gesteine hatte Lenz schon früher an der Küste südlich von Kamerun nachgewiesen. Das jetzt von Wohltmann entdeckte Vorkommen am Mungo scheint aber allen früheren Reisenden in Kamerun entgangen zu sein.

Die von Wohltmann mitgebrachten Gesteine bestehen nun aus dünnschichtigen, mürben, grauen Sandsteinen und grauen Kalken. Die Sandsteine ent-

halten Bivalven-Steinkerne und Abdrücke, welche auf einander gepresst sind und hierdurch Skulpturen und andere Merkmale fast ganz eingebüsst haben, so dass sie zu einer näheren Bestimmung nicht mehr recht geeignet sind. Die Kalke sind grösstentheils ziemlich verunreinigt, theils durch Thon, theils wohl auch, da sie oft auf Schläge mit dem Hammer Funken geben, durch Kieselsäure; sie sind zum Theil ziemlich dicht, zum Theil aber auch körnig und endlich konglomeratisch, indem unregelmässige Brocken dunklen, harten Kalkes in der Grösse von Erbsen bis Haselnüssen oder selbst Wallnüssen in einer dichten Grundmasse von sehr unreinem Kalk liegen; nicht selten sind sie auf einer Seite von dem Steinkern einer Bivalve bedeckt und im Inneren zuweilen weit heller, enthalten auch wohl Schwefelkies-Parteien. Die Ammoniten sind innen von weissem bis grauem, krystallinischem Kalk erfüllt und gestatten recht wohl das Präpariren der Lobenlinien. Andere Fossilien, namentlich einzelne Klappen von Pelycyptoden, sowie vereinzelt Gastropoden und Brachiopoden finden sich anscheinend besonders in bestimmten Lagen des Kalkes und lassen sich fast durchweg nur sehr unvollkommen aus dem Gestein herauslösen, zumal wenn sie stärkere Skulpturen besitzen, da die Schalen selbst in spröden, körnigen Kalkspath verwandelt sind, und da oft Bruchstücke oder ganze Schalen in grösserer Menge dicht neben einander liegen und dann auch wohl fest an einander haften. Am leichtesten sind sie aus den grauen bis bräunlichen fein-sandigen Lagen zu gewinnen, welche den grössten Theil ihres Kalkgehaltes noch besitzen, doch so, dass die Fossilien noch nicht bloß als Steinkerne erhalten sind; freilich haftet dann fast immer eine mehr oder minder dicke Schicht des Gesteins auf den Schalen und lässt sich nicht immer ohne Beschädigung oder Abnutzung derselben entfernen.

Am schwierigsten sind die Gastropoden in genügender Erhaltung frei zu legen, zumal da sie meistens nur in Durchschnitten oder als Steinkerne sichtbar werden. Mit aus diesem Grunde ist auch die Zahl der weiterhin beschriebenen Gastropoden so gering. Die Bivalven sind freilich an und für sich um vieles zahlreicher an Individuen und an Arten, und die von mir aufgeführten Arten bilden sicher nur einen Bruchtheil der in jenen Schichten enthaltenen Bivalvenfauna; habe ich doch eine ganze Reihe von Arten unberücksichtigt lassen müssen, weil sie in gar zu schlechter Erhaltung vorliegen oder nur in Bruchstücken sich fanden, so dass nicht einmal die Gattung sich mit einiger Wahrscheinlichkeit feststellen liess. Namentlich gilt dies für fast alle mittelgrossen und grossen Formen. Es ist hiernach mit Sicherheit zu erwarten, dass durch ferneres Sammeln an Ort und Stelle und durch Auswahl von Gesteinsstücken, welche sich zum Präpariren der Fossilien eignen, die Zahl der Arten noch um ein Erhebliches vergrössert werden wird.

Da sich aber nicht übersehen lässt, ob in nicht zu ferner Zeit neues Material von demselben oder einem ähnlichen Fundorte nach Europa gebracht werden wird, so scheint es mir doch wünschenswerth zu sein, die jetzt vorliegenden Formen möglichst genau zu beschreiben und abzubilden, zumal da sich nur sehr wenige derselben auf bereits bekannte Arten zurückführen lassen.

In dem Paläontologischen Theile habe ich nun folgende Arten aufgeführt:

<i>Pulchellia gibbosula</i> v. K.	<i>Lithodomus inflexus</i> v. K.
<i>P. perovalis</i> v. K.	<i>Septifer?</i> <i>convolutus</i> v. K.
<i>Neoptychites?</i> <i>lentiformis</i> v. K.	<i>Pinna latissima</i> v. K.
<i>N.?</i> <i>ingens</i> v. K.	<i>Arca semiglabra</i> v. K.
<i>N.?</i> <i>Wohltmanni</i> v. K.	<i>A. cardiformis</i> v. K.
<i>Acanthoceras</i> n. sp.?	<i>Leda cultellus</i> v. K.
<i>Natica</i> cf. <i>cretacea</i> Goldf.	<i>L.</i> sp. ind.
<i>N.</i> sp. ind.	<i>Lucina</i> sp. ind.
<i>Turritella gemmulifera</i> v. K.	<i>Cardium perobliquum</i> v. K.
<i>T. Kamerunensis</i> v. K.	<i>Astarte?</i> <i>trigonella</i> v. K.
<i>Nerita multigranosa</i> v. K.	<i>A. tecticosta</i> v. K.
<i>Xenophora</i> sp. ind.	<i>Cardita sphaericula</i> v. K.
<i>Ostrea</i> sp. ind.	<i>Cytherea Wohltmanni</i> v. K.
<i>Gryphaea</i> sp. juv.	<i>C. corbuloides</i> v. K.
<i>Exogyra</i> sp.	<i>C.</i> sp. ind.
<i>E. auriformis</i> v. K.	<i>C.</i> cf. <i>plana</i> Sow.
<i>Anomia laevigata</i> Sow?	<i>C. tenuidentata</i> v. K.
<i>Pecten Kamerunensis</i> v. K.	<i>C.?</i> sp. ind.
<i>P. productus</i> v. K.	<i>C.</i> sp. ind.
<i>Plicatula rugulosa</i> v. K.	<i>Liopistha ventricosa</i> v. K.
<i>P.</i> cf. <i>placunea</i> Lam.	<i>Corbula incurvata</i> v. K.
<i>P. multiplicata</i> v. K.	<i>Tellina phylloides</i> v. K.
<i>Lima Mungoensis</i> v. K.	<i>Psammobia?</i> <i>auriformis</i> v. K.
<i>L. reniformis</i> v. K.	<i>Pholadomya</i> cf. <i>elongata</i> v. Münster.
<i>L. dilatata</i> v. K.	<i>Lingula</i> cf. <i>truncata</i> Sow.
<i>L. perplana</i> v. K.	<i>Discina</i> sp. ind.
<i>Inoceramus?</i> sp. ind.	<i>Serpula octangula</i> v. K.
<i>Modiola plicifera</i> v. K.	

Wir haben hier also zunächst eine Pelecypoden-Fauna vor uns, welche jedenfalls darauf schliessen lässt, dass die Schichten in geringer Meerestiefe abgelagert worden sind, worauf ja auch das Vorkommen der Gerölle hindeutet. Die in dieser Fauna vertretenen Gattungen, ihre ganze Facies, haben sehr grosse Analogie mit den Faunen, welche aus Kreidebildungen ganz verschiedenen Alters aus recht verschiedenen Ländern bekannt sind, so in Norddeutschland mit den Unter-Senon-Faunen von Kieslingswalde und von Aachen-Vaels, welche zuletzt von Holzapfel monographisch bearbeitet worden ist, den Gosaubildungen, welche Zittel beschrieb, ferner mit den Cenoman-Faunen von Blackdown und von Braacquignies bei Mons, welche durch Cornet und Briart bekannt gemacht worden ist, mit den verschiedenen Faunen der oberen Kreide Ostindiens, welche Stoliczka beschrieb, mit der Fauna der Chotts von Tunis, welche Munier-Chalmas untersuchte, mit den Faunen von Venezuela und Peru sowie Columbien, welche K. Gerhardt kürzlich bearbeitete, aber auch mit Faunen der unteren Kreide, des

Neocom, Aptien und Gault, wie sie besonders aus Frankreich und dem Schweizerischen Jura schon durch d'Orbigny's und Pictet's Arbeiten bekannt sind, wenn auch zum Theil recht ungenügend in Folge der oft unbefriedigenden Erhaltung des benutzten Materials und auch wohl wegen zu grosser Kürze der Beschreibung.

Obgleich nun die Kalke und Sandsteine Kameruns ohne Zweifel unter ganz ähnlichen klimatischen und physikalischen Verhältnissen abgelagert worden sind, wie so viele andere Kreide-Bildungen Europa's, Asien's, Amerika's etc., so zeigen doch die einzelnen Arten mit den sonst bekannten nur mehr oder minder grosse Aehnlichkeit, aber keineswegs so grosse Uebereinstimmung, dass man sie den letzteren unbedenklich zurechnen könnte, und dies gilt namentlich auch von solchen Arten, welche besonders scharf ausgeprägte Merkmale darbieten. Wenn aber die Arten zweier Ablagerungen nicht übereinstimmen, obwohl ihre Faunen analoge sind, so würde hieraus zu folgern sein, dass sie nicht gleichaltrig sind. In dieser Beziehung ergeben also die Bivalven-Arten von Kamerun ein negatives Resultat. Leider sind aber auch die Gattungen derselben nicht wohl für eine nähere Altersbestimmung der Schichten zu brauchen, da sie eine grössere vertikale Verbreitung besitzen. Dasselbe gilt von den wenigen Gastropoden, Brachiopoden und der *Serpula*.

Die Ammoniten endlich gehören wiederum nicht zu bekannten Arten und zeichnen sich, abgesehen von dem ungenügend erhaltenen *Acanthoceras* und der *Pulchellia gibbosula*, sämmtlich dadurch aus, dass sie einen ganz engen Nabel, linsenförmige Gestalt, kurz gerundete Externseite und keinerlei Skulptur besitzen, so dass der Lobenlinie noch grössere Wichtigkeit für die Bestimmung der Gattungen und Arten beigelegt werden muss, als dies auch sonst schon der Fall ist.

Die Gattung *Acanthoceras* ist nun durch die ganze Kreide verbreitet, die Gattung *Pulchellia* aber nur in der unteren Kreide, namentlich im oberen Neocom. Letztere soll nun eigentlich scharfe Kiele an der Externseite haben¹⁾, aber besonders bei den von R. Nicklès²⁾ aus dem südöstlichen Spanien beschriebenen Formen sind diese Kiele zum Theil recht schwach oder fehlen ganz, und bei einzelnen fehlt auch die sonst bei den *Pulchellia*-Arten gewöhnliche Skulptur von dicken, nach aussen vorgebogenen Rippen, so dass auch ganz glatte Formen mit abgerundeter Externseite dort zu *Pulchellia* gestellt wurden.

Douvillé³⁾, stellte zu seiner Familie der *Pulchelliiden* ausser *Pulchellia*, bei welcher an der Externseite 2 Knotenreihen oder auch 2 Kiele auftreten sollen, auch *Tissotia* mit einer oder auch 3 Kanten, zuweilen mit Knoten, und *Stoliczkaia* mit rundem Rücken, indem er diese letztere Gattung jedenfalls ganz anders be-

1) Zittel, Handbuch der Paläontologie II S. 477.

2) Contribution à la Paléontologie du Sud-Est d'Espagne. I Néocomien. Mémoires de la Société Géologique de France. Tome I. No. 4, Tome IV. No. 3. — 1894

3) Bull. Soc. Géol. de France 1890. 3. série tome 18. p. 287.

grenzte, als Zittel und ursprünglich Neumayr¹⁾. Dieser hatte namentlich diejenigen Formen (Amm. Xetra und A. Telinga) mit dazugezogen, für welche in neuester Zeit Kossmat²⁾ die Gattung Neoptychites aufstellte, und hatte sie in nächste Verbindung mit Amm. dispar, A. Dutempleanus und A. Deshayesi gebracht. Die Gattung Stoliczkaia ist daher weniger sicher abgegrenzt, als die später aufgestellte Gattung Pulchellia, und wurde von Zittel l. c. auch nur als „Gruppe“ der Hoplitiden angeführt, unmittelbar vor der Gattung Pulchellia.

Mit solchen Formen von Pulchellia ohne Skulptur und mit abgerundeter Externseite, wie Nicklès sie beschrieb und abbildete, stimmt nun die unten (S. 10) beschriebene *P. perovalis* leidlich in der Gestalt überein, während sie in der Lobenlinie, namentlich in den plumpen Lateralloben, auch einzelnen Pulchellia-Arten mit den typischen starken Skulpturen, wie *P. pulchellus*, recht nahe steht. Unsere *Pulchellia gibbosula* gleicht den letzteren in Gestalt und Skulptur, während die Lobenlinie mit ihren auffallend seichten Loben und breiten Lateralsätteln sich wohl der von ganz jungen *P. compressissima* d'Orb. nähert, wie sie Nicklès l. c. Taf. III fig. 1a abbildete, aber auch derjenigen von Arten des Neocom, wie *Oxynoticeras Marcousanum* d'Orb. bis auf den breiteren ersten Laterallobus sehr nahe steht. Diese Art, sowie *O. Gevriilianum* Orb. und *O. heteropleurum* Neum. et Uhlig weichen aber durch ihre Loben von den ächten, älteren *Oxynoticeras*-Arten nicht unerheblich ab. Jedenfalls sind es zunächst Formen des Neocom (einschliesslich des Barrémien), mit welchen die von mir zu *Pulchellia* gezogenen beiden Arten zunächst verwandt sind.

Erhebliche Bedenken erregte die Stellung der Arten, welche ich als *Neoptychites*? *Wohlthmanni*, *N.?* *lentiformis* und *N.?* *ingens* aufgeführt habe; ich schickte die Tafeln an Herrn Waagen in Wien, den besten Kenner solcher Formen, in der Hoffnung, dass ihm Aehnliches bekannt wäre oder in den reichen Sammlungen des Wiener Museum's vorläge, erhielt aber von Herrn Dr. Kossmat die Antwort, dass die Gestalt der von *Neoptychites* gliche, dass er jedoch über die Loben eine Ansicht sich nach den Abbildungen nicht gestatten könne. Gerade durch die Loben weichen diese Arten aber so erheblich von der Gattung *Neoptychites* Kossmat des Cenoman-Turon ab, dass ich glaube, dass sie nicht dazu gehören und sie dazu nur mit allem Vorbehalt stelle, weil sie zu einer anderen Gattung ebenso wenig passen, in den Lobenlinien selbst von einander nicht unerheblich abweichen, und weil ich nicht ohne grösseres Material neue Gattungen oder Untergattungen aufstellen mag. *N.?* *ingens* ist in Rücksicht auf die Lobenlinie, besonders durch den kurzen, breiten ersten Laterallobus, vergleichbar der *Pulchellia?* *gibbosula* v. Koenen, deren Beziehungen oben erörtert wurden, während *N.?* *Wohlthmanni* und *N.?* *lentiformis* sich durch den unsymmetrisch-zweitheiligen ersten Laterallobus an den bisher zu *Hoplites* gerechneten *Ammo-*

1) Zeitschr. d. deutsch. geol. Ges. 1874. XXVII S. 931.

2) Untersuchungen über die südindische Kreideformation in Beitr. zur Paläontologie und Geologie Oestreich-Ungarn's und des Orients IX S. 165.

nites Leopoldi d'Orb.¹⁾ aus dem Hauterivien anschliessen, *N. Wohltmanni* durch die zahlreicheren Auxiliarloben aber auch an die *Sonneratia bicurvata* Mich. des Aptien und *S. Dutemplei* des Gault, welche Sarasin²⁾ kürzlich näher untersuchte, so dass unsere beiden Arten nach ihren Lobenlinien wohl zu diesen Gattungen gestellt werden könnten.

Da nun von Cossmat die Gattung *Neoptychites* der mittleren Kreide in Beziehung zu der Gattung *Ptychites* der Trias gebracht wurde, so kann eine Aehnlichkeit derselben in der Gestalt mit unseren Arten nicht wohl als Grund gelten, diese letzteren, und somit die Kalke von Kamerun demselben Horizont, der mittleren Kreide zuzurechnen, zumal in den Loben unsere Arten zunächst sich an solche von Arten der unteren Kreide anschliessen.

Ich möchte nach allem diesem annehmen, dass die unten beschriebene Fauna der Kalke von Kamerun nicht jünger, sondern eher älter ist, als das Aptien, und will noch besonders darauf hinweisen, dass die Ammoniten-Fauna der Insel Elobi³⁾ mit der des europäischen Gault theils übereinstimmt, theils doch verwandt ist, dass die Ammoneen des indischen und japanischen Cenoman's mit solchen des europäischen zum Theil identisch sind, dass auch die von Gerhardt⁴⁾ beschriebenen Ammoneen aus dem Aptien und Barrêmien Columbien's besonders den südeuropäischen recht nahe stehen, dass aber alle diese Faunen keine einzige unserer Arten von Kamerun enthalten.

1) Terr. crétacés, Cephalopodes pl. 22, (non 23).

2) Bull. Soc. géol. de France. 3. série t. XXI. 1893. p. 156.

3) L. Szajnocha, zur Kenntniss der mittelkretacischen Cephalopodenfauna der Insel Elobi an der Westküste Afrika's; Denkschr. Akad. d. Wissensch. Wien 1885 Bd. 49. S. 231 Taf. I—IV.

4) Beitr. z. Kenntniss der Kreideformation in Columbien; Neues Jahrbuch f. Mineralogie. Beilageband XI. 1897. S. 118 ff. Taf. III—V.

Beschreibung der Arten.

Pulchellia gibbosula v. Koenen.

Tafel I, Figur 5 a, b, c.

Es liegen zwei gleich grosse Exemplare vor, von welchen das eine wesentlich geringere Dicke besitzt, als das andere, augenscheinlich in Folge von Anwitterung. Das letztere fand sich in einem grösseren Kalkblock und besitzt an einer kleinen Stelle noch die Schale.

Die letzte halbe Windung hat 55 mm Durchmesser und zuerst 21 mm Höhe bei 12 mm Dicke, zuletzt 28 mm Höhe bei 17 mm Dicke. Die vorhergehende Windung ist nur etwa halb so hoch; der Nabel des Steinkerns ist zuletzt etwa 6 mm weit, eine halbe Windung vorher nur 3 mm, und ist hier wohl ganz von Schalmasse erfüllt gewesen, so dass die Röhre ganz oder fast ganz involut war.

Die letzte halbe Windung gehört der Wohnkammer an, an deren Anfang die grösste Dicke der Röhre etwa noch einmal so weit von der Externseite entfernt ist, wie vom Nabel; auf der Wohnkammer nähert sich die grösste Dicke allmählich der Mitte der Seitenflächen, während sie eine halbe Windung vorher noch etwas näher dem Nabel liegt. Die Externseite zeigt eine deutliche Abplattung, besonders in Folge der Verflachung der Rippen; die Seitenflächen sind auf der letzten Viertelwindung auf ihrer äusseren Hälfte wesentlich deutlicher gewölbt, als auf der inneren, während eine halbe Windung vorher dieses sich umgekehrt verhält.

Die letzte Windung lässt über der kurz gerundeten Nabelkante etwa 9 flache, breite Anschwellungen erkennen, welche gerade nach aussen verlaufen und, zumal auf der Wohnkammer, sich auf dem inneren Drittel der Röhre zu deutlichen, dicken, rundlichen Rippen ausbilden und ungefähr auf der Mitte spalten oder durch Einschiebung vermehren, indem sie sich zugleich nicht unbedeutend rückwärts biegen. Alle diese Rippen werden nach der Externseite zu etwas höher und annähernd gleich stark, erhalten ziemlich gleiche Abstände, biegen sich wieder vor und bilden an der Externseite stumpfe Knoten, da sie auf dieser, wie erwähnt, stark verflacht sind.

Die Kammerwände steigen bis zum ersten Lateralsattel etwas an und biegen sich dann gerade auf den Nabel hin. Der erste Lateralsattel ist von der Externseite etwa 1 mm weiter entfernt, als vom Nabel; alle Sättel sind nur wenig abgerundet und haben nur wenige stärkere und eine Anzahl ganz kurze Kerben. Der kurze erste Laterallobus ist nur wenig tiefer, als der Externlobus, aber um die Hälfte tiefer, als der zweite Laterallobus, und doppelt so tief, wie der erste Auxiliarlobus, auf welchen bis zur Nabelkante noch 3 andere

folgen, immer kürzer werdend und in immer kürzeren Abständen. Der erste Laterallobus endigt unten in 3 dicken Zacken, von welchen der innere am tiefsten ist, der äussere am höchsten liegt und sich auf der linken Seite nochmals spaltet; weniger deutlich ist dies auf der rechten Seite bei allen Zacken der Fall. Die übrigen Loben haben eigentlich nur Ecken. Der erste Laterallobus ist fast eben so breit, wie der erste Lateralsattel, aber etwa drei Viertel so breit, wie der Externsattel, und mehr als drei mal so breit, wie der zweite Laterallobus.

Die generische Stellung ist oben, S. 7 besprochen.

Pulchellia perovalis v. Koenen.

Tafel I, Figur 3, Tafel II, Figur 6.

Es liegt nur das abgebildete Stück vor, das von einer Seite nur den Durchschnitt zeigt, und von dessen Wohnkammer eine halbe Windung erhalten ist, wenn auch etwas verdrückt und stark beschädigt, so dass nur etwa eine drittel Windung ausser dem Nabel von einer Seite gut erhalten ist. Die Seitenflächen sind flach gewölbt, auf der inneren Hälfte etwas mehr, als auf der äusseren, und nehmen erst in der Nähe der ziemlich breit gerundeten Externseite und besonders der kurz abgerundeten Nabelkante eine stärkere Wölbung an. Der Nabel ist zuletzt 7 mm weit und durch eine senkrecht stehende Nabelwand begrenzt. Die Schale ist fast involut und jede Windung anscheinend mindestens noch einmal so hoch, wie die vorhergehende. Die Kammerwände steigen vom Externsattel zum ersten Lateralsattel ziemlich stark an, bis zum zweiten etwas weniger, und senken sich dann etwas zum Nabel.

Der äussere Rand des Hauptstammes des zweiten Laterallobus liegt gerade auf der Mitte der Seitenflächen; der erste Laterallobus ist nur um etwa ein Fünftel tiefer, als der Externlobus, aber um die Hälfte tiefer, als der zweite Laterallobus, und mehr als doppelt so tief, wie der Auxiliarlobus. Der zweite Laterallobus ist etwas schmaler, als alle übrigen, und endigt unten in 5 stark divergirende, ziemlich symmetrische Zacken, von welchen der mittelste der tiefste, der äusserste und innerste die höchsten sind. Der erste Laterallobus ist etwas unsymmetrisch in zwei Aeste getheilt, welche je zwei Seitenäste tragen; der Externlobus hat 3 Seitenäste, von welchem der unterste der kürzeste ist. Der Auxiliarlobus endigt in 4 kurzen, etwas divergirenden Zacken, von welchen die beiden mittelsten die tiefsten sind. Die Sättel sind oben abgerundet und durch je 2 oder 3 grössere und einige kleinere Einschnitte wenig tief gekerbt; der erste Lateralsattel ist etwas schmaler, als der zweite und als der Externsattel. Die Sättel sind alle etwa eben so breit, wie der nach innen folgende Lobus mit seinen Zacken.

Unsere Art stelle ich nur mit Vorbehalt zu der Gattung der *Pulchellia*, wie schon oben (S. 7) ausgeführt wurde.

Neoptychites? (Hoplites) lentiformis v. Koenen.

Tafel II, Figur 1, 4 und 7.

Das einzige vorliegende, abgebildete Exemplar ist bis 3 cm vor dem Ende gekammert, und die letzte Kammer ist ein wenig kürzer, als die vorhergehenden, so dass fast die ganze, übrigens verdrückte Wohnkammer fehlt. Die Schale ist linsenförmig, fast ganz involut; der Nabel ist etwa 2 mm weit und recht tief. Am Ende ist die Röhre reichlich noch einmal so hoch, wie eine Windung vorher.

Ein wenig vor dem Ende ist die Röhre gegen 180 mm hoch und 90 mm dick gewesen, und eine halbe Windung früher 120 mm hoch und 60 mm dick. Die grösste Dicke ist etwa 3 mal so weit von der Externseite entfernt, wie von dem Nabel. Auf ihren äusseren zwei Dritteln sind die Seitenflächen ganz flach gewölbt, auf dem inneren etwas stärker, besonders in der Nähe der wohl abgerundeten Nabelkante. Die Externseite ist kurz gerundet, und die Seitenflächen konvergiren hier etwas schwächer, als bei *N. Wohltmanni*.

Die Kammerwände steigen vom Externsattel bis zum zweiten Lateralsattel nur sehr wenig an und dann anscheinend etwas deutlicher. Der erste Laterallobus liegt mit dem Innenrande seines Hauptstammes in der Mitte zwischen der Externseite und der Mitte des Nabels, also grösstentheils noch auf der äusseren Hälfte der Seitenflächen, und ist um etwa zwei Drittel tiefer, als der Externlobus, und reichlich drei mal so tief, wie der zweite Laterallobus, welcher in der Mitte zwischen dem Externlobus und dem Nabel liegt und unten in zwei dickeren Zacken endigt, von welchen nur der innere gerade nach unten, der äussere etwas nach aussen gerichtet ist. Der erste Laterallobus ist wesentlich breiter, als sein Abstand von der Externseite, und wird durch einen Sekundärsattel fast bis zur Mitte seiner Höhe in zwei Hälften getheilt, von welchen die innere die tiefste ist und in 3 Zacken endigt; von diesen ist der mittlere der tiefste, und die beiden seitlichen sind nicht ganz symmetrisch. Die äussere Hälfte endigt ebenfalls in drei Zacken, von welchen der innerste der stärkste und tiefste und weit mehr nach unten als nach aussen gerichtet ist, während die beiden äusseren schon zum Externsattel ansteigen und mehr nach aussen gerichtet sind.

Die Sättel sind ganz abgerundet; der erste Lateralsattel ist etwas schmaler, als der Externsattel, und noch etwas weniger symmetrisch als dieser durch einen Sekundärlobus fast zur Hälfte gespalten. Der zweite Laterallobus endigt mit zwei kurzen Zacken, und dicht über der Nabelkante liegt noch ein ganz kurzer Auxiliarlobus.

Bezüglich der generischen Stellung ist das auf S. 7 Gesagte zu vergleichen.

Neoptychites? (*Hoplites*) *Wohltmanni* v. Koenen.

Tafel I, Figur 2, Tafel II, Figur 3 und 9.

Es liegen zwei Exemplare vor, von welchen das grössere, abgebildete, fast 40 cm Durchmesser hat, obwohl nur die etwas verdrückte letzte Viertel-Windung der Wohnkammer angehören könnte. Die Schale ist ganz involut, hat einen kaum 1 cm weiten Nabel, und die Röhre ist eine Windung zurück fast 11 cm hoch, reichlich doppelt so hoch wie dick, etwa im Verhältniss von 24 zu 11. Die Seitenflächen sind auf ihrer äusseren Hälfte ganz flach gewölbt, auf ihrer inneren etwas deutlicher, und durch eine ziemlich kurz abgerundete Nabelkante vom Nabel getrennt, während die Externseite ebenfalls kurz abgerundet ist. Die grösste Dicke der Röhre ist von der Externseite nicht ganz doppelt so weit entfernt, wie vom Nabel. Der Steinkern sowohl, als auch die Reste der Schale lassen keinerlei Skulptur erkennen.

Die Kammerwände steigen vom Externsattel bis zum ersten Lateralsattel ein wenig an und senken sich dann etwas bis zum Nabel. Der breite erste Laterallobus liegt fast ganz auf der äusseren Hälfte der Seitenflächen und nimmt von dieser mit seinem Hauptstamm mehr als die Hälfte ein; er ist fast noch einmal so tief, wie der Externlobus und wie der zweite Laterallobus, welcher vom ersten etwa zwei Drittel so weit entfernt ist, wie vom Nabel. Ein etwas kürzerer erster und ein schmaler zweiter Auxiliarlobus folgen dann noch zwischen dem zweiten Laterallobus und dem Nabel; der erste Laterallobus endigt unten in vier Aesten, von welchen die beiden inneren um ein Drittel tiefer hinabreichen und stärker gezackt sind, als die beiden äusseren, welche von jenen durch eine breitere Aufbuchtung getrennt und etwas nach aussen gerichtet sind. Die beiden stark nach innen gerichteten Aeste des Externlobus und der zweite Laterallobus tragen nur je einige Zacken, und noch schwächer ist dies der Fall bei dem ersten Auxiliarlobus.

Die Sättel sind verhältnissmässig schmal und oben abgerundet; der Externsattel und der erste Lateralsattel sind durch je 3 tiefere Einschnitte gekerbt, die übrigen durch je einen oder 2 weniger tiefe.

Die recht zweifelhafte Zugehörigkeit unserer Art zu der Gattung *Neoptychites* ist auf S. 7 erörtert.

Neoptychites? *ingens* v. Koenen.

Tafel I, Figur 4, Tafel II, Figur 5 und 8.

Es liegen mir 3 Exemplare vor, von welchen das grösste, aber am schlechtesten erhaltene aus reichlich einer Viertel-Windung besteht; dieselbe hat zuletzt 22 cm Höhe und gegen 11 cm Dicke, so dass das Exemplar, falls nur

die Wohnkammer fehlt, einen Durchmesser von mindestens 60 cm gehabt haben muss. Das kleinste, abgebildete Stück hat 25 cm Durchmesser und gegen 8 cm Dicke gehabt. Die letzte halbe Windung ist zuerst 100 mm hoch und 50 mm dick und zuletzt 137 mm hoch; der tiefe Nabel hat reichlich 10 mm Durchmesser und ist auch bei dem grössten Stück nur etwa 15 mm weit. Die Röhre ist also an ihrem Ende fast doppelt so hoch, als eine Windung vorher.

Die Seitenflächen sind an dem kleinsten und dem grössten Stück in der Mitte noch am deutlichsten gewölbt, deutlicher als an dem dritten Exemplar, und nehmen erst dicht an der kurz abgerundeten Nabelkante eine stärkere Wölbung an. Die Nabelwand steht fast senkrecht zur Schalen-Ebene. Das abgebildete Stück hat bis zu seiner letzten Drittel-Windung einen rundlichen Kiel, doch ist dies theils durch Verdrückung, theils durch Abnutzung der einen Seite bedingt.

Die Kammerwände steigen vom Externsattel zum ersten Lateralsattel etwas an, von hier bis zum ersten Auxiliarsattel nur ganz wenig, und senken sich dann ein wenig bis zum Nabel. Der erste Lateralsattel liegt ziemlich genau auf der Mitte der Seitenflächen und ist ein wenig breiter, als der Externsattel, aber noch nicht zwei Drittel so breit, wie der Hauptstamm des ersten Laterallobus. Der erste Laterallobus ist knapp um ein Drittel tiefer, als der Externlobus, aber fast noch einmal so tief, wie der schmale zweite Laterallobus. Auf diesen folgen bis zur Nabelkante, noch an Tiefe abnehmend, 3 Auxiliarloben; der zweite Lateralsattel ist reichlich halb so breit, wie der erste, und die Auxiliarsättel nehmen gegen ihn nach dem Nabel noch allmählich an Breite ab.

Der erste Laterallobus endigt in 3 Zacken, von welchen der innerste der stärkste ist und am tiefsten hinabreicht; er sendet nahe seinem oberen Ende einen Nebenzacken in der Richtung nach innen ab, der äussere dagegen einen solchen nach aussen. Der zweite Laterallobus endigt in 5 ganz kurzen Spitzen, indem er sich unten etwas verbreitert; die Auxiliarloben endigen mit einer geringeren Zahl von Spitzen, doch ist der zweite tiefer gespalten. Die Sättel sind ganz abgerundet, und der Externsattel sowie der erste Lateralsattel sind etwas unsymmetrisch, schräg von aussen, mässig tief gespalten, zeigen aber ausserdem noch einige flache Kerben.

Das oben erwähnte, mittelgrosse Exemplar zeichnet sich dadurch aus, dass der erste Laterallobus tiefer ist, fast drei mal so tief, wie der zweite und wie der Externlobus, und dass sein Nebenzacken fast eben so stark ist und fast eben so tief hinabreicht, wie der Hauptzacken; ausserdem sind die Aeste des Externlobus wesentlich dicker. Diese Merkmale könnten aber wohl zum Theil durch das spätere Alter bedingt sein, und auch die geringere Wölbung der Seitenflächen scheint mir kein genügender Grund, das Stück etwa als besondere Art zu unterscheiden.

Ueber die Bestimmung der Gattung habe ich mich schon S. 7 ausgesprochen.

Acanthoceras n. sp.

Ein stark angewitterter, bis an das Ende gekammerter Steinkern von 95 mm Durchmesser lässt erkennen, dass über die Externseite dicke Rippen hinweglaufen, welche auf beiden Seiten und in der Mitte derselben Kanten oder Kiele kreuzten, indem sie sich auf diesen zu Knoten oder Spitzen erhoben. Die Röhre ist zuletzt wohl 45 mm dick und gegen 40 mm hoch gewesen; sie ist sehr wenig involut und nimmt noch schneller an Höhe zu, als das von Pictet (Paléontologie Suisse, II série, Taf. XXV f. 4) abgebildete Exemplar von *A. rhotomagensis* Brong., welches sonst einige Aehnlichkeit mit unserem Stücke zeigt. Der erste Laterallobus liegt auf der äusseren Hälfte der Röhre und der viel kleinere zweite ziemlich nahe der Nabelkante. Die Sättel scheinen wesentlich breiter als die neben ihnen liegenden Loben gewesen zu sein.

Natica cf. *cretacea* Goldf.

Der Steinkern eines etwas verdrückten Exemplares hat gegen 15 mm Durchmesser und mindestens 17 mm Höhe gehabt, wovon etwa 13 mm auf die Mündung kommen. Der Nabel war sehr eng oder ganz geschlossen und die Schlusswindung ist ziemlich gleichmässig gerundet, abgesehen von ihrem obersten Theile, nahe der Naht, wo sie augenscheinlich kurz gewölbt war.

Wenn das Stück auch einige Aehnlichkeit mit solchen Arten wie *N. cretacea* Goldf. (Petref. Germaniae III, S. 119. Taf. 199 f. 12; Holzapfel in Palaeontographica XXXIV, S. 143. Taf. XIV f. 19—21) besitzt, so ist doch eine genaue Bestimmung unmöglich.

Natica sp. ind.

Ein mit der Schale erhaltenes, aber grossentheils mit Gestein bedecktes und beschädigtes Exemplar von 6 mm Durchmesser ist wohl etwas höher gewesen; das Gewinde ist etwa 1 mm hoch und besteht kaum aus mehr als 3 mässig gewölbten Windungen, welche durch deutlich vertiefte Nähte von einander getrennt werden. Die Schlusswindung erhält zunächst unter der Naht eine ganz flache Wölbung und unter dieser eine wesentlich stärkere etwa bis zur Nahtlinie, ist aber von hier an ziemlich gleichmässig gewölbt bis zu einer kurzen Umbiegung zum Nabel, beziehungsweise zur Innenlippe. Der Nabel dürfte gegen 2 mm weit gewesen sein, falls er nicht von einer Nabelschwiele ganz oder theilweise verdeckt war. Jedenfalls ist die Mündung ziemlich gross gewesen, wenn auch vielleicht nicht so gross, wie bei der sonst allenfalls vergleichbaren *N. cymba* d'Orb. des Corallien.

Turritella gemmulifera v. Koenen.

Tafel III, Figur 1 a, b.

Ein 20 mm langes Bruchstück von 7 Windungen mit einem Gehäuse-Winkel von kaum 15 Grad lässt grossentheils die Gestalt und Skulptur der Windungen gut erkennen; die letzte derselben hat 6 mm Durchmesser und 3,5 mm Höhe. Die Windungen haben eine etwas umgekehrt-treppenförmige Gestalt, indem sie nach unten an Durchmesser zunehmen bis zu einer fast Kiel-artigen Spirale, welche durch die unter und über ihr befindlichen Einsenkungen stärker hervortritt und doppelt so weit von der oberen Naht entfernt ist, wie von der unteren; dicht über der Naht liegt eine wesentlich schwächere und niedrigere Spirale und zwischen dieser und ersterer auf den letzten Windungen ein schwacher Streifen. Die obere Hälfte der Windungen trägt 3 ziemlich starke und hohe Spiralen, welche etwa eben so breit, wie ihre Abstände von einander, beziehentlich von der oberen Naht sind. Je ein feiner Streifen erscheint auf den letzten Windungen in diesen Zwischenräumen und, etwas früher, zwischen der untersten dieser Spiralen und der Kiel-Spirale.

Auf der ersten vorhandenen Windung, welche etwa 2,5 mm dick und 1,4 mm hoch ist, sind alle Spiralen glatt, schon auf der folgenden bekommen sie aber Knötchen, welche später ziemlich hoch und etwas breiter als ihre Zwischenräume werden. Auf den letzten Windungen sind die auf den oberen Spiralen gegen 0,5 mm, die auf der Kiel-Spirale gegen 0,7 mm von Mitte zu Mitte von einander entfernt.

Einer anderen Art dürfte ein Bruchstück von etwa einer Windung von 5 mm Dicke angehören, welche auch 4 stärkere, Höcker-tragende Spiralen führt, aber ziemlich eben ist; zudem sind die Spiralen niedriger, und auch die unterste tritt nicht Kiel-artig hervor, obschon sie durch einen grösseren Zwischenraum von der nächsten getrennt ist.

Turritella Kamerunensis v. Koenen.

Tafel III, Figur 2 a, b.

Ein Bruchstück von 6 Windungen, 20 mm lang und zuerst 2,5 mm, zuletzt 6,5 mm dick, hat einen Gehäusewinkel von 15 Grad. Die Windungen sind nur auf ihrer unteren Hälfte ein klein wenig gewölbt, werden aber durch die in einer Rinne liegende Naht von einander getrennt, zu welcher die Windungen an ihrem unteren Rande ziemlich steil, an ihrem oberen erheblich flacher geneigt sind, so dass das Gewinde eine umgekehrt treppenförmige Gestalt hat, wenn auch nur in geringem Grade.

Die Windungen tragen auf ihrer ebenen Fläche 5 Spiralstreifen, von welchen der dickste am unteren Rande und der dünnste ziemlich genau in der Mitte liegt,

ein etwas stärkerer etwa doppelt so weit von jenem entfernt, wie von dieser, ein noch stärkerer am oberen Rande, und ein ebensolcher etwas weiter von diesem, als von der Mittelspirale entfernt, welche übrigens auf der ersten vorhandenen Windung zu fehlen scheint. Die stärkeren Spiralen sind nur etwa ein halb bis ein drittel so breit, wie die Zwischenräume, welche sie von den nächsten Spiralen trennen. Sie lassen auf den letzten Windungen Knoten-artige Anschwellungen erkennen, welche von Mitte zu Mitte nicht ganz 1 mm von einander entfernt sind.

Zu einer anderen Art dürfte ein etwas kleineres, grossentheils mit Gestein bedecktes Exemplar gehören, dessen Windungen in der Gestalt denen von *T. Kamerunensis* einigermassen gleichen, aber nur 3 ziemlich schwache Hauptspiralen tragen, je eine am oberen und unteren Rande der ebenen Fläche und, der letzteren ein wenig näher, in der Mitte. In dem breiten Zwischenraume schiebt sich dann ein sehr feiner Streifen ein, und das Gleiche geschieht anscheinend später auch in allen übrigen Zwischenräumen.

Nerita multigranosa v. Koenen.

Tafel III, Figur 3 a, b, c; 4 a, b.

Von 6 mehr oder minder gut erhaltenen Exemplaren ist das grösste 6,5 mm hoch und 7 mm breit bei 4,5 mm Dicke; das Fig. 3 abgebildete ist etwa eben so hoch und dick, aber nur 6,8 mm breit. Das Gewinde ragt zuweilen fast gar nicht hervor, bei einem Stück aber doch immerhin deutlich, indem die Schlusswindung sich zuletzt etwas stärker senkt; die Gewindespitze ist an keinem Exemplar gut erhalten, so dass die Zahl der Windungen nicht sicher zu erkennen ist, doch hat sie schwerlich mehr als $3\frac{1}{2}$ bis 4 betragen. Die Naht ist auf dem Gewinde nur wenig vertieft.

Die Schlusswindung oder mindestens ein grosser Theil derselben wird jedoch von der letzten Mittelwindung meistens durch eine förmliche Rinne getrennt, indem sich unter der Naht eine stärkere Anschwellung ausbildet, unter welcher die Schlusswindung dann ziemlich eben ist um dann allmählich eine stärkere Wölbung anzunehmen und sich in weitem Bogen zur Innenlippe herum zu ziehen. Diese ist schmelzartig und wird von der Aussenschale durch eine Kante getrennt, welche nicht weit über dem unteren Ende der Schale beginnt und zuerst ziemlich scharf ist, nach oben aber immer stumpfer und dann undeutlicher wird; die Innenlippe tritt nur etwa als der dritte Theil eines Kreises aus der Mündung heraus.

Die Aussenlippe ist mit über 20 Grad gegen die Schalenaxe geneigt und auf der obersten flachen Zone unter der Naht am stärksten rückwärts gerichtet, und eine Zurückbiegung, ein flacher „Ausguss“, findet sich erst nahe über der Stelle, wo sie sich auf die vorhergehende Windung auflegt.

Auf den letzten Windungen finden sich recht hohe Längsrippen durch-

schnittlich wohl etwa 40 pro Windung, welche an der Naht recht hoch und gedrängt und scharf rückwärts gerichtet sind, bald darunter aber Zwischenräume bekommen, welche ihnen an Breite gleich sind.

Am unteren Rande der flachen Zone, nahe der Mündung also 2,5 bis 3 mm von der Naht, spalten sich die meisten Rippen oder vermehren sich durch Einschiebung, und dies wiederholt sich auf der eigentlichen Wölbung unregelmässig, indem die Rippen immer flacher werden, und die faltigen Anwachsstreifen auf ihnen immer mehr hervortreten, sodass an manchen Stücken die Rippen selbst hierdurch undeutlich werden. Auf dem untersten Theile der Schlusswindung vereinigen sich wiederholt je zwei Rippen wieder zu einer einzigen. Ausserdem trägt die Wölbung der Schlusswindung bis zu ihrem unteren Ende, welches frei davon ist, meist erst von der Nahtlinie an eine grössere Zahl von engen Spiralfurchen, mindestens 10, aber auch bis zu 17, welche oben am tiefsten und am weitesten von einander entfernt sind, bei verschiedenen Stücken verschieden weit, nach unten nur 0,15 bis 0,2 mm, und hier nur durch flache, rundliche Spiralfurchen von einander getrennt werden.

Die Rippen erscheinen hierdurch gekörnelt, zumal da gerade unter einer der obersten Furchen nicht selten die Rippen etwas verschoben sind, oder an Stelle einer Rippe deren zwei, beide verschoben, nach unten fortsetzen.

Die Innenlippe ist gezähnt, doch sind nur einzelne Zähne sichtbar; dieselben vollständig frei zu legen ist nicht wohl ausführbar, da das Gestein dort eben so hart ist, wie die Schale, und fest an dieser haftet.

Xenophora sp. ind.

Tafel III, Figur 5 a, b.

Ein Steinkern von 6 mm Durchmesser und 4 mm Höhe besteht aus 3 Windungen, von welchen die erste, stärker gewölbte, noch dem Embryonalende angehört. Die folgenden Windungen sind anscheinend ziemlich eben gewesen und scheinen 6 resp. 7 grössere Fremdkörper angeheftet zu haben, welche über den unteren Rand der betreffenden Windung hinausragten und somit auch auf der folgenden Windung einen Eindruck hervorgebracht haben.

Von anderen Arten, wie der *X. onusta* Nils. aus der oberen Kreide (Holzapfel in Palaeontogr. XXXIV S. 152 taf. XIV f. 28) unterscheidet sich unser Steinkern dadurch, dass er so früh schon ebene Windungen erhält, ist aber natürlich nicht näher bestimmbar.

Ostrea sp. ind.

Tafel III, Figur 11.

Vierzehn Austernschalen sind wohl durchweg noch nicht ausgewachsen und besitzen nicht die äussere Schalenlage, so dass weder die feinere Skulptur noch

selbst die Gestalt genau zu erkennen ist. Die abgebildete und noch eine zweite untere Klappe zeichnen sich durch längliche Gestalt, stark gewölbten und stark hervorragenden Wirbel aus, sowie durch kleine Anheftungsstelle und grobe Runzeln der Schale. Die obere Klappe ist flach gewölbt, nahe dem Schalenrande aber etwas eingesenkt und hatte anscheinend nur wenige, flache Anschwellungen der Schale.

Vielleicht gehört zu einer zweiten Art eine Schale, welche fast mit der ganzen Unterseite aufgewachsen gewesen zu sein scheint.

Gryphaea sp.

Tafel III, Fig. 12 a, b, c.

Die allein vorliegende, abgebildete untere Schale ist jedenfalls noch nicht ausgewachsen, da sie nur 7,5 mm lang, 5 mm breit und ca. 3 mm hoch gewölbt ist. Die Anheftungsfläche ist sehr klein; die Wölbung ist auf der vorderen Hälfte der Schale etwas schwächer, als auf der hinteren und besonders als auf der Mitte, und in der Längsrichtung ist sie unterhalb der Mitte am stärksten. Die Schale ist von verhältnissmässig dicken Anwachsrunzeln bedeckt, welche auf der unteren Hälfte stärker hervortreten, durchschnittlich knapp 0,4 mm von einander entfernt und nicht ganz unregelmässig sind, aber öfters sich spalten, zumal nach der vorderen Seite hin.

Exogyra sp.

Einige mangelhaft erhaltene untere Schalen, welche bis zu 13 mm Länge und 10 mm Breite haben, aber zum Theil auch die Oberfläche der Schale besitzen, sind ganz an der vorderen Seite angeheftet gewesen und haben hinter dieser Fläche ein Paar dicke, unregelmässige Knoten oder Anschwellungen; weiterhin ist die Schale auf der oberen Seite weit stärker gewölbt, als auf der Mitte und unten. Der Schalrand ist unten oval, die Schale selbst trägt schwachblättrige Anwachsstreifen und erinnert allenfalls an den Jugendzustand von *E. canaliculata* d'Orb. aus dem französischen Gault.

Exogyra auriformis v. Koenen.

Tafel III, fig. 10 a, b.

Von zahlreichen im Gestein, besonders auf den Ammoniten sitzenden Schalen konnten nur wenige erhalten werden, und von diesen ist die abgebildete die weitaus beste und grösste mit 18 mm Länge, 12,5 mm Breite und 7 mm Höhe. Sie ist mit einer grossen Fläche aufgewachsen, und ihr Umriss ist im ersten Drittel annähernd halbkreisförmig, in dem Rest ebenfalls annähernd halbkreis-

förmig, doch mit viel weiterem Bogen. Der hintere Rand erhebt sich unterhalb der Mitte am höchsten und senkt sich von hier nach dem Wirbel zu ganz allmählich, nach dem unteren Ende aber recht schnell, und ist am Wirbel mit ca. 60 Grad gegen die Anheftungsfläche einwärts geneigt, nach hinten zu aber allmählich steiler und unter dem obersten Drittel der Schale mit ca. 90°, auf dem letzten Viertel sogar etwas nach aussen. Skulpturen sind auf der etwas blättrigen Schale nicht zu erkennen, welche übrigens von zahlreichen, gegen 0,5 mm weiten Löchern durchbohrt ist, die von einem Bohrschwamm herrühren dürften. Unsere Art hat in der Gestalt einige Aehnlichkeit mit der von Holzappel (Palaeontogr. XXXV t. 29 f. 8) abgebildeten, aber nicht benannten Form aus dem Aachener Senon; diese ist aber mit einer sehr kleinen Fläche aufgewachsen gewesen und hat auf ihrer ersten Hälfte eine weit schwächere Krümmung des Schalenrandes.

Anomia laevigata Sow?

Tafel III, Figur 13.

Anomia laevigata Sow. Transact. Geol. Soc. IV. S. 127. Taf. 14 f. 6.

„ „ „ d'Orbigny Terr. Crét. Lamellibr. S. 755 Taf. 489 f. 4—6.

Ziemlich häufig, aber sehr selten gut erhalten finden sich in den Kalken Schalen einer rundlich - ovalen bis fast kreisrunden *Anomia*, welche nur oben, in der Wirbelgegend, eine Abstutzung zeigt und in der Stärke der Wölbung bedeutend variiert, indem einzelne, besonders kleinere Schalen fast eben, andere dagegen deutlich gewölbt bis fast halbkugelig sind. Die grösste Schale hat 16,5 mm grössten und 14,5 mm kleinsten Durchmesser, die abgebildete hat 14 mm, beziehungsweise 13 mm Durchmesser; der Wirbel ist etwas über 1 mm vom Schalenrande entfernt.

Die Schalen sind aussen glatt, abgesehen von mehr oder minder zahlreichen, etwas blättrigen Anwachs-Streifen und -Falten; die meisten Exemplare zeigen jedoch nur abgeblätterte, etwas perlmuttartig glänzende Schalenreste. Nur eine Schale lässt zwischen den Anwachs-falten feine, durch grössere Abstände getrennte, radiale Streifen erkennen, aber nur an den Stellen, wo die Oberfläche der Schale abgeblättert sind. Ein Paar kleine Schalen zeigen an je einer Seite transversale, breite, rundliche Rippen, welche augenscheinlich von der Skulptur einer Muschel herrühren, auf welcher die *Anomia* sass.

Die Muskeleindrücke sind an keinem einzigen Exemplar deutlich sichtbar.

Mit der von d'Orbigny gegebenen Beschreibung und Abbildung stimmen die Stücke von Kamerun anscheinend leidlich gut überein, weit weniger mit der Sowerby's (in Fitton On the Strata below the Chalk). Englische oder Französische Exemplare kann ich leider nicht vergleichen.

Pecten Kamerunensis v. Koenen.

Tafel III, Figur 14 a, b; 15 a, b.

Es liegen nur die beiden abgebildeten, beschädigten Klappen vor, von welchen die linke den Umriss, auch des vorderen Ohres, vollständig zeigt, während das hintere Ohr auf beiden Klappen nur theilweise erhalten ist. Die rechte Schale ist jedenfalls ziemlich ebenso gross und ebenso gewölbt, wie die linke, welche 16 mm lang und breit ist. An den inneren Rändern der Ohren konvergieren die Seiten der eigentlichen Schale mit 100 Grad; die Schale ist annähernd gleichseitig. Das vordere Ohr ist fast 5 mm lang, das hintere anscheinend gegen 4 mm.

Zahlreiche schmale, gewissermassen eingeritzte Furchen theilen die Oberfläche der Schale in flache Rippen, welche nach den Seiten zu recht stark divergieren und nach aussen und oben eine immer deutlichere Wölbung erhalten, während sie auf der Mitte der Schale ganz eben sind. An einzelnen Stellen erscheinen die Furchen durch kleine Anschwellungen, welche den Anwachsstreifen entsprechen, in kleine Grübchen getheilt, noch am deutlichsten an den Seiten, wo sie ein wenig breiter sind. Die Rippen vermehren sich unregelmässig durch Spaltung beziehungsweise durch Einschiebung neuer Furchen und sind am Rande etwa 0,5 mm breit.

Das vordere Ohr der rechten Klappe hat einen tiefen Byssus-Ausschnitt und anscheinend gegen 8 gedrängte, rundliche Rippchen; die Skulptur der übrigen Ohren ist nicht zu erkennen.

Durch grössere Breite, verhältnissmässig breite Rippen, schmale Furchen, und wenig deutliche Punktirung derselben unterscheidet sich unsere Art von den Arten mit ähnlicher Skulptur, welche in der Kreide ja recht verbreitet sind.

Pecten productus v. Koenen.

Tafel III, Figur 17 a, b.

Von 3 mehr oder minder beschädigten Klappen hat die Fig. 17 a abgebildete den Umriss, die Fig. 17 b abgebildete dagegen die Ohren leidlich vollständig erhalten. Die Schale ist etwa eben so breit, wie hoch, flach gewölbt und glatt, lässt aber nahe dem unteren Rande sehr feine, erhabene Anwachsstreifen erkennen, wie solche wohl im Alter häufiger aufzutreten pflegen, so dass die Schalen wohl ziemlich ausgewachsen sind, obwohl sie noch nicht 10 mm Durchmesser erreichen. Der Winkel der inneren Ränder der Ohren beträgt gegen 100 Grad. Die Schale ist merklich ungleichseitig, nach vorn erweitert, so dass der Innenrand des vorderen Ohres einen Winkel von ca. 30 Grad mit dem Schlossrande bildet, der des hinteren einen solchen von ca. 50°. Das vordere Ohr der rechten Klappe hat einen tiefen Byssus-Ausschnitt und ist gegen 3 mm lang, das hin-

tere kaum halb so lang; dieses besitzt in der Mitte eine vom Wirbel auslaufende, flach-V-förmige Rinne, bis zu welcher die ziemlich gedrängten, hohen Anwachsstreifen des Ohres von unten her mit der Mittellinie der Schale deutlich konvergiren, während sie mit dieser über der Rinne eher ein wenig divergiren. Auf dem vorderen Ohr sind solche erhabene, gekrümmte Anwachsstreifen nur unmittelbar über dem Byssusausschnitt erhalten.

Plicatula rugulosa v. Koenen.

Tafel III, Figur 7; 8 a, b.

Zehn Exemplare, worunter zwei doppelklappige, liessen sich ziemlich gut aus dem Gestein lösen, und von einer Klappe ist der grösste Theil des inneren Abdruckes und des Schlosses sichtbar, so dass die Zugehörigkeit zu der Gattung *Plicatula* sicher festgestellt werden konnte. Ein kleines Stück ist 11 mm breit, 14 mm hoch und 4,5 mm dick, das grösste ist 22 mm breit und 26 mm hoch. Die kleine Anheftungsstelle der mässig gewölbten rechten Klappe ist an dem kleinen Stück frei von Gestein. Die Gestalt ist die bei *Plicatula*-Arten gewöhnliche, schief-eiförmig, nach hinten etwas verlängert, abgesehen von der hervorragenden, oben abgestutzten Wirbelgegend. In der Jugend trägt die Schale meistens 9 ziemlich dicke Rippen, welche auf beiden Seiten, besonders aber vorn, etwas schwächer sind, als auf der Mitte, und über welche wulstige Anwachsfalten von verschiedener Stärke und in verschiedenen Abständen hinweglaufen, indem sie sich zu schuppigen Knötchen erheben. Auf der linken, oberen Klappe scheinen diese Knötchen höher und spitzer zu werden, als auf der unteren. Zwei kleinere rechte Schalen besitzen nur je 6 Rippen.

Die vorliegenden Stücke gleichen den von Keeping (Fossils etc. of the Neocomian deposits of Upware and Brickhill, Cambridge 1883) S. 110 Taf. V f. 4 als *P. Carteroni* d'Orb. beschriebenen und abgebildeten Vorkommnissen aus dem englischen Neokom so sehr, dass ich sie derselben Art zurechnen möchte, obschon bei den englischen Stücken, der Abbildung nach zu urtheilen, die Rippen in der Nähe des unteren Randes verschwinden. Die Abbildungen der *P. Carteroniana* d'Orbigny's (Taf. 462 f. 5—7) und Pictet's (Paléont. Suisse V Taf. 183 f. 3, 4) weichen von unseren Stücken jedenfalls dadurch ab, dass die Rippen zwischen den schuppigen Spitzen unterbrochen zu sein scheinen und wesentlich schmaler sind, und dass die vordere Seite der Schalen zunächst dem Wirbel weit mehr abgerundet ist.

Plicatula cf. *placunea* Lam.

Tafel III, Figur 9.

Ein zweiklappiges Stück von 24 mm Breite und über 26 mm Höhe, welchem leider der Wirbel und die Oberfläche der Schale mit der feineren Skulptur

fehlen, gleicht in der Gestalt und Grösse manchen französischen Exemplaren von *P. placunea* Lam., sowie d'Orbigny's Abbildung (Terr. crét. Lamellibr. Pl. 462 f. 11, 12), nur ist die Wölbung der Wirbelgegend bei dieser letzteren wesentlich stärker. Auf dem Haupttheil der rechten Schale sind mindestens 10 starke Rippen noch zu erkennen, während am vorderen und hinteren Rande keine Spur von Rippen erhalten ist.

Einige kleinere rechte Klappen könnten auch in die Verwandtschaft von *P. placunea* gehören, die sich von der vorigen Art dadurch unterscheiden, dass die Rippen schon in der Nähe des Wirbels höher und schmaler sind, und dass sich schon 8 bis 10 mm vom Wirbel zwischen den Rippen feine Radialstreifen einstellen, welche sich bald vermehren und kleine Knötchen tragen; zugleich wird die Wölbung der Schale wesentlich stärker, und sie beginnt sich mehr nach hinten auszudehnen.

Plicatula multiplicata v. Koenen.

Tafel III, Figur 6.

Die einzig vorliegende untere Klappe ist am Rande unterhalb eines starken Schalen-Absatzes sehr beschädigt, doch lässt sich nach diesem der Umriss leicht ergänzen. Bis zu dem Absatz ist die Schale 14,5 mm lang und 11,5 mm breit; vollständig ist sie fast 18 mm lang und gegen 14 mm breit gewesen. Die Anheftungsstelle ist nur etwa 1,5 mm gross, die Wölbung grossentheils recht flach und nur auf den Seiten, zumal in der Wirbelgegend stärker. Zuerst trägt die Schale, welche hier etwas abgerieben ist, etwa 10 dicke Radialrippen, welche sich aber früher oder später durch Spaltung und später auch durch unregelmässige Einschiebung feiner Rippen vermehren, so dass an dem Absatz gegen 30 Rippen vorhanden sind, von welchen die primären die stärksten sind. Die Rippen tragen in Abständen von ca. 1 mm schuppige Spitzen, welche auf erhabenen Anwachsstreifen zu liegen scheinen.

Die Gestalt ist bis zu dem Absatz fast die eines wenig ungleichseitigen Pecten; unter dem Absatz biegen sich aber die hier überhaupt vorhandenen oder sichtbaren Rippen ziemlich stark nach hinten. Der Schlossrand ist noch nicht 3 mm lang; das Schloss habe ich wenigstens so weit frei legen können, dass die beiden Schlosszähne sichtbar sind.

Unsere Art schliesst sich durch ihre Skulptur wohl zunächst an solche Varietäten von *P. asperrima* d'Orb. an, wie sie Pictet (Paléontologie Suisse V. Taf. 183 fig. 2 b) aus dem Neokom von St. Croix abbildete, doch ist bei diesen der Schlossrand viel breiter, die Anheftungsstelle weit grösser, und die Zwischenräume der Rippen sind breiter.

Lima Mungoënsis v. Koenen.

Tafel III, Figur 16.

Die einzige, vorliegende rechte Schale ist etwas verdrückt, in der Gegend des Wirbels abgenutzt und vorn unten beschädigt. Bei 26 mm Länge ist sie gegen 17 mm breit gewesen und nur auf der vorderen Seite etwas stärker gewölbt. Der Schlossrand mag 5 mm lang gewesen sein. Die stärkste Krümmung des Schalenrandes findet sich ausser am unteren Theile oberhalb der Mitte der hinteren Seite. Die Schale trägt etwa 25 abgerundet-dachförmige Rippen, welche sich anscheinend nicht durch Spaltung oder Einschiebung vermehren und durch rundliche Einsenkungen von einander getrennt werden; stellenweise sind flache, wenig deutliche Anschwellungen auf ihnen zu erkennen, während Anwachs-Streifen oder Falten ganz fehlen oder doch nicht erhalten sind. Das lang herabgezogene hintere Ohr zeigt noch 6 ganz flache, gedrängte Radialrippen, welche von einigen ebenfalls ganz flachen, breiten Anwachsfallen sehr schräg gekreuzt werden.

In der Berippung nähert sich unser Exemplar der *L. expansa* Forbes (d'Orbigny, Terr. cré. Lamellibr. III. pl. 415 f. 9—12); ist aber weit flacher gewölbt und weniger ungleichseitig.

Lima reniformis v. Koenen.

Tafel III, Figur 20 a, b.

Die einzig vorliegende, abgebildete rechte Schale ist 14,5 mm lang und 11,5 mm breit und etwa 4,5 mm hoch gewölbt. Der Schlossrand ist knapp 5 mm lang und mit ca. 70 Grad gegen die Mittellinie der Schale geneigt. Der mittlere Theil der bauchigen Schale ist ziemlich gleichmässig gewölbt, nach hinten etwas stärker, und wesentlich stärker der vordere Theil, an welchem sie steil abfällt und etwas eingesenkt ist. Der hintere Schalrand steht nahezu senkrecht gegen den vordersten und geht in verhältnissmässig kurzem Bogen in den unteren Schalrand über, welcher in der Mitte am schwächsten gekrümmt ist. Die Schale trägt etwa 32 kantige Rippen, von welchen die acht schmalsten und schwächsten auf dem vorderen steilen Abfall liegen, die mittelsten die breitesten sind, die hintersten 4 oder 5 aber auch schnell ziemlich schmal werden. Alle Rippen sind bedeutend breiter, als ihre Zwischenräume, besonders vorn und hinten; nur 7 oder 8 Furchen vor der Mitte der Schale sind so breit, dass in ihnen noch je eine schwache Radialrippe Platz findet. Auf den Radialrippen bringen Anwachsstreifen niedrige Höcker oder Anschwellungen hervor, welche von Mitte zu Mitte 0,3 bis 0,4 mm von einander entfernt sind.

Durch ihre starke Wölbung und die zahlreichen, ziemlich gedrängten Rippen unterscheidet sich die vorliegende Schale von anderen Arten, mit welchen sie allenfalls verglichen werden könnte, namentlich auch von der folgenden.

Lima dilatata v. Koenen.

Tafel III, Figur 18 a, b.

Ausser der abgebildeten, fast vollständigen linken Klappe liegen noch ein Bruchstück einer solchen und zwei etwas kleinere und beschädigte rechte Klappen vor; die erstere ist reichlich 11 mm breit, knapp 11 mm lang und gegen 3 mm hoch gewölbt. Der Schlossrand ist 4 mm lang, vorn ein wenig länger, als hinten. Die Wölbung der Schale nimmt von hinten nach vorn nur wenig zu und ist nur am Wirbel neben den die Ohren begrenzenden Einsenkungen wesentlich stärker, eben sowie an dem ziemlich steilen Abfall zum vorderen Rande. Der Umriss des Schalenrandes ist ziemlich gleichmässig abgerundet, am kürzesten auf dem vorderen Drittel. Die Mittellinie der Schale ist etwa mit 80 Grad gegen den Schlossrand geneigt.

Die Schale ist fast glatt ganz vorn in einer Breite von etwa 2 mm, hinten von etwa 1 mm, und trägt im Uebrigen gegen 28 einfache, rundlich-dachförmige Radialrippen, von welchen die vordersten und hintersten ziemlich schwach sind, die folgenden aber schnell an Stärke zunehmen und etwa eben so breit wie ihre Zwischenräume sind. Diese führen je einen fadenförmigen Streifen, während auf den Rippen sich ein dünner Kiel erhebt, welcher, ebenso wie die Streifen, in Abständen je etwa 0,2 mm sehr feine Spitzen trägt. Diese sind freilich nur auf einem Abdruck der äusseren Schale mit Sicherheit zu erkennen.

Lima perplana v. Koenen.

Tafel I, Fig. 1, Tafel III, Figur 19 a, b.

Zwei anscheinend zu demselben Exemplar gehörige Schalen sitzen, etwas gegen einander verschoben, auf demselben Kalkstück, mit der Schale erhalten, sind aber am Schalenrande mehrfach beschädigt und zum Theil auch etwas verdrückt; immerhin konnte der Umriss nach den feinen Anwachsstreifen ergänzt werden.

Die Schalen sind gegen 62 mm breit und 72 mm hoch gewesen, aber wohl höchstens 10 mm dick; der gerade Schlossrand ist 15 mm lang. Die Anwachslineien sind auf der platten Schale erst auf dem unteren Drittel deutlicher zu erkennen, und zwar mehr durch die abwechselnd hellere und dunklere Färbung, als durch eigentliche Streifen; nur auf der äussersten, 5 mm breiten Zone werden kleine Absätze der Schale sichtbar. Die Wölbung ist ziemlich gleichmässig, auf der vorderen Seite wesentlich stärker, als auf der hinteren. Der vordere Schalrand ist in einer Länge von fast 50 mm gerade abgestutzt und zunächst dem vorderen, ganz kurzen Ohr etwas eingebuchtet; dieses ist an der linken Schale beschädigt und lässt sich an der rechten, abgebildeten, nicht freilegen.

Der Schalrand zeigt die stärkste Krümmung auf der vorderen Hälfte der

unteren Seite und, schon wesentlich schwächer, auf der oberen Hälfte der hinteren Seite, die geringste auf der unteren Hälfte der hinteren Seite, doch gehen diese verschiedenen Krümmungen stets ganz allmählich, ohne jede, wenn auch abgerundete Ecke in einander über, so dass stumpfe Ecken nur am hinteren Ende des Schlossrandes und am unteren Ende der Abstutzung vorn auftreten. Unterhalb des Schlossrandes laufen vom Wirbel ganz flache, durch enge Furchen getrennte Streifen nach hinten, wo sie schliesslich eine Fläche von 5 mm Breite einnehmen. Einige stark beschädigte, kleinere Exemplare, welche derselben Art anzugehören scheinen, tragen bis zu 10 mm vom Wirbel auf der ganzen Schale feine, eingeritzte Radiallinien, welche dann etwa 0,5 mm von einander entfernt sind und zuerst auf der Mitte und vor der Mitte der Schale verschwinden, dann aber auch immer weiter nach vorn und nach hinten. Auf dem hintersten Theile der Schale sind diese Furchen ein wenig breiter und erscheinen punktirt durch sehr schräg nach hinten-unten laufende Leisten, welche immer an den dahinter liegenden Rippen sitzen, so dass diese, übrigens etwas gewölbten Rippen auf ihrem vorderen Rande wie zerhackt aussehen.

Diese feine Skulptur könnte auf den grossen Schalen durch Abnutzung verschwunden sein.

Unsere Art unterscheidet sich von anderen glatten Plagiostoma-Arten besonders durch ihre geringe Wölbung oder auch durch ihre längliche Gestalt, so von der Lima Neocomiensis d'Orb.

Inoceramus? sp.

Tafel III, Figur 21.

Die abgebildete, flach gewölbte Schale hat mindestens 33 mm grössten Durchmesser gehabt und ist vielfach am Rande beschädigt, doch ist der rundlich-eiförmige Umriss nach den Anwachs-Runzeln leicht zu ergänzen, welche die ganze Schale bedecken und meistens gegen 2 mm von Mitte zu Mitte von einander entfernt, aber ziemlich unregelmässig sind. Sie sind rundlich bis kantig, mässig hoch und durchschnittlich etwa ebenso breit, wie ihre Zwischenräume. Die Wirbelkanten bilden einen Winkel von nahezu 120 Grad, und die vordere mit dem grössten Durchmesser der Schale einen Winkel von ca. 80 Grad. Vor dem Wirbel ist die Schale ein wenig ausgebreitet, ohne ein eigentliches Ohr zu bilden. Hinter dem Wirbel ist dagegen der Anfang eines scharf durch eine tiefe Furche begrenzten Ohres oder Flügels erhalten. Die Schale ist jedenfalls weniger als 0,2 mm dick und lässt an einer Stelle noch faserige Struktur senkrecht zur Oberfläche erkennen, wie sie eben bei der Gattung Inoceramus auftritt. Es ist daher wohl anzunehmen, dass die untere Schalenlage verschwunden ist, wie ja so häufig bei dieser Gattung; zu dieser oder Posidonomya passt unser Stück auch wohl nach der Skulptur, aber nicht in Folge der scharfen Begrenzung des hinteren Ohres, sondern durch diese eher zu Monotis oder vielleicht auch zu Didymotis Gerhardt (N. Jahrb. f. Mineralogie, Beilageband XI, S. 178, taf. V, f. 3).

Diese vergleicht zwar Gerhardt mit *Posidonomya*, doch hat die *P. Becheri*, wie ich (N. Jahrbuch f. Min. 1879 S. 334) gezeigt habe, keineswegs „papierdünne“ Schalen gehabt, wie noch in neuester Zeit von verschiedenen Autoren angegeben wurde, vielmehr ist gewöhnlich die ganze Schale oder doch die untere Lage derselben zerstört.

Eine zweite rechte Klappe vom Mungo ist noch unvollständiger erhalten.

Modiola plicifera v. Koenen.

Tafel II, Figur 2.

Ausser der abgebildeten, hinten beschädigten und etwas verdrückten rechten Klappe fanden sich in dem Kalksandstein noch Bruchstücke von mindestens 6 Schalen. Die erstere ist gegen 66 mm lang und hinten 28 mm hoch gewesen bei ca. 7 mm Dicke der Wölbung. Der Umriss der Schale ist lang-eiförmig, so dass sie etwa 7 mm von vorn nur 15 mm hoch ist. Der Wirbel ist niedrig, ziemlich stark nach vorn gerichtet und liegt 5 mm hinter dem vorderen Ende des Schalrandes, welcher dort recht gleichmässig abgerundet ist, aber unten schnell eine flachere Krümmung annimmt und so in den unteren Schalrand übergeht. Dieser ist von 10 mm vom vorderen Schalenende an auf etwa 40 mm Länge fast gerade gewesen und biegt sich dann ziemlich schnell zum hinteren Rande um, welcher schnell wieder eine flache Krümmung annimmt und allmählich in den hinteren Schlossrand übergeht, durchschnittlich aber gegen diesen mit etwa 135 Grad geneigt ist. Derselbe ist vom Wirbel an auf fast 40 mm Länge nur wenig gekrümmt. Unter ihm folgt eine flache, nach hinten immer breiter werdende Einsenkung, nach unten begrenzt durch die stärkste Wölbung, welche hinter dem Wirbel fast eine abgerundete Kante bildet und, allmählich flacher werdend, nach der kurzen Rundung zwischen dem hinteren und dem unteren Schalenrande verläuft. Der Haupttheil der Schale ist recht flach gewölbt und erst auf den vordersten 10 mm, unter und vor dem Wirbel, wieder etwas stärker.

Der hintere Theil der Schale trägt leidlich regelmässige Anwachsrippen, welche von vorn weit schärfer begrenzt sind, als von hinten, nahe dem Schlossrande sowohl, als auch auf der Hauptwölbung allmählich flacher werden und vor dieser schnell in flache, unregelmässige Falten übergehen. Diese werden nach vorn etwas runzelig. Die Rippen sind auf der erwähnten Wölbung 20 mm vom Wirbel etwa 0,8 mm, 30 mm vom Wirbel gegen 1 mm und 40 mm vom Wirbel etwa 1,2 bis 1,3 mm von Mitte zu Mitte von einander entfernt.

In der Skulptur zeigt unsere Art einige Aehnlichkeit mit einer Reihe von anderen, wie *M. radiata* v. Münster, in der Gestalt weicht sie jedoch recht bedeutend von denselben ab.

Lithodomus inflexus v. Koenen.

Tafel III, Figur 30 a, b.

Die beiden Klappen des einzigen Exemplares sind etwas gegen einander verschoben und an verschiedenen Stellen beschädigt, doch so, dass sie sich ergänzen, zumal da die Schale grösstentheils erhalten ist. Die Länge beträgt fast 10 mm, die Höhe 4 mm und die Dicke wohl eben so viel. Die Schale ist vorn unter dem Wirbel abgestutzt und biegt sich schnell zum unteren Schalenrande herum; dieser ist bis zum hintersten Viertel ziemlich gerade, biegt sich auf diesem ziemlich schnell auf und dann immer langsamer zum geraden hinteren Schlossrande herum, welcher höchstens die Hälfte der Schalenlänge einnimmt. Schon unter dem hinteren Theile des Schlossrandes bildet sich eine Einsenkung der Schaloberfläche aus, welche bald breiter wird und erst nahe dem hintersten Ende der Schale ganz verschwindet; von diesem zieht sich eine ziemlich gleichmässige, nach vorn immer stärker werdende Wölbung bis zum Wirbel, welche nach vorn-unten schnell in eine ebene Fläche übergeht. Die Schale ist bedeckt von zahlreichen Anwachsstreifen, welche auf der ebenen Fläche ziemlich rauh und wellig-runzelig sind, auf der hinteren Wölbung aber feiner und gleichmässiger werden. Auf dem vorderen Theile der Schale sind einzelne schwache, kantenartige Streifen vorhanden, welche nicht radial, sondern senkrecht gegen die Anwachsstreifen verlaufen, aber nicht regelmässig fortsetzen.

Durch die lange Krümmung des oberen Theiles des hinteren Schalenrandes nähert sich unsere Art manchen zu *Mytilus* oder *Modiola* gestellten Formen.

Kleine, mit Gestein erfüllte Bohrlöcher in den unreinen Kalken könnten möglicher Weise mindestens zum Theil von unserer Art herrühren.

Septifer? convolutus v. Koenen.

Tafel III, Figur 22 a, b; 23 a, b.

Ein Dutzend einzelne Schalen von verschiedener Grösse liegen vor, doch konnten sie nur theilweise äusserlich ganz von Gestein befreit werden; das Innere ist an keiner derselben zu erkennen. Die grössten Schalen sind 9,3 mm lang, 5,5 mm breit und gegen 2,5 mm hoch gewölbt, die kleine, Figur 22 abgebildete ist knapp 7 mm lang, reichlich 4 mm breit und etwa 2 mm hoch gewölbt.

Vom Wirbel läuft eine etwas abgerundete, aber fast Kiel-artige Kante nach unten, als Grenze zwischen dem vorderen und dem mittleren Theile der Schale, indem sie etwa eine halbe Windung eines Bogens beschreibt, welcher nicht in einer Ebene liegt und zuerst weit stärker gekrümmt ist, als zuletzt, aber so, dass etwa die untere Hälfte der vorderen Schalseite überhängt.

Vor dem stumpfen Wirbel springt die Schale noch ein wenig, etwa 0,5 mm, vor, doch ist dieser Theil bei den grösseren Stücken abgerieben oder angeätzt.

Der Umriss der Schale ist vorn stark eingebuchtet, nach unten ziemlich kurz gerundet und erhält nach hinten und schliesslich nach oben allmählich eine flachere Biegung bis zu dem geraden Schlossrande. Die Wölbung ist dicht hinter der erwähnten Kante recht stark, verflacht sich aber bald nach hinten zu bedeutend und weiterhin ganz allmählich bis zu einer flachen Einsenkung über dem Schlossrande. Der mittlere und hintere Theil der Schale trägt in der Jugend gegend 12 dicke, hohe, gedrängte Radialstreifen, welche bald anfangen, sich unregelmässig durch Theilung und Einschiebung zu vermehren und zugleich breitere Zwischenräume bekommen, von welchen aber die hintersten unter mehrfacher Spaltung sich nach einander nach oben biegen und an den Schlossrand beziehungsweise den hinteren Schalenrand laufen, so dass auf der Mitte der Schale zwischen dem Kiel und dem hinteren Rande nur etwa 15 Radialrippen vorhanden sind. Am unteren Rande sind die Rippen von Mitte zu Mitte etwa 0,4 mm von einander entfernt und etwa eben so breit, wie ihre Zwischenräume.

Von der vorderen, steil stehenden Fläche der Schale trägt die hintere Hälfte ähnliche Rippen, welche nicht vom Wirbel auslaufen, sondern hinter diesem sich von dem Spiralstreifen auf der Kante abspalten und schräg an den Schalrand verlaufen. Der vordere Theil dieser Fläche ist auf seiner hinteren Hälfte glatt, auf der vorderen aber auch mit ähnlichen Rippen bedeckt, welche sämmtlich von dem vorderen Ende des Wirbels nach dem vorderen Schalrande laufen. Auf dem vorderen Theile der vorderen Fläche sind etwas unregelmässige, schmale, runzelige Anwachsfallen besonders in der Jugend sehr deutlich, verschwinden aber später; nur bei einzelnen Stücken sind sie auch im Alter auf dem mittleren und hinteren Theile der Schale vorhanden, dann aber sehr breit und bis über 1 mm von Mitte zu Mitte von einander entfernt. Sie bedingen dann Anschwellungen der Radialrippen, welche ausserdem zuweilen eine mehr oder minder deutliche und regelmässige Körnelung erkennen lassen.

Pinna latissima v. Koenen.

Tafel III, Figur 25.

Das abgebildete Bruchstück des unteren Theiles der Schale liegt allein vor. Durch eine Kante, welche nur nach unten scharf begrenzt ist, wird die Schale in zwei Flächen getheilt, welche durchschnittlich mit etwa 120 Grad gegen einander geneigt sind; die obere Fläche konnte nur in sehr geringer Ausdehnung von Gestein befreit werden, ist aber doch bis zu einer Breite von etwa 10 mm sicher zu erkennen, die untere ist 18 mm breit, aber nicht ganz eben, indem sie unterhalb des Kieles eine schmale Einsenkung hat, eine breitere, aber flachere etwa in der Mitte, und eine noch breitere zwischen letzterer und dem unteren Schalenrande. Die Schale trägt feine Radialstreifen, welche am hinteren Rande durchschnittlich 1 mm von einander entfernt sind, auf der unteren Fläche aber nur auf dem untersten Drittel höher werden und deutlicher hervortreten.

Falls der Wirbel in der Fortsetzung dieser Radialstreifen und des Kieles liegt, so würde die ganze Schale bei mindestens 25 mm Breite nur etwa 35 mm Länge gehabt haben, wovon die hintersten 20 mm erhalten sind. Sehr dünne, erhabene Anwachsstreifen laufen in Abständen von durchschnittlich etwa 0,7 mm über die Schale hinweg, indem sie zwischen je zwei Streifen immer einen Bogen nach vorn beschreiben. Diese Anwachsstreifen sind auf der unteren Hälfte der unteren Fläche, sowie auf und über dem Kiel am deutlichsten. Der hintere Rand der unteren Fläche bildet fast einen Viertelkreis.

Arca semiglabra v. Koenen.

Tafel III, Figur 28 a, b; 29 a, b.

Es liegen vier einzelne Schalen vor, welche sämmtlich etwas beschädigt sind, doch an verschiedenen Stellen; die Figur 28 abgebildete ist 18,5 mm breit, 15 mm lang und gegen 7 mm hoch gewölbt; die übrigen sind bis auf eine, welche etwas grösser, aber etwas verdrückt ist, sämmtlich kleiner.

Von dem mässig hervorragenden Wirbel läuft eine stumpfe, abgerundete Kante nach einer eben solchen Ecke zwischen dem unteren und hinteren Schalrande, welcher unten mit ca. 80 Grad gegen den Schlossrand geneigt ist, nach oben sich aber allmählich immer mehr zu diesem umbiegt. Der gerade Schlossrand ist nicht ganz halb so lang, wie die Schale breit, und geht ohne Ecke in den vorderen Schalenrand über, welcher sich in ziemlich gleichmässigem, doch unten flacher werdendem Bogen zum unteren Schalenrande herumbiegt; dieser ist nur mässig gekrümmt und konvergirt durchschnittlich mit dem Schlossrande nach vorn unter einem Winkel von etwa 25 Grad.

Die hintere Fläche der Schale ist ein wenig eingesenkt, zumal nahe dem Wirbel, der Haupttheil dagegen vor der Kante flach gewölbt und erst weiter vorn etwas stärker. Die Schale trägt flache, unregelmässig sich spaltende Radialstreifen, welche von Mitte zu Mitte gegen 0,3 mm von einander entfernt und auf dem vorderen Theile der Schale am deutlichsten, auf dem hinteren und, im Alter, auch auf dem mittleren Theile mehr oder minder undeutlich sind. Ueber diese Radialstreifen laufen flache Anwachsstreifen hinweg, welche von Mitte zu Mitte etwa 0,3 bis 0,4 mm von einander entfernt und auf dem vorderen Theile der Schale am deutlichsten sind, nach hinten zu immer flacher werden.

Der kleine Wirbel ist kaum 1 mm vom Schlossrande entfernt, und auf dem dreieckigen Felde zwischen beiden sind noch je 2 von der Mittellinie sehr schräg nach dem Schlossrande laufende Ligamentfurchen zu erkennen. Die Schlossfläche ist vor dem Wirbel nur ganz schwach gekrümmt und trägt bis zu 8 mm weit vor dem Wirbel Schlosszähne, und zwar auf 2 mm vom Wirbel 6 schwache, senkrechtstehende, und dann 8 stärkere, von welchen die ersten geknickt sind, indem ihre untere Hälfte steil steht, die obere sich stark vorbiegt, während die vordersten Zähne nur die letztere Richtung haben, und die mittleren einen

Uebergang zwischen beiden Formen bilden. Die hintere Schlossfläche ist stark gekrümmt und trägt bis zu 7 mm vom Wirbel Schlosszähne, auf dem ersten mm einige ganz schwache, dann 13 stärkere, und zwar stehen die ersten senkrecht, die folgenden biegen sich oben nach hinten um, und die übrigen stellen sich mehr und mehr schräg, so dass die letzten, etwas schwächeren, fast dem Schlossrande parallel stehen.

In der Gestalt und zum Theil auch in der Skulptur hat unsere Art einige Aehnlichkeit mit einer Reihe von Arten der Kreide, welche theils zu der Gattung *Cucullaea*, theils zu *Arca* gestellt worden sind. Zu *Cucullaea* passt aber das Schloss nicht, eben so wenig, wie z. B. das von Gerhardt (Jahrb. f. Min. Beilageband XI, 1. Taf. V f. 4) als *Cucullaea brevis* d'Orb. abgebildete aus dem Aptien Columbiens, und von den sonst vergleichbaren *Arca*-Arten unterscheidet sich unsere Form durch die Gestalt, namentlich durch die Stellung des Schlossrandes zum unteren Schalenrande. Falls man unsere Art nicht einfach zu *Arca* stellen will, würde sie wohl zu *Trigonarca Conrad* zu ziehen sein, von der mir leider typische Exemplare nicht vorliegen.

Arca cardiformis v. Koenen.

Tafel III, Figur 27 a, b.

Von 6 Exemplaren haben die meisten nur noch geringe Reste der Schale, und die beiden letzten sind am Rande beschädigt, lassen sich aber leicht ergänzen. Die abgebildete linke Klappe ist 14 mm hoch, 17 mm breit und 5 mm dick gewölbt; von den übrigen ist nur eine einzige etwa eben so gross. Die Schale ist dreieckig, fast gleichseitig, doch biegt sich der untere, grossentheils nur schwach gekrümmte Schalenrand schon zu dem vordersten Drittel und auf diesem selbst erheblich stärker in die Höhe, als hinten, und der vordere Schalrand beginnt somit wesentlich höher, als der hintere, obgleich beide durch einen ziemlich weiten Bogen in den unteren übergehen; dafür steht der hintere Schalenrand etwas steiler und biegt sich erst etwa in der halben Höhe der Schale nach dem Schlossrande zu.

Der Wirbel ist niedergedrückt, recht stark umgebogen, kaum merkbar nach vorn gerichtet und ragt gegen 2 mm über den Schlossrand hinaus. Die Wölbung der Schale ist in der Mitte recht flach, nach vorn ein wenig deutlicher und zuletzt, auf dem Uebergang zur vorderen Seite eben so wie zu der hinteren, ziemlich stark; ausserdem läuft vorn eine stumpfe Kante vom Wirbel aus, vor welcher eine flache Einsenkung liegt, doch verlieren sich beide allmählich etwa 3 bis 4 mm vom Wirbel anscheinend ganz und gehen in eine flache Wölbung über.

Auf der hinteren Seite der Schale beginnen am Rande recht hohe, gedrängte Anwachsrippchen, welche allmählich etwas breitere Zwischenräume bekommen, nach unten steiler abfallen und auf der stärkeren Wölbung zum mittleren Theile der Schale sich schnell ganz verflachen; nahe dem unteren Rande der Schale sind sie zuletzt etwa 0,25 mm breit, eben so breit, wie ihre Zwischenräume.

Der vordere Theil der Schale scheint ähnliche Anwachsrippen nur in nächster Nähe des Schalrandes gehabt zu haben; soweit die Schale hier genügend erhalten ist, sieht man, dass die Rippchen nach hinten sehr schnell dünner und niedriger werden und verschwinden.

Der mittlere Theil der Schale trägt auf seiner oberen Hälfte nur sehr feine Anwachsstreifen und zuletzt auch einzelne ganz flache und unregelmässige Falten; auf seiner unteren Hälfte erhält er sehr regelmässige, durch ganz enge Furchen getrennte, rundliche Anwachsrippchen, welche nach unten etwas schärfer begrenzt sind, als nach oben, und zuerst 0,2 mm bis 0,25 mm, zuletzt 0,3 mm breit sind. Nach vorn und nach hinten werden diese Rippchen flacher, und sie verschwinden resp. gehen in ganz flache und unregelmässige Falten über schon vor dem Anfange der stärkeren Wölbung auf beiden Seiten, indem sich öfters je 2 Rippchen vereinigen, andere einfach auskeilen; die Falten sind an verschiedenen Schalen recht verschieden deutlich und laufen weiter bis zu den hinteren Rippchen. Von dem Schloss habe ich nur die hintere Hälfte einigermassen frei legen können und auch diese nicht so gut, dass eine genaue Abbildung geliefert werden könnte. Der äussere Schlossrand scheint in einer Länge von etwa 4 mm gerade zu sein; unter ihm sind einige steil stehende Zähne sichtbar, von welchen die äusseren von Mitte zu Mitte gegen 0,5 mm breit sind. Nach hinten folgt ein gekrümmter Theil der Schlossfläche in einer Länge von ca. 5 mm, auf welchem die Zähne allmählich etwas dicker werden und bald eine weniger steile Stellung annehmen, so dass die letzten ziemlich horizontal stehen. Die Ligamentgruben und die mittelsten Schlosszähne sind nicht sicher zu erkennen. Ich stelle unsere Art wegen ihrer Gestalt nicht zu der Gattung *Pectunculus*, sondern zu *Area*, wenn auch mit allem Vorbehalt.

Leda cultellus v. Koenen.

Tafel III, Figur 24 a, b, c.

Bei dem Zerschlagen der Kalkstücke konnten 10 Exemplare mehr oder minder vollständig herausgelöst werden, wenn auch grösstentheils nur als Steinkerne. Die grösste Schale ist gegen 13 mm lang und 5,7 mm hoch, eine andere gegen 11 mm lang und 4,6 mm hoch gewesen; die abgebildete ist 10 mm breit und 4 mm hoch, aber knapp 1 mm hoch gewölbt. An dem kleinen, wenig hervorragenden Wirbel bildet der Schalenrand einen Winkel von etwa 160 Grad. Die hintere Seite ist um mindestens ein Viertel länger, als die vordere, und endigt mit einer nahezu rechtwinkligen Ecke, an welcher der gerade hintere Schlossrand mit dem hinteren Schalrande zusammenstösst, während der vordere Schlossrand vorn nicht so scharf begrenzt ist, sondern sich allmählich zum vorderen Schalrande umbiegt, welcher ziemlich gleichmässig abgerundet ist, aber dann in einen flacheren Bogen und den unteren Schalrand übergeht. Dieser ist vorn noch am stärksten gekrümmt, in der Mitte recht schwach und nach

dem hinteren Schalrande zu wieder allmählich stärker. Die Wölbung der Schale ist gering und ziemlich gleichmässig bis auf den sehr flachen hintersten Theil.

Die glänzend glatte Schale lässt mit Hülfe der Loupe zahlreiche sehr feine, zum Theil fast faltenartige Anwachsstreifen erkennen. Sowohl vor als auch hinter dem Wirbel trägt die Schale längs der Schlossränder je ein sehr schmales, langes Schlossfeld, welches durch eine ziemlich tiefe Rinne begrenzt wird, zu welcher sich die Schale mit einer wenig abgerundeten Kante umbiegt. Innerhalb dieser Schlossfelder und um etwa ein Sechstel kürzer findet sich je eine Kante und darüber eine zweite Rinne dicht neben dem Schlossrande selbst.

An einzelnen Stellen anderer Exemplare sind einige Schlosszähne zu erkennen, welche knapp 0,2 mm von Mitte zu Mitte von einander entfernt sind.

Leda sp. ind.

Tafel III, Figur 26 a, b.

Ausser kleinen, stark beschädigten Schalen liegt eine fast vollständige vor, welche gegen 6,5 mm Breite und 3,5 mm Höhe hat bei etwa 1 mm Dicke der Wölbung. Sie gleicht einigermaßen der *Leda Foersteri* Müller (Holzapfel in Palaeontogr. XXXV, S. 202. Taf. 21 f. 13—17), ist aber verhältnissmässig breiter und wohl auch flacher gewölbt. Der Wirbel liegt ziemlich in der Mitte und ist recht stumpf. Vorn ist die Schale wohl abgerundet und nimmt nach dem unteren Schalrand allmählich eine flachere Krümmung an. Dieser biegt sich erst ganz hinten stärker in die Höhe und trifft endlich den flach eingebogenen hinteren Schlossrand nahezu unter einem rechten Winkel. Die Skulptur besteht aus zahlreichen feinen, eingeritzten Anwachslineien, welche anscheinend nach unten schärfer begrenzt sind, als nach oben, und durch ganz flache, knapp 0,1 mm breite Bänder von einander getrennt werden.

Da das Schloss sowie die Lunula und das Schild nicht zu sehen sind, so verzichte ich darauf, diese Art mit einem Namen zu belegen.

Lucina sp. ind.

Tafel IV, Figur 4 a, b.

Die einzige, abgebildete linke Klappe ist vorn beschädigt und wohl nur als Steinkern erhalten; die Höhe beträgt 6 mm, die Breite 7,3 mm, die Dicke der Wölbung gegen 2 mm, der Winkel der Wirbelkanten etwa 115 Grad, doch ist der hintere Schlossrand ein wenig gekrümmt und der vordere merklich eingesenkt. Der Wirbel ragt mässig hervor und ist mässig stark nach vorn gerichtet; vor dem Wirbel liegt eine gegen 3 mm lange, anscheinend tief eingesenkte, aber von Gestein verdeckte Lunula, hinter dem Wirbel ein schmales, etwa eben so langes und ebenfalls verdecktes Feld, welches durch eine ziemlich scharfe Kante

begrenzt wird. Ueber dieser folgt eine ziemlich tiefe Einsenkung, welche fast das hinterste Viertel der Schale einnimmt und nach vorn an einer Kante aufhört, die nahe dem Wirbel recht scharf ist, nach unten allmählich stumpfer wird und sich weiter herabbiegt, so dass sie eine nur wenig stärkere Krümmung des Schalenrandes bedingt. Der Rest der Schale ist ziemlich gleichmässig gewölbt, nur weit vorn wieder etwas stärker.

Leider ist keine Spur von der Schalenoberfläche noch vom Schloss und den Eindrücken der Muskeln und des Mantels mit Sicherheit zu erkennen.

Cardium perobliquum v. Koenen.

Tafel IV, Figur 3 a, b, c.

Ausser der abgebildeten rechten Klappe fanden sich beim Zerkleinern des Gesteins nur noch zwei Steinkerne kleinerer Exemplare, welche derselben Art angehören dürften. Erstere ist 11,5 mm lang, 7,5 mm breit und 5 mm dick gewölbt; vom Wirbel verläuft eine etwas abgestumpfte Kante nach einer ein wenig abgerundeten Ecke, an welcher der schwach gekrümmte hintere Schalrand mit dem unteren unter einem Winkel von annähernd 90 Grad zusammenstösst. Der untere Schalenrand biegt sich ziemlich gleichmässig bis in die Nähe des vorderen Schlossrandes auf und dann zu diesem ein wenig schneller um. Der vor der erwähnten Kante liegende Theil der Schale ist auf seiner vorderen Hälfte etwas stärker gewölbt, als auf der hinteren. Der hintere Theil der Schale steht zunächst dem Wirbel ganz steil und ist in der Mitte ein wenig eingesenkt. Weiterhin wird die Neigung zur Schalenebene etwas weniger steil, und die Einsenkung verliert sich allmählich.

Der Schlossrand ist recht dick und in einer Länge von etwa 3,5 mm nur wenig gebogen, und der stark gekrümmte, ein wenig nach vorn gerichtete Wirbel ragt fast 2 mm über ihn hinaus. Die Schlossfläche ist etwas abgenutzt, lässt aber etwas vor ihrer Mitte und an ihrem hinteren Ende noch Spuren von Zähnen, sowie von Gruben für die Zähne der linken Klappe erkennen.

Der Kiel trägt eine hohe Radialrippe, und der vor ihm liegende Theil der Schale noch etwa 22 Rippen, von welchen die ersten 6 allmählich, die folgenden etwas schneller an Stärke und besonders auch an Höhe abnehmen, so dass sie eine etwas dachförmige Gestalt bekommen und durch enge Rinnen von einander getrennt werden, während die hintersten sehr hoch sind und durch tiefe Furchen von einander getrennt sind.

Der hintere, steil abfallende Theil der Schale trägt gegen 12 Radialrippen, welche nach hinten schmaler werden und namentlich schnell an Höhe abnehmen, so dass die erste nicht gar viel gegen die Rippe auf der Kante zurücktritt und eine Abstumpfung der letzteren bedingt, während die 6 hintersten recht niedrig und, freilich in Folge von Abnutzung, auch undeutlich sind. Sämmtliche Rippen scheinen, mindestens im Alter, Höcker getragen zu haben in Abständen von etwa 0,5 bis 0,6 mm.

Falls anders unsere Art zu der Gattung *Cardium* gehört, wie ich nach den vorhandenen Resten des Schlosses glauben möchte, so würde sie in die Nähe der eocänen Gattung *Lithocardium Woodward* zu stellen sein.

Astarte tecticosta v. Koenen.

Tafel IV, Figur 7 a, b.

Ausser der abgebildeten, fast ganz vollständigen, wenn auch besonders in der Wirbelgegend abgenutzten linken Klappe liegen noch drei bedeutend kleinere vor, welche derselben Art angehören dürften; die erstere ist 10 mm breit, 8 mm hoch und gegen 2 mm dick gewölbt. Der hintere Schlossrand ist etwas gekrümmt und gegen den etwas eingebuchteten vorderen durchschnittlich mit 90 Grad geneigt, vorn mit etwa 80 Grad, hinten mit etwa 100 Grad, und ist ziemlich noch einmal so lang, wie der vordere, welcher mit mässig kurzer Biegung in den Schalenrand übergeht. Dieser nimmt allmählich eine schwächere Krümmung an, so dass das mittlere Drittel nur schwach gekrümmt ist, doch wird auf dem hinteren Drittel die Biegung schnell wieder stärker bis zum hinteren Schlossrande.

Die Wölbung ist auf dem hinteren Drittel am stärksten, auf der Mitte am schwächsten und auf dem vordersten Viertel wieder etwas stärker. Vorn findet sich eine tiefe, 3,5 mm lange, durch eine scharfe Kante begrenzte Lunula und hinten ein ähnlich begrenztes, langes, schmales Feld.

Die Skulptur besteht aus ungewöhnlich hohen und dicken Anwachs-Rippen, welche, fast ebenso breit wie ihre Zwischenräume, von Mitte zu Mitte im Alter gegen 1 mm von einander entfernt sind, 1 mm vom Wirbel aber nur halb so weit. In der Jugend sind sie nur mässig hoch, im Alter aber mindestens so hoch wie breit und von unten her ausgehöhlt, während sie an ihrem oberen Rande steil abfallen. In den Zwischenräumen tritt öfters je ein niedriger Streifen auf.

Das Schloss lässt sich leider nicht wohl frei legen, da das Gestein hart ist und Schalentrümmer anderer Bivalven enthält.

In der Gestalt gleicht unsere Art mancherlei anderen *Astarte*-Arten, aber in der Skulptur weicht es von diesen wesentlich ab.

Astarte (Goodallia?) trigonella v. Koenen.

Tafel IV, Figur 1 a, b, c.

Die einzige vorliegende, abgebildete rechte Klappe ist nur unbedeutend beschädigt, und es gelang mir, auch das Schloss frei zu legen; sie ist 14,5 mm lang, ebenso breit und 5 mm dick gewölbt. Die ziemlich dicke Schale ist fast gleichseitig-dreieckig, doch mit einer starken Herausbiegung des hinteren Schalenrandes, welcher durch eine wenig abgerundete Ecke von dem grossentheils ziemlich geraden unteren Schalenrande getrennt wird. Dieser biegt sich vorn

allmählich mehr in die Höhe und geht in einer besser abgerundeten Ecke in den vorderen Schalrand über, welcher auf seiner unteren Hälfte ziemlich gerade, auf seiner oberen bis zu dem deutlich nach vorn gerichteten Wirbel mässig eingebuchtet ist. Von dem ziemlich kleinen, nieder gedrückten Wirbel läuft nach dem hinteren Ende des unteren Schalrandes eine schwach abgerundete Kante, nach dem vorderen dagegen eine vollständig abgerundete. Der hintere Theil der Schale ist deutlich eingesenkt fast in seiner ganzen Länge, der vordere nur in der Nähe des Wirbels. Eine schärfer begrenzte Lunula ist nicht vorhanden, sondern nur eine 6 mm lange und ca. 1,5 mm breite Einsenkung, dagegen läuft auf dem hinteren Theile der Schale vom Wirbel in flachem Bogen nach dem hinteren Schalenrande, 6 mm vom Wirbel, eine rundliche Kante, welche ein hinteres, bis zu 1,5 mm breites Feld begrenzt.

Die ersten drei Fünftel der Schale sind glatt, der Rest trägt auf dem mittleren Theile breite Furchen, getrennt durch recht hohe Anwachsrunzeln, welche von Mitte zu Mitte meistens 0,8 mm, zum Theil aber auch über 1 mm von einander entfernt sind, auf dem vorderen und dem hinteren Theile der Schale aber grossentheils verschwinden.

Die rechte Klappe besitzt 2 Schlosszähne und 2 Gruben für die Zähne der linken Klappe, sowie eine Grube für einen langen, schmalen vorderen Seitenzahn der letzteren. Die Grube für den vorderen Schlosszahn der linken Klappe ist sehr gross, und ihre Ränder divergiren vom Wirbel aus unter einem Winkel von ca. 80 Grad; die für den hinteren Zahn der linken Klappe ist ziemlich schmal, schmaler als der hintere Zahn der rechten, aber etwas breiter, als der vordere Zahn der rechten, und liegt unmittelbar unter dem kräftigen Ligamentträger. Die Grube in der rechten Klappe für den vorderen Seitenzahn der linken ist nach innen durch eine Leiste scharf begrenzt und reicht bis zu 6 mm vom Wirbel.

Unsere Art nähert sich in der Gestalt einigermaßen solchen Formen der Gattung *Opis*, bei welchen der Wirbel weniger spitz und weniger stark nach vorn gedreht und die Lunula wenig eingesenkt ist, wie *O. trigonalis* Sow. sp. aus dem Unter-Oolith und *O. semilunulata* Étallon aus den *Diceras*-Schichten, für welche Bigot die Untergattung *Trigonastarte* aufstellte (*Sur les Opis. Mém. Soc. Linn. de Normandie XVIII, 1894-95, S. 159*), weicht aber durch das Schloss weit von ihnen ab, welches eine gewisse Uebereinstimmung mit dem einzelner Astarte-ähnlicher Formen zeigt, so z. B. mit der *Goodallia Koeneni* Speyer.

Sobald mehr und besseres Material von unserer Art vorliegt, dürfte für dieselbe eine besondere Untergattung aufzustellen sein.

Cardita sphaericula v. Koenen.

Tafel IV, Figur 2 a, b.

Die einzige vorliegende linke Klappe ist vielleicht ein wenig abgenutzt, doch gelang es, das Schloss frei zu legen. Sie ist 4,7 mm breit, 5 mm lang und

2,3 mm dick gewölbt. Der stumpfe Wirbel ragt verhältnissmässig stark hervor, und die Wirbelseiten bilden einen Winkel von ca. 80 Grad; im Uebrigen ist der Umriss rundlich und die Krümmung am Uebergang des hinteren Schalenrandes zum unteren und zum Schlossrande noch am stärksten, ein wenig schwächer am oberen Ende des vorderen Schalrandes, und am schwächsten am unteren Schalenrande. Die Wölbung ist hinter der Mitte der Schale am stärksten. Vor dem Wirbel befindet sich eine ca. 2 mm lange, ziemlich tiefe, aber anscheinend nicht scharf begrenzte Lunula.

Die Skulptur besteht aus etwa 25 dicken, durch schmalere Furchen getrennten Radialrippen, welche freilich nach dem Wirbel zu und auf der hinteren Hälfte der Schale mehr oder minder abgenutzt sind; nahe dem hinteren Rande werden sie jedenfalls etwas schmaler. Sie scheinen nicht glatt, sondern gekerbt oder gekörnelt gewesen zu sein und werden durch 2 verhältnissmässig starke Absätze je 0,5 mm vom Schalenrande und von einander förmlich unterbrochen.

Das Schloss ist recht kräftig, leider in seinem dem Wirbel zunächst liegenden Theile abgenutzt; in seiner Mitte steht ein dicker, dreieckiger Zahn, dessen Seiten nach oben mit ca. 45 Grad konvergiren; von einem vorderen Schlosszahn sind nur Spuren vorhanden. Die lange Grube für den hinteren Schlosszahn der linken Klappe ist etwas breiter, als die für den vorderen.

Cytherea Wohltmanni v. Koenen.

Tafel IV, Figur 8 a, b; 9; var? Figur 6.

Die häufigste Art, von welcher ich beim Zerschlagen der unreinen Kalke über 20 mehr oder minder vollständige Schalen erhielt, aber mindestens 50 gesehen habe, ist eine rundlich-eiförmige Form, welche sich freilich wegen ihrer rauhen Skulptur nur schwer und unvollständig mit ihrer Aussenschale vom Gestein befreien lässt.

Das abgebildete, zweiklappige Exemplar ist 24 mm breit, 20 mm hoch und 11,5 mm dick; die grössten der übrigen sind allerhöchstens 25 mm breit. Der Wirbel liegt dicht hinter dem vorderen Drittel der Schale, ist recht stark nach vorn gerichtet, aber verhältnissmässig wenig aufgetrieben.

Der untere Schalrand ist hinten am wenigsten gekrümmt und geht hier in kurzem Bogen in den hinteren Schalrand und den mässig gekrümmten Schlossrand über. Nach vorn erhält er unten allmählich eine stärkere Biegung und geht so in den vorderen Schalenrand und endlich in den vorderen Schlossrand über, welcher mit dem mittleren Theile des hinteren Schlossrandes einen Winkel von knapp 110 Grad bildet.

Die Wölbung ist auf dem hintersten Drittel am stärksten, in der Mitte am schwächsten. Die Skulptur besteht aus ziemlich hohen Anwachsrippen, welche besonders im Alter von oben ausgehöhlt oder doch scharf begrenzt sind, nach unten aber ziemlich gleichmässig abfallen und nahe dem unteren Rande zum

Theil über 1 mm breit sind, vorher etwa 0,7 mm, über der Mitte der Schale gegen 0,5 mm, und auf dem obersten Viertel nur etwa 0,1 mm bis 0,2 mm. Die Lunula ist nur wenig vertieft und etwa 5 mm lang und 4 mm breit.

Das Schloss habe ich an einer rechten Klappe grösstentheils frei legen können. Nach den Zahngruben in demselben zu urtheilen, ist der vordere Zahn der linken Klappe ein wenig breiter, als der mittlere und als der mittlere der rechten, aber merklich dünner, wenn auch weit gedrungener, als der hintere Schlosszahn, und wesentlich stärker, als der schmale vordere der rechten Klappe, auf deren Schlossplatte vorn eine schmale Grube vorhanden ist, so dass die linke Klappe einen vorderen Seitenzahn gehabt hat. Der hintere Schlosszahn der linken Klappe ist jedenfalls ziemlich dünn und erhebt sich am Rande des Ligamentträgers.

Dass Schloss ist somit ziemlich ähnlich dem von anderen Arten der Gattung, wie *C. despecta* Desh. (Anim. sans Vert. du bassin de Paris Taf. 30 f. 17, 18). Ob einzelne Schlosszähne gespalten waren, kann ich nicht entscheiden, da es nicht möglich war, die Oberfläche der Schlosszähne aus dem festen Gestein ganz unversehrt herauszupräpariren. Die inneren Abdrücke der Schale sind leider nicht scharf genug, um die Muskeleindrücke und den Verlauf des Manteleindrucks erkennen zu lassen; nur an einem Stück sieht man, wenn auch wenig deutlich, dass eine Mantelbucht bis über das hintere Drittel der Schale hinausreicht.

Vielleicht sind als Varietät derselben Art anzusehen das Figur 6 abgebildete, wohl erhaltene Exemplar, dessen Schloss sich leider nicht frei legen lässt, und ein Paar Bruchstücke. Ersteres ist 13,5 mm hoch, 16,5 mm breit und 4 mm dick gewölbt und weicht von der ächten *C. Wohlmanni* besonders dadurch ab, dass der Wirbel etwas weniger weit vorn liegt und weniger stark vorwärts gerichtet ist, dass der Schlossrand fast gerade und der Schalenrand hinten breiter abgerundet ist.

Cytherea corbuloides v. Koenen.

Tafel IV, Figur 10 a, b.

Die einzige, abgebildete linke Klappe ist vorn etwas beschädigt und etwas abgenutzt, besonders auf ihrer oberen Hälfte. Sie ist 16 mm hoch, fast 19 mm breit und etwa 5,5 mm dick gewölbt; sie hat einen rundlich-eiförmigen Umriss, abgesehen von dem recht stark hervorragenden und nach vorn gerichteten Wirbel und einer recht kurzen Rundung zwischen dem unteren und dem hinteren Rande. Die Wölbung ist am stärksten ganz hinten und ganz vorn, und auf der hinteren Hälfte etwas stärker, als auf der vorderen. In der Richtung vom Wirbel nach unten ist die Wölbung auf der oberen Hälfte wesentlich geringer, als auf der unteren, und über dem untersten Sechstel findet sich ein verhältnissmässig tiefer und breiter Absatz der Schale. Der untere Schalrand ist hinten nur flach gekrümmt und biegt sich nach vorn allmählich immer stärker zum vorderen

Rande und dem stark eingesenkten vorderen Schlossrande um, hinten dagegen recht kurz zu dem recht stark gekrümmten hinteren Rande und dem hinteren Schlossrande, welcher besonders auf seiner vorderen Hälfte verhältnissmässig stark gebogen ist.

Die Skulptur ist nur auf der unteren Hälfte der Schale erhalten und besteht aus Anwachsrippen, welche oben scharf begrenzt sind, nach unten allmählich abfallen und gegen 0,5 bis 0,6 mm von einander entfernt sind.

Die Lunula ist mässig vertieft, durch eine enge Furche begrenzt und 4 mm lang und 1,3 mm breit.

Das Schloss liess sich leidlich gut reinigen, wenn auch die Oberfläche der Zähne zum Theil ein wenig dabei abgenutzt worden ist. Der mittlere Schlosszahn der linken Klappe ist fast doppelt so dick, wie der vordere, und mindestens doppelt so dick, wie der lange hintere, welcher nur durch eine enge Furche vom Ligamentträger getrennt ist; er ist ferner, nach den Gruben zu urtheilen, kaum halb so dick, wie der hintere Zahn der rechten Klappe, etwas schmaler, wie der mittlere, und ziemlich doppelt so dick, wie der vordere der rechten. Auf der vorderen Schlossfläche befindet sich endlich nahe dem Rande, diesem parallel, eine fast 2 mm lange, schmale Zahngrube, welche nach innen durch einen verhältnissmässig dicken und hohen Zahnhöcker begrenzt wird.

Das Innere der Schale selbst lässt sich nicht wohl frei legen.

Cytherea n. sp.?

Tafel IV, Figur 5.

Ausser der abgebildeten linken Klappe, von welcher die Schale grösstentheils abgesprungen ist, liegt noch eine kleinere rechte vor, welche allenfalls derselben Art angehören könnte und die Schale grösstentheils noch besitzt, aber am Rande, besonders vorn, und am Wirbel vielfach beschädigt ist. Erstere ist 27 mm hoch, gegen 35 mm breit und 8 mm dick gewölbt gewesen. Eine von dem nur wenig vorwärts gedrehten, wenig hervorragenden Wirbel gerade nach unten verlaufende Linie ist vom vorderen Schalrande 15 mm, vom hinteren 20 mm entfernt; der flach eingesenkte vordere Schlossrand trifft den schwach gekrümmten hinteren am Wirbel unter einem Winkel von etwa 110 Grad. Der wenig gekrümmte untere Schalrand biegt sich auf dem hintersten Sechstel der Schale ziemlich schnell in die Höhe zum hinteren Schalrande und dann in weitem Bogen zum hinteren Schlossrande, auf dem vorderen Viertel dagegen allmählich schneller in die Höhe zum vorderen Schalenrande und dann ziemlich gleichmässig, nur zuletzt wieder langsamer, zum vorderen Schlossrande.

Die stärkste Wölbung liegt auf dem hintersten Sechstel und, zunächst dem Wirbel, auf dem vordersten Viertel; der mittlere Theil der Schale ist ziemlich flach gewölbt.

Die Lunula ist nicht erhalten, war aber jedenfalls nicht stärker vertieft.

Die Skulptur besteht aus unregelmässigen, feinen, etwas faltigen Anwachslineen, welche auf dem unteren Theile der Schale deutlicher hervortreten.

Die Mantelbucht ist abgerundet und reicht über die hintersten zwei Fünftel der Schale noch ein wenig hinaus.

Das erwähnte kleinere Stück gleicht dem grösseren wohl in der Skulptur, ist aber doch etwas ungleichseitiger, hat einen stärker nach vorn gedrehten Wirbel und einen, besonders nach hinten zu, stärker gekrümmten unteren Schalenrand, so dass ich es nur mit allem Vorbehalt und nur vorläufig derselben Art zurechne.

Das Schloss ist an beiden Stücken zum Theil zerstört, und der Rest lässt sich nicht wohl frei legen.

Cytherea cf. plana Sow.

Tafel IV, Figur 11 a, b.

Ausser der abgebildeten linken Klappe, welche am Wirbel und am hinteren und vorderen Schalenrande beschädigt ist, liegen noch ein Paar noch stärker beschädigte, kleinere vor, welche vielleicht noch derselben Art angehören könnten. Die erstere ist gegen 35 mm breit und 27 mm hoch gewesen bei 10 mm Dicke der Wölbung; der Wirbel erreichte noch das vorderste Drittel der Schale, und der Winkel der Schlosskanten betrug gegen 110 Grad, doch ist der hintere Schlossrand ein wenig gekrümmt, der vordere beträchtlich eingesenkt. Der Wirbel ragte jedenfalls nicht unbedeutend vor und war recht stark nach vorn gerichtet.

Im mittleren Drittel ist der untere Schalrand nur flach gekrümmt und biegt sich bis zum hintersten Sechstel der ganzen Breite nur allmählich, auf diesem aber schneller und in weitem Bogen zum hinteren Schlossrande herum, während er auf dem vorderen Drittel sich in einem allmählich immer kürzer werdenden Bogen bis vorn gerade in die Höhe zieht und dann ziemlich schnell zum vorderen Schlossrande umbiegt.

Die Schale ist ziemlich dick und trägt neben einigen stärkeren Absätzen zahlreiche, etwas faltige Anwachsstreifen, welche auf dem hintersten Sechstel deutlicher hervortreten und dieses rauher erscheinen lassen; es ist durch eine kurze, stärkere Wölbung von dem Haupttheile der Schale getrennt, welche auf der Mitte nur flach und erst auf dem vordersten Drittel wieder stärker gewölbt ist.

Vor dem Wirbel liegt eine wenig deutlich durch eine schwache Furche begrenzte Lunula, welche anscheinend gegen 8 mm lang, aber wenig über 1 mm in jeder Klappe breit ist. Mindestens eben so lang ist der Ligamentträger.

Die Schlossplatte ist auffallend schmal, selbst wenn der fehlende, dem Wirbel zunächst liegende, kleine Theil ergänzt wird; der vordere Schlosszahn der linken Klappe ist fast doppelt so breit, wie der mittlere, aber, nach den betreffenden Gruben in der linken Klappe zu urtheilen, etwa eben so dick, wie

der mittlere Zahn der rechten, und fast doppelt so dick wie der hintere und vor allem der vordere Zahn der rechten Klappe; der hintere Zahn der linken bildet eine ziemlich dünne, gegen 6 mm lange Leiste unterhalb des Ligamentträgers. Auf der vorderen Schlossfläche befindet sich ein ziemlich langer, stumpfer Seitenzahn, welcher durch eine seichte Furche vom Schlossrande getrennt wird, aber etwas abgenutzt erscheint.

Durch breitere, weniger stark ungleichseitige Gestalt, vor allem aber durch die schmale Schlossfläche und kürzere Schlosszähne unterscheidet sich unsere Art von den Vorkommnissen aus dem Cenoman und Senon, welche von Sowerby (Min. Conch. pl. 20 f. 2), Goldfuss (Petref. Germaniae Taf. 148 f. 4), Stoliczka und Holzapfel (Palaeontogr. XXXV pl. XIII f. 16—18) als *Venus* oder *Cytherea plana* Sow. angeführt worden sind.

Die sonst noch von d'Orbigny, Pictet und Anderen beschriebenen Arten sind theils für so mangelhaft erhaltene Stücke aufgestellt, dass sie einen genaueren Vergleich überhaupt nicht zulassen, theils weichen sie in der Gestalt und Skulptur mehr oder minder weit von den mir vorliegenden von Kamerun ab.

Cytherea tenuidentata v. Koenen.

Tafel IV, Figur 12 a, b.

Es liegt nur die abgebildete rechte Klappe vor, welche etwas verdrückt und aussen ziemlich stark abgenutzt ist, aber durch geringere Wölbung, kleinen Wirbel und weit weniger kräftiges Schloss von *C. Wohltmanni* und *C. corbuloides* sich wesentlich unterscheidet. Die Schale ist reichlich 16 mm hoch, 19 mm breit und etwa 4 bis 4,5 mm dick gewölbt gewesen. Der ziemlich gerade, nur vorn deutlicher gekrümmte hintere Schlossrand bildet mit dem flach eingesenkten vorderen an dem kleinen, niedergedrückten, mässig stark nach vorn gerichteten Wirbel einen Winkel von ca. 115 Grad. Eine vom Wirbel nach unten gezogene Linie theilt die Schale in zwei Theile, von welchen der hintere etwa um die Hälfte breiter ist, als der vordere. Der untere Schalenrand ist grossentheils mässig gekrümmt und zieht sich vorn in weitem, ziemlich gleichmässigem Bogen zum vorderen Schlossrande hinauf, während er sich hinten allmählich immer stärker aufbiegt, und der hintere Schalenrand zum hinteren Schlossrande wieder eine schwächere Krümmung annimmt. Die Lunula ist nicht deutlich zu erkennen, aber jedenfalls kaum oder nicht vertieft.

Die Skulptur ist nur auf dem untersten Theile der Schale stellenweise noch einigermassen erhalten; sie besteht dort aus Anwachsrippen, welche von Mitte zu Mitte gegen 0,8 mm von einander entfernt sind. Das Schloss ist ziemlich schwach entwickelt, besonders gegenüber den vorstehend aufgeführten Arten. Der hintere Rand des hinteren Schlosszahnes bildet mit dem vorderen Rande des vorderen annähernd einen rechten Winkel. Der mittlere Schlosszahn ist wenig dicker, als der hintere, aber wohl doppelt so dick, wie der ungenügend erhaltene

vordere, und, nach den Zahngruben zu urtheilen, wie der hinterste und vorderste Zahn der linken Klappe, sowie etwa eben so breit, wie der mittlere Zahn derselben. Auf dem vorderen Theile der Schlossplatte liegt eine ziemlich tiefe Grube für den Seitenzahn der linken Klappe und darunter ein stark abgenutzter Seitenzahn.

Cytherea? sp. ind.

Tafel IV, Figur 13.

Die abgebildete rechte Klappe enthält nur noch geringe Reste der Schale und ist sonst als Steinkern oder innerer Abdruck erhalten, mindestens 24 mm breit und 14 mm hoch bei etwa 3 mm Dicke der Wölbung. Die Wirbelkanten bilden einen Winkel von ca. 140 Grad an dem kleinen, wenig hervorragenden Wirbel, welcher um etwa ein Drittel weiter vom hinteren Ende der Schale entfernt ist, als vom vorderen. Der untere Schalenrand ist nur flach gekrümmt zwischen den hintersten Viertel und dem vordersten Fünftel, welches ziemlich kurz abgerundet ist, wesentlich kürzer, als der hintere Theil der Schale. Die Schale lässt feine, unregelmässige Anwachsstreifen und einzelne Falten erkennen, der Steinkern im Alter in Abständen von durchschnittlich etwa 1 mm die Eindrücke von flachen Anwachsfallen, welche nach unten weit deutlicher begrenzt sind, als von oben.

Die Mantelbucht ist wenigstens theilweise zu erkennen; sie bleibt noch reichlich 1 mm von der Mitte der Schale entfernt. Das Schloss lässt sich nicht wohl frei legen, so dass ich es ganz dahin gestellt lassen muss, ob dieses Exemplar wirklich zu der Gattung *Cytherea* gehört.

Cytherea? sp. ind.

Tafel IV, Figur 16.

Aus dem feinkörnigen Sandstein liegt ausser Bruchstücken der abgebildete Steinkern vor, welcher die Skulptur etwas abgeschwächt, gewissermassen aufgeprägt enthält und bei 32 mm Breite und 17,5 mm Höhe reichlich 3 mm dick gewölbt ist. Die Wirbelränder bilden einen Winkel von etwa 145 Grad an dem kleinen, wenig hervorragenden Wirbel, welcher dem vorderen Ende der Schale etwa 2,5 mm näher liegt, als dem hinteren. Der untere Schalenrand ist zwischen dem hinteren Drittel und dem vorderen Viertel der Schale ziemlich gerade, biegt sich aber nach hinten allmählich immer mehr in die Höhe und geht durch den breit gerundeten hinteren Schalrand ohne scharfe Grenze in den hinteren Schlossrand über, während er sich vorn weit schneller aufbiegt, und der vordere Schalrand ziemlich kurz gerundet ist. Die Skulptur besteht, soweit sie eben erhalten ist, aus unregelmässigen Anwachs-Streifen und Falten, welche auf der Mitte der

Schale am deutlichsten hervortreten und allenfalls an die Skulptur von *Panopaea*- oder *Mya*-artigen Bivalven erinnern.

Von den Muskeleindrücken oder dem Manteleindruck ist leider nichts zu erkennen.

Liopistha ventricosa v. Koenen.

Tafel IV, Figur 22; 23 a, b.

?*Avicula* sp. K. Gerhardt, Neues Jahrb. f. Mineralogie. Beilageband XI, S. 178
Taf. V f. 2.

Ausser 3 verdrückten und beschädigten Steinkernen aus dem feinkörnigen Sandstein liegen 2 beschädigte, aber sehr wenig verdrückte Stücke aus dem Kalk vor, von welchen besonders das eine, Figur 22 abgebildete, noch einen Theil der Schale besitzt. Dasselbe dürfte gegen 25 mm breit, fast 20 mm hoch und gegen 7 mm dick gewesen sein. Der bauchige Wirbel ragt fast 3 mm über den Schlossrand hinaus und ist recht deutlich nach vorn gedreht. Die ganze Gestalt und auch die Skulptur hat grössere Aehnlichkeit mit manchen Abbildungen der *Liopistha* (*Corbula* oder *Pholadomya*) *aequalvis*, dem *Cardium caudatum* Roemer's, aus dem Senon von Kieslingswalde, Quedlinburg, Aachen etc., namentlich auch mit denen von Geinitz (*Palaeontographica* XX. 2. Taf. 19 f. 6 u. 7), doch ist der Wirbel bauchiger und mehr nach vorn gerichtet, wie dies auch bei Goldfuss' Abbildung (*Petref. Germ.* Taf. 151 f. 15) der Fall ist; bei dieser ist freilich der Wirbel jedenfalls zu spitz und nach einem unvollkommen erhaltenen Exemplar gezeichnet. Besonders unterscheiden sich von der senonen Art unsere Stücke durch die Skulptur, indem die 2 Radialrippen, welche zunächst vor der glatten hinteren Einsenkung folgen, die stärksten sind und den grössten Abstand von einander haben; die folgenden Rippen werden schwächer, beziehungsweise die Zwischenräume derselben schmaler, bei den meisten vorliegenden Schalen allmählich bis zur Mitte der Schalen, bei dem abgebildeten jedoch sehr schnell, sodass schon von der dritten Rippe an die Abstände ziemlich die gleichen bleiben, während freilich die kantigen Rippen noch schwächer und schon auf der Mitte der Schale ziemlich undeutlich werden. Dasselbe ist auf dem anderen Stück aus dem Kalk der Fall, während die Sandstein-Steinkerne auch auf der vorderen Hälfte der Schale sehr deutliche, wenn auch etwas gedrängtere Rippen besitzen, als hinter der Mitte. Ausserdem finden sich in der Jugend auf dem vordersten Theile der Schale recht starke Anwachs-Rippen, welche von Mitte zu Mitte etwa um die Hälfte weiter von einander entfernt sind, als die Radialrippen, aber schon vor der Mitte verschwinden, je weiter vom Wirbel desto früher, und 7 bis 8 mm vom Wirbel überhaupt ganz undeutlich werden.

Auf der Schalenoberfläche des grössten Exemplares ist mit Hülfe der Loupe auch stellenweise zu erkennen, dass auf den Kanten der Rippen sich kleine Knötchen oder Spitzen befunden haben, im Alter in Abständen von etwa 1,2 bis

1,5 mm. Das Schloss frei zu legen, ist nicht wohl ausführbar, doch ist es nach der allgemeinen Analogie der Gestalt und Skulptur mit *L. aequivalvis* Goldf. anzunehmen, dass unsere Stücke derselben Gattung angehören, wie diese Art, die übrigens nach den Abbildungen von Geinitz in der Radialskulptur auch nicht unerheblich variirt. Die starken Anwachs-Rippen der vorderen Seite in der Jugend würden freilich eine Aenderung der Diagnose der Gattung bedingen, wie sie von Meek und dann von Zittel (Handb. der Paläontologie II S. 131) gegeben wurde.

Die als *Avicula* sp. von Gerhardt a. a. O. angeführte und abgebildete Form aus dem „Urgo-Aptien“ Columbiens zeigt in Gestalt und Skulptur mindestens einige Aehnlichkeit mit unserer Art und dürfte ebenfalls zu der Gattung *Lio-pistha* gehören.

Corbula incurvata v. Koenen.

Tafel IV, Figur 19 a, b, c; 20 a, b; 21 a, b.

Es liegen mir 4 ziemlich vollständige Schalen und 2 Steinkerne der rechten Klappe vor. Diese erreicht 9 mm Höhe, ca. 11 mm Breite und 4,5 mm Dicke der Wölbung. Von aussen gesehen hat die Schale die Gestalt eines Dreieckes, allerdings mit abgerundeten Ecken und etwas eingesenkten oder ausgebogenen Seiten, bei welchem der etwas abgerundete untere Schalrand mit dem deutlich eingebuchteten oberen Rande einen Winkel von etwa 30 Grad bildet, und mit dem schwach eingebuchteten vorderen Rande einen Winkel von ca. 70 Grad.

Der Wirbel der dicken Schale ist sehr stark umgebogen, besonders von vorn gesehen, und erscheint zugleich nach hinten gerichtet, da der vordere Schalrand zunächst dem Wirbel stark eingezogen ist, um fast 2,5 mm, während der Abstand des Wirbels vom unteren Schalrande gegen 7 mm beträgt; der eingezogene, gleichsam überkippte Theil der Schale ist durch eine verhältnissmässig kurze Wölbung von dem übrigen Theile der Schale getrennt, welche auf den folgenden zwei Dritteln flach gewölbt, auf dem hintersten Drittel deutlich eingesenkt ist und ihre grösste Dicke auf dem vordersten Viertel erreicht; nach hinten wird sie weit flacher.

Die Skulptur besteht aus groben Anwachsrunzeln, welche in der Nähe des Wirbels kaum 0,3 mm, im Alter aber bis zu 1 mm von Mitte zu Mitte von einander entfernt sind; sie sind meistens etwas breiter, als ihre Zwischenräume, welche sich nach hinten zu verflachen und an der erwähnten Einsenkung grossentheils verschwinden, so dass auf dieser nur wenige breite Furchen, beziehentlich Anschwellungen sichtbar sind.

Auf dem Figur 20 abgebildeten Steinkern sind die Muskeleindrücke, sowie auch der Manteleindruck und die kleine Mantelbucht recht scharf zu erkennen.

Die linken Schalen, welche vermuthlich zu unserer Art gehören, haben bis zu 9 mm Breite, reichlich 6 mm Höhe und gegen 4 mm Dicke der Wölbung.

Die grösste Dicke liegt vor der Mitte der Schale, welche vorn sehr bauchig ist und zum vorderen Schlossrande steil abfällt. Dieser nimmt allmählich eine immer stärkere Krümmung an und geht so in den vorderen Schalrand über, welcher von dem wenig gebogenen unteren Schalenrand nicht scharf getrennt ist. Dieser stösst mit dem ziemlich stark gekrümmten hinteren Schalrande, welcher mit dem hinteren Schlossrande zusammenhängt, in einer stumpfen Ecke zusammen, von welcher eine stumpfe, wenig deutliche Kante nach dem Wirbel verläuft. Dieser ist klein, ragt sehr wenig hervor und ist im Ganzen ein wenig rückwärts gerichtet, mit seinem ersten Anfange aber doch etwas nach vorn; von dem vorderen Schalenrande ist er ziemlich eben so weit entfernt, wie von dem hinteren.

Die Skulptur besteht aus flachen, wenig deutlichen Anwachsfasen, welche auf dem hinteren Theile der Schale erst von einem stärkeren Absatze über dem unteren Rande an ganz unregelmässig werden, auf der vorderen Hälfte dagegen auch in der Jugend schon recht verschieden breit sind.

Das Schloss habe ich an keiner Schale beobachten können.

Vielleicht gehören zu einer anderen Art ein Paar verdrückte und stärker abgenutzte rechte Schalen, welche weniger ungleichseitig zu sein scheinen, und deren Anwachsrippen auch im Alter nur etwa 0,3 bis 0,4 mm von Mitte zu Mitte von einander entfernt sind.

Tellina phylloides v. Koenen.

Tafel IV, Figur 14; 15.

Ausser einigen ungenügend erhaltenen Steinkernen aus dem Sandstein und einigen Bruchstücken liegen nur die ziemlich vollständige, Fig. 14 abgebildete linke Klappe und das Fig. 15 abgebildete Exemplar vor, welches einen grossen Theil der Mantelbucht erkennen lässt. Die erstere ist 20 mm breit, 12 mm hoch und gegen 3 mm dick gewölbt. An dem kleinen, sehr wenig hervorragenden Wirbel, welcher ziemlich in der Mitte der Schale liegt, bilden die Wirbelkanten einen Winkel von ca. 145 Grad. Vorn weicht der Schalrand erst nahe dem vorderen Ende von der Richtung des vorderen Schlossrandes stärker ab und biegt sich dann ziemlich kurz zu dem unteren Schalrande um, welcher grösstentheils nur flach gekrümmt ist und sich erst nahe dem hinteren Ende ziemlich schnell in die Höhe zum hinteren Schalrande biegt; dieser nimmt nach oben bald eine flachere Krümmung an und geht allmählich in den hinteren Schlossrand über. Hinten ist also die Schale merklich höher, als vorn, und zugleich etwas nach unten gleichsam verlängert, so dass von hier auch eine deutlichere Wölbung nach dem Wirbel verläuft, noch deutlicher, als vorn, während sonst die Schale recht flach gewölbt ist. Sie ist ziemlich dünn und lässt nur sehr feine, unregelmässige Anwachsstreifen erkennen.

Die Mantelbucht reicht etwa bis zur Mitte der Schale unterhalb des Wirbels; ausserdem lässt die Innenseite der rechten Klappe noch eine Grube für einen vorderen Seitenzahn der linken Klappe erkennen.

Psammobia? auriformis v. Koenen.

Tafel IV, Figur 17; 18.

Ausser einigen Bruchstücken habe ich aus dem Kalk und Kalksandstein die beiden abgebildeten rechten Klappen herauslösen können, von welchen die grössere 10,5 mm hoch, 17,5 mm breit und ca. 2,5 mm dick, die kleinere 8 mm hoch, 13 mm breit und höchstens 2 mm dick gewölbt ist. Die vordere Seite der Schale ist um reichlich 1 mm länger, als die hintere; an dem kleinen, nur wenig hervorragenden Wirbel bilden die Wirbelkanten einen Winkel von fast 160 Grad und biegen sich vorn sehr allmählich nach unten, hinten erheblich schneller, wo der Schlossrand dann in sehr breitem, gleichmässigem Bogen in den hinteren Schalrand und weiter in den unteren Schalenrand übergeht. Dieser nimmt schnell eine weit geringere Krümmung an, hebt sich aber auf seiner vorderen Hälfte allmählich immer mehr, so dass die Schale vorn ziemlich symmetrisch gekrümmt ist und mit einem weit kürzeren Bogen endigt, als hinten. Die Wölbung ist ziemlich gleichmässig, doch natürlich in der Nähe des Wirbels und Schlossrandes stärker, als weiter nach unten. Das kleinere Exemplar lässt auf dem unteren Theile der sehr dünnen Schale sehr feine, regelmässige Anwachsstreifen erkennen, welche nur etwa 0,1 mm von einander entfernt sind, und hinter dem Wirbel Schalenreste, welche von dem Ligamentträger herrühren könnten, allerdings das einzige Merkmal, dass unsere Art wirklich zu der Gattung *Psammobia* gehört. Im Uebrigen hat unsere Art einige Aehnlichkeit mit Formen wie *Lavignon minuta* d'Orb. (Paléont. franç. Lamellibr. Crét. pl. 377 f. 1—4).

Pholadomya cf. elongata v. Münster.

Es liegt mir aus dem bräunlichen Kalksandstein nur der recht unvollständige Steinkern eines etwas verdrückten, doppelklappigen Exemplares vor, welches mindestens 40 mm breit und 20 mm hoch gewesen ist und in der Gestalt an *Ph. elongata* v. Münster (Goldfuss Petref. Germ. II S. 270 taf. 157 f. 3) erinnert, flache, unregelmässige Anwachsrunzeln trägt, sowie auf dem Haupttheile auch dünne, nicht ganz regelmässige Radialrippen besitzt, nicht aber auf dem vorderen und dem hintersten Theile der Schale; die von d'Orbigny (Paléontologie française, Lamellibr. crétaées pl. 362) als *Ph. elongata* Münster abgebildeten Typen haben wohl stärkere Rippen und sind namentlich nach hinten-unten verlängert. Hierdurch weichen sie auch erheblich von der neuerdings von Maas (Zeitschrift der deutsch. geol. Gesellsch. 1895 S. 279 Taf. 9 f. 1. 2) als *Ph. elongata* Münster angeführten Formen aus dem Gault-Sandstein ab.

Lingula cf. truncata Sow.

Tafel IV, Fig. 24 a, b.

In dem grauen Kalksandstein fand sich ein einziges Stück, welches am Stirnrand etwas verdrückt und des grössten Theiles der Schale beraubt ist; die Länge der flach gewölbten Schale beträgt 8 mm, die Breite knapp 5 mm. Die grösste Breite liegt unterhalb der Mitte, und von hier konvergiren die Seitenränder nach dem Wirbel zu bis zum obersten Viertel nur schwach, dann aber schneller; nach dem Stirnrande zu nimmt die Krümmung der Seitenränder schneller zu, und der Stirnrand selbst ist höchstens in einer Breite von 2 mm etwas abgestutzt, aber nicht schärfer von den Seitenrändern getrennt. Die Wirbelränder bilden einen Winkel von ca. 120 Grad. Mit Hülfe der Loupe erkennt man auf der Oberfläche der Schale flache, unregelmässige Anwachsfallen.

Unser Stück ist wohl verwandt der *L. truncata* Sow aus dem Neokom (Davidson, Brit. Cretaceous Brachiop. S. 6 Taf. I f. 27, 28, 31), aber zu einer entscheidenden Vergleichung nicht genügend erhalten.

Discina sp.

Tafel IV, Figur 25.

Eine Schale von 8,5 mm Durchmesser und gegen 2 mm Höhe ist auf einer Seite beschädigt und überall mehr oder minder stark angewittert oder abgenutzt, doch lassen die Anwachsringe noch erkennen, dass der Umfang annähernd kreisförmig war, und dass der Wirbel ziemlich in der Mitte der Schale liegt.

Serpula octangula v. Koenen.

Tafel IV, Figur 26 a, b.

Beim Zerschlagen der harten Kalke wurden mehrere Exemplare einer schwach gekrümmten *Serpula* angetroffen, aber fast durchweg nur als Steinkerne; nur bei dem abgebildeten Bruchstück gelang es, die Oberfläche der Schale grösstentheils frei zu legen. Dasselbe ist 18 mm lang, zuerst 3,5 mm und zuletzt ca. 4 mm dick, und auf seiner ersten Hälfte etwas stärker gekrümmt, als auf seiner letzten, wo die Krümmung recht gering ist.

Der innere Durchmesser beträgt zuerst 1,5 mm, zuletzt 2,5 resp. 3 mm, ist hier also nicht gang kreisrund. Aussen trägt die Röhre in ungleichen Abständen 8 stumpf-kantige Längsrippen, deren Zwischenräume meist eben oder flach eingesenkt sind, zum Theil aber auch flache Rinnen bilden.

Die Rippen tragen flache, rundliche Körner, welche von Mitte zu Mitte etwa 0,5 bis 0,6 mm von einander entfernt sind, und die Körner sind meist durch flache, rundliche Anwachsstreifen mit einander verbunden, welche indessen ziemlich unregelmässig verlaufen und zuweilen in den Zwischenräumen durch einige Anschwellungen oder flache Höcker vertreten werden.

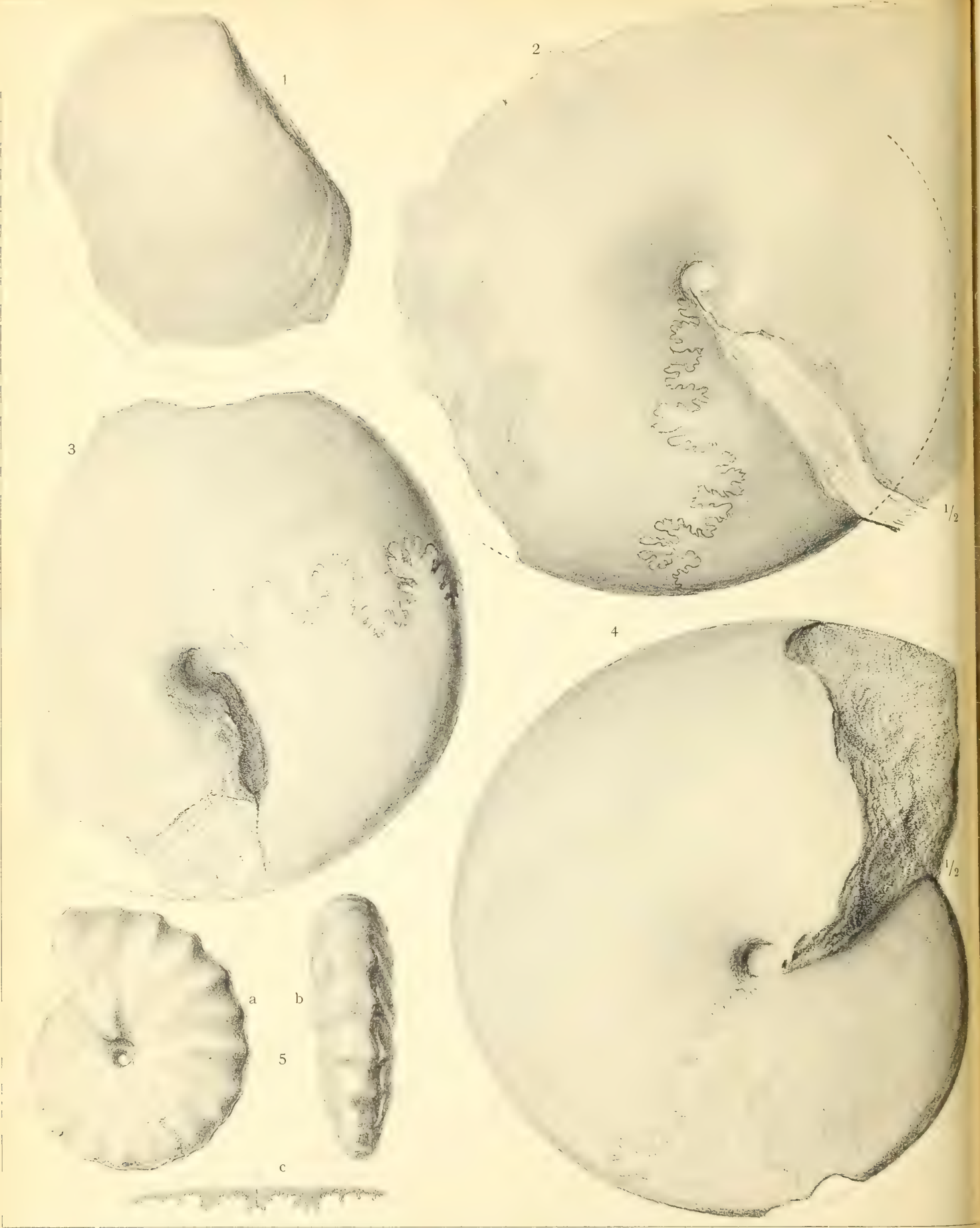
Verzeichniss der beschriebenen Arten.

1. <i>Pulchellia gibbosula</i> v. K.	Seite 9.	Taf. I Fig. 5.	
2. <i>P. perovalis</i> v. K.	" 10.	" I " 3;	Taf. II f. 6.
3. <i>Neoptychites? lentiformis</i> v. K.	" 11.	" II " 1, 4, 7.	
4. <i>N.? Wohltmanni</i> v. K.	" 13.	" I " 2;	" II " 3, 9.
5. <i>N.? ingens</i> v. K.	" 12.	" I " 4;	" II " 5, 8.
6. <i>Acanthoceras</i> n. sp.?	" 14.		
7. <i>Natica</i> cf. <i>cretacea</i> Goldf.	" 14.		
8. <i>N.</i> sp. ind.	" 14.		
9. <i>Turritella gemmulifera</i> v. K.	" 15.	" III " 1.	
10. <i>T. Kamerunensis</i> v. K.	" 15.	" III " 2.	
11. <i>Nerita multigranosa</i> v. K.	" 16.	" III " 3, 4.	
12. <i>Xenophora</i> sp. ind.	" 17.	" III " 5.	
13. <i>Ostrea</i> sp. ind.	" 17.	" III " 11.	
14. <i>Gryphaea</i> sp. juv.	" 18.	" III " 12.	
15. <i>Exogyra</i> sp.	" 18.		
16. <i>E. auriformis</i> v. K.	" 18.	" III " 10.	
17. <i>Anomia laevigata</i> Sow?	" 19.	" III " 13.	
18. <i>Pecten Kamerunensis</i> v. K.	" 20.	" III " 14, 15.	
19. <i>P. productus</i> v. K.	" 20.	" III " 17.	
20. <i>Plicatula rugulosa</i> v. K.	" 21.	" III " 7, 8.	
21. <i>P.</i> cf. <i>placunea</i> Lam.	" 21.	" III " 9.	
22. <i>P. multiplicata</i> v. K.	" 22.	" III " 6.	
23. <i>Lima Mungoensis</i> v. K.	" 23.	" III " 16.	
24. <i>L. reniformis</i> v. K.	" 23.	" III " 20.	
25. <i>L. dilatata</i> v. K.	" 24.	" III " 18.	
26. <i>L. perplana</i> v. K.	" 24.	" I " 1;	Taf. III f. 19.
27. <i>Inoceramus?</i> sp. ind.	" 25.	" III " 21.	
28. <i>Modiola plicifera</i> v. K.	" 26.	" II " 2.	
29. <i>Lithodomus inflexus</i> v. K.	" 27.	" III " 30.	
30. <i>Septifer? convolutus</i> v. K.	" 27.	" III " 22; 23.	

	Seite	Taf.	III	Fig.	25.
31. <i>Pinna latissima</i> v. K.	28.		III		
32. <i>Arca semiglabra</i> v. K.	29.	"	III	"	28; 29.
33. <i>A. cardiformis</i> v. K.	30.	"	III	"	27.
34. <i>Leda cultellus</i> v. K.	31.	"	III	"	24.
35. <i>L.</i> sp. ind.	32.	"	III	"	26.
36. <i>Lucina</i> sp. ind.	32.	"	IV	"	4.
37. <i>Cardium perobliquum</i> v. K.	33.	"	IV	"	3.
38. <i>Astarte tecticosta</i> v. K.	34.	"	IV	"	7.
39. <i>Astarte?</i> <i>trigonella</i> v. K.	34.	"	IV	"	1.
40. <i>Cardita sphaericula</i> v. K.	35.	"	IV	"	2.
41. <i>Cytherea Wohltmanni</i> v. K.	36.	"	IV	"	8; 9.
42. <i>C. corbuloides</i> v. K.	37.	"	IV	"	10.
43. <i>C. n.</i> sp.?	38.	"	IV	"	5.
44. <i>C. cf. plana</i> Low.	39.	"	IV	"	11.
45. <i>C. tenuidentata</i> v. K.	40.	"	IV	"	12.
46. <i>C.?</i> sp. ind.	41.	"	IV	"	13.
47. <i>C.</i> sp. ind.	41.	"	IV	"	16.
48. <i>Liopistha ventricosa</i> v. K.	42.	"	IV	"	22; 23.
49. <i>Corbula incurvata</i> v. K.	43.	"	IV	"	19; 20; 21.
50. <i>Tellina phylloides</i> v. K.	44.	"	IV	"	14; 15.
51. <i>Psammobia?</i> <i>auriformis</i> v. K.	45.	"	IV	"	17; 18.
52. <i>Pholadomya cf. elongata</i> v. Münster	45.	"			
53. <i>Lingula cf. truncata</i> Sow.	46.	"	IV	"	24.
54. <i>Discina</i> sp. ind.	46.	"	IV	"	25.
55. <i>Serpula octangula</i> v. K.	46.	"	IV	"	26.







Weidmannsche Buchhandlung in Berlin.

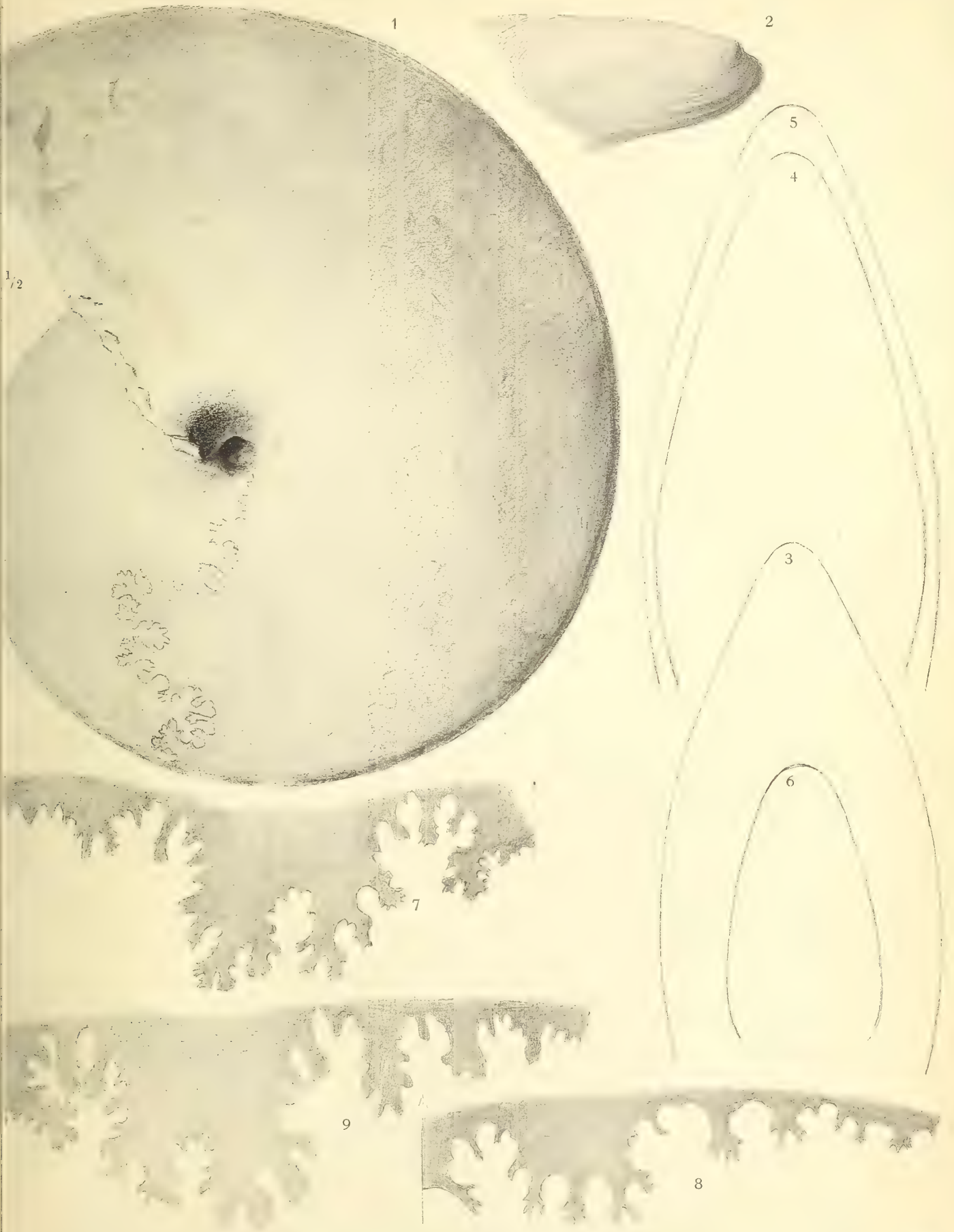
Tafel I.

- | | |
|---|-----------|
| Figur 1. <i>Lima perplana</i> v. Koenen. Vergl. Taf. III, fig. 19 a, b. | Seite 24. |
| Figur 2. <i>Neptychites?</i> <i>Wohltmanni</i> v. Koenen. Vergl. Taf. II, fig. 3 und 9. | „ 12. |
| Figur 3. <i>Pulchellia perovalis</i> v. Koenen. Vergl. Tafel II, Fig. 6. | „ 10. |
| Figur 4. <i>Neptychites?</i> <i>ingens</i> v. Koenen. Vergl. Tafel II, Fig. 5 und 8. | „ 12. |
| Figur 5 a, b, c. <i>Pulchellia?</i> <i>gibbosula</i> v. Koenen. | „ 9. |



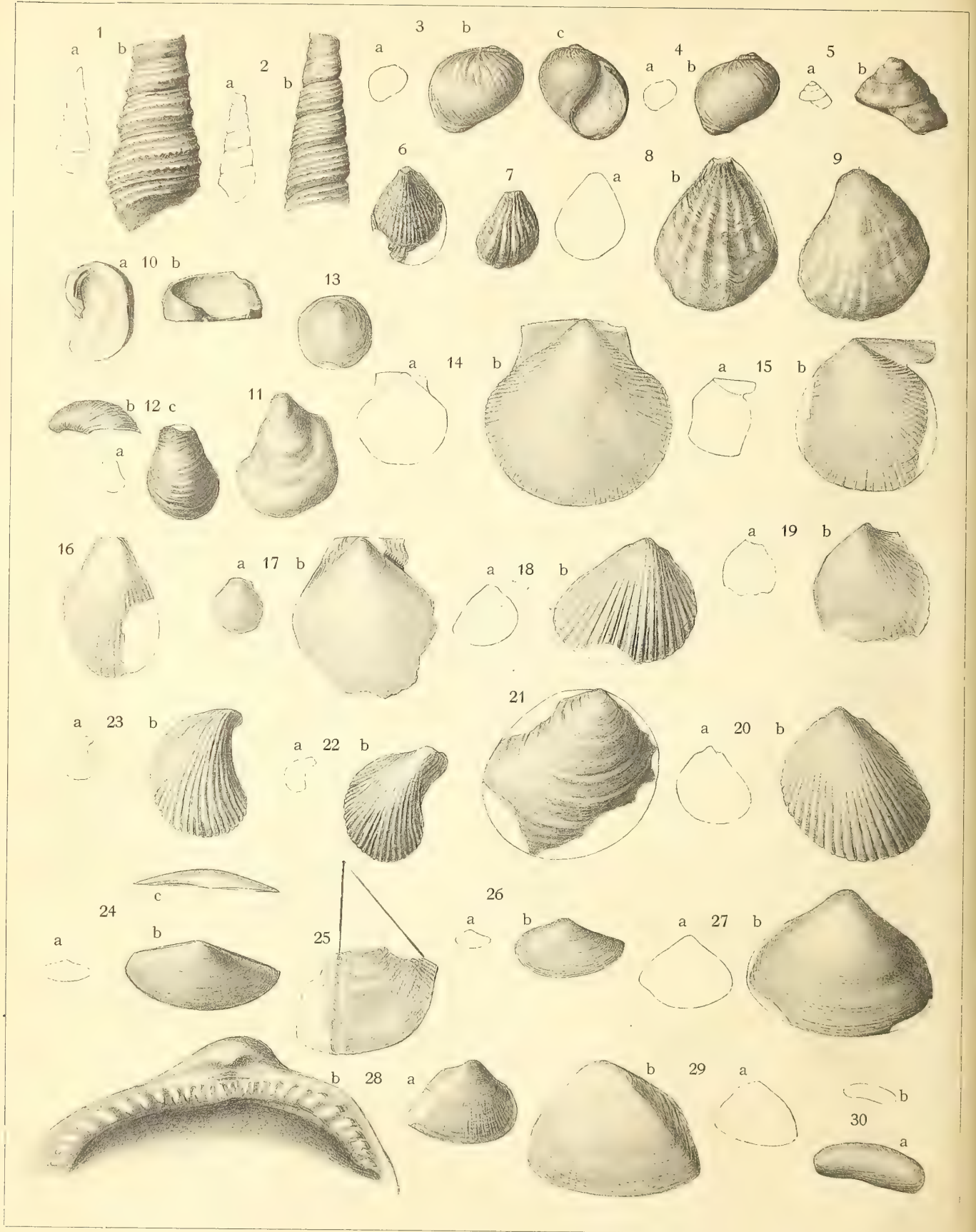
Tafel II.

Figur 1; 4; 7. <i>Neoptychites?</i> <i>lentiformis</i> v. Koenen.	Seite 11.
Figur 2. <i>Modiola plicifera</i> v. Koenen.	” 26.
Figur 3; 9. <i>Neoptychites?</i> <i>Wohltmanni</i> v. Koenen. Vergl. Taf. I, fig. 2.	” 13.
Figur 5; 8. <i>Neoptychites?</i> <i>ingens</i> v. Koenen. Vergl. Taf. I, fig. 4.	” 12.
Figur 6. <i>Pulchellia perovalis</i> v. Koenen. Vergl. Tafel I, fig. 3.	” 10.









Weidmannsche Buchhandlung in Berlin.

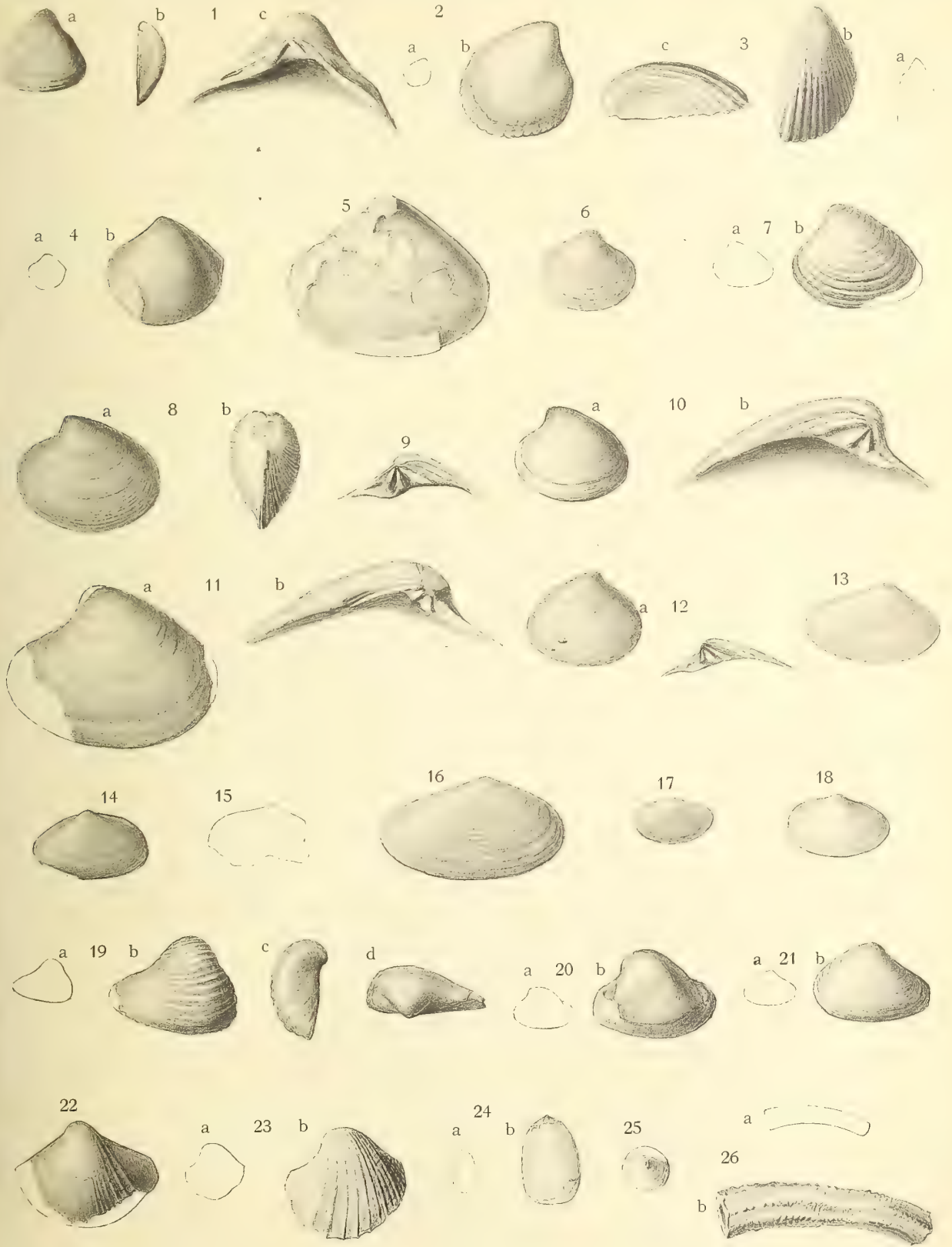
Tafel III.

Figur 1 a, b. <i>Turritella gemmulifera</i> v. Koenen (1 b vergrößert).	Seite 15.
Figur 2 a, b. <i>Turritella Kamerunensis</i> v. Koenen (2 b vergrößert).	" 15.
Figur 3 a, b, c; 4 a, b. <i>Nerita multigranosa</i> v. Koenen (3 b, c; 4 b vergrößert).	" 16
Figur 5 a, b. <i>Xenophora</i> sp. ind. (5 b vergrößert).	" 17.
Figur 6 <i>Plicatula multiplicata</i> v. Koenen.	" 22.
Figur 7; 8 a, b. <i>Plicatula rugulosa</i> v. Koenen (10 b vergrößert).	" 21.
Figur 9. <i>Plicatula</i> cf. <i>placunea</i> Lam.	" 21.
Figur 10 a, b. <i>Exogyra auriformis</i> v. Koenen.	" 18.
Figur 11. <i>Ostrea</i> sp. ind.	" 17.
Figur 12 a, b, c. <i>Gryphaea</i> sp. ind. juv. (12 b, c vergrößert).	" 18.
Figur 13. <i>Anomia laevigata</i> Sow.	" 19.
Figur 14 a, b; 15 a, b. <i>Pecten Kamerunensis</i> v. Koenen (14 b; 15 b vergrößert).	" 20.
Figur 16. <i>Lima Mungoensis</i> v. Koenen.	" 23.
Figur 17 a, b. <i>Pecten productus</i> v. Koenen (17 b vergrößert).	" 20.
Figur 18 a, b. <i>Lima dilatata</i> v. Koenen (18 b vergrößert).	" 24.
Figur 19 a, b. <i>Lima perplana</i> v. Koenen (19 b vergrößert). Vergl. Taf. I f. 1.	" 24.
Figur 20 a, b. <i>Lima reniformis</i> v. Koenen (20 b vergrößert).	" 23.
Figur 21. <i>Inoceramus?</i> sp. ind.	" 25.
Figur 22 a, b; 23 a, b. <i>Septifer convolutus</i> v. Koenen (22 b; 23 b vergrößert).	" 27.
Figur 24 a, b, c. <i>Leda cultellus</i> v. Koenen (24 b, c vergrößert).	" 31.
Figur 25. <i>Pinna latissima</i> von Koenen.	" 28.
Figur 26 a, b. <i>Leda</i> sp. ind. (26 b vergrößert).	" 32.
Figur 27 a, b. <i>Arca cardiformis</i> v. Koenen (27 b vergrößert).	" 30.
Figur 28 a, b; 29 a, b. <i>Arca semiglabra</i> v. Koenen (28 b; 29 b vergrößert).	" 29.
Figur 30 a, b. <i>Lithodomus inflexus</i> v. Koenen (30 b vergrößert).	" 27.

Tafel IV.

Figur 1 a, b, c. <i>Astarte</i> (<i>Goodallia</i> ?) <i>trigonella</i> v. Koenen (1 c vergrössert).	Seite 34.
Figur 2 a, b. <i>Cardita sphaericula</i> v. Koenen (2 b vergrössert).	" 35.
Figur 3 a, b, c. <i>Cardium perobliquum</i> v. Koenen (3 b, c vergrössert).	" 33.
Figur 4 a, b. <i>Lucina</i> sp. ind. (4 b vergrössert).	" 32.
Figur 5. <i>Cytherea</i> n. sp.?	" 38.
Figur 6. <i>Cytherea Wohltmanni</i> v. Koenen var.?	" 36.
Figur 7 a, b. <i>Astarte tecticosta</i> v. Koenen (7 b vergrössert).	" 34.
Figur 8 a, b; 9. <i>Cytherea Wohltmanni</i> v. Koenen (7 b vergrössert).	" 36.
Figur 10 a, b. <i>Cytherea corbuloïdes</i> v. Koenen.	" 37.
Figur 11 a, b. <i>Cytherea</i> cf. <i>plana</i> Sow (11 b vergrössert).	" 39.
Figur 12 a, b. <i>Cytherea tenuidentata</i> v. Koenen.	" 40.
Figur 13. <i>Cytherea</i> ? sp. ind.	" 41.
Figur 14; 15. <i>Tellina phylloïdes</i> v. Koenen.	" 44.
Figur 16. <i>Cytherea</i> ? sp. ind.	" 41.
Figur 17; 18. <i>Psammobia</i> ? <i>auriformis</i> v. Koenen.	" 45.
Figur 19 a, b, c; 20 a, b; 21 a, b. <i>Corbula incurvata</i> v. Koenen (20 b, c; 21 b; 22 b vergrössert).	" 43.
Figur 22; 23 a, b. <i>Liopistha ventricosa</i> v. Koenen (24 b vergrössert).	" 42.
Figur 24 a, b. <i>Lingula</i> cf. <i>truncata</i> Sow (25 b vergrössert).	" 46.
Figur 25. <i>Discina</i> sp. ind.	" 46.
Figur 26 a, b. <i>Serpula octangula</i> v. Koenen (27 b vergrössert).	" 46.





Weidmannsche Buchhandlung in Berlin.



Göttingen, Druck der Univ.-Buchdruckerei von W. Fr. Kästner.

25 APR. 98

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND 1. Nro. 1.

Nachtrag

zu

Ueber Fossilien der Unteren Kreide

am Ufer des Mungo in Kamerun.

Von



A. von Koenen.

S. 49 bis 65
mit Tafel V—VII.

Berlin.

Weidmannsche Buchhandlung.

1898.

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND 1. Nro. 1.

Nachtrag

zu

Ueber Fossilien der Unteren Kreide

am Ufer des Mungo in Kamerun.

Von



A. von Koenen.

S. 49 bis 65
mit Tafel V—VII.

Berlin.

Weidmannsche Buchhandlung.

1898.

Nachtrag

zu

Ueber Fossilien der Unteren Kreide am Ufer des Mungo in Kamerun.

Von

A. von Koenen.

S. 49 bis 65
mit Tafel V—VII.

Vorgelegt in der Sitzung am 8. Januar 1898.

Nachdem Herr Professor Wohltmann seine Berichte über die Boden- und Vegetations-Verhältnisse in Kamerun veröffentlicht hatte, und deren hohe Bedeutung für die ganze Entwicklung des ganzen Gebietes eine entsprechende Würdigung erfahren hatte, wurde Herr Dr. Wilsing beauftragt, die betreffenden Untersuchungen im Kamerun-Gebiete fortzusetzen. Dieser fand nun ausser dem von Herrn Wohltmann entdecktem Punkte am linken Ufer des Mungo zwischen Eliki und Mundame, welchen er „Wohltmann-Bank“ benannte, noch einen zweiten mit ganz ähnlichen Gesteinen und Fossilien, welchen er mit „Elefantenbank“ bezeichnete, eine „Balangibank“ und eine sogenannte „Thonbank“.

Die an diesen Punkten von ihm gesammelten Gesteine und Fossilien wurden im Sommer vorigen Jahres in seinem Namen durch Herrn Professor Wohltmann ebenfalls dem Geologischen Museum zu Göttingen verehrt.

An Gesteinen befanden sich in dieser Sammlung von der Elefantenbank:

- 1) graue Kalksandsteine, welche zum Theil recht thonig und dann dünn-schichtig sind, durch Verwitterung aber in braune, mürbe Sandsteine übergehen,
- 2) harter, heller Sandstein, reich an weissen Glimmerschüppchen und ebenfalls Kalk-haltig, aber ohne Fossilien, mit einer streifigen, braunen Verwitterungsrinde. Von derselben Stelle stammt vielleicht auch ein graubrauner, sehr dünn-schichtiger, Glimmer-reicher Sandstein mit der Bezeichnung „über der neuen Kalkbank“.

3) Von der „Thonbank“ ein blaugrauer, in eckige Brocken zerfallender Thon mit Abdrücken und Steinkernen verdrückter Spatangiden, deren Schale fehlt; dieselben sind leider nicht näher bestimmbar. 4) Mit dem Fundort „Balangibank“ ist ein harter, bräunlicher, Glimmer-haltiger, ziemlich grober Kalksandstein bezeichnet, welcher Bivalvenreste enthält.

Die besser erhaltenen Fossilien sind mit Ausnahme des einen doppelklappigen Exemplares von *Liopistha sulcata*, welches auf der Wohltmann's Bank gefunden wurde, sämmtlich Ammoniten, welche auf der Elefantenbank gesammelt waren, und bei dem Präpariren derselben wurden auch wieder verschiedene Mollusken und ein Bruchstück eines Spatangiden gefunden. Von ersteren waren auf einzelnen grossen Ammoniten zahlreiche Austern aufgewachsen, welche mit der S. 17 Taf. III f. 11 aufgeführten Art übereinzustimmen scheinen; dazu kommt ein kleiner, beschädigter Pecten von 6,5 mm Höhe, welcher sich von Pecten Kamerunensis v. Koenen (S. 20 Taf. III f. 14, 15) durch sehr viel feinere Skulptur unterscheidet und wohl einer neuen Art angehört, ferner eine kleine Modiola, welche durch schlankere Gestalt, feinere Skulptur und das Fehlen der Einbuchtung des vorderen Schalenrandes sich weit von *Septifer convolutus* v. Koenen (S. 27 Taf. III f. 22, 23) entfernt, aber ungenügend erhalten ist, und Bruchstücke von anderen Bivalven, sowie endlich die im Folgenden beschriebene *Aporrhais semilaevis*.

Besonders wichtig und interessant sind die Ammoniten von der Elefantenbank. Ein unverdrücktes, grösseres Stück von *Pulchellia perovalis* gestattet eine sichere Vervollständigung der Beschreibung; ein leidlich erhaltenes Exemplar eines Harpoceraten, welchen ich als *Desmoceras Kamerunense* beschrieben habe, würde auch Veranlassung geben, die Schichten als untere Kreide zu deuten, wengleich eine ähnliche Form im ostindischen Cenoman auftritt. Mehrere zum Theil sehr grosse und wohl erhaltene Ammoniten gehören aber denselben oder doch ähnlichen Arten an, wie diejenigen, welche ich ihrer Lobenlinien wegen mit *Hoplites Leopoldi* d'Orb., aber auch mit *Sonneratia bicurvata* Mich. etc. verglichen hatte, während sie sich in Gestalt und Grösse allenfalls an die Gattung *Neoptychites* Kossmat anschliessen, zu welcher sie aber wegen ihrer Loben nicht passen. Das grösste Stück welches ich Tafel V fig. 3 in halber Grösse abgebildet habe, zeigt, abweichend von den übrigen, eine, wenn auch wenig deutliche Skulptur von flachen Rippen, und der Kiel der Externseite geht auf der letzten vorhandenen Windung in eine ziemlich gleichmässige Wölbung über. Das kleinere, Tafel V Figur 1 ebenfalls in halber Grösse abgebildete Stück hat dagegen einen besonders scharfen Kiel und sehr deutliche und ziemlich regelmässige Rippen. Bei dem kleinen, Tafel VI Figur 3 a, b, abgebildeten Exemplar von *H. latesellatus* ist endlich das letzte Viertel der sichtbaren Windung deutlich gekielt und trägt seltene, flache Anschwellungen oder Rippen, und das erste Viertel hat eine abgeplattete Externseite, sowie recht regelmässige, zahlreichere Rippen, während der mittlere Theil den Uebergang von der letzteren Jugend-Gestalt und Skulptur zu der Altersform zeigt.

Diese am vollständigsten bekannte Art möchte ich zum Typus einer neuen Gattung oder Untergattung *Hoplitoïdes* wählen, welche sich von *Hoplites* dadurch besonders unterscheidet, dass der erste Lateral-Lobus in zwei Hauptstämme getheilt ist, welche nochmals gespalten sind, und dass der Nabel recht eng ist. Zu derselben gehören wohl auch die anderen grossen Arten vom Ufer des Mungo, welche ich im Folgenden als *H. Wilsingi* und *H. n. sp.?* beschreibe, und diejenigen welche ich früher als „*Neoptychites? (Hoplites)*“ beschrieb mit der ausdrücklichen Bemerkung (S. 7), dass sie nicht zu *Neoptychites* gehörten, vielmehr durch den ersten Laterallobus sich an den bisher zu der Gattung *Hoplites* gerechneten *H. Leopoldinus* d'Orb. anschliessen, also *H. Wohltmanni* und *H. lentiformis*, aber auch *H. ingens*. Von diesen Arten kenne ich freilich die Jugendformen nicht, falls nicht etwa die früher als *Pulchellia gibbosula* beschriebene kleine Form zu einer derselben gehört. Sie haben sämmtlich in mittlerer Grösse einen kurz gerundeten Kiel auf der Externseite, ferner einen ganz engen Nabel und einen in zweimal zwei Aeste getheilten, sehr breiten und wenig tiefen ersten Laterallobus. Der zweite ist weit kleiner, wenig grösser, als der erste der (meist 3) Auxiliarloben, mit Ausnahme von *H. lentiformis*, bei welchem der erste Laterallobus wesentlich weiter nach der Mitte der Seitenflächen gerückt ist, als bei den übrigen Arten, und die Auxiliarloben sehr klein sind.

H. ingens zeichnet sich dadurch aus, dass der erste Laterallobus in der Mitte nur sehr wenig tiefer gespalten ist, als seine beiden Hauptäste.

Die Jugendform von *H. latesellatus* nähert sich nun einerseits in der Gestalt und Skulptur manchen Arten der Gattung *Pulchellia*, andererseits aber auch manchen, wenn auch feiner und schärfer gerippten, bisher zu der Gattung *Hoplites* gerechneten Arten der unteren Kreide, und mit solchen stimmt sie auch zunächst in der Lobenlinie überein, so namentlich mit *H. Leopoldi* d'Orb., wenn auch diese Art, von welcher mir nur ein Exemplar aus dem Hauterivien von Auberson in Wallis vorliegt, eine schärfere Nabelkante, einen etwas weiteren Nabel und dicht neben diesem einen einzigen Auxiliarlobus besitzt.

Mit *H. Leopoldi* nahe verwandt sind auch unter Anderen *H. Inostranzewi* Andr. und *H. Desori* Andrussow von Biassala (Sitzungsber. Akad. d. Wissensch. Wien, Mathem.-Phys. Klasse, Bd. 98, Heft IV S. 434 ff. Taf. I u. II), sowie *H. cf. neocomiensis* (non d'Orb.) Neum. et Uhlig (Palaeontogr. XXVII S. 167 Taf. 48 f. 3), den ich *H. gibbosus* benennen will.

Einzelne Arten der Gattung *Sonneratia* des Aptien, besonders *S. Heimi* Sarasin (Bull. Soc. géol. de France, 3 série t. XXI p. 159 f. 10) nähern sich ja nun in der Spaltung des ersten Laterallobus dem *H. Leopoldi*, doch ist der Lobus verhältnissmässig schmaler und weit stärker verzweigt, trotz der geringeren Grösse, und bei den meisten Arten der Gattung ist er noch schmaler, und eher als „*unsymmetrisch verästelt*“ zu bezeichnen. Dasselbe gilt von verschiedenen *Hoplites*-Arten des Neokom, wie *H. oxygonius*, *H. cf. longinodus*, *H. hystrix* und, in geringem Grade, von *H. radiatus* (Neum. et Uhlig).

Mit *H. gibbosus* zusammen ist aber bei Hoheneggelsen ein anderer *Hoplites* vorgekommen, den ich im Manuskript *H. Brandesi* genannt habe; dieser hat in der Jugend zahlreiche, scharfe Rippen, später nur noch dicke Knoten neben der Nabelkante, und wird im Alter glatt und hat eine abgerundete Externseite, sowie einen ziemlich engen Nabel; die Loben sind in der Jugend denen von *H. Leopoldi* recht ähnlich, werden aber im Alter recht stark verzweigt, wenn auch nur kurz.

Diese Art bildet dann einen Uebergang zu einer anderen, die bei Timmern zusammen mit einer dem *H. Deshayesi* ähnlichen, aber durch die Loben verschiedener Art vorkommt und sich von dieser dadurch unterscheidet, dass sie in der Jugend zahlreichere und schwächere Rippen besitzt, welche sich auf der Externseite mehr und mehr abflachen, und dass sie im Alter fast ganz glatt wird und einen lang-eiförmigen Querschnitt der Windungen bekommt, so dass sie auch deshalb zur „Gruppe des *H. Deshayesi*“ (Zittel, Handb. d. Paläontologie II. S. 476) nicht passt. Diese Art, die ich im Manuskript *H. laeviusculus* benannt habe, nähert sich durch ihre Loben dem *H. Leopoldi*, ist aber nach der Jugendgestalt und Skulptur und der Lobenlinie, besonders dem ersten Laterallobus, nicht wohl zu einer anderen Gattung zu stellen, als der *H. cf. Deshayesi* von Timmern. Diese, dem *Hoplites Deshayesi* ähnliche und einige andere Formen gleichen in ihrem ersten Laterallobus in etwas dem *H. quercifolius* d'Orb., weichen auch durch ihre Skulptur und Gestalt, namentlich durch den weiteren Nabel, wesentlicher von *H. Leopoldi* ab und sind jedenfalls, wenn sie auch nicht derselben Untergattung oder Gattung zugerechnet werden, unmittelbar neben derselben anzuführen. Aus jüngeren Schichten, als aus dem Aptien, kenne ich keine Form von ähnlicher Gestalt mit einem ähnlichen ersten Laterallobus. *Amm. Requierianus* d'Orb. hat jedenfalls eine ganz andere, flach-scheibenförmige Gestalt und einen ganz scharfen Kiel schon in der Jugend, und Formen wie *A. Lafresnayanus* d'Orb. weichen durch die Verästelung der Loben ab.

Beschreibung der Arten.

Desmoceras Kamerunense v. Koenen.

Tafel VII, Figur 1, 2, 3.

Dem allein vorliegenden, bis an das Ende gekammerten Exemplar scheint nur die ganz verdrückte Wohnkammer zu fehlen, welche, nach den Resten der Naht zu urtheilen, etwa drei Fünftel-Windung eingenommen hat. Die letzte erhaltene Windung ist von einer Seite grossentheils stark angewittert und auf ihrer ersten Hälfte verdrückt, zum Theil auch mit Austern bewachsen, welche sich nicht vollständig entfernen lassen; die letzte Hälfte ist mit Kalkspath theilweise erfüllt, aber ziemlich zerbrechlich, da die Kammern hohl sind, so dass sie mit Gyps ausgegossen werden mussten.

Die letzte halbe Windung hat gegen 31 cm Durchmesser gehabt und ist zuletzt 92 mm hoch und 76 mm dick; der Nabel ist 58 mm weit, eine halbe Windung früher aber nur 37 mm weit. Etwa drei Achtel der Windungen werden von den folgenden umhüllt. Die vorletzte Windung dürfte zuletzt gegen 40 mm dick und 64 mm hoch gewesen sein.

Die Nabelwand steht ganz steil, biegt sich aber allmählich zu der ganz abgerundeten Nabelkante um. Die grösste Dicke der Röhre ist reichlich doppelt so weit von der Externseite entfernt, wie vom Nabel. Von hier konvergiren die ganz flach gewölbten Seitenflächen nur wenig nach aussen, nehmen aber auf dem äusseren Drittel allmählich eine stärkere Wölbung an und gehen so in die ziemlich breit gerundete Externseite über, wie sie auch nach der Nabelkante zu eine stärkere Wölbung bekommen.

Die Skulptur besteht aus schmalen, durch breite, ebene Zwischenräume getrennten Rippen, von welchen 6 auf der letzten Viertelwindung auf der Nabelkante sich einstellen, schwach vorwärts gerichtet ausserhalb derselben ziemlich gerade bis zum äusseren Drittel laufen und sich dann allmählich nach vorn biegen, um dann mit mässiger Vorbiegung und Verstärkung über die Externseite hinwegzulaufen.

Zwischen diesen Hauptrippen erscheinen auf der Mitte der Seitenflächen auf der letzten Viertel-Windung je eine, auf der vorhergehenden je 2 oder 3 schwache, welche den ersteren parallel laufen und nach der Externseite zu an Stärke gleich werden.

Die letzte Lobenlinie ist von der Externseite bis zur Nabelkante zu sehen, wenn auch die Sättel in Folge von Abnutzung nicht ganz erhalten sind. Die Kammerwand steigt bis zum Lateralsattel, welcher von der Externseite etwa eben so weit entfernt ist, wie vom Nabel, ein wenig an und läuft dann gerade

zum Nabel. Der erste Laterallobus ist um etwa zwei Drittel tiefer, als der zweite und der Externlobus, und fast 3 mal so tief, wie der erste und der zweite Auxiliarlobus; letzterer liegt auf der abgerundeten Nabelkante und biegt sich nur unten noch etwas nach aussen, steht also etwas schief, ebenso wie der erstere. Die Sättel sind in der Mitte etwa bis zu einem Drittel ihrer Höhe gespalten und im Uebrigen stark und unsymmetrisch zerschlitzt. Der Externlobus hat jederseits 3 längere Seitenäste, von welchen der oberste der stärkste und längste ist. Bei den übrigen Loben alterniren die stark verzweigten äusseren und inneren Seitenäste, freilich nicht regelmässig, und die äusseren stehen höher und sind länger, als die inneren.

Unsere Art zeigt in der Gestalt und Skulptur einige Aehnlichkeit mit *Ammonites Denisonianus* Stolitzka (*Palaeontologia Indica*, Cretac. Cephalop. p. 133 Taf. 66) aus der Ootator und Trichinopoli-Gruppe, ist aber doch bedeutend bauchiger, und die Loben, besonders die Lateralloben, sind weit tiefer und spitziger, und sie nähert sich hierdurch manchen *Desmoceras*-Arten, doch fehlen anscheinend ganz die Einschnürungen oder *Varices*, welche Zittel als wesentliches Gattungsmerkmal anführt (*Handb. d. Paläontologie II.* p. 465), obwohl die Rippen zum Theil an der Externseite einen etwas grösseren Abstand von einander haben.

Wenn diese auch bei einzelnen Formen, wie denen der Reihe des *D. Beudanti* und *D. difficilis* Orb. nur in grösseren Abständen auftreten, so sind doch diese in der Gestalt ganz verschieden, und bei der Gattung *Pachydiscus*, die in der Gestalt ähnlich ist, ist der Externlobus ziemlich ebenso lang, wie der erste Laterallobus. Ich stelle unsere Art daher vorläufig und mit allem Vorbehalt zu der Gattung *Desmomeras*.

*Hoplitoïdes*¹⁾ *latesellatus* v. Koenen.

Tafel VI, Figur 1; 2; 3 a, b.

Ein bis an das verdrückte Ende gekammertes Exemplar ist an der ersten halben Windung etwas beschädigt und verdrückt und auf einer Seite etwas angewittert. Die letzte halbe Windung hat reichlich 22 cm Durchmesser und ist zuerst 47 mm dick und 87 mm hoch, zuletzt gegen 70 mm dick und gegen 130 mm hoch gewesen. Die grösste Dicke der Röhre ist etwa doppelt so weit von dem Nabel entfernt, wie von dem, den Sypho enthaltenden, abgerundeten Kiel der Externseite. Der Nabel ist nur gegen 10 mm weit und durch eine steil stehende Nabelwand begrenzt. Die Nabelkante ist ziemlich kurz gerundet; die Seitenflächen nehmen neben ihr schnell eine recht flache Wölbung an und sind auf ihrem äusseren Drittel ziemlich eben.

Der Lateralsattel ist fast eben so weit vom Kiel entfernt, wie vom Nabel. Die Kammerwände laufen von aussen bis zum zweiten Auxiliarsattel ziemlich

1) Ueber die neue Gattung oder Untergattung *Hoplitoïdes* habe ich mich oben (Seite 53) ausgesprochen.

gerade und senken sich dann ein wenig. Der erste Laterallobus ist nahezu doppelt so lang, wie der zweite und wie der Externlobus, annähernd dreimal so lang, wie der erste und der zweite Auxiliarlobus; der dritte ist noch fast um die Hälfte kürzer, als diese, und liegt nahe der Nabelkante.

Der erste Laterallobus ist ziemlich eben so breit, wie sein Abstand vom Kiel, und ist durch einen breiten, abgerundeten Nebensattel etwa bis zur Hälfte in zwei Theile gespalten, von welchen der innere bedeutend tiefer herabreicht und breiter ist, als der äussere; beide Theile sind nochmals in je zwei kurze, dicke, wenig verzweigte Aeste gespalten, von welchen der dem Nebensattel zunächst liegende breiter ist und tiefer herabhängt, als der andere.

Der zweite Laterallobus ist kaum ein Drittel so breit, wie der erste; der erste Auxiliarlobus ist nur ein Viertel so breit, und die folgenden nehmen an Breite noch erheblich ab; der zweite Laterallobus und die Auxiliarloben sind unsymmetrisch und ganz kurz fingerförmig verzweigt.

Alle Sättel sind abgerundet und verhältnissmässig breit und unsymmetrisch, wenig tief, zerschnitten. Der Lateralsattel und die Auxiliar-Sättel haben auf ihrer inneren Hälfte ein grosses, rundliches Blatt. Der Lateralsattel ist fast um ein Viertel breiter, als der Externsattel, um ein Drittel breiter, als der erste Auxiliarsattel, und um zwei Drittel breiter, als der zweite, aber andert-halb mal so breit, wie der dritte.

Dieses Exemplar weicht durch die breiten Sättel und die Verästelung, besonders des ersten Laterallobus, sowie durch den Querschnitt der Röhre erheblich von den übrigen von mir beschriebenen Arten vom Mungo ab, namentlich von *H. Wohltmanni*. Zu *H. latesellatus* muss ich auch das grössere, stark angewitterte Bruchstück von reichlich einer Viertel-Windung stellen, welches ich früher (S. 12) mit zu *H. ingens* gezogen hatte.

Vermuthlich gehört zu derselben Art ein durchweg gekammerter, stark angewitterter, kleiner Kalkspath-Steinkern, welcher anscheinend glatt gewesen ist, nach Entfernung der letzten Windung aber eine sehr deutliche Skulptur zeigt, und zwar augenscheinlich den Uebergang der Jugend-Skulptur in den glatten Alters-Zustand.

Das Stück hat jetzt 68 mm Durchmesser, eine halbe Windung früher 47 mm; die letzte halbe Windung ist zuletzt 39 mm hoch und 23 mm dick, zuerst 24 mm hoch und 17 mm dick. Der tiefe Nabel ist gegen 5 mm weit und durch eine steile Nabelwand begrenzt; die Nabelkante ist ziemlich kurz gerundet. Die grösste Dicke liegt reichlich doppelt so weit vom Nabel, wie von der Externseite entfernt. Diese ist am Anfange der letzten Windung in einer Breite von reichlich 2 mm abgeplattet, und diese Platte wird durch stumpfe, wenig abgerundete Kanten begrenzt. Eine halbe Windung später runden die Kanten und dann die Platte sich allmählich ab, und es bildet sich ein abgerundeter Kiel aus, auf welchem der Sypho am stärksten hervorragt.

Neben diesem Kiel, beziehungsweise den Kanten wird die Wölbung schnell

sehr flach, und die Seitenflächen sind dann bis zu ihrer Mitte ziemlich eben oder sogar ein wenig eingesenkt, wölben sich aber dann etwas deutlicher bis zur Nabelkante. Auf der stärksten Wölbung finden sich in etwas unregelmässigen Abständen 6 breite, rundliche Rippen oder Anschwellungen, welche auf der Nabelkante verschwinden, und zwar sind die 3 ersten höher und dicker und verschwinden später, als besonders die 2 letzten, welche sich bis zur Externseite allmählich ganz verflachen. Die ersten theilen sich nach aussen schon auf der stärksten Wölbung in je 3 schmalere und flachere Rippen, und zwischen ihnen schieben sich noch je 2 ganz ähnliche Rippen ein, so dass auf der ersten halben Windung gegen 14 solche Rippen in ziemlich gleichen Abständen nach den Kanten an der Externseite laufen und dort verschwinden, nachdem sie vorher noch ein wenig höher geworden sind.

In der Mitte der letzten Windung werden diese Rippen allmählich niedriger, und auf dem letzten Drittel verschwinden sie bald ganz; sie stehen übrigens auf beiden Seiten der Röhre alternirend.

Die Loben stimmen im Wesentlichen in ihrer Zahl, Lage und Grösse mit denen des grösseren Exemplares überein, doch ist der Externlobus tiefer, der erste Laterallobus ist auf der abgebildeten Seite weniger gespalten, der zweite ist weniger tief, und die Kammerwand steigt auf der abgebildeten Seite bis zum Lateralsattel nicht unbedeutend an, von hier bis zum zweiten Auxiliarsattel nur noch schwach, und senkt sich dann ein wenig zum Nabel, während sie auf der anderen Seite zu Anfang der letzten Windung ziemlich gerade verläuft.

Durch die zahlreicheren, an der Externseite alternirend stehenden Rippen und den schmalen Externsattel unterscheidet sich unser Exemplar genügend von der früher (S. 9, Taf. I, F. 5) als *Pulchellia? gibbosula* beschriebenen Form, welche nur um eine Viertel-Windung kleiner ist, aber im Bau der Loben, Gestalt und Skulptur so nahe steht, dass ich sie jetzt für den Jugendzustand einer anderen, verwandten Art von *Hoplitoïdes* halten möchte.

Hoplitoïdes ingens v. Koenen

Tafel V, Figur 3. Tafel VII, Fig. 4; 5.

Neptychites? ingens v. Koenen S. 12, Tafel I, F. 4; Tafel II, F. 5 u. 8.

Ein bis an das Ende gekammertes Exemplar von der Elefantenbank am Mungo ist von einer Seite auf seiner letzten Hälfte angewittert, aber, abgesehen von dem letzten Achtel, ganz unverdrückt. Die Schale fehlt fast ganz, so dass die Loben grossentheils schon von vorn herein sichtbar waren; das Innere ist mit Kalkspath erfüllt, soweit es nicht verdrückt ist. Der Durchmesser beträgt 34 cm. Der Nabel ist innerhalb der hier erhaltenen, dicken Schale gegen 2 cm weit, diese abgerechnet gegen 3 cm. Die erste Hälfte der letzten Windung ist

zuerst 7 cm dick und 11 cm hoch, zuletzt 9 cm dick und 14 cm hoch, und ändert ihren Querschnitt sehr erheblich, indem zuerst ihre Seitenflächen an der Externseite eine Kante von 80 Grad bilden, welche nur durch den fast 6 mm dicken Sypho etwas abgerundet wird, und erst 2 cm von diesem nehmen die Seitenflächen allmählich eine etwas deutlichere Wölbung an. Schon eine Achtel-Windung später ist diese Kante aber nicht mehr kenntlich, sondern ganz abgerundet, und die Seitenflächen sind in der Nähe der Externseite am stärksten gewölbt; später wird dies noch deutlicher, und etwa 2 cm vom Sypho liegt eine ganz stumpfe, abgerundete Kante, von welcher bis zur Mitte der Seitenflächen die Röhre ziemlich eben ist; sie nimmt aber dann allmählich wieder eine stärkere Wölbung bis zu der kurz gerundeten Nabelkante an. Die Nabelwand steht ganz steil. Die grösste Dicke der Röhre liegt fast doppelt so weit vom Nabel, wie von der Externseite entfernt.

Die Röhre trägt, besonders auf der Mitte ihrer äusseren Hälfte, mehrfach ganz flache, breite, nach aussen vorgebogenen Anschwellungen, welche von Mitte zu Mitte etwa eine Zwanzigstel-Windung von einander entfernt sind; ausserdem ist fast am Anfange der letzten Windung auf der Mitte ein faltenartiger Eindruck zu sehen, welcher nach vorn weit schärfer begrenzt ist, als nach hinten, auf dem inneren und äusseren Drittel der Röhre schnell verschwindet und auf letzterem hinter einem weit kürzeren ähnlichen Eindrucke liegt.

Das von mir Tafel I, Fig. 4 abgebildete, wesentlich kleinere Exemplar ist nun einerseits zum Theil etwas verdrückt und andererseits stellenweise abgenutzt, und ich hatte geglaubt hierauf zurückführen zu müssen, dass es bis zu seiner letzten Drittel-Windung einen rundlichen Kiel hat, dann aber eine kurze Wölbung der Externseite bekommt. Diese Aenderung in der Gestalt entspricht aber derjenigen, welche auch das eben beschriebene, grössere Stück erkennen lässt. Bei diesem ist die Lobenlinie sehr ähnlich der Tafel II, Fig. 8 abgebildeten, wenn auch die Loben selbst, entsprechend den grösseren Dimensionen, tiefer zerschnitten sind; ausserdem wird noch ein kleiner vierter Auxiliarlobus dicht über der Nabelkante sichtbar, und der zweite ist etwas länger, beziehungsweise gleicht mehr den benachbarten Auxiliarloben, hat also wohl eine mehr normale Ausbildung, als bei jenem Exemplar.

Das grosse, von einer Seite stark angewitterte Stück, welches ich mit zu N. ingens gestellt hatte, muss ich jetzt davon trennen, da es in der Wölbung der Windungen und auch in der Lobenlinie nicht genügend mit dem eben so grossen, jetzt Tafel V, Fig 1 abgebildeten übereinstimmt.

Hoplitoïdes Wilsingi v. Koenen
Tafel V, Figur 2; Tafel VI, Figur 6 und 7.

Das bis an das Ende gekammerte, in halber Grösse abgebildete Exemplar

ist ziemlich stark beschädigt, doch lässt sich der fehlende Theil leicht ergänzen; es hat gegen 28 cm Durchmesser gehabt, und die Röhre ist zuletzt 165 mm hoch und 95 mm dick, und eine Windung vorher 86 mm hoch und 43 mm dick. Der Nabel ist trichterförmig, innen sehr eng und vermuthlich ganz geschlossen, wird aber durch eine breit abgerundete Nabelkante nur undeutlich begrenzt. Von dieser an nehmen die Seitenflächen zuerst schneller, dann immer langsamer eine flachere Wölbung an, so dass sie auf dem äussersten Viertel der letzten Drittel-Windung ziemlich eben sind; eine halbe Windung vorher haben sie sogar, sofern die Schale erhalten ist, auf dem äusseren Drittel eine flache Einsenkung, welche in der Nähe der Externseite am deutlichsten wird und den hier ca 6 mm dicken, den Sypho enthaltenden Kiel stärker hervortreten lässt.

Der Lateralsattel ist fast eben so weit von der Externseite entfernt, wie vom Nabel, und nimmt etwa ein Sechstel der Seitenfläche ein; er ist um ein Viertel breiter, als der Externsattel, um zwei Fünftel breiter, als der erste Auxiliarsattel, und fast doppelt so breit, wie der zweite. Die Sättel sind breit abgerundet, wenig tief und unsymmetrisch gekerbt mit Ausnahme des Lateralsattels. Der erste Laterallobus ist sehr breit, fast doppelt so tief, wie der zweite, und etwa um ein Viertel tiefer, als der Externlobus, mehr als doppelt so tief, wie der erste Auxiliarlobus, und etwa dreimal so tief, wie der zweite. Der erste Laterallobus ist bis auf etwa zwei Drittel ziemlich symmetrisch gespalten, doch hängt die innere Hälfte wesentlich tiefer herab, als die äussere, und beide sind nochmals in der Weise gespalten, dass auf beiden Seiten des Lobus ein weniger tiefer Ast liegt, in der Mitte die beiden tiefsten; diese laufen in je 4 ganz unsymmetrische Zweige aus, jene in je 2, und der zweite Laterallobus sowie die beiden Auxiliarloben haben je 4 fast fingerförmige Aeste. Der Externlobus hat jederseits in halber Höhe einen stärkeren Seitenast, darunter einen schwächeren.

Die Kammerwand steigt von aussen bis zum Lateralsattel nicht unbedeutend an und biegt sich dann allmählich gerade auf den Nabel hin.

Derselben Art möchte ich auch ein kleineres, grossentheils stark angewittertes Exemplar zurechnen, dessen Röhre flacher gewölbt ist, bei 92 mm Höhe eine Dicke von 44 mm hat und eine Viertelwindung vorher, bei einer Höhe der Röhre von 76 mm, die Loben zeigt; diese sind natürlich weit kürzer und weniger zerschnitten, gleichen aber im Wesentlichen denen des grossen Stückes, nur ist der Externsattel reichlich so breit, wie der Lateralsattel, und die 4 einzelnen Aeste des ersten Laterallobus zeigen die Anlage zu einer etwas abweichenden Verzweigung.

Unsere Art zeigt einige Aehnlichkeit in der Ausbildung der Lateral- und Auxiliar-Loben und Sättel mit dem *Ammonites Requienianus* d'Orb. (Cephalop. Terr. Crét. S. 315 Taf. 93) aus dem grès vert supérieur von Uchaux etc., während der Extern-Lobus und Sattel wesentlich abweichen.

Hoplitoöides n. sp.?

Tafel V, Figur 1; Tafel VI, Figur 5.

Es liegt nur ein stark angewitterter, bis an das Ende gekammerter Kalkspath-Steinkern vor, von welchem ich die letzte halbe Windung entfernte, so dass eine frühere, nicht angewitterte, aber stellenweise etwas verdrückte halbe Windung sichtbar wurde. Das Stück hat jetzt ca 150 mm Durchmesser und zuletzt ca 89 mm Höhe bei 58 mm Dicke der Röhre, eine Windung früher 45 mm Höhe bis 36 mm Dicke. Der Nabel, in welchem die Schale noch erhalten ist, hat zuletzt einen Durchmesser von 10 mm und hat eine ganz steilstehende Wand, wird aber nach innen ganz eng und ist durch eine gänzlich abgerundete Nabelkante begrenzt. Neben dieser sind die Seitenflächen zunächst ziemlich flach, nehmen aber bald eine stärkere Wölbung an, von der Mitte an wieder eine flachere, und auf dem äusseren Drittel sind sie deutlich eingesenkt, so dass der mindestens zuerst recht scharfe Kiel der Externseite noch stärker hervortritt.

Auf der letzten Viertelwindung finden sich 3 flache, rundliche Anschwellungen, welche auf der Mitte noch am deutlichsten sind, nach dem Nabel hin und anscheinend auch nach dem Kiel zu verschwinden; auf dem ersten Viertel der letzten Windung sind die Anschwellungen höher und schmaler, sodass sie niedrigen Rippen gleichen; auf der inneren Hälfte der Seitenflächen erheben sie sich am stärksten und verflachen sich wieder bis zur Nabelkante, verschwinden aber auch auf der äusseren Hälfte unter schwacher Vorbiegung erst nahe dem Kiel. Zwischen je zweien dieser Anschwellungen treten endlich auf dem äusseren Drittel der Seitenflächen je eine oder auch zwei schmale Falten auf.

Die Lobenlinie zeigt am Anfange der letzten Windung grosse Aehnlichkeit mit der von *A. Wilsingi*, namentlich in der Zahl und Lage der Loben, sowie in deren freilich noch ganz geringfügiger Verzweigung, auch sind die Sättel breitgerundet, wenig zerschlitzt, doch ist der Externsattel breiter, als der Lateralsattel, und die beiden Aeste des Externlobus sind weit mehr nach innen, als nach unten gerichtet. Ausserdem steigen die Kammerwände bis zum ersten Auxiliarsattel an und biegen sich dann erst allmählich dem Nabel zu.

Eine halbe Windung später ändern sich die Loben besonders darin, dass ihre Stämme verhältnissmässig dick werden, während die Verzweigung ganz kurz bleibt; die äussere Hälfte des ersten Laterallobus und der Externlobus sind leider hier nicht erhalten.

Dieses Exemplar hat aber eine so bedeutende Dicke im Verhältniss zu seinem Durchmesser, dass es nicht wohl zu *N. Welsingi* gestellt werden kann, aber auch zu den übrigen, von Kamerun vorliegenden Arten nicht passt, selbst wenn man die Berippung als Jugend-Skulptur ansehen will und ihr daher keinen oder doch nur geringen Werth als Merkmal beilegen will.

Wenn es aber auch durch Gestalt und Skulptur sich anderen Gattungen

wie Lenticeras, nähert, so schliesst es sich doch durch seine Lobenlinie mehr an die übrigen, von mir zu Hoplitoïdes gestellten Formen an.

Pulchellia? perovalis v. Koenen

Tafel VI, Figur 4.

Pulchellia? perovalis v. Koenen S. 10. Tafel I, Fig. 3; Taf. II, Fig. 6.

Ein unverdrücktes, bis an das Ende gekammertes, mit Kalkspath erfülltes Exemplar, welches auf dem letzten Viertel an der Externseite beschädigt ist, hat 68 mm grösste Dicke und gegen 100 mm Durchmesser gehabt. Vor dem letzten Viertel ist die Röhre 60 mm dick und 80 mm hoch und eine halbe Windung vorher 43 mm dick und 57 mm hoch. Der Nabel ist mit hartem Kalksandstein erfüllt, höchstens 5 mm weit. Die grösste Dicke der Schale ist vom Nabel nur etwa 12 mm entfernt; von dieser Stelle an nehmen die Seitenflächen bis zu der kurz gerundeten Nabelkante allmählich eine stärkere Wölbung an, während sie nach aussen zu recht flach gewölbt sind und mit durchschnittlich etwa 45 Grad konvergiren bis in die Nähe der gleichmässig gerundeten Externseite.

Die Dicke dieses Stückes ist somit verhältnissmässig etwas beträchtlicher, als ich bei dem kleineren, stark beschädigten, Tafel II, Fig. 6 abgebildeten angenommen hatte.

Die Lobenlinien zeigen aber genügende Uebereinstimmung, wenn auch bei dem grossen Exemplar die Loben wesentlich tiefer und, ebenso wie die Sättel, weit tiefer zerschlitzt sind, wie dies aber den grösseren Dimensionen entsprechen dürfte; nur ist der Externlobus wesentlich kürzer, als bei dem kleinen Stück, kaum länger, als der zweite Laterallobus, und nur zwei Drittel so lang, wie der erste.

Aporrhaïs semilaevis v. Koenen.

Tafel VI, Figur 8.

Aus dem harten, grauen Kalksandstein erhielt ich ausser einem kleinen Bruchstücke ein Exemplar, welchem der unterste Theil der Mündung und die Gewindespitze, sowie ein grosser Theil der Schale fehlen; dasselbe hat über 60 mm Länge und 20 mm Dicke auf der Mitte der Schlusswindung gehabt und enthält die 4 letzten Windungen, von welchen die erste 6 mm dick und zuerst 4 mm hoch ist. Die fehlende Gewindespitze dürfte mindestens 5 oder 6 Windungen enthalten haben. Die Mündung hat wohl etwas mehr als die Hälfte der Gesamtlänge eingenommen.

Die Mittelwindungen springen unter der Naht ein wenig vor und sind auf

ihrem obersten Drittel flach oder ein klein wenig eingesenkt, darunter flach gewölbt; die Schlusswindung ist unterhalb der Nahtlinie anscheinend fast eben und hat erst nahe ihrem unteren Ende eine flache Einsenkung.

Die ersten Mittelwindungen tragen je etwa 22 kantige Rippchen, welche etwa eben so breit wie ihre Zwischenräume sind, auf dem Nahtsaum etwas verbreitert beginnen und auf der unteren Hälfte der Windungen ein wenig anschwellen. Zuerst laufen sie ziemlich gerade von Naht zu Naht; auf der zweiten vorhandenen Windung erhalten sie nach unten zu eine allmählich deutlicher werdende Vorbiegung, werden dann flacher, unregelmässiger, mehr Faltenartig und treten schliesslich nur auf der unteren Hälfte der Schlusswindung und auch dicht unter der Naht als ganz unregelmässige, flache Anwachsfasen hervor.

Ausserdem tragen die ersten Windungen gegen 20 flache, gedrängte Spiralfasen, welche auf dem obersten Viertel noch am deutlichsten sind und auf der letzten Mittelwindung nur noch nahe unter der Naht zu erkennen sind.

Nahe der Mündung erhält die Schale einige schärfere Falten und einen tiefen Absatz, vielleicht in Folge eines ausgeheilten Bruches, und die Aussenlippe beginnt schon nahe unter der Naht sich vorzubiegen; die letzten Anwachsfasen biegen sich bis zur Nahtlinie wieder gerade nach unten und dann ein wenig rückwärts. Der Bruch der Aussenlippe zeigt aber eine Schalendicke von über 2 mm, so dass sie hier einen vorspringenden Flügel getragen haben dürfte. Diese innere Verdickung des mittleren Theiles der Schale reicht aber auch bis etwa eine Viertel-Windung vor der Mündung.

Die Innenlippe ist ziemlich stark verdickt und reicht mindestens über die vorhergehende Windung hinweg; von einer Rinne ist nichts zu erkennen.

Der Flügel könnte etwa eine ähnliche Form gehabt haben, wie bei *Rostellaria Robinaldina* d'Orb. (Terr. Crét. Gastrop. pl. 206 f. 4) oder bei der recenten *A. occidentalis*, da keine Spur eines Kieles oder auch nur einer Kante auf der Schlusswindung zu sehen ist; unsere Art könnte daher wohl zu der Untergattung *Arrhoges* Gabb gehören.

Liopistha sulcata v. Koenen

Tafel VII, Figur 6.

Eine beschädigte linke Schale aus dem grauen Kalksandstein und ein Steinkern eines ziemlich stark verdrückten, zweisehaligen Exemplares aus dem bräunlichen, entkalkten Sandstein könnten ein und derselben Art angehören. Erstere ist gegen 70 mm breit, 50 mm hoch und nicht ganz 30 mm dick gewesen; das letztere Stück dürfte ähnliche Dimensionen gehabt haben und erinnert in der Gestalt einigermaßen an die Abbildung von *Panopaea attenuata* Ag. (Pictet et Campiche, Terr. Crétacés de Ste Croix pl. CII, f. 2 u. 3) aus dem mittleren Neokom, hat aber viel spitzere und weit stärker umgebogene Wirbel.

Diese ragen bei der einzelnen Schale etwa 10 mm über der Schlosswand hinaus, sind nur mässig nach vorn gerichtet und stehen dicht hinter dem vordersten Drittel der Schale. Von aussen gesehen bilden die Seiten des Wirbels einen Winkel von 100 Grad; vor dem Wirbel liegt eine 8 mm breite und 25 mm lange, glatte, vertiefte Lunula, welche durch eine stumpfe, abgerundete Kante wenig scharf begrenzt wird und am vorderen Schalrand, etwa 10 mm vom Wirbel, eine ganz stumpfe Ecke enthält.

Hinter dem Wirbel zeigt der Steinkern einen 30 mm langen, ziemlich geraden Schlossrand, welcher durch eine stumpfe, abgerundete Ecke vom hinteren Schalrande getrennt wird. Dieser läuft unter einem Winkel von durchschnittlich etwa 140 Grad schräg nach unten und ist auf eine Länge von ca. 25 mm nur schwach gekrümmt, biegt sich dann aber schnell stärker und geht so in den unteren Schalrand über, welcher bald wieder eine flache Biegung annimmt und erst auf der vorderen Hälfte sich allmählich etwas stärker aufbiegt.

Die Schale ist vor ihrer Mitte am stärksten gewölbt, hinten am wenigsten; auf ihrer ersten Hälfte trägt sie ziemlich regelmässige, platte Anwachsrippen, welche nach oben steil abfallen, etwa doppelt so breit wie ihre Zwischenräume und zuletzt etwa 2 mm von Mitte zu Mitte von einander entfernt sind; auf der unteren Hälfte der Schale finden sich dagegen etwa 5 mm breite, durch flache Furchen getrennte Anschwellungen, auf welchen je 6 oder 7 niedrige, gedrängte, wenig deutliche Streifen liegen. Die Schale ist sehr dünn, auf ihrem unteren Theile höchstens bis zu 0,5 mm dick.

Der Schlossrand ist angebrochen, zeigt aber hinter dem Wirbel eine nicht unbedeutende Verdickung, so dass hier wohl Schlosszähne gelegen haben; dahinter scheint eine ziemlich lange Furche oder Ligamentgrube zu liegen.

Unsere Art ist in Gestalt und Skulptur näher verwandt mit *Panopaea frequens* Zittel (Bivalven der Gosaubildungen S. 7, Taf. I, Fig. 5, 6) welche von Zittel (Handb. der Paläontologie II, S. 131) selbst zu der Gattung *Liopistha* Meek gestellt wurde, und zu dieser dürfte denn auch unsere Art gehören, welche sich von *L. frequens* schon durch die doppelte Grösse und weit gröbere Skulptur unterscheidet.

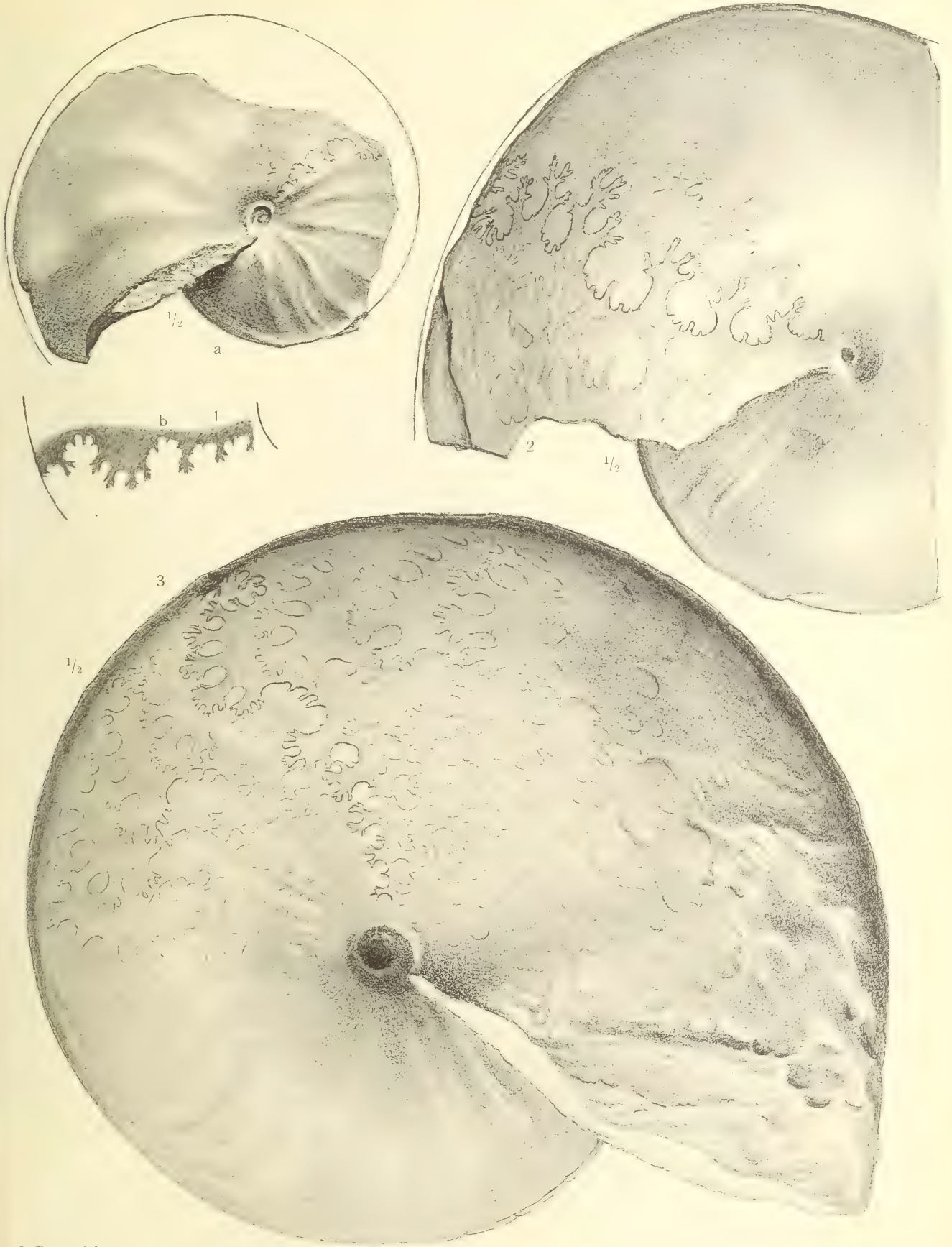
Verzeichniss der im Nachtrage beschriebenen und besprochenen Arten.

Aporrhais semilaevis v. Koenen	Seite 62	Tafel VI	Fig. 8.
Desmoceras Kamerunense v. Koenen	" 55	" VII	" 1—3.
Hoplites Brandesi v. Koenen	" 54		
H. gibbosus v. Koenen	" 53		
H. laeviusculus v. Koenen	" 54		
Hoplitoïdes nov. gen.	" 53		
H. n. sp.?	" 61	" V	" 1.
H. ingens v. Koenen	" 53, 58	" V	" 3. T. VII F. 4, 5.
H. latesellatus v. Koenen	" 53, 56	" VI	" 1—3.
H. lentiformis v. Koenen	" 53		
H. Wilsingi v. Koenen	" 59	" V	" 2. T. VI F. 6, 7.
H. Wohltmanni v. Koenen	" 53		
Liopistha sulcata v. Koenen	" 63	" VII	" 6.
Neoptychites?(Hoplites)ingens v. Koenen	" 53		
N? lentiformis v. Koenen	" 53		
N? Wohltmanni v. Koenen	" 53		
Pulchellia? gibbosula v. Koenen	" 53, 63.		
P? perovalis v. Koenen	" 62	" VI	" 4.



Tafel V.

- Figur 1. *Hoplitoïdes* n. sp.? 1a. in halber Grösse. 1b. Loben am Anfange der letzten Windung. Querschnitt vergl. Tafel VI, Fig. 5. Seite 61.
- Figur 2. *Hoplitoïdes* *Wilsingi* v. Koenen in halber Grösse. Vergleiche den Querschnitt Tafel VI, Fig. 6 und 7. „ 59.
- Figur 3. *Hoplitoïdes* *ingens* v. Koenen in halber Grösse. Vergleiche die Querschnitte Tafel VII, Fig 4 und 5, sowie Tafel I, Fig. 4 und Tafel II, Fig. 5 und 8. „ 58.

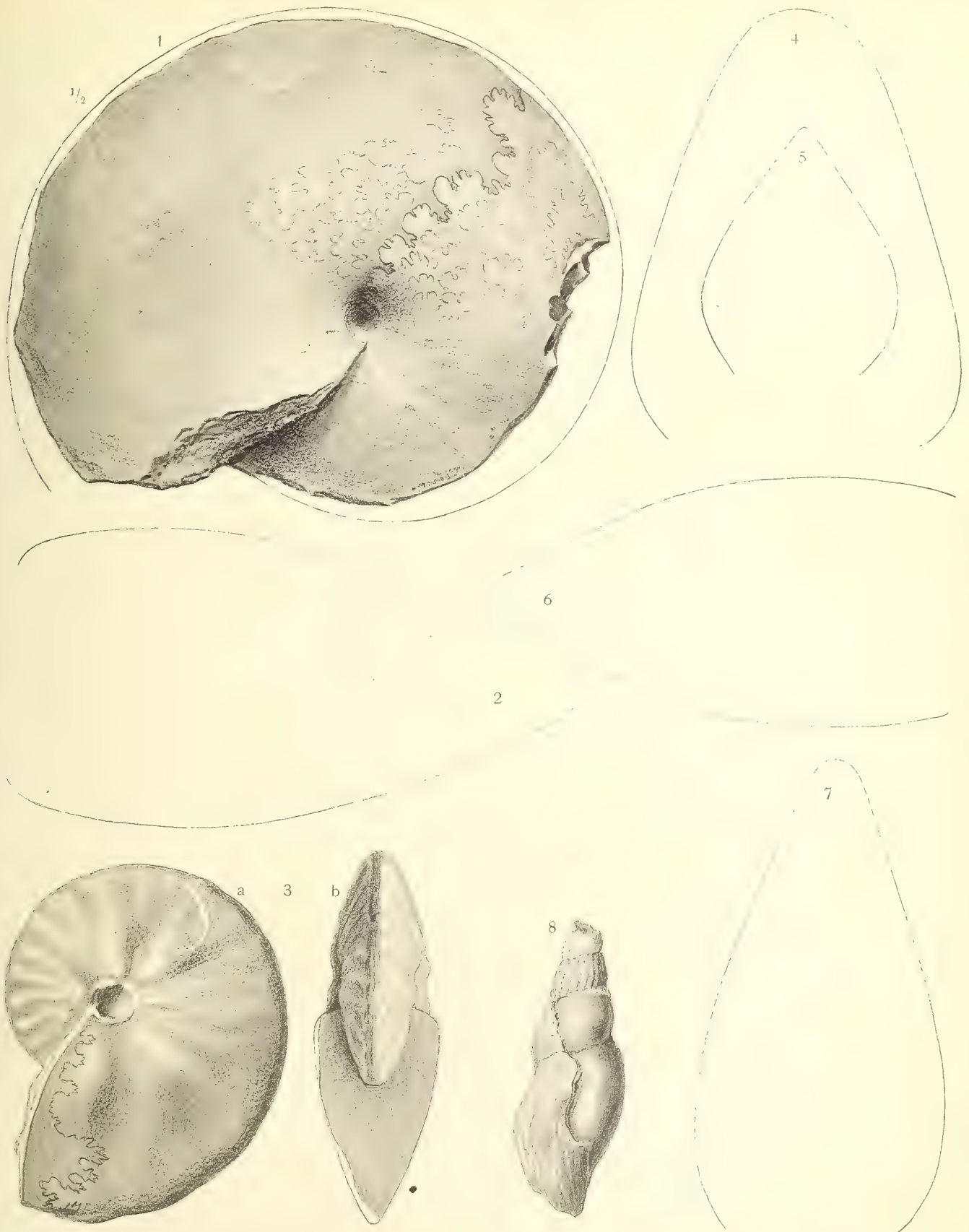


O. Peters del.



Tafel VI.

- Figur 1, 2, 3. *Hoplitoïdes latesellatus* v. Koenen. 1 in halber Grösse.
2. Querschnitt am Anfang des letzten Drittels. 3 a, b.
Jugend-Zustand. Seite 53, 56.
- Figur 4. *Pulchellia? perovalis* v. Koenen. Vergleiche Tafel I, Fig. 3,
Taf. II, Fig. 6. " 62.
- Figur 5. *Hoplitoïdes* n. sp.? Querschnitt des Tafel V, Fig. 1 abge-
bildeten Exemplares. " 61.
- Figur 6. *Hoplitoïdes Wilsingi* v. Koenen. Querschnitt des Tafel V,
Fig. 2 abgebildeten Exemplares am Anfange der letzten
Windung und
7. des anderen Exemplares. " 59.
- Figur 8. *Aporrhais semilaevis* v. Koenen. " 62.

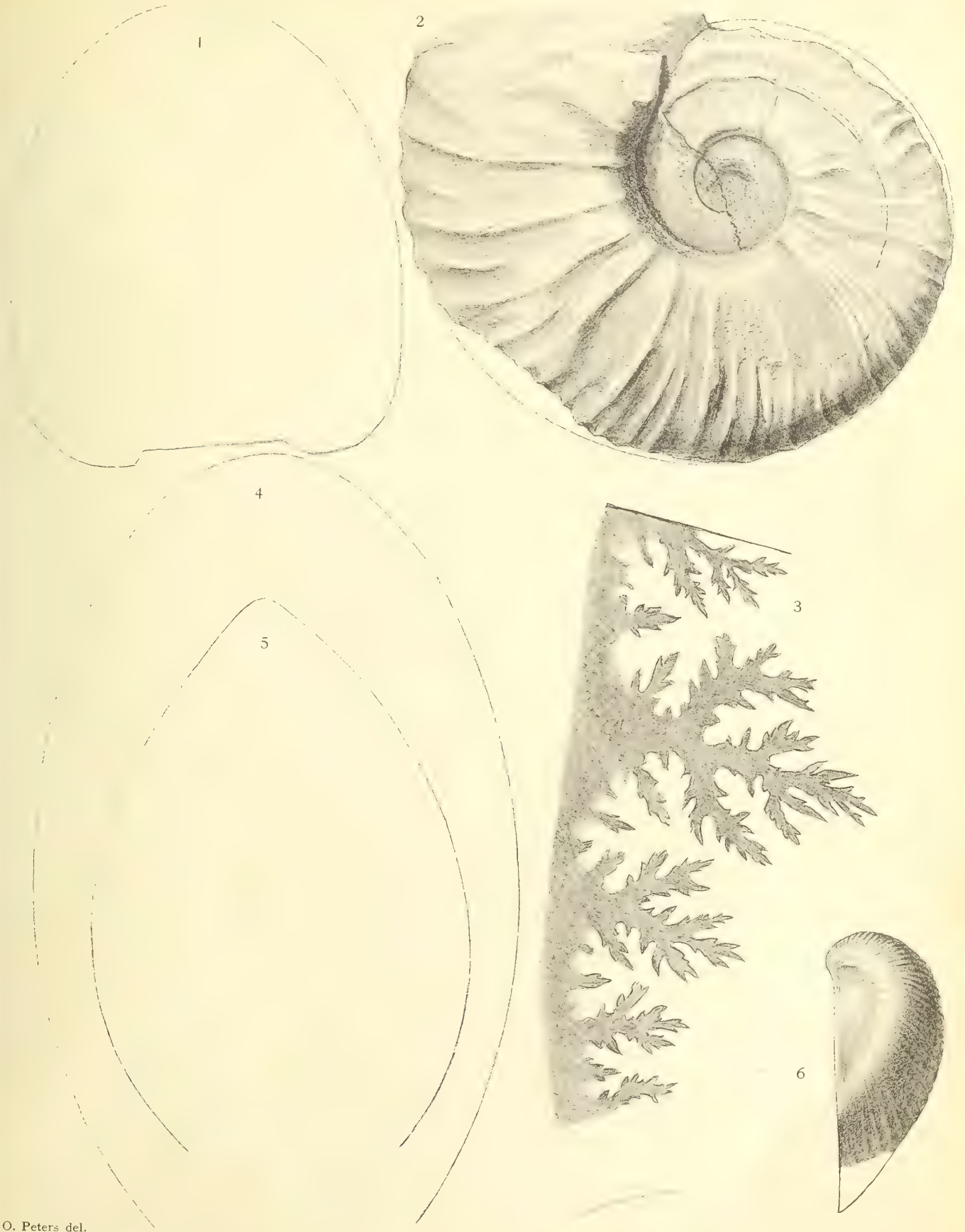


O. Peters del.



Tafel VII.

- Figur 1, 2, 3. *Desmoceras Kamerunense* v. Koenen. 1. in halber Grösse.
2. Querschnitt und 3. Lobenlinie nahe dem Ende der Röhre. Seite 55.
- Figur 4, 5. *Hoplitoïdes ingens* v. Koenen. Querschnitte des Tafel V.
Fig. 3. abgebildeten Exemplares. 5. am Anfange der letzten
Windung. 4. zwei Drittel-Windungen später. „ 58.
- Figur 6. *Liopistha sulcata* v. Koenen. „ 63.
-



O. Peters del.



Göttingen, Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner.)

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND 1. Nro. 2.

Theorie der kleinen Planeten.

Von

Martin Brendel.

Erster Teil.



Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1898.

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND 1. Nro. 2.

Theorie der kleinen Planeten.

Von

Martin Brendel.

Erster Teil.



Berlin.

Weidmannsche Buchhandlung.

1898.

Theorie der kleinen Planeten.

Von

Martin Brendel.

Erster Teil.

Vorgelegt in der Sitzung vom 31. Juli 1897 durch W. Schur.

Einleitung.

1. Die Zahl der Entdeckungen kleiner Planeten hat sich in den letzten Jahren ausserordentlich vermehrt, seitdem die von Herrn Max Wolf eingeführte photographische Methode Anwendung gefunden hat, und es wird heutzutage solchen Neuentdeckungen weit weniger Interesse entgegengebracht als in früheren Zeiten, wo dieselben noch verhältnissmässig selten waren. Die grosse Anzahl der bereits bekannten kleinen Planeten beginnt vielmehr die Astronomen in Verlegenheit zu setzen, da es immer schwieriger wird, den Bewegungen dieser vielen Himmelskörper rechnerisch zu folgen. Aus diesem Grunde hat man sogar davon sprechen hören, dass man den Planetenentdeckern anheim geben wolle, ihre Entdeckungen während einer längeren Zeit möglichst einzuschränken, um den Rechnern Gelegenheit zu geben, die Bahnen der bereits bekannten kleinen Planeten genauer festzulegen, ohne sie durch weitere Entdeckungen mit Rechnungsmaterial zu überhäufen.

Der Verfasser ist der Ansicht, dass es sehr verfehlt wäre, diesen Planetenentdeckungen Einhalt thun zu wollen; denn eine jede Beobachtung kann für die Zukunft von grosser Wichtigkeit werden, wenn sie auch im Augenblicke wertlos erscheint, und wir müssen sicherlich danach streben, unsere Kenntniss des Sonnensystems möglichst zu vervollkommen. Wenn man Zweifel aussprechen hört an dem Werte der genannten Entdeckungen, so ist dies nur ein Anzeichen dafür, dass die Rechnung mit der Beobachtung nicht mehr gleichen Schritt halten kann. Dies hat aber seinen Grund nicht allein in der grossen Menge der neuentdeckten Planeten, sondern es sind thatsächlich die Fortschritte auf dem Gebiete der praktischen Störungsrechnung hinter denen der beobachtenden Astronomie zurückgeblieben, trotzdem auf dem Gebiete der Theorie, hauptsächlich in Schweden

und in Frankreich, die letzte Zeit eine grosse Reihe hervorragender Arbeiten zu verzeichnen hat. Doch haben bei der Complicirtheit des Problems die theoretischen Erfolge noch immer nicht rechte Früchte tragen können für die rechnende Astronomie.

Es erscheint daher als eine sehr dringliche Aufgabe, Methoden aufzustellen, mittels deren man den Bewegungen der zahlreichen kleinen Planeten rechnerisch folgen kann. Man wird von vornherein darauf verzichten müssen, die Coordinaten aller dieser Himmelskörper mit derselben Genauigkeit durch die Rechnung darzustellen, mit der man den Bewegungen der grossen Planeten folgt, denn das Arbeitsmaterial würde zu gross werden. Nur diejenigen der kleinen Planeten, die aus irgend einem Grunde ein specielleres Interesse verdienen, wird man mit aller erreichbaren Schärfe berechnen.

Es bieten sich demnach der rechnenden Astronomie in bezug auf die kleinen Planeten die folgenden beiden Aufgaben:

I. Ihre Coordinaten soweit genähert zu berechnen, dass man sie ohne Schwierigkeiten nach einem gewissen Zeitraum am Himmel wieder auffinden und die neuen Planeten von den bereits bekannten leicht unterscheiden kann.

II. Ihre Coordinaten innerhalb der Beobachtungsfehler darzustellen, wenn es sich um die Bestimmung irgend einer der Constanten unseres Sonnensystems oder um Fragen der Mechanik oder der Cosmogonie handelt.

Bei Bearbeitung der ersteren Aufgabe können offenbar die auszuführenden Störungsrechnungen sehr erheblich abgekürzt werden. Herr Berberich, dem die astronomische Welt für seine mühevollte Arbeit der Identificirung des grössten Theils der in den letzten Jahren neu beobachteten Planeten verpflichtet ist, hat gezeigt, dass man mit Hilfe der Photographie einen Planeten nach mehreren Jahren wieder auffinden kann, ohne überhaupt Störungen zu rechnen, indem man die elliptische Bewegung zu Grunde legt. Es wird indessen angezeigt sein, die Störungen soweit zu bestimmen, dass man den Planeten nach einem Zeitraum von 50 bis 100 Jahren mit dem Fernrohr ohne besondere Schwierigkeit wieder findet.

Die Pariser Académie des Sciences hatte für den Prix Damoiseau für das Jahr 1894 folgende Aufgabe gestellt:

„Perfectionner les méthodes de calcul des perturbations des petites planètes en se bornant à représenter leur position, à quelques minutes d'arc près, dans un intervalle de cinquante ans; construire ensuite des tables numériques permettant de déterminer rapidement les parties principales des perturbations“.

Es ist dies die erste der beiden eben genannten Aufgaben, mit der wir uns im Folgenden in erster Linie beschäftigen werden, und es ist die vorliegende Abhandlung im Wesentlichen eine weitere Ausarbeitung einer von der Akademie mit dem Preise gekrönten kürzeren Arbeit. Ich will aber die Grenzen noch etwas enger ziehen und versuchen, die geocentrischen Coordinaten der Planeten während eines Jahrhunderts im Allgemeinen innerhalb der Bogenminute darzustellen; und ferner will ich den Entwicklungen eine solche Allgemeinheit

geben, dass sie auch zur Lösung der zweiten Aufgabe als Grundlage dienen können.

Bei Bearbeitung der ersteren Aufgabe wird man Jupiter allein als störenden Körper berücksichtigen (wenn man einige vereinzelte kleine Planeten ausschliesst, welche von Seiten des Mars¹⁾ oder Saturns beträchtliche Störungen erleiden), und zwar wird man die Bewegung Jupiters als elliptisch ansehen.

Im zweiten Falle muss man ausser dem Einflusse Jupiters auch noch die anderen störenden Körper einführen, und man wird auch die wahre Bewegung der störenden Körper betrachten müssen, wie sie aus ihrer gegenseitigen Anziehung folgt.

Ich werde versuchen, beiden Aufgaben gerecht zu werden, indem ich mich einerseits auf die Betrachtung eines einzigen störenden Körpers (Jupiters) beschränke, da die Berücksichtigung mehrerer störender Körper keinen wesentlichen Unterschied in den Entwicklungen bedingt. Andererseits aber werde ich die Bewegung Jupiters, um die Allgemeinheit des Problems zu wahren, nicht von vornherein als elliptisch ansehen, sondern ich werde seine wahre Bewegung in die Entwicklungen einführen. Im weiteren Verlaufe sollen dann mit Rücksicht auf die erstere Aufgabe bedeutende Vereinfachungen vorgenommen werden, dadurch, dass ich die Bewegung Jupiters in die elliptische übergehen lasse.

2. Unsere Entwicklungen und Annäherungen werden nach Potenzen von gewissen Constanten fortschreiten, die den Excentricitäten und Neigungen in der elliptischen Bewegung analog, aber unabhängig von der störenden Masse sind; und zwar wird zunächst die Störungsfunktion nach Potenzen dieser Grössen entwickelt werden. Ich will jedes Glied, welches die n -te Potenz oder ein entsprechendes Produkt dieser Grössen als Factor enthält, ein Glied **n -ten Grades** nennen, und bei der Entwicklung der Störungsfunktion die Glieder dritten Grades zunächst vernachlässigen. Bei der weitaus grössten Mehrzahl der kleinen Planeten wird diese Genauigkeit ausreichend sein, um ihre Coordinaten innerhalb der in der ersten Aufgabe gegebenen Grenzen darzustellen. Nur für diejenigen Planeten, deren Excentricität oder Neigung einen aussergewöhnlich hohen Betrag erreicht, ebenso wie für diejenigen, deren mittlere Bewegung sehr nahe in einem commensurablen niedrigzahligen Verhältniss zur mittleren Bewegung Jupiters steht, wird man eine weniger scharfe Darstellung erreichen. Doch wird es nicht schwierig sein, in diesen Fällen einige wichtigen Glieder dritten und vierten Grades nachzutragen. Ich werde demnach in den Differentialgleichungen für die Coordinaten des gestörten Körpers die Glieder dritten Grades (welche sämmtlich mit der störenden Masse multiplicirt sind) bei Seite lassen; dagegen werde ich in den Integralen (oder richtiger Lösungen) dieser Gleichungen, d. h. in den Ausdrücken für die Coordinaten, nicht durchweg alle Glieder höheren als zweiten Grades vernachlässigen; denn aus Gliedern, welche in den

1) Vgl. H. Lemke, Ueber die Mars- und Jupiterstörungen der kleinen Planeten vom Hebe-Typus. Inaugural-Dissertation, Berlin 1897.

Differentialgleichungen niederen als dritten Grades sind, können in den Integralen beträchtliche Glieder vom dritten und von höheren Graden durch den Integrationsprocess (Kapitel VI—VII) entstehen, namentlich, wenn die mittlere Bewegung des betreffenden Planeten sehr nahe in einem commensurablen Verhältniss zu derjenigen Jupiters steht.

3. Die Excentricitäten und Neigungen in der elliptischen Bewegung, nach deren Potenzen die Entwicklungen in den älteren Störungstheorien fortschreiten, enthalten implicit die störende Masse; die Entwicklungen nach ihren Potenzen enthalten also schon implicit eine Entwicklung nach den Potenzen der störenden Masse, was bei uns nicht der Fall ist. Ausserdem wird auch in den älteren Theorien im Allgemeinen nach den Potenzen der explicit auftretenden störenden Masse entwickelt. Diese Entwicklungen sind nun in vielen Fällen unbedingt divergent, wie von Gyldén und anderen gezeigt worden ist. Wir werden darum nicht in jedem Falle unsere Entwicklungen und Annäherungen nach den Potenzen der störenden Masse ordnen; dennoch will ich, der Uebersichtlichkeit halber, ein jedes Glied, das die n -te Potenz der störenden Masse enthält, als Glied **n -ter Ordnung** bezeichnen. Man kann in dieser Beziehung die Planeten in zwei Gruppen teilen:

I. Solche Planeten, deren mittlere Bewegung so beschaffen ist, dass ihr Verhältniss zu derjenigen Jupiters keinem (niedrigzahligen) Bruche sehr nahe kommt; in diesem Falle können die Annäherungen unbedenklich nach den Potenzen der störenden Masse geordnet werden; ich will diese Planeten **gewöhnliche** nennen.

II. Diejenigen Planeten, deren mittlere Bewegung sehr nahe commensurabel mit derjenigen Jupiters ist; wir nennen sie nach einer von Gyldén eingeführten Bezeichnungsweise **charakteristische** Planeten. Hier führen die Entwicklungen nach den Potenzen der störenden Masse langsam oder garnicht zum Ziele; ich werde daher bei diesen Planeten die wichtigen Störungsglieder höherer Ordnungen schon in der ersten Annäherung berücksichtigen. Diejenigen unter den charakteristischen Planeten, welche einem commensurablen Verhältniss in bezug auf die mittleren Bewegungen besonders nahe kommen, d. h. näher kommen als eine gewisse später zu bezeichnende untere Grenze, nenne ich **kritische** Planeten (in gewisser Analogie mit Gyldén's kritischen Gliedern); unter ihnen sind diejenigen einbegriffen, welche jene Form der Bewegung zeigen, die man Libration genannt hat. Ob indessen im Systeme der kleinen Planeten wirklich Fälle von Libration vorkommen, kann erst nach Abschluss der auszuführenden Rechnungen entschieden werden.

4. Die Methode, welche ich anwende, hat als Grundlage die Untersuchungen, welche Gyldén in seiner schönen Theorie der absoluten Bahnen gegeben hat, und ich habe den Störungen im Wesentlichen dieselbe Form gegeben wie er. Gyldén hat sich allerdings als Hauptziel eine Darstellung der Planetenbewegungen gesetzt, welche für einen unbegrenzten Zeitraum giltig sein und es daher auch erlauben soll, über die Stabilität des Systems zu entscheiden; wir

wollen uns vorläufig nur vornehmen, die Coordinaten des gestörten Körpers während eines beschränkten, wenn auch ziemlich langen Zeitraums (eines Jahrhunderts) darzustellen, und deshalb können wir uns viele Umänderungen und Vereinfachungen gestatten, die zwar die unbeschränkte Convergenz unseres Verfahrens in Frage stellen, aber für die praktische Rechnung von bedeutendem Vorteil sind.

Es sei noch besonders hervorgehoben, dass unsere Methode auch für die charakteristischen und kritischen Planeten anwendbar ist, und dass sie es auch ermöglicht, die Fälle zu behandeln, in denen Libration stattfindet. Das Hauptprincip ist die strenge Anordnung der Annäherungen nach dem Grade der Glieder, nicht aber nach den Potenzen der störenden Masse. Die Grundzüge unserer Methode finden sich bereits in einer in schwedischer Sprache erschienenen Abhandlung¹⁾ und in meiner Dissertation²⁾, wenn sie auch seitdem recht erhebliche Vereinfachungen erfahren hat. Ich will indessen hier eine vollständige Darstellung geben, und es vermeiden, den Leser auf die genannten Arbeiten zu verweisen.

5. Die unabhängige Veränderliche, welche ich nach dem Vorgange Gyldén's anwende, ist nicht die Zeit, sondern die wahre Länge des gestörten Planeten in seiner momentanen Bahnebene, die mit v bezeichnet wird. Ich habe mich überzeugt, dass dies Verfahren sehr bedeutende Vorteile mit sich bringt. Schon in der elliptischen Bewegung drückt man den Radiusvektor als Funktion der Länge aus; denn wenn man ihn als explicite Funktion der Zeit darstellen will, so erhält man einen sehr complicirten Ausdruck, der sich nur durch eine unendliche Reihe geben lässt, die nach Potenzen der Excentricität fortschreitet; führt man nun aber in die Differentialgleichung des Radiusvektors in der gestörten Bewegung die Zeit als unabhängige Veränderliche ein³⁾, so erhält man in dieser Gleichung eine ebensolche unendliche Reihe, welche nach den Potenzen der Excentricität fortschreitet, und deren Glieder nicht mit der störenden Masse multiplicirt sind; vernachlässigt man dann, von einer gewissen Potenz der Excentricität an, die Glieder dieser Reihe, so vernachlässigt man Glieder, die man sonst in der ungestörten Bewegung berücksichtigt; wenn auch bei geringen Excentricitäten diese Glieder sehr klein sein können, so bringt doch ein solches Verfahren erhebliche Nachteile mit sich. In den älteren Methoden drückt man auch thatsächlich den Radiusvektor durch die Gleichung

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos(v - \pi)}$$

als Funktion von v aus, und giebt dann allerdings gewöhnlich $e \cos \pi$ und $e \sin \pi$

1) Om användningen af den absoluta störingsteorien etc. Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar anställda på Stockholms Observatorium. Utgifna af H. Gyldén. Band IV Heft 3.

2) Ueber die Anwendung der Gyldén'schen absoluten Störungstheorie etc. Berlin-Göttingen 1890.

3) Backlund, Ueber die Bewegung einer gewissen Gruppe der kleinen Planeten. Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg, VII. Série. Tome XXXVIII No. 11.

als Funktionen der Zeit, oder man fügt dem angeführten Ausdruck einen Faktor hinzu, der die Störungen des Radiusvektors als Funktionen der Zeit enthält. Gegen ein solches Verfahren lässt sich Nichts einwenden. Am vorteilhaftesten habe ich gefunden, einige der auftretenden Funktionen durch v , andere durch die Zeit auszudrücken; um jedoch die Integrationen nicht unnütz zu compliciren, habe ich zunächst überall v als unabhängige Veränderliche beibehalten und ersetze dann da, wo es angemessen erscheint, v durch die Zeit. Auch nimmt die Gyl-dén'sche Entwicklung der Störungsfunktion, die nach diesem Princip ausgeführt ist, eine sehr symmetrische Form an.

In seinem Werke „Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste“ macht Herr Poincaré¹⁾ einige Bemerkungen über den Gebrauch von v als unabhängiger Veränderlicher. Er sagt, die wahre Länge v' des störenden Körpers, welche in der Störungsfunktion auftritt, sei eine bekannte Funktion der Zeit, aber eine unbekannt Funktion von v ; bei Ersetzung von v' durch v führe man also noch unbekannt Grössen ein, was man nicht thäte, wenn man v' durch die Zeit ersetzt. Indessen enthält die Störungsfunktion nicht nur v' , sondern auch v , und vor allem die Differenz $v-v'$. Vermeidet man, v' selbst durch noch unbekannt Grössen auszudrücken, so findet man dieselben an anderer Stelle wieder, und die Differenz $v-v'$ enthält stets solche unbekannt Grössen, wie man sie auch transformiren möge.

6. Im vorliegenden ersten Teile werde ich die Grundformeln für die Bewegung des gestörten Planeten geben und die Differentialgleichungen seiner Coordinaten integriren, d. h. die Relationen zwischen den heliocentrischen Coordinaten und der Zeit herstellen. Da wir als unabhängige Veränderliche die wahre Länge v einführen, so werden wir den Radiusvektor des Planeten, seine Breite über der Fundamentalebene und die Zeit als Funktion von v erhalten, und um die Coordinaten direkt als Funktion der Zeit darzustellen, ist noch eine unschwer auszuführende Transformation erforderlich, die ich im zweiten Teile zu geben beabsichtige.

Zur leichteren Orientirung habe ich der Arbeit ein ausführliches Inhaltsverzeichnis beigegeben.

Die Ausdrücke für die Coordinaten, die ich in diesem Teile ableite, sind so beschaffen, dass sie nach Potenzen der erwähnten mit den Excentricitäten und Neigungen vergleichbaren Grössen fortschreiten und dass ihre Coefficienten im Uebrigen nur von der mittleren Bewegung des gestörten Planeten abhängig sind und also mit derselben als Argument tabulirt werden können. Die zur Herstellung solcher allgemeinen Tafeln nötigen Rechnungen sind für die Planeten, deren mittlere Bewegungen zwischen 700" und 1200" liegen, bereits im Gange, und ich hoffe sie dem zweiten Teile einverleiben zu können; aus ihnen können die Störungsglieder für einen beliebigen Planeten direkt entnommen werden.

Begreiflicher Weise kann ich im Folgenden die Formeln für die charakteri-

1) Tome II pag. 204.

stischen Planeten nicht in solcher Ausführlichkeit geben wie für die gewöhnlichen; denn je mehr ein Planet sich der strengen Commensurabilität nähert, desto mehr Glieder müssen berücksichtigt werden, und desto mehr Einfluss gewinnt der Betrag der Excentricität und der Neigung auf die Entwicklungen. Ich werde darum für die charakteristischen Planeten die Entwicklungen nur bis zu Gliedern niederen Grades vollständig geben, jedoch so, dass der weitere Gang der Rechnung ohne Schwierigkeiten zu übersehen ist. Aus dem genannten Grunde lassen sich die charakteristischen (oder wenigstens die kritischen) Planeten auch nicht ohne Weiteres in die zu berechnenden allgemeinen Tafeln aufnehmen, und es empfiehlt sich mehr, sie einzeln zu berechnen. Dennoch werde ich bestrebt sein, die Lücken, welche unsere Tafeln in der Nähe der Commensurabilitäten zunächst zeigen werden, auszufüllen, wenn dies auch der wenigen Planeten wegen, welche sich dort befinden, nicht lohnend erscheinen mag. Es ist aber von hohem Interesse, eine Uebersicht zu gewinnen, wie fictive Planeten sich an diesen Stellen verhalten würden; und es ist das Endziel unserer Arbeit, beurteilen zu können, wie jeder beliebige kleine Planet sich bewegen würde, der sich in dieser Zone befinden kann.

Im zweiten Teile soll von der numerischen Anwendung der im ersten gegebenen Entwicklungen die Rede sein und von der Herstellung der genannten allgemeinen Tafeln. Des weiteren soll der zweite Teil von der Bearbeitung der einzelnen Planeten handeln, d. h. also:

Von der Bestimmung der Bahnelemente aus den Beobachtungen mit Berücksichtigung der Störungen;

Von der Herstellung kurzgefasster Tafeln für die einzelnen Planeten, aus denen entweder die jeweiligen osculirenden oder analoge (instantane) Elemente entnommen werden können; diese Tafeln, welche auf einen Zeitraum von je hundert Jahren ausgedehnt werden sollen, werden für je einen Planeten den Raum von zwei Quartseiten voraussichtlich nicht übersteigen. Für den Planeten (91) Aegina sind sie bereits berechnet;

Endlich von der Verbesserung der Bahnelemente und der genannten Tafelwerte aus den gefundenen Differenzen „Beobachtung—Rechnung“, worin auch die im sechsten Kapitel dieses ersten Teils erwähnte *seculare Variation* der Elemente einbegriffen ist.

7. Man wird vielleicht in dieser Arbeit Untersuchungen darüber vermissen, ob die angewandten Reihenentwicklungen und Annäherungsverfahren in streng mathematischem Sinne convergent sind. Ich bin aus begreiflichen Gründen in dieser Frage einstweilen nicht zu abschliessenden Resultaten gelangt, und habe mich mit der Thatsache begnügt, dass sie für die praktische Lösung unserer Aufgabe brauchbar sind, wie aus den wertvollen Untersuchungen des Herrn Poincaré folgt, soweit es nicht im Folgenden selbst bewiesen ist. Meine Bemühungen waren darauf gerichtet, mit einer gewissen mathematischen Strenge — zu der ich die Anregung Herrn Poincaré's wertvollem Werk¹⁾ verdanke —

1) Poincaré, *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.*

vorzugehen, indem ich wenigstens die Vorbedingungen für die Brauchbarkeit unserer Methode festgestellt, und es vermieden habe, den Ausdruck Convergenz da zu brauchen, wo seine Berechtigung nicht nachgewiesen ist.

Damit stelle ich mich auch nicht auf den Standpunkt, den nach Herrn Poincaré die Astronomen im Allgemeinen einnehmen; es wäre zweckmässig, dass man sich stets des Ausdrucks fallende (und zwar stark oder schwach fallende) und steigende Reihen bediente, wenn es sich um asymptotische oder endliche Reihen handelt. Bei uns treten nämlich (Kap. VII § 4) u. a. steigende endliche Reihen auf, und auch die asymptotischen Reihen reduciren sich in der Praxis auf endliche, die die betreffende Funktion genähert darstellen.

8. In der längeren Reihe von Jahren, während der die vorliegende Arbeit entstanden ist, habe ich Gelegenheit gehabt, Ratschläge, die mir von vielen Seiten freundlichst erteilt wurden, zu befolgen, und aus dem Verkehr mit befreundeten Astronomen Nutzen zu ziehen.

In allererster Linie schulde ich meinem unvergesslichen Lehrer Gyldén ein dankbares Andenken. Vom September 1885 bis zum Mai 1888 habe ich, mit nur 7-monatlicher Unterbrechung im Jahre 1887, in Stockholm unter seiner Leitung studirt. Ihm verdanke ich die Anregung zur vorliegenden Abhandlung, wenn ich auch in den Jahren seit 1890, in denen diese Arbeit die gegenwärtige Form erhalten hat, mehr und mehr den praktischen Zielen der Störungsrechnung gefolgt und häufig nicht unerheblich von den von Gyldén eingeschlagenen Wegen abgewichen bin.

Ich kann nicht unterlassen, zu erwähnen, dass über dieser Arbeit insofern ein trauriges Schicksal gewaltet hat, als ich während der Abfassung derselben den Tod dreier Männer zu beklagen hatte, die ihr nahe gestanden und ein lebhaftes Interesse für sie bekundet haben. Am 24. Mai 1895 starb Hans Masal im Alter von nur 28 Jahren, mit dem ich in Stockholm gemeinsam gearbeitet und oft die Pläne meiner Arbeiten besprochen habe. Am 20. Oktober 1896 starb Tisserand, dem ich nicht nur für Erteilung wertvoller Ratschläge zur grössten Dankbarkeit verpflichtet bin, sondern auch für das Interesse, dass er mir in jeder Beziehung entgegenbrachte. Endlich am 9. November 1896 starb Gyldén.

Den Herren Bohlin und Callandreau verdanke ich ebenfalls manchen Gedanken, der für die Ausführung meines Planes von Wichtigkeit geworden ist; ersterer hat inzwischen eine sehr interessante Abhandlung¹⁾ veröffentlicht, die einen ähnlichen Zweck verfolgt, in der aber andere Methoden zur Anwendung kommen, so dass eine Vergleichung der auf beiden verschiedenen Wegen gewonnenen Resultate nicht nur eine wertvolle Controlle bietet, sondern auch in mancher anderen Hinsicht zu wichtigen Schlüssen führen dürfte.

Bei der Berechnung der im Folgenden erwähnten allgemeinen Tafeln hat

1) Karl Bohlin, Formeln und Tafeln zur gruppenweisen Berechnung der allgemeinen Störungen benachbarter Planeten. Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Upsala 1895—96.

mir Herr Wellmann, zuerst auf Veranlassung von Herrn Förster und dann auf Veranlassung von Herrn Bauschinger, Hilfe geleistet; der letztere, der mir auch sonst in dieser Angelegenheit freundlich entgegenkam, hat gleich nach der Uebnahme des Direktorats des astronomischen Recheninstituts die Organisation¹⁾ der Bearbeitung der kleinen Planeten in einer Weise in die Hand genommen, die die besten Aussichten auf Erfolg bietet.

Endlich hat Herr Schur die Freundlichkeit gehabt, die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen dafür zu gewinnen, dass sie die vorliegende Arbeit in ihre Abhandlungen aufnahm, was deswegen für mich von besonderem Wert war, weil ich nach längeren vergeblichen Bemühungen, eine Gelegenheit für den Druck derselben in Deutschland zu finden, schon vollständig ratlos war.

Allen diesen Herren, sowie der genannten Gesellschaft, sage ich meinen wärmsten Dank.

Erstes Kapitel.

Die Grundprincipien der Gyldén'schen Störungstheorie. — Die allgemeine Form der Differentialgleichungen und ihrer Integrale. — Die Gyldén'schen Coordinaten ρ , η und S .

1. Ich will nun die Grundlagen besprechen, auf denen unsere Methode beruht und werde dabei Gelegenheit haben, auf die Hauptpunkte der Gyldén'schen Störungstheorie einzugehen. Seien:

x , y , z die Coordinaten des gestörten Körpers in bezug auf drei rechtwinklige Axen von unveränderlicher Richtung, deren Anfangspunkt in den Schwerpunkt der Sonne fällt,

r sein Radiusvektor,

m seine Masse in Teilen der Sonnenmasse, so dass also m eine absolute Zahl ohne Dimension ist,

x' , y' , z' , r' , m' die analogen Grössen in bezug auf den störenden Körper,

t die Zeit,

k^2 das Quadrat der Constante der Gravitation, also die Sonnenmasse, aus-

1) Bauschinger, Ueber die Bearbeitung der kleinen Planeten. Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. 31. Jahrgang (1896). IV. Heft pag. 284.

gedrückt in denselben Einheiten, die für die Entfernungen und für die Zeit angenommen werden. Nehmen wir als Einheit für die Entfernungen denjenigen Wert für die halbe grosse Axe der Erdbahn, den Gauss benutzt hat, und als Einheit für die Zeit den mittleren Sonnentag, so ist $\log k^2 = 8.2355814 - 10$.

Bezeichnen wir endlich mit $M = k^2(1+m)$ die Summe der Massen der Sonne und des gestörten Körpers, so gelten die folgenden Differentialgleichungen für die Coordinaten des gestörten Körpers:

$$1) \quad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Mx}{r^3} &= M \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{My}{r^3} &= M \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Mz}{r^3} &= M \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{aligned}$$

wo die Störungsfunktion Ω durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\Omega = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \right\}.$$

Dies sind die Gleichungen, welche wir zu lösen haben. Ihre rechten Seiten sind multiplicirt mit der störenden Masse m' , ohne dass jedoch von vornherein angenommen werden könnte, dass sie auch stets mit dieser Masse an Grösse vergleichbar bleiben. Wenn es sich indessen, wie in vorliegender Arbeit, um die Berechnung der Störungen handelt, welche die kleinen Planeten durch die grossen erleiden, so können wir aus den Beobachtungen, wie aus analytischen Untersuchungen, schliessen, dass — wenigstens während eines beschränkten und zwar beträchtlich langen Zeitraumes — die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

I. Die Radienvektoren der störenden und des gestörten Planeten oscilliren um gewisse Mittelwerte, von denen sie höchstens um Grössen abweichen, die mit den Excentricitäten der gegenwärtigen osculirenden Ellipsen verglichen werden können.

II. Dieselbe Bedingung für die Geschwindigkeiten der Planeten.

III. Die Differenzen zwischen den Radienvektoren der störenden und des gestörten Planeten und daher auch ihre gegenseitigen Entfernungen bleiben stets an Grösse vergleichbar mit den Radienvektoren selbst; es finden also keine bedeutenden Annäherungen zwischen den einzelnen Körpern des Systems statt.

IV. Die momentanen Bahnebenen der störenden und des gestörten Körpers, d. h. die Ebenen, die durch den Radiusvektor und die augenblickliche Bewegungsrichtung (die Tangente an die Bahn) bestimmt sind, bilden unter sich Win-

1) Ich bediene mich bei Darstellung partieller Differentialquotienten stets dieser Schreibweise, da in der That das im Nenner stehende Differential ein totales ist, und man auf diese Weise sich leichter gegen Fehler schützen kann.

kel, welche stets mit den gegenseitigen Neigungen der gegenwärtigen osculirenden Ellipsen vergleichbar bleiben. Hierdurch schliessen wir auch den Fall einer rückläufigen Bewegung aus.

2. So lange diese Voraussetzungen erfüllt sind, sind die rechten Seiten der Gleichungen 1) nicht nur klein von der Ordnung der störenden Masse, sondern sie können auch in Reihen entwickelt werden, die nach Potenzen von Grössen fortschreiten, welche von der Ordnung der genannten Excentricitäten und Neigungen sind. Dieses sind die Gesichtspunkte, welche den Weg angezeigt haben für die praktische Lösung des Dreikörperproblems nach den älteren Methoden. Man hat in der ersten Annäherung die rechten Seiten der Gleichungen 1) vernachlässigt, woraus sich die elliptische Bewegung ergab, und hat die Glieder, welche man bei späterer Berücksichtigung dieser rechten Seiten erhält, „Störungen“ genannt. Die successiven Annäherungen, welche man auf diese Weise erhielt, schreiten nach den Potenzen der störenden Masse m' fort; aber nicht eigentlich nach den reinen Potenzen dieser Masse, sondern in Wahrheit nach solchen der Störungen selbst. Da nun aber diese Störungen in vielen Fällen beträchtlich grösser sind als die störende Masse, so wird dieses Verfahren häufig unbrauchbar. Es werden nämlich die Störungen durch Reihen dargestellt, deren Glieder in die folgenden drei Gruppen zerfallen:

I. Die secularen Glieder; dieselben sind Grössen von der Ordnung der störenden Masse multiplicirt mit der Zeit t , oder Potenzen solcher Grössen. Wenn es auch wahrscheinlich ist, dass bei richtiger Anordnung der Annäherungen die Reihen, welche diese Glieder bilden, convergent bleiben, so kann doch nur für beschränkte Werte von t ihre Convergenz hinreichend stark sein, um sie praktisch verwertbar zu machen. Sichere Schlüsse über den Verlauf der Planetenbewegungen während eines unbeschränkten Zeitraumes werden sich mit ihrer Hilfe schwerlich ziehen lassen.

II. Die sogenannten langperiodischen Ungleichheiten; dieselben treten auf, wenn das Verhältniss der mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Körpers sich einem commensurablen Verhältniss nähert, in welchem Falle die betreffenden Glieder durch den Integrationsprocess sehr kleine Divisoren erhalten und beträchtlich gross werden. Wenn auch diese Glieder eine gewisse obere Grenze nicht überschreiten, so tritt doch der Fall ein, dass die Reihen, welche sich aus ihnen zusammensetzen, überhaupt erst bei einem späteren Gliede anfangen zu fallen. Infolge dessen führen die ersten Annäherungen zu illusorischen Resultaten und bei nicht streng richtiger Anordnung der Entwicklungen wird man divergente Reihen erhalten.

III. Die gewöhnlichen Glieder, d. h. die periodischen Glieder, deren absolute Werte mit der störenden Masse numerisch vergleichbar sind; durch ihr Auftreten wird die Brauchbarkeit des Näherungsverfahrens nicht in Frage gestellt, so dass sie keine Schwierigkeiten bieten.

3. Die Unzuträglichkeiten, welche aus den Entwicklungen nach den Gliedern

der beiden ersten Klassen entstehen, haben Gylden veranlasst, neue Methoden aufzusuchen. Schon Lagrange und Laplace war es geglückt, die secularen Glieder in periodischer Form darzustellen, allerdings mit Vernachlässigung der Glieder vierten Grades in bezug auf die Excentricitäten und Neigungen; sie erhielten Glieder von ausserordentlich langen Perioden, die indessen nicht mehr die störende Masse als Faktor enthalten, sondern von der Ordnung der Excentricitäten und Neigungen selbst sind. Um die secularen Glieder in dieser periodischen Form darzustellen, hatte Lagrange die Gleichungen 1) integrirt, indem er bereits in der ersten Annäherung denjenigen Teil der rechten Seiten berücksichtigte, welcher secularer Natur ist. Hiermit hatte er bereits die Kepler'sche Ellipse als Grundlage für die Annäherungen verlassen, und sich der wahren Form der Planetenbahnen genähert. Gylden hat sich vorgenommen, das Auftreten secularer Glieder in den Integralen der Gleichungen 1) vollständig zu vermeiden, und zu diesem Zweck führt er Glieder ein, die den von Lagrange gefundenen analog sind, und die er elementare Glieder nennt. Die absolute Bahn Gylden's ist eine Bahn, die man erhält, indem man die Gleichungen 1) mit Berücksichtigung aller dieser elementaren (also im Integrale die störende Masse nicht als Faktor enthaltenden) Glieder integrirt. Diese Bahn weicht von der wahren Bahn nur um Grössen ab, welche mit der störenden Masse multiplicirt sind, und sie ist vielleicht bei Untersuchungen über die Bewegungen der Planeten während eines erheblich langen (oder unbeschränkten) Zeitraumes, also auch über die Stabilität des Systems, von grösster Bedeutung.

Die Differenz zwischen der wahren und der absoluten Bahn, nach der obigen Definition, die Gylden für die letztere giebt¹⁾, bleibt also stets unterhalb einer gewissen Grenze; indessen erreicht sie in vielen Fällen recht erhebliche Beträge, und die Berechnung der absoluten Bahn an und für sich ist für die praktische Rechnung in keiner Weise ausreichend, um den Ort eines Planeten so genau zu geben, dass seine Wiederauffindung mit dem Fernrohr ohne grosse Mühe möglich wäre.

Bei Darstellung der Planetenbewegungen für einen Zeitraum von wenigen Jahren oder Jahrzehnten gewinnt man durch Anwendung der absoluten Bahn keinen wesentlichen Vorteil gegenüber der Kepler'schen Ellipse; denn diejenigen Störungsglieder, welche während eines kurzen Zeitraums am merklichsten sind, sind in derselben nicht einbegriffen. Die Bedeutung der absoluten Bahn liegt also auf dem Gebiete der theoretischen Untersuchungen über den Verlauf der Planetenbewegungen während eines sehr langen Zeitraumes und über die Stabilität unseres Planetensystemes, nicht aber auf dem Gebiete der praktischen Störungsrechnung.

Man kann vielmehr bei diesen Rechnungen von der Herstellung des Ausdrucks für die absolute Bahn vollständig absehen und statt der elementaren

1) Gylden, *Traité analytique des Orbites absolues des 8 Planètes principales*. Tome I pag. 48 und 33 ff.

Glieder die secularen Glieder der älteren Methoden anwenden. Zu dieser Frage verweise ich auf die Bemerkungen zu Anfang des sechsten und auf das achte Kapitel.

Wenn nun auch die eigentliche absolute Bahn für die praktische Störungsrechnung keine wesentlichen Vorteile mit sich bringt, so ist doch das sonst von Gyldén eingeführte Verfahren zur Berechnung der Störungen dazu angethan, diese Rechnungen in ganz hervorragendem Maasse einfach und übersichtlich zu gestalten. Sehr verbreitet ist die irrige Meinung, dass die von Gyldén angewandten teilweise recht complicirten Transformationen und Integrationsverfahren in jedem Falle von Störungsrechnung in der Praxis angewandt werden müssten; in Wahrheit sind aber die Grundzüge der Gyldén'schen Störungstheorie ausserordentlich einfach und die complicirteren Entwicklungen treten nur da auf, wo es sich um Untersuchungen über die Stabilität des Systems und über besonders schwierige Fälle handelt, in welchen die älteren Methoden versagen.

Gyldén ist davon ausgegangen, dass die in den älteren Theorien auftretenden Störungen von derselben Grösse sein können, wie die Abweichung der als Ausgangspunkt für die Annäherungen genommenen Kepler'schen Ellipse von einer Kreisbahn; er wollte daher den Untersuchungen bereits in der ersten Annäherung eine Bahn zu Grunde legen, welche der wahren so nahe kommt, dass die Abweichungen dieser Bahn von der wahren wirklich als kleine Grössen aufzufassen sind, und in dieser Absicht entwickelt er den Begriff der absoluten Bahn.

4. Auch wir wollen versuchen, schon in der ersten Annäherung der wahren Bewegung möglichst nahe zu kommen, und zwar näher als die absolute Bahn, indem wir uns allerdings damit begnügen, diese Bewegung während eines beschränkten Zeitraums darzustellen; wir stellen uns die folgende Aufgabe:

Da es gegenwärtig unmöglich ist, die Differentialgleichungen 1) von vornherein mit voller Berücksichtigung der rechten Seiten zu integriren, so soll wenigstens bereits in der ersten Annäherung diesen rechten Seiten insoweit Rechnung getragen werden, dass die endgiltige Form der Lösungen sich von vornherein ergibt. Die Form der Reihen, durch welche die Coordinaten dargestellt werden, soll also bereits in der ersten Annäherung hergestellt sein; durch die weiteren Annäherungen sollen die Coefficienten der Glieder dieser Reihen genauer bestimmt und nur solche neuen Glieder hinzugefügt werden, die denen der ersten Annäherung analog sind, d. h. keine von jenen wesentlich verschiedene Perioden haben. Diese Bedingung ist in den älteren Methoden nicht erfüllt, da namentlich in der ersten Annäherung denjenigen Gliedern nicht Rechnung getragen ist, deren Perioden von der Umlaufszeit des störenden Körpers abhängen.

Um sich der wahren Form der Planetenbewegungen möglichst zu nähern, führt Gyldén mehrere Hilfsgrössen ein, von denen ich die Wichtigeren beibehalten habe. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass der gestörte Planet sich in einer festen Ebene bewege, und nennen wir r den Radiusvektor und v

die Länge des Planeten in dieser Ebene, gerechnet von irgend einer festen Richtung an, so können wir offenbar die Gleichung der vom Planeten beschriebenen Curve unter der Form

$$2) \quad r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho}$$

schreiben; in dieser Gleichung bedeutet die Constante a einen gewissen Mittelwert des Radiusvektor; η und ϱ sind Funktionen der Länge v und sollen durch trigonometrische Reihen dargestellt werden. Ueber η wollen wir später verfügen und zwar so, dass es an Grösse mit der elliptischen Excentricität verglichen werden kann und ausserdem sich nur sehr langsam mit v (oder mit der Zeit) ändert. Die Funktion ϱ bestimmen wir durch Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, die wir später aus den Gleichungen 1) ableiten werden. Die Gleichung 2) steht also in gewisser Analogie mit der Gleichung der Ellipse

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\pi)}$$

Solange die obengenannte Bedingung I (pag. 12) besteht, wird offenbar ϱ stets an Grösse mit der elliptischen Excentricität verglichen werden können, wenn a passend gewählt wird. In seiner Theorie der absoluten Bahnen nennt Gyldén a den Protometer; ich will diese Grösse im Folgenden **Halbaxe der Bahn** nennen, da sie bei uns nicht immer ein absolutes Element im Gyldén'schen Sinne ist.

Wir wollen nun die Relation zwischen der Länge v und der Zeit t betrachten; in der elliptischen Bewegung gilt das Princip von der Erhaltung der Flächen

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{Ma(1-e^2)}.$$

In der gestörten Bewegung ist dasselbe für den gestörten Planeten nicht mehr erfüllt; solange aber die Bedingung II (pag. 12) besteht, wird auch die Flächengeschwindigkeit um einen gewissen Mittelwert oscilliren, so dass wir in Analogie mit der vorigen die folgende Gleichung ansetzen können:

$$3) \quad r^2 \frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{Ma(1-\eta^2)}}{1+S},$$

wo also die Funktion S eine kleine Grösse ist. Es wird sich später zeigen, dass S nur solche Glieder enthält, die mit der störenden Masse multiplicirt sind, also keine elementaren Glieder. Man bewirkt dies durch die Gyldén'sche Definition der Funktion η , welche wir noch in diesem Kapitel geben wollen. Die Funktion S bestimmt sich aus einer Differentialgleichung der ersten Ordnung, und zur Herstellung der Relation zwischen v und t muss zuletzt noch die Gleichung 3) integrirt werden.

5. Die Gleichungen zur Bestimmung der Funktionen ϱ , S , η u. a., welche ich Gyldén'sche Coordinaten nennen will, werden im zweiten Kapitel abgeleitet; wir wollen aber jetzt gleich einige Betrachtungen über die Form dieser Gleichungen und ihrer Integrale machen und wollen auch dabei über die Funktion η verfügen. Diese Differentialgleichungen sind nämlich von folgenden beiden Typen:

$$4) \quad \frac{dS}{dv} = \sum a_n \sin(\lambda_n v - B_n)$$

$$5) \quad \frac{d^2 \varrho}{dv^2} + (1 - \beta) \varrho = \sum b_n \cos(\lambda_n v - B_n).$$

Wir nehmen an, dass die Grössen a_n , b_n , λ_n , B_n und β Constante seien und dass die Grössen a_n , b_n und β die störende Masse als Faktor enthalten und mit ihr an Grösse vergleichbar sind. In Wahrheit trifft dies nicht immer zu, doch werden unsere vorläufigen Betrachtungen durch diese Annahme nicht beeinträchtigt.

Die Integration der Gleichung 4) giebt uns:

$$6) \quad S = a_0 - \sum \frac{a_n}{\lambda_n} \cos(\lambda_n v - B_n),$$

wo a_0 die Integrationsconstante ist. Die Grösse der verschiedenen Glieder, aus denen sich die Funktion S zusammensetzt, hängt also im Wesentlichen von den Divisoren λ_n , also von der Periode der Glieder ab; man kann drei Klassen dieser Divisoren, von denen übrigens keiner gleich Null ist, unterscheiden, entsprechend den drei Klassen von Gliedern, die wir bei Besprechung der älteren Methoden pag. 13 erwähnt haben:

I. Die Divisoren λ_n , welche klein von der Ordnung der störenden Masse sind; die von ihnen abhängigen Glieder werden durch die Integration um eine Ordnung der störenden Masse herabgedrückt und demnach sehr beträchtlich vergrössert. Sind sie in der Differentialgleichung 4) mit der ersten Potenz der störenden Masse multiplicirt, so werden sie im Integral 6) diese Masse nicht mehr als Faktor enthalten, also nach Gyldén's Bezeichnung elementar werden. Da die Coefficienten λ_n in diesem Falle sehr klein sind, so werden sich die entsprechenden Glieder äusserst langsam mit der Zeit ändern; wir nennen sie darum **langperiodisch elementare** Glieder.

II. Die Divisoren λ_n können auch klein sein, ohne die störende Masse als Faktor zu enthalten, wenn nämlich das Verhältniss der mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Planeten nahe commensurabel ist. Die entsprechenden Glieder in dem Integral 6) werden zwar erster Ordnung in bezug auf die störende Masse bleiben, indessen können sie ihrem numerischen Betrage nach weit grösser werden. Ich werde später zeigen, dass sie im Maximum (wenigstens in speciellen Fällen) von der Ordnung der dritten Wurzel aus der störenden Masse werden. Gyldén nennt sie charakteristische Glieder, und da

auch für sie der Faktor λ_n klein ist, so können wir sie **langperiodisch charakteristische** Glieder nennen. Gylden hat darauf aufmerksam gemacht, dass man sie nicht an Grösse mit der störenden Masse vergleichen darf, und also ihre höheren Potenzen in vielen Fällen schon bei der ersten Annäherung berücksichtigen muss. Wir besitzen gegenwärtig mehrere Methoden zu ihrer Berechnung, welche ausser von Gylden selbst auch von den Herren Harzer, Backlund u. a. angewandt worden sind. Ich werde dasselbe äusserst einfache Verfahren anwenden, dessen Grundzüge sich bereits in meiner vor 8 Jahren erschienenen schwedischen Arbeit finden, wenn dasselbe auch etwas modificirt werden muss, um allgemein angewandt werden zu können.

III. Die Glieder, deren Divisoren λ_n nicht klein sind, wollen wir **gewöhnliche** Glieder nennen; sie sind im Integral nicht wesentlich grösser als in der Differentialgleichung.

Dieses sind die drei Klassen von Gliedern, welche genau den drei oben erwähnten Klassen der älteren Theorien entsprechen.

Wir wollen die λ_n der ersten Klasse mit σ_n bezeichnen, wo also die σ_n von der Ordnung der störenden Masse sind. Die Divisoren der zweiten Klasse bezeichnen wir mit δ_n , wo die δ_n auch klein, jedoch erheblich grösser als die störende Masse sind.

Um unser Verfahren übersichtlicher zu gestalten, wollen wir die Glieder der drei Klassen trennen und die Gleichung 4) schreiben, wie folgt:

$$4a) \quad \frac{dS}{dv} = \sum a_n \sin(\sigma_n v - A_n) + \sum a'_n \sin(\delta_n v - C_n) + \sum a''_n \sin(\lambda_n v - B_n),$$

wo die λ_n also nicht mehr kleine Grössen vorstellen. Das Integral wird:

$$6a) \quad S = a_0 - \sum \frac{a_n}{\sigma_n} \cos(\sigma_n v - A_n) - \sum \frac{a'_n}{\delta_n} \cos(\delta_n v - C_n) - \sum \frac{a''_n}{\lambda_n} \cos(\lambda_n v - B_n).$$

Wir wollen nun in gleicher Weise die Gleichung 5) betrachten. Wenn wir sie integrieren, so erhalten wir:

$$7) \quad \varrho = x \cos[\sqrt{1-\beta}v - \Gamma] + \sum \frac{b_n}{1-\beta-\lambda_n^2} \cos(\lambda_n v - B_n),$$

wo x und Γ die beiden Integrationsconstanten sind. Wir bemerken von vornherein, dass, wie sich unten zeigen wird, keiner der Coefficienten λ_n gleich $\sqrt{1-\beta}$ ist, was zur Folge hätte, dass das entsprechende Glied den Divisor Null erhielte; indessen befinden sich unter den λ_n :

I. Solche, welche sich von der Einheit nur um eine Grösse von der Ordnung der störenden Masse unterscheiden; wir setzen sie unter die Form:

$$\lambda_n = 1 - \sigma_n,$$

wo die σ_n , wie oben, Grössen von der Ordnung der störenden Masse sind. Die

entsprechenden Glieder in ϱ erhalten dann einen Divisor von eben dieser Ordnung und werden elementar sein, aber nicht von langer Periode (wenigstens nicht in der Form, in der sie hier auftreten); ihre Periode wird sich vielmehr um äusserst wenig von der Umlaufszeit des Planeten unterscheiden; wir nennen sie **kurzperiodisch elementare** Glieder.

Ferner befinden sich unter den λ_n :

II. Solche, welche sich von der Einheit um kleine Grössen von der Ordnung der oben erwähnten δ_n unterscheiden: wir geben ihnen die Form:

$$\lambda_n = 1 - \delta_n,$$

und nennen die so definirten Glieder **kurzperiodisch charakteristische**, da ihre Divisoren ebenfalls von der Ordnung der δ_n sind, und auch sie durch die Integration stark vergrössert werden.

III. Diejenigen der Coefficienten λ_n , welche beträchtlich von der Einheit abweichen, verursachen keine kleinen Divisoren; die von ihnen abhängigen Glieder werden durch die Integration nicht wesentlich vergrössert und wir nennen sie **gewöhnliche Glieder**.

Die eben genannten drei Klassen von Gliedern entsprechen ebenfalls den in der Funktion S , sowie den in der älteren Störungstheorie auftretenden Klassen.

Wir zerlegen die in ϱ vorkommenden Glieder wieder, indem wir schreiben:

$$5a) \frac{d^2\varrho}{dv^2} + (1-\beta)\varrho = \sum b_n \cos[(1-\sigma_n)v - \Gamma_n] + \sum b'_n \cos[(1-\delta_n)v - D_n] + \sum b''_n \cos(\lambda_n v - B_n),$$

wo die Γ_n und die D_n Constante sind, und wo nunmehr unter den λ_n nur diejenigen begriffen sind, welche zu gewöhnlichen Gliedern gehören. Man hat dann

$$7a) \varrho = \alpha \cos[(1-\varsigma)v - \Gamma] + \sum \alpha_n \cos[(1-\sigma_n)v - \Gamma_n] + \sum \beta_n \cos[(1-\delta_n)v - D_n] + \sum \bar{b}_n \cos(\lambda_n v - B_n),$$

wo bezeichnet ist:

$$1 - \varsigma = \sqrt{1 - \beta}$$

$$\alpha_n = \frac{b_n}{2\sigma_n - \sigma_n^2 - \beta} = \frac{b_n}{2(\sigma_n - \varsigma) - (\sigma_n^2 - \varsigma^2)}$$

$$\beta_n = \frac{b'_n}{2\delta_n - \delta_n^2 - \beta} = \frac{b'_n}{2(\delta_n - \varsigma) - (\delta_n^2 - \varsigma^2)}$$

$$\bar{b}_n = \frac{b''_n}{1 - \lambda_n^2 - \beta}.$$

6. Wir können nun die Funktion η bestimmen. Zu diesem Zweck bezeichnen wir nach Gylden mit (ϱ) den Teil der Funktion ϱ , welcher elementarer Form ist; wir setzen also

$$8) \quad (\varrho) = \varkappa \cos [(1-\varrho)v - \Gamma] + \sum \varkappa_n \cos [(1-\sigma_n)v - \Gamma_n].$$

Zur Abkürzung bezeichne ich:

$$9) \quad \begin{aligned} \omega &= \Gamma + \varrho v \\ \omega_n &= \Gamma_n + \sigma_n v \end{aligned}$$

so dass:

$$8a) \quad (\varrho) = \varkappa \cos (v - \omega) + \sum \varkappa_n \cos (v - \omega_n).$$

Wir bestimmen nun die beiden Funktionen η und Π so, dass

$$10) \quad \begin{aligned} \eta \cos \Pi &= \varkappa \cos \omega + \sum \varkappa_n \cos \omega_n \\ \eta \sin \Pi &= \varkappa \sin \omega + \sum \varkappa_n \sin \omega_n, \end{aligned}$$

und wenn wir die erste dieser Gleichungen mit $\cos v$ und die zweite mit $\sin v$ multipliciren und addiren, so kommt:

$$11) \quad (\varrho) = \eta \cos (v - \Pi).$$

Die Funktionen η und Π sind also aus langperiodisch elementaren Gliedern zusammengesetzt, und für Π können wir schreiben:

$$12) \quad \Pi = \Pi_0 + \varrho v.$$

Es gelten dann auch die folgenden Relationen:

$$10a) \quad \begin{aligned} \eta \cos \Pi_0 &= \varkappa \cos \Gamma + \sum \varkappa_n \cos (\omega_n - \varrho v) \\ \eta \sin \Pi_0 &= \varkappa \sin \Gamma + \sum \varkappa_n \sin (\omega_n - \varrho v) \end{aligned}$$

$$10b) \quad \begin{aligned} \eta \cos (\Pi_0 - \Gamma) &= \varkappa + \sum \varkappa_n \cos (\omega_n - \omega) \\ \eta \sin (\Pi_0 - \Gamma) &= \sum \varkappa_n \sin (\omega_n - \omega), \end{aligned}$$

welch letztere von Gylden angewandt werden, dessen π mit unserem Π_0 identisch ist. Ferner:

$$13) \quad \eta^2 = (\varrho)^2 + \left(\frac{D(\varrho)}{dv} \right)^2,$$

wo das Differentialzeichen D bedeutet, dass bei der Differentiation die Grössen ω und ω_n als Constanten anzusehen sind.

7. Offenbar wird, solange die pag. 12 gegebenen Bedingungen erfüllt sind, ϱ numerisch mit den elliptischen Excentricitäten verglichen werden können; es wird dies auch der Fall sein für die Funktion η und für die Coefficienten \varkappa und \varkappa_n . Allerdings ist das für die letzteren von vornherein nicht unbedingt notwendig: es könnten einige dieser Coefficienten sogar recht erhebliche Werte haben, ihre Summe aber während eines sehr langen Zeitraumes sich auf eine kleine Grösse reduciren, wenn ihre Perioden sehr nahe gleich sind; indessen folgt aus

den Ausführungen des achten Kapitels, dass während eines beschränkten Zeitraums sich alle κ_n als solche kleine Grössen darstellen lassen.

Wir nennen nun, wie schon pag. 5 bemerkt, eine jede Grösse, die die n -te Potenz von η oder ein äquivalentes Produkt der κ_n -Coefficienten enthält, eine Grösse **n -ten Grades**; dazu bemerken wir, dass (ausser κ selbst) nur soviele der κ_n -Coefficienten ersten Grades sind, wie es störende Körper giebt, dass die übrigen höheren und zwar stets ungeraden Grades sind; im Folgenden wird sich dies ergeben. Ebenso werden wir später sehen, dass die Funktion ϱ auch Glieder nullten Grades enthält, welche ihrem numerischen Betrage nach nicht grösser werden können als die elliptischen Excentricitäten; es ist aber in Folge dessen z. B. nur die Grösse $(\varrho)^n$, und nicht auch ϱ^n , vom n -ten Grade.

Unter den Coefficienten b_n der Gleichung 5) werden natürlich auch solche sich befinden, welche mit dem Quadrat oder einer höheren Potenz der störenden Masse multiplicirt sind; dieselben werden durch den Integrationsprocess nicht eigentlich elementar (nullter Ordnung in bezug auf die störende Masse), sondern sie werden nur um eine Grössenordnung erniedrigt. Gylden nennt sie subelementare Glieder; sie haben durchaus dieselbe Form wie die elementaren, und da es überhaupt nicht immer thunlich ist, sie von den letzteren zu trennen, so denken wir sie uns stets mit einbegriffen, wenn wir von Gliedern elementarer Form sprechen.

Ich will nun noch eine Bezeichnung einführen, die ich bereits in meinen früheren Arbeiten benutzt habe. Es soll nämlich nach dem gewöhnlichen Gebrauch ein Glied, das die n -te Potenz der störenden Masse als Factor enthält, kurz ein Glied **n -ter Ordnung** genannt werden. Da aber diese Bezeichnung häufig keine richtige Vorstellung von der numerischen Grösse des betreffenden Gliedes giebt, da dasselbe kleine Divisoren von der Ordnung der δ_n enthalten kann, so nenne ich ein Glied, das die n -te Potenz der störenden Masse enthält und auch seinem absoluten Betrage nach mit derselben verglichen werden kann, ein Glied **rein n -ter Ordnung**. Es werden demnach z. B. in der Gleichung 7a) die gewöhnlichen Glieder (also die Coefficienten \bar{b}_n) rein erster Ordnung, die charakteristischen (also die Coefficienten β_n) aber nicht rein erster Ordnung sein; ein Produkt aus einem b_n - und einem β_n -Coefficienten wird zwar zweiter Ordnung, aber nur rein erster Ordnung sein. Ich befolge stets das Princip, die Glieder rein erster Ordnung durch lateinische Buchstaben, diejenigen, welche kleine Divisoren von der Ordnung der δ_n enthalten, dagegen mit griechischen Buchstaben zu bezeichnen, so dass man sich leicht eine Vorstellung vom Betrage eines jeden Gliedes machen kann.

Wir erinnern zum Schluss daran, dass wir also vor allem vier Arten von Gliedern zu betrachten haben, deren Argumente die folgenden sind:

$$\begin{array}{ll}
 \text{A) } \sigma_n v - A_n, & \text{C) } \delta_n v - C_n \\
 \text{B) } (1 - \sigma_n) v - \Gamma_n, & \text{D) } (1 - \delta_n) v - D_n,
 \end{array}$$

14)

wie sie schon Herr Harzer¹⁾ bezeichnet hat, und wir wollen sie im Folgenden kurz Glieder der Form A, B, C oder D nennen. Die Glieder der Formen A und B sind die elementaren (und subelementaren), die der Formen C und D die charakteristischen. Andererseits sind die Glieder A und C langperiodisch, die Glieder B und D kurzperiodisch. Weiter unten wird sich zeigen, dass die Glieder A stets von einem geraden, mindestens vom zweiten Grade, dagegen die Glieder B stets von einem ungeraden Grade sind.

Alle Glieder, welche keiner der Formen 14) angehören, nenne ich „gewöhnliche“ Glieder.

Zweites Kapitel.

Ableitung der Differentialgleichungen für die Gyl-dén'schen Coordinaten. — Formeln für die Bewegung des Planeten in seiner momentanen Bahnebene.

1. Kehren wir zurück zu den Gleichungen 1) für die Coordinaten des gestörten Körpers:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Mx}{r^3} &= M \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\
 \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{My}{r^3} &= M \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\
 \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Mz}{r^3} &= M \frac{\partial \Omega}{\partial z},
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

wo man für die Störungsfunktion Ω hat, ausgedrückt in rechtwinkligen Coordinaten:

$$\Omega = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right\}, \quad \Delta = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},
 \tag{16}$$

und ausgedrückt in Polarcoordinaten, wenn man mit H den Winkel zwischen den Radienvektoren des gestörten und des störenden Körpers bezeichnet:

$$\Omega = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2} \cos H \right\}, \quad \Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H}.
 \tag{17}$$

1) Harzer, Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper. Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg, VII. Serie. Tome XXXIV No. 12.

Wir wollen die Coordinaten xyz auf irgend eine als fest angenommene Lage der Ekliptik beziehen; im allgemeinen wird man hierfür die mittlere Ekliptik irgend eines bestimmten Jahresanfangs, wie 1850.0, 1900.0 u. s. w. wählen.

Zunächst haben wir nun die Gleichungen 15) in derselben Weise zu transformiren, wie dies schon Hansen gethan hat, indem wir die Bewegung des Planeten in seiner momentanen Bahnebene — welche durch den Radiusvektor und die augenblickliche Bewegungsrichtung, also die Tangente an die Bahn bestimmt ist — trennen von der Bewegung dieser beweglichen Bahnebene gegen die feste Ekliptikalebene der xy . Wir führen zu diesem Zweck ein zweites rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen Axen von veränderlicher Richtung sind, aber denselben Anfangspunkt haben wie das System der xyz ; wir nennen die Coordinaten in bezug auf dieses Systems $x_1 y_1 z_1$.

Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Cosinus der Winkel bedeuten, welche die positiven Axen der x und x_1 , der x und y_1 , der x und z_1 , u. s. w. mit einander bilden, so bestehen die drei Relationen:

$$\begin{aligned} 18) \quad x &= \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1, \\ y &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1, \\ z &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1, \end{aligned}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} 19) \quad x_1 &= \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z, \\ y_1 &= \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z, \\ z_1 &= \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z. \end{aligned}$$

Zwischen den neun Cosinus α, β, γ u. s. w., welche übrigens variable Grössen sind, gelten die sechs folgenden Bedingungen, welche ausdrücken, dass die beiden Coordinatensysteme rechtwinklig sind:

$$\begin{aligned} 20) \quad \alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 &= 1, & \alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 &= 0, \\ \beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 &= 1, & \alpha\gamma + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 &= 0, \\ \gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 &= 1, & \beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 &= 0, \end{aligned}$$

und umgekehrt:

$$\begin{aligned} 21) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, & \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 &= 0, \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1, & \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2 &= 0, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1, & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Relationen lassen sich die folgenden ableiten:

$$\begin{aligned} 22) \quad \alpha &= \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, & \beta &= \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2, & \gamma &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \\ \alpha_1 &= \beta_2\gamma - \beta\gamma_2, & \beta_1 &= \alpha\gamma_2 - \alpha_2\gamma, & \gamma_1 &= \alpha_2\beta - \alpha\beta_2, \\ \alpha_2 &= \beta\gamma_1 - \beta_1\gamma, & \beta_2 &= \alpha_1\gamma - \alpha\gamma_1, & \gamma_2 &= \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 20) bis 22) enthalten nur 6 unabhängige Bedingungen; es bleiben also zur Bestimmung der neun Cosinus, d. h. der Lage des Coordinatensystems der x_1, y_1, z_1 noch drei Relationen zu wählen. Wenn wir, wie Hansen, als x_1, y_1 -Ebene die momentane Bahnebene des Planeten nehmen, so muss der Radiusvektor des Planeten in dieser Ebene liegen, also

$$23) \quad z_1 = 0$$

sein, oder:

$$a) \quad \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z = 0.$$

Dies ist die Gleichung aller Ebenen, welche den Radiusvektor zur Zeit t enthalten; für diejenige unter ihnen, welche auch die Tangente an die Bahn enthält, muss die Gleichung a) auch noch bestehen, wenn man x, y, z durch $x + dx, y + dy, z + dz$ ersetzt. Es muss also auch

$$b) \quad \gamma dx + \gamma_1 dy + \gamma_2 dz = 0$$

sein, aus welcher Gleichung mit Hilfe von a) sich die folgende ergibt:

$$24) \quad x d\gamma + y d\gamma_1 + z d\gamma_2 = 0.$$

Durch die Bedingungen a) und b) haben wir die x_1, y_1 -Ebene in die momentane Bahnebene des Planeten gelegt; es bleibt nun noch die Aufstellung einer dritten Relation übrig, welche die Lage der x_1 -Axe in dieser Ebene definirt. Wir bestimmen dieselbe durch die Relation

$$c_1) \quad \beta d\alpha + \beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2 = 0,$$

oder, wie mit Hilfe von 20) hieraus folgt,

$$c_2) \quad \alpha d\beta + \alpha_1 d\beta_1 + \alpha_2 d\beta_2 = 0,$$

womit die Lage der x_1 -Axe durch eine Differentialgleichung bestimmt ist; es wird uns also später (Kap. III Nr. 4) noch übrig bleiben, die Integrationsconstante zu wählen, welche die Lage dieser Axe für einen bestimmten Zeitpunkt giebt.

2. Wir multipliciren nunmehr die drei Gleichungen 18) der Reihe nach einmal mit $d\alpha, d\alpha_1, d\alpha_2$ und ein andermal mit $d\beta, d\beta_1, d\beta_2$ und addiren; dann wird mit Hilfe der Relationen 20), 23) und c):

$$25) \quad \begin{aligned} x d\alpha + y d\alpha_1 + z d\alpha_2 &= 0, \\ x d\beta + y d\beta_1 + z d\beta_2 &= 0, \end{aligned}$$

welche Gleichungen mit 24) zusammengestellt werden können. Wenn wir nun die Gleichungen 19) differenziren, und auf 24) und 25) Rücksicht nehmen, so kommt:

$$\begin{aligned}
 26) \quad dx_1 &= \alpha dx + \alpha_1 dy + \alpha_2 dz \\
 dy_1 &= \beta dx + \beta_1 dy + \beta_2 dz \\
 0 &= \gamma dx + \gamma_1 dy + \gamma_2 dz,
 \end{aligned}$$

deren letzte identisch mit b) ist. Man kann also die Gleichungen 19) differenziren; indem man die Cosinus α, β, γ u. s. w. als constant ansieht, was auch daraus folgt, dass die Ebene der $x_1 y_1$ mit der Ebene der osculirenden Ellipse zusammenfällt.

Wir multipliciren nun wieder die drei letzten Gleichungen der Reihe nach einmal mit α, β, γ , ein andermal mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und ein drittes Mal mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, und addiren, so wird mit Rücksicht auf 21):

$$\begin{aligned}
 dx &= \alpha dx_1 + \beta dy_1 \\
 dy &= \alpha_1 dx_1 + \beta_1 dy_1 \\
 dz &= \alpha_2 dx_1 + \beta_2 dy_1,
 \end{aligned}$$

und wenn wir endlich diese Gleichungen wieder der Reihe nach einmal mit $d\alpha, d\alpha_1, d\alpha_2$ und ein andermal mit $d\beta, d\beta_1, d\beta_2$ multipliciren und wieder addiren, so wird nach den Gleichungen 20) und c):

$$\begin{aligned}
 d\alpha dx + d\alpha_1 dy + d\alpha_2 dz &= 0 \\
 d\beta dx + d\beta_1 dy + d\beta_2 dz &= 0.
 \end{aligned}$$

Nun differenziren wir die Gleichungen 26) ein zweites Mal und erhalten mit Hilfe der vorigen:

$$\begin{aligned}
 27) \quad d^2 x_1 &= \alpha d^2 x + \alpha_1 d^2 y + \alpha_2 d^2 z \\
 d^2 y_1 &= \beta d^2 x + \beta_1 d^2 y + \beta_2 d^2 z.
 \end{aligned}$$

Man kann also die Gleichungen 19) zweimal differenziren, indem man die Cosinus α, β, γ u. s. w. als constant ansieht; dies haben wir durch unsere Definition der Lage der x_1 -Axe (Gleichung c)) erreicht, welche schon Hansen angewandt hat.

3. Wir können jetzt die Gleichungen 15) in derselben Weise transformiren wie Hansen, indem wir sie der Reihe nach einmal mit $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ und ein andermal mit β, β_1, β_2 multipliciren und addiren. Wir erhalten dann mit Berücksichtigung von 27) und 19)

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{Mx_1}{r^3} &= M \left[\alpha \frac{\partial \Omega}{dx} + \alpha_1 \frac{\partial \Omega}{dy} + \alpha_2 \frac{\partial \Omega}{dz} \right] \\
 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{My_1}{r^3} &= M \left[\beta \frac{\partial \Omega}{dx} + \beta_1 \frac{\partial \Omega}{dy} + \beta_2 \frac{\partial \Omega}{dz} \right].
 \end{aligned}$$

Da aber nach 18):

$$\alpha = \frac{\partial x}{\partial x_1}, \quad \alpha_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial z}{\partial x_1}$$

$$\beta = \frac{\partial x}{\partial y_1}, \quad \beta_1 = \frac{\partial y}{\partial y_1}, \quad \beta_2 = \frac{\partial z}{\partial y_1},$$

so erhalten wir die Differentialgleichungen für die Bewegung des gestörten Planeten in seiner momentanen Bahnebene in folgender Gestalt:

$$28) \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{M x_1}{r^3} = M \frac{\partial \Omega}{\partial x_1}$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{M y_1}{r^3} = M \frac{\partial \Omega}{\partial y_1},$$

also ganz analog den Gleichungen 15).

4. In die Gleichungen 28) führen wir nun Polarcoordinaten ein durch die Relationen:

$$29) \quad x_1 = r \cos v, \quad y_1 = r \sin v,$$

wo v der Winkel zwischen der positiven x_1 -Axe und dem Radiusvektor (also die wahre Länge des Planeten in seiner momentanen Bahnebene) ist, dieselbe Grösse, welche in den Gleichungen 4) und 5) der Einleitung figurirt. Da die Ebene der $x_1 y_1$ nicht fest im Raume ist, also die vom Planeten beschriebene Curve keine geschlossene ist, so darf man v nicht überall in Perioden von 360° zählen, sondern im Allgemeinen von $-\infty$ bis $+\infty$. Man wird so disponiren, dass v ungefähr in der Mitte des Zeitraums, auf den man die Rechnungen ausdehnt, gleich Null ist.

Aus den Gleichungen 28) leitet man leicht die folgenden ab:

$$30) \quad x_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = M \left[x_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \right].$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist Nichts anderes als der Differentialquotient des vom Radiusvektor während des Zeitelements dt beschriebenen Flächenelements nach der Zeit, also gleich:

$$\frac{d}{dt} \left[x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{dv}{dt} \right),$$

und da nach 29)

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = -y_1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial v} = x_1,$$

so wird die rechte Seite der Gleichung 30) gleich:

$$M \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial v} \right] = M \frac{\partial \Omega}{\partial v}.$$

Der partielle Differentialquotient $\frac{\partial \Omega}{\partial v}$ ist folgendermassen zu verstehen:

Durch die Gleichung 16) ist Ω gegeben als Funktion der drei Variablen x, y, z , wenn wir von den Coordinaten des störenden Körpers absehen, die bei der Differentiation von Ω als Constanten fungiren. In den Gleichungen 28) muss man sich im Ausdruck für Ω die Variablen x, y, z mit Hilfe von 18) ersetzt denken durch x_1, y_1 und die Cosinus α, β, γ u. s. w., welche zusammen die dritte Variable (z_1 ist gleich Null) vorstellen. Hiernach sind die Differentialquotienten $\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}$ unzweideutig defnirt. Führen wir nun nach 29) Polarcoordinaten ein, so wird Ω Funktion der drei Variablen r, v und der Cosinus α, β, γ u. s. w. oder irgend einer anderen dritten Variablen, die die Lage der momentanen Bahnebene gegen die feste ausdrückt. Bei Bildung der Differentialquotienten $\frac{\partial \Omega}{\partial v}$ und $\frac{\partial \Omega}{\partial r}$ sind also die Grössen, die sich auf die Lage beider Ebenen zu einander beziehen, als constant anzusehen; es ist wichtig, dies zu bemerken, da v in den Grössen, welche die Lage beider Ebenen definiren, implicit vorkommt.

Die Gleichung 30) geht also über in:

$$31) \quad \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{dv}{dt} \right) = M \frac{\partial \Omega}{\partial v}.$$

Ferner leiten wir aus den Gleichungen 28) die folgende ab:

$$32) \quad x_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + y_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{M}{r} = M \left[x_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} \right].$$

Da aber

$$\frac{\partial x_1}{\partial r} = \frac{x_1}{r}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial r} = \frac{y_1}{r},$$

so wird

$$x_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = r \frac{\partial \Omega}{\partial r}.$$

Aus den Gleichungen 29) folgt aber:

$$x_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + y_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = r \frac{d^2 r}{dt^2} - r^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2.$$

Die Gleichung 32) geht also in die folgende über:

$$33) \quad r \frac{d^2 r}{dt^2} - r^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{M}{r} = Mr \frac{\partial \Omega}{\partial r},$$

welche Gleichung, ebenso wie 31), mit den von Hansen angewandten identisch ist.

5. Wir wollen nun in die Gleichungen 31) und 33), welche die Bewegung

des Planeten in seiner momentanen Bahnebene bestimmen, als abhängige Veränderliche die Gyldén'schen Coordinaten ϱ , η und S , und als unabhängige Veränderliche die wahre Länge v einführen; hierzu dienen uns die Gleichungen 2) und 3), die wir jetzt auf die momentane Bahnebene beziehen:

$$2) \quad r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho}, \quad 3) \quad r^2 \frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{Ma(1-\eta^2)}}{1+S}$$

Die Gleichung 31) geht mit Hilfe von 3) unmittelbar über in:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\sqrt{Ma(1-\eta^2)}}{1+S} \right) = M \frac{\partial \Omega}{\partial v},$$

und wenn man die Differentiation linker Hand ausführt, sowie dt mit Hilfe von 3) durch dv ersetzt, so kommt:

$$34a) \quad -\frac{1}{1+S} \frac{dS}{dv} = (1+S)^2 Q + \frac{1}{2} \frac{1}{1-\eta^2} \frac{d\eta^2}{dv},$$

wo gesetzt ist:

$$34) \quad Q = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)} \frac{\partial \Omega}{\partial v}.$$

Die vorstehende Gleichung wird zur Bestimmung von S dienen.

Um die Differentialgleichung für die Funktion ϱ abzuleiten, bemerken wir, dass wir nach 3) haben:

$$\frac{dr}{dt} = -r^2 \frac{d\frac{1}{r}}{dt} = -\frac{\sqrt{Ma(1-\eta^2)}}{1+S} \frac{d\frac{1}{r}}{dv},$$

woraus durch Differentiation sich ergibt:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Ma(1-\eta^2)}{r^2(1+S)^2} \left\{ \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dv^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\eta^2} \frac{d\eta^2}{dv} \frac{d\frac{1}{r}}{dv} - \frac{1}{1+S} \frac{dS}{dv} \frac{d\frac{1}{r}}{dv} \right\},$$

oder mit Rücksicht auf 34):

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Ma(1-\eta^2)}{r^2(1+S)^2} \left\{ \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dv^2} + (1+S)^2 Q \frac{d\frac{1}{r}}{dv} \right\}.$$

Setzt man diesen Wert ein in die Gleichung 33), und ersetzt man dort $\frac{dv}{dt}$ durch seinen Wert 3), so wird:

$$35) \quad a(1-\eta^2) \left\{ \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dv^2} + (1+S)^2 Q \frac{d\frac{1}{r}}{dv} + \frac{1}{r} \right\} - (1+S)^2 = -r^2(1+S)^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r}.$$

Aus 2) ergeben sich aber durch Differentiation die folgenden Relationen:

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dv} = \frac{1}{a(1-\eta^2)} \left\{ \frac{d\varrho}{dv} + \frac{1+\varrho}{1-\eta^2} \frac{d\eta^2}{dv} \right\}$$

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2} = \frac{1}{a(1-\eta^2)} \left\{ \frac{d^2\varrho}{dv^2} + \frac{2}{1-\eta^2} \frac{d\eta^2}{dv} \frac{d\varrho}{dv} + 2 \frac{1+\varrho}{(1-\eta^2)^2} \left(\frac{d\eta^2}{dv} \right)^2 + \frac{1+\varrho}{1-\eta^2} \frac{d^2\eta^2}{dv^2} \right\},$$

und mit ihrer Hilfe geht Gleichung 35) in die folgende über:

$$\begin{aligned} 36) \quad \frac{d^2\varrho}{dv^2} + \varrho = & - \left\{ \frac{2}{1-\eta^2} \frac{d\eta^2}{dv} + (1+S)^2 Q \right\} \frac{d\varrho}{dv} + 2S + S^2 - (1+S)^2 P \\ & - \left\{ \frac{1}{1-\eta^2} \frac{d^2\eta^2}{dv^2} + \frac{2}{(1-\eta^2)^2} \left(\frac{d\eta^2}{dv} \right)^2 + \frac{(1+S)^2}{1-\eta^2} Q \frac{d\eta^2}{dv} \right\} (1+\varrho), \end{aligned}$$

wo wir bezeichnen haben:

$$36a) \quad P = r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r}.$$

Die vorstehende Gleichung dient uns zur Bestimmung der Funktion ϱ und die in der zweiten Reihe stehenden Glieder können fast immer vernachlässigt werden. Wenn wir die Störungsfunktion und ihre Derivirten P und Q in trigonometrische Reihen entwickeln, so werden offenbar die Gleichungen 34) und 36) auf die Form der oben besprochenen Gleichungen 4) und 5) geführt werden.

Die Integrale der Gleichungen 34) und 36) geben die Bewegung des gestörten Planeten in seiner momentanen Bahnebene; indessen wird hierzu noch die Integration der Gleichung 3) erfordert, welche wir zu diesem Zweck im Folgenden auf eine etwas andere Form bringen wollen.

6. Wir wollen nun einige Betrachtungen machen über die Bewegung des gestörten Planeten in seiner momentanen Bahnebene, und wollen die nötigen Formeln herstellen zur Berechnung von r und v für einen gegebenen Wert der Zeit; hierbei soll zugleich die Gleichung 3) auf eine Form gebracht werden, die für ihre Integration von Vorteil ist.

Wir haben mit (ϱ) denjenigen Teil der Funktion ϱ bezeichnet, welcher von der Form B ist, und wenn wir setzen

$$37) \quad \varrho = (\varrho) + R,$$

so ist die Funktion R offenbar erster Ordnung, wenn sie auch ihrem absoluten Betrage nach erheblich grösser sein kann als die störende Masse.

Sind die Funktionen η , Π und R bekannt, so kann der Radiusvektor aus v berechnet werden mit Hilfe der Relation

$$38) \quad r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+(\varrho)+R} = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\eta \cos v + R},$$

wo gesetzt ist

$$39) \quad v = v - II.$$

Gyldén definiert den „absoluten Radiusvektor“ (r) durch die Relation

$$40) \quad (r) = \frac{a(1-\eta^2)}{1+(\varrho)} = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\eta \cos v},$$

woraus also folgt:

$$41) \quad r = \frac{(r)}{1 + \frac{R}{1 + \eta \cos v}}.$$

Wir wollen nun, nach Gyldén, eine neue Variable ε einführen¹⁾, welche in gewisser Analogie zur excentrischen Anomalie der elliptischen Bewegung steht. Wir setzen nämlich:

$$42) \quad (r) = a(1 - \eta \cos \varepsilon).$$

Es wird also:

$$43) \quad 1 - \eta \cos \varepsilon = \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta \cos v}, \quad \cos \varepsilon = \frac{\eta + \cos v}{1 + \eta \cos v}, \quad \sin \varepsilon = \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{1 + \eta \cos v} \sin v,$$

woraus sich ergibt:

$$44) \quad \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + \eta}{1 - \eta}} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ebenso führen wir in Analogie mit der elliptischen Bewegung die mittlere Anomalie M ein durch die Gleichung:

$$45) \quad M = \varepsilon - \eta \sin \varepsilon.$$

Man kann nun die Grössen ε und M als Funktionen von v darstellen durch die folgenden Reihen, welche denen der elliptischen Bewegung durchaus entsprechen, und welche wir darum hier nicht besonders ableiten¹⁾,

$$\varepsilon = v + \sum A_n \sin n v,$$

wo

$$A_n = 2 \frac{(-1)^n}{n} \frac{\eta^n}{(1 + \sqrt{1 - \eta^2})^n},$$

und

$$46) \quad M = \varepsilon - \eta \sin \varepsilon = v + \sum B_n \sin n v,$$

wo

$$B_n = 2 \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{\eta}{1 + \sqrt{1 - \eta^2}} \right)^n (1 + n \sqrt{1 - \eta^2}).$$

1) Siehe Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*. Tome I pag. 223.

Wenn man die Ausdrücke für die B_n nach Potenzen von η entwickelt, so erhält man bis zu den Gliedern fünften Grades:

$$\begin{aligned}
 47) \quad B_1 &= -2\eta & B_4 &= \frac{5}{8^2}\eta^4 + \dots \\
 B_2 &= \frac{3}{4}\eta^2 - \frac{1}{8}\eta^4 + \dots & B_5 &= -\frac{3}{40}\eta^5 - \dots \\
 B_3 &= -\frac{1}{3}\eta^3 - \frac{1}{8}\eta^5 - \dots & & \dots
 \end{aligned}$$

Differenzieren wir die Gleichung 46), indem wir η als constant ansehen und das Differential durch den Buchstaben D bezeichnen, so wird:

$$48) \quad (1 - \eta \cos \varepsilon) \frac{D\varepsilon}{Dv} = 1 + \sum n B_n \cos nv.$$

Aus den Gleichungen 43) ergibt sich aber

$$\frac{D\varepsilon}{Dv} = \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{1 + \eta \cos v},$$

und

$$(1 - \eta \cos \varepsilon) \frac{D\varepsilon}{Dv} = \frac{(1 - \eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \eta \cos v)^2}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in 48) erhält man die Entwicklung

$$49) \quad \frac{(1 - \eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \eta \cos v)^2} = 1 + \sum n B_n \cos nv,$$

von der ich im Folgenden Gebrauch machen werde.

7. Wir kehren nun zurück zur Gleichung 3) (pag. 28) zwischen der wahren Länge v und der Zeit, welche wir schreiben:

$$\frac{dt}{dv} = \frac{r^2(1+S)}{\sqrt{Ma}(1-\eta^2)}.$$

Wir setzen

$$50) \quad n = \frac{\sqrt{M}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

und nennen n die „Bewegungsconstante“ des Planeten. Die vorige Relation lässt sich dann, wie folgt, schreiben:

$$51) \quad n \frac{dt}{dv} = \frac{(1 - \eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \eta \cos v)^2} (1 + S),$$

und diese haben wir zu integrieren.

Die mittlere Länge des Planeten L definieren wir durch die Gleichung:

$$52) \quad L = nt + A,$$

wo A Integrationsconstante ist und die mittlere Länge zur Zeit $t = 0$ bezeichnet.

Ferner führen wir die reducirte Zeit (t) ein durch die Relation

$$53) \quad n(t) + A = M + \Pi.$$

Es wird also nach 46)

$$54) \quad n(t) + A = v + \sum B_n \sin nv.^1)$$

Wenn wir diese letztere Gleichung differenziren und berücksichtigen, dass

$$B_n \sin nv = B_n \cos n\Pi \sin nv - B_n \sin n\Pi \cos nv,$$

so wird

$$n \frac{d(t)}{dv} = 1 + \sum n B_n \cos nv + \frac{d\Pi}{dv},$$

wo gesetzt ist

$$55) \quad \frac{d\Pi}{dv} = \sum \frac{d(B_n \cos n\Pi)}{dv} \sin nv - \sum \frac{d(B_n \sin n\Pi)}{dv} \cos nv.$$

Bedenkt man die Entwicklung 49), so hat man endlich:

$$56) \quad n \frac{d(t)}{dv} = \frac{(1 - \eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \eta \cos v)^2} + \frac{d\Pi}{dv}.$$

Wenn wir nun die Differenz zwischen der wahren und der reducirten Zeit durch eine Funktion W darstellen, indem wir setzen:

$$57) \quad nt = n(t) + W,$$

so wird

$$57a) \quad L = nt + A = v + \sum B_n \sin nv + W,$$

und

$$57b) \quad \frac{dW}{dv} = n \frac{dt}{dv} - n \frac{d(t)}{dv},$$

oder nach 51) und 56):

$$58) \quad \frac{dW}{dv} = \frac{(1 - \eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \eta \cos v)^2} \left\{ \frac{1 + S}{\left(1 + \frac{R}{1 + \eta \cos v}\right)^2} - 1 \right\} - \frac{d\Pi}{dv}.$$

Wenn wir die Entwicklung 49) bedenken, und den vorigen Ausdruck auch nach Potenzen von R und S entwickeln, so erhalten wir zur Bestimmung von W die folgende Differentialgleichung:

1) Dass der Buchstabe n hier in zwei verschiedenen Bedeutungen vorkommt, kann wohl zu keinem Missverständniss führen.

$$\begin{aligned}
 59) \quad \frac{dW}{dv} &= S - 2R - 2RS + 3R^2 \pm \dots \\
 &+ \{6R - 2S - 12R^2 + 6RS \pm \dots\} \eta \cos v \\
 &- 3\eta^2 R + \left\{\frac{3}{2}S - 6R \pm \dots\right\} \eta^2 \cos 2v \\
 &\pm \dots\dots\dots \\
 &- \frac{d\Xi}{dv}.
 \end{aligned}$$

Wir haben diese Gleichung, welche an Stelle von 3) tritt, hier nur soweit entwickelt, wie sie für die uns vorliegende Aufgabe von Wichtigkeit ist. Man sieht, dass sie vom selben Typus ist, wie die Gleichung 6) für S . Die Integrationsconstante, welche bei ihrer Integration auftritt, werden wir gleich Null setzen, da sie sich mit A vereinigt.

8. Die Funktion Ξ ist äusserst klein, und kann fast immer bei Seite gelassen werden; man kann sie aus 55) bestimmen. Die in 55) auftretenden Grössen $B_n \cos n\Pi$ und $B_n \sin n\Pi$ sind von der Form A, ihre Differentiale sind also rein erster Ordnung, und da sie in Gleichung 55) mit $\sin nv$ und $\cos nv$ multiplicirt werden, so ist Ξ von der Form B, und durch die Integration dieser Gleichung werden keine Glieder vergrössert. Ξ ist also rein erster Ordnung und übrigens ersten Grades, also äusserst klein; will man diese Funktion doch bestimmen, so kann man 55) partiell integriren und erhält:

$$\begin{aligned}
 60) \quad \Xi &= -\sum \frac{1}{n} \frac{d(B_n \cos n\Pi)}{dv} \cos nv - \sum \frac{1}{n} \frac{d(B_n \sin n\Pi)}{dv} \sin nv \\
 &+ \sum \frac{1}{n} \int \frac{d^2(B_n \cos n\Pi)}{dv^2} \cos nv dv + \sum \frac{1}{n} \int \frac{d^2(B_n \sin n\Pi)}{dv^2} \sin nv dv.
 \end{aligned}$$

Die in der zweiten Reihe stehenden Glieder werden in allen Fällen vernachlässigt werden können, da die zweiten Differentialquotienten von $B_n \cos n\Pi$ und $B_n \sin n\Pi$ rein zweiter Ordnung sind; auch kann man die partielle Integration fortsetzen, und erhält dann eine sehr stark convergirende Reihe für Ξ .

Indessen lässt sich die Funktion Ξ noch auf eine bequemere Weise bestimmen; die Gleichung 55) lässt sich nämlich folgendermaassen schreiben:

$$61) \quad \frac{d\Xi}{dv} = \sum \frac{D(B_n \sin nv)}{Dv},$$

wo das Zeichen D bedeutet, dass die Differentiation nur in bezug auf η und Π auszuführen ist, und nicht in bezug auf v , soweit es explicit in $B_n \sin nv$ vorkommt. Man kann diese Gleichung auch schreiben:

$$\frac{d\Xi}{dv} = \sum \left\{ \frac{\partial(B_n \sin nv)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dv} + \frac{\partial(B_n \sin nv)}{\partial \Pi} \frac{d\Pi}{dv} \right\}.$$

Doch ist diese Form zur Rechnung nicht geeignet. Zur Integration der Gleichung 61) kann man im Ausdruck $B_n \sin nv$ mit Hilfe der Gleichungen 10) η und II durch die Grössen κ_n und ω_n ersetzen, wonach sich die weitere Rechnung sehr einfach gestaltet.

9. Unsere Aufgabe ist jetzt auf die Integration der drei Gleichungen 34), 36) und 59) geführt. Ist diese Integration, von der wir im Folgenden handeln, ausgeführt und sind die Funktionen S , η , II , R und W bestimmt, so gestaltet sich die Berechnung der Coordinaten r und v folgendermaassen:

Es ergibt sich die mittlere Länge aus:

$$62) \left\{ \begin{array}{l} L = nt + A, \\ \text{dann die mittlere Anomalie nach den Gleichungen 53) und 57) aus:} \\ M = L - II - W, \\ \text{ferner die excentrische Anomalie aus:} \\ \varepsilon - \eta \sin \varepsilon = M, \\ \text{und die wahre Anomalie aus:} \\ \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}. \end{array} \right.$$

Die wahre Länge in der Bahn und der Radiusvektor werden dann gefunden mittels der Relationen:

$$62) \left\{ \begin{array}{l} v = v + II \\ (r) = a(1 - \eta \cos \varepsilon) \\ r = \frac{(r)}{1 + \frac{R}{1 + \eta \cos v}}. \end{array} \right. \quad 1)$$

Es wird angebracht sein, diese Relationen mit den entsprechenden Hansen'schen zu vergleichen; dieselben lauten bekanntlich:

$$\begin{aligned} n_0 z &= n_0 t + e_0 + n \delta z \\ \varepsilon - e_0 \sin \varepsilon &= n_0 z \\ \operatorname{tg} \frac{\bar{f}}{2} &= \sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}} \operatorname{tg} \frac{\bar{\varepsilon}}{2} \end{aligned}$$

1) Ich werde im zweiten Teile diesen Relationen noch eine andere Form geben, die sich besser zur praktischen Rechnung eignet.

$$\begin{aligned}v &= \bar{f} + \pi_0 \\ \bar{r} &= a_0(1 - e_0 \cos \bar{\varepsilon}) \\ r &= \bar{r}(1 + v).\end{aligned}$$

Unsere Funktion W giebt also im Wesentlichen die Hansen'schen Störungen der mittleren Anomalie, also die Grösse $n_0 \delta z$ wieder; doch sind die Störungen der Form B von ihr abgezweigt und durch Einführung der Funktionen η und Π berücksichtigt. Dagegen legen wir unseren Rechnungen durchaus andere Bahnelemente zu Grunde als Hansen. Hansen's Elemente $n_0, a_0, e_0, \epsilon_0, \pi_0$ sind mit einer gewissen Willkürlichkeit zu wählen; sie sollen gleich den osculirenden elliptischen Elementen in irgend einem Zeitpunkt sein, oder wenigstens überhaupt innerhalb der Grenzen liegen, zwischen denen die osculirenden Elemente schwanken können. Diese Grenzen werden, wie Hansen hervorhebt, allerdings nur um Grössen auseinanderliegen, welche von der Ordnung der störenden Masse sind (wobei natürlich von den secularen Störungen abgesehen ist), aber diese Grössen können ihrem numerischen Betrage nach sehr erheblich sein; sie sind nach unserer Definition nicht rein erster Ordnung. Wenn man also nach der Hansen'schen Methode rechnet, so kann es sich ereignen, dass man die Rechnung mit Voraussetzung von Elementen beginnt, welche zwar innerhalb der festgesetzten Grenzen liegen, aber von den wahren (oder mittleren) Elementen erheblich abweichen. Hierdurch können die Resultate gänzlich entstellt werden, namentlich dann, wenn der angenommene Wert von n_0 , aus dem die Integrationsdivisoren bestimmt werden, vom wahren stark abweicht.

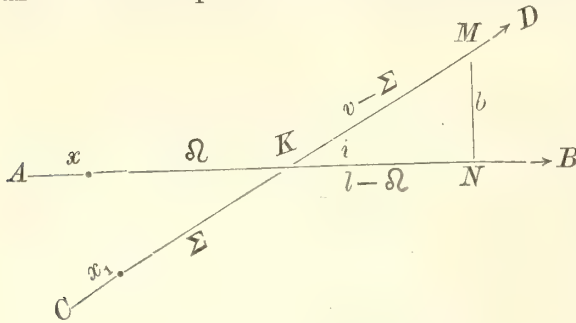
In unseren Formeln sind die Elemente n, a, κ, A, Γ strenger definirt, und wenn wir stets zu brauchbaren Resultaten kommen wollen, so ist der Spielraum, den man zu ihrer Wahl hat, ausserordentlich klein, jedenfalls viel kleiner als die Schwankungen, denen die osculirenden Elemente ausgesetzt sind.

Drittes Kapitel.

Formeln für die heliocentrische Bewegung des Planeten. — Lage der momentanen Bahnebene zu der als Fundamentelebene gewählten Ekliptik.

1. Nachdem wir im vorigen Kapitel die Bewegung des Planeten in seiner momentanen Bahnebene betrachtet haben, wollen wir jetzt seine Position in bezug auf die feste Fundamentelebene behandeln, damit man im Stande ist, seine heliocentrischen und geocentrischen Coordinaten im Raum zu berechnen.

Sei AB der grösste Kreis, in dem die feste Fundamentalebene der xy die um den Schwerpunkt der Sonne mit dem Radius Eins beschriebene Kugelfläche schneidet, und sei CD der grösste Kreis, in dem die momentane Bahnebene des Planeten diese Kugel schneidet. Sei x der Durchschnittspunkt der x -Axe mit dem Kreise AB und x_1 der Durchschnittspunkt der x_1 -Axe mit dem Kreise CD , ferner M der Durchschnittspunkt des Radiusvektors des Planeten mit dem Kreise CD . Füllen wir



von M ein Lot auf AB , und nennen seinen Fusspunkt N , so ist xN die Länge und MN die Breite des Planeten in bezug auf die Fundamentalebene, welche Grössen wir durch l und b bezeichnen. Der Pfeil bei B giebt die Richtung der Zählweise von l und der Pfeil bei D die Richtung der Bewegung des Planeten an. Weiter nennen wir K den Schnittpunkt der beiden Kreise AB und CD , also den aufsteigenden Knoten der momentanen Bahnebene und i die Neigung der letzteren. Endlich sei Ω die Länge des aufsteigenden Knotens oder der Bogen xK , sowie Σ der Bogen x_1K . Der Bogen x_1M ist dann die wahre Länge v des Planeten in seiner Bahnebene, und der Bogen KM , d. h. das Argument der Breite, ist gleich $v - \Sigma$.

Aus dem Dreieck KMN folgen die Relationen:

$$64) \quad \sin b = \sin i \sin(v - \Sigma)$$

$$65) \quad \cos b \sin(l - \Omega) = \cos i \sin(v - \Sigma)$$

$$\cos b \cos(l - \Omega) = \cos(v - \Sigma)$$

$$66) \quad \operatorname{tg}(l - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(v - \Sigma).$$

Man kann mit Hilfe der dritten der Gleichungen 15) nach einigen Transformationen die Grössen i , Ω und Σ bestimmen, und dann die Coordinaten l und b des Planeten nach den obigen Formeln aus v berechnen. Indessen wird es angebrachter sein, l und b direkt als Funktionen der Zeit oder der Länge v darzustellen.

2. Hiermit wollen wir uns zunächst beschäftigen und erst später die Relationen für die Grössen i , Ω und Σ aufstellen. Die dritte der Gleichungen 15) lautet:

$$67) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{Mz}{r^3} = M \frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

Es ist aber:

$$z = r \sin b,$$

und wenn wir mit Gylden bezeichnen

$$68) \quad \mathfrak{z} = \sin b,$$

so wird

$$z = r\mathfrak{z},$$

und die Gleichung 67) geht in die folgende über:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} + \frac{\mathfrak{z}}{r} \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{2}{r} \frac{d\mathfrak{z}}{dt} \frac{dr}{dt} + \frac{M\mathfrak{z}}{r^3} = \frac{M}{r} \frac{\partial\Omega}{\partial z}.$$

Ersetzen wir $\frac{d^2r}{dt^2}$ durch seinen aus 33) folgenden Wert, so wird:

$$69) \quad \frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} + \mathfrak{z} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{d\mathfrak{z}}{dt} \frac{dr}{dt} = \frac{M}{r} \frac{\partial\Omega}{\partial z} - \frac{M\mathfrak{z}}{r} \frac{\partial\Omega}{\partial r}.$$

In diese Gleichung führen wir nun wieder die wahre Länge v als unabhängige Veränderliche ein nach Gleichung 3); man hat:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = \frac{1}{r^4} \frac{Ma(1-\eta^2)}{(1+S)^2} \left\{ \frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} - \frac{2}{r} \frac{d\mathfrak{z}}{dv} \frac{dr}{dv} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\eta^2} \frac{d\eta^2}{dv} \frac{d\mathfrak{z}}{dv} - \frac{1}{1+S} \frac{dS}{dv} \frac{d\mathfrak{z}}{dv} \right\},$$

oder mit Berücksichtigung von 34):

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = \frac{1}{r^4} \frac{Ma(1-\eta^2)}{(1+S)^2} \left\{ \frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} - \frac{2}{r} \frac{d\mathfrak{z}}{dv} \frac{dr}{dv} + (1+S)^2 Q \frac{d\mathfrak{z}}{dv} \right\}.$$

Ferner ist

$$\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = \frac{1}{r^4} \frac{Ma(1-\eta^2)}{(1+S)^2},$$

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{r^4} \frac{Ma(1-\eta^2)}{(1+S)^2} \frac{d\mathfrak{z}}{dv} \frac{dr}{dv},$$

und Gleichung 69) geht über in die folgende, welche uns zur Bestimmung von \mathfrak{z} dienen wird:

$$70) \quad \frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = -(1+S)^2 Q \frac{d\mathfrak{z}}{dv} + (1+S)^2 Z,$$

wo wir bezeichnet haben:

$$70a) \quad Z = \frac{r^3}{a(1-\eta^2)} \left\{ \frac{\partial\Omega}{\partial z} - \mathfrak{z} \frac{\partial\Omega}{\partial r} \right\}.$$

Diesen Wert von Z wollen wir noch transformiren; man erhält nämlich aus dem Ausdrücke 16) von Ω :

$$\frac{\partial \Omega}{dz} = \frac{m'}{1+m} \left\{ -\frac{z}{\mathcal{A}^3} + z' \left(\frac{1}{\mathcal{A}^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \right\}$$

und aus dem Ausdruck 17):

$$\frac{\partial \Omega}{dr} = \frac{m'}{1+m} \left\{ -\frac{r}{\mathcal{A}^3} + r' \left(\frac{1}{\mathcal{A}^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \cos H \right\}.$$

Wenn wir b' die Breite des störenden Planeten in bezug auf die Fundamentalebene nennen und

$$z' = \sin b'$$

setzen, so wird auch

$$z' = r' z'_1,$$

und die Relation 70a) geht mit Hilfe der vorstehenden in die folgende über:

$$71) \quad Z = \frac{m'}{1+m} \frac{r^3 r'}{a(1-\eta^2)} \left(\frac{1}{\mathcal{A}^3} - \frac{1}{r'^3} \right) (z'_1 - z_1 \cos H).$$

Diesen Ausdruck werden wir zur Entwicklung von Z benutzen.

3. Ich will nun einige Bemerkungen machen über die Integration der Gleichung 70) und über die Form, unter der sich die Funktion z darstellen wird. Man sieht, dass diese Gleichung vom selben Typus ist wie die Gleichung 36) für ϱ , also auch wie die Gleichung 5). Die Bemerkungen, welche wir über die Integration der letzteren im ersten Kapitel pag. 18 f. gemacht haben, finden demnach auch auf z Anwendung. Diese Funktion wird also elementare Glieder der Form B und charakteristische der Form D enthalten.

Wir setzen darum, ähnlich wie für die Funktion ϱ ,

$$72) \quad z = (z) + \mathfrak{Z},$$

wo (z) alle Glieder der Form B enthalten soll, und \mathfrak{Z} demnach mit der störenden Masse multiplicirt ist. In \mathfrak{Z} werden sich aber, gerade wie in R , charakteristische Glieder der Form D vorfinden, wenn das Verhältniss der mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Planeten nahezu commensurabel ist.

Ebenso wie wir für (ϱ) den Ausdruck 8) eingeführt haben, setzen wir (z) unter die Form:

$$(z) = \sin \iota \sin [(1+\tau)v - \Theta] + \sum \sin \iota_n \sin [(1+\tau_n)v - \Theta_n],$$

wo die Grössen ι_n , τ , τ_n , Θ_n Constanten und ι und Θ die beiden Integrationsconstanten sind. τ und die τ_n sind von der Ordnung der störenden Massen.

Wir setzen weiter:

$$73) \quad \vartheta = \Theta - \tau v$$

$$\vartheta_n = \Theta_n - \tau_n v,$$

wonach also:

$$74) \quad (\zeta) = \sin \iota \sin (v - \vartheta) + \sum \sin \iota_n \sin (v - \vartheta_n).$$

Gylden hat nun zwei Funktionen $\sin j$ und σ eingeführt, welche wie η und Π langperiodischer Natur und von der Form A sind; wir setzen:

$$75) \quad \sin j \frac{\cos}{\sin} \sigma = \sin \iota \frac{\cos}{\sin} \vartheta + \sum \sin \iota_n \frac{\cos}{\sin} \vartheta_n.$$

Es wird dann:

$$76) \quad (\zeta) = \sin j \sin (v - \sigma) = \sin j \sin v,$$

wenn wir nämlich bezeichnen:

$$77) \quad v = v - \sigma.$$

Die Funktion σ wird indessen, wie Π , auch einen secularen Teil enthalten und man kann setzen:

$$78) \quad \sigma = \sigma_0 - \tau v.$$

Es bestehen dann auch die Relationen:

$$79) \quad \sin j \cos \sigma_0 = \sin \iota \cos \Theta + \sum \sin \iota_n \cos (\vartheta_n + \tau v)$$

$$\sin j \sin \sigma_0 = \sin \iota \sin \Theta + \sum \sin \iota_n \sin (\vartheta_n + \tau v)$$

$$80) \quad \sin j \cos (\sigma_0 - \Theta) = \sin \iota + \sum \sin \iota_n \cos (\vartheta_n - \vartheta)$$

$$\sin j \sin (\sigma_0 - \Theta) = \sum \sin \iota_n \sin (\vartheta_n - \vartheta),$$

sowie

$$81) \quad \sin^2 j = (\zeta)^2 + \left(\frac{D(\zeta)}{dv} \right)^2,$$

wo das Zeichen D bedeutet, dass bei der Differentiation die Grössen ϑ und ϑ_n als constant anzusehen sind.

Die Funktion $\sin j$ und die Grössen $\sin \iota$ und $\sin \iota_n$ werden ihrem Betrage nach vergleichbar sein mit den Neigungssinus der momentanen Bahnebenen der Planeten gegen die Ekliptik und wir werden sie, ebenso wie η und die κ_n als Grössen vom ersten Grade bezeichnen; ein jedes Glied, dass die n -te Potenz einer dieser Grössen oder ein äquivalentes Produkt enthält, wird also vom n -ten Grade sein.

4. Das Integral der Gleichung 70) giebt uns die Breite des gestörten Planeten, da $\zeta = \sin b$; ich will nun auch den Ausdruck für die Länge l aufstellen. Wenn wir die Gleichung 66) differenziren und dabei nach dem Principe der Osculation i , Ω und Σ als constant ansehen, so kommt:

$$\frac{dl}{dv} = \cos i \frac{\cos^2(l - \Omega)}{\cos^2(v - \Sigma)}.$$

Aus dem Dreieck MNK in der Figur pag. 36 folgt aber:

$$\cos(v - \Sigma) = \cos b \cos(l - \Omega),$$

also wird

$$82) \quad \frac{dl}{dv} = \frac{\cos i}{\cos^2 b},$$

in welcher Gleichung wir noch i und b durch \mathfrak{z} und $\frac{d\mathfrak{z}}{dv}$ ersetzen wollen; wir können die Gleichung

$$83) \quad \mathfrak{z} = \sin b = \sin i \sin(v - \Sigma)$$

differenzieren, indem wir wieder i und Σ als constant ansehen und erhalten:

$$83a) \quad \frac{d\mathfrak{z}}{dv} = \sin i \cos(v - \Sigma).$$

Es folgt aus den beiden letzten Gleichungen:

$$84) \quad \sin^2 i = \mathfrak{z}^2 + \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2,$$

also auch

$$85) \quad \cos i = \sqrt{1 - \mathfrak{z}^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2}.$$

Die Gleichung 82) geht also in die folgende über:

$$\frac{dl}{dv} = \frac{\sqrt{1 - \mathfrak{z}^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2}}{1 - \mathfrak{z}^2},$$

oder integriert:

$$86) \quad l = v + \int \left\{ \frac{\sqrt{1 - \mathfrak{z}^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2}}{1 - \mathfrak{z}^2} - 1 \right\} dv. \quad ^1)$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen kann nach Potenzen von \mathfrak{z}^2 und $\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2$ entwickelt werden, da \mathfrak{z} vom ersten Grade ist, und es wird:

$$87) \quad l = v + \frac{1}{2} \int \left\{ \mathfrak{z}^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2 \right\} dv \pm \dots\dots$$

wo ich die Glieder vom vierten Grade ab vernachlässigt habe, da sie meist äusserst klein sind.

1) Vgl. Harzer, Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper. Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg. VII. Série. Tome XXXIV, No. 12, pag. 22.

Die Relation 87) enthält eine überzählige Integrationsconstante; wir setzen sie gleich Null, bestimmen sie also so, dass $l = v$ wird, wenn $i = 0$, oder, was dasselbe ist, wenn $\mathfrak{z} = \frac{d\mathfrak{z}}{dv} = 0$ ist. Hierdurch ist auch die Integrationsconstante der Gleichungen c_1) und c_2) (pag. 24) bestimmt, welche die Lage der x_1 -Axe für einen bestimmten Zeitpunkt giebt.

Nach dem Vorigen werden sich die Längen l und v , und ebenso die Knotenlängen Ω und Σ von einander nur um Grössen zweiten Grades unterscheiden.

5. Die Integration der Gleichung 87) ist leicht auszuführen; indessen muss bedacht werden, dass die Integrale $\int \mathfrak{z}^2 dv$ und $\int \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2 dv$ ausserordentlich grosse Glieder von der Form A enthalten, die sich in der Differenz $\int \left\{ \mathfrak{z}^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2 \right\} dv$ herausheben. Ich will darum den Ausdruck für die letztere analytisch ableiten, damit das Auftreten dieser grossen Glieder in den numerischen Rechnungen vermieden werde.

Wenn wir der Kürze halber bezeichnen:

$$88) \quad \nu_1 = \sin j \cos \sigma, \quad \nu_2 = \sin j \sin \sigma,$$

so sind offenbar ν_1 und ν_2 elementare Grössen von der Form A, welche bei jeder Differentiation einen der Faktoren τ_n erhalten.

Es wird

$$89) \quad \begin{aligned} \mathfrak{z} &= \nu_1 \sin v - \nu_2 \cos v \\ \frac{d\mathfrak{z}}{dv} &= \nu_1 \cos v + \nu_2 \sin v + \frac{d\nu_1}{dv} \sin v - \frac{d\nu_2}{dv} \cos v. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung leitet man die folgende ab, mit Vernachlässigung der Glieder rein zweiter Ordnung, die wohl in keinem Falle merklich werden dürften:

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2 &= -(\nu_1^2 - \nu_2^2) \cos 2v - 2\nu_1 \nu_2 \sin 2v \\ &\quad - \left\{ \nu_1 \frac{d\nu_1}{dv} - \nu_2 \frac{d\nu_2}{dv} \right\} \sin 2v + \left\{ \nu_1 \frac{d\nu_2}{dv} + \nu_2 \frac{d\nu_1}{dv} \right\} \cos 2v \\ &\quad + \nu_1 \frac{d\nu_2}{dv} - \nu_2 \frac{d\nu_1}{dv}, \end{aligned}$$

oder integrirt:

$$\int \left\{ \mathfrak{z}^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2 \right\} dv = -\frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2} \sin 2v + \nu_1 \nu_2 \cos 2v + \int \left\{ \nu_1 \frac{d\nu_2}{dv} - \nu_2 \frac{d\nu_1}{dv} \right\} dv.$$

Mit Berücksichtigung von 88) geht diese Relation aber über in:

$$90) \quad \int \left\{ (\beta)^2 - \left(\frac{d(\beta)}{dv} \right)^2 \right\} dv = -\frac{1}{2} \sin^2 j \sin 2v + \int \left\{ v_1 \frac{dv_2}{dv} - v_2 \frac{dv_1}{dv} \right\} dv.$$

Wir wollen nun die Integrale rechter Hand in dieser Gleichung ausführen. Es ist nach 88) und 75)

$$91) \quad \begin{aligned} \frac{dv_1}{dv} &= \tau \sin \iota \sin \vartheta + \sum \tau_n \sin \iota_n \sin \vartheta_n \\ \frac{dv_2}{dv} &= -\tau \sin \iota \cos \vartheta - \sum \tau_n \sin \iota_n \cos \vartheta_n, \end{aligned}$$

und demnach:

$$\begin{aligned} v_1 \frac{dv_2}{dv} - v_2 \frac{dv_1}{dv} &= -\tau \sin^2 \iota - \sum \tau_n \sin^2 \iota_n \\ &-(\tau + \tau_1) \sin \iota \sin \iota_1 \cos(\vartheta_1 - \vartheta) - (\tau + \tau_2) \sin \iota \sin \iota_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta) - (\tau + \tau_3) \sin \iota \sin \iota_3 \cos(\vartheta_3 - \vartheta) - \dots \\ &\quad - (\tau_1 + \tau_2) \sin \iota_1 \sin \iota_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) - (\tau_1 + \tau_3) \sin \iota_1 \sin \iota_3 \cos(\vartheta_3 - \vartheta_1) - \dots \\ &\quad - (\tau_2 + \tau_3) \sin \iota_2 \sin \iota_3 \cos(\vartheta_3 - \vartheta_2) - \dots, \end{aligned}$$

und die Integration dieses Ausdrucks führt zu elementaren Gliedern zweiten Grades.

Wir können endlich nach dem Vorigen die Gleichung 87), wie folgt, schreiben:

$$92) \quad l = v - \frac{1}{4} \sin^2 j \sin 2v + H_1 + H_2,$$

wo

$$93) \quad \begin{aligned} H_1 &= -\frac{1}{2} \left\{ \tau \sin^2 \iota + \sum \tau_n \sin^2 \iota_n \right\} v \\ &- \frac{1}{2} \frac{\tau + \tau_1}{\tau - \tau_1} \sin \iota \sin \iota_1 \sin(\vartheta_1 - \vartheta) - \frac{1}{2} \frac{\tau + \tau_2}{\tau - \tau_2} \sin \iota \sin \iota_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta) - \dots \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \sin \iota_1 \sin \iota_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) - \dots \\ &\quad - \dots \end{aligned}$$

$$93a) \quad \frac{dH_2}{dv} = (\beta) \beta - \frac{d(\beta)}{dv} \frac{d\beta}{dv} + \frac{1}{2} \beta^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\beta}{dv} \right)^2,$$

und wo die Funktion H_2 fast immer vernachlässigt werden kann. Für diejenigen Planeten, für welche dies nicht der Fall ist, weil β beträchtlich wird, werde ich übrigens im zweiten Teile die Relation für l in etwas veränderter Form aufstellen.

Die Funktion H_1 enthält ein seculares Glied, das allerdings während eines kürzeren Zeitraums unmerklich klein bleibt; dies Glied findet sich also in der

Differenz $l-v$ und, wie wir gleich sehen werden, auch in der Differenz $\Omega - \Sigma$. Man kann es natürlich zum Verschwinden bringen, und zwar am einfachsten dadurch, dass man die Lage der x_1 -Axe so wählt, dass Ω gleich Σ wird; dann gelten aber die Bedingungen c_1) und c_2) des zweiten Kapitels nicht mehr, und unsere übrigen Differentialgleichungen würden sich wesentlich compliciren.

6. Es sollen nun die Ausdrücke für die Funktionen i , Ω und Σ hergeleitet werden, für den Fall, dass man die Lage der momentanen Bahnebene bestimmen will.

Wir haben oben schon die Gleichung 84)

$$\sin^2 i = \mathfrak{z}^2 + \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv}\right)^2$$

gefunden, aus der i berechnet werden kann. Ich will jedoch noch eine zweckmässigere Relation ableiten. Wenn man nämlich von den beiden Gleichungen

$$\mathfrak{z} = \sin i \sin(v - \Sigma) \quad \text{und} \quad \frac{d\mathfrak{z}}{dv} = \sin i \cos(v - \Sigma),$$

die erste mit $\sin v$, die zweite mit $\cos v$ multiplicirt, und addirt, so wird:

$$94) \quad \sin i \cos \Sigma = \mathfrak{z} \sin v + \frac{d\mathfrak{z}}{dv} \cos v,$$

und wenn man die erste mit $-\cos v$, die zweite mit $\sin v$ multiplicirt und wieder addirt, so wird:

$$95) \quad \sin i \sin \Sigma = -\mathfrak{z} \cos v + \frac{d\mathfrak{z}}{dv} \sin v.$$

Diese Relationen dienen zur Bestimmung von i und Σ ; man kann sie noch weiter transformiren mit Hilfe von 89) und 88) und erhält dann mit Vernachlässigung der Glieder rein erster Ordnung:

$$96) \quad \begin{aligned} \sin i \cos \Sigma &= \sin j \cos \sigma + \mathfrak{z} \sin v + \frac{d\mathfrak{z}}{dv} \cos v \\ \sin i \sin \Sigma &= \sin j \sin \sigma - \mathfrak{z} \cos v + \frac{d\mathfrak{z}}{dv} \sin v. \end{aligned}$$

In den Fällen, wo \mathfrak{z} nicht sehr gross ist oder wo es sich nicht um sehr grosse Genauigkeit handelt, setzt man einfach:

$$97) \quad i = j \quad \text{und} \quad \Sigma = \sigma.$$

Zur Berechnung der Knotenlänge Ω endlich will ich die Gleichungen 65) benutzen. Multipliciren wir die erste mit $-\cos(v - \Sigma)$, die zweite mit $\sin(v - \Sigma)$ und addiren wir, so wird:

$$\sin(v-l+\Omega-\Sigma) = \frac{1-\cos i}{\cos b} \sin(v-\Sigma) \cos(v-\Sigma).$$

Da man aber hat:

$$\cos b = \sqrt{1-\mathfrak{z}^2}, \quad \sin(v-\Sigma) = \frac{\mathfrak{z}}{\sin i}, \quad \cos(v-\Sigma) = \frac{\frac{d\mathfrak{z}}{dv}}{\sin i},$$

so wird:

$$\sin(v-l+\Omega-\Sigma) = \frac{1}{1+\cos i} \frac{\mathfrak{z} \frac{d\mathfrak{z}}{dv}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2}},$$

oder endlich mit Hilfe von 85):

$$98) \quad \sin(v-l+\Omega-\Sigma) = \frac{\mathfrak{z} \frac{d\mathfrak{z}}{dv}}{\sqrt{1-\mathfrak{z}^2} \left\{ 1 + \sqrt{1-\mathfrak{z}^2 - \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dv} \right)^2} \right\}},$$

oder mit Vernachlässigung der Glieder vierten Grades:

$$99) \quad \Omega - \Sigma = \frac{1}{2} \mathfrak{z} \frac{d\mathfrak{z}}{dv} + (l-v).$$

Aus dieser Gleichung lässt sich durch Differentiation und Vergleichung mit 87) auch die folgende ableiten:

$$99a) \quad \frac{d(\Omega - \Sigma)}{dv} = \frac{1}{2} \mathfrak{z} \left\{ \frac{d^2 \mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} \right\},$$

welche man natürlich auch direkt finden kann. Wir wollen indessen die Form 99) beibehalten, und da bis auf Glieder rein erster Ordnung:

$$(\mathfrak{z}) \frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = \frac{1}{2} \sin^2 j \sin 2v,$$

so erhalten wir mit derselben Genauigkeit nach 92):

$$100a) \quad \Omega - \Sigma = H_1 + H_2 + \frac{1}{2} (\mathfrak{z}) \frac{d\mathfrak{z}}{dv} + \frac{1}{2} \mathfrak{z} \frac{d(\mathfrak{z})}{dv} + \frac{1}{2} \mathfrak{z} \frac{d\mathfrak{z}}{dv},$$

oder nach einer unschwer auszuführenden Transformation:

$$100b) \quad \Omega - \Sigma = H_1 + \frac{1}{2} \int \left\{ (\mathfrak{z}) \left[\frac{d^2 \mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} \right] + \mathfrak{z} \left[\frac{d^2 (\mathfrak{z})}{dv^2} + (\mathfrak{z}) \right] + \mathfrak{z} \left[\frac{d^2 \mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} \right] \right\} dv,$$

wofür man in fast allen Fällen setzen kann:

$$100c) \quad \Omega - \Sigma = H_1.$$

Viertes Kapitel.

Entwicklung der Störungsfunktion Ω und ihrer partiellen Ableitungen Q , P und Z .

1. Zur Integration der Differentialgleichungen 34) und 36) brauchen wir die Funktionen Q und P , welche jetzt entwickelt werden sollen. Die Störungsfunktion Ω ist durch die Gleichung 17) gegeben; wir multipliciren sie mit der Halbaxe a , die durch die Relation 2) eingeführt wurde und haben:

$$101) \quad a\Omega = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{a}{\Delta} - \frac{ar}{r'^2} \cos H \right\}, \text{ wo } \Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H}.$$

Ich will zunächst den Ausdruck $\cos H$ transformiren, der sowohl implicit in Δ als auch explicit vorkommt und zwar soll er nach Potenzen der Neigungen entwickelt werden.

Bekanntlich ist Tisserand¹⁾ der erste gewesen, welcher eine Entwicklung der Störungsfunktion gegeben hat, die auch bei grossen Bahnneigungen brauchbar bleibt. Ich wende dasselbe Princip an, wie Tisserand und Gylden, und die Hauptzüge der folgenden Entwicklung wird man auch in Gylden's „Traité des Orbites absolues“ (Tome I. Livre II. Chap. II und Livre III. Chap. II.) vorfinden. Da wir die Glieder dritten Grades hier vernachlässigen, so können wir unsere Entwicklungen äusserst einfach gestalten.

Es ist bekanntlich:

$$\cos H = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'},$$

welche Relation übrigens durch Vergleichung von 16) und 17) verificirt werden kann. Mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= r \cos b \cos l & x' &= r' \cos b' \cos l' \\ y &= r \cos b \sin l & y' &= r' \cos b' \sin l' \\ z &= r \sin b, & z' &= r' \sin b', \end{aligned}$$

wo sich die mit einem Accent versehenen Grössen auf den störenden Körper beziehen, findet man:

$$\cos H = \cos b \cos b' \cos (l-l') + \sin b \sin b'.$$

1) Tisserand, Développement de la fonction perturbatrice etc. Annales de l'Observatoire de Paris. Mémoires, Tome XV. — Und Traité de Mécanique Céleste. Tome I. Kapitel XXVIII. — Siehe auch Backlund, Zur Entwicklung der Störungsfunktion. Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg. VII. Série. Tome XXXII. No. 4.

Bedenkt man die Relationen:

$$\mathfrak{z} = \sin b \quad \text{und} \quad \mathfrak{z}' = \sin b',$$

so wird:

$$102) \quad \cos H = \sqrt{1-\mathfrak{z}^2} \sqrt{1-\mathfrak{z}'^2} \cos(l-l') + \mathfrak{z}\mathfrak{z}',$$

oder wenn man nach Potenzen von \mathfrak{z}^2 und \mathfrak{z}'^2 entwickelt und die Grössen vierten Grades fortlässt:

$$103) \quad \cos H = \cos(l-l') - \frac{\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{z}'^2}{2} \cos(l-l') + \mathfrak{z}\mathfrak{z}'.$$

Die Gleichung 99) giebt nun aber mit derselben Genauigkeit:

$$l = v + (\mathcal{O} - \Sigma) - \frac{1}{2} \mathfrak{z} \frac{d\mathfrak{z}}{dv},$$

und da man für den störenden Körper ganz ähnlich hat:

$$l' = v' + (\mathcal{O}' - \Sigma') - \frac{1}{2} \mathfrak{z}' \frac{d\mathfrak{z}'}{dv'},$$

so kommt:

$$l-l' = v-v' + (\mathcal{O} - \Sigma) - (\mathcal{O}' - \Sigma') - \frac{1}{2} \mathfrak{z} \frac{d\mathfrak{z}}{dv} + \frac{1}{2} \mathfrak{z}' \frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}.$$

Ich führe der grösseren Bequemlichkeit halber die Bezeichnungen:

$$103a) \quad \mathcal{O} - \Sigma = H, \quad \mathcal{O}' - \Sigma' = H'$$

ein und setze

$$104) \quad H_1 = v - v' + H - H'.$$

Es folgt aus den vorstehenden Gleichungen, wieder mit Vernachlässigung der Glieder vierten Grades:

$$\cos(l-l') = \cos H_1 + \frac{\mathfrak{z} \frac{d\mathfrak{z}}{dv} - \mathfrak{z}' \frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}}{2} \sin H_1.$$

Schreiben wir nun Gleichung 103) folgendermassen, wie schon Gyldén gethan hat:

$$105) \quad \cos H = \cos H_1 + h,$$

so ist die Funktion h mit Fortlassung der Glieder vierten Grades, wie folgt, gegeben:

$$106) \quad h = -\frac{\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{z}'^2}{2} \cos H_1 + \frac{\mathfrak{z} \frac{d\mathfrak{z}}{dv} - \mathfrak{z}' \frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}}{2} \sin H_1 + \mathfrak{z}\mathfrak{z}'.$$

Den Wert 105) für $\cos H$ führen wir in die Gleichung 101) ein, indem wir nach Potenzen von h entwickeln; wenn wir bezeichnen:

$$107) \quad (\mathcal{A}) = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H_1}$$

$$108) \quad a(\Omega) = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{a}{(\mathcal{A})} - \frac{ar}{r'^2} \cos H_1 \right\},$$

so ist offenbar nach Fortlassung von h^2 , welches vierten Grades ist:

$$109) \quad a\Omega = a(\Omega) + \frac{ad(\Omega)}{d \cos H_1} h,$$

wo bei der Differentiation natürlich r und r' als constant anzusehen sind. Wir haben also die beiden Ausdrücke $a(\Omega)$ und $\frac{ad(\Omega)}{d \cos H_1}$ zu entwickeln.

2. Zur Entwicklung von

$$108) \quad a(\Omega) = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{a}{(\mathcal{A})} - \frac{ar}{r'^2} \cos H_1 \right\}$$

setzen wir:

$$110) \quad \frac{a}{(\mathcal{A})} = R_0 + 2R_1 \cos H_1 + 2R_2 \cos 2H_1 + \dots,$$

und haben nach Fourier's Theorem:

$$R_n = \frac{a}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\psi d\psi}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi}}.$$

Wenn es sich um Störungen der kleinen Planeten durch Jupiter handelt, so ist beständig r' grösser als r , und wir schreiben:

$$R_n = \frac{a}{\pi} \frac{1}{r'} \int_0^\pi \frac{\cos n\psi d\psi}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 2\frac{r}{r'} \cos \psi}}.$$

Wir stellen nun den Radiusvektor r' des störenden Planeten in ganz derselben Weise dar, wie den des gestörten und setzen in Analogie mit der Relation 2)

$$111) \quad r' = \frac{a'(1 - \eta'^2)}{1 + \varrho'},$$

wo a' die Halbaxe der Bahn des störenden Planeten ist, eine Grösse, die, ebenso wie die Funktionen ϱ' und η' als bekannt angenommen wird. η' ist von der Ordnung der Excentricität des störenden Körpers und wir bezeichnen diese Funktion ebenso wie η als eine Grösse ersten Grades. Im allgemeinen wird

man, wie schon oben bemerkt, an Stelle der Gleichung 111) einfach die Gleichung der Ellipse setzen können.

Es soll ferner, wie gewöhnlich, bezeichnet werden:

$$112) \quad \alpha = \frac{a}{a'},$$

so dass α in den von uns behandelten Fällen kleiner als Eins ist. Wir setzen weiter

$$113) \quad \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 = 1 - \lambda,$$

und dann ist λ offenbar, nach 2) und 111) von derselben Grössenordnung wie ϱ und ϱ' ist; es wird:

$$\left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \alpha^2(1 - \lambda),$$

und wir können R_n in der folgenden Form schreiben:

$$114) \quad R_n = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{r'} \int_0^\pi \frac{\cos n\psi \, d\psi}{\sqrt{1 + k^2 - 2k \cos \psi}},$$

wo wir zur Abkürzung

$$k = \alpha \sqrt{1 - \lambda} = \frac{r}{r'}$$

gesetzt haben. Das Integral 114) lässt sich mit Hilfe einiger bekannter Sätze auf eine geeigneter Form bringen; da wir in der nächsten No. eine ähnliche Umformung vorzunehmen haben, so soll dieselbe gleich hier in allgemeinerer Form angesetzt werden.

Nach Jacobi ist nämlich¹⁾:

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\psi \, d\psi}{(1 + k^2 - 2k \cos \psi)^{\frac{m}{2}}} = \frac{m(m+2) \cdots [m+2(n-1)]}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} k^n \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} \psi \, d\psi}{(1 + k^2 - 2k \cos \psi)^{n+\frac{m}{2}}},$$

und auf die rechte Seite dieser Relation kann man die Landen'sche Transformation anwenden, indem man setzt:

$$\cos \psi = k \sin^2 \varphi + \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

woraus folgt:

1) Siehe Gylden, *Traité analytique des Orbites absolues des 8 Planètes principales*. Tome I. pag. 394.

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \sin \varphi \left\{ \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - k \cos \varphi \right\} \\ \sqrt{1 + k^2 - 2k \cos \psi} &= \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - k \cos \varphi = \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} \\ \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 - 2k \cos \psi}} &= \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + k \cos \varphi}{1 - k^2} \\ \frac{d\psi}{\sqrt{1 + k^2 - 2k \cos \psi}} &= \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \end{aligned}$$

und hiermit geht die Jacobi'sche Relation über in:

$$115) \int_0^\pi \frac{\cos n\psi d\psi}{(1+k^2-2k\cos\psi)^{\frac{m}{2}}} = \frac{m(m+2)\dots[m+2(n-1)]}{1\cdot3\cdot5\dots(2n-1)} \frac{k^n}{(1-k^2)^{m-1}} \int_0^\pi \left\{ \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + k\cos\varphi \right\}^{m-1} \frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Diese Transformation können wir anwenden auf das Integral rechter Hand der Gleichung 114), indem wir $m = 1$ annehmen und erhalten:

$$R_n = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha'}{r'} \alpha^{n+1} (1-\lambda)^{\frac{n}{2}} \int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\lambda)\sin^2\varphi}}.$$

Da dies Integral zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ denselben Wert hat, wie zwischen den Grenzen $\frac{\pi}{2}$ und π , so wird, wenn wir den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen etwas anders schreiben:

$$\frac{1}{\pi} \alpha^{n+1} \int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\lambda)\sin^2\varphi}} = \frac{2}{\pi} \alpha^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi} \sqrt{1+\frac{\alpha^2\lambda\sin^2\varphi}{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}}.$$

Jetzt entwickeln wir endlich das Integral nach Potenzen von λ , und erhalten folgende Reihe:

$$116) \frac{1}{\pi} \alpha^{n+1} \int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\lambda)\sin^2\varphi}} = \gamma_{n,0} - \gamma_{n,1}\lambda + \gamma_{n,2}\lambda^2 - + \dots,$$

wo wir nach Gylden's Vorgang bezeichnen:

$$\begin{aligned} \beta_n^{(s)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{(1-\alpha^2\sin^2\varphi)^{\frac{s}{2}}} \\ 117) \quad \gamma_{n,0} &= \alpha^{n+1} \beta_n^{(1)}, \quad \gamma_{n,1} = \frac{1}{2} \alpha^{n+3} \beta_{n+1}^{(3)}, \quad \gamma_{n,2} = \frac{3}{8} \alpha^{n+5} \beta_{n+2}^{(5)} \\ \gamma_{n,\sigma} &= \frac{1\cdot3\cdot5\dots(2\sigma-1)}{2\cdot4\cdot6\dots2\sigma} \alpha^{n+2\sigma+1} \beta_{n+\sigma}^{(2\sigma+1)}, \end{aligned}$$

und hiermit wird:

$$118) \quad R_n = \frac{\alpha'}{r'} (1-\lambda)^{\frac{n}{2}} \{ \gamma_{n,0} - \gamma_{n,1} \lambda + \gamma_{n,2} \lambda^2 - + \dots \}:$$

Die Coefficienten $\gamma_{n,\sigma}$ hängen nur von dem Verhältnisse α ab, und sind ohne Schwierigkeiten zu berechnen. Für die $\beta_n^{(\sigma)}$ hat bereits Masal¹⁾ Tafeln hergestellt, aus denen man mit $\log \alpha$ als Argument diese Coefficienten entnehmen kann, und ähnliche Tafeln für die $\gamma_{n,\sigma}$ hat Gyldén kurz vor seinem Tode fertiggestellt²⁾.

Nun ist nach 108)

$$a(\Omega) = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{a}{(\mathcal{A})} - \frac{\alpha'}{r'} \alpha^2 (1-\lambda)^{\frac{1}{2}} \cos H_1 \right\};$$

es kommt also:

$$a(\Omega) = \frac{m'}{1+m} \left\{ R_0 + \left[2R_1 - \frac{\alpha'}{r'} \alpha^2 (1-\lambda)^{\frac{1}{2}} \right] \cos H_1 + 2R_2 \cos 2H_1 + \dots \right\}.$$

Wir schreiben:

$$\begin{aligned} a(\Omega) &= \Omega_0 + 2\Omega_1 \cos H_1 + 2\Omega_2 \cos 2H_1 + \dots \\ &= 2 \sum' \Omega_n \cos n H_1, \end{aligned}$$

wo der Accent am \sum -Zeichen bedeutet, dass im ersten Gliede der Reihe (für $n = 0$) der Faktor 2 zu unterdrücken ist; man hat also:

$$\Omega_n = \frac{m'}{1+m} R_n$$

für alle Werte von n , mit Ausnahme von $n = 1$, wo zu setzen ist:

$$\Omega_1 = \frac{m'}{1+m} \left\{ R_1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{r'} \alpha^2 (1-\lambda)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Bezeichnet man

$$119) \quad \bar{\gamma}_{1,0} = \gamma_{1,0} - \frac{\alpha^2}{2},$$

so ist

$$\Omega_n = \frac{m'}{1+m} \frac{\alpha'}{r'} (1-\lambda)^{\frac{n}{2}} \left\{ \bar{\gamma}_{n,0} - \gamma_{n,1} \lambda + \gamma_{n,2} \lambda^2 - + \dots \right\},$$

wo

$$\bar{\gamma}_{n,0} = \gamma_{n,0}$$

1) Hans Masal, Tables de l'Intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} \varphi d\varphi}{(1-\alpha^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{s}{2}}}$. Astronomiska Iakttagelser och

Undersökningar anställda på Stockholms Observatorium. Band IV. Heft 5.

2) Gyldén, Hülftafeln. Publication der astronomischen Gesellschaft. No. XXI.

zu nehmen ist, mit Ausnahme des Wertes $n = 1$, für den die Relation 119) gilt.

In der letzteren Gleichung für Ω_n sollen λ und r' durch die Grössen ϱ , ϱ' , η und η' ersetzt werden, nach deren Potenzen wir die Ω_n entwickeln.

Man hat

$$\lambda = 1 - \left(\frac{1 - \eta^2}{1 + \varrho} \right)^2 \left(\frac{1 + \varrho'}{1 - \eta'^2} \right)^2,$$

oder wenn man entwickelt und die Glieder dritten Grades noch berücksichtigt:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2\varrho - 2\varrho' \\ &\quad - 3\varrho + 4\varrho\varrho' - \varrho'^2 + 2\eta^2 - 2\eta'^2 \\ &\quad + 4\varrho^3 - 6\varrho^2\varrho' + 2\varrho\varrho'^2 - 4\varrho\eta^2 + 4\varrho'\eta^2 + 4\varrho\eta'^2 - 4\varrho'\eta'^2 \\ 120) \quad \lambda^2 &= 4\varrho^2 - 8\varrho\varrho' + 4\varrho'^2 \\ &\quad - 12\varrho^3 + 28\varrho^2\varrho' - 20\varrho\varrho'^2 + 4\varrho'^3 + 8\varrho\eta^2 - 8\varrho\eta'^2 - 8\varrho'\eta^2 - 8\varrho'\eta'^2 \\ \lambda^3 &= 8\varrho^3 - 24\varrho^2\varrho' - 24\varrho\varrho'^2 - 8\varrho'^3. \end{aligned}$$

Ferner bildet man leicht:

$$\begin{aligned} \frac{a'}{r'} (1 - \lambda)^{\frac{n}{2}} &= \frac{(1 + \varrho')^{n+1}}{(1 + \varrho)^n} \frac{(1 - \eta^2)^n}{(1 - \eta'^2)^{n+1}} \\ &= 1 - n\varrho + (n+1)\varrho' \\ 120a) \quad &+ \frac{n(n+1)}{2} \varrho^2 - (n+1)\varrho\varrho' + \frac{n(n+1)}{2} \varrho'^2 - n\eta^2 - (n+1)\eta'^2 \\ &- \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \varrho^3 + \frac{n(n+1)^2}{2} \varrho^2\varrho' - \frac{n^2(n+1)}{2} \varrho\varrho'^2 + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} \varrho'^3 \\ &+ n^2\varrho\eta^2 - n(n+1)\varrho'\eta^2 - n(n+1)\varrho\eta'^2 + (n+1)^2\varrho'\eta'^2. \end{aligned}$$

Diese Werte führen wir ein in den obigen Ausdruck für Ω_n , und setzen:

$$\begin{aligned} 121) \quad \Omega_n &= \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma \Omega_{(n.s.s')_{\nu,\nu'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \\ a(\Omega) &= 2\Sigma' \Omega_{(n.s.s')_{\nu,\nu'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos nH_1, \end{aligned}$$

wo ich statt des fünffachen Σ -Zeichens ein einfaches gesetzt habe, und wo der Faktor 2 für $n = 0$ zu unterdrücken ist.

Dann wird, wenn wir der Kürze halber in den rechten Seiten der folgenden Relationen¹⁾ den Faktor $\frac{m'}{1+m}$ fortlassen, und wenn wir die Indices ν und ν' ,

1) Siehe auch die pag. 24 citirte Abhandlung von Herrn Harzer, wo indessen für $\nu = 1$ die Ω -Coefficienten anderes Vorzeichen haben.

da wo sie beide gleich Null sind, ebenfalls fortlassen, also stets $\Omega_{n,s,s'}$ schreiben für $\Omega_{(n,s,s')_{00}}$:

$$\begin{aligned}
 122) \quad \Omega_{n,0,0} &= \bar{\gamma}_{n,0} \\
 \Omega_{n,1,0} &= -n\bar{\gamma}_{n,0} - 2\gamma_{n,1} \\
 \Omega_{n,0,1} &= (n+1)\bar{\gamma}_{n,0} + 2\gamma_{n,1} \\
 \Omega_{n,2,0} &= \frac{n(n+1)}{2}\bar{\gamma}_{n,0} + (2n+3)\gamma_{n,1} + 4\gamma_{n,2} \\
 \Omega_{n,1,1} &= -n(n+1)\bar{\gamma}_{n,0} - 2(2n+3)\gamma_{n,1} - 8\gamma_{n,2} \\
 \Omega_{n,0,2} &= \frac{n(n+1)}{2}\bar{\gamma}_{n,0} + (2n+3)\gamma_{n,1} + 4\gamma_{n,2} \\
 \Omega_{(n,0,0)_{1,0}} &= -n\bar{\gamma}_{n,0} - 2\gamma_{n,1} \\
 \Omega_{(n,0,0)_{0,1}} &= (n+1)\bar{\gamma}_{n,0} + 2\gamma_{n,1} \\
 \Omega_{n,3,0} &= -\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\bar{\gamma}_{n,0} - (n+2)^2\gamma_{n,1} - 4(n+3)\gamma_{n,2} - 8\gamma_{n,3} \\
 \Omega_{n,2,1} &= \frac{n(n+1)^2}{2}\bar{\gamma}_{n,0} + (3n^2+10n+9)\gamma_{n,1} + 4(3n+8)\gamma_{n,2} + 24\gamma_{n,3} \\
 \Omega_{n,1,2} &= -\frac{n^2(n+1)}{2}\bar{\gamma}_{n,0} - (3n^2+8n+6)\gamma_{n,1} - 4(3n+7)\gamma_{n,2} - 24\gamma_{n,3} \\
 \Omega_{n,0,3} &= \frac{(n-1)n(n+1)}{6}\bar{\gamma}_{n,0} + (n+1)^2\gamma_{n,1} + 4(n+2)\gamma_{n,2} + 8\gamma_{n,3} \\
 \Omega_{(n,1,0)_{1,0}} &= n^2\bar{\gamma}_{n,0} + 4(n+1)\gamma_{n,1} + 8\gamma_{n,2} \\
 \Omega_{(n,0,1)_{1,0}} &= -n(n+1)\bar{\gamma}_{n,0} - 2(2n+3)\gamma_{n,1} - 8\gamma_{n,2} \\
 \Omega_{(n,1,0)_{0,1}} &= -n(n+1)\bar{\gamma}_{n,0} - 2(2n+3)\gamma_{n,1} - 8\gamma_{n,2} \\
 \Omega_{(n,0,1)_{0,1}} &= (n+1)^2\bar{\gamma}_{n,0} + 4(n+2)\gamma_{n,1} + 8\gamma_{n,2}
 \end{aligned}$$

Man beachte die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 122a) \quad \Omega_{n,0,1} &= -\Omega_{n,1,0} + \Omega_{n,0,0} \\
 \Omega_{n,1,1} &= -2\Omega_{n,2,0} \\
 \Omega_{n,0,2} &= \Omega_{n,2,0} \\
 \Omega_{(n,0,0)_{1,0}} &= \Omega_{n,1,0} \\
 \Omega_{(n,0,0)_{0,1}} &= \Omega_{n,0,1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{n.2.1} &= -3\Omega_{n.3.0} - \Omega_{n.2.0} \\ \Omega_{n.1.2} &= 3\Omega_{n.3.0} + 2\Omega_{n.2.0} = -\Omega_{n.2.1} + \Omega_{n.2.0} \\ \Omega_{n.0.3} &= -\Omega_{n.3.0} - \Omega_{n.2.0} \\ \Omega_{(n.1.0)1.0} &= -\Omega_{n.1.1} + \Omega_{n.1.0} \\ \Omega_{(n.0.1)1.0} &= \Omega_{n.1.1} \\ \Omega_{(n.1.0)0.1} &= \Omega_{n.1.1} \\ \Omega_{(n.0.1)0.1} &= -\Omega_{n.1.1} + \Omega_{n.0.1} \end{aligned}$$

3. Wir wollen nun den Ausdruck $\frac{ad(\Omega)}{d \cos H_1}$ entwickeln. Nach 108) und 107) ist:

$$123) \quad \frac{ad(\Omega)}{d \cos H_1} = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{arr'}{(\mathcal{A})^3} - \frac{ar}{r'^2} \right\}.$$

Wir setzen:

$$\frac{arr'}{(\mathcal{A})^3} = \bar{R}_0 + 2\bar{R}_1 \cos H_1 + 2\bar{R}_2 \cos 2H_1 + \dots,$$

und haben nach dem Fourier'schen Theorem

$$\bar{R}_n = \frac{arr'}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\psi d\psi}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi)^{\frac{3}{2}}},$$

und, wenn wir wieder $\frac{r}{r'}$ mit k bezeichnen, sowie die Bezeichnung 112) anwenden, so wird:

$$\bar{R}_n = \frac{1}{\pi} \frac{a'}{r'} \alpha k \int_0^\pi \frac{\cos n\psi d\psi}{(1+k^2-2k \cos \psi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir erinnern uns nun der Transformationsformel 115), in der wir $m = 3$ zu setzen haben, und erhalten

$$\bar{R}_n = \frac{2n+1}{\pi} \frac{a'}{r'} \frac{\alpha k^{n+1}}{(1-k^2)^2} \left\{ (1+k^2) \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} \varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - 2k^2 \int_0^\pi \frac{\sin^{2(n+1)} \varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} + 2k \int_0^\pi \sin^{2n} \varphi \cos \varphi d\varphi \right\}.$$

Das letzte dieser drei Integrale ist gleich Null, und es wird also:

$$\bar{R}_n = \frac{2n+1}{\pi} \frac{a'}{r'} \frac{\alpha^{n+2}(1-\lambda)^{\frac{n+1}{2}}}{(1-\alpha^2+\alpha^2\lambda)^2} \left\{ (1+\alpha^2-\alpha^2\lambda) \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} \varphi d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\lambda)\sin^2 \varphi}} - 2\alpha^2(1-\lambda) \int_0^\pi \frac{\sin^{2(n+1)} \varphi d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\lambda)\sin^2 \varphi}} \right\}.$$

und wir setzen

$$\frac{ad(\Omega)}{d \cos H_1} = 2 \Sigma' \bar{\Omega}_n \cos n H_1,$$

wo für $n = 0$ wieder der Faktor 2 zu unterdrücken ist; man hat dann:

$$\bar{\Omega}_n = \frac{m'}{1+m} \bar{R}_n$$

für alle Werte von n mit Ausnahme von $n = 0$, wo zu setzen ist:

$$\bar{\Omega}_0 = \frac{m'}{1+m} \left\{ \bar{R}_0 - \frac{a'}{r'} a^2 (1-\lambda)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Schreibt man

$$129) \quad \bar{g}_{0.0} = g_{0.0} - \alpha^2,$$

so kommt

$$130) \quad \bar{\Omega}_n = \frac{m'}{1+m} \frac{a'}{r'} (1-\lambda)^{\frac{n+1}{2}} \{ \bar{g}_{n.0} - g_{n.1} \lambda + g_{n.2} \lambda^2 - + \dots \},$$

wo zu nehmen ist

$$\bar{g}_{n.0} = g_{n.0}$$

für alle Werte von n mit Ausnahme von $n = 0$, wo die Relation 129) gilt.

In die Gleichung 130) sollen nun statt r' und λ die Funktionen ϱ , ϱ' , η und η' eingeführt werden, nach deren Potenzen wir entwickeln. Dies ist leicht auszuführen, indem man sich der Entwicklungen 120) und 120a) erinnert, in deren letzterer man $n+1$ statt n zu setzen hat. Bezeichnet man:

$$\bar{\Omega}_n = \Sigma \Sigma \Sigma \Sigma \bar{\Omega}_{(n.s.s')\nu\nu'} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'},$$

oder

$$131) \quad \frac{ad(\Omega)}{d \cos H_1} = 2 \Sigma' \bar{\Omega}_{(n.s.s')\nu\nu'} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos n H_1,$$

so ist, wenn ich wieder den Faktor $\frac{m'}{1+m}$ fortlasse:

$$132) \quad \begin{aligned} \bar{\Omega}_{n.0.0} &= \bar{g}_{n.0} \\ \bar{\Omega}_{n.1.0} &= -(n+1) \bar{g}_{n.0} - 2g_{n.1} \\ \bar{\Omega}_{n.0.1} &= (n+2) \bar{g}_{n.0} + 2g_{n.1}. \end{aligned}$$

Diese Formeln ergeben sich übrigens auch sofort aus 122), wenn man dort g statt γ , und in den Faktoren durchgehends $n+1$ statt n setzt. Für unsere Zwecke brauchen wir nur die eben angeführten Coefficienten.

Es ist also nach dem Vorhergehenden mit Fortlassung von Gliedern vierten Grades

$$133) a\Omega = 2\sum' \Omega_{(n,s,s')_{v,v'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \cos nH_1 + 2\sum' \overline{\Omega}_{(n,s,s')_{v,v'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} h \cos nH_1,$$

wo h durch die Relation 106) gegeben ist.

4. Jetzt werde ich die Entwicklungen der Funktionen Q , P und Z geben. Nach 34a) haben wir

$$Q = \frac{\eta^2}{a(1-\eta^2)} \frac{\partial \Omega}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1-\eta^2}{(1+\varrho)^2} a\Omega \right].$$

Aus der Gleichung 133) folgt aber

$$\begin{aligned} \frac{1-\eta^2}{(1+\varrho)^2} a\Omega &= (1-\eta^2)(1-2\varrho+3\varrho^2-\dots) 2\sum' \Omega_{(n,s,s')_{v,v'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \cos nH_1 \\ &+ (1-\eta^2)(1-2\varrho+3\varrho^2-\dots) 2\sum' \overline{\Omega}_{(n,s,s')_{v,v'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} h \cos nH_1. \end{aligned}$$

Wenn man also setzt

$$134) \frac{1-\eta^2}{(1+\varrho)^2} a\Omega = 2\sum' Q_{(n,s,s')_{v,v'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \cos nH_1 + 2\sum' \overline{Q}_{(n,s,s')_{v,v'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} h \cos nH_1,$$

so folgt aus der Vergleichung der beiden letzten Gleichungen:

$$\begin{aligned} 135) \quad Q_{(n,s,s')_{v,v'}} &= \Omega_{(n,s,s')_{v,v'}} - 2\Omega_{(n,s-1,s')_{v,v'}} + 3\Omega_{(n,s-2,s')_{v,v'}} - + \dots \\ &\quad - \Omega_{(n,s,s')_{v-1,v'}} + 2\Omega_{(n,s-1,s')_{v-1,v'}} - 3\Omega_{(n,s-2,s')_{v-1,v'}} + \dots \\ \overline{Q}_{(n,s,s')_{v,v'}} &= \overline{\Omega}_{(n,s,s')_{v,v'}} - 2\overline{\Omega}_{(n,s-1,s')_{v,v'}} + \dots \\ &\quad - \overline{\Omega}_{(n,s,s')_{v-1,v'}} + 2\overline{\Omega}_{(n,s-1,s')_{v-1,v'}} - + \dots, \end{aligned}$$

wo diejenigen Ω -Coefficienten fortzulassen sind, welche negative Indices erhalten würden; dadurch werden diese nach den Ω -Coefficienten fortschreitenden Reihen endlich, und man hat speciell:

$$\begin{aligned} 135a) \quad Q_{n,0,0} &= \Omega_{n,0,0} & Q_{n,3,0} &= \Omega_{n,3,0} - 2\Omega_{n,2,0} + 3\Omega_{n,1,0} - 4\Omega_{n,0,0} \\ Q_{n,1,0} &= \Omega_{n,1,0} - 2\Omega_{n,0,0} & Q_{n,2,1} &= \Omega_{n,2,1} - 2\Omega_{n,1,1} + 3\Omega_{n,0,1} \\ Q_{n,0,1} &= \Omega_{n,0,1} & Q_{n,1,2} &= \Omega_{n,1,2} - 2\Omega_{n,0,2} \\ Q_{n,2,0} &= \Omega_{n,2,0} - 2\Omega_{n,1,0} + 3\Omega_{n,0,0} & Q_{n,0,3} &= \Omega_{n,0,3} \\ Q_{n,1,1} &= \Omega_{n,1,1} - 2\Omega_{n,0,1} & Q_{(n,1,0)_{1,0}} &= \Omega_{(n,1,0)_{1,0}} - 2\Omega_{(n,0,0)_{1,0}} - \Omega_{n,1,0} + 2\Omega_{n,0,0} \\ Q_{n,0,2} &= \Omega_{n,0,2} & Q_{(n,1,0)_{0,1}} &= \Omega_{(n,1,0)_{0,1}} - 2\Omega_{(n,0,0)_{0,1}} \\ Q_{(n,0,0)_{1,0}} &= \Omega_{(n,0,0)_{1,0}} - \Omega_{n,0,0} & Q_{(n,0,1)_{1,0}} &= \Omega_{(n,0,1)_{1,0}} - \Omega_{n,0,1} \\ Q_{(n,0,0)_{0,1}} &= \Omega_{(n,0,0)_{0,1}} & Q_{(n,0,1)_{0,1}} &= \Omega_{(n,0,1)_{0,1}} \\ \overline{Q}_{n,0,0} &= \overline{\Omega}_{n,0,0}. \end{aligned}$$

Um die Entwicklung von Q zu erhalten, brauchen wir jetzt nur 134) partiell nach v zu differenzieren; da

$$\frac{\partial \cos m H_1}{\partial v} = -m \sin m H_1,$$

so wird, bei Vernachlässigung von Gliedern dritten Grades:

$$\begin{aligned} 136) \quad Q &= -2\Sigma n Q_{(n.s.s')v,v'} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \sin n H_1 \\ &\quad - 2\Sigma n \bar{Q}_{n.0.0} h \sin n H_1 \\ &\quad + 2\Sigma' \bar{Q}_{n.0.0} \frac{\partial h}{\partial v} \cos n H_1. \end{aligned}$$

5. Zur Bildung des Ausdrucks von P erinnern wir uns der Relation 36a)

$$P = r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r} = -(1 - \eta^2) \frac{\partial (a\Omega)}{\partial \varrho},$$

welche wir mit Rücksicht auf 134) schreiben können:

$$\begin{aligned} P &= -(1 - \eta^2) 2\Sigma' s \Omega_{(n.s.s')v,v'} \varrho^{s-1} \varrho'^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \cos n H_1 \\ &\quad - (1 - \eta^2) 2\Sigma' s \bar{\Omega}_{(n.s.s')v,v'} \varrho^{s-1} \varrho'^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} h \cos n H_1. \end{aligned}$$

Wenn wir also P unter die folgende Form setzen:

$$137) \quad P = 2\Sigma' P_{(n.s.s')v,v'} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \cos n H_1 + 2\Sigma' \bar{P}_{(n.s.s')v,v'} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} h \cos n H_1,$$

so wird offenbar:

$$\begin{aligned} 138) \quad P_{(n.s.s')v,v'} &= -(s+1) \Omega_{(n.s+1.s')v,v'} + (s+1) \Omega_{(n.s+1.s')v-1,v'} \\ \bar{P}_{(n.s.s')v,v'} &= -(s+1) \bar{\Omega}_{(n.s+1.s')v,v'} + (s+1) \bar{\Omega}_{(n.s+1.s')v-1,v'}, \end{aligned}$$

wo wieder die Ω -Coefficienten mit negativen Indices fortzulassen sind. Man hat speciell:

$$\begin{aligned} 138a) \quad P_{n.0.0} &= -\Omega_{n.1.0} & P_{(n.0.0)1,0} &= -\Omega_{(n.1.0)1,0} + \Omega_{n.1.0} \\ P_{n.1.0} &= -2\Omega_{n.2.0} & P_{(n.0.0)0,1} &= -\Omega_{(n.1.0)0,1} \\ P_{n.0.1} &= -\Omega_{n.1.1} & \bar{P}_{n.0.0} &= -\bar{\Omega}_{n.1.0} \\ P_{n.2.0} &= -3\Omega_{n.3.0} \\ P_{n.1.1} &= -2\Omega_{n.2.1} \\ P_{n.0.2} &= -\Omega_{n.1.2} \end{aligned}$$

Mit Vernachlässigung von Gliedern dritten Grades ist dann

$$139) \quad P = 2\Sigma' P_{(n.s.s')_{v,v'}} \varrho^s \varrho^{s'} \eta^{2v} \eta^{2v'} \cos nH_1 \\ + 2\Sigma' \bar{P}_{n,0,0} h \cos nH_1.$$

6. Zur Bildung der Funktion Z haben wir Gleichung 71)

$$Z = \frac{m'}{1+m} \frac{r^3 r'}{a(1-\eta^2)} \left(\frac{1}{\mathcal{A}^3} - \frac{1}{r'^3} \right) (\mathfrak{z}' - \mathfrak{z} \cos H_1).$$

Wenn man setzt:

$$(Z) = \frac{m'}{1+m} \frac{r^3 r'}{a(1-\eta^2)} \left[\frac{1}{(\mathcal{A})^3} - \frac{1}{r'^3} \right] (\mathfrak{z}' - \mathfrak{z} \cos H_1),$$

so ist

$$Z = (Z) + \frac{d(Z)}{d \cos H_1} h + \dots$$

Da aber h zweiten Grades und \mathfrak{z} und \mathfrak{z}' ersten Grades sind, so ist mit Vernachlässigung der Glieder dritten Grades

$$Z = (Z).$$

Wir bezeichnen

$$140) \quad \bar{Z} = \frac{m'}{1+m} \frac{r^3 r'}{a(1-\eta^2)} \left[\frac{1}{(\mathcal{A})^3} - \frac{1}{r'^3} \right],$$

woraus folgt, mit entsprechender Genauigkeit

$$141) \quad Z = \bar{Z} (\mathfrak{z}' - \mathfrak{z} \cos H_1).$$

Mit Hilfe von Gleichung 123) wird aber:

$$\bar{Z} = \frac{1-\eta^2}{(1+\varrho)^2} \frac{a d(\mathcal{Q})}{d \cos H_1},$$

und bei Berücksichtigung von 131):

$$\bar{Z} = (1-\eta^2)(1-2\varrho+3\varrho^2-\dots) 2\Sigma' \bar{\mathcal{Q}}_{(n.s.s')_{v,v'}} \varrho^s \varrho^{s'} \eta^{2v} \eta^{2v'} \cos nH_1.$$

Wenn man also setzt:

$$142) \quad \bar{Z} = 2\Sigma' X_{(n.s.s')_{v,v'}} \varrho^s \varrho^{s'} \eta^{2v} \eta^{2v'} \cos nH_1,$$

so folgt aus der Vergleichung der beiden letzten Gleichungen:

$$143) \quad X_{(n.s.s')_{v,v'}} = \bar{\mathcal{Q}}_{(n.s.s')_{v,v'}} - 2\bar{\mathcal{Q}}_{(n.s-1.s)_{v,v'}} + 3\bar{\mathcal{Q}}_{(n.s-2.s)_{v,v'}} - \dots \\ - \bar{\mathcal{Q}}_{(n.s.s')_{v-1,v}} + 2\bar{\mathcal{Q}}_{(n.s-1.s)_{v-1,v}} - 3\bar{\mathcal{Q}}_{(n.s-2.s)_{v-1,v}} + \dots,$$

oder nach 135)

$$X_{(n,s,s')v,v'} = \bar{Q}_{(n,s,s')v,v'}.$$

Man erhält speciell:

$$\begin{aligned} 143a) \quad X_{n,0,0} &= \bar{\mathcal{Q}}_{n,0,0} \\ X_{n,1,0} &= \bar{\mathcal{Q}}_{n,1,0} - 2\bar{\mathcal{Q}}_{n,0,0} \\ X_{n,0,1} &= \bar{\mathcal{Q}}_{n,0,1}. \end{aligned}$$

Setzt man in gleicher Weise wie oben

$$144) \quad -\bar{Z} \cos H_1 = 2\Sigma' Y_{(n,s,s')v,v'} \varrho^s \varrho^{1s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \cos nH_1,$$

so hat man:

$$145) \quad Y_{(n,s,s')v,v'} = -\frac{X_{(n-1,s,s')v,v'} + X_{(n+1,s,s')v,v'}}{2}$$

für alle Werte von n mit Ausnahme von $n = 0$, wo zu nehmen ist:

$$145a) \quad Y_{(0,s,s')v,v'} = -X_{(1,s,s')v,v'}.$$

Aus den Entwicklungen 142) und 144) folgt aber sofort mit Rücksicht auf 141):

$$\begin{aligned} 146) \quad Z &= 2\Sigma' Y_{(n,s,s')v,v'} \varrho^s \varrho^{1s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \zeta \cos nH_1 \\ &+ 2\Sigma' X_{(n,s,s')v,v'} \varrho^s \varrho^{1s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \zeta' \cos nH_1. \end{aligned}$$

Fünftes Kapitel.

Transformation der für die Funktionen Q , P und Z gefundenen Ausdrücke.

1. Die Entwicklungen 136), 139) und 146) sind noch nicht unmittelbar anwendbar bei der Integration der Differentialgleichungen für die Funktionen S , ϱ und ζ , da sie die beiden Veränderlichen v und v' neben einander enthalten. Wir denken uns nämlich ϱ' , η' und ζ' als bekannte Funktionen von v' , und diese Grösse kommt auch im Winkel

$$H_1 = v - v' + (\Omega - \Sigma) - (\Omega' - \Sigma') = v - v' + \text{H} - \text{H}'$$

vor; auch $\Omega' - \Sigma'$ ist eine bekannte Funktion von v' . Wenn man eine scharfe Lösung des Problems beabsichtigt, so wird $\Omega' - \Sigma'$ durch eine der Gleichung 99) oder 100) ganz analoge Relation gegeben sein; ferner wird man nach 111) und in Analogie mit den Gleichungen 37) und 8) bis 12) zunächst haben:

$$\begin{aligned}
 r' &= \frac{a'(1-\eta'^2)}{1+\varrho'} \\
 \varrho' &= (\varrho)' + R' \\
 (\varrho)' &= \Sigma \kappa'_n \cos[(1-s'_n)v' - \Gamma'_n] \\
 147) \quad \eta' \cos \pi' &= \Sigma \kappa'_n \cos(\Gamma'_n + s'_n v') \\
 \eta' \sin \pi' &= \Sigma \kappa'_n \sin(\Gamma'_n + s'_n v') \\
 (\varrho)' &= \eta' \cos v' \\
 v' &= v' - \Pi'
 \end{aligned}$$

wo die Grössen κ'_n , s'_n , Γ'_n und die Funktion R' als bekannt vorausgesetzt werden. Man wird nun v' , und ebenso ϱ' und H_1 als Funktion von v allein ausdrücken, um in den Differentialgleichungen 34), 36) und 70) nur diese eine Veränderliche zu haben. Gylden hat im Jahre 1886 in seinen Vorlesungen auf dem Stockholmer Observatorium ein sehr schönes Verfahren gegeben, um diese Transformation von v' auf v auszuführen; dasselbe findet sich übrigens publicirt in seinem Werke „Traité des Orbites absolues etc.“ Da wir die Glieder dritten Grades hier vernachlässigen wollen, so können wir diese Transformationen auf sehr einfache Weise vornehmen.

Wenn wir die Bewegungskonstante n' des störenden Planeten durch die Relation

$$148) \quad n' = \frac{\sqrt{M'}}{a'^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{wo} \quad M' = k^2(1+m')$$

definiren, so haben wir ähnlich der Gleichung 57a)

$$149) \quad n't + A' = v' + \Sigma B'_n \sin n'v' + W',$$

wo die Funktion W' analog der Funktion W ist und ebenfalls als bekannt angesehen wird; übrigens können wir sie bei unseren Untersuchungen vernachlässigen, wie wir gleich des Näheren erörtern werden. Die Coefficienten B'_n sind ähnlich den B_n ; sie sind durch die Relationen 47) gegeben, wenn man dort η' für η schreibt.

Multiplirciren wir die Gleichung 57a) mit dem Verhältniss der Bewegungskonstanten

$$150) \quad \mu = \frac{n'}{n},$$

so haben wir

$$n't + \mu A = \mu v + \mu \Sigma B_n \sin nv + \mu W.$$

Vergleicht man diese Relation mit 149) und bezeichnet man

$$\begin{aligned} 151) \quad B &= A' - \mu A \\ G &= \mu \Sigma B_n \sin nv - \Sigma B'_n \sin nv', \end{aligned}$$

so ist:

$$152) \quad v' = \mu v + B + G + \mu W - W'.$$

Diese Gleichung dient dazu, v' und seine Funktionen durch v auszudrücken, nachdem man in G und W' ebenfalls v' durch v ersetzt hat.

Hierzu müssen wir zunächst in den Gleichungen 147) die Länge v als unabhängige Veränderliche einführen; die Relationen:

$$\eta' \frac{\cos}{\sin} \Pi' = \Sigma \kappa'_n \frac{\cos}{\sin} (\Gamma'_n + \zeta'_n v')$$

können wir nach 152) folgendermaassen schreiben:

$$\eta' \frac{\cos}{\sin} \Pi' = \Sigma \kappa'_n \frac{\cos}{\sin} \{ \Gamma'_n + \zeta'_n B + H - H' + \mu \zeta'_n v + \zeta'_n G + \mu \zeta'_n W - \zeta'_n W' - H + H' \}.$$

Die Funktion W kann, wie wir später sehen werden, einen secularen Teil enthalten, und die Funktionen H und H' enthalten ebenfalls einen solchen; ich will bezeichnen:

$$\begin{aligned} 153) \quad \text{p. sec. } W &= \bar{\gamma} v^1 \\ \mu_2 &= \mu (1 + \bar{\gamma}) \\ \text{p. sec. } H &= cv \\ \text{p. sec. } H' &= \text{p. sec. } c' v' = \mu_2 c' v, \end{aligned}$$

wo übrigens c und c' zweiten Grades sind. Weiter führe ich die Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} 153a) \quad \Gamma_n &= \Gamma'_n + \zeta'_n B \\ \zeta_n &= \mu_2 \zeta'_n - c + \mu_2 c' \\ \omega_n &= \Gamma_n + \zeta_n v. \end{aligned}$$

Dann kann ich die obigen Gleichungen, wie folgt, schreiben:

$$\begin{aligned} 153b) \quad \eta' \frac{\cos}{\sin} \Pi' &= \\ \Sigma \kappa'_n \frac{\cos}{\sin} (\omega_n + H - H') \mp \Sigma \{ \zeta'_n G + \mu \zeta'_n \bar{W} - \zeta'_n W' - \bar{H} + \bar{H}' \} \kappa'_n \frac{\sin}{\cos} (\omega_n + H - H') \pm \dots, \end{aligned}$$

1) „p. sec.“ brauche ich als Abkürzung für „pars secularis“.

wo der Strich über den Funktionen W , H und H' bedeutet, dass in ihnen der seculare Teil zu unterdrücken ist. Das zweite Glied rechter Hand ist teils dritten Grades, teils infolge Hinzutretens des Faktors ζ'_n ausserordentlich klein. Will man es behufs äusserster Genauigkeit doch berücksichtigen, so hat man für die Funktionen G u. s. w. ihre Werte einzusetzen, nachdem man sie bestimmt hat; es werden sich dann aus den Produkten teils Glieder der Form A , teils solche anderer Formen ergeben; die ersteren belässt man in der Gleichung 153b), während die übrigen in die Funktion R' übergeführt werden müssen; wie dies zu geschehen hat, wird man an der Hand der Relationen 147) unschwer übersehen.

Nach dem Gesagten schreibe ich also:

$$\begin{aligned} \eta' \frac{\cos}{\sin} \Pi'_1 &= \sum \kappa'_n \frac{\cos}{\sin} (\omega_n + H - H') \\ \varrho' &= (\varrho') + (R') \\ 154) \quad (\varrho') &= \sum \kappa'_n \cos (v' - \omega_n - H + H') = \eta' \cos (v' - \Pi'_1) = \eta' \cos v'_1 \\ v'_1 &= v' - \Pi'_1. \end{aligned}$$

Ich habe in diesen Gleichungen (ϱ') zum Unterschiede von (ϱ) und (R') zum Unterschiede von R' in 147) geschrieben; auch die κ'_n haben hier, streng genommen, eine etwas andere Bedeutung als dort, indem aus der Entwicklung der Gleichung 153b) noch Teile höherer Grade und Ordnungen zu ihnen hinzutreten; diese Unterschiede sind indessen so gering, dass sie für unsere Aufgabe garnicht in Betracht kommen und ich habe die vorstehenden Bemerkungen überhaupt nur gemacht für den Fall, dass man eine sehr weit gehende Lösung unseres Problems beabsichtigte.

Ferner habe ich in die Funktionen $\eta' \frac{\cos}{\sin} \Pi'_1$ dieselben Argumente ω_n eingeführt, welche nach 10) in $\eta \frac{\cos}{\sin} \Pi$ vorkommen; dass dieselben wirklich identisch sind, wird sich zeigen; jedoch auch, wenn dies nicht der Fall wäre, liesse sich gegen diese Bezeichnungweise nichts einwenden, da man nur den n verschiedene Werte zu erteilen brauchte.

Wenn ich nun noch setze:

$$154a) \quad \Pi_1 = \Pi'_1 - H + H',$$

so wird offenbar

$$154b) \quad \eta' \frac{\cos}{\sin} \Pi_1 = \sum \kappa'_n \frac{\cos}{\sin} \omega_n.$$

2. Nachdem wir jetzt η' und Π_1 als Funktionen von v ausgedrückt haben, kann die weitere Transformation in folgender Weise vor sich gehen; ich setze:

$$\begin{aligned}
 155) \quad U &= \mu W - W' - H + H' \\
 w_1 &= (1 - \mu)v - B - U \\
 v_1 &= v - H_1,
 \end{aligned}$$

und erhalte

$$\begin{aligned}
 155a) \quad H_1 &= w_1 - G \\
 v' &= -w_1 + v + G + H - H' \\
 v'_1 &= -w_1 + G + v_1.
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Relationen sollen nun die Argumente H_1 und v'_1 durch w_1 und v_1 ersetzt werden, indem man nach Potenzen von G entwickelt, welches offenbar vom ersten Grade ist. Diese Entwicklung können wir successive machen. Man hat mit Vernachlässigung der Glieder dritten Grades nach 151) und 47):

$$\begin{aligned}
 156) \quad G &= -2\mu\eta \sin v + 2\eta' \sin v'_1 \\
 &\quad + \frac{3}{4}\mu\eta^2 \sin 2v - \frac{3}{4}\eta'^2 \sin 2v'_1.
 \end{aligned}$$

Hierin habe ich v'_1 für v' geschrieben, da die Differenz beider Grössen für uns verschwindend ist. Wenn man will, kann man die Transformation unschwer ausführen, und die bei den Entwicklungen entstehenden äusserst kleinen Glieder theils in G belassen, theils mit Rücksicht auf die Relation 149) nach W' überführen.

Mit Vernachlässigung der Glieder zweiten Grades ist:

$$G = -2\mu\eta \sin v - 2\eta' \sin(w_1 - v_1).$$

Mit Hilfe dieses letzten Ausdrucks findet man aber bis zu den Gliedern zweiten Grades eingeschlossen:

$$\begin{aligned}
 \eta' \sin v'_1 &= -\eta' \sin(w_1 - v_1) + G\eta' \cos(w_1 - v_1) \\
 &= -\eta' \sin(w_1 - v_1) - \mu\eta\eta' \sin(w_1 + v - v_1) + \mu\eta\eta' \sin(w_1 - v - v_1) - \eta'^2 \sin(2w_1 - 2v_1) \\
 \eta'^2 \sin 2v'_1 &= -\eta'^2 \sin(2w_1 - 2v_1),
 \end{aligned}$$

und hieraus mit derselben Genauigkeit nach 156):

$$\begin{aligned}
 G &= -2\mu\eta \sin v - 2\eta' \sin(w_1 - v_1) \\
 &\quad + \frac{3}{4}\mu\eta^2 \sin 2v - \mu\eta\eta' \sin(w_1 + v - v_1) + 2\mu\eta\eta' \sin(w_1 - v - v_1) - \frac{5}{4}\eta'^2 \sin(2w_1 - 2v_1) \\
 156a) \quad G^2 &= 2\mu^2 \eta^2 - 2\mu^2 \eta^2 \cos 2v \\
 &\quad - 4\mu\eta\eta' \cos(w_1 + v - v_1) + 4\mu\eta\eta' \cos(w_1 - v - v_1) \\
 &\quad + 2\eta'^2 - 2\eta'^2 \cos(2w_1 - 2v_1).
 \end{aligned}$$

Man bildet nun endlich ohne Schwierigkeit die folgenden Entwicklungen von $\cos n H_1$ und $\sin n H_1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos}{\sin} n H_1 &= \frac{\cos}{\sin} n w_1 \pm n G \frac{\sin}{\cos} n w_1 - \frac{n^2 G^2}{2} \frac{\cos}{\sin} n w_1 \\
&= \frac{\cos}{\sin} n w_1 + n \mu \eta \frac{\cos}{\sin} (n w_1 + v) && - n^2 \mu^2 \eta^2 && \frac{\cos}{\sin} n w_1 \\
&&& - n \mu \eta \frac{\cos}{\sin} (n w_1 - v) && + \left[\frac{n^2 \mu^2}{2} - \frac{3}{8} n \mu \right] \eta^2 \frac{\cos}{\sin} (n w_1 + 2v) \\
&&& - n \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n-1) w_1 + v_1] && + \left[\frac{n^2 \mu^2}{2} + \frac{3}{8} n \mu \right] \eta^2 \frac{\cos}{\sin} (n w_1 - 2v) \\
&&& + n \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n+1) w_1 - v_1] && - n(n-1) \mu \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n-1) w_1 + v + v_1] \\
157) &&& && + n(n+1) \mu \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n+1) w_1 + v - v_1] \\
&&& && + n(n-1) \mu \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n-1) w_1 - v + v_1] \\
&&& && - n(n+1) \mu \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n+1) w_1 - v - v_1] \\
&&& && - n^2 \eta'^2 && \frac{\cos}{\sin} n w_1 \\
&&& && + \left[\frac{n^2}{2} - \frac{5}{8} n \right] \eta'^2 && \frac{\cos}{\sin} [(n-2) w_1 + 2v_1] \\
&&& && + \left[\frac{n^2}{2} + \frac{5}{8} n \right] \eta'^2 && \frac{\cos}{\sin} [(n+2) w_1 - 2v_1].
\end{aligned}$$

3. Die vorstehenden Ausdrücke dienen zur Darstellung der Produkte

$$\varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \frac{\cos}{\sin} n H_1$$

als explicite Funktionen von v .

In allen Fällen, auf die wir gegenwärtig Rücksicht nehmen, können wir die Funktion R' sowie die in den Argumenten auftretende Funktion W' vernachlässigen. Die Gründe hierfür sind leicht zu ersehen; indessen will ich sie hier auseinandersetzen, damit kein Zweifel an der Berechtigung dieses Verfahrens entstehe. Die genannten Funktionen enthalten natürlich einige grosse Glieder, vor allem die sogenannten grossen Ungleichheiten in der Bewegung Jupiters, die durch Saturn veranlasst werden, da seine mittlere Bewegung zu der Jupiters sehr nahe im Verhältniss $\frac{2}{5}$ steht. Dieselben sind mit der Saturnsmasse multiplicirt und erhalten bei uns noch einen der Faktoren $\Omega_{(n.s.s'),v,v'}$, die rein erster Ordnung sind. Die von diesen Funktionen abhängigen Glieder sind also von vornherein sehr klein; die zu ihnen gehörigen Argumente hängen aber ab von der mittleren Bewegung *Saturns*; sie können also durch die Integration nur

vergrössert werden, wenn zwischen der mittleren Bewegung des gestörten Planeten und derjenigen Saturns genäherte Commensurabilität besteht; und in diesem Falle würde man, ehe man auf sie Rücksicht nimmt, die direkten Saturnstörungen berechnen müssen, die natürlich grösser sind. Aber auch diese letzteren liegen im Allgemeinen unterhalb der Grösse, die ich mir in dieser Arbeit als Genauigkeitsgrenze gesteckt habe. Will man eine grössere Genauigkeit erreichen, oder handelt es sich um einen Planeten, der ganz aussergewöhnliche Saturnstörungen erleidet (oder zu erleiden scheint), so hindert nichts, wie schon anfangs bemerkt, die von uns gegebenen Entwicklungen weiter auszudehnen.

Im Gegensatz hierzu können wir die Funktionen R und W nicht als klein betrachten, da sie nicht nur in vielen Fällen thatsächlich sehr gross sind und sogar grösser sein können als die Excentrität der ungestörten Bahn, sondern da sie auch immer wieder zu solchen Gliedern höherer Ordnung Anlass geben, die durch den Integrationsprocess weiter vergrössert werden.

Eingehende Betrachtungen haben mich dazu geführt, allgemein die dritten Potenzen dieser Grössen zu vernachlässigen, und grösstenteils, aber nicht immer, auch die zweiten.

Nach dem Vorhergehenden haben wir die Relationen

$$(\varrho) = \eta \cos v$$

$$(\varrho') = \eta' \cos v_1' = \eta' \cos (w_1 - v_1) + G\eta' \sin (w_1 - v_1)$$

$$= \eta' \cos (w_1 - v_1) + \mu \eta \eta' \cos (w_1 + v - v_1) - \mu \eta \eta' \cos (w_1 - v - v_1) - \eta'^2 + \eta'^2 \cos (2w_1 - 2v_1)$$

158)

$$(\varrho)^2 = \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\eta^2 \cos 2v$$

$$(\varrho)(\varrho') = \frac{1}{2}\eta\eta' \cos (w_1 + v - v_1) + \frac{1}{2}\eta\eta' \cos (w_1 - v - v_1)$$

$$(\varrho')^2 = \frac{1}{2}\eta'^2 + \frac{1}{2}\eta'^2 \cos (2w_1 - 2v_1),$$

und hieraus folgen mit Rücksicht auf 157) die Entwicklungen:

$$159) \quad (\varrho) \frac{\cos}{\sin} nH_1 = \frac{1}{2}\eta \frac{\cos}{\sin} (nw_1 + v) + \frac{1}{2}n\mu\eta^2 \frac{\cos}{\sin} (nw_1 + 2v)$$

$$+ \frac{1}{2}\eta \frac{\cos}{\sin} (nw_1 - v) - \frac{1}{2}n\mu\eta^2 \frac{\cos}{\sin} (nw_1 - 2v)$$

$$- \frac{1}{2}n\eta\eta' \frac{\cos}{\sin} [(n-1)w_1 + v + v_1]$$

$$+ \frac{1}{2}n\eta\eta' \frac{\cos}{\sin} [(n+1)w_1 + v - v_1]$$

$$- \frac{1}{2}n\eta\eta' \frac{\cos}{\sin} [(n-1)w_1 - v + v_1]$$

$$+ \frac{1}{2}n\eta\eta' \frac{\cos}{\sin} [(n+1)w_1 - v - v_1]$$

$$\begin{aligned}
(\varrho') \frac{\cos}{\sin} nH_1 = & \frac{1}{2} \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n-1)w_1 + v_1] + \frac{1}{2} (n-1) \mu \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n-1)w_1 + v + v_1] \\
& + \frac{1}{2} \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n+1)w_1 - v_1] + \frac{1}{2} (n+1) \mu \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n+1)w_1 + v - v_1] \\
& - \frac{1}{2} (n-1) \mu \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n-1)w_1 - v + v_1] \\
& - \frac{1}{2} (n+1) \mu \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n+1)w_1 - v - v_1] \\
159) \quad & - \eta'^2 \frac{\cos}{\sin} nw_1 \\
& - \frac{1}{2} (n-1) \eta'^2 \frac{\cos}{\sin} [(n-2)w_1 + 2v_1] \\
& + \frac{1}{2} (n+1) \eta'^2 \frac{\cos}{\sin} [(n+2)w_1 - 2v_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varrho)^2 \frac{\cos}{\sin} nH_1 = & \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\cos}{\sin} nw_1 \\
& + \frac{1}{4} \eta^2 \frac{\cos}{\sin} (nw_1 + 2v) \\
& + \frac{1}{4} \eta^2 \frac{\cos}{\sin} (nw_1 - 2v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varrho)(\varrho') \frac{\cos}{\sin} nH_1 = & \frac{1}{4} \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n-1)w_1 + v + v_1] \\
& + \frac{1}{4} \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n+1)w_1 + v - v_1] \\
& + \frac{1}{4} \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n-1)w_1 - v + v_1] \\
& + \frac{1}{4} \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n+1)w_1 - v - v_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varrho')^2 \frac{\cos}{\sin} nH_1 = & \frac{1}{2} \eta'^2 \frac{\cos}{\sin} nw_1 \\
& + \frac{1}{4} \eta'^2 \frac{\cos}{\sin} [(n-2)w_1 + 2v_1] \\
& + \frac{1}{4} \eta'^2 \frac{\cos}{\sin} [(n+2)w_1 - 2v_1].
\end{aligned}$$

Nachdem wir nun die Ausdrücke $(\varrho)(\varrho')^s \frac{\cos}{\sin} nH_1$ bis zu den Gliedern zweiten Grades gebildet haben, bietet die Bildung der vollständigen Produkte

$$\varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \frac{\cos}{\sin} nH_1$$

keine Schwierigkeiten mehr; man vernachlässigt R' und setzt:

$$\varrho^s = (\varrho)^s + s(\varrho)^{s-1}R + \frac{s(s-1)}{2}(\varrho)^{s-2}R^2 + \dots;$$

und erhält z. B. bei der Entwicklung der Funktion Q :

$$\begin{aligned} 160) \quad & 2 \sum' n Q_{(n,s,s')v,v'} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \sin nH_1 = \\ & = 2 \sum' n \left\{ Q_{(n,s,s')v,v'} + (s+1) Q_{(n,s+1,s')v,v'} R + \frac{(s+1)(s+2)}{2} Q_{(n,s+2,s')v,v'} R^2 + \dots \right\} (\varrho)^s (\varrho')^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \sin nH_1. \end{aligned}$$

4. Um endlich die definitive Form herzustellen, die ich den Funktionen Q , P und Z geben will, transformiren wir schliesslich noch das Argument:

$$w_1 = (1 - \mu)v - B - U.$$

Es ist nach 155)

$$U = \mu W - W' - H + H'.$$

Die Funktion U enthält keine Constante, da die constanten Glieder in B aufgenommen sind, aber sie wird im Allgemeinen ein seculares Glied enthalten; dasselbe kommt auf folgende Weise zu Stande:

Die Differentialgleichung 59) für W enthält rechter Hand verschiedene constante Glieder, sowohl erster wie höherer Ordnungen. Der wichtigste Teil erster Ordnung entsteht aus den Gliedern $S - 2R$, und wenn wir mit a_0 den constanten Teil von S , mit b_0 den constanten Teil von R bezeichnen, so ist der constante Teil von $\frac{dW}{dv}$, soweit er erster Ordnung ist, im Wesentlichsten

$$c_0 = a_0 - 2b_0.$$

Nun ist a_0 die Integrationsconstante, welche bei Integration der Gleichung 34) entsteht (und welche wir auch schon in Gleichung 6) so bezeichnet haben); und zwar ist diese Integrationsconstante eine überzählige, über welche wir verfügen können. Jedenfalls müssen wir sie so wählen, dass sie höchstens eine Grösse rein erster Ordnung wird, denn sonst würde man bei den Entwicklungen nach Potenzen von S auf Unannehmlichkeiten stossen. Wie sich später zeigen wird, ist bei einer derartigen Wahl von a_0 auch b_0 eine Grösse rein erster Ordnung. Es erscheint nun am Einfachsten, wenn man a_0 so bestimmt, dass der constante Teil von $\frac{dW}{dv}$ verschwindet, und wir werden auch in der Regel so verfahren¹⁾.

1) Siehe Kap. VI. § 2. Nr. 4.

Indessen giebt es Fälle, in denen es nicht möglich ist, den constanten Teil von $\frac{dW}{dv}$ zum Verschwinden zu bringen; handelt es sich nämlich um einen Planeten, dessen mittlere Bewegung besonders nahe commensurabel ist mit derjenigen Jupiters, und enthält infolgedessen die Funktion R eines oder mehrere auffallend grosse Glieder, so ist der constante Teil von $3R^2$, welche Grösse in der rechten Seite der Gleichung 59) auftritt, grösser als die störende Masse, obwohl er zweiter Ordnung ist; um den constanten Teil von $\frac{dW}{dv}$ zum Verschwinden zu bringen, müsste dann a_0 erheblich gross gewählt werden, und man würde überhaupt bei einem solchen Verfahren zu divergenten Resultaten geführt werden. In den besonders schwierigen Fällen des Systems der kleinen Planeten ist also die Annullirung des constanten Theils rechter Hand der Gleichung 59) nicht ausführbar; und wir wollen deshalb die Summe der constanten Glieder rechter Hand dieser Gleichung, welche rein erster Ordnung oder kleiner sind, mit c_0 , den Teil aber, welcher gross ist im Verhältniss zur störenden Masse, und hauptsächlich aus dem Gliede $3R^2$ entsteht, mit γ bezeichnen; dann kann man schreiben:

$$161) \quad \frac{dW}{dv} = c_0 + \gamma + \text{periodische Glieder.}$$

Man hat sich nur zu erinnern, dass c_0 stets zum Verschwinden gebracht werden kann, und dass γ nur bei denjenigen Planeten von Null verschieden ist, deren mittlere Bewegung äusserst nahe commensurabel ist mit der Jupiters und die unter die Klasse der kritischen Planeten (Kap. VII. § 1) fallen. Als Maximalwert, den γ überhaupt erreicht, kann man eine Grösse annehmen, welche mit dem Quadrat der elliptischen Excentricität verglichen werden kann, und zwar deshalb, weil der Maximalwert von R eben mit der elliptischen Excentricität vergleichbar ist. Uebrigens sind wohl von den bis jetzt entdeckten Planeten nur Hilda (153) und Ismene (190) als kritisch anzusehen und auch von diesen ist es zweifelhaft.

Wenn wir aber den Ausdruck 161) integriren, so entsteht in W nicht nur das seculare Glied $(c_0 + \gamma)v$, sondern auch die Integration der periodischen Glieder erzeugt einen secularen Teil, welcher mindestens zweiten Grades ist. Es ist dies die Folge unseres in den folgenden Kapiteln zu behandelnden Integrationsverfahrens, das ich nach dem Vorgange Gyldén's anwende, und mit Hilfe dessen wir in allen Fällen zu brauchbaren Entwicklungen gelangen.

Man erhält W in der Form:

$$161a) \quad W = (c_0 + \gamma + \gamma_0)v + \text{periodische Glieder,}$$

und nach pag. 61 haben wir:

$$\bar{\gamma} = c_0 + \gamma + \gamma_0.$$

Es wird sich zeigen, dass γ stets positiv ist, während γ_0 auch negativ sein kann, aber mindestens zweiten Grades ist.

Von der Funktion W' , welche wir vernachlässigen, kann man annehmen, dass sie keinen secularen Teil enthält, da die Störungen, denen Jupiter ausgesetzt ist, so klein sind, dass man diesen Teil zum Verschwinden bringen kann.

Die Funktionen H und H' enthalten beide einen secularen Teil, der zweiten Grades und ausserordentlich klein ist, und den man aus den Gleichungen 100) und 93) entnimmt. Nach 153) hatten wir bezeichnet:

$$\begin{aligned} \text{p. sec. } H &= cv \\ \text{p. sec. } H' &= \mu_2 c' v \\ \mu_2 &= \mu (1 + \bar{\gamma}). \end{aligned}$$

Es ist also:

$$\text{p. sec. } w_1 = (1 - \mu)v - \mu(c_0 + \gamma + \gamma_0)v + (c - \mu_2 c')v = (1 - \mu_2)v + (c - \mu_2 c')v,$$

aber

$$\text{p. const. } \frac{dw_1}{dv} = 1 - \mu - \mu(c_0 + \gamma) + c - \mu_2 c'.$$

Wenn wir nun U , wie folgt, zerlegen:

$$162) \quad U = \mu(c_0 + \gamma)v + \mu K + \mu V,$$

wo die Funktionen K und V gleich definirt werden sollen, und wenn wir bezeichnen:

$$163) \quad \mu_1 = \mu(1 + c_0 + \gamma),$$

so wird:

$$w_1 = (1 - \mu_1)v - B - \mu K - \mu V.$$

Die Funktion V soll so bestimmt werden, dass sie alle Glieder der Formen A und C enthält, welche in w_1 vorkommen, während alle anderen periodischen Glieder zu K gezogen werden; ferner soll K kein seculares Glied enthalten. Es ist dann:

$$\text{p. sec. } V = \gamma_0 v - (c - \mu_2 c')v,$$

und

$$\text{p. const. } \frac{dV}{dv} = -c + \mu_2 c'.$$

Nun endlich setzen wir:

$$164) \quad w = (1 - \mu_1)v - B - \mu V,$$

woraus folgt:

$$w_1 = w - \mu K,$$

und führen in die obigen Entwicklungen für $\varrho^s \varrho^{s'} \frac{\cos}{\sin} n H_1$ statt des Winkels w_1 den Winkel w ein, indem wir nach Potenzen von K entwickeln.

5. Es ist nun nicht schwer, mit Hilfe der Entwicklungen 159), sowie der Formel 160), und indem man, wie eben bemerkt, nach Potenzen von K entwickelt, den Ausdruck 136) für die Funktion Q in die folgende definitive Form überzuführen:

$$\begin{aligned}
 Q = & \Sigma A_{n,0,0} \sin nw & + \Sigma A_{n,0,0}^{1,0} R \sin nw & - \Sigma n \mu A_{n,0,0} K \cos nw \\
 & + \Sigma A_{n,0,0}^{2,0} R^2 \sin nw & - \Sigma n \mu A_{n,0,0}^{1,0} R K \cos nw & - \frac{1}{2} \Sigma n^2 \mu^2 A_{n,0,0} K^2 \sin nw \\
 & + \Sigma A_{n,1,0}^{(+1)} \eta \sin (nw + v) & + \Sigma A_{n,1,0}^{(+1,0)} R \eta \sin (nw + v) & - \Sigma n \mu A_{n,1,0}^{(+1)} K \eta \cos (nw + v) \\
 & + \Sigma A_{n,1,0}^{(-1)} \eta \sin (nw - v) & + \Sigma A_{n,1,0}^{(-1,0)} R \eta \sin (nw - v) & - \Sigma n \mu A_{n,1,0}^{(-1)} K \eta \cos (nw - v) \\
 & + \Sigma A_{n,0,1}^{(+1)} \eta' \sin (nw + v_1) & + \Sigma A_{n,0,1}^{(+1,0)} R \eta' \sin (nw + v_1) & - \Sigma n \mu A_{n,0,1}^{(+1)} K \eta' \cos (nw + v_1) \\
 & + \Sigma A_{n,0,1}^{(-1)} \eta' \sin (nw - v_1) & + \Sigma A_{n,0,1}^{(-1,0)} R \eta' \sin (nw - v_1) & - \Sigma n \mu A_{n,0,1}^{(-1)} K \eta' \cos (nw - v_1) \\
 & + \Sigma A_{n,2,0} \eta^2 \sin nw & + \Sigma A_{n,2,0}^{1,0} R \eta^2 \sin nw & - \Sigma n \mu A_{n,2,0} K \eta^2 \cos nw \\
 & + \Sigma A_{n,2,0}^{(+2)} \eta^2 \sin (nw + 2v) & + \Sigma A_{n,2,0}^{(+2,0)} R \eta^2 \sin (nw + 2v) & - \Sigma n \mu A_{n,2,0}^{(+2)} K \eta^2 \cos (nw + 2v) \\
 165) & + \Sigma A_{n,2,0}^{(-2)} \eta^2 \sin (nw - 2v) & + \Sigma A_{n,2,0}^{(-2,0)} R \eta^2 \sin (nw - 2v) & - \Sigma n \mu A_{n,2,0}^{(-2)} K \eta^2 \cos (nw - 2v) \\
 & + \Sigma A_{n,1,1}^{(+2)} \eta \eta' \sin (nw + v + v_1) + \Sigma A_{n,1,1}^{(+2,1,0)} R \eta \eta' \sin (nw + v + v_1) & - \Sigma n \mu A_{n,1,1}^{(+2)} K \eta \eta' \cos (nw + v + v_1) \\
 & + \Sigma A_{n,1,1}^{(+1)} \eta \eta' \sin (nw + v - v_1) + \Sigma A_{n,1,1}^{(+1,1,0)} R \eta \eta' \sin (nw + v - v_1) & - \Sigma n \mu A_{n,1,1}^{(+1)} K \eta \eta' \cos (nw + v - v_1) \\
 & + \Sigma A_{n,1,1}^{(-1)} \eta \eta' \sin (nw - v + v_1) + \Sigma A_{n,1,1}^{(-1,1,0)} R \eta \eta' \sin (nw - v + v_1) & - \Sigma n \mu A_{n,1,1}^{(-1)} K \eta \eta' \cos (nw - v + v_1) \\
 & + \Sigma A_{n,1,1}^{(-2)} \eta \eta' \sin (nw - v - v_1) + \Sigma A_{n,1,1}^{(-2,1,0)} R \eta \eta' \sin (nw - v - v_1) & - \Sigma n \mu A_{n,1,1}^{(-2)} K \eta \eta' \cos (nw - v - v_1) \\
 & + \Sigma A_{n,0,2} \eta'^2 \sin nw & + \Sigma A_{n,0,2}^{1,0} R \eta'^2 \sin nw & - \Sigma n \mu A_{n,0,2} K \eta'^2 \cos nw \\
 & + \Sigma A_{n,0,2}^{(+2)} \eta'^2 \sin (nw + 2v_1) & + \Sigma A_{n,0,2}^{(+2,1,0)} R \eta'^2 \sin (nw + 2v_1) & - \Sigma n \mu A_{n,0,2}^{(+2)} K \eta'^2 \cos (nw + 2v_1) \\
 & + \Sigma A_{n,0,2}^{(-2)} \eta'^2 \sin (nw - 2v_1) & + \Sigma A_{n,0,2}^{(-2,1,0)} R \eta'^2 \sin (nw - 2v_1) & - \Sigma n \mu A_{n,0,2}^{(-2)} K \eta'^2 \cos (nw - 2v_1) \\
 & & + Q_i.
 \end{aligned}$$

Ich habe hier mit Q_i denjenigen Teil von Q bezeichnet, der von den Neigungen abhängt und den ich in No. 7 dieses Kapitels entwickeln will. Vernachlässigt habe ich R' , W' , die dritten Potenzen von R und K , und endlich die zweiten Potenzen dieser Funktionen, wenn sie noch mit η oder η' multiplicirt sind, sowie die Glieder dritten Grades.

Die Wahl der Indices für die A -Coefficienten hoffe ich in möglichst über-

sichtlicher Weise getroffen zu haben: von den unteren Indices giebt der erste den Faktor von w , der zweite die Potenz von η , der dritte die Potenz von η' ; von den oberen Indices giebt der mit einem Vorzeichen versehene die ganze Zahl, mit der v oder v_1 , oder auch beide multiplicirt sind; von den beiden anderen oberen Indices giebt der erste die Potenz von R , der zweite die von R' ; der letztere ist natürlich hier stets Null.

Für die A -Coefficienten findet man schliesslich die folgenden Ausdrücke ¹⁾, wo ich der grösseren Klarheit wegen für die Coefficienten, deren Index n gleich Null ist, die Werte ausdrücklich hingeschrieben habe, da sie einerseits halb zu nehmen sind, andererseits sich teilweise zusammenziehen lassen. In einem Falle habe ich dies auch für $n = 1$ gethan; es dürfte somit in den angeführten Formeln keine Unklarheit sein.

$$166) A_{n,0,0} = -2n Q_{n,0,0},$$

$$A_{0,0,0} = 0$$

$$A_{n,1,0}^{(+1)} = -n \{ Q_{n,1,0} + 2n\mu Q_{n,0,0} \},$$

$$A_{0,1,0}^{(+1)} = 0$$

$$A_{n,1,0}^{(-1)} = -n \{ Q_{n,1,0} - 2n\mu Q_{n,0,0} \},$$

$$A_{0,1,0}^{(-1)} = 0$$

$$A_{n,0,1}^{(+1)} = -(n+1) \{ Q_{n+1,0,1} - 2(n+1) Q_{n+1,0,0} \},$$

$$A_{0,0,1}^{(+1)} = -Q_{1,0,1} + 2Q_{1,0,0}$$

$$A_{n,0,1}^{(-1)} = -(n-1) \{ Q_{n-1,0,1} + 2(n-1) Q_{n-1,0,0} \},$$

$$A_{0,0,1}^{(-1)} = 0$$

$$A_{n,2,0} = -n \{ Q_{n,2,0} - 2n^2 \mu^2 Q_{n,0,0} + 2Q_{(n,0,0)_{1,0}} \}, \quad A_{0,2,0} = 0$$

$$A_{n,2,0}^{(+2)} = -n \left\{ \frac{1}{2} Q_{n,2,0} + n\mu Q_{n,1,0} + (n^2 \mu^2 - \frac{3}{4} n\mu) Q_{n,0,0} \right\}, \quad A_{0,2,0}^{(+2)} = 0$$

$$A_{n,2,0}^{(-2)} = -n \left\{ \frac{1}{2} Q_{n,2,0} - n\mu Q_{n,1,0} + (n^2 \mu^2 + \frac{3}{4} n\mu) Q_{n,0,0} \right\}, \quad A_{0,2,0}^{(-2)} = 0$$

$$A_{n,1,1}^{(+2)} = -(n+1) \left\{ \frac{1}{2} Q_{n+1,1,1} - (n+1) Q_{n+1,1,0} + n\mu Q_{n+1,0,1} - 2n(n+1)\mu Q_{n+1,0,0} \right\}, \quad A_{0,1,1}^{(+2)} = -\frac{1}{2} Q_{1,1,1} + Q_{1,1,0}$$

$$A_{n,1,1}^{(+1)} = -(n-1) \left\{ \frac{1}{2} Q_{n-1,1,1} + (n-1) Q_{n-1,1,0} + n\mu Q_{n-1,0,1} + 2n(n-1)\mu Q_{n-1,0,0} \right\}, \quad A_{0,1,1}^{(+1)} = \frac{1}{2} Q_{1,1,1} - Q_{1,1,0}$$

$$A_{n,1,1}^{(-1)} = -(n+1) \left\{ \frac{1}{2} Q_{n+1,1,1} - (n+1) Q_{n+1,1,0} - n\mu Q_{n+1,0,1} + 2n(n+1)\mu Q_{n+1,0,0} \right\}, \quad A_{0,1,1}^{(-1)} = 0$$

$$A_{n,1,1}^{(-2)} = -(n-1) \left\{ \frac{1}{2} Q_{n-1,1,1} + (n-1) Q_{n-1,1,0} - n\mu Q_{n-1,0,1} - 2n(n-1)\mu Q_{n-1,0,0} \right\}, \quad A_{0,1,1}^{(-2)} = 0$$

1) In seinen bereits pag. 50 erwähnten „Hülftafeln“ giebt Gylden die numerischen Werte der A - und B -Coefficienten. Der Umstand, dass diese Coefficienten bei uns in anderer Form auftreten, als bei Gylden, ist gewiss etwas hinderlich bei Benutzung dieser Tafeln. Indessen scheinen mir die Vorteile der hier angewandten Bezeichnungsweise so bedeutende, dass ich nicht davon abgehen wollte, namentlich da die Gylden'sche Bezeichnung nicht immer eindeutig ist. — Ausserdem muss ich bemerken, dass unsere A - und B -Coefficienten von der Apsidenbewegung vollkommen unabhängig, ihre Werte also strenge sind. Vgl. die Bemerkung auf pag. X in den Hülftafeln.

$$\begin{aligned}
A_{n,0,2} &= -n \{ Q_{n,0,2} - 2Q_{n,0,1} - 2n^2 Q_{n,0,0} + 2Q_{(n,0,0)_{0,1}} \}, & A_{0,0,2} &= 0 \\
A_{n,0,2}^{(+2)} &= -(n+2) \left\{ \frac{1}{2} Q_{n+2,0,2} - (n+1) Q_{n+2,0,1} + \left(n^2 + \frac{11}{4}n + \frac{3}{2} \right) Q_{n+2,0,0} \right\}, & A_{0,0,2}^{(+2)} &= -Q_{2,0,2} + 2Q_{2,0,1} - 3Q_{2,0,0} \\
A_{n,0,2}^{(-2)} &= -(n-2) \left\{ \frac{1}{2} Q_{n-2,0,2} + (n-1) Q_{n-2,0,1} + \left(n^2 - \frac{11}{4}n + \frac{3}{2} \right) Q_{n-2,0,0} \right\}, & A_{0,0,2}^{(-2)} &= 0 \\
& & A_{1,0,2}^{(-2)} &= \frac{1}{2} Q_{1,0,2} - \frac{1}{4} Q_{1,0,0} \\
\hline
A_{n,0,0}^{1,0} &= -2n Q_{n,1,0}, & A_{0,0,0}^{1,0} &= 0 \\
\hline
A_{n,1,0}^{+1,1,0} &= -n \{ 2Q_{n,2,0} + 2n\mu Q_{n,1,0} \}, & A_{0,1,0}^{+1,1,0} &= 0 \\
A_{n,1,0}^{-1,1,0} &= -n \{ 2Q_{n,2,0} - 2n\mu Q_{n,1,0} \}, & A_{0,1,0}^{-1,1,0} &= 0 \\
A_{n,0,1}^{+1,1,0} &= -(n+1) \{ Q_{n+1,1,1} - 2(n+1) Q_{n+1,1,0} \}, & A_{0,0,1}^{+1,1,0} &= -Q_{1,1,1} + 2Q_{1,1,0} \\
A_{n,0,1}^{-1,1,0} &= -(n-1) \{ Q_{n-1,1,1} + 2(n-1) Q_{n-1,1,0} \}, & A_{0,0,1}^{-1,1,0} &= 0 \\
\hline
A_{n,2,0}^{1,0} &= -n \{ 3Q_{n,3,0} - 2n^2 \mu^2 Q_{n,1,0} + 2Q_{(n,1,0)_{1,0}} \}, & A_{0,2,0}^{1,0} &= 0 \\
A_{n,2,0}^{+2,1,0} &= -n \left\{ \frac{3}{2} Q_{n,3,0} + 2n\mu Q_{n,2,0} + \left(n^2 \mu^2 - \frac{3}{4}n\mu \right) Q_{n,1,0} \right\}, & A_{0,2,0}^{+2,1,0} &= 0 \\
A_{n,2,0}^{-2,1,0} &= -n \left\{ \frac{3}{2} Q_{n,3,0} - 2n\mu Q_{n,2,0} + \left(n^2 \mu^2 + \frac{3}{4}n\mu \right) Q_{n,1,0} \right\}, & A_{0,2,0}^{-2,1,0} &= 0 \\
\hline
A_{n,1,1}^{+2,1,0} &= -(n+1) \{ Q_{n+1,2,1} - 2(n+1) Q_{n+1,2,0} + n\mu Q_{n+1,1,1} - 2n(n+1)\mu Q_{n+1,1,0} \}, & A_{0,1,1}^{+2,1,0} &= -Q_{1,2,1} + 2Q_{1,2,0} \\
A_{n,1,1}^{+1,1,0} &= -(n-1) \{ Q_{n-1,2,1} + 2(n-1) Q_{n-1,2,0} + n\mu Q_{n-1,1,1} + 2n(n-1)\mu Q_{n-1,1,0} \}, & A_{0,1,1}^{+1,1,0} &= Q_{1,2,1} - 2Q_{1,2,0} \\
A_{n,1,1}^{-1,1,0} &= -(n+1) \{ Q_{n+1,2,1} - 2(n+1) Q_{n+1,2,0} - n\mu Q_{n+1,1,1} + 2n(n+1)\mu Q_{n+1,1,0} \}, & A_{0,1,1}^{-1,1,0} &= 0 \\
A_{n,1,1}^{-2,1,0} &= -(n-1) \{ Q_{n-1,2,1} + 2(n-1) Q_{n-1,2,0} - n\mu Q_{n-1,1,1} - 2n(n-1)\mu Q_{n-1,1,0} \}, & A_{0,1,1}^{-2,1,0} &= 0 \\
\hline
A_{n,0,2}^{1,0} &= -n \{ Q_{n,1,2} - 2Q_{n,1,1} - 2n^2 Q_{n,1,0} + 2Q_{(n,1,0)_{0,1}} \}, & A_{0,0,2}^{1,0} &= 0 \\
A_{n,0,2}^{+2,1,0} &= -(n+2) \left\{ \frac{1}{2} Q_{n+2,1,2} - (n+1) Q_{n+2,1,1} + \left(n^2 + \frac{11}{4}n + \frac{3}{2} \right) Q_{n+2,1,0} \right\}, & A_{0,0,2}^{+2,1,0} &= -Q_{2,1,2} + 2Q_{2,1,1} - 3Q_{2,1,0} \\
A_{n,0,2}^{-2,1,0} &= -(n-2) \left\{ \frac{1}{2} Q_{n-2,1,2} + (n-1) Q_{n-2,1,1} + \left(n^2 - \frac{11}{4}n + \frac{3}{2} \right) Q_{n-2,1,0} \right\}, & A_{0,0,2}^{-2,1,0} &= 0 \\
& & A_{1,0,2}^{-2,1,0} &= \frac{1}{2} Q_{1,1,2} - \frac{1}{4} Q_{1,1,0} \\
\hline
A_{n,0,0}^{2,0} &= -2n Q_{n,2,0}, & A_{0,0,0}^{2,0} &= 0.
\end{aligned}$$

6. Wir wollen nun den Ausdruck Q_i entwickeln, welcher von den Neigungen abhängt. Nach 136) ist offenbar, wenn wir w_1 für H_1 schreiben, da wir ja die Glieder dritten Grades vernachlässigen wollen:

$$\begin{aligned}
167) \quad Q_i &= -2\Sigma n \bar{Q}_{n,0,0} h \sin nw_1 \\
&\quad + 2\Sigma' \bar{Q}_{n,0,0} \frac{\partial h}{\partial v} \cos nw_1,
\end{aligned}$$

und in diesem Ausdruck sollen h und $\frac{\partial h}{\partial v}$ zunächst durch \mathfrak{z} und \mathfrak{z}' ersetzt werden.

Es ist nach 106), wenn wir für H_1 das Argument w_1 setzen, also Glieder dritten Grades fortlassen:

$$168) \quad h = -\frac{\delta^2 + \delta'^2}{2} \cos w_1 + \frac{\delta \frac{d\delta}{dv} - \delta' \frac{d\delta'}{dv}}{2} \sin w_1 + \delta\delta'.$$

Durch Differentiation dieses Ausdrucks erhält man $\frac{\partial h}{\partial v}$, indem man bei dieser Differentiation alle Grössen, welche sich auf die Lage der Bahnebene beziehen, als constant ansieht. Dann ist nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cos w_1}{\partial v} &= -\sin w_1, & \frac{\partial \sin w_1}{\partial v} &= \cos w_1 \\ \frac{\partial \delta}{\partial v} &= \frac{d\delta}{dv}, & \frac{\partial \frac{d\delta}{dv}}{\partial v} &= -\delta, \end{aligned}$$

und man erhält:

$$169) \quad \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\left(\frac{d\delta}{dv}\right)^2 + \delta'^2}{2} \sin w_1 - \frac{\delta \frac{d\delta}{dv} + \delta' \frac{d\delta'}{dv}}{2} \cos w_1 + \delta' \frac{d\delta}{dv}.$$

Die Ausdrücke 168) und 169) wollen wir zunächst noch weiter umformen. Man hat nämlich:

$$\delta = \sin j \sin v + \mathfrak{B},$$

woraus folgt, ähnlich der Relation 89)

$$\frac{d\delta}{dv} = \sin j \cos v + \frac{dv_1}{dv} \sin v - \frac{dv_2}{dv} \cos v + \frac{d\mathfrak{B}}{dv}.$$

Die ausserordentliche Kleinheit der Funktionen $\frac{dv_1}{dv}$ und $\frac{dv_2}{dv}$ gestattet uns, dieselben hier zu vernachlässigen und wir bilden die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \frac{1}{2} \sin^2 j - \frac{1}{2} \sin^2 j \cos 2v + 2\mathfrak{B} \sin j \sin v + \mathfrak{B}^2 \\ 170) \quad \left(\frac{d\delta}{dv}\right)^2 &= \frac{1}{2} \sin^2 j + \frac{1}{2} \sin^2 j \cos 2v + 2 \frac{d\mathfrak{B}}{dv} \sin j \cos v + \left(\frac{d\mathfrak{B}}{dv}\right)^2 \\ \delta \frac{d\delta}{dv} &= \frac{1}{2} \sin^2 j \sin 2v + \mathfrak{B} \sin j \cos v + \frac{d\mathfrak{B}}{dv} \sin j \sin v + \mathfrak{B} \frac{d\mathfrak{B}}{dv}. \end{aligned}$$

Aehnliche Ausdrücke lassen sich für den störenden Körper bilden; man hat nämlich in Analogie mit den Gleichungen 72) bis 77):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}' &= (\mathfrak{z}') + \mathfrak{Z}' \\
(\mathfrak{z}') &= \Sigma \sin \iota'_n \sin [(1 + \tau'_n) v' - \Theta'_n] \\
171) \quad \sin j' \frac{\cos \sigma'}{\sin \sigma'} &= \Sigma \sin \iota'_n \frac{\cos (\Theta'_n - \tau'_n v')}{\sin (\Theta'_n - \tau'_n v')} \\
(\mathfrak{z}') &= \sin j' \sin v' \\
v' &= v' - \sigma',
\end{aligned}$$

und hieraus bilden wir:

$$\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'} = \sin j' \cos v' + \frac{dv'_1}{dv'} \sin v' - \frac{dv'_2}{dv'} \cos v' + \frac{d\mathfrak{Z}'}{dv'},$$

wo in Analogie mit 88) gesetzt ist:

$$171a) \quad v'_1 = \sin j' \cos \sigma', \quad v'_2 = \sin j' \sin \sigma'.$$

Die vorstehenden Ausdrücke transformiren wir ebenso wie 147) und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}' &= (\mathfrak{z}') + (\mathfrak{Z}') \\
\vartheta'_n &= \Theta'_n - \tau'_n v \\
\Theta'_n &= \Theta'_n - \tau'_n B \\
\tau'_n &= \mu_2 \tau'_n + c - \mu_2 c' \\
(\mathfrak{z}') &= \Sigma \sin \iota'_n \sin (v' - \vartheta'_n - H + H') \\
172) \quad \sin j' \frac{\cos \sigma'_1}{\sin \sigma'_1} &= \Sigma \sin \iota'_n \frac{\cos (\vartheta'_n + H - H')}{\sin (\vartheta'_n + H - H')} \\
(\mathfrak{z}') &= \sin j' \sin v'_1 \\
v'_1 &= v' - \sigma'_1 \\
\sigma'_1 &= \sigma'_1 - H + H' \\
\sin j' \frac{\cos \sigma'_1}{\sin \sigma'_1} &= \Sigma \sin \iota'_n \frac{\cos \vartheta'_n}{\sin \vartheta'_n} \\
\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'} &= \sin j' \cos v'_1 + \frac{dv'_1}{dv'} \sin v' - \frac{dv'_2}{dv'} \cos v' + \left(\frac{d\mathfrak{Z}'}{dv'} \right),
\end{aligned}$$

wo ich (\mathfrak{z}') und $\left(\frac{d\mathfrak{Z}'}{dv'} \right)$ geschrieben habe, da in diesen beiden Funktionen die kleinen Glieder aufgenommen sind, die durch Einführung von v'_1 an Stelle von v' entstehen. Die Constanten ι'_n , τ'_n und Θ'_n setzen wir als bekannt voraus.

Ferner sei:

$$173) \quad v_1 = v - \sigma_1,$$

woraus nach 152) und 155):

$$174) \quad v'_1 = -w_1 + v_1 + G.$$

Wir vernachlässigen $\frac{dv'_1}{dv'}$, $\frac{dv'_2}{dv'}$ und \mathfrak{J}' und führen mit Hilfe der Relation 174) für das Argument v'_1 die Argumente w_1 und v_1 ein; die Funktion G lassen wir bei Seite, da dies der Vernachlässigung der Glieder dritten Grades gleichkommt. Wir erhalten so:

$$175a) \quad \begin{aligned} \mathfrak{J}'^2 &= \frac{1}{2} \sin^2 j' - \frac{1}{2} \sin^2 j' \cos(2w_1 - 2v_1) \\ \mathfrak{J}' \frac{d\mathfrak{J}'}{dv'} &= -\frac{1}{2} \sin^2 j' \sin(2w_1 - 2v_1). \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise bilden wir endlich:

$$175b) \quad \begin{aligned} \mathfrak{J}\mathfrak{J}' &= \frac{1}{2} \sin j \sin j' \cos(w_1 + v - v_1) - \frac{1}{2} \sin j \sin j' \cos(w_1 - v - v_1) - \mathfrak{J} \sin j' \sin(w_1 - v_1) \\ \mathfrak{J}' \frac{d\mathfrak{J}}{dv} &= -\frac{1}{2} \sin j \sin j' \sin(w_1 + v - v_1) - \frac{1}{2} \sin j \sin j' \sin(w_1 - v - v_1) - \frac{d\mathfrak{J}}{dv} \sin j' \sin(w_1 - v_1). \end{aligned}$$

Die Ausdrücke 170) und 175) führen wir jetzt in die Relationen 168) und 169) ein, und erhalten dann:

$$176a) \quad \begin{aligned} h &= -\frac{1}{4} \sin^2 j \cos w_1 + \frac{1}{4} \sin^2 j \cos(w_1 - 2v) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin j \sin j' \cos(w_1 + v - v_1) - \frac{1}{2} \sin j \sin j' \cos(w_1 - v - v_1) \\ &\quad - \frac{1}{4} \sin^2 j' \cos w_1 + \frac{1}{4} \sin^2 j' \cos(w_1 - 2v_1) \\ &\quad - \frac{1}{4} \mathfrak{J} \sin j \sin(w_1 + v) + \frac{3}{4} \mathfrak{J} \sin j \sin(w_1 - v) \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{d\mathfrak{J}}{dv} \sin j \cos(w_1 + v) + \frac{1}{4} \frac{d\mathfrak{J}}{dv} \sin j \cos(w_1 - v) \\ &\quad - \mathfrak{J} \sin j' \sin(w_1 - v_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathfrak{J}^2 \cos w_1 + \frac{1}{2} \mathfrak{J} \frac{d\mathfrak{J}}{dv} \sin w_1 \end{aligned}$$

$$176b) \quad \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v} &= +\frac{1}{4} \sin^2 j \sin w_1 + \frac{1}{4} \sin^2 j \sin(w_1 - 2v) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin j \sin j' \sin(w_1 + v - v_1) - \frac{1}{2} \sin j \sin j' \sin(w_1 - v - v_1) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sin^2 j' \sin w_1 + \frac{1}{4} \sin^2 j' \sin(w_1 - 2v_1) \\ &\quad - \frac{1}{4} \mathfrak{J} \sin j \cos(w_1 + v) - \frac{1}{4} \mathfrak{J} \sin j \cos(w_1 - v) \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{d\mathfrak{J}}{dv} \sin j \sin(w_1 + v) + \frac{3}{4} \frac{d\mathfrak{J}}{dv} \sin j \sin(w_1 - v) \\ &\quad - \frac{d\mathfrak{J}}{dv} \sin j' \sin(w_1 - v_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathfrak{J}}{dv} \right)^2 \sin w_1 - \frac{1}{2} \mathfrak{J} \frac{d\mathfrak{J}}{dv} \cos w_1. \end{aligned}$$

7. Führt man diese Werte in den Ausdruck 167) ein und ersetzt man das Argument w_1 durch w , indem man nach Potenzen von K entwickelt, so kommt der folgende Ausdruck zu Stande:

$$\begin{aligned}
177) Q_i = & \Sigma \bar{A}_{n,2,0} \sin^2 j \sin nw & + \Sigma \bar{A}_{n,1,1}^{(+2)} \sin j \sin j' \sin (nw + v + v_1) & + \Sigma \bar{A}_{n,0,2} \sin^2 j' \sin nw \\
& + \Sigma \bar{A}_{n,2,0}^{(+2)} \sin^2 j \sin (nw + 2v) & + \Sigma \bar{A}_{n,1,1}^{(+1)} \sin j \sin j' \sin (nw + v - v_1) & + \Sigma \bar{A}_{n,0,2}^{(+2)} \sin^2 j' \sin (nw + 2v_1) \\
& + \Sigma \bar{A}_{n,2,0}^{(-2)} \sin^2 j \sin (nw - 2v) & + \Sigma \bar{A}_{n,1,1}^{(-1)} \sin j \sin j' \sin (nw - v + v_1) & + \Sigma \bar{A}_{n,0,2}^{(-2)} \sin^2 j' \sin (nw - 2v_1) \\
& & + \Sigma \bar{A}_{n,1,1}^{(-2)} \sin j \sin j' \sin (nw - v - v_1) \\
& - \Sigma n\mu \bar{A}_{n,2,0} K \sin^2 j \cos nw & - \Sigma n\mu \bar{A}_{n,1,1}^{(+2)} K \sin j \sin j' \cos (nw + v + v_1) & - \Sigma n\mu \bar{A}_{n,0,2} K \sin^2 j' \cos nw \\
& - \Sigma n\mu \bar{A}_{n,2,0}^{(+2)} K \sin^2 j \cos (nw + 2v) & - \Sigma n\mu \bar{A}_{n,1,1}^{(+1)} K \sin j \sin j' \cos (nw + v - v_1) & - \Sigma n\mu \bar{A}_{n,0,2}^{(+2)} K \sin^2 j' \cos (nw + 2v_1) \\
& - \Sigma n\mu \bar{A}_{n,2,0}^{(-2)} K \sin^2 j \cos (nw - 2v) & - \Sigma n\mu \bar{A}_{n,1,1}^{(-1)} K \sin j \sin j' \cos (nw - v + v_1) & - \Sigma n\mu \bar{A}_{n,0,2}^{(-2)} K \sin^2 j' \cos (nw - 2v_1) \\
& & - \Sigma n\mu \bar{A}_{n,1,1}^{(-2)} K \sin j \sin j' \cos (nw - v - v_1) \\
& + \Sigma \bar{A}_{n,1,0}^{+1,1,0} \mathfrak{B} \sin j \cos (nw + v) & + \Sigma \bar{A}_{n,1,0}^{+1,0,1} \frac{d\mathfrak{B}}{dv} \sin j \sin (nw + v) \\
& + \Sigma \bar{A}_{n,1,0}^{-1,1,0} \mathfrak{B} \sin j \cos (nw - v) & + \Sigma \bar{A}_{n,1,0}^{-1,0,1} \frac{d\mathfrak{B}}{dv} \sin j \sin (nw - v) \\
& + \Sigma \bar{A}_{n,0,1}^{+1,1,0} \mathfrak{B} \sin j' \cos (nw + v_1) & + \Sigma \bar{A}_{n,0,1}^{+1,0,1} \frac{d\mathfrak{B}}{dv} \sin j' \sin (nw + v_1) \\
& + \Sigma \bar{A}_{n,0,1}^{-1,1,0} \mathfrak{B} \sin j' \cos (nw - v_1) & + \Sigma \bar{A}_{n,0,1}^{-1,0,1} \frac{d\mathfrak{B}}{dv} \sin j' \sin (nw - v_1) \\
& + \Sigma \bar{A}_{n,0,0}^{2,0} \mathfrak{B}^2 \sin nw \\
& + \Sigma \bar{A}_{n,0,0}^{1,1} \mathfrak{B} \frac{d\mathfrak{B}}{dv} \cos nw \\
& + \Sigma \bar{A}_{n,0,0}^{0,2} \left(\frac{d\mathfrak{B}}{dv} \right)^2 \sin nw
\end{aligned}$$

Bei den \bar{A} -Coefficienten giebt von den unteren Indices der erste den Faktor von w , der zweite die Potenz von $\sin j$, der dritte die Potenz von $\sin j'$; der mit einem Vorzeichen versehene obere Index giebt die ganze Zahl, mit der v oder v_1 oder auch beide multiplicirt sind; von den beiden anderen oberen Indices giebt der erstere die Potenz von \mathfrak{B} , der zweite die von $\frac{d\mathfrak{B}}{dv}$.

Man erhält durch die angedeutete Operation die folgenden Ausdrücke für die \bar{A} -Coefficienten:

178)

$$\bar{A}_{n \cdot 2 \cdot 0} = \frac{n}{4} \{ \bar{Q}_{n-1.0.0} + \bar{Q}_{n+1.0.0} \} \quad \bar{A}_{0 \cdot 2 \cdot 0} = 0$$

$$\bar{A}_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(+2)} = -\frac{n+2}{4} \bar{Q}_{n+1.0.0} \quad \bar{A}_{0 \cdot 2 \cdot 0}^{(+2)} = -\frac{1}{2} \bar{Q}_{1.0.0}$$

$$\bar{A}_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(-2)} = -\frac{n-2}{4} \bar{Q}_{n-1.0.0} \quad \bar{A}_{0 \cdot 2 \cdot 0}^{(-2)} = 0$$

$$\bar{A}_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(+2)} = \frac{n+2}{2} \bar{Q}_{n+1.0.0} \quad \bar{A}_{0 \cdot 1 \cdot 1}^{+2} = \bar{Q}_{1.0.0}$$

$$\bar{A}_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(+1)} = -\frac{n}{2} \bar{Q}_{n-1.0.0} \quad \bar{A}_{0 \cdot 1 \cdot 1}^{(+1)} = 0$$

$$\bar{A}_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(-1)} = -\frac{n}{2} \bar{Q}_{n+1.0.0} \quad \bar{A}_{0 \cdot 1 \cdot 1}^{(-1)} = 0$$

$$\bar{A}_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(-2)} = \frac{n-2}{2} \bar{Q}_{n-1.0.0} \quad \bar{A}_{0 \cdot 1 \cdot 1}^{(-2)} = 0$$

$$\bar{A}_{n \cdot 0 \cdot 2} = \frac{n}{4} \{ \bar{Q}_{n-1.0.0} + \bar{Q}_{n+1.0.0} \} \quad \bar{A}_{0 \cdot 0 \cdot 2} = 0$$

$$\bar{A}_{n \cdot 0 \cdot 2}^{(+2)} = -\frac{n+2}{4} \bar{Q}_{n+1.0.0} \quad \bar{A}_{0 \cdot 0 \cdot 2}^{(+2)} = -\frac{1}{2} \bar{Q}_{1.0.0}$$

$$\bar{A}_{n \cdot 0 \cdot 2}^{(-2)} = -\frac{n-2}{4} \bar{Q}_{n-1.0.0} \quad \bar{A}_{0 \cdot 0 \cdot 2}^{(-2)} = 0$$

$$\bar{A}_{n \cdot 1 \cdot 0}^{+1 \cdot 1 \cdot 0} = -\frac{n}{4} \bar{Q}_{n-1.0.0} - \frac{3n+4}{4} \bar{Q}_{n+1.0.0} \quad \bar{A}_{0 \cdot 1 \cdot 0}^{+1 \cdot 1 \cdot 0} = -\bar{Q}_{1.0.0}$$

$$\bar{A}_{n \cdot 1 \cdot 0}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} = \frac{3n-4}{4} \bar{Q}_{n-1.0.0} + \frac{n}{4} \bar{Q}_{n+1.0.0} \quad \bar{A}_{0 \cdot 1 \cdot 0}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} = 0$$

$$\bar{A}_{n \cdot 0 \cdot 1}^{+1 \cdot 1 \cdot 0} = (n+1) \bar{Q}_{n+1.0.0} \quad \bar{A}_{0 \cdot 0 \cdot 1}^{+1 \cdot 1 \cdot 0} = \bar{Q}_{1.0.0}$$

$$\bar{A}_{n \cdot 0 \cdot 1}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} = -(n-1) \bar{Q}_{n-1.0.0} \quad \bar{A}_{0 \cdot 0 \cdot 1}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} = 0$$

$$\bar{A}_{n \cdot 1 \cdot 0}^{+1 \cdot 0 \cdot 1} = \frac{n}{4} \bar{Q}_{n-1.0.0} - \frac{n+4}{4} \bar{Q}_{n+1.0.0} \quad \bar{A}_{0 \cdot 1 \cdot 0}^{+1 \cdot 0 \cdot 1} = -\bar{Q}_{1.0.0}$$

$$\bar{A}_{n \cdot 1 \cdot 0}^{-1 \cdot 0 \cdot 1} = -\frac{n-4}{4} \bar{Q}_{n-1.0.0} + \frac{n}{4} \bar{Q}_{n+1.0.0} \quad \bar{A}_{0 \cdot 1 \cdot 0}^{-1 \cdot 0 \cdot 1} = 0$$

$$\bar{A}_{n \cdot 0 \cdot 1}^{+1 \cdot 0 \cdot 1} = \bar{Q}_{n+1.0.0} \quad \bar{A}_{0 \cdot 0 \cdot 1}^{+1 \cdot 0 \cdot 1} = \bar{Q}_{1.0.0}$$

$$\bar{A}_{n \cdot 0 \cdot 1}^{-1 \cdot 0 \cdot 1} = -\bar{Q}_{n-1.0.0} \quad \bar{A}_{0 \cdot 0 \cdot 1}^{-1 \cdot 0 \cdot 1} = 0$$

$$\begin{aligned}
178) \quad \bar{A}_{n,0,0}^{2,0} &= \frac{n-1}{2} \bar{Q}_{n-1,0,0} + \frac{n+1}{2} \bar{Q}_{n+1,0,0} & \bar{A}_{0,0,0}^{2,0} &= 0 \\
\bar{A}_{n,0,0}^{1,1} &= \frac{n-2}{2} \bar{Q}_{n-1,0,0} - \frac{n+2}{2} \bar{Q}_{n+1,0,0} & \bar{A}_{0,0,0}^{1,1} &= -\bar{Q}_{1,0,0} \\
\bar{A}_{n,0,0}^{0,2} &= \frac{1}{2} \bar{Q}_{n-1,0,0} - \frac{1}{2} \bar{Q}_{n+1,0,0} & \bar{A}_{0,0,0}^{0,2} &= 0.
\end{aligned}$$

8. Ich will nun die Funktion P in derselben Weise transformiren, wie Q ; wir berücksichtigen die Entwicklungen 157), 159) und 176a) und führen sie in 139) ein; wenn wir dann gleichzeitig wieder nach Potenzen von K entwickeln, so wird:

$$\begin{aligned}
179) P &= \Sigma B_{n,0,0} \cos nw & + \Sigma B_{n,0,0}^{1,0} R \cos mw & + \Sigma n\mu B_{n,0,0} K \sin nw \\
&+ \Sigma B_{n,0,0}^{2,0} R^2 \cos nw & + \Sigma n\mu B_{n,0,0}^{1,0} RK \sin nw & - \frac{1}{2} \Sigma n^2 \mu^2 B_{n,0,0} K^2 \cos nw \\
&+ \Sigma B_{n,1,0}^{(+1)} \eta \cos (nw + v) & + \Sigma B_{n,1,0}^{(+1,0)} R\eta \cos (nw + v) & + \Sigma n\mu B_{n,1,0}^{(+1)} K\eta \sin (nw + v) \\
&+ \Sigma B_{n,1,0}^{(-1)} \eta \cos (nw - v) & + \Sigma B_{n,1,0}^{(-1,0)} R\eta \cos (nw - v) & + \Sigma n\mu B_{n,1,0}^{(-1)} K\eta \sin (nw - v) \\
&+ \Sigma B_{n,0,1}^{(+1)} \eta' \cos (nw + v_1) & + \Sigma B_{n,0,1}^{(+1,0)} R\eta' \cos (nw + v_1) & + \Sigma n\mu B_{n,0,1}^{(+1)} K\eta' \sin (nw + v_1) \\
&+ \Sigma B_{n,0,1}^{(-1)} \eta' \cos (nw - v_1) & + \Sigma B_{n,0,1}^{(-1,0)} R\eta' \cos (nw - v_1) & + \Sigma n\mu B_{n,0,1}^{(-1)} K\eta' \sin (nw - v_1) \\
&+ \Sigma B_{n,2,0} \eta^2 \cos nw & + \Sigma B_{n,1,1}^{(+2)} \eta\eta' \cos (nw + v + v_1) & + \Sigma B_{n,0,2} \eta'^2 \cos nw \\
&+ \Sigma B_{n,2,0}^{(+2)} \eta^2 \cos (nw + 2v) & + \Sigma B_{n,1,1}^{(+1)} \eta\eta' \cos (nw + v - v_1) & + \Sigma B_{n,0,2}^{(+2)} \eta'^2 \cos (nw + 2v_1) \\
&+ \Sigma B_{n,2,0}^{(-2)} \eta^2 \sin (nw - 2v) & + \Sigma B_{n,1,1}^{(-1)} \eta\eta' \cos (nw - v + v_1) & + \Sigma B_{n,0,2}^{(-2)} \eta'^2 \cos (nw - 2v_1) \\
& & + \Sigma B_{n,1,1}^{(-2)} \eta\eta' \cos (nw - v - v_1) & \\
&+ \Sigma \bar{B}_{n,2,0} \sin^2 j \cos nw & + \Sigma \bar{B}_{n,1,1}^{(+2)} \sin j \sin j' \cos (nw + v + v_1) & + \Sigma \bar{B}_{n,0,2} \sin^2 j' \cos nw \\
&+ \Sigma \bar{B}_{n,2,0}^{(+2)} \sin^2 j \cos (nw + 2v) & + \Sigma \bar{B}_{n,1,1}^{(+1)} \sin j \sin j' \cos (nw + v - v_1) & + \Sigma \bar{B}_{n,0,2}^{(+2)} \sin^2 j' \cos (nw + 2v_1) \\
&+ \Sigma \bar{B}_{n,2,0}^{(-2)} \sin^2 j \cos (nw - 2v) & + \Sigma \bar{B}_{n,1,1}^{(-1)} \sin j \sin j' \cos (nw - v + v_1) & + \Sigma \bar{B}_{n,0,2}^{(-2)} \sin^2 j' \cos (nw - 2v_1) \\
& & + \Sigma \bar{B}_{n,1,1}^{(-2)} \sin j \sin j' \cos (nw - v - v_1) & \\
&+ \Sigma \bar{B}_{n,1,0}^{+1,1,0} \mathfrak{Z} \sin j \sin (nw + v) & + \Sigma \bar{B}_{n,1,0}^{+1,0,1} \frac{d\mathfrak{Z}}{dv} \sin j \cos (nw + v) & \\
&+ \Sigma \bar{B}_{n,1,0}^{-1,1,0} \mathfrak{Z} \sin j \sin (nw - v) & + \Sigma \bar{B}_{n,1,0}^{-1,0,1} \frac{d\mathfrak{Z}}{dv} \sin j \cos (nw - v) & \\
&+ \Sigma \bar{B}_{n,0,1}^{+1,1,0} \mathfrak{Z} \sin j' \sin (nw + v_1) & & \\
&+ \Sigma \bar{B}_{n,0,1}^{-1,1,0} \mathfrak{Z} \sin j' \sin (nw - v_1) & & \\
&+ \Sigma \bar{B}_{n,0,0}^{2,0} \mathfrak{Z}^2 \cos nw & + \Sigma \bar{B}_{n,0,0}^{1,1} \mathfrak{Z} \frac{d\mathfrak{Z}}{dv} \sin nw &
\end{aligned}$$

Wir haben hierbei die Glieder vernachlässigt, welche R und K enthalten und zugleich zweiten Grades sind, obwohl wir die entsprechenden Glieder in Q berücksichtigt haben. Indessen sind sie hier bedeutungslos, während einige von ihnen in der Funktion Q unter Umständen merklich gross werden können. Uebrigens müssten wir auch unsere frühere Entwicklung von Ω etwas weiter ausführen, um die zu den genannten Gliedern gehörenden B -Coefficienten zu berechnen, während die entsprechenden A -Coefficienten nach 178) ohne Weiteres berechnet werden können.

Die Indicirung der B -Coefficienten ist die gleiche wie die der A -Coefficienten, und die Coefficienten $\bar{B}_{n \cdot 0 \cdot 1}^{+1 \cdot 0 \cdot 1}$, $\bar{B}_{n \cdot 0 \cdot 1}^{-1 \cdot 0 \cdot 1}$ und $\bar{B}_{n \cdot 0 \cdot 0}^{0 \cdot 2}$ fallen fort. Schliesslich erhält man für die B -Coefficienten die folgenden Ausdrücke:

$$180) B_{n \cdot 0 \cdot 0} = 2P_{n \cdot 0 \cdot 0}$$

$$B_{0 \cdot 0 \cdot 0} = P_{0 \cdot 0 \cdot 0}$$

$$B_{n \cdot 1 \cdot 0}^{(+1)} = P_{n \cdot 1 \cdot 0} + 2n\mu P_{n \cdot 0 \cdot 0},$$

$$B_{0 \cdot 1 \cdot 0}^{(+1)} = P_{0 \cdot 1 \cdot 0}$$

$$B_{n \cdot 1 \cdot 0}^{(-1)} = P_{n \cdot 1 \cdot 0} - 2n\mu P_{n \cdot 0 \cdot 0},$$

$$B_{0 \cdot 1 \cdot 0}^{(-1)} = 0$$

$$B_{n \cdot 0 \cdot 1}^{(+1)} = P_{n+1 \cdot 0 \cdot 1} - 2(n+1)P_{n+1 \cdot 0 \cdot 0},$$

$$B_{0 \cdot 0 \cdot 1}^{(+1)} = P_{1 \cdot 0 \cdot 1} - 2P_{1 \cdot 0 \cdot 0}$$

$$B_{n \cdot 0 \cdot 1}^{(-1)} = P_{n-1 \cdot 0 \cdot 1} + 2(n-1)P_{n-1 \cdot 0 \cdot 0},$$

$$B_{0 \cdot 0 \cdot 1}^{(-1)} = 0$$

$$B_{n \cdot 2 \cdot 0} = P_{n \cdot 2 \cdot 0} - 2n^2\mu^2 P_{n \cdot 0 \cdot 0} + 2P_{(n \cdot 0 \cdot 0)1 \cdot 0},$$

$$B_{0 \cdot 2 \cdot 0} = \frac{1}{2}P_{0 \cdot 2 \cdot 0} + P_{(0 \cdot 0 \cdot 0)1 \cdot 0}$$

$$B_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(+2)} = \frac{1}{2}P_{n \cdot 2 \cdot 0} + n\mu P_{n \cdot 1 \cdot 0} + (n^2\mu^2 - \frac{3}{4}n\mu) P_{n \cdot 0 \cdot 0},$$

$$B_{0 \cdot 2 \cdot 0}^{(+2)} = \frac{1}{2}P_{0 \cdot 2 \cdot 0}$$

$$B_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(-2)} = \frac{1}{2}P_{n \cdot 2 \cdot 0} - n\mu P_{n \cdot 1 \cdot 0} + (n^2\mu^2 + \frac{3}{4}n\mu) P_{n \cdot 0 \cdot 0},$$

$$B_{0 \cdot 2 \cdot 0}^{(-2)} = 0$$

$$B_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(+2)} = \frac{1}{2}P_{n+1 \cdot 1 \cdot 1} - (n+1)P_{n+1 \cdot 1 \cdot 0} + n\mu P_{n+1 \cdot 0 \cdot 1} - 2n(n+1)\mu P_{n+1 \cdot 0 \cdot 0}, \quad B_{0 \cdot 1 \cdot 1}^{(+2)} = \frac{1}{2}P_{1 \cdot 1 \cdot 1} - P_{1 \cdot 1 \cdot 0}$$

$$B_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(+1)} = \frac{1}{2}P_{n-1 \cdot 1 \cdot 1} + (n-1)P_{n-1 \cdot 1 \cdot 0} + n\mu P_{n-1 \cdot 0 \cdot 1} + 2n(n-1)\mu P_{n-1 \cdot 0 \cdot 0}, \quad B_{0 \cdot 1 \cdot 1}^{(+1)} = \frac{1}{2}P_{1 \cdot 1 \cdot 1} - P_{1 \cdot 1 \cdot 0}$$

$$B_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(-1)} = \frac{1}{2}P_{n+1 \cdot 1 \cdot 1} - (n+1)P_{n+1 \cdot 1 \cdot 0} - n\mu P_{n+1 \cdot 0 \cdot 1} + 2n(n+1)\mu P_{n+1 \cdot 0 \cdot 0}, \quad B_{0 \cdot 1 \cdot 1}^{(-1)} = 0$$

$$B_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(-2)} = \frac{1}{2}P_{n-1 \cdot 1 \cdot 1} + (n-1)P_{n-1 \cdot 1 \cdot 0} - n\mu P_{n-1 \cdot 0 \cdot 1} - 2n(n-1)\mu P_{n-1 \cdot 0 \cdot 0}, \quad B_{0 \cdot 1 \cdot 1}^{(-2)} = 0$$

$$B_{n \cdot 0 \cdot 2} = P_{n \cdot 0 \cdot 2} - 2P_{n \cdot 0 \cdot 1} - 2n^2 P_{n \cdot 0 \cdot 0} + 2P_{(n \cdot 0 \cdot 0)0 \cdot 1},$$

$$B_{0 \cdot 0 \cdot 2} = \frac{1}{2}P_{0 \cdot 0 \cdot 2} - P_{0 \cdot 0 \cdot 1} + P_{(0 \cdot 0 \cdot 0)0 \cdot 1}$$

$$B_{n \cdot 0 \cdot 2}^{(+2)} = \frac{1}{2}P_{n+2 \cdot 0 \cdot 2} - (n+1)P_{n+2 \cdot 0 \cdot 1} + (n^2 + \frac{11}{4}n + \frac{3}{2}) P_{n+2 \cdot 0 \cdot 0},$$

$$B_{0 \cdot 0 \cdot 2}^{(+2)} = \frac{1}{2}P_{2 \cdot 0 \cdot 2} - P_{2 \cdot 0 \cdot 1} + \frac{3}{2}P_{2 \cdot 0 \cdot 0}$$

$$B_{n \cdot 0 \cdot 2}^{(-2)} = \frac{1}{2}P_{n-2 \cdot 0 \cdot 2} + (n-1)P_{n-2 \cdot 0 \cdot 1} + (n^2 - \frac{11}{4}n + \frac{3}{2}) P_{n-2 \cdot 0 \cdot 0},$$

$$B_{0 \cdot 0 \cdot 2}^{(-2)} = 0, \quad B_{1 \cdot 0 \cdot 2}^{(-2)} = \frac{1}{2}P_{1 \cdot 0 \cdot 2} - \frac{1}{4}P_{0 \cdot 0 \cdot 0}$$

$$\begin{array}{ll}
B_{n,0,0}^{1,0} = 2P_{n,1,0} & B_{0,0,0}^{1,0} = P_{0,1,0} \\
B_{n,1,0}^{+1,1,0} = 2P_{n,2,0} + 2n\mu P_{n,1,0} & B_{0,1,0}^{+1,1,0} = 2P_{0,2,0} \\
B_{n,1,0}^{-1,1,0} = 2P_{n,2,0} - 2n\mu P_{n,1,0} & B_{0,1,0}^{-1,1,0} = 0 \\
B_{n,0,1}^{+1,1,0} = P_{n+1,1,1} - 2(n+1)P_{n+1,1,0} & B_{0,0,1}^{+1,1,0} = P_{1,1,1} - 2P_{1,1,0} \\
B_{n,0,1}^{-1,1,0} = P_{n-1,1,1} + 2(n-1)P_{n-1,1,0} & B_{0,0,1}^{-1,1,0} = 0 \\
B_{n,0,0}^{2,0} = 2P_{n,2,0} & B_{0,0,0}^{2,0} = P_{0,2,0} \\
\bar{B}_{n,2,0} = -\frac{1}{4}\{\bar{P}_{n-1,0,0} + \bar{P}_{n+1,0,0}\} & \bar{B}_{0,2,0} = -\frac{1}{4}\bar{P}_{1,0,0} \\
\bar{B}_{n,2,0}^{(+2)} = \frac{1}{4}\bar{P}_{n+1,0,0} & \bar{B}_{0,2,0}^{(+2)} = \frac{1}{4}\bar{P}_{1,0,0} \\
\bar{B}_{n,2,0}^{(-2)} = \frac{1}{4}\bar{P}_{n-1,0,0} & \bar{B}_{0,2,0}^{(-2)} = 0 \\
\bar{B}_{n,1,1}^{(+2)} = -\frac{1}{2}\bar{P}_{n+1,0,0} & \bar{B}_{0,1,1}^{(+2)} = -\frac{1}{2}\bar{P}_{1,0,0} \\
\bar{B}_{n,1,1}^{(+1)} = \frac{1}{2}\bar{P}_{n-1,0,0} & \bar{B}_{0,1,1}^{(+1)} = \frac{1}{2}\bar{P}_{1,0,0} \\
\bar{B}_{n,1,1}^{(-1)} = \frac{1}{2}\bar{P}_{n+1,0,0} & \bar{B}_{0,1,1}^{(-1)} = 0 \\
\bar{B}_{0,1,1}^{(-2)} = -\frac{1}{2}\bar{P}_{n-1,0,0} & \bar{B}_{0,1,1}^{(-2)} = 0 \\
\bar{B}_{n,0,2} = -\frac{1}{4}\{\bar{P}_{n-1,0,0} + \bar{P}_{n+1,0,0}\} & \bar{B}_{0,0,2} = -\frac{1}{4}\bar{P}_{1,0,0} \\
\bar{B}_{n,0,2}^{(+2)} = \frac{1}{4}\bar{P}_{n+1,0,0} & \bar{B}_{0,0,2}^{(+2)} = \frac{1}{4}\bar{P}_{1,0,0} \\
\bar{B}_{n,0,2}^{(-2)} = \frac{1}{4}\bar{P}_{n-1,0,0} & \bar{B}_{0,0,2}^{(-2)} = 0 \\
\bar{B}_{1,0}^{+1,1,0} = -\frac{1}{4}\bar{P}_{n-1,0,0} - \frac{3}{4}\bar{P}_{n+1,0,0} & \bar{B}_{0,1,0}^{+1,1,0} = -\bar{P}_{1,0,0} \\
\bar{B}_{n,1,0}^{-1,1,0} = \frac{3}{4}\bar{P}_{n-1,0,0} + \frac{1}{4}\bar{P}_{n+1,0,0} & \bar{B}_{0,1,0}^{-1,1,0} = 0 \\
\bar{B}_{n,0,1}^{+1,1,0} = \bar{P}_{n+1,0,0} & \bar{B}_{0,0,1}^{+1,1,0} = \bar{P}_{1,0,0} \\
\bar{B}_{n,0,1}^{-1,1,0} = -\bar{P}_{n-1,0,0} & \bar{B}_{0,0,1}^{-1,1,0} = 0 \\
\bar{B}_{n,1,0}^{+1,0,1} = -\frac{1}{4}\bar{P}_{n-1,0,0} + \frac{1}{4}\bar{P}_{n+1,0,0} & \bar{B}_{0,1,0}^{+1,0,1} = 0 \\
\bar{B}_{n,1,0}^{-1,0,1} = \frac{1}{4}\bar{P}_{n-1,0,0} - \frac{1}{4}\bar{P}_{n+1,0,0} & \bar{B}_{0,1,0}^{-1,0,1} = 0 \\
\bar{B}_{n,0,0}^{2,0} = -\frac{1}{2}\{\bar{P}_{n-1,0,0} + \bar{P}_{n+1,0,0}\} & \bar{B}_{0,0,0}^{2,0} = -\frac{1}{2}\bar{P}_{1,0,0} \\
\bar{B}_{n,0,0}^{1,1} = \frac{1}{2}\bar{P}_{n-1,0,0} - \frac{1}{2}\bar{P}_{n+1,0,0} & \bar{B}_{0,0,0}^{1,1} = 0.
\end{array}$$

9. Endlich soll nun der Ausdruck für die Funktion Z vollständig entwickelt werden. Man hat nach 146) mit Vernachlässigung der Glieder dritten Grades:

$$Z = 2\Sigma' Y_{n,s,s'} \varrho^s \varrho'^{s'} \frac{1}{2} \cos n H_1 + 2\Sigma' X_{n,s,s'} \varrho^s \varrho'^{s'} \frac{1}{2} \cos n H_1.$$

Für die Funktion z' ist mit Rücksicht auf die Gleichungen 172) und 174):

$$(z') = -\sin j' \sin(w_1 - v_1 - G),$$

und wenn wir nach Potenzen von G entwickeln und uns der Relation 156a) erinnern:

$$181) (z') = -\sin j' \sin(w_1 - v_1) - \mu \eta \sin j' \sin(w_1 + v - v_1) + \mu \eta \sin j' \sin(w_1 - v - v_1) \\ + \eta' \sin j' \sin(v_1 - v_1) - \eta' \sin j' \sin(2w_1 - v_1 - v_1).$$

Mit Benutzung dieser Relation und der folgenden:

$$z = \sin j \sin v + \mathfrak{Z},$$

sowie der Entwicklungen 157) und 159) erhält man den folgenden Ausdruck für Z , wenn man wieder die Funktion \mathfrak{Z}' bei Seite lässt:

$$182) Z = \Sigma C_{n-1,0}^{(+1)} \sin j \sin(nw + v) + \Sigma C_{n-1,0}^{+1,1,0} R \sin j \sin(nw + v) - \Sigma \mu C_{n-1,0}^{(+1)} K \sin j \cos(nw + v) \\ + \Sigma C_{n-1,0}^{(-1)} \sin j \sin(nw - v) + \Sigma C_{n-1,0}^{-1,1,0} R \sin j \sin(nw - v) - \Sigma \mu C_{n-1,0}^{(-1)} K \sin j \cos(nw - v) \\ + \Sigma C_{n-0,1}^{(+1)} \sin j' \sin(nw + v_1) + \Sigma C_{n-0,1}^{+1,1,0} R \sin j' \sin(nw + v_1) - \Sigma \mu C_{n-0,1}^{(+1)} K \sin j' \cos(nw + v_1) \\ + \Sigma C_{n-0,1}^{(-1)} \sin j' \sin(nw - v_1) + \Sigma C_{n-0,1}^{-1,1,0} R \sin j' \sin(nw - v_1) - \Sigma \mu C_{n-0,1}^{(-1)} K \sin j' \cos(nw - v_1) \\ + \Sigma C_{n-0,0}^{0,1} \mathfrak{Z} \cos nw \\ + \Sigma C_{n-1,0,1,0}^{(+2)} \eta \sin j \sin(nw + v + v) + \Sigma C_{n-1,0,0,1}^{(+2)} \eta' \sin j \sin(nw + v + v_1) \\ + \Sigma C_{n-1,0,1,0}^{(+1)} \eta \sin j \sin(nw + v - v) + \Sigma C_{n-1,0,0,1}^{(+1)} \eta' \sin j \sin(nw + v - v_1) \\ + \Sigma C_{n-1,0,1,0}^{(-1)} \eta \sin j \sin(nw - v + v) + \Sigma C_{n-1,0,0,1}^{(-1)} \eta' \sin j \sin(nw - v + v_1) \\ + \Sigma C_{n-1,0,1,0}^{(-2)} \eta \sin j \sin(nw - v - v) + \Sigma C_{n-1,0,0,1}^{(-2)} \eta' \sin j \sin(nw - v - v_1) \\ + \Sigma C_{n-0,1,1,0}^{(+2)} \eta \sin j' \sin(nw + v_1 + v) + \Sigma C_{n-0,1,0,1}^{(+2)} \eta' \sin j' \sin(nw + v_1 + v_1) \\ + \Sigma C_{n-0,1,1,0}^{(+1)} \eta \sin j' \sin(nw + v_1 - v) + \Sigma C_{n-0,1,0,1}^{(+1)} \eta' \sin j' \sin(nw + v_1 - v_1) \\ + \Sigma C_{n-0,1,1,0}^{(-1)} \eta \sin j' \sin(nw - v_1 + v) + \Sigma C_{n-0,1,0,1}^{(-1)} \eta' \sin j' \sin(nw - v_1 + v_1) \\ + \Sigma C_{n-0,1,1,0}^{(-2)} \eta \sin j' \sin(nw - v_1 - v) + \Sigma C_{n-0,1,0,1}^{(-2)} \eta' \sin j' \sin(nw - v_1 - v_1).$$

Bei den C -Coefficienten bezieht sich derjenige von den beiden oberen Indices, welcher mit einem Vorzeichen versehen ist, auf die Faktoren der Grössen v , v_1 , v oder v_1 ; von den beiden anderen oberen Indices giebt der erstere die Potenz von R , der zweite die von \mathfrak{Z} . Von den unteren Indices giebt der erste den Faktor von w , der zweite die Potenz von $\sin j$, der dritte die von $\sin j'$, der vierte die von η und der fünfte die von η' ; die beiden letzteren sind fortgelassen, wenn sie beide zugleich Null sind.

Für diese C -Coefficienten ergeben sich die folgenden Werte:

$$\begin{array}{ll}
182a) C_{n-1,0}^{(+1)} = Y_{n,0,0} & C_{0,1,0}^{(+1)} = Y_{0,0,0} \\
C_{n-1,0}^{(-1)} = -Y_{n,0,0} & C_{0,1,0}^{(-1)} = 0 \\
C_{n,0,1}^{(+1)} = X_{n+1,0,0} & C_{0,0,1}^{(+1)} = X_{1,0,0} \\
C_{n,0,1}^{(-1)} = X_{n-1,0,0} & C_{0,0,1}^{(-1)} = 0 \\
\\
C_{n-1,0,1,0}^{(+2)} = \frac{1}{2} Y_{n,1,0} + n\mu Y_{n,0,0} & C_{0,1,0,1,0}^{(+2)} = \frac{1}{2} Y_{0,1,0} \\
C_{n-1,0,1,0}^{(+1)} = \frac{1}{2} Y_{n,1,0} - n\mu Y_{n,0,0} & C_{0,1,0,1,0}^{(+1)} = \frac{1}{2} Y_{0,1,0} \\
C_{n-1,0,1,0}^{(-1)} = -\left\{ \frac{1}{2} Y_{n,1,0} + n\mu Y_{n,0,0} \right\} & C_{0,1,0,1,0}^{(-1)} = 0 \\
C_{n-1,0,1,0}^{(-2)} = -\left\{ \frac{1}{2} Y_{n,1,0} - n\mu Y_{n,0,0} \right\} & C_{0,1,0,1,0}^{(-2)} = 0 \\
\\
C_{n-1,0,0,1}^{(+2)} = \frac{1}{2} Y_{n+1,0,1} - (n+1) Y_{n+1,0,0} & C_{0,1,0,0,1}^{(+2)} = \frac{1}{2} Y_{1,0,1} - Y_{1,0,0} \\
C_{n-1,0,0,1}^{(+1)} = \frac{1}{2} Y_{n-1,0,1} + (n-1) Y_{n-1,0,0} & C_{0,1,0,0,1}^{(+1)} = \frac{1}{2} Y_{1,0,1} - Y_{1,0,0} \\
C_{n-1,0,0,1}^{(-1)} = -\left\{ \frac{1}{2} Y_{n+1,0,1} - (n+1) Y_{n+1,0,0} \right\} & C_{0,1,0,0,1}^{(-1)} = 0 \\
C_{n-1,0,0,1}^{(-2)} = -\left\{ \frac{1}{2} Y_{n-1,0,1} + (n-1) Y_{n-1,0,0} \right\} & C_{0,1,0,0,1}^{(-2)} = 0 \\
\\
C_{n,0,1,1,0}^{(+2)} = \frac{1}{2} X_{n+1,1,0} + n\mu X_{n+1,0,0} & C_{0,0,1,1,0}^{(+2)} = \frac{1}{2} X_{1,1,0} \\
C_{n,0,1,1,0}^{(+1)} = \frac{1}{2} X_{n+1,1,0} - n\mu X_{n+1,0,0} & C_{0,0,1,1,0}^{(+1)} = \frac{1}{2} X_{1,1,0} \\
C_{n,0,1,1,0}^{(-1)} = -\left\{ \frac{1}{2} X_{n-1,1,0} + n\mu X_{n-1,0,0} \right\} & C_{0,0,1,1,0}^{(-1)} = 0 \\
C_{n,0,1,1,0}^{(-2)} = -\left\{ \frac{1}{2} X_{n-1,1,0} - n\mu X_{n-1,0,0} \right\} & C_{0,0,1,1,0}^{(-2)} = 0 \\
\\
C_{n,0,1,0,1}^{(+2)} = \frac{1}{2} X_{n+2,0,1} - (n+1) X_{n+2,0,0} & C_{0,0,1,0,1}^{(+2)} = \frac{1}{2} X_{2,0,1} - X_{2,0,0} \\
C_{n,0,1,0,1}^{(+1)} = \frac{1}{2} X_{n,0,1} + (n-1) X_{n,0,0} & C_{0,0,1,0,1}^{(+1)} = \frac{1}{2} X_{0,0,1} - X_{0,0,0} \\
C_{n,0,1,0,1}^{(-1)} = -\left\{ \frac{1}{2} X_{n,0,1} - (n+1) X_{n,0,0} \right\} & C_{0,0,1,0,1}^{(-1)} = 0 \\
C_{n,0,1,0,1}^{(-2)} = -\left\{ \frac{1}{2} X_{n-2,0,1} + (n-1) X_{n-2,0,0} \right\} & C_{0,0,1,0,1}^{(-2)} = 0, C_{1,0,1,0,1}^{(-2)} = -\frac{1}{2} X_{1,0,1} \\
\\
C_{n-1,1,0}^{(+1,1,0)} = Y_{n,1,0} & C_{0,1,0}^{+1,1,0} = Y_{0,1,0} \\
C_{n-1,1,0}^{(-1,1,0)} = -Y_{n,1,0} & C_{0,1,0}^{-1,1,0} = 0 \\
C_{n,0,1}^{(+1,1,0)} = X_{n+1,1,0} & C_{0,0,1}^{+1,1,0} = X_{1,1,0} \\
C_{n,0,1}^{(-1,1,0)} = -X_{n-1,1,0} & C_{0,0,1}^{-1,1,0} = 0 \\
\\
C_{n,0,0}^{0,1} = 2Y_{n,0,0} & C_{0,0,0}^{0,1} = Y_{0,0,0}
\end{array}$$

10. Die Anzahl der Glieder, welche in den vorstehenden Entwicklungen der Funktionen Q , P und Z vorkommen, ist sehr gross; ich habe aber auch diese Ausdrücke mit aller wünschenswerten Vollständigkeit gegeben. Man wird in jedem einzelnen Falle nur eine verhältnismässig sehr geringe Zahl von diesen

Gliedern zu berücksichtigen haben; da aber in verschiedenen Fällen auch verschiedene Glieder die wichtigsten sind, so habe ich die Ausdrücke hier vollständig geben müssen; denn ein Glied, das bei der Berechnung eines gewissen Planeten sehr klein ist, kann bei Berechnung eines anderen Planeten sehr wesentlich sein. Welche Glieder unter den angeführten die wichtigsten sind, hängt in erster Linie von dem Werte der mittleren Bewegung des Planeten ab und in zweiter Linie von dem Betrage seiner Excentricität und Neigung.

Sechstes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen für die Gyldén'schen Hilfscoordinaten. — Die gewöhnlichen Planeten.

§ 1.

1. Um die Ausdrücke für die Gyldén'schen Coordinaten S , ϱ , W und ζ zu finden, welche zur Berechnung des Ortes des gestörten Planeten mittels der Gleichungen 62), 68) und 92) dienen, müssen wir die Gleichungen 34), 36), 59) und 70) integrieren, welche ich zur grösseren Uebersichtlichkeit hier zusammenstelle¹⁾:

$$183) \quad \frac{1}{1+S} \frac{dS}{dv} = -(1+S)^2 Q - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\eta^2} \frac{d\eta^2}{dv}$$

$$184) \quad \frac{d^2\varrho}{dv^2} + \varrho = - \left\{ \frac{2}{1-\eta^2} \frac{d\eta^2}{dv} + (1+S)^2 Q \right\} \frac{d\varrho}{dv} \\ - \left\{ \frac{1}{1-\eta^2} \frac{d^2\eta^2}{dv^2} + \frac{2}{(1-\eta^2)^2} \left(\frac{d\eta^2}{dv} \right)^2 + \frac{(1+S)^2}{1-\eta^2} \frac{d\eta^2}{dv} Q \right\} (1+\varrho) + 2S + S^2 - (1+S)^2 P$$

$$185) \quad \frac{dW}{dv} = S - 2R - 2RS + 3R^2 \pm \dots \\ + \{ 6R - 2S - 12R^2 + 6RS \pm \dots \} \eta \cos v \\ - 3\eta^2 R + \left\{ \frac{3}{2} S - 6R \pm \dots \right\} \eta^2 \cos 2v \\ \pm \dots \\ - \frac{dE}{dv}$$

1) In seinen pag. 50 erwähnten Hülftafeln bemerkt Gyldén pag. XVI, dass in der von mir angewandten Differentialgleichung für ϱ das Glied fehle, welches die dort mit \bar{g} bezeichnete Con-

$$186) \quad \frac{d^2 \mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = -(1+S)^2 Q \frac{d\mathfrak{z}}{dv} + (1+S)^2 Z.$$

Kommt das Verhältniss der mittleren Bewegungen des gestörten und des störenden Planeten keinem niedrigzahligen Bruche sehr nahe, handelt es sich also, wie wir uns ausdrücken wollen, um einen „gewöhnlichen“ und nicht um einen „charakteristischen“ Planeten, so ist die Herstellung der Ausdrücke für die genannten Coordinaten eine verhältnissmässig einfache Operation, und ich werde die hierzu nötigen Formeln in aller Ausführlichkeit herleiten, so dass der Rechner sich ohne Weiteres derselben bedienen kann. Ich beschränke mich aber nicht auf diesen einfachen Fall, sondern ich will das vorgesteckte Problem für jeden beliebigen Wert der mittleren Bewegungen betrachten; jedoch würde es zu weit führen und der Uebersichtlichkeit sehr schaden, wenn ich im Rahmen dieser Abhandlung jeden einzelnen Fall genäherter oder strenger Commensurabilität erschöpfend darstellen wollte, und deswegen werde ich mich darauf beschränken, für die schwierigen Fälle des Systems der kleinen Planeten die Entwicklungen soweit auszuführen, dass der weitere Gang der Rechnung keine ernstlichen Schwierigkeiten mehr bietet.

Offenbar wird die Form, unter der sich die Integrale der vorstehenden Gleichungen darstellen, im Wesentlichen abhängen von der Form, die wir den Funktionen Q , P und Z geben. Diese letzteren aber haben wir in den vorigen Kapiteln in trigonometrische Reihen entwickelt und die Gyldén'schen Coordinaten werden wir in der gleichen Form darstellen.

Wir haben als Grundlage unserer Untersuchungen angenommen, dass die im ersten Kapitel (pag. 12) genannten Bedingungen erfüllt sind, wenigstens für einen beschränkten Zeitraum; dieser Zeitraum wird auch im Falle, dass man die Stabilität des Systems nicht voraussetzen wolle und dass es sich um kleine Planeten handelt, sicherlich eine Reihe von Jahrtausenden umfassen. Wir haben hierfür bis jetzt keinen stichhaltigen Beweis, und wir werden zur Annahme dieser Thatsache einstweilen nur durch die Resultate der Beobachtungen und durch diejenigen der Berechnungen nach der Methode der speciellen Störungen geführt; denn diese liefern uns für die osculirenden elliptischen Elemente solche Werte, welche den genannten Bedingungen entsprechen. Ob die letzteren auch während eines unbegrenzten Zeitraums erfüllt bleiben oder nicht, ist eine Frage, welche mit derjenigen nach der Stabilität des Systems zusammenfällt und welche ich hier nicht berühren will. Wir stellen uns demnach auch nicht die Aufgabe, eine absolute Lösung im Gyldén'schen Sinne zu erhalten, welche die absolute Convergenz aller angewandten Reihenentwicklungen und Annäherungsverfahren erheischen würde; auch die Curve, welche der Planet beschreibt, braucht nicht

stante enthält. Da Gyldén die folgenden Untersuchungen leider nicht zu Gesicht bekommen hat, so konnte er sich nicht davon überzeugen, dass dies unzutreffend ist, indem ich dies Glied nur in einer anderen Weise berücksichtigt habe.

eine periplegmatische Curve¹⁾ nach Gyldén's Definition zu sein. Indem wir unsere Aufgabe in dieser Weise beschränken, können wir die Formeln, nach denen die numerischen Rechnungen auszuführen sind, ausserordentlich einfach gestalten, ohne dass die Genauigkeit, mit der sich die Coordinaten des gestörten Körpers darstellen, eine Einbusse erlitte.

2. Unsere Lösung darf also, wie ich schon im ersten Kapitel bemerkt habe, *seculare* Glieder enthalten. Tisserand²⁾ hat in dieser Beziehung einige Bemerkungen gemacht über die *elementaren* Glieder, welche ich bei der Berechnung der Bahn des Planeten Hestia gefunden habe; er zeigt, dass die Ausdrücke sich vereinfachen, wenn man diese Glieder in *secularer* Form darstellt: man wird selbst in Fällen, wo diese Störungen sehr gross sind, die von den dritten Potenzen der Zeit abhängigen Glieder (also die Störungen dritter Ordnung) vernachlässigen können.

Nun wird man aber, wie ich schon pag. 5 bemerkte, im Allgemeinen die Bewegung des störenden Körpers als *elliptisch* ansehen, wenn es sich um genäherte Darstellung der Coordinaten handelt; und auch, wenn man eine schärfere Darstellung während eines beschränkten Zeitraums anstrebt, wird man wenigstens die *secularen* Störungen, denen der störende Körper unterworfen ist, vernachlässigen können. Wenn man dies aber thut, so nehmen die genannten Glieder, in *periodischer* Form dargestellt, eine so einfache Gestalt an, dass dieser letzteren Form gewiss der Vorzug vor der *secularen* gebührt.

Nur wenn es sich um sehr weitgehende Untersuchungen handelt, und wenn man deshalb die vollen Ausdrücke 147) und 171), resp. 153b) und 172) in die Bewegung des störenden Körpers einführt, was ich in meiner Arbeit über den Planeten Hestia unnötigerweise gethan habe —, nur dann lässt sich an der Zweckmässigkeit der *periodischen* Form gegenüber der *secularen* zweifeln. Und doch möchte ich auch dann die *periodische* Form vorziehen, aus dem Grunde, weil sich dann manche Operation einfacher gestaltet und weil aus der *periodischen* Form die *seculare* mit ein paar Federstrichen sich herstellen lässt, während der umgekehrte Process mühsamer ist. Tisserand wendet sich a. a. O. dagegen, dass man einen solchen Ausdruck in *periodischer* Form integrirte; indessen ist es *analytisch* ganz gleichbedeutend, ob man ihn in der einen oder der anderen Form integrirt; ist die *Integration* in *periodischer* Form nicht gerechtfertigt, so ist sie es auch in *secularer* nicht. Unter allen Umständen ist aber der Unterschied beider Darstellungsweisen ein rein *formaler*. Ich verweise wegen dieser Frage noch auf die Untersuchungen im achten Kapitel.

1) Siehe die pag. 14 citirte Abhandlung Gyldén's, pag. 3 ff.

2) Tisserand, *Traité de Mécanique Céleste*. Tome IV. pag. 415. Ich habe anfangs geglaubt, dass bei den Zahlenangaben Tisserand's hier ein Irrtum vorgekommen sei: Tisserand spricht (Zeile 14) von dem Glied in t und (Zeile 15) von dem Glied in t^2 ; er meint aber offenbar mit dem ersteren das Glied in t^2 und mit dem letzteren das in t^3 in der Entwicklung von $\sin A$. Der Umstand, dass Tisserand die resp. Potenzen von t um je eine Einheit niedriger angiebt, hat jedenfalls seinen Grund darin, dass er sie sich als Störungen der mittleren Bewegung denkt.

3. Während des Zeitraums von 50 oder 100 Jahren, während dessen unsere Rechnungen gültig bleiben sollen, sind die eingeführten Bahnelemente a oder n , A , κ , Γ , ι , Θ , wirkliche Constanten. Setzt man auf Grund unserer Formeln die Rechnung über die Grenzen des gewählten Zeitraums hinaus fort, so werden offenbar die fortgelassenen secularen (oder langperiodischen) Glieder beginnen merkbar zu werden, und die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung werden allmählich wachsen. Es scheint demnach, dass unsere Resultate für eine Fortsetzung der Rechnung in ein weiteres Jahrhundert nicht mehr anwendbar seien, und dass man die Berechnung der Störungsglieder von Neuem durchzuführen habe. Dies ist indessen nicht der Fall, man wird vielmehr nur den erwähnten Bahnelementen um ein Weniges veränderte Werte beizulegen und die bereits erhaltenen Resultate weiter zu verwerten haben. Wenn wir also in dieser Weise die Bahnelemente von Jahrhundert zu Jahrhundert variiren, so werden unsere Resultate für eine längere Reihe von Jahrhunderten die Coordinaten des Planeten mit der gewünschten Genauigkeit darstellen; unter Umständen werden allerdings die Werte einzelner Störungsglieder modificirt werden müssen. Auf eine solche seculara Variation der Constanten zurückzukommen, welche einstweilen nur empirisch mit Hilfe der Beobachtungen geschehen kann, werde ich im zweiten Theile Gelegenheit nehmen. Die Gültigkeit unseres Verfahrens würde erst dann aufhören, wenn die pag. 12 genannten Bedingungen nicht mehr erfüllt sind, wenn also eine vollständige Umgestaltung der Bahn des zu berechnenden Planeten stattgefunden hätte.

Wenn man sich gestatten will, eine solche Bewegung „beschränkt stabil“ zu nennen, die während eines beschränkten Zeitraums nicht allzusehr von einer gewissen mittleren Kreis- oder elliptischen Bahn abweicht, für die also die Bedingungen pag. 12 erfüllt sind, so sind die Planeten unseres Systems mindestens beschränkt stabil; und diese beschränkte Stabilität findet nur dann nicht statt, wenn die Bahn sich dem parabolischen oder hyperbolischen Charakter nähert oder wenn (bei zu grosser Annäherung des gestörten Körpers an einen der störenden) ein Wechsel des Centralkörpers eintritt; in diesen Fällen werden unsere Formeln deswegen unbrauchbar, weil unsere Entwicklung der Störungsfunktion dann unbedingt divergirt. Dagegen wird sich im Folgenden zeigen, dass eine beliebige Annäherung der mittleren Bewegungen an irgend ein commensurables Verhältniss weder das Aufhören dieser beschränkten Stabilität noch die Unbrauchbarkeit unserer Formeln bedingt.

4. Unter den Voraussetzungen, welche wir gemacht haben, dürften die Reihen, in die wir die Funktionen Ω , Q , P und Z entwickelt haben, brauchbar sein, und man wird auch zu der Vermutung geführt, dass unsere Differentialgleichungen Lösungen in trigonometrischer Form zulassen. Indessen müssen diese beiden Thatsachen noch bewiesen werden; die letztere lässt sich naturgemäss nicht ohne die Voraussetzung der ersteren zeigen, ist sie aber bewiesen, so folgt daraus im Allgemeinen auch die Brauchbarkeit der Entwicklungen der Störungsfunktion.

Dass nun unsere Differentialgleichungen Lösungen rein trigonometrischer Form auch in den Fällen zulassen, in denen die mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Körpers äusserst nahe oder (wenigstens scheinbar) streng commensurabel zu einander sind, erscheint dennoch zunächst zweifelhaft. Ich habe in den Astronomischen Nachrichten¹⁾ in sehr kurzgefasster Form gezeigt, dass diese Frage in bejahendem Sinne zu beantworten ist, und dass man zu einer solchen Lösung geführt wird, wenn man das von Gyldén gefundene Verfahren der partiellen Integration, das im Folgenden auseinandergesetzt wird, mit gewissen Modifikationen durchführt. Gyldén selbst nahm an, dass diese Methode nicht in allen Fällen zu befriedigenden Resultaten führe und benutzte, ebenso wie die Herren Harzer und Backlund²⁾, andere Methoden; dieselben scheinen mir indess wenig übersichtlich und die Entwicklungen werden dort schliesslich zum Zwecke der praktischen Rechnung im Wesentlichen auf dieselbe Form gebracht, die ich ihnen hier von vornherein gebe.

5. Um die Gleichungen 183) bis 186) zu integrieren, ersetzen wir in ihnen die Funktionen Q , P und Z durch die im vorigen Kapitel gefundenen Entwicklungen und erhalten dann Gleichungen, die ihrer Form nach den Gleichungen 4) und 5) des ersten Kapitels analog sind; bei ihrer Integration werden wir das dort Gesagte in Rücksicht ziehen; indessen sind die Gleichungen 183) bis 186) complicirter als die Gleichungen des ersten Kapitels und die letzteren stellen nur ihren allgemeinen Typus dar.

Wie im ersten Kapitel ferner bemerkt wurde, werden wir in ganz allgemeiner Weise unsere Annäherungen nach den Potenzen der Excentricitäten und Neigungen anordnen, aber nicht nach den Potenzen der osculirenden elliptischen Werte dieser Grössen; was einer Anordnung nach den Potenzen der störenden Massen gleichkäme, sondern vielmehr nach den Potenzen der Constanten κ_n , κ'_n , $\sin \iota_n$, $\sin \iota'_n$. Ich werde die Grössen κ und κ' **Excentricitätsmoduln** und die Grössen $\sin \iota$ und $\sin \iota'$ **Neigungsmoduln** nennen; Gyldén nennt sie diastematische und anastematische Moduln, welche Bezeichnungen hier nicht angängig sind, da ich ihnen nicht die Bedeutung absoluter Elemente im Gyldén'schen Sinne gebe und da ich mich dem üblichen Sprachgebrauche möglichst anschliessen möchte. Ich habe ebenfalls bereits gesagt, dass ich Glied **n -ten Grades** ein jedes Glied nenne, dass als Faktor die **n -te Potenz** eines dieser Moduln oder ein äquivalentes Produkt enthält. Wir werden also zuerst die Glieder nullten, dann diejenigen ersten Grades u. s. f. berechnen.

Ich will im Folgenden mit S_0 den Teil der Funktion S bezeichnen, welcher nullten Grades ist, mit S_1 den Teil, welcher ersten Grades ist, u. s. f.; und in derselben Weise zerlege ich auch die übrigen Funktionen, so dass:

1) No. 3346. Vgl. auch den Schluss des Siebenten Kapitels dieser Abhandlung.

2) In ihren pag. 6 und 22 citirten interessanten Abhandlungen.

$$\begin{aligned}
 S &= S_0 + S_1 + S_2 + \dots \\
 R &= R_0 + R_1 + R_2 + \dots \\
 W &= W_0 + W_1 + W_2 + \dots \\
 187) \quad \frac{dS}{dv} &= \left(\frac{dS}{dv}\right)_0 + \left(\frac{dS}{dv}\right)_1 + \left(\frac{dS}{dv}\right)_2 + \dots \\
 &= \frac{dS_0}{dv} + \frac{dS_1}{dv} + \frac{dS_2}{dv} + \dots
 \end{aligned}$$

u. s. w.,

wobei zu beachten ist, dass z. B. die Grössen $\left(\frac{dS}{dv}\right)_n$ und $\frac{dS_n}{dv}$ im Allgemeinen nicht identisch sind.

§ 2.

Die Glieder nullten Grades.

1. Wir wollen jetzt die Gleichung 183) betrachten, indem wir Q durch seinen Wert 165) resp. 177) ersetzen. Die Funktion ζ und infolgedessen auch \mathfrak{z} ist ersten Grades, da sie nach 83) mit $\sin \iota_n$ multiplicirt ist; dagegen enthalten die Funktionen R und K auch Glieder nullten Grades, wie sich bald zeigen wird. Wenn wir also nur die Glieder nullten Grades beibehalten, so ist:

$$\begin{aligned}
 188) \quad \frac{1}{(1+S)^3} \frac{dS}{dv} &= -\Sigma A_{n..0} \sin nw - \Sigma A_{n..0}^1 R_0 \sin nw + \Sigma n \mu A_{n..0} K_0 \cos nw \\
 &\quad - \Sigma A_{n..0}^2 R_0^2 \sin nw + \Sigma n \mu A_{n..0}^1 R_0 K_0 \cos nw + \frac{1}{2} \Sigma n^2 \mu^2 A_{n..0} K_0^2 \sin nw,
 \end{aligned}$$

wo nur die Störungen vierter Ordnung vernachlässigt sind.

In den Fällen, in denen die Funktionen R_0 und K_0 als sehr kleine Grössen angesehen werden können, kann man die Annäherungen nach ihren Potenzen anordnen, ebenso wie es in den älteren Methoden geschieht und in der ersten Annäherung setzen:

$$189) \quad \frac{1}{2(1+S_0)^2} = \text{constans} + \Sigma A_{n..0} \int \sin nw dv.$$

Indessen können die ebengenannten Funktionen gross sein im Verhältniss zur störenden Masse und es wird sich gleich zeigen, dass dieser Fall eintritt, wenn das Verhältniss der mittleren Bewegungen des gestörten und des störenden Körpers sich einem Bruche von der Form $\frac{n}{n+1}$ nähert. Man wird in diesen Fällen zum Teil die Glieder höherer Ordnung bereits in der ersten Annäherung berücksichtigen müssen; sie sind zwar einstweilen unbekannt, ich werde aber im nächsten Kapitel zeigen, wie man alsdann verfahren kann.

Hier will ich mich zunächst auf die Fälle beschränken, in denen die genannten Grössen sehr klein sind, in denen also die Gleichung 189) für die erste Annäherung besteht.

Das Argument w ist durch die Relation 164)

$$w = (1 - \mu_1)v - B - \mu V$$

gegeben, und wir können das Integral in der Gleichung 189) nach einem von Gylden gefundenen Verfahren partieller Integration ausführen, indem wir schreiben:

$$190) \quad \int \sin nw \, dv = -\frac{1}{n(1-\mu_1)} \cos nw + \frac{\mu}{1-\mu_1} \int \frac{dV}{dv} \sin nw \, dv$$

$$\int \cos nw \, dv = \frac{1}{n(1-\mu_1)} \sin nw + \frac{\mu}{1-\mu_1} \int \frac{dV}{dv} \cos nw \, dv,$$

von welchen Gleichungen ich die zweite deswegen anführe, weil wir sie später brauchen werden. Die Funktion V enthält keine Glieder nullten Grades; sie ist vielmehr ersten Grades in den Fällen, in denen R_0 beträchtlich ist, und sie ist zweiten Grades in allen Fällen, in denen R_0 als Grösse rein erster Ordnung angesehen werden kann. Ich muss der Bequemlichkeit halber diese Thatsache vorwegnehmen aus dem Folgenden, wo sie (pag. 93) bewiesen werden wird. Wenn wir die linke Seite der obigen Gleichung nach Potenzen von S_0 entwickeln, so wird also:

$$S_0 = \text{constans} + \frac{A_{n \cdot 0 \cdot 0}}{n(1-\mu_1)} \cos nw - \frac{1}{2} \{ 3S_0^2 - 4S_0^3 + \dots \}.$$

Die Constante in dieser Gleichung ist überzählig und wir wollten sie nach dem vorigen Kapitel so wählen, dass sie eine Grösse rein erster Ordnung ist. Die Divisoren $n(1-\mu_1)$, welche hier auftreten, können nur dann sehr klein sein, wenn die Constante μ_1 sehr nahe gleich Eins ist. Diese Constante ist aber sehr nahe gleich dem Verhältnisse der mittleren Bewegungen des gestörten und des störenden Körpers und sie wird ihren grössten Wert erreichen für diejenigen kleinen Planeten, welche Jupiter am nächsten kommen. Für den Planeten Thule, welcher von den bis jetzt entdeckten diese Bedingung am nächsten erfüllt, ist μ_1 etwa gleich $\frac{3}{4}$; es ist aber klar, dass die Convergenz unserer Reihen aufhört, wenn μ_1 sich allzusehr der Einheit nähert, denn unsere Entwicklung der Störungsfunktion beruht ja auf der Bedingung, dass der Quotient $\frac{r}{r'}$ merklich kleiner als Eins ist, welche dann nicht mehr erfüllt wäre. In diesem Falle lässt sich auch nicht mehr — abgesehen von vereinzelt Specialfällen — von einer planetarischen Bewegung sprechen, da der Einfluss Jupiters zu sehr überwiegen würde.

Es folgt aus dem eben Gesagten, dass die Funktion S_0 für alle kleinen Planeten als eine Grösse rein erster Ordnung anzusehen ist, und wir können ihr Quadrat, mindestens in der ersten Annäherung, vernachlässigen. Man hat also für den Fall, dass R_0 und K_0 klein sind:

$$S_0 = \text{constans} + \Sigma \frac{A_{n \cdot 0 \cdot 0}}{n(1-\mu_1)} \cos nw,$$

S_0 enthält auch keine Glieder der Formen A bis D , sondern nur gewöhnliche Glieder. Setzt man:

$$191) \quad S_0 = \Sigma S_{n \cdot 0 \cdot 0} \cos nw,$$

so ist:

$$192) \quad S_{n \cdot 0 \cdot 0} = \frac{A_{n \cdot 0 \cdot 0}}{n(1-\mu_1)},$$

und das constante Glied $S_{0 \cdot 0 \cdot 0}$ ist zunächst unbestimmt; es ist der Teil der pag. 67 mit a_0 bezeichneten Constante, der nullten Grades ist, und kann erst später bestimmt werden zugleich mit den constanten Teilen von R_0 und $\left(\frac{dW}{dv}\right)_0$.

2. Wir wollen nun die Gleichung 184) betrachten; wenn wir nur die Glieder nullten Grades schreiben, so ist

$$193) \quad \frac{d^2 R}{dv^2} + R = -(1+S_0)^2 Q_0 \left(\frac{dR}{dv}\right)_0 + 2S_0' + S_0^2 - (1+S_0)^2 P_0,$$

und im Falle, dass R_0 und K_0 klein genug sind, hat man in der ersten Annäherung

$$194) \quad \frac{d^2 R}{dv^2} + R = 2S_0 - P_0 = 2\Sigma S_{n \cdot 0 \cdot 0} \cos nw - \Sigma B_{n \cdot 0 \cdot 0} \cos nw,$$

und wenn wir setzen:

$$195) \quad \frac{d^2 R}{dv^2} + R = \Sigma b_{n \cdot 0 \cdot 0} \cos nw,$$

so wird:

$$196) \quad b_{n \cdot 0 \cdot 0} = 2S_{n \cdot 0 \cdot 0} - B_{n \cdot 0 \cdot 0}.$$

Die Gleichung 195) ist von der Form der Gleichung:

$$197) \quad \frac{d^2 x}{dv^2} + x = Y,$$

deren Integral das folgende ist:

$$198) \quad x = g_1 \sin v - g_2 \cos v,$$

wenn man nämlich setzt:

$$199) \quad \frac{dg_1}{dv} = Y \cos v, \quad \frac{dg_2}{dv} = Y \sin v,$$

so dass man also nur die Integrationen 199) auszuführen hat.

Wir ersetzen also die Gleichungen 195) durch die folgenden:

$$200) \quad R_0 = g_1 \sin v - g_2 \cos v$$

$$200a) \quad \frac{dg_1}{dv} = \frac{1}{2} \Sigma b_{n \cdot 0 \cdot 0} \cos(nw+v) + \frac{1}{2} \Sigma b_{n \cdot 0 \cdot 0} \cos(nw-v)$$

$$\frac{dg_2}{dv} = \frac{1}{2} \Sigma b_{n \cdot 0 \cdot 0} \sin(nw+v) - \frac{1}{2} \Sigma b_{n \cdot 0 \cdot 0} \sin(nw-v).$$

Den Integralen der beiden letzten Gleichungen fügen wir keine Integrationsconstanten hinzu, da wir dieselben in die Funktion (ϱ) aufgenommen haben.

Da nun

$$201) \quad \int \cos(nw \pm v) dv = \frac{1}{n(1-\mu_1) \pm 1} \sin(nw \pm v) + \frac{n\mu}{n(1-\mu_1) \pm 1} \int \frac{dV}{dv} \cos(nw \pm v) dv$$

$$\int \sin(nw \pm v) dv = -\frac{1}{n(1-\mu_1) \pm 1} \cos(nw \pm v) + \frac{n\mu}{n(1-\mu_1) \pm 1} \int \frac{dV}{dv} \sin(nw \pm v) dv,$$

und da die Funktion V keine Glieder nullten Grades enthält, so findet man:

$$202) \quad g_1 = \frac{1}{2} \Sigma \frac{b_{n \cdot 0 \cdot 0}}{n(1-\mu_1) + 1} \sin(nw+v) + \frac{1}{2} \Sigma \frac{b_{n \cdot 0 \cdot 0}}{n(1-\mu_1) - 1} \sin(nw-v)$$

$$g_2 = -\frac{1}{2} \Sigma \frac{b_{n \cdot 0 \cdot 0}}{n(1-\mu_1) + 1} \cos(nw+v) + \frac{1}{2} \Sigma \frac{b_{n \cdot 0 \cdot 0}}{n(1-\mu_1) - 1} \cos(nw-v),$$

und wenn man diese Werte in 200) einführt und

$$203) \quad R_0 = \Sigma R_{n \cdot 0 \cdot 0} \cos nw$$

setzt, so kommt:

$$204) \quad R_{n \cdot 0 \cdot 0} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n(1-\mu_1) + 1} - \frac{1}{n(1-\mu_1) - 1} \right\} b_{n \cdot 0 \cdot 0}$$

$$= \frac{b_{n \cdot 0 \cdot 0}}{1 - n^2(1-\mu_1)^2}.$$

Für den constanten Teil von R_0 hat man offenbar:

$$204a) \quad R_{0 \cdot 0 \cdot 0} = 2S_{0 \cdot 0 \cdot 0} - B_{0 \cdot 0 \cdot 0}.$$

Die Divisoren, welche in den Relationen 204) auftreten, sind die folgenden:

$$n(1-\mu_1) + 1, \quad n(1-\mu_1) - 1, \quad 1 - n^2(1-\mu_1)^2.$$

Der erste von ihnen kann niemals klein sein, wohl aber die beiden anderen, und zwar dann, wenn die Grösse $n(1-\mu_1)$ sich der Einheit nähert. Dies ist aber der Fall:

- Ia. Wenn μ_1 sich dem Bruche $\frac{1}{2}$ nähert, und wenn $n = 2$
 Ib. „ μ_1 „ „ „ $\frac{2}{3}$ „ „ „ „ $n = 3$
 Ic. „ μ_1 „ „ „ $\frac{3}{4}$ „ „ „ „ $n = 4$.

Dies sind die Fälle, in denen die Funktion R_0 , und folglich auch K_0 , gross ist im Vergleich zur störenden Masse; der erste Fall ist der der Planeten vom Hecubatypus, deren mittlere Bewegung nahe gleich $600''$ ist, der zweite ist der der Planeten vom Hildatypus, deren mittlere Bewegung nahe gleich $450''$ ist, und der dritte Fall findet beim Planeten Thule statt, dessen mittlere Bewegung nahe gleich $400''$ ist, und der übrigens auch deswegen erhebliche Schwierigkeiten bietet, weil er Jupiter sehr nahe kommt, infolge wovon die Glieder in der Entwicklung der Störungsfunktionen nach den Potenzen von $\frac{a}{a'}$ resp. $\frac{r}{r'}$ nur langsam fallen. Man wird bemerken, dass in jedem dieser Fälle nur ein einziges Glied in R_0 besonders gross wird und dass dieses von der Form D ist. Ich will diese Planeten die **charakteristischen Planeten der ersten Klasse** nennen; man wird bei ihrer Berechnung bereits in der ersten Annäherung die zweiten Potenzen der Jupitersmasse berücksichtigen müssen, und die Gleichungen 189) und 194) werden hier nicht mehr streng genug sein. Ich werde diese Fälle im nächsten Kapitel behandeln, und mich hier auf diejenigen beschränken, in denen R_0 klein ist.

3. Die Gleichung 185) endlich gibt uns für die Glieder nullten Grades, wenn wir bedenken, dass nach 60) resp. 61) die Funktion \mathcal{E} ersten Grades ist:

$$205) \quad \frac{dW}{dv} = S_0 - 2R_0 - 2S_0 R_0 + 3R_0^2 \pm \dots,$$

also für die erste Annäherung:

$$206) \quad \frac{dW}{dv} = S_0 - 2R_0 = \{S_{n \cdot 0 \cdot 0} - 2R_{n \cdot 0 \cdot 0}\} \cos nw.$$

Wir führen die Integration nach der zweiten Relation 190) aus, und erinnern uns wieder, dass die Funktion V mindestens vom ersten Grade ist. Wenn wir dann setzen:

$$207) \quad W_0 = W_{0 \cdot 0 \cdot 0} v + \Sigma W_{n \cdot 0 \cdot 0} \sin nw,$$

so wird:

$$208) \quad W_{n \cdot 0 \cdot 0} = \frac{S_{n \cdot 0 \cdot 0} - 2R_{n \cdot 0 \cdot 0}}{n(1 - \mu_1)}$$

$$W_{0 \cdot 0 \cdot 0} = S_{0 \cdot 0 \cdot 0} - 2R_{0 \cdot 0 \cdot 0} = 2B_{0 \cdot 0 \cdot 0} - 3S_{0 \cdot 0 \cdot 0}.$$

Der Divisor $n(1 - \mu_1)$ kann niemals klein werden. W_0 enthält also ausser gewöhnlichen Gliedern nur bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse eines von der Form D , das durch R_0 hier eingeführt wird.

Endlich hat man nach der Relation 155)

$$U = \mu W - W' - H + H'.$$

Die Funktionen H und H' sind zweiten Grades und die Funktion W' ist mit der Saturnsmasse multiplicirt (vergl. pag. 64); wir vernachlässigen hier diese Grössen und haben:

$$209) \quad U_0 = \mu W_0.$$

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, dass die Funktionen S_0 , R_0 , W_0 und U_0 nur die Argumente mv enthalten, und da die Grösse $n(1-\mu_1)$, welche der Faktor von v in diesen Argumenten ist, niemals klein sein kann, so schliesst man, dass unter den Gliedern nullten Grades sich keine befinden, welche von langer Periode, d. h. von einer der Formen A oder C sind, auch nicht, wenn es sich um einen charakteristischen Planeten handelt. In allen Fällen wird darum die Funktion V , welche (ausser secularen Gliedern zweiten Grades) nur Glieder dieser beiden Formen enthält, mindestens vom ersten Grade sein. Es ist also¹⁾:

$$V_0 = 0, \quad K_0 = \text{p. per. } W_0.$$

Nachdem man die Coefficienten $S_{n \cdot 0 \cdot 0}$, $R_{n \cdot 0 \cdot 0}$ und $W_{n \cdot 0 \cdot 0}$ nach den Formeln 192), 204) und 208) in der ersten Annäherung berechnet hat, macht man die zweite Annäherung, indem man die so erhaltenen Werte in die Glieder zweiter Ordnung der Gleichungen 188), 193) und 205) einsetzt; die Relationen 191), 203) und 207) sehen wir als streng an; es handelt sich nur darum die Coefficienten $S_{n \cdot 0 \cdot 0}$, $R_{n \cdot 0 \cdot 0}$ und $W_{n \cdot 0 \cdot 0}$ durch die angegebenen successiven Annäherungen genauer zu bestimmen. Diese Annäherungen führen äusserst schnell zum Ziel, und in fast allen Fällen kann man sich mit der ersten Annäherung begnügen, d. h. die Glieder rein zweiter Ordnung vernachlässigen.

4. Die numerische Berechnung der Funktionen S_0 , R_0 und W_0 könnte nach dem Vorigen ohne Schwierigkeiten vor sich gehen, wenn von vornherein die Werte der beiden Constanten α und μ_1 bekannt wären, deren erste bei der Entwicklung der Störungsfunktion auftritt, wo sie zur Berechnung der Coefficienten $A_{n \cdot 0 \cdot 0}$, $B_{n \cdot 0 \cdot 0}$ u. s. w. dient, und deren zweite in den Divisoren vorkommt. Dieselben kennt man aber zunächst nicht und man wird also zu Anfang der Rechnung gewisse Werte für sie anzunehmen haben, mit denen man die Rechnung ausführt. Später bestimmt man ihre genaueren Werte durch Vergleichung der Rechnung mit den Beobachtungen und müsste dann die Rechnung mit den letzteren wiederholen, oder doch den berechneten Coefficienten entsprechende Correctionen hinzufügen. Zwischen den beiden genannten Grössen hat man aber die folgenden Relationen, wenn man die Masse des gestörten Körpers vernachlässigt:

1) „p. per.“ gebrauche ich als Abkürzung für „pars periodica“.

$$\alpha = \frac{a}{a'}$$

$$210) \quad n' = \frac{\sqrt{M'}}{a'^{\frac{3}{2}}}, \quad n = \frac{\sqrt{M}}{a^{\frac{3}{2}}}, \quad M' = k^2(1+m'), \quad M = k^2$$

$$\mu = \frac{n'}{n}, \quad \mu^2 = \alpha^2(1+m'), \quad \mu_1 = \mu(1+c_0+\gamma).$$

Wir setzen noch

$$210a) \quad n_1 = \frac{n}{1+c_0+\gamma} \quad \text{also} \quad \mu_1 = \frac{n'}{n_1},$$

und

$$211) \quad a_1 = \frac{a}{1+p.\text{const. } \varrho} = \frac{a}{1+b_0},$$

wo man a_1 als den Mittelwert des Radiusvektor bezeichnen kann.

Bei den Planeten, deren mittlere Bewegung nicht äusserst nahe commensurabel mit derjenigen Jupiters ist (d. h. bei allen Planeten mit Ausnahme der kritischen) ist $\gamma = 0$; und für c_0 war pag. 92 mit alleiniger Berücksichtigung der Glieder nullter Ordnung der folgende Wert gefunden worden:

$$c_0 = W_{0.0.0} = 2B_{0.0.0} - 3S_{0.0.0}.$$

Man sieht nun in der Regel a (resp. n) als Integrationsconstante an und dann ist a_0 eine überzählige Constante, über die wir verfügen können. Man kann sie auf verschiedene Weisen bestimmen:

I. Man kann

$$a_0 = 0$$

setzen; dann wird

$$S_{0.0.0} = 0, \quad R_{0.0.0} = -B_{0.0.0}, \quad W_{0.0.0} = 2B_{0.0.0}.$$

II. Man kann setzen

$$b_0 = 0.$$

Dann wird

$$S_{0.0.0} = \frac{1}{2}B_{0.0.0}, \quad R_{0.0.0} = 0, \quad W_{0.0.0} = \frac{1}{2}B_{0.0.0}$$

$$a_1 = a.$$

III. Man kann setzen

$$c_0 = 0.$$

Dann wird

$$S_{0.0.0} = \frac{2}{3}B_{0.0.0}, \quad R_{0.0.0} = \frac{1}{3}B_{0.0.0}, \quad W_{0.0.0} = 0$$

$$n_1 = \frac{n}{1+\gamma} \quad \mu_1 = \mu(1+\gamma).$$

IV. Man kann endlich a_0 als Integrationsconstante (an Stelle von a) ansehen und kann dann über a resp. n (innerhalb gewisser enger Grenzen) verfügen. Hierbei wird man also a_0 als unbestimmte Grösse in den Formeln beizubehalten haben und es später aus den Beobachtungen bestimmen. Hat man es bestimmt, so sind auch die Grössen b_0 und c_0 bekannt. Findet man nun aus den Beobachtungen a_0 als eine Grösse rein erster Ordnung, so kann man den anfänglich gewählten Wert von a beibehalten, und braucht die Entwicklung der Störungsfunktion nicht zu wiederholen resp. die Coefficienten $A_{n,0,0}$, $B_{n,0,0}$ etc. nicht zu verbessern, was häufig von bedeutendem Vorteil ist. Zeigt sich indessen, dass a_0 grösser ausfällt, so muss es durch neue Wahl von a und n verkleinert werden, wozu ausser den vorstehenden die Relationen 210c) resp. 211) dienen, wobei man a_1 oder n_1 unverändert lassen kann.

Wir wollen für unsere Untersuchungen den dritten Fall wählen, also $c_0 = 0$ setzen; dann sind nämlich für alle nicht kritischen Planeten die folgenden Gleichungen erfüllt

$$212) \quad \begin{aligned} n_1 &= n, & n_1 &= \frac{\sqrt{M}}{a_{\frac{3}{2}}} \\ \mu_1 &= \mu, & \mu_1^2 &= \alpha^3(1+m'). \end{aligned}$$

Diese Wahl ist für uns deswegen von Vorteil, weil wir Tafeln berechnen wollen, welche die Coefficienten der Störungsglieder geben. Diese Tafeln enthalten streng genommen die beiden Argumente α und μ_1 (resp. a und n_1); durch die letztangeführten Relationen werden sie aber in einfacher Weise auf eines reducirt. Für die kritischen Planeten lässt sich diese Reduktion nicht ausführen, für sie würde man stets mit zwei Argumenten zu operiren haben. Doch fassen wir bei der Aufstellung der Tafeln die kritischen Planeten aus leicht fasslichen Gründen zunächst nicht ins Auge. Für sie ist mit Annahme des dritten der oben genannten Fälle

$$212a) \quad \begin{aligned} n_1 &= \frac{n}{1+\gamma}, & \mu_1 &= \mu(1+\gamma) \\ \mu_1^2 &= \alpha^3(1+\gamma)^2(1+m'). \end{aligned}$$

§ 3.

Die Glieder ersten Grades.

1. Bei der Berechnung der Glieder ersten Grades, wollen wir, wie im Vorigen, zunächst die charakteristischen Planeten der ersten Klasse bei Seite lassen, so dass alle Funktionen nullten Grades (S_0 , R_0 u. s. w.) als rein erster Ordnung anzusehen sind. Ich will aber noch eine weitere Einschränkung machen, indem wir voraussetzen wollen, dass auch die Funktionen ersten Grades S_1 , R_1 , W_1 , U_1 und \mathcal{B}_1 nicht erheblich grösser sind als die störende Masse; ich schliesse

damit noch eine zweite Klasse von charakteristischen Planeten aus, die ich gleich näher bezeichnen will.

Nach diesen Voraussetzungen können wir in der ersten Annäherung die Glieder zweiter Ordnung bei Seite lassen und die Gleichung 183) wie folgt schreiben, wenn wir nur die Glieder ersten Grades nehmen:

$$213) \quad \frac{dS}{dv} = -Q_1 = -\Sigma A_{n,1,0}^{(+1)} \eta \sin(nw+v) - \Sigma A_{n,0,1}^{(+1)} \eta' \sin(nw+v_1) \\ - \Sigma A_{n,1,0}^{(-1)} \eta \sin(nw-v) - \Sigma A_{n,0,0}^{(-1)} \eta' \sin(nw-v_1).$$

Wir haben also die Quadraturen

$$\int \eta \sin(nw \pm v) dv \quad \text{und} \quad \int \eta' \sin(nw \pm v_1) dv$$

auszuführen. Gylden hat gezeigt, wie man dieselben partiell ausführen kann, indem man zuvörderst η , Π_0 , η' , Π'_0 als constant ansieht; ich will ein nur wenig verändertes Verfahren anwenden, indem ich die folgenden Formeln benutze:

$$\int \eta \sin(nw \pm v) dv = \eta \cos \Pi \int \sin(nw \pm v) dv \mp \eta \sin \Pi \int \cos(nw \pm v) dv \\ - \int \frac{d\eta \cos \Pi}{dv} \int \sin(nw \pm v) dv^2 \pm \int \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} \int \cos(nw \pm v) dv^2,$$

oder

$$\int \eta \sin(nw \pm v) dv = \eta \cos \Pi \int \sin(nw \pm v) dv \mp \eta \sin \Pi \int \cos(nw \pm v) dv \\ - \frac{d\eta \cos \Pi}{dv} \iint \sin(nw \pm v) dv^2 \pm \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} \iint \cos(nw \pm v) dv^2 \\ 214) \quad + \frac{d^2 \eta \cos \Pi}{dv^2} \iiint \sin(nw \pm v) dv^3 \mp \frac{d^2 \eta \sin \Pi}{dv^2} \iiint \cos(nw \pm v) dv^3 \\ \pm \dots$$

$$\int \eta' \sin(nw \pm v_1) dv = \eta' \cos \Pi_1 \int \sin(nw \pm v) dv \mp \eta' \sin \Pi_1 \int \cos(nw \pm v) dv \\ - \frac{d\eta' \cos \Pi_1}{dv} \iint \sin(nw \pm v) dv^2 \pm \frac{d\eta' \sin \Pi_1}{dv} \iint \cos(nw \pm v) dv^2 \\ \pm \dots,$$

zu welchen Relationen ich die entsprechenden:

$$\int \eta \cos(nw \pm v) dv = \eta \cos \Pi \int \cos(nw \pm v) dv \pm \eta \sin \Pi \int \sin(nw \pm v) dv \\ - \frac{d\eta \cos \Pi}{dv} \iint \cos(nw \pm v) dv \mp \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} \iint \sin(nw \pm v) dv^2 \\ \pm \dots$$

$$\int \eta' \cos(nw \pm v_1) dv = \eta' \cos \Pi_1 \int \cos(nw \pm v) dv \pm \eta' \sin \Pi_1 \int \sin(nw \pm v) dv \\ \mp \dots$$

hinzufüge, da wir sie später brauchen werden.

Die Funktionen $\eta_{\sin}^{\cos} \Pi$ und $\eta'_{\sin}^{\cos} \Pi_1$ werden nun bei jeder Differentiation mit einer der kleinen Grössen ζ_n multiplicirt; das angewandte Integrationsverfahren führt also äusserst schnell zum Ziele, wenn nicht die betreffenden Glieder durch die Ausführung der Integrationen $\int_{\sin}^{\cos} (nw \pm v) dv$ erheblich vergrössert werden; dies ist aber nur der Fall für die charakteristischen Planeten der ersten Klasse, und auch bei diesen ist die Abnahme der Glieder noch stark genug; in den Fällen, die wir jetzt behandeln, braucht man wohl stets nur die erste Zeile in den vorstehenden Relationen zu berücksichtigen.

Wir erinnern uns der Relationen 201) und schreiben also in der ersten Annäherung, da V mindestens ersten Grades ist:

$$214a) \quad \int \eta \sin (nw \pm v) dv = -\frac{1}{n(1-\mu_1) \pm 1} \eta \cos (nw \pm v)$$

$$\int \eta' \sin (nw \pm v_1) dv = -\frac{1}{n(1-\mu_1) \pm 1} \eta' \cos (nw \pm v_1).$$

Wenn wir setzen

$$215) \quad S_1 = \sum S_{n,1,0}^{(+1)} \eta \cos (nw + v) + \sum S_{n,0,1}^{(+1)} \eta' \cos (nw + v_1)$$

$$+ \sum S_{n,1,0}^{(-1)} \eta \cos (nw - v) + \sum S_{n,0,1}^{(-1)} \eta' \cos (nw - v_1),$$

so wird also:

$$215a) \quad S_{n,1,0}^{(+1)} = \frac{A_{n,1,0}^{(+1)}}{n(1-\mu_1) + 1}, \quad S_{n,0,1}^{(+1)} = \frac{A_{n,0,1}^{(+1)}}{n(1-\mu_1) + 1}$$

$$S_{n,1,0}^{(-1)} = \frac{A_{n,1,0}^{(-1)}}{n(1-\mu_1) - 1}, \quad S_{n,0,1}^{(-1)} = \frac{A_{n,0,1}^{(-1)}}{n(1-\mu_1) - 1}.$$

Man ersieht, dass die Funktion S_1 dieselben Divisoren enthält wie R_0 , also auch in denselben Fällen beträchtlich wird, d. h. bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse und zwar wird sie bei diesen Planeten Glieder der Form C enthalten.

2. Wir gehen jetzt zur Gleichung 184) für ϱ über und schreiben mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung:

$$216) \quad \frac{d^2 \varrho}{dv^2} + \varrho = -Q_0 \frac{d(\varrho)}{dv} + 2S_1 - P_1;$$

da aber mit Vernachlässigung von Gliedern rein erster Ordnung:

$$\frac{d(\varrho)}{dv} = -\eta \sin v,$$

so wird, wenn wir für Q_0 , S_1 und P_1 ihre oben gefundenen Werte einsetzen:

$$217) \quad \frac{d^2 \varrho}{dv^2} + \varrho = \Sigma b_{n,1,0}^{(+1)} \eta \cos(nw + v) + \Sigma b_{n,0,1}^{(+1)} \eta' \cos(nw + v_1) \\ + \Sigma b_{n,1,0}^{(-1)} \eta \cos(nw - v) + \Sigma b_{n,0,1}^{(-1)} \eta' \cos(nw - v_1),$$

wo

$$217a) \quad b_{n,1,0}^{(+1)} = 2S_{n,1,0}^{(+1)} - B_{n,1,0}^{(+1)} - \frac{1}{2} A_{n,0,0}, \quad b_{n,0,1}^{(+1)} = 2S_{n,0,1}^{(+1)} - B_{n,0,1}^{(+1)} \\ b_{n,1,0}^{(-1)} = 2S_{n,1,0}^{(-1)} - B_{n,1,0}^{(-1)} + \frac{1}{2} A_{n,0,0}, \quad b_{n,0,1}^{(-1)} = 2S_{n,0,1}^{(-1)} - B_{n,0,1}^{(-1)}.$$

Jetzt haben wir die Funktion ϱ in ihre beiden Teile (ϱ) und R zu zerlegen, da nach unserer Definition (ϱ) alle Glieder der Form B:

$$\cos[(1 - \sigma_n)v - \Gamma_n]$$

enthalten soll. Wenn wir uns erinnern, dass

$$nw \pm v = n(1 - \mu_1)v - nB - n\mu V \pm (v - II) \\ nw \pm v_1 = n(1 - \mu_1)v - nB - n\mu V \pm (v - II_1),$$

so sehen wir, dass diese Argumente von der erwähnten Form sind, wenn $n = 0$, ganz unabhängig von dem Werte von μ_1 ; diese Glieder werden also für alle Planeten die gleichen sein. Da nach dem vorigen Kapitel $b_{0,1,0}^{(-1)} = 0$ und $b_{0,0,1}^{(-1)} = 0$, so haben wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$218) \quad \frac{d^2 R}{dv^2} + R = \sum_1^{\infty} b_{n,1,0}^{(+1)} \eta \cos(nw + v) + \sum_1^{\infty} b_{n,0,1}^{(+1)} \eta' \cos(nw + v_1) \\ + \sum_1^{\infty} b_{n,1,0}^{(-1)} \eta \cos(nw - v) + \sum_1^{\infty} b_{n,0,1}^{(-1)} \eta' \cos(nw - v_1)$$

$$219) \quad \frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + (\varrho) = b_{0,1,0}^{(+1)} \eta \cos v + b_{0,0,1}^{(+1)} \eta' \cos v_1.$$

Wir wollen zuerst die Gleichung 218) integrieren, indem wir uns der Beziehungen 197) bis 199) erinnern. Demnach setzen wir:

$$220) \quad R_1 = g_1 \sin v - g_2 \cos v$$

$$220a) \quad \frac{dg_1}{dv} = \frac{1}{2} \Sigma b_{n,1,0}^{(+1)} \{ \eta \cos(nw + v + v) + \eta \cos(nw + v - v) \} \\ + \frac{1}{2} \Sigma b_{n,1,0}^{(-1)} \{ \eta \cos(nw - v + v) + \eta \cos(nw - v - v) \} \\ + \frac{1}{2} \Sigma b_{n,0,1}^{(+1)} \{ \eta' \cos(nw + v_1 + v) + \eta' \cos(nw + v_1 - v) \} \\ + \frac{1}{2} \Sigma b_{n,0,1}^{(-1)} \{ \eta' \cos(nw - v_1 + v) + \eta' \cos(nw - v_1 - v) \} \\ \frac{dg_2}{dv} = \frac{1}{2} \Sigma b_{n,1,0}^{(+1)} \{ \eta \sin(nw + v + v) - \eta \sin(nw + v - v) \} \\ + \frac{1}{2} \Sigma b_{n,1,0}^{(-1)} \{ \eta \sin(nw - v + v) - \eta \sin(nw - v - v) \} \\ + \frac{1}{2} \Sigma b_{n,0,1}^{(+1)} \{ \eta' \sin(nw + v_1 + v) - \eta' \sin(nw + v_1 - v) \} \\ + \frac{1}{2} \Sigma b_{n,0,1}^{(-1)} \{ \eta' \sin(nw - v_1 + v) - \eta' \sin(nw - v_1 - v) \}.$$

Um die letzteren Gleichungen zu integrieren, verfähre ich auf dieselbe Weise wie oben zur Herstellung der Relationen 214), 190) und 201). Man erhält dann die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
 \int \eta \sin [nw \pm (v+v)] dv &= \eta \cos \Pi \int \sin (nw \pm 2v) dv \mp \eta \sin \Pi \int \cos (nw \pm 2v) dv \\
 &\quad - \frac{d\eta \cos \Pi}{dv} \iint \sin (nw \pm 2v) dv^2 \pm \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} \iint \cos (nw \pm 2v) dv^2 \\
 &\quad \pm \dots \\
 221) \quad \int \eta \sin [nw \pm (v-v)] dv &= \eta \cos \Pi \int \sin nw dv \mp \eta \sin \Pi \int \cos nw dv \\
 &\quad - \frac{d\eta \cos \Pi}{dv} \iint \sin nw dv^2 \pm \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} \iint \cos nw dv^2 \\
 &\quad \pm \dots \\
 \int \eta \cos [nw \pm (v+v)] dv &= \eta \cos \Pi \int \cos (nw \pm 2v) dv \pm \eta \sin \Pi \int \sin (nw \pm 2v) dv \\
 &\quad - \frac{d\eta \cos \Pi}{dv} \iint \cos (nw \pm 2v) dv^2 \mp \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} \iint \sin (nw \pm 2v) dv^2 \\
 &\quad \pm \dots \\
 \int \eta \cos [nw \pm (v-v)] dv &= \eta \cos \Pi \int \cos nw dv \pm \eta \sin \Pi \int \sin nw dv \\
 &\quad - \frac{d\eta \cos \Pi}{dv} \iint \cos nw dv^2 \mp \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} \iint \sin nw dv^2 \\
 &\quad \pm \dots
 \end{aligned}$$

Für die Integrale $\int \eta' \sin [nw \pm (v_1+v)] dv$ u. s. w. findet man ganz analoge Ausdrücke, man hat nur η durch η' und Π durch Π_1 zu ersetzen.

Weiter ist:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin}{\cos} nw dv &= \mp \frac{1}{n(1-\mu_1)} \cos nw + \frac{\mu}{1-\mu_1} \int \frac{dV \sin}{dv \cos} nw dv \\
 222) \quad \int \sin (nw \pm 2v) dv &= -\frac{1}{n(1-\mu_1) \pm 2} \cos (nw \pm 2v) + \frac{n\mu}{n(1-\mu_1) \pm 2} \int \frac{dV}{dv} \sin (nw \pm 2v) dv \\
 \int \cos (nw \pm 2v) dv &= \frac{1}{n(1-\mu_1) \pm 2} \sin (nw \pm 2v) + \frac{n\mu}{n(1-\mu_1) \pm 2} \int \frac{dV}{dv} \cos (nw \pm 2v) dv.
 \end{aligned}$$

Die Divisoren, welche in diesen Ausdrücken auftreten, sind:

$$n(1-\mu_1), \quad n(1-\mu_1)+2, \quad n(1-\mu_1)-2.$$

Da n nicht den Wert Null annimmt, so ist der letztere der einzige, welcher sehr klein sein kann; er wird es in den folgenden Fällen sein:

- Ia. Wenn μ_1 sich dem Bruche $\frac{1}{2}$ nähert, und wenn $n = 4$
- Ib. " μ_1 " " " $\frac{2}{3}$ " , " " " $n = 6$
- Ic. " μ_1 " " " $\frac{3}{4}$ " , " " " $n = 8$.

$$\begin{aligned}
224a) \quad R_{n-1,0}^{(+1)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(1-\mu_1)+2} - \frac{1}{n(1-\mu_1)} \right] b_{n-1,0}^{(+1)} = \frac{b_{n-1,0}^{(+1)}}{1 - [n(1-\mu_1)+1]^2} \\
R_{n-1,0}^{(-1)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(1-\mu_1)} - \frac{1}{n(1-\mu_1)-2} \right] b_{n-1,0}^{(-1)} = \frac{b_{n-1,0}^{(-1)}}{1 - [n(1-\mu_1)-1]^2} \\
R_{n,0,1}^{(+1)} &= \frac{b_{n,0,1}^{(+1)}}{1 - [n(1-\mu_1)+1]^2} \\
R_{n,0,1}^{(-1)} &= \frac{b_{n,0,1}^{(-1)}}{1 - [n(1-\mu_1)-1]^2}.
\end{aligned}$$

3. Jetzt wollen wir die Gleichung 219) integrieren. Hierbei können wir die Relationen 221) nicht anwenden, wenn wir das Auftreten secularer Glieder vermeiden wollen. Gylden hat gezeigt, wie man das Integral dieser Gleichung in rein periodischer Form erhalten kann, indem man die elementaren Glieder an Stelle der secularen einführt, und zwar lässt sich die Integration sehr einfach ausführen; da wir (ϱ) unter der Form:

$$(\varrho) = \eta \cos v = \kappa \cos(v - \omega) + \Sigma \kappa_n \cos(v - \omega_n)$$

darstellen wollen, so differenzieren wir diesen Ausdruck zweimal und finden

$$\frac{d^2(\varrho)}{dv^2} = (1 - \varepsilon)^2 \kappa \cos(v - \omega) + \Sigma (1 - \varepsilon_n)^2 \kappa_n \cos(v - \omega_n).$$

Nach den Relationen 154) ist aber:

$$\eta' \cos v_1 = \eta' \cos \Pi_1 \cos v + \eta' \sin \Pi_1 \sin v = \Sigma \kappa_n' \cos(v - \omega_n).$$

Setzt man die vorstehenden Werte in die Gleichung 219) ein, so erhält man zur Bestimmung der Coefficienten κ_n folgende Gleichung:

$$(2\varepsilon - \varepsilon^2) \kappa \cos(v - \omega) + \Sigma (2\varepsilon_n - \varepsilon_n^2) \kappa_n \cos(v - \omega_n) = b_{0,1,0}^{(+1)} \kappa \cos(v - \omega) + \Sigma \{ b_{0,1,0}^{(+1)} \kappa_n + b_{0,0,1}^{(+1)} \kappa_n' \} \cos(v - \omega_n),$$

woraus man schliesst:

$$\begin{aligned}
225) \quad (2\varepsilon - \varepsilon^2) \kappa &= b_{0,1,0}^{(+1)} \kappa \\
(2\varepsilon_n - \varepsilon_n^2) \kappa_n &= b_{0,1,0}^{(+1)} \kappa_n + b_{0,0,1}^{(+1)} \kappa_n'.
\end{aligned}$$

Wir bestimmen demnach die Grösse ε aus der Gleichung:

$$225a) \quad 2\varepsilon - \varepsilon^2 = b_{0,1,0}^{(+1)},$$

womit κ und Γ in der That die beiden Integrationsconstanten werden. Für die κ_n hat man folgende Werte:

$$226) \quad \kappa_n = \frac{b_{0,0,1}^{(+1)} \kappa_n'}{2\varepsilon_n - \varepsilon_n^2 - b_{0,1,0}^{(+1)}} = \frac{b_{0,0,1}^{(+1)} \kappa_n'}{2(\varepsilon_n - \varepsilon) - (\varepsilon_n^2 - \varepsilon^2)} = \frac{b_{0,0,1}^{(+1)} \kappa_n'}{2(\varepsilon_n - \varepsilon) \left[1 - \frac{\varepsilon_n + \varepsilon}{2} \right]}.$$

Die Differenz $\zeta_n - \zeta$ ist eine Grösse rein erster Ordnung; die Coefficienten κ_n sind also nullter Ordnung, d. h. elementar. Die Constante ζ kommt unter den ζ_n nicht vor, und darum wird auch die Differenz $\zeta_n - \zeta$ im Allgemeinen nicht gleich Null sein. Es scheint indessen, dass in Ausnahmefällen die eine oder die andere der Constanten ζ_n ihrem Werte nach so nahe ζ kommen könne, dass daraus ausserordentlich grosse Werte der entsprechenden κ_n resultiren. Ueber diese Fälle zu sprechen, werde ich im achten Kapitel Gelegenheit nehmen, ebenso wie von der Darstellung der elementaren Glieder in secularer Form.

4. Für die Funktion W haben wir endlich:

$$\frac{dW}{dv} = S_1 - 2R_1 + (6R_0 - 2S_0) \eta \cos v - \frac{d\xi_1}{dv},$$

und wenn wir die für R und S gefundenen Werte einsetzen, so ist:

$$\begin{aligned} 227) \quad \frac{dW}{dv} = & \sum T_{n,1,0}^{(+)} \eta \cos(nw + v) & + \sum T_{n,0,1}^{(+)} \eta' \cos(nw + v_1) \\ & + \sum T_{n,1,0}^{(-)} \eta \cos(nw - v) & + \sum T_{n,0,1}^{(-)} \eta' \cos(nw - v_1) \\ & - \frac{d\xi_1}{dv}, \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} 227a) \quad T_{n,1,0}^{(+)} &= S_{n,1,0}^{(+)} - 2R_{n,1,0}^{(+)} + 3R_{n,0,0} - S_{n,0,0} \\ T_{n,1,0}^{(-)} &= S_{n,1,0}^{(-)} - 2R_{n,1,0}^{(-)} + 3R_{n,0,0} - S_{n,0,0} \\ T_{n,0,1}^{(+)} &= S_{n,0,1}^{(+)} - 2R_{n,0,1}^{(+)} \\ T_{n,0,1}^{(-)} &= S_{n,0,1}^{(-)} - 2R_{n,0,1}^{(-)}. \end{aligned}$$

Die Gleichung 227) integriren wir gerade wie die Gleichung 213), indem wir, wie 214a), schreiben:

$$\begin{aligned} \int \eta \cos(nw \pm v) dv &= \frac{1}{n(1 - \mu_1) \pm 1} \eta \sin(nw \pm v) \\ \int \eta' \cos(nw \pm v_1) dv &= \frac{1}{n(1 - \mu_1) \pm 1} \eta' \sin(nw \pm v_1). \end{aligned}$$

Wenn wir also setzen:

$$\begin{aligned} 228) \quad W_1 = & \sum W_{n,1,0}^{(+)} \eta \sin(nw + v) & + \sum W_{n,0,1}^{(+)} \eta' \sin(nw + v_1) \\ & + \sum W_{n,1,0}^{(-)} \eta \sin(nw - v) & + \sum W_{n,0,1}^{(-)} \eta' \sin(nw - v_1) \\ & - \xi_1, \end{aligned}$$

so wird:

$$228a) \quad \begin{aligned} W_{n,1,0}^{(+1)} &= \frac{T_{n,1,0}^{(+1)}}{n(1-\mu_1)+1}, & W_{n,0,1}^{(+1)} &= \frac{T_{n,0,1}^{(+1)}}{n(1-\mu_1)+1} \\ W_{n,1,0}^{(-1)} &= \frac{T_{n,1,0}^{(-1)}}{n(1-\mu_1)-1}, & W_{n,0,1}^{(-1)} &= \frac{T_{n,0,1}^{(-1)}}{n(1-\mu_1)-1}. \end{aligned}$$

Die Funktion Ξ_1 endlich findet man mit Hilfe der Relation 60). Wenn man dort nur die Glieder ersten Grades berücksichtigt und diejenigen rein zweiter Ordnung fortlässt, so wird:

$$228b) \quad \Xi_1 = 2 \frac{d\eta \cos II}{dv} \cos v + 2 \frac{d\eta \sin II}{dv} \sin v.$$

Der numerische Betrag derselben ist so klein, dass man sie wohl stets bei Seite lassen kann.

Für die Funktion U ergibt sich dann

$$229) \quad U_1 = \mu W_1,$$

und da unter den Gliedern ersten Grades in W bei den allgemeinen Planeten nur gewöhnliche Glieder sich befinden, so ist auch:

$$229a) \quad K_1 = W_1, \quad V_1 = 0.$$

5. Wir wollen nun die Gleichung 186) mit bezug auf die Glieder ersten Grades integrieren. Wenn wir wieder von den charakteristischen Planeten absehen, so ist in der ersten Annäherung zu setzen, da ζ ersten Grades ist:

$$230) \quad \frac{d^2 \zeta}{dv^2} + \zeta = -Q_0 \frac{d(\zeta)}{dv} + Z_1,$$

und da mit Vernachlässigung der Glieder rein erster Ordnung:

$$\frac{d(\zeta)}{dv} = \sin j \cos v,$$

so wird, wenn wir für Q_0 und Z_1 ihre Werte einsetzen:

$$231) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 \zeta}{dv^2} + \zeta &= \sum c_{n,1,0}^{(+1)} \sin j \sin(nw+v) & + \sum c_{n,0,1}^{(+1)} \sin j' \sin(nw+v_1) \\ &+ \sum c_{n,1,0}^{(-1)} \sin j \sin(nw-v) & + \sum c_{n,0,1}^{(-1)} \sin j' \sin(nw-v_1), \end{aligned}$$

wo:

$$231a) \quad \begin{aligned} c_{n,1,0}^{(+1)} &= C_{n,1,0}^{(+1)} - \frac{1}{2} A_{n,0,0}, & c_{n,0,1}^{(+1)} &= C_{n,0,1}^{(+1)} \\ c_{n,1,0}^{(-1)} &= C_{n,1,0}^{(-1)} - \frac{1}{2} A_{n,0,0}, & c_{n,0,1}^{(-1)} &= C_{n,0,1}^{(-1)}. \end{aligned}$$

Die Gleichung 231) integrieren wir dann gerade wie die Gleichung 216) für φ . Die in 231) vorkommenden Argumente werden auch hier elementar für $n=0$. Wir zerlegen also, da $c_{0,1,0}^{(-1)}$ und $c_{0,0,1}^{(-1)}$ gleich Null sind, diese Gleichungen in die beiden folgenden:

$$232) \quad \frac{d^2 \mathfrak{B}}{dv^2} + \mathfrak{B} = \sum_1^{\infty} c_{n-1,0}^{(+1)} \sin j \sin (nw + v) + \sum_1^{\infty} c_{n,0-1}^{(+1)} \sin j' \sin (nw + v_1) \\ + \sum_1^{\infty} c_{n+1,0}^{(-1)} \sin j \sin (nw - v) + \sum_1^{\infty} c_{n,0-1}^{(-1)} \sin j' \sin (nw - v_1)$$

$$233) \quad \frac{d^2(\mathfrak{B})}{dv^2} + (\mathfrak{B}) = c_{0-1,0}^{(+1)} \sin j \sin v + c_{0,0-1}^{(+1)} \sin j' \sin v_1.$$

Wenn wir 232) in der Form:

$$232a) \quad \frac{d^2 \mathfrak{B}}{dv^2} + \mathfrak{B} = Y$$

schreiben, so wird wieder 1):

$$234) \quad \mathfrak{B} = g_1 \sin v - g_2 \cos v,$$

wo zu setzen ist:

$$\frac{dg_1}{dv} = Y \cos v, \quad \frac{dg_2}{dv} = Y \sin v.$$

Man hat also zu nehmen:

$$234a) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dg_1}{dv} \\ \frac{dg_2}{dv} \end{array} \right\} = \pm \frac{1}{2} \sum c_{n-1,0}^{(+1)} \left\{ \sin j \frac{\sin}{\cos} (nw + v + v) \pm \sin j \frac{\sin}{\cos} (nw + v - v) \right\} \\ \pm \frac{1}{2} \sum c_{n,0-1}^{(-1)} \left\{ \sin j \frac{\sin}{\cos} (nw - v + v) \pm \sin j \frac{\sin}{\cos} (nw - v - v) \right\} \\ \pm \frac{1}{2} \sum c_{n,0-1}^{(+1)} \left\{ \sin j' \frac{\sin}{\cos} (nw + v_1 + v) \pm \sin j' \frac{\sin}{\cos} (nw + v_1 - v) \right\} \\ \pm \frac{1}{2} \sum c_{n,0-1}^{(-1)} \left\{ \sin j' \frac{\sin}{\cos} (nw - v_1 + v) \pm \sin j' \frac{\sin}{\cos} (nw - v_1 - v) \right\}.$$

In Analogie mit den Gleichungen 221) haben wir aber:

$$\int \sin j \sin [nw \pm (v+v)] dv = \sin j \cos \sigma \int \sin (nw \pm 2v) dv \mp \sin j \sin \sigma \int \cos (nw \pm 2v) dv \\ - \frac{d \sin j \cos \sigma}{dv} \iint \sin (nw \pm 2v) dv^2 \pm \frac{d \sin j \sin \sigma}{dv} \iint \cos (nw \pm 2v) dv^2 \\ \pm \dots \\ 235) \quad \int \sin j \sin [nw \pm (v-v)] dv = \sin j \cos \sigma \int \sin nw dv \mp \sin j \sin \sigma \int \cos nw dv \\ - \frac{d \sin j \cos \sigma}{dv} \iint \sin nw dv^2 \pm \frac{d \sin j \sin \sigma}{dv} \iint \cos nw dv^2 \\ \pm \dots$$

1) Die Bezeichnungen g_1 und g_2 brauche ich hier, wie oben, nur vorübergehend.

$$\begin{aligned}
& \int \sin j \cos [nw \pm (v+v)] dv = \sin j \cos \sigma \int \cos (nw \pm 2v) dv \pm \sin j \sin \sigma \int \sin (nw \pm 2v) dv \\
& \quad - \frac{d \sin j \cos \sigma}{dv} \iint \cos (nw \pm 2v) dv^2 \mp \frac{d \sin j \sin \sigma}{dv} \iint \sin (nw \pm 2v) dv^2 \\
& \quad \pm \dots \\
235) & \int \sin j \cos [nw \pm (v-v)] dv = \sin j \cos \sigma \int \cos nw dv \pm \sin j \sin \sigma \int \sin nw dv \\
& \quad - \frac{d \sin j \cos \sigma}{dv} \iint \cos nw dv^2 \mp \frac{d \sin j \sin \sigma}{dv} \iint \sin nw dv^2 \\
& \quad \pm \dots
\end{aligned}$$

Die weitere Integration findet mit Anwendung der Relationen 222) statt und es treten hier dieselben Divisoren

$$n(1-\mu_1), \quad n(1-\mu_1)+2, \quad n(1-\mu_1)-2$$

auf wie in der Funktion R_1 . \mathfrak{B}_1 enthält also, wie R_1 , merklich grosse Glieder, wenn es sich um charakteristische Planeten der ersten oder zweiten Klasse handelt.

Es wird endlich, wenn man die Rechnungen in der angegebenen Weise ausführt:

$$\begin{aligned}
236) \quad \mathfrak{B}_1 = & \Sigma Z_{n-1,0}^{(+1)} \sin j \sin (nw+v) + \Sigma Z_{n,0-1}^{(+1)} \sin j' \sin (nw+v_1) \\
& + \Sigma Z_{n-1,0}^{(-1)} \sin j \sin (nw-v) + \Sigma Z_{n,0-1}^{(-1)} \sin j' \sin (nw-v_1),
\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
236a) \quad Z_{n-1,0}^{(+1)} &= \frac{c_{n-1,0}^{(+1)}}{1-[n(1-\mu_1)+1]^2}, & Z_{n,0-1}^{(+1)} &= \frac{c_{n,0-1}^{(+1)}}{1-[n(1-\mu_1)+1]^2} \\
Z_{n-1,0}^{(-1)} &= \frac{c_{n-1,0}^{(-1)}}{1-[n(1-\mu_1)-1]^2}, & Z_{n,0-1}^{(-1)} &= \frac{c_{n,0-1}^{(-1)}}{1-[n(1-\mu_1)-1]^2}.
\end{aligned}$$

6. Zur Integration der Gleichung 233) erinnern wir uns, dass wir (3) unter der Form

$$(3) = \sin j \sin v = \sin \iota \sin (v-\vartheta) + \Sigma \sin \iota_n \sin (v-\vartheta_n)$$

darstellen wollen, wonach

$$\frac{d^2(3)}{dv^2} = -(1+\tau)^2 \sin \iota \sin (v-\vartheta) - \Sigma (1+\tau_n)^2 \sin \iota_n \sin (v-\vartheta_n).$$

Ferner folgt aus den Relationen 171) und 173)

$$\sin j' \sin v_1 = \sin j' \cos \sigma_1 \sin v - \sin j' \sin \sigma_1 \cos v = \Sigma \sin \iota'_n \sin (v-\vartheta'_n).$$

Setzt man diese letzteren Werte in Gleichung 233) ein, so erhält man zur Bestimmung der $\sin \iota_n$ folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
& (2\tau + \tau^2) \sin \iota \sin (v-\vartheta) + \Sigma (2\tau_n + \tau_n^2) \sin \iota_n \sin (v-\vartheta_n) = \\
& = -c_{0,1,0}^{(+1)} \sin \iota \sin (v-\vartheta) - \Sigma \{c_{0,1,0}^{(+1)} \sin \iota_n + c_{0,0,1}^{(+1)} \sin \iota'_n\} \sin (v-\vartheta_n),
\end{aligned}$$

woraus man schliesst:

$$237) \quad 2\tau + \tau^2 = -c_{0.1.0}^{(+1)}$$

$$\sin \iota_n = -\frac{c_{0.0.1}^{(+1)} \sin \iota'_n}{2\tau_n + \tau_n^2 + c_{0.1.0}^{(+1)}} = \frac{c_{0.0.1}^{(+1)} \sin \iota'_n}{2(\tau - \tau_n) + (\tau^2 - \tau_n^2)} = \frac{c_{0.0.1}^{(+1)} \sin \iota'_n}{2(\tau - \tau_n) \left[1 + \frac{\tau + \tau_n}{2} \right]}$$

Es gelten für die τ_n und die $\sin \iota_n$ dieselben Bemerkungen, die wir schon anlässlich der s_n und \varkappa_n gemacht haben; ich will nur bemerken, dass τ' gleich Null ist, auch wenn man die Bewegung Jupiters nicht als elliptisch ansieht; eine Thatsache, die aus der Theorie der gegenseitigen Störungen der grossen Planeten folgt.

7. Es lassen sich nun auch ohne Schwierigkeiten nach 96) die Funktionen $\sin i \sin \Sigma$ und $\sin i \cos \Sigma$ bis auf Glieder zweiten Grades exclusive, sowie der Ausdruck 92) für die Länge l und nach 100) auch die Funktion $\Omega - \Sigma$ bis auf Glieder zweiten Grades inclusive berechnen. Ich gehe auf diese Operationen hier nicht des Näheren ein, da sie auf der Hand liegen; auch würde die analytische Darstellung unnütz weitläufig werden, während sich die numerische Berechnung äusserst einfach gestaltet, da man überall die Glieder, welche unwesentlich sind, sofort bei Seite lassen kann.

§ 4.

Die Glieder zweiten Grades.

1. Unter den Gliedern nullten und ersten Grades, welche wir bisher behandelt haben, fanden sich ausser gewöhnlichen Gliedern solche der Form B, welche stets ersten Grades sind und bei allen Planeten in gleicher Weise auftreten; ferner traten, insofern es sich um charakteristische Planeten handelt, Glieder der Formen C und D auf. Solche der Form A jedoch fanden sich nicht vor; dieselben sind demnach mindestens zweiten Grades, und wir werden jetzt mit ihnen zu thun haben. Sind die Excentricitäts- und Neigungsmoduln sämtlicher störender Körper gleich Null, so treten gar keine Glieder der Form A auf.

Bei der Darstellung der Glieder zweiten Grades will ich nicht so weit ins Einzelne gehen, wie ich es bisher gethan habe, da ich sonst die analytische Entwicklung weit ausführlicher machen müsste, als man ihrer je benötigen wird. Nur bei grossen Excentricitäten und Neigungen wird man überhaupt auf diese Glieder Rücksicht nehmen und auch dann nur auf einen kleinen Teil derselben.

Ich setze wieder voraus, dass die Funktionen $S_0, S_1, S_2, R_0, R_1, R_2$ und U_0, U_1, U_2 als rein erster Ordnung angesehen werden können, schliesse also die charakteristischen Planeten vorläufig aus.

Zur Bestimmung von S_2 haben wir dann nach Gleichung 183)

$$\frac{dS}{dv} = -Q_2 - \frac{1}{2} \frac{d\eta^2}{dv}.$$

Ich will nun den Teil der Funktion S_2 , der von der Form A ist, von den übrigen Gliedern trennen und zu diesem Zweck eine Bezeichnung anwenden, welche Gylden zuerst in ähnlicher Weise gebraucht hat. Ich bezeichne nämlich allgemein mit

$$T_a F, \quad T_b F, \quad T_c F, \quad T_d F$$

den bez. Teil einer jeden Funktion F , der von der Form A, B, C oder D ist und mit $T_g F$ den Teil, der sich aus den gewöhnlichen Gliedern zusammensetzt, so dass die Identität

$$F = T_a F + T_b F + T_c F + T_d F + T_g F$$

für jede Funktion erfüllt ist, die weder eine Constante noch einen secularen Teil enthält.

Hiernach zerlegt sich die obige Gleichung für S_2 in die beiden folgenden:

$$238) \quad T_a \frac{dS}{dv} = -T_a Q_2 - \frac{1}{2} \frac{d\eta^2}{dv}$$

$$239) \quad \frac{dS}{dv} = -Q_2,$$

wo in der letzteren die Glieder der Form A zu unterdrücken sind. Aus den Ausdrücken 165) und 177) für Q entnehmen wir, dass nur aus den vier Summen

$$\begin{aligned} \Sigma A_{n-1,1}^{(+1)} \eta \eta' \sin(nw + v - v_1) & \quad \text{und} \quad \Sigma A_{n-1,1}^{(-1)} \eta \eta' \sin(nw - v + v_1) \\ \Sigma \bar{A}_{n-1,1}^{(+1)} \sin j \sin j' \sin(nw + v - v_1) & \quad \text{und} \quad \Sigma \bar{A}_{n-1,1}^{(-1)} \sin j \sin j' \sin(nw - v + v_1) \end{aligned}$$

Glieder der Form A entstehen können, nämlich wenn $n = 0$. Da aber die Coefficienten $A_{0,1,1}^{(-1)}$, $\bar{A}_{0,1,1}^{(+1)}$ und $\bar{A}_{0,1,1}^{(-1)}$ gleich Null sind, so wird

$$240) \quad T_a Q_2 = A_{0,1,1}^{(+1)} \eta \eta' \sin(v - v_1).$$

In Gleichung 239) hat man also zu setzen:

$$\begin{aligned} 241) \quad Q_2 = \Sigma A_{n-2,0} \eta^2 \sin nw & \quad + \Sigma \bar{A}_{n-2,0} \sin^2 j \sin nw \\ + \Sigma A_{n-2,0}^{(+2)} \eta^2 \sin(nw + 2v) & \quad + \Sigma \bar{A}_{n-2,0}^{(+2)} \sin^2 j \sin(nw + 2v) \\ + \Sigma A_{n-2,0}^{(-2)} \eta^2 \sin(nw - 2v) & \quad + \Sigma \bar{A}_{n-2,0}^{(-2)} \sin^2 j \sin(nw - 2v) \\ + \Sigma A_{n-1,1}^{(+2)} \eta \eta' \sin(nw + v + v_1) & \quad + \Sigma \bar{A}_{n-1,1}^{(+2)} \sin j \sin j' \sin(nw + v + v_1) \\ + \Sigma A_{n-1,1}^{(+1)} \eta \eta' \sin(nw + v - v_1) & \quad + \Sigma \bar{A}_{n-1,1}^{(+1)} \sin j \sin j' \sin(nw + v - v_1) \\ + \Sigma A_{n-1,1}^{(-1)} \eta \eta' \sin(nw - v + v_1) & \quad + \Sigma \bar{A}_{n-1,1}^{(-1)} \sin j \sin j' \sin(nw - v + v_1) \\ + \Sigma A_{n-1,1}^{(-2)} \eta \eta' \sin(nw - v - v_1) & \quad + \Sigma \bar{A}_{n-1,1}^{(-2)} \sin j \sin j' \sin(nw - v - v_1) \\ + \Sigma A_{n-0,2} \eta'^2 \sin nw & \quad + \Sigma \bar{A}_{n-0,2} \sin^2 j' \sin nw \\ + \Sigma A_{n-0,2}^{(+2)} \eta'^2 \sin(nw + 2v_1) & \quad + \Sigma \bar{A}_{n-0,2}^{(+2)} \sin^2 j' \sin(nw + 2v_1) \\ + \Sigma A_{n-0,2}^{(-2)} \eta'^2 \sin(nw - 2v_1) & \quad + \Sigma \bar{A}_{n-0,2}^{(-2)} \sin^2 j' \sin(nw - 2v_1), \end{aligned}$$

wo der Coefficient $A_{0,1,1}^{(+1)}$ zu unterdrücken ist.

Die Relationen, welche wir zur Integration dieses Ausdrucks brauchen, sind die folgenden:

$$\begin{aligned}
 242) \int \eta^2 \sin nw \, dv &= \eta^2 \int \sin nw \, dv - \frac{d\eta^2}{dv} \iint \sin nw \, dv^2 \pm \dots \\
 \int \eta^2 \sin(nw \pm 2v) \, dv &= \eta^2 \cos 2\Pi \int \sin(nw \pm 2v) \, dv \mp \eta^2 \sin 2\Pi \int \cos(nw \pm 2v) \, dv \\
 &\quad - \frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \iint \sin(nw \pm 2v) \, dv^2 \pm \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \iint \cos(nw \pm 2v) \, dv^2 \\
 &\quad \pm \dots \\
 \int \eta \eta' \sin[nw \pm (v + v_1)] \, dv &= \eta \eta' \cos(\Pi + \Pi_1) \int \sin(nw \pm 2v) \, dv \mp \eta \eta' \sin(\Pi + \Pi_1) \int \cos(nw \pm 2v) \, dv \\
 &\quad - \frac{d\eta \eta' \cos(\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \sin(nw \pm 2v) \, dv^2 \pm \frac{d\eta \eta' \sin(\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \cos(nw \pm 2v) \, dv^2 \\
 &\quad \pm \dots \\
 \int \eta \eta' \sin[nw \pm (v - v_1)] \, dv &= \eta \eta' \cos(\Pi - \Pi_1) \int \sin nw \, dv \mp \eta \eta' \sin(\Pi - \Pi_1) \int \cos nw \, dv \\
 &\quad - \frac{d\eta \eta' \cos(\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \sin nw \, dv^2 \pm \frac{d\eta \eta' \sin(\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \cos nw \, dv^2 \\
 &\quad \pm \dots
 \end{aligned}$$

u. s. w.,

von denen die beiden nicht angeführten mit dem Faktor η'^2 den beiden ersten vollständig analog sind und auch die mit den Faktoren $\sin j$ und $\sin j'$ sich leicht herstellen lassen; ausserdem sind die Relationen 222) heranzuziehen. Ich schreibe demnach:

$$\begin{aligned}
 243) \quad S_2 &= \Sigma S_{n,2,0} \eta^2 \cos nw && + \Sigma \bar{S}_{n,2,0} \sin^2 j \cos nw \\
 &+ \Sigma S_{n,2,0}^{(+2)} \eta^2 \cos(nw + 2v) && + \Sigma \bar{S}_{n,2,0}^{(+2)} \sin^2 j \cos(nw + 2v) \\
 &+ \Sigma S_{n,2,0}^{(-2)} \eta^2 \cos(nw - 2v) && + \Sigma \bar{S}_{n,2,0}^{(-2)} \sin^2 j \cos(nw - 2v) \\
 &+ \text{u. s. w.} \\
 &+ T_a S_2,
 \end{aligned}$$

welchen Ausdruck ich nicht ausgeschrieben habe wegen seiner völligen Analogie mit 241). Auch hier ist $S_{0,1,1}^{(+1)}$, wie $\bar{S}_{0,1,1}^{(+1)}$ gleich Null.

Man findet:

$$\begin{aligned}
 243a) \quad S_{n,2,0} &= \frac{A_{n,2,0}}{n(1-\mu_1)}, & S_{n,1,1}^{(+2)} &= \frac{A_{n,1,1}^{(+2)}}{n(1-\mu_1)+2}, & S_{n,0,2} &= \frac{A_{n,0,2}}{n(1-\mu_1)} \\
 S_{n,2,0}^{(+2)} &= \frac{A_{n,2,0}^{(+2)}}{n(1-\mu_1)+2}, & S_{n,1,1}^{(+1)} &= \frac{A_{n,1,1}^{(+1)}}{n(1-\mu_1)}, & S_{n,0,2}^{(+2)} &= \frac{A_{n,0,2}^{(+2)}}{n(1-\mu_1)+2} \\
 S_{n,2,0}^{(-2)} &= \frac{A_{n,2,0}^{(-2)}}{n(1-\mu_1)-2}, & S_{n,1,1}^{(-1)} &= \frac{A_{n,1,1}^{(-1)}}{n(1-\mu_1)}, & S_{n,0,2}^{(-2)} &= \frac{A_{n,0,2}^{(-2)}}{n(1-\mu_1)-2} \\
 && S_{n,1,1}^{(-2)} &= \frac{A_{n,1,1}^{(-2)}}{n(1-\mu_1)-2}, & &
 \end{aligned}$$

und ganz analog:

$$\bar{S}_{n-2,0} = \frac{\bar{A}_{n-2,0}}{n(1-\mu_1)}, \quad \text{u. s. w.}$$

Die Divisoren sind dieselben, wie in R_1 , und S_2 wird also grosse Ungleichheiten enthalten bei den charakteristischen Planeten der ersten beiden Klassen, stets aber nur solche der Form C.

2. Für $T_a S_2$ haben wir nach 240) die Gleichung:

$$244) \quad \frac{dT_a S_2}{dv} = -A_{0,1,1}^{(+1)} \eta \eta' \sin(v-v_1) - \frac{1}{2} \frac{d\eta^2}{dv},$$

wo die Glieder rein zweiter Ordnung vernachlässigt sind, und wo wir $\frac{dT_a S_2}{dv}$ für $T_a \left(\frac{dS}{dv} \right)$ geschrieben haben, was offenbar hier zulässig ist.

Wenn wir die Gleichung 244) in der vorstehenden Form integrieren würden, so würden wir in S Glieder von der Form A vorfinden, welche elementar sind. Gylden hat aber schon gezeigt, dass $T_a S$ erster Ordnung ist, indem sich die elementaren Glieder in dieser Funktion gegenseitig aufheben. Wir werden uns hier darauf beschränken, diese Thatsache mit bezug auf die Glieder zweiten Grades zu beweisen, da Glieder dritten Grades von der Form A nicht vorkommen und wir die Glieder vierten Grades nicht entwickelt haben. Jedenfalls ist die Gleichung 244) zur Bestimmung von $T_a S$ ungeeignet, und wir wollen sie deswegen transformiren, indem wir das Glied $\frac{1}{2} \frac{d\eta^2}{dv}$ durch ein anderes ersetzen.

Wenn wir bezeichnen:

$$245) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \eta \cos II \\ \lambda_2 &= \eta \sin II, \end{aligned}$$

so wird:

$$(\varrho) = \eta \cos v = \lambda_1 \cos v + \lambda_2 \sin v,$$

und

$$\frac{d(\varrho)}{dv} = -\eta \sin v + \frac{d\lambda_1}{dv} \cos v + \frac{d\lambda_2}{dv} \sin v,$$

sowie

$$\frac{d^2(\varrho)}{dv^2} = -\eta \cos v - 2 \frac{d\lambda_1}{dv} \sin v + 2 \frac{d\lambda_2}{dv} \cos v + \frac{d^2\lambda_1}{dv^2} \cos v + \frac{d^2\lambda_2}{dv^2} \sin v.$$

Hieraus folgt mit Vernachlässigung der Glieder rein zweiter Ordnung:

$$246) \quad T_a \left\{ \left[\frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + (\varrho) \right] \frac{d(\varrho)}{dv} \right\} = \lambda_1 \frac{d\lambda_1}{dv} + \lambda_2 \frac{d\lambda_2}{dv} = \frac{1}{2} \frac{d(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{dv} = \frac{1}{2} \frac{d\eta^2}{dv}.$$

Das erste Glied dieser Relation können wir aber aus der Gleichung 184) construiren, und es findet sich:

$$T_a \left\{ \left[\frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + (\varrho) \right] \frac{d(\varrho)}{dv} \right\} = -Q_0 \left(\frac{d(\varrho)}{dv} \right)^2 + 2S_1 \frac{d(\varrho)}{dv} - P_1 \frac{d(\varrho)}{dv},$$

wo ich die Glieder rein zweiter Ordnung, sowie alle, welche nicht von der Form A sind, fortgelassen habe.

Wenn man die Identität

$$S_1 \frac{d(\varrho)}{dv} = \frac{d(\varrho)S_1}{dv} - (\varrho) \frac{dS_1}{dv}$$

bedenkt, sowie dass $Q_0 \left(\frac{d(\varrho)}{dv} \right)^2$ keine Glieder der Form A enthält, und dass $T_a \frac{d(\varrho)S_1}{dv}$ rein zweiter Ordnung ist, so findet man:

$$247) \quad \frac{1}{2} \frac{d\eta^2}{dv} = -T_a \left\{ 2(\varrho) \frac{dS_1}{dv} + P_1 \frac{d(\varrho)}{dv} \right\} = T_a \left\{ 2(\varrho)Q_1 - P_1 \frac{d(\varrho)}{dv} \right\}.$$

Offenbar wird man für Q_1 und P_1 hier nur die Glieder von der Form B einzusetzen haben, da nur diese im Produkt mit (ϱ) oder $\frac{d(\varrho)}{dv}$ Glieder von der Form A liefern; man hat demnach nach 165) und 179) zu setzen

$$Q_1 = A_{0.0.1}^{(+1)} \eta' \sin v_1, \quad P_1 = B_{0.0.1}^{(+1)} \eta' \cos v_1,$$

und wenn man sich erinnert, dass mit ausreichender Genauigkeit

$$\frac{d(\varrho)}{dv} = -\eta \sin v,$$

so wird:

$$248) \quad \frac{1}{2} \frac{d\eta^2}{dv} = \left\{ \frac{1}{2} B_{0.0.1}^{(+1)} - A_{0.0.1}^{(+1)} \right\} \eta \eta' \sin(v - v_1).$$

Diesen Wert endlich setzen wir in 244) ein und erhalten:

$$249) \quad \frac{dT_a S_2}{dv} = \left\{ A_{0.0.1}^{(+1)} - \frac{1}{2} B_{0.1.1}^{(+1)} - A_{0.1.1}^{(+1)} \right\} \eta \eta' \sin(v - v_1).$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass das Glied rechter Hand Null ist; wenn wir nämlich die dort auftretenden A- und B-Coefficienten durch die Relationen 166), 180), 135a), 138a) und 122) oder mit Hilfe von Masal's Tafeln und Formeln¹⁾ durch die γ -Coefficienten ausdrücken, so ist:

$$\begin{aligned} A_{0.0.1}^{(+1)} &= -2\gamma_{1.1}, & A_{0.1.1}^{(+1)} &= -5\gamma_{1.1} - 4\gamma_{1.2} \\ B_{0.0.1}^{(+1)} &= 6\gamma_{1.1} + 8\gamma_{1.2}, \end{aligned}$$

1) Masal, Formeln und Tafeln zur Berechnung der absoluten Störungen der Planeten. Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Band 23 N:o 7.

In dieser Abhandlung sind allerdings die Bezeichnungen nicht die gleichen wie in der vorliegenden.

und es wird

$$249a) \quad T_a S_2 = 0.$$

Indessen hat diese Gleichung nur die Bedeutung, dass $T_a S_2$ erster Ordnung und bei den gewöhnlichen Planeten auch rein erster Ordnung ist; die Glieder rein erster Ordnung der Form A in S_2 können wir aber stets vernachlässigen, nicht nur ihrer ausserordentlichen Kleinheit, sondern auch ihrer Periode wegen.

3. Wir wollen nun die Glieder zweiten Grades im Radiusvektor berechnen. Mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung folgt für q_2 aus Gleichung 184):

$$\frac{d^2 q}{dv^2} + q = -Q_1 \frac{d(q)}{dv} + 2S_2 - P_2,$$

und wenn wir bezeichnen:

$$\begin{aligned} 250) \quad \frac{d^2 q}{dv^2} + q = & \Sigma b_{n,2,0} \eta^2 \cos n\omega & + \Sigma \bar{b}_{n,2,0} \sin^2 j \cos n\omega \\ & + \Sigma b_{n,2,0}^{(+2)} \eta^2 \cos (n\omega + 2\nu) & + \Sigma \bar{b}_{n,2,0}^{(+2)} \sin^2 j \cos (n\omega + 2\nu) \\ & + \Sigma b_{n,2,0}^{(-2)} \eta^2 \cos (n\omega - 2\nu) & + \Sigma \bar{b}_{n,2,0}^{(-2)} \sin^2 j \cos (n\omega - 2\nu) \\ & + \text{u. s. w. in völliger Analogie mit 241)} \\ & + 2T_a S_2, \end{aligned}$$

so haben die b -Coefficienten folgende Werte:

$$\begin{aligned} 250a) \quad b_{n,2,0} &= 2S_{n,2,0} - B_{n,2,0} + \frac{1}{2}A_{n,1,0}^{(+1)} - \frac{1}{2}A_{n,1,0}^{(-1)} \\ \bar{b}_{n,2,0}^{(+2)} &= 2S_{n,2,0}^{(+2)} - B_{n,2,0}^{(+2)} - \frac{1}{2}A_{n,1,0}^{(+1)} \\ \bar{b}_{n,2,0}^{(-2)} &= 2S_{n,2,0}^{(-2)} - B_{n,2,0}^{(-2)} + \frac{1}{2}A_{n,1,0}^{(-1)} \\ \bar{b}_{n,1,1}^{(+2)} &= 2S_{n,1,1}^{(+2)} - B_{n,1,1}^{(+2)} - \frac{1}{2}A_{n,0,1}^{(+1)} \\ \bar{b}_{n,1,1}^{(+1)} &= 2S_{n,1,1}^{(+1)} - B_{n,1,1}^{(+1)} - \frac{1}{2}A_{n,0,1}^{(-1)}, & \text{aber } \bar{b}_{0,1,1}^{(+1)} &= -B_{0,1,1}^{(+1)} - \frac{1}{2}A_{0,0,1}^{(-1)} \\ \bar{b}_{n,1,1}^{(-1)} &= 2S_{n,1,1}^{(-1)} - B_{n,1,1}^{(-1)} + \frac{1}{2}A_{n,0,1}^{(+1)} \\ \bar{b}_{n,1,1}^{(-2)} &= 2S_{n,1,1}^{(-2)} - B_{n,1,1}^{(-2)} + \frac{1}{2}A_{n,0,1}^{(-1)} \\ \bar{b}_{n,0,2} &= 2S_{n,0,2} - B_{n,0,2} \\ \bar{b}_{n,0,2}^{(+2)} &= 2S_{n,0,2}^{(+2)} - B_{n,0,2}^{(+2)} \\ \bar{b}_{n,0,2}^{(-2)} &= 2S_{n,0,2}^{(-2)} - B_{n,0,2}^{(-2)} \\ \bar{b}_{n,2,0} &= 2\bar{S}_{n,2,0} - \bar{B}_{n,2,0} \end{aligned}$$

und für die weiteren Coefficienten in gleicher Weise:

$$\bar{b}_{n,s,s'}^{(\pm\sigma)} = 2\bar{S}_{n,s,s'}^{(\pm\sigma)} - \bar{B}_{n,s,s'}^{(\pm\sigma)}$$

Die Integration der Gleichung 250) brauchen wir nicht so eingehend auszuführen, wie wir es für die Glieder nullten und ersten Grades gethan haben;

denn es kommen hier keine Glieder der Form B vor, und wir können im Anschluss an das Vorige die Grössen η , η' , Π , Π_1 , $\sin j$, $\sin j'$, σ und σ_1 bei der Integration als constant ansehen; wir erhalten so:

$$\begin{aligned}
 251) \quad \varrho_2 = R_2 = R_{n,2,0} \eta^2 \cos nw & \quad + \bar{R}_{n,2,0} \sin^2 j \cos nw \\
 & + R_{n,2,0}^{(+2)} \eta^2 \cos (nw + 2v) \quad + \bar{R}_{n,2,0}^{(+2)} \sin^2 j \cos (nw + 2v) \\
 & + R_{n,2,0}^{(-2)} \eta^2 \cos (nw - 2v) \quad + \bar{R}_{n,2,0}^{(-2)} \sin^2 j \cos (nw - 2v) \\
 & + \text{u. s. w. in völliger Analogie mit 241)} \\
 & + T_a R_2,
 \end{aligned}$$

wo:

$$\begin{aligned}
 251a) \quad R_{n,2,0} &= \frac{b_{n,2,0}}{1-n^2(1-\mu_1)^2}, & R_{n,1,1}^{(+2)} &= \frac{b_{n,1,1}^{(+2)}}{1-[n(1-\mu_1)+2]^2}, & R_{n,0,2} &= \frac{b_{n,0,2}}{1-n^2(1-\mu_1)^2} \\
 R_{n,2,0}^{(+2)} &= \frac{b_{n,2,0}^{(+2)}}{1-[n(1-\mu_1)+2]^2}, & R_{n,1,1}^{(+1)} &= \frac{b_{n,1,1}^{(+1)}}{1-n^2(1-\mu_1)^2}, & R_{n,0,2}^{(+2)} &= \frac{b_{n,0,2}^{(+2)}}{1-[n(1-\mu_1)+2]^2} \\
 R_{n,2,0}^{(-2)} &= \frac{b_{n,2,0}^{(-2)}}{1-[n(1-\mu_1)-2]^2}, & R_{n,1,1}^{(-1)} &= \frac{b_{n,1,1}^{(-1)}}{1-n^2(1-\mu_1)^2}, & R_{n,0,2}^{(-2)} &= \frac{b_{n,0,2}^{(-2)}}{1-[n(1-\mu_1)-2]^2} \\
 R_{n,1,1}^{(-2)} &= \frac{b_{n,1,1}^{(-2)}}{1-[n(1-\mu_1)-2]^2},
 \end{aligned}$$

$$\bar{R}_{n,2,0} = \frac{\bar{b}_{n,2,0}}{1-n^2(1-\mu_1)^2},$$

u. s. w., indem die \bar{R} -Coefficienten von den \bar{b} -Coefficienten genau ebenso abhängen, wie die entsprechenden R -Coefficienten von den b -Coefficienten. Ausserdem hat man zu setzen:

$$R_{0,2,0} = R_{0,1,1}^{(+1)} = R_{0,1,1}^{(-1)} = R_{0,0,2} = \bar{R}_{0,2,0} = \bar{R}_{0,1,1}^{(+1)} = \bar{R}_{0,1,1}^{(-1)} = \bar{R}_{0,0,2} = 0.$$

Von den in den vorstehenden Relationen vorkommenden Divisoren können die folgenden klein werden:

$$1-n^2(1-\mu_1)^2 \quad \text{und} \quad 1-[n(1-\mu_1)-2]^2,$$

welche wieder zu Gliedern der Form D gehören. Sie sind klein zunächst bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse, und zwar

- Ia. Für die Planeten vom Hekubatypus, wenn $n = 2$ und $n = 6$
 Ib. „ „ „ Hildatypus, „ $n = 3$ „ $n = 9$
 Ic. „ „ „ Thuletypus, „ $n = 4$ „ $n = 12$,

ferner aber auch für eine neue Klasse von Planeten, welche als charakteristische Planeten der dritten Klasse zu bezeichnen wären, nämlich:

IIIa.	Wenn μ_1	sich dem Bruche $\frac{1}{4}$	nähert,	und wenn $n = 4$
IIIb.	" μ_1	" "	" "	$\frac{2}{5}$ " " " " $n = 5$
IIIc.	" μ_1	" "	" "	$\frac{4}{7}$ " " " " $n = 7$
IIId.	" μ_1	" "	" "	$\frac{5}{8}$ " " " " $n = 8$
IIIe.	" μ_1	" "	" "	$\frac{7}{10}$ " " " " $n = 10$
IIIf.	" μ_1	" "	" "	$\frac{8}{11}$ " " " " $n = 11$.

Die charakteristischen Planeten der zweiten Klasse finden sich hier nicht wieder, indessen wird auch bei ihnen R_2 beträchtliche Glieder enthalten; diese werden nämlich durch die Funktion S_2 eingeführt, welche rechter Hand in der Differentialgleichung für R_2 vorkommt; sie werden durch die Integration dieser Gleichung nicht vergrößert, da sie von der Form C sind.

Für den Teil von R_2 , der von der Form A ist, hat man offenbar:

$$251b) \quad T_a R_2 = b_{0.2.0} \eta^2 + \bar{b}_{0.1.1}^{(+1)} \eta \eta' \cos(\Pi - \Pi_1) + \bar{b}_{0.0.2} \eta'^2 + \bar{b}_{0.2.0} \sin^2 j + \bar{b}_{0.1.1}^{(+1)} \sin j \sin j' \cos(\sigma - \sigma_1) + \bar{b}_{0.0.2} \sin^2 j' + 2 T_a S_2.$$

Die Funktion $T_a R_2$ enthält einen constanten Teil; denn es ist:

$$251c) \quad \begin{aligned} \text{p. const. } \eta^2 &= \Sigma \kappa_n^2, & \text{p. const. } \sin^2 j &= \Sigma \sin^2 \iota_n \\ \text{p. const. } \eta \eta' \cos(\Pi - \Pi_1) &= \Sigma \kappa_n \kappa'_n, & \text{p. const. } \sin j \sin j' \cos(\sigma - \sigma_1) &= \Sigma \sin \iota_n \sin \iota'_n \\ \text{p. const. } \eta'^2 &= \Sigma \kappa_n'^2, & \text{p. const. } \sin^2 j' &= \Sigma \sin^2 \iota'_n. \end{aligned}$$

Dieser constante Teil ist zu der Constante b_0 zu schlagen und der Teil der beiden Constanten a_0 und b_0 , welcher zweiten Grades ist, kann auf dieselbe Weise bestimmt werden, wie wir auf pag. 101 unter No. 3 den Teil nullten Grades bestimmt haben, sobald die Funktion W_2 bekannt ist, welche wir gleich herstellen werden; einstweilen haben wir:

$$251d) \quad \begin{aligned} \text{p. const. } R_2 &= b_{0.2.0} \Sigma \kappa_n^2 + \bar{b}_{0.1.1}^{(+1)} \Sigma \kappa_n \kappa'_n + \bar{b}_{0.0.2} \Sigma \kappa_n'^2 \\ &+ \bar{b}_{0.2.0} \Sigma \sin^2 \iota_n + \bar{b}_{0.1.1}^{(+1)} \Sigma \sin \iota_n \sin \iota'_n + \bar{b}_{0.0.2} \Sigma \sin^2 \iota'_n \\ &+ 2 \text{ p. const. } S_2. \end{aligned}$$

Die Funktion $T_a R_2$ können wir übrigens aus demselben Grunde fortlassen wie $T_a S_2$.

4. Wir wollen nun die Gleichung 185) mit bezug auf die Glieder zweiten Grades integriren; wenn wir nur diese beibehalten und die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigen, so ist:

$$252) \quad \frac{dW}{dv} = S_2 - R_2 + \{6R_1 - 2S_1\} \eta \cos v - 3\eta^2 R_0 + \left\{ \frac{3}{2} S_0 - 6R_0 \right\} \eta^2 \cos 2v - \frac{d\Sigma_2}{dv}.$$

Setzen wir:

$$\begin{aligned}
 252a) \quad \frac{dW}{dv} &= \Sigma T_{n \cdot 2 \cdot 0} \eta^2 \cos nw && + \Sigma \bar{T}_{n \cdot 2 \cdot 0} \sin^2 j \cos nw \\
 &+ \Sigma T_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(+2)} \eta^2 \cos (nw + 2v) && + \Sigma \bar{T}_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(+2)} \sin^2 j \cos (nw + 2v) \\
 &+ \Sigma T_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(-2)} \eta^2 \cos (nw - 2v) && + \Sigma \bar{T}_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(-2)} \sin^2 j \cos (nw - 2v) \\
 &+ \text{u. s. w. in völliger Analogie mit 241)} \\
 &+ T_a \frac{dW}{dv} - \frac{dE_2}{dv},
 \end{aligned}$$

so leitet man aus den oben gefundenen Werten von S und R unschwer die folgenden Ausdrücke der T -Coefficienten ab:

$$\begin{aligned}
 252b) \quad T_{n \cdot 2 \cdot 0} &= S_{n \cdot 2 \cdot 0} - 2R_{n \cdot 2 \cdot 0} + 3R_{n \cdot 1 \cdot 0}^{(+1)} + 3R_{n \cdot 1 \cdot 0}^{(-1)} - S_{n \cdot 1 \cdot 0}^{(+1)} - S_{n \cdot 1 \cdot 0}^{(-1)} - 3R_{n \cdot 0 \cdot 0} \\
 T_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(+2)} &= S_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(+2)} - 2R_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(+2)} + 3R_{n \cdot 1 \cdot 0}^{(+1)} - S_{n \cdot 1 \cdot 0}^{(+1)} + \frac{3}{4}S_{n \cdot 0 \cdot 0} - 3R_{n \cdot 0 \cdot 0} \\
 T_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(-2)} &= S_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(-2)} - 2R_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(-2)} + 3R_{n \cdot 1 \cdot 0}^{(-1)} - S_{n \cdot 1 \cdot 0}^{(-1)} + \frac{3}{4}S_{n \cdot 0 \cdot 0} - 3R_{n \cdot 0 \cdot 0} \\
 T_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(+2)} &= S_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(+2)} - 2R_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(+2)} + 3R_{n \cdot 0 \cdot 1}^{(+1)} - S_{n \cdot 0 \cdot 1}^{(+1)} \\
 T_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(+1)} &= S_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(+1)} - 2R_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(+1)} + 3R_{n \cdot 0 \cdot 1}^{(-1)} - S_{n \cdot 0 \cdot 1}^{(-1)} \\
 T_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(-1)} &= S_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(-1)} - 2R_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(-1)} + 3R_{n \cdot 0 \cdot 1}^{(+1)} - S_{n \cdot 0 \cdot 1}^{(+1)} \\
 T_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(-2)} &= S_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(-2)} - 2R_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(-2)} + 3R_{n \cdot 0 \cdot 1}^{(-1)} - S_{n \cdot 0 \cdot 1}^{(-1)} \\
 T_{n \cdot 0 \cdot 2} &= S_{n \cdot 0 \cdot 2} - 2R_{n \cdot 0 \cdot 2} \\
 T_{n \cdot 0 \cdot 2}^{(+2)} &= S_{n \cdot 0 \cdot 2}^{(+2)} - 2R_{n \cdot 0 \cdot 2}^{(+2)} \\
 T_{n \cdot 0 \cdot 2}^{(-2)} &= S_{n \cdot 0 \cdot 2}^{(-2)} - 2R_{n \cdot 0 \cdot 2}^{(-2)} \\
 \bar{T}_{n \cdot 2 \cdot 0} &= \bar{S}_{n \cdot 2 \cdot 0} - 2\bar{R}_{n \cdot 2 \cdot 0},
 \end{aligned}$$

und für die weiteren Coefficienten in ganz allgemeiner Weise:

$$\bar{T}_{n \cdot s \cdot s'}^{(\pm \sigma)} = \bar{S}_{n \cdot s \cdot s'}^{(\pm \sigma)} - 2\bar{R}_{n \cdot s \cdot s'}^{(\pm \sigma)}.$$

Dabei sind die Coefficienten

$$T_{0 \cdot 2 \cdot 0}, \quad T_{0 \cdot 1 \cdot 1}^{(+1)}, \quad T_{0 \cdot 1 \cdot 1}^{(-1)}, \quad T_{0 \cdot 0 \cdot 2}, \quad \bar{T}_{0 \cdot 2 \cdot 0}, \quad \bar{T}_{0 \cdot 1 \cdot 1}^{(+1)}, \quad \bar{T}_{0 \cdot 1 \cdot 1}^{(-1)}, \quad \bar{T}_{0 \cdot 0 \cdot 2}$$

gleich Null zu setzen, und man hat ausserdem:

$$252c) \quad T_a \frac{dW}{dv} = T_a S_2 - 2T_a R_2 - S_{0 \cdot 1 \cdot 0}^{(+1)} \eta^2 - S_{0 \cdot 0 \cdot 1}^{(+1)} \eta \eta' \cos (\Pi - \Pi_1) - 3R_{0 \cdot 0 \cdot 0} \eta^2.$$

Ich setze nun auch W_2 unter die Form:

$$\begin{aligned}
253) \quad W_2 &= \Sigma W_{n \cdot 2 \cdot 0} \eta^2 \sin nw && + \Sigma \overline{W}_{n \cdot 2 \cdot 0} \sin j \sin nw \\
&+ \Sigma W_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(+2)} \eta^2 \sin(nw + 2v) && + \Sigma \overline{W}_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(+2)} \sin^2 j \sin(nw + 2v) \\
&+ \Sigma W_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(-2)} \eta^2 \sin(nw - 2v) && + \Sigma \overline{W}_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(-2)} \sin^2 j \sin(nw - 2v) \\
&+ \text{u. s. w. in völliger Analogie mit 241)} \\
&+ T_a W_2 - \mathfrak{E}_2.
\end{aligned}$$

Die Herstellung der Ausdrücke für die W -Coefficienten macht nach dem Vorhergehenden auch keine Schwierigkeiten; man erhält:

$$\begin{aligned}
253a) \quad W_{n \cdot 2 \cdot 0} &= \frac{T_{n \cdot 2 \cdot 0}}{n(1-\mu_1)}, & W_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(+2)} &= \frac{T_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(+2)}}{n(1-\mu_1)+2}, & W_{n \cdot 0 \cdot 2} &= \frac{T_{n \cdot 0 \cdot 2}}{n(1-\mu_1)}, \\
W_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(+2)} &= \frac{T_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(+2)}}{n(1-\mu_1)+2}, & W_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(+1)} &= \frac{T_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(+1)}}{n(1-\mu_1)}, & W_{n \cdot 0 \cdot 2}^{(+2)} &= \frac{T_{n \cdot 0 \cdot 2}^{(+2)}}{n(1-\mu_1)+2}, \\
W_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(-2)} &= \frac{T_{n \cdot 2 \cdot 0}^{(-2)}}{n(1-\mu_1)-2}, & W_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(-1)} &= \frac{T_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(-1)}}{n(1-\mu_1)}, & W_{n \cdot 0 \cdot 2}^{(-2)} &= \frac{T_{n \cdot 0 \cdot 2}^{(-2)}}{n(1-\mu_1)-2}, \\
W_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(-2)} &= \frac{T_{n \cdot 1 \cdot 1}^{(-2)}}{n(1-\mu_1)-2}, \\
\overline{W}_{n \cdot 2 \cdot 0} &= \frac{\overline{T}_{n \cdot 2 \cdot 0}}{n(1-\mu_1)},
\end{aligned}$$

u. s. w., indem die \overline{W} -Coefficienten von den \overline{T} -Coefficienten in derselben Weise abhängen, wie die W -Coefficienten von den T -Coefficienten. Die Divisoren sind hier dieselben wie in S_2 .

Für die Funktion \mathfrak{E}_2 , welche wohl immer vernachlässigt werden kann, hat man nach 60) und 47)

$$253b) \quad \mathfrak{E}_2 = -\frac{3}{8} \frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \cos 2v - \frac{3}{8} \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \sin 2v$$

5. Bei der Bestimmung der Funktion $T_a W_2$ endlich stösst man auf gewisse Schwierigkeiten; wenigstens erfordert eine vollständige Darstellung derselben eine sehr weitgehende Entwicklung. Nach 252c) und 251b) hat man:

$$\begin{aligned}
254) \quad T_a \frac{dW}{dv} &= -\{3R_{0 \cdot 0 \cdot 0} + 2b_{0 \cdot 2 \cdot 0} + S_{0 \cdot 1 \cdot 0}^{(+1)}\} \eta^2 - \{2b_{0 \cdot 1 \cdot 1}^{(+1)} + S_{0 \cdot 0 \cdot 1}^{(+1)}\} \eta \eta' \cos(\Pi - \Pi_1) - 2b_{0 \cdot 0 \cdot 2} \eta'^2 \\
&- 2\overline{b}_{0 \cdot 2 \cdot 0} \sin^2 j - 2\overline{b}_{0 \cdot 1 \cdot 1}^{(+1)} \sin j \sin j' \cos(\sigma - \sigma_1) - 2\overline{b}_{0 \cdot 0 \cdot 2} \sin^2 j' \\
&- 3T_a S_2
\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Grösse rein erster Ordnung, und zu ihrer Integration leitet man aus den Relationen 10), 75), und den entsprechenden 154b) und 171a) die folgenden ab:

$$\begin{aligned}
 255) \int \eta^2 dv &= \frac{2\kappa\kappa_1}{s-s_1} \sin(\omega-\omega_1) + \frac{2\kappa\kappa_2}{s-s_2} \sin(\omega-\omega_2) + \dots \\
 &\quad + \frac{2\kappa_1\kappa_2}{s_1-s_2} \sin(\omega_1-\omega_2) + \dots \\
 &\quad + \dots \\
 \int \eta \eta' \cos(\Pi - \Pi_1) dv &= \frac{\kappa\kappa'}{s-s_1} \sin(\omega-\omega_1) + \frac{\kappa\kappa'_2}{s-s_2} \sin(\omega-\omega_2) + \dots \\
 &\quad + \frac{\kappa_1\kappa'_2 + \kappa_2\kappa'_1}{s_1-s_2} \sin(\omega_1-\omega_2) + \dots \\
 &\quad + \dots \\
 \int \eta'^2 dv &= \frac{2\kappa'\kappa'_2}{s_1-s_2} \sin(\omega_1-\omega_2) + \dots \\
 &\quad + \dots \\
 \int \sin^2 j dv &= -\frac{2 \sin \iota \sin \iota_1}{\tau-\tau_1} \sin(\vartheta-\vartheta_1) - \frac{2 \sin \iota \sin \iota_2}{\tau-\tau_2} \sin(\vartheta-\vartheta_2) - \dots \\
 &\quad - \frac{2 \sin \iota_1 \sin \iota_2}{\tau_1-\tau_2} \sin(\vartheta_1-\vartheta_2) - \dots \\
 &\quad - \dots \\
 \int \sin j \sin j' \cos(\sigma-\sigma_1) dv &= -\frac{\sin \iota \sin \iota'}{\tau-\tau_1} \sin(\vartheta-\vartheta_1) - \frac{\sin \iota \sin \iota'_2}{\tau-\tau_2} \sin(\vartheta-\vartheta_2) - \dots \\
 &\quad - \frac{\sin \iota_1 \sin \iota'_2 + \sin \iota_2 \sin \iota'_1}{\tau_1-\tau_2} \sin(\vartheta_1-\vartheta_2) - \dots \\
 &\quad - \dots \\
 \int \sin^2 j' dv &= -\frac{2 \sin \iota' \sin \iota'_2}{\tau_1-\tau_2} \sin(\vartheta_1-\vartheta_2) - \dots \\
 &\quad - \dots
 \end{aligned}$$

In diesen Formeln sind indessen die secularen Teile fortgelassen, da wir sie besonders behandeln wollen. Sie ergeben sich nach den Formeln 251c).

Wenn wir alle elementaren Glieder in W_2 finden wollen, so müssen wir in der Gleichung 254) alle Glieder erster Ordnung berücksichtigen, und folglich in $T_a \left(\frac{dS}{dv} \right)_2$ alle Glieder zweiter Ordnung. Wir müssten also die Gleichung

$$T_a \left(\frac{dS}{dv} \right)_2 = -(1+3S)Q - \frac{1}{2} \frac{d\eta^2}{dv} - \frac{1}{2} S_{0,0,0} \frac{d\eta^2}{dv}$$

mit Berücksichtigung der Glieder zweiter Ordnung aufstellen. Diese Operation

hat nun allerdings keine principiellen Schwierigkeiten, jedoch ist die Anzahl dieser Glieder ausserordentlich gross, obwohl sie sich in wenige Argumente vereinigen, und vor Allem müssten dazu auch die Funktionen S_1 und R_1 bis zu den Gliedern zweiter Ordnung einschliesslich berechnet werden, was im Uebrigen nicht erforderlich ist.

Wir begnügen uns hier mit der Bemerkung, dass diese Glieder der Form A, welche in der Funktion W elementar sind, für unsere Zwecke, d. h. für die praktische Rechnung während eines Zeitraums von etwa 100 Jahren gänzlich belanglos sind, worauf ich noch später (Kapitel VIII) zurückkommen werde; sie sind mit den Gliedern rein erster Ordnung annähernd auf eine Stufe zu stellen.

Eine sehr ausführliche Berechnung dieser Glieder habe ich vor einigen Jahren für den Planeten Hestia ausgeführt, wodurch das eben Gesagte sich bestätigt fand. Man wird demnach nur bei den charakteristischen Planeten nötig haben, die Glieder der Form A zu berücksichtigen; bei denselben tritt der merkwürdige Umstand ein, dass diese Glieder, soweit sie elementar, also nullter Ordnung sind, ebenso belanglos sind, wie bei den gewöhnlichen Planeten, während sich in der Funktion W_2 Glieder erster (aber nicht rein erster) Ordnung vorfinden, die sehr merkliche Beträge erreichen, obwohl sie ursprünglich als Störungen dritter Ordnung auftreten. Das eben Gesagte habe ich für die Planeten vom Hestiatypus bewiesen, während Herr Ludendorff¹⁾ die sehr mühsame Beweisführung für die Planeten vom Hekubatypus mit dem gewünschten Erfolge durchgeführt hat. Da sich der von Herrn Ludendorff gegebene Beweis auf alle charakteristischen Planeten der ersten Klasse, und der von mir gegebene auf alle solchen der zweiten Klasse ausdehnen lässt, und ferner bei den charakteristischen Planeten der dritten und höheren Klassen die Glieder der Form A zweiten Grades sämtlich rein erster Ordnung sind, so ist die Frage betreffs dieser Glieder, soweit sie in den Rahmen des vorliegenden Kapitels fällt, im Allgemeinen als gelöst anzusehen, und ich werde erst im nächsten Kapitel auf dieselbe zurückkommen.

Ich will nun nur noch den secularen Teil der Funktion W mit Berücksichtigung der Glieder zweiten Grades construiren. Derselbe findet sich nach 252c) folgendermaassen:

$$255a) \quad p. \text{ const. } \left(\frac{dW}{dv} \right)_2 = p. \text{ const. } S_2 - 2 p. \text{ const. } R_2 \\ - \{ S_{0.1.0}^{(+1)} + 3R_{0.0.0} \} \Sigma \kappa_n^2 - S_{0.0.1}^{(+1)} \Sigma \kappa_n \kappa_n'.$$

Da aber der constante Teil von $\frac{dW}{dv}$ gleich Null sein soll, so ist die rechte

1) Hans Ludendorff, Die Jupiter-Störungen der kleinen Planeten vom Hecuba-Typus. Inaugural-Dissertation. Berlin 1897.

Seite dieser Gleichung gleich Null zu setzen und aus ihr in Verbindung mit 251d) die constanten Teile von S_2 und R_2 zu bestimmen.

6. Die Gleichung 186) gibt uns für die Glieder zweiten Grades:

$$\frac{d^2 \mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = -Q_1 \frac{d(\mathfrak{z})}{dv} - Z_2.$$

Da mit genügender Annäherung

$$\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = \sin j \cos v,$$

so wird:

$$\begin{aligned} 256) \frac{d^2 \mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = & \Sigma c_{n-1,0,1,0}^{(+2)} \eta \sin j \sin(nw + v + v) & + \Sigma c_{n-1,0,0,1}^{(+2)} \eta' \sin j \sin(nw + v + v_1) \\ & + \Sigma c_{n-1,0,1,0}^{(+1)} \eta \sin j \sin(nw + v - v) & + \Sigma c_{n-1,0,0,1}^{(+1)} \eta' \sin j \sin(nw + v - v_1) \\ & + \Sigma c_{n-1,0,1,0}^{(-1)} \eta \sin j \sin(nw - v + v) & + \Sigma c_{n-1,0,0,1}^{(-1)} \eta' \sin j \sin(nw - v + v_1) \\ & + \Sigma c_{n-1,0,1,0}^{(-2)} \eta \sin j \sin(nw - v - v) & + \Sigma c_{n-1,0,0,1}^{(-2)} \eta' \sin j \sin(nw - v - v_1) \\ & + \Sigma c_{n,0,1,1,0}^{(+2)} \eta \sin j' \sin(nw + v_1 + v) & + \Sigma c_{n,0,1,0,1}^{(+2)} \eta' \sin j' \sin(nw + v_1 + v_1) \\ & + \Sigma c_{n,0,1,1,0}^{(+1)} \eta \sin j' \sin(nw + v_1 - v) & + \Sigma c_{n,0,1,0,1}^{(+1)} \eta' \sin j' \sin(nw + v_1 - v_1) \\ & + \Sigma c_{n,0,1,1,0}^{(-1)} \eta \sin j' \sin(nw - v_1 + v) & + \Sigma c_{n,0,1,0,1}^{(-1)} \eta' \sin j' \sin(nw - v_1 + v_1) \\ & + \Sigma c_{n,0,1,1,0}^{(-2)} \eta \sin j' \sin(nw - v_1 - v) & + \Sigma c_{n,0,1,0,1}^{(-2)} \eta' \sin j' \sin(nw - v_1 - v_1), \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} 256a) \quad c_{n-1,0,1,0}^{(+2)} &= C_{n-1,0,1,0}^{(+2)} - \frac{1}{2} A_{n-1,0}^{(+1)} & c_{n-1,0,0,1}^{(+2)} &= C_{n-1,0,0,1}^{(+2)} - \frac{1}{2} A_{n-0,1}^{(+1)} \\ c_{n-1,0,1,0}^{(+1)} &= C_{n-1,0,1,0}^{(+1)} - \frac{1}{2} A_{n-1,0}^{(-1)} & c_{n-1,0,0,1}^{(+1)} &= C_{n-1,0,0,1}^{(+1)} - \frac{1}{2} A_{n-0,1}^{(-1)} \\ c_{n-1,0,1,0}^{(-1)} &= C_{n-1,0,1,0}^{(-1)} - \frac{1}{2} A_{n-1,0}^{(+1)} & c_{n-1,0,0,1}^{(-1)} &= C_{n-1,0,0,1}^{(-1)} - \frac{1}{2} A_{n-0,1}^{(+1)} \\ c_{n-1,0,1,0}^{(-2)} &= C_{n-1,0,1,0}^{(-2)} - \frac{1}{2} A_{n-1,0}^{(-1)} & c_{n-1,0,0,1}^{(-2)} &= C_{n-1,0,0,1}^{(-2)} - \frac{1}{2} A_{n-0,1}^{(-1)} \\ c_{n,0,1,1,0}^{(+2)} &= C_{n,0,1,1,0}^{(+2)} \end{aligned}$$

u. s. w. Die weiteren c -Coefficienten sind gleich den entsprechenden C -Coefficienten.

Die Integration der Gleichung 256) erfolgt in derselben Weise wie die der Gleichung 250), indem man η , η' , $\sin j$, $\sin j'$, Π , Π_1 , σ und σ_1 als constant ansieht. Setzt man

$$\begin{aligned} 257) \quad \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{Z}_2 = & \Sigma Z_{n-1,0,1,0}^{(+2)} \eta \sin j \sin(nw + v + v) \\ & + \Sigma Z_{n-1,0,1,0}^{(+1)} \eta \sin j \sin(nw + v - v) \\ & + \Sigma Z_{n-1,0,1,0}^{(-1)} \eta \sin j \sin(nw - v + v) \\ & + \Sigma Z_{n-1,0,1,0}^{(-2)} \eta \sin j \sin(nw - v - v) \\ & + \text{u. s. w. in völliger Analogie mit 256),} \end{aligned}$$

so wird offenbar:

$$257a) \quad Z_{n \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0}^{(+2)} = \frac{c_{n \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0}^{(+2)}}{1 - [n(1 - \mu_1) + 2]^2}, \quad Z_{n \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0}^{(+1)} = \frac{c_{n \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0}^{(+1)}}{1 - n^2(1 - \mu_1)^2}$$

$$Z_{n \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0}^{(-1)} = \frac{c_{n \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0}^{(-1)}}{1 - n^2(1 - \mu_1)^2}, \quad Z_{n \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0}^{(-2)} = \frac{c_{n \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0}^{(-2)}}{1 - [n(1 - \mu_1) - 2]^2},$$

und überhaupt

$$Z_{n \cdot \sigma \cdot \sigma' \cdot s \cdot s'}^{(+2)} = \frac{c_{n \cdot \sigma \cdot \sigma' \cdot s \cdot s'}^{(+2)}}{1 - [n(1 - \mu_1) + 2]^2}, \quad Z_{n \cdot \sigma \cdot \sigma' \cdot s \cdot s'}^{(+1)} = \frac{c_{n \cdot \sigma \cdot \sigma' \cdot s \cdot s'}^{(+1)}}{1 - n^2(1 - \mu_1)^2},$$

$$Z_{n \cdot \sigma \cdot \sigma' \cdot s \cdot s'}^{(-1)} = \frac{c_{n \cdot \sigma \cdot \sigma' \cdot s \cdot s'}^{(-1)}}{1 - n^2(1 - \mu_1)^2}, \quad Z_{n \cdot \sigma \cdot \sigma' \cdot s \cdot s'}^{(-2)} = \frac{c_{n \cdot \sigma \cdot \sigma' \cdot s \cdot s'}^{(-2)}}{1 - [n(1 - \mu_1) - 2]^2}.$$

In \mathfrak{B}_2 werden sich merkliche Glieder finden in denselben Fällen, wie in R_2 , mit dem einzigen Unterschiede, dass \mathfrak{B}_2 keine beträchtlichen Glieder der Form C enthält.

Nur bei sehr grossen Neigungen wird man einen wesentlichen Teil der Funktion \mathfrak{B}_2 mitzunehmen haben.

§ 5.

Die Glieder höherer Grade.

1. Zum Schlusse dieses Kapitels erübrigt es noch, einige Worte zu sagen über etwaige Rücksichtnahme auf Glieder höheren als zweiten Grades, sowie Gründe dafür beizubringen, warum wir unsere Untersuchungen gerade bei den Gliedern zweiten Grades abgebrochen haben.

Bei den Gliedern nullten Grades ist der Faktor von v in den Argumenten sehr genähert

$$n(1 - \mu_2),$$

und die Divisoren in S und W sind

$$n(1 - \mu_1),$$

und endlich die Divisoren in R

$$n(1 - \mu_1) + 1 \quad \text{und} \quad n(1 - \mu_1) - 1.$$

Bei den Gliedern ersten Grades sind:

die Faktoren von v : $n(1 - \mu_2) + 1$ und $n(1 - \mu_2) - 1$

die Divisoren in S und W : $n(1 - \mu_1) + 1$ und $n(1 - \mu_1) - 1$

„ „ in R : $n(1 - \mu_1)$, $n(1 - \mu_1) + 2$, $n(1 - \mu_1) - 2$.

Bei den Gliedern zweiten Grades sind:

die Faktoren von v : $n(1-\mu_2)$, $n(1-\mu_2)+2$, $n(1-\mu_2)-2$

die Divisoren in S und W : $n(1-\mu_1)$, $n(1-\mu_1)+2$, $n(1-\mu_1)-2$

„ „ in R : $n(1-\mu_1)+1$, $n(1-\mu_1)-1$, $n(1-\mu_1)+3$, $n(1-\mu_1)-3$.

Diese Reihe ist unschwer fortzusetzen, und man zieht daraus die folgenden Schlüsse:

Die Glieder der Form B sind ersten, dritten u. s. w. Grades, also stets von einem ungeraden Grade; die Glieder der Form A sind zweiten, vierten u. s. w. Grades, also stets von einem geraden Grade, mindestens jedoch vom zweiten; constante und seculare (d. h. von der Form constans mal v) Glieder sind ebenfalls stets von einem geraden Grade, können aber auch nullten Grades sein; und zwar gilt das eben Gesagte für alle Planeten ohne Rücksicht auf den Wert ihrer mittleren Bewegung.

Glieder der Formen C und D kommen nur bei den charakteristischen Planeten vor, und zwar bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse:

die Glieder der Form D bei allen Graden vom nullten an,

„ „ „ „ C „ „ „ „ ersten an,

bei den charakteristischen Planeten der zweiten Klasse:

die Glieder der Form D bei allen ungeraden Graden vom ersten an,

„ „ „ „ C „ „ „ geraden Graden vom zweiten an.

Im allgemeinen lautet das Gesetz folgendermaassen, wenn k die Klassenzahl des Planeten bedeutet:

Ist k eine ungerade Zahl, so kommen Glieder der Form D bei allen geraden Graden vom $(k-1)$ ten an, und Glieder der Form C bei allen ungeraden Graden vom k -ten an vor; ausserdem aber finden sich Glieder aller beiden Formen bei jedem Grade vom $(2k-1)$ ten an.

Ist k eine gerade Zahl, so kommen Glieder der Form D nur bei allen ungeraden Graden vom $(k-1)$ ten an, und Glieder der Form C nur bei allen geraden Graden vom k -ten an vor.

2. Wenn wir von den charakteristischen Planeten der dritten und der höheren Klassen absehen, so zeigt sich in der That bei den Gliedern zweiten Grades ein gewisser Abschnitt, indem die Glieder höheren als zweiten Grades, soweit sie merklich gross sind, keine neuen Argumente aufweisen, die wesentlich verschieden (mit Bezug auf ihre Periode) sind von denen der niederen Grade, so dass man einerseits die Glieder der geraden Grade und andererseits die der ungeraden Grade unter sich als stark genug fallende Reihen ansehen kann.

Die gewöhnlichen Glieder dritten Grades sind in fast allen Fällen sehr klein; und auch die elementaren und charakteristischen Glieder nehmen an Grösse mit ihrem Grade und mit der Klassenzahl des Planeten ab; handelt es sich z. B. um einen Planeten der dritten Klasse, so wird man nur bei ganz besonders starker Annäherung an die strenge Commensurabilität einige wenige Glieder höheren als zweiten Grades berücksichtigen müssen, hauptsächlich solche der Form C. Denn je höher die Klasse ist, der ein charakteristischer Planet angehört, um so mehr muss das Verhältniss der mittleren Bewegungen sich der strengen Commensurabilität nähern, damit die betreffenden Glieder merklich werden. Commensurabilitäten höherer Klassen haben darum keine solche Bedeutung wie die der niederen. (Vgl. Kap. VIII.)

Unter Umständen ist die Mitnahme des einen oder anderen Gliedes dritten Grades noch zu empfehlen, nicht etwa in der Entwicklung der Störungsfunktion, wohl aber in der Differentialgleichung 185) für W , wo Glieder wie die folgenden

$$R_2 \eta \cos v, \quad \eta^2 R_1, \quad R_1 \eta^2 \cos 2v,$$

einen gewissen noch merklichen Betrag erreichen können.

Ob noch in vereinzelt sonstigen Fällen die Mitnahme einiger Glieder dritten Grades (also auch in der Entwicklung der Störungsfunktion) angebracht ist, hängt im Einzelnen von den Beträgen der Excentricitäts- und Neigungsmoduln ab, und es lassen sich darüber keine einfachen allgemeinen Regeln aufstellen.

Siebentes Kapitel.

Die charakteristischen Planeten.

§ 1.

Die Glieder nullten Grades.

1. Die Gleichungen 183) bis 186) sollen nun integrirt werden für den Fall, dass es sich um einen charakteristischen Planeten handle und dass also in der ersten Annäherung bereits die Störungen zweiter (eventuell auch höherer) Ordnung berücksichtigt werden müssen. Ich werde hierbei auch Gelegenheit nehmen, von den Fällen sogenannter strenger Commensurabilität zu sprechen und zu zeigen, wie die Integrationen für jeden beliebigen Wert der mittleren Bewegung auszuführen sind.

Bei der Herstellung der Glieder nullten Grades handelt es sich nur um die charakteristischen Planeten der ersten Klasse, da die übrigen nach den Formeln des vorigen Kapitels berechnet werden können.

Ich will zunächst die Planeten vom Hecubatypus besprechen, für welche das Verhältnis μ nahe gleich $\frac{1}{2}$ ist. Wie wir oben gesehen haben, ist S_0 rein erster Ordnung; dagegen wird R_0 ein grosses Glied enthalten, das offenbar das Argument $2w$ hat. Ich setze darum den Teil von R_0 , welcher nicht rein erster Ordnung ist, unter die Form¹⁾:

$$258) \quad \text{pars } R_0 = \beta_1 \cos 2w,$$

wo der Coefficient β_1 vorläufig unbekannt ist. Ich will durchweg die griechischen Buchstaben für alle solchen Coefficienten anwenden, welche zwar erster, aber nicht rein erster Ordnung sind, also kleine Divisoren enthalten.

Die Gleichungen 188), 193) und 205) bestehen auch hier, und zwar giebt uns die letztere für den wesentlichsten Teil von W_0 , d. h. für den Teil, der wesentlich grösser ist als die störende Masse:

$$\text{pars } \frac{dW}{dv} = -2\beta_1 \cos 2w,$$

oder integrirt:

$$259) \quad \text{pars } W_0 = -\frac{\beta_1}{1-\mu_1} \sin 2w,$$

woraus

$$259a) \quad \text{pars } K_0 = -\frac{\beta_1}{1-\mu_1} \sin 2w \\ V_0 = 0.$$

2. Wenn man die so gefundenen Teile von R_0 und K_0 in 188) einsetzt, nur die Glieder mit dem Argument $2w$ beibehält, und alle Glieder rein zweiter, sowie die dritter Ordnung bei Seite lässt, so wird:

$$\text{pars } \frac{dS}{dv} = -\left\{ A_{2.0.0} + \left[\frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} - \frac{2\mu}{1-\mu_1} A_{4.0.0} \right] \beta_1 \right\} \sin 2w.$$

Diesen Ausdruck integriren wir nach der Formel 190) und stellen S_0 wieder durch die Entwicklung 191) dar; dann ist, wenn man bedenkt, dass $V_0 = 0$:

$$260) \quad S_{2.0.0} = \frac{A_{2.0.0}}{2(1-\mu_1)} + \left[\frac{A_{4.0.0}^{1.0}}{4(1-\mu_1)} - \frac{\mu A_{4.0.0}}{(1-\mu_1)^2} \right] \beta_1.$$

Wir haben also den Coefficienten $S_{2.0.0}$ mit Einschluss der Glieder zweiter Ordnung, jedoch mit Ausschluss derjenigen rein zweiter Ordnung hergestellt. Aller-

1) Durch die vorgesetzte Bezeichnung „pars“ soll angedeutet werden, dass nur ein Teil der betreffenden Funktion gemeint ist.

dings ist der Coefficient β_1 noch immer unbekannt; wir werden ihn gleich bestimmen.

3. Wenn wir nämlich in der Gleichung 193) die Glieder rein zweiter, sowie die dritter Ordnung fortlassen, so ist:

$$\begin{aligned}
 261) \quad \frac{d^2 R}{dv^2} + R &= -Q_0 \left(\frac{dR}{dv} \right)_0 + 2S_0 - P_0 \\
 &= -\Sigma A_{n \cdot 0 \cdot 0} \left(\frac{dR}{dv} \right)_0 \sin nw + 2\Sigma S_{n \cdot 0 \cdot 0} \cos nw \\
 &\quad - \Sigma B_{n \cdot 0 \cdot 0} \cos nw - \Sigma B_{n \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} R_0 \cos nw - \Sigma n\mu B_{n \cdot 0 \cdot 0} K_0 \sin nw.
 \end{aligned}$$

Die Differentiation der Relation 258) giebt uns aber mit derselben Genauigkeit:

$$\text{pars} \left(\frac{dR}{dv} \right)_0 = -2(1 - \mu_1) \beta_1 \sin 2w,$$

und wenn wir diesen Wert, sowie die Werte 258), 259a) und 260) in die vorstehende Gleichung substituiren und nur die Glieder mit dem Argument $2w$ beibehalten, so wird:

$$262) \quad \text{pars} \left\{ \frac{d^2 R}{dv^2} + R \right\} = b_{2 \cdot 0 \cdot 0} \cos 2w,$$

wo

$$262a) \quad b_{2 \cdot 0 \cdot 0} = p_1 + p'_1 \beta_1$$

und

$$p_1 = \frac{A_{2 \cdot 0 \cdot 0}}{1 - \mu_1} - B_{2 \cdot 0 \cdot 0}$$

262b)

$$p'_1 = (1 - \mu_1) A_{4 \cdot 0 \cdot 0} + \frac{A_{4 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0}}{2(1 - \mu_1)} - \frac{2\mu A_{4 \cdot 0 \cdot 0}}{(1 - \mu_1)^2} - B_{0 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} - \frac{1}{2} B_{4 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} + \frac{2\mu B_{4 \cdot 0 \cdot 0}}{1 - \mu_1}.$$

Diese beiden letzteren Coefficienten können ohne Weiteres berechnet werden, wenn auch noch nicht streng, da die Constanten α , μ und μ_1 noch nicht genau bekannt sind. Zur Integration der Gleichung 262) erinnert man sich der Relation 197) und ihres Integrals, und man wird schreiben:

$$\text{pars } R_0 = g_1 \sin v - g_2 \cos v$$

$$263) \quad \frac{dg_1}{dv} = \frac{1}{2} b_{2 \cdot 0 \cdot 0} \cos(2w + v) + \frac{1}{2} b_{2 \cdot 0 \cdot 0} \cos(2w - v)$$

$$\frac{dg_2}{dv} = \frac{1}{2} b_{2 \cdot 0 \cdot 0} \sin(2w + v) - \frac{1}{2} b_{2 \cdot 0 \cdot 0} \sin(2w - v).$$

Ich will nun setzen:

$$264) \quad \mu = \frac{1-\delta}{2}, \quad \mu_1 = \frac{1-\delta_1}{2},$$

wonach also die Grössen δ und δ_1 als klein anzusehen sind. Nach den Relationen 210) und indem wir c_0 gleich Null annehmen, besteht zwischen ihnen die wichtige Beziehung:

$$265) \quad \delta_1 = \delta - 2\mu\gamma.$$

Nur bei den kritischen Planeten, d. h. bei denen, deren mittlere Bewegung sich ganz besonders stark einem commensurablen Verhältniss nähert, dürfen wir γ nicht gleich Null annehmen, wie sich gleich zeigen wird. Da unsere Formeln auch für diese Planeten gelten sollen, so behalten wir es bei.

Man hat also:

$$265a) \quad 2(1-\mu_1) = 1 + \delta_1, \quad 2(1-\mu_1)+1 = 2 + \delta_1, \quad 2(1-\mu_1)-1 = \delta_1.$$

Integriren wir die Gleichungen 263) nach den Formeln 201), so wird:

$$g_1 = \frac{1}{2} \frac{b_{2,0,0}}{2+\delta_1} \sin(2w+v) + \frac{1}{2} \frac{b_{2,0,0}}{\delta_1} \sin(2w-v)$$

$$g_2 = -\frac{1}{2} \frac{b_{2,0,0}}{2+\delta_1} \cos(2w+v) + \frac{1}{2} \frac{b_{2,0,0}}{\delta_1} \cos(2w-v),$$

woraus man erhält:

$$266) \quad \beta_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2+\delta_1} - \frac{1}{\delta_1} \right] b_{2,0,0} = -\frac{b_{2,0,0}}{2\delta_1 + \delta_1^2},$$

und mit Rücksicht auf den Ausdruck 262a) für $b_{2,0,0}$ ergibt sich folgende Gleichung für den Coefficienten β_1

$$267) \quad (2\delta_1 + \delta_1^2 + p_1') \beta_1 = -p_1,$$

aus welcher β_1 berechnet werden kann, sobald δ_1 genau genug bekannt ist; ist das letztere nicht der Fall, was wohl nur bei den kritischen Planeten vorkommen kann, so wird man sich ein Täfelchen rechnen, das β_1 für verschiedene Werte von δ_1 giebt, und aus dem man später den richtigen Wert interpoliren kann.

4. Im Falle nun, dass δ_1 gleich Null wäre, würde β_1 sehr gross und zwar nullter Ordnung werden, und im Falle der Ausdruck $2\delta_1 + \delta_1^2 + p_1'$ verschwände, wäre β_1 unendlich. Aus diesem Grunde hat man geschlossen, dass unser Integrationsverfahren für die kritischen Planeten unbrauchbar wäre; Gyldén hat ebenso wie Herr Harzer complicirtere Integrationsmethoden aufgestellt, um dieser Schwierigkeit aus dem Wege zu gehen. Ich habe aber schon in den *Astronomischen Nachrichten*¹⁾ gezeigt, dass solche Werte von δ_1 garnicht vor-

1) No. 3346.

kommen können, und dass also eine strenge oder äusserst genäherte Commensurabilität zwischen den mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Körpers überhaupt ausgeschlossen ist. δ_1 ist immer gross im Verhältniss zur störenden Masse. Den Beweis hierfür will ich jetzt im Einzelnen geben und dazu zunächst den Ausdruck der Constanten γ mit Hilfe der Gleichung 205) aufstellen. Diejenigen constanten Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung, welche rein erster Ordnung sind, haben wir zu c_0 geschlagen und mit dieser Grösse zum Verschwinden gebracht. Es wird also

$$268) \quad \gamma = \frac{3}{2} \beta_1^2,$$

wo die Glieder vierter Ordnung sowie die zweiten Grades fortgelassen sind; denn γ enthält nur Glieder gerader Grade und offenbar auch nur solche gerader Ordnungen. Hiermit wird:

$$269) \quad \delta_1 = \delta - 3\mu\beta_1^2.$$

Bisher haben wir zwei Arten von mittleren Bewegungen (n und n_1) eingeführt, die bei allen nicht kritischen Planeten als identisch angesehen werden können; denn es ist:

$$270) \quad \frac{2n'}{n} = 2\mu = 1 - \delta$$

$$\frac{2n'}{n_1} = 2\mu_1 = 1 - \delta_1.$$

Wir wollen uns die Bedeutung dieser Constanten klar machen. n ist offenbar diejenige Grösse, welche als Integrationsconstante auftritt, so dass δ jeden beliebigen reellen noch so kleinen positiven oder negativen Wert, die Null eingeschlossen, annehmen kann. Ich will darum n die „Bewegungsconstante“ und n_1 die (wahre) „mittlere Bewegung“ nennen; nur die letztere tritt in unseren Divisoren auf.

Man wird aber noch von einer dritten Constante n_2 zu sprechen haben; ich habe nämlich bereits in den Gleichungen 153) und 161a) den secularen Teil von W wie folgt bezeichnet (da $c_0 = 0$):

$$\text{p. sec. } W = \bar{\gamma}v, \quad \bar{\gamma} = \gamma + \gamma_0,$$

und die Relation

$$\mu_2 = \mu(1 + \bar{\gamma})$$

eingeführt. Aus der Gleichung 155) für das Argument w_1 :

$$w_1 = (1 - \mu)v - B - \mu W + W' + H - H'$$

folgt, dass derjenige Teil dieses Argumentes, ebenso wie der des Argumentes w ,

der der Länge v proportional, also secular ist, der folgende sein wird

$$p. \text{ sec } w = p. \text{ sec. } w_1 = (1 - \mu - \mu\bar{\gamma})v = (1 - \mu_2)v,$$

wo ich die kleinen Grössen c und c' fortgelassen habe.

Setzt man in Analogie mit den Relationen 270) und 264):

$$271) \quad \frac{n'}{n_2} = \mu_2 \quad \text{und} \quad \mu_2 = \frac{1 - \delta_2}{2},$$

so gelten die Beziehungen:

$$272) \quad n_2 = \frac{n}{1 + \gamma} \\ \delta_2 = \delta - 2\mu\bar{\gamma} = \delta_1 - 2\mu\gamma_0.$$

Ist die Grösse δ_2 äusserst nahe resp. streng gleich Null, so tritt der Fall ein, den man Libration genannt hat, und der sich ebenfalls nach unserer Methode ohne wesentliche Schwierigkeiten behandeln lässt. Aus diesem Grunde will ich n_2 die „mittlere Bewegung in Länge“ nennen, da solche Relationen zwischen den mittleren Längen, wie sie sich z. B. bei den Jupitersmonden zeigen, von ihrem Werte abhängen.

Es mag hier wiederholt werden, dass γ_0 mindestens zweiten Grades ist und sowohl positiv wie negativ sein kann; γ ist stets positiv und bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse nullten Grades, bei allen übrigen aber mindestens vom zweiten Grade.

5. Wir wollen jetzt die Gleichungen 267) und 269) betrachten. Wenn wir die Grösse δ_1 sich der Null nähern lassen, so wird nach 267) β_1 unaufhörlich wachsen, dagegen nach 269) sich der Null oder doch einer ausserordentlich kleinen Grösse nähern; man kann hieraus schon schliessen, dass es für β_1 eine obere und für δ_1 eine untere Grenze giebt, die diese Grössen nicht überschreiten können.

Wenn wir den Wert 269) für δ_1 in die Gleichung 267) einsetzen und δ_1^2 gegen δ_1 vernachlässigen, so findet sich die Relation:

$$273) \quad \beta_1^3 + p\beta_1 + q = 0,$$

wo

$$p = -\frac{2\delta + p_1'}{6\mu} \quad q = -\frac{p_1}{6\mu}.$$

Aus derselben lässt sich β_1 für jeden beliebigen Wert von δ berechnen, und zwar zeigt ein Blick, dass der Maximalwert von β_1 von der Ordnung der **Kubikwurzel** aus der störenden Masse ist. Die Relation 269) dient zur Berechnung des entsprechenden Wertes von δ_1 ; der kleinste Wert, den δ_1 annehmen kann, ist von der Ordnung der Kubikwurzel aus dem Quadrat der störenden Masse.

Zur numerischen Lösung der Gleichung 273) hat man die folgenden drei Fälle zu unterscheiden :

I. Wenn

$$a) \quad 1 + \frac{4}{27} \frac{p^3}{q^2} > 0$$

ist, so hat die Gleichung nur eine reelle Wurzel. Durch Einführung der numerischen Werte für p_1 und p'_1 habe ich gefunden, dass die Bedingung a) den folgenden Bedingungen gleichbedeutend ist:

$$a_1) \quad \delta < +0.0147 \quad n < 607''.2.$$

Dieser Fall entspricht aber allen negativen Werten von δ , dem Werte Null (der strengen Commensurabilität) und allen positiven Werten, welche kleiner als 0.0147 sind, und man hat dementsprechend in diesen Fällen

$$\beta_1 \text{ negativ und } |\beta_1| < 0.122$$

$$\delta_1 \text{ negativ und } |\delta_1| > 0.0082$$

$$n_1 < 593''.3.$$

II. Wenn

$$b) \quad 1 + \frac{4}{27} \frac{p^3}{q^2} = 0,$$

so hat die Gleichung drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind; die Bedingung b) entspricht den folgenden:

$$b_1) \quad \delta = +0.0147 \quad n = 607''.2,$$

und ich fand die entsprechenden Werte

$$\beta_1 = -0.122 \quad \text{und} \quad = +0.061$$

$$\delta_1 = -0.0082 \quad \text{und} \quad = +0.0091$$

$$n_1 = 593''.3 \quad \text{und} \quad = 603''.8.$$

III. Wenn

$$c) \quad 1 + \frac{4}{27} \frac{p^3}{q^2} < 0,$$

so hat die Gleichung drei verschiedene reelle Wurzeln, von denen wir aber zwei verwerfen müssen, da sie zu unbrauchbaren Resultaten führen, wenn δ wächst. Man hat in diesem Fall

$$c_1) \quad \delta > +0.0147 \quad \text{und} \quad n > 607''.2,$$

und ferner

$$\beta_1 \text{ positiv und } |\beta_1| < 0.061$$

$$\delta_1 \text{ positiv und } |\delta_1| > 0.0091$$

$$n_1 > 603''.8.$$

Ich gebe im Folgenden eine kleine Tafel wieder, die ich bereits in den Astronomischen Nachrichten mitgeteilt habe, und die die Werte von δ_1 , n_1 und β_1 für n und δ als Argument giebt, wie sie aus den Gleichungen 269) und 267) folgen:

Tabelle I.

log δ	n	log δ_1	n_1	log β_1
8.60 _n	575.4	8.61 _n	575.0	8.32 _n
8.40 _n	583.6	8.42 _n	582.8	8.50 _n
8.20 _n	588.9	8.28 _n	587.2	8.66 _n
8.00 _n	592.3	8.18 _n	589.4	8.76 _n
7.00 _n	597.7	8.05 _n	591.6	8.92 _n
$-\infty$	598.3	8.03 _n	591.8	8.93 _n
7.00	598.9	8.02 _n	592.1	8.94 _n
8.00	604.2	7.94 _n	593.1	9.05 _n
8.15	606.8	7.93 _n	593.2	9.08 _n
8.1670	607.2	$\left. \begin{array}{l} 7.92_n \\ 7.96_n \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 593.3 \\ 603.8 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 9.09_n \\ 8.79_n \end{array} \right\}$
8.20	607.9	8.10	605.9	8.67
8.40	613.7	8.38	612.9	8.41
8.60	623.1	8.60	623.1	8.19

wo den Logarithmen selbstverständlich -10 anzuhängen ist.

Die Maximalwerte, welche β_1 seinem absoluten Betrage nach annehmen kann, werden also $+0.061$ und -0.122 sein, während δ_1 , absolut genommen, nicht unter die Grenzen -0.0082 und $+0.0091$ heruntersinken kann. Die Werte der mittleren Bewegung n_1 , welche zwischen $593''.3$ und $603''.8$ liegen, können nicht vorkommen, und es zeigt sich eine sehr ausgeprägte Lücke im System der kleinen Planeten für das Commensurabilitätsverhältniss $\frac{1}{2}$, eine Thatsache, die durch die Beobachtungen bestätigt wird. n_1 ist eine unstetige Funktion von n , und es darf nicht vergessen werden, dass n_1 nicht unmittelbar mit der elliptischen osculirenden Bewegung verglichen werden kann, und dass wir nur die Glieder nullten Grades in Rücksicht gezogen haben. Aus diesem Grunde kann die von uns gefundene Lücke nicht identisch sein mit derjenigen, welche sich aus den osculirenden Elementen des Berliner Jahrbuchs ergibt. Wenn wir auf die Glieder höheren Grades Rücksicht nehmen, so erweitert sie sich.

Hat die Constante n genau den der Bedingung b) entsprechenden Wert, also

ungefähr $607''.2$, so lässt das Problem zwei Lösungen zu, und der Planet befände sich gewissermassen in einem labilen Zustande.

Hiermit ist bewiesen, dass unsere Integrationsmethode (zunächst mit bezug auf die Glieder nullten Grades) stets zu brauchbaren Resultaten führt, wie nahe auch das Verhältniss der mittleren Bewegungen (oder nach unserer Bezeichnungsweise der Bewegungsconstanten) einem streng commensurablen Verhältniss kommen möge, und die angewandte Methode dürfte wohl die einfachste sein, die man mit den gegenwärtigen Hilfsmitteln der Mathematik aufstellen kann.

6. Eines möchte ich noch hinzufügen, nämlich dass es uns hiermit gelungen ist, einen interessanten Specialfall des Dreikörperproblems in aller Strenge zu lösen; nämlich den Fall, in welchem störender und gestörter Körper sich in derselben Ebene bewegen und die Excentricitätsmoduln beider, sowie die Masse des gestörten Körpers gleich Null sind. In diesem Falle beschreibt der störende Körper eine Kreisbahn, der gestörte Körper jedoch eine Bahn, welche (bei Annäherung des Verhältnisses der mittleren Bewegungen an einen commensurablen Bruch) genähert als eine Ellipse mit der eventuell recht beträchtlichen Excentricität β_1 und der starken Apsidenbewegung δ_1 angesehen werden kann. Diese Apsidenbewegung ist retrograd, wenn δ_1 positiv, n also grösser als $607''.2$ ist. Nähert sich die Masse des störenden Körpers der Null, so nähert sich die Bahn des gestörten Körpers selbstredend der Kreisbahn.

7. Ich will nun den Begriff der kritischen Planeten strenger definiren, und solche Planeten kritische nennen, für welche die Constante γ numerisch grösser ist als eine Grösse rein erster Ordnung; für sie ist der Coefficient β_1 seiner Grössenordnung nach grösser als die Wurzel aus der störenden Masse, und δ_1 kleiner als dieselbe. Für alle nicht kritischen Planeten kann γ zu c_0 gezogen und annullirt werden, so dass $\mu_1 = \mu$ und $\delta_1 = \delta$ wird. Unter den bis jetzt entdeckten Planeten des Hecubatypus scheint sich kein kritischer zu befinden; dagegen hat es den Anschein, als ob die meisten Planeten des Hildatypus zu diesen zählen, von denen wir nun sprechen werden.

Die Hauptaufgabe bei der Berechnung der kritischen Planeten ist die Bestimmung der Constanten δ_1 , welche sich ohne grosse Schwierigkeiten aus osculirenden elliptischen Elementen findet. Auf diese Operation im gegenwärtigen Teile dieser Arbeit einzugehen, würde uns zu weit führen.

8. Wir wollen nun die Planeten vom Hildatypus betrachten, für welche μ nahe gleich $\frac{2}{3}$ ist. Hierbei kann ich mich kurz fassen, da das Verfahren ganz analog dem eben auseinandergesetzten ist. Derjenige Teil von R_0 , welcher gross ist im Verhältniss zur störenden Masse, hängt hier offenbar vom Argument $3w$ ab, und ich setze dementsprechend

$$274) \quad \text{pars } R_0 = \beta_1 \cos 3w,$$

woraus man ableitet

$$275) \quad \text{pars } K_0 = -\frac{2\beta_1}{3(1-\mu_1)} \sin 3w.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung 188) und wenn man dieselbe integriert, so wird der vom Argument $3w$ abhängige Coefficient in S_0

$$276) \quad S_{3;0;0} = \frac{A_{3;0;0}}{3(1-\mu_1)} + \left[\frac{A_{6;0;0}^{1;0}}{6(1-\mu_1)} - \frac{2\mu A_{6;0;0}}{3(1-\mu_1)^2} \right] \beta_1.$$

Wenn man weiter den Ausdruck

$$\text{pars} \left(\frac{dR}{dv} \right)_0 = -3(1-\mu_1)\beta_1 \sin 3w$$

berücksichtigt, so hat man aus der Gleichung 193)

$$277) \quad \text{pars} \left\{ \frac{d^2 R}{dv^2} + R \right\} = \{p_1 + p'_1 \beta_1\} \cos 3w,$$

wo

$$277a) \quad p_1 = \frac{2A_{3;0;0}}{3(1-\mu_1)} - B_{3;0;0}$$

$$p'_1 = \frac{3}{2}(1-\mu_1)A_{6;0;0} + \frac{A_{6;0;0}^{1;0}}{3(1-\mu_1)} - \frac{4\mu A_{6;0;0}}{3(1-\mu_1)^2} - B_{0;0;0}^{1;0} - \frac{1}{2}B_{6;0;0}^{1;0} + \frac{3\mu B_{6;0;0}}{1-\mu_1}.$$

Bezeichnet man:

$$278) \quad \mu = \frac{2-\delta}{3} \quad \text{und} \quad \mu_1 = \frac{2-\delta_1}{3},$$

so besteht zwischen δ und δ_1 die Relation:

$$279) \quad \delta_1 = \delta - 3\mu\gamma,$$

und es ist

$$3(1-\mu_1) = 1 + \delta_1 \quad 3(1-\mu_1) + 1 = 2 + \delta_1 \quad 3(1-\mu_1) - 1 = \delta_1.$$

Für β_1 hat man also die Gleichung:

$$280) \quad (2\delta_1 + \delta_1^2 + p'_1) \beta_1 = -p_1,$$

und für γ wieder:

$$281) \quad \gamma = \frac{3}{2}\beta_1^2,$$

also

$$282) \quad \delta_1 = \delta - \frac{9}{2}\mu\beta_1^2.$$

Wenn wir diesen Wert von δ_1 in 280) einführen, und δ_1^2 fortlassen, so kommt

$$283) \quad \beta_1^3 + p\beta_1 + q = 0,$$

wo

$$p = -\frac{2\delta + p'_1}{9\mu}, \quad q = -\frac{p_1}{9\mu},$$

und diese Gleichung discutiren wir wie 273). Mit Berücksichtigung der numerischen Werte von p_1 und p'_1 (die ich hier indessen nur genähert berechnet habe) können wieder drei Fälle eintreten:

$$a) \quad 1 + \frac{4}{27} \frac{p^3}{q^2} > 0.$$

Die Gleichung hat eine reelle Wurzel, und es ist:

$$\begin{aligned} \delta < +0.0257 & \quad n < 454''.5 \\ \beta_1 \text{ negativ und } |\beta_1| < 0.124 \\ \delta_1 \text{ negativ und } |\delta_1| > 0.0217 \\ n_1 < 443''.8 \end{aligned}$$

$$b) \quad 1 + \frac{4}{27} \frac{p^3}{q^2} = 0.$$

Die Gleichung hat drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind, und es ist:

$$\begin{aligned} \delta = +0.0257 & \quad n = 454''.5 \\ \beta_1 = -0.124 \text{ und } = +0.062 \\ \delta_1 = -0.0217 \text{ und } = +0.0140 \\ n_1 = 443''.8 \text{ und } = 451''.9. \end{aligned}$$

$$c) \quad 1 + \frac{4}{27} \frac{p^3}{q^2} < 0.$$

Die Gleichung hat drei verschiedene reelle Wurzeln, von denen zwei zu verwerfen sind, und es ist:

$$\begin{aligned} \delta > +0.0257 & \quad n > 454''.5 \\ \beta_1 \text{ positiv und } |\beta_1| < 0.062 \\ \delta_1 \text{ positiv und } |\delta_1| > 0.0140 \\ n_1 > 451''.9. \end{aligned}$$

Ich gebe wieder eine kleine Tafel, die β_1 , δ_1 und n_1 als Funktion von δ resp. n giebt, und die ich auch schon in den Astronomischen Nachrichten veröffentlicht habe:

Tabelle II.

$\log \delta$	n	$\log \delta_1$	n_1	δ_1
8.41 _n	443.0	8.48 _n	442.0	8.75 _n
8.00 _n	446.5	8.44 _n	442.6	8.88 _n
7.00 _n	448.5	8.40 _n	443.1	8.95 _n
$-\infty$	448.7	8.40 _n	443.1	8.96 _n
7.00	448.9	8.38 _n	443.4	8.96 _n
8.00	451.0	8.34 _n	443.8	9.01 _n
8.4099	454.5	{ 8.34 _n 8.15 _n }	{ 443.8 451.9 }	{ 9.09 _n 8.79 _n }
8.45	455.1	8.34	453.7	8.67
8.50	455.9	8.43	454.8	8.60
8.60	457.8	8.57	457.2	8.49

wo den Logarithmen selbstverständlich -10 anzuhängen ist.

Die Lücke umfasst hier die Werte der mittleren Bewegung von $443''.8$ bis $451''.9$; mit Berücksichtigung der Glieder höherer Grade erweitert auch sie sich.

9. Man kann übrigens schon in der ersten Annäherung die Glieder dritter und selbst vierter Ordnung mitnehmen; die Gleichungen 273) und 283) würden dritten Grades bleiben, und bis zu den Gliedern dritter Ordnung sind unsere Entwicklungen der Funktionen P und Q ausgeführt. Erst wenn man die Glieder fünfter Ordnung, also in γ diejenigen vierter Ordnung berücksichtigt, werden diese Gleichungen fünften Grades; streng lauten sie folgendermaassen:

$$284) \quad (2\delta_1 + \delta_1^2)\beta_1 = p_1 + p'_1\beta_1 + p''_1\beta_1^2 + p'''_1\beta_1^3 + \dots$$

Die rechte Seite dieser Gleichung bildet eine convergente Reihe, da das Verhältnis $\frac{p_1^{(n)}}{p_1^{(n-1)}}$ die Einheit als Grenze hat, und der Coefficient β_1 wesentlich kleiner als Eins ist. Es fragt sich nur, ob für praktische Zwecke die numerische Convergenz der ersten Glieder stark genug ist, damit man die Reihe mit ihnen abbrechen kann. Für die Planeten vom Hecubatypus ist genähert:

$$\log p_1 = 7.13 - 10 \quad \log p'_1 = 7.63_n - 10,$$

und für diejenigen vom Hildatypus

$$\log p_1 = 7.46 - 10 \quad \log p'_1 = 8.26_n - 10.$$

Die p -Coefficienten nehmen also nicht unbeträchtlich zu, und für die grösseren Werte von β_1 wird man unter Umständen gut thun, die Reihe nicht zu früh abzurechnen. Schwierigkeiten stellen sich der Berechnung der p -Coefficienten nicht in den Weg. Die letzteren werden noch stärker wachsen für die Planeten

vom Thuletypus, für dieselben habe ich die numerischen Rechnungen nicht ausgeführt.

10. Nachdem β_1 bekannt ist, können wir auch die Funktion W_0 berechnen, was genähert schon durch die Formel 259a) geschehen. Indessen müssen in W_0 auch die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt werden, welche nicht rein erster Ordnung sind. Man erhält leicht aus 185), wenn wir als Beispiel die Planeten vom Hecubatypus wählen,

$$\text{pars } \frac{dW}{dv} = -2R_0 + 3R_0^2 = \gamma - 2\beta_1 \cos 2w + \frac{3}{2}\beta_1^2 \cos 4w.$$

Wenn wir also setzen

$$\text{pars } W_0 = \gamma v + \gamma_1 \cos 2w + W_{4.0.0} \cos 4w,$$

so wird:

$$\gamma_1 = -\frac{\beta_1}{1-\mu_1}, \quad W_{4.0.0} = \frac{3\beta_1^2}{8(1-\mu_1)},$$

und γ ist aus dem Vorigen bekannt.

11. Die Berechnung derjenigen Glieder nullten Grades, welche rein erster Ordnung sind, also der gewöhnlichen Glieder, bietet offenbar nicht die geringsten Schwierigkeiten; sie erfolgt nach den im vorigen Kapitel gegebenen Formeln, und man kann dabei, nachdem β_1 bekannt ist, auch gleich die wichtigeren Glieder zweiter Ordnung mit berücksichtigen, was indessen meist überflüssig sein dürfte.

§ 2.

Die Glieder ersten Grades.

1. Unter den Gliedern ersten Grades finden sich merkliche bei den charakteristischen Planeten der beiden ersten Klassen. Wir wollen zunächst die der ersten Klasse betrachten und als Beispiel wieder diejenigen vom Hecubatypus wählen.

Die Argumente der Glieder ersten Grades sind die folgenden:

$$nw \pm v \quad \text{und} \quad nw \pm v_1.$$

Der Faktor von v ist also nahe:

$$n(1-\mu) \pm 1,$$

und für μ nahe gleich $\frac{1}{2}$ werden diese Glieder von der Form C sein für $n = 2$, und von der Form D für $n = 4$ (wie bereits im vorigen Kapitel gezeigt wurde). Die ersteren haben also die Argumente:

$$2w - v \quad \text{und} \quad 2w - v_1,$$

und die letzteren:

$$4w - v \quad \text{und} \quad 4w - v_1.$$

Wir merken uns die Beziehungen:

$$2(1 - \mu_1) = 1 + \delta_1 \quad 2(1 - \mu_1) - 1 = \delta_1 \quad 4(1 - \mu_1) - 1 = 1 + 2\delta_1.$$

Die Funktion S_1 wird zwei merkliche Glieder der Form C enthalten, die wir, wie folgt, ansetzen können:

$$285) \quad \text{pars } S_1 = \alpha_2 \eta \cos(2w - v) + \alpha_3 \eta' \cos(2w - v_1).$$

In der Funktion R_1 werden sich diese Glieder ebenfalls vorfinden, da S auf der rechten Seite der Gleichung 184) steht, diese rechte Seite also nicht rein erster Ordnung ist; ausserdem enthält R_1 die Glieder von der Form D. Wir schreiben demnach:

$$286) \quad \text{pars } R = \beta_1 \cos 2w + \beta_2 \eta \cos(2w - v) + \beta_3 \eta' \cos(2w - v_1) \\ + \beta_4 \eta \cos(4w - v) + \beta_5 \eta' \cos(4w - v_1),$$

wo ich auch des Glied nullten Grades, das aus dem Vorigen bekannt ist, wieder hingeschrieben habe.

Die Gleichung 184) giebt mit Vernachlässigung aller Glieder zweiter und rein erster Ordnung:

$$T_c \left\{ \frac{d^2 R}{dv^2} + R \right\} = 2T_c S_1 = 2\alpha_2 \eta \cos(2w - v) + 2\alpha_3 \eta' \cos(2w - v_1).$$

Da aber hier offenbar $\frac{d^2 R}{dv^2}$ rein erster Ordnung (oder vielmehr noch kleiner) ist, so wird:

$$T_c R_1 = 2T_c S_1,$$

und wir haben die Beziehungen:

$$287) \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\beta_2, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}\beta_3,$$

welche also mit Vernachlässigung der Glieder zweiter und der rein erster Ordnung gelten.

Mit derselben Genauigkeit wird aber 185):

$$\text{pars } \frac{dW}{dv} = -2R_0 + S_1 - 2R_1 + 6R_0 \eta \cos v \\ = -2\beta_1 \cos 2w + (\alpha_2 - 2\beta_2 + 3\beta_1) \eta \cos(2w - v) + (\alpha_3 - 2\beta_3) \eta' \cos(2w - v_1) \\ - 2\beta_4 \eta \cos(4w - v) \quad - 2\beta_5 \eta' \cos(4w - v_1) \\ + 3\beta_1 \eta \cos(2w + v).$$

Wir berücksichtigen nun, dass wir (Kapitel V.) W so zerlegen wollen, dass die gewöhnlichen Glieder, sowie die der Form D zu K und die der Form C zu V kommen; ich setze dementsprechend:

$$288) \text{ pars}(K_0 + K_1) = \gamma_1 \sin 2w + \gamma_4 \eta \sin(4w - v) + \gamma_5 \eta' \sin(4w - v_1) + \gamma_6 \eta \sin(2w + v)$$

$$289) \text{ pars}\left(\frac{dV}{dv}\right)_1 = \gamma_2 \eta \cos(2w - v) + \gamma_3 \eta' \cos(2w - v_1).$$

Es wird dann offenbar, wenn wir die Integration über die Glieder der Form D ausführen:

$$\gamma_1 = -\frac{2\beta_1}{1+\delta_1}, \quad \gamma_4 = -\frac{2\beta_4}{1+2\delta_1}, \quad \gamma_5 = -\frac{2\beta_5}{1+2\delta_1}, \quad \gamma_6 = \frac{3\beta_1}{2+\delta_1},$$

oder mit ausreichender Genauigkeit:

$$290) \quad \gamma_1 = -2\beta_1, \quad \gamma_4 = -2\beta_4, \quad \gamma_5 = -2\beta_5, \quad \gamma_6 = \frac{3}{2}\beta_1,$$

und mit Rücksicht auf 287)

$$290a) \quad \gamma_2 = -\frac{3}{2}\beta_2 + 3\beta_1, \quad \gamma_3 = -\frac{3}{2}\beta_3.$$

2. Wir haben jetzt die α - und die γ -Coefficienten, also den wesentlichsten Teil der Funktionen S und W ausgedrückt durch die in R vorkommenden β -Coefficienten, und wir können nun zur Integration der Gleichungen 183) und der folgenden übergehen. Mit Fortlassung der Glieder zweiten Grades und derjenigen dritter sowie der rein zweiter Ordnung können wir die Gleichung 183) wie folgt schreiben:

$$\frac{dS}{dv} = -Q_0 - Q_1 - 3S_1 Q_0,$$

und mittels der Entwicklung der Funktion Q haben wir:

$$291) \frac{dS}{dv} = -\Sigma A_{n,0,0} \sin nw - \Sigma A_{n,0,0}^{1,0} R_1 \sin nw + \Sigma n\mu A_{n,0,0} K_1 \cos nw - 3\Sigma A_{n,0,0} S_1 \sin nw \\ - \Sigma A_{n,1,0}^{(+1)} \eta \sin(nw+v) - \Sigma A_{n,1,0}^{+1,1,0} R_0 \eta \sin(nw+v) + \Sigma n\mu A_{n,1,0}^{(+1)} K_0 \cos(nw+v) \\ - \Sigma A_{n,1,0}^{(-1)} \eta \sin(nw-v) - \Sigma A_{n,1,0}^{-1,1,0} R_0 \eta \sin(nw-v) + \Sigma n\mu A_{n,1,0}^{(-1)} K_0 \cos(nw-v) \\ - \Sigma A_{n,0,1}^{(+1)} \eta' \sin(nw+v_1) - \Sigma A_{n,0,1}^{+1,1,0} R_0 \eta' \sin(nw+v_1) + \Sigma n\mu A_{n,0,1}^{(+1)} K_0 \cos(nw+v_1) \\ - \Sigma A_{n,0,1}^{(-1)} \eta' \sin(nw-v_1) - \Sigma A_{n,0,1}^{-1,1,0} R_0 \eta' \sin(nw-v_1) + \Sigma n\mu A_{n,0,1}^{(-1)} K_0 \cos(nw-v_1).$$

Wir integrieren diese Gleichung und behalten im Integrale nur die Glieder mit Argumenten einer der charakteristischen Formen:

$$2w - v, \quad 2w - v_1, \quad 4w - v, \quad 4w - v_1,$$

oder der elementaren Formen

$$v \quad \text{und} \quad v_1$$

bei.

Ich habe in der Gleichung 291) die Glieder nullten Grades beibehalten, soweit sie erster Ordnung sind, da durch ihre Integration Glieder ersten Grades entstehen; es ist nämlich nach 190)

$$A_{n,0,0}(\int \sin nw dv)_1 = \frac{\mu A_{n,0,0}}{1-\mu_1} \int \left(\frac{dV}{dv} \right)_1 \sin nw dv,$$

und diesen Wert müssen wir für das erste Glied rechter Hand der Gleichung 291) einsetzen; und zwar erhält man mit Rücksicht auf 289) und 290a):

$$\begin{aligned} \text{pars} \Sigma A_{n,0,0} \int \sin nw dv &= \frac{3}{4} \frac{\mu}{1-\mu_1} A_{2,0,0} (2\beta_1 - \beta_2) \int \eta \sin v dv - \frac{3}{4} \frac{\mu}{1-\mu_1} A_{2,0,0} \beta_3 \int \eta' \sin v_1 dv \\ &+ \frac{3}{4} \frac{\mu}{1-\mu_1} A_{2,0,0} (2\beta_1 - \beta_2) \int \eta \sin(4w - v) dv - \frac{3}{4} \frac{\mu}{1-\mu_1} A_{2,0,0} \beta_3 \int \eta' \sin(4w - v_1) dv. \end{aligned}$$

Ferner findet man mit Hilfe der Werte von R_1 , K_1 und S_1 :

$$\begin{aligned} \text{pars} \Sigma A_{n,0,0} R_1 \sin nw &= \left\{ \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} \beta_2 + \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} \beta_4 \right\} \eta \sin v + \left\{ \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} \beta_3 + \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} \beta_5 \right\} \eta' \sin v_1 \\ &- \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} \beta_4 \eta \sin(2w - v) - \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} \beta_5 \eta' \sin(2w - v_1) \\ &+ \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} \beta_2 \eta \sin(4w - v) + \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} \beta_3 \eta' \sin(4w - v_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pars} \Sigma \mu A_{n,0,0} K_1 \cos nw &= \left\{ 4\mu A_{4,0,0} \beta_4 + \frac{3}{2}\mu A_{2,0,0} \beta_1 \right\} \eta \sin v + 4\mu A_{4,0,0} \beta_5 \eta' \sin v_1 \\ &- \left\{ 2\mu A_{2,0,0} \beta_4 + 3\mu A_{4,0,0} \beta_1 \right\} \eta \sin(2w - v) - 2\mu A_{2,0,0} \beta_5 \eta' \sin(2w - v_1) \\ &- \frac{3}{2}\mu A_{6,0,0} \beta_1 \eta \sin(4w - v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pars} \Sigma A_{n,0,0} S_1 \sin nw &= \frac{1}{4} A_{2,0,0} \beta_2 \eta \sin v + \frac{1}{4} A_{2,0,0} \beta_3 \eta' \sin v_1 \\ &+ \frac{1}{4} A_{2,0,0} \beta_2 \eta \sin(4w - v) + \frac{1}{4} A_{2,0,0} \beta_3 \eta' \sin(4w - v_1). \end{aligned}$$

Weiter haben wir unter den Gliedern erster Ordnung in 291) die folgenden zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} A_{0,0,1}^{(-1)} \eta' \sin v_1, \quad A_{2,1,0}^{(-1)} \eta \sin(2w - v), \quad A_{2,0,1}^{(-1)} \eta' \sin(2w - v_1), \\ A_{4,1,0}^{(-1)} \eta \sin(4w - v), \quad A_{4,0,1}^{(-1)} \eta' \sin(4w - v_1). \end{aligned}$$

Endlich geben die mit R_0 multiplicirten Glieder den folgenden Teil:

$$\begin{aligned} - \left\{ \frac{1}{2} A_{2,1,0}^{+1,1,0} - \frac{1}{2} A_{2,1,0}^{-1,1,0} \right\} \beta_1 \eta \sin v - \left\{ \frac{1}{2} A_{2,0,1}^{+1,1,0} - \frac{1}{2} A_{2,0,1}^{-1,1,0} \right\} \beta_1 \eta' \sin v_1 \\ - \frac{1}{2} A_{4,1,0}^{-1,1,0} \beta_1 \eta \sin(2w - v) + \left\{ \frac{1}{2} A_{0,0,1}^{+1,1,0} - \frac{1}{2} A_{4,0,1}^{-1,1,0} \right\} \beta_1 \eta' \sin(2w - v_1) \\ - \left\{ \frac{1}{2} A_{2,1,0}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} A_{6,1,0}^{-1,1,0} \right\} \beta_1 \eta \sin(4w - v) - \left\{ \frac{1}{2} A_{2,0,1}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} A_{6,0,1}^{-1,1,0} \right\} \beta_1 \eta' \sin(4w - v_1), \end{aligned}$$

und die mit K_0 multiplicirten den folgenden:

$$\begin{aligned} & + \{2\mu A_{2.1.0}^{(+1)} - 2\mu A_{2.1.0}^{(-1)}\} \beta_1 \eta \sin v + \{2\mu A_{2.0.1}^{(+1)} - 2\mu A_{2.0.1}^{(-1)}\} \beta_1 \eta' \sin v_1 \\ & + 4\mu A_{4.1.0}^{(-1)} \beta_1 \eta \sin(2w - v) + 4\mu A_{4.0.1}^{(-1)} \beta_1 \eta' \sin(2w - v_1) \\ & - \{2\mu A_{2.1.0}^{(-1)} - 6\mu A_{6.1.0}^{(-1)}\} \beta_1 \eta \sin(4w - v) - \{2\mu A_{2.0.1}^{(-1)} - 6\mu A_{6.0.1}^{(-1)}\} \beta_1 \eta' \sin(4w - v_1). \end{aligned}$$

Wenn wir alle diese Werte einsetzen in 291), so findet sich:

$$\begin{aligned} 292) \quad \frac{dS_1}{dv} = & -a_{0.1.0}^{(+1)} \eta \sin v & -a_{0.0.1}^{(+1)} \eta' \sin v_1 \\ & -a_{2.1.0}^{(-1)} \eta \sin(2w - v) & -a_{2.0.1}^{(-1)} \eta' \sin(2w - v_1) \\ & -a_{4.1.0}^{(-1)} \eta \sin(4w - v) & -a_{4.0.1}^{(-1)} \eta' \sin(4w - v_1), \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} 292a) \quad a_{0.1.0}^{(+1)} &= q_1^{(1)} \beta_1 + q_1^{(2)} \beta_2 + q_1^{(3)} \beta_3 \\ a_{0.0.1}^{(+1)} &= A_{0.0.1}^{(+1)} + q_2^{(1)} \beta_1 + q_1^{(2)} \beta_3 + q_1^{(3)} \beta_5 \\ a_{2.1.0}^{(-1)} &= A_{2.1.0}^{(-1)} + q_3^{(1)} \beta_1 + q_3^{(2)} \beta_4 \\ a_{2.0.1}^{(-1)} &= A_{2.0.1}^{(-1)} + q_4^{(1)} \beta_1 + q_3^{(2)} \beta_5 \\ a_{4.1.0}^{(-1)} &= A_{4.1.0}^{(-1)} + q_5^{(1)} \beta_1 + q_1^{(2)} \beta_2 \\ a_{4.0.1}^{(-1)} &= A_{4.0.1}^{(-1)} + q_6^{(1)} \beta_1 + q_1^{(2)} \beta_3, \end{aligned}$$

und wo

$$\begin{aligned} 292b) \quad q_1^{(1)} &= \frac{3}{2} \mu A_{2.0.0} + \frac{1}{2} A_{2.1.0}^{+1.1.0} - \frac{1}{2} A_{2.1.0}^{-1.1.0} - 2\mu A_{2.1.0}^{(+1)} + 2\mu A_{2.1.0}^{(-1)} \\ q_1^{(2)} &= \frac{3}{4} (1 - 2\mu) A_{2.0.0} + \frac{1}{2} A_{2.0.0}^{1.0} \\ q_1^{(3)} &= \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} - 4\mu A_{4.0.0} \\ q_2^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{2.0.1}^{+1.1.0} - \frac{1}{2} A_{2.0.1}^{-1.1.0} - 2\mu A_{2.0.1}^{(+1)} + 2\mu A_{2.0.1}^{(-1)} \\ q_3^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{4.1.0}^{-1.1.0} + 3\mu A_{4.0.0} - 4\mu A_{4.1.0}^{(-1)} \\ q_3^{(2)} &= -\frac{1}{2} A_{2.0.0}^{1.0} + 2\mu A_{2.0.0} \\ q_4^{(1)} &= -\frac{1}{2} A_{0.0.1}^{+1.1.0} + \frac{1}{2} A_{4.0.1}^{-1.1.0} - 4\mu A_{4.0.1}^{(-1)} \\ q_5^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{2.1.0}^{-1.1.0} + \frac{1}{2} A_{6.1.0}^{-1.1.0} + 3\mu A_{2.0.0} + \frac{9}{2} \mu A_{6.0.0} + 2\mu A_{2.1.0}^{(-1)} - 6\mu A_{6.1.0}^{(-1)} \\ q_6^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{2.0.1}^{-1.1.0} + \frac{1}{2} A_{6.0.1}^{-1.1.0} + 2\mu A_{2.0.1}^{(-1)} - 6\mu A_{6.0.1}^{(-1)}. \end{aligned}$$

Die A - sowie die q -Coefficienten können berechnet werden und auch β_1^v ist aus dem Vorigen bekannt. Ich habe in den vorstehenden Formeln für μ_1 den Bruch $\frac{1}{2}$ gesetzt, da dadurch nur Glieder rein zweiter Ordnung vernachlässigt werden. Wenn man auch $\mu = \frac{1}{2}$ setzt, so würde der Coefficient $A_{2.0.0}$ im Ausdruck von $q_1^{(2)}$ verschwinden. Die Coefficienten $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ und β_5 sind noch unbekannt.

Ich will zunächst denjenigen Teil von S_1 bestimmen, welcher von der Form C ist, also in erster Linie die Coefficienten α_2 und α_3 . Es ist

$$T_c S_1 = -a_{2,1,0}^{(-1)} \int \eta \sin(2w-v) dv - a_{2,0,1}^{(-1)} \int \eta' \sin(2w-v_1) dv,$$

und die Integrale haben wir nach 214) auszuführen und dabei zu setzen

$$\int \sin(2w-v) dv = -\frac{1}{\delta_1} \cos(2w-v)$$

$$\iint \sin(2w-v) dv^2 = -\frac{1}{\delta_1^2} \sin(2w-v)$$

.

Wir behalten des kleinen Divisors δ_1 wegen in 214) die beiden ersten Zeilen bei und erhalten:

$$T_c S_1 = \frac{a_{2,1,0}^{(-1)}}{\delta_1} \left\{ \eta \cos(2w-v) - \frac{1}{\delta_1} \frac{d\eta \cos II}{dv} \sin(2w-v) - \frac{1}{\delta_1} \frac{d\eta \sin II}{dv} \cos(2w-v) \right\}$$

$$+ \frac{a_{2,0,1}^{(-1)}}{\delta_1} \left\{ \eta' \cos(2w-v_1) - \frac{1}{\delta_1} \frac{d\eta' \cos II_1}{dv} \sin(2w-v) - \frac{1}{\delta_1} \frac{d\eta' \sin II_1}{dv} \cos(2w-v) \right\}.$$

Für $T_c S_1$ ist also die Gleichung anzusetzen:

$$293) \quad T_c S_1 = \alpha_2 \eta \cos(2w-v) + \alpha_3 \eta' \cos(2w-v_1)$$

$$- \frac{1}{\delta_1} \left\{ \alpha_2 \frac{d\eta \cos II}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta' \cos II_1}{dv} \right\} \sin(2w-v)$$

$$- \frac{1}{\delta_1} \left\{ \alpha_2 \frac{d\eta \sin II}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta' \sin II_1}{dv} \right\} \cos(2w-v),$$

welche strenger ist als 285); α_2 und α_3 bestimmen sich aus den Relationen:

$$293a) \quad \delta_1 \alpha_2 = A_{2,1,0}^{(-1)} + q_3^{(1)} \beta_1 + q_3^{(2)} \beta_4$$

$$\delta_1 \alpha_3 = A_{2,0,1}^{(-1)} + q_4^{(1)} \beta_1 + q_3^{(2)} \beta_5,$$

wo β_1 bekannt, aber β_4 und β_5 zunächst unbekannt sind.

Bei der Integration der übrigen Teile von S_1 brauchen wir in 214) nur die ersten Zeilen beizubehalten, da durch die Integration keine kleinen Divisoren entstehen, und es wird:

$$294) \quad T_b S_1 = a_{0,1,0}^{(+1)} \eta \cos v + a_{0,0,1}^{(+1)} \eta' \cos v_1$$

$$T_a S_1 = \frac{a_{4,1,0}^{(-1)}}{1+2\delta_1} \eta \cos(4w-v) + \frac{a_{4,0,1}^{(-1)}}{1+2\delta_1} \eta' \cos(4w-v_1).$$

3. Wenn wir in der Gleichung 184) alle Glieder zweiten Grades, alle solchen dritter Ordnung und alle solchen rein zweiter Ordnung fortlassen,

dagegen die Glieder nullten Grades mitnehmen, soweit sie erster Ordnung sind, so kommt:

$$295) \frac{d^2 \varrho}{dv^2} + \varrho = 2S_0 - P_0 - Q_0 \frac{d(\varrho)}{dv} - Q_0 \left(\frac{dR}{dv} \right)_1 - Q_1 \left(\frac{dR}{dv} \right)_0 + 2S_1 + 2S_0 S_1 - P_1 - 2S_1 P_0.$$

In diese Gleichung setzen wir für die dort fungirenden Ausdrücke S_0 , Q_0 u. s. w. die früher gefundenen Entwicklungen ein, wobei ich nur an die folgenden:

$$\frac{d(\varrho)}{dv} = -\eta \sin v$$

$$\left(\frac{dR}{dv} \right)_0 = -(1 + \delta_1) \beta_1 \sin 2w$$

$$\left(\frac{dR}{dv} \right)_1 = -(1 + 2\delta_1) \beta_4 \eta \sin(4w - v) - (1 + 2\delta_1) \beta_5 \eta' \sin(4w - v_1),$$

sowie an die Ausdrücke 293) und 294) für S_1 erinnere. So ergibt sich:

$$\begin{aligned} 296) \quad \frac{d^2 \varrho}{dv^2} + \varrho &= b_{2,0,0} \cos 2w \\ &+ b_{0,1,0}^{(+1)} \eta \cos v + b_{0,0,1}^{(+1)} \eta' \cos v_1 \\ &+ \{2\alpha_2 + b_{2,1,0}^{(-1)}\} \eta \cos(2w - v) + \{2\alpha_3 + b_{2,0,1}^{(-1)}\} \eta' \cos(2w - v_1) \\ &+ b_{4,1,0}^{(-1)} \eta \cos(4w - v) + b_{4,0,1}^{(-1)} \eta' \cos(4w - v_1) \\ &- \frac{2}{\delta_1} \left\{ \alpha_2 \frac{d\eta \cos II}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta' \cos II_1}{dv} \right\} \sin(2w - v) \\ &- \frac{2}{\delta_1} \left\{ \alpha_2 \frac{d\eta \sin II}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta' \sin II_1}{dv} \right\} \cos(2w - v), \end{aligned}$$

wo $b_{2,0,0}$ aus dem § 1 bekannt ist und wo:

$$\begin{aligned} 296a) \quad b_{0,1,0}^{(+1)} &= p_1^{(0)} + p_1^{(1)} \beta_1 + p_1^{(2)} \beta_2 + p_1^{(3)} \beta_4 \\ b_{0,0,1}^{(+1)} &= p_2^{(0)} + p_2^{(1)} \beta_1 + p_2^{(2)} \beta_3 + p_2^{(3)} \beta_5 \\ b_{2,1,0}^{(-1)} &= p_3^{(0)} + p_3^{(1)} \beta_1 + p_3^{(2)} \beta_2 + p_3^{(3)} \beta_4 \\ b_{2,0,1}^{(-1)} &= p_4^{(0)} + p_4^{(1)} \beta_1 + p_4^{(2)} \beta_3 + p_4^{(3)} \beta_5 \\ b_{4,1,0}^{(-1)} &= p_5^{(0)} + p_5^{(1)} \beta_1 + p_5^{(2)} \beta_2 + p_5^{(3)} \beta_4 \\ b_{4,0,1}^{(-1)} &= p_6^{(0)} + p_6^{(1)} \beta_1 + p_6^{(2)} \beta_3 + p_6^{(3)} \beta_5. \end{aligned}$$

Die p -Coefficienten können berechnet werden, da sie nur von den A - und B -Coefficienten abhängen; sie sind sämtlich rein erster Ordnung. Ihre Ausdrücke will ich hier nicht ableiten, da uns dies zu weit in die Details führen

würde und da sie überdies in der pag. 117 citirten Dissertation des Herrn Lüdendorff sich vorfinden, auf welche ich überhaupt betreffs verschiedener Einheiten verweise.

Die Gleichung 296) integriren wir nach 197) bis 199), zu denen man noch den Ausdruck 220a) ziehen kann; ausserdem ermitteln wir den aus dem Gliede nullten Grades entstehenden Teil nach der Formel 201).

Wenn wir demnach setzen

$$297) \quad \text{pars } \varrho_1 = g_1 \sin v - g_2 \cos v,$$

so wird:

$$298) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dg_1}{dv} \\ \frac{dg_2}{dv} \end{array} \right\} = \frac{\mu b_{2,0,0}}{2 + \delta_1} \left(\frac{dV}{dv} \right)_1 \cos(2w+v) \pm \frac{\mu b_{2,0,0}}{\delta_1} \left(\frac{dV}{dv} \right)_1 \cos(2w-v) \\ + \frac{1}{2} b_{v,1,0}^{(+)} \left\{ \eta \frac{\cos(v+v)}{\sin(v+v)} \pm \eta \frac{\cos(v-v)}{\sin(v-v)} \right\} \\ + \frac{1}{2} b_{0,0,1}^{(+)} \left\{ \eta' \frac{\cos(v_1+v)}{\sin(v_1+v)} \pm \eta' \frac{\cos(v_1-v)}{\sin(v_1-v)} \right\} \\ + \left\{ \alpha_2 + \frac{1}{2} b_{2,1,0}^{(-)} \right\} \left\{ \eta \frac{\cos(2w-v+v)}{\sin(2w-v+v)} \pm \eta \frac{\cos(2w-v-v)}{\sin(2w-v-v)} \right\} \\ + \left\{ \alpha_3 + \frac{1}{2} b_{2,0,1}^{(-)} \right\} \left\{ \eta' \frac{\cos(2w-v_1+v)}{\sin(2w-v_1+v)} \pm \eta' \frac{\cos(2w-v_1-v)}{\sin(2w-v_1-v)} \right\} \\ - \frac{1}{\delta_1} \left\{ \alpha_2 \frac{d\eta \cos II}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta' \cos II_1}{dv} \right\} \left\{ \pm \frac{\sin 2w}{\cos 2w} + \frac{\sin(2w-2v)}{\cos(2w-2v)} \right\} \\ - \frac{1}{\delta_1} \left\{ \alpha_2 \frac{d\eta \sin II}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta' \sin II_1}{dv} \right\} \left\{ \frac{\cos 2w}{\sin 2w} \pm \frac{\cos(2w-2v)}{\sin(2w-2v)} \right\} \\ + \frac{1}{2} b_{4,1,0}^{(-)} \left\{ \eta \frac{\cos(4w-v+v)}{\sin(4w-v+v)} \pm \eta \frac{\cos(4w-v-v)}{\sin(4w-v-v)} \right\} \\ + \frac{1}{2} b_{4,0,1}^{(-)} \left\{ \eta' \frac{\cos(4w-v_1+v)}{\sin(4w-v_1+v)} \pm \eta' \frac{\cos(4w-v_1-v)}{\sin(4w-v_1-v)} \right\}.$$

In den beiden ersten Gliedern setzt man nach 289):

$$\left(\frac{dV}{dv} \right)_1 \cos(2w+v) = \frac{\gamma_2}{2} \left\{ \eta \frac{\cos(v+v)}{\sin(v+v)} + \eta \frac{\cos(4w-v+v)}{\sin(4w-v+v)} \right\} \\ + \frac{\gamma_3}{2} \left\{ \eta' \frac{\cos(v_1+v)}{\sin(v_1+v)} + \eta' \frac{\cos(4w-v_1+v)}{\sin(4w-v_1+v)} \right\} \\ \left(\frac{dV}{dv} \right)_1 \cos(2w-v) = \frac{\gamma_2}{2} \left\{ \eta \frac{\cos(v-v)}{\sin(v-v)} + \eta \frac{\cos(4w-v-v)}{\sin(4w-v-v)} \right\} \\ + \frac{\gamma_3}{2} \left\{ \eta' \frac{\cos(v_1-v)}{\sin(v_1-v)} + \eta' \frac{\cos(4w-v_1-v)}{\sin(4w-v_1-v)} \right\},$$

und dann integriert man den Ausdruck nach 221) und 222); indessen führen wir die Integration derjenigen Glieder nicht aus, in denen das Argument w nicht auftritt; und bei Ausführung der Integrationen $\int \eta \cos(4w - v - v) dv$ und $\int \eta' \cos(4w - v_1 - v) dv$ nach 221) müssen wir die Glieder mitberücksichtigen, welche die Differentialquotienten $\frac{d\eta \cos II}{dv}$, $\frac{d\eta \sin II}{dv}$ u. s. w. enthalten.

Dann wird:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ b_{0.1.0}^{(+1)} + \frac{\mu b_{2.0.0}}{2 + \delta_1} \gamma_2 \right\} \int \eta \frac{\cos}{\sin} (v + v) dv \pm \frac{1}{2} \left\{ b_{0.1.0}^{(+1)} + \frac{\mu b_{2.0.0}}{\delta_1} \gamma_2 \right\} \int \eta \frac{\cos}{\sin} (v - v) dv \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ b_{0.0.1}^{(+1)} + \frac{\mu b_{2.0.0}}{2 + \delta_1} \gamma_3 \right\} \int \eta' \frac{\cos}{\sin} (v_1 + v) dv \pm \frac{1}{2} \left\{ b_{0.0.1}^{(+1)} + \frac{\mu b_{2.0.0}}{\delta_1} \gamma_3 \right\} \int \eta' \frac{\cos}{\sin} (v_1 - v) dv \\
&+ \left\{ \alpha_2 + \frac{1}{2} b_{2.1.0}^{(-1)} \right\} \left\{ \pm \frac{1}{1 + \delta_1} \eta \frac{\sin}{\cos} (2w - v + v) - \frac{1}{1 - \delta_1} \eta \frac{\sin}{\cos} (2w - v - v) \right\} \\
&+ \left\{ \alpha_3 + \frac{1}{2} b_{2.0.1}^{(-1)} \right\} \left\{ \pm \frac{1}{1 + \delta_1} \eta' \frac{\sin}{\cos} (2w - v_1 + v) - \frac{1}{1 - \delta_1} \eta' \frac{\sin}{\cos} (2w - v_1 - v) \right\} \\
&+ \frac{1}{\delta_1} \left\{ \alpha_2 \frac{d\eta \cos II}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta' \cos II_1}{dv} \right\} \left\{ \frac{1}{1 + \delta_1} \frac{\cos}{\sin} 2w \mp \frac{1}{1 - \delta_1} \frac{\cos}{\sin} (2w - 2v) \right\} \\
&+ \frac{1}{\delta_1} \left\{ \alpha_2 \frac{d\eta \sin II}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta' \sin II_1}{dv} \right\} \left\{ \mp \frac{1}{1 + \delta_1} \frac{\sin}{\cos} 2w + \frac{1}{1 - \delta_1} \frac{\sin}{\cos} (2w - 2v) \right\} \\
&+ \frac{1}{4(1 + \delta)} \left\{ b_{4.1.0}^{(-1)} + \frac{\mu b_{2.0.0}}{2 + \delta_1} \gamma_2 \right\} \left\{ \pm \eta \frac{\sin}{\cos} (4w - v + v) + \frac{1}{2(1 + \delta_1)} \frac{d\eta \cos II}{dv} \frac{\cos}{\sin} 4w \mp \frac{1}{2(1 + \delta_1)} \frac{d\eta \sin II}{dv} \frac{\sin}{\cos} 4w \right\} \\
&+ \frac{1}{4\delta_1} \left\{ b_{4.1.0}^{(-1)} + \frac{\mu b_{2.0.0}}{\delta_1} \gamma_2 \right\} \left\{ + \eta \frac{\sin}{\cos} (4w - v - v) \pm \frac{1}{2\delta_1} \frac{d\eta \cos II}{dv} \frac{\cos}{\sin} (4w - 2v) - \frac{1}{2\delta_1} \frac{d\eta \sin II}{dv} \frac{\sin}{\cos} (4w - 2v) \right\} \\
&+ \frac{1}{4(1 + \delta_1)} \left\{ b_{4.0.1}^{(-1)} + \frac{\mu b_{2.0.0}}{2 + \delta_1} \gamma_3 \right\} \left\{ \pm \eta' \frac{\sin}{\cos} (4w - v_1 + v) + \frac{1}{2(1 + \delta_1)} \frac{d\eta' \cos II_1}{dv} \frac{\cos}{\sin} 4w \mp \frac{1}{2(1 + \delta_1)} \frac{d\eta' \sin II_1}{dv} \frac{\sin}{\cos} 4w \right\} \\
&+ \frac{1}{4\delta_1} \left\{ b_{4.0.1}^{(-1)} + \frac{\mu b_{2.0.0}}{\delta_1} \gamma_3 \right\} \left\{ + \eta' \frac{\sin}{\cos} (4w - v_1 - v) \pm \frac{1}{2\delta_1} \frac{d\eta' \cos II_1}{dv} \frac{\cos}{\sin} (4w - 2v) - \frac{1}{2\delta_1} \frac{d\eta' \sin II_1}{dv} \frac{\sin}{\cos} (4w - 2v) \right\}.
\end{aligned}$$

Die in den beiden ersten Zeilen stehenden Glieder führen in ϱ zu Gliedern der Form B; wir wollen zunächst R_1 bestimmen und sie deshalb einstweilen bei Seite lassen.

Wenn wir jetzt mit Hilfe der Ausdrücke 299) und 297) R_1 bilden und uns zugleich erinnern, dass wir es in der Form 286) darstellen wollen, so wird offenbar der Ansatz für diese Funktion in ihrer vollständigen Form, wie folgt, zu machen sein:

$$\begin{aligned}
300) \quad R_1 = & \beta_2 \eta \cos(2w - v) + \beta_3 \eta' \cos(2w - v_1) \\
& + \beta_4 \eta \cos(4w - v) + \beta_5 \eta' \cos(4w - v_1) \\
& - \frac{2}{\delta_1(1 - \delta_1^2)} \left\{ \alpha_2 \frac{d\eta \cos II}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta' \cos II_1}{dv} \right\} \sin(2w - v) \\
& - \frac{2}{\delta_1(1 - \delta_1^2)} \left\{ \alpha_2 \frac{d\eta \sin II}{dv} + \alpha_3 \frac{d\eta' \sin II_1}{dv} \right\} \cos(2w - v) \\
& - \frac{1}{2\delta_1} \left\{ \beta_4 \frac{d\eta \cos II}{dv} + \beta_5 \frac{d\eta' \cos II_1}{dv} \right\} \sin(4w - v) \\
& - \frac{1}{2\delta_1} \left\{ \beta_4 \frac{d\eta \sin II}{dv} + \beta_5 \frac{d\eta' \sin II_1}{dv} \right\} \cos(4w - v),
\end{aligned}$$

und für die β -Coefficienten gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
300a) \quad \beta_2 = & \frac{2\alpha_2 + b_{2.1.0}^{(-1)}}{1 - \delta_1^2}, \quad \beta_3 = \frac{2\alpha_3 + b_{2.0.1}^{(-1)}}{1 - \delta_1^2}, \\
\beta_4 = & -\frac{b_{4.1.0}^{(-1)}}{4\delta_1(1 + \delta_1)} \frac{(2 + 3\delta_1)\mu b_{2.0.0}\gamma_2}{4\delta_1^2(1 + \delta_1)(2 + \delta_1)}, \quad \beta_5 = -\frac{b_{4.0.1}^{(-1)}}{4\delta_1(1 + \delta_1)} \frac{(2 + 3\delta_1)\mu b_{2.0.0}\gamma_3}{4\delta_1^2(1 + \delta_1)(2 + \delta_1)}.
\end{aligned}$$

Die Grösse δ_1 kann hier mehrfach vernachlässigt werden, z. B. in den Faktoren $(1 - \delta_1^2)$, $(1 + \delta_1)$ u. s. w. Wir haben nun die nötigen Gleichungen abgeleitet zur Berechnung der α - und der β -Coefficienten; es bleibt nur noch übrig, sie arithmetisch zu lösen. Ich stelle dazu die Gleichungen 293a) und 300a) zusammen in der folgenden Form, indem ich zugleich auf die Relationen 296a) Rücksicht nehme:

$$\begin{aligned}
& \delta_1 \alpha_2 = A_{2.1.0}^{(-1)} + q_3^{(1)} \beta_1 + q_3^{(2)} \beta_4 \\
& \delta_1 \alpha_3 = A_{2.0.1}^{(-1)} + q_4^{(1)} \beta_1 + q_3^{(2)} \beta_5 \\
301) \quad (1 - \delta_1^2) \beta_2 = & 2\alpha_2 + p_3^{(0)} + p_3^{(1)} \beta_1 + p_3^{(2)} \beta_2 + p_3^{(3)} \beta_4 \\
(1 - \delta_1^2) \beta_3 = & 2\alpha_3 + p_4^{(0)} + p_4^{(1)} \beta_1 + p_3^{(2)} \beta_3 + p_3^{(3)} \beta_5 \\
4\delta_1(1 + \delta_1) \beta_4 = & -p_5^{(0)} - p_5^{(1)} \beta_1 - p_5^{(2)} \beta_2 - p_5^{(3)} \beta_4 - \frac{(2 + 3\delta_1)\mu b_{2.0.0}\gamma_2}{\delta_1(2 + \delta_1)} \\
4\delta_1(1 + \delta_1) \beta_5 = & -p_5^{(0)} - p_5^{(1)} \beta_1 - p_5^{(2)} \beta_3 - p_5^{(3)} \beta_5 - \frac{(2 + 3\delta_1)\mu b_{2.0.0}\gamma_3}{\delta_1(2 + \delta_1)}.
\end{aligned}$$

Man könnte in den letzten beiden Gleichungen die Coefficienten γ_2 und γ_3 durch ihre Ausdrücke 290a) ersetzen. Indessen wollen wir darauf Rücksicht nehmen, dass die beiden Glieder, welche diese Coefficienten enthalten, sehr gross sind und bei den kritischen Planeten im Allgemeinen sogar grösser sind als die vorhergehenden. Deshalb wollen wir uns einen strengeren Ausdruck für dieselben beschaffen, was mit Hilfe der Gleichung 185) nicht schwer ist. Ich

habe in § 1 gezeigt, dass der Coefficient β_1 im Maximum von der Grössenordnung der Kubikwurzel aus der störenden Masse ist; ob dies nun auch von den übrigen Coefficienten der charakteristischen Glieder gilt, lässt sich nicht ohne Weiteres sagen; nimmt man es an, so könnte man die dritten Potenzen aller dieser Coefficienten mit der störenden Masse vergleichen und zugleich mit den Gliedern rein erster Ordnung vernachlässigen. Wir wollen demnach aus 185) γ_2 und γ_3 bestimmen mit Fortlassung aller Glieder dritter und aller rein erster Ordnung, aber mit Berücksichtigung der Quadrate der β -Coefficienten. Die letzteren entstehen aus dem Gliede $3R^2$, denn es ist:

$$\text{pars } 3R^2 = 3\beta_1\beta_4\eta \cos(2w - v) + 3\beta_1\beta_5\eta' \cos(2w - v_1).$$

Danach wird also:

$$\begin{aligned} 302) \quad \gamma_2 &= -\frac{3}{2}\beta_2 + 3\beta_1 + 3\beta_1\beta_4 \\ \gamma_3 &= -\frac{3}{2}\beta_3 + 3\beta_1\beta_5. \end{aligned}$$

Wenn wir nun zwischen den ersten vier der Gleichungen 301) die beiden Coefficienten α_2 und α_3 eliminiren und in die beiden letzten die eben für γ_2 und γ_3 gefundenen Werte einsetzen, sowie berücksichtigen, dass β_1 bekannt ist, so erhalten wir vier Gleichungen von der folgenden Form:

$$\begin{aligned} 303) \quad a_1\beta_2 &= a_2 + a_3\beta_4 \\ b_1\beta_4 &= b_2 + b_3\beta_2 \\ a'_1\beta_3 &= a'_2 + a'_3\beta_5 \\ b'_1\beta_5 &= b'_2 + b'_3\beta_3. \end{aligned}$$

In denselben sind nur die vier β -Coefficienten unbekannt. Die Bezeichnungen a_1, b_1 u. s. w. für die numerisch bekannten Faktoren will ich hier nur ganz vorübergehend gebrauchen; es ist zu bemerken, dass einige von ihnen von der Grösse δ_1 abhängen, also nicht endgiltig berechnet werden können, ehe dieselbe bekannt ist. Es wird sich darum empfehlen, auch hier, wie bei β_1 eine kleine Tafel zu berechnen, die die β -Coefficienten für verschiedene Werte von δ_1 giebt. Aus derselben wird man später nicht nur die richtigen Werte der β entnehmen können, sondern man wird auch eine Uebersicht haben, wie dieselben sich mit δ_1 ändern, also ihren Verlauf ähnlich studiren können, wie wir es mit β_1 mit Hilfe der Tafel auf pag. 128 gethan haben.

Sobald die β gefunden sind, lassen sich auch α_2 und α_3 nach 300a) sowie die γ berechnen; die letzteren zunächst wenigstens genähert.

4. Es bleibt nun noch die Funktion (ϱ) zu bestimmen und hierzu müssen wir auf die Gleichung 299) zurückgreifen. Wir haben:

$$(\varrho) = g_1 \sin v - g_2 \cos v,$$

wenn wir in g_1 und g_2 nur diejenigen Glieder aufnehmen, welche zu Gliedern der Form B führen.

Ich bezeichne der Kürze wegen in 299):

$$\begin{aligned}
 304) \quad b_1 &= b_{0.1.0}^{(+1)} + \frac{\mu b_{2.0.0}}{\delta_1} \gamma_2 & b_3 &= b_{0.1.0}^{(+1)} + \frac{\mu b_{2.0.0}}{2 + \delta_1} \gamma_2 \\
 b_2 &= b_{0.0.1}^{(+1)} + \frac{\mu b_{2.0.0}}{\delta_1} \gamma_3 & b_4 &= b_{0.0.1}^{(+1)} + \frac{\mu b_{2.0.0}}{2 + \delta_1} \gamma_3,
 \end{aligned}$$

und diese Coefficienten sind bekannt. Wir haben dann zu setzen:

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \frac{b_1}{2} \int \eta \cos \Pi dv + \frac{b_2}{2} \int \eta' \cos \Pi_1 dv + \frac{b_3}{2} \int \eta \cos (2v - \Pi) dv + \frac{b_4}{2} \int \eta' \cos (2v - \Pi_1) dv \\
 g_2 &= \frac{b_1}{2} \int \eta \sin \Pi dv + \frac{b_2}{2} \int \eta' \sin \Pi_1 dv + \frac{b_3}{2} \int \eta \sin (2v - \Pi) dv + \frac{b_4}{2} \int \eta' \sin (2v - \Pi_1) dv.
 \end{aligned}$$

Der Integration dieser Ausdrücke stellen sich keine Schwierigkeiten entgegen, wenn man die Relationen 10) und 154b), sowie die daraus folgenden:

$$\begin{aligned}
 \eta \frac{\cos}{\sin} (2v - \Pi) &= \kappa \frac{\cos}{\sin} (2v - \omega) + \sum \kappa_n \frac{\cos}{\sin} (2v - \omega_n) \\
 \eta' \frac{\cos}{\sin} (2v - \Pi_1) &= \sum \kappa'_n \frac{\cos}{\sin} (2v - \omega_n)
 \end{aligned}$$

bedenkt. Es ist:

$$\begin{aligned}
 \int \eta \frac{\cos}{\sin} \Pi dv &= \pm \frac{\kappa}{\varsigma} \frac{\sin}{\cos} \omega \pm \sum \frac{\kappa_n}{\varsigma_n} \frac{\sin}{\cos} \omega_n \\
 \int \eta \frac{\cos}{\sin} (2v - \Pi) dv &= \pm \frac{\kappa}{2 - \varsigma} \frac{\sin}{\cos} (2v - \omega) \pm \sum \frac{\kappa_n}{2 - \varsigma_n} \frac{\sin}{\cos} (2v - \omega_n) \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

und hiernach erhalten wir für (ϱ) den Ausdruck:

$$305) \quad (\varrho) = \frac{\kappa}{2} \left[\frac{b_1}{\varsigma} + \frac{b_3}{2 - \varsigma} \right] \cos (v - \omega) + \sum \left\{ \frac{\kappa_n}{2} \left[\frac{b_1}{\varsigma_n} + \frac{b_3}{2 - \varsigma_n} \right] + \frac{\kappa'_n}{2} \left[\frac{b_2}{\varsigma_n} + \frac{b_4}{2 - \varsigma_n} \right] \right\} \cos (v - \omega_n),$$

und da derselbe mit dem folgenden identisch sein soll:

$$(\varrho) = \kappa \cos (v - \omega) + \sum \kappa_n \cos (v - \omega_n),$$

so erhält man zur Bestimmung von ς die folgende Gleichung:

$$305a) \quad 2\varsigma = b_1 + \frac{\varsigma b_3}{2 - \varsigma},$$

und zur Bestimmung der α_n die folgenden:

$$305b) \quad \left[2s_n - b_1 - \frac{s_n b_3}{2 - s_n} \right] \alpha_n = \left[b_2 + \frac{s_n b_4}{2 - s_n} \right] \alpha'_n.$$

Man kann indessen wohl stets mit ausreichender Genauigkeit setzen:

$$s = \frac{b_1}{2}$$

$$\alpha_n = \frac{b_2 \alpha'_n}{2(s_n - s)}.$$

Nichts hindert übrigens, die Gleichungen 305a) und 305b) numerisch so streng zu lösen, wie man will.

5. Zuletzt ist die Funktion W_1 resp. ihre Teile K_1 und V_1 zu bestimmen, denn durch die Werte der γ , die wir im Vorigen abgeleitet haben, ist sie nur genähert bekannt.

Ich will indessen darauf hier nicht näher eingehen, da die Operationen den Vorigen ganz analog sind und da Herr Ludendorff in seiner genannten Dissertation die betreffenden Entwicklungen giebt. Man hat erstens alle Glieder mitzunehmen, welche bereits auf der rechten Seite der Gleichung 185) einen merklichen Betrag haben, und zweitens die der Form C, da die letzteren durch die Integration der genannten Gleichung vergrößert werden. Der grösste Teil von W_1 wird offenbar der folgende sein:

$$306) \quad \text{pars } W_1 = \text{pars } V_1 = \frac{\gamma_2}{\delta_1} \eta \sin(2w - v) + \frac{\gamma_3}{\delta_1} \eta' \sin(2w - v_1).$$

6. Nachdem die charakteristischen und die elementaren Glieder bestimmt sind, lassen sich die gewöhnlichen Glieder ohne Weiteres nach den Formeln des vorigen Kapitels berechnen, und zwar wenn man will, gleich mit Berücksichtigung derjenigen Glieder zweiter Ordnung, welche nicht rein zweiter Ordnung sind.

7. Auch die Bestimmung der Funktion \mathfrak{z} kann ich übergehen; der charakteristische Teil derselben stellt sich in der Form

$$307) \quad \text{pars } \mathfrak{z}_1 = \xi_4 \sin j \sin(4w - v) + \xi_5 \sin j' \sin(4w - v_1)$$

dar; denn \mathfrak{z} enthält keine merklichen Glieder der Form C und überhaupt keine Glieder nullten Grades; allerdings sind noch die Glieder hinzuzufügen, welche die Differentialquotienten $\frac{d \sin j \cos \sigma}{dv}$, $\frac{d \sin j \sin \sigma}{dv}$ u. s. w. enthalten.

8. Die Planeten vom Hilda- und Thuletypus werden sich in derselben Weise behandeln lassen, wie die vom Hecubatypus und ich brauche auf sie hier nicht einzugehen. Ueber den Planeten Hilda habe ich einige Rechnungen angestellt; die Zunahme der A - und der B -Coefficienten mit der Ordnung der Glieder ist hier schon merklich stark, und sie wird bei denen vom Thuletypus noch erheblich stärker sein; es scheint, dass bei diesen Planeten die Lücken in den Werten von n_1 bei $450''$ und bei $400''$ sehr gross sind, sobald die Excentricitätsmoduln einigermaassen merkliche Werte haben, so dass δ_1 hier beträchtlich grösser bleibe als beim Hecubatypus. Dagegen scheint es, als ob die osculirende elliptische mittlere Bewegung sich sehr der strengen Commensurabilität nähern, vielleicht sogar durch sie hindurchgehen kann.

9. Es bliebe nun noch von den charakteristischen Planeten der zweiten Klasse zu sprechen. Für diejenigen vom Hestiatypus (μ nahe gleich $\frac{1}{3}$) habe ich die nötigen Ableitungen in meiner pag. 7 citirten Abhandlung gegeben; die Bezeichnungen sind dort von den oben gebrauchten allerdings etwas verschieden. Die Glieder der Form D haben hier die Argumente

$$3w - v \quad \text{und} \quad 3w - v_1,$$

und Glieder der Form C kommen unter denen ersten Grades nicht vor, wodurch die Entwicklungen erheblich einfacher werden, als bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse. Da die Funktion V nur Glieder der Formen A oder C enthält, so ist also hier $V_1 = 0$. Ferner sind S_1 , R_0 und W_0 rein erster Ordnung. Man würde also den Ansatz für den wichtigsten Teil der Funktion R_1 , wie folgt, zu machen haben

$$308) \quad \text{pars } R_1 = \beta_1 \eta \cos(3w - v) + \beta_2 \eta' \cos(3w - v_1),$$

und für die Funktionen W_1 und K_1

$$308a) \quad \text{pars } W_1 = \text{pars } K_1 = \gamma_1 \eta \sin(3w - v) + \gamma_2 \eta' \sin(3w - v_1).$$

Für die Coefficienten γ_1 und γ_2 hat man:

$$308b) \quad \gamma_1 = -2\beta_1 \quad \gamma_2 = -2\beta_2.$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke ist man im Stande, die rechten Seiten der Gleichungen 183) bis 185) mit Berücksichtigung der wichtigen Glieder zweiter Ordnung zu ermitteln, indem man ähnlich verfährt wie oben. Die Coefficienten β_1 und β_2 bleiben zunächst unbekannt, bestimmen sich aber sehr bald durch sehr einfache Gleichungen. Auch auf diese Planeten brauche ich hier nicht des Näheren einzugehen, da unsere am vorigen Beispiel gezeigte Integrationsmethode allgemein giltig ist.

§ 3.

Die Glieder zweiten Grades.

1. Bei der Integration der Glieder zweiten Grades haben wir zu bemerken, dass hier die Glieder der Form A zum ersten Mal auftreten. Wir werden dieselben jedoch, gerade wie bei den gewöhnlichen Planeten, von den übrigen Gliedern trennen und gesondert berechnen. Es lassen sich dann die charakteristischen wie die gewöhnlichen Glieder nach ganz denselben Methoden herstellen, die ich im Vorigen angewandt habe; es werden selbstverständlich die Entwicklungen hier umfangreicher. Für die Planeten der ersten Klasse verweise ich zunächst auf die pag. 117 citirte Abhandlung des Herrn Ludendorff, und für die der zweiten Klasse auf die pag. 7 citirte schwedische von mir.

Nur über die Glieder der Form A will ich einige Bemerkungen machen; diese Glieder sind bei den charakteristischen Planeten wesentlich grösser als bei den gewöhnlichen und können hier nicht immer vernachlässigt werden. Die Methode zu ihrer Ermittlung ist dieselbe wie im vorigen Kapitel. Es ist zunächst die Gleichung 183) mit alleiniger Berücksichtigung dieser Glieder aufzustellen:

$$309) \quad T_a \left(\frac{dS}{dv} \right)_2 = -T_a \{ Q_2 + 3S_0 Q_2 + 3S_2 Q_0 + 3S_1 Q_1 \} - \frac{1 + S_{0.0.0}}{2} \frac{d\eta^2}{dv}.$$

Schon bei der Besprechung der gewöhnlichen Planeten ist gezeigt worden, dass die Glieder erster Ordnung auf der rechten Seite dieser Gleichung sich anheben. Wir müssen auch hier $\frac{d\eta^2}{dv}$ ersetzen durch einen Ausdruck, der auf dieselbe Weise herzuleiten ist, wie 247); nur wird man bei den charakteristischen Planeten Glieder mitzunehmen haben, welche dort vernachlässigt worden sind.

Wenn man in W_2 alle elementaren Glieder erhalten will, so muss man in $\frac{dS}{dv}$ alle Glieder rein zweiter Ordnung der Form A berücksichtigen, wie schon oben bemerkt wurde. Die Zahl derselben ist aber auch hier unendlich und ihre Berechnung bis zu einer gewissen Genauigkeitsgrenze ist äusserst umständlich, wenn sich ihr auch keine principiellen Schwierigkeiten in den Weg stellen. Nun aber sind diese Glieder der Form A, welche in $\frac{dW}{dv}$ rein erster Ordnung sind, in W auch bei den charakteristischen Planeten so klein, dass man sie gänzlich fortlassen kann. Das Hauptaugenmerk bei Aufstellung der Gleichung 309) hat man also auf diejenigen Glieder zu richten, welche zweiter (und höherer) Ordnung, aber rein nur erster Ordnung sind.

Ich will mit m eine Grösse bezeichnen, welche ihrem Betrage nach direkt mit der störenden Masse zu vergleichen ist. Ausserdem will ich mit k eine Grösse bezeichnen, die mit den Coefficienten β resp. γ an Grösse verglichen werden kann, die also erster Ordnung ist, aber den kleinen Divisor δ_1 enthält. Es

werden demnach die Glieder von den Ordnungen mk und mk^2 sein, die man bei der Aufstellung der Gleichung 309) zu berücksichtigen hat. Da also die rechte Seite dieser Gleichung Glieder der Ordnung mk enthält, so könnte man daraus schliessen, dass die Funktion S Glieder der Ordnung k enthielte, die dann in W und V von der Ordnung $\frac{k}{m} = \frac{1}{\delta_1}$ würden.

2. Ich habe bei Gelegenheit der Berechnung des Planeten Hestia sehr eingehende Untersuchungen über diese Glieder gemacht und gefunden, dass sich bei den Planeten vom Hestiatypus die Glieder von der Ordnung mk im Ausdruck von $\frac{dT_a S_2}{dv}$ in ähnlicher Weise gegenseitig aufheben, wie die Glieder erster Ordnung, so dass die rechte Seite der Gleichung 309) in der That nur von der Grössenordnung mk^2 ist, wenn ich absehe von den Gliedern rein zweiter Ordnung, die unerheblich sind, wie oben bemerkt. Für die Planeten vom Hestiatypus gilt die Relation

$$309a) \quad T_a \left(\frac{dS}{dv} \right)_2 = 2\beta_1 \beta_2 \frac{d\eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1)}{dv},$$

die ich hier ohne Beweis anführe, und wo β_1 und β_2 die durch die Gleichung 308) definirten Coefficienten sind. Der vorige Ausdruck kann im Allgemeinen nicht ohne Weiteres integrirt werden, da $\left(\frac{dS}{dv} \right)_2$ nicht gleich $\frac{dS_2}{dv}$ ist wegen des Vorkommens der Funktion V in den Argumenten. Man hat streng genommen

$$\left(\frac{dS}{dv} \right)_2 = \left(\frac{dS_0}{dv} \right)_2 + \left(\frac{dS_1}{dv} \right)_2 + \left(\frac{dS_2}{dv} \right)_2.$$

Für die charakteristischen Planeten der zweiten Klasse ist aber die Funktion V zweiten Grades und infolgedessen $\left(\frac{dS_1}{dv} \right)_2$ gleich Null und $\left(\frac{dS_0}{dv} \right)_2$ enthält keine Glieder der Form A , so dass also:

$$\frac{dT_a S_2}{dv} = T_a \left(\frac{dS}{dv} \right)_2,$$

und

$$310) \quad T_a S_2 = 2\beta_1 \beta_2 \eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1).$$

Weiter habe ich für $T_a R_2$ den Ausdruck hergeleitet:

$$310a) \quad T_a R_2 = \beta_1^2 \eta^3 + 6\beta_1 \beta_2 \eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1) + \beta_2^2 \eta'^2,$$

wo, übereinstimmend mit dem Vorigen, die Glieder rein erster Ordnung fortge-

lassen sind. Endlich folgt:

$$310b) \quad \frac{dT_a W_2}{dv} = T_2 \left(\frac{dW}{dv} \right)_2 = \frac{3}{2} \beta_1^2 \eta^2 - 3\beta_1 \beta_2 \eta \eta' \cos(\Pi - \Pi_1) + \frac{3}{2} \beta_2^2 \eta'^2.$$

Die Integration dieses Ausdrucks geschieht nach den Formeln 255); der numerische Betrag von $T_a W_2$ kann hiernach immerhin ein recht beträchtlicher sein; die Rechnung für Hestia hat gezeigt, dass er die grössten überhaupt vorkommenden Störungsglieder enthält; da sie indessen von sehr langer Periode sind, so sind sie von geringerer Bedeutung, was sich am besten übersehen lässt, wenn man sie in secularer Form darstellt (vgl. Kapitel VIII und pag. 85).

3. Für die Planeten vom Hecubatypus ist Herr Ludendorff (vgl. pag. 117) zu sehr interessanten Resultaten gelangt, die mit den eben besprochenen in Uebereinstimmung sind. Bei diesen Planeten treten auf der rechten Seite der Gleichung 309) ebenfalls Glieder der Ordnungen mk , mk^2 u. s. w. auf; es ist aber hier nicht, wie oben $\frac{dT_a S_2}{dv} = T_a \left(\frac{dS}{dv} \right)_2$ zu setzen. Vielmehr hat man

$$\frac{dT_a S_2}{dv} = T_a \frac{dS_2}{dv} = T_a \left\{ \left(\frac{dS}{dv} \right)_2 - \left(\frac{dS_0}{dv} \right)_2 - \left(\frac{dS_1}{dv} \right)_2 \right\}.$$

$\left(\frac{dS_0}{dv} \right)_2$ enthält auch hier keine Glieder der Form A, aber $\left(\frac{dS_1}{dv} \right)_2$ enthält solche und zwar von der Ordnung k^2 . Demnach würde die Funktion $T_a S_2$ Glieder der Ordnungen $\frac{k^2}{m}$, $\frac{k^3}{m}$, $\frac{k^5}{m^2}$, k , k^2 u. s. w. enthalten. Herr Ludendorff hat nun bewiesen, dass sich die Glieder der Ordnungen $\frac{k^2}{m}$ und k gänzlich, sowie die der Ordnungen $\frac{k^3}{m}$ und $\frac{k^5}{m^2}$ mit gewissen Modifikationen gegenseitig aufheben. Es steht darum zu vermuten, dass auch bei den charakteristischen Planeten der ersten Klasse die Funktion S von der Ordnung k^2 ist, wenn auch der Beweis hierfür noch nicht in aller Vollständigkeit gegeben ist.

Die grössten Glieder der Form A, welche in W_2 auftreten können, hat Herr Ludendorff in seiner Abhandlung pag. 34 gegeben; dieselben können eine gewisse obere Grenze nicht überschreiten, da δ_1 , das eigentlich an Stelle von δ in den Ausdrücken Herrn Ludendorffs stehen muss, nicht beliebig klein werden kann.

§ 4.

Die Glieder höheren als zweiten Grades und allgemeine Bemerkungen über die charakteristischen Planeten.

1. Bei den gewöhnlichen Planeten war gezeigt worden, dass die Mitnahme des einen oder des anderen Gliedes dritten Grades nur in Ausnahmefällen ge-

boten ist. Handelt es sich jedoch um charakteristische Planeten, so kann die Mitnahme solcher Glieder ernstlich in Frage kommen und namentlich bei den kritischen Planeten ist sie geboten, wenn man Resultate von ausreichender Genauigkeit erhalten will. Es handelt sich dabei nicht um die Glieder höheren als zweiten Grades in der Entwicklung der Störungsfunktion, d. h. in den Ausdrücken für Q , P und Z , welche wir oben vernachlässigt haben; denn die A -, B - und C -Coefficienten, welche dort vorkommen, sind sämtlich rein erster Ordnung. Die Glieder in diesen Ausdrücken fallen bei den charakteristischen Planeten durchaus in ähnlicher Weise wie bei den gewöhnlichen und zwar nach den Potenzen der Excentricitäts- und Neigungsmoduln.

Die Formeln 190), 201) u. s. w. zeigen aber, dass bei Integration eines Gliedes n -ten Grades auch Glieder von höherem als n -ten Grade entstehen, da die Funktion V in den Argumenten vorkommt, worauf wir oben schon Rücksicht genommen haben. Es wird sich zeigen, dass bei den kritischen Planeten solche Glieder höheren Grades mitzunehmen sind, welche aus den mit $\frac{dV}{dv}$ multiplicirten Gliedern in den genannten Formeln entstehen.

Nehmen wir z. B. die Formel 190), welche bei Integration der Glieder nullten Grades in S und W anzuwenden ist:

$$\int \frac{\sin}{\cos} nw dv = \mp \frac{1}{n(1-\mu_1)} \cos nw + \frac{\mu}{1-\mu_1} \int \frac{dV}{dv} \frac{\sin}{\cos} nw dv.$$

Die aus dem zweiten Glied rechter Hand entstehenden Glieder will ich nach Gylden's Vorgang „exargumentale Glieder“ nennen; man erhält sie, indem man für $\frac{dV}{dv}$ seinen Wert einsetzt; da die Funktion V bei uns nur langperiodische Glieder der Formen A und C enthält, so erzeugt ihr Produkt mit gewöhnlichen Gliedern nur wieder gewöhnliche Glieder; und diese erzeugen ihrerseits bei ihrer Integration wieder neue exargumentale Glieder, so dass man eine Reihe erhält, welche einmal nach positiven Potenzen von $\frac{dV}{dv}$ und ausserdem nach negativen Potenzen des zu dem Gliede gehörigen Divisors fortschreitet. Wir wollen uns dieses Verhältniss klar machen, indem wir annehmen, die Integration

$$311) \quad \int \frac{\sin}{\cos} (\lambda_n v - nV) dv$$

sei auszuführen. Die Reihe der exargumentalen Glieder schreitet dann fort nach positiven Potenzen von $n \frac{dV}{dv}$ und nach negativen von λ_n (oder wenigstens von Grössen, die sich von λ_n nur um Grössen der Ordnung δ_1 unterscheiden). Auch die Faktoren von v in den exargumentalen Gliedern können sich von λ_n nur um Grössen dieser Ordnung unterscheiden. Ist also das Glied 311) ein ge-

wöhnliches, so sind die zugehörigen exargumentalen Glieder auch gewöhnliche, und die Reihe schreitet nach Potenzen von $\frac{dV}{dv}$ fort, fällt also in derselben Weise, wie die nach Potenzen von R oder S fortschreitenden Reihen; da aber V mindestens ersten Grades ist, so fallen diese exargumentalen Glieder auch noch nach den Potenzen der Excentricitätsmoduln; man wird übereinstimmend mit dem Vorigen auch hier die Glieder dritten Grades vernachlässigen.

Ist das Glied 311) ein elementares, so ist der Faktor n von V stets gleich Null; es treten dann überhaupt keine exargumentalen Glieder auf; darum ist auch z. B. stets

$$\frac{dT_a S_n}{dv} = \left(\frac{dT_a S}{dv} \right)_n.$$

Wir müssen aber den Fall besonders beachten, in dem das Glied 311) von der Form C also charakteristisch ist, denn um ihn dreht sich in erster Linie die Frage nach der Brauchbarkeit unserer Methode. Die Reihe der exargumentalen Glieder schreitet hier nach Potenzen der Grösse $\frac{1}{\delta_1} \frac{dV}{dv}$ fort und es fragt sich, ob δ_1 klein genug werden kann, um diese Reihe zur Divergenz zu bringen. Ich habe bereits in den Astronomischen Nachrichten No. 3346 gezeigt, dass dies nicht der Fall ist, will aber hier diese Frage etwas specialisiren und mich zunächst wieder an die Planeten vom Hecubatypus halten. Wir hatten oben die Gleichung

$$\left(\frac{dV}{dv} \right)_* = \gamma_2 \eta \cos(2w - v) + \gamma_3 \eta' \cos(2w - v_1)$$

abgeleitet und die Coefficienten γ_2 und γ_3 von der Ordnung k d. h. $\frac{m}{\delta_1}$ gefunden. Wir nehmen zunächst an, dass δ_1 nicht sehr klein ist, so werden die besprochenen Reihen, welche nach Potenzen von Grössen der Ordnung $\frac{m}{\delta_1} \kappa_n$ fortschreiten, offenbar stark genug fallen. Lassen wir δ_1 aber abnehmen bis zu einem Wert von der Ordnung

$$\sqrt{m},$$

so wird die Reihe weniger stark fallen, für diesen Wert von δ_1 aber immer noch ebenso stark, wie eine Reihe, welche nach den Potenzen der κ_n fortschreitet, also im Wesentlichen ebenso wie die Entwicklung der Störungsfunktion. In diesem Falle bietet die Integration keine Schwierigkeiten und man wird die Glieder dritten Grades im Allgemeinen fortlassen.

2. Anders stellt sich die Sache, wenn δ_1 kleiner wird als eine Grösse von der Ordnung \sqrt{m} ; dann fällt die Reihe schwächer, und man ist gezwungen, die

exargumentalen (und nur diese) Glieder höheren als zweiten Grades mitzunehmen, so weit wie es ihre numerischen Beträge erfordern. Die Planeten, welche unter die letztere Klasse fallen, sind es, welche ich kritische nenne. Es ist noch die Frage, ob es überhaupt solche in unserem Sonnensysteme giebt; vielleicht gehören Hilda und Ismene zu ihnen. Indessen kann δ_1 niemals so klein werden, dass unser Verfahren unbrauchbar wird, was ich jetzt zeigen will.

Dieser Beweis ist in ganz analoger Weise zu führen, wie ich ihn für die Glieder nullten Grades bereits gegeben habe. Greifen wir zurück zur Gleichung 262), indem wir uns dort sämtliche Glieder der höheren Ordnungen hingeschrieben denken, soweit sie nicht rein zweiter Ordnung sind:

$$\text{pars} \left(\frac{d^2 R}{dv^2} + R \right)_0 = (p_1 + p'_1 \beta_1 + p''_1 \beta_1^2 + \dots) \cos 2w.$$

Die Convergenz der Reihe rechter Hand wurde pag. 132 bewiesen. Integriren wir die vorige Gleichung, so wird der Teil des Integrals, welcher nullten Grades ist,

$$\text{pars } R_0 = \beta_1 \cos 2w.$$

Ausserdem treten aber exargumentale Glieder auf, welche von den Formen D und B sind; die der Form B führen wir zu (ϱ) hinüber, so dass der betreffende Teil von R durch eine Reihe der Form

$$312) \quad \text{pars } R = \sum_1^{\infty} \frac{a_n m^n}{\delta_1^{2n-1}} \kappa^{n-1} \cos [(1 - \delta_n) v + D_n]$$

sich darstellt, wo die a_n Coefficienten bedeuten, welche von der Ordnung Eins sind, wenn sie sich auch von der Einheit numerisch erheblich unterscheiden können. Streng genommen fallen sie nach Potenzen des Verhältnisses $\alpha = \frac{a}{a'}$; diese Abnahme ist jedoch vollkommen illusorisch, da sehr grosse Zahlenfaktoren hinzutreten. κ soll eine Grösse von der Ordnung der Excentricitätsmoduln bezeichnen, und die δ_n sind Grössen von der Ordnung δ_1 resp. δ_2 .

Wenn wir nun in ähnlicher Weise die charakteristischen Glieder ersten Grades in der Gleichung 184), also den Ausdruck $\left(\frac{d^2 R}{dv^2} + R \right)_1$ integriren, so erhalten wir den hieraus entspringenden Teil von R in der Form:

$$312a) \quad \text{pars } R = \sum_1^{\infty} \frac{a'_n m^n}{\delta_1^{2n-1}} \kappa^n \cos [(1 - \delta'_n) v + D'_n],$$

wo ich a'_n und δ'_n schreibe, da diese Grössen mit den in 312) figurirenden nicht identisch sind; indessen sind sie von derselben Ordnung.

Wenn wir ebenso mit den Gliedern zweiten und höheren Grades verfahren, so erhalten wir ähnliche Gleichungen und wenn man dieselben alle zusammenfasst, so stellt sich der Teil von R , welcher r -ten Grades ist, durch die Reihe

$$313) \quad R_r = \sum_{n=1}^{n=r+1} \frac{a_n m^n}{\delta_1^{2n-1}} \kappa^r \cos [(1 - \delta_n) v - D_n]$$

dar, welche Gleichung mit der allgemeineren Gleichung 21) in den Astronomischen Nachrichten 3346 verglichen werden kann. Da wir hier nur von den kritischen Planeten handeln wollen, also δ_1 seiner Grössenordnung nach kleiner als \sqrt{m} annehmen wollen, so werden die Glieder der Reihe 313) *anwachsen*; da die Reihe aber *endlich* ist, so kommt ihre Convergenz überhaupt nicht in Frage, ihr letztes Glied ist das grösste, und damit rechtfertigt sich das Fortlassen der Glieder höherer Grade in der Entwicklung der Störungsfunktion gegen die entsprechenden exargumentalen.

Wenn wir das eben Gesagte bedenken, so können wir für den absoluten Betrag von R , allerdings nur mit Berücksichtigung der grössten Glieder, wie folgt, schreiben:

$$314) \quad \text{pars} |R| = \sum_1^{\infty} \frac{b_n m^n}{\delta_1^{2n-1}} \kappa^{n-1}.$$

Es sind dies dieselben Glieder, die in 312) auftreten, indessen müssen sie hier sämmtlich positiv genommen werden, so dass die b_n positive Constanten von der Ordnung Eins sind. Die Convergenz der Reihe 314) ist zu untersuchen.

Hierzu wollen wir die Relation zwischen δ_1 und δ entwickeln, d. h. die Relation 265):

$$\delta_1 = \delta - 2\mu\gamma.$$

γ ist der constante Teil der Funktion $\frac{dW}{dv}$ soweit er nicht rein erster Ordnung ist. Der Hauptteil von γ entsteht also aus dem Gliede $3R^2$ in der Gleichung 185), und man findet demnach, wenn man die Reihe 314) bedenkt, für γ im Wesentlichen eine Reihe folgender Art:

$$315) \quad \gamma = \sum_1^{\infty} \frac{c_n m^{2n}}{\delta_1^{4n-2}} \kappa^{2n-2},$$

wonach

$$315a) \quad \delta_1 = \delta - 2\mu \sum \frac{c_n m^{2n}}{\delta_1^{4n-2}} \kappa^{2n-2}.$$

Diese beiden Gleichungen sind wieder ein Specialfall der Gleichungen 26) und 27) in den Astronomischen Nachrichten No. 3346; die c_n sind Grössen von derselben Ordnung wie die a_n und b_n , aber stets positiv.

Aus der Gleichung 315a) folgt aber für jeden beliebigen Wert von δ , die Null eingeschlossen, ein solcher Wert von δ_1^3 , für den alle hier angeführten Reihen, also auch 314) und 312) unbedingt convergiren, und man sieht unmittelbar, dass δ_1 nicht beliebig klein werden kann, dass sich also im Systeme der kleinen Planeten Lücken zeigen müssen, die sich um die Commensurabilitätsstellen gruppieren.

Hiermit ist die Brauchbarkeit unserer Integrationsmethode bewiesen für jeden möglichen Wert der mittleren Bewegung, natürlich unter der Voraussetzung der in der Einleitung hervorgehobenen Bedingungen. Wie stark die numerische Convergenz der ersten Glieder der Reihe (312) und der analogen ist, lässt sich freilich nicht ohne Weiteres sagen; es scheint, als ob es kritische Planeten geben könnte, für welche sie ziemlich weit fortgesetzt werden müssen. Man kann übrigens aus dem Vorhergehenden schliessen, dass für die charakteristischen Planeten der ersten Klasse δ_1 jedenfalls nicht unter die Grenze $\sqrt{m\alpha}$ sinken kann.

Achstes Kapitel.

Ueber die bei den Rechnungen zu beobachtende Genauigkeit und über die Bedeutung der elementaren Glieder für die Praxis, sowie über ihre Darstellung in secularer Form.

1. Wir wollen uns jetzt Rechenschaft darüber geben, bis zu welchem Betrage wir Störungsglieder vernachlässigen können, wenn wir die Coordinaten des gestörten Körpers innerhalb der gewünschten Genauigkeitsgrenze darstellen wollen. Sei ε' eine kleine Grösse, welche die ungefähre obere Grenze bedeuten soll, bis zu welcher Fehler in der Darstellung der geocentrischen Coordinaten gestattet sein sollen, so haben wir die Bedingungen

$$\cos \delta d\alpha < \varepsilon', \quad d\delta < \varepsilon'$$

zu erfüllen, wo α und δ die geocentrische Rectascension und Declination bezeichnen und unter $d\alpha$ und $d\delta$ natürlich die absoluten Beträge dieser Grössen zu verstehen sind. Da nun aber

$$\begin{aligned} \cos \delta \frac{\partial \alpha}{\partial r} &\leq \frac{1}{A}, & \cos \delta \frac{\partial \alpha}{\partial v} &\leq \frac{r}{A}, & \cos \delta \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} &< \frac{r}{A}, \\ \frac{\partial \delta}{\partial r} &< \frac{1}{A}, & \frac{\partial \delta}{\partial v} &< \frac{r}{A}, & \frac{\partial \delta}{\partial \beta} &\leq \frac{r}{A}, \end{aligned}$$

wo r , v und β , wie im Vorigen, Radiusvektor, Länge in der Bahn und Sinus der Breite des Planeten, sowie A sein Abstand von der Erde ist; und da ferner mit Vernachlässigung der Excentricität (Gleichung 2)

$$d\rho = \frac{dr}{r},$$

so erhalten wir die Bedingungen

$$\frac{r}{\Delta} d\rho < \varepsilon', \quad \frac{r}{\Delta} dv < \varepsilon', \quad \frac{r}{\Delta} d\zeta < \varepsilon'.$$

Indem wir wieder die Excentricitäten vernachlässigen, können wir a für r setzen und als Minimum von Δ den Wert $a-1$ annehmen. Bezeichnet dann ε den Betrag, bis zu welchem die Funktionen ρ , v (also auch W) und ζ von ihren wahren Werten abweichen resp. abweichen dürfen, so ist

$$\varepsilon = \frac{a-1}{a} \varepsilon'.$$

In der folgenden kleinen Tabelle gebe ich für n und a als Argumente den Wert von $\frac{a-1}{a}$, sowie den Betrag von ε in Bogenmaass und von $\log \varepsilon$ in absolutem Maass, wenn ε' gleich einer Bogenminute angenommen wird:

Tabelle III.

n	$\log a$	$\log \frac{a-1}{a}$	für $\varepsilon' = 1'$	
			$\log \varepsilon$	ε
400"	0.632	9.88	6.34	45"
600"	0.515	9.84	6.30	41"
800"	0.431	9.80	6.26	37"
1000"	0.367	9.76	6.22	34"
1200"	0.314	9.72	6.18	31"

Den Werten der dritten und vierten Columne ist selbstverständlich -10 hinzuzufügen.

Diese Tafel ist sehr lehrreich: sie zeigt namentlich, dass die absolute Bahn, welche von der wahren nur um Beträge von der störenden Masse abweicht, nicht ausreichend ist, um die Coordinaten der Planeten innerhalb einer Bogenminute darzustellen. Dies ist der Grund, warum ich auf die Entwicklungen des sechsten Kapitels für die gewöhnlichen Glieder einen gewissen Wert gelegt habe. Es wird sich gleich zeigen, dass ihre Berücksichtigung in praktischer Hinsicht wichtiger ist als die der elementaren Glieder.

Wenn wir in den Funktionen ρ , W und ζ alle Störungsglieder fortlassen, deren absoluter Betrag kleiner als ε ist, so können wir natürlich nicht erwarten, dass die Fehler $d\rho$, dv und $d\zeta$ auch unterhalb dieser Grösse bleiben. Es lässt sich überhaupt nicht leicht ein Schluss ziehen, bis zu welcher Grösse man Störungsglieder fortlassen kann, wenn man ε' einen gewissen Betrag erteilt; denn es wären noch weitere Untersuchungen nötig, um festzustellen, welchen Betrag

die Summe der fortgelassenen Glieder erreichen kann. Wir werden uns damit begnügen, eine gewisse Grenze für die Grösse der fortzulassenden Störungsglieder anzunehmen, welche ein gewisser Bruchteil von ε und willkürlich zu wählen ist. Wenn man die Störungsglieder fortlässt, welche kleiner als etwa $\frac{\varepsilon}{3}$ sind, so wird man erwarten dürfen, dass ε die in obiger Tabelle gegebenen Werte nicht erheblich übersteigen wird, und also die Coordinaten im Allgemeinen bis auf die gewünschte Genauigkeit von 1' dargestellt sein werden; natürlich vorausgesetzt, dass die Bahnelemente genau genug bekannt sind; diese müssen wir eben dementsprechend bestimmen.

Es wird im Allgemeinen keine Schwierigkeit machen, die gewöhnlichen Glieder innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenze zu berechnen, und es wird auch gerechtfertigt sein, wenn wir die Saturnstörungen bei Seite lassen, da sie in der Regel unterhalb dieser Grenze liegen.

2. Indessen würde die Auswertung der elementaren Glieder mit der gleichen Schärfe so gut wie unausführbar sein, und es würde auch den Zwecken der praktischen Rechnung durchaus nicht entsprechen, wenn man sie, absolut genommen, ebenso genau berechnen wollte, wie die gewöhnlichen; denn sie ändern ihre Werte mit der Zeit so langsam, dass sie zum grössten Teile mit den Integrationsconstanten vereinigt, d. h. bei der Rechnung fortgelassen werden können.

Betrachten wir zunächst die elementaren Glieder in der Funktion ϱ , und nehmen wir an:

$$316) (\varrho) = \kappa_a \cos[(1-g)v - \Gamma_a] + \sum \kappa_n \cos[(1-g_n)v - \Gamma_n] + \sum \kappa_r \cos[(1-g_r)v - \Gamma_r]$$

sei der strenge¹⁾ Ausdruck von (ϱ) , sowie κ_a und Γ_a die wahren Werte der beiden Integrationsconstanten, also dieselben Grössen, welche Gylden „absolute Elemente“ nennt. Die κ_n seien diejenigen der κ -Coefficienten, welche bei der Störungsrechnung berücksichtigt worden sind resp. berücksichtigt werden müssen und die κ_r diejenigen, welche vernachlässigt werden können. Wir wollen sehen, wie gross die κ_r sein dürfen. Wenn man die letzteren bei Seite lässt und die Resultate der Rechnung mit den Beobachtungen vergleicht, so wird man bei der Elementenbestimmung offenbar nicht die wahren Werte von κ_a und Γ_a finden; ich will vielmehr die aus den Beobachtungen bestimmten Werte dieser Constanten mit κ und Γ bezeichnen, so dass der aus der Rechnung resultirende Wert von (ϱ) der folgende ist:

$$(\varrho) = \kappa \cos[(1-g)v - \Gamma] + \sum \kappa_n \cos[(1-g_n)v - \Gamma_n].$$

1) Dies gilt eigentlich nur, wenn die Summen rechter Hand convergiren; ist dies nicht der Fall, so ist 316) nur ein genäherter Ausdruck, jedenfalls aber ein so weit genäherter, wie es mit Rücksicht auf unsere Aufgabe erforderlich ist. Ueber die absoluten Beträge der κ_r brauchen wir keine Voraussetzung zu machen.

Von letzterem nehme ich an, dass er um $\Delta\varrho$ fehlerhaft ist und erhalte dann aus der Vergleichung mit obigem strengen Ausdruck:

$$\begin{aligned}\Delta\varrho &= \kappa_a \cos [(1-s)v - \Gamma_a] - \kappa \cos [(1-s)v - \Gamma] + \Sigma \kappa_r \cos [(1-s_r)v - \Gamma_r] \\ &= \cos (1-s)v \{ \kappa_a \cos \Gamma_a - \kappa \cos \Gamma + \Sigma \kappa_r \cos [(s_r - s)v + \Gamma_r] \} \\ &\quad + \sin (1-s)v \{ \kappa_a \sin \Gamma_a - \kappa \sin \Gamma + \Sigma \kappa_r \sin [(s_r - s)v + \Gamma_r] \}.\end{aligned}$$

Sei nun v_0 derjenige Wert, den die Länge v in der Mitte des Zeitraums annimmt, auf den man die Rechnungen ausdehnen will; es darf nicht vergessen werden, dass wir hier v nicht wie in der elliptischen Theorie in Perioden von 360° zählen dürfen, sondern von $-\infty$ bis $+\infty$, da es an Stelle von t als unabhängige Veränderliche auftritt. In der Regel wird man es so einrichten, dass v_0 möglichst nahe der Null liegt, dass man also in der ersten Hälfte des in Betracht kommenden Zeitraums mit negativem v operirt.

Wir können nun in den Klammern der vorigen Gleichung die Glieder, welche $(s_r - s)v$ im Argument enthalten, nach Potenzen von $(s_r - s)(v - v_0)$ entwickeln und schon die zweiten Potenzen dieser Grössen fortlassen, da sie während eines Zeitraums von 100 Jahren sehr klein bleiben. Dann wird:

$$\begin{aligned}17) \Delta\varrho &= \cos(1-s)v \{ \kappa_a \cos \Gamma_a - \kappa \cos \Gamma + \Sigma \kappa_r \cos [(s_r - s)v_0 + \Gamma_r] - \Sigma (s_r - s) \kappa_r (v - v_0) \sin [(s_r - s)v_0 + \Gamma_r] \} \\ &\quad + \sin(1-s)v \{ \kappa_a \sin \Gamma_a - \kappa \sin \Gamma + \Sigma \kappa_r \sin [(s_r - s)v_0 + \Gamma_r] + \Sigma (s_r - s) \kappa_r (v - v_0) \cos [(s_r - s)v_0 + \Gamma_r] \}.\end{aligned}$$

Die ersten drei Glieder in den Klammern sind Constanten, und da man die Bestimmung der Constanten aus den Beobachtungen naturgemäss so vornimmt, dass die letzteren möglichst gut dargestellt werden, so erhalten κ und Γ offenbar die Werte, welche durch die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}318) \quad \kappa \cos \Gamma &= \kappa_a \cos \Gamma_a + \Sigma \kappa_r \cos [(s_r - s)v_0 + \Gamma_r] \\ \kappa \sin \Gamma &= \kappa_a \sin \Gamma_a + \Sigma \kappa_r \sin [(s_r - s)v_0 + \Gamma_r]\end{aligned}$$

definiert sind, und der Fehler in (ϱ) wird folgenden Wert haben:

$$318a) \quad \Delta\varrho = \Sigma (s_r - s) \kappa_r (v - v_0) \sin [(1 - s_r)v - (s_r - s)v_0 - \Gamma_r].$$

Dieser Betrag soll nun nach dem Vorigen kleiner als ε sein. Wie bei den gewöhnlichen Gliedern, so wird es auch hier schwierig sein, sich einen Begriff von der Summe der Reihe in voriger Gleichung zu machen, und wir stellen wieder die Bedingung auf, dass jedes einzelne vernachlässigte Glied kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ sein soll. Wir haben also die Bedingung

$$(s_r - s) \kappa_r (v - v_0) < \frac{\varepsilon}{3}$$

zu erfüllen.

Sei nun

$$\text{pars } \left\{ \frac{d^2 \varrho}{dv^2} + \varrho \right\} = b_r \cos [(1 - \varepsilon_r) v - \Gamma_r]$$

ein Glied in der Differentialgleichung für (ϱ) , aus dem ein Glied mit dem Coefficienten \varkappa_r in (ϱ) entsteht, so ist nach den Ausführungen pag. 101

$$\varkappa_r = \frac{b_r}{2(s_r - s)},$$

und die obige Bedingung geht in die folgende über:

$$b_r < \frac{2\varepsilon}{3(v - v_0)}.$$

Bezeichne ich

$$319) \quad \varepsilon_1 = \frac{2\varepsilon}{v - v_0},$$

so ist also $\frac{\varepsilon_1}{3}$ die Grenze, bis zu welcher Störungsglieder von der Form B in der **Differentialgleichung** für ϱ mitzunehmen sind. Wir können hier unbedenklich $v - v_0 = n(t - t_0)$ setzen, wo t_0 die Mitte des betrachteten Zeitraums, also im Maximum $t - t_0 = \pm 50$ Jahre anzunehmen ist. Die folgende Tabelle giebt für n als Argument die Werte von ε_1 , wenn ε die in Tabelle III gegebenen Werte hat; $t - t_0$ ist auf 50 Jahre berechnet, $n(t - t_0)$ in Graden und $\log n(t - t_0)$ in absoluter Zahl angegeben.

Tabelle IV.

n	$n(t - t_0)$	$\log n(t - t_0)$	für $\varepsilon' = 1'$
			$\log \varepsilon_1$
400''	2030°	1.549	5.09 ₋₁₀
600'	3040°	1.725	4.88 ₋₁₀
800''	4060°	1.850	4.71 ₋₁₀
1000''	5070°	1.947	4.57 ₋₁₀
1200''	6090°	2.026	4.45 ₋₁₀

Die b_r sind vom ersten, dritten u. s. w., überhaupt immer von einem ungeraden Grade (siehe pag. 120) und ausserdem mit irgend einer Potenz der störenden Masse multiplicirt; aus dem Gesagten geht also hervor, dass die elementaren Glieder ersten Grades fortgelassen werden können, wenn sie in der Differentialgleichung für ϱ rein zweiter Ordnung sind, und dass die Glieder dritten Grades im Allgemeinen schon fortgelassen werden können, wenn sie dort rein erster Ordnung sind, d. h. bei allen Planeten mit Ausnahme der kritischen, und auch

hier wären nur die exargumentalen Glieder zu berücksichtigen. Bei sehr grossen Excentricitäten wird man eventuell noch das eine oder das andere Glied dritten Grades in der Entwicklung der Störungsfunktion mit Vorteil mitnehmen; darauf will ich aber hier nicht eingehen. Die obige Tafel zeigt, wie weit man in jedem einzelnen Falle mit der Genauigkeit zu gehen hat.

Auch über die Bestimmung der Grösse ς müssen wir einige Bemerkungen machen, um zu sehen, mit welcher Genauigkeit ihre Kenntniss erforderlich ist. Wir hätten in Gleichung 316) statt ς eigentlich auch ς_a schreiben müssen, wo ς_a den wahren Wert dieser Grösse bezeichnet; man überzeugt sich jedoch unschwer durch Untersuchungen, die den eben gemachten ganz ähnlich sind, dass wir auch bei ihrer Bestimmung in der Differentialgleichung für ϱ Glieder fortlassen können, deren Betrag kleiner als $\frac{\epsilon_1}{3}$ ist.

3. Es ist aber aus dem Gesagten noch eine wichtige Thatsache zu folgern, die oft nicht genügend gewürdigt wird. Nämlich bei der Berechnung der Bewegung eines Planeten während eines beschränkten Zeitraums spielen die sogenannten kleinen Integrationsdivisoren von der Ordnung der ς_n überhaupt gar keine Rolle. Es ist ganz gleichgültig, wie klein sie sind, und wie gross der dementsprechende Coefficient κ_n in der Funktion (ϱ) werden würde. Es kommt nur auf die Grösse der entsprechenden Glieder in der **Differentialgleichung** an, und die Brauchbarkeit unseres Integrationsverfahrens während eines beschränkten Zeitraums hängt lediglich von der Erfüllung der Bedingungen pag. 12 ab.

4. Ich habe schon in der Einleitung gesagt, dass wir uns damit begnügen können, die Bahn Jupiters als elliptisch anzusehen; dennoch habe ich für die Funktion (ϱ') den vollständigen Ausdruck

$$(\varrho') = \Sigma \kappa'_n \cos [(1 - \varsigma'_n)v' - \Gamma'_n]$$

eingeführt. Ich habe dies lediglich gethan, um meinen Ausführungen eine grössere Allgemeinheit zu geben, und um zu erreichen, dass die in dieser Abhandlung gemachten Untersuchungen auch bei eingehenderen Arbeiten als Ausgangspunkt dienen können.

Für unsere gegenwärtigen Zwecke können wir den Ausdruck kürzen, indem wir den elliptischen dafür setzen und einfach schreiben:

$$(\varrho') = \eta' \cos (v' - II'),$$

wo η' und II' als constant anzusehen sind.

Da es von Interesse ist, zu sehen, wie gross der Fehler sein kann, der dadurch in unseren Rechnungen entsteht, so wollen wir ihn feststellen durch eine Betrachtung, die der Obigen ganz analog ist. Nach Gyldén ist (ϱ') im Wesentlichen durch den Ausdruck

$$320) (\varrho') = \kappa' \cos[(1-s')v' - \Gamma'] + \kappa'_2 \cos[(1-s'_2)v' - \Gamma'_2] + \kappa'_3 \cos[(1-s'_3)v' - \Gamma'_3]$$

gegeben, wo κ' und Γ' die Integrationsconstanten für Jupiter sind, und wo das Glied mit dem Faktor κ'_2 von der Einwirkung Saturns und das folgende von der Einwirkung des Uranus herrührt. κ'_2 enthält also als Faktor den Excentricitätsmodul Saturns und κ'_3 den des Uranus. Die Glieder dritten Grades sind hier bei Seite gelassen, und die numerischen Werte sind nach Gyldén:

$$\left. \begin{array}{lll} \log \kappa' = 8.6252_{-10} & \log s' = 5.5175_{-10} & \Gamma' = 27^{\circ}.49 \\ -\kappa'_2 = 8.1777_{-10} & -s'_2 = 6.4021_{-10} & \Gamma'_2 = 132^{\circ}.14 \\ -\kappa'_3 = 7.2242_{-10} & -s'_3 = 5.3673_{-10} & \Gamma'_3 = 101^{\circ}.16. \end{array} \right\} 1850.0$$

Die Differenz dieser Werte gegen die Leverrier'schen ist für uns natürlich ganz bedeutungslos. Es darf nicht vergessen werden, dass stets angegeben werden muss, von welcher Epoche an v' in der obigen Gleichung gezählt ist, da davon die Werte der Γ'_n abhängen; es ist bei den Gyldén'schen Werten, wenn ich nicht irre, so gezählt, dass es zu Anfang des Jahres 1850 zwischen 0° und 360° liegt. In Analogie mit der für ϱ gegebenen Entwicklung (Gleichung 317) haben wir also zu setzen:

$$\eta' \frac{\cos \Pi'}{\sin} = \kappa' \frac{\cos \Gamma'}{\sin} + \kappa'_2 \frac{\cos [(s'_2 - s')v'_0 + \Gamma'_2]}{\sin} + \kappa'_3 \frac{\cos [(s'_3 - s')v'_0 + \Gamma'_3]}{\sin},$$

wonach v'_0 der Wert ist, den v' in der Mitte des Zeitraums erreicht, für den unsere Rechnung gelten soll. Da die gegenwärtigen Berechnungen der kleinen Planeten sich auf Jahrhundert 1850—1950 beziehen werden, so wird es sich empfehlen, v' vom Januar 1904 ab zu zählen, in welchem Monat die mittlere Länge Jupiters durch den Nullwert hindurch geht; mit Rücksicht darauf müssten die obigen Werte der Γ'_n reducirt werden und ebenso wird man sie auf das mittlere Aequinoctium 1900.0 beziehen. Ich unterlasse indessen hier diese Reduction, da ich im zweiten Teile doch noch auf die numerischen Grundlagen unserer Rechnungen zurückkommen muss. Die numerische Rechnung ergibt nun für die Epoche 1850, wenn v'_0 klein ist:

$$\begin{aligned} \log \eta' \cos \Pi' &= 8.6740_{-10} & \log \eta' &= 8.6834_{-10} \\ -\eta' \sin \Pi' &\doteq 7.9981_{-10} & \Pi' &= 11^{\circ}.91 \quad (1850.0), \end{aligned}$$

fast genau übereinstimmend mit Leverrier's Werten.

Der Fehler, den wir infolge der genannten Kürzung in ϱ' begehen, ist also (vgl. Gleichung 317) und 318) nahezu:

$$\begin{aligned} \Delta\varrho' &= \cos(1-s')v' \{ (s' - s'_2)(v' - v'_0) \kappa'_2 \sin \Gamma'_2 + (s' - s'_3)(v' - v'_0) \kappa'_3 \sin \Gamma'_3 \} \\ &\quad - \sin(1-s')v' \{ (s' - s'_2)(v' - v'_0) \kappa'_2 \cos \Gamma'_2 + (s' - s'_3)(v' - v'_0) \kappa'_3 \cos \Gamma'_3 \}. \end{aligned}$$

Wenn ich also für den Augenblick bezeichne:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 \\ c_2 \end{array} \right\} = (s' - s'_2) \kappa'_2 \frac{\sin \Gamma'_2}{\cos \Gamma'_2} + (s' - s'_3) \kappa'_3 \frac{\sin \Gamma'_3}{\cos \Gamma'_3},$$

so wird

$$\Delta q' = c_1(v' - v'_0) \cos(1 - s')v' - c_2(v' - v'_0) \sin(1 - s')v',$$

und der absolute Betrag von $\Delta q'$ ist:

$$|\Delta q'| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} (v' - v'_0),$$

d. h. mit Annahme der numerischen Werte

$$|\Delta q'| = [4.521-10] (v' - v'_0).$$

Da $v' - v'_0$ in 50 Jahren den Maximalbetrag von ungefähr 1520° erreicht, so wird also:

$$\log |\Delta q'| = 5.944-10$$

werden können.

Ein Blick auf die Tabelle III in diesem Kapitel zeigt, dass demnach der geocentrische Ort Jupiters kaum um $1'$ geändert wird, und dass der Einfluss unserer Kürzung auf die Bewegung der kleinen Planeten für unsere Zwecke ganz verschwindend ist; denn das aus $\Delta q'$ entspringende Glied auf der rechten Seite der Differentialgleichung für q wird nach § 3 des sechsten Kapitels nur den Betrag $b_2 \Delta q'$ haben. Es ist ja auch von vornherein selbstverständlich, dass die direkten Saturnstörungen grösser sein müssen.

5. In bezug auf die Funktion \mathfrak{z} lassen sich genau dieselben Betrachtungen anstellen: wir werden auf der rechten Seite der Differentialgleichung für (\mathfrak{z}) ebenfalls Glieder fortlassen können, deren absoluter Betrag kleiner als $\frac{\varepsilon_1}{3}$ ist und wir setzen für Jupiter:

$$(\mathfrak{z}') = \sin j' \sin(v' - \sigma'),$$

und sehen j' und σ' als Constanten an, nämlich als die mittleren Werte der Neigung und der Knotenlänge in der Mitte des in Frage kommenden Zeitraums.

6. Ich gehe nun zur Betrachtung der Glieder der Form A über. Dieselben treten in erster Linie in der Funktion W auf, und über sie habe ich bereits einige Bemerkungen in den Astronomischen Nachrichten No. 3315 gemacht. Wir wollen annehmen, dass der vernachlässigte resp. zu vernachlässigende Teil von W , der die Form A hat, durch die Gleichung:

$$W_a = \Sigma f_r \sin(\sigma_r v + A_r)$$

dargestellt ist. Auch diese Gleichung können wir, wie 316), eigentlich nur aufstellen, wenn ihre rechte Seite convergirt, was erst zu beweisen wäre; immerhin können wir annehmen, dass sie, wie 316), genähert gilt; über den Betrag der f_r machen wir keine Voraussetzung, sie können sehr gross sein. Wenn wir den letzteren Ausdruck wieder nach Potenzen von $v - v_0$ entwickeln, so wird:

$$321) \quad W_a = \Sigma f_r \sin(\sigma_r v_0 + A_r) + \Sigma \sigma_r f_r (v - v_0) \cos(\sigma_r v_0 + A_r) - \frac{1}{2} \Sigma \sigma_r^2 f_r (v - v_0)^2 \sin(\sigma_r v_0 + A_r) \pm \dots$$

Da aber die Bahnelemente n und A wieder aus den Beobachtungen bestimmt werden, so ist der Fehler, der sich in W (also auch in v) zeigen wird, nicht gleich dem ganzen W_a ; vielmehr wird der constante Teil in die Constante A und der Teil, der proportional v ist, in die mittlere Bewegung eingehen, so dass der Fehler, der sich in v zeigen wird, ist:

$$\Delta v = \frac{1}{2} (v - v_0)^2 \Sigma \sigma_r^2 f_r \sin(\sigma_r^3 v_0 + A_r) \pm \dots$$

Δv soll nun kleiner als ε sein, so dass wir, da $\sigma_r (v - v_0)$ klein ist, die Bedingung

$$\frac{(v - v_0)^2}{2} \Sigma \sigma_r^2 f_r < \varepsilon$$

zu erfüllen haben. Ich bezeichne jetzt:

$$322) \quad \varepsilon_2 = \frac{2\varepsilon}{(v - v_0)^2} = \frac{\varepsilon_1}{v - v_0},$$

wo wir wieder $v - v_0$ durch $n(t - t_0)$ ersetzen können und ich gebe in der folgenden Tabelle den Wert von ε_2 für n als Argument, wobei ich wieder $t - t_0$ zu 50 Jahren annehme:

Tabelle V.

n	für $\varepsilon' = 1'$, $\log \varepsilon_2$
400''	3.54 ₋₁₀
600''	3.15 ₋₁₀
800''	2.86 ₋₁₀
1000''	2.62 ₋₁₀
1200''	2.42 ₋₁₀

Wir können dann in W die Glieder fortlassen, deren absoluter Betrag

$$|f_r| < \frac{\varepsilon_2}{3\sigma_r^2}$$

ist. Wenn wir setzen

$$323) \quad \frac{dW_a}{dv} = \Sigma \gamma_r \cos(\sigma_r v + A_r),$$

so ist offenbar nach Kapitel VI

$$\gamma_r = \sigma_r f_r,$$

und unsere Bedingung geht über in

$$324) \quad \sigma_r \gamma_r < \frac{\varepsilon_2}{3}.$$

Wir können also in der Differentialgleichung für W im Allgemeinen die Glieder vernachlässigen, deren Betrag kleiner als $\frac{\varepsilon_2}{3\sigma_r}$ ist, und hieraus kann man schon schliessen, dass die Glieder rein erster Ordnung der Form A in $\frac{dW}{dv}$ fortzulassen sind, denn sie sind sämtlich noch mit dem Quadrat des Excentricitätsmoduls multiplicirt.

Wir müssen aber besonders achten auf diejenigen Glieder der Form A in W , die dort durch die Funktion S eingeführt werden. In bezug auf diesen Teil ist nach Gleichung 59)

$$\text{pars } \frac{dW_a}{dv} = S_a - 2R_a,$$

also mit Berücksichtigung von Gleichung 251b):

$$\text{pars } \frac{dW_a}{dv} = -3S_a,$$

wenn S_a und R_a die entsprechenden vernachlässigten Teile dieser Funktionen bedeuten. Nach 323) ist also:

$$S_a = -\frac{1}{3} \Sigma \gamma_r \cos(\sigma_r v + A_r).$$

Ist nun der vernachlässigte Teil von S in der Differentialgleichung für diese Funktion:

$$\frac{dS_a}{dv} = \Sigma a_r \sin(\sigma_r v + A_r),$$

so ist zu setzen:

$$\sigma_r \gamma_r = 3a_r,$$

und die Bedingung

$$325) \quad a_r < \frac{\varepsilon_2}{9}$$

bleibt zu erfüllen. Wir können in der Differentialgleichung für S also alle Glieder der Form A fortlassen, deren absoluter Betrag kleiner als $\frac{\varepsilon_2}{9}$ ist. Die σ_r sind aus

unserer Bedingungsgleichung ebenso gänzlich verschwunden, wie es oben bei den Auseinandersetzungen für die Funktion ϱ der Fall war; wir haben wieder einen direkten Ueberblick, wie weit wir bei Aufstellung der Differentialgleichungen für S und W gehen müssen, um die Glieder der Form A mit genügender Schärfe zu finden; wie gross ihre Coefficienten f_r in der Funktion W sind, ist dabei von gar keinem Einfluss. Freilich scheint die Grenze $\frac{\varepsilon_2}{9}$ etwas niedrig zu sein; indessen sind diese Glieder mindestens zweiten Grades und bei der numerischen Rechnung gewinnt man die Ueberzeugung, dass die Glieder rein zweiter Ordnung in $\frac{dS}{dv}$ fast durchgängig unter dieser Grenze liegen, womit also gezeigt ist, dass die elementaren Glieder in W für die Praxis von untergeordneter Bedeutung sind.

In jedem einzelnen Falle hat man an den oben gegebenen Werten von ε , ε_1 und ε_2 einen Maassstab wie weit die numerische Genauigkeit zu treiben ist.

7. Die Hauptschwierigkeit macht es natürlich, die charakteristischen Glieder mit der erforderlichen Schärfe zu berechnen. Zunächst will ich einige Worte sagen über die charakteristischen Planeten der höheren Klassen, zu denen, streng genommen, jeder Planet gehört. Es ist einleuchtend, dass die charakteristischen Glieder der höheren Klassen nur dann merklich werden, wenn der Divisor δ_1 ausserordentlich klein ist, wenn also die Perioden dieser Glieder mit denen der elementaren auf eine Stufe zu stellen sind, und in diesem Falle gilt das eben für die elementaren Glieder Gesagte auch hier. Ob die charakteristischen Glieder höherer Klassen während eines beschränkten Zeitraums für die praktische Störungsrechnung merklich werden, hängt nicht von ihrem absoluten Betrage ab, sondern vom Betrage der ihnen entsprechenden Glieder in den **Differentialgleichungen** und da diese sicher sehr klein sind, so werden auch sie fortzulassen sein.

Die charakteristischen Glieder der niederen Klassen sind indessen mit derselben Schärfe zu berechnen, wie die gewöhnlichen, d. h. bis zum Betrage $\frac{\varepsilon}{3}$.

Es bleibt nun noch die eine wichtige Frage zu beantworten, welche Klassen von charakteristischen Planeten zu den höheren und welche zu den niederen Klassen zu zählen sind. Diese Grenze ist nicht leicht zu ziehen; sie bestimmt sich durch die Genauigkeit, mit der man die Beobachtungen während eines gewissen Zeitraums darstellen will. Ich habe die Glieder dritten Grades in der Entwicklung der Störungsfunktion vernachlässigt und damit eigentlich schon die charakteristischen Planeten der dritten Klasse zu den höheren gezählt. Ob dies gerechtfertigt ist, ist zweifelhaft und kann sich erst bei Ausführung einiger weiteren Rechnungen zeigen. Sollte es nicht der Fall sein, so ist man freilich gezwungen, für diese Planeten einige Glieder dritten und eventuell vierten Grades in der Entwicklung der Störungsfunktion zu berücksichtigen. Es werden

dies aber in allen Fällen nur wenige Glieder sein, und es erschien nicht lohnend, deswegen in der gegenwärtigen Arbeit die Entwicklungen über die Glieder zweiten Grades hinaus fortzusetzen. Wenn also auch für die äusserst wenigen Planeten, welche diesen Klassen angehören, unsere Formeln vielleicht nicht vollständig ausreichen, um ihre Coordinaten innerhalb 1' darzustellen, so ist es doch nicht schwierig, behufs genauerer Berechnung die wenigen nötigen Glieder höheren Grades hinzuzufügen.

8. Ich will nun noch einige Worte sagen über die Darstellung der elementaren Glieder in secularer Form, namentlich, um festzustellen, welche der beiden Darstellungsarten die vorteilhaftere sein dürfte. Ich habe schon pag. 85 einige Bemerkungen über diese Frage gemacht. Kürzen wir die Ausdrücke der elementaren Glieder in der Weise, dass wir die Bewegung Jupiters als elliptisch annehmen, so sind die Funktionen η und Π durch die Relationen:

$$\eta \cos \Pi = \kappa \cos (sv + \Gamma) + \kappa_1 \cos \Gamma_1,$$

$$\eta \sin \Pi = \kappa \sin (sv + \Gamma) + \kappa_1 \sin \Gamma_1,$$

ausgedrückt, die an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lassen. Die secularer Form ist sehr einfach hieraus herzustellen; es wird:

$$\eta \cos \Pi = \kappa \cos (sv_0 + \Gamma) + \kappa_1 \cos \Gamma_1 v - g\kappa (v - v_0) \sin (sv_0 + \Gamma) - \frac{g^2 \kappa}{2} (v - v_0)^2 \cos (sv_0 + \Gamma) \pm \dots$$

$$\eta \sin \Pi = \kappa \sin (sv_0 + \Gamma) + \kappa_1 \sin \Gamma_1 + g\kappa (v - v_0) \cos (sv_0 + \Gamma) - \frac{g^2 \kappa}{2} (v - v_0)^2 \sin (sv_0 + \Gamma) \pm \dots,$$

wo man, wenn man will, auch die Zeit als unabhängige Veränderliche einführen kann. Das mit dem Quadrat von v multiplicirte Glied erreicht allerdings in einem Zeitraum von 100 Jahren nicht den von uns als Genauigkeitsgrenze angenommenen Betrag, kann also bei Seite gelassen werden.

Wie sich die Integrationen des sechsten und siebenten Kapitels stellen werden, wenn man die elementaren Glieder in secularer Form giebt, ist ohne Schwierigkeit einzusehen, und gerade hier bietet die Darstellung in periodischer Form einen Vorteil.

Auch die Glieder der Form A in der Funktion W stellen sich in ihrer periodischen Form so einfach dar, dass ich dieser letzteren entschieden den Vorzug geben möchte; es wird nämlich:

$$\eta^2 = \kappa^2 + \kappa_1^2 + 2\kappa\kappa_1 \cos (sv + \Gamma - \Gamma_1)$$

$$\eta\eta' \cos (\Pi - \Pi_1) = \kappa_1 \kappa' + \kappa\kappa' \cos (sv + \Gamma - \Gamma_1)$$

$$\eta'^2 = \kappa'^2.$$

Demnach tritt hier ausser den constanten Gliedern überhaupt nur ein einziges Argument auf, und die Rechnung kann auch durch das Auftreten aussergewöhnlich kleiner Divisoren nicht erschwert werden. Will man die Glieder dennoch in secularer Form darstellen, so wird auch dies keine Schwierigkeiten machen. Sie sind hier um einen Grad kleiner als in ϱ ; indessen sind sie in der Funktion W numerisch in vielen Fällen grösser, namentlich wenn es sich um charakteristische Planeten handelt, so dass dann das mit v^2 multiplicirte Glied berücksichtigt werden muss; und nur dieses, da die vorhergehenden sich mit den Integrationsconstanten vereinigen.

Dies sind die Gründe, die mich bewogen haben, die sogenannten Secularstörungen in periodischer Form zu geben.

Greifswald 1897, November.

Martin Brendel.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

	Seite
1. Vorbemerkungen	3
2. Bemerkungen über die Entwicklungen nach den Potenzen der Excentricitäten und Neigungen	5
3. Bemerkungen über die Entwicklungen nach den Potenzen der störenden Masse .	6
4. Allgemeine Bemerkungen über die angewandte Methode	6
5. Bemerkungen über die angewandte unabhängige Veränderliche	7
6. Disposition der vorliegenden Arbeit	8
7. Bemerkungen über die Convergenzfrage	9
8. Persönliche Bemerkungen	10

Erstes Kapitel.

Die Grundprincipien der Gyldén'schen Störungstheorie. — Die allgemeine Form der Differentialgleichungen und ihrer Integrale. — Die Gyldén'schen Coordinaten ρ , η und S .

1. Vorbedingungen	11
2. Die Grundlagen der älteren Methoden	13
3. Die Grundlagen der Gyldén'schen Methoden	14
4. Die Grundlagen unserer Methode. — Die Gyldén'schen Coordinaten ρ , η und S	15
5. Allgemeine Form der Differentialgleichungen und ihrer Integrale	17
6. Definition der Gyldén'schen Coordinaten η und Π	19
7. Weiteres über die Beträge und Formen der Glieder	20

Zweites Kapitel.

Ableitung der Differentialgleichungen für die Gyldén'schen Coordinaten. — Formeln für die Bewegung des Planeten in seiner momentanen Bahnebene.

1. Definition der momentanen Bahnebene	22
2. Beziehungen zwischen den rechtwinkligen Coordinaten einerseits im Raum und andererseits in der momentanen Bahnebene	24

	Seite
3. Die Differentialgleichungen für die rechtwinkligen Coordinaten in der momentanen Bahnebene	25
4. Die Differentialgleichungen für die Polarcoordinaten in der momentanen Bahnebene	26
5. Die Differentialgleichungen für die Gyldén'schen Coordinaten	27
6. Einführung des Gyldén'schen absoluten Radiusvektors (r), der excentrischen Anomalie ε und der mittleren Anomalie M	29
7. Einführung der reducirten Zeit (t) und der Hilfscoordinaten W und Ξ . Die Differentialgleichung für W	31
8. Ueber die Berechnung der Funktion Ξ	33
9. Zusammenstellung der Formeln zur Berechnung der Polarcoordinaten r und v als Funktionen der Zeit und Vergleich mit Hansen's Formeln	34

Drittes Kapitel.

Formeln für die heliocentrische Bewegung des Planeten. — Lage der momentanen Bahnebene zu der als Fundamentelebene gewählten Ekliptik.

1. Formeln für die heliocentrische Länge und Breite	35
2. Die Differentialgleichung für den Sinus der Breite oder die Funktion ζ	36
3. Ueber die Form der Funktion ζ	38
4. Die Differentialgleichung für die heliocentrische Länge	39
5. Integration der vorigen Differentialgleichung	41
6. Bestimmung der Funktionen i , Ω und Σ , welche die Lage der momentanen Bahnebene definiren	43

Viertes Kapitel.

Entwicklung der Störungsfunktion Ω und ihrer partiellen Ableitungen Q , P , und Z .

1. Entwicklung nach der Neigung	45
2. Entwicklung von $a(\Omega)$	47
3. Entwicklung von $a \frac{d(\Omega)}{d \cos H_1}$	53
4. Entwicklung von Q	56
5. Entwicklung von P	57
6. Entwicklung von Z	58

Fünftes Kapitel.

Transformation der für die Funktionen Q , P und Z gefundenen Ausdrücke.

1. Darstellung von ρ' und η' als Funktionen von v	59
2. Darstellung von v' und von $\frac{\cos}{\sin} nH_1$ als Funktionen von v	62

	Seite
3. Darstellung der Produkte $\rho^s \rho^{1s'} \eta^{2v} \eta^{2v'} \frac{\cos nH_1}{\sin}$ als Funktionen von v	64
4. Weitere Transformation der trigonometrischen Argumente; über den secularen Teil der Funktion W	67
5. Definitive Form der Funktion Q	70
6. Darstellung von \mathfrak{z}' und h als Funktionen von v	72
7. Definitive Form des Theils von Q , der von den Neigungen abhängt	76
8. Definitive Form der Funktion P	78
9. Definitive Form der Funktion Z	80
10. Bemerkung zu den vorigen Entwicklungen	82

Sechstes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen für die Gylden'schen Coordinaten. — Die gewöhnlichen Planeten.

§ 1. Vorbemerkungen.	
1. Die Gesichtspunkte, unter denen die vorliegende Aufgabe gelöst werden soll	83
2. Ueber die Secularstörungen	85
3. Ueber die Gültigkeitsdauer unserer Formeln und über die seculara Variation der Constanten	86
4. Ueber die Darstellung der Coordinaten durch trigonometrische Reihen .	86
5. Definition der Excentricitäts- und Neigungsmoduln; Zerlegung der Funktionen nach dem Grade ihrer Glieder	87
§ 2. Die Glieder nullten Grades.	
1. Herstellung der Funktion S_0	88
2. Herstellung der Funktion $\rho_0 = R_0$	90
3. Herstellung der Funktion W_0	92
4. Ueber die Integrationsconstanten a und n und über die überzählige Integrationsconstante α_0	93
§ 3. Die Glieder ersten Grades.	
1. Herstellung der Funktion S_1	95
2. Herstellung der Funktion R_1	97
3. Herstellung der Funktion (ρ)	101
4. Herstellung der Funktion W_1	102
5. Herstellung der Funktion \mathfrak{z}_1	103
6. Herstellung der Funktion (\mathfrak{z})	105
7. Bemerkungen über die Herstellung der Funktionen i , Ω und Σ	106
§ 4. Die Glieder zweiten Grades.	
1. Herstellung der Funktion S_2	106
2. Ueber die Glieder der Form A in S	109
3. Herstellung der Funktion $\rho_2 = R_2$	111
4. Herstellung der Funktion W_2	113

	Seite
5. Ueber die Glieder der Form A in W	115
6. Herstellung der Funktion $\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{Z}_2$	118
§ 5. Die Glieder höherer Grade.	
1. Die Gesetze für das Vorkommen der elementaren und charakteristischen Glieder	119
2. Ueber Berücksichtigung von Gliedern höheren als zweiten Grades	120

Siebentes Kapitel.

Die charakteristischen Planeten.

§ 1. Die Glieder nullten Grades.	
1. Formale Darstellung der Funktionen nullten Grades	121
2. Herstellung der Funktion S_0	122
3. Herstellung der Funktion R_0	123
4. Ueber die verschiedenen Arten der mittleren Bewegung: wahre mittlere Bewegung, Bewegungsconstante und mittlere Bewegung in Länge	124
5. Ueber den Maximalwert des Hauptstörungsgliedes in R_0 und über die Lücke im System der kleinen Planeten bei $n = 600''$	126
6. Bemerkungen über den Specialfall, in welchem die ungestörte Bahn des Planeten eine Kreisbahn ist	129
7. Definition der kritischen Planeten	129
8. Die Planeten vom Hildatypus und die Lücke bei $n = 450''$	129
9. Der strenge Ausdruck für das Hauptstörungsglied nullten Grades	132
10. Herstellung der Funktion W_0	133
11. Bemerkungen über die gewöhnlichen Glieder nullten Grades	133
§ 2. Die Glieder ersten Grades.	
1. Formale Darstellung der Funktionen ersten Grades	133
2. Herstellung der Funktion S_1	135
3. Herstellung der Funktion R_1	138
4. Herstellung der Funktion (ρ)	143
5. Herstellung der Funktion W_1	145
6. Bemerkung über die gewöhnlichen Glieder ersten Grades	145
7. Herstellung der Funktion \mathfrak{z}_1	145
8. Bemerkungen über die Planeten vom Hilda- und Thuletypus	146
9. Ueber die charakteristischen Planeten der zweiten Klasse	146
§ 3. Die Glieder zweiten Grades.	
1. Allgemeine Bemerkungen	147
2. Die Planeten vom Hestiatypus	148
3. Die Planeten vom Hecubatypus	149
§ 4. Die Glieder höheren als zweiten Grades und allgemeine Bemerkungen über die charakteristischen Planeten.	
1. Die Bedeutung der exargumentalen Glieder	149

2. Die kritischen Planeten und die Convergenz der Reihe der exargumentalen Glieder. — Beweis des Vorhandenseins von Lücken bei den Commensurabilitätsstellen der mittleren Bewegungen. 151

Achtes Kapitel.

Ueber die bei den numerischen Rechnungen zu beobachtende Genauigkeit und über die Bedeutung der elementaren Glieder für die Praxis, sowie über ihre Darstellung in secularer Form.

1. Ueber die erforderliche Genauigkeit bei der numerischen Berechnung der gewöhnlichen Glieder 154

2. Ueber die erforderliche Genauigkeit bei der numerischen Berechnung der elementaren Glieder der Form B 156

3. Bemerkungen über die sogenannten kleinen Integrationsdivisoren 159

4. Ueber die Unsicherheit in der Darstellung der Coordinaten, welche entsteht, wenn man die Bewegung Jupiters als elliptisch annimmt 159

5. Ueber die erforderliche Genauigkeit bei der numerischen Berechnung der elementaren Glieder in \mathfrak{z} 161

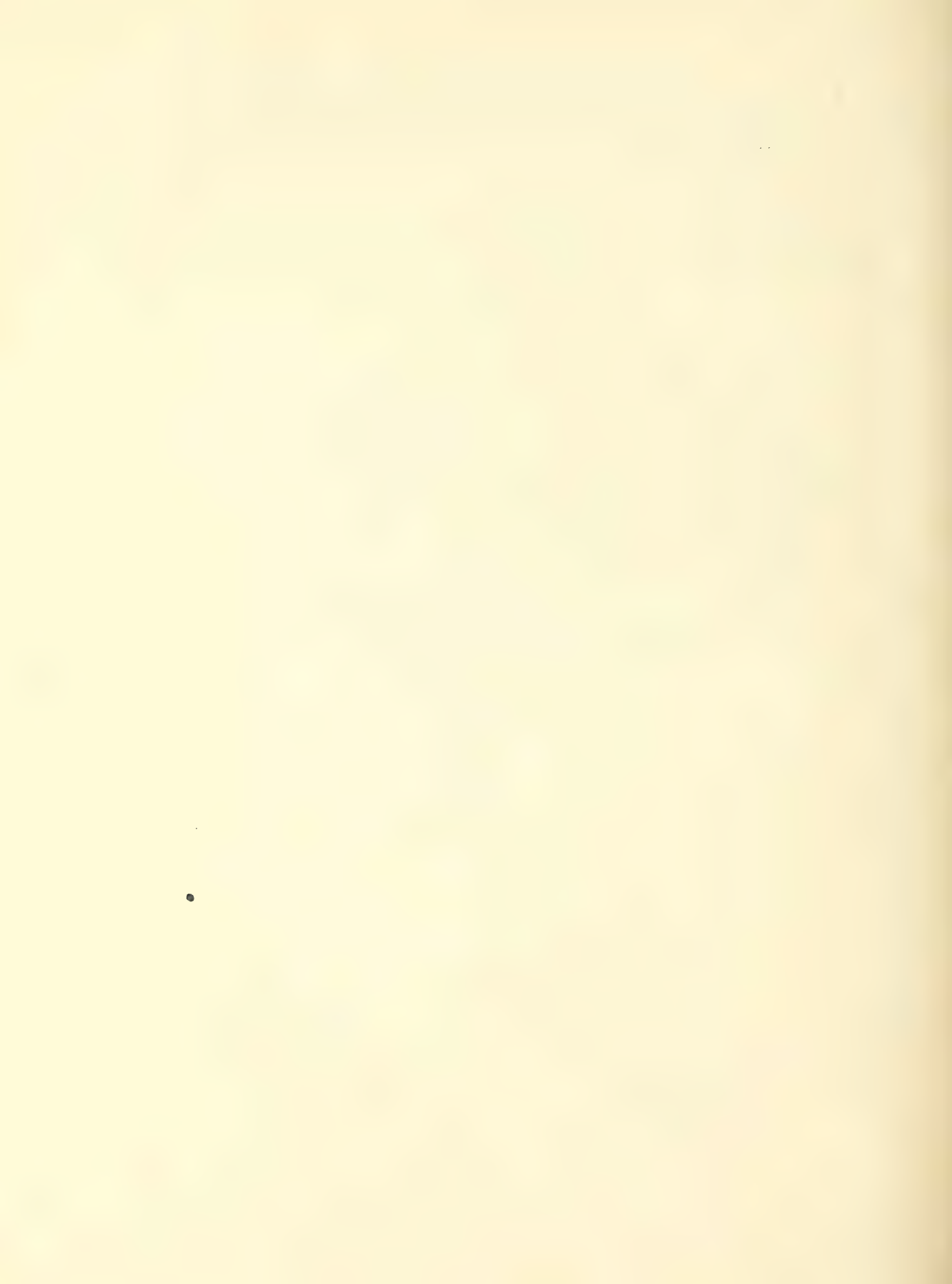
6. Ueber die erforderliche Genauigkeit bei der numerischen Berechnung der elementaren Glieder der Form A 161

7. Ueber die erforderliche Genauigkeit bei der numerischen Berechnung der charakteristischen Glieder 164

8. Ueber die Darstellung der elementaren Glieder in secularer Form 165

20 JUN 01





Druck der Univ.-Buchdruckerei von W. Fr. Kaestner in Göttingen.

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND 1. Nro. 3.

Ableitung

relativer Oerter des Mondes gegen die Sonne

aus heliometrischen Messungen von Sehnenlängen ausgeführt auf der Sternwarte zu Göttingen während der partiellen Sonnenfinsternisse von 1890 Juni 16/17 (Beobachter: Schur, Ambronn und Hayn) und von 1891 Juni 6 (Beobachter: Schur).

Von

Dr. Wilhelm Schur,

Professor der Astronomie und Director der Sternwarte.

Mit drei Plänen der Sternwarte nebst Verzeichniss der grösseren Instrumente.

Berlin.

Weidmannsche Buchhandlung.

1898.



ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN,
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND 1. Nro. 3.

Ableitung

relativer Oerter des Mondes gegen die Sonne

aus heliometrischen Messungen von Sehnenlängen ausgeführt auf
der Sternwarte zu Göttingen während der partiellen Sonnenfinster-
nisse von 1890 Juni 16/17 (Beobachter: Schur, Ambrohn und
Hayn) und von 1891 Juni 6 (Beobachter: Schur).

Von



Dr. Wilhelm Schur,
Professor der Astronomie und Director der Sternwarte.

Mit drei Plänen der Sternwarte nebst Verzeichniss der grösseren Instrumente.

Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1898.

Ableitung relativer Oerter des Mondes gegen die Sonne

aus heliometrischen Messungen von Sehnenlängen ausgeführt auf der Sternwarte zu Göttingen während der partiellen Sonnenfinsternisse von 1890 Juni 16/17 (Beobachter: Schur, Ambronn und Hayn) und von 1891 Juni 6 (Beobachter: Schur).

Von

Wilhelm Schur.

Mit drei Plänen der Sternwarte nebst Verzeichniss der grösseren Instrumente.

Vorgelegt in der Sitzung am 14. Mai 1898.

Die Berechnung der Beobachtungen dieser beiden Finsternisse an den Heliometern von Repsold und Fraunhofer war der Hauptsache nach schon damals erledigt; nur konnten die Beobachtungen am Repsold'schen Heliometer nicht in endgültige Form gebracht werden, weil die Theilungsfehler der Objectiv-Scalen noch nicht bestimmt waren. Nachdem letztere Untersuchung und deren Berechnung in den Jahren 1889 bis 1891 ausgeführt waren, hätten die Resultate bekannt gemacht werden können, jedoch war ich in der nächsten Zeit hauptsächlich mit der Ausarbeitung meiner umfangreichen Abhandlung über die Praesepe und der Darstellung aller am Repsold'schen sechszölligen Heliometer angestellten Untersuchungen beschäftigt und erst in letzter Zeit habe ich Gelegenheit gefunden, diese Finsternissbeobachtungen wieder vorzunehmen.

Die Ableitung der Verbesserungen der den Ephemeriden entnommenen relativen Oerter des Mondes gegen die Sonne fand nach den bekannten und mehrfach angewandten Formeln statt, welche in dem Aufsätze „M. Wichmann, Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss am 28. Juli 1851 am Königsberger Heliometer“, *Astronomische Nachrichten*, Bd. 33 gegeben sind.

A. Partielle Sonnenfinsterniss 1890 Juni 16/17.

Diese Finsterniss begann in Göttingen um $21^{\text{h}} 3^{\text{m}}$ und endigte um $23^{\text{h}} 31^{\text{m}}$ mittlere Ortszeit. Bei Beginn der Finsterniss war der Himmel bewölkt und die Beobachtung des Eintritts misslang deshalb. Einige Zeit später gingen die Wolken auseinander und es konnte an beiden Heliometern um etwa $21^{\text{h}} 14^{\text{m}}$ mit Sehenmessungen begonnen werden. Um etwa $21^{\text{h}} 43^{\text{m}}$ wurde der Himmel dann wieder auf längere Zeit trübe und erst kurz vor dem Ende der Finsterniss um etwa 23^{h} wurde es noch einmal wieder auf eine viertel Stunde hell; die Beobachtung des Austritts wurde jedoch abermals durch Bewölkung vereitelt.

Die Berechnung der Sehnenlängen gestaltet sich nun folgendermassen. Es bedeuten in nachstehender Tabelle

- Spalt I die in mittlere Zeit Greenwich umgesetzten Beobachtungszeiten,
- II die dem Nautical Almanac entnommenen geocentrischen Oerter des Mondes,
- III die auf Göttingen wegen Parallaxe nach strengen Formeln reducirten Mondörter,
- IV die geocentrischen Oerter der Sonne,
- V dieselben für Göttingen wegen Parallaxe reducirt,
- VI die dem Nautical Almanac für die Beobachtungszeiten entnommenen Werthe der Horizontal-Parallaxen und Halbmesser von Mond und Sonne, $II \pi r_{\zeta} r_{\odot}$,
- VII die Halbmesser von Mond und Sonne für die Zeiten der Columne I, gültig für Göttingen und bereits verbessert nach den weiter unten folgenden Abänderungen der im Nautical Almanac angenommenen Werthe, $r'_{\zeta} r'_{\odot}$.

Sind dann $\alpha_{\zeta} \delta_{\zeta} \alpha_{\odot} \delta_{\odot}$ die auf Göttingen bezüglichen Rectascensionen und Declinationen von Mond und Sonne, so sind die relativen Coordinaten des Mondes gegen die Sonne

$$x = (\alpha_{\zeta} - \alpha_{\odot}) \cos \frac{1}{2}(\delta_{\zeta} + \delta_{\odot})$$

$$y = (\delta_{\zeta} - \delta_{\odot}),$$

die in Spalt VIII enthalten sind.

Auf diese Weise erhält man nachstehende Tabelle:

I M.Z.Gr.w.	II Geoc. Oerter d. Mondes		III Mondörter f. Göttingen		IV Geoc. Oerter d. Sonne		V Sonnenörterf. Göttingen	
^h ^m								
20 20	84° 51' 9.3" + 23° 29' 54.2"	85° 17' 24.0" + 23° 0' 6.4"	85° 41' 6.2" + 23° 23' 39.4"	85° 41' 10.4" + 23° 23' 34.7"				
40	85° 2' 9.5"	31° 11.7"	85° 26' 4.0"	2° 11.0"	41° 58.2"	41.0"	42° 2.0"	36.4"
21 0	85° 13' 9.6"	32° 28.4"	85° 34' 33.5"	4° 10.5"	42° 50.3"	42.5"	42° 53.7"	38.0"
20	85° 24' 9.9"	33° 44.3"	85° 42' 53.8"	6° 4.5"	43° 42.3"	43.9"	43° 45.3"	39.5"
40	85° 35' 10.4"	34° 59.4"	85° 51' 6.0"	7° 52.7"	44° 34.2"	45.4"	44° 36.7"	41.1"
22 0	85° 46' 10.8"	36° 13.8"	85° 59' 11.2"	9° 34.9"	45° 26.3"	46.8"	45° 28.4"	42.6"
20	85° 57' 11.4"	37° 27.4"	86° 7' 10.8"	11° 11.0"	46° 18.3"	48.2"	46° 19.9"	44.1"
40	86° 8' 12.2"	38° 40.1"	86° 15' 6.1"	12° 40.4"	47° 10.4"	49.5"	47° 11.4"	45.4"
23 0	86° 19' 12.9"	39° 52.1"	86° 22' 58.4"	14° 3.5"	48° 2.3"	50.9"	48° 2.8"	46.8"

I M.Z.Gr.w.	II	VI r_{\odot}	π	r_{\ominus}	VII r'_{\odot}	r'_{\ominus}	VIII $\alpha_{\odot} - \alpha_{\ominus}$	x	y
^h ^m									
20 20	54' 47.4"	897.4"	8.71"	946.5"	906.7"	944.2"	-1426.4"	-1311.1"	-1408.3"
40	47.1"	97.3"			7.1"		-958.0"	-880.4"	-1285.4"
21 0	46.8"	97.2"			7.4"		-500.2"	-459.6"	-1167.5"
20	46.5"	97.1"			7.7"		-51.5"	-47.3"	-1055.0"
40	46.2"	97.0"			7.9"		+389.2"	+357.5"	-948.4"
22 0	45.9"	96.9"			8.1"		+822.9"	+755.9"	-847.5"
20	45.6"	96.8"			8.2"		+1250.9"	+1149.0"	-753.1"
40	45.4"	96.6"			8.2"		+1674.7"	+1538.1"	-664.9"
23 0	45.1"	96.5"			8.2"		+2095.6"	+1924.5"	-583.3"

Hieraus wurden die relativen Coordinaten der Mittelpunkte von Mond und Sonne für jede einzelne Minute Greenwich Zeit für die Dauer der Beobachtungen interpolirt. Die im Nautical Almanac angegebenen Halbmesser von Mond und Sonne sind in Spalt VII in nachstehender Weise durch andere Annahmen ersetzt worden.

Mondhalbmesser nach Hansen's Mondtafeln	R_{\odot} 933".36
Correction nach Oudemans (Astr. Nachr. 1202 u. 2670)	-1.09
angenommen	932.27

Für 1890 Juni 16/17 ist die Correction des scheinbaren Halbmessers entsprechend der Entfernung des Mondes = -1".06.

Mittlerer Sonnenhalbmesser im Nautical Almanac	$R_{\odot} =$ 961".82
dagegen nach Auwers (Astr. Nachr. 2670)	959.56
also Correction des Nautical Almanac	-2.26
oder Correction für den Beobachtungstag	-2.22

Auf diese Weise ergeben sich die in obiger Tabelle enthaltenen Werthe für die der Rechnung zu Grunde gelegten Radien.

Für die in M.Z.Greenwich verwandelten Beobachtungszeiten wurden dann die Grössen x y r_{\odot} und r_{\ominus} interpolirt und damit nach den Wichmann'schen Formeln die Längen der Sehnen und die Differential-Quotienten zur Verbesserung dieser vier Unbekannten berechnet. Da sich aber die Coëfficienten von dr_{\odot} und dr_{\ominus} zu wenig von einander unterscheiden, um eine Verbesserung der Radien berech-

nen zu können, so wurden diese Grössen mit umgekehrten Zeichen auf die Seite der absoluten Glieder der Gleichungen gebracht, um auf die Weise die Verbesserungen dx und dy als Function der an die angewandten Radien noch anzubringenden Verbesserungen auszudrücken.

Die Sehnenlängen sind mit Rücksicht auf alle erforderlichen Verbesserungen, nämlich Theilungsfehler der Objectivscalen, Gang des Mikroskops, Reduction auf die der Temperatur entsprechende Ocularstellung, ferner für Temperaturcorrection und für Refraction verbessert worden.

a) Beobachtungen am Repsold'schen Heliometer (162^{mm} Oeffnung).

Diese Beobachtungen wurden von mir ausgeführt und der damalige Assistent Dr. Buschbaum unterstützte mich durch Aufschreiben der Uhrzeiten und der Nummern der Theilstriche der Objectivscalen. Durch die Registrirung der Trommelablesungen bei den Einstellungen auf die Theilstriche wurde die Messung sehr beschleunigt und es konnten in der ersten Periode hellen Himmels 27 Einstellungen der Hörnerspitzen vorgenommen werden; als es aber gegen Ende der Finsterniss wieder auf kurze Zeit hell wurde, ereignete sich eine Störung am Registrirmikrometer, da der Papierstreifen in Unordnung gerieth, so dass leider nur noch drei Einstellungen gelangen.

Die neuen Heliometer besitzen die Einrichtung, auch Positionswinkel mit grosser Schärfe zu messen. Da aber das Ablesen des Positionskreises erheblich grössere Zeit als die Registrirung der Distanzmessungen erfordert und die Positionswinkel-Messungen den Distanzmessungen gegenüber eine geringere Genauigkeit besitzen, so sind nur letztere gemessen worden. Sollte ich jedoch einmal wieder Gelegenheit haben, derartige Messungen anzustellen, so würde ich nicht unterlassen, beide Coordinaten zu messen.

Die Reduction der Beobachtungen am Repsold'schen Heliometer nach dem in meiner Abhandlung über die Praesepe auseinandergesetzten Verfahren (siehe Die Oerter der hellen Sterne der Praesepe, Astronomische Mittheilungen von der Kgl. Sternwarte zu Göttingen. Vierter Theil. Göttingen 1895) gestaltet sich folgendermassen:

Lfd. Nr.	Sternzeit Göttingen	Messung	Oc.-Stell.	Temperatur	Refract.	Reducirte Messung
	h m s	s				s
1	2 56 53.8	21.1629	— 1	— 25	+ 101	21.1704
2	59 35.3	23.2786	— 1	— 28	+ 110	23.2867
3	3 1 2.8	24.3235	— 1	— 29	+ 114	24.3319
4	1 40.8	24.7764	— 1	— 30	+ 115	24.7848
5	2 37.3	25.3477	— 1	— 31	+ 118	25.3563
6	3 29.8	25.9744	— 1	— 31	+ 119	25.9831
7	5 18.8	26.9314	— 1	— 33	+ 120	26.9400
8	6 9.8	27.4368	— 1	— 33	+ 123	27.4457
9	7 25.8	28.1867	— 1	— 34	+ 125	28.1957
10	8 6.8	28.4447	— 1	— 35	+ 126	28.4537

Lfd. Nr.	Sternzeit Göttingen	Messung	Oc.-Stell.	Temperatur	Refract.	Reducirte Messung
	^h ^m ^s	^s				^s
11	3 8 53.3	28.8734	-1	-35	+127	28.8825
12	9 26.3	29.1747	-1	-36	+128	29.1838
13	10 24.8	29.6165	-1	-36	+129	29.6257
14	11 10.3	29.9777	-1	-37	+130	29.9869
15	12 11.8	30.4400	-1	-37	+130	30.4492
16	12 50.8	30.6627	-1	-38	+131	30.6719
17	13 28.8	30.9933	-1	-38	+132	31.0026
18	14 3.3	31.1733	-1	-39	+132	31.1825
19	14 45.8	31.4832	-1	-39	+132	31.4924
20	15 17.8	31.7169	-1	-39	+133	31.7262
21	15 59.8	31.9827	-1	-40	+133	31.9919
22	16 29.8	32.2033	-1	-40	+133	32.2125
23	17 35.3	32.5456	-1	-41	+133	32.5547
24	18 3.8	32.6846	-1	-41	+133	32.6937
25	18 40.8	32.9133	-1	-41	+134	32.9225
26	24 45.8	34.7292	0	-44	+133	34.7381
27	25 33.3	34.9962	0	-45	+133	35.0050
28	4 51 17.8	27.0043	+4	-38	+89	27.0098
29	52 45.8	26.2277	+4	-37	+86	26.2330
30	53 50.8	25.6631	+4	-36	+83	25.6682

Die meteorologischen Ablesungen waren

Sternzeit	Barom.	Luft-Temperatur	Temp. d. Instruments
^h ^m	^{mm}	^o C.	^o C.
2 52	749.2	+17.6	+16.8
3 47	49.1	16.9	16.6
5 16	48.6	18.4	18.0

Die Verwandlung der in Theilen der Objectivscalen ausgedrückten Sehnenlängen in Bogensekunden erfolgt durch Multiplication mit dem Bogenwerthe eines Skalentheils, nämlich $40''.0167 = [1.602242]$, der aus der Messung der Bogen grössten Kreises mit Berücksichtigung der systematischen Correctionen der Distanzmessungen abgeleitet ist. (Siehe darüber Astr. Nachr. Bd. 142 Seite 347.)

Die Vergleichung der Beobachtung und Rechnung sowie die daraus hervorgehenden Bedingungsgleichungen zur Verbesserung von x, y und einer constanten Grösse c gestalten sich dann folgendermassen:

Mittl. Zt. Greenw.	Sehne		Beob.-Rechn.		Darstellung Beob.-Rechn.										
	Beob.	Rechn.	n	n											
^h ^m ^s 1 20 34 55.0	847.17	846.56	+0.6	-2.17	$dr\odot$	-2.19	$dr\odot$	=	+1.11	dx	+1.47	dy	+1	c	-1.9
2 37 36.1	931.86	932.44	-0.6	-1.97		-2.00			+0.95		+1.32		+1		+0.6
3 39 3.4	973.68	974.02	-0.3	-1.88		-1.91			+0.87		+1.25		-1		+0.1
4 39 41.3	991.81	991.67	+0.1	-1.85		-1.88			+0.85		+1.23		-1		+0.4
5 40 37.6	1014.68	1016.12	-1.4	-1.80		-1.84			+0.81		+1.19		-1		-1.1
6 41 29.9	1039.76	1038.11	+1.6	-1.76		-1.80			+0.77		+1.16		-1		+1.9
7 43 18.7	1078.05	1081.19	-3.1	-1.69		-1.73			+0.70		+1.10		+1		-2.1
8 44 9.5	1098.29	1100.24	-2.0	-1.66		-1.70			+0.68		+1.07		+1		-1.0
9 45 25.3	1128.30	1127.30	+1.0	-1.62		-1.66			+0.64		+1.04		+1		+1.9

	Mittl. Zt. Greenw.			Sehne		Beob.-Rechn.			Darstellung				
	^h	^m	^s	Beob.	Rechn.	<i>n</i>				Beob.-Rechn.			
10	20	46	6.2	1138.63	1141.64	-3.0	-1.60 dr_{\odot}	-1.64 dr_{ζ}	=	+0.62 dx	+1.02 dy	+1 c	-2.1
11		46	52.6	1155.79	1157.16	-1.4	-1.58	-1.62		+0.59	+1.00	-1	-1.2
12		47	25.5	1167.84	1167.95	-0.1	-1.56	-1.60		+0.58	+0.99	-1	0.0
13		48	23.8	1185.53	1186.44	-0.9	-1.54	-1.58		+0.55	+0.97	-1	-0.8
14		49	9.2	1199.98	1200.23	-0.3	-1.52	-1.56		+0.53	+0.96	-1	-0.2
15		50	10.5	1218.48	1218.32	+0.2	-1.50	-1.54		+0.51	+0.94	+1	+1.1
16		50	49.4	1227.39	1229.66	-2.3	-1.48	-1.53		+0.49	+0.92	+1	-1.5
17		51	27.3	1240.62	1240.24	+0.4	-1.47	-1.52		+0.48	+0.91	+1	+1.2
18		52	1.7	1247.82	1249.65	-1.8	-1.46	-1.51		+0.47	+0.90	+1	-1.0
19		52	44.1	1260.22	1260.90	-0.7	-1.44	-1.49		+0.45	+0.89	-1	-0.6
20		53	16.0	1269.58	1269.16	+0.4	-1.43	-1.48		+0.44	+0.88	-1	+0.4
21		53	57.9	1280.22	1279.95	+0.3	-1.42	-1.47		+0.42	+0.87	-1	+0.3
22		54	27.8	1289.04	1287.30	+1.7	-1.41	-1.46		+0.41	+0.86	-1	+1.7
23		55	33.1	1302.73	1302.97	-0.2	-1.39	-1.45		+0.39	+0.85	+1	+0.6
24		56	1.6	1308.30	1309.70	-1.4	-1.38	-1.44		+0.38	+0.84	+1	-0.6
25		56	38.5	1317.45	1318.20	-0.8	-1.37	-1.43		+0.37	+0.83	+1	0.0
26	21	2	42.5	1390.11	1391.87	-1.8	-1.29	-1.36		+0.26	+0.75	+1	-1.1
27		3	29.8	1400.79	1400.67	+0.1	-1.29	-1.36		+0.26	+0.75	-1	0.0
28	22	29	0.3	1080.85	1080.84	0.0	-1.70	-1.73		-1.23	+0.66	-1	-0.9
29		30	28.0	1049.76	1049.50	+0.3	-1.75	-1.78		-1.29	+0.67	-1	-0.6
30		31	32.9	1027.16	1025.24	+1.9	-1.79	-1.82		-1.34	+0.68	+1	+1.7

Hier bedeutet c die von Wichmann eingeführte Constante, die dadurch entsteht, dass man bei der Berechnung der einzelnen Einstellungen eine vorläufige und noch zu verbessernde Annahme für eine Zahl zu machen hat, die der Coincidenz der beiden Objectivscalen entspricht und je nach der Stellung der letzteren positiv oder negativ anzusetzen ist. Die letzte Spalte enthält die nach Einsetzung von dx , dy und c noch übrigbleibenden Fehler, aus denen die wahrscheinlichen Fehler des Resultats berechnet sind.

Aus vorstehenden 30 Gleichungen ergeben sich nach der Methode der kleinsten Quadrate die Endgleichungen

$$\begin{aligned}
 -11''.56 - 19.00 \, dr_{\odot} - 19.55 \, dr_{\zeta} &= +15.10 \, dx + 13.95 \, dy + 1.70 \, c \\
 -13.74 - 46.96 &\quad -48.20 &= +13.95 &+ 29.07 &+ 0.31 \\
 -12.30 + 0.03 &\quad + 0.04 &= + 1.70 &+ 0.31 &+ 30.00
 \end{aligned}$$

Die Auflösung der Gleichungen giebt

$$\begin{aligned}
 dx &= -0''.520 + 0.422 \, dr_{\odot} + 0.427 \, dr_{\zeta} & \text{w. F. } \pm 0''.284 \\
 dy &= -0.220 - 1.818 & -1.863 & \pm 0.204 \\
 c &= -0.378 - 0.004 & -0.004 & \pm 0.150
 \end{aligned}$$

w. F. einer Einstellung $\pm 0''.82$.

Hierbei ist noch des Umstandes zu erwähnen, dass bei der Berechnung der Mondparallaxe der im Berliner Jahrbuche enthaltene Werth $\log \rho = 9.999112$

angewandt worden ist. Da aber das grosse Heliometer in einer Seehöhe von 172 Meter aufgestellt ist, so werden die Werthe der Parallaxe dadurch etwas vergrössert und es bedarf das Resultat der Ausgleichung für die Mitte der Finsterniss noch einer nachträglichen Verbesserung, nämlich

$$d(\alpha_{\zeta} - \alpha_{\odot}) = +0''.027 \qquad d(\delta_{\zeta} - \delta_{\odot}) = +0''.046$$

oder $dx = +0.025$ $dy = +0.046.$

b) Beobachtungen am Fraunhofer'schen Heliometer (76^{mm} Oeffnung).

An diesem Instrumente gelang bei dem Mangel der zweckmässigen Einrichtungen zur Ablesung der Scalen, wie sie die neueren Heliometer von Repsold besitzen, nur eine kleinere Anzahl von Beobachtungen, aber dieselben besitzen den meinigen gegenüber den grossen Vortheil der mehr symmetrischen Vertheilung, die am grossen Heliometer durch die eingetretene Unordnung an dem Registrirapparat verloren ging.

Bei Nr. 1—10 war Dr. Ambronn am Ocular, Dr. Hayn am Ablesemikroskop
am Objectivende,

„ 11—17 „ Dr. Hayn „ Dr. Ambronn „

Auch diese Beobachtungen sind mit Rücksicht auf sämmtliche Instrumental-Constanten und Refraction reducirt, worüber sich das Nähere in der Schrift findet L. Ambronn, Triangulation zwischen sechszehn Sternen der Plejadengruppe. Astronomische Mittheilungen von der Königl. Sternwarte zu Göttingen. Dritter Theil. Göttingen 1894.

Die Messungen und ihre Reductionen in Einheiten der vierten Decimale eines Scalentheils gestalten sich folgendermassen:

Nr.	M.Z. Göttingen	Messung	Oc.- Stellg.	Tem- peratur	Refract.	Reducirte Messung
	h m s	S				S
1	21 15 22.5	48.3295	0	— 58	+ 232	48.3469
2	18 1.5	52.9970	0	— 64	+ 249	53.0155
3	20 30.5	56.7848	+ 4	— 71	+ 260	56.8042
4	23 48.5	61.2050	+ 5	— 76	+ 275	61.2254
5	26 48.5	64.6414	+ 5	— 80	+ 284	64.6623
6	29 34.5	67.4839	+ 6	— 84	+ 289	67.5050
7	32 16.5	70.1199	+ 6	— 89	+ 295	70.1411
8	36 30.5	73.7180	+ 12	— 93	+ 297	73.7396
9	42 21.5	77.5504	+ 13	— 101	+ 296	77.5712
10	22 59 57.5	69.4871	— 108	— 81	+ 212	69.4894
11	23 1 52.5	67.5368	— 105	— 81	+ 208	67.5390
12	4 12.5	65.3228	— 97	— 82	+ 202	65.3251
13	5 55.5	63.5905	— 88	— 81	+ 197	63.5933
14	7 27.5	62.0200	— 86	— 81	+ 193	62.0226
15	8 51.5	60.3191	— 84	— 78	+ 189	60.3218
16	11 54.5	56.6223	— 79	— 74	+ 179	56.6249
17	14 13.5	53.2599	— 74	— 70	+ 169	53.2624

Die meteorologischen Daten in Millimeter und Celsiusgraden waren

M.Z.	Barom.	Lufttemperatur	Temp. d. Instr.
^h 21 ^m 15	^{mm} 750.0	+ 18.0	+ 18.5
21 42	49.5	19.5	20.0
23 0	49.5	19.5	18.0
23 14	49.0	20.0	20.3

Die Reduction für Ocularstellung wurde für Dr. Hayn nach dessen Focussirungen auf Doppelsterne angenommen. Zur Verwandlung in Bogensekunden ist der Scalenwert angewandt worden $17''.9118 = [1.253140]$ nach der erwähnten Abhandlung Ambronn, Plejadengruppe. Damit erhält man nachfolgende Greenwich M.Z., beobachtete und berechnete Sehnenlängen und die daraus hervorgehenden Bedingungsgleichungen:

	Mittl. Zt.			Sehne		Beob.-Rechn.					<i>v</i>	
	Greenw.			Beob.	Rechn.	<i>n</i>						
1	20	35	36.0	865.98	869.66	- 3.7	- 2.11	dr_{\odot}	- 2.14	dr_{ζ}	= + 1.12 dx + 1.51 dy + 1 c	- 1.5
2		38	15.0	949.59	951.42	- 1.8	- 1.93		- 1.96		+ 0.96 + 1.36 + 1	0.0
3		40	44.0	1017.47	1018.82	- 1.4	- 1.80		- 1.83		+ 0.85 + 1.25 - 1	+ 0.7
4		44	2.0	1096.66	1097.50	- 0.8	- 1.67		- 1.70		+ 0.72 + 1.15 - 1	+ 1.0
5		47	2.0	1158.22	1160.20	- 2.0	- 1.57		- 1.61		+ 0.63 + 1.07 - 1	- 0.4
6		49	48.0	1209.14	1211.80	- 2.7	- 1.50		- 1.55		+ 0.55 + 1.01 - 1	- 1.2
7		52	30.0	1256.36	1257.10	- 0.7	- 1.45		- 1.50		+ 0.49 + 0.96 + 1	+ 0.2
8		56	44.0	1320.81	1319.46	+ 1.4	- 1.37		- 1.43		+ 0.40 + 0.90 + 1	+ 2.1
9	21	2	35.0	1389.44	1390.58	- 1.1	- 1.30		- 1.36		+ 0.29 + 0.83 + 1	- 0.6
10	22	20	11.0	1244.68	1239.40	+ 5.3	- 1.47		- 1.52		- 0.93 + 0.61 + 1	+ 3.6
11		22	6.0	1209.75	1208.96	+ 0.8	- 1.51		- 1.55		- 0.98 + 0.61 + 1	- 0.9
12		24	26.0	1170.09	1169.12	+ 1.0	- 1.56		- 1.60		- 1.06 + 0.63 - 1	- 0.4
13		26	9.0	1139.07	1137.64	+ 1.4	- 1.61		- 1.65		- 1.11 + 0.64 - 1	- 0.1
14		27	41.0	1110.94	1107.80	+ 3.1	- 1.65		- 1.69		- 1.17 + 0.65 - 1	+ 1.5
15		29	5.0	1080.48	1079.24	+ 1.2	- 1.70		- 1.73		- 1.23 + 0.66 - 1	- 0.5
16		32	8.0	1014.25	1011.42	+ 2.8	- 1.82		- 1.85		- 1.37 + 0.69 + 1	+ 0.4
17		34	27.0	954.03	954.27	- 0.2	- 1.93		- 1.95		- 1.50 + 0.72 + 1	- 2.8

Aus vorstehenden Gleichungen ergeben sich die Endgleichungen:

$$\begin{aligned}
 & - 27''.46 + 5.30 \, dr_{\odot} + 5.39 \, dr_{\zeta} = + 15.77 \, dx + 1.04 \, dy + 0.30 \, c \\
 & - 6.05 - 25.55 \quad - 26.17 \quad = + 1.04 \quad + 15.00 \quad + 1.13 \\
 & + 3.00 - 1.83 \quad - 1.90 \quad = + 0.30 \quad + 1.13 \quad + 17.00
 \end{aligned}$$

Die Auflösung der Gleichungen giebt:

$$\begin{aligned}
 dx &= - 1''.726 + 0.449 \, dr_{\odot} + 0.459 \, dr_{\zeta} & \text{w. F. } \pm 0''.268 \\
 dy &= - 0.301 - 1.735 \quad - 1.777 & \pm 0.275 \\
 c &= + 0.227 \quad 0.000 \quad - 0.002 & \pm 0.258
 \end{aligned}$$

w. F. einer Einstellung $\pm 1''.03$.

Entsprechend der Seehöhe 162^m,5 des Fraunhofer'schen Heliometers ist hierzu nachträglich noch hinzuzufügen:

$$d(\alpha_{\zeta} - \alpha_{\odot}) = +0''.026 \quad d(\delta_{\zeta} - \delta_{\odot}) = +0''.043$$

oder

$$dx = +0.024 \quad dy = +0.043$$

Das Resultat der Messungen an beiden Heliometern ist also mit Hinweglassung der für diesen Zweck gleichgültigen Ergebnisse für die Grössen c :

Schur. Repsold'sches Heliometer

$$dx = d(\alpha_{\zeta} - \alpha_{\odot}) \cos \frac{1}{2}(\delta_{\zeta} + \delta_{\odot}) = -0''.495 + 0.422 dr_{\odot} + 0.427 dr_{\zeta} \quad \text{w.F. } \pm 0''.284$$

$$dy = d(\delta_{\zeta} - \delta_{\odot}) = -0.174 - 1.818 \quad -1.863 \quad \pm 0.204$$

w. F. einer Einstellung $\pm 0''.82$.

Ambromn und Hayn

$$dx = -1.702 + 0.449 dr_{\odot} + 0.459 dr_{\zeta} \quad \pm 0.268$$

$$dy = -0.258 - 1.735 \quad -1.777 \quad \pm 0.275$$

± 1.03 ,

wobei wie bemerkt als Halbmesser in mittlerer Entfernung angenommen sind:

$$\text{Sonne } R_{\odot} = 961''.82 \text{ (Naut. Alm.)} - 2''.26 \text{ (Auwers)} = 959''.56$$

$$\text{Mond } R_{\zeta} = 933.36 \text{ (Naut. Alm.)} - 1.09 \text{ (Oudemans)} = 932.27$$

Nun haben meine Beobachtungen des Sonnenhalbmessers am Repsold'schen Heliometer in Göttingen ohne Anwendung des Ocular-Prisma ergeben (Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft Bd. 29, Jahrg. 1894, S. 285): In mittlerer Entfernung $R_{\odot} = 960''.25$, mithin ist, um auf meine eigenen Beobachtungen Rücksicht zu nehmen, $dR_{\odot} = +0''.69$, also für diese Finsterniss $dr_{\odot} = +0''.69 \frac{944.22}{959.56} = +0''.68$ zu setzen und damit werden die Verbesserungen

$$\text{Schur } dx = -0''.208 + 0.427 dr_{\zeta} \quad \text{für } R_{\odot} = 960''.25 \text{ in mittl. Entf.}$$

$$dy = -1.410 - 1.863 dr_{\zeta}$$

Für Ambromn haben neuere Beobachtungen am Fraunhofer'schen Heliometer ergeben (V.J.S. der Astron. Ges. 1894) $R_{\odot} = 959''.63$, also Verbesserung des Auwers'schen Halbmessers $dR_{\odot} = +0''.07$ und für diese Finsterniss ist $dr_{\odot} = +0''.07 \frac{944.24}{959.56} = +0''.07$ zu setzen, und damit hat man

$$\text{Ambromn } dx = -1''.671 + 0.459 dr_{\zeta} \quad \text{für } R_{\odot} = 959''.63$$

$$dy = -0.379 - 1.777 dr_{\zeta}$$

In der kürzlich erschienenen Abhandlung von Dr. Kobold „Resultate aus den an der Kaiserl. Univ.-Sternwarte zu Strassburg angestellten Heliometer- und Refractormessungen der partiellen Sonnenfinsternisse 1890 Juni 16/17, 1891 Juni 6 und 1893 April 16 u. s. w. Separatabdruck aus den Annalen der Kaiserl. Univ.

Sternwarte zu Strassburg, zweiter Band“ findet man aus den Beobachtungen am dortigen Fraunhofer'schen Heliometer auf S. 39

$$\text{Kobold} \quad d(\alpha_{\odot} - \alpha_{\ominus}) = -1''.20 \quad d(\delta_{\odot} - \delta_{\ominus}) = -0''.43.$$

Dabei ist von Kobold nach Seite 5 angenommen: Mittlerer Mondradius $R_{\odot} = 932''.85$ nach Küstner, L. Struve und Battermann, und nach Seite 16 für die Sonne $R_{\odot} = 959''.71$.

Reducirt man die Resultate der Göttinger Beobachtungen ebenfalls auf den von Kobold angenommenen Mondradius, so hat man in mittlerer Entfernung die Aenderung $dR_{\odot} = 932''.85 - 932''.27 = +0''.58$ oder am Beobachtungstage für die Mitte der Finsterniss

$$d_{\odot} = +0''.58 \frac{907.9}{932.27} = +0''.56.$$

Behält man für die drei Beobachter die aus ihren eigenen Beobachtungen hervorgehenden Sonnendurchmesser bei und reducirt die Mondhalbmesser auf den von Kobold angenommenen Werth, so erhält man zunächst für die Göttinger Beobachter

$$\begin{array}{l} \text{Schur} \quad \left. \begin{array}{l} dx = -0''.208 + 0.427 \times 0''.56 = -0''.208 + 0''.239 = +0''.03 \\ dy = -1.410 - 1.863 \times 0.56 = -1.410 - 1.042 = -2.45 \end{array} \right\} \\ \text{Ambromn} \quad \left. \begin{array}{l} dx = -1.671 + 0.459 \times 0.56 = -1.671 + 0.257 = -1.41 \\ dy = -0.379 - 1.777 \times 0.56 = -0.379 - 0.995 = -1.37 \end{array} \right\} \\ \text{Hayn} \end{array}$$

und da

$$dx = d\alpha \cos \delta \quad \text{und} \quad \cos \delta = 1.088$$

so hat man schliesslich

	$d(\alpha_{\odot} - \alpha_{\ominus})$	$d(\delta_{\odot} - \delta_{\ominus})$	berechnet mit	
			R_{\odot}	R_{\odot}
Schur	+ 0''.03	- 2''.45	960''.25	932''.85
Ambromn und Hayn	- 1.53	- 1.37	959.63	„
Kobold	- 1.20	- 0.43	959.71	„
Kobold Gesamtergebnis	- 0.86	- 0.55		

Von Kobold sind ausser seinen Sehnenbeobachtungen am Heliometer noch die Refractorbeobachtungen von Professor Becker und Dr. Zwink, sowie die an verschiedenen Orten angestellten Contactbeobachtungen verwandt worden, deren Resultat ich der Kürze halber mit dem Namen: „Kobold Gesamtergebnis“ bezeichne.

Die hier auftretenden Unterschiede überschreiten in erheblicher Weise die aus der inneren Uebereinstimmung der Messungen folgenden und nur 2 bis 3 zehntel Secunden betragenden wahrscheinlichen Fehler für die einzelnen Beobachter und die Annahme verschiedener Werthe für die Radien von Mond und Sonne

bringt besonders in der Declination bedeutende Aenderungen hervor. Will man von den oben angenommenen Werthen zu anderen übergehen, so sind die entsprechenden Aenderungen der relativen Coordinaten nach dem Obigen

Schur	$d\alpha = +0.459 d\odot + 0.464 d\zeta$	$d\delta = -1.818 d\odot - 1.863 d\zeta$
Ambromm und Hayn	+ 0.489 + 0.500	- 1.735 - 1.777
Kobold	+ 0.573 + 0.573	- 1.878 - 1.980

Die Zahlen für Kobold finden sich in seiner Abhandlung Seite 11 und die Coefficienten in $d\alpha$ entstehen aus denen von dx durch Multiplication mit $\sec \delta = 1.088$.

Wollte man z. B. für den Sonnendurchmesser überall den Werth annehmen, der sich aus Beobachtungen an den kleinen Fraunhofer'schen Heliometern ergibt und dann für mich das Resultat meiner Beobachtungen am Göttinger Heliometer während der Jahre 1892—94 nehmen (siehe V.J.S. 1894) und darnach setzen

$$dR_{\odot} = (959''.82 - 960''.25) = -0''.43,$$

so hätte man

$$\begin{aligned} \text{Schur} \quad d(\alpha_{\zeta} - \alpha_{\odot}) &= +0''.03 + 0.459 \times -0''.43 = -0''.17 \\ d(\delta_{\zeta} - \delta_{\odot}) &= -2.45 - 1.818 \times -0.43 = -1.67 \end{aligned}$$

Dadurch würde eine bessere Uebereinstimmung mit den Ergebnissen der Beobachtungen an den Fraunhofer'schen Heliometern in Göttingen und Strassburg erzielt, aber dass sich der Sonnendurchmesser aus den Beobachtungen am grossen Göttinger Heliometer um etwa $0''.9$, also der Halbmesser um etwa $0''.45$ grösser ergibt als am Fraunhofer'schen Heliometer, darüber lassen die an genanntem Orte (V.J.S. 1894) mitgetheilten Zahlen für Schur und für Ambromm nicht den geringsten Zweifel.

Es würde von Werth sein auch in Bezug der Mondhalbmesser nicht von Bestimmungen an anderen Instrumenten abhängig zu sein, sondern denselben aus selbstständigen Beobachtungen an den hier in Frage kommenden Instrumenten benutzen zu können.

Will man aus den oben mitgetheilten Zahlen ein Endresultat ziehen und die Gewichte etwa so ansetzen, dass man den Heliometerbeobachtungen in Göttingen einzeln das Gewicht 1 und dem Gesamtergebnisse der Kobold'schen Untersuchung aus Heliometer-Refractor- und Control-Beobachtungen das Gewicht 3 ertheilt, so hat man

	$d(\alpha_{\zeta} - \alpha_{\odot})$	$d(\delta_{\zeta} - \delta_{\odot})$	Gewicht	Annahme für mittl. Entf.
Schur	+ 0''.03	- 2''.45	1	$R_{\odot} 960''.25 \quad r_{\zeta} 932''.85$
Ambromm und Hayn	- 1.53	- 1.37	1	959.63 932.85
Kobold Gesamtergebnisse	- 0.86	- 0.55	3	959.71 932.85

und somit das Endresultat aller Beobachtungen der Sonnenfinsterniss von 1890 Juni 16/17

$$d(\alpha_{\zeta} - \alpha_{\odot}) = -0''.82 \quad d(\delta_{\zeta} - \delta_{\odot}) = -1''.09.$$

Die im Nautical Almanac angesetzten Halbmesser von Mond und Sonne sind in obiger Tabelle Columnne VII wieder in nachstehender Weise durch andere Annahmen ersetzt worden:

Mondhalbmesser nach Hansen	$R_{\odot} = 933''.36$
Correction nach Oudemans	-1.09
corrigirter Halbmesser	932.27

Für 1891 Juni 6 ist die entsprechende Correction des scheinbaren Mondhalbmessers im Nautical Almanac -1.10

Mittlerer Sonnenhalbmesser im Nautical Almanac	$R_{\odot} = 961''.82$
dagegen nach Auwers Astr. Nachr. 2670	959.56
also Correction des Nautical Almanac	-2.26
oder für den scheinbaren Sonnenhalbmesser 1891 Juni 6	-2.23

Reduction der Sehnenlängen.

Nr.	Sternzeit Göttingen	Messung	Oc.- Stellung	Tem- peratur	Refract.	Reducirte Messung
	^h ^m	^s				^s
1	10 47 37.4	20.4301	- 23	- 33	+ 494	20.4739
2	49 48.9	22.5027	- 26	- 36	+ 559	22.5524
3	50 39.2	23.0101	- 27	- 37	+ 578	23.0615
4	51 19.4	23.7372	- 27	- 38	+ 604	23.7911
5	52 25.9	24.6019	- 28	- 40	+ 634	24.6585
6	52 54.4	24.8503	- 28	- 40	+ 640	24.9075
7	53 48.2	25.6192	- 29	- 41	+ 667	25.6789
8	54 17.9	25.8126	- 30	- 41	+ 674	25.8729
9	54 50.4	26.4256	- 31	- 42	+ 695	26.4878
10	55 32.9	26.6434	- 31	- 43	+ 705	26.7065
11	56 14.9	27.0133	- 31	- 43	+ 723	27.0732
12	56 45.9	27.4415	- 31	- 44	+ 733	27.5073
13	57 25.6	27.7192	- 33	- 44	+ 746	27.7861
14	58 11.9	28.2321	- 34	- 45	+ 764	28.3006
15	11 3 30.7	30.7173	- 35	- 49	+ 857	30.7946
16	4 13.4	30.9244	- 36	- 50	+ 864	31.0022
17	5 1.9	31.1750	- 36	- 50	+ 878	31.2542
18	5 43.9	31.3539	- 36	- 50	+ 881	31.4334
19	6 26.9	31.6313	- 37	- 51	+ 888	31.7113
20	6 56.4	31.8636	- 37	- 51	+ 894	31.9442
21	7 30.4	32.0401	- 37	- 51	+ 899	32.1212
22	7 56.9	32.1350	- 37	- 51	+ 900	32.2162
23	8 34.2	32.4196	- 37	- 52	+ 907	32.5014
24	9 5.9	32.4875	- 37	- 52	+ 908	32.5694
25	9 36.1	32.6218	- 38	- 52	+ 910	32.7038
26	10 2.9	32.6843	- 38	- 52	+ 910	32.7663
27	10 51.4	32.8872	- 38	- 52	+ 910	32.9692
28	11 33.4	33.0268	- 38	- 53	+ 914	33.1091

Nr.	Sternzeit Göttingen	Messung	Oc.- Stellung	Tem- peratur	Refract.	Reducirte Messung
	h m	s				s
29	11 12 4.9	33.1585	— 39	— 53	+ 913	33.2406
30	12 31.9	33.2833	— 39	— 53	+ 913	33.3654
31	13 19.2	33.4593	— 39	— 53	+ 913	33.5414
32	13 46.9	33.5535	— 39	— 53	+ 913	33.6356
33	14 58.9	33.7547	— 40	— 54	+ 905	33.8358
34	15 31.0	33.7875	— 40	— 54	+ 899	33.8680
35	16 3.9	33.8425	— 40	— 54	+ 899	33.9225
36	16 30.9	33.8951	— 40	— 54	+ 890	33.9745
37	17 0.6	33.9530	— 40	— 54	+ 885	34.0321
38	17 28.9	33.9797	— 40	— 54	+ 877	34.0580
39	18 10.4	34.1813	— 40	— 54	+ 872	34.2591
40	18 38.4	34.1301	— 40	— 54	+ 871	34.2078
41	19 11.9	34.2324	— 40	— 54	+ 857	34.3087
42	19 29.4	34.2756	— 40	— 55	+ 854	34.3515
43	20 14.6	34.3179	— 40	— 55	+ 841	34.3925
44	20 42.4	34.3119	— 40	— 55	+ 832	34.3856
45	21 16.4	34.3353	— 41	— 55	+ 816	34.4073
46	21 41.4	34.3089	— 41	— 55	+ 813	34.3806
47	22 27.0	34.4580	— 41	— 55	+ 800	34.5284
48	23 0.9	34.3540	— 41	— 55	+ 788	34.4232
49	23 43.9	34.3897	— 41	— 55	+ 771	34.4572
50	24 5.9	34.3912	— 41	— 55	+ 762	34.4578
51	24 35.4	34.3219	— 41	— 55	+ 755	34.3878
52	25 22.8	34.2754	— 41	— 55	+ 729	34.3387
53	25 49.9	34.3202	— 41	— 54	+ 718	34.3325
54	26 20.4	34.2288	— 41	— 54	+ 703	34.2896
55	26 59.8	34.2634	— 41	— 54	+ 687	34.3226
56	27 26.2	34.1978	— 41	— 54	+ 674	34.2557
57	27 58.4	34.1765	— 41	— 54	+ 661	34.2331
58	28 22.4	34.0840	— 41	— 54	+ 648	34.1393
59	28 51.9	34.0478	— 41	— 54	+ 635	34.1018
60	29 16.9	33.9655	— 41	— 54	+ 622	34.0182
61	29 52.9	33.9450	— 41	— 54	+ 606	33.9961
62	30 15.9	33.9063	— 41	— 54	+ 594	33.9562
63	30 51.9	33.9128	— 41	— 54	+ 579	33.9612
64	31 16.4	33.7725	— 41	— 54	+ 564	33.8194
65	32 2.9	33.6863	— 41	— 53	+ 543	33.7312
66	32 27.4	33.6038	— 41	— 53	+ 531	33.6475
67	33 0.6	33.4503	— 41	— 53	+ 513	33.4922
68	33 29.9	33.3747	— 41	— 53	+ 499	33.4152
69	33 56.4	33.3589	— 40	— 53	+ 487	33.3983
70	34 29.9	33.1948	— 40	— 52	+ 470	33.2326
71	35 19.9	33.0807	— 40	— 52	+ 447	33.1162
72	35 46.4	32.9184	— 40	— 52	+ 433	32.9525
73	36 42.4	32.7479	— 39	— 51	+ 407	32.7796
74	37 8.4	32.6658	— 39	— 51	+ 395	32.6963
75	37 47.9	32.3197	— 39	— 51	+ 374	32.3481
76	38 33.6	32.1957	— 39	— 51	+ 355	32.2222

Nr.	Sternzeit Göttingen	Messung	Oc.- Stellung	Tem- peratur	Refract.	Reducirte Messung
77	h m s 11 48 9.8	s 27.9396	- 33	- 44	+ 142	s 27.9461
78	48 40.9	27.7207	- 33	- 44	+ 134	27.7264
79	49 21.9	27.3461	- 33	- 44	+ 124	27.3508
80	49 49.3	27.0369	- 33	- 43	+ 117	27.0410
81	50 21.9	26.6644	- 32	- 42	+ 110	26.6680
82	50 46.2	26.3130	- 32	- 42	+ 105	26.3161
83	51 19.4	25.8937	- 31	- 41	+ 100	25.9015
84	51 45.9	25.5654	- 31	- 40	+ 93	25.5676
85	52 19.4	25.1689	- 30	- 40	+ 87	25.1706
86	52 58.4	24.7735	- 30	- 39	+ 81	24.7747
87	53 36.4	24.2677	- 30	- 38	+ 75	24.2684
88	54 3.9	23.7653	- 30	- 37	+ 71	23.7657
89	54 43.9	23.2529	- 28	- 37	+ 66	23.2531
90	55 9.9	22.7810	- 28	- 36	+ 64	22.7810
91	55 49.4	22.2132	- 27	- 35	+ 58	22.2128
92	56 28.4	21.5995	- 27	- 34	+ 56	21.5990
93	56 52.4	21.1079	- 26	- 33	+ 53	21.1073
94	57 36.2	20.4076	- 25	- 32	+ 50	20.4069
95	58 16.9	19.6482	- 24	- 31	+ 46	19.6475
96	58 44.2	18.9199	- 23	- 30	+ 44	18.9190
97	59 51.4	17.6266	- 22	- 28	+ 41	17.6257
98	12 0 14.9	16.8940	- 21	- 27	+ 39	16.8931
99	0 51.8	15.8573	- 20	- 23	+ 38	15.8566
100	1 19.9	15.3630	- 19	- 24	+ 37	15.3674

Die meteorologischen Daten waren :

Sternzeit	Barom.	Luft-Temperatur	Temp. d. Instruments
h m 10 50	mm 744.1	° + 17.5	° + 18.5
11 40		+ 16.8	+ 19.8
11 47	44.1		
12 8	44.0	+ 16.4	+ 19.5

Die Vergleichung der Beobachtung und Rechnung, sowie die daraus hervorgehenden Bedingungsgleichungen für die Verbesserung von x , y und die Bestimmung der Constanten c sind in folgender Tabelle enthalten.

Mittl. Zt. Greenw.	Sehne Beob.	Beob.-Rechn. Rechn. n											
h m s	"	"											
1 5 8 34	819.30	824.43	- 5.1	- 2.295	dr_{\odot}	- 2.294	dr_{\ominus}	= + 1.476	dx	- 1.444	dy	+ 1	c
2 10 45	902.47	906.77	- 4.3	- 2.086		- 2.086		+ 1.269		- 1.319		+ 1	
3 11 35	922.85	935.01	- 12.2	- 2.023		- 2.023		+ 1.203		- 1.282		- 1	
4 12 15	952.04	956.89	- 4.8	- 1.977		- 1.976		+ 1.154		- 1.242		- 1	
5 13 21	986.75	990.63	- 3.9	- 1.909		- 1.909		+ 1.081		- 1.215		- 1	
6 13 50	996.72	1004.75	- 8.0	- 1.883		- 1.882		+ 1.051		- 1.199		- 1	
7 14 43	1027.59	1029.75	- 2.2	- 1.837		- 1.836		+ 0.999		- 1.172		+ 1	
8 15 13	1035.35	1043.22	- 7.9	- 1.813		- 1.813		+ 0.971		- 1.159		+ 1	

	Mittl. Zt.			Sehne		Beob.-Rechn.						
	Greenw.			Beob.	Rechn.	n						
	^h	^m	^s	"	"	"	"	dr_{\odot}	dr_{ζ}	$= + 0.943 dx - 1.146 dy + 1 c$		
9	5	15	45	1059.95	1056.96	+ 3.0	- 1.790	dr_{\odot}	- 1.789	dr_{ζ}		
10		16	28	1068.71	1075.21	- 6.5	- 1.759		- 1.759	+ 0.896	- 1.127	+ 1
11		17	10	1083.58	1092.13	- 8.6	- 1.732		- 1.731	+ 0.873	- 1.112	- 1
12		17	41	1100.76	1104.07	- 3.3	- 1.713		- 1.713	+ 0.849	- 1.102	- 1
13		18	20	1111.91	1118.92	- 7.0	- 1.690		- 1.690	+ 0.820	- 1.088	- 1
14		19	7	1132.50	1135.90	- 3.4	- 1.665		- 1.665	+ 0.787	- 1.074	- 1
15		24	24	1232.30	1232.45	- 0.2	- 1.534		- 1.534	+ 0.592	- 1.001	+ 1
16		25	7	1240.61	1243.54	- 2.9	- 1.521		- 1.520	+ 0.569	- 0.994	+ 1
17		25	55	1250.69	1255.18	- 4.5	- 1.507		- 1.506	+ 0.544	- 0.987	+ 1
18		26	37	1257.87	1264.88	- 7.0	- 1.495		- 1.495	+ 0.522	- 0.981	+ 1
19		27	20	1268.98	1274.32	- 5.3	- 1.484		- 1.484	+ 0.501	- 0.975	- 1
20		27	50	1278.30	1280.64	- 2.3	- 1.476		- 1.476	+ 0.486	- 0.971	- 1
21		28	24	1285.39	1287.56	- 2.2	- 1.465		- 1.465	+ 0.469	- 0.964	- 1
22		28	50	1289.19	1292.63	- 3.4	- 1.463		- 1.463	+ 0.458	- 0.964	- 1
23		29	27	1300.60	1299.47	+ 1.1	- 1.455		- 1.455	+ 0.441	- 0.961	+ 1
24		29	59	1303.32	1305.34	- 2.2	- 1.445		- 1.445	+ 0.425	- 0.955	+ 1
25		30	29	1308.70	1310.56	- 1.9	- 1.443		- 1.443	+ 0.412	- 0.955	+ 1
26		30	56	1311.20	1315.15	- 4.0	- 1.437		- 1.438	+ 0.400	- 0.952	+ 1
27		31	44	1319.32	1322.73	- 3.4	- 1.429		- 1.429	+ 0.379	- 0.948	- 1
28		32	26	1324.92	1329.08	- 4.2	- 1.422		- 1.422	+ 0.361	- 0.945	- 1
29		32	57	1330.18	1333.41	- 3.2	- 1.418		- 1.418	+ 0.347	- 0.943	- 1
30		33	24	1335.18	1337.10	- 1.9	- 1.414		- 1.414	+ 0.336	- 0.941	- 1
31		34	11	1342.22	1342.96	- 0.7	- 1.408		- 1.408	+ 0.316	- 0.939	+ 1
32		34	39	1345.99	1345.71	+ 0.3	- 1.405		- 1.405	+ 0.306	- 0.938	+ 1
33		35	51	1354.00	1354.06	- 0.1	- 1.396		- 1.396	+ 0.274	- 0.933	+ 1
34		36	23	1355.29	1357.09	- 1.8	- 1.393		- 1.393	+ 0.262	- 0.933	+ 1
35		36	56	1357.47	1360.16	- 2.7	- 1.389		- 1.390	+ 0.248	- 0.933	- 1
36		37	22	1359.55	1362.40	- 2.9	- 1.387		- 1.388	+ 0.237	- 0.932	- 1
37		37	52	1361.85	1364.72	- 2.9	- 1.385		- 1.385	+ 0.226	- 0.931	- 1
38		38	20	1362.89	1366.78	- 3.9	- 1.383		- 1.383	+ 0.215	- 0.931	- 1
39		39	1	1370.94	1369.44	+ 1.5	- 1.380		- 1.381	+ 0.198	- 0.931	+ 1
40		39	29	1368.88	1369.89	- 1.0	- 1.379		- 1.380	+ 0.192	- 0.931	+ 1
41		40	3	1372.92	1372.86	+ 0.1	- 1.376		- 1.377	+ 0.174	- 0.930	+ 1
42		40	20	1374.64	1373.64	+ 1.0	- 1.376		- 1.376	+ 0.167	- 0.930	+ 1
43		41	5	1376.28	1375.59	+ 0.7	- 1.374		- 1.375	+ 0.150	- 0.930	- 1
44		41	33	1376.00	1376.37	- 0.4	- 1.373		- 1.374	+ 0.139	- 0.931	- 1
45		42	7	1376.87	1377.36	- 0.5	- 1.372		- 1.373	+ 0.126	- 0.931	- 1
46		42	32	1375.80	1377.88	- 2.1	- 1.371		- 1.372	+ 0.116	- 0.931	- 1
47		43	18	1381.71	1378.40	+ 3.3	- 1.371		- 1.372	+ 0.099	- 0.933	+ 1
48		43	51	1377.50	1378.59	- 1.1	- 1.370		- 1.371	+ 0.086	- 0.933	+ 1
49		44	33	1378.87	1378.51	+ 0.4	- 1.370		- 1.371	+ 0.070	- 0.934	+ 1
50		44	56	1378.89	1378.34	+ 0.5	- 1.371		- 1.372	+ 0.061	- 0.936	+ 1
51		45	26	1376.09	1377.90	- 1.8	- 1.371		- 1.372	+ 0.049	- 0.938	- 1
52		46	13	1374.12	1376.86	- 2.7	- 1.372		- 1.373	+ 0.031	- 0.940	- 1

Mittl. Zt.	Sehne		Beob.-Rechn.											
	Greenw.	Beob.	Rechn.	<i>n</i>										
53	^h 5 ^m 46 ^s 40	1375.88	1376.09	-0.2	-1.373	dr_{\odot}	-1.374	dr_{ζ}	= +0.021	dx	-0.941	dy	-1	<i>c</i>
54	47 10	1372.16	1375.07	-2.9	-1.374		-1.375		+0.009		-0.942		-1	
55	47 49	1373.48	1373.37	+0.1	-1.377		-1.377		-0.006		-0.945		+1	
56	48 16	1370.80	1372.05	-1.3	-1.377		-1.378		-0.016		-0.947		+1	
57	48 48	1369.90	1370.22	-0.3	-1.378		-1.380		-0.029		-0.949		+1	
58	49 12	1366.15	1368.83	-2.7	-1.380		-1.381		-0.038		-0.951		+1	
59	49 41	1364.64	1366.88	-2.2	-1.382		-1.383		-0.049		-0.953		-1	
60	50 6	1361.30	1364.98	-3.7	-1.384		-1.385		-0.059		-0.955		-1	
61	50 42	1360.41	1362.13	-1.7	-1.387		-1.388		-0.074		-0.959		-1	
62	51 5	1358.82	1360.19	-1.4	-1.389		-1.390		-0.083		-0.961		-1	
63	51 41	1359.02	1356.89	+2.1	-1.392		-1.393		-0.097		-0.964		+1	
64	52 6	1353.34	1354.34	-1.0	-1.394		-1.395		-0.107		-0.967		+1	
65	52 52	1349.82	1349.38	+0.4	-1.400		-1.401		-0.126		-0.972		+1	
66	53 17	1346.47	1346.56	-0.1	-1.403		-1.404		-0.136		-0.975		+1	
67	53 50	1340.25	1342.50	-2.3	-1.407		-1.408		-0.153		-0.979		-1	
68	54 19	1337.17	1338.74	-1.6	-1.410		-1.413		-0.162		-0.983		-1	
69	54 45	1336.49	1335.33	+1.2	-1.414		-1.416		-0.173		-0.986		-1	
70	55 19	1329.86	1330.41	-0.6	-1.419		-1.421		-0.187		-0.991		-1	
71	56 9	1325.21	1322.89	+2.3	-1.428		-1.429		-0.208		-0.998		+1	
72	56 35	1318.65	1318.70	-0.1	-1.432		-1.433		-0.220		-1.002		+1	
73	57 31	1311.73	1309.09	+2.7	-1.442		-1.444		-0.244		-1.012		+1	
74	57 57	1308.40	1304.38	+4.0	-1.448		-1.449		-0.256		-1.016		+1	
75	58 36	1294.43	1297.06	-2.6	-1.455		-1.457		-0.273		-1.023		-1	
76	59 22	1289.43	1287.75	+1.7	-1.467		-1.468		-0.295		-1.032		-1	
77	6 8 56	1118.32	1119.88	-1.6	-1.686		-1.688		-0.617		-1.210		-1	
78	9 27	1109.52	1107.39	+2.1	-1.705		-1.706		-0.639		-1.225		-1	
79	10 8	1094.49	1090.55	+3.9	-1.731		-1.733		-0.670		-1.246		+1	
80	10 36	1082.10	1078.37	+3.7	-1.751		-1.752		-0.692		-1.261		+1	
81	11 8	1067.17	1064.25	+2.9	-1.774		-1.775		-0.717		-1.278		+1	
82	11 32	1053.09	1053.36	-0.3	-1.793		-1.794		-0.741		-1.299		+1	
83	12 5	1036.50	1037.75	-1.3	-1.820		-1.821		-0.765		-1.314		-1	
84	12 32	1023.13	1024.70	-1.6	-1.842		-1.844		-0.789		-1.332		-1	
85	13 5	1007.24	1007.94	-0.7	-1.873		-1.874		-0.821		-1.355		-1	
86	13 44	991.40	987.35	+4.1	-1.912		-1.913		-0.860		-1.386		-1	
87	14 22	971.14	966.37	+4.8	-1.953		-1.954		-0.900		-1.418		+1	
88	14 49	951.03	951.16	-0.1	-1.985		-1.986		-0.930		-1.441		+1	
89	15 29	930.51	927.75	+2.8	-2.035		-2.036		-0.977		-1.480		+1	
90	15 55	911.62	911.45	+0.2	-2.071		-2.073		-1.010		-1.507		+1	
91	16 35	888.88	886.14	+2.7	-2.130		-2.132		-1.072		-1.553		-1	
92	17 14	864.32	859.72	+4.6	-2.196		-2.196		-1.122		-1.602		-1	
93	17 37	844.65	843.39	+1.3	-2.239		-2.240		-1.158		-1.635		-1	
94	18 21	816.62	811.16	+5.5	-2.327		-2.329		-1.234		-1.702		-1	
95	19 2	786.23	778.86	+7.4	-2.424		-2.425		-1.314		-1.775		+1	
96	19 29	757.08	756.80	+0.3	-2.495		-2.496		-1.372		-1.828		+1	

	Mittl. Zt.			Sehne		Beob.-Rechn.					
	Greenw.			Beob.	Rechn.	n					
	^h	^m	^s	"	"	"					
97	6	20	36	705.33	696.97	+ 8.4	- 2.709	$dr\odot$	- 2.710	$dr\zeta$	= - 1.543 dx - 1.990 dy + 1 c
98	20	59		676.01	674.68	+ 1.3	- 2.798		- 2.799		- 1.613 - 2.057 + 1
99	21	36		634.53	636.90	- 2.4	- 2.965		- 2.966		- 1.741 - 2.182 - 1
100	22	4		614.95	606.08	+ 8.9	- 3.115		- 3.116		- 1.856 - 2.295 - 1

Dass die n -Werthe anfänglich stark negativ sind und gegen Ende positiv, liegt, wie die Ausgleichung zeigt, darin, dass x einer grösseren Verbesserung bedarf. Aber innerhalb benachbarter Werthe von n zeigen sich namentlich zu Anfang und zu Ende der Beobachtungsreihe oft sehr grosse Unregelmässigkeiten, die, wie eine nachträgliche Prüfung der Registrirstreifen gezeigt hat, nicht etwa in fehlerhaften Ablesungen ihren Grund haben, sondern dadurch erklärbar sind, dass zu Anfang bei dem Fortrücken der Wolken und gegen Ende bei dem niedrigen Stande der Sonne in etwa 8 Grad Höhe die Bilder ganz ungemein unruhig waren. Schon zu Anfang der Beobachtung war die Höhe der Sonne nur 19 Grad, so dass also die ganze Messungsreihe unter sehr ungünstigen Verhältnissen angestellt ist und nur die sehr grosse Zahl von Einstellungen lässt hoffen, ein brauchbares Endresultat zu erlangen.

Da nun die Beobachtungen insofern völlig symmetrisch angeordnet sind, dass immer je zwei Einstellungen bei Rechts- und bei Linksdrehung der Distanzschraube vor und nach dem Durchschrauben der Objectivhälften vorhanden sind und demnach die als constant betrachtete Grösse c bei vier aufeinanderfolgenden Gleichungen in der Anordnung $++--$ oder $--++$ vorkommt und die Kenntniss dieser Grösse selbst keine besondere Bedeutung hat, so wäre es eine überflüssige Arbeit gewesen, sämmtliche 100 Bedingungsgleichungen mit drei Unbekannten einzeln zu behandeln. Es sind deshalb je vier Gleichungen zu einem Mittelwerthe vereinigt, wobei die Grösse c dann gänzlich verschwindet. Dies kommt also auf das bei dem Messen unveränderlicher Abstände gebräuchliche Verfahren hinaus, immer vier einzelne Einstellungen in beiden Lagen der Objectivhälften und bei Rechts- und Linksdrehung der Distanzschraube zu einer Distanzmessung zu vereinigen.

Auf diese Weise entstehen nachfolgende 25 Bedingungsgleichungen:

Gruppe	Nr.	Beob.-Rechn.					Beob.-Rechn.	
		n						v
1	1—4	- 6.60	- 2.10	$dr\odot$	- 2.09	$dr\zeta$	= + 1.28 dx - 1.32 dy	- 0.5
2	5—8	- 5.50	- 1.86		- 1.86		+ 1.03 - 1.19	- 0.5
3	9—12	- 3.85	- 1.75		- 1.75		+ 0.89 - 1.12	+ 0.6
4	13—16	- 3.38	- 1.60		- 1.60		+ 0.69 - 1.04	+ 0.2
5	17—20	- 4.77	- 1.49		- 1.49		+ 0.51 - 0.98	- 1.9
6	21—24	- 1.68	- 1.46		- 1.46		+ 0.45 - 0.96	+ 0.9
7	25—28	- 3.38	- 1.43		- 1.43		+ 0.39 - 0.95	- 1.0
8	29—32	- 1.38	- 1.41		- 1.41		+ 0.33 - 0.94	+ 0.7
9	33—36	- 1.88	- 1.39		- 1.39		+ 0.26 - 0.93	0.0

Gruppe	Nr.	Beob.-Rechn. <i>n</i>	Beob.-Rechn. <i>v</i>
10	37-40	-1.58 -1.38 dr_{\odot} -1.38 dr_{ζ} = +0.21 dx -0.93 dy	+0.1
11	41-44	+0.35 -1.37 -1.38 +0.16 -0.93	+1.8
12	45-48	+0.15 -1.37 -1.37 +0.11 -0.93	+1.4
13	49-52	-0.90 -1.37 -1.37 +0.05 -0.94	+1.2
14	53-56	-1.08 -1.37 -1.38 0.00 -0.94	-0.2
15	57-60	-2.23 -1.38 -1.38 -0.04 -0.95	-1.5
16	61-64	-0.50 -1.39 -1.39 -0.09 -0.96	0.0
17	65-68	-0.90 -1.40 -1.41 -0.14 -0.98	-0.5
18	69-72	+0.70 -1.42 -1.43 -0.20 -0.99	+0.8
19	73-76	+1.45 -1.45 -1.46 -0.27 -1.02	+1.4
20	77-80	+2.02 -1.72 -1.72 -0.65 -1.24	+0.7
21	81-84	-0.08 -1.81 -1.81 -0.75 -1.31	-1.7
22	85-88	+2.03 -1.93 -1.93 -0.88 -1.40	0.0
23	89-92	+2.58 -2.11 -2.11 -1.05 -1.54	0.0
24	93-96	+3.63 -2.37 -2.37 -1.27 -1.74	+0.4
25	97-100	+4.05 -2.90 -2.90 -1.69 -2.13	-0.4

Bei dieser Zusammenziehung sind die grossen Unregelmässigkeiten in den *n*-Werthen natürlich stark ausgeglichen und der Verlauf lässt jetzt klar erkennen, dass dx einen grösseren Werth erhalten wird.

Die Behandlung der Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate führt auf die Endgleichungen

$$\begin{aligned}
 -43''.11 + 4.56 dr_{\odot} + 4.57 dr_{\zeta} &= +12.30 dx + 4.20 dy \\
 +15.66 + 49.47 dr_{\odot} + 49.51 dr_{\zeta} &= +4.20 dx + 34.31 dy
 \end{aligned}$$

woraus sich ergibt

$$\begin{aligned}
 dx &= -3''.820 - 0.127 dr_{\odot} - 0.127 dr_{\zeta} & \text{w. F. } \pm 0''.187 \\
 dy &= +0.924 + 1.457 dr_{\odot} + 1.458 dr_{\zeta} & \pm 0.114 \\
 & \text{w. F. einer Gleichung} = \pm 0''.64.
 \end{aligned}$$

Nun muss hier noch bemerkt werden, dass bei der Berechnung von *x* ein kleiner Irrthum unterlaufen ist, indem bei der Berechnung der Mondparallaxe durch einen Schreibfehler der Werth $\log \rho \cos \varphi'$ für Göttingen 9.794774 anstatt 9.794754, also um 20 Einheiten der sechsten Decimale fehlerhaft angesetzt worden ist. Dadurch entsteht in den Werthen $\Delta \alpha_{\zeta}$ ein Fehler von durchschnittlich +0''.090 oder in dx von +0''.083, der jetzt wieder in Abrechnung gebracht werden muss.

Es heisst also nach dieser Berichtigung

$$\begin{aligned}
 dx &= -3''.903 - 0.127 dr_{\odot} - 0.127 dr_{\zeta} \\
 dy &= +0.924 + 1.457 dr_{\odot} + 1.458 dr_{\zeta}
 \end{aligned}$$

Ferner muss hier wie bei der anderen Finsterniss wegen der bei der Parallaxe

axenrechnung vernachlässigten Seehöhe des Heliometers noch eine Verbesserung angebracht werden, nämlich

$$d(\alpha_{\zeta} - \alpha_{\odot}) = +0''.065 \quad d(\delta_{\zeta} - \delta_{\odot}) = +0''.072$$

oder
$$dx = +0.060 \quad dy = +0.072$$

Das Endresultat ist also

$$\begin{aligned} dx &= -3''.838 - 0.127 dr_{\odot} - 0.127 dr_{\zeta} \\ dy &= +0.996 + 1.457 dr_{\odot} + 1.458 dr_{\zeta} \end{aligned}$$

Bei der Reduction der Beobachtungen ist, wie bereits mehrfach bemerkt, für die Radien in mittlerer Entfernung angenommen worden

$$\text{Sonne } R_{\odot} = 959''.56 \quad \text{Mond } R_{\zeta} = 932''.27$$

Nimmt man dagegen den Radius der Sonne nach meinen Beobachtungen am grossen Heliometer selbst, ohne Anwendung des Ocularprisma wie bei den Beobachtungen dieser Finsterniss, zu

$$R_{\odot} = 960''.25,$$

also die Correction des bei der Rechnung verwandten Werthes in mittlerer Entfernung

$$dR_{\odot} = +0''.69,$$

oder für diese Finsterniss

$$dr_{\odot} = +0''.69 \cdot \frac{945.28}{959.56} = +0''.68$$

so erhält man

$$\begin{aligned} dx &= -3''.936 - 0.127 dr_{\zeta} \\ dy &= +1.987 + 1.458 dr_{\zeta} \end{aligned}$$

Dr. Kobold nimmt in seiner Abhandlung den mittleren Mondradius $R_{\zeta} = 932''.85$, während ich den Werth nach Oudemans $932''.27$ angewandt habe. Setzt man demnach zur Reduction auf Kobold's Annahme

$$dR_{\zeta} = +0''.58$$

oder für diese Finsterniss

$$dr_{\zeta} = +0''.58 \frac{944''.7}{932''.3} = +0''.59$$

so wird

$$\begin{aligned} \text{Schur } dx &= -3''.936 - 0.127 \times +0''.59 = -3''.936 - 0''.075 = -4''.01 \\ dy &= +1.987 + 1.458 \times +0''.59 = +1.987 + 0.860 = +2.85 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \text{Schur } d(\alpha_{\zeta} - \alpha_{\odot}) &= -4''.36 \\ d(\delta_{\zeta} - \delta_{\odot}) &= +2.85 \end{aligned}$$

Dagegen giebt Kobold auf Seite 39 seiner Abhandlung nach Heliometerbeobachtungen in Strassburg

$$\begin{aligned} \text{Kobold} \quad d(\alpha_{\zeta} - \alpha_{\odot}) &= -2''.30 \\ d(\delta_{\zeta} - \delta_{\odot}) &= +0.57 \end{aligned}$$

Man hat also das Endresultat, wenn man noch das Resultat der Kobold'schen Untersuchung aus Heliometer-, Refractor- und Contact-Beobachtungen wie früher unter dem Namen Kobold Gesamttresultat hinzufügt,

	$d(\alpha_{\zeta} - \alpha_{\odot})$	$d(\delta_{\zeta} - \delta_{\odot})$	Annahme für mittl. Entf.	
Schur	-4''.36	+2''.85	$R_{\odot} = 960''.25$	$R_{\zeta} = 932''.85$
Kobold	-2.30	+0.57	959.71	932.85
Kobold Gesamttresultat	-1.94	+0.02	959.71	932.85

und bei Annahme anderer Werthe für die Durchmesser hat man die Aenderung der Rectascensions- und Declinations-Unterschiede

$$\begin{aligned} \text{Schur} \quad d(\alpha_{\zeta} - \alpha_{\odot}) &= -0.138 dr_{\odot} - 0.138 dr_{\zeta} & d(\delta_{\zeta} - \delta_{\odot}) &= +1.457 dr_{\odot} + 1.457 dr_{\zeta} \\ \text{Kobold} & & & \\ & -0.118 dr_{\odot} - 0.118 dr_{\zeta} & & +1.313 dr_{\odot} + 1.313 dr_{\zeta} \end{aligned}$$

Man sieht also auch hier wieder, dass die Verbesserung des Mondortes in Bezug auf den Sonnenort namentlich in Declination in hohem Grade von den angewandten Radien der beiden Himmelskörper abhängig ist.

Da die Berechnung der Beobachtungen auf beiden Sternwarten, soweit sich beurtheilen lässt, doch in aller Strenge und nach denselben Grundsätzen, nämlich nach den von Wichmann aufgestellten Formeln durchgeführt ist, so muss man die nicht sehr befriedigende Uebereinstimmung der Resultate wohl den unruhigen Bildern bei dem niedrigen Stande der Sonne zuschreiben, worüber sich die Beobachter an beiden Orten beklagen.

Wollte man darauf verzichten, für meine Beobachtungen und für Kobold verschiedene Werthe für den Sonnenradius anzuwenden und für mich etwa denjenigen Werth zu nehmen, der sich aus meinen Beobachtungen an dem Fraunhofer'schen Heliometer der Göttinger Sternwarte während der Jahre 1892—94 ergibt, nämlich $959''.82$, so wäre damit $dR_{\odot} = 959''.82 - 960''.25 = -0''.43$ und

$$\begin{aligned} d\alpha &= -0''.43 \times -0.138 = +0''.06 \\ d\delta &= -0.43 \times +1.457 = -0.63 \end{aligned}$$

und man hätte dann

$$\text{Schur} \quad d(\alpha_{\zeta} - \alpha_{\odot}) = -4''.30 \quad d(\delta_{\zeta} - \delta_{\odot}) = +2''.22,$$

wodurch die grossen Unterschiede gegen Kobold wohl etwas verringert, aber nicht beseitigt würden. Diese kleine Verringerung der Unterschiede würde aber dadurch erkauft sein, für das grosse Repsold'sche Heliometer einen Sonnenhalbmesser anzuwenden, der den in einer längeren Reihe von Jahren gemessenen Werthen entschieden widerspricht.

Will man auch hier wieder wie bei der vorangehenden Finsterniss einen Mittelwerth bilden, indem man dem Göttinger Ergebniss das Gewicht 1 und dem von Kobold aus Heliometer-, Refractor- und Contactbeobachtungen abgeleiteten das Gewicht 3 ertheilt, so wird das Resultat beider Untersuchungen

	$d(\alpha_{\odot} - \alpha_{\odot})$	$d(\delta_{\odot} - \delta_{\odot})$		Annahme für mittl. Entf.	
Schur	- 4".36	+ 2".85	Gew. 1	R_{\odot} 960".25	R_{\odot} 932".85
Kobold	- 1 .94	+ 0 .02	3	959 .71	932 .85
Endresultat	- 2 .54	+ 0 .97			

Zum Schluss möchte ich noch bemerken, dass für beide Finsternisse die Berechnung der Oerter der Sonne und des Mondes, sowie der Parallaxen durch eine von Professor Ambromm ausgeführte unabhängige doppelte Rechnung einiger Werthe geprüft worden ist.

Erklärung zu den Plänen der Sternwarte.

I. Grundriss des Gebäudes	Maassstab 1 : 400.
II. Grundriss des Sternwarten-Grundstücks	1 : 2000.
III. Querschnitt durch die Mitte des Gebäudes von Nord nach Süd	1 : 200.

Bedeutung der Bezeichnungen.

- A Westlicher Saal, zur Zeit zu erdmagnetischen Beobachtungen benutzt.
- B Oestlicher Saal, Bibliothek der Sternwarte.
- C Gauss's Arbeits- und Sterbezimmer mit einer Gedächtnis Tafel.
- D Aufzug durch die vier Stockwerke des Treppenhauses zum Aufwinden von Instrumenten auf das flache Dach neben dem Heliometerthurm, zugleich Raum für galvanische Elemente. Durch einen Glasthürverschluss davon getrennt hängen in den beiden mittleren Stockwerken die Pendeluhren von Hardy in London und Dencker in Hamburg.
- E Beton-Fahrbahn für transportable Instrumente, nämlich für den Cometensucher von sechs Zoll Oeffnung von Merz und das Fernrohr von vier Zoll Oeffnung, beide mit parallaktischer Aufstellung und Theilkreisen. Der gewöhnliche Aufbewahrungsort dieser Instrumente ist die Rotunde im Mittelpunkt der Sternwarte.
- F Erdmagnetisches Observatorium im Garten.
- G Wärterwohnung.
- a Drehkuppel für das Heliometer von sechs Zoll Oeffnung von A. Repsold & Söhne vom Jahre 1888. (Abbildung des Instruments in: Astron. Mittheilungen, Vierter Theil.) Seehöhe 172 Meter über Normal-Null.
- b Eiserner Thurm für das Heliometer von drei Zoll Oeffnung von Fraunhofer vom Jahre 1814. (Abbildung in: Astronom. Mittheilungen, Dritter Theil.) Seehöhe 162,5 Meter.
- c Meridiankreis von Reichenbach vom Jahre 1819; vor dem Jahre 1888 in d aufgestellt. Unter dem Fussboden Pfeiler für festen und beweglichen Quecksilber-Horizont. Dieses Instrument befindet sich in regelmässigem Gebrauch.

d Passagen-Instrument von Reichenbach vom Jahre 1818, vor 1888 in c aufgestellt, dient als Collimator für den Meridiankreis zur Bestimmung des Collimationsfehlers und der Schiefe der Horizontalfäden.

Südlicher Endpunkt der Hannover'schen Gradmessung auf dem gemeinschaftlichen Unterbau beider Pfeiler unter dem Fussboden festgelegt.

e Meridiankreis von J. G. Repsold; ältester aller Meridiankreise, 1804 auf der Privatsternwarte des Verfertigers in Hamburg, Elbhöhe, Stintfang, aufgestellt seit 1818 in Göttingen. Daneben die Pendeluhr von Shelton in London, von Th. Wagner in Wiesbaden mit elektrischem Contact versehen.

f Kleines Passagen-Instrument mit gebrochenem Fernrohr, aus einem Ertel'schen Universal-Instrument durch Meyerstein hergestellt.

g Vierzölliger Refractor von Merz mit parallaktischer Aufstellung, Faden-Ring- und Kreuzstab-Mikrometer.

h Mauerquadrant von sechs Fuss engl. (1,95 Meter) Radius von Bird in London, im vorigen Jahrhundert von Tobias Mayer auf der alten Sternwarte benutzt. Dieses Instrument war anfänglich an Pfeilern nördlich und südlich vom Repsold'schen Meridiankreise aufgehängt; im Jahre 1876 wurde es an der Westwand des Saales befestigt und die Pfeiler wurden bis unter den Fussboden abgetragen.

i Collimator zum grossen Heliometer in einem Aufbau über dem Treppenhause.

Eine Ansicht der Süd-Front der Sternwarte befindet sich in: Astronom. Mittheilungen, Vierter Theil.

Die drei Pläne der Sternwarte sind von dem Regierungsbauführer Mascke nach den auf dem Universitäts-Bauamt befindlichen Zeichnungen und verschiedenen Abmessungen meinerseits gezeichnet worden.

Pläne von der Sternwarte sind ferner noch enthalten in der Schrift: Umbau der Sternwarte zu Göttingen. Mitgetheilt vom Bauinspektor Wever zu Berlin. (Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, Bd. XXXIX, Jahrg. 1893.)

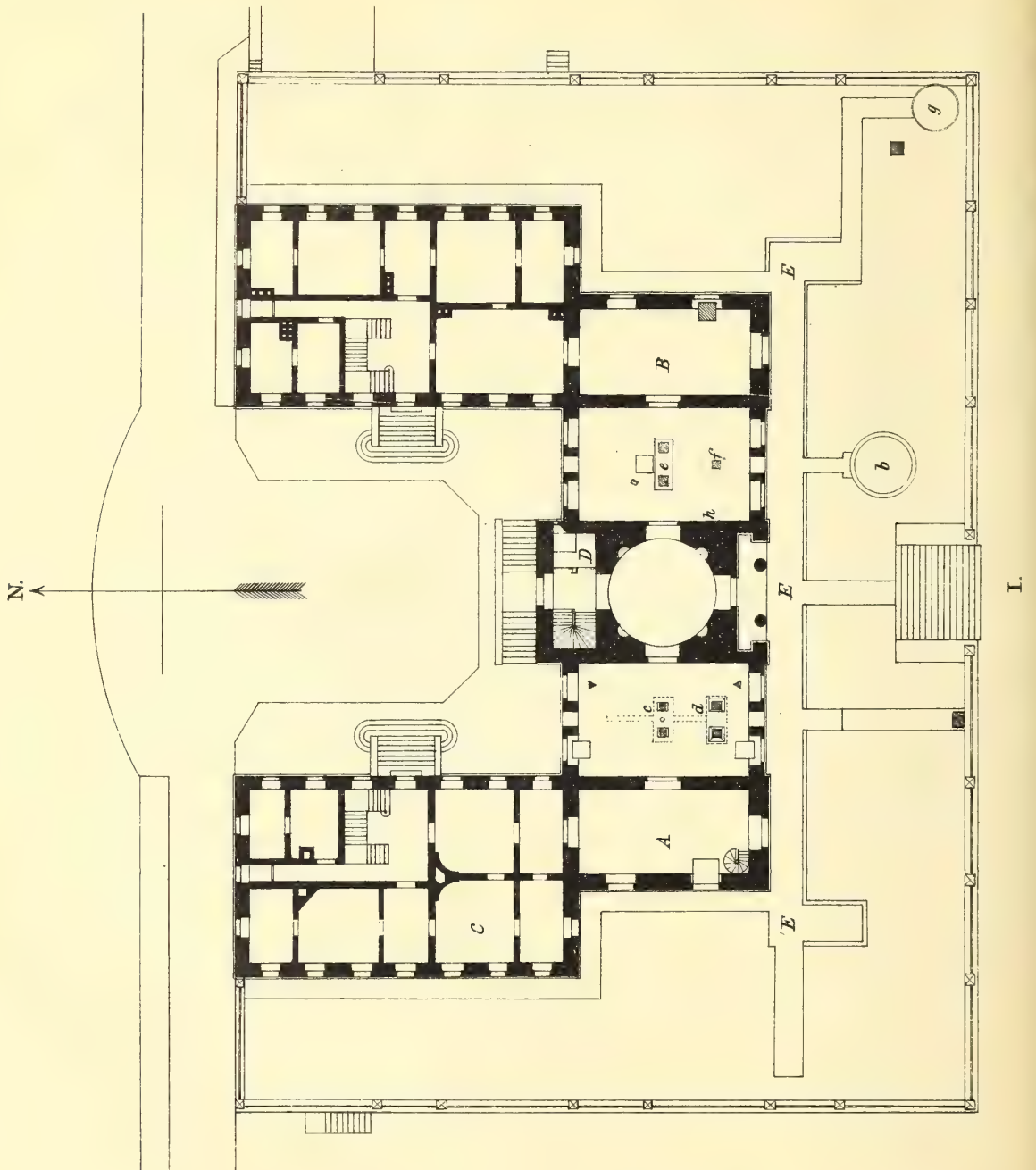
Berichtigungen.

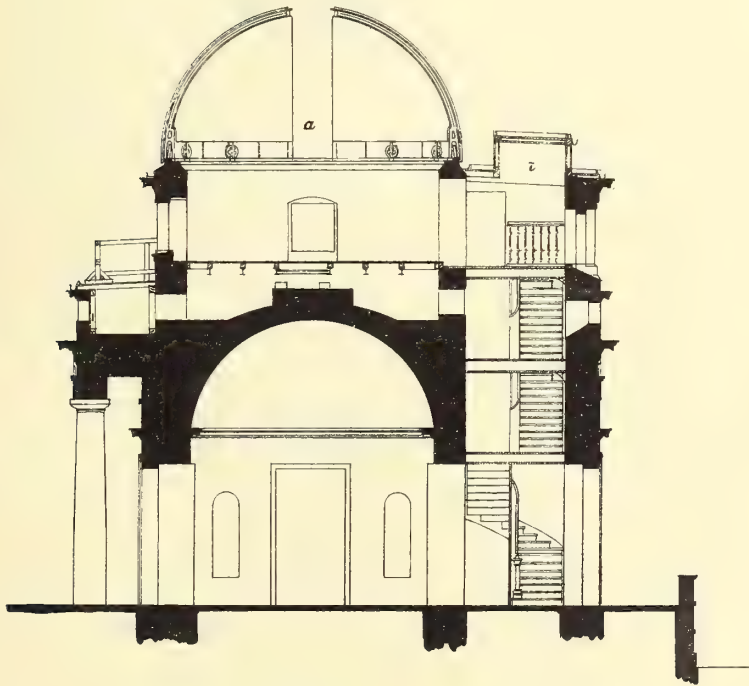
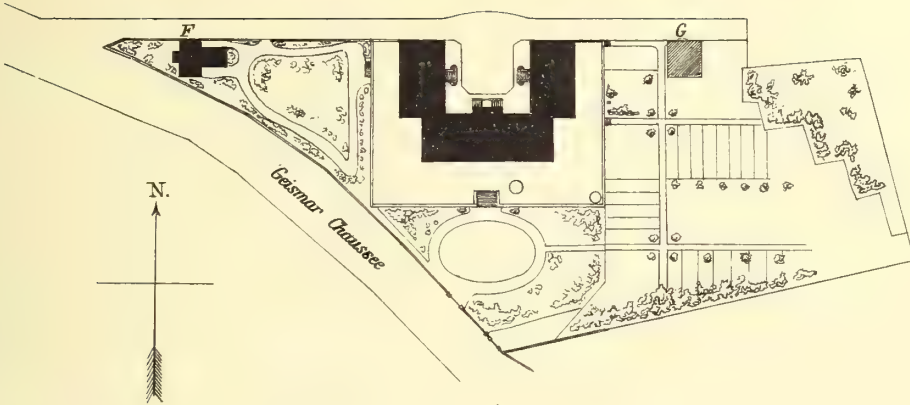
Seite 13 9 v. u. „Contact“ anstatt Control

23 12 v. u. „zu“ zu streichen











26.
31217
ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND 1. Nro. 4.

Vermessung der beiden Sternhaufen h und χ Persei

mit dem

sechszölligen Heliometer der Sternwarte in Göttingen

verbunden mit einer Uebersicht aller
bis zum Jahre 1900 ausgeführten Instrumental-Untersuchungen

von

Wilhelm Schur



Mit einer Sternkarte.

Vorgelegt in der Sitzung am 3. Februar 1900.

Berlin,
Weidmannsche Buchhandlung:
1900.

Vermessung der beiden Sternhaufen h und α Persei

mit dem

sechszölligen Heliometer der Sternwarte in Göttingen

verbunden mit einer Uebersicht aller
bis zum Jahre 1900 ausgeführten Instrumental-Untersuchungen

von

Wilhelm Schur

Mit einer Sternkarte.

Vorgelegt in der Sitzung am 3. Februar 1900.

Göttingen 1900

Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei

(W. Fr. Kaestner).

INHALT.

	Seite
Einleitung	1
Verzeichniss der beobachteten fünfzehn Sterne. Genäherte Orte für 1890	4
Abhängigkeit der Ocularstellung von der Temperatur des Instruments	5
Reduction der Distanzmessungen auf die Normal-Ocularstellung	13
Abhängigkeit der Distanzmessungen von der Temperatur	15
Kürzeste Entfernung der beiden Objectivhälften von einander	18
Systematische Correctionen der Distanzmessungen	20
Abänderung des früher angenommenen Scalenwerthes	42
Reduction der Positionswinkel-Messungen	46
Indexfehler des Positionskreises aus Sternbeobachtungen	49
Uebersicht über die angewandten Instrumental-Constanten und Aufstellungsfehler	56
Triangulation zwischen fünfzehn helleren Sternen der beiden Sternhaufen	58
Ausgleichung der Hauptfigur	66
Richtung der Linie ap	75
Oerter der Sterne für 1890.0	81
Verbesserungen zu früheren Veröffentlichungen der Sternwarte	85

Vermessung der beiden Sternhaufen h und α Persei
mit dem sechszölligen Heliometer der Sternwarte
in Göttingen,
verbunden mit einer Uebersicht aller bis zum Jahre
1900 ausgeführten Instrumental-Untersuchungen

von
Wilhelm Schur.

Mit einer Sternkarte.

Vorgelegt am 8. Februar 1900.

Im Sternbilde des Perseus in etwa $2^h 13^m$ und $+56^{\circ}.6$ befinden sich zwei helle Sternhaufen h und α Persei nebeneinander, die einzeln oder im Zusammenhange mehrfach Gegenstand der Beobachtung gewesen sind.

1) h Persei.

Den vorangehenden Sternhaufen h Persei am Münchener Refractor beobachtet zu haben erwähnt zuerst Lamont in den Astronomischen Nachrichten, Band 14, Seite 183 und die Beobachtungen selbst sind in den Annalen der Königlichen Sternwarte bei München, XVII Band, München 1869 mitgeteilt. Als Grundlinie diente die Verbindung zweier mit 1 und 41 bezeichneten Sterne im Abstand von $135''.57$ und von diesen ausgehend wurden dann die übrigen durch Messungen von Positionswinkeln angeschlossen. Lamont hat diese Beobachtungen nicht selbst reducirt, und wie aus einer später zu erwähnenden Abhandlung von Dr. Oertel hervorgeht, hat es sich nicht ermöglichen lassen, daraus brauchbare Resultate abzuleiten.

Späterhin erfolgte eine Vermessung durch Krüger, nämlich:

A. Krüger, Der Sternhaufen h Persei, Beobachtungen desselben am Bonner Heliometer nebst deren Berechnung. Abdruck

aus den Abhandlungen der Finnischen Societät der Wissenschaften. Helsingfors 1865.

Ausgehend von der Mitte zwischen den beiden benachbarten Sternen

$$\begin{array}{rcccccc} \text{B. D.} + 56,526 & 8.7 & 1855.0 & 2^h & 9^m & 1.3^s + 56^{\circ} 27.2' \\ & 527 & 8.4 & 2 & 9 & 1.4 & 56 27.4 \end{array}$$

sind zu Anfang der sechziger Jahre 43 Sterne durch Anschluss in Abstand und Positionswinkel bestimmt worden und zum Schluss ist ein Verzeichniss der Sterne für 1855.0 gegeben, wobei Meridiankreis-Beobachtungen zweier Sterne durch Argelander, nämlich von B. D. + 56.522, 6.8^m und + 56.530, 6.7^m zu Grunde gelegt worden sind.

Die Abhandlung: Bredichin, *Mesures micrometriques du groupe de Persée*. *Annales de l'observatoire de Moscou*. Vol. IV. 2. livraison. pag. 5.

enthält Vergleichen in Rectascension und Declination einer Zahl von Sternen in h Persei gegen einen als a' bezeichneten hellen Stern B. D. + 56. 522^m 6.8, der in der Abhandlung von Krüger mit Nr. 1 bezeichnet wird. Die Endresultate sind nicht abgeleitet sondern nur die von Refraction befreiten einzelnen im Jahre 1877 beobachteten Unterschiede mitgeteilt. Diese Untersuchung hat mehr die Bedeutung einer Mappirung, denn die darin enthaltenen 65 Sterne sind meistens nur einmal in Rectascension und in einigen Fällen zweimal in Declination beobachtet worden.

Die neueste Vermessung dieses Sternhaufens ist enthalten in:

Karl Oertel, *Neue Beobachtungen und Ausmessung des Sternhaufens h Persei am Münchener grossen Refractor*. *Neue Annalen der K. Sternwarte in Bogenhausen bei München* Band II. München 1891.

Diese Abhandlung gelangte im September 1891 zu meiner Kenntniss, während der Anfang meiner am hiesigen Heliometer ausgeführten Vermessung sogleich nach dem Erscheinen der Pihl'schen Abhandlung im Juli 1891 vorbereitet und im October 1891 begonnen wurde.

Die Oertel'schen Beobachtungen sind in den Jahren 1887 bis 1889 ausgeführt und es sind zwischen 125 Sternen 290 Differenzen in Rectascension und 421 in Declination gemessen worden, die nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen sind.

Als Ausgangspunkt diente der Stern Bradley 316, dessen Ort für 1890 aus 4 Sterncatalogen von Piazzi bei E. Becker zu:

α 2^h 11^m 21^s .121 δ + 56^o 37' 35".29 angenommen ist und in meiner Triangulation nicht vorkommt.

Am Schlusse der Abhandlung sind Vergleichen mit den Resultaten von Krüger und Lamont angestellt, die wie bemerkt gezeigt haben, dass die letzteren Beobachtungen sich nicht sicher reduciren lassen.

2) χ Persei.

Ueber den nachfolgenden Sternhaufen χ Persei ist zuerst zu citiren

H. C. Vogel. Der Sternhaufen χ Persei beobachtet am 8-zölligen Refractor der Leipziger Sternwarte in den Jahren 1867—1870. Leipzig 1878.

Diese Abhandlung enthält ein Verzeichniss von 30 Sternen für 1870.0. Die Festlegung der Gruppe beruht auf Meridianbeobachtungen von 5 dieser Sterne durch Argelander, Johnson, Lalande. Die Helligkeit der Sterne ist durch Beobachtungen mit einem Zöllner'schen Photometer bestimmt.

Einige genäherte Ortsangaben nach zwei photographischen Aufnahmen in Potsdam finden sich in der Schrift:

O. Lohse. Ueber die photographische Aufnahme χ Persei. Astronom. Nachrichten, Band 111. Nr. 2649—50.

Ferner ist zu erwähnen

O. A. L. Pihl. The stellar cluster χ Persei micrometrically surveyed. Christiania 1891.

Diese Vermessungen sind innerhalb der Jahre 1870 bis 1890 von dem verstorbenen Gasdirector Pihl auf seiner Privatsternwarte in Christiania an einem parallaktisch montirten Refractor von 81 Millimeter Oeffnung mit Hilfe eines Bar-Micrometer nach der Einrichtung von Boguslawski angestellt. Der Stab wurde in den verschiedenen Beobachtungsnächten bald rechts bald links in ungefähr 45 Grad gegen den Stundenkreis geneigt und die wahre Neigung durch Beobachtung zweier in Declination verschiedenen Sterne von bekannter Position bestimmt.

Als während dieser Beobachtungsreihe die Abhandlung von Vogel erschienen war und Pihl für etwa hundert Sterne damit die von ihm erhaltenen Rectascensionen verglich, bemerkte er Unterschiede die bis auf mehr als eine halbe Zeitsecunde gingen und der Helligkeit der Sterne, der Luftbeschaffenheit, der angewandten Vergrößerung, physiologischen Einflüssen und dem dadurch beeinflussten allmählichen Verschwinden und Aufleuchten der helleren Sterne am Rande der Metallstreifen zuzuschreiben sind.

Pihl hat diesen Einfluss zu ermitteln gesucht und in Rechnung gebracht. Am Ende der Schrift befindet sich ein Catalog der Oerter von 236 Sternen zwischen den Grössen 6,6 und 11.6 bezogen auf 1870,0.

Unter den Aufnahmen die sich über beide Sternhaufen zugleich erstrecken ist noch zu erwähnen:

M. Bronsky et A. Stebnitzky. Les positions des étoiles de h et χ Persei et de leurs environs déduites des mesures sur deux clichés photographiques. Mémoires de l'academie imperiale des sciences de St. Petersbourg. VIII^e série. 1895.

Dieser Catalog beruht auf Abmessungen der beiden Damen an zwei photographischen Aufnahmen von Professor Donner in Helsingfors am 14. September 1890 und 20. September 1892.

Auf beiden Platten zugleich finden sich mehr als 1300 Sterne und mit Einschluss der nur auf einer Platte gemessenen sind im Ganzen nahezu 2000 Sternörter gegeben. Die Festlegung beruht für die erste Aufnahme auf zwei Sternen nach dem Catalog von Pihl und für die zweite auf der Ortsangabe eines Sternes ohne nähere Angabe der Quelle.

Veranlasst durch die grossen individuellen Unregelmässigkeiten, die sich bei der Vermessung von Pihl zeigten, beschloss ich eine Anzahl von Sternen aus beiden Sternhaufen durch eine möglichst sorgfältige Triangulation mit zahlreichen überschüssigen Beobachtungen untereinander zu verbinden, nämlich die folgenden:

Verzeichnis der beobachteten 15 Sterne. Genäherte Oerter für 1890.

	B. D.	Helsingfors.	Gotha	Krüger	Bonn.	Pihl	Grösse	B. D.	
a	+ 56.471	2030	18				6.6	2 ^h 9 ^m 11 ^s	+ 56° 32.6
b	479	2043	32				8.9	9 35	23.3
c	498	2071	5				8.6	10 41	30.0
d	500	2073	4				8.5	10 45	41.9
e	530	2093	2				6.7	11 30	39.6
f	543	2113	12				8.0	12 11	48.6
g	545	2117	26				8.5	12 32	35.5
h	547	2120	31			11	8.2	12 45	29.2
i	555	2137				33	8.8	13 27	21.6
k	567	2148				77	8.4	14 8	24.0
l	568	2150				78	6.7	14 9	44.3
m	593	2177				150	7.0	15 12	53.0
n	595	2187				159	8.5	15 23	41.8
o	598	2190				171	8.4	15 33	21.1
p	608	—				232	9.2	17 4	32.9

Zur Orientirung der ganzen Gruppe wurde zwischen den beiden äussersten Sternen *a* und *p*, die zwei Grad von einander abstehen, der Positionswinkel wiederholt gemessen und zur Prüfung der Orientirung Beobachtungen am Reichenbach'schen Meridiankreise in Göttingen und späterhin am Berliner Meridiankreise verwandt. Zunächst wurden die Abstände in zwei aneinander stossenden grossen Vierecken *a b i f* und *f i p m* nebst den vier darin befindlichen Diagonalen und den langen Verbindungslinien *a p* und *b m*, also im Ganzen 13 Linien durchschnittlich an 5 Abenden gemessen und darauf die Linien welche die übrigen Punkte *c d e g h k l n o* mit den 6 Hauptpunkten und unter sich verbinden an mindestens 3 Abenden.

Die Beobachtungen begannen 1891 October 13 und wurden 1896 Februar 17 abgeschlossen.

Ehe auf die Bearbeitung dieser Beobachtungen und die Ableitung der Endresultate eingegangen werden kann, ist zunächst der Bericht über die am Heliometer

in den letzten Jahren ausgeführten Untersuchungen über die Instrumental-Constanten fortzuführen, Der erste Theil dieses Berichtes befindet sich in meiner Abhandlung über die Triangulation der Praesepe, Astronomische Mittheilungen von der Königlichen Sternwarte zu Göttingen. Vierter Theil, Göttingen 1895. der Hauptsache nach bis zum Jahre 1892 und es ist jetzt noch dasjenige hinzuzufügen, was seitdem bis zum Jahre 1899 darin geschehen ist.

Dabei ist zu bemerken, dass in dem Beobachtungs- und Reductions-Verfahren gegen die darüber im vierten Theil gemachten ausführlichen Auseinandersetzungen im Wesentlichen nicht viel geändert worden ist und dass sich daher die Fortsetzung darauf beschränken wird, die numerischen Daten zur Reduction der Beobachtungen durch Ausdehnung der Untersuchungen auf einen längeren Zeitraum immer mehr zu prüfen und verschärfen. Einige neuere Gesichtspunkte sind durch die Ausdehnung der Untersuchungen über die systematischen Correctionen der Distanzmessungen hinzugekommen, worüber zuletzt berichtet werden soll und ich werde nun die einzelnen Abtheilungen in derselben Reihenfolge wie früher besprechen.

Es mag an dieser Stelle erwähnt werden, dass ausser den drei von Anfang an vorhandenen Ocularen I II III mit den Vergrößerungen 105, 174, 261, von denen I zu Aufstellungsbeobachtungen und bei Beobachtung von Cometen und Sternbedeckungen, II zu der Mehrzahl der Beobachtungen und III nur bei Planetendurchmessern und Doppelsternen benutzt wird, im Jahre 1892 noch ein schwächeres Ocular mit 50 facher und im Jahre 1898 eins von 23 facher Vergrößerung hinzugekommen ist.

Die Hinweise auf die früheren Zusammenstellungen sind durch die Bezeichnung IV und die Seitenzahl angedeutet.

Abhängigkeit der Ocularstellung von der Temperatur des Instruments.

Die früheren Zusammenstellungen der Focussirungen die dazu dienen den Einfluss der Temperatur auf die Brennweite des Objectivs durch Einstellung des Oculars auf Gestirne zu bestimmen, erstreckten sich von 1889 Januar 4 bis 1892 Januar 21 (IV. 36). Als einzige seitdem eingetretene Aenderung würde hier wohl zu bemerken sein, dass bei den Focussirungen auf den Polarstern vor den Beobachtungen der Sonnendurchmesser bei hohem Stande der Sonne früher immer etwas Sonnenlicht in das Innere der Drehkuppel gelangte, wenn die Spaltöffnung nach Norden gerichtet war. Um dies zu verhindern habe ich ausser dem grünen an geradlinigen Stangen mit Ringen und Schnüren beweglichen grossen Sonnenschirm noch kleine seitliche Gardinen an der linken Seite der Spaltöffnung anbringen lassen, so dass jetzt das Innere des Thurmes völlig dunkel gemacht werden kann.

Diese Einrichtung wird seit 1898 Juni 24 benutzt und kann auf das Ergebniss in Bezug auf die Focalstellung wohl nur insofern von Einfluss sein als man dabei jetzt nicht mehr eine kleine durch das Sonnenlicht gestreifte aber sechs Meter entfernte helle Fläche vor Augen hat.

Uebersicht über die Einstellungen des Oculars II auf Doppelsterne
und auf den Polarstern.

Nr.	Tag	Stern	Ocular II	Th. O.	Th. o.	t
74	1892 März 6	Σ 941	20.92	— 4.8	— 3.6	— 4.5
75	12.13	α Urs. min.	21.23	+ 1.0	+ 0.9	+ 1.0
76	20.21	"	21.30	+ 8.7	+ 7.8	+ 8.5
77	30.31	"	21.27	+ 6.0	+ 5.3	+ 5.8
78	April 4.5	"	21.50	+ 14.4	+ 13.3	+ 14.1
79	11.12	"	21.35	+ 7.3	+ 7.2	+ 7.3
80	Mai 8.9	"	21.57	+ 13.7	+ 13.1	+ 13.6
81	22.23	"	21.64	+ 13.4	+ 12.4	+ 13.2
82	26	λ Ophiuchi	21.81	+ 21.3	+ 21.8	+ 21.4
83	27	"	21.34	+ 24.0	+ 23.8	+ 24.0
84	28	"	21.46	+ 20.6	+ 21.0	+ 20.7
85	Juni 21.22	α Urs. min.	21.47	+ 16.9	+ 16.1	+ 16.7
86	Juli 11.12	"	21.58	+ 18.9	+ 18.3	+ 18.8
87	Sept. 12.13	"	21.70	+ 18.2	+ 18.1	+ 18.2
88	Oct. 4.5	"	21.37	+ 14.4	+ 14.3	+ 14.4
89	Nov. 23.24	"	21.21	— 1.9	— 1.5	— 1.8
90	1893 Jan. 23	ζ Cancri	20.98	— 12.6	— 11.0	— 12.2
91	Febr. 16	"	21.24	+ 5.6	+ 6.1	+ 5.7
92	März 11.12	α Urs. min.	21.54	+ 7.5	+ 7.1	+ 7.4
93	22.23	"	21.46	+ 5.3	+ 4.7	+ 5.2
94	26.27	"	21.57	+ 6.0	+ 5.8	+ 6.0
95	Apr. 5.6	"	21.43	+ 11.4	+ 11.1	+ 11.3
96	6	ζ Cancri	21.37	+ 12.0	+ 12.6	+ 12.1
97	9.10	α Urs. min.	21.46	+ 12.1	+ 11.8	+ 12.0
98	23.24	"	21.45	+ 13.5	+ 13.0	+ 13.4
99	Mai 8.9	"	21.41	+ 14.9	+ 15.0	+ 14.9
100	14.15	"	21.63	+ 19.6	+ 18.4	+ 19.3
101	Juni 8.9	"	21.46	+ 18.3	+ 17.8	+ 18.2
102	15.16	"	21.50	+ 22.2	+ 21.9	+ 22.1
103	Juli 4.5	"	21.57	+ 23.1	+ 22.2	+ 22.9
104	Aug. 3	70 Ophiuchi	21.38	+ 17.6	+ 18.3	+ 17.8
105	3.4	α Urs. min.	21.56	+ 19.8	+ 19.2	+ 19.7
106	Oct. 18.19	"	21.31	+ 9.3	+ 11.1	+ 9.7
107	26	70 Ophiuchi	21.20	+ 8.8	+ 9.2	+ 8.9
108	1894 Jan. 3	ζ Cancri	20.99	— 8.9	— 7.7	— 8.6
109	März 20.21	α Urs. min.	21.18	+ 4.9	+ 4.8	+ 4.9
110	23.24	"	21.34	+ 8.8	+ 8.4	+ 8.7
111	26.27	"	21.32	+ 9.6	+ 9.3	+ 9.5
112	1894 Apr. 24.25	α Urs. min.	21.28	+ 15.0	+ 14.6	+ 14.9
113	Mai 8.9	"	21.27	+ 14.5	+ 13.1	+ 14.2
114	15.16	"	21.60	+ 19.0	+ 18.1	+ 18.8
115	24.25	"	21.38	+ 16.1	+ 15.5	+ 16.0
116	Juni 27.28	"	21.40	+ 17.3	+ 17.2	+ 17.3
117	Juli 2	70 Ophiuchi	21.61	+ 24.0	+ 24.0	+ 24.0
118	5.6	α Urs. min.	21.46	+ 17.9	+ 17.2	+ 17.7
119	23	70 Ophiuchi	21.73	+ 20.5	+ 21.2	+ 20.7
120	23.24	α Urs. min.	21.67	+ 22.1	+ 22.1	+ 22.1
121	Dec. 10.11	"	21.29	— 0.2	— 0.5	— 0.3
122	1895 Febr. 24.25	"	21.01	— 2.5	— 2.3	— 2.4
123	März 6.7	"	21.18	— 8.3	— 8.3	— 8.3
124	Apr. 9.10	"	21.28	+ 13.3	+ 12.0	+ 12.0
125	16.17	"	21.38	+ 12.8	+ 12.4	+ 12.7

Nr.	Tag	Stern	Ocular II	Th. O.	Th. o.	t
126	1895 Apr. 29.30	α Urs. min.	21.42	+ 13.7 ^o	+ 12.7 ^o	+ 13.5 ^o
127	Mai 5.6	"	21.32	+ 16.3	+ 15.4	+ 16.1
128	8.9	"	21.50	+ 15.5	+ 14.6	+ 15.3
129	13.14	"	21.46	+ 18.9	+ 18.2	+ 18.7
130	22.23	"	21.50	+ 15.8	+ 14.4	+ 15.4
131	28	70 Ophiuchi	21.38	+ 13.4	+ 14.3	+ 13.6
132	28.29	α Urs. min.	21.59	+ 18.1	+ 17.0	+ 17.8
133	Juni 20.21	"	21.42	+ 17.3	+ 16.4	+ 17.1
134	Juli 1.2	"	21.56	+ 22.0	+ 21.4	+ 21.9
135	16.17	"	21.51	+ 18.9	+ 18.0	+ 18.7
136	Oct. 17.18	"	21.25	+ 6.5	+ 6.1	+ 6.4
137	Nov. 16	12 Lyncis	21.20	+ 12.3	+ 13.0	+ 12.5
138	1896 Jan. 21	Σ 941	21.28	+ 1.3	+ 1.9	+ 1.4
139	27	α Urs. min.	21.19	— 2.1	— 1.9	— 2.0
140	Febr. 15.16	"	21.20	— 2.3	— 2.6	— 2.4
141	18	ξ Cancri	21.08	+ 1.7	+ 2.4	+ 1.8
142	22.23	α Urs. min.	21.26	— 1.0	— 1.2	— 1.0
143	Mai 1.2	"	21.29	+ 7.3	+ 6.9	+ 7.2
144	1896. Mai 5.6	α Urs. min.	21.28	+ 9.8	+ 9.1	+ 9.6
145	7.8	"	21.33	+ 11.2	+ 10.6	+ 11.1
146	31.1	"	21.48	+ 15.7	+ 14.5	+ 15.4
147	Juni 3	70 Ophiuchi	21.36	+ 17.9	+ 19.3	+ 18.3
148	3.4	α Urs. min.	21.59	+ 22.4	+ 20.9	+ 22.0
149	Juli 6	70 Ophiuchi	21.29	+ 13.3	+ 13.1	+ 13.3
150	9	"	21.52	+ 22.3	+ 22.1	+ 22.2
151	9.10	α Urs. min.	21.63	+ 24.0	+ 23.4	+ 23.8
152	11	70 Ophiuchi	21.54	+ 16.5	+ 17.7	+ 16.8
153	13	"	21.50	+ 17.4	+ 17.4	+ 17.4
154	14	"	21.37	+ 18.2	+ 18.5	+ 18.3
155	14.15	α Urs. min.	21.55	+ 20.9	+ 20.4	+ 20.8
156	25	70 Ophiuchi	21.51	+ 16.6	+ 17.1	+ 16.7
157	Sept. 26.27	α Urs. min.	21.45	+ 12.9	+ 12.0	+ 12.7
158	28.29	"	21.33	+ 11.6	+ 11.2	+ 11.5
159	Oct. 26	70 Ophiuchi	21.49	+ 8.1	+ 8.5	+ 8.2
160	29.30	α Urs. min.	21.13	+ 8.3	+ 7.3	+ 8.0
161	Nov. 4.5	"	21.07	+ 2.7	+ 3.3	+ 2.8
162	5.6	"	21.15	+ 1.0	+ 1.5	+ 1.1
163	6.7	"	21.27	+ 2.0	+ 2.1	+ 2.0
164	12.13	"	21.11	+ 1.9	+ 2.3	+ 2.0
165	16.17	"	21.11	+ 4.0	+ 3.4	+ 3.9
166	26	Σ 941	20.96	— 3.6	— 2.0	— 3.2
167	29	"	21.02	— 5.3	— 3.2	— 4.8
168	Dec. 15.16	α Urs. min.	21.10	— 1.0	— 1.0	— 1.0
169	1897 Feb. 3	Σ 941	21.51	— 7.4	— 6.4	— 7.1
170	17.18	α Urs. min.	21.35	+ 0.5	— 0.7	+ 0.2
171	19.20	"	21.47	+ 5.5	+ 4.9	+ 5.4
172	März 12.13	"	21.12	+ 3.7	+ 3.6	+ 3.7
173	Apr. 3.4	"	21.22	+ 5.3	+ 4.6	+ 3.3
174	5.6	"	21.17	+ 5.2	+ 4.6	+ 3.3
175	27.28	"	21.30	+ 16.9	+ 15.5	+ 16.5
176	Mai 4.5	"	21.20	+ 10.9	+ 9.9	+ 10.7
177	16.17	"	21.35	+ 16.0	+ 15.4	+ 15.3
178	20.21	"	21.40	+ 15.6	+ 15.0	+ 14.9
179	29	70 Ophiuchi	21.50	+ 13.7	+ 14.8	+ 14.0
180	30.31	α Urs. min.	21.42	+ 21.8	+ 20.5	+ 21.5
181	Juni 21	70 Ophiuchi	21.30	+ 12.7	+ 13.2	+ 12.8
182	22	"	21.34	+ 15.7	+ 15.2	+ 15.6
183	23.24	α Urs. min.	21.44	+ 20.6	+ 19.9	+ 20.4
184	26.27	"	21.43	+ 21.2	+ 20.4	+ 21.0
185	Juli 12	70 Ophiuchi	21.34	+ 17.6	+ 18.3	+ 17.8

Nr.	Tag	Stern	Ocular II	Th. O.	Th. o.	t
186	1897 Juli 12.13	α Urs. min.	21.40	+ 18.6	+ 17.8	+ 18.3
187	14.15	"	21.54	+ 22.3	+ 20.7	+ 21.9
188	25.26	"	21.55	+ 20.3	+ 19.6	+ 20.1
189	Aug. 2.3	"	21.44	+ 19.9	+ 19.7	+ 19.8
190	10.11	"	21.45	+ 19.9	+ 18.4	+ 19.5
191	Sept. 9.10	"	21.69	+ 11.0	+ 11.0	+ 11.0
192	25.26	"	21.46	+ 16.3	+ 15.4	+ 16.1
193	27	70 Ophiuchi	21.22	+ 14.6	+ 14.9	+ 14.7
194	29.30	α Urs. min.	21.37	+ 18.0	+ 17.3	+ 17.8
195	Oct. 4.5	"	21.50	+ 8.9	+ 8.3	+ 8.8
196	14.15	"	21.47	+ 12.8	+ 12.8	+ 12.8
197	23.24	"	21.49	+ 9.4	+ 9.0	+ 9.3
198	Nov. 9.10	"	21.29	+ 1.9	+ 2.0	+ 1.9
199	24.25	"	21.38	0.0	+ 0.2	+ 0.1
200	1898 Febr. 25.26	"	21.32	+ 3.5	+ 3.0	+ 3.4
201	März 11.12	"	21.35	+ 4.9	+ 4.5	+ 4.8
202	" 20.21	"	21.31	+ 4.0	+ 3.9	+ 4.0
203	Apr. 5	Σ 941	21.11	+ 2.2	+ 3.5	+ 2.5
204	5.6	α Urs. min.	21.46	+ 5.8	+ 5.1	+ 5.6
205	1898 Apr. 6	Σ 941	21.29	+ 5.8	+ 6.7	+ 6.0
206	Mai 1.2	α Urs. min.	21.51	+ 19.0	+ 18.5	+ 18.9
207	13.14	"	21.37	+ 11.5	+ 11.3	+ 11.4
208	22.23	"	21.47	+ 16.8	+ 16.3	+ 16.7
209	Juni 7.8	"	21.51	+ 21.9	+ 20.0	+ 21.7
210	10.11	"	21.54	+ 21.7	+ 20.5	+ 21.4
211	14.15	"	21.46	+ 14.9	+ 14.7	+ 14.8
212	26.27	"	21.58	+ 17.3	+ 16.6	+ 17.1
213	Juli 15.16	"	21.44	+ 16.4	+ 15.0	+ 16.0
214	21	70 Ophiuchi	21.18	+ 11.8	+ 13.0	+ 12.1
215	24	"	21.16	+ 13.7	+ 14.9	+ 14.0
216	26.27	α Urs. min.	21.54	+ 14.4	+ 14.1	+ 14.3
217	Aug. 2	70 Ophiuchi	21.47	+ 18.2	+ 18.5	+ 18.3
218	2.3	α Urs. min.	21.53	+ 19.1	+ 18.2	+ 18.9
219	3	70 Ophiuchi	21.37	+ 19.3	+ 19.5	+ 19.4
220	6	"	21.39	+ 19.7	+ 20.6	+ 19.9
221	12	"	21.44	+ 19.7	+ 21.0	+ 20.0
222	12.13	α Urs. min.	21.38	+ 20.4	+ 19.2	+ 20.1
223	14.15	"	21.45	+ 22.9	+ 21.4	+ 22.5
224	Nov. 1.2	"	21.30	+ 6.1	+ 6.0	+ 6.1
225	8.9	"	21.35	+ 2.7	+ 2.8	+ 2.7
226	18.19	"	21.40	+ 4.3	+ 4.3	+ 4.3
227	20.21	"	21.34	+ 2.3	+ 2.1	+ 2.3
228	22.23	"	21.39	+ 1.4	+ 1.8	+ 1.5
229	Dec. 5	Σ 941	21.22	+ 4.2	+ 6.1	+ 4.7
230	6.7	α Urs. min.	21.38	+ 5.6	+ 5.3	+ 5.5
231	1899 Jan. 25.26	"	21.06	- 2.0	- 2.0	- 2.0
232	27	Σ 941	21.08	- 4.5	- 3.3	- 4.2
233	31	"	21.18	- 3.8	- 1.7	- 3.3
234	Febr. 4	"	21.01	- 2.9	- 2.2	- 2.7
235	5.6	α Urs. min.	21.30	- 2.6	- 2.4	- 2.5
236	14.15	"	21.28	+ 10.0	+ 9.6	+ 9.9
237	21.22	"	21.18	+ 1.9	+ 2.0	+ 1.9
238	25	Σ 941	21.15	- 2.7	- 1.7	- 2.4
239	26.27	α Urs. min.	21.16	- 2.1	- 2.7	- 2.2
240	März 5.6	"	21.34	- 0.4	- 0.8	- 0.5
241	11.12	"	21.30	+ 5.7	+ 5.6	+ 5.7
242	14	Σ 941	21.25	+ 5.9	+ 6.3	+ 6.0
243	17	"	21.17	+ 4.4	+ 5.0	+ 4.7
244	23	"	21.21	- 6.2	- 4.8	- 5.9
245	24	"	21.14	- 4.9	- 4.1	- 4.8

Nr.	Tag	Stern	Ocular II	Th. O.	Th o.	t
246	1899 März 24.25	α Urs. min.	21.17	— 0.6	— 1.7	— 0.8
247	Apr. 0.1	"	21.32	+ 7.9	+ 7.0	+ 7.7
248	17.18	"	21.37	+ 9.0	+ 8.1	+ 8.8
249	Mai 16.17	"	21.33	+ 15.8	+ 14.9	+ 15.6
250	30.31	"	21.36	+ 14.7	+ 13.1	+ 14.3
251	Juni. 4.5	"	21.51	+ 18.7	+ 17.5	+ 18.4
252	18.19	"	21.44	+ 21.2	+ 19.1	+ 20.7
253	27.28	"	21.50	+ 18.1	+ 16.8	+ 17.8
254	Juli 9.10	"	21.49	+ 19.7	+ 18.5	+ 19.4
255	17	70 Ophiuchi	21.53	+ 19.4	+ 19.7	+ 19.5
256	18	"	21.35	+ 18.4	+ 18.7	+ 18.5
257	19	"	21.21	+ 19.1	+ 19.8	+ 19.2
258	21.22	α Urs. min.	21.50	+ 24.5	+ 23.1	+ 24.2
259	25	70 Ophiuchi	21.49	+ 19.2	+ 19.5	+ 19.2
260	25.26	α Urs. min.	21.49	+ 20.3	+ 19.8	+ 20.2
261	Aug. 1.2	"	21.59	+ 19.3	+ 17.9	+ 19.0
262	8.9	"	21.41	+ 18.5	+ 18.1	+ 18.5
263	13.14	"	21.43	+ 18.5	+ 17.1	+ 18.2
264	Nov. 1	"	21.41	+ 9.5	+ 9.8	+ 9.6
265	4	70 Ophiuchi	21.36	+ 14.7	+ 15.4	+ 14.9
266	4.5	α Urs. min.	21.43	+ 15.1	+ 14.9	+ 15.9
267	5.6	"	21.44	+ 10.7	+ 10.1	+ 10.5
268	Dec. 10.11	"	21.15	— 7.0	— 6.8	— 7.0
269	20	Σ 941	21.10	— 6.3	— 5.0	— 6.1
270	22.23	α Urs. min.	21.04	— 5.3	— 5.2	— 5.3

Die doppelte Bezeichnung der Beobachtungstage deutet darauf hin, dass die Beobachtungen des Polarsterns in den Vormittagsstunden vorgenommen sind, also z. B. 1899 Dec. 22/23 bedeutet den Vormittag des 23. December, der astronomisch noch zum 22. December gehört.

Diese Focaleinstellungen sind wie bisher in der Weise angestellt, dass das Ocular immer fest in die Fassung hineingedrückt war und dann der ganze Ocularkopf (ohne Rücksicht auf die Deutlichkeit des Fadenkreuzes zu nehmen, welches sich auf einem beweglichen Schieber befindet und aus dem Gesichtsfelde gebracht werden kann) abwechselnd dem Objective genähert oder entfernt wurde bis das Bild des Doppelsterns dem Auge des Beobachters deutlich erschien und die Ocularscala abgelesen werden konnte.

Ein anderer Weg wäre der gewesen, zuerst das Ocular auf das Fadenkreuz einzustellen und dann den ganzen Ocularkopf zu verschieben bis ein Doppelstern deutlich erscheint. Dann wäre die Focussirung so weit sich überblicken lässt, unabhängig von der Sehweite des Auges gewesen und es wäre dann nur die Unveränderlichkeit des Fadenkreuzes im Ocularkopf Bedingung gewesen. Indessen ist das Fadennetz einige Male durch Feuchtigkeit krumm geworden und auch wohl durch Einsetzen eines Oculars mit dem Kreuzstab-Mikrometer beschädigt worden und um es etwas weniger empfindlich zu machen, habe ich es durch feine Metallfäden ersetzen lassen.

Das Fadenkreuz ist also nur zu Aufstellungsbeobachtungen des Aequatorials benutzt.

Die einzelnen Focussirungen werden immer am Vormittage nach der Beobachtung in die Liste eingetragen und mit dem bis dahin angenommenen Temperatur-Coefficienten auf 0° Celsius reducirt. Wenn eine Beobachtungsreihe bis auf ein oder zwei Jahre ausgedehnt war, wurden die Beobachtungen für sich ausgeglichen um zu ersehen, ob in der Normalstellung oder im Temperatur-Coefficienten Aenderungen eingetreten waren.

Auf diese Weise entstanden für die jetzige Beschaffenheit des Objectivs nachfolgende Ergebnisse der nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichenen Focussirungen:

Nr.	Zeitraum	Zahl	N	Extreme Temp.	W. F. von	
					N	Temp. Coeff.
1)	1—37 1889 Octob. — 1890 Dez.	37	$21.15 + 0.0184 t$	$+ 21.4 - 11.8$	± 0.03	± 0.0026
2)	38—75 91 Febr. — 92 Jan.	36	21.21	$+ 21.0 - 9.2$	0.03	0.0028
3)	75—111 92 März — 94 März	38	21.20	$+ 24.0 - 12.2$	0.02	0.0017
4)	112—143 94 April — 95 Mai	32	21.19	$+ 24.0 - 8.3$	0.02	0.0013
5)	144—204 96 Mai — 98 April	61	21.19	$+ 23.8 - 7.1$	0.02	0.0013
6)	205—270 98 April — 99 Dec.	66	21.22	$+ 22.5 - 7.0$	0.01	0.0008

Die etwas grösseren wahrscheinlichen Fehler in den ersten Zeilen hängen damit zusammen, das zuerst jedesmal nur vier, später dagegen acht Einstellungen des Oculars auf den Stern gemacht wurden.

Nimmt man die Zahl der Gleichungen in den einzelnen Gruppen als Gewicht so erhält man das Gesamtergebnis

$$1) \quad N = 21.196 + 0.0159 t$$

werden dagegen die Gewichte umgekehrt proportional den Quadraten der wahrscheinlichen Fehler genommen, so ergibt sich

$$2) \quad N = 21.200 + 0.0146 t$$

Als Endresultat aus beiden Ausgleichen kann man annehmen

$$N = 21.198 + 0.0153 t \quad \text{A.}$$

Bei sämtlichen bis zum Augenblicke von mir angestellten Heliometerbeobachtungen ist der in IV. 41 abgeleitete Werth aus den ersten 73 Focussirungen von 1889 October bis 1892 Januar angenommen da eine deutlich ausgesprochene Aenderung durch die bisherigen Beobachtungen nicht angedeutet ist und eine verschiedene Annahme der Constanten zu verschiedenen Zeiten mit grossen Unbequemlichkeiten verknüpft gewesen wäre.

Es ist also angenommen worden

$$N = 21.18 + 0.019 t \quad \text{B.}$$

Der Unterschied der nach den Ausdrücken A u. B berechneten Ocularstellungen für die äussersten Grenzen der in Betracht kommenden Temperaturen und der daraus entstehenden Correctionen der grössten messbaren Distanz von 180 Scalentheilen oder 7200" sind

bei -10° Celsius: -0.06 Millimeter und -0.16
 $+25$: $+0.07$ „ $+0.18$

und für die Sonnendurchmesser erreichen diese Unterschiede nur die Beträge von -0.04 und $+0.05$.

Die für die grössten Distanzen und am weitesten entlegenen Temperaturen entstehenden Unterschiede der Abstände, -0.16 und $+0.18$, werden bei den Beobachtungen der Distanzmessungen sehr selten erreicht, weil namentlich bei grossen Kältegraden, die meistens mit östlichen Winden zusammenhängen, der Unruhe der Bilder wegen selten genaue Distanzmessungen ausgeführt werden können und man sich höchstens auf die Bestimmung der Wärme-Coefficienten einlassen kann. Der Unterschied zwischen den Formeln A und B ist daher bis jetzt noch nicht von Bedeutung gewesen und es sind deshalb meine sämtlichen Beobachtungen von 1889 ab nach dem Ausdrucke $N = 21.18 + 0.019 t$ reducirt worden.

In den sechs verschiedenen Temperatur-Coefficienten der Ocularstellung ist übrigens mit Rücksicht auf die wahrscheinlichen Fehler derselben eine allmähliche Abnahme im Laufe eines Jahrzehnts ziemlich deutlich ausgesprochen und in etwas geringerem Masse zeigt sich dieselbe Erscheinung auch bei den gleichzeitigen Focussirungen von Ambronn, nämlich:

Nr.	Zeitraum	Zahl	N	Extreme Temp.		W. F. von		
				N	Temp. Coeff.			
1)	1— 36 1889 Aug.—1891 Jan.	36	21.42^{mm}	$+ 0.0252 t^{\circ}$	$+ 23.0^{\circ}$	$- 12.4^{\circ}$	± 0.03	± 0.0021
2)	37— 67 91 Jan.— 92 Jan.	30	21.38	0.0251	+ 22.8	- 9.1	0.02	0.0010
3)	68—122 92 Jan.— 96 Mai	54	21.36	0.0248	+ 26.2	- 14.5	0.01	0.0006
4)	123—174 96 Mai — 98 Apr.	52	21.39	0.0241	+ 21.2	- 4.0	0.01	0.0009
5)	175—222 98 Apr.— 99 Dec.	47	21.40	0.0212	+ 23.4	- 11.2	0.01	0.0008

Eine Aenderung dieser Coefficienten mit der Zeit kann auf dreierlei Weise zu Stande kommen, nämlich 1) durch eine Aenderung im Ausdehnungs-Coefficienten des Metallrohres 2) des Objectivsystems und 3) des Auges des Beobachters mit zunehmenden Alter. Von diesen Ursachen ist die letztere wohl am meisten und die erstere am wenigsten wahrscheinlich.

Es ist nämlich zu berücksichtigen, dass der Apparat und das Auge im Laufe eines Jahres periodisch wiederkehrenden Temperaturschwankungen bis zu 40 Grad durchzumachen hat, die im Laufe der Zeit zu einer Abnahme der Empfindlichkeit führen können.

Vielleicht wird man später einmal veranlasst sein, auch diesen Reductions-Coëfficienten als eine Function der Zeit anzusehen, wie es sich bei einer Reihe anderer Coefficienten bereits als nothwendig herausgestellt hat. Einstweilen kann es jedoch unterlassen werden auf diese Veränderlichkeit Rücksicht zu nehmen und sämtliche Rechnungen über die Triangulation und über die Instrumental-Constanten abzuändern. Die Triangulation der Perseusgruppe ist durchschnittlich zur Zeit 1893.75 angestellt und zu dieser Zeit würde der Ausdruck 3) für die Ocularstellung nämlich:

$$N = 21.20 + 0.0176 t \quad (a)$$

zur Geltung kommen. Wenn also meine sämmtlichen Heliometer-Beobachtungen bis jetzt mit dem Ausdruck

$$N = 21.18 + 0.0190 t \quad (b)$$

reducirt sind, so entsteht dadurch ein Unterschied (a — b in der Ocularstellung

$$\begin{array}{r} \text{bei} \quad \quad \quad -10^{\circ} \text{ von } 21.02 - 20.99 = +0.03^{\text{mm}} \\ \quad \quad \quad \quad +25 \quad \quad 21.64 - 21.66 = -0.02 \end{array}$$

und bei der grössten messbaren Distanz von $180^{\text{s}} = 7200''$ werden diese Unterschiede:

$$\begin{array}{r} \text{bei} \quad \quad \quad -10^{\circ} \quad +0.0020^{\text{s}} = +0.08'' \\ \quad \quad \quad \quad +25 \quad -0.0013 = -0.05'' \end{array}$$

Da die grösste Distanz in der Perseusgruppe *ap* aber nur $3924''$ und die Temperatur-Unterschiede an den fünf Beobachtungsabenden nur 9° betragen, so spielen diese Abweichungen nicht die geringste Rolle.

Es ist übrigens schon in IV. 50 darauf hingewiesen worden, dass kleine Unrichtigkeiten in der Berechnung der Ocularstellung bei den Reductionen nahezu verschwinden weil sie bei der Berechnung des Einflusses der Temperatur des Fernrohres nahezu wieder aufgehoben werden, so dass in Wirklichkeit die Endresultate der Distanzmessungen nahezu unabhängig von der Temperatur sind.

Reduction der Distanzmessungen auf die Normal-Ocular-Stellung.

Mit dem soeben genannten Ausdruck für die Normal-Ocular-Stellung ist für die einzelnen Beobachtungen der der Temperatur t des Heliometers entsprechende Werth N berechnet worden. Damit zu vergleichen ist die an der Ocularscala wirklich abgelesene Stellung des Oculars, die meistens nach einer kleinen genäherten Tabelle nach Ablesung der Thermometer mit Rücksicht auf die für die Beobachtungszeit zu erwartende mittlere Temperatur bestimmt und für einige Stunden beibehalten wird wenn nicht sehr starke Aenderungen der Temperatur eintreten. Die Stellung des Oculars weicht demnach von den Stellungen die der im Laufe einer Beobachtungsperiode veränderlichen Temperatur entsprechen um kleine Bruchtheile des Millimeters ab.

Ist z. B. vor einer Sonnenbeobachtung die Temperatur $+5^{\circ}$, also die Normal-Ocular-Stellung 21,27, so wird mit Rücksicht, dass diese Zahl bei 1° Temperaturerhöhung sich um etwa 0.02 Millimeter vergrössert, das Ergebniss der vorbeigehenden Focussirung auf den Polarstern um etwa 0.1 Millimeter vergrössert. Es ist dabei zu bemerken, dass die zur Reduction der Beobachtungen dienende Ablesung der Ocular-Scala immer erst dann zu notiren ist, wenn eine kleine Druckschraube zur Befestigung des Auszuges der Ocularröhre angezogen ist.

Bezeichnet man mit N die der Temperatur entsprechende Ablesung der Ocular-Scala, dagegen mit O die Ablesung bei der Beobachtung, so würde nach IV. 42. die Reduction auf die Normal-Ocular-Stellung sein

$$+ 0.0381 (N - O) \frac{S}{100}$$

wo S die gemessene Distanz in Scalentheilen. Dagegen haben Sternbeobachtungen bei etwas abgeänderter Stellung ergeben (Siehe IV. 42)

$$+ 0.0366 (N - O) \frac{S}{100}$$

also: 0,96 des berechneten Werthes. Mit diesem in den Jahren 1890 und 1891 bestimmten Coëfficienten sind auch alle übrigen bis jetzt ausgeführten Beobachtungen berechnet worden.

Weiter unten sind für die Ocularstellung und ferner auch für die Berechnung des Einflusses der Temperatur auf die Distanzmessungen, insofern davon nicht nur die Brennweite des Objectivs als auch die Länge der Scalen zur Messung der Verschiebung der Objectivhälften abhängt, zwei bei der Reduction benutzte Tafeln gegeben.

Es bietet sich hier eine Gelegenheit, einige Worte über die Betheiligung der Göttinger Sternwarte an der Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Dr. Gill zu sprechen.

Vergl. Determination of the solar parallax. Annals of the Cape observatory Vol. VI.

Während es bei der Berechnung der Göttinger Heliometerbeobachtungen überall durchgeführt ist, die bei einer bestimmten, an der Scala abgelesenen Stellung des Ocularschiebers gemessenen Distanzen auf eine mit der Temperatur als Argument berechnete Normal-Ocular-Stellung zu reduciren, deren Constante durch Focussirung auf Doppelsterne erhalten wird, hat Dr. Gill diese Reduction nicht vorgenommen, sondern die an den einzelnen Abenden angestellten Beobachtungen der Abstände zwischen Planet und Vergleichstern mit den jedesmaligen Distanzmessungen der Standard stars verglichen, wie sie sich bei einer vielleicht etwas abweichenden Ocularstellung ergeben haben. Dieses Verfahren ist ja an sich nicht unrichtig, aber man erhält dadurch eine unrichtige Vorstellung von der inneren Uebereinstimmung der an verschiedenen Abenden gemessenen Abstände der Standard stars und somit der Genauigkeit der heliometrischen Distanzmessungen überhaupt.

In meiner Abhandlung über die Praesepe, Astr. Mitthlgg. IV S. 79 ist die lange Reihe von Messungen der Standard stars zusammengestellt, weil dieselben dazu beigetragen haben, den Winkelwerth der Objectiv-Scalen zu bestimmen und dort ist die innere Uebereinstimmung eine viel nähere, weil wie bemerkt alle Messungen in der üblichen Weise auf die von der Temperatur abhängige Normal-Ocularstellung reducirt worden sind, und sich in der Columne $N-O$ gelegentlich einige grössere bis auf 0.4 Millimeter gehende Werthe zeigen, die durch eine damals noch nicht ganz richtige Einstellungstabelle veranlasst worden sind.

Ich muss dabei noch darauf aufmerksam machen, dass sich bei der durch

diesen Umstand veranlassten durchgehenden Revision meiner Beobachtungen der Standard stars einige kleine Irrthümer herausgestellt haben, die ich bei der weiteren Verwendung dieser Messungen berücksichtigt habe. Es war mir nämlich entgangen, dass 1890 Mai 19 im Laufe des Abends die anfängliche Stellung des Oculars ein wenig abgeändert wurde und die Ablesung der Scala zuerst 21.89 und später 21.72 also 0.17 Millimeter kleiner war. Dadurch wird bei der zweiten Beobachtung dieses Tages die Columnne $N - O = 21,44 - 21,72 = -0,28$ anstatt $-0,45$ und damit die Reduction der Distanzmessung -165 anstatt -266 in Einheiten der vielen Decimale des Scalentheils. Ferner ist die Zeit der Beobachtung $18^h 39^m,8$ anstatt $18^h 19^m,8$ (an Dr. Gill hatte ich die richtige Zeit gesandt) und dadurch wird die Refraction $+548$ anstatt $+601$. Die beiden Verbesserungen im Betrage von $+101 - 53 = +48$ Einheiten ändern den Abstand in $161,3460$ anstatt $161,3412$, d. h. um $+0,019$.

Ferner ist 1890 Juli 10 die Verbesserung der Distanz durch Aberration zu $+47$ anstatt $+19$ angewandt. Die drei Abstände der Standard stars für diesen Abend werden dadurch $161,3415$, 3497 , 3355 , d. h. 28 Einheiten $= 0,11$ kleiner als früher.

Die aus diesen kleinen Verbesserungen hervorgehende geringe Abänderung des Scalenwerthes habe ich in vorliegender Abhandlung über die Perseus-Triangulation berücksichtigt.

Abhängigkeit der Distanzmessungen von der Temperatur.

Zur Ermittlung der Temperatur-Coëfficienten zur Reduktion der Abstandsmessungen dienten wie bisher die Messungen des Abstandes der beiden Sterne im Polbogen (Vgl. IV. 43) deren genaue Orte und Veränderung durch Präcession und Eigenbewegung dort gegeben sind. Da nur die Eigenbewegung Einfluss auf den gegenseitigen Abstand hat, so ist die Abhängigkeit von der Zeit einfach in Rechnung zu bringen und bei dem innerhalb eines Jahres periodisch veränderlichen Einfluss der Temperatur spielt die EB. überhaupt keine Rolle. Dieselbe würde nur dann in Betracht kommen, wenn man die im Laufe der Zeit hinzukommenden Beobachtungen auch fernerhin zur Ableitung des Verwandlungswerthes von Scalablesungen in Bogenmass verwenden wollte wie es früher geschehen ist.

Die zur Ableitung des Wärme-Coëfficienten früher verwandten Beobachtungen reichen von 1890 Mai 19 bis 1893 Januar 17 und es hat sich für meine Beobachtungen die Reductionsformel auf 0°C ergeben

$$-(0,0007,90 \pm 0,0000,42) \frac{\overset{s}{\text{Distanz in Scalentheilen}}}{100}$$

Die Verbesserungen für Ocularstellung, Theilungsfehler, Temperatur, Refraction usw. werden durchweg zuerst in Einheiten der vierten Decimale eines Scalentheils (S etwa $40''$) ausgedrückt und erst dann wenn alle Verbesserungen

berücksichtigt sind, erfolgt die Verwandlung in Bogensekunden. Da nach IV. 49. noch einige ältere Ermittlungen des Temperatur-Coëfficienten hinzu kommen, die den Werth ein wenig erhöhen, so ist bisher als Reductionsformel angewandt worden

$$-0.0008 \frac{Distanz \text{ in Scalentheilen}}{100}$$

Zu den damals verwandten Messungen sind in den letzten Jahren bei hohen und niederen Temperaturen noch die folgenden in der bisherigen Weise reducirten Beobachtungen hinzugekommen. Es ergiebt sich damit als Fortsetzung der Tafel auf IV. 44.

Beobachtungen des Polbogens zur Bestimmung des Temperatur-Coëfficienten.

Tag	Sternzeit	Bar.	Th.	t	N	O	N - O	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Refr.	Aberr.	Abstand
	^h ^m			^o										
1894 Jan. 4	2 6.6	754	- 15	- 13.1	20.93	20.92	+ 0.01	169.3714	- 41	+ 2	+ 6	+ 576	+ 7	169.4264
	2 20.6			13.0	93		+ 0.01	3686	- 41	+ 2	+ 6	593	7	4253
Juli 2	16 19.9	750	+ 21	+ 25.1	21.65	21.60	+ 0.05	4168	- 14	+ 1	+ 31	+ 653	+ 3	4842
	16 29.4			24.6	65		+ 0.05	4208	- 14	+ 1	+ 31	676	3	4906
23	19 20.5	745	+ 18	+ 20.3	21.57	21.69	- 0.12	4060	- 26	- 7	- 75	+ 742	+ 22	4716
	19 32.0			20.2	56		- 0.13	4037	- 14	- 7	- 81	736	22	4693
24	18 58.8	747	+ 21	+ 23.6	21.63	21.62	+ 0.01	4045	- 26	- 7	+ 6	+ 743	+ 23	4784
	19 7.8			23.4	63		+ 0.01	4089	- 14	- 7	+ 6	741	23	4838
1897 Juni 23	16 10.7	751	+ 18	+ 20.4	21.56	21.48	+ 0.08	4079	- 23	+ 1	+ 50	+ 650	- 8	4749
	16 22.2			20.2	56		+ 0.08	4188	- 24	+ 1	+ 50	664	8	4871
25	16 24.5	747	+ 19	+ 21.0	21.57	21.50	+ 0.07	4180	- 23	+ 1	+ 44	+ 661	- 6	4857
	16 33.5			20.4	56		+ 0.06	4147	- 23	+ 1	+ 37	672	6	4828
29	16 59.4	748	+ 22	+ 24.8	21.65	21.65	0.00	4171	- 13	+ 1	0	+ 693	- 2	4850
	17 9.4			24.4	64		- 0.01	4268	- 23	+ 1	- 6	702	2	4940
Aug. 3	18 28.2	752	+ 17	+ 20.2	21.56	21.50	+ 0.06	4001	- 23	+ 1	+ 37	+ 759	+ 35	4810
	18 35.7			20.1	56		+ 0.06	4091	- 24	+ 1	+ 37	760	35	4906
4	18 5.3	751	+ 18	+ 21.2	21.57	21.50	+ 0.08	4039	- 24	+ 1	+ 50	+ 751	+ 36	4855
	18 13.3			21.0	58		+ 0.08	3932	- 23	+ 1	+ 50	753	36	4749
1898 Aug. 3	20 20.4	746	+ 17	+ 18.7	21.53	21.50	+ 0.03	4171	- 23	+ 1	+ 19	+ 718	+ 35	4921
	20 36.9			18.6	53		+ 0.03	4097	- 23	+ 1	+ 19	685	35	4814
6	19 16.1	745	+ 18	+ 19.8	21.56	21.50	+ 0.06	3958	- 13	+ 1	+ 37	+ 746	+ 38	4767
	19 23.6			19.8	56		+ 0.06	4105	- 23	+ 1	+ 37	738	38	4896

Ableitung des Temperatur-Coëfficienten aus Distanzmessungen des Polbogens.

Führt man ausser dem Temperatur-Coëfficienten zur Berücksichtigung der Eigenbewegung noch ein Zeitglied ein und setzt den Abstand der beiden Sterne in Scalentheilen:

$$169.4400 + x + 0.0008 \frac{169.44}{100} t + (T - 1892.0) z$$

$$= 169.4400 + x + 0.0013.355 t + (T - 1892.0) z$$

so gestaltet sich die Ausgleichung sämmtlicher zu diesem Zwecke angestellten Beobachtungen des Polbogens, wenn man die Verbesserung des vorläufigen Temperatur-Coëfficienten 13.355 mit y bezeichnet, folgendermassen:

			Tagesmittel	Tabelle	Beob.-Rechn.			
1	1890	Mai	19	169,4595	4626	— 31	=	$x + 16.7 y - 1.6 z$
2			22	4622	4597	+ 25		+ 14.6 — 1.6
3			23	4592	4602	— 10		+ 14.9 — 1.6
4		Juni	3	4480	4597	— 117		+ 14.6 — 1.6
5			4	4620	4647	— 27		+ 18.2 — 1.6
6		Juli	14	4682	4674	+ 8		+ 20.2 — 1.5
7			15	4715	4701	+ 14		+ 22.2 — 1.5
8		Aug.	1	4560	4678	— 118		+ 20.5 — 1.4
9		Nov.	27	4196	4270	— 74		— 9.6 — 1.1
10			28	4405	4281	+ 124		— 8.8 — 1.1
11		Dec.	7	4363	4369	— 6		— 2.3 — 1.1
12			9	4244	4355	— 111		— 3.3 — 1.1
13			14	4285	4306	— 21		— 6.9 — 1.1
14			15	4174	4284	— 110		— 8.5 — 1.0
15			17	4363	4270	+ 93		— 9.6 — 1.0
16	1891	Juni	25	4675	4697	— 22		+ 21.9 — 0.5
17			28	4613	4665	— 52		+ 19.6 — 0.5
18		Juli	19	4692	4629	+ 63		+ 16.9 — 0.5
19			23	4690	4625	+ 65		+ 16.6 — 0.5
20	1892	Febr.	16	4293	4324	— 31		— 5.6 + 0.1
21			18	4275	4342	— 67		— 4.3 + 0.1
22		März	4	4187	4315	— 123		— 6.2 + 0.2
23			6	4189	4331	— 142		— 5.1 + 0.2
24		Mai	26	4704	4715	— 11		+ 23.2 + 0.4
25			27	4700	4736	— 36		+ 24.8 + 0.4
26			28	4712	4689	+ 23		+ 21.3 + 0.4
27	1893	Jan.	3	4240	4238	+ 2		— 11.9 + 1.0
28			17	4314	4173	+ 141		— 16.8 + 1.1
29	1894	Jan.	4	4259	4223	+ 36		— 13.1 + 2.0
30		Juli	2	4874	4738	+ 136		+ 24.9 + 2.5
31			23	4705	4675	+ 30		+ 20.3 + 2.6
32			24	4811	4718	+ 93		+ 23.5 + 2.6
33	1897	Juni	23	4810	4675	+ 135		+ 20.3 + 5.5
34			25	4843	4681	+ 162		+ 20.7 + 5.5
35			29	4895	4733	+ 162		+ 24.6 + 5.5
36		Aug.	3	4855	4674	+ 181		+ 20.2 + 5.6
37			4	4801	4686	+ 115		+ 21.1 + 5.6
38	1898	Aug.	3	4868	4653	+ 215		+ 18.7 + 6.6
39			6	4832	4668	+ 164		+ 19.8 + 6.6

Hieraus folgen die Endgleichungen

$$\begin{aligned}
 &+ 873 = + 39 x + 388.3 y + 32.6 z \\
 &+ 24449 \quad + 388.3 x + 11353.3 y + 786.2 z \\
 &+ 797.5 \quad + 32.6 x + 786.2 y + 293.24 z
 \end{aligned}$$

wo die absoluten Glieder in Einheiten der vierten Decimale eines Scalentheils ausgedrückt sind. Die Auflösung der Gleichungen giebt

$$x = - 4,43 \pm 8.77$$

$$y = + 0,4764 \pm 0.55$$

$$z = + 26,41 \pm 2.93$$

d. h. die Entfernung der beiden Sterne für 0^o C. und für die Epoche 1892.0 ist

$$169.4400 - 0,0004 = 169.4396 \text{ Scalentheile}$$

und die Zunahme der Messung für 1° C. = $+ 0,0013.555 + 0,0000.476 = 0,0014.031 \pm 0,0000.55$ oder bezogen auf einen Abstand von 100 Scalentheilen $+ 0,0008.28 \pm 0,0000.33$

Wenn bisher meine sämmtlichen Messungen mit dem Coëfficienten 0.0008 auf 0° reducirt worden sind, so liegt diese Annahme innerhalb der Grenzen der wahrscheinlichen Fehler der neueren Bestimmung und es ist deshalb keine Veranlassung vorhanden, von diesem abgerundeten Werthe abzugehen. Die Reduction einer bei t° Celsius gemachten Distanzmessung ist daher wie bisher

$$- 0.0008 \frac{s}{100} \cdot t$$

Kürzeste Entfernung der beiden Objectivhälften von einander.

In IV. 60. findet sich über den Abstand der optischen Mittelpunkte ein bis 1893 Febr. 6 gehendes Verzeichniss woraus hervorgeht, dass nur ausnahmsweise etwas grössere Beträge vorkommen und grössere Abstände nöthigenfalls immer beseitigt wurden. In späterer Zeit hat sich dieser Abstand meistens von selbst sehr klein gehalten und eine Berichtigung war seltener nothwendig als früher. Ich gebe jetzt ein Verzeichniss nach meinen Beobachtungen für die letzten Jahre

64	1893	Juni	30	$e = 0.58$	Doppeltbrechendes Prisma, Pos. W. 270°	Oc.	II
65		Juli	13	0.28	70 Ophiuchi		III
66			25	0.29	"		"
67		Aug.	3	0.32	"		"
68		Oct.	19	1.01	"		"
69	1894	Juli	5	0.09	"		"
70			23	0.14	"		"
71			24	0.33	"		"
72		Oct.	12	0.60	"		"
73		Nov.	6	0.17	61 Cygni		II
74	1895	Mai	28	0.53	70 Ophiuchi		III
75			29	0.22	"		"
76			31	0.60	"		"
77		Juli	13	0.41	"		"
78		Oct.	17	0.57	α Piscium		"
79			24	0.34	"		"
80	1896	Jan.	27	Durchgang der Bilder in beiden Lagen völlig central			
81		Juni	5	Objectiv II zum Reinigen der Linsen abgenommen			
82		Juli	6	0.45	70 Ophiuchi		III
83			11	0.14	"		"
84			13	0.27	"		"
85			14	0.60	"		"
86			25	0.16	"		"
87		Sept.	26	0.09	"		"
88		Oct.	24	0.14	"		"
89			26	0.42	"		"
90			27	0.07	"		"
91		Nov.	10	0.21	"		"
92		Dec.	11	1.06	Künstlicher Doppelstern		II
93	1897	Mai	18	0.24	70 Ophiuchi		III
94			29	0.61	"		"
95		Juni	21	0.20	"		"
96			22	0.39	"		"
97				1.00	61 Cygni		II

98	1897	Juni	26	$e = 1.65$	61 Cygni	Oc.	II
99		Juli	12	0.40	70 Ophiuchi		III
100				0.23	61 Cygni		II
101			19	1.03	70 Ophiuchi		III
102			24	0.55	"		"
103				0.98	ξ Aquarii		"
104			29	0.21	70 Ophiuchi		"
105				0.69	61 Cygni		II
106		Aug.	4	1.11	"		"
107			10	0.41	70 Ophiuchi		III
108		Sept.	26	0.19	"		"
109			27	0.23	"		"
110			28	0.20	"		"
111			30	0.42	"		"
112		Oct.	5	0.40	61 Cygni		II
113			14	0.50	70 Ophiuchi		III
114				0.31	61 Cygni		II
115			26	0.26	"		"
116			28	0.26	"		"
117		Nov.	10	0.03	"		"
118			13	0.07	"		"
119			14	0.30	"		"
120			25	0.08	"		"
121		Dec.	17	0.23	"		"
122	1898	Juni	13	0.03	"		"
123			16	0.15	"		"
124			21	0.10	"		"
125			23	0.22	"		"
126			28	0.06	"		"
127				0.18	70 Ophiuchi		III
128		Juli	14	0.23	"		"
129			21	0.12	"		"
130				0.44	61 Cygni		II
131			24	0.08	70 Ophiuchi		III
132				1.12	ξ Aquarii		"
133		Aug.	2	0.15	70 Ophiuchi		"
134			3	0.18	"		"
135				0.19	ξ Aquarii		II
136			6	0.16	70 Ophiuchi		III
137				0.10	ξ Aquarii		II
138			12	0.18	70 Ophiuchi		III
139		Nov.	4	0.30	61 Cygni		II
140			8	0.50	"		"
141			20	0.31	"		"
142			29		Objectivhälfte II abgenommen und beide Hälften mit Aether		"
143		Dec.	5	0.31	61 Cygni	[geputzt.	II
144			7	0.31	"		"
145	1899	Jan.	21		Die Bilder gehen central durcheinander.		"
146		Apr.	22	0.30	61 Cygni		"
147		Mai	30	0.28	"		"
148		Juni	1	0.12	"		"
149			10	0.20	"		"
150		Juli	10	0.03	"		"
151				0.02	70 Ophiuchi		III
152			17	0.19	"		"
153			18	0.45	"		"
154			25	0.03	"		"
155		Aug.	9	0.63	"		"
156			10	0.41	"		"
157		Dec.	20	0.95	61 Cygni		II

Die Abstände der Objectivhälften spielen nach der Tabelle IV. 62 bei Abständen von mehr als 60' keine Rolle und bei kleineren Abständen z. B. bei Messungen von Doppelsternen wurden immer die jedesmaligen Ablesungen des Positionswinkels in beiden Stellungen der Objectivschieber zur Reduction verwandt.

Systematische Correctionen der Distanzmessungen.

Bei der in den Astronomischen Mittheilungen IV veröffentlichten Vermessung der Praesepe wurde über 45 Sterne ein Dreiecksnetz gelegt in welchem jeder Stern zunächst mit den ihm benachbarten durch Distanzmessungen verbunden wurde, ausserdem wurden aber noch andere Combinationen gemessen, so dass sich über die ganze Gruppe ein complicirtes Dreiecksnetz mit zahlreichen überschüssigen Beobachtungen ergab.

Für vier an den Grenzen liegende Sterne standen Beobachtungen der Oerter an den Meridiankreisen in Berlin und in Göttingen zur Verfügung und als nun für den Centralstern Nr. 1 die Rectascension und Declination dadurch berechnet wurde, dass an die Oerter der vier Sterne des Vierecks die aus der Ausgleichung der Heliometerbeobachtungen hervorgehenden Differenzen in Rectascension und Declination angebracht wurden, zeigten die auf diese Weise für den Centralstern erhaltenen Oerter eine sehr mangelhafte Uebereinstimmung die das Vorhandensein von besonderen Eigenthümlichkeiten, den systematischen Correctionen der Abstandsmessungen erkennen liessen.

Um über die Form dieser Correctionen in ihrer Abhängigkeit von der Grösse der gemessenen Distanz etwas Näheres zu erfahren, wurden damals in verschiedenen Gegenden des Himmels Reihen von Sternen von mir ausgesucht, die nahe in einer geraden Linie erscheinen und es wurden dazwischen alle möglichen Combinationen von Abständen gemessen. Nachdem diese Abstände mit Hilfe der anderweitig bekannten Positionen der Sterne in Rectascension und Declination auf die Verbindungslinie zwischen den beiden am weitesten von einander abstehenden Sternen reducirt waren, hätten alle einzelnen Strecken aus welchen man den Abstand zusammensetzen kann, durch Addition immer dieselbe Summe geben müssen. Es ergaben sich aber Widersprüche, woraus geschlossen wurde, dass die Distanzmessungen verschiedener Grösse besonderer Verbesserungen bedürfen, denen eine mathematische Form derart gegeben wurde, dass sie von den kleinsten Abständen mit Null beginnend bei 1000 Secunden Abstand auf etwa $+0.2''$ anwachsen und dann bis zu den grössten Abständen allmählich wieder abnehmen.

Die zur Ausgleichung der Praesepe-Triangulation verwandten Bogen, nämlich Praesepe $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \eta \vartheta \iota \kappa$, Praesepe $abc defghijklmnop$, Vulpecula I II III usw. bis XV in der Länge von 3600, 4735 und 5187 Secunden, zeigten, dass die für den Abstand der beiden Endsterne aus den einzelnen Strecken berechnete Entfernung um so kleiner ausfiel je grösser die Zahl der dabei verwandten Strecken war, dass als die kleineren Abstände einer kleinen positiven Verbesserung bedürfen um die Widersprüche zu beseitigen.

Nach einigen Versuchen die für eine bestimmte Distanzmessung erforderliche Correction zu ermitteln und durch einen von der Länge und dem Quadrate desselben abhängige Form darzustellen wurde dann der Weg eingeschlagen, die

Gestalt der Curve nicht durch einen bestimmten mathematischen Ausdruck darzustellen, sondern aus den Beobachtungen selbst abzuleiten und zum Schluss wurde nach der Erwägung auf IV. 168. die Form der Verbesserung folgendermassen gewählt.

Für eine Distanz s ausgedrückt in Einheiten von 1000 Secunden ist die Verbesserung

$$\Delta = +0.473'' [s - 0.50s^2 + 0.06s^3]$$

und die daraus folgende Corrections-Tabelle ist

Distanz	Correction
0''	0.00
500	+ 0.18
1000	+ 0.26
1500	+ 0.27
2000	+ 0.23
2500	+ 0.15
3000	0.00

Diese Form wurde einstweilen für die Ausgleichung der Distanzmessungen in der Praesepegruppe verwandt. Nach der Veröffentlichung der Abhandlung über die Praesepe (Astr. Mitthlgg. IV.) sind jedoch noch weitere Untersuchungen über das Verhalten der systematischen Correctionen angestellt worden und ich habe darüber in einem Aufsätze: *Neue Untersuchungen über den Verlauf der systematischen Fehler bei Distanzmessungen am Göttinger Heliometer nach Beobachtungen an einer Reihe von Sternen im Löwen.* Astr. Nachr. Bd. 142 Seite 225 auszugsweise Bericht erstattet.

Im Folgenden sind diese Untersuchungen mit genauer Darstellung der Einzelheiten der Beobachtungen wiedergegeben.

Neue Untersuchungen über den Verlauf der systematischen Fehler bei Distanzmessungen am Göttinger Heliometer nach Beobachtungen einer Reihe von Sternen im Löwen.

In den Astronomischen Nachrichten Bd. 134 und später in ausführlicherer Weise in meiner Abhandlung über die Praesepe (Astron. Mittheilungen Göttingen, Vierter Theil 1895) habe ich über frühere Messungen zwischen einer Reihe von Sternen berichtet, die nahezu in einem grössten Kreise liegen, wobei es sich zeigte, dass man zu verschiedenen Resultaten über die Distanz zwischen den beiden Endsternen gelangt, je nach dem man dazu die Messungen zwischen diesen beiden Sternen selbst benutzt oder dieselbe durch Addition der zwischen

den einzelnen Sternen angestellten Abmessungen berechnet, nachdem von genügend bekannten Oertern der Sterne ausgehend, die Projectionen der einzelnen Abstände auf die Verbindungslinie der Endsterne vorgenommen worden sind.

Bei der Untersuchung dieser Messungen an Sternreihen, von denen zwei in der Praesepe selbst und eine dritte in der Vulpecula liegen, hat sich herausgestellt, dass die Abstandsmessungen kleiner Verbesserungen bedürfen, die bei einem Abstand von etwa 1300 Bogensekunden ein Maximum von etwa $\frac{1}{4}$ Secunde erreichen, während für die kleinsten und für die grösseren am Heliometer messbaren Abstände die Correctionen wieder zu Null zu convergiren scheinen. Eine Curve zur Verbesserung der Messungen steigt vom Nullpunkt bis zu 1300 Secunden schnell an und nähert sich dann bei grösseren Abständen wieder der Abscissenaxe.

Während am Göttinger Heliometer die grösste durch Verschiebung der Objectivhälften messbare Distanz nahezu zwei Grad oder 7200 Secunden beträgt, hatten die Bogen Praesepe αx und Praesepe ap eine Länge von 3608 und 4736 und der Vulpecula-Bogen eine Länge von 5184 Secunden; also auch der längste dieser drei Bögen ging nicht weit über 0.7 der überhaupt messbaren Abstände hinaus. Es war deshalb mein Bestreben, einen anderen Bogen von Sternen aufzufinden, der sich über einen noch grösseren Theil des Gesichtsfeldes des Heliometers erstreckt und diese Bemühungen sind insofern gelungen, als im Sternbild des Löwen ein Bogen aufgefunden wurde, dessen Endsterne um 6914 Secunden, also um 0.96 der grössten messbaren Distanz von einander abstehen.

Die acht Sterne dieses Bogens finden sich in der Bonner Durchmusterung, und ihre Positionen sind den Albany Zonen entnommen, in denen sie mit Ausnahme des zweiten sämmtlich vorkommen. Um auch für den hier fehlenden Stern eine möglichst genaue Position zu erhalten, habe ich ihn am Heliometer an die beiden benachbarten Sterne Nr. 1 und 3 angeschlossen.

Auf diese Weise ergibt sich für das Aequinoctium 1895:

Nr.	B. D.	Gr.	Albany.	Epoche	1895.0		
1	+ 4.2377	8.7	4113	1880.3	10 ^h 39 ^m 7.57 ^s	+ 4° 35' 6.7"	
2	4.2380	9.2	—	—	41 2.47	3 51 14.7	
3	3.2411	8.2	4124	80.3	41 26.79	3 39 4.4	
4	3.2413	9.0	4127	80.8	42 10.92	3 21 49.3	
5	3.2415	8.6	4129	80.6	42 33.67	3 12 27.6	
6	3.2417	8.7	4131	81.3	42 46.21	3 6 50.3	
7	3.2418	8.7	4132	81.3	42 56.58	3 2 13.8	
8	3.2419	8.7	4133	81.5	43 7.07	2 56 35.2	

Aus diesen Oertern sind die in nachstehender Tabelle in der Columnne „Projection“ enthaltenen Beträge gerechnet, welche die Abstände zwischen je zwei der Sterne auf die Verbindungslinie zwischen den Endsternen 1 und 8 reduciren.

Die Messungen am Heliometer und die Reductionen nach dem in meiner Abhandlung über die Praesepe beschriebenen Verfahren sind die nachfolgenden.

Messungen des Löwenbogens.

Tag	Sternzeit	Bar.	Th.	t	N	O	N-O	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand	R. S.		
	h m	m	o	o					I									
95	Apr. 16	10 58.3	746	+ 11	+ 11.9	21.41	21.24	+ 0.17	78.5286	- 23	0	+ 49	- 75	+ 379	- 56	78.5560	3 3	
	Mai 23	13 16.7	45	+ 14	+ 15.7	21.47	21.45	+ 0.02	5414	- 24	- 1	+ 6	- 99	+ 335	- 76	5555	2 2	
96	Febr. 18	7 45.5	54	0	+ 1.6	21.21	21.10	+ 0.11	4760	- 24	0	+ 31	- 10	+ 876	+ 14	5647	3 4	
	März 20	11 10.4	49	+ 8	+ 9.2	21.35	21.32	+ 0.03	5341	- 24	0	+ 9	- 58	+ 376	- 27	5617	2 3	
	Apr. 30	13 11.0	44	+ 6	+ 8.5	21.34	21.28	+ 0.06	5342	- 24	0	+ 17	- 53	+ 339	- 68	5553	3 2	
									II									
95	Apr. 16	11 10.3	746	+ 11	+ 11.7	21.40	21.24	+ 0.16	98.8180	- 34	+ 3	+ 61	- 92	+ 475	- 70	98.8523	3 3	
	Mai 13	13 36.2	53	+ 13	+ 16.3	21.49	21.50	- 0.01	8297	- 34	+ 3	- 4	- 129	+ 378	- 93	8418	2 3	
96	Apr. 24	13 26.6	51	+ 3	+ 4.5	21.27	21.29	- 0.02	8089	- 34	+ 3	- 8	- 36	+ 458	- 79	8393	2 3	
	30	13 18.0	44	+ 6	+ 8.3	21.34	21.28	+ 0.06	8093	- 34	+ 3	+ 22	- 66	+ 447	- 85	8380	3 2	
	Mai 9	12 34.3	50	+ 11	+ 12.3	21.42	21.40	+ 0.02	8249	- 34	+ 3	+ 8	- 97	+ 441	- 91	8479	2 3	
									III									
95	Apr. 16	11 22.8	746	+ 11	+ 11.5	21.40	21.24	+ 0.16	129.4998	- 24	0	+ 76	- 120	+ 613	- 93	129.5450	3 3	
	Mai 12	13 7.8	53	+ 15	+ 17.9	21.52	21.50	+ 0.02	5299	- 13	0	+ 9	- 186	+ 572	- 122	5550	3 3	
96	Febr. 18	8 22.0	54	0	+ 1.5	21.21	21.10	+ 0.11	4388	- 13	+ 1	+ 52	- 15	+ 1151	+ 25	5589	3 4	
	März 20	11 29.9	49	+ 8	+ 9.2	21.35	21.32	+ 0.03	5064	- 13	0	+ 14	- 96	+ 616	- 43	5542	2 3	
	Apr. 24	13 36.6	51	+ 3	+ 4.3	21.27	21.29	- 0.02	5092	- 13	0	- 9	- 45	+ 607	- 104	5528	2 3	
									IV									
95	Apr. 16	11 41.8	746	+ 11	+ 11.2	21.39	21.24	+ 0.15	145.9046	- 40	+ 1	+ 80	- 131	+ 676	- 103	145.9529	3 3	
	Mai 12	12 58.8	53	+ 15	+ 18.0	21.52	21.50	+ 0.02	9227	- 40	+ 1	+ 11	- 211	+ 789	- 126	9651	3 3	
96	März 4	8 22.7	28	+ 3	+ 4.0	21.26	21.22	+ 0.04	8423	- 42	+ 2	+ 21	- 47	+ 1244	- 12	9589	3 3	
	20	11 39.4	49	+ 8	+ 9.1	21.35	21.32	+ 0.03	9109	- 40	+ 1	+ 16	- 106	+ 689	- 49	9620	2 3	
	Apr. 30	13 3.0	44	+ 6	+ 8.6	21.34	21.28	+ 0.06	9016	- 40	+ 1	+ 32	- 100	+ 659	- 124	9444	3 2	
									V									
95	Apr. 16	11 59.3	746	+ 11	+ 11.0	21.39	21.24	+ 0.15	155.5484	- 44	- 1	+ 85	- 137	+ 714	- 110	155.5991	3 3	
	Mai 12	12 35.3	53	+ 16	+ 18.9	21.54	21.50	+ 0.04	5727	- 42	- 1	+ 23	- 234	+ 691	- 144	6020	3 3	
	Apr. 18	11 1.8	55	+ 6	+ 7.7	21.32	21.28	+ 0.04	5565	- 42	- 1	+ 23	- 96	+ 790	- 114	6125	2 3	
	24	13 44.6	51	+ 3	+ 4.2	21.26	21.29	- 0.03	5416	- 42	- 1	- 17	- 52	+ 745	- 124	5925	2 3	
	30	13 33.0	44	+ 6	+ 8.1	21.33	21.28	+ 0.05	5490	- 42	- 1	+ 23	- 101	+ 737	- 132	5979	3 2	
	Mai 8	12 42.8	50	+ 11	+ 12.2	21.41	21.40	+ 0.01	5699	- 42	- 1	+ 6	- 152	+ 699	- 142	6007		
									VI									
95	Apr. 16	12 12.3	746	+ 10	+ 10.9	21.39	21.24	+ 0.15	163.4653	- 20	+ 1	+ 90	- 143	+ 744	- 116	163.5209	3 3	
	Mai 12	12 45.8	53	+ 15	+ 18.5	21.53	21.50	+ 0.03	4978	- 20	0	+ 18	- 242	+ 726	- 152	5308	3 3	
96	März 4	8 38.7	28	+ 3	+ 4.0	21.26	21.22	+ 0.04	3957	- 20	+ 1	+ 24	- 52	+ 1283	- 13	5180	3 3	
	Apr. 18	11 10.8	55	+ 6	+ 7.5	21.32	21.28	+ 0.04	4583	- 20	+ 1	+ 24	- 98	+ 819	- 120	5189	2 3	
	Mai 1	12 9.2	49	+ 6	+ 9.0	21.35	21.28	+ 0.07	4647	- 20	+ 1	+ 42	- 118	+ 759	- 141	5170	3 3	
									VII									
95	Apr. 16	12 26.8	746	+ 10	+ 10.8	21.39	21.24	+ 0.15	172.7339	- 11	+ 4	+ 95	- 149	+ 787	- 123	172.7942	3 3	
	Mai 11	14 0.3	52	+ 13	+ 16.1	21.48	21.50	- 0.02	7339	- 9	- 3	- 13	- 222	+ 835	- 160	7767	3 2	
96	März 4	8 51.5	28	+ 3	+ 4.0	21.26	21.22	+ 0.04	6603	- 11	+ 5	+ 25	- 55	+ 1282	- 14	7835	3 3	
	Apr. 18	11 20.8	55	+ 6	+ 7.4	21.32	21.28	+ 0.04	7186	- 9	- 3	+ 25	- 102	+ 857	- 127	7827	2 3	
	Mai 1	12 17.2	49	+ 6	+ 8.8	21.35	21.28	+ 0.07	7204	- 9	- 3	+ 45	- 122	+ 862	- 148	7829	3 3	
									VIII									
95	Apr. 16	12 37.3	746	+ 10	+ 10.7	21.38	21.24	+ 0.14	20.3890	- 33	+ 1	+ 10	- 17	+ 119	- 15	20.3955	3 3	
	Mai 11	13 48.8	52	+ 13	+ 16.2	21.48	21.50	- 0.02	3866	- 33	+ 2	- 1	- 26	+ 110	- 19	3899	3 2	
96	März 4	9 4.2	27	+ 3	+ 3.9	21.26	21.22	+ 0.04	3878	- 33	+ 1	+ 3	- 6	+ 145	- 2	3986	3 3	
	Apr. 18	11 32.3	55	+ 5	+ 7.2	21.31	21.28	+ 0.03	3850	- 33	+ 2	+ 2	- 12	+ 107	- 15	3901	2 3	
	Mai 1	12 27.7	49	+ 6	+ 8.7	21.34	21.28	+ 0.06	3773	- 33	+ 2	+ 4	- 14	+ 102	- 17	3817	3 3	
									IX									
95	Apr. 16	12 49.3	746	+ 10	+ 10.5	21.38	21.24	+ 0.14	51.0035	- 42	0	+ 26	- 43	+ 238	- 36	51.0178	3 3	
	Mai 11	13 38.8	52	+ 14	+ 16.6	21.49	21.50	- 0.01	0250	- 42	0	- 2	- 68	+ 244	- 47	0335	3 2	
96	März 4	9 14.2	27	+ 3	+ 3.9	21.26	21.22	+ 0.04	0063	- 42	0	+ 7	- 16	+ 346	- 4	0354	3 3	
	Apr. 18	11 47.3	55	+ 5	+ 6.9	21.31	21.28	+ 0.03	0180	- 42	0	+ 6	- 28	+ 251	- 37	0330	2 3	
	Mai 1	12 38.2	49	+ 6	+ 8.5	21.34	21.28	+ 0.06	0099	- 42	0	+ 11	- 35	+ 242	- 44	0231	3 3	

Tag	Sternzeit	Bar.	Th.	t	N	O	N—O	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand	F3
X																
1800																
95	Apr. 22	10 29.5	746	+ 12	+ 13.9	21.45	21.32	+ 0.13	67.3996	- 26	+ 1	+ 32	- 75	+ 362	- 52	67.4238
	Mai 11	13 28.3	52	+ 14	+ 16.7	21.49	21.50	- 0.01	4108	- 26	+ 1	- 2	- 90	+ 318	- 62	4247
96	März 4	9 22.5	27	+ 3	+ 3.9	21.26	21.22	+ 0.04	3934	- 29	+ 1	+ 10	- 21	+ 447	- 6	4336
	Apr. 18	11 56.3	55	+ 5	+ 6.8	21.31	21.28	+ 0.03	4121	- 29	+ 1	+ 8	- 36	+ 329	- 50	4344
	Mai 1	12 45.7	49	+ 6	+ 8.4	21.34	21.28	+ 0.06	4205	- 29	+ 1	+ 16	- 45	+ 349	- 58	4439
XI																
95	Apr. 27	12 48.7	742	+ 11	+ 13.0	21.43	21.32	+ 0.11	77.0616	- 16	- 1	+ 31	- 80	+ 356	- 63	77.0843
	29	12 27.2	49	+ 10	+ 12.3	21.42	21.31	+ 0.11	0606	- 16	- 1	+ 31	- 76	+ 361	- 64	0841
	Mai 11	13 19.3	52	+ 14	+ 17.0	21.50	21.50	0.00	0852	- 16	- 1	0	- 105	+ 364	- 71	1023
96	März 4	9 35.7	27	+ 3	+ 3.9	21.26	21.22	+ 0.04	0591	- 16	- 1	+ 11	- 24	+ 487	- 6	1042
	Apr. 18	12 11.3	55	+ 5	+ 6.6	21.30	21.28	+ 0.02	0703	- 16	- 1	+ 6	- 41	+ 303	- 57	0897
XII																
95	Apr. 29	12 39.2	749	+ 10	+ 12.2	21.41	21.31	+ 0.10	84.9823	- 28	0	+ 31	- 83	+ 399	- 71	85.0071
	Mai 11	13 11.8	52	+ 15	+ 17.0	21.50	21.50	0.00	9884	- 28	0	0	- 116	+ 399	- 79	0060
96	März 4	10 34.7	27	+ 3	+ 3.9	21.26	21.22	+ 0.04	9697	- 28	0	+ 13	- 27	+ 457	- 7	0105
	Apr. 18	12 19.3	55	+ 5	+ 6.6	21.30	21.28	+ 0.02	9831	- 28	0	+ 6	- 45	+ 411	- 62	0113
	Mai 1	12 55.7	49	+ 6	+ 8.3	21.34	21.28	+ 0.06	9785	- 28	0	+ 19	- 57	+ 406	- 73	0052
XIII																
95	Apr. 29	12 52.2	749	+ 10	+ 12.1	21.41	21.31	+ 0.10	94.2808	- 12	- 4	+ 34	- 91	+ 449	- 79	94.3105
	Mai 11	13 3.5	52	+ 15	+ 17.2	21.50	21.50	0.00	2939	- 12	- 4	0	- 130	+ 445	- 87	3151
96	März 4	10 45.2	27	+ 3	+ 3.9	21.26	21.22	+ 0.04	2546	- 12	- 4	+ 14	- 30	+ 499	- 8	3005
	Apr. 21	11 46.1	57	+ 6	+ 7.2	21.31	21.18	+ 0.13	2762	- 12	- 4	+ 45	- 54	+ 471	- 71	3137
	Mai 1	13 4.2	49	+ 6	+ 8.2	21.33	21.28	+ 0.05	2676	- 12	- 4	+ 17	- 62	+ 457	- 81	2991
XIV																
95	Jan. 18	6 51.3	747	0	+ 0.8	21.20	21.18	+ 0.02	30.6443	- 69	- 2	+ 2	- 2	+ 590	+ 20	30.6982
	Apr. 29	13 3.2	49	+ 10	+ 11.9	21.41	21.31	+ 0.10	7060	- 69	+ 4	+ 11	- 29	+ 138	- 26	7089
	Mai 23	13 40.2	45	+ 12	+ 14.8	21.45	21.46	- 0.01	7003	- 69	- 3	- 1	- 37	+ 139	- 30	7002
	28	14 22.5	53	+ 13	+ 14.3	21.42	21.45	- 0.03	7040	- 69	+ 4	- 3	- 35	+ 146	- 30	7053
96	März 20	8 6.4	48	+ 10	+ 11.1	21.39	21.32	+ 0.07	6752	- 69	+ 5	+ 8	- 27	+ 295	- 10	6954
	Apr. 21	12 0.6	57	+ 6	+ 7.1	21.31	21.18	+ 0.13	6952	- 69	- 3	+ 15	- 18	+ 144	- 24	6997
XV																
95	Apr. 30	12 3.8	753	+ 10	+ 13.2	21.43	21.40	+ 0.03	47.0941	- 72	- 1	+ 5	- 50	+ 218	- 40	47.1001
	Mai 6	11 56.4	56	+ 14	+ 16.2	21.48	21.34	+ 0.14	0999	- 72	- 1	+ 24	- 61	+ 218	- 43	1064
	9	13 53.0	49	+ 11	+ 13.6	21.44	21.50	- 0.06	0894	- 72	- 1	- 10	- 51	+ 228	- 43	0945
96	März 20	8 14.9	48	+ 10	+ 11.0	21.39	21.32	+ 0.07	0825	- 72	- 1	+ 12	- 41	+ 434	- 16	1141
	Apr. 21	12 11.6	57	+ 6	+ 7.0	21.31	21.18	+ 0.13	0894	- 72	- 1	+ 23	+ 26	+ 222	- 35	1057
XVI																
95	Jan. 18	7 14.8	747	0	+ 0.7	21.19	21.18	+ 0.01	56.6633	- 31	- 2	+ 2	- 3	+ 862	+ 37	56.7498
	Apr. 30	12 22.8	53	+ 10	+ 12.8	21.43	21.40	+ 0.03	7423	- 39	+ 4	+ 6	- 58	+ 263	- 48	7551
	Mai 9	13 47.0	49	+ 11	+ 13.7	21.44	21.50	- 0.06	7378	- 39	+ 4	- 12	- 62	+ 275	- 52	7492
	23	13 52.7	46	+ 12	+ 14.6	21.45	21.46	- 0.01	7427	- 31	- 3	- 2	- 66	+ 270	- 54	7341
96	März 20	8 24.4	48	+ 10	+ 10.9	21.39	21.32	+ 0.07	7140	- 39	+ 4	+ 14	- 50	+ 496	- 19	7546
	Apr. 21	12 26.6	57	+ 6	+ 6.8	21.31	21.18	+ 0.13	7361	- 44	+ 4	+ 27	+ 29	+ 268	- 43	7602
XVII																
95	Apr. 30	12 31.3	753	+ 10	+ 12.7	21.42	21.40	+ 0.02	64.6533	- 21	- 2	+ 5	- 66	+ 300	- 55	64.6694
	Mai 6	12 6.4	56	+ 14	+ 16.0	21.48	21.34	+ 0.14	6506	- 21	+ 5	+ 33	- 83	+ 301	- 58	6683
	9	13 39.5	49	+ 11	+ 13.8	21.45	21.50	- 0.05	6499	- 21	- 2	- 12	- 71	+ 305	- 59	6639
96	März 20	8 30.9	49	+ 9	+ 10.8	21.39	21.32	+ 0.07	6334	- 21	+ 5	+ 16	- 56	+ 549	- 21	6806
	Apr. 21	12 40.1	57	+ 6	+ 6.7	21.30	21.18	+ 0.12	6414	- 24	- 2	+ 31	+ 36	+ 305	- 50	6710
XVIII																
95	Apr. 11	12 4.8	751	+ 8	+ 9.0	21.35	21.38	- 0.03	73.9283	- 24	+ 1	- 8	- 53	+ 355	- 47	73.9507
	30	12 40.8	53	+ 10	+ 12.3	21.42	21.40	+ 0.02	9310	- 24	+ 1	+ 5	- 73	+ 349	- 60	9508
96	März 20	8 39.4	49	+ 9	+ 10.7	21.38	21.32	+ 0.06	9021	- 24	+ 1	+ 15	- 63	+ 603	- 24	9529
	Apr. 24	11 59.1	51	+ 3	+ 5.9	21.29	21.29	0.00	9254	- 24	+ 1	0	- 35	+ 430	- 58	9568
	Mai 9	12 22.3	50	+ 11	+ 12.5	21.42	21.40	+ 0.02	9356	- 24	+ 1	+ 5	- 74	+ 348	- 67	9545

Tag	Sternzeit	Bar.	Th.	t	N	O	N-O	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand	R. S.
XIX																
pr. 11	12 13.8	751	+ 8	+ 8.8	21.35	21.38	- 0.03	16.3971	- 12	+ 1	- 2	- 12	+ 65	- 11	16.4000	3 3
lai 6	12 15.4	56	+ 14	+ 16.0	21.48	21.34	+ 0.14	3913	- 21	+ 1	+ 9	- 21	+ 64	- 15	3930	3 3
9	13 24.0	49	+ 11	+ 14.2	21.45	21.50	- 0.05	3929	- 12	+ 1	- 3	- 19	+ 88	- 15	3969	2 3
Mrz 20	8 49.9	49	+ 9	+ 10.5	21.38	21.32	+ 0.06	3883	- 21	+ 2	+ 3	- 13	+ 126	- 5	3975	2 3
pr. 24	12 7.1	51	+ 3	+ 5.8	21.29	21.29	0.00	3944	- 21	+ 1	0	- 8	+ 95	- 12	3999	2 3
XX																
pr. 11	12 24.3	752	+ 7	+ 8.7	21.34	21.38	- 0.04	26.0519	- 60	- 1	- 4	- 18	+ 145	- 17	26.0534	3 3
ai 6	12 26.4	56	+ 14	+ 15.8	21.48	21.34	+ 0.14	0571	- 60	- 1	+ 13	- 33	+ 113	- 23	0580	2 3
9	13 17.0	49	+ 11	+ 14.3	21.45	21.50	- 0.05	0543	- 60	- 1	- 5	- 30	+ 114	- 24	0537	2 3
Mrz 20	8 58.4	49	+ 9	+ 10.4	21.38	21.32	+ 0.06	0430	- 60	- 1	+ 6	- 21	+ 194	- 9	0539	2 3
pr. 24	12 16.1	51	+ 3	+ 5.6	21.29	21.29	0.00	0514	- 60	- 1	0	- 12	+ 154	- 20	0575	2 3
XXI																
pr. 11	12 33.3	752	+ 7	+ 8.6	21.34	21.38	- 0.04	33.9688	- 44	0	- 5	- 23	+ 164	- 22	33.9758	3 3
ai 6	12 36.4	56	+ 14	+ 15.7	21.47	21.34	+ 0.13	9663	- 44	+ 1	+ 16	- 43	+ 160	- 30	9723	3 3
9	13 9.0	49	+ 11	+ 14.6	21.46	21.50	- 0.04	9704	- 44	0	- 5	- 40	+ 162	- 31	9746	2 3
Mrz 20	9 7.4	49	+ 9	+ 10.3	21.37	21.32	+ 0.05	9628	- 44	+ 1	+ 8	- 28	+ 244	- 11	9798	2 3
pr. 24	12 22.6	51	+ 3	+ 5.5	21.29	21.29	0.00	9688	- 44	+ 1	0	- 15	+ 204	- 27	9807	2 3
XXII																
pr. 11	12 43.3	752	+ 7	+ 8.4	21.34	21.38	- 0.04	43.2629	- 43	- 4	- 5	- 29	+ 213	- 27	43.2734	3 3
ai 6	12 45.4	56	+ 14	+ 15.4	21.47	21.34	+ 0.13	2700	- 54	- 4	+ 16	- 53	+ 207	- 39	2773	3 3
9	13 3.5	49	+ 11	+ 14.6	21.46	21.50	- 0.04	2672	- 43	+ 3	- 5	- 51	+ 211	- 40	2747	2 3
Mrz 20	9 14.4	49	+ 9	+ 10.2	21.37	21.32	+ 0.05	2571	- 43	- 4	+ 8	- 35	+ 304	- 14	2787	2 3
pr. 24	12 30.6	51	+ 3	+ 5.2	21.28	21.29	- 0.01	2618	- 43	- 4	- 1	- 18	+ 266	- 34	2784	2 3
XXIII																
pr. 11	12 51.3	752	+ 7	+ 8.4	21.34	21.38	- 0.04	9.6491	- 6	- 2	- 2	- 17	+ 47	- 6	9.6515	3 3
ai 6	12 56.9	56	+ 14	+ 15.2	21.46	21.34	+ 0.12	6468	- 6	- 2	+ 4	- 12	+ 46	- 9	6489	3 3
9	12 56.0	49	+ 12	+ 14.7	21.46	21.50	- 0.04	6496	- 6	- 2	- 2	- 11	+ 47	- 9	6513	2 3
Mrz 20	9 44.0	49	+ 9	+ 9.9	21.37	21.32	+ 0.05	6509	- 6	- 2	+ 2	- 8	+ 78	- 3	6570	2 3
pr. 24	12 37.1	51	+ 3	+ 5.2	21.28	21.29	- 0.01	6484	- 6	- 2	0	- 4	+ 60	- 8	6524	2 3
XXIV																
pr. 11	12 58.3	752	+ 7	+ 8.3	21.34	21.38	- 0.04	17.5721	- 24	- 1	- 3	- 12	+ 87	- 11	17.5757	3 3
ai 7	12 16.8	53	+ 14	+ 15.2	21.46	21.25	+ 0.21	5711	- 24	- 1	+ 13	- 21	+ 77	- 16	5739	3 3
9	12 42.0	49	+ 12	+ 15.0	21.46	21.50	- 0.04	5732	- 24	- 1	- 3	- 21	+ 85	- 16	5752	2 3
Mrz 20	9 47.4	49	+ 9	+ 9.8	21.37	21.32	+ 0.05	5659	- 24	- 1	+ 3	- 14	+ 110	- 6	5727	2 3
pr. 24	12 44.6	51	+ 3	+ 5.1	21.28	21.29	- 0.01	5665	- 24	- 1	- 1	- 7	+ 111	- 14	5729	2 3
XXV																
pr. 11	13 7.8	752	+ 7	+ 8.2	21.33	21.38	- 0.05	26.8907	- 52	+ 1	- 5	- 18	+ 138	- 17	26.8954	3 3
ai 7	12 25.3	53	+ 14	+ 15.0	21.46	21.25	+ 0.21	8785	- 52	+ 2	+ 20	- 32	+ 133	- 24	8832	3 3
9	12 36.0	49	+ 12	+ 15.1	21.46	21.50	- 0.04	8818	- 52	+ 2	- 4	- 32	+ 133	- 25	8840	2 3
Mrz 20	9 55.4	49	+ 9	+ 9.8	21.37	21.32	+ 0.05	8803	- 52	+ 2	+ 5	- 21	+ 166	- 9	8894	2 3
pr. 24	12 52.1	51	+ 3	+ 5.0	21.28	21.29	- 0.01	8863	- 52	+ 1	- 1	- 11	+ 175	- 21	8954	2 3
XXVI																
pr. 16	10 7.3	746	+ 12	+ 12.7	21.42	21.24	+ 0.18	7.9058	- 1	+ 1	+ 5	- 8	+ 46	- 5	7.9096	3 3
ai 7	12 37.3	53	+ 13	+ 14.8	21.46	21.25	+ 0.21	9054	- 1	+ 1	+ 6	- 9	+ 38	- 7	9082	3 3
9	12 30.0	49	+ 12	+ 15.1	21.46	21.50	- 0.04	9057	- 1	+ 1	- 1	- 10	+ 38	- 7	9077	2 3
Mrz 20	10 3.9	49	+ 9	+ 9.7	21.36	21.32	+ 0.04	9123	- 1	+ 1	+ 1	- 6	+ 47	- 3	9162	2 3
pr. 24	13 1.1	51	+ 3	+ 4.8	21.28	21.29	- 0.01	9082	- 1	+ 1	0	- 3	+ 55	- 6	9128	2 3
XXVII																
pr. 18	10 16.3	746	+ 12	+ 12.6	21.42	21.24	+ 0.18	17.2262	- 17	- 3	+ 11	- 17	+ 100	- 12	17.2324	3 3
ai 7	12 49.8	53	+ 13	+ 14.7	21.46	21.25	+ 0.21	2314	- 17	- 3	+ 13	- 20	+ 87	- 15	2359	3 3
9	12 22.0	49	+ 12	+ 15.4	21.47	21.50	- 0.03	2294	- 17	- 3	- 2	- 21	+ 86	- 15	2322	2 3
Mrz 20	10 14.9	49	+ 9	+ 9.6	21.36	21.32	+ 0.04	2186	- 17	- 3	+ 2	- 13	+ 102	- 6	2251	2 3
pr. 24	13 8.6	51	+ 3	+ 4.7	21.27	21.29	- 0.02	2336	- 17	- 3	- 1	- 7	+ 119	- 13	2414	2 3
XXVIII																
pr. 16	10 24.3	746	+ 12	+ 12.5	21.42	21.24	+ 0.18	9.3193	+ 2	+ 3	+ 6	- 9	+ 54	- 6	9.3243	3 3
ai 7	12 57.8	53	+ 13	+ 14.6	21.46	21.25	+ 0.21	3235	+ 0	- 5	+ 7	- 11	+ 49	- 8	3267	3 3
9	12 15.0	49	+ 12	+ 15.6	21.47	21.50	- 0.03	3253	+ 2	+ 3	- 1	- 12	+ 50	- 8	3287	2 3
Mrz 20	10 23.9	49	+ 9	+ 9.5	21.36	21.32	+ 0.04	3316	+ 0	- 5	+ 1	- 7	+ 55	- 3	3357	2 3
pr. 24	13 17.1	51	+ 3	+ 4.6	21.27	21.29	- 0.02	3241	- 6	+ 3	- 1	- 4	+ 68	- 7	3294	2 3

Bei der Abfassung des Textes für diese Abhandlung zu Ende des Jahres 1899 habe ich meine früheren Rechnungen über die systematischen Correctionen noch einmal einer Prüfung unterworfen und dabei gefunden, dass für die Messung des Abstandes VII von 1896 März 4 die Berechnung der Reduction der Distanz auf die Normal-Ocularstellung nicht richtig war. In Folge der Verbesserung ändert sich der Abstand für diesen Tag etwas und es wird dadurch der Mittelwerth der fünf Messungen um 0".06 kleiner, nämlich 6914".11 anstatt 6914".17. Ich habe meine früheren Rechnungen über diese Correctionen und den Scalenwerth des Heliometers daraufhin abgeändert und die Curvenzeichnungen noch einmal wiederholt. Es sind deshalb in dieser Abhandlung die neuerdings erhaltenen Resultate an Stelle der früheren gesetzt.

Einige Messungen waren schon im Jahre 1894 angestellt, während die Beobachtungen der Hauptsache nach aus den Jahren 1895 und 1896 herrühren. Um die Epochen möglichst gleichmässig zu gestalten, sind diese vereinzelt Beobachtungen ausgeschlossen und durch neuere ersetzt, ebenso einige unter sehr ungünstigen Umständen, z. B. bei grösseren Stundenwinkeln angestellten.

Die aus den Beobachtungen hervorgehenden Mittelwerthe sowie der Betrag der Projection auf die Verbindungslinie zwischen den Endsternen Nr. 1 und 8 sind die nachfolgenden

Lfde Nr.	Abstand Sterne	Abstand Skalenteile	Bogen- secunden	Zahl der Beobb.	Projection	Projiciert Abstand	Wahrschl. einer Beob.	Fehler des Mittels
1	1.2	78.5586	3143.61	5	— 1.73	3141.88	± 0.116	± 0.052
2	1.3	98.8439	3955.35	5	— 0.18	3955.17	0.164	0.073
3	1.4	129.5532	5184.20	5	— 0.41	5183.79	0.138	0.062
4	1.5	145.9547	5840.53	5	— 0.36	5840.17	0.238	0.106
5	1.6	155.6008	6226.53	6	— 0.22	6226.31	0.179	0.073
6	1.7	163.5211	6543.47	5	— 0.13	6543.34	0.151	0.066
7	1.8	172.7840	6914.11	5	0.00	6914.11	0.173	0.077
8	2.3	20.3912	815.97	5	— 2.78	813.19	0.174	0.078
9	2.4	51.0286	2041.97	5	— 0.36	2041.61	0.205	0.092
10	2.5	67.4321	2698.37	5	— 0.26	2698.11	0.222	0.099
11	2.6	77.0929	3084.85	5	— 0.45	3084.50	0.262	0.117
12	2.7	85.0080	3401.68	5	— 0.59	3401.09	0.073	0.033
13	2.8	94.3078	3773.83	5	— 1.43	3772.40	0.202	0.090
14	3.4	30.7013	1228.54	6	— 0.32	1228.22	0.133	0.054
15	3.5	47.1042	1884.93	5	— 0.21	1884.72	0.198	0.088
16	3.6	56.7538	2271.06	6	— 0.05	2271.01	0.145	0.036
17	3.7	64.6706	2587.86	5	— 0.01	2587.85	0.166	0.074
18	3.8	73.9531	2959.31	5	— 0.23	2959.08	0.070	0.031
19	4.5	16.3975	656.16	5	0.00	656.16	0.072	0.032
20	4.6	26.0553	1042.63	5	— 0.10	1042.53	0.061	0.027
21	4.7	33.9766	1359.61	5	— 0.22	1359.39	0.096	0.043
22	4.8	43.2765	1731.75	5	— 1.23	1730.52	0.063	0.028
23	5.6	9.6522	386.24	5	— 0.27	385.97	0.080	0.036
24	5.7	17.5741	703.25	5	— 0.43	702.82	0.036	0.016
25	5.8	26.8895	1076.01	5	— 2.01	1074.00	0.181	0.081
26	6.7	7.9109	316.56	5	— 0.17	316.39	0.122	0.054
27	6.8	17.2334	689.61	5	— 1.91	687.70	0.161	0.072
28	7.8	9.3290	373.31	5	— 2.25	371.06	0.115	0.051

Ehe aus diesen Beobachtungen weitere Schlüsse gezogen werden, wird es sich verlohnen, einige Betrachtungen über die wahrscheinlichen Fehler in ihrer Beziehung zu der Grösse des gemessenen Abstandes anzustellen.

In meiner Abhandlung über die Praesepe bin ich nämlich zu dem Resultat gelangt, dass die w. F. der Distanzmessungen mit der Quadratwurzel aus der Distanz wachsen. Untersucht man nun auch die vorstehenden Beobachtungen nach diesem Gesichtspunkt und ordnet die Fehler nach der Grösse der Distanz und reducirt sie der soeben ausgesprochenen Annahme gemäss durch Multiplication mit $\sqrt{\frac{4000}{s}}$ auf eine Distanz von 4000 Secunden, so erhält man nachstehende Uebersicht:

Gruppe	Nr. der Dist.	Mittl. Dist. einer Beob.	W. F.	$\sqrt{\frac{4000}{s}}$	Product	$\sqrt[4]{\frac{4000}{s}}$	Producte
a	26. 28. 23	358"	$\pm 0''.106$	3.34	$\pm 0''.36$	1.83	$\pm 0''.19$
b	19. 27. 24. 8	715	0.111	2.36	0.26	1.54	0.17
c	20. 25. 14. 21	1176	0.118	1.84	0.22	1.36	0.16
d	22. 15. 9. 16	1982	0.145	1.42	0.20	1.19	0.15
e	17. 10. 18. 11	2833	0.181	1.19	0.22	1.09	0.20
f	1. 2. 12. 13	3568	0.144	1.06	0.15	1.03	0.15
g	3. 4. 5. 6. 7	6141	0.177	0.81	0.14	0.90	0.16

Die wahrscheinlichen Fehler nehmen also nicht, wie früher vermuthet wurde, im Verhältniss der Quadratwurzel der Distanz zu, sondern in einem langsameren Verhältniss, d. h. die Beobachtungen grosser Distanzen sind erheblich genauer als man nach obiger Annahme erwarten sollte. Eine bessere Uebereinstimmung würde man erzielen, wenn man, wie es oben in der letzten Columnne geschehen ist, die w. F. durch Multiplication mit $\sqrt[4]{\frac{4000}{s}}$ auf ein gemeinschaftliches Maass

reduciren wollte, was aber jeder mathematischen Begründung vollständig entbehrend, hier nur ganz beiläufig erwähnt werden möge. Nimmt man einfach die Distanz s als das Gewicht der verschiedenen wahrscheinlichen Fehler, so erhält man im Mittel $\pm 0''.183$ für eine einfache Messung, nahe übereinstimmend mit dem Werthe $\pm 0''.195$ in der Praesepe-Abhandlung Seite 282.

Nunmehr wieder zu dem eigentlichen Gegenstande unserer Betrachtung zurückkehrend, können wir aus obigen Messungen den Abstand zwischen den beiden Endsternen auf 55 verschiedene Weisen berechnen, wodurch nachstehende Gleichungen entstehen:

[Bei dem Lesen der Correctur wurde bemerkt, dass die Distanz XVI um $\frac{s}{+ 0.0011} = + 0''.04$ zu verbessern ist. Es wurde darauf bei den Untersuchungen über die systematischen Correctionen einstweilen keine Rücksicht genommen, da die Rechnungen später doch wohl noch einmal wiederholt werden müssen, wenn die Meridianbeobachtungen der Sterne 1 und 8 zur Verfügung stehen, wozu sich mehrere Sternwarten bereit erklärt haben. Auf Seite 26 ist schon die verbesserte Messung enthalten.]

Nr.	Nr. der Messungen	Summe	Unterschied gegen Nr. 7
1	7	6914.11	0.00
2	1 + 13	14.23	- 0.17
3	2 + 18	14.25	- 0.14
4	3 + 22	14.31	- 0.20
5	4 + 25	14.17	- 0.06
6	5 + 27	14.01	+ 0.10
7	6 + 28	14.40	- 0.29
8	1 + 8 + 18	14.15	- 0.04
9	1 + 9 + 22	14.01	+ 0.10
10	1 + 10 + 25	13.99	+ 0.12
11	1 + 11 + 27	14.08	+ 0.03
12	1 + 12 + 28	14.03	+ 0.08
13	2 + 14 + 22	13.91	+ 0.20
14	2 + 15 + 25	13.89	+ 0.22
15	2 + 16 + 27	13.84	+ 0.27
16	2 + 17 + 28	14.08	+ 0.03
17	3 + 19 + 25	13.95	+ 0.16
18	3 + 20 + 27	14.02	+ 0.09
19	3 + 21 + 28	14.24	- 0.13
20	4 + 23 + 27	13.84	+ 0.27
21	4 + 24 + 28	14.05	+ 0.06
22	5 + 26 + 28	13.76	+ 0.35
23	1 + 8 + 14 + 22	13.81	+ 0.30
24	1 + 8 + 15 + 25	13.79	+ 0.32
25	1 + 8 + 16 + 27	13.74	+ 0.37
26	1 + 8 + 17 + 28	13.98	+ 0.13
27	1 + 9 + 19 + 25	13.65	+ 0.46
28	1 + 9 + 20 + 27	13.72	+ 0.39
29	1 + 9 + 21 + 28	13.94	+ 0.17
30	2 + 14 + 19 + 25	13.55	+ 0.56
31	2 + 14 + 20 + 27	13.62	+ 0.49
32	2 + 14 + 21 + 28	13.84	+ 0.27
33	2 + 15 + 23 + 27	13.56	+ 0.55
34	2 + 15 + 24 + 28	13.77	+ 0.34
35	2 + 16 + 26 + 28	13.59	+ 0.52
36	3 + 19 + 23 + 27	13.62	+ 0.49
37	3 + 19 + 24 + 28	13.83	+ 0.28
38	4 + 23 + 26 + 28	13.59	+ 0.52
39	1 + 8 + 14 + 19 + 25	13.45	+ 0.66
40	1 + 8 + 14 + 20 + 27	13.52	+ 0.59
41	1 + 8 + 14 + 21 + 28	13.74	+ 0.37
42	1 + 9 + 19 + 23 + 27	13.32	+ 0.79
43	1 + 9 + 19 + 24 + 28	13.53	+ 0.58
44	1 + 9 + 20 + 26 + 28	13.47	+ 0.64
45	1 + 10 + 23 + 26 + 28	13.41	+ 0.70
46	2 + 14 + 19 + 23 + 27	13.22	+ 0.89
47	2 + 14 + 19 + 24 + 28	13.43	+ 0.68
48	2 + 15 + 23 + 26 + 28	13.31	+ 0.80
49	3 + 19 + 23 + 26 + 28	13.37	+ 0.74
50	1 + 8 + 14 + 19 + 23 + 27	13.12	+ 0.99
51	1 + 8 + 14 + 19 + 24 + 28	13.33	+ 0.78
52	1 + 8 + 14 + 20 + 26 + 28	13.27	+ 0.84
53	1 + 9 + 19 + 23 + 26 + 28	13.07	+ 1.04
54	2 + 14 + 19 + 23 + 26 + 28	12.97	+ 1.14
55	1 + 8 + 14 + 19 + 23 + 26 + 28	12.87	+ 1.24

Nach den obigen Betrachtungen gestaltet sich der w. F. für das Mittel aus 5 Messungen für die 7 Gruppen folgendermaassen:

für 358"	± 0.047
715	0.050
1176	0.053
1982	0.070
2833	0.081
3568	0.064
6141	0.078

und daraus im Mittel ohne Rücksicht auf die allmähliche Zunahme bei grösseren Distanzen ± 0.063 .

Mithin ist der w. F. für die Summe von z zu einander addirteñ Abstandsmessungen

	$\pm 0.063 \sqrt{z}$						
also für $z =$	1	2	3	4	5	6	7
	± 0.06	0.08	0.11	0.13	0.14	0.15	0.17

Diese Beträge bezeichnen also die aus der inneren Uebereinstimmung der Beobachtungen hervorgehende Unsicherheit der berechneten Abstände zwischen den beiden Endsternen.

Da ich auf der Astronomen-Versammlung in Bamberg im Jahre 1896 die Beobachter an Heliometern Repsold'scher Construction auf anderen Sternwarten gebeten habe, auch ihrerseits die Beobachtung des Löwenbogens vorzunehmen und demnächst Messungen des Abstandes derselben Sternpaare an verschiedenen Instrumenten vorliegen werden, so muss ich noch des folgenden Umstandes erwähnen:

Der bisher von mir verwandte Werth zur Verwandlung der an den Objectivscalen gemachten Ablesungen in Bogenmaass beruht nach meiner Abhandlung über die Praesepe auf Messungen verschiedener Bogen zwischen Sternen, deren Abstände durch Meridianbeobachtungen festgelegt sind und das Resultat davon ist daselbst Seite 89 zusammengestellt. Nun bin ich aber durch das Referat von Dr. Peter in der Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 31. Jahrgang 1896, Seite 35, Anmerkung, darauf aufmerksam gemacht worden, dass mir bei der Berechnung des Abstandes der beiden Endsterne im Polbogen aus den von Geheimrath Auwers mitgetheilten Daten ein kleiner Irrthum begegnet ist. Der berichtigte Abstand der beiden Sterne ist

$$6779.71 + 0.20 (t - 1875)$$

Damit erfährt die Berechnung des Skalenwerthes in IV. 89 eine geringfügige Abänderung und es muss heissen

	Schur	Ambrohn
Cygnuskreis	40.01601	40.01921
Hydrakreis	01506	01610
Polbogen	01486	01599
Standard stars	01750	01710
Mittel	40.01586	40.01710

anstatt der früheren Annahme

	Schur	Ambonn
	40".01605	40".01730

Für meine Messungen hätte also der Verwandlungs-Logarithmus 1.602232 anstatt des früher angenommenen Werthes 1.602234 angewandt werden müssen. Der Unterschied von 0".0019 im Skalenwerth oder zwei Einheiten der sechsten Decimale im Logarithmus bringt bei der grössten am Heliometer messbaren Distanz einen Unterschied von 0".04 hervor, d. h. um diesen Betrag müssen die grössten Abstände verkleinert werden.

Auf die Vergleichung der Messungen für die systematischen Fehler hat diese Abänderung nur den Einfluss, dass bei der Vergleichung der Summen der Distanzen mit dem Abstände der Endsterne gelegentlich kleine Abänderungen durch die Abrundung der hundertel Secunden vorkommen können, auch bei der Vergleichung der Bogenlängen selbst mit den Ergebnissen der Messungen an anderen Heliometern spielen diese im Maximum nur 0".04 betragenden Verbesserungen eine unbedeutende Rolle.

Aus den obigen 55 Gleichungen geht deutlich hervor: Je grösser die Zahl von einzelnen gemessenen Abständen ist, aus denen der Abstand der Endsterne durch Addition der Unterabtheilungen berechnet wird, desto grösser ist die Verbesserung, welche an die Summe anzubringen ist, um sie mit der unmittelbaren Messung zwischen den Endsternen vergleichbar zu machen, d. h. die kleineren Abstandmessungen bedürfen den grösseren gegenüber einer positiven Correction.

Um aus diesen Messungen eine Curve abzuleiten, welcher man die den verschiedenen Abständen hinzuzufügende Verbesserung entnehmen kann und wodurch die in den Messungen vorhandenen Widersprüche ausgeglichen werden, ist zunächst für mehrere nahe einander gleiche Abstände eine gemeinschaftliche Verbesserung angenommen und dabei die Voraussetzung gemacht worden, dass für die Abstände 0 und 7200" entsprechend den Extremen der messbaren Abstände, keine Verbesserung anzubringen ist.

Dadurch entsteht nachfolgende Tabelle:

	Verbesserung	Mittl. Abstand	Gültig für die Abstände
		als Abscisse	
	0	0"	
(1)	360		23, 26, 28
(2)	715		8, 19, 24, 27
(3)	1176		14, 20, 21, 25
(4)	1982		9, 15, 16, 22
(5)	2894		1, 10, 11, 17, 18
(6)	3720		2, 12, 13
(7)	5750		3, 4, 5
(8)	6728		6, 7
0	7200		

Man erhält auf diese Weise folgende Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten (1) (2) (3) u. s. w. bis (8), in welchen unter A die absoluten Glieder stehen, während die Bedeutung von B später erläutert wird.

	A	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	B
1	0.00 =								1	+ 0.22
2	- 0.16					1	1			- 0.06
3	- 0.10					1	1			- 0.01
4	- 0.27				1			1		- 0.13
5	- 0.04			1				1		+ 0.08
6	+ 0.10		1					1		+ 0.16
7	- 0.29	1							1	- 0.26
8	- 0.04		1			2				- 0.05
9	+ 0.10				2	1				- 0.01
10	+ 0.12			1		2				+ 0.14
11	+ 0.03		1			2				- 0.02
12	+ 0.08	1				1	1			- 0.05
13	+ 0.20			1	1		1			+ 0.01
14	+ 0.22			1	1		1			+ 0.01
15	+ 0.27		1		1		1			+ 0.02
16	+ 0.03	1				1	1			- 0.14
17	+ 0.16		1	1				1		- 0.02
18	+ 0.09		1	1				1		- 0.09
19	- 0.13	1		1				1		- 0.31
20	+ 0.27	1	1					1		+ 0.07
21	+ 0.06	1	1					1		- 0.15
22	+ 0.35	2						1		+ 0.14
23	+ 0.30		1	1	1	1				- 0.03
24	+ 0.32		1	1	1	1				- 0.03
25	+ 0.37		2		1	1				0.00
26	+ 0.13	1	1			2				- 0.18
27	+ 0.46		1	1	1	1				+ 0.10
28	+ 0.39		1	1	1	1				+ 0.03
29	+ 0.17	1		1	1	1				- 0.19
30	+ 0.56		1	2			1			+ 0.12
31	+ 0.49		1	2			1			+ 0.05
32	+ 0.27	1		2			1			- 0.17
33	+ 0.55	1	1		1		1			0.00
34	+ 0.34	1	1		1		1			- 0.22
35	+ 0.52	2			1		1			+ 0.02
36	+ 0.49	1	2					1		- 0.03
37	+ 0.28	1	2					1		- 0.25
38	+ 0.52	3						1		+ 0.05
39	+ 0.66		2	2		1				+ 0.08
40	+ 0.59		2	2		1				+ 0.01
41	+ 0.37	1	1	2		1				- 0.21
42	+ 0.79	1	2		1	1				+ 0.19
43	+ 0.58	1	2		1	1				- 0.13
44	+ 0.64	2		1	1	1				+ 0.01
45	+ 0.70	3				2				+ 0.11
46	+ 0.89	1	2	1			1			+ 0.11
47	+ 0.68	1	2	1			1			- 0.11
48	+ 0.80	3			1		1			- 0.02
49	+ 0.74	3	1					1		- 0.05
50	+ 0.99	1	3	1		1				+ 0.07
51	+ 0.78	1	3	1		1				- 0.15
52	+ 0.84	2	1	2		1				- 0.01
53	+ 1.04	3	1		1	1				+ 0.07
54	+ 1.14	3	1	1			1			+ 0.09
55	+ 1.24	3	2	1		1				+ 0.05

Hieraus folgen die Endgleichungen, mit Hinweglassung der identischen Grössen links von der Diagonale

A	B
+ 30.57 = + 99(1) + 41(2) + 22(3) + 15(4) + 26(5) + 15(6) + 13(7) + 1(8)	— 0.99
+ 27.02	80 35 14 31 10 10 — 0.95
+ 16.16	47 8 19 11 4 — 0.39
+ 7.96	22 12 7 1 — 0.39
+ 12.31	42 4 — 0.50
+ 6.73	17 — 0.35
+ 2.67	13 — 0.53
— 0.29	2 — 0.04

Die Auflösung der Gleichungen giebt die Werthe

0"	0	0.0	abgekürzt	0.0
360	(1)	+ 0.2455		+ 0.25
715	(2)	+ 0.2164		+ 0.22
1176	(3)	+ 0.1223		+ 0.12
1982	(4)	+ 0.0888		+ 0.09
2894	(5)	— 0.0955		— 0.10
3720	(6)	— 0.0413		— 0.04
5750	(7)	— 0.2509		— 0.25
6728	(8)	— 0.2677		— 0.27
7200	0	0.0		0.0

Werden diese Verbesserungen mit den zugehörigen Abscissen 360, 715 usw. als Ordinaten aufgetragen und wird durch die auf diese Weise erhaltenen Punkte eine sich genau anschliessende Curve gelegt, die zugleich durch die beiden Abscissenpunkte 0 und 7200 hindurchgeht und entnimmt man dieser Curve für jeden einzelnen der 28 gemessenen Abstände die zugehörige Verbesserung, so erhält man dafür

A.					
Nr.	Abstand	Verbesserung	Nr.	Abstand	Verbesserung
1	3142"	— 0.08	15	1885"	+ 0.11
2	3955	— 0.03	16	2271	+ 0.04
3	5184	— 0.18	17	2588	— 0.05
4	5840	— 0.27	18	2959	— 0.10
5	6226	— 0.28	19	656	+ 0.23
6	6543	— 0.28	20	1043	+ 0.14
7	6914	— 0.22	21	1359	+ 0.11
8	813	+ 0.19	22	1731	+ 0.11
9	2042	+ 0.08	23	386	+ 0.25
10	2698	— 0.07	24	703	+ 0.23
11	3085	— 0.09	25	1074	+ 0.13
12	3401	— 0.04	26	316	+ 0.24
13	3772	— 0.03	27	688	+ 0.22
14	1228	+ 0.11	28	371	+ 0.25

Mit Berücksichtigung dieser Tabelle wurden die absoluten Glieder der 55 Bedingungsgleichungen zum zweiten Male gebildet und es ergaben sich dann noch nachstehende Verbesserungen B der ersten Annäherung

(1)	+ 0.0022	abgekürzt	0.00
(2)	- 0.0023		0.00
(3)	+ 0.0063		+ 0.01
(4)	- 0.0054		- 0.01
(5)	- 0.0104		- 0.01
(6)	- 0.0196		- 0.02
(7)	- 0.0417		- 0.04
(8)	- 0.0202		- 0.02

Durch Hinzufügung der Näherung B zur Näherung A erhält man schliesslich die Ordinaten der Verbesserungs-Curve Tabelle B

Abstand		Verbesserung.
0"		0.00
360	(1)	+ 0.25
715	(2)	+ 0.21
1176	(3)	+ 0.13
1982	(4)	+ 0.08
2894	(5)	- 0.11
3720	(6)	- 0.06
5750	(7)	- 0.29
6728	(8)	- 0.29
7200		0.00

Werden diese Resultate aus den Beobachtungen des Löwenbogens mit denen der früheren Untersuchungen an den beiden Praesepebogen und dem Vulpeculabogen (Vergl. Praesepe Seite 166 oder Astr. Nachr. 136) verglichen, so erhält man folgende Uebersicht

Abstand	Praesepe $\alpha\alpha$	Praesepe $\alpha\beta$	Vulpecula	Leo
0"	0.00	0.00	0.00	0.00
500	+ 0.05	+ 0.06	+ 0.08	+ 0.25
1000	+ 0.08	+ 0.20	+ 0.13	+ 0.15
1500	+ 0.08	+ 0.15	+ 0.13	+ 0.10
2000	0.00	+ 0.01	+ 0.10	+ 0.08
2500	- 0.03	- 0.02	0.00	- 0.04
3000	- 0.03	+ 0.03	- 0.02	- 0.11
3500	- 0.01	+ 0.07	- 0.03	- 0.07
4000		+ 0.05	0.00	- 0.08
4500		+ 0.02	- 0.02	- 0.14
5000		0.00	0.00	- 0.22
5500				- 0.27
6000				- 0.30
6500				- 0.30
7000				- 0.17
				0.00

Bei der Vergleichung dieser Zahlenreihen darf nicht unerwähnt bleiben, dass bei den älteren kürzeren Bogen die Abscisse des Punktes, in welchem die Curve in ihrem oberen Verlaufe, d. h. für die grössten Abstände, die Abscissenaxe schneidet, nicht wie bei dem Löwenbogen 7200'' ist, sondern in die Nähe der grössten jedesmaligen Distanz gelegt ist und zwar

	für	Praesepe $\alpha\kappa$	Praesepe ap	Vulpecula
	bei	3608''	4700''	5000''

Eigentlich hätten die Curven so gelegt werden müssen, dass sie bei den drei älteren Bogen ebenfalls durch den Punkt 7200'' wie bei dem Löwenbogen gehen, aber die Vergleichung der obigen Tabellen lehrt, dass das Ergebniss aus dem Löwenbogen, wonach die Curve wenigstens in ihrer anfänglichen Form I bei etwa 5000'' die Abscissenaxe schneidet, sich mit dem Verlauf bei den älteren Bogen vereinigen lässt, während freilich die Form II eine Verbesserung von -0.20 erfordert. Es wird aber nicht nöthig sein, die Zeichnungen und Rechnungen für die älteren Bogen noch einmal umzuändern, um so weniger als für die fernere Behandlung dieser Frage die Resultate aus dem Löwenbogen, der sich fast über die ganze Verschiebung der Objectivhälften erstreckt, in erster Linie massgeblich sein werden.

Was bei den Ergebnissen aus den Beobachtungen des Löwenbogens etwas eigenthümlich erscheint, ist der Umstand, dass für die grössten Distanzen bei 6500'' noch einmal eine so erhebliche Depression der Correctioncurve auf die negative Seite der Ordinaten vorkommt, während man, sofern diese Correctionen ihren Grund in einer besonderen Beobachtungsweise haben, erwarten sollte, dass die kleineren Abstände vorzugsweise mit solchen Einflüssen behaftet, die grossen dagegen einwandfrei gemessen werden.

Dass diese Anomalien nicht von Constructionsfehlern des Instruments, etwa von einer Abweichung der Bewegung der Objectivschlitten von dem mit der Brennweite des Objectivs beschriebenen Kreiscylinder herrühren können, glaube ich bei der früheren Besprechung dieser Angelegenheit (Praesepe Seite 167) genügend dargethan zu haben.

Um von Neuem den Beweis zu liefern, dass die Objectivschieber sich wirklich auf Cylinderflächen bewegen, deren Radius gleich der Brennweite des Objectivs ist, habe ich eine Reihe von Focussirungen des Oculars auf den für diese Zwecke vorzüglich geeigneten Doppelstern $\Sigma 941$ ($\alpha = 6^h 31^m$, $\delta = +41^\circ 41'$) bei verschiedenen Stellungen der Objectivhälften gegen die optische Axe bis an die Grenzen der Beweglichkeit ausgeführt.

Jede einzelne der hier mitgetheilten Zahlen ist das Mittel aus vier Einstellungen des Oculars auf den Doppelstern in zwei entgegengesetzten Richtungen der Bewegung. Die Ablesungen an der Ocularscala sind in Millimetern ausgedrückt.

Focussirungen auf Σ 941.

Theilstrich auf Skale I	1896 Novbr. 26			1896 Novbr. 29			Mittel für beide Tage
	Objectiv I	Objectiv II	Mittel	Objectiv I	Objectiv II	Mittel	
14	20.91	21.05	20.98	21.08	21.03	21.06	21.02
44	20.88	21.01	20.95	21.01	20.91	20.96	20.96
74	20.95	20.98	20.97	21.04	21.07	21.06	21.02
104	20.99	20.94	20.96	21.05	20.98	21.02	20.99
134	20.94	20.88	20.91	21.13	21.02	21.08	21.00
164	21.06	20.83	20.95	21.07	21.11	21.09	21.02
194	20.90	21.04	20.97	21.03	21.02	21.03	21.00

Das Mittel aus den beiden Objectivhälften entsprechenden Zahlen stimmen bis auf wenige hundertel Millimeter mit dem Gesamtmittel 21.00 überein, man kann also die Schlittenbewegung als völlig kreisförmig mit der Brennweite als Radius betrachten.

Durch diese Untersuchung wird der Beweis geliefert, dass die bemerkten systematischen Unterschiede in den Distanzmessungen nicht von einem Constructionsfehler des Instruments herrühren, sondern in der Beobachtungsweise ihren Grund haben und durch Beobachtungsreihen für jeden einzelnen Beobachter ermittelt werden müssen. Dass Constructionsfehler nicht die Ursache sein können, habe ich in der Abhandlung über die Praesepe Astr. Mitthlgg. IV Seite 167 und 168 schon durch einige Rechnungsbeispiele gezeigt.

Im Jahre 1897 hat Dr. F. Cohn in Königsberg sich ebenfalls mit den systematischen Fehlern der Distanzmessungen beschäftigt und darüber einen Aufsatz in den Astr. Nachr. Bd. 142 veröffentlicht, worin diese Frage in einer von der meinigen verschiedenen Weise behandelt wird. Es werden dort die Unterschiede in den Messungen dadurch beseitigt, dass jeder Distanzmessung ohne Rücksicht auf die Grösse eine constante Correction ertheilt wird. Eine solche constante Correction könnte nur dann in Betracht kommen, wenn die Messungen nur bei einseitiger Stellung der Objectivhälften angestellt würden und der Coincidenzpunkt der Bilder durch besondere Untersuchungen, wie etwa bei den beim letzten Venusdurchgange von belgischen Astronomen benutzten Heliometern, bestimmt würde, die entsprechend der scheinbaren Grösse der Sonne und der Venus aus zwei ganz verschiedenen Linsen bestanden und daher die Methode, die Messungen in zwei symmetrischen Stellungen der Objectivhälften gegen die optische Axe auszuführen, nicht befolgt werden konnte.

Es würde zu weit führen, den Inhalt der Cohn'schen Abhandlung hier eingehend zu behandeln, sondern es kann darauf nur hingewiesen werden.

Bisher sind die Beobachtungen im Löwenbogen ohne Rücksicht auf ein besonderes mathematisches Bildungsgesetz der Correctionsformel behandelt worden und das bis jetzt erhaltene Resultat ist die mit B bezeichnete Tabelle.

Es ist nun noch der Versuch gemacht worden, der Correction eine bestimmte Form zu geben, etwa

$$y = p + qx + rx^2$$

wo y die Correction, x die Abscisse und p, q, r Constanten bedeuten, die aus den Zahlen der Tabelle B abzuleiten sind. Wenn die Correctioncurve durch den Nullpunkt gehen, d. h. wenn eine verschwindend kleine Distanz nicht mit einer Correction versehen werden soll, die vielleicht grösser ist als der gemessene Betrag selbst (man denke nur an sehr enge Doppelsterne), so würde $p = 0$ sein, aber der Versuch die Beobachtungen des Löwenbogens mit dem Ausdruck $qx + rx^2$ darzustellen, ist nicht gelungen, da sich dabei eine sehr schlechte Darstellung besonders der beiden Normalörter (7) und (8) ergab, indem die Beträge der absoluten Glieder -0.29 durch die Correctionsformel

$$y = +0.0000101 d - 0.0000000055 d^2$$

wo d die Distanz in Secunden, nicht verringert wurden, also die Fehler -0.29 übrig blieben.

Dagegen hat eine Ausgleichung mit der dreigliedrigen Formel eine gute Darstellung der Beobachtungen ergeben. Die Bedingungsgleichungen gestalten sich in diesem Falle folgendermaassen, wenn $x = 0.001 d$ angesetzt wird:

Abstand			Gewicht
360"	(1)	$+0.25 = p + 0.36 q + 0.13 r$	3
715	(2)	$+0.21 = p + 0.72 q + 0.52 r$	4
1176	(3)	$+0.13 = p + 1.18 q + 1.39 r$	4
1982	(4)	$+0.08 = p + 1.98 q + 3.92 r$	4
2894	(5)	$-0.11 = p + 2.89 q + 8.35 r$	5
3720	(6)	$-0.06 = p + 3.72 q + 13.84 r$	3
5750	(7)	$-0.29 = p + 5.75 q + 33.06 r$	3
6728	(8)	$-0.29 = p + 6.73 q + 45.29 r$	2

Die Gewichte sind nach der Zahl der zu den einzelnen Normalörtern benutzten Distanzen angenommen. Es ergeben sich nun die Endgleichungen

$$\begin{aligned} +0.25 &= +28.00 p + 72.92 q + 296.74 r \\ -9.06 &= +72.92 p + 296.76 q + 1494.19 r \\ -59.53 &= +296.74 p + 1494.19 q + 8375.72 r \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} p &= +0.3109 \\ q &= -0.1540 \\ r &= +0.00935 \end{aligned}$$

also der Ausdruck zur Verbesserung der Messungen

$$y = +0.311 - 0.154 \cdot \frac{1}{1000} d + 0.00935 \left(\frac{1}{1000} d \right)^2$$

oder wenn die Distanz d in Secunden selbst eingeführt wird

$$y = +0.311 - 0.000154 d + 0.00000000935 d^2$$

Bemerkenswerth ist es, dass die Constante $+0.311''$ nahe mit der Grösse $+0.233''$ übereinstimmt, welche man nach dem Verfahren von Dr. Cohn als constante Correction aller Distanzmessungen ohne Rücksicht auf ihre Grösse findet.

Mit dieser Formel für y erhält man die Correctionstabelle der gemessenen Distanzen Tabelle C

0''	+ 0.31	4000''	— 0.15
400	+ 0.25	4400	— 0.18
800	+ 0.19	4800	— 0.21
1200	+ 0.14	5200	— 0.24
1600	+ 0.09	5600	— 0.26
2000	+ 0.05	6000	— 0.28
2400	0.00	6400	— 0.29
2800	— 0.05	6800	— 0.30
3200	— 0.09	7200	— 0.32
3600	— 0.12		

In nachfolgender Uebersicht kann man einen Vergleich anstellen zwischen der Darstellung der Beobachtungen des Löwenbogens nach der früheren mit B bezeichneten graphisch abgeleiteten Tabelle und der Tabelle C nach dem dreigliedrigen Ausdruck $y = p + qx + rx^2$.

Correction der 28 gemessenen Distanzen

	Nach B		Nach C		Unterschied C—B
	Correction	corrirt	Correction	corrirt	
1	— 0.11	3141.77	— 0.08	3141.80	— 0.03
2	— 0.08	3955.09	— 0.15	3955.02	+ 0.07
3	— 0.23	5183.56	— 0.24	5183.55	+ 0.01
4	— 0.29	5839.88	— 0.27	5839.90	— 0.02
5	— 0.30	6226.01	— 0.29	6226.02	— 0.01
6	— 0.30	6543.04	— 0.29	6543.05	— 0.01
7	— 0.23	6913.88	— 0.31	6913.80	+ 0.08
8	+ 0.20	813.39	+ 0.19	813.38	+ 0.01
9	+ 0.08	2041.69	+ 0.05	2041.66	+ 0.03
10	— 0.09	2698.02	— 0.04	2698.07	— 0.05
11	— 0.11	3084.39	— 0.08	3084.42	— 0.03
12	— 0.08	3401.01	— 0.11	3400.98	+ 0.03
13	— 0.07	3772.33	— 0.13	3772.27	+ 0.06
14	+ 0.12	1228.34	+ 0.13	1228.35	— 0.01
15	+ 0.08	1884.80	+ 0.06	1884.78	+ 0.02
16	+ 0.04	2271.01	+ 0.02	2270.99	+ 0.02
17	— 0.06	2587.79	— 0.02	2587.83	— 0.04
18	— 0.11	2958.97	— 0.07	2959.01	— 0.04
19	+ 0.22	656.38	+ 0.21	656.37	+ 0.01
20	+ 0.14	1042.67	+ 0.16	1042.69	— 0.02
21	+ 0.11	1359.50	+ 0.12	1359.51	— 0.01
22	+ 0.09	1730.61	+ 0.08	1730.60	+ 0.01
23	+ 0.25	386.22	+ 0.26	386.23	— 0.01
24	+ 0.22	703.04	+ 0.20	703.02	+ 0.02
25	+ 0.14	1074.14	+ 0.16	1074.16	— 0.02
26	+ 0.24	316.63	+ 0.26	316.65	— 0.02
27	+ 0.22	687.92	+ 0.21	687.91	+ 0.01
28	+ 0.25	371.31	+ 0.26	371.32	— 0.01

Damit erhält man die Summen in den erwähnten 55 verschiedenen Combinationen zur Berechnung des Abstandes zwischen den beiden Endsternen, sowohl für B als für C, sowie die Abweichungen vom Gesamtmittel und die Mittelwerthe der Fehler innerhalb der durch Zwischenräume abgetheilten Gruppen folgendermaassen:

	B	v	Mittel	C	v	Mittel	Zahl der Abstände
1	6913.88	— 0.21		6913.91	— 0.18		1
2	14.10	+ 0.01		14.07	— 0.02		
3	14.06	— 0.03		14.03	— 0.06		
4	14.17	+ 0.08	— 0.01	14.15	+ 0.06	+ 0.01	2
5	14.02	— 0.07		14.06	— 0.03		
6	13.93	— 0.16		13.93	— 0.16		
7	14.35	+ 0.26		14.37	+ 0.28		
8	14.13	+ 0.04		14.19	+ 0.10		
9	14.07	— 0.02		14.06	— 0.03		
10	13.93	— 0.16		14.03	— 0.06		
11	14.08	— 0.01		14.13	+ 0.04		
12	14.09	0.00		14.10	+ 0.01		
13	14.04	— 0.05		13.97	— 0.12		
14	14.03	— 0.06		13.96	— 0.13		
15	14.02	— 0.07	0.00	13.92	— 0.17	+ 0.01	3
16	14.19	+ 0.10		14.17	+ 0.08		
17	14.08	— 0.01		14.08	— 0.01		
18	14.15	+ 0.06		14.15	+ 0.06		
19	14.37	+ 0.28		14.38	+ 0.29		
20	14.02	— 0.07		14.06	— 0.03		
21	14.23	+ 0.14		14.24	+ 0.15		
22	13.95	— 0.14		13.99	— 0.10		
23	14.11	+ 0.02		14.13	+ 0.04		
24	14.10	+ 0.01		14.12	+ 0.03		
25	14.09	0.00		14.08	— 0.01		
26	14.26	+ 0.17		14.33	+ 0.24		
27	13.98	— 0.11		13.99	— 0.10		
28	14.05	— 0.04		14.06	— 0.03		
29	14.27	+ 0.18		14.29	+ 0.20		
30	13.95	— 0.14	+ 0.02	13.90	— 0.19	+ 0.01	4
31	14.02	— 0.07		13.97	— 0.12		
32	14.24	+ 0.15		14.20	+ 0.11		
33	14.03	— 0.06		13.94	— 0.15		
34	14.24	+ 0.15		14.14	+ 0.05		
35	14.04	— 0.05		13.98	— 0.11		
36	14.08	— 0.01		14.06	— 0.03		
37	14.29	+ 0.20		14.26	+ 0.17		
38	14.04	— 0.05		14.10	+ 0.01		
39	14.02	— 0.07		14.06	— 0.03		
40	14.09	0.00		14.13	+ 0.14		
41	14.31	+ 0.22		14.36	+ 0.27		
42	13.98	— 0.11		13.97	— 0.12		
43	14.19	+ 0.10		14.17	+ 0.08		
44	14.07	— 0.02	— 0.01	14.12	+ 0.03	0.00	5
45	13.95	— 0.14		14.07	— 0.02		
46	13.95	— 0.14		13.88	— 0.21		
47	14.16	+ 0.07		14.08	— 0.01		
48	14.05	— 0.04		14.00	— 0.09		
49	14.10	+ 0.01		14.12	+ 0.03		

	B	v	Mittel	C	v	Mittel	Zahl der Abstände
50	6914.02	-0.07		6914.04	-0.05		
51	14.23	+0.14		14.24	+0.15		
52	14.11	+0.02	-0.02	14.19	+0.10	0.00	6
53	14.00	-0.09		14.03	-0.06		
54	13.97	-0.12		13.94	-0.15		
55	14.04	-0.05		14.10	+0.01		7
Mittel	6914.09			6914.09			

Mittelwerte $\frac{\sum v}{\sum z}$ wie Oben

Nr.	B	C
2—7	-0.01	+0.01
8—22	0.00	+0.01
23—38	+0.02	+0.01
39—49	-0.01	0.00
50—54	-0.02	0.00

Aus den Werthen $\frac{\sum v}{\sum z}$ ersieht man, dass die Darstellung der Gleichungen nach beiden Verfahren nämlich durch die Curve B und nach dem Ausdruck $y = p + qx + rx^2$ gleich günstig ist; da aber die erstere den Vorzug besitzt, dass die Curve durch die beiden Abscissenpunkte 0 und 7200 hindurchgeht und dass daher einer bei Null belegenen Abstandsmessung auch die Correction Null zufällt, während nach dem Ausdruck C dafür die Correction +0.31 entsteht, so kann es wohl keinem Zweifel unterliegen, dass man sich der ersteren Correctionstabelle bedienen wird.

Freilich wird der Werth der auf diese Weise erhaltenen Correctionen wieder durch den Umstand abgeschwächt, dass die grösste gemessene Distanz, nämlich die unmittelbare Messung zwischen den Endsternen 1 und 8 dadurch eine unerwartet grosse Verbesserung von -0.23 erhält, aber dieser Umstand kann auf die Entscheidung zwischen den Tabellen B und C nicht von Einfluss sein, weil nach C die Correction von ähnlichem Betrage und sogar noch etwas grösser ausfällt, nämlich -0.31. Wenn nun auch durch die Correctionstabelle B ein grosser Theil der inneren Widersprüche der Distanzmessungen beseitigt ist, so bleiben aus dem erwähnten Grunde doch noch Zweifel übrig. So lange nicht weitere Aufklärungen über diese räthselhafte Angelegenheit vorhanden sind, sind die Distanzmessungen wohl nach der Tabelle B zu verbessern.

Verbesserungs-Tabelle B nach der früheren Form I und der
berichtigten Form II.

	I	II		I	II
0"	0.00	0.00	3700"	+ 0.03	- 0.07
100	+ 0.17	+ 0.15	3800	+ 0.03	- 0.07
200	+ 0.21	+ 0.22	3900	+ 0.03	- 0.07
300	+ 0.22	+ 0.21	4000	+ 0.03	- 0.08
400	+ 0.23	+ 0.25	4100	+ 0.03	- 0.08
500	+ 0.23	+ 0.25	4200	+ 0.03	- 0.10
600	+ 0.22	+ 0.23	4300	+ 0.02	- 0.12
700	+ 0.20	+ 0.22	4400	+ 0.02	- 0.13
800	+ 0.17	+ 0.20	4500	+ 0.02	- 0.14
900	+ 0.15	+ 0.18	4600	+ 0.01	- 0.16
1000	+ 0.13	+ 0.15	4700	0.00	- 0.17
1100	+ 0.12	+ 0.13	4800	0.00	- 0.18
1200	+ 0.11	+ 0.12	4900	- 0.01	- 0.20
1300	+ 0.11	+ 0.12	5000	- 0.02	- 0.22
1400	+ 0.10	+ 0.11	5100	- 0.03	- 0.22
1500	+ 0.10	+ 0.10	5200	- 0.04	- 0.23
1600	+ 0.10	+ 0.10	5300	- 0.05	- 0.25
1700	+ 0.11	+ 0.09	5400	- 0.06	- 0.26
1800	+ 0.12	+ 0.08	5500	- 0.07	- 0.27
1900	+ 0.12	+ 0.08	5600	- 0.08	- 0.27
2000	+ 0.12	+ 0.08	5700	- 0.10	- 0.28
2100	+ 0.11	+ 0.07	5800	- 0.12	- 0.29
2200	+ 0.09	+ 0.05	5900	- 0.13	- 0.29
2300	+ 0.08	+ 0.03	6000	- 0.15	- 0.30
2400	+ 0.07	0.00	6100	- 0.17	- 0.30
2500	+ 0.04	- 0.04	6200	- 0.19	- 0.31
2600	0.00	- 0.07	6300	- 0.21	- 0.31
2700	- 0.03	- 0.09	6400	- 0.22	- 0.31
2800	- 0.05	- 0.11	6500	- 0.23	- 0.30
2900	- 0.05	- 0.12	6600	- 0.25	- 0.30
3000	- 0.05	- 0.11	6700	- 0.25	- 0.28
3100	- 0.05	- 0.11	6800	- 0.24	- 0.27
3200	- 0.04	- 0.10	6900	- 0.23	- 0.23
3300	- 0.02	- 0.08	7000	- 0.19	- 0.17
3400	0.00	- 0.08	7100	- 0.13	- 0.10
3500	+ 0.02	- 0.07	7200	0.00	0.00
3600	+ 0.03	- 0.07			

Die neue Curve II hat der älteren I gegenüber den Vorzug, dass die kleine Anschwellung bei 4000 einem gleichmässigeren Verlaufe Platz gemacht hat.

Um weitere Aufklärung über das Vorhandensein solcher systematischer Correctionen bei anderen Beobachtern und für andere Heliometer zu erhalten, habe ich vor einigen Jahren eine Aufforderung zur Betheiligung an den Messungen des Löwenbogens ergehen lassen. Indem ich mir vorbehalte auf diesen Gegenstand noch wieder zurückzukommen, wenn das gesammte Beobachtungsmaterial vorhanden ist, stelle ich hier die bis jetzt bekannt gemachten Beobachtungen in Göttingen und Leipzig zusammen, und zwar sind die Distanzen der Grösse nach geordnet, und wie bisher auf die Verbindungslinie der Endsterne projicirt.

Abstand	Sterne	Schur (A. N. 3399)	Ambronn (A. N. 3460)	Peter (A. N. 3534)	<i>S—A</i>	<i>P—S</i>	<i>P—A</i>
XXVI	6 7	316.39	316.70	316.57	— 0.31	+ 0.18	— 0.13
XXVIII	7 8	371.06	370.98	371.23	+ 0.08	+ 0.17	+ 0.25
XXIII	5 6	385.97	386.03	386.17	— 0.06	+ 0.20	+ 0.14
XIX	4 5	656.16	656.45	656.31	— 0.29	+ 0.15	— 0.14
XXVII	6 8	687.70	687.86	687.74	— 0.16	+ 0.04	— 0.12
XXIV	5 7	702.82	702.94	702.94	— 0.12	+ 0.12	0.00
VIII	2 3	813.19	813.21	813.26	— 0.02	+ 0.07	+ 0.05
XX	4 6	1042.53	1042.58	1042.56	— 0.05	+ 0.03	— 0.02
XXV	5 8	1074.00	1073.77	1073.97	+ 0.23	— 0.03	+ 0.20
XIV	3 4	1228.22	1228.35	1228.37	— 0.13	+ 0.15	+ 0.02
XXI	4 7	1359.39	1359.33	1359.36	+ 0.06	— 0.03	+ 0.03
XXII	4 8	1730.52	1730.80	1730.37	— 0.28	— 0.15	— 0.43
XV	3 5	1884.72	1884.79	1884.76	— 0.07	+ 0.04	— 0.03
IX	3 4	2041.61	2041.83	2041.75	— 0.22	+ 0.14	— 0.08
XVI	3 6	2271.01	2271.08	2271.16	— 0.07	+ 0.15	+ 0.08
XVII	3 7	2587.85	2588.12	2587.75	— 0.27	— 0.10	— 0.37
X	2 5	2698.11	2698.50	2698.20	— 0.39	+ 0.09	— 0.30
XVIII	3 8	2959.08	2959.04	2959.03	+ 0.04	— 0.05	— 0.01
XI	2 6	3084.50	3084.21	3084.36	+ 0.29	— 0.14	+ 0.15
I	1 2	3141.88	3142.16	3142.02	— 0.28	+ 0.14	— 0.14
XII	2 7	3401.09	3401.17	3401.13	— 0.08	+ 0.04	— 0.04
XIII	2 8	3772.40	3772.66	3771.92	— 0.26	— 0.48	— 0.74
II	1 3	3955.17	3955.45	3955.03	— 0.28	— 0.14	— 0.42
III	1 4	5183.79	5184.38	5183.68	— 0.59	— 0.11	— 0.70
IV	1 5	5840.17	5840.58	5840.03	— 0.41	— 0.14	— 0.55
V	1 6	6226.31	6226.46	6226.32	— 0.15	+ 0.01	— 0.14
VI	1 7	6543.34	6543.23	6543.00	+ 0.11	— 0.34	— 0.23
VII	1 8	6914.11	6914.67	6913.99	— 0.56	— 0.12	— 0.68

Aus den Untersuchungen, die Dr. Peter über seine Messungen angestellt hat (Siehe Astr. Nachr. Nr. 3534) geht hervor, dass dieselben frei von systematischen Fehlern sind, und ich habe mich durch eigenes Nachrechnen davon überzeugt, dass die Oben erwähnten 55 Summen nahezu dieselben Beträge geben. Im Vergleich damit geben die Göttinger Messungen nebenstehende Verbesserungen *P—S* und *P—A*.

Vereinigt man die Einzelwerthe wieder nach Gruppen, so erhält man

	Mittl. Abstand	<i>S—A</i>	Correction für <i>S</i>	Correction für <i>A</i>
0	0''			
(1)	360	— 0.10	+ 0.18	+ 0.09
(2)	715	— 0.15	+ 0.10	— 0.05
(3)	1176	+ 0.03	+ 0.03	+ 0.06
(4)	1982	— 0.16	+ 0.05	— 0.12
(5)	2894	— 0.12	— 0.01	— 0.13
(6)	3720	— 0.21	— 0.19	— 0.40
(7)	5750	— 0.38	— 0.08	— 0.46
(8)	6728	— 0.23	— 0.23	— 0.46
0	7200			

Für meine Distanzmessungen hat man also die Verbesserungen

Mittl. Abstand	nach eigenen Messungen (a)	im Vergleich mit Peter (b)	Unterschied (a) — (b)
360"	+ 0.25	+ 0.18	+ 0.07
715	+ 0.21	+ 0.10	+ 0.11
1176	+ 0.13	+ 0.03	+ 0.10
1982	+ 0.07	+ 0.05	+ 0.02
2894	— 0.11	— 0.01	— 0.10
3720	— 0.06	— 0.19	+ 0.13
5750	— 0.29	— 0.08	— 0.21
6728	— 0.29	— 0.23	— 0.06

Aus dem Unterschied (a) — (b) geht hervor, dass die von mir angewandte Verbesserungs-Curve im Wesentlichen bestätigt wird, wenn auch die Darstellung nicht durchweg befriedigend ist.

Ein weiteres Eingehen auf diese Angelegenheit muss einstweilen noch hinausgeschoben werden, bis das Ergebniss der noch in Aussicht stehenden anderweitigen Messungen in Bamberg und Wien usw. vorliegt.

Abänderung des bisher für das Repsold'sche Heliometer angenommenen Werthes eines Theiles der Objectivscalen, wenn die aus den Beobachtungen des Löwenbogens hervorgehenden systematischen Correctionen der Distanzmessungen berücksichtigt werden.

Der Zahlenwerth zur Verwandlung der Ablesungen der Objectivscalen in Bogensekunden beruht auf Beobachtungen des Cygnus- und Hydrakreises, des Polbogens und der Standard stars for Victoria. Dabei wurde der Verwandlungslogarithmus als constant über die ganze Ausdehnung der Objectivverschiebung angenommen.

Bringt man jedoch die aus den Beobachtungen des Löwenbogens folgenden systematischen Correctionen nach der Tabelle B II (Seite 40) in Rechnung, so erfahren die auf Seite 66—91 der Praesepe-Abhandlung für meine Messungen angestellten Rechnungen nachstehende Abänderungen, wenn $0.01 x$ des Scalenerthes 40.01658 ist. (Vergl. IV S. 82).

1) Cygnuskreis.

Meridiankreis	Heliometer	$n = M - H$	v_1	v_2	$v_1 - v_2$			
1	2364.92	2364.97 + 0.01	— 0.06 = + 0.59x + 0.35y	— 0.02	— 0.10	+ 0.08		
2	1915.27	1915.21 + 0.08	— 0.02	0.48	0.23	+ 0.02	— 0.05	+ 0.07
3	2198.74	2198.68 + 0.05	+ 0.01	0.55	0.30	+ 0.05	— 0.03	+ 0.08
4	1866.24	1866.05 + 0.08	+ 0.11	0.47	0.22	+ 0.15	+ 0.08	+ 0.07
5	2262.62	2262.83 + 0.04	— 0.25	0.57	0.32	— 0.21	— 0.29	+ 0.08
6	4279.50	4279.65 — 0.11	— 0.04	1.07	1.14	— 0.07	— 0.12	+ 0.05
7	4083.02	4083.08 — 0.08	+ 0.02	1.02	1.04	0.00	— 0.05	+ 0.05
8	4064.78	4064.62 — 0.08	+ 0.24	1.02	1.04	+ 0.22	+ 0.17	+ 0.05
9	4122.44	4122.64 — 0.08	— 0.12	1.03	1.06	— 0.14	— 0.19	+ 0.05
10	6441.07	6441.23 — 0.31	+ 0.15	1.61	2.59	— 0.07	+ 0.04	— 0.11
11	5937.79	5937.78 — 0.29	+ 0.30	1.48	2.19	+ 0.15	+ 0.19	— 0.04
12	6316.53	6316.67 — 0.31	+ 0.17	1.58	2.50	— 0.04	+ 0.06	— 0.10

Endgleichungen:

$$+ 0.92 = + 12.98 x + 16.57 y$$

$$+ 1.49 = + 16.57 x + 22.75 y$$

$$x = - 0.136 \pm 0.093$$

$$y = + 0.201 \pm 0.070$$

$$\text{Summe der Fehlerquadrate } [v_1 v_1] = 0.1718$$

$$\text{Mittlerer Fehler einer Gleichung} = \pm 0.131$$

und man erhält den Ausdruck für die Verwandlung in Bogensekunden

$$\Delta = 40.01472 s + 0.0000201 s^2$$

$$\text{w. F.} \quad \pm 0.00093 \quad \pm 0.0000070$$

Dagegen erhält man ohne Anwendung eines quadratischen Gliedes

$$x = + 0.071 \pm 0.025$$

$$\text{Summe der Fehlerquadrate } [v_2 v_2] = 0.2271$$

$$\text{Mittlerer Fehler einer Gleichung} = \pm 0.144$$

und die Verwandlung in Bogensekunden

$$\Delta = 40.01729 s \pm 0.00025$$

2) Hydrakreis.

	Meridiankreis	Heliometer	n	v_1	v_2
1	2399.24	2399.47 + 0.00	- 0.23 = + 0.60 x + 0.36 y	- 0.34	- 0.21
2	2118.52	2118.27 + 0.07	+ 0.18	0.53	0.28
3	2197.56	2197.84 + 0.05	- 0.33	0.55	0.30
4	3101.17	3100.88 - 0.11	+ 0.40	0.77	0.59
5	1905.67	1905.80 + 0.08	- 0.21	0.48	0.23
6	4483.56	4483.79 - 0.14	- 0.09	1.12	1.25
7	4312.26	4312.36 - 0.12	+ 0.02	1.08	1.17
8	5269.34	5269.34 - 0.24	+ 0.24	1.32	1.74
9	4904.60	4904.40 - 0.20	+ 0.40	1.23	1.51
10	6679.48	6680.25 - 0.28	- 0.49	1.67	2.79
11	7099.78	7100.15 - 0.10	- 0.27	1.77	3.13

Endgleichungen:

$$- 0.48 = + 13.35 x + 18.12 y$$

$$- 1.22 = + 18.12 x + 26.49 y$$

$$x = + 0.366 \pm 0.197$$

$$y = - 0.296 \pm 0.149$$

$$\text{Summe der Fehlerquadrate } [v_1 v_1] = 0.8243$$

$$\text{Mittlerer Fehler einer Gleichung} = \pm 0.303$$

Ausdruck für die Verwandlung in Bogensekunden

$$\Delta = 40.02024 s - 0.0000296 s^2$$

$$\pm 0.00197 \quad \pm 0.0000149$$

Dagegen erhält man ohne Anwendung eines quadratischen Gliedes

$$x = -0.036 \pm 0.062$$

$$\text{Mittlerer Fehler einer Gleichung} = \pm 0.337$$

$$\text{Summe der Fehlerquadrate } [v_2 v_2] = 0.9083$$

und die Verwandlung in Bogensekunden

$$\Delta = 40.01622 \text{ s} \pm 0.00062$$

3) Polbogen. 1891.37 (Vergl. IV S. 89)

Messung ^s 169.4381

syst. Corr. — 0.0067

$$169.4314 = 6780.04 \quad (\text{Rechenfehler verbessert})$$

$$\Delta = 40.01644$$

4) Standard stars for Victoria.

Messung 161.3420

syst. Corr. — 0.0075

$$161.3345 = 6456.50 \quad (\text{Vergl. IV S. 89})$$

Man hat also, wenn man von der Anwendung eines quadratischen Gliedes absieht, den für meine Beobachtungen anzuwendenden Scalenwerth:

Cygnuskreis 40.01729

Hydrakreis 40.01622

Polbogen 40.01644

Standard stars 40.01934

und wenn man wieder das einfache Mittel aus diesen vier Bestimmungen nimmt so ist

der Werth eines Scalentheils 40.01732 log 1.602248

Es unterliegt keinem Zweifel, dass von diesen vier Werthen der erste, aus dem Cygnuskreis hergeleitete der zuverlässigste ist, denn die Zahl der verwandten Heliometerbeobachtungen ist hier bei Weitem am grössten ebenso wie die Zahl der Meridianbeobachtungen, die Sterne stehen gegenüber dem Hydrakreise hoch am Himmel und lassen sich aus diesem Grunde genauer beobachten und die Folge ist ein viel besserer Anschluss der Meridian- und Heliometer-Beobachtungen und erhebliche geringere wahrscheinliche Fehler in den Coëfficienten. Der Oben angenommene Mittelwerth 40.01732 würde daher schon durch die Cygnusbeobachtungen allein genügend bestätigt werden.

Die Annahme in der Praesepe-Abhandlung war

$$40.01605 \quad \text{log } 1.602234$$

Der Unterschied von 0.00127 im Scalenwerth bringt für die grösste überhaupt messbare Distanz von 180 Scalentheilen oder 7200 Secunden nur eine Vergrösserung von 0.23 hervor, die aber bei Benutzung der Correctionstabelle B bei grossen Distanzen wieder um einen ähnlichen Betrag aufgehoben wird.

Es ist noch zu untersuchen, welche Aenderungen die Einführung der aus dem Löwenbogen abgeleiteten systematischen Correctionen und der soeben abgeleiteten Verbesserung des früher angenommenen Scalenwerthes auf die Dimensionen des grossen Vierecks ausübt, welches der Triangulation der Praesepegruppe zu Grunde liegt.

In nachfolgender Tabelle sind die beiden Diagonalen und die vier Seitenlinien des Vierecks mit den systematischen Correctionen nach Tabelle B II und die obige Verbesserung des Scalenwerthes, nämlich $+0.00127$ berechnet (Vrgl. Praesepe S. 151).

Sterne			Syst. Corr.	Corr. für Scalenwerth	Summe
23.41	$118.3317^s = 4735.17$		-0.17	$+0.16$	-0.01
21.36	105.2992	4213.67	-0.10	$+0.13$	$+0.03$
23.21	74.8940	2996.96	-0.11	$+0.10$	-0.01
21.41	81.7597	3271.70	-0.09	$+0.11$	$+0.02$
41.36	74.1477	2967.09	-0.11	$+0.10$	-0.01
36.23	85.5081	3421.70	-0.08	$+0.11$	$+0.03$

also im Ganzen für 21606.29 eine Correction von $+0.05$ oder für die beiden Diagonalen $+0.01$. Die Lage der von der Mitte der Gruppe am weitesten entfernten Sterne würde also dadurch nur verschwindend kleine Veränderungen erleiden, und es ist daher das Resultat der Praesepe-Triangulation als das endgültige zu betrachten, so weit die Dimensionen in Betracht kommen und in Anbetracht der riesigen auf die Ausgleichung verwandten Zeit würde es sich auch nicht verlohnen nachträglich noch die neuen systematischen Fehler aus dem Löwenbogen an Stelle der früher angewandten zu setzen.

In Zukunft werde ich mich wie bemerkt der neuen Verbesserungstabelle B II dieser Abhandlung (Seite 40) und des obigen Scalenwerthes bedienen, so lange nicht die Behandlung der systematischen Correction einer begründeten Aenderung bedarf.

Reduction der Positionswinkel-Messungen.

Aufstellungsfehler des Aequatoreals. Gleichungen für
Collimationsfehler des Fernrohrs C , Neigung der Axe i und
Biegung der Declinationsaxe α .

In den Astronom. Mitthlgg. IV Seite 97 findet man die Gleichungen zur
Bestimmung dieser Grössen für den Zeitraum 1890 Febr. 12 bis 1892 März 21.
Die seitdem noch hinzugekommenen Gleichungen sind die nachfolgenden

				δ					
24	1893	Apr.	27	δ Virg.	-2.60	=	C	-0.070 i_1	-0.997 $\alpha \cos \varphi$
25				α Urs. min. U.	-4.12		C	-1.000	+0.022
26		Dec.	18	α Urs. min. O.	-3.67		C	-1.000	-0.022
27				67 Ceti	-2.00		C	+0.120	-0.993
28	1894	Juni	29	δ Urs. min. O.	-4.13		C	-0.998	-0.059
29				θ Serp.	-2.70		C	-0.071	-0.997
30		Dec.	12	α Urs. min. O.	-4.23		C	-1.000	-0.022
31				67 Ceti	-1.90		C	+0.120	-0.993
32	1895	Mai	30	α Urs. min. U.	-4.01		C	-1.000	+0.022
33				τ Virg.	-2.75		C	-0.036	-0.999
34	1896	Jan.	10	α Urs. min. O.	-3.64		C	-1.000	-0.022
35				ξ^2 Ceti	-2.57		C	-0.139	-0.990
36		Juli	21	δ Urs. min. O.	-4.41		C	-0.998	-0.059
37				θ Serp. pr.	-2.39		C	-0.071	-0.997
38	1897	Jan.	6	α Urs. min. O.	-4.23		C	-1.000	-0.022
39				α Arietis	-4.08		C	-0.390	-0.921
40		Mai	29	α Urs. min. U.	-4.43		C	-1.000	+0.022
41				ε Serp.	-3.10		C	-0.084	-0.996
42	1898	März	11	λ Urs. min. U.	-3.33		C	-1.000	+0.018
43				Glasgow 713	-3.65		C	-0.160	-0.987
44		Juli	14	η Serp.	-2.55		C	+0.051	-0.999
45				51 Ceph. U.	-3.87		C	-0.999	+0.048
46	1899	Febr.	4	δ Urs. min. U.	-3.93		C	-0.998	+0.059
47				θ Can. maj.	-0.90		C	+0.206	-0.978
48		Juni	28	β Herc.	-3.72		C	-0.370	-0.929
49				ε Urs. min. O.	-4.56		C	-0.991	-0.135

Nach der M. d. kl. Qdr. ergeben sich aus diesen Gleichungen die Endgleichungen

$$\begin{aligned}
 -150.17 &= +49.000 C - 24.351 i_1 - 20.242 \alpha \cos \varphi \\
 +92.044 &- 24.351 + 22.136 + 0.550 \\
 +52.394 &- 20.242 + 0.550 + 20.560
 \end{aligned}$$

und daraus

$$\text{Collimationsfehler des Fernrohrs } C = -0.297 = -0.074$$

$$\text{Biegung der Declinationsaxe } \alpha = +0.866$$

$$\begin{aligned}
 \text{Neigung der Declinationsaxe } \left. \begin{array}{l} \\ \text{gegen die Stundenaxe} \end{array} \right\} & i = i_1 - \alpha \sin \varphi = +0.944 - 0.834 \\
 & = +0.110
 \end{aligned}$$

Setzt man diese Grössen wieder in die einzelnen Gleichungen ein, so ergibt sich der übrigbleibende Fehler für einen Stern, auf den grössten Kreis reducirt,

im Mittel zu 0.26^s und da eine Gleichung immer aus den Einstellungen des Fernrohrs auf einen Stern in vier verschiedenen Lagen, nämlich bei Axe voran und Axe folgt und Drehung des Fernrohrs um seine Axe um 180 Grad hervorgeht, so ist der Beobachtungsfehler bei einer einzelnen Einstellung auf den Himmel mit Einschluss der aus den Schlotterungen der Axen hervorgehenden Schwankungen auf 0.5^s zu veranschlagen.

Gleichungen für die Abweichungen x und y der Stundenaxe vom Pol in der Ebene des Meridians und für die Biegung des Fernrohrs bei horizontaler Lage.

In IV Seite 98 finden sich diese Gleichungen von 1889 August 18 bis 1892 März 21 und es hatte sich bis dahin herausgestellt, dass die Neigung der Stundenaxe gegen den Horizont sich in den ersten Jahren allmählig etwas geändert hatte, weil die bei dem Umbau der Sternwarte im Jahre 1888 zur Verstärkung des Gewölbes aufgetragene Betonschicht ihr Gefüge offenbar noch etwas änderte. (Siehe Zeichnung des Mittelbaues der Sternwarte in Astr. Mittheilgg. 5. Theil.)

Ueber die Aufstellung des Instruments ergibt sich in dieser Beziehung jetzt eine Uebersicht über einen Zeitraum von mehr als zehn Jahren, nämlich

1	1889	Aug. 18	λ Urs. min. O.C.	-0.57	= +1.00	x	+0.61	β
2			α Cygni	-0.34	+1.00		-0.12	
3			δ Capr.	-0.14	+1.00		-0.93	
4		Oct. 16	δ Piscium	-0.28	+1.00		-0.70	
5			α Urs. min. O.C.	-0.55	+1.00		+0.60	
6	1890	Febr. 12	β Can. min.	-0.11	+1.00		-0.68	
7			λ Urs. min. U.C.	-0.43	+1.00		+0.64	
8		Mai 16	α Urs. min. U.C.	-0.34	+1.00		+0.64	
9			τ Virg.	-0.18	+1.00		-0.76	
10		Nov. 16	α Urs. min. O.C.	-0.38	+1.00		+0.60	
11			67 Ceti	+0.04	+1.00		-0.85	
12	1891	Apr. 25	δ Virg.	+0.08	+1.00		-0.74	
13			α Urs. min. U.C.	-0.32	+1.00		+0.64	
14			6 Persei	-0.37	+1.00		+0.98	
15			γ Scorpii	+0.30	+1.00		-0.97	
16		Dec. 21	ε Urs. maj. U.C.	-0.09	+1.00		+0.95	
17			α Urs. min. O.C.	+0.11	+1.00		+0.60	
18			ξ^2 Ceti	+0.35	+1.00		-0.69	
19			12 Eridani	+0.37	+1.00		-0.99	
20		Dec. 23	β Drac. U.C.	-0.13	+1.00		+0.97	
21			δ Urs. min. U.C.	-0.17	+1.00		+0.67	
22			ξ^2 Can. maj.	-0.18	+1.00		-0.96	
23			ξ Gem.	+0.27	+1.00		-0.51	
24	1892	März 21	λ Urs. min. U.C.	-0.06	+1.00		+0.64	
25			β Cancr.	+0.33	+1.00		-0.67	
26	1893	Apr. 27	δ Virg.	+0.56	+1.00		-0.74	
27			α Urs. min. U.	+0.13	+1.00		+0.64	
28		Dec. 18	α Urs. min. O.	+0.24	+1.00		+0.60	
29			67 Ceti	+0.41	+1.00		-0.85	
30	1894	Juni 29	δ Urs. min. O.	+0.10	+1.00		+0.57	
31			θ Serp.	+0.60	+1.00		-0.74	
32		Dec. 12	α Urs. min. O.	+0.16	+1.00		+0.60	
33			67 Ceti	+0.57	+1.00		-0.85	
34	1895	Mai 30	α Urs. min. U.	+0.21	+1.00		+0.64	
35			τ Virg.	+0.59	+1.00		-0.76	
36	1896	Jan. 10	α Urs. min. O.	+0.21	+1.00		+0.60	
37			ξ^2 Ceti	+0.80	+1.00		-0.69	

38	1896	Juli	21	δ Urs. min. O.	+ 0.18	= + 1.00 α	+ 0.57 β
39				φ Serp.	+ 0.51	+ 1.00	- 0.74
40	1897	Jan.	6	α Urs. min. O.	+ 0.17	+ 1.00	+ 0.60
41				α Arietis	+ 1.00	+ 1.00	- 0.38
42		Mai	29	α Urs. min. U.	+ 0.20	+ 1.00	+ 0.64
43				ε Serp.	+ 0.59	+ 1.00	- 0.73
44	1898	März	11	λ Urs. min. U.	+ 0.14	+ 1.00	+ 0.64
45				Glasgow	+ 0.73	+ 1.00	- 0.67
46		Juli	14	η Serp.	+ 0.60	+ 1.00	- 0.81
47				51 Ceph. U.	+ 0.34	+ 1.00	+ 0.66
48	1899	Febr.	4	δ Urs. min. U.	+ 0.29	+ 1.00	+ 0.67
49				ϑ Can.	+ 0.69	+ 1.00	- 0.89
50		Juni	28	β Herc.	+ 0.41	+ 1.00	- 0.50
51				ε Urs. min. O.	+ 0.20	+ 1.00	+ 0.51

Da x offenbar mit der Zeit veränderlich war, so kann es nicht nach der M. d. kl. Qdr. als Constante aus den Gleichungen abgeleitet werden, sondern es ist auf die Veränderlichkeit Rücksicht zu nehmen. Zu diesem Zwecke ist für die Grösse x für die einzelnen Beobachtungstage ein angenährter Mittelwerth von den absoluten Gliedern n zur Linken in Abrechnung gebracht worden. Die auf diese Weise übrigbleibenden Werthe $n - x$ bilden dann die n Glieder der Gleichungen zur Bestimmung der Biegung β .

Man erhält auf diese Weise die Endgleichung

$$- 6.98 = + 25.896 \beta$$

$$\text{oder} \quad \beta = - 0.27$$

Zieht man noch die bei den Aufstellungsbeobachtungen ausgeführten Durchgänge der Sterne durch den Meridian des Instruments hinzu, die eine Bestimmung für die Abweichung y der Stundenaxe vom Pol senkrecht zum Meridian geben, so erhält man nachfolgende Uebersicht über die Abweichung der Stundenaxe vom Pol:

		x	y											
1888	Oct.	19	+ 2.0	- 3.6										
	89	Mai	13	- 4.3	- 1.36									
		Juni	7	- 2.0	- 1.17	Angenommene Mittelwerthe								
		Juni	13	- 0.47	- 1.07									
		Aug.	18	- 0.39	- 1.23	1889	Juni	13	-	Aug.	18	- 0.43	- 1.15	
		Oct.	16	- 0.43	-		Aug.	18	-	Oct.	16	- 0.41	- 1.23	
	90	Febr.	12	- 0.28	- 1.33		Oct.	17	- 1890	Febr.	12	- 0.36	- 1.28	
		Mai	16	- 0.28	- 1.40		90	Febr.	12	-	Mai	16	- 0.28	- 1.37
		Nov.	16	- 0.21	- 1.24			Mai	16	-	Nov.	16	- 0.25	- 1.32
	91	Apr.	25	- 0.08	- 1.42			Nov.	16	- 91	Apr.	25	- 0.15	- 1.33
		Dec.	22	+ 0.07	- 1.35		91	Apr.	25	-	Dec.	22	0.00	- 1.88
		März	21	+ 0.14	- 1.38			Dec.	22	- 92	März	21	+ 0.10	- 1.38
	92	Apr.	27	+ 0.34	- 1.40		92	März	21	-	Apr.	27	+ 0.24	- 1.39
		Dec.	18	+ 0.29	- 1.27		93	Apr.	27	-	Dec.	18	+ 0.32	- 1.34
	93	Juni	29	+ 0.33	- 1.27			Dec.	18	- 94	Juni	29	+ 0.31	- 1.27
		Dec.	12	+ 0.33	- 1.43		94	Juni	29	-	Dec.	12	+ 0.33	- 1.35
	94	Mai	30	+ 0.39	- 1.45			Dec.	12	- 95	Mai	30	+ 0.36	- 1.44
		Jan.	10	+ 0.50	- 1.23		95	Mai	30	- 96	Jan.	14	+ 0.45	- 1.34
		Juli	21	+ 0.33	- 1.49		96	Jan.	14	-	Juli	21	+ 0.42	- 1.36
	96	Jan.	6	+ 0.62	- 1.67			Juli	21	- 97	Jan.	6	+ 0.48	- 1.58
		Mai	29	+ 0.39	- 1.40		97	Jan.	6	-	Mai	29	+ 0.51	- 1.54
	97	März	11	+ 0.43	- 1.49			Mai	29	- 98	März	11	+ 0.41	- 1.45
		Juli	14	+ 0.45	- 1.35		98	März	11	-	Juli	14	+ 0.44	- 1.42
	98	Febr.	4	+ 0.47	- 1.40			Juli	14	- 99	Febr.	4	+ 0.46	- 1.38
		Juni	28	+ 0.30	- 1.37		99	Febr.	4	-	Juni	28	+ 0.39	- 1.39

Für einen Zeitraum innerhalb zweier Bestimmungen der Instrumentalfehler ist ein Mittelwerth aus den beiden einschliessenden Werthen zur Reduction der Positionswinkel angenommen worden.

Um eine Vorstellung von der Bedeutung der Grösse x zu erhalten ist zu bemerken, dass die Höhe des gleichseitigen Dreiecks zwischen den Endpunkten des Dreifusses auf welchem das Heliometer steht 1,25 Meter beträgt, und dass daher 1' Aenderung in x einer Höhenänderung des Südpunktes um 0,36 Millimeter entspricht. Im Laufe von zehn Jahren hat nach obiger Zusammenstellung das Südende des Dreifusses gegen die Verbindungslinie der beiden anderen Eckpunkte sich nahezu um diesen Betrag gehoben und von 1895 ab scheint Ruhe eingetreten zu sein. In der Richtung senkrecht zum Meridian dagegen ist nur eine ganz geringe Drehung angedeutet.

Es lässt sich aus der Uebersicht wohl der Schluss ziehen, dass man für die Zwischenzeiten die für die Reduction der Positionswinkel erforderlichen Aufstellungsfehler völlig sicher den Mittelwerthen je zweier aufeinanderfolgenden Bestimmungen entnehmen kann, wie in der obigen zur Rechten stehenden Tabelle.

Indexfehler des Positionskreises.

Der Indexfehler des Positionskreises wurde durch Messung des Positionswinkels zwischen Sternen von bekannten aus Meridianbeobachtungen abgeleiteten Oertern und zu Anfang auch wohl durch Einstellung des Fernrohrs auf das Fadenkreuz eines im Norden vom Heliometer aufgestellten horizontalen Collimators bei auseinandergeschraubten Objectivhälften bestimmt. Da jedoch diese Collimatorbeobachtungen wie schon früher bemerkt, den Indexfehler nur in einer Lage geben, die bei den Beobachtungen am Himmel selbst garnicht vorkommt und die Genauigkeit der Bestimmung durch Sternbeobachtungen erheblich grösser ist, sofern nur die Sternörter genügend bekannt sind, so ist der Indexfehler schon seit längeren Jahren ausschliesslich auf letztere Weise von mir bestimmt worden.

In den Astr. Mitthlgg. IV. Seite 101 findet man den Indexfehler bestimmt durch Messungen der beiden Linien cf und ad des bekannten Hydrakreises im Jahre 1892 und ferner durch die beiden „Standard stars for Victoria“ in den Jahren 1889 und 1890. Die Standard stars sind später nicht regelmässig beobachtet worden, dagegen die beiden langen Linien in der Hydra noch zu wiederholten Malen in den Jahren 1897 und 1899. Da bei den älteren Messungen nachträglich in der Annahme der Aufstellungsfehler noch kleine Aenderungen vorgenommen sind, so werden hier alle Beobachtungen von Anfang an noch einmal zusammengestellt.

Positionswinkel von Hydra cf.

Tag	Sternzeit	Stundenwinkel	Axe	Bar.	Th.	Messung	λ	J	Rfr.	Aberr.	Posit.-Kreis Jahres-Anf.	Mittel	Tages- Mittel		
	^h ^m	^h ^m		^{mm}	^o	^o ['] ⁰	['] ⁰	['] ⁰	['] ⁰	['] ⁰	^o ['] ⁰	['] ⁰	['] ⁰		
1892	Febr. 21	8 8.4	-0 13	f	740	+ 0.5	159 52.65	+ 1.29	- 1.12	+ 0.40	- 0.04	159 53.18	53.37	53.37	
		8 31.4	+ 0 10				339 52.92	+ 1.31	- 1.12	+ 0.49	- 0.04	53.56			
		8 54.4	+ 0 33	v			339 50.28	+ 1.30	+ 1.12	+ 0.58	- 0.04	53.24	53.37		
		9 11.9	+ 0 51				159 50.48	+ 1.29	+ 1.12	+ 0.65	- 0.04	53.50			
	März 3	7 49.8	-0 32	f	751	- 6	159 52.72	+ 1.27	- 1.12	+ 0.34	- 0.05	159 53.16	53.43		53.50
		8 12.8	- 0 9				339 53.13	+ 1.30	- 1.12	+ 0.43	- 0.05	53.69			
		8 39.3	+ 0 18	v			339 50.55	+ 1.31	+ 1.12	+ 0.53	- 0.05	53.46	53.57		
		8 56.3	+ 0 35				159 50.70	+ 1.30	+ 1.12	+ 0.60	- 0.05	53.67			
	9	8 12.8	- 0 9	f	735	- 2	339 52.70	+ 1.30	- 1.12	+ 0.42	- 0.05	159 53.25	53.16		53.13
		8 25.8	+ 0 4				159 52.48	+ 1.30	- 1.12	+ 0.46	- 0.05	53.07			
		8 42.3	+ 0 21	v			159 50.55	+ 1.31	+ 1.12	+ 0.53	- 0.05	53.46	53.10		
		8 56.8	+ 0 35				339 49.78	+ 1.30	+ 1.12	+ 0.58	- 0.05	52.73			
1897	Febr. 17	8 5.8	- 0 16	f	760	- 2	339 53.28	+ 1.34	- 1.11	+ 0.40	- 0.18	159 53.73	53.63	53.77	
		8 23.8	+ 0 2				159 52.99	+ 1.35	- 1.11	+ 0.47	- 0.18	53.52			
		8 41.8	+ 0 20	v			159 51.25	+ 1.39	+ 1.11	+ 0.53	- 0.18	54.10	53.91		
		9 1.3	+ 0 40				339 50.75	+ 1.41	+ 1.11	+ 0.62	- 0.18	53.71			
	März 17	7 49.6	- 0 32	f	742	+ 8	339 53.48	+ 1.27	- 1.11	+ 0.33	- 0.20	53.77	53.68	53.70	
		8 3.6	- 0 18				159 53.20	+ 1.31	- 1.11	+ 0.38	- 0.20	53.58			
		8 32.1	+ 0 10	v			159 50.97	+ 1.37	+ 1.11	+ 0.48	- 0.20	53.73	53.72		
		8 45.6	+ 0 24				339 50.87	+ 1.39	+ 1.11	+ 0.53	- 0.20	53.70			
	März 30	8 8.9	- 0 13	f	738	+ 2	339 53.77	+ 1.33	- 1.11	+ 0.40	- 0.20	54.19	53.99	53.86	
		8 20.4	- 0 1				159 53.30	+ 1.35	- 1.11	+ 0.44	- 0.20	53.78			
		8 35.9	+ 0 14	v			159 51.07	+ 1.38	+ 1.11	+ 0.49	- 0.20	53.85	53.73		
		8 53.9	+ 0 32				339 50.73	+ 1.40	+ 1.11	+ 0.56	- 0.20	53.60			
1899	Febr. 21	7 20.7	- 1 1	f	759	0	339 54.40	+ 1.21	- 1.11	+ 0.23	- 0.27	159 54.46	54.54	54.25	
		7 37.2	- 0 44				159 54.43	+ 1.27	- 1.11	+ 0.29	- 0.27	54.61			
		9 31.1	+ 1 12	v		- 1	159 51.02	+ 1.45	+ 1.11	+ 0.76	- 0.27	54.07	53.95		
		9 56.4	+ 1 15				339 50.77	+ 1.45	+ 1.11	+ 0.77	- 0.27	53.83			
	März 15	7 28.6	- 0 53	f	756	+ 7	339 53.88	+ 1.22	- 1.11	+ 0.25	- 0.29	53.95	54.33	54.30	
		7 47.6	- 0 34				159 54.48	+ 1.30	+ 1.11	+ 0.32	- 0.29	54.70			
		9 14.6	+ 0 53	v			159 51.62	+ 1.45	+ 1.11	+ 0.65	- 0.29	54.54	54.27		
		9 32.1	+ 1 10			5	339 51.00	+ 1.45	+ 1.11	+ 0.73	- 0.29	54.00			
	März 18	8 28.0	- 0 6	f	744	+ 1	159 53.92	+ 1.37	- 1.11	+ 0.43	- 0.29	54.32	54.42	54.29	
		8 48.0	+ 0 26				339 53.93	+ 1.43	- 1.11	+ 0.55	- 0.29	54.51			
		8 35.8	+ 0 14	v	743	- 6	159 51.53	+ 1.41	+ 1.11	+ 0.51	- 0.29	54.27	54.15		
		8 55.4	+ 0 34				339 51.18	+ 1.43	+ 1.11	+ 0.60	- 0.29	54.03			

Positionswinkel von Hydra ad.

1892	März 4	7 52.9	- 0 30	f	752	- 6	163 53.50	+ 1.28	- 1.12	+ 0.28	- 0.05	163 53.89	54.09	54.09
		8 8.9	- 0 14				343 53.80	+ 1.30	- 1.12	+ 0.35	- 0.05	54.28		
		8 35.9	+ 0 13	v			343 51.25	+ 1.31	+ 1.12	+ 0.48	- 0.05	54.11	54.10	
		8 52.9	+ 0 30				163 51.15	+ 1.30	+ 1.12	+ 0.56	- 0.05	54.08		
	8	7 54.7	- 0 28	f	743	- 4	163 53.82	+ 1.28	- 1.12	+ 0.28	- 0.05	54.21	54.17	54.22
		8 12.2	- 0 11				343 53.65	+ 1.29	- 1.12	+ 0.36	- 0.05	54.13		
		8 34.7	+ 0 12	v			343 51.42	+ 1.31	+ 1.12	+ 0.46	- 0.05	54.26	54.26	
		8 51.2	+ 0 28				163 51.35	+ 1.30	+ 1.12	+ 0.54	- 0.05	54.26		
	19	8 8.2	- 0 15	f	757	+ 3	163 53.52	+ 1.29	- 1.12	+ 0.34	- 0.05	53.98	54.03	54.00
		8 26.2	+ 0 3				343 53.53	+ 1.30	- 1.12	+ 0.42	- 0.05	54.08		
		8 46.7	+ 0 24	v			343 51.18	+ 1.31	+ 1.12	+ 0.51	- 0.05	54.07	53.97	
		9 6.2	+ 0 43				163 50.88	+ 1.30	+ 1.12	+ 0.61	- 0.05	53.86		

Tag	Sternzeit h m	Stundenwinkel h m	Axe	Bar. Th.	Messung	λ	J	Rfr.	Aberr.	Posit.-Kreis Jahres-Anf.	Mittel	Tages- Mittel
97 März 11	7 42.8	-0 41	f	750 + 1	343 54.72	+ 1.25	- 1.11	+ 0.22	- 0.19	163 ^o 54.89	54.73	54.79
	8 2.9	-0 20			163 54.24	+ 1.31	- 1.11	+ 0.32	- 0.19			
	8 30.6	+ 0 7	v		163 52.23	+ 1.36	+ 1.11	+ 0.43	- 0.19			
	8 52.8	+ 0 30			343 51.90	+ 1.40	+ 1.11	+ 0.54	- 0.19			
16	7 42.1	-0 41	f	743 + 5	343 54.70	+ 1.25	- 1.11	+ 0.22	- 0.19	54.87	54.83	54.82
	7 58.6	-0 25			163 54.50	+ 1.30	- 1.11	+ 0.29	- 0.19			
	8 34.1	+ 0 11	v		163 52.07	+ 1.37	+ 1.11	+ 0.44	- 0.19			
	8 49.6	+ 0 26			343 52.00	+ 1.40	+ 1.11	+ 0.51	- 0.19			
Apr. 3	7 57.4	-0 26	f	737 + 2	343 54.80	+ 1.30	- 1.11	+ 0.28	- 0.20	55.07	54.95	54.83
	8 9.9	-0 13			163 54.48	+ 1.32	- 1.11	+ 0.34	- 0.20			
	8 28.9	+ 0 6	v		163 52.05	+ 1.36	+ 1.11	+ 0.42	- 0.20			
	8 45.4	+ 0 22			343 51.88	+ 1.39	+ 1.11	+ 0.49	- 0.20			
99 Febr. 21	7 58.8	-0 24	f	759 0	163 55.02	+ 1.33	- 1.11	+ 0.31	- 0.26	55.29	55.01	55.05
	8 13.8	-0 9			343 54.37	+ 1.36	- 1.11	+ 0.37	- 0.26			
	8 54.4	+ 0 31	v	- 1	343 52.25	+ 1.43	+ 1.11	+ 0.57	- 0.26			
	9 8.4	+ 0 45			163 52.13	+ 1.44	+ 1.11	+ 0.64	- 0.26			
März 15	8 6.1	-0 17	f	756 + 7	163 54.87	+ 1.35	- 1.11	+ 0.33	- 0.29	55.15	55.43	55.29
	8 20.6	-0 3			343 55.32	+ 1.38	- 1.11	+ 0.40	- 0.29			
	8 37.6	+ 0 14	v		343 52.27	+ 1.41	+ 1.11	+ 0.48	- 0.29			
	8 55.6	+ 0 32		5	163 52.50	+ 1.43	+ 1.11	+ 0.56	- 0.29			
18	7 52.5	-0 31	f	744 + 1	343 55.28	+ 1.31	- 1.11	+ 0.28	- 0.28	55.48	55.44	55.23
	8 9.0	-0 14			163 55.10	+ 1.35	- 1.11	+ 0.34	- 0.28			
23	9 10.5	+ 0 47	v	743 - 7	343 52.12	+ 1.44	+ 1.11	+ 0.65	- 0.28	55.04	55.11	
	9 29.2	+ 1 6			163 52.15	+ 1.45	+ 1.11	+ 0.75	- 0.28			

In dem Werke: A. Auwers, Die Venusdurchgänge 1874 und 1882, Fünfter Band, Seite 362 findet man die aus Meridianbeobachtungen abgeleiteten Oerter der vier Sterne folgendermaassen:

Aequinoctium und Epoche 1875	Præc. 1875	Säc. Var.	E. B.	Præc. 1875	Säc. Var.	E. B.
Hydra <i>a</i>	8 ^h 23 ^m 8.260	- 0 ^s 32' 42.03	+ 3.0620	- 0.0041	- 0.0022	- 11.726
<i>c</i>	21 49.508	+ 0 39 23.05	+ 3.0847	- 0.0044	- 0.0021	- 11.633
<i>d</i>	21 4.120	+ 1 14 13.22	+ 3.0958	- 0.0046	+ 0.0101	- 11.578
<i>f</i>	19 6.156	+ 2 30 27.64	+ 3.1204	- 0.0049	- 0.0029	- 11.438

Aus diesen Daten erhält man

	1892.0	1897.0	1899.0
		Linie cf	
$\Delta\alpha$	- 2 ^m 42.759	- 2 ^m 42.585	- 2 ^m 42.516
$\Delta\delta$	+ 1 ^o 51' 7.15	+ 1 ^o 51' 7.91	+ 1 ^o 51' 8.21
$\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$	+ 1 31 38.30	+ 1 30 40.15	+ 1 30 16.85
		Linie ad	
$\Delta\alpha$	- 2 ^m 3.357	- 2 ^m 3.127	- 2 ^m 3.035
$\Delta\delta$	+ 1 ^o 46' 58.04	+ 1 ^o 46' 58.86	+ 1 ^o 46' 59.20
$\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$	+ 0 17 27.04	+ 0 16 28.44	+ 0 16 5.03

Daraus folgen nach strenger Berechnung der sphärischen Dreiecke die Positionswinkel der Verbindungslinien bezogen auf die Mittelpunkte der Bogen

	1892.0	1897.0	1899.0	jährl. Aenderg.
cf	339° 53.626	339° 54.932	339° 55.448	+ 0.260
ad	343 55.061	343 56.815	343 57.321	+ 0.252

Zur Bestimmung des Indexfehlers des Positionskreises hat man demnach folgende Vergleichen

	Epoche	Pos.-Kreis	Pos.-W. aus Merid. Beobb.	Indexfehler
Hydra cf	1892.17	159° 53.33	159° 53.67	+ 0.34
	97.20	53.78	54.98	+ 1.20
	99.19	54.28	55.50	+ 1.22
ad	1892.19	163 54.10	163 55.11	+ 1.01
	97.22	54.81	56.87	+ 2.06
	99.19	55.21	57.38	+ 2.17

Dazu kommen noch die frühere Bestimmung des Indexfehlers aus zahlreichen Beobachtungen der „Standard stars for Victoria“ bei Gelegenheit der Bestimmung der Sonnenparallaxe in den Jahren 1889 und 1890 (Vergl. IV. Seite 102) und ferner Beobachtungen für den Indexfehler in den Jahren 1894 und 1899.

Die Oerter dieser Sterne findet man im Aufsatz:

David Gill, On the definitive places of the stars used for comparison with the planet Victoria in the observations for parallax 1889. Astr. Nachr. Bd. 130 Seite 161.

Die Reduction der fernerhin erhaltenen Beobachtungen ist in nachstehender Tabelle enthalten.

Positionswinkel-Messungen der Standard stars.

Tag	Sternzeit	Stundenwinkel	Axe	Bar.	Th.	Messung	λ	J	Refr.	Aberr. usw.	Pos.-Kreis Jahres-Anfang	Mittel	Tages-Mittel
1894 Juli 2	h m	h m	f	750	+ 22	97° 9.00	+ 1.19	- 1.12	+ 0.59	+ 0.23	277° 9.89	9.82	9.83
	18 47.4	- 0 52				277 8.97	+ 1.24	- 1.12	+ 0.42	+ 0.23	9.74		
	19 13.4	- 0 26	v		+ 21	277 6.93	+ 1.30	+ 1.12	+ 0.25	+ 0.23	9.83	9.83	
	19 40.9	+ 0 1				97 7.02	+ 1.32	+ 1.12	+ 0.13	+ 0.23	9.82		
20 0.9	+ 0 21												
1899 Juli 10	19 34.3	- 0 5	f	750	+ 14	277 6.70	+ 1.38	- 1.12	+ 0.30	+ 0.29	277 7.55	7.50	7.09
	19 50.3	+ 0 11				97 6.67	+ 1.41	- 1.12	+ 0.20	+ 0.29	7.45		
	20 9.3	+ 0 30	v			97 3.55	+ 1.43	+ 1.12	+ 0.10	+ 0.29	6.49	6.68	
	20 31.3	+ 0 52				277 4.08	+ 1.43	+ 1.12	- 0.05	+ 0.29	6.87		
12	18 14.5	- 1 26	f	746	+ 18	277 6.22	+ 1.19	- 1.12	+ 0.87	+ 0.29	277 7.45	7.28	7.23
	18 28.0	- 1 12				97 5.93	+ 1.23	- 1.12	+ 0.77	+ 0.29	7.10		
	18 49.5	- 0 51	v			97 3.83	+ 1.30	+ 1.12	+ 0.58	+ 0.29	7.12	7.18	
	19 6.5	- 0 34				277 4.03	+ 1.34	+ 1.12	+ 0.45	+ 0.29	7.23		

Tag	Sternzeit	Stunden-Winkel	Axe	Bar.	Th.	Messung	λ	J	Refr.	Aberr. usw.	Pos.-Kreis Jahres-Anfang	Mittel	Tages Mittel
99 Juli	15	h m 19 7.6 19 21.6 19 40.6 19 56.6	— 0 33 — 0 19 0 0 + 0 16	f	752 + 14 ⁰	277° 6.30	+ 1.34	— 1.12	+ 0.48	+ 0.30	277° 7.30	7.31	7.11
						97 6.42	+ 1.36	— 1.12	+ 0.38	+ 0.30	7.32		
						97 3.87	+ 1.39	+ 1.12	+ 0.27	+ 0.30	6.95		
						277 3.87	+ 1.41	+ 1.12	+ 0.17	+ 0.30	6.87		
	17	h m 19 20.9 19 38.9 20 1.4 20 17.4	— 0 20 — 0 1 + 0 21 + 0 37	f	748 + 14	97 6.20	+ 1.36	— 1.12	+ 0.40	+ 0.30	277 7.14	7.22	7.14
						277 6.45	+ 1.39	— 1.12	+ 0.27	+ 0.30	7.29		
						277 3.80	+ 1.42	+ 1.12	+ 0.13	+ 0.30	6.77		
						97 4.47	+ 1.43	+ 1.12	+ 0.03	+ 0.30	7.35		
Aug. 4	h m 19 8.3 19 23.3 19 46.8 20 2.8	— 0 32 — 0 17 + 0 7 + 0 23	f	747 + 20	97 6.10	+ 1.34	— 1.12	+ 0.47	+ 0.31	277 7.10	7.27	7.21	
					277 6.50	+ 1.37	— 1.12	+ 0.37	+ 0.31	7.43			
					277 4.20	+ 1.40	+ 1.12	+ 0.20	+ 0.31	7.23			
					97 4.10	+ 1.42	+ 1.12	+ 0.13	+ 0.31	7.08			

Die Oerter der beiden Standard stars sind nach obiger Quelle.

BD.	Aequinoctium 1889.0				Epoche 1889.55				E. B.	
					Präcession					
	h	m	s		1850	1900	1850	1900		
— 4.4883	19	35	56.005	— 4° 32' 49".33	+ 3.1712	+ 3.1692	+ 7".987	+ 8".197	— 0.0014	+ 0.004
— 4.4926	43	4.463	— 4 46 18.32	+ 3.1747	+ 3.1725	+ 8.556	+ 8.763	— 0.0007	— 0.016	

Daraus folgt

Epoche	1889.55	1890.55	1899.55
Aequinoctium	89.0	90.0	99.0
$\Delta \alpha$	+ 7 ^m 8.458 ^s	+ 7 ^m 8.462 ^s	+ 7 ^m 8.498 ^s
$\Delta \delta$	— 0° 13' 28".99	— 0° 13' 28".44	— 0° 13' 23".53
$\frac{1}{2}(\delta' + \delta)$	— 4 39 33.83	— 4 39 25.40	— 4 38 9.15
Pos.-W.	97° 11' 50".64	97° 11' 32".94	97° 8' 54".35
Abstand	6456".49	6456".52	6456".63

Zur Bestimmung des Indexfehlers aus den Standard stars hat man also folgende Vergleichenungen

Epoche	Aequinoct.	Posit.-Kreis	Posit.-Winkel	Indexfehler	Zahl
1889.54	1889.0	277° 10.80	277° 11.84	+ 1.04	21
90.65	90.0	10.14	11.55	+ 1.41	5
94.50	94.0	9.82	10.38	+ 0.56	4
99.55	99.0	7.16	8.92	+ 1.75	20

Uebersicht über sämtliche Bestimmungen des Indexfehlers
des Positionskreises aus Sternbeobachtungen.

Nr.			k	s	Red. auf 1895	$(k \text{ 1895})$	$(k \text{ 1895}) \times \frac{s}{100}$
1	Standard stars	1889.9	+ 1.12	107.6	+ 0.58	+ 1.70	+ 1.83
2	Hydra cf	92.2	+ 0.34	118.3	+ 0.32	+ 0.66	+ 0.78
3	ad	92.2	+ 1.01	111.3	+ 0.32	+ 1.33	+ 1.48
4	Perseus ap	94.1	+ 0.32	98.0	+ 0.10	+ 0.42	+ 0.41
5	Hydra cf	97.2	+ 1.20	118.3	- 0.25	+ 0.95	+ 1.12
6	ad	97.2	+ 2.06	111.3	- 0.25	+ 1.81	+ 2.01
7	Hydra cf	99.2	+ 1.22	118.3	- 0.48	+ 0.74	+ 0.88
8	ad	99.2	+ 2.17	111.3	- 0.48	+ 1.69	+ 1.88
9	Standard stars	99.5	+ 1.75	107.6	- 0.51	+ 1.24	+ 1.33

In dieser Zusammenstellung sind die für die Sonnenparallaxe ausgeführten Beobachtungen der Standard stars in den Jahren 1889 und 90 zu einem Werthe vereinigt worden und die vereinzelt darstehende Beobachtung von 1894 ist ausgeschlossen. Die Einzelheiten der Beobachtung von Perseus *ap* zur Orientirung dieser Sterngruppe werden weiter Unten mitgetheilt.

In den Werthen k ist wenn man die Bestimmungen durch die verschiedenen Sternpaare betrachtet, durchweg eine kleine Zunahme mit der Zeit angedeutet, nämlich

Nr.			Aenderung
9	minus 1	9.6 Jahre	+ 0.63
8	" 3	7.0	+ 1.16
7	" 2	7.0	+ 0.88

Bei der Schwierigkeit die Sicherheit der einzelnen Bestimmungen und die dabei unterlaufenden Fehler zu ermitteln, dürfte hier eine Ausgleichung nach d. M. d. kl. Q. wohl nicht am Platze sein und man wird sich damit begnügen können, darüber einen Ueberschlag zu machen. Nimmt man einfach die Summen der drei vorstehenden Zwischenzeiten und die Summe der Aenderungen, so ergibt sich die jährliche Aenderung von k zu + 0.113 und reducirt man, wie es in obiger Tabelle geschehen ist, die einzelnen Werthe damit auf die Epoche 1895.0 und giebt denselben die Entfernung der Sterne s als Gewicht, so erhält man die weiteren Columnen der Tabelle.

Das Endresultat würde sein

$$\text{Indexfehler des Positionskreises } k = + 1.17 + 0.113 (t - 1895.0)$$

**Verbesserung der angenommenen Drehungs-Constante im Positionswinkel
aus Beobachtungen von Sternpaaren symmetrisch zum Meridian.**

Die Drehungs-Constante μ war bei der Reduction der Beobachtungen der Standard stars 1889.90 zu 0.18, 1899 zu + 0.220 und bei sämtlichen Beob-

achtungen der Hydrasterne zu $+0.185$ angenommen. Will man Positionswinkel-Messungen zu einer Prüfung dieser Constante verwenden, so können dabei wohl nur solche Beobachtungen verwandt werden, die symmetrisch zu beiden Seiten des Meridians angestellt sind. Die Standard stars wurden bei Gelegenheit der Beobachtungen der Victoria aber in beliebigen Stundenwinkel beobachtet, je nach der Zeit in der der Himmel klar war und es können davon für den vorliegenden Zweck aus der damaligen Zeit nur die von 1889 Juli 9 verwandt werden, während die Beobachtungen von 1899 zur Bestimmung des Indexfehlers und der Drehungs-Constanten besonders ausgeführt worden sind.

Hydra c f		Hydra a d		Stand. stars.	
1892 Febr. 21	0.000	1892 März 4	-0.005	1889 Juli 9	-0.030
März 3	-0.070	8	-0.045		
9	+0.030	19	+0.030		
1897 Febr. 17	-0.140	1897 März 11	-0.060	1899 Juli 10	+0.410
März 17	-0.020	16	+0.005	12	+0.050
30	+0.130	Apr. 3	+0.120	15	+0.200
				17	+0.078
1899 Febr. 21	+0.295	1899 Febr. 21	-0.035	Aug. 4	+0.055
März 15	+0.030	März 15	+0.140		
18. 23	+0.135	18. 23	+0.165		

In Anbetracht, dass die Coefficienten der Durchbiegung proportional dem sinus der Zenithdistanz angenommen werden, nämlich für

Hydra c f	0.767
Hydra a d	0.780
Std. st.	0.831

erhält man für die Verbesserung der Ausgangswerthe nachstehende leicht verständliche Zusammenstellung.

					Gew.	Red. auf 1895.0	μ 1895
Std. st.	1889.6	$\mu = +0.18$	$-\frac{0.030}{0.831}$	$= +0.14$	1	$+0.12$	$+0.26$
Hydra c f	92.2	$+0.185$	$-\frac{0.013}{0.767}$	$+0.17$	3	$+0.06$	$+0.23$
a d		$+0.185$	$-\frac{0.007}{0.780}$	$+0.18$	3	$+0.06$	$+0.24$
Hydra c f	97.2	$+0.185$	$-\frac{0.010}{0.767}$	$+0.17$	3	-0.05	$+0.12$
a d		$+0.185$	$+\frac{0.022}{0.780}$	$+0.21$	3	-0.05	$+0.16$
Hydra c f	99.2	$+0.185$	$+\frac{0.153}{0.767}$	$+0.38$	3	-0.10	$+0.28$
a d		$+0.185$	$+\frac{0.090}{0.780}$	$+0.30$	3	-0.10	$+0.20$
Std. st.	99.6	$+0.220$	$+\frac{0.159}{0.831}$	$+0.41$	5	-0.10	$+0.31$

In der Reihe für μ ist eine allmähliche Zunahme dieser Grösse nicht zu verkennen und zwar beträgt dieselbe nach einer graphischen Bestimmung mit Berücksichtigung der angesetzten Gewichte jährlich $+0.023$, womit man die Columnne μ 1895 erhält, die recht befriedigend übereinstimmt. Man hat deshalb sowie k auch μ als Function der Zeit

$$\mu = +0.23 + 0.023 (t - 1895.0)$$

Dass die Drehungsconstante sich im Laufe eines Jahrzehnts um eine viertel Minute ändert kann wohl nicht befremden, wenn man erwägt, dass das Gewicht des Fernrohrs beständig auf das Ende der Declinationsachse wirkt; auch würden äusserst kleine Lockerungen in den Befestigungsschrauben schon diesen Effect hervorbringen.

Da der Durchmesser des Positionskreises 365 Millimeter beträgt, so entspricht eine Veränderung der beiden zur Ablesung des Kreises dienenden Indices um eine Bogenminute einer linearen Verschiebung von $\frac{1}{20}$ Millimeter und bei den grössten am Himmel messbaren Sternabständen, nämlich zwei Grad würde ein Fehler von einer Minute einem Fehler von 2 Bogensekunden im Abstände entsprechen. Nach vorstehenden Uebersichten ist die Instrumental-Correction einer Messung wohl auf 0.1 Minuten sicher, also 0.2 in der Ortsbestimmung durch Positionswinkel-Messung zu verbürgen. Da die Winkelmessungen den Distanzmessungen unter allen Umständen nicht gleichwerthig sind (Vrgl. frühere Ermittlungen darüber Astr. Mitthlgg. IV Seite 283) so wird es sich immer empfehlen vorzugsweise Distanzen zu messen und die Winkelmessungen mit Benutzung von Meridiankreis-Beobachtungen nur zur Orientirung von Sterngruppen zu verwenden.

Uebersicht über die angewandten Instrumental-Constanten und Aufstellungsfehler.

I. Reduction der Distanzen.

Die Temperatur des Fernrohres wird wie bisher nach dem Ausdruck berechnet

$$t = O + \frac{1}{4} (o - O)$$

wo O und o die berichtigten Ablesungen der Thermometer am Objectiv- und am Ocularende sind.

Die der Temperatur t entsprechende Normal-Ocularstellung ist

$$N = 21,18 + 0.019 t$$

und ist Oc die bei der Beobachtung wirklich abgelesene Stellung der Ocularscala, so ist die Reduction einer Distanzmessung s auf die normale Ocularstellung ausgedrückt in Einheiten der vierten Decimale eines Skalentheils

$$+ 366 (N - Oc) \frac{s}{100}$$

Die Zahl 366 entspricht nicht genau dem reciproken Werthe der Brennweite, sondern ist auf empirischem Wege bestimmt. (Vrgl. darüber Theil IV Seite 42).

Die Reduction einer bei $t^{\circ} \text{C}$ gemessenen Distanz auf 0°C in Einheiten der vierten Decimale eines Skalentheils ist wie bisher

$$- 8 \frac{s}{100} t$$

Ueber die Correction der Ablesungen der Skala für Theilungsfehler und für den Gang der Mikrometerschraube vergl. IV Seite 30 und 32.

Die Fortsetzung der an letzterer Stelle befindlichen Gangtafel lautet

1890 Apr. 18 bis 1894 Apr. 18	— 8
1894 Apr. 19 1898 Aug. 15	— 7
1898 Nov. 1 1898 Nov. 20	0
1898 Nov. 21 1899 Dec.	— 4

Berechnung der Refraction Vergl. IV. S. 106, 108 bis 110.

Verwandlung der in Skalentheilen ausgedrückten Distanzen in Bogen-secunden nach dem Ausdruck

$$S = 40.01732 \dots 1,602248$$

Verbesserung der Distanzmessungen für systematische Correctionen nach der Tabelle B II auf Seite 40 dieser Abhandlung.

II. Reduction der Positionswinkel.

Biegungs-Constanten: $\alpha = +0.87$ $\beta = -0.27$

Abweichung der Stundenaxe vom Himmelpol x und y , Seite 48

Indexfehler des Positionskreises $k = +1.17 + 0.113 (t - 1895)$

Biegung des Fernrohres $\mu = +0.23 + 0.023 (t - 1895)$

Collimationsfehler des Fernrohres $C = -0.07$

Neigung der Declinationsaxe gegen die Stundenaxe $i = +0.11$

Die Coëfficienten zur Berechnung der Aufstellungsfehler finden sich in Theil IV Seite 111 in abgekürzter Form und ausführliche Tafeln sind handschriftlich vorhanden.

Triangulation zwischen helleren Sternen der beiden Sternhaufen im Perseus.

Einige einleitende Bemerkungen über diese Triangulation und die genäherten Oerter der beobachteten Sterne finden sich schon auf Seite 4 dieser Abhandlung und es werden jetzt die einzelnen Messungen mit ihren Reductionen erfolgen. Dieselben sind nach laufenden Nummern geordnet und dahinter steht die Bezeichnung der beiden mit einander verbundenen Sterne nach dem Verzeichniss auf Seite 4

Distanzmessungen.

Tag	Sternzeit	Bar.	Th.	<i>t</i>	<i>N</i>	<i>O</i>	<i>N - O</i>	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand
Nr. 1 ga															
1800		h m	mm	o	mm	mm	mm	S							S
91 Oct. 15	19 58.0	744	+ 15	+ 15.5	21.47	21.50	- 0.03	41.7333	- 50	+ 4	- 5	- 52	+ 203	+ 23	41.7456
92 Sept. 18	22 40.3	51	+ 8	+ 10.8	39	66	- 0.27	7465	- 59	+ 4	- 41	- 36	+ 153	+ 33	7519
Oct. 7	20 8.6	38	+ 12	+ 13.4	44	72	- 0.28	7370	- 59	+ 4	- 42	- 35	+ 200	+ 26	7464
96 Febr. 13	6 29.9	56	0	+ 0.9	20	12	+ 0.08	7299	- 44	+ 4	+ 12	- 3	+ 185	- 38	7415
Nr. 2 gb															
91 Oct. 15	20 7.5	744	+ 15	+ 15.5	21.47	21.50	- 0.03	40.9561	- 58	+ 1	- 4	- 51	+ 230	+ 22	40.9701
92 Oct. 7	20 22.1	38	+ 12	+ 13.2	43	72	- 0.29	9623	- 57	+ 1	- 43	- 43	+ 145	+ 26	9652
94 März 23	8 45.2	57	+ 6	+ 8.3	34	20	+ 0.14	9581	- 58	+ 1	+ 21	- 27	+ 257	- 29	9746
96 Febr. 13	6 57.4	56	0	+ 0.7	19	12	+ 0.07	9558	- 56	+ 1	+ 10	- 2	+ 204	- 36	9679
Nr. 3 ge															
91 Oct. 15	20 37.0	744	+ 15	+ 15.4	21.47	21.50	- 0.03	24.2999	- 59	- 5	- 3	- 30	+ 94	+ 13	24.3009
92 Oct. 7	20 46.6	38	+ 12	+ 13.0	43	72	- 0.29	3137	- 51	- 5	- 27	- 25	+ 104	+ 16	3149
94 März 23	8 55.7	57	+ 6	+ 8.2	33	20	+ 0.13	2971	- 51	- 5	+ 12	- 16	+ 181	- 18	3074
96 Febr. 17	6 57.0	60	- 1	- 0.6	17	12	+ 0.05	2984	- 51	+ 3	+ 4	+ 1	+ 122	- 22	3041
Nr. 4 gd															
91 Oct. 15	20 49.0	744	+ 15	+ 15.4	21.47	21.50	- 0.03	23.9844	- 59	0	- 3	- 29	+ 128	+ 13	23.9894
92 Oct. 7	21 7.6	38	+ 12	+ 12.8	43	71	- 0.28	9955	- 51	0	- 24	- 34	+ 122	+ 16	9984
94 März 23	9 11.2	57	+ 6	+ 8.1	33	20	+ 0.13	9955	- 53	0	+ 11	- 15	+ 90	- 17	9971
96 Febr. 17	7 8.0	60	- 1	- 0.6	17	12	+ 0.05	9864	- 44	0	+ 4	+ 1	+ 93	- 22	9896
Nr. 5 eg															
93 März 29	9 9.0	749	+ 7	+ 9.0	21.35	21.22	+ 0.13	14.0699	- 30	- 3	+ 7	- 10	+ 50	- 10	14.0703
94 Jan. 24	7 46.1	52	- 2	- 0.5	19	09	+ 0.10	0818	- 10	- 1	+ 5	+ 1	+ 54	- 12	0835
März 24	8 25.3	56	+ 7	+ 8.5	34	34	0.00	0786	- 10	- 1	0	- 9	+ 52	- 13	0805
Nr. 6 gf															
91 Oct. 17	20 40.9	747	+ 10	+ 12.3	21.42	21.50	- 0.08	20.1390	- 35	- 2	- 6	- 20	+ 83	+ 10	20.1420
93 März 29	9 18.0	49	+ 7	+ 8.8	35	22	+ 0.13	1444	- 36	- 3	+ 10	- 14	+ 90	- 14	1477
94 März 24	8 36.3	56	+ 6	+ 8.3	34	34	0.00	1476	- 36	- 3	0	- 13	+ 74	- 15	1486
96 Febr. 13	6 46.9	56	0	+ 0.8	20	12	+ 0.08	1486	- 28	- 2	+ 6	- 1	+ 59	- 18	1502
Nr. 7 gh															
91 Oct. 17	20 51.9	747	+ 10	+ 12.1	21.42	21.50	- 0.08	9.8538	- 3	+ 3	- 3	- 10	+ 41	+ 5	9.8571
94 Jan. 24	8 6.1	52	- 2	- 0.6	17	09	+ 0.08	8638	- 13	+ 2	+ 3	0	+ 32	- 8	8656
März 24	6 49.8	56	+ 6	+ 8.0	33	20	+ 0.13	8602	- 13	+ 2	+ 5	- 6	+ 35	- 7	8618
Nr. 8 gi															
91 Oct. 17	21 11.9	748	+ 10	+ 11.8	21.41	21.50	- 0.09	23.7374	- 59	+ 4	- 8	- 23	+ 102	+ 12	23.7402
94 Jan. 24	8 21.1	52	- 2	- 0.7	17	09	+ 0.08	7491	- 51	+ 4	+ 7	+ 1	+ 70	- 20	7502
März 24	9 1.3	56	+ 5	+ 7.9	33	20	+ 0.13	7529	- 51	+ 4	+ 11	- 15	+ 74	- 17	7525
Nr. 9 gh															
91 Oct. 17	21 30.4	748	+ 10	+ 11.5	21.40	21.50	- 0.10	26.3105	- 46	+ 3	- 10	- 24	+ 120	+ 13	26.3161
94 März 18	9 19.0	54	0	+ 0.7	19	10	+ 0.09	3156	- 53	- 5	+ 9	- 1	+ 77	- 20	3163
24	9 9.3	56	+ 5	+ 7.8	33	34	- 0.01	3139	- 53	- 5	- 1	- 16	+ 76	- 19	3121

Tag	Sternzeit	Bar.	Th.	t	N	O	N-O	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand	R. S.
Nr. 10 gl																
	h m	mm	o	o	mm	mm	mm	s							s	
90 Oct. 28	20 50.0	752 + 3	+ 3	+ 5.4	21.28	21.14	+ 0.14	24 0601	- 59	- 1	+ 12	- 10	+ 83	+ 9	24.0635	2 2
91 März 20	9 4.5	52 + 3	+ 3	+ 4.7	27	11	+ 0.16	0519	- 51	- 1	+ 14	- 9	+ 200	- 18	0654	3 3
94 März 26	8 23.5	49 + 8	+ 8	+ 10.2	37	18	+ 0.19	0563	- 59	- 1	+ 18	- 20	+ 163	- 17	0647	3 3
Nr. 11 gm																
91 Oct. 28	21 0.0	752 + 3	+ 3	+ 5.3	21.28	21.14	+ 0.14	42.2936	- 50	- 5	+ 22	- 18	+ 138	+ 15	42.3038	2 2
94 März 20	9 18.0	52 + 3	+ 3	+ 4.6	27	11	+ 0.16	2779	- 59	- 5	+ 25	- 15	+ 378	- 33	3070	3 3
94 März 26	8 39.5	49 + 7	+ 7	+ 9.8	37	18	+ 0.19	2806	- 59	- 5	+ 29	- 33	+ 302	- 29	3011	3 3
Nr. 12 gn																
91 Oct. 20	22 39.8	738 + 10	+ 10	+ 11.6	21.40	21.50	- 0.10	36.7791	- 54	+ 4	- 14	- 34	+ 128	+ 18	36.7839	3 3
94 März 26	8 53.0	56 + 5	+ 5	+ 8.0	33	18	+ 0.15	7795	- 60	+ 4	+ 21	- 24	+ 258	- 26	7968	3 3
95 Nov. 16	22 37.5	48 + 12	+ 12	+ 13.2	43	34	+ 0.09	7875	- 63	+ 3	+ 13	- 39	+ 130	+ 3	7922	3 2
Nr. 13 go																
91 Oct. 28	21 13.5	752 + 3	+ 3	+ 5.1	21.27	21.14	+ 0.13	44.2550	- 44	- 4	+ 21	- 18	+ 230	+ 16	44.2751	2 2
94 März 21	7 45.1	52 + 6	+ 6	+ 8.1	33	20	+ 0.13	2776	- 57	- 5	+ 21	- 29	+ 158	- 33	2831	2 2
94 März 29	9 0.5	53 + 9	+ 9	+ 11.0	39	22	+ 0.17	2780	- 57	- 5	+ 28	- 39	+ 150	- 30	2827	2 3
Nr. 14 gp																
91 Oct. 28	21 23.0	752 + 3	+ 3	+ 4.8	21.27	21.14	+ 0.13	56.5701	- 48	- 1	+ 27	- 22	+ 268	+ 22	56.5947	2 2
94 März 21	7 54.6	52 + 6	+ 6	+ 8.0	33	20	+ 0.13	5859	- 38	- 1	+ 27	- 36	+ 279	- 42	6048	2 2
94 März 29	9 15.0	53 + 8	+ 8	+ 10.6	38	22	+ 0.16	5747	- 38	- 1	+ 33	- 48	+ 313	- 38	5968	2 3
Nr. 15 ab																
91 Oct. 28	21 35.0	752 + 3	+ 3	+ 4.6	21.26	21.14	+ 0.12	14.9481	- 9	+ 1	+ 7	- 5	+ 55	+ 6	14.9536	2 2
94 März 15	6 47.4	57 + 0	+ 0	+ 2.5	23	18	+ 0.05	9517	- 14	+ 1	+ 3	- 3	+ 43	- 11	9536	3 3
95 Nov. 19	21 18.0	56 + 3	+ 3	+ 5.7	28	08	+ 0.20	9505	- 25	+ 1	+ 11	- 7	+ 59	0	9544	2 3
95 Nov. 21	21 11.6	57 + 2	+ 2	+ 2.5	23	18	+ 0.05	9493	- 25	+ 1	+ 3	- 3	+ 61	0	9530	2 2
95 Nov. 23	21 10.7	45 - 1	- 1	+ 0.3	19	04	+ 0.15	9500	- 25	+ 1	+ 8	0	+ 61	- 1	9544	3 3
Nr. 16 ac																
91 Oct. 28	21 48.5	752 + 3	+ 3	+ 4.3	21.26	21.14	+ 0.12	19.0533	- 23	- 1	+ 8	- 7	+ 85	+ 7	19.0602	2 2
94 März 18	8 56.0	54 + 0	+ 0	+ 1.1	20	10	+ 0.10	0571	- 23	- 1	+ 7	- 2	+ 93	- 15	0630	3 3
95 März 15	6 58.4	57 + 0	+ 0	+ 2.1	22	18	+ 0.04	0627	- 38	- 1	+ 3	- 3	+ 82	- 15	0655	3 3
Nr. 17 ad																
91 Oct. 29	21 56.9	756 + 3	+ 3	+ 5.0	21.27	21.11	+ 0.16	23.9662	- 59	+ 1	+ 14	- 10	+ 90	+ 8	23.9706	2 3
94 März 12	8 13.7	46 + 7	+ 7	+ 9.1	35	42	- 0.07	9646	- 51	+ 1	- 6	- 18	+ 159	- 20	9711	2 3
95 März 15	7 11.4	57 + 0	+ 0	+ 1.9	22	18	+ 0.04	9633	- 44	+ 1	+ 3	- 4	+ 125	- 19	9695	3 3
Nr. 18 ae																
91 Oct. 13	22 50.5	741 + 10	+ 10	+ 11.2	21.39	21.49	- 0.10	30.7139	- 51	- 4	- 11	- 28	+ 103	+ 17	30.7165	2 3
91 Oct. 29	21 43.4	56 + 3	+ 3	+ 5.3	27	11	+ 0.16	7048	- 56	+ 5	+ 18	- 13	+ 129	+ 11	7142	2 3
95 März 15	7 24.9	57 + 0	+ 0	+ 1.7	21	18	+ 0.03	7038	- 69	+ 5	+ 3	- 4	+ 166	- 24	7115	3 3
96 März 13	7 32.9	56 - 1	- 1	+ 0.5	19	12	+ 0.07	7040	- 69	+ 4	+ 8	- 1	+ 175	- 28	7129	2 3
Nr. 19 ap																
92 Oct. 18	22 21.8	751 + 8	+ 8	+ 11.5	21.39	21.66	- 0.27	98.0265	- 43	0	- 10	- 86	+ 383	+ 78	98.0587	2 3
92 Oct. 11	19 51.1	46 + 7	+ 7	+ 11.2	39	70	- 0.31	0131	- 43	0	- 11	- 88	+ 541	+ 57	0587	3 3
93 März 12	7 17.2	46 + 7	+ 7	+ 9.5	36	42	- 0.06	0206	- 43	0	- 2	- 75	+ 457	- 82	0461	2 3
93 März 28	8 15.3	52 + 8	+ 8	+ 9.3	36	22	+ 0.14	0122	- 43	0	+ 5	- 73	+ 525	- 70	0466	2 2
95 Nov. 21	21 25.6	57 + 2	+ 2	+ 2.4	23	18	+ 0.05	0113	- 43	0	+ 2	- 19	+ 452	0	0505	2 2
Nr. 20 be																
91 Oct. 29	22 9.9	756 + 2	+ 2	+ 4.8	21.27	21.11	+ 0.16	17.0808	- 7	- 1	+ 10	- 7	+ 57	+ 6	17.0866	2 3
93 März 12	8 25.2	46 + 7	+ 7	+ 8.6	34	42	- 0.08	0842	- 15	- 1	- 5	- 12	+ 119	- 14	0914	2 3
95 März 10	9 51.9	50 + 13	+ 13	+ 15.5	47	48	- 0.01	0690	- 17	- 1	- 1	- 21	+ 176	- 9	0817	3 3
Nr. 21 bd																
91 Oct. 29	22 20.4	756 + 2	+ 2	+ 4.5	21.26	21.11	+ 0.15	31.5891	- 70	- 1	+ 18	- 11	+ 92	+ 11	31.5930	2 3
93 März 12	8 33.7	46 + 7	+ 7	+ 8.5	34	42	- 0.08	5910	- 67	- 1	- 9	- 21	+ 204	- 26	5990	2 3
95 März 10	10 7.4	50 + 13	+ 13	+ 15.2	46	48	- 0.02	5736	- 63	- 1	- 2	- 38	+ 353	- 17	5968	3 3

Tag	Sternzeit	Bar.	Th.	t	N	O	N-O	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand
Nr. 22 bh															
1800		h m	mm	o	mm	mm	mm	s							s
91 Oct. 29	22 27.4	757	+ 2	+ 4.4	21.26	21.11	+ 0.15	40.4506	- 62	+ 1	+ 22	- 15	+ 153	+ 14	40.4619
93 März 12	8 43.7	46	+ 7	+ 8.3	33	42	- 0.09	4438	- 53	+ 1	- 13	- 28	+ 268	- 33	4580
95 Apr. 10	10 37.9	50	+ 13	+ 14.5	46	48	- 0.02	4250	- 55	+ 1	- 3	- 47	+ 339	- 22	4463
Nov. 19	22 24.0	56	+ 2	+ 4.8	27	08	+ 0.19	4411	- 54	+ 1	+ 28	- 16	+ 153	+ 1	4524
Nr. 23 bi															
91 Oct. 30	20 37.5	761	+ 1	+ 2.5	21.23	21.13	+ 0.10	48.1643	- 65	- 3	+ 18	- 10	+ 257	+ 17	48.1857
94 März 21	8 6.1	52	+ 6	+ 7.7	32	20	+ 0.12	1759	- 46	- 3	+ 21	- 30	+ 247	- 36	1912
95 Nov. 16	21 12.5	48	+ 12	+ 13.8	45	34	+ 0.11	1721	- 71	- 3	+ 20	- 53	+ 222	+ 4	1840
19	22 37.0	56	+ 2	+ 4.6	27	08	+ 0.19	1739	- 71	- 3	+ 34	- 18	+ 187	+ 1	1869
21	21 34.6	57	+ 2	+ 2.3	23	18	+ 0.05	1792	- 71	- 3	+ 9	- 9	+ 214	0	1932
Nr. 24 ed															
91 Oct. 30	20 53.6	761	+ 1	+ 2.4	21.23	21.13	+ 0.10	17.8493	- 11	+ 3	+ 6	- 4	+ 61	+ 6	17.8554
94 März 21	8 14.6	52	+ 6	+ 7.6	32	20	+ 0.12	8491	- 20	+ 3	+ 8	- 11	+ 76	- 13	8534
95 Apr. 11	11 24.3	51	+ 8	+ 9.4	36	38	- 0.02	8269	- 26	+ 3	- 1	- 14	+ 245	- 9	8467
Nr. 25 ee															
91 Oct. 30	21 19.0	761	+ 1	+ 2.3	21.23	21.13	+ 0.10	17.6493	- 6	- 3	+ 6	- 4	+ 52	+ 6	17.6544
94 März 21	8 24.1	52	+ 5	+ 7.4	32	20	+ 0.12	6628	- 23	- 3	+ 7	- 10	+ 116	- 13	6702
95 Oct. 24	21 57.9	35	+ 2	+ 4.3	25	11	+ 0.14	6598	- 32	- 2	+ 8	- 6	+ 51	+ 7	6624
Nr. 26 eh															
91 Oct. 30	21 28.5	761	+ 1	+ 2.3	21.23	21.13	+ 0.10	25.7470	- 47	+ 4	+ 9	- 5	+ 121	+ 9	25.7561
94 März 21	8 36.1	52	+ 5	+ 7.2	31	20	+ 0.11	7466	- 53	+ 4	+ 10	- 15	+ 140	- 19	7533
95 Oct. 24	22 7.9	35	+ 2	+ 4.2	26	11	+ 0.15	7503	- 60	+ 4	+ 11	- 9	+ 105	+ 11	7565
Nr. 27 ei															
91 Oct. 30	21 43.0	761	+ 1	+ 2.2	21.22	21.13	+ 0.09	36.5951	- 3	- 2	+ 12	- 6	+ 214	+ 13	36.6179
94 März 21	8 46.1	52	+ 5	+ 7.0	31	20	+ 0.11	6145	- 57	- 2	+ 15	- 21	+ 149	- 27	6202
95 Oct. 31	21 2.7	53	+ 3	+ 3.9	26	09	+ 0.17	6028	- 69	- 1	+ 23	- 12	+ 196	+ 12	6177
Nr. 28 de															
91 Oct. 30	22 1.0	761	+ 1	+ 2.0	21.22	21.13	+ 0.09	9.9335	- 3	+ 1	+ 3	- 2	+ 29	+ 3	9.9368
94 März 23	8 17.7	57	+ 6	+ 8.6	34	20	+ 0.14	9378	- 13	+ 1	+ 5	- 7	+ 41	- 7	9398
95 Oct. 31	21 14.7	53	+ 3	+ 3.8	26	09	+ 0.17	9348	- 5	+ 1	+ 6	- 3	+ 51	+ 3	9401
Nr. 29 df															
91 Nov. 2	22 24.9	760	+ 2	+ 4.6	21.26	21.19	+ 0.07	20.3792	- 38	+ 2	+ 5	- 8	+ 71	+ 7	20.3831
94 März 23	8 28.7	57	+ 5	+ 8.5	34	20	+ 0.14	3821	- 38	+ 2	+ 10	- 14	+ 144	- 15	3910
95 Oct. 31	21 26.2	53	+ 3	+ 3.7	25	19	+ 0.16	3838	- 33	+ 2	+ 11	- 6	+ 73	+ 7	3892
Nr. 30 ef															
91 Nov. 2	22 44.9	760	+ 2	+ 4.2	21.26	21.19	+ 0.07	15.8965	- 3	+ 2	+ 4	- 6	+ 48	+ 4	15.9014
93 März 22	7 50.3	55	+ 6	+ 6.8	31	21	+ 0.10	8999	- 3	+ 2	+ 6	- 9	+ 85	- 12	9069
95 Oct. 31	21 37.2	53	+ 3	+ 3.6	25	09	+ 0.16	8893	- 17	+ 2	+ 10	- 5	+ 47	+ 5	8935
Nr. 31 eh															
91 Nov. 3	20 31.9	754	+ 1	+ 3.2	21.24	21.19	+ 0.05	22.0055	- 53	0	+ 4	- 6	+ 131	+ 7	22.0138
93 März 22	8 2.3	55	+ 5	+ 6.6	30	21	+ 0.09	0188	- 53	0	+ 7	- 11	+ 65	- 16	0180
95 Oct. 31	21 55.2	53	+ 2	+ 3.4	25	09	+ 0.16	0076	- 41	0	+ 12	- 7	+ 88	+ 7	0135
Nr. 32 el															
91 Nov. 3	21 23.4	754	+ 1	+ 2.4	21.23	21.19	+ 0.04	33.4391	- 74	+ 1	+ 5	- 7	+ 142	+ 10	33.4468
93 März 24	7 54.7	57	+ 7	+ 9.5	36	29	+ 0.07	4415	- 70	+ 1	+ 9	- 26	+ 190	- 25	4494
95 Nov. 16	22 53.5	48	+ 12	+ 13.0	43	34	+ 0.09	4492	- 63	+ 1	+ 11	- 35	+ 116	+ 3	4525
Nr. 33 fl															
91 Nov. 3	20 41.9	754	+ 1	+ 2.9	21.24	21.19	+ 0.05	25.0934	- 52	- 1	+ 5	- 6	+ 143	+ 7	25.1030
93 März 22	8 13.3	55	+ 5	+ 6.4	30	21	+ 0.09	0938	- 52	- 1	+ 8	- 13	+ 111	- 19	0972
95 Nov. 16	23 3.5	48	+ 12	+ 13.0	43	34	+ 0.09	0951	- 51	- 1	+ 8	- 26	+ 88	+ 2	0971

Tag	Sternzeit	Bar.	Th.	t	N	O	N-O	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand	R. S.
								Nr. 34	fm							
00																
93	Nov. 3	21 11.4	754 + 1	+ 2.6	21.23	21.19	+ 0.04	37.7636	- 54	+ 4	+ 6	- 8	+ 140	+ 11	37.7735	2 2
93	März 22	8 42.3	55 + 5	+ 5.8	29	21	+ 0.08	7596	- 54	+ 4	+ 11	- 17	+ 243	- 28	7755	2 2
95	Nov. 16	21 24.5	48 + 12	+ 13.7	44	34	+ 0.10	7654	- 65	+ 3	+ 14	- 41	+ 156	+ 3	7724	2 2
	19	23 11.0	50 + 2	+ 4.2	26	08	+ 0.18	7655	- 65	+ 3	+ 25	- 13	+ 133	+ 1	7739	2 3
	25	21 37.7	45 - 1	+ 0.3	19	16	+ 0.03	7669	- 65	+ 3	+ 4	- 1	+ 158	- 2	7766	3 3
								Nr. 35	hi							
91	Nov. 3	21 37.4	754 + 1	+ 2.4	21.23	21.19	+ 0.04	14.2427	- 10	- 4	+ 2	- 3	+ 62	+ 4	14.2476	2 2
95	Nov. 25	22 58.2	54 - 2	- 0.4	17	16	+ 0.01	2538	- 22	- 4	+ 1	0	+ 48	- 1	2560	3 3
	27	22 48.3	49 - 1	+ 6.1	18	16	+ 0.02	2443	- 22	- 4	+ 1	0	+ 49	- 1	2466	3 3
								Nr. 36	hk							
1	Nov. 5	21 8.6	760 0	+ 2.3	21.23	21.14	+ 0.09	18.7873	- 27	+ 4	+ 6	- 3	+ 101	+ 4	18.7958	2 2
93	März 23	7 29.4	55 + 9	+ 9.8	37	29	+ 0.08	7991	- 26	+ 3	+ 6	- 14	+ 71	- 15	8016	3 2
96	an. 27	7 36.4	60 - 2	- 1.7	15	00	+ 0.15	8059	- 34	+ 3	+ 8	+ 2	+ 74	- 16	8094	2 2
								Nr. 37	hl							
91	Nov. 5	21 21.6	760 0	+ 2.2	21.22	21.14	+ 0.08	28.5245	- 45	0	+ 8	- 5	+ 86	+ 7	28.5296	2 2
93	März 23	7 38.4	55 + 8	+ 9.6	36	29	+ 0.07	5334	- 53	- 1	+ 7	- 22	+ 147	- 21	5391	3 2
95	Nov. 23	22 10.7	46 - 2	- 0.4	17	04	+ 0.13	5371	- 64	- 1	+ 13	+ 1	+ 86	- 1	5404	3 3
								Nr. 38	hn							
92	opt. 18	22 6.3	752 + 11	+ 11.2	21.39	21.66	- 0.27	37.8488	- 54	+ 3	- 38	- 34	+ 128	+ 31	37.8524	2 3
93	März 28	8 3.8	52 + 8	+ 9.7	37	22	+ 0.15	8453	- 54	+ 3	+ 21	- 29	+ 236	- 26	8604	2 3
94	an. 24	5 27.6	52 - 1	+ 0.1	18	09	+ 0.09	8541	- 52	- 3	+ 13	0	+ 137	- 57	8579	2 2
								Nr. 39	ik							
91	ov. 5	21 32.6	760 0	+ 2.0	21.22	21.14	+ 0.08	9.2919	- 16	+ 4	+ 3	- 2	+ 36	+ 2	9.2946	2 2
93	März 23	8 0.9	55 + 8	+ 9.2	35	29	+ 0.06	2921	- 17	- 5	+ 2	- 7	+ 57	- 7	2944	3 2
96	an. 27	7 45.4	60 - 2	- 1.8	14	00	+ 0.14	2909	- 6	- 4	+ 5	+ 1	+ 56	- 8	2953	2 2
								Nr. 40	il							
91	ov. 5	21 44.6	760 0	+ 1.9	21.22	21.14	+ 0.08	35.1424	- 62	- 2	+ 10	- 6	+ 103	+ 9	35.1476	2 2
93	März 23	8 10.9	55 + 8	+ 9.0	35	29	+ 0.06	1456	- 65	- 3	+ 8	- 25	+ 171	- 26	1516	3 2
95	ov. 14	22 57.5	46 + 7	+ 8.6	34	28	+ 0.06	1511	- 57	- 2	+ 6	- 24	+ 98	+ 4	1536	3 3
								Nr. 41	io							
91	ov. 5	21 56.6	760 0	+ 1.7	21.21	21.14	+ 0.07	27.3635	- 50	+ 2	+ 7	- 4	+ 140	+ 7	27.3737	2 2
93	März 23	8 22.9	55 + 8	+ 8.7	34	29	+ 0.05	3670	- 56	- 6	+ 5	- 19	+ 146	- 20	3720	3 2
94	an. 24	7 23.6	52 - 1	- 0.4	17	09	+ 0.08	3683	- 56	- 6	+ 8	+ 1	+ 132	- 22	3745	2 2
								Nr. 42	kl							
92	ct. 21	21 23.4	739 + 3	+ 5.6	21.28	21.22	+ 0.06	30.3839	- 66	+ 2	+ 7	- 14	+ 96	+ 15	30.3879	3 3
93	März 23	8 44.4	55 + 7	+ 8.3	34	29	+ 0.05	3891	- 66	+ 2	+ 6	- 20	+ 144	- 23	3934	3 2
95	ov. 23	22 23.2	46 - 2	- 0.6	17	04	+ 0.13	3943	- 69	+ 2	+ 16	+ 1	+ 90	- 2	3981	3 3
								Nr. 43	kn							
91	ov. 7	20 44.8	756 0	+ 2.2	21.22	21.24	- 0.02	30.9498	- 69	+ 1	- 2	- 7	+ 89	+ 6	30.9516	3 3
93	März 23	9 1.4	55 + 7	+ 8.0	33	29	+ 0.04	9388	- 69	+ 1	+ 5	- 25	+ 237	- 23	9514	3 2
94	an. 24	7 1.6	52 - 1	- 0.4	17	09	+ 0.08	9520	- 69	+ 1	+ 9	+ 1	+ 133	- 25	9570	2 2
								Nr. 44	ko							
91	ov. 7	20 54.3	756 0	+ 2.1	21.22	21.24	- 0.02	19.2726	- 27	- 5	- 1	- 3	+ 170	+ 4	19.2864	3 3
93	März 23	9 10.4	55 + 7	+ 7.9	33	29	+ 0.04	2819	- 27	- 5	+ 3	- 13	+ 144	- 15	2906	3 2
94	an. 24	7 13.1	52 - 1	- 0.4	17	09	+ 0.08	2838	- 27	- 5	+ 6	+ 1	+ 133	- 16	2930	2 2
								Nr. 45	lm							
91	ov. 7	21 4.3	756 0	+ 2.0	21.22	21.24	- 0.02	18.4617	- 21	+ 1	- 1	- 3	+ 58	+ 4	18.4655	3 3
93	März 24	8 8.2	57 + 7	+ 9.2	35	29	+ 0.06	4611	- 21	+ 1	+ 4	- 14	+ 115	- 14	4682	2 2
94	an. 24	6 43.6	52 - 1	- 0.3	17	09	+ 0.08	4629	- 21	+ 1	+ 5	0	+ 86	- 15	4685	2 2

Tag	Sternzeit	Bar.	Th.	t	N	O	N—O	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand
1800															
93 März 24	h m	mm	o	o	mm	mm	mm	Nr. 46	l n						
93 März 24	8 17.7	757	+ 7	+ 9.0	21.35	21.29	+ 0.06	15.8371	— 3	+ 3	+ 4	— 11	+ 71	— 12	15.8423
95 Nov. 27	21 21.3	49	— 1	+ 0.7	19	16	+ 0.03	8401	— 17	+ 2	+ 2	— 1	+ 79	— 1	8465
96 Jan. 27	7 53.9	60	— 2	— 1.8	14	00	+ 0.14	8270	— 17	+ 3	+ 9	+ 2	+ 93	— 13	8347
								Nr. 47	l o						
92 Apr. 5	9 6.1	746	+ 15	+ 18.0	21.52	21.52	0.00	39.3363	— 52	+ 3	0	— 57	+ 118	— 24	39.3351
93 März 27	8 0.0	54	+ 6	+ 7.5	32	29	+ 0.03	3326	— 52	+ 3	+ 4	— 24	+ 112	— 31	3338
95 Nov. 23	22 34.7	46	— 2	— 0.7	17	04	+ 0.13	3238	— 58	+ 3	+ 17	+ 2	+ 133	— 1	3334
								Nr. 48	mn						
91 Nov. 7	21 56.8	756	0	+ 1.3	21.21	21.24	— 0.03	16.9993	— 7	0	— 2	— 2	+ 56	+ 4	17.0042
93 März 24	8 30.2	57	+ 7	+ 8.8	35	29	+ 0.06	17.0081	— 15	0	+ 4	— 12	+ 64	— 13	0109
94 Jan. 24	6 30.6	52	— 1	— 0.2	18	09	+ 0.09	0061	— 15	0	+ 6	0	+ 50	— 13	0089
								Nr. 49	mp						
91 Nov. 7	22 10.8	755	0	+ 1.2	21.20	21.24	— 0.04	38.0000	— 54	0	— 6	— 4	+ 147	+ 9	38.0092
93 März 27	7 49.5	54	+ 6	+ 7.7	32	14	+ 0.18	0081	— 54	0	+ 25	— 24	+ 108	— 26	0110
94 Jan. 24	6 12.6	52	— 1	— 0.1	18	09	+ 0.09	0137	— 54	0	+ 13	0	+ 116	— 31	0181
95 Nov. 23	22 54.7	46	— 2	— 1.0	16	04	+ 0.12	0000	— 65	0	+ 17	+ 3	+ 129	— 1	0083
96 Jan. 27	8 4.4	60	— 3	— 1.9	14	00	+ 0.14	0083	— 65	0	+ 19	+ 6	+ 112	— 32	0123
								Nr. 50	no						
92 Apr. 5	9 22.6	746	+ 15	+ 17.5	21.51	21.52	— 0.01	31.1551	— 69	— 3	— 1	— 44	+ 158	— 19	31.1573
93 März 27	8 9.0	54	+ 6	+ 7.2	31	14	+ 0.17	1546	— 69	— 3	+ 19	— 18	+ 113	— 22	1566
95 Nov. 16	22 11.0	48	+ 12	+ 13.3	44	34	+ 0.10	1594	— 59	— 2	+ 11	— 33	+ 93	+ 2	1606
								Nr. 51	np						
92 Apr. 5	9 40.1	746	+ 14	+ 16.9	21.50	21.52	— 0.02	24.7106	— 48	+ 4	— 2	— 34	+ 73	— 15	24.7084
	7 9 19.7	43	+ 14	+ 15.2	46	50	— 0.04	7165	— 50	— 4	— 4	— 30	+ 75	— 14	7138
93 März 27	8 20.0	54	+ 6	+ 7.1	31	14	+ 0.17	7177	— 50	— 4	+ 15	— 14	+ 83	— 17	7190
94 Jan. 24	5 58.6	52	— 1	— 0.1	18	09	+ 0.09	7124	— 52	+ 5	+ 8	0	+ 84	— 20	7149
96 Febr. 13	7 43.4	56	— 1	+ 0.4	19	12	+ 0.07	7113	— 51	— 3	+ 6	— 1	+ 88	— 23	7129
								Nr. 52	op						
93 März 27	8 31.5	754	+ 5	+ 6.8	21.31	21.14	+ 0.17	25.1853	— 52	— 3	+ 15	— 14	+ 177	— 18	25.1958
	30 8 46.9	45	+ 7	+ 10.1	37	34	+ 0.03	1830	— 52	— 3	+ 3	— 20	+ 188	— 17	1929
94 Jan. 24	5 27.6	52	— 1	+ 0.1	18	09	+ 0.09	1968	— 52	— 3	+ 8	0	+ 87	— 21	1987
								Nr. 53	ai						
92 Oct. 11	20 10.6	746	+ 7	+ 10.4	21.38	21.70	— 0.32	55.5330	— 32	— 1	— 65	— 46	+ 344	+ 34	55.5564
	21 21 46.9	39	+ 3	+ 5.3	28	22	+ 0.06	5333	— 32	— 1	+ 12	— 23	+ 248	+ 26	5613
93 März 12	7 30.2	46	+ 7	+ 9.3	36	42	— 0.06	5478	— 39	— 1	— 12	— 41	+ 226	— 45	5566
	28 8 25.3	52	+ 8	+ 9.0	35	22	+ 0.13	5436	— 32	— 1	+ 26	— 40	+ 236	— 39	5586
95 Nov. 23	23 37.5	47	— 2	— 1.5	15	04	+ 0.11	5336	— 28	— 1	+ 22	— 7	+ 187	— 2	5507
								Nr. 54	af						
92 Oct. 11	20 24.1	746	+ 7	+ 10.0	21.37	21.70	— 0.33	44.3038	— 64	+ 3	— 54	— 35	+ 148	+ 26	44.3062
	21 22 0.4	39	+ 3	+ 5.0	27	22	+ 0.05	2995	— 70	— 5	+ 8	— 18	+ 148	+ 21	3079
93 März 12	7 40.7	46	+ 7	+ 9.2	35	42	— 0.07	2984	— 64	+ 3	— 11	— 32	+ 258	— 36	3102
	28 8 35.8	52	+ 7	+ 8.8	35	22	+ 0.13	2852	— 70	— 5	+ 21	— 31	+ 324	— 30	3061
95 Nov. 25	22 36.2	54	— 2	— 0.3	17	16	+ 0.01	2938	— 48	— 4	+ 2	— 1	+ 151	— 3	3035
								Nr. 55	fi						
92 Oct. 11	20 38.6	746	+ 7	+ 9.7	21.36	21.70	— 0.34	43.4241	— 70	+ 1	— 56	— 35	+ 202	+ 26	43.4299
	24 20 31.5	41	+ 2	+ 5.2	27	11	+ 0.16	4148	— 70	+ 1	+ 26	— 18	+ 203	+ 18	4308
93 März 12	7 53.7	46	+ 7	+ 9.0	35	42	— 0.07	4386	— 70	+ 1	— 11	— 31	+ 126	— 36	4365
	29 7 54.0	49	+ 9	+ 10.9	39	22	+ 0.17	4360	— 70	+ 1	+ 27	— 38	+ 125	— 30	4375
96 Jan. 27	8 16.4	60	— 3	— 1.9	14	00	+ 0.14	4276	— 43	+ 1	+ 23	+ 7	+ 135	— 36	4363
								Nr. 56	fp						
92 Oct. 11	20 51.6	746	+ 7	+ 9.3	21.36	21.70	— 0.34	64.9121	— 38	+ 1	— 81	— 48	+ 355	+ 39	64.9349
	26 21 23.5	52	+ 2	+ 4.0	26	19	+ 0.07	9071	— 38	+ 1	+ 17	— 21	+ 324	+ 26	9300
93 März 29	8 7.5	49	+ 9	+ 10.6	38	22	+ 0.16	9193	— 38	+ 1	+ 38	— 55	+ 255	— 45	9349
95 Nov. 27	21 49.8	49	— 1	+ 0.6	19	16	+ 0.03	9155	— 21	+ 1	+ 7	— 3	+ 298	— 7	9430
96 Febr. 17	8 8.0	60	— 2	— 0.7	17	12	+ 0.05	9082	— 21	+ 1	+ 12	+ 4	+ 259	— 38	9279

Tag	Sternzeit		Bar.	Th.	<i>t</i>	<i>N</i>	<i>O</i>	<i>N - O</i>	Messung	Th. F.	Gang	Oc.-St.	Temp.	Refr.	Aberr.	Abstand	R. S.
	h	m	mm	o	o	mm	mm	mm	Nr. 57	ip						S	
									s								
91 Oct.	21	20 27.4	739	+ 4	+ 6.4	21.30	21.22	+ 0.08	48.2955	- 46	- 5	+ 14	- 31	+ 192	+ 23	48.3102	3 3
	26	20 31.0	51	+ 3	+ 4.9	27	19	+ 0.08	2930	- 46	- 5	+ 14	- 24	+ 196	+ 19	3134	3 3
	25	22 30.4	55	- 2	- 0.8	16	00	+ 0.16	2937	- 38	- 4	+ 28	+ 4	+ 178	- 3	3102	2 2
91 März	29	8 21.5	49	+ 8	+ 10.3	38	22	+ 0.16	2807	- 38	+ 4	+ 28	- 51	+ 311	- 33	3028	2 3
90 Jan.	27	8 28.4	60	- 3	- 2.0	14	00	+ 0.14	2923	- 71	+ 4	+ 25	+ 10	+ 337	- 40	3188	2 2
									Nr. 58	im							
92 Oct.	21	20 41.9	739	+ 3	+ 6.3	21.30	21.22	+ 0.08	51.9539	- 38	+ 1	+ 15	- 26	+ 147	+ 24	51.9662	3 3
	26	20 50.5	51	+ 2	+ 4.6	27	19	+ 0.08	9541	- 49	+ 1	+ 15	- 19	+ 149	+ 21	9659	3 3
	25	22 43.4	55	- 2	- 1.1	16	00	+ 0.16	9450	- 49	+ 1	+ 30	+ 5	+ 154	- 4	9587	2 2
91 März	29	8 30.0	49	+ 8	+ 10.1	37	22	+ 0.15	9426	- 49	+ 1	+ 29	- 41	+ 315	- 35	9646	2 3
90 Jan.	27	8 45.9	60	- 3	- 2.1	14	00	+ 0.14	9319	- 41	+ 1	+ 27	+ 9	+ 362	- 43	9629	2 2
									Nr. 59	bf							
92 Oct.	21	20 59.4	739	+ 3	+ 6.0	21.29	21.22	+ 0.07	49.9592	- 46	+ 1	+ 13	- 24	+ 145	+ 23	49.9704	3 3
	26	21 8.0	51	+ 2	+ 4.2	26	19	+ 0.07	9550	- 46	+ 1	+ 13	- 17	+ 159	+ 19	9679	3 3
	25	22 58.9	56	- 3	- 1.4	15	00	+ 0.15	9548	- 46	+ 1	+ 27	+ 6	+ 157	- 3	9690	2 2
91 März	29	8 43.5	49	+ 8	+ 9.7	37	22	+ 0.15	9499	- 46	+ 1	+ 27	- 39	+ 369	- 33	9778	2 3
91 Nov.	27	22 7.3	49	- 1	+ 0.4	19	16	+ 0.03	9727	- 53	0	+ 5	- 2	+ 154	- 5	9826	3 3
									Nr. 60	hp							
5 Apr.	10	9 21.9	749	+ 14	+ 16.2	21.48	21.48	0.00	54.0079	- 37	0	0	- 52	+ 252	- 32	54.0210	3 3
	24	21 19.4	35	+ 2	+ 4.9	27	11	+ 0.16	0066	- 37	0	+ 31	- 16	+ 237	+ 23	0304	2 2
	31	22 43.2	53	+ 3	+ 4.0	26	09	+ 0.17	9977	- 37	0	+ 33	- 13	+ 259	+ 18	0237	2 2
									Nr. 61	bm							
91 Oct.	31	20 25.2	753	+ 4	+ 4.2	21.26	21.09	+ 0.17	82.7633	- 37	+ 3	+ 51	- 28	+ 278	+ 28	82.7928	2 2
	14	22 33.0	46	+ 7	+ 8.6	34	28	+ 0.06	7726	- 37	+ 3	+ 18	- 55	+ 288	+ 10	7953	3 3
	16	20 55.0	48	+ 12	+ 13.9	45	34	+ 0.11	7683	- 37	+ 3	+ 33	- 92	+ 276	+ 7	7873	2 2
	25	21 56.7	54	- 2	+ 0.2	18	16	+ 0.02	7585	- 37	+ 4	+ 6	- 1	+ 292	- 5	7844	3 3
	27	22 20.8	49	- 1	+ 0.3	19	16	+ 0.03	7622	- 37	+ 3	+ 9	- 2	+ 283	- 7	7871	3 3

Aus vorstehenden Messungen ergeben sich nachfolgende Mittelwerthe ausgedrückt in Scalentheilen und in Bogensekunden, sowie die aus der inneren Uebereinstimmung berechneten wahrscheinlichen Fehler einer Abstandsmessung.

Die bei der Rechnung dieser Beobachtungen verwandten systematischen Correctionen und der Werth für einen Scalenthail sind nicht die auf Seite 40 unter II und 44 angegebenen, sondern gehören einer etwas älteren Zeit an. Die systematischen Correctionen sind nämlich die in der betreffenden Tabelle mit B I bezeichneten und der Scalenwerth ist der entsprechende $S = 40.01586 \dots 1,602232$.

In Anbetracht der hierüber noch stattfindenden Unsicherheit ist es aber nicht als erforderlich betrachtet worden, auf Grund der kleinen bei Abfassung des Druckmanuscripts eingeführten Aenderungen die umständlichen Reductionen und Auflösungen der Bedingungs-gleichungen noch einmal von Neuem auszuführen, weil das Endresultat dadurch wohl kaum um nennenswerthe Beträge abgeändert worden wäre. Rechnet man z. B. die grösste aller gemessenen Abstände nämlich *ap* noch einmal mit den als endgültig betrachteten Reductionswerthen, so erhält man

$$98.0521 = 3923.78 - 0.07 = 3923.71$$

während nebenstehende ältere Rechnung ergab

$$3923.64 + 0.03 = 3923.67$$

Die Sterngruppe erleidet dadurch also in der weitesten Ausdehnung eine Aenderung von 0.04 und die Entfernung der äussersten Sterne von der Mitte ändert sich um eine Grösse 0.02, die sich durch die Messungen mit dem Heliometer garnicht verbürgen lässt.

Abstandsmessungen im Perseus.

Nr.	Sterne	Epoche 1890 +	Scalen- theile	Zahl	Bogen- secunden	Syst. Corr.	Corrig. Abstand	w. F.	
								einer Beob.	des Mittels
								±	±
1	ag	3.35	41.7464	4	1670.52	+ 0.11	1670.63	0.115	0.058
2	bg	3.71	40.9695	4	1639.43	+ 0.10	1639.53	0.107	0.054
3	cg	3.73	24.3068	4	972.66	+ 0.14	972.80	0.162	0.081
4	dg	3.73	23.9936	4	960.13	+ 0.14	960.27	0.131	0.066
5	eg	3.85	14.0781	3	563.35	+ 0.22	563.57	0.153	0.088
6	fg	3.85	20.1471	4	806.20	+ 0.17	806.37	0.095	0.048
7	gh	3.36	9.8615	3	394.62	+ 0.23	394.85	0.115	0.066
8	gi	3.36	23.7476	3	950.28	+ 0.14	950.42	0.176	0.101
9	gk	3.41	26.3148	3	1053.01	+ 0.12	1053.13	0.064	0.037
10	gl	3.42	24.0645	3	962.96	+ 0.14	963.10	0.026	0.015
11	gm	3.42	42.3040	3	1692.83	+ 0.11	1692.94	0.080	0.046
12	gn	3.97	36.7910	3	1472.22	+ 0.10	1472.32	0.177	0.102
13	go	3.42	44.2803	3	1771.92	+ 0.12	1772.04	0.122	0.070
14	gp	3.42	56.5988	3	2264.85	+ 0.08	2264.93	0.144	0.083
15	ab	4.74	14.9538	5	598.39	+ 0.22	598.61	0.016	0.007
16	ac	3.74	19.0629	3	762.82	+ 0.18	763.00	0.072	0.042
17	ad	3.41	23.9704	3	959.20	+ 0.14	959.34	0.022	0.013
18	ae	3.74	30.7138	4	1229.04	+ 0.11	1229.15	0.058	0.029
19	ap	3.57	98.0521	5	3923.64	+ 0.03	3923.67	0.169	0.076
20	bc	3.43	17.0866	3	683.74	+ 0.20	683.94	0.131	0.076
21	bd	3.43	31.5963	3	1264.35	+ 0.11	1264.46	0.082	0.047
22	bh	4.05	40.4547	4	1618.83	+ 0.10	1618.93	0.184	0.092
23	bi	4.74	48.1882	5	1928.29	+ 0.12	1928.41	0.104	0.046
24	cd	3.77	17.8518	3	714.36	+ 0.20	714.56	0.123	0.071
25	ce	3.95	17.6623	3	706.77	+ 0.20	706.97	0.213	0.123
26	ch	3.95	25.7553	3	1030.62	+ 0.13	1030.75	0.047	0.027
27	ci	3.95	36.6186	3	1465.32	+ 0.10	1465.42	0.038	0.022
28	de	3.95	9.9389	3	397.71	+ 0.23	397.94	0.049	0.028
29	df	3.96	20.3878	3	815.84	+ 0.17	816.01	0.112	0.065
30	ef	3.31	15.9006	3	636.28	+ 0.21	636.49	0.182	0.105
31	eh	3.31	22.0151	3	880.95	+ 0.15	881.10	0.068	0.039
32	el	3.31	33.4496	3	1338.52	+ 0.12	1338.64	0.077	0.044
33	fl	3.31	25.0991	3	1004.36	+ 0.13	1004.49	0.091	0.052
34	fm	4.55	37.7744	5	1511.57	+ 0.10	1511.67	0.045	0.020
35	hi	4.55	14.2501	3	570.23	+ 0.22	570.45	0.139	0.080
36	hk	3.71	18.8023	3	752.39	+ 0.18	752.57	0.184	0.106
37	hl	3.66	28.5364	3	1141.91	+ 0.12	1142.03	0.159	0.092
38	hn	3.34	37.8569	3	1514.88	+ 0.10	1514.98	0.111	0.064
39	ik	3.72	9.2948	3	371.94	+ 0.23	372.17	0.013	0.007
40	il	3.65	35.1509	3	1406.59	+ 0.10	1406.69	0.083	0.048
41	io	3.05	27.3734	3	1095.37	+ 0.12	1095.49	0.034	0.020
42	kl	3.98	30.3931	3	1216.21	+ 0.12	1216.33	0.138	0.080
43	kn	3.05	30.9533	3	1238.62	+ 0.12	1238.74	0.086	0.050

Nr.	Sterne	Epoche 1890 +	Scalen- theile	Zahl	Bogen- secunden	Syst. Corr.	Corrig. Abstand	w. F.	
								einer Beob.	des Mittels
								±	±
44	ko	3.05	19.2900	3	771".91	+ 0".18	772".09	0".090	0".052
45	lm	3.05	18.4674	3	738.99	+ 0.19	739.18	0.045	0.026
46	ln	5.07	15.8412	3	633.90	+ 0.21	634.11	0.162	0.093
47	lo	3.19	39.3341	3	1573.99	+ 0.10	1574.09	0.024	0.014
48	mn	3.05	17.0080	3	680.59	+ 0.20	680.79	0.093	0.054
49	mp	4.22	38.0118	5	1521.07	+ 0.10	1521.17	0.208	0.093
50	no	3.79	31.1582	3	1246.82	+ 0.12	1246.94	0.082	0.047
51	np	3.59	24.7138	5	988.94	+ 0.13	989.07	0.206	0.093
52	op	3.52	25.1958	3	1008.23	+ 0.13	1008.36	0.111	0.064
53	ai	3.58	55.5567	5	2223.15	+ 0.09	2223.24	0.211	0.094
54	af	3.58	44.3068	5	1772.97	+ 0.12	1773.09	0.134	0.060
55	fi	3.58	43.4342	5	1738.06	+ 0.11	1738.17	0.192	0.086
56	fp	4.18	64.9357	5	2598.46	0.00	2598.46	0.148	0.066
57	ip	3.56	48.3111	5	1933.21	+ 0.12	1933.33	0.157	0.070
58	im	3.56	51.9637	5	2079.37	+ 0.11	2079.48	0.123	0.055
59	bf	3.53	49.9735	5	1999.73	+ 0.12	1999.85	0.172	0.077
60	hp	5.64	54.0250	3	2161.86	+ 0.10	2161.96	0.131	0.076
61	bm	5.88	82.7894	5	3312.89	- 0.02	3312.87	0.121	0.054

Theilt man dieses Verzeichniss der wahrscheinlichen Fehler einer Distanzmessung nach der Grösse der Abstände in Gruppen ab, nämlich folgendermassen

Gruppe	Abstände	Zahl	Mittl. Abstd.	w. F. 1 Beob.	$I = \sqrt{\frac{4000}{s}}$	Product v I	$\Pi = \sqrt[4]{\frac{4000}{s}}$	Product v II
1	bis 600"	6	483"	± 0".081	2.88	± 0".23	1.70	± 0.14
2	600—800	10	768	0.130	2.28	0.30	1.51	0.20
3	800—1000	9	988	0.111	2.01	0.22	1.42	0.16
4	1000—1200	6	1055	0.084	1.95	0.16	1.40	0.10
5	1200—1400	6	1255	0.087	1.79	0.16	1.34	0.12
6	1400—1600	7	1494	0.098	1.64	0.16	1.28	0.13
7	1600—1800	7	1700	0.134	1.53	0.21	1.24	0.17
8	1800—2400	7	2083	0.149	1.39	0.21	1.18	0.18
9	2400—4000	3	3277	0.146	1.11	0.16	1.05	0.15

so zeigt sich hier wieder dieselbe Erscheinung wie bei der Beobachtung des Löwenbogens, (Siehe vorliegende Abhandlung Seite 27), dass die w. F. einer Distanzmessung nicht im Verhältniss der Quadratwurzel der Bogenlänge anwachsen, sondern dass die grösseren Abstände verhältnissmässig genauer als nach diesem Bildungsgesetz ausfallen. Auch hier würde wieder die Reduction mit dem theoretisch nicht begründeten Factor $\sqrt[4]{\frac{4000}{s}}$ eine bessere Uebereinstimmung hervorbringen.

Um aber die ohnehin schon mühsame Ausgleichung der Beobachtungen nicht noch mehr zu erschweren, ist wie früher bei der Praesepe kein Unterschied in der Genauigkeit der Messungen der einzelnen Distanzen angenommen worden.

Bei der Ausgleichung der Abstände ist wie früher schon bemerkt, in der Weise vorgegangen, dass zunächst zwei grosse über die ganze Gruppe gehende nebeneinanderliegende Vierecke mit ihren Diagonalen und zwei lange die äussersten Punkte verbindenden Linien für sich ausgeglichen sind und nachdem auf diese Weise sechs Punkte durch dreizehn Linien gegeneinander festgelegt waren sind die Bedingungsgleichungen für die übrigen Punkte nachträglich ausgeglichen worden.

Auf diese Weise erreicht man einerseits den Vortheil einer bedeutenden Vereinfachung der Ausgleichung gegenüber der ungeheueren Arbeit, welche die Ausgleichung der Praesepe-Triangulation veranlasste und ferner kommen dabei auch die in grösserer Anzahl veranstalteten Messungen der Grundlinien mehr zur Geltung.

Ausgleichung der Hauptfigur.

Die vorläufigen Werthe für die Abstände der Sterne sind aus den genäherten Rectascensionen und Declinationen für 1890 auf Seite 4 dieser Abhandlung durch strenge sphärische Rechnung abgeleitet worden. Sind α_1 und α_2 die Rectascensionen, δ_1 und δ_2 die Declinationen zweier durch eine Distanzmessung miteinander verbundenen Sterne 1 und 2, s der Abstand, p der Positionswinkel, δ das Mittel beider Declinationen, $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ die Verbesserungen der Rectascension und Declination, $x = \Delta\alpha \cos \delta$, $y = \Delta\delta$, Δs die Verbesserung des Abstandes, so hat man die Gleichung (Vergl. Theil IV Seite 129)

$$\Delta s = +x_2 \sin p - x_1 \sin p + y_2 \cos p - y_1 \cos p$$

Ungeachtet der hohen Declination des Perseus konnte $\cos \delta$ für die ganze Gruppe constant angenommen werden, denn die äussersten Declinationen sind

Grösste Declination für Sternpaar Nr. 34	<i>fm</i>	56° 50.8	cos δ 0.5469	
Kleinste	"	41 io 56 21.4	0.5536	+ 0.0067
			Mittel 0.550	

Für Verbesserungen der angenommenen Abstände im Betrage von einer Secunde entstehen in der Ausgleichung also Fehler von höchstens 0.0034 wenn für $\cos \delta$ der Mittelwerth 0.550 in der ganzen Gruppe angenommen wird.

Demnach führt die Ausgleichung des grossen Sechsecks $a b i p m f$ auf folgende 13 Bedingungsgleichungen

Nr.	Sterne	Beob. + syst. Corr.	Vorläuf. Annahme	Beob.-Rechn. <i>n</i>									
1	15 ab	598.61	598.30	+ 0.41	=	- 0.336	<i>x a</i>	+ 0.336	<i>x b</i>	+ 0.942	<i>y a</i>	- 0.942	<i>y b</i>
2	23 bi	1928.41	1928.31	+ 0.10		- 0.999	<i>b</i>	+ 0.999	<i>i</i>	+ 0.049	<i>b</i>	- 0.049	<i>i</i>
3	57 ip	1933.33	1931.86	+ 1.47		- 0.936	<i>i</i>	+ 0.936	<i>p</i>	- 0.351	<i>i</i>	+ 0.351	<i>p</i>
4	49 mp	1521.17	1519.41	+ 1.76		- 0.608	<i>m</i>	+ 0.608	<i>p</i>	+ 0.794	<i>m</i>	- 0.794	<i>p</i>
5	34 fm	1511.67	1513.00	- 1.33		- 0.985	<i>f</i>	+ 0.985	<i>m</i>	- 0.174	<i>f</i>	+ 0.174	<i>m</i>
6	54 af	1773.09	1771.44	+ 1.65		- 0.839	<i>a</i>	+ 0.839	<i>f</i>	- 0.544	<i>a</i>	+ 0.544	<i>f</i>
7	53 ai	2223.24	2222.72	+ 0.52		- 0.955	<i>a</i>	+ 0.955	<i>i</i>	+ 0.296	<i>a</i>	- 0.296	<i>i</i>
8	59 bf	1999.85	1998.39	+ 1.46		- 0.645	<i>b</i>	+ 0.645	<i>f</i>	- 0.764	<i>b</i>	+ 0.764	<i>f</i>
9	58 im	2079.48	2077.86	+ 1.62		- 0.421	<i>i</i>	+ 0.421	<i>m</i>	- 0.907	<i>i</i>	+ 0.907	<i>m</i>
10	56 fp	2598.46	2598.49	- 0.03		- 0.932	<i>f</i>	+ 0.932	<i>p</i>	+ 0.363	<i>f</i>	- 0.363	<i>p</i>
11	19 ap	3923.67	3921.96	+ 1.71		- 1.000	<i>a</i>	+ 1.000	<i>p</i>	- 0.005	<i>a</i>	+ 0.005	<i>p</i>
12	61 bm	3312.87	3312.02	+ 0.85		- 0.841	<i>b</i>	+ 0.841	<i>m</i>	- 0.541	<i>b</i>	+ 0.541	<i>m</i>
13	55 bi	1738.17	1737.84	+ 0.33		- 0.360	<i>f</i>	+ 0.360	<i>i</i>	+ 0.933	<i>f</i>	- 0.933	<i>i</i>

Die Coordinaten eines der 6 Punkte, den man als Ausgangspunkt betrachtet, sind willkürlich, man kann also setzen

$$x_a = 0 \quad y_a = 0$$

und ferner kann man noch annehmen, dass die längste Linie *ap* durch die Ausgleichung des Netzes keine Drehung erfahren soll, da der Positionswinkel *ap* doch noch durch besondere Beobachtungen bestimmt werden muss, es wird daher noch gesetzt

$$y_p = y_a = 0$$

Es bleiben also die Gleichungen

1	+ 0.41	=		+ 0.336	<i>x b</i>							- 0.942	<i>y b</i>
2	+ 0.10		- 0.999	<i>x b</i>	+ 0.999	<i>i</i>	+ 0.049	<i>b</i>				- 0.049	<i>i</i>
3	+ 1.47		- 0.936	<i>i</i>	+ 0.936	<i>p</i>	- 0.351	<i>i</i>					
4	+ 1.76		- 0.608	<i>m</i>	+ 0.608	<i>p</i>	+ 0.794	<i>m</i>					
5	- 1.33		- 0.985	<i>f</i>	+ 0.985	<i>m</i>	- 0.174	<i>f</i>				+ 0.174	<i>m</i>
6	+ 1.65				+ 0.839	<i>f</i>						+ 0.544	<i>f</i>
7	+ 0.52				+ 0.955	<i>i</i>						- 0.296	<i>i</i>
8	+ 1.46		- 0.645	<i>b</i>	+ 0.645	<i>f</i>	- 0.764	<i>b</i>				+ 0.764	<i>f</i>
9	+ 1.62		- 0.421	<i>i</i>	+ 0.421	<i>m</i>	- 0.907	<i>i</i>				+ 0.907	<i>m</i>
10	- 0.03		- 0.932	<i>f</i>	+ 0.932	<i>p</i>	+ 0.363	<i>f</i>					
11	+ 1.71				+ 1.000	<i>p</i>							
12	+ 0.85		- 0.841	<i>b</i>	+ 0.841	<i>m</i>	- 0.541	<i>b</i>				+ 0.541	<i>m</i>
13	+ 0.33		- 0.360	<i>f</i>	+ 0.360	<i>i</i>	+ 0.933	<i>f</i>				- 0.933	<i>i</i>

Aus diesen 13 Gleichungen mit 9 Unbekannten folgen die Endgleichungen, in welchen die gleichlautenden Ziffern links von der Diagonale fortgelassen sind.

	<i>x b</i>	<i>x f</i>	<i>x i</i>	<i>x m</i>	<i>x p</i>	<i>y b</i>	<i>y f</i>	<i>y i</i>	<i>y m</i>	
1	- 1.619	= + 2.234	- 0.416	- 0.998	- 0.707	+ 0.582	- 0.493	+ 0.049	- 0.455	
2	+ 3.548		+ 3.089	- 0.130	- 0.970	- 0.869	- 0.493	+ 0.446	+ 0.336	- 0.171
3	- 1.342			+ 3.093	- 0.177	- 0.876	+ 0.049	+ 0.336	+ 0.043	- 0.382
4	- 0.983				+ 2.224	- 0.370	- 0.455	- 0.171	- 0.382	+ 0.525
5	+ 4.128					+ 3.115		+ 0.338	- 0.329	+ 0.483
6	- 1.956						+ 1.766	- 0.584		- 0.293
7	+ 2.540							+ 1.913	- 0.871	- 0.030
8	- 2.452								+ 1.907	- 0.823
9	+ 3.095									+ 1.778

Die Auflösung der Endgleichungen ergibt die Werthe der Unbekannten

$$\begin{array}{rcl}
 xb & = & + 0.263 \\
 f & + & 1.816 \\
 i & + & 0.346 \\
 m & + & 0.311 \\
 p & + & 1.693
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 yb & = & - 0.342 \\
 f & + & 0.256 \\
 i & - & 0.649 \\
 m & + & 1.156
 \end{array}$$

und die Substitution dieser 9 Verbesserungen in die obenstehenden Bedingungs-
gleichungen giebt

	Beobachtung	Rechnung	Beob.-Rechn.
1	+ 0.41	+ 0.41	0.00
2	+ 0.10	+ 0.10	0.00
3	+ 1.47	+ 1.49	- 0.02
4	+ 1.76	+ 1.77	- 0.01
5	- 1.33	- 1.33	0.00
6	+ 1.65	+ 1.66	- 0.01
7	+ 0.52	+ 0.52	0.00
8	+ 1.46	+ 1.46	0.00
9	+ 1.62	+ 1.62	0.00
10	- 0.03	- 0.02	- 0.01
11	+ 1.71	+ 1.69	+ 0.02
12	+ 0.85	+ 0.85	0.00
13	+ 0.33	+ 0.32	+ 0.01

Die Ausgleichung führt also zu dem überraschenden Resultat, dass die grossen Distanzen überall innerhalb weniger hundertel Secunden dargestellt werden. Nachdem nun die sechs Hauptpunkte fest und unabänderlich miteinander in Verbindung gebracht sind, sind die übrigen Punkte durch eine Ausgleichung zweiter Ordnung einzuschalten.

Die Bedingungsgleichungen der noch übrigbleibenden 48 Abstände lauten in ihrer ursprünglichen Form folgendermaassen

Lfde. Nr.	Abstd. Nr.	Beob. + syst. Corr.	Rechn.	Beob.-Rechn. <i>n</i>								
1	1	1670.63	1670.55	+ 0.08	= - 0.995	<i>x a</i>	+ 0.995	<i>x g</i>	- 0.104	<i>y a</i>	+ 0.104	<i>y g</i>
2	2	1639.53	1639.40	+ 0.13	- 0.893	<i>b</i>	+ 0.893	<i>g</i>	- 0.450	<i>b</i>	+ 0.450	<i>g</i>
3	3	972.80	972.43	+ 0.37	- 0.941	<i>c</i>	+ 0.941	<i>g</i>	- 0.337	<i>c</i>	+ 0.337	<i>g</i>
4	4	960.27	961.66	- 1.39	- 0.916	<i>d</i>	+ 0.916	<i>g</i>	+ 0.401	<i>d</i>	- 0.401	<i>g</i>
5	5	563.57	564.39	- 0.82	- 0.898	<i>e</i>	+ 0.898	<i>g</i>	+ 0.441	<i>e</i>	- 0.441	<i>g</i>
6	6	806.37	807.08	- 0.71	- 0.210	<i>f</i>	+ 0.210	<i>g</i>	+ 0.978	<i>f</i>	- 0.978	<i>g</i>
7	7	394.85	395.28	- 0.43	- 0.287	<i>g</i>	+ 0.287	<i>h</i>	+ 0.958	<i>g</i>	- 0.958	<i>h</i>
8	8	950.42	949.28	+ 1.14	- 0.481	<i>g</i>	+ 0.481	<i>i</i>	+ 0.877	<i>g</i>	- 0.877	<i>i</i>
9	9	1053.13	1051.81	+ 1.32	- 0.758	<i>g</i>	+ 0.758	<i>k</i>	+ 0.653	<i>g</i>	- 0.653	<i>k</i>
10	10	963.10	962.65	+ 0.45	- 0.836	<i>g</i>	+ 0.836	<i>l</i>	- 0.548	<i>g</i>	+ 0.548	<i>l</i>
11	11	1692.94	1691.86	+ 1.08	- 0.783	<i>g</i>	+ 0.783	<i>m</i>	- 0.622	<i>g</i>	+ 0.622	<i>m</i>
12	12	1472.32	1472.12	+ 0.20	- 0.966	<i>g</i>	+ 0.966	<i>n</i>	- 0.257	<i>g</i>	+ 0.257	<i>n</i>
13	13	1772.04	1770.81	+ 1.23	- 0.874	<i>g</i>	+ 0.874	<i>o</i>	+ 0.486	<i>g</i>	- 0.486	<i>o</i>

10	+ 0.45	= - 0.836	<i>x g</i>	+ 0.836	<i>x l</i>	- 0.548	<i>y g</i>	+ 0.548	<i>y l</i>
11	+ 0.12	- 0.783	<i>g</i>	+		- 0.622	<i>g</i>		
12	+ 0.20	- 0.966	<i>g</i>	+ 0.966	<i>n</i>	- 0.257	<i>g</i>	+ 0.257	<i>n</i>
13	+ 1.23	- 0.874	<i>g</i>	+ 0.874	<i>o</i>	+ 0.486	<i>g</i>	- 0.486	<i>o</i>
14	- 0.16	- 0.998	<i>g</i>			+ 0.068	<i>g</i>		
15	- 0.29			+ 0.979	<i>c</i>			- 0.202	<i>c</i>
16	+ 1.25			+ 0.812	<i>d</i>			+ 0.584	<i>d</i>
17	+ 1.00			+ 0.939	<i>e</i>			+ 0.344	<i>e</i>
18	- 0.06			+ 0.801	<i>c</i>			+ 0.598	<i>c</i>
19	+ 0.78			+ 0.458	<i>d</i>			+ 0.889	<i>d</i>
20	- 0.92			+ 0.975	<i>h</i>			+ 0.221	<i>h</i>
21	- 0.11	- 0.045	<i>c</i>	+ 0.045	<i>d</i>	- 0.999	<i>c</i>	+ 0.999	<i>d</i>
22	+ 0.57	- 0.577	<i>c</i>	+ 0.577	<i>e</i>	- 0.817	<i>c</i>	+ 0.817	<i>e</i>
23	- 0.54	- 0.999	<i>c</i>	+ 0.999	<i>h</i>	+ 0.049	<i>c</i>	- 0.049	<i>h</i>
24	+ 0.51	- 0.939	<i>c</i>			+ 0.344	<i>c</i>		
25	- 0.57	- 0.939	<i>d</i>	+ 0.939	<i>e</i>	+ 0.343	<i>d</i>	- 0.343	<i>e</i>
26	- 1.31	- 0.878	<i>d</i>			- 0.479	<i>d</i>		
27	- 0.58	- 0.528	<i>e</i>			- 0.850	<i>e</i>		
28	- 1.39	- 0.703	<i>e</i>	+ 0.703	<i>h</i>	+ 0.711	<i>e</i>	- 0.711	<i>h</i>
29	- 0.38	- 0.978	<i>e</i>	+ 0.978	<i>l</i>	- 0.208	<i>e</i>	+ 0.208	<i>l</i>
30	+ 0.07			+ 0.966	<i>l</i>			- 0.259	<i>l</i>
31	+ 0.79	- 0.603	<i>h</i>			+ 0.798	<i>h</i>		
32	+ 2.11	- 0.912	<i>h</i>	+ 0.912	<i>k</i>	+ 0.410	<i>h</i>	- 0.410	<i>k</i>
33	+ 0.71	- 0.607	<i>h</i>	+ 0.607	<i>l</i>	- 0.795	<i>h</i>	+ 0.795	<i>l</i>
34	+ 0.71	- 0.866	<i>h</i>	+ 0.866	<i>n</i>	- 0.500	<i>h</i>	+ 0.500	<i>n</i>
35	+ 0.25			+ 0.920	<i>k</i>			+ 0.393	<i>k</i>
36	+ 0.51			+ 0.250	<i>l</i>			+ 0.968	<i>l</i>
37	+ 1.07			+ 1.000	<i>o</i>			- 0.026	<i>o</i>
38	+ 1.48	- 0.009	<i>k</i>	+ 0.009	<i>l</i>	- 1.000	<i>k</i>	+ 1.000	<i>l</i>
39	+ 1.42	- 0.509	<i>k</i>	+ 0.509	<i>n</i>	- 0.860	<i>k</i>	+ 0.860	<i>n</i>
40	+ 0.34	- 0.974	<i>k</i>	+ 0.974	<i>o</i>	+ 0.226	<i>k</i>	- 0.226	<i>o</i>
41	- 0.51	- 0.705	<i>l</i>			- 0.709	<i>l</i>		
42	- 0.28	- 0.972	<i>l</i>	+ 0.972	<i>n</i>	+ 0.237	<i>l</i>	- 0.237	<i>n</i>
43	+ 1.10	- 0.469	<i>l</i>	+ 0.469	<i>o</i>	+ 0.883	<i>l</i>	- 0.883	<i>o</i>
44	- 1.09			+ 0.139	<i>n</i>			- 0.990	<i>n</i>
45	+ 1.84	- 0.095	<i>n</i>	+ 0.095	<i>o</i>	+ 0.995	<i>n</i>	- 0.995	<i>o</i>
46	+ 0.50	- 0.843	<i>n</i>			+ 0.539	<i>n</i>		
47	- 0.33	- 0.972	<i>o</i>			- 0.702	<i>o</i>		
48	+ 0.58	- 0.995	<i>h</i>			- 0.104	<i>h</i>		

Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate führt auf nachstehende 18 Gleichungen mit 18 Unbekannten:

18 Gleichungen mit 18 Unbekannten.

<i>n</i>	<i>xc</i>	<i>xd</i>	<i>xe</i>	<i>yg</i>	<i>xh</i>	<i>xk</i>	<i>xl</i>	<i>xn</i>	<i>xo</i>	<i>yc</i>	<i>yd</i>	<i>ye</i>	<i>yg</i>	<i>yh</i>	<i>yk</i>	<i>yl</i>	<i>yn</i>	<i>yo</i>	
-	0.944	+ 4.718	- 0.020	- 0.333	- 0.885	- 0.998				+ 0.712	- 0.045	- 0.471	- 0.317	+ 0.049					
+	4.325	+ 3.381	- 0.882	- 0.839						- 0.045	+ 0.658	+ 0.322	+ 0.367						
+	3.124		+ 4.632	- 0.806	- 0.494	- 0.956				- 0.471	+ 0.322	+ 0.228	+ 0.396	+ 0.500		- 0.203			
-	4.168			+ 9.254	- 0.082	- 0.575	- 0.699	- 0.933	- 0.764	- 0.317	+ 0.367	+ 0.396	- 0.638	+ 0.275	+ 0.195	- 0.158	- 0.218	+ 0.125	
-	6.559				+ 5.827	+ 3.461	- 0.868	- 0.750		+ 0.049		+ 0.500	+ 0.275	+ 0.445	+ 0.374	- 0.483	- 0.433		
+	2.088							- 0.259	- 0.949				+ 0.495	+ 0.374	- 0.280	- 0.009	- 0.438	+ 0.220	
+	0.700							- 0.945	- 0.220				- 0.458	+ 0.483	- 0.009	+ 1.001	+ 0.230	+ 0.414	
+	0.511							+ 3.626	- 0.009				- 0.248	- 0.433	+ 0.438	+ 0.230	+ 0.202	+ 0.095	
+	3.488												+ 0.425	+ 0.220	+ 0.414	+ 0.095	- 0.497		
-	0.310							+ 3.887						- 0.002					
+	1.187									+ 2.208	- 0.998	+ 0.667	- 0.114						
+	0.228									+ 2.637	- 0.118	- 0.161							
+	2.758											+ 2.369	- 0.194	- 0.506		- 0.043	- 0.066	- 0.236	
+	1.740												+ 4.746	+ 3.174	- 0.426	- 0.300	- 0.066		
-	4.253														+ 2.539	- 0.168	- 0.250	- 0.051	
+	3.955															+ 1.000	- 0.740	- 0.051	
+	4.873															+ 4.318	- 0.056	- 0.780	
-	3.273																+ 3.373	- 0.990	+ 2.551

Resultat der Elimination

<i>xc</i>	=	- 0.319
<i>d</i>	=	+ 1.415
<i>e</i>	=	+ 0.845
<i>g</i>	=	- 0.007
<i>h</i>	=	- 0.815
<i>k</i>	=	+ 0.646
<i>l</i>	=	+ 0.316
<i>n</i>	=	- 0.001
<i>o</i>	=	+ 0.931
<i>yc</i>	=	+ 0.325
<i>d</i>	=	+ 0.143
<i>e</i>	=	+ 0.208
<i>g</i>	=	+ 0.347
<i>h</i>	=	+ 0.530
<i>k</i>	=	- 0.998
<i>l</i>	=	+ 0.472
<i>n</i>	=	+ 1.018
<i>o</i>	=	- 0.655

Die Darstellung der einzelnen Abstände gestaltet sich nach Einsetzen vorstehender Werthe folgendermassen:

Nr. der Gleichung	Abstd.	Beob.	Rechn.	Beob.-Rechn.	Nr. der Gleichung	Abstd.	Beob.	Rechn.	Beob.-Rechn.
1	1	+ 0.08	+ 0.03	+ 0.05	25	28	- 0.57	- 0.56	- 0.01
2	2	+ 0.21	+ 0.15	+ 0.06	26	29	- 1.31	- 1.31	0.00
3	3	+ 0.37	+ 0.30	+ 0.07	27	30	- 0.58	- 0.62	+ 0.04
4	4	- 1.39	- 1.38	- 0.01	28	31	- 1.39	- 1.40	+ 0.01
5	5	- 0.82	- 0.83	+ 0.01	29	32	- 0.38	- 0.46	+ 0.08
6	6	- 0.58	- 0.34	- 0.24	30	33	+ 0.07	+ 0.18	- 0.11
7	7	- 0.43	- 0.41	- 0.02	31	35	+ 0.79	+ 0.91	- 0.12
8	8	+ 0.41	+ 0.31	+ 0.10	32	36	+ 2.11	+ 1.96	+ 0.15
9	9	+ 1.32	+ 1.37	- 0.05	33	37	+ 0.71	+ 0.64	+ 0.07
10	10	+ 0.45	+ 0.34	+ 0.11	34	38	+ 0.71	+ 0.95	- 0.24
11	11	+ 0.12	- 0.21	+ 0.33	35	39	+ 0.25	+ 0.20	+ 0.05
12	12	+ 0.20	+ 0.18	+ 0.02	36	40	+ 0.51	+ 0.54	- 0.03
13	13	+ 1.23	+ 1.31	- 0.08	37	41	+ 1.07	+ 0.95	+ 0.12
14	14	- 0.16	+ 0.03	- 0.19	38	42	+ 1.48	+ 1.47	+ 0.01
15	16	- 0.29	- 0.38	+ 0.09	39	43	+ 1.42	+ 1.40	+ 0.02
16	17	+ 1.25	+ 1.23	+ 0.02	40	44	+ 0.34	+ 0.20	+ 0.14
17	18	+ 1.00	+ 0.87	+ 0.13	41	45	- 0.51	- 0.56	+ 0.05
18	20	- 0.06	- 0.06	0.00	42	46	- 0.28	- 0.44	+ 0.16
19	21	+ 0.78	+ 0.78	0.00	43	47	+ 1.10	+ 0.98	+ 0.12
20	22	- 0.92	- 0.68	- 0.24	44	48	- 1.09	- 1.01	- 0.08
21	24	- 0.11	- 0.10	- 0.01	45	50	+ 1.84	+ 1.75	+ 0.09
22	25	+ 0.57	+ 0.58	- 0.01	46	51	+ 0.50	+ 0.55	- 0.05
23	26	- 0.54	- 0.51	- 0.03	47	52	- 0.33	- 0.44	+ 0.11
24	27	+ 0.51	+ 0.41	+ 0.10	48	60	+ 0.58	+ 0.76	- 0.18

Hier stellt sich wieder durchschnittlich eine recht gute Darstellung der einzelnen Abstände heraus, aber doch nicht in dem Maasse wie bei den ganz grossen Abständen im Sechseck. Die durch ihre Grösse etwas auffallenden übrig bleibenden Fehler sind die nachfolgenden:

Lfd. Nr.	Abstand Nr.	Sterne	Abstand	Beob.-Rechn.
6	6	<i>fg</i>	807"	- 0.24
11	11	<i>gm</i>	1692	+ 0.33
20	22	<i>bc</i>	684	- 0.24
34	38	<i>hn</i>	1514	- 0.24

Alle Messungen und Reductionen für diese Sternpaare sind wiederholt geprüft worden, aber es hat sich kein Fehler herausgestellt.

Ordnet man obige 48 Abstände nach ihrer Grösse, so erhält man die Tabelle:

Lfde. Nr.	Abstand Nr.	Abstand	Beob.-Rechn.	Mittel
35	39	372"	+ 0.05	
7	7	395	- 0.02	
25	28	398	- 0.01	- 0.02
5	5	564	+ 0.01	
31	35	570	- 0.12	
42	46	634	+ 0.16	
27	30	636	+ 0.04	
44	48	681	- 0.08	
18	20	684	0.00	
22	25	707	- 0.01	
21	24	715	- 0.01	+ 0.05
41	45	739	+ 0.05	
32	36	753	+ 0.15	
15	16	763	+ 0.09	
40	44	772	+ 0.14	
6	6	806	- 0.24	
26	29	816	0.00	
28	31	881	+ 0.01	
8	8	950	+ 0.10	
16	17	959	+ 0.02	0.00
4	4	960	- 0.01	
10	10	963	+ 0.11	
3	3	973	+ 0.07	
46	51	989	- 0.05	
30	33	1004	- 0.11	
47	52	1008	+ 0.11	
23	26	1030	- 0.03	
9	9	1053	- 0.05	+ 0.02
37	41	1095	+ 0.12	
33	37	1142	+ 0.07	
38	42	1216	+ 0.01	
17	18	1229	+ 0.13	
39	43	1239	+ 0.02	
45	50	1247	+ 0.09	+ 0.06
19	21	1264	0.00	
29	32	1339	+ 0.08	
36	40	1407	- 0.03	
24	27	1465	+ 0.10	
12	12	1472	+ 0.02	- 0.01
34	38	1515	- 0.24	
43	47	1574	+ 0.12	
20	22	1619	- 0.24	
2	2	1640	+ 0.06	
1	1	1671	+ 0.05	
11	11	1693	+ 0.33	- 0.04
13	13	1772	- 0.08	
48	60	2162	- 0.18	
14	14	2265	- 0.19	

Die Mittelwerthe für die einzelnen Gruppen sind nur geringfügig und zeigen mehrere Zeichenwechsel, so dass von einem regelmässigen Zusammenhange mit der Grösse des Abstandes nicht die Rede sein kann. In der letzten etwas weiter gefassten Gruppe wird der Einfluss der beiden letzten gleichlautenden Fehler

durch den dem Abstand 11 entsprechenden nahe aufgehoben. Bildet man in vorstehender Tabelle die Summe der Fehlerquadrate und rechnet daraus den wahrscheinlichen Fehler der Messung einer Linie ohne Rücksicht auf ihre Länge, so erhält man

$$\text{w. F. einer Seitenlänge} = 0.6745 \sqrt{\frac{0.6015}{48-18}} = \pm 0.095$$

Bei der Praesepe-Triangulation hatte sich der Fehler einer im Ganzen ausgeglichenen Linie etwas grösser herausgestellt nämlich ± 0.115 .

Das Gesamtergebnis der Ausgleichung des Sechsecks und der übrigen Figuren und die daraus hervorgehenden Verbesserungen der vorläufig angenommenen Sternörter ist in alphabetischer Reihenfolge

Stern	$x = \Delta\alpha \cos \delta$	$y = \Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
a	0.000	0.000	0.000	0.00
b	+ 0.263	- 0.342	+ 0.032	- 0.34
c	- 0.319	+ 0.325	- 0.039	+ 0.33
d	+ 1.415	+ 0.143	+ 0.171	+ 0.14
e	+ 0.845	+ 0.208	+ 0.102	+ 0.21
f	+ 1.816	+ 0.256	+ 0.220	+ 0.26
g	- 0.007	+ 0.347	- 0.001	+ 0.35
h	- 0.815	+ 0.530	- 0.099	+ 0.53
i	+ 0.346	- 0.649	+ 0.042	- 0.65
k	+ 0.646	- 0.998	+ 0.078	- 1.00
l	+ 0.316	+ 0.472	+ 0.038	+ 0.47
m	+ 0.311	+ 1.156	+ 0.038	+ 1.16
n	- 0.001	+ 1.018	0.000	+ 1.02
o	+ 0.931	- 0.655	+ 0.113	- 0.66
p	+ 1.693	0.000	+ 0.205	0.00

Damit sind also die ausgeglichenen Oerter bezogen auf das Aequinoctium 1890.0 und gültig für eine mittlere Epoche von 1893.75.

	Ort nach Pihl	Verb.	Verbess. Ort	Ort nach Pihl	Verb.	Verbess. Ort
	^h ^m ^s	^s	^s	^o ['] ["]	["]	["]
a	2 9 10.606	0.000	10.606	+ 56 32 34.65	0.00	34.65
b	9 34.850	+ 0.032	34.882	23 11.20	- 0.34	10.86
c	10 40.951	- 0.039	40.912	30 0.44	+ 0.33	0.77
d	10 44.827	+ 0.171	44.998	41 54.39	+ 0.14	54.53
e	11 30.252	+ 0.102	30.354	39 37.60	+ 0.21	37.81
f	12 11.026	+ 0.220	11.246	48 37.80	+ 0.26	38.06
g	12 31.644	- 0.001	31.643	35 28.78	+ 0.35	29.13
h	12 45.347	- 0.099	45.248	29 10.10	+ 0.53	10.63
i	13 26.710	+ 0.042	26.752	21 36.30	- 0.65	35.65
k	14 7.900	+ 0.078	7.978	24 2.40	- 1.00	1.40
l	14 9.260	+ 0.038	9.298	44 17.20	+ 0.47	17.67
m	15 12.650	+ 0.038	12.688	53 1.30	+ 1.16	2.46
n	15 24.140	0.000	24.140	41 47.10	+ 1.02	48.12
o	15 38.400	+ 0.113	38.513	21 7.60	- 0.66	6.94
p	17 4.910	+ 0.205	5.115	32 55.20	0.00	55.20

An diese Oerter ist nun noch das Ergebniss der Orientierung der ganzen Gruppe durch Festlegung der Richtung der langen Linie ap aus Beobachtungen am Heliometer selbst und an Meridiankreisen anzubringen.

Richtung der Linie ap aus Beobachtungen am Göttinger Heliometer.

Tag	Sternzeit	Bar. Th.	Stunden-Winkel	Axe	Messung	k	λ	J	Refr.	Aberr.	1890.0	Mittel
93 März 30	^h 8 ^m 9.9	^{mm} 745 + ^o 7	^h + 5 ^m 56	v	89° 43.35	+ 0.98	+ 0.23	+ 1.90	- 1.94	- 0.37	89° 44.15	43.02
	8 26.9		6 13		269 41.42	0.98	+ 0.05	+ 1.90	- 2.10	- 0.37	41.88	
Apr. 1	8 41.2	748 + 11	+ 6 28	v	89 42.92	+ 0.98	- 0.12	+ 1.91	- 2.21	- 0.36	43.12	42.82
	8 58.7		6 45		269 42.65	0.98	- 0.30	+ 1.92	- 2.37	- 0.36	42.52	
5	9 10.4	753 + 9	+ 6 57	v	89 43.78	+ 0.98	- 0.45	+ 1.93	- 2.52	- 0.36	43.36	42.99
	9 23.9		7 10		269 43.25	0.98	- 0.54	+ 1.94	- 2.65	- 0.36	42.62	
94 Oct. 27	20 39.0	734 + 12	- 5 35	f	269 42.57	+ 1.15	- 0.08	- 1.89	+ 1.70	- 1.85	41.60	41.94
	21 2.0		5 12		89 43.18	1.15	+ 0.16	- 1.88	+ 1.52	- 1.85	42.28	
Nov. 1	20 36.9	754 + 6	- 5 37	f	269 44.77	+ 1.15	- 0.10	- 1.89	+ 1.80	- 1.86	43.87	43.77
	21 2.4		5 11		89 44.50	1.15	+ 0.17	- 1.88	+ 1.59	- 1.86	43.67	
Dec. 3	22 20.3	749 + 2	- 3 53	f	269 46.20	+ 1.15	+ 0.99	- 1.85	+ 1.06	- 1.81	45.74	45.73
	22 52.8		3 21		89 46.05	1.16	+ 1.28	- 1.84	+ 0.88	- 1.81	45.72	
											Mittel	43.38

Aus den ausgeglichenen Heliometer-Distanzen folgt, vorläufig noch orientirt nach den angenommenen Oertern von Oertel und Pihl (vergl. Seite 74)

Aequinoctium 1890

$$\text{Stern } a \quad 2^{\text{h}} 9^{\text{m}} 10.606 \quad + 56^{\circ} 32' 34.65''$$

$$p \quad 2 17 \quad 5.115 \quad 56 32 55.20$$

$$\text{also } \Delta\alpha = + 7^{\text{m}} 54.509 \quad \Delta\delta = + 20.55'' \quad \delta = + 56^{\circ} 32' 44.93''$$

und daraus ergibt sich der berechnete Positionswinkel der Linie ap gegen einen durch die Mitte des Bogens gelegten Stundenkreis zu $89^{\circ} 42.00'$. Der aus den Messungen am Heliometer hervorgehende Positionswinkel ist dagegen wie oben

$$89^{\circ} 43.38'$$

es würde demnach der ganzen Gruppe eine Drehung von $89^{\circ} 43.38' - 89^{\circ} 42.00' = + 1.38$ gegeben werden. Wenn der der Mitte der Gruppe nahegelegene Stern g als Drehungsmittelpunkt angenommen wird, ergeben sich hieraus die an die Oerter der übrigen Sterne noch anzubringenden Verbesserungen in Rectascension und Declination nach den Ausdrücken

$$\begin{aligned} d.\Delta\alpha &= \rho \cos p \sec \delta . dp = \Delta\delta \sec \delta . dp \\ d.\Delta\delta &= -\rho \sin p dp = -\Delta\alpha \cos \delta . dp. \end{aligned}$$

Nach Berücksichtigung dieser aus der Drehung herrührenden Verbesserungen handelt es sich dann darum die ganze innerlich ausgeglichene Ortsbestimmung der Sterne am Himmel festzulegen und dazu bot sich vorläufig als einziger Weg die Benutzung der in den Krüger'schen Zonen Helsingfors-Gotha enthaltenen Oerter der Sterne. Ich habe deshalb die am Heliometer bestimmten Oerter

damit verglichen, aber Unterschiede gefunden, die mir viel Mühe und weitläufige Rechnungen verursacht haben, da sich sehr erhebliche Unterschiede zeigten. Dadurch erschien meine durch Positionswinkel-Messungen erhaltene Orientirung der Gruppe als sehr zweifelhaft, indem sich namentlich in den Declinationen ein fortschreitender Gang in den Abweichungen zeigte. Nachdem diese Unterschiede später ihre Erklärung gefunden haben, wird es überflüssig sein, nun noch eine Schilderung der vielfachen Bemühungen und Nachrechnungen der Beobachtungen zu geben, dagegen werde ich zum Schlusse dieser Abhandlung die Zonenörter einer Prüfung unterziehen und zeigen, dass darin unerwartet grosse Unregelmässigkeiten stecken.

Die Oerter der beiden Sterne α und p waren schon früher am Reichenbach'schen Meridiankreise beobachtet worden, da aber dieses schon aus dem Jahre 1819 stammende Instrument ungeachtet vieler von mir veranlasster Verbesserungen, die den Gebrauch zum Theil ausserordentlich bequemer gestaltet haben (z. B. electriche Beleuchtung der Microscope usw.) doch die Declination nicht sehr genau liefert, weil die veraltete Einrichtung des Albidaden-Niveau am Höhenkreise ohne erhebliche Kosten nicht abgeändert werden konnte, so war es wünschenswerth, noch anderweitige Bestimmungen der Sternörter zu erhalten und auf meine an Geheimrath Förster gerichtete Bitte hat Dr. Battermann am Berliner Meridiankreise im Jahre 1897 Rectascensions- und Declinations-Unterschiede der Sterne α und p beobachtet, die eine Prüfung meiner Positionswinkel-Messungen liefern. Als aber damit die Oerter Helsingfors-Gotha immer noch sehr schlecht dargestellt wurden, wurden dann auf eine abermalige Bitte sämtliche 15 Sterne meiner Triangulation im folgenden Jahre je zweimal am Berliner Meridiankreise beobachtet.

Das gesammte Material der Beobachtungen an Meridiankreisen ist das folgende:

**Beobachtungen am Reichenbach'schen Meridiankreise in Göttingen
bezogen auf das mittlere Aequinoctium 1890.0.**

Tag	Kreis	Fäden	α		p		Beobachter	
			AR.	Decl.	AR.	Decl.		
1891	Oct. 28	O	15	$2^{\text{h}} 9^{\text{m}} 10.58^{\text{s}}$	$+ 56^{\circ} 32' 33.1''$	$2^{\text{h}} 17^{\text{m}} 5.05^{\text{s}}$	$+ 56^{\circ} 32' 52.8''$	Buschbaum
	30	O	21	10.59	30.7	4.98	51.2	
	Nov. 7	O	21	10.63	35.6	5.04	53.7	
1892	Nov. 26	W	16	10.40	34.4	5.12	51.4	Grossmann
	Nov. 18	W	11	10.70	32.8	5.17	50.1	
1895	Nov. 21	W	11	10.73	34.0	5.19	49.5	

Daraus folgt im Mittel

$$\begin{array}{l} \text{Epoche 1893.16} \quad \left. \begin{array}{l} 2^{\text{h}} 9^{\text{m}} 10.593^{\text{s}} \\ \Delta\alpha = + 7^{\text{m}} 54.511^{\text{s}} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} + 56^{\circ} 32' 33.6'' \\ \Delta\delta = + 18.1'' \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} 2^{\text{h}} 17^{\text{m}} 5.104^{\text{s}} \\ \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} + 56^{\circ} 32' 51.7'' \\ \end{array} \right| \end{array}$$

Wenn auch diesen Beobachtungen nur ein geringer Genauigkeitsgrad zukommt, so darf doch nicht verschwiegen werden, dass späterhin am Göttinger Meridiankreise noch verschiedene Verbesserungen angebracht sind, nämlich zu Anfang 1893 eine neue Einrichtung zur Einstellung bei Nadirbeobachtungen, 1897 Verbesserung des Alhidaden-Niveau, Abschleifen der Stahlstange am Microscoprahmen zur Aufhängung des Niveau, und dass dadurch besonders unter der geschickten Benutzung des Instruments durch Dr. Schwassmann die Resultate später an Genauigkeit sehr gewonnen haben.

Beobachtungen am Meridiankreise in Berlin.

Aequinoctium 1897.0.

1897	Oct. 29	Klemme O	$\Delta\alpha = + 7^m 54.953^s$	$\Delta\delta = + 0' 17.48''$
	Nov. 7		54.881	17.58
	14	W	54.866	17.00
	19		54.963	16.78
Mittel 1897.86			$\Delta\alpha = + 7^m 54.916^s$	$\Delta\delta = + 0' 17.21''$
Reduction für Präcession			-0.410	+ 2.67
Unterschied 1890.0			+ 7 54.506	+ 0 19.88

Dazu kommen noch die Beobachtungen im folgenden Jahre

Mittl. Aequinoctium 1898.0.

Stern	Tag	Klemme	α	Mittel	δ	Mittel
a	1898 Nov. 6	O	2 ^h 9 ^m 43.662 ^s	43.706	+ 56° 34' 50.29"	50.40
	Dec. 6	W	43.749		50.51	
b	Nov. 4	O	2 10 8.003	7.998	+ 56 25 26.61	26.52
	Dec. 7	W	7.993		26.43	
c	Oct. 29	O	2 11 14.128	14.135	+ 56 32 15.49	15.78
	Dec. 20	W	14.142		16.08	
d	Oct. 28	O	2 11 18.279	18.306	+ 56 44 9.62	9.62
	Dec. 21	W	18.332		9.62	
e	Nov. 8	O	2 12 3.705	3.688	+ 56 41 52.14	52.32
	Dec. 29	W	3.671		52.49	
f	Nov. 12	O	2 12 44.718	44.693	+ 56 50 52.35	52.28
	Dec. 27	W	44.668		52.20	
g	Nov. 13	O	2 13 4.980	4.982	+ 56 37 43.73	43.82
	Dec. 24	W	4.983		43.92	
h	98 Nov. 20	O	2 13 18.532	18.510	+ 56 31 24.58	24.73
	99 Jan. 1	W	18.488		24.88	
i	Nov. 13	O	2 14 0.069	0.046	+ 56 23 49.20	49.44
	Dec. 24	W	0.024		49.68	

Stern	Tag		Klemme	α			Mittel	δ			Mittel
				^h	^m	^s		^s	[°]	[']	
k	1898	Nov. 12	O	2	14	41.325	41.319	+ 56	26	14.47	14.62
		Dec. 27	W			41.313					
l		Nov. 8	O	2	14	42.659	42.712	+ 56	46	30.86	30.84
		Dec. 29	W			42.766					
m		Oct. 28	O	2	15	46.304	46.306	56	55	14.96	15.27
		Dec. 21	W			46.309					
n		Oct. 29	O	2	15	57.687	57.685	56	54	0.51	0.70
		Dec. 20	W			57.683					
o		Nov. 4	O	2	16	11.923	11.921	56	23	19.82	19.98
		Dec. 7	W			11.919					
p		Nov. 6	O	2	17	38.714	38.724	56	35	6.78	7.02
		Dec. 6	W			38.733					

Hieraus folgt zunächst für die Orientierungslinie ap

Epoche 1898.9 Aeq. 1898.0	+ 7 ^m 55.018	+ 0'16.62
Red. auf 1890	- 0.469	+ 3.05
1890.0	+ 7 54.549	+ 0 19.67

Man hat demnach für das Aequinoctium 1890.0 aus Meridiankreis-Beobachtungen

Göttingen 1893.2	+ 7 ^m 54.511	= + 7117.66	+ 18.13	4 Buschbaum, 3 Grossmann
Berlin 97.9	54.508	7117.62	19.88	4 Battermann
" 98.9	54.549	7118.24	19.67	2 Battermann

und daraus den Positionswinkel ap und die mit Rücksicht auf verschiedene Erwägungen angenommenen Gewichte

Göttingen 1893.2	89° 44.12	Gew. 0.5
Berlin 1897.9	42.58	4
1898.9	42.77	2

Mittel mit Gewichten I 89 42.76

Dagegen haben die directen Messungen des Positionswinkels am Heliometer ergeben

Epoche 1894.06 II 89° 43.38

Betrachtet man die Bestimmungen an Meridiankreisen und am Heliometer als gleichwerthig, so hat man im Mittel

$$\frac{1}{2} (I + II) \quad 89^\circ 43.07$$

und demnach die Drehung der Gruppe gegen die Annahme Oertel-Pihl

$$dp = + 1.07$$

Die dieser Drehung um den Stern g entsprechenden Verbesserungen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ sind an die Oerter auf Seite 74 anzubringen.

Damit erhält man für 1890.0

Ausgangswerthe					Verbesserte aber noch nicht endgültige Oerter					
a	2	9	10.606	— 0.007	+ 56° 32' 34.65"	+ 0.52	2	9	10.599	+ 56° 32' 35.17"
b		9	34.882	— 0.028	23 10.86	+ 0.45		9	34.854	23 11.31
c		10	40.912	— 0.012	30 0.77	+ 0.28		10	40.900	30 1.05
d		10	44.998	+ 0.015	41 54.53	+ 0.27		10	45.013	41 54.80
e		11	30.354	+ 0.009	39 37.81	+ 0.16		11	30.363	39 37.97
f		12	11.246	+ 0.029	48 38.06	+ 0.05		12	11.275	48 38.11
g		12	31.643		35 29.13			12	31.643	35 29.13
h		12	45.248	— 0.014	29 10.63	— 0.03		12	45.234	29 10.60
i		13	26.752	— 0.031	21 35.65	— 0.14		13	26.721	21 35.51
k		14	7.978	— 0.026	24 1.40	— 0.25		14	7.952	24 1.15
l		14	9.298	+ 0.019	44 17.67	— 0.26		14	9.317	44 17.41
m		15	12.688	+ 0.039	53 2.46	— 0.41		15	12.727	53 2.05
n		15	24.140	+ 0.014	41 48.12	— 0.44		15	24.154	41 47.68
o		15	38.513	— 0.033	21 6.94	— 0.48		15	38.480	21 6.46
p		17	5.115	— 0.006	32 55.20	— 0.70		17	5.109	32 54.50

Um diese Oerter auf das System des Fundamental-Catalogs der Astronomischen Gesellschaft zu beziehen, sind die Beobachtungen von Dr. Battermann am Berliner Meridiankreise zu verwenden, die zu diesem Zwecke ebenfalls auf das Aequinoctium von 1890.0 zu reduciren sind. Damit ergibt sich mit Berücksichtigung des 8fachen der Präcession für die in der Mitte liegende Epoche 1894.0 die Vergleichung mit obigen noch nicht endgültigen Göttinger Oertern

	Berlin Aeq. 1898.0	Epoche 1898.9	E. B. für — 5.15 Jahre	Berlin 1890	Berlin minus Göttingen
a	2 ^h 9 ^m 43.706 ^s	— 33.250 ^s	+ 56° 34' 50.40"	2 ^h 9 ^m 10.456 ^s	+ 56° 32' 34.89"
b	10 7.998	— 33.222	25 26.52	9 34.776	23 11.17
c	11 14.135	— 33.326	32 15.78	10 40.809	30 0.84
d	11 18.306	— 33.395	44 9.62	10 44.911	41 54.71
e	12 3.688	— 33.428	41 52.32	11 30.260	39 37.69
f	12 44.693	— 33.519	50 52.88	12 11.174	48 38.51
g	13 4.982	— 33.465	37 43.82	12 31.517	35 29.59
h	13 18.510	— 33.443	31 24.73	12 45.067	29 10.58
i	14 0.046	— 33.442	23 49.44	13 26.604	21 35.55
k	14 41.319	— 33.495	26 14.62	14 7.824	24 1.00
l	14 42.712	— 33.611	46 30.84	14 9.120	44 17.13
m	15 46.306	— 33.725	55 15.27	15 12.588	53 2.03
n	15 57.685	— 33.672	44 0.70	15 24.013	41 47.58
o	16 11.921	— 33.568	23 19.98	15 38.353	21 6.96
p	17 38.724	— 33.719	35 7.02	17 5.005	32 54.56
				Mittel	— 0.125 0.00

Bringt man diesen Unterschied -0.125 0.00 in Rechnung, so erhält man als Resultat der heliometrischen Triangulation bezogen auf eine Orientierung der Linie *ap* durch Meridiankreisbeobachtungen in Berlin und Göttingen und durch Messungen des Positionswinkels am Göttinger Heliometer die Tabelle A.

A				Epoche 1893.75 Aequinoctium 1890.0				B				C			
				Berlin Meridkr. minus Göttingen Heliometer								Berlin minus Göttingen			
	h	m	s												
a	2	9	10.474	+ 56°	32'	35".17	— 0.02	— 0.3	+ 0.003	— 0.20	10.477	34.97	— 0.02	— 0.1	10.479
b		9	34.729			23 11.31	+ 0.05	— 0.1	+ 0.011	— 0.18	34.740	11.13	+ 0.04	0.0	34.742
c		10	40.775			30 1.05	+ 0.03	— 0.2	+ 0.005	— 0.11	40.780	0.94	+ 0.03	— 0.1	40.782
d		10	44.888			41 54.80	+ 0.02	— 0.1	— 0.006	— 0.11	44.882	54.69	+ 0.03	0.0	44.884
e		11	30.238			39 37.97	+ 0.02	— 0.3	— 0.004	— 0.06	30.234	37.91	+ 0.03	— 0.2	30.236
f		12	11.150			48 38.11	+ 0.02	+ 0.4	— 0.012	— 0.02	11.138	38.09	+ 0.04	+ 0.4	11.140
g		12	31.518			35 29.13	0.00	+ 0.5			31.518	29.13	0.00	+ 0.5	31.520
h		12	45.109			29 10.60	— 0.04	0.0	+ 0.006	+ 0.01	45.115	10.61	— 0.05	0.0	45.117
i		13	26.596			21 35.51	+ 0.01	0.0	+ 0.013	+ 0.06	26.609	35.57	0.00	0.0	26.611
k		14	7.827			24 1.15	0.00	— 0.2	+ 0.010	+ 0.10	7.837	1.25	— 0.01	— 0.2	7.839
l		14	9.192			44 17.41	— 0.07	— 0.3	— 0.008	+ 0.10	9.184	17.51	— 0.06	— 0.4	9.186
m		15	12.602			53 2.05	— 0.01	0.0	— 0.015	+ 0.16	12.587	2.21	0.00	— 0.2	12.589
n		15	24.029			41 47.68	— 0.02	— 0.1	— 0.006	+ 0.17	24.023	47.85	— 0.01	— 0.3	24.025
o		15	38.355			21 6.40	0.00	+ 0.6	+ 0.013	+ 0.19	38.368	6.59	+ 0.01	+ 0.4	38.370
p		17	4.984			32 54.50	+ 0.02	+ 0.1	+ 0.002	+ 0.28	4.986	54.78	+ 0.02	— 0.2	4.988

Aus der Zusammenstellung der Indexfehler des Positionskreises auf Seite 57 ersieht man, dass der aus den Berliner Meridianbeobachtungen der Perseussterne *ap* abgeleitete Werth aus der Reihe der übrigen ein wenig heraustritt, nämlich nur + 0.32 beträgt, während der aus dem Ausdruck $k = + 1.17 + 0.113 (t - 1895)$ folgende Werth für 1894.1 + 1.07 sein würde. Nach den Meridianbeobachtungen in Berlin ist der Declinations-Unterschied der Sterne *p* und *a* auf 1890 reducirt, mit Berücksichtigung der Gewichte + 19.81, in der obigen Zusammenstellung A dagegen + 19.33. Der Unterschied von 0.48 würde sich durch eine Drehung der ganzen Gruppe um den Stern *g* im Betrage von — 0.43 beseitigen lassen und die entsprechende Aenderung der Sternörter ist neben A in der Columne B enthalten. Der Mittelwerth Berlin-Göttingen in Columne B ist + 0.002 — 0.03 und bringt man diesen kleinen Unterschied noch an die Oerter in B an, so erhält man die Columne C.

Es bedeutet also um noch einmal zu wiederholen A die Orientierung der Gruppe durch die Linie *ap* mit Hülfe des Indexfehlers aus der Gesamtheit aller Bestimmungen über 10 Jahre mit Berücksichtigung der allmählichen Aenderung, C dagegen die Orientierung nach den Declinationen der Sterne *a* und *p* am Berliner Meridiankreise.

Als schliesslich anzunehmende Form habe ich den Ausdruck $\frac{1}{2} (A + C)$ gewählt und damit ist das Endresultat der ganzen Untersuchung

**Oerter von fünfzehn helleren Sternen der beiden benachbarten
Sternhaufen λ und χ Persei aus Beobachtungen am Göttinger Heliometer
für die Epoche 1893.75 und das Aequinoctium 1890.0.**

B. D. + 56°	Grösse B. D. Kr.		AR.			Praec.	Var. saec.	E. B.	Decl.	Praec.	Var. saec.	E. B.	Berlin—Göttingen	
	^h	^m	^s	^s	^s	^s	^s		^o	^{''}	^{''}		^s	^{''}
471	6.6	6.7	2	9	10.477	+ 4.1533	+ 0.0721		+ 56° 32' 35".06	+ 16".952	- 0".328		- 0.02	- 0".2
479	8.9	8.9	9	34.736	4.1499	0716		23 11.21	16.933	0.329			+ 0.04	0.0
498	8.6	8.6	10	40.779	4.1628	0720		30 0.98	16.880	0.332			+ 0.03	- 0.1
500	8.5	8.5	10	44.886	4.1715	0727		41 54.73	16.877	0.332			+ 0.02	0.0
530	6.7	6.4	11	30.237	4.1756	0726		39 37.93	16.842	0.334			+ 0.02	- 0.2
543	8.0	8.2	12	11.145	4.1870	0731		48 38.09	16.809	0.337			+ 0.03	+ 0.4
545	8.5	8.6	12	31.519	4.1803	0724		35 29.12	16.793	0.337			0.00	+ 0.5
547	8.2	7.2	12	45.113	4.1775	0720		29 10.59	16.782	0.337			- 0.05	0.0
555	8.8	8.4	13	26.604	4.1773	0716		21 35.55	16.749	0.339			0.00	0.0
567	8.4	8.3	14	7.833	4.1841	0718		24 1.19	16.716	0.341			- 0.01	- 0.2
568	6.7	6.6	14	9.189	4.1985	0729	- 0.0037	44 17.45	16.715	0.342	+ 0".02		- 0.07	- 0.3
593	7.0	7.0	15	12.596	4.2127	0734	- 0.0014	53 2.12	16.663	0.345	+ 0.01		- 0.01	- 0.1
595	8.5	8.3	15	24.027	4.2060	0728		41 47.75	16.654	0.345			- 0.01	- 0.2
598	8.4	8.6	15	38.363	4.1930	0716		21 6.48	16.642	0.345			- 0.01	+ 0.5
608	9.2		17	4.986	4.2120	0726		32 54.63	16.572	0.354			+ 0.02	- 0.1

Die Praecession für 1890, säculare Variation und Eigenbewegung sind den Zonen von Krüger entnommen worden und die Grössenangaben in der ersten Linie der Bonner Durchmusterung und daneben den soeben genannten Zonen. Für Stern p , der bei Krüger fehlt, ist die Präcession berechnet worden. Am rechten Ende ist noch einmal der Unterschied Berlin Meridiankreis minus Göttingen Heliometer aufgenommen.

Nach brieflicher Mittheilung von Prof. Battermann (1899 Mai 18) beruhen die Beobachtungen dieser Sterne und somit auch die obigen Oerter in letzter Linie auf der Position des Sterns Σ Cassiopejae in den Astron. Nachrichten Bd. 147 Seite 57, die für die Epoche 1893.75 von dem Ort des Fundamental-Catalogs der Astronomischen Gesellschaft um + 0.012 und - 0.11 abweicht.

Nachdem nun das Resultat dieser Untersuchung vollständig abgeleitet ist, wird es von Werth sein auch anderweitige Vermessungen dieser beiden Sternhaufen heranzuziehen und in erster Linie werden die Ergebnisse der Krüger'schen Zonenbeobachtungen in Helsingfors-Gotha zu untersuchen sein, da mit Ausnahme des Sterns p alle übrigen in den Zonen enthalten sind. Das Ergebniss der Vergleichung mit Helsingfors-Gotha und mit den übrigen in der Einleitung erwähnten Beobachtungen ist im Folgenden zusammengestellt, nachdem die Oerter auf 1890.0 reducirt worden sind.

Nachstehende Unterschiede sind im Sinne Krüger minus Schur, Oertel minus Schur usw. aufzufassen.

Helsingfors Gotha Ep. 1800 +				Bronsky u. Stebnitzky 1891.71			Pihl 1875			Krüger Bonn Heliom. 1861.7			Oertel 1888			
		^s	^{''}		^s	^{''}				^s	^{''}		^s	^{''}		
a	2030	70.1	-0.01	-0.7	76	+0.03	+0.7			18	+0.10	0.0	62	+0.13	-0.4	
b	2043	79.0	+0.23	-1.0	119	+0.05	-0.1			32	+0.10	0.0				
c	2071	80.0	+0.31	-1.6	293	+0.06	-0.2			5	+0.03	0.0	34	+0.17	-0.5	
d	2073	79.0	+0.13	-0.9	311	+0.06	+0.1			4	+0.01	-0.2	52	-0.06	-0.3	
e	2093	70.1	-0.06	-0.6	504	+0.07	-0.6			2	+0.04	0.0	19	+0.02	-0.3	
f	2113	73.5	+0.02	0.0	630	+0.05	0.0			12	+0.01	0.0	74	-0.12	-0.3	
g	2117	78.9	+0.19	-1.0	662	+0.03	0.0			26	+0.01	+0.1	75	+0.12	-0.3	
h	2120	74.4	-0.04	+0.3	680	+0.12	-0.3	11	+0.06	+0.7	31	+0.03	+0.2	91	+0.23	-0.5
i	2137	74.1	-0.14	+0.6	744 a	+0.05	-0.3	33	+0.13	+0.8						
k	2148	74.0	+0.11	+0.1	840	-0.01	-0.5	77	+0.10	+1.2						
l	2150	70.1	-0.20	0.0	843	+0.05	+0.9	78	+0.02	+0.2						
m	2177	77.6	+0.05	+0.8	993	+0.05	-0.1	150	+0.06	-0.5						
n	2187	79.0	+0.10	-0.1	1008	+0.10	-0.1	159	+0.14	-0.6						
o	2190	77.2	0.00	+0.9	1032	+0.04	+0.1	171	+0.07	+1.1						
p					1151 a	+0.06	-0.2	232	-0.05	+0.7						

Bei H. C. Vogel kommen nur die Sterne *l* und *m* nach meiner Bezeichnung vor und es hat deshalb die Vergleichung mit meinen Oertern nur geringes Interesse, dagegen ist eine grössere Zahl in den Krüger'schen Zonen vorhanden, so dass eine Vergleichung damit angemessen ist, nämlich

Helsingf.—Gotha	Vogel	Krüger—Vogel		Grösse	
		^s	^{''}	Krüger	Vogel
2131	d	-0.07	-0.4	7.8	8.2
2150	b	-0.14	-0.1	6.6	6.6
2152	a	-0.01	-0.1	8.4	8.3
2153	h	+0.02	+0.6	9.1	9.1
2154	l	-0.04	+1.0	9.2	9.4
2157	n	+0.04	-0.6	8.4	8.5
2158	m	-0.05	-1.9	9.1	8.9
2163	δ	+0.02	+0.2	8.7	8.5
2164	p	+0.07	-0.2	9.0	8.8
2165	ε	+0.23	+0.1	9.2	9.0
2166	q	0.00	0.0	8.5	8.5
2171	s	-0.03	-0.4	9.1	9.0
2175	c	+0.02	-0.9	7.7	7.7
2187	x	+0.10	+0.3	8.3	8.0
2189	y	+0.13	+0.9	8.2	8.5

Die Unterschiede zwischen den Helsingforscher Zonen und der Göttinger Triangulation sind sehr unregelmässig, auch wenn man bei den Rectascensionen auf die hohe Declination der Gruppe Rücksicht nimmt in Folge derer zur Reduction auf den grössten Kreis die Unterschiede ungefähr durch 2 dividirt werden müssen, aber auch die Declinationen stimmen nicht gut überein. Ehe mir die genauen Berliner Meridianbeobachtungen zu Gebote standen habe ich zahlreiche Versuche gemacht eine Uebereinstimmung durch Drehung der ganzen

Gruppe hervorzubringen, wodurch meine Positionswinkel-Messungen am Helio-
meter stark in Zweifel gezogen wurden. Dass diese Unregelmässigkeiten nicht
der Göttinger Triangulation zur Last fallen, zeigt die recht gute Ueberein-
stimmung mit den Berliner Meridianbeobachtungen. Eine Unregelmässigkeit in
den Oertern der Helsingforscher Zonen ist nun auch durch die Vergleichung mit
Vogel's Vermessung am sechszölligen Refractor in Leipzig angedeutet.

Sehr befriedigend stimmen dagegen die Messungen von Krüger am Bonner
Helio-
meter mit der Göttinger Triangulation überein, wenn man erwägt, dass ein
Zwischenraum von beinahe einem Drittel Jahrhundert dazwischen liegt und die
Eigenbewegungen nur bei zwei Sternen *l* und *m* in Betracht gezogen werden
konnten.

Krüger hat seine heliometrische Vermessung auf zwei von Argelander am
Bonner Meridiankreise beobachtete Sterne bezogen, nämlich BD + 56.522 und
+ 56.530. Der letztere ist der Stern *e* meiner Triangulation und es ergibt
sich der Unterschied

$$\text{Bonn Meridiankreis minus Göttingen Helio-} \overset{s}{\text{meter}} - 0.038 + 0.02$$

Bringt man diesen Unterschied noch in Rechnung, so hat man die Ver-
gleichung der Helio-
metermessungen

Bonn minus Göttingen		
a	+ 0.06 ^s	0.0
b	+ 0.07	0.0
c	0.00	0.0
d	- 0.03	- 0.2
e	0.00	0.0
f	- 0.03	0.0
g	- 0.03	+ 0.1
h	- 0.01	+ 0.2

also eine vorzügliche Uebereinstimmung, wenn man noch $\Delta\alpha$ durch Multiplication
mit 0.55 auf den grössten Kreis reducirt.

Für die photographische Aufnahme von Bronsky und Stebnitzky ist eine Ver-
gleichung sämmtlicher von mir beobachteten Sterne möglich und es scheint deshalb
auch noch eine Vergleichung mit den Berliner Meridianbeobachtungen von Werth.

	Brons. u. Steb. minus Schur		Batterm.—Schur		Brons.—Batterm.		Brons.—Schur		Brons.—Batterm.	
a	+ 0.03 ^s	+ 0.7 ^u	- 0.02 ^s	- 0.2 ^u	+ 0.05 ^s	+ 0.8 ^u	- 0.02 ^s	+ 0.7 ^u	- 0.01 ^s	+ 0.8 ^u
b	+ 0.05	- 0.1	+ 0.04	0.0	+ 0.01	- 0.1	0.00	- 0.1	- 0.05	- 0.1
c	+ 0.06	- 0.2	+ 0.03	- 0.1	+ 0.03	- 0.1	+ 0.01	- 0.2	- 0.03	- 0.1
d	+ 0.06	+ 0.1	+ 0.02	0.0	+ 0.04	+ 0.1	+ 0.01	+ 0.1	- 0.02	+ 0.1
e	+ 0.07	+ 0.6	+ 0.02	- 0.2	+ 0.05	- 0.4	+ 0.02	+ 0.6	- 0.01	- 0.4
f	+ 0.05	0.0	+ 0.03	+ 0.4	+ 0.02	- 0.4	0.00	0.0	- 0.04	- 0.4
g	+ 0.03	0.0	0.00	+ 0.5	+ 0.03	- 0.5	- 0.02	0.0	- 0.03	- 0.5
h	+ 0.12	- 0.3	- 0.05	0.0	+ 0.17	- 0.3	+ 0.07	- 0.3	+ 0.11	- 0.3
i	+ 0.05	- 0.3	0.00	0.0	+ 0.05	- 0.3	0.00	- 0.3	- 0.01	- 0.3
k	- 0.01	- 0.5	- 0.01	- 0.2	0.00	- 0.3	- 0.06	- 0.5	- 0.06	- 0.3
l	+ 0.05	+ 0.9	- 0.07	- 0.3	+ 0.12	+ 1.2	0.00	+ 0.9	+ 0.06	+ 1.2
m	+ 0.05	- 0.1	- 0.01	- 0.1	+ 0.06	0.0	0.00	- 0.1	0.00	0.0
n	+ 0.10	- 0.1	- 0.01	- 0.2	+ 0.11	+ 0.1	+ 0.05	- 0.1	+ 0.05	+ 0.1
o	+ 0.04	+ 0.1	- 0.01	+ 0.5	+ 0.05	- 0.4	- 0.01	+ 0.1	- 0.01	- 0.4
p	+ 0.06	- 0.2	+ 0.02	- 0.1	+ 0.04	- 0.1	+ 0.01	- 0.2	- 0.02	- 0.1

Die Differenzen Battermann—Schur müssen ihrer Entstehung gemäss im Mittel Null geben. Bringt man dasselbe auch in den Differenzen Bronsky u. Stebnitzky — Schur und Bronsky u. Stebnitzky — Battermann hervor, indem man $-0.05^s \text{ } 0.0''$ und $-0.06^s \text{ } 0.0''$ hinzufügt, so ergeben sich die letzten beiden Columnen.

In Anbetracht, dass die Oerter von Bronsky und Stebnitzky nur auf zwei photographischen Aufnahmen beruhen ist die Genauigkeit eine recht befriedigende.

Durch diese Triangulation ist eine Grundlage für fernere Aufnahmen geschaffen, die wohl am zweckmässigsten durch die Photographie geliefert werden, wobei die Constanten zur Reduction der photographischen Aufnahmen durch die heliometrisch bestimmten Oerter der helleren Sterne ermittelt werden können.

Ich hätte einen Theil der Beobachtungen, nämlich die Bestimmung mancher schwächerer Sterne noch übernehmen können, sofern sie am Heliometer messbar sind, aber die Arbeit würde dadurch sehr in die Länge gezogen werden. Es ist empfehlenswerth die Anwendung des Heliometers nicht weiter zu treiben als zur Beschaffung der Grundlagen und das Uebrige der Photographie zu überlassen, die bei genügender Exposition Sterne zur Darstellung bringt, die am Heliometer garnicht oder nur bei grosser Anstrengung der Augen messbar sind. Auch lässt sich ein grösseres Aequatoreal mit Faden-Mikrometer hierzu verwenden indem Rectascensions- und Declinations-Unterschiede gegen mehrere der im obigen Verzeichnisse enthaltenen 15 Sterne gemessen werden.

Beifolgende Karte der beiden Sternhaufen, worin die zwei grossen Vierecke und die übrigen Dreiecke eingezeichnet sind, ist eine Copie aus der Abhandlung O. A. L. Pihl, The stellar cluster χ Persei micrometrically surveyed. Christiania 1891 und bezieht sich auf das Aequinoctium 1870.

Verbesserungen zu früheren Veröffentlichungen der Sternwarte.

a) Stern-Catalog für 1860 nach Klinkerfues, von W. Schur 1891. Astr. Mitthlgg.
Zweiter Theil.

Bei Gelegenheit einer Vergleichung von Oertern aus diesem Catalog mit denjenigen des elften Stücks des Catalogs der Astronomischen Gesellschaft richtete Herr Geh.-Rath Auwers im Jahre 1893 an mich eine Anfrage, die eine Prüfung einiger Reductionen veranlasste und nachstehende Verbesserungen ergab.

Catalog Nr. 1828		δ +	10"
1884	$\alpha - 10.00$		
5475		+	26.0
5532		-	11 36.2
5769		-	3 2.4
5790	+ 2.22	-1	0 1.5
5955	- 3,38	-	10.1
5964		-1	0 1.6
5968	+ 0.98	+	13.3
5980	- 2.18		
6064	- 2,13	-	7.9
6067		-1	0 1.5
6100	- 0.05		
6342	wenn Gruppen a und b verwechselt sind, δ vielleicht um + 9.8 zu verbessern.		
6444	- 10.00		
6477		+	10.0

Ferner bedürfen die Rectascensionen der Zone f von 1861 October 26 einer durchgehenden Correction. Die Anschlusssterne für diese Zone sind nämlich hauptsächlich dem Cataloge von Schjellerup entnommen und die Ausgleichung für diesen Tag hatte für den stündlichen Gang der Pendeluhr Hardy den ungewöhnlichen grossen Werth $-0,824$ ergeben, der schon bei der Berechnung gegen die benachbarten Tage auffiel, aber in Ermangelung sicherer Sternörter nicht weiter geprüft werden konnte. In der Einleitung zum Catalog der Astr. Ges. Seite 102 ist dieser Gang durch Vergleichungen mit späteren Beobachtungen erheblich reducirt worden. Der abweichende Gang ist dadurch entstanden, dass die zu seiner Berechnung besonders beitragenden Sterne Schjellerup 8503/4 und 8534 zu Anfang, und 9158 und 9235 zu Ende des Beobachtungsabends stärkerer Correctionen bedürfen. Nachdem die Zone + 15 bis + 20 veröffentlicht ist und mir die Sternörter aus der Zone + 5 bis + 15 seitens der Leipziger Sternwarte mitgetheilt worden sind, lässt sich der Uhrgang jetzt mit grösserer Zuverlässig-

keit aus den 17 Anschlusssternen ableiten, nämlich

für $21^{\text{h}} 48,0^{\text{m}}$ Uhrstand $- 2.63^{\text{s}}$, stündl. Gang $- 0.599^{\text{s}}$
während früher angenommen war $- 2.59$ $- 0.824$

Damit erhält man die Verbesserungen der Rectascensionen aus der Zone f

für	$21^{\text{h}} 0^{\text{m}}$	$- 0,22^{\text{s}}$
	10	$- 0.18$
	20	$- 0.15$
	30	$- 0.11$
	40	$- 0.07$
	50	$- 0.03$
	$22 0$	0.00
	10	$+ 0.04$
	20	$+ 0.08$
	30	$+ 0.11$
	40	$+ 0.15$

Eine Anzahl der Sterne der Zone f ist auch in der Zone g von October 27 enthalten wobei sich der stündliche Gang der Uhr zu $- 0.34^{\text{s}}$ ergeben hatte, der einigermaassen mit den benachbarten Werthen übereinstimmt; für die mit fg bezeichneten Sterne des Göttinger Catalogs ist daher an die Rectascensionen die Hälfte der gegebenen Verbesserungen anzubringen, wenn man die Zone g allein als nicht verbesserungsbedürftig ansieht.

Ueber die durch den Quecksilber-Contact verursachten grossen Störungen im Gang der sonst vortrefflichen Pendeluhr Hardy vergleiche man meine Bemerkungen auf Seite XII der Einleitung zum Göttinger Stern-Catalog.

Ausser den obigen Verbesserungen sind noch die nachfolgenden zu bemerken

Nr. 3081. Es ist nach Dr. Kam (Brief von 1896 Febr. 16) besser die ursprüngliche Declination nämlich $+ 11^{\circ} 18' 49''.8$ herzustellen anstatt die Scalablesung um einen Theil zu verändern.

6299. $- 0.48^{\text{s}}$

6571. $- 5^{\circ}.5963$ anstatt $- 5^{\circ}.6963$, $- 5^{\circ} 17' 7''.0$ anstatt $- 5^{\circ} 14' 7''.0$

Ferner finden sich noch Verbesserungen in: Public. of the Astr. Soc. of the Pacif. Vol. XI, Nr. 71, Seite 259, nämlich

Nr. 16.	D. M.	$+ 9.8^{\circ}$	anstatt	9.38°
2121.		8^{h}	"	7^{h}
5602.		$- 6.5757$	"	$+ 6.5657$

b) Die Oerter der helleren Sterne der Praesepe von W. Schur.
Astron. Mittheilungen. Vierter Theil.

Seite 79	Z. 3 v. o.	161^s anstatt 151^s		
	4 v. o.	$18^h 39^m .8$ anstatt $18^h 19^m .3$		
	O	21.71	„	21.89
	N—O	— 0.28	„	— 0.45
	Oc.-St.	— 165	„	— 266
	Refr.	+ 548	„	+ 601
	Abstand	161.3480	„	161.3412
	20 v. o.	Aberr. + 19 anstatt + 47, Abstand 161.3415 anstatt 3443		
	21			3497 3525
	22			3355 3383
101	letzte Zeile	$+ 0^h 43^m$ anstatt $+ 0^h 39^m$		
		+ 0.61	„	+ 0.59
		53.72	„	53.70
		53.82	„	53.81
141	7 v. o.	35' „ 36'		

Eine Unrichtigkeit in der Verwandlung der Scalentheile in Bogensekunden bei der Distanz Nr. 135 bringt folgende Abänderungen hervor

Seite 183	Z. 13 v. o.	für Nr. 135 $90''.82$ anstatt $91''.00$, $90''.86$ anstatt $91''.04$, + 2.957 anstatt + 2.965, — 120''.76 anstatt — 120''.96, + 2.957 anstatt + 2.965, — 120''.76 anstatt — 120''.96.		
	22 v. o.	Winnecke 28 Schur 21 41.296^s anstatt 41.304^s , $23''.68$ anstatt $23''.48$		
184	32 v. o.	41.296^s anstatt 41.304^s , $23''.68$ anstatt $23''.48$		
288	26 v. o.	41.296^s anstatt 41.304^s , $23''.68$ anstatt $23''.48$ 49.312 „ 49.320 , 30.18 „ 29.98		
289	26 v. o.	— 0''.131 anstatt — 0''.123, — 0''.78 anstatt — 0''.98, — 0.0040 „ — 0.0038, — 0.024 „ — 0.030 — 0.0043 „ — 0.041, + 0.015 „ + 0.09 + 0.0001 „ + 0.0003, + 0.008 „ + 0.002		
ferner				
299	2 v. u.	20° anstatt 26°		
305	Gould 12	$834''.75$ anstatt $843''.75$		

c) Schur und Stichtenoth, Olbers' Beobachtungen, Göttingen 1899.

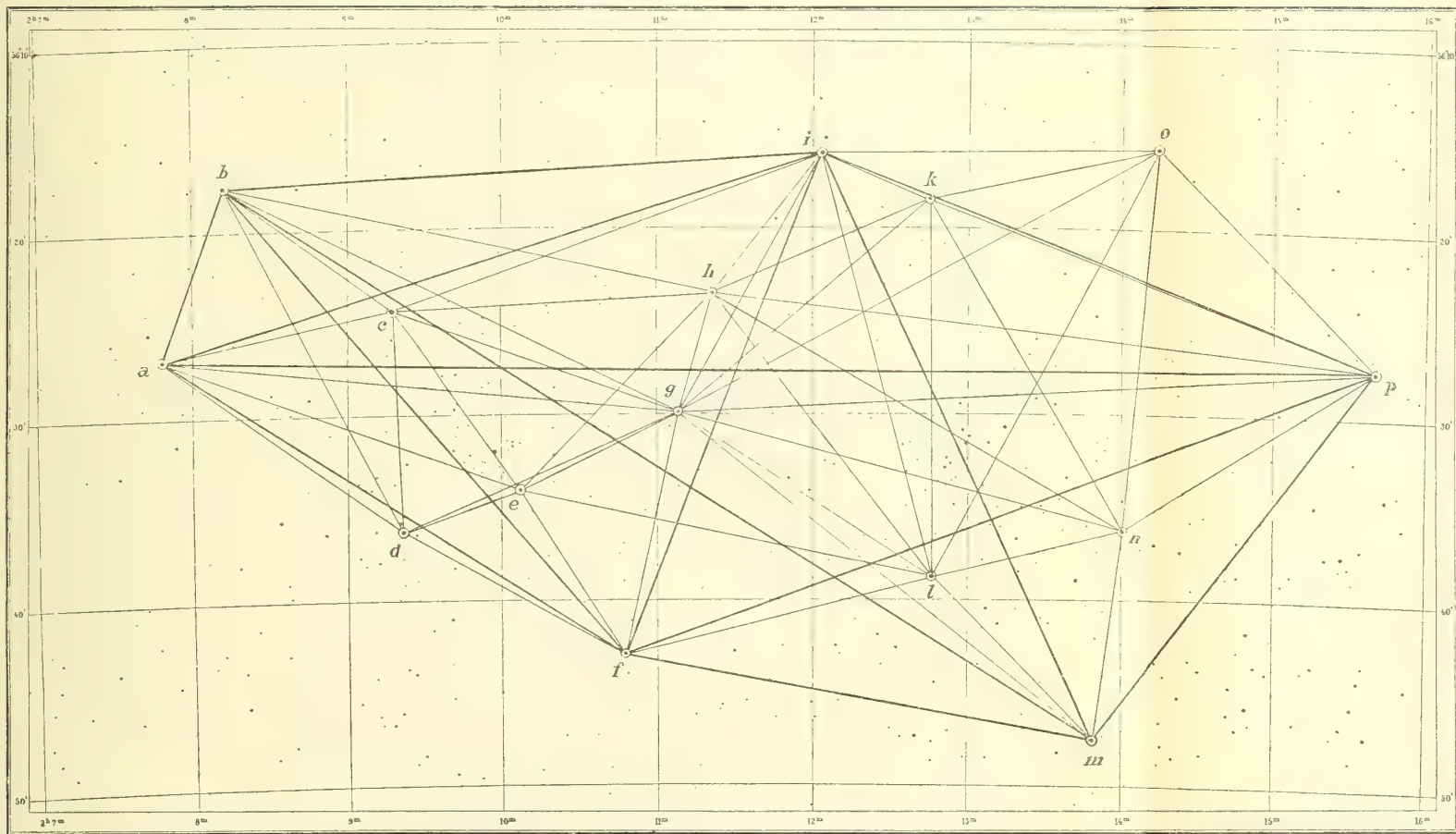
Seite 1	Zeile 15 v. o.	Jahrzehnt anstatt Jahrzent
64. 65		Fig. 5 anstatt Fig. 3
		6 " 4
65	18 v. o.	HCB anstatt DφB
145	4 v. u.	confuser anstatt confusser.

9 OCT. 1900



Verbesserungen.

Seite 2	6 v. u.	bis anstatt bei
	3 v. u.	Resultaten anstatt Resultaten





Göttingen, Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner.)

ABHANDLUNGEN

DER

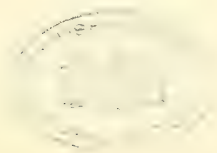
KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU GÖTTINGEN.

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.

NEUE FOLGE. BAND II.

AUS DEN JAHREN 1902—1903.



BERLIN.

WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG.

1903.

Inhalt.

E. Wiechert, Theorie der automatischen Seismographen.

Julius Kramer, Theorie der kleinen Planeten. Die Planeten vom Hecuba-Typus.

Ph. Furtwängler, Über das Reciprocitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet.

G. Prasad, Constitution of Matter and Analytical Theories of Heat. An Essay in four Parts.



17 MAR. 1903

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.

NEUE FOLGE BAND II. Nro. 1.

Theorie der automatischen Seismographen.

Von

E. Wiechert.



Berlin.

Weidmannsche Buchhandlung.

1903.

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND II. Nro. 1.

Theorie der automatischen Seismographen.

Von

E. Wiechert.



Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1903.

Theorie der automatischen Seismographen.

Von

E. Wiechert.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung am 23. Februar 1901.

Einleitung.

1. **Vorwort.** Die bisher mit den automatischen Seismographen gewonnenen Resultate erwecken in erfreulichster Weise die Hoffnung auf werthvolle Aufschlüsse über die Umgestaltungen der Erdrinde, deren Begleiterscheinung die Erdbeben sind, und über die physikalische Beschaffenheit der Erde. So ist denn heute das Interesse an der seismischen Forschung reger als je; der Bau von seismischen Apparaten und Warten wird mit Eifer betrieben, und man ist bemüht, die Organisation des Beobachtungssystemes auf der Erde zu verbessern. — Diesen Bestrebungen entspricht es nicht ganz, dass vielfach noch recht unbestimmte Vorstellungen über die Wirksamkeit der Apparate herrschen, und dass sogar sehr wesentliche Irrthümer wieder und wieder ausgesprochen werden. So scheint es mir ein dankbares Unternehmen, einmal die Apparate und ihre Leistungen einer eingehenden Prüfung zu unterziehen, um so ein wenig dazu beizutragen, dass dem Forscher auch die rechten Werkzeuge in die Hand gegeben werden. Dieser Gesichtspunkt hat im Folgenden die unbedingte Herrschaft. Dennoch darf ich hoffen, dass auch unabhängig von der Seismik sich für die mathematische Physik manches Interessante ergeben wird.

Da mechanische Probleme behandelt werden müssen, durfte ich eine weitgehende Anwendung der Mathematik nicht scheuen; andererseits verkenne ich nicht, wie sehr es gerade in diesem Falle darauf ankommt, auch denjenigen Lesern das Verständniss thunlichst zu erleichtern, welche der Handhabung mathematischer Formeln nicht gewohnt sind. Um einen Ausweg zu finden, habe ich mich bemüht, das Einfache vom Komplirten möglichst zu trennen und durch öfters eingeschaltete Zusammenstellungen sowie durch reichliche Anwendung von cursivem Druck die Uebersichtlichkeit zu erhöhen.

2. Bei der *Auswahl des Stoffes* musste ich mich fragen, was denn eigentlich von den Diagrammen der Seismographen zu verlangen sei. Mit der einfachen Feststellung, dass ein Erdbeben stattgefunden hat, ist der Wissenschaft jedenfalls zu wenig gedient, *man wird mindestens noch Angaben über Zeit und Intensität beanspruchen*. Schon hierbei kommt die Theorie in einem Maasse in Betracht, das meist unterschätzt wird. Nehmen wir zum Beispiel an, es handele sich um die *Bestimmung der Geschwindigkeit*, mit der sich die Erschütterungen über die Erde ausbreiten. Man könnte meinen, dass es dann hinreichend wäre, festzustellen, wann der Seismograph anfängt, unter der Einwirkung der Erderschütterungen merklich unruhig zu werden. Dies ist aber keineswegs richtig; es würde nur gelten, wenn die Erderschütterungen mit der stärksten Bewegung einsetzen oder doch mit einer Bewegung, die sich von der stärksten nicht wesentlich unterscheidet, — so aber spielen sich die wirklichen Vorgänge in der Regel nicht ab, denn es treffen meist nacheinander Bewegungen mit bedeutend anwachsender Intensität ein. Infolge dessen wird man oft im Ungewissen darüber bleiben, ob die erste bemerkbare Unruhe des Seismographen den Beginn des Erdbebens oder eine spätere Phase bezeichnet. Die Schwierigkeiten wachsen noch weiter an, wenn man versucht, *Geschwindigkeitsbestimmungen für spätere Phasen* der Erderschütterung vorzunehmen. Es kommt dann der Umstand störend in Betracht, dass die üblichen Apparate auf Schwingungen verschiedener Periode mit weit verschiedener Empfindlichkeit reagieren. Bei einem und demselben Erdbeben können selbst Apparate gleicher Konstruktion, wenn sie nur geringfügig anders regulirt sind, die Anschwellungen der Intensität zu verschiedenen Phasen zeigen. — Dass die *Intensitätsvergleiche* ohne eine sorgfältige Berücksichtigung der Theorie nicht minder unsicher sind wie die Zeitbestimmungen, braucht nach dem zuletzt Gesagten nicht näher auseinander gesetzt zu werden. Eine grössere Unruhe des Seismographen bedeutet eben nicht ohne Weiteres eine grössere Unruhe des Erdbodens, sondern kann sich auch dadurch erklären, dass Schwingungen zur Geltung kommen, für welche der Seismograph besonders empfindlich ist.

Schauen wir zurück, so zeigt sich deutlich, dass selbst dann, wenn nur Angaben über Zeit und Intensität verlangt werden, auf Konstruktion und Regulierung des Seismographen sowie auf die Art der Erderschütterungen sehr wohl geachtet werden muss. Damit das letztere möglich sei, müssen die Diagramme nicht nur den Grad der Unruhe des Seismographen zeigen, sondern auch die Art der erregenden Erderschütterungen zu beurtheilen erlauben, sie müssen *lesbar* sein.

3. *Einige Probleme*. Sobald dieses erreicht ist, eröffnet sich dem Forscher eine neue Welt. Schon der erste Anblick lesbarer Diagramme lehrt, dass ein Erdbeben keineswegs eine Folge unregelmässiger Erschütterungen ist, und ein genaueres Studium zeigt selbst in solchen Einzelheiten Gesetzmässigkeiten, die zunächst als Spiele des Zufalls erscheinen. — Als besonders wichtig ist zunächst hervorzuheben, dass nicht *Stösse*, sondern *Schwingungen* vorherrschen. Die Periode variirt in weiten Grenzen, von kleinen Bruchtheilen einer Sekunde

bis zu einer Minute und darüber, und zwar finden wir schon bei einem und demselben Erdbeben nacheinander oder superponirt Schwingungen verschiedener Periode. Anfänglich, vor dem Eintreffen der Schwingungen grösster Amplitude, ist das Gewirre meist ziemlich gross. Später gestaltet sich das Bild einfacher. Eine bestimmte Periode erlangt die Vorherrschaft, oder es deuten regelmässige An- und Abschwellungen darauf hin, dass Wellenzüge mit nicht weit verschiedener Periode interferiren. Bedeutungsvoll ist ferner, *dass in jedem Erdbeben nach einander Erschütterungen verschiedenen Charakters eintreffen*, die oftmals mit sehr ausdrucksvollen Einsätzen beginnen. Die Diskussion über die physikalische Deutung dieser verschiedenen Bewegungen ist noch nicht abgeschlossen, man denkt an longitudinale und transversale Schwingungen, sowie an Fortpflanzung längs der Oberfläche und durch das Innere der Erde. — Die Feststellung des Zeitintervalles zwischen dem Eintreffen der verschiedenen Bewegungen erlaubt in ziemlicher Schärfe die Bestimmung der Entfernung des Erdbebenherdes. —

Neue Probleme bieten sich, wenn man die Diagramme verschiedener Erdbeben in ihren *scheinbaren Unregelmässigkeiten* vergleicht. Da ist die Uebereinstimmung manchmal höchst überraschend. Ich habe dies schon in meiner ersten Veröffentlichung über die seismometrischen Beobachtungen im Göttinger Geophysikalischen Institut¹⁾ hervorgehoben, und es sind dort auch zwei solche nahe übereinstimmende Diagramme reproducirt. Seit jener Zeit wurden noch sehr viel auffälligere Beispiele gewonnen. Vor allem haben zwei Erdbeben vom 27. September 1899 und vom 15. Januar 1900 so nahe gleiche Bewegungen verursacht, dass das eine Diagramm wie eine nicht ganz getreue Kopie des anderen erscheint; jede Ausbiegung der Kurve in dem einen Bild findet sich an entsprechender Stelle in dem anderen wieder. Offenbar handelt es sich hier — und ähnlich in den anderen Fällen — um Erdbeben, die an nahe der gleichen Stelle der Erde ihren Ursprung hatten. Doch ist die Möglichkeit, dieses aus den Diagrammen zu erkennen, für uns immerhin nur in zweiter Linie von Bedeutung, — bei weitem wichtiger ist, dass die genaue Uebereinstimmung in den Einzelheiten es ganz unmöglich macht, ihre Entstehung zufälligen Unregelmässigkeiten in der Aufeinanderfolge von Dislokationen zuzuschreiben, die die Erderschütterungen bewirken. *Wir müssen vielmehr unbedingt schliessen, dass die Dislokationen verhältnismässig einfacher Art sind, und — schnell verlaufend — nur den ersten Impuls für die Erdbewegungen abgeben. Wie diese sich dann in ihren Einzelheiten gestalten, das muss den Zufälligkeiten der Auslösung entzogen sein.* Wir können annehmen, dass die Massenvertheilung und die elastische Beschaffenheit im Bereiche des Erdbebenherdes, dann in der Erde überhaupt, zur Geltung kommt, und erkennen so, dass auch das scheinbar Unregelmässige in den Diagrammen für die Geophysik von grosser Wichtigkeit ist. —

Andere interessante Aufgaben stellen sich ein, wenn man *die verschiedenen Komponenten der Erdbewegung vergleicht*. Zunächst ist es nach den Göttinger

1) Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse 1899, Heft 2, S. 195.

Erfahrungen in vielen Fällen sehr wohl möglich, auf die Richtung zu schliessen, in welcher das Epicentrum liegt. Weit wichtiger noch ist, dass die Bewegungen nicht in einer bestimmten Ebene erfolgen, — etwa in der Vertikalebene, welche das Epicentrum enthält. Es finden vielmehr in der Regel ausser in der Vertikalen Schwingungen nach allen möglichen Richtungen des Horizontes statt. Dabei liess sich in einigen Fällen, so bei dem Venezuela-Erdbeben vom 29. Oktober vorigen Jahres ganz scharf erkennen, dass *verschieden gerichtete Wellenbewegungen nacheinander eintreffen*. —

Für alles, was ich bisher erwähnte, genügen die Registrirungen an einem einzelnen Orte. Zu ihrer vollen Bedeutung für die Erforschung der physikalischen Beschaffenheit der Erde können die Erdbebenbeobachtungen aber erst gelangen, wenn die Registrirungen an verschiedenen Orten mit einander verglichen werden, sodass es möglich wird, die *Fortpflanzung der Bewegung durch die Erde und ihre Umwandlung auf dem Wege* zu verfolgen. Für diesen Zweck ist in erster Linie ein System von Stationen mit ausführlich schreibenden Instrumenten zu wünschen, welches über die Erde verbreitet ist; daneben wäre es jedoch auch von grosser Wichtigkeit, wenn in verhältnissmässig kleinen Gebieten Netze enge bei einander liegender Stationen zur Verfügung ständen, welche gestatteten, genauere Einzelheiten bei der Fortpflanzung längs der Erdoberfläche zu beobachten, so zum Beispiel die Abhängigkeit von den geologischen Verhältnissen. Hier ist ein deutliches und unverfälschtes Urtheil über den Verlauf der Bewegung nicht nur im Interesse der Zeit- und Richtungsbestimmungen zu verlangen, sondern auch im Interesse der Intensitätsvergleiche. Wir müssen uns daran erinnern, dass bei dem Studium *fühlbarer* Erdbeben gerade durch den Vergleich der Intensität an verschiedenen Orten, durch die Untersuchungen der Regelmässigkeiten und der Anomalien schöne und werthvolle Resultate gewonnen wurden. So werden wir mit Interesse dem entsprechenden Studium mit Seismographen entgegensehen, wo es sich oft um weit grössere Schwingungsperioden und demgemäss weit grössere Wellenlängen handelt, sodass die Gestaltung der Erdrinde in wesentlich anderer Weise zur Geltung kommt.

Ausser den eigentlichen Erdbeben kommen für die Seismik vor Allem die lange Zeiten hindurch gleichmässig anhaltenden „*Pulsationen*“ der Erdoberfläche in Betracht, welche ich zum Theil wenigstens auf Wellenzüge zurückführen möchte, die von der Meeresbrandung verursacht werden. — Eine andersartige Reihe von Problemen wird durch die *langsamen Bewegungen der Erdoberfläche und der Vertikalen* geboten, für welche uns Ebbe und Flut ein Beispiel zeigen. —

4. *Inhaltsübersicht.* Diese wenigen Bemerkungen, welche nur Einzelheiten herausgreifen sollten, mögen hier genügen; sie werden jedenfalls deutlich zeigen, dass *tiefgreifende Aufschlüsse über den Bau der Erde und ihrer Rinde sich ganz von selbst ergeben werden, wenn es einst möglich sein wird, mittels lesbarer seismischer Diagramme die Entstehung und die Wanderung der Erdbebenwellen über die Erde zu verfolgen.* Unsere Aufgabe für die folgenden Ausführungen aber ist klar vorgezeichnet: *Wir werden nicht nur untersuchen müssen, wie man empfindliche*

Seismometer bauen kann, sondern auch, wie lesbare Diagramme zu erhalten und zu entziffern sind.

Im *ersten Theile* werden im Folgenden die *allgemeinen* theoretischen Gesichtspunkte besprochen werden, welche für die Beurtheilung der Instrumente maassgebend sein müssen. Im *zweiten Theile* folgen dann speciellere Untersuchungen über *Einzelheiten der Konstruktion*, mit denen Erbauer und Beobachter zu rechnen haben. Dabei wird sich Gelegenheit bieten, einzelne Instrumente näher zu beschreiben, also ganz ins Individuelle zu gehen. Hier werde ich mich in weitem Maasse auf die zusammenfassende und vergleichende Arbeit von R. Ehlert¹⁾ über seismische Instrumente berufen können.

Von grossem Interesse war es mir, zu erfahren, dass die Technik ganz ähnliche Probleme zu behandeln hat wie die Seismologie und dabei ganz ähnliche Mittel anwendet. Der schöne *Pallograph von Schlick* zum Beispiel, *gebaut zum Studium der Vibrationen von Schiffen*, unterscheidet sich nur durch seine geringere Empfindlichkeit von einem Seismographen. In dieser Hinsicht ist eben die Seismik viel ungünstiger gestellt wie die Technik: sie muss weit kleinere und langsamere Bewegungen beobachten, also weit grössere Empfindlichkeit verlangen. Immerhin wird die folgende Theorie bis zu einem gewissen Grade auch die der Pallographen umfassen. —

5. Die *praktischen Grundlagen* für meine Arbeit fand ich zunächst in den vorliegenden sehr zahlreichen Veröffentlichungen über seismische Apparate insbesondere in der soeben citirten Schrift von R. Ehlert. Hierzu kamen Erfahrungen, die ich bei Besuchen seismischer Warten zu sammeln Gelegenheit hatte, sowie experimentelle Untersuchungen und Registrirungen im *Geophysikalischen Institut der Göttinger Universität*, welche durch Unterstützung der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen ermöglicht wurden. Da es weiterhin vielfach nöthig sein wird, auf diese Arbeiten Bezug zu nehmen, scheint es geboten, hier eine kurze Uebersicht zu geben.

Ich nahm die Seismometrie im Jahre 1898 auf und baute *unter Benützung der photographischen Registrirmethode* ein *Horizontalpendel* mit der Absicht, lesbare Diagramme zu erzielen, die ich bei dem literarischen Studium schmerzlich vermisst hatte. Dazu wurden eine *kräftige Dämpfung* und eine *verhältnissmässig grosse Zeitskala* angewandt. Durch die Dämpfung sollte der störende Einfluss der Eigenschwingungen des Pendels beseitigt werden. Für die Zeitskala der Registrirung wählte ich $\frac{1}{10}$ mm in 1 Sekunde, also 36 cm in 1 Stunde, das ist eine mehrfach grössere Geschwindigkeit, als sie bisher bei dauernden photographischen Registrirungen üblich war. — Trotz seiner einfachen Bauart hat das Instrument sich gut bewährt. Nähere Angaben über die Einrichtung und die gewonnenen Resultate wurden im Juli 1899 in dem schon genannten Bericht veröffentlicht. Auf dem internationalen Geographenkongress in Berlin im Herbst desselben Jahres hatte ich die Ehre, in der Sitzung, in welcher Dr. Hecker über seine

1) Beiträge zur Geophysik von G. Gerland, Bd. 3, S. 350, 1898.

Untersuchungen seismischer Apparate im Potsdamer Geodätischen Institute sprach und Prof. Dr. Gerland seine Pläne über die Schaffung einer internationalen Vereinigung entwickelte, auch von den Göttinger Arbeiten berichten zu dürfen, und unter Hinweis auf die Hecker'schen Ergebnisse und die vorgelegten Diagramme die Bitte auszusprechen, bei seismischen Registrirungen auf Lesbarkeit der Diagramme durch *Anwendung einer Dämpfung und einer hinreichend grossen Zeitskala Gewicht zu legen*. Es ist mir eine Freude und eine neue Anregung für die folgende Arbeit, bemerken zu können, dass ich an verschiedenen Stellen Anklang fand.

Im Sommer vorigen Jahres erhielt ich durch die Güte der k. k. Akademie in Wien leihweise ein *3-faches Ehlert'sches Pendel*. Es stellt dieses eine Verbesserung jenes Apparates dar, mit welchem v. Rebeur Paschwitz seine berühmten, leider durch den Tod frühzeitig unterbrochenen Untersuchungen in Strassburg gemacht hat. In seinen Vorschlägen „zur Errichtung eines internationalen Systems von Erdbeben-Stationen“¹⁾ sagt er: „Es ist wünschenswerth und für den Erfolg des Unternehmens wichtig, dass alle Stationen *gleichwertige Instrumente wählen* und dass diese überall auf den *gleichen Grad von Empfindlichkeit* gebracht werden“. Der leitende Gedanke hierbei ist, *dass die Beobachtungen vergleichbar werden sollen*. Von Paschwitz schlug in erster Linie, aber „vorbehaltlich späterer Ausgestaltung“ ein Horizontalpendel seiner Konstruktion vor, von dem er annahm, dass es den Bedingungen der Vergleichbarkeit der Beobachtungen Genüge leiste. Spätere Untersuchungen haben gelehrt, dass dieses nicht ohne Weiteres zutrifft, denn die Eigenschwingungen sind übermächtig und die Diagramme nicht lesbar. Wollen wir also das schöne Vermächtniss von v. Rebeur Paschwitz in seinem Sinne weiterführen, so müssen wir darauf Bedacht nehmen, die Unvollkommenheiten, welche mit der Kindheit der Seismographie, wie jeder Forschung verknüpft sind, thunlichst bald zu beseitigen. Hierzu hoffe ich mit den folgenden Ausführungen einen Beitrag liefern zu können. Sehr gerne erwähne ich, dass das Pendel von v. Rebeur Paschwitz in der ursprünglichen, sowie in der von Ehlert herrührenden Form mit verhältnissmässig geringem Aufwand so umgewandelt werden kann, dass es unserem Verlangen nach entwirrbaren Angaben über die Erdbewegungen am Aufstellungsorte zu genügen vermag: dazu ist nur nöthig, eine Luftdämpfung anzubringen, was leicht geschehen kann, und eine schnellere Registrirung zu benützen, für die ein Jahresaufwand von 300—500 Mark recht wohl hinreicht.

6. Für die *mechanische Registrirung* wurden in Göttingen 1898 und 1899 nur Vorarbeiten gemacht. Ende 1899 unternahm ich dann mit Unterstützung der Königlichen Staatsregierung eine Studienreise nach Italien, um die seismischen Stationen dieses Landes kennen zu lernen, in welchem die mechanische Registrirung schon seit Langem und mit schönen Erfolgen studirt und verwendet worden ist. Ich besuchte die Stationen in *Rom, Rocca di Papa, Ischia, Padua* und lernte die Herren Seismologen *Palazzo* (Rom), *Cancani*

1) Beiträge zur Geophysik von G. Gerland, Bd. 2, S. 773, 1895.

(Rom), *Agamemnone* (Rocca di Papa), *Grablowitz* (Ischia), *Vicentini* (Padua) und *Pacher* (†, Padua) kennen. Für die liebenswürdige Aufnahme und das Entgegenkommen, welches mir unbeschränkten Einblick in alle Einzelheiten gewährte, möchte ich nicht verfehlen, auch an dieser Stelle meinem wärmsten Dank von Herzen auszusprechen. Es erfüllte sich so die Hoffnung, mit welcher ich die Reise angetreten hatte: ich erwarb die Grundlagen für meine weiteren praktischen Arbeiten. —

Nach Plänen, die auf der italienischen Reise zum Abschluss kamen, wurde in Göttingen ein Horizontalseismograph für mechanische Registrirung erbaut, welcher im Juni 1900 seine Arbeit begann. Er enthält ein Pendel von 1200 Kilogramm und wird daher weiterhin das „1200 kg.-Pendel“ genannt werden. *Wesentlich ist, dass auch dieses eine starke Dämpfung (Luftdämpfung) erhielt.* Bald zeigte es sich, dass seine Aufzeichnungen mit denen des photographirenden Horizontalpendels vollständig übereinstimmen. Berücksichtigt man die gänzlich verschiedene Bauart der Instrumente, so ist das gewiss ein schöner Erfolg. Wir erkennen hier die Wirkung der Dämpfung, welche den eigentlichen Störfried, die Eigenschwingungen, unschädlich macht. — Bei der Konstruktion des 1200 kg.-Pendels kam es mir darauf an, zu versuchen, für die mechanische Registrirung ein ähnlich kompensiöses und gegen langsame Schwingungen und Neigungsänderungen ähnlich empfindliches Instrument zu bauen, wie die photographirenden Apparate sie darstellen. In diesen beiden Hinsichten waren ja die mechanisch registrirenden Seismographen trotz ihrer sonstigen grossen Vorzüge erheblich im Nachteil. Es gelang mir in der That, das Ziel zu erreichen: Der Apparat ist nur 2 Meter hoch, also ohne Umstände aufzustellen, und die Empfindlichkeit, 32 mm Ausschlag für 1 Bogensekunde Neigung, übertrifft sowohl die meines photographischen Pendels (12 mm) als auch die des v. Rebeur-Paschwitz'schen (12 mm) und des Ehlert'schen Pendels (18 mm) in gewöhnlicher Regulirung, entspricht also dem grössten Werth, welcher bisher benutzt worden ist. —

7. Das Studium der *vertikalen Komponente der Erdbewegung* wurde in der Göttinger Warte zunächst von meinem Assistenten Herrn Dr. W. Schlüter aufgenommen. Er erdachte und baute einen besonderen Apparat, einen „*Klinographen*“, wie er ihn nannte, zur *photographischen Registrirung der Neigungsänderungen*, welche er bei den Erdbeben nach dem Vorgang vieler namhaften Seismologen in erheblichem Betrage vermuthete. Der Apparat begann seine Arbeit im Mai 1899 und zeigte bald, dass die erwarteten Neigungsänderungen nicht vorhanden sind. Sein erstes Resultat¹⁾ war also negirender Art. Diesem folgten jedoch bald auch positive Ergebnisse. Der Apparat kann nämlich leicht für Registrirung jeder beliebigen Komponente parallel einer gewissen durch seine Aufstellung bedingten Vertikalebene regulirt werden, und wurde demgemäss verwendet. Die Registrirungen der *Horizontalkomponente* ergaben völlige Uebereinstimmung mit denen des Horizontalpendels, die der *Vertikalkomponente* sehr

1) Dargelegt in W. Schlüter's Doctor-Dissertation, Göttingen 1900.

bedeutungsvolle Resultate, über welche W. Schlüter selbst einen Bericht veröffentlicht.

Um Vorstudien für die technischen Einzelheiten eines in Aussicht genommenen mechanisch registrierenden Vertikalseismographen zu machen, habe ich einen kleinen *Vertikal-Apparat* herstellen lassen, der seit Mitte Oktober 1900 in Thätigkeit ist und — seinen kleinen Dimensionen entsprechend — *photographisch registriert*. —

I. Theil. Allgemeine Theorie.

§ 1. Die zu beobachtenden Bewegungen.

8. *Verrückungen*. Bei den seismischen Bewegungen der Erdoberfläche haben wir horizontale und vertikale Schwankungen zu unterscheiden, die in der Regel mit einander verbunden sind. Für die Rechnung werden wir uns auf 3 zu einander senkrechte Richtungen x, y, z beziehen, von denen die x - und die y -Richtung horizontal und die z -Richtung vertikal nach oben orientirt ist. Die Verrückungen der Theilchen der Erdrinde parallel x, y, z sollen mit ξ, η, ζ bezeichnet werden. Zu einer Verrückung σ in beliebiger Richtung s gehören also:

$$(1) \quad \xi = \sigma \cos(s, x), \quad \eta = \sigma \cos(s, y), \quad \zeta = \sigma \cos(s, z),$$

wenn unter (s, n) der Winkel zwischen der s - und der n -Richtung verstanden wird.

Um der Vorstellung einen Anhalt zu geben, werde bemerkt, dass bei Erdbeben, deren Herd mehrere 1000 Kilometer entfernt ist, Ausweichungen von 1 Millimeter nur hin und wieder im Jahr überschritten werden und zwar allein in langsamen Schwingungen mit Perioden von 10 Sekunden und darüber. Die beigemischten Schwingungen mit kurzen Perioden von 2 Sekunden und darunter zeigen Ausweichungen, welche nicht oft über $1/100$ Millimeter hinausgehen. Auch bei Naheerdbeben — selbst bei Entfernungen des Epicentrums unter 100 Kilometer — muss man meist auf kleinere Verrückungen als 1 Millimeter rechnen. Die persönliche Empfindung des Menschen beginnt günstigsten Falls schon bei $1/100$ Millimeter. Bei verwüstenden Erdbeben hat man relative Verschiebungen im Gelände von mehreren Metern beobachtet. Für die Empfindung und auch für die Zerstörungen kamen dabei vorherrschend Schwingungen kurzer Perioden in Betracht, deren Amplitude ein bis zwei Dezimeter erreichte.

9. *Änderungen der Schwerkraft*. Als „Schwerkraft“ gilt dem Maasse nach diejenige Kraft, welche ein relativ zur Erde in Ruhe gehaltener Körper von der Masse 1 auf seine Unterstützung ausübt. Bei dieser Definition berücksichtigt man die Rotation der Erde, sieht aber von etwaigen seismischen Bewegungen

ab. Für manche Ueberlegungen empfiehlt es sich, den Wortlaut auch bei seismisch bewegter Erde unverändert beizubehalten. Dann ergeben sich als Folge der seismischen Bewegungen *scheinbare Aenderungen der Schwerkraft*.

Wir erhalten die Aenderung dem Maasse nach in dem Trägheitswiderstand der Masseneinheit, der gleich und entgegengesetzt der aufgezungenen Beschleunigung ist. Die Komponenten des seismischen Theiles der Schwerkraft parallel den im vorigen Artikel festgesetzten Axensystemen x, y, z werden also angegeben durch

$$-\frac{d^2\xi}{dt^2}, -\frac{d^2\eta}{dt^2}, -\frac{d^2\xi}{dt^2}.$$

Die entsprechenden Komponenten des nicht seismischen Theiles seien

$$\Delta g_x, \Delta g_y, -g + \Delta g_z,$$

wobei g die als normal geltende Fallbeschleunigung darstellt und $\Delta g_x, \Delta g_y, \Delta g_z$ Störungskomponenten anderen als seismischen Ursprungs bedeuten, herrührend zum Beispiel von der Anziehung der Himmelskörper. g musste das negative Vorzeichen erhalten, weil wir die z -Richtung nach oben hin positiv rechnen, und die normale Schwerkraft darum für sie einen negativen Werth erhält. Die Komponenten der gesammten Schwerkraft werden hiernach gleich

$$(2) \quad -\frac{d^2\xi}{dt^2} + \Delta g_x, -\frac{d^2\eta}{dt^2} + \Delta g_y, -g - \frac{d^2\xi}{dt^2} + \Delta g_z.$$

Da die zu erwartenden seismischen und sonstigen Störungen sehr klein gegenüber g sind, dürfen wir in

$$(3) \quad g + \frac{d^2\xi}{dt^2} - \Delta g_z$$

die *Gesamtintensität* und in

$$(4) \quad i_x^{(g)} = \frac{1}{g} \frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{\Delta g_x}{g}, \quad i_y^{(g)} = \frac{1}{g} \frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{\Delta g_y}{g}$$

bezüglich in

$$(4') \quad 206000 i_x^{(g)} = 206000 \left(\frac{1}{g} \frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{\Delta g_x}{g} \right), \quad 206000 i_y^{(g)} = 206000 \left(\frac{1}{g} \frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{\Delta g_y}{g} \right)$$

die *Neigungswinkel in Bogenmaass, bezüglich in Winkelsekunden* der abgelenkten Vertikalen sehen. $i^{(g)}$ bezieht sich auf die Vertikalebene, welche die x -Richtung enthält, $i_y^{(g)}$ gehört entsprechend zur y -Richtung. Als positiv gilt diejenige Drehung, welche die z -Richtung auf dem kürzesten Wege in die x - bezüglich die y -Richtung überführen würde. Man wird bemerken, dass ich mich hier nicht an die gewöhnliche Bezeichnungsweise der mathematischen Physik anschliesse. Es geschieht dies deshalb, weil es sich im Hinblick auf die praktische Verwendung nicht empfiehlt, die drei Richtungen x, y, z als gleichwerthig

anzusehen, sondern besser scheint, die vertikale z -Richtung den beiden horizontalen x - und y -Richtungen gegenüber zu stellen.

Die Zahl 206000 ist nicht genau richtig, sondern bedeutet nur einen bequemen Näherungswerth für die irrationale Zahl $360 \times 60 \times 60 / 2\pi = 206264,8\dots$, welche um etwa $1/10\%$ grösser ist; auf die Abweichung kommt es meist nicht an, in der Regel ist es sogar erlaubt, den bequemeren Werth 200000 zu nehmen.

Bei Fernerdbeben in 1000 und mehr Kilometer treten Neigungen von $1/200000$, entsprechend 1 Winkelsekunde, nur selten im Jahre auf. —

Denkt man sich die wirklichen, durch ξ , η , ζ dargestellten Bewegungen in irgend einer Weise als Superposition von Einzelbewegungen $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3, \dots$:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots, \quad \eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \dots, \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \dots,$$

so ergeben sich die wirklichen Beschleunigungen $d^2\xi/dt^2$, $d^2\eta/dt^2$, $d^2\zeta/dt^2$ als Superposition der Einzelbeschleunigungen:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\xi_1}{dt^2} + \frac{d^2\xi_2}{dt^2} + \frac{d^2\xi_3}{dt^2} + \dots, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2\eta_1}{dt^2} + \frac{d^2\eta_2}{dt^2} + \frac{d^2\eta_3}{dt^2} + \dots,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{d^2\zeta_1}{dt^2} + \frac{d^2\zeta_2}{dt^2} + \frac{d^2\zeta_3}{dt^2} + \dots$$

Hieraus folgt, dass auch die Aenderungen der Schwerkraft als Superposition derjenigen Aenderungen erscheinen, welche zu den Einzelbewegungen gehören. Derartige Zerlegungen sind für die Auffassung sowohl dann wichtig, wenn es sich um das Zusammentreffen von Bewegungen verschiedenen Ursprungs, zum Beispiel von Erdbebenbewegungen, Pulsationen, Sturmbewegungen des Aufstellungshauses und dergleichen handelt, als auch, wenn die Bewegungen eines Ursprungs, zum Beispiel der Schwingungen, welche zu einem und demselben Erdbeben gehören, weiter zertheilt werden sollen.

10. *Schwereänderungen bei Sinusschwingungen der Erdoberfläche.* Eine hervorragende Rolle spielen in den seismischen Bewegungen die einfachsten periodischen Schwingungen, die Sinusschwingungen. Ist T die *Periode* (umfassend einen Hin- und Hergang), also die *doppelte Schwingungsdauer*, so haben wir:

$$(5) \quad \xi = \bar{\xi} \sin 2\pi \frac{t + \delta\xi}{T}, \quad \eta = \bar{\eta} \sin 2\pi \frac{t + \delta\eta}{T}, \quad \zeta = \bar{\zeta} \sin 2\pi \frac{t + \delta\zeta}{T},$$

wobei $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ die Maximalschläge und $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ gewisse die Phase bestimmende Konstanten sind. Für die Beschleunigungen ergibt sich

$$-\frac{d^2\xi}{dt^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{\xi} \sin 2\pi \frac{t + \delta\xi}{T}, \quad -\frac{d^2\eta}{dt^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{\eta} \sin 2\pi \frac{t + \delta\eta}{T},$$

$$-\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{\zeta} \sin 2\pi \frac{t + \delta\zeta}{T}.$$

Die Veränderungen der Vertikalkomponente der Schwere und damit zu-

gleich diejenigen der *Gesammtintensität* sind also im Maximum näherungsweise:

$$(6) \quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{\xi},$$

die *seismischen Neigungen der Vertikalen* parallel der (z, x) - und der (z, y) -Ebene sind bei entsprechender Annäherung im Maximum in *Bogenmaass*:

$$(7) \quad \bar{i}_x^{(\varphi)} = \frac{1}{g} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{\xi}, \quad \bar{i}_y^{(\varphi)} = \frac{1}{g} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{\eta}$$

und in *Winkelsekunden*:

$$(7') \quad 206000 \bar{i}_x^{(\varphi)} = 206000 \frac{1}{g} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{\xi}, \quad 206000 \bar{i}_y^{(\varphi)} = 206000 \frac{1}{g} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \bar{\eta}.$$

11. *Einführung der äquivalenten Pendellänge.* Im Folgenden wird es oftmals bequem sein, anstelle von Schwingungsperioden Längen in die Rechnung einzuführen; wir werden dann die Länge A desjenigen einfachen Pendels verwerthen, das eine gleiche Schwingungsperiode T hat, also sich selbst überlassen in gleichem Tempo schwingt. Hiernach besteht zwischen A und T die Beziehung

$$(8) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{A}{g}}, \quad A = g \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2, \quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{A}.$$

In unserem Falle der Sinusschwingungen erhalten wir für die *Maximaländerungen der Vertikalkomponente der Schwere* und zugleich ihrer *Gesammtintensität* sehr einfach:

$$(9) \quad g \frac{\bar{\xi}}{A}$$

und für die *Maximalneigung* in Bogenmaass:

$$(10) \quad \bar{i}_x^{(\varphi)} = \frac{\bar{\xi}}{A}, \quad \bar{i}_y^{(\varphi)} = \frac{\bar{\eta}}{A},$$

in Winkelsekunden:

$$(10') \quad 206000 \bar{i}_x^{(\varphi)} = 206000 \frac{\bar{\xi}}{A}, \quad 206000 \bar{i}_y^{(\varphi)} = 206000 \frac{\bar{\eta}}{A}.$$

Denkt man sich ein Hülfspendel von der Länge A so aufgehängt, dass der Befestigungspunkt an den seismischen Bewegungen nicht theilnimmt, so wird wegen der Gleichheit der Schwingungszeiten der Pendelkörper dauernd die Horizontalschwingungen ξ, η mitmachen, wenn man ihn eine kurze Zeit dazu zwingt. Er wird also an seinem Faden hängend, dauernd in relativer Ruhe bleiben, sodass die Richtung des Fadens jederzeit die Richtung der seismisch abgelenkten Vertikalen angiebt. Die Neigungsänderungen des Fadens zeigen uns dann ohne Weiteres die seismischen Neigungsänderungen der Vertikalen. —

Bei Naheerdbeben beobachtet man Perioden von einigen Sekunden bis herab zu $\frac{1}{100}$ Sekunde entsprechend $\lambda = \frac{1}{40}$ Millimeter; bei Fernerdbeben ist es dagegen meist schon schwierig, Perioden von nur 1 Sekunde, entsprechend $\lambda = 25$ Centimeter, nachzuweisen. Hier herrschen grössere Perioden vor, die im Allgemeinen unter 20 Sekunden, entsprechend $\lambda = 100$ Meter, bleiben, jedoch auch 1 Minute, entsprechend $\lambda = 900$ Meter, erreichen und darüber hinausgehen.

12. *Neigungen der Erdoberfläche.* Da die vertikalen seismischen Verrückungen von Ort zu Ort variiren, wird eine Fläche, die bei seismischer Ruhe horizontal ist, während der Erregung Hebungen und Senkungen zeigen. Indem wir uns die Fläche in der Nähe der physikalischen Erdoberfläche denken und von dem meist nicht in Betracht kommenden Einfluss von Berg und Thal absehen, wollen wir ihre Neigungen gegenüber der ursprünglichen Lage als die *Neigungen der Erdoberfläche* bezeichnen. Diesen *wirklichen* Neigungen stehen *scheinbare* Neigungen gegenüber, welche ihren Grund in den seismischen Richtungsänderungen der Schwerkraft haben. A. Schmidt¹⁾ (Stuttgart) hat darauf hingewiesen, dass die Wirkungen der beiden Arten von Neigungsänderungen leicht verwechselt werden können. Es wird für uns im Folgenden sehr wichtig sein, darauf sorgfältig Acht zu geben, denn es handelt sich hier in der That um eine Quelle, der vielfache Irrthümer entsprungen sind.

Da nur sehr kleine Neigungen in Rücksicht zu ziehen sind, können wir in

$$(11) \quad i_x = -\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad i_y = -\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

die *wirklichen Neigungen* parallel der (z, x) - und (z, y) -Ebene sehen, wobei wie in Artikel 9 diejenigen Drehrichtungen als positiv gelten, welche die z -Richtung auf kürzestem Wege in die x - bezüglich y -Richtung überführen.

Die *scheinbaren Neigungen* der Erdoberfläche sind entgegengesetzt denen der Vertikalen, also nach Artikel 9 gegeben durch

$$(12) \quad [i_x] = -i_x^{(g)} = -\frac{1}{g} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{\Delta g_x}{g}, \quad [i_y] = -i_y^{(g)} = -\frac{1}{g} \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{\Delta g_y}{g}.$$

Die Gleichungen (11) und (12) beziehen sich auf Bogenmaas; die Zahlenwerthe in Winkelsekunden entstehen wieder bei Multiplikation mit 206000.

13. *Fortschreitende Sinuswellen mit vertikalen und longitudinalen horizontalen Bewegungen.* Den einfachsten und uns besonders wichtigen Fall der Neigungsschwingungen bilden über die Erdoberfläche fortlaufende Sinuswellen mit geradliniger Front und mit vertikalen und longitudinalen horizontalen Bewegungen. Etwaige transversale horizontale Bewegungen wollen wir unbeachtet lassen. Wir legen die x -Axe parallel der Fortschreitungsrichtung, sodass die y -Axe

1) Beiträge zur Geophysik, Bd. 3, S. 1, 1898.

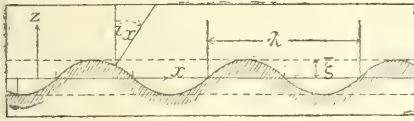
parallel den Wellen zu liegen kommt; dann ist für die Oberfläche

$$(13) \quad \xi = \bar{\xi} \sin 2\pi \left(\frac{t + \delta\xi}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \quad \zeta = \bar{\zeta} \sin 2\pi \left(\frac{t + \delta\zeta}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

zu setzen. $\bar{\xi}$ und $\bar{\zeta}$ bedeuten wiederum die Maximalwerthe von ξ und ζ , $\delta\xi$ und $\delta\zeta$ wiederum Konstanten, welche die Phasen bestimmen; T ist die Schwingungsperiode, λ die Wellenlänge. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v wird durch die Beziehung

$$(14) \quad \lambda = vT$$

bestimmt.



Figur 1.

Die *wirklichen Neigungen* erfolgen hier parallel der Vertikalebene durch die Fortschreitungsrichtung, also parallel der (z, x) -Ebene, und zwar ergibt sich in Bogenmaass:

$$(15) \quad i_x = -\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2\pi}{\lambda} \bar{\xi} \cos 2\pi \left(\frac{t + \delta\xi}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Für die *scheinbaren Neigungen* infolge der horizontalen Schwankungen erhalten wir:

$$(16) \quad [i_x] = \frac{1}{g} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \bar{\xi} \sin 2\pi \left(\frac{t + \delta\xi}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Der Maximalwerth für die wirklichen Neigungen ist hiernach:

$$(17) \quad \bar{i}_x = \frac{2\pi}{\lambda} \bar{\xi}$$

und der Maximalwerth für die scheinbaren Neigungen:

$$(18) \quad [\bar{i}_x] = \frac{1}{g} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \bar{\xi} = \frac{\bar{\xi}}{A},$$

wobei A wiederum die zu T äquivalente Pendellänge bedeutet (Art. 11).

Für das Verhältniss der wirklichen und der scheinbaren Neigungen ergibt sich:

$$(19) \quad \frac{\bar{i}_x}{[\bar{i}_x]} = \frac{\frac{\bar{\xi}}{\lambda}}{\frac{\bar{\xi}}{A}} = \frac{A}{\lambda}$$

Wir erkennen, dass die *wirklichen Neigungen* der Erdoberfläche dann die *scheinbaren* an Grösse erreichen, wenn $\bar{\zeta} : \bar{\xi} = \lambda / 2\pi : A$ ist, das heisst, wenn die vertikalen Verrückungen sich zu den horizontalen verhalten wie die durch 2π

getheilte Wellenlänge zur äquivalenten Pendellänge. In den praktischen Fällen der Seismik ist $\lambda/2\pi$ meist vielmals grösser als \mathcal{A} , *gleich grosse Neigungen gegen die Vertikale, einerseits als wirkliche Neigungen infolge von Vertikalverrückungen, andererseits als scheinbare Neigungen infolge von Horizontalverrückungen, verlangen also im ersten Falle sehr viel grössere Verrückungen als im zweiten.* Auf diese Folgerung machte A. Schmidt in der soeben citirten Arbeit aufmerksam. — Da nach den Göttinger Erfahrungen die Vertikalbewegungen bei Fernerdbeben von gleicher Grössenordnung sind wie die Horizontalbewegungen, haben wir sehr viel grössere scheinbare Neigungen als wirkliche Neigungen zu erwarten. Um ein Urtheil über die Zahlwerthe zu gewinnen, wollen wir beachten, dass — aus freilich nicht ganz zuverlässigen Gründen — die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v für die Hauptwellen auf ca 3 Kilometer = $3 \cdot 10^6$ mm in der Sekunde geschätzt wird. Nehmen wir hierzu für T den häufig vorkommenden Werth von 20 Sekunden, so ergibt sich $\lambda = Tv = 6 \cdot 10^7$ mm, $\mathcal{A} = 10^5$ mm, also für die Neigungen in Bogensekunden die Werthe

$$206000 \bar{i}_z = \frac{1}{50} \bar{\xi}, \quad 206000 [\bar{i}_z] = 2 \bar{\xi},$$

wenn die Ausweichungen ξ und η nach Millimetern gerechnet werden. Bei Fernerdbeben, wo Ausweichungen von einigen Millimetern vorkommen, treten nach der Gleichung rechts scheinbare Neigungen von mehreren Bogensekunden auf. Die Gleichung links zeigt uns im Gegensatz hierzu, dass *für die wirklichen Neigungen nur ziemlich kleine Bruchtheile von Bogensekunden zu erwarten sind.* Diese Folgerung bleibt auch bestehen, wenn Beobachtungsdaten für andere Perioden T zu Grunde gelegt werden.

14. *Drehungen um die Vertikale.* Als Anfangspunkt unseres Koordinatensystemes wollen wir für die folgenden Entwicklungen den *Referenzpunkt* der Beobachtungen benutzen, das heisst den Punkt der Erdoberfläche, auf welchen wir die zu registrirenden seismischen Bewegungen beziehen. Für einen nahe benachbarten Punkt mit den Koordinaten x, y dürfen dann für die horizontalen Verschiebungen parallel x und y die Werthe

$$(20) \quad \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} x + \frac{\partial \xi}{\partial y} y, \quad \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} x + \frac{\partial \eta}{\partial y} y$$

angenommen werden, wenn man ξ, η , sowie die Faktoren der x und y auf den Referenzpunkt bezieht. Hieraus lässt sich mittels einfacher Rechnungen leicht folgern, *dass eine Linie, welche durch den Referenzpunkt in der Richtung v hindurchgeht, eine Drehung um den Winkel*

$$(21) \quad \omega_v = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \cos 2(v, x) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \sin 2(v, x)$$

erfährt. Wir erkennen, dass die Drehung im allgemeinen mit der Richtung v variirt. *Als mittlere Drehung der Erdoberfläche an dem Beobachtungsort werden*

wir den arithmetischen Mittelwerth

$$(22) \quad \omega = \frac{1}{2\pi} \int \omega_v d(\nu, x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)$$

der Drehung aller durch den Referenzpunkt gehenden Linien bezeichnen.

15. *Drehungen bei fortschreitenden Sinuswellen.* Bei den in Artikel 13 betrachteten *Wellen mit longitudinaler horizontaler Bewegung*, für welche

$$(23) \quad \xi = \bar{\xi} \sin 2\pi \left(\frac{t + \delta \xi}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \quad \eta = 0$$

zu setzen ist, gilt

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{2\pi}{\lambda} \bar{\xi} \cos 2\pi \left(\frac{t + \delta \xi}{T} - \frac{x}{\lambda} \right); \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$

also

$$(24) \quad \omega_v = \bar{\omega}_v \cos 2\pi \left(\frac{t + \delta \xi}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \quad \bar{\omega}_v = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\lambda} \bar{\xi} \sin 2(\nu, x); \quad \omega = 0.$$

Bei entsprechenden *Wellen mit transversaler horizontaler Bewegung*:

$$(25) \quad \xi = 0, \quad \eta = \bar{\eta} \sin 2\pi \left(\frac{t + \delta \eta}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

ergiebt sich:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{2\pi}{\lambda} \bar{\eta} \cos 2\pi \left(\frac{t + \delta \eta}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0;$$

$$(26) \quad \left. \begin{array}{l} \omega_v = \bar{\omega}_v \\ \omega = \bar{\omega} \end{array} \right\} \cos 2\pi \left(\frac{t + \delta \eta}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \quad \bar{\omega}_v = -\frac{2\pi}{\lambda} \bar{\eta} \cos^2(\nu, x); \quad \bar{\omega} = -\frac{1}{2} \frac{2\pi}{\lambda} \bar{\eta}.$$

Die grössten Drehungen erhalten wir bei longitudinalen, bezüglich bei transversalen Bewegungen in

$$\frac{1}{2} \frac{2\pi}{\lambda} \bar{\xi}, \quad \frac{2\pi}{\lambda} \bar{\eta}.$$

Vergleicht man hiermit den in Artikel 13 gefundenen Werth für die maximalen wirklichen Neigungen

$$\bar{i}_v = \frac{2\pi}{\lambda} \bar{\xi}$$

und beachtet die schon erwähnte Erfahrung, dass bei Fernerdbeben die Horizontalbewegungen von gleicher Grössenordnung wie die Vertikalbewegungen sind, so folgt, dass die *Drehungen um die Vertikale etwa ebenso gross zu schätzen sind wie die wirklichen Neigungen*; sie werden also wie diese nur kleine Bruchtheile einer Bogensekunde erreichen.

16. *Bewegungen des Gestelles.* Bisher wurde nur von den Bewegungen der Erdoberfläche gesprochen. Fassen wir jetzt den Seismographen selbst ins Auge, so muss unterschieden werden zwischen den „*Bewegungen des Gestelles*“ und den „*Bewegungen des Gehänges*“. Als „*Gehänge*“ wird dabei der bewegliche Theil des Apparates bezeichnet werden, welcher die Registrirungen vermittelt, als „*Gestell*“ der in sich feste und mit der Erde fest verbundene Theil.

Für das Gestell wird stets eine so solide Konstruktion vorausgesetzt werden, dass die elastischen Deformationen gegenüber den Bewegungen des Gehänges unmerklich klein bleiben. In der Sprechweise der Mechanik wird das Gestell hiernach als „starr“ gelten können. Zur Beschreibung seiner Bewegungen genügen dann 6 Grössen, von denen 3 eine Parallelverschiebung und 3 eine Drehung darstellen. Die Zerlegung ist dabei nicht eindeutig, sondern enthält ein willkürliches Element. Als solches nehmen wir die Auswahl eines beliebigen Punktes und betrachten dann als Parallelverschiebung diejenige, bei welcher der ausgezeichnete Punkt aus seiner Nulllage in die jeweilige Lage übergeht, und als Drehung diejenige um den ausgezeichneten Punkt, welche das Gestell in die jeweilige Orientirung überführt.

Wir beziehen uns wieder auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z mit nach oben gerichteter z -Axe. Ist s die Richtung, σ die Grösse der Parallelverschiebung, so darf sie aufgefasst werden als Superposition dreier Verschiebungskomponenten

$$(27) \quad \sigma_x = \sigma \cos(s, x), \quad \sigma_y = \sigma \cos(s, y), \quad \sigma_z = \sigma \cos(s, z)$$

parallel den Koordinatenachsen. — Bei der Drehung ist eine entsprechende einfache Zerlegung nicht ohne Weiteres möglich, insbesondere hängt das Resultat der Zusammensetzung verschiedener Drehungen im Allgemeinen nicht allein von den Drehungen, sondern auch von ihrer Reihenfolge ab. Glücklicher Weise dürfen wir von allen derartigen Komplikationen absehen, denn in der praktischen Seismometrie handelt es sich nur um so geringe Drehungen, dass sie als unendlich klein angesehen werden können, und in diesem Falle kommen die einfachen Gesetze der Vektorzerlegung und Zusammensetzung zur Geltung. Ist also n die Axenrichtung, ϑ der Winkel der Drehung, so darf sie aufgefasst werden als Superposition dreier Drehungen

$$(28) \quad \vartheta_x = \vartheta \cos(n, x), \quad \vartheta_y = \vartheta \cos(n, y), \quad \vartheta_z = \vartheta \cos(n, z)$$

um die Koordinatenachsen. Für ϑ_x gilt hier als positiv diejenige Drehrichtung um die x -Axe, welche die y -Axe auf dem kürzesten Wege in die z -Axe überführt; $-\vartheta_x$ entspricht also einer Neigung \parallel der Vertikalebene (z, y) , die wir mit i_y bezeichnen. In ähnlicher Weise gehören $+\vartheta_y$ und i_x zusammen. (Vergl. Artikel 9.)

In den Komponenten $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ der Parallelverschiebung σ und den Komponenten $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ der Drehung ϑ haben wir die 6 zur Bestimmung der jeweiligen Lage des Gestelles erforderlichen Grössen gewonnen, und es bleibt uns nun noch die Aufgabe, ihren Zusammenhang mit den seismischen Verrückungen der Erd-

oberfläche zu untersuchen. Besonders wichtig ist hierbei der spezielle Fall, in welchem der Referenzpunkt der Erdoberfläche, auf den die seismischen Verrückungen ξ , η , ζ und Drehungen i_x , i_y , ω_x , ω bezogen werden, zugleich als ausgezeichneter Punkt für die Zerlegung der Gestellbewegungen genommen wird. Der Referenzpunkt wird freilich im Allgemeinen nicht in der Materie des Gestelles liegen, aber darauf kommt es auch nicht an, denn es darf für die Zerlegung der Bewegung offenbar jeder beliebige Punkt im Raume gewählt werden, der die Gestellbewegungen mitmacht, dessen Lage wir uns also relativ zum Gestelle bestimmt denken.

Für den *Referenzpunkt* wird es in Regel erlaubt sein, einfach

$$(29) \quad \xi = \sigma_x, \eta = \sigma_y, \zeta = \sigma_z, i_x = \vartheta_y, i_y = -\vartheta_x$$

zu setzen. Sollte der Boden, auf dem das Instrument steht, sehr nachgiebig sein, oder der Pfeiler, der es trägt, sehr hoch aufragen, oder das Instrument in den oberen Stockwerken eines Gebäudes aufgestellt sein, so sind wenigstens bei schnellen seismischen Bewegungen merkliche Abweichungen zu erwarten, die sich nicht von vorne herein überblicken lassen. Wir wollen trotzdem im Folgenden die Beziehungen (29) annehmen, dabei aber ausdrücklich hervorheben, dass die ξ , η , ζ , i_x , i_y damit eine andere Bedeutung erhalten als in den früheren Artikeln. Früher bezogen sie sich direkt auf die seismischen Verrückungen der Erdoberfläche, weiterhin aber geben sie die Parallelverschiebungen und Neigungen des Seismographengestelles an, wenn die Zerlegung der Bewegung unter Auszeichnung des Referenzpunktes der Erdoberfläche geschieht. —

Während der Zusammenhang zwischen den σ_x , σ_y , σ_z , ϑ_x , ϑ_y mit den seismischen Verrückungen sich zwar nicht allgemein, aber doch für die gewöhnlich vorkommenden Fälle angeben lässt, bleiben wir über den Zusammenhang zwischen der Drehung ϑ_x des Gestelles um die Vertikale und den seismischen Drehungen ω_x , ω der Erdoberfläche ganz im Ungewissen. Hier wird alles auf die Art der Aufstellung ankommen. So soll denn weiterhin bei der Beschreibung der Bewegungen des Seismographen ϑ_x beibehalten werden. Bei *Zerlegung in Bezug auf den Referenzpunkt der Erdoberfläche* haben wir so die folgenden Bestimmungsstücke für die jeweilige Lage des Gestelles

$$(30) \quad \xi, \eta, \zeta, i_x, i_y, \vartheta_x.$$

Wird der Koordinatenanfangspunkt in den Referenzpunkt gelegt, und sind x , y , z die Koordinaten irgend eines Punktes, der die Bewegungen des Gestelles mitmacht, in der Nulllage, das heisst, in derjenigen Stellung des Seismographen, die wir als störungsfrei betrachten, so dürfen sie während der Verrückungen wegen der angenommenen Kleinheit der Drehung gleich

$$x + \xi + z i_x - y \vartheta_x, \quad y + \eta + z i_y + x \vartheta_x, \quad z + \zeta - x i_x - y i_y,$$

gesetzt werden. Die Verschiebungen des Punktes x , y , z parallel den Koor-

dinatenaxen sind dabei

$$(31) \quad \xi + z i_x - y \vartheta_z, \quad \eta + z i_y + x \vartheta_z, \quad \zeta - x i_x - y i_y.$$

Bei der Zerlegung der Bewegung in Bezug auf einen beliebigen anderen Punkt als den Referenzpunkt bleiben die Drehungen i_x, i_y, ϑ_z dieselben; die Parallelverschiebungen aber, welche den Verrückungen des aufgewählten Punktes entsprechen müssen, werden nun durch

$$(32) \quad \xi + Z i_x - Y \vartheta_z, \quad \eta + Z i_y + X \vartheta_z, \quad \zeta - X i_x - Y i_y$$

angegeben, wenn X, Y, Z die Koordinaten des Punktes sind.

17. *Eintheilung der Seismographen.* Zurückblickend erkennen wir, dass sich für die Registrirung durch Seismographen die folgenden beiden Klassen von Grössen darbieten:

I Die *Parallelverschiebungen* ξ, η, ζ und damit zusammenhängend die *scheinbaren Neigungen der Erdoberfläche* und die *scheinbaren Aenderungen der Schwerkraft*.

II Die *Drehungen* i_x, i_y, ϑ_z und damit die *wirklichen Neigungen der Erdoberfläche* und ihre Drehungen um die Vertikale.

Dementsprechend können wir zwei Hauptklassen von Seismographen unterscheiden. Zur ersten Klasse gehören vor allem:

Ia *Apparate zur Registrirung der horizontalen Verrückungen* (ξ, η), bezüglich der *scheinbaren Neigungen*, welche *Horizontalseismographen* genannt werden sollen.

Ib *Apparate zur Registrirung der vertikalen Verrückung* (ζ), bezüglich der *scheinbaren Aenderung der Vertikalkomponente der Schwere*, welche *Vertikalseismographen* genannt werden sollen.

In der zweiten Klasse heben sich in entsprechender Weise heraus:

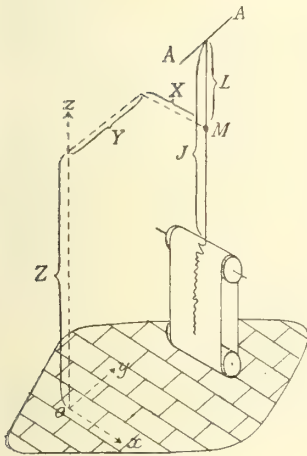
IIa *Apparate zur Registrirung der wirklichen Neigungen* (i_x, i_y); Herr Dr. Schlüter, der den ersten von diesen erdachte und baute, hat der ganzen Gruppe den Namen *Klinographen* gegeben. Ferner:

IIb *Apparate zur Registrirung der Drehungen um die Vertikale* (ω_x, ω_y). Sie sind für die speciellen Zwecke der Seismik noch nicht konstruirt worden. —

Zu bemerken ist, dass die *Horizontalseismographen gewöhnlicher Bauart auch auf wirkliche Neigungen reagiren*. In der praktischen Seismographie kommt dies jedoch nicht zur Geltung, weil der Einfluss der wirklichen Neigungen gegenüber dem der scheinbaren verschwindet. Entsprechend wird man auch von einem *Klinographen nicht zu verlangen brauchen, dass er gegen die Horizontalverrückungen, bezüglich die scheinbaren Neigungen unempfindlich bleibe*; ja man könnte sogar eine überwiegende Mitregistrirung der scheinbaren Neigungen zulassen, wenn nur durch den Vergleich mit einem gleichzeitig arbeitenden Horizontalseismographen eine Trennung der beiden Arten von Neigungen möglich gemacht wird. Für die Theorie verwischt sich hierdurch der Unterschied zwischen den Instrumenten Ia und IIa insofern, als er aus einem qualitativen nur zu einem quantitativen wird.

Zum Schlusse darf nicht unerwähnt bleiben, dass bis heute noch kein einziger Apparat der zweiten Klasse positive Ergebnisse aufzuweisen hat. Schlüter's Klinograph hat die ihm gestellte Aufgabe freilich gelöst, indem er entschied, dass die gewöhnlichen Aufzeichnungen der Seismographen bei Erdbeben entgegen einer oftmals geäußerten Ansicht Parallelverschiebungen und nicht Neigungen anzeigen. Für die Aufzeichnungen der theoretisch zu erwartenden sehr kleinen Neigungen aber war die Empfindlichkeit nicht hinreichend. Herr Dr. Schlüter beabsichtigt, einen neuen Klinographen zu bauen, der die so noch übrig gebliebene äusserst schwierige, aber auch äusserst wichtige Aufgabe hoffentlich bewältigen wird.

§ 2. Das reibungslose einfache Pendel als Seismograph.



Figur 2.

18. *Der Apparat.* Der einfachste Repräsentant eines Horizontal-Seismographen ist ein gewöhnliches, um eine horizontale Axe (A, A in Figur 2) drehbares Pendel, das seine Bewegungen mit der Spitze eines Zeigers, die wir „Indikator“ nennen werden, auf einem durch ein Uhrwerk bewegtes Papier aufzeichnet. Wir wollen annehmen, dass gegenüber der Masse des eigentlichen Pendelkörpers, M , alle übrige am Pendel (mit seinem Zeiger) vernachlässigt werden kann, und dass der Pendelkörper als punktförmig gelten darf; wir setzen also ein „einfaches“ oder „mathematisches“ Pendel voraus. *Es wird sich bald zeigen, dass ein jeder der für die gewöhnliche Praxis in Betracht kommenden Horizontal-Seismographen sich in seinen Aufzeichnungen gerade so wie ein solches verhält.* Eben darum scheint es zweckmässig, die Theorie an ihm zu ent-

wickeln, wo die Verhältnisse besonders leicht zu übersehen sind.

Um die Darstellung so weit als irgend möglich zu vereinfachen, schliessen wir vorläufig alle Bewegungshindernisse aus, nehmen also an, dass der Luftwiderstand die Bewegung nicht merklich beeinflusse und auch die Reibung in der Axe sowie an der Schreibspitze zu vernachlässigen sei.

19. *Charakteristische Konstanten.* Die Schwingungsebene des Pendels liege parallel der x -Richtung. Dann kommt von der Parallelverschiebung nur die Komponente parallel der x -Axe in Betracht, also die Komponente ξ , wenn die Gestellbewegung in Bezug auf den Referenzpunkt (O in Figur 2) zerlegt wird. Von der Drehung sind die Neigungskomponente i_x parallel der (z, x) -Ebene und die Drehung ϑ_z um die vertikale z -Axe von Einfluss.

X, Y, Z seien die Koordinaten des Pendelkörpers M in der Ruhelage, L bedeute die „Pendellänge“, das heisst, den Abstand des Pendelkörpers von der

Drehungsaxe. Die „Schwingungsperiode“ T des sich selbst überlassenen Pendels wird dann bestimmt durch die Gleichung

$$(33) \quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L}.$$

J sei die „Indikatorlänge“, das heisst, der Abstand des Indikators von der Drehaxe. Bei einer dauernden Neigungsänderung des Apparates parallel der Schwingungsebene um den Winkel i ergibt sich für das Pendel eine entsprechende Neigung gegen das Gestell, für den Indikator also eine neue Ruhelage, welche von der alten um die Strecke

$$Ji \text{ bezüglich } \frac{J}{206000} i$$

abweicht, je nachdem i in Bogenmaass oder in Winkelsekunden gemessen wird. $J/206000$ ist die Veränderung der Indikatorstellung für 1 Winkelsekunde, zeigt also die Empfindlichkeit des Seismographen gegen statische Neigungsänderungen an, wenn die Winkelsekunde als Einheit genommen wird; die Indikatorlänge J selbst misst in gleicher Weise die Empfindlichkeit bei Bogenmaass; dabei ist zu beachten, dass der Winkel 1 in Bogenmaass $57^{\circ},3$ beträgt, also nur als Rechnungsgrösse, nicht als wirklicher Ausschlag in Betracht kommt.

Die Empfindlichkeit eines beliebig gebauten Seismographen gegen dauernde Neigungen parallel der Vertikalebene (z, s) durch die beliebige horizontale Richtung s wird weiterhin bei Bogenmaass mit $J^{(s)}$ bezeichnet werden. Da der Seismograph sich dann nach dem eben Gesagten bei Neigungen parallel dieser Ebene gerade so verhält, wie ein parallelschwingendes Pendel mit der Indikatorlänge $J^{(s)}$, so kann $J^{(s)}$ allgemein die zu s gehörige „äquivalente Indikatorlänge“ genannt werden. — Das Hinzutreten einer horizontalen Komponente Δg , der Schwerkraft ist gleichwerthig mit einer dauernden Neigung $i_s = \Delta g_s/g$, ergibt also den Ausschlag $(J^{(s)}/g) \Delta g_s$. Hieraus folgt, dass $J^{(s)}/g$ die Empfindlichkeit gegen Schwerkraftänderungen $\parallel s$ angiebt. —

Bei der von uns vorausgesetzten Aufstellung des Pendels ist

$$(34) \quad J^{(s)} = J, J^{(v)} = 0. —$$

Der Indikator zeichnet die Bewegungen des Pendelkörpers relativ zum Gestell

$$(35) \quad V = \frac{J}{L}$$

mal vergrössert auf; darum soll V die „Indikatorvergrösserung“ genannt werden.

Bei sehr schnellen, kurzdauernden Horizontalverschiebungen wird der Pendelkörper den Bewegungen offenbar nicht merklich folgen, sondern „stationär“ bleiben, wie die Seismologen zu sagen pflegen; hieraus folgt, dass solche Bewegungen V -mal vergrössert und umgekehrt aufgezeichnet werden, dass also die negativ genommene Indikatorvergrösserung V die Vergrösserung sehr schneller Horizontal-

verrückungen angeht. — Eine genaue Darstellung im Sinne der Mathematik, würde hier den Begriff und den Ausdruck „unendlich schnell“ verlangen. Der Ersatz von „unendlich schnell“ durch „sehr schnell“ deutet in der üblichen Weise auf die erlaubte Anwendung des Grenzwertes V in solchen wirklichen Fällen hin, wo die Abweichung nicht merklich ist. —

Es wird die Vergrößerung sehr schneller Parallelverschiebungen parallel der beliebigen Richtung s weiterhin mit $-V^{(s)}$ bezeichnet und dabei $V^{(s)}$ mit Rücksicht auf das eben gefundene Verhalten eines einfachen Pendels die zu s gehörige „Indikatorvergrößerung“ genannt werden. In unserem Falle ist

$$(36) \quad V^{(x)} = J^{(x)}/L, \quad V^{(y)} = 0, \quad V^{(z)} = 0. \quad -$$

Auch bei sehr schnellen Neigungsänderungen bleibt der Pendelkörper stationär; da das Gestell dabei in der Höhe Z des Pendelkörpers parallel der x -Richtung die Verrückungen Zi_x erfährt, ergeben sich die Indikатораusschläge $-V^{(x)}Zi_x$.

Aehnliche Ueberlegungen ergeben für die Ausschläge bei sehr schnellen Drehungen ϑ_x um die Vertikale die Werthe $V^{(x)}Y\vartheta_x$.

Wir werden weiterhin die Empfindlichkeit gegen sehr schnelle Neigungen parallel der Vertikalebene durch die beliebige horizontale Richtung s mit $-W^{(s)}$ und die Empfindlichkeit gegen sehr schnelle Drehungen um die Vertikale mit $-W^{(\vartheta_s)}$ bezeichnen, wenn Drehungsaxen durch den Referenzpunkt angenommen werden. In unserem Falle ist hiernach:

$$(37) \quad W^{(iz)} = V^{(z)}Z = \frac{J^{(z)}}{L}Z, \quad W^{(iy)} = 0, \quad W^{(\vartheta_x)} = -V^{(x)}Y = -\frac{J^{(x)}}{L}Y. \quad -$$

Die hervorgehobene Beziehung zum Referenzpunkt ist wohl zu beachten. Bei anders gelegenen Drehungsaxen ergeben sich andere Empfindlichkeiten W ; diese werden zu 0, wenn die Axen durch M hindurchgehen.

Die X -Ordinate kommt weder bei Parallelverschiebungen, noch bei Neigungen, noch bei Drehungen um die Vertikale zur Geltung, ist also überhaupt gleichgültig. Auch die Grösse der Masse M erscheint bedeutungslos, denn alles, was wir verlangen müssen, ist nur, dass M hinreicht, um die Reibungswiderstände unserer Annahme gemäss unschädlich zu machen.

So bleiben als charakteristische Bestimmungsstücke für unser seismisches Pendel die Grössen L , $J^{(x)} = J$, Z , Y übrig.

Statt der *Pendellänge* L können wir auch die durch Gleichung (33) damit verbundene *Schwingungsperiode* T angeben, ebenso

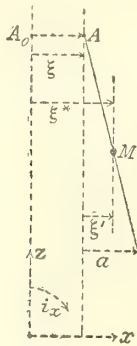
statt der *Indikatorlänge* $J^{(x)}$ die durch erste Gleichung (36) damit verbundene *Empfindlichkeit gegen schnelle Parallelverschiebungen* $V^{(x)}$,

statt der *Ordinate* z die durch die erste Gleichung (37) damit verbundene *Empfindlichkeit gegen schnelle Neigungsänderungen* $W^{(iz)}$,

statt der *Ordinate* Y die durch die dritte Gleichung (37) damit verbundene *Empfindlichkeit gegen schnelle Drehungen um die Vertikale* $W^{(\vartheta_x)}$.

Wollen wir bei der Beschreibung genau sein, so ist hier hinzuzufügen, dass $J^{(y)}$, $V^{(y)}$, $W^{(y)}$ und $V^{(z)}$ gleich 0 sind.

20. *Einwirkung von Parallelverschiebungen.* Als Vorbereitung für die Ableitung der Bewegungsgleichung des Indikators bei beliebigen seismischen Bewegungen soll zunächst der Fall der nicht von Drehungen begleiteten Parallelverschiebungen untersucht werden.



Figur 3.

Figur 3 stelle die Schwingungsebene des Pendels dar. A_0 sei die Lage der Axe bei seismischer Ruhe, A die Lage bei der seismischen Verrückung ξ . ξ' bedeute den Ausschlag des Pendelkörpers relativ zum Gestell, also auch relativ zu der Erdoberfläche an der betreffenden Stelle;

$$\xi^* = \xi + \xi'$$

ist dann die Verrückung relativ zur Erde im Ganzen und kann, da es bei unseren Problemen auf die Bewegung der Erde im Ganzen — auf ihre Wanderung durch den Weltenraum und ihre Axendrehung — nicht ankommt, als *absolute Verrückung im Raume* angesehen werden.

Die Ableitung der Bewegungsgleichung des Pendels ist hiernach an ξ^* zu knüpfen. Wir rechnen mit der gewöhnlichen Schwerkraft, die für den Pendelkörper M einen Zug Mg nach unten ergibt. Da nur geringe Bewegungen der Erdoberfläche und geringe Ausschläge des Pendels vorausgesetzt werden, ist es erlaubt, die Spannung des Pendelstabs ebenfalls $= Mg$ zu setzen. Bei einer Neigung des Pendels ergibt diese Spannung dann für M eine Kraftkomponente $-Mg \xi'/L$ parallel der x -Richtung, sodass die Beschleunigung $d^2 \xi^*/dt^2$ durch die Gleichung

$$(38) \quad M \frac{d^2 \xi^*}{dt^2} = -M \frac{g}{L} \xi'$$

bestimmt wird. Ersetzen wir hierin ξ^* durch $\xi + \xi'$ und gemäss Figur 3 und der ersten Gleichung (34) noch ξ' durch $L a/J^{(z)}$, wobei a den registrierten Ausschlag des Indikators bedeutet, so entsteht in

$$(39) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{g}{L} a - \frac{J^{(z)}}{L} \frac{d^2 \xi}{dt^2}$$

die gesuchte *Indikatorgleichung für Parallelverschiebungen*.

21. *Einwirkung von Drehungen und Aenderungen der Schwerkraft.* Wir wollen nun zweitens Parallelverschiebungen ausschliessen und *Drehungen* annehmen; dabei soll aber zunächst vorausgesetzt werden, dass die Drehungen um den Punkt X , Y , Z , das heisst, um den Ruhepunkt von M stattfinden. Wegen der stets nur äusserst geringen Ausweichung von M darf dann angenommen werden, dass mit den Drehungen nicht unmittelbar Aenderungen der Indikatorstellung verbunden sind.

i_x sei der Neigungswinkel parallel der (z, x) -Ebene, ξ' wie vorhin die Ausweichung des Pendelkörpers relativ zum Gestell, ξ^* die Ausweichung relativ zur Gleichgewichtslage bei seismischer Ruhe. Wegen unserer Annahme über die Lage der Drehungsaxen und nur kleiner Bewegungen ist dann

$$\xi^* = \xi'$$

zu setzen. Die Neigung der Pendelstange gegen die Normale ist

$$\left(i_x - \frac{\xi'}{L}\right);$$

dementsprechend ergibt sich als bewegende Kraft \parallel der x -Richtung

$$\left(i_x - \frac{\xi'}{L}\right)Mg,$$

und wir erhalten

$$(40) \quad M \frac{d^2 \xi^*}{dt^2} = -Mg \left(\frac{\xi'}{L} - i_x\right).$$

Wird hierin ξ' für ξ^* und $L\alpha/J^{(z)}$ für ξ' gesetzt, so folgt als *Bewegungsgleichung des Indikators bei Drehungen um den Ruhepunkt des Pendelkörpers*:

$$(41) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{g}{L} a + \frac{J^{(z)}}{L} g i_x.$$

Finden ausser den Drehungen noch *Änderungen der Schwerkraft* statt, so ergibt die Komponente Δg_x parallel x die bewegende Kraft $M \Delta g_x$; dieser Ausdruck ist also rechts in (39) hinzuzufügen, und es entsteht dann als Indikatorgleichung anstelle von (41)

$$(41') \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{g}{L} a + \frac{J^{(z)}}{L} (g i_x + \Delta g_x).$$

22. *Indikatorgleichung für beliebige Störungen.* Im allgemeinen Falle beliebiger Bewegungen und Schweränderungen sind die Ueberlegungen der beiden letzten Artikel zu kombinieren. Damit dies möglich wird, müssen die Gestellbewegungen in Bezug auf den Punkt X, Y, Z zerlegt werden. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass wir nach früheren Festsetzungen (Artikel 16) die Verschiebungen ξ, η, ζ und die Drehungen i_x, i_y, ϑ_z zur Wahrung des Zusammenhangs unserer Formeln mit den seismischen Bewegungen einer Zerlegung der Gestellbewegungen in Bezug auf den Referenzpunkt der Erdoberfläche zuordnen. Als Parallelverschiebung in der x -Richtung ist also nun nicht wie in Artikel 20 einfach ξ , sondern nach Artikel 16 unter Rücksicht auf die Drehungen $\xi + Zi_x - Y\vartheta_z$ zu nehmen. So ergibt sich als Ausweichung des Pendelkörpers relativ zur Gleichgewichtslage bei Abwesenheit von Störungen

$$\xi^* = \xi + Zi_x - Y\vartheta_z + \xi',$$

und die Bewegungsgleichung des Pendelkörpers:

$$(42) \quad M \frac{d^2 \xi^*}{dt^2} = -Mg \left(\frac{\xi'}{L} - i_x \right) + M \Delta g_x$$

liefert unter Rücksicht hierauf und auf die Beziehung $\xi' = La/J^{(x)}$ sowie die Beziehungen des Artikels 19:

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= -\frac{g}{L} a - \frac{J^{(x)}}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right) - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(\vartheta_x)} \frac{d^2 \vartheta_x}{dt^2} \\ &= -\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a - V^{(x)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right) - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(\vartheta_x)} \frac{d^2 \vartheta_x}{dt^2} \end{aligned} \right.$$

als *Indikatorgleichung für beliebige Störungen*.

23. *Beliebige Aufstellung*. Bisher wurde angenommen, dass die Schwingungsebene des Pendels der x -Richtung parallel sei. Bei einer anderen Aufstellung wirken ξ , i_x , Δg_x nur mit den Antheilen $\xi \cos(k, x)$, $i_x \cos(k, x)$, $\Delta g_x \cos(k, x)$, wenn k die Schwingungsrichtung bedeutet; andererseits gewinnen dann η , i_y , Δg_y mit entsprechenden Antheilen Einfluss. Wird alles dies berücksichtigt, so ergibt (43) als *Indikatorgleichung für beliebige Störungen und beliebige Aufstellung*:

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= -\frac{g}{L} a - \frac{J^{(x)}}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right) - \frac{J^{(y)}}{L} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - g i_y - \Delta g_y \right) \\ &\quad - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(i_y)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} - W^{(\vartheta_x)} \frac{d^2 \vartheta_x}{dt^2} \\ &= -\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a - V^{(x)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right) - V^{(y)} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - g i_y - \Delta g_y \right) \\ &\quad - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(i_y)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} - W^{(\vartheta_x)} \frac{d^2 \vartheta_x}{dt^2}, \end{aligned} \right.$$

wenn gesetzt wird

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} J^{(x)} &= J \cos(k, x), \quad J^{(y)} = J \cos(k, y), \quad V^{(x)} = V \cos(k, x), \quad V^{(y)} = V \cos(k, y), \\ J &= LV, \quad J^{(x)} = LV^{(x)}, \quad J^{(y)} = LV^{(y)}, \\ W^{(i_x)} &= V^{(x)} Z, \quad W^{(i_y)} = V^{(y)} Z, \quad W^{(\vartheta_x)} = V^{(y)} X - V^{(x)} Y. \end{aligned} \right.$$

a ist der Indikatorausschlag, T die Periode der Eigenschwingungen; L, J, V behalten ihre früheren, direct durch Figur 2 gegebenen Bedeutungen. Die Zahlwerthe der Faktoren $J^{(x)}, J^{(y)}, V^{(x)}, V^{(y)}, W^{(i_x)}, W^{(i_y)}, W^{(\vartheta_x)}$ hängen von der Aufstellung ab.

Selbstverständlich lässt sich nun mittels der Bewegungsgleichung (44) des Indikators direct nachweisen, dass wirklich entsprechend den Festsetzungen und Bemerkungen des Artikel 19: T die Periode der Eigenschwingungen, $J^{(x)}, J^{(y)}$ die Empfindlichkeiten gegen dauernde Neigungen, $J^{(x)}/g, J^{(y)}/g$ die Empfindlichkeiten gegen horizontale Schwerestörungen, $-V^{(x)}, -V^{(y)}$ die Vergrößerungen sehr

schneller Horizontalverschiebungen, $-W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_z)}$ die Empfindlichkeiten gegen sehr schnelle Neigungen und Drehungen um die Axe durch den Referenzpunkt darstellen.

In Anlehnung an unsere in Artikel 17 festgesetzte Eintheilung der Seismographen, ist das Glied mit $W^{(\vartheta_z)}$ als eines II. Klasse zu bezeichnen. Aus Gründen, die im folgenden Artikel zu Tage treten werden, wollen wir auch die Glieder mit $W^{(i_x)}$ und $W^{(i_y)}$ der II. Klasse zuzählen. Im Gegensatz dazu gehören dann die Glieder mit $J^{(x)}$, $J^{(y)}$, bezüglich $V^{(x)}$, $V^{(y)}$ zur I. Klasse.

Angesichts der ziemlich complicirten Gleichung (46), die in wenig veränderter Form weiterhin auch bei Seismographen anderer Konstruktion wieder und wieder auftreten wird, mag sogleich bemerkt werden, dass für die praktische Seismometrie wegen der Kleinheit der Drehungen die Glieder II. Klasse im allgemeinen bedeutungslos werden, sodass die viel einfachere Formel:

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= -\frac{g}{L} a - \frac{J^{(x)}}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right) - \frac{J^{(y)}}{L} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - g i_y - \Delta g_y \right) \\ &= -\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a - V^{(x)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right) - V^{(y)} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - g i_y - \Delta g_y \right), \end{aligned} \right.$$

welche nur noch die Störungsglieder I. Klasse enthält, in der Regel anstelle von (44) treten darf. Hier gehen ausser der Pendellänge L und der damit verbundenen Schwingungsperiode T als Konstanten des Seismometers allein noch die äquivalenten Indikatorlängen $J^{(x)}$, $J^{(y)}$ bezüglich die damit verbundenen Indikatorvergrößerungen $V^{(x)}$, $V^{(y)}$ ein.

24. *Trennung verschiedenartiger Störungen.* In den gewöhnlichen Fällen, in welchen die Formel (46) anwendbar ist, knüpft sich der Einfluss der Störungen allein an die Aggregate

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} - g i_y - \Delta g_y,$$

deren Zusammensetzung von der Eigenart des seismischen Pendels unabhängig ist. Aus den Diagrammen lassen sich dann auch nur auf ihre Werthe Schlüsse ziehen, und es ist insbesondere selbst bei Vergleich der Aufzeichnungen verschiedener Apparate völlig unmöglich, die durch ξ , η gemessenen Parallelverschiebungen und die durch i_x , i_y gemessenen Neigungen voneinander zu trennen. Wir sind hier zu einem schon früher berührten Punkte gekommen, in welchem die praktische Seismometrie vielfach in Irrthümer gerieth.

Was die speciellere Formel (46) uns versagt, das leistet wenigstens theoretisch die allgemeinere (44). Es kommt dabei darauf an, die Wirkung der Glieder mit $J^{(x)}$, $J^{(y)}$ bezüglich $V^{(x)}$, $V^{(y)}$ und der Glieder mit $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$ zu trennen, etwa indem man die Aufzeichnungen von Apparaten vergleicht, in denen der Einfluss sich wesentlich verschieden vertheilt. Da $W^{(i_x)}/V^{(x)} = W^{(i_y)}/V^{(y)} = Z$ ist, so läuft dies darauf hinaus, Aufzeichnungen bei möglichst weit verschiedener Höhe des Pendelkörpers über dem Erdboden mit einander zu vergleichen.

Um eine Uebersicht zu gewinnen, fragen wir nach dem Verhältniss des Einflusses der beiden i_x entsprechenden Glieder $W^{(ix)} d^2 i_x / dt^2$ und $V^{(ix)} g i_x$ in dem besonders wichtigen Fall der Sinusschwingungen der Erdoberfläche. Wir setzen demgemäss:

$$i_x = \bar{i}_x \sin 2\pi \frac{t + \delta_x}{T}, \quad \frac{d^2 i_x}{dt^2} = - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \bar{i}_x \sin 2\pi \frac{t + \delta_x}{T} = - \frac{g}{A} \bar{i}_x \sin 2\pi \frac{t + \delta_x}{T}$$

sodass T die Periode der Schwingungen, A die äquivalente Pendellänge bedeutet, und erhalten dann wegen $W^{(ix)} = Z V^{(ix)}$:

$$W^{(ix)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} = - \frac{Z}{A} V^{(ix)} g \bar{i}_x \sin 2\pi \frac{t + \delta_x}{T} = - \frac{Z}{A} V^{(ix)} g i_x.$$

Der Einfluss der beiden zu i_x gehörigen Glieder verhält sich also wie $Z:A$, und wird gleich, wenn die Höhe Z die zur Periode der Neigungsstörungen gehörige äquivalente Pendellänge A erreicht. Bei Fernerdbeben kommen im wesentlichen Perioden von 1 bis 20 Sekunden und also äquivalente Pendellängen von 1/4 bis 100 Meter in Betracht, bei Naheerdbeben gehen die Werthe noch weiter herab. Es scheint hiernach wohl möglich, schon mit einfachen Pendelseismographen die Frage, ob Neigungen, ob Parallelverschiebungen, für die kurzen Perioden zur Entscheidung zu bringen. Für die längeren Perioden müssten freilich so hohe Gestelle gewählt werden, dass die technischen Schwierigkeiten unüberwindlich scheinen. Hier sind dann nach dem Vorgang von W. Schlüter andere Konstruktionen zu wählen, um $W^{(ix)}$, $W^{(iy)}$ gegenüber $V^{(ix)}$, $V^{(iy)}$ gross genug zu machen. —

In der Bedeutung, welche den Gliedern mit $W^{(ix)}$, $W^{(iy)}$ nach diesen Ueberlegungen für die Herauslösung der Neigungen aus der Gesamtheit der Störungen und besonders für die Trennung von den Parallelverschiebungen zukommt, ist die Berechtigung für ihre im vorigen Artikel eingeführte Bezeichnung als Glieder II. Klasse zu suchen.

§ 3. Reibungslose Seismographen mit punktförmiger Masse.

25. *Horizontalseismographen.* Ohne weiteres ist klar, dass es bei dem im vorigen Paragraphen besprochenen Pendelseismographen nicht notwendig ist, den Indikator in starre Verbindung mit dem Pendel zu bringen, dass die Bewegung des Indikators vielmehr in irgend einer beliebigen Weise, mittels Gelenke, Hebel, Räder, mit der Bewegung der Pendelmasse verbunden werden kann. Worauf es allein ankommt, ist, in welchem Verhältniss die Bewegung der Pendelmasse im Diagramm vergrössert erscheint. Wir wollen diese „Indikatorvergrösserung“ wieder mit V bezeichnen. Sie wird dann gerade so wie früher die Vergrösserung sehr schneller Parallelverschiebungen in der Schwingungs-

richtung k des Pendels angeben, und die zu x und y gehörigen Indikatorvergrößerungen $V^{(x)}$, $V^{(y)}$ werden wie vorhin durch die Formeln $V^{(x)} = V \cos(k, x)$, $V^{(y)} = V \cos(k, y)$ bestimmt werden.

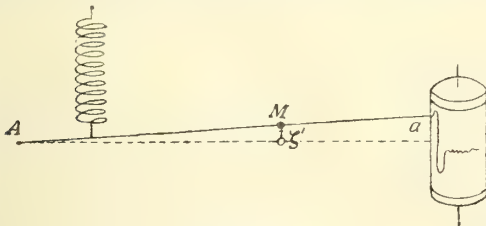
Die Aufhängung der Masse M als Körper eines einfachen Pendels kommt nur insofern in Betracht, als damit bei Ablenkungen des Pendelkörpers um die Strecke ξ' eine mit ξ' proportionale zurücktreibende Kraft $g M \xi'/L$ erweckt wird. Das Gleiche kann auf sehr verschiedene andere Weise erreicht werden, durch complicirtere Führungen, durch Anwendung von Federn und so weiter. Die Aufzeichnungen des Seismographen müssen offenbar in allen diesen Fällen dieselben sein. Ist also die zurücktreibende Kraft $= -f \xi'$, wobei f einen konstanten Proportionalitätsfaktor bedeutet, und setzen wir

$$(47) \quad \frac{f}{M} = \frac{g}{L} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2,$$

so giebt uns L diejenige Länge eines einfachen Pendels an, welche einen Seismographen derselben Wirksamkeit ergeben würde, und T die Periode der Eigenschwingungen. L ist jetzt nur Rechnungsgrösse und wird daher als die „äquivalente“ Pendellänge bezeichnet werden müssen.

Die Bewegungen der einfachen Pendelseismographen waren bestimmt, wenn ausser L bezüglich T und V noch die Ruhelage des pendelnden Körpers durch die Koordinaten X, Y, Z in Bezug auf den Referenzpunkt gegeben war. Gerade so muss es auch hier sein, sodass die Formeln (44)—(46) unverändert gültig bleiben. Zu bemerken ist nur, dass wie L nun auch die Indikatorlänge J ihre unmittelbare Bedeutung verliert; wir werden J daher jetzt die zur Schwingungsrichtung des pendelnden Körpers gehörige „äquivalente Indikatorlänge“ nennen müssen.

26. *Vertikalseismographen.* Unsere theoretische Behandlung der Seismographen mit horizontaler Führung des pendelnden Körpers lässt sich unmittelbar auf solche mit vertikaler Führung übertragen. Bei diesen wird die herabziehende Wirkung der Schwerkraft irgend wie, zum Beispiel durch eine Feder nach Andeutung von Figur 4 aufgehoben werden müssen. Für die Theorie ergibt sich dabei nichts wesentlich Neues, solange unsere bisherige Voraussetzung gewahrt



Figur 4.

bleibt, dass am Gehänge alle Masse gegenüber derjenigen des pendelnden Körpers vernachlässigt werden darf.

Fänden nur Parallelverschiebungen statt, so käme nur die durch ξ gemessene Vertikalkomponente zur Geltung, und es ergäbe sich für M die Bewegungsgleichung

$$(48) \quad M \frac{d^2 \xi^*}{dt^2} = -f \xi^*,$$

wobei in analoger Weise wie früher ξ' den zum Gestell relativen und $\xi^* = \xi + \xi'$ den absoluten Ausschlag des pendelnden Körpers bedeutet.

Bei beliebigen Störungen zerlegen wir wieder die Gestellbewegungen in Bezug auf den Ruhepunkt X, Y, Z des pendelnden Körpers M , sodass nach Artikel 16 die Parallelverschiebungen gleich $\xi + Zi_x - Y\vartheta_z, \eta + Zi_y + X\vartheta_z, \zeta - Xi_x - Yi_y$ und die Drehungen gleich i_x, i_y, ϑ_z werden. Die letzteren bleiben bei den allein in Betracht kommenden kleinen Ausschlägen, welche M nur unwesentlich von dem angenommenen Drehpunkt X, Y, Z entfernen, ganz unwirksam, die ersteren werden berücksichtigt, wenn $\xi^* = \xi - Xi_x - Yi_y + \xi'$ gesetzt wird. — Von den Schwerestörungen fügt Δg_z rechts in (48) das Glied $M\Delta g_z$ hinzu. Berücksichtigen wir schliesslich noch, dass ξ' mit dem Ausschlag a durch die Formel $\xi' = a/V^{(c)}$ zusammenhängt, wobei $V^{(c)}$ eine gewisse dem Apparat eigenthümliche Konstante bedeutet, so liefert (48) die *Indikatorgleichung*

$$(49) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(c)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_z \right) - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(i_y)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} \\ &= -\frac{g}{L} a - \frac{J^{(c)}}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_z \right) - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(i_y)} \frac{d^2 i_y}{dt^2}, \end{aligned}$$

in der

$$(50) \quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L} = \frac{f}{M}, \quad W^{(i_x)} = -V^{(c)} X, \quad W^{(i_y)} = -V^{(c)} Y$$

ist, T wieder die *Schwingungsperiode*, L die *äquivalente Pendellänge* angiebt. $V^{(c)}$ werden wir auch hier „*Indikatorvergrößerung*“ nennen. $J^{(c)}$ hat mit Indikatorlänge eines einfachen Pendels zwar nur noch entfernte formale Verwandtschaft, immerhin aber kann dies im Interesse einer einheitlichen und bequemen Bezeichnungsweise als genügend angesehen werden, um $J^{(c)}$ als die zu z gehörige „*äquivalente Indikatorlänge*“ zu bezeichnen.

Entsprechend $J^{(x)}/g, J^{(y)}/g$ giebt $J^{(z)}/g$ nach (49) die *Empfindlichkeit gegen Aenderungen der Vertikalkomponente der Schwere* an; das heisst, es gehört zu Δg_z der Ausschlag $\Delta a = (J^{(z)}/g) \Delta g_z$. $-\Delta g_z$ ist mit einer Gewichtsvermehrung von M um $-M\Delta g_z$ verbunden; dieselbe Vermehrung würde sich auch durch Vergrößerung der Masse um $\Delta M = -M\Delta g_z/g$ ergeben. Hieraus folgt, dass ΔM den Ausschlag

$$(51) \quad \Delta a = -\frac{J^{(z)}}{M} \Delta M$$

verursacht. $-J^{(z)}/M$ bedeutet also für unseren Vertikalseismographen die *Empfindlichkeit gegen eine Massenvermehrung von M* . Diese Bemerkung hat für die praktische Bestimmung von $J^{(z)}$ einiges Interesse. —

27. *Seismographen eines Freiheitsgrades mit beliebiger Schwingungsrichtung.* Nachdem nunmehr die Fälle horizontal und vertikal gerichteter Schwingungslinien behandelt worden sind, bleibt uns zum Abschluss noch die Untersuchung des allgemeinen Falles beliebiger Schwingungsrichtung.

X, Y, Z seien wieder die Koordinaten der pendelnden Masse M in der Ruhelage bei Abwesenheit von Störungen. l bedeute die zugehörige Schwingungsrichtung, λ' die Verrückung von M parallel l relativ zum Gestell, λ^* die Verrückung relativ zur Erde im Ganzen, die wir als absolute Verrückung betrachten; λ sei die Verrückung desjenigen mit dem Gestell fest verbunden gedachten Punktes, der im Falle seismischer Ruhe die Stelle X, Y, Z einnimmt. Dann ist

$$(52) \quad \lambda^* = \lambda + \lambda'$$

und unter Rücksicht auf Artikel 16:

$$(53) \quad \lambda = (\xi + Zi_x - Y\vartheta_x) \cos(l, x) + (\eta + Zi_y + X\vartheta_x) \cos(l, y) + (\zeta - Xi_x - Yi_y) \cos(l, z).$$

Wir suchen die Bewegungsgleichung von M in Bezug auf die Richtung l , indem wir $M d^2 \lambda^* / dt^2$ gleich der parallel l wirkenden bewegenden Kraft setzen. Bei Abwesenheit von Störungen ist wie früher eine mit der Verrückung λ' proportionale zurücktreibende Kraft anzunehmen; diese sei $= -f \lambda'$. Die Schwerestörungen $\Delta g_x, \Delta g_y, \Delta g_z$ ergeben hierzu die Komponente $\Delta g_x \cos(l, x) + \Delta g_y \cos(l, y) + \Delta g_z \cos(l, z)$. Bei Neigungen des Gestelles tritt eine weitere Aenderung ein, weil die Reaktionskraft der Bahn sich dann in anderer Weise mit der Schwerkraft zusammensetzt. Bei den angenommenen kleinen Störungen ist es erlaubt, die Neigungen des Gestelles i_x, i_y durch gleich grosse aber entgegengesetzt gerichtete Neigungen der Schwerkraft zu ersetzen. Dieses wiederum geschieht mit hinreichender Genauigkeit, wenn die Schwerkraftkomponenten g'_x, g'_y parallel x und y angenommen werden. Für die bewegende Kraft parallel l ergibt sich so die Komponente $g'_x \cos(l, x) + g'_y \cos(l, y)$.

Werden alle aufgezählten Antheile der bewegenden Kraft parallel l zusammengenommen, so folgt als Bewegungsgleichung

$$(54) \quad M \frac{d^2 \lambda^*}{dt^2} = -f \lambda' + (g'_x + \Delta g_x) \cos(l, x) + (g'_y + \Delta g_y) \cos(l, y) + \Delta g_z \cos(l, z).$$

Genau genommen müssten auf der rechten Seite noch Glieder hinzugefügt werden, welche von derjenigen Veränderung des Reaktionsdruckes der Bahn herrühren, die auf Rechnung der Bewegungen der Bahn und der Masse M kommt, doch sind sie für die gewöhnliche Seismometrie ohne irgend welchen Belang.

In die Bewegungsgleichung (54) für M sind nun λ^* und λ' mittels (52), (53) sowie

$$(55) \quad a = V \lambda'$$

durch die Verrückungen $\xi, \eta, \zeta, i_x, i_y, \vartheta_x$ und den Indikatorauschlag a zu ersetzen, dann folgt als *Indikatorgleichung für den Seismographen eines Freiheitsgrades mit punktförmiger Masse bei beliebiger Schwingungsrichtung*:

$$(56) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(x)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g_{i_x} - \Delta g_x \right) - V^{(y)} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - g_{i_y} - \Delta g_y \right) - V^{(z)} \left(\frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \Delta g_z \right) \\ &\quad - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(i_y)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} - W^{(\vartheta_z)} \frac{d^2 \vartheta_z}{dt^2} \\ &= -\frac{g}{L} a - \frac{J^{(x)}}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g_{i_x} - \Delta g_x \right) - \frac{J^{(y)}}{L} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - g_{i_y} - \Delta g_y \right) - \frac{J^{(z)}}{L} \left(\frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \Delta g_z \right) \\ &\quad - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(i_y)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} - W^{(\vartheta_z)} \frac{d^2 \vartheta_z}{dt^2}, \end{aligned} \right.$$

wobei gemäss den in Artikel 19 festgesetzten Bezeichnungen

$$(57) \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 &= \frac{g}{L} = \frac{f}{M}, \\ V^{(x)} &= \frac{J^{(x)}}{L} = V \cos(l, x), \quad V^{(y)} = \frac{J^{(y)}}{L} = V \cos(l, y), \quad V^{(z)} = \frac{J^{(z)}}{L} = V \cos(l, z), \\ W^{(i_x)} &= V^{(x)} Z - V^{(z)} X, \quad W^{(i_y)} = V^{(y)} Z - V^{(z)} Y, \quad W^{(\vartheta_z)} = V^{(y)} X - V^{(x)} Y \end{aligned} \right.$$

gesetzt worden ist, sodass $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$ die „Indikatorvergrößerungen“, $J^{(x)}$, $J^{(y)}$, $J^{(z)}$ die „äquivalenten Indikatorlängen“, $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_z)}$ die *Empfindlichkeiten gegen sehr schnelle Neigungen und Drehungen* sind.

Wiederum werden wir zwischen Störungsgliedern *I. Klasse*, welche die Faktoren $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$, bezüglich $J^{(x)}$, $J^{(y)}$, $J^{(z)}$ enthalten, und *Gliedern II. Klasse*, welche die Faktoren $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_z)}$ enthalten, unterscheiden können, von denen für die gewöhnliche Praxis allein die *Glieder I. Klasse in Betracht* kommen.

Nach (57) erscheinen $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$ sowie $J^{(x)}$, $J^{(y)}$, $J^{(z)}$ und $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_z)}$ als Komponenten gewisser Faktoren V , J , W , von denen V und J der Schwingungsrichtung l der Masse M parallel liegen und W sowohl auf dieser Richtung als auch auf der Verbindungslinie zwischen dem Referenzpunkt und dem Ruhepunkt von M senkrecht steht. V ist gleich der Vergrößerung der Bewegung von M im Indikatordiagramm, die Grössen von J und W werden durch die Beziehungen:

$$(58) \quad J = VL, \quad W = VE \sin(l, e)$$

bestimmt, wobei

$$(59) \quad E = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

die Entfernung des Ruhepunktes der Masse M von dem Referenzpunkt in der Erdoberfläche und (l, e) den Winkel zwischen der Verbindungslinie und der Bahnlinie von M darstellt.

Besonders einfach gestaltet sich die Indikatorgleichung, wenn man die Richtungen der horizontalen Projektionen von V und W zu Hilfe nimmt. Bezeichnen wir sie mit k und k' und die zu k gehörige Komponente der Parallelverschiebung mit α ,

so lässt sich nämlich (56) unter Rücksicht auf die für eine beliebige horizontale Richtung s geltenden Beziehungen:

$$(60) \quad V^{(s)} = V^{(k)} \cos(s, k), \quad J^{(s)} = J^{(k)} \cos(s, k), \quad W^{(s)} = W^{(ik')} \cos(s, k')$$

und

$$(61) \quad \sigma = \xi \cos(s, x) + \eta \cos(s, y), \quad i_s = i_x \cos(s, x) + i_y \cos(s, y),$$

wobei σ die zu s gehörige Komponente der Parallelverschiebung angiebt, leicht überführen in die Form:

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(k)} \left(\frac{d^2 \kappa}{dt^2} - g i_k - \Delta g_k \right) - V^{(s)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_z \right) \\ &\quad - W^{(ik')} \frac{d^2 i_k'}{dt^2} - W^{(\vartheta_z)} \frac{d^2 \vartheta_z}{dt^2} \\ &= -\frac{g}{L} a - \frac{J^{(k)}}{L} \left(\frac{d^2 \kappa}{dt^2} - g i_k - \Delta g_k \right) - \frac{J^{(s)}}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_z \right) \\ &\quad - W^{(ik')} \frac{d^2 i_k'}{dt^2} - W^{(\vartheta_z)} \frac{d^2 \vartheta_z}{dt^2}. \end{aligned} \right.$$

Hierin können wie in den früheren Fällen die Glieder II. Klasse mit den Faktoren $W^{(ik')}$, $W^{(\vartheta_z)}$ für die Praxis beiseite gelassen werden.

Die früher für Horizontal- und Vertikal-Seismographen aufgestellten Formeln ergeben sich in so einfacher Weise aus den jetzt gefundenen, dass eine nähere Darlegung unnötig ist.

28. *Seismographen mit punktförmiger Masse für mehrere Komponenten.* Bisher haben wir angenommen, dass die pendelnde Masse nur in einer Linie schwingen könne, dass ihr also nur ein Grad der Freiheit gegeben sei. Wenn sie in einer Fläche oder nach allen Seiten schwingen kann, also 2 oder 3 Grade der Freiheit hat, gestaltet sich die Theorie nur wenig komplizierter. Wir wollen sogleich den weitest gehenden Fall von 3 Graden der Freiheit untersuchen, da sich dann der speciellere mit nur 2 Graden ohne Weiteres miterledigt.

Zur Bestimmung der Lage der Masse M sind jetzt drei Koordinaten einzuführen. ξ' , η' , ζ' seien die Verrückungen relativ zum Gestell, ξ^* , η^* , ζ^* diejenigen relativ zur Erde im Ganzen, die wir als absolute Verrückungen ansehen. Bedeuten X , Y , Z wiederum die Koordinaten der Ruhelage von M relativ zum Referenzpunkt, so dürfen nach Artikel (16) die Beziehungen

$$(63) \quad \xi^* = \xi' + \xi + Z i_x - Y \vartheta_z, \quad \eta^* = \eta' + \eta + Z i_y + X \vartheta_z, \quad \zeta^* = \zeta' + \zeta - X i_x - Y i_y$$

angenommen werden.

Wir werden wieder eine solche Konstruktion voraussetzen, dass jede Ablenkung ξ' , η' , ζ' zurückführende Kräfte zur Folge hat. Sind Ξ' , H' , Z' die Kraftkomponenten $\parallel x, y, z$, so ist zu setzen:

$$(64) \quad \begin{aligned} \Xi' &= -f_{11} \xi' - f_{12} \eta' - f_{13} \zeta', \\ H' &= -f_{21} \xi' - f_{22} \eta' - f_{23} \zeta', \\ Z' &= -f_{31} \xi' - f_{32} \eta' - f_{33} \zeta', \end{aligned}$$

wobei f_{11}, f_{12}, \dots gewisse Konstanten bedeuten, die davon abhängen, wie die Pendelmasse mit dem Gestell des Apparates verbunden ist. Da wir mit Rücksicht auf die hier in Betracht kommenden Mechanismen annehmen dürfen, dass keine Energie auf das Gestell übertragen wird, wenn der Pendelkörper nach beliebigen Bewegungen wieder in die Anfangslage zurückgeführt wird, ist in bekannter Weise zu folgern, dass es drei ausgezeichnete aufeinander senkrecht stehende Richtungen l, m, n giebt, für welche die erwarteten Kräfte nach der Gleichgewichtslage hingerichtet sind. Bezeichnen wir die relativen Verrückungen von M in diesen Richtungen mit λ', μ', ν' und die zugehörigen Kräfte mit A', M', N' , so tritt an Stelle des Gleichungssystemes (64) einfacher:

$$(65) \quad A' = -f_1 \lambda', \quad M' = -f_2 \mu', \quad N' = -f_3 \nu'.$$

Aehnlich wie in Artikel 27 bei der Ableitung von (54) fassen wir bei Neigungen und Drehungen des Gestelles das jeweilige Kraftsystem auf als Superposition der Kräfte A', M', N' parallel den ursprünglichen Richtungen l, m, n und der von dem veränderten Angriff der Schwere herrührenden Kräften $Mg i_x, Mg i_y$ parallel x, y . Hierzu treten bei Schwerestörungen noch $M \Delta g_x, M \Delta g_y, M \Delta g_z$, sodass wir für die Richtungen l, m, n drei Bewegungsgleichungen erhalten, von denen die erste lautet:

$$(66) \quad M \frac{d^2 \lambda^*}{dt^2} = -f_1 \lambda' + (g_i + \Delta g_x) \cos(l, x) + (g_y + \Delta g_y) \cos(l, y) + \Delta g_z \cos(l, z).$$

Hierin bedeutet λ^* die als absolut geltende Verrückung parallel l . Wir sind nun genau zur Gleichung (54) zurückgeführt und werden wie dort zur weiteren Umformung die Beziehungen (52) und (53) zu verwerthen haben. So ergibt sich denn, dass die Bewegungen der pendelnden Masse parallel den drei ausgezeichneten Richtungen (l, m, n) als unabhängig von einander betrachtet werden können und gerade so erfolgen, wie bei nur einem Freiheitsgrad. —

Sollen die drei Freiheitsgrade der Bewegung von M vollständig ausgenutzt werden, so sind 3 Indikatoren anzubringen, denn so viele sind nöthig, um die Bewegungen vollständig zu verfolgen. a, b, c seien die Ausschläge, von denen wir im Einklang mit den bisher benutzten Vorstellungen annehmen, dass sie den Ausweichungen von M parallel gewissen drei Richtungen proportional sind, dann ist zu schreiben:

$$(67) \quad a = V_{aa} \lambda' + V_{ab} \mu' + V_{ac} \nu', \quad b = V_{ba} \lambda' + V_{bb} \mu' + V_{bc} \nu', \quad c = V_{ca} \lambda' + V_{cb} \mu' + V_{cc} \nu',$$

wobei die V_{aa}, V_{ab}, \dots Konstanten sind. Bedenkt man, dass jedes der Glieder $V_{aa} \lambda', V_{ab} \mu', \dots$ in Verbindung mit den für λ', μ', ν' geltenden Bewegungs-

gleichungen allein genommen für den betreffenden Indikator Formeln nach Art von (56) ergeben würde, so ist ersichtlich, dass die Aufzeichnung jedes der drei Indikatoren so erfolgt, als stelle sein Ausschlag die Summe der Ausschläge dreier von einander unabhängiger einfacher Seismographen dar.

Die so sich ergebende Komplikation wäre für die Praxis höchst unbequem. Da ist es wichtig zu bemerken, dass sie fortfällt, wenn die Indikatoren den ausgezeichneten Richtungen λ , μ , ν zugeordnet werden; dann geht nämlich das Formelsystem (67) über in

$$(68) \quad a = V_a \lambda', \quad b = V_b \mu', \quad c = V_c \nu',$$

und es folgen bei Verwendung der Bewegungsgleichungen für λ' , μ' , ν' für die Indikатораusschläge a , b , c genau die zu Seismographen eines Freiheitsgrades gehörigen Formeln des vorigen Artikels. Wenn man also den Seismographen dreier Freiheitsgrade mit 3 Indikatoren versieht, welche die Ausweichungen der pendelnden Masse parallel den ausgezeichneten Richtungen des Kraftsystemes aufzeichnen, so erscheint er einfach als Vereinigung dreier Seismographen je eines Freiheitsgrades für diese 3 Richtungen.

Bisher wurde angenommen, dass sich für das Kraftsystem 3 bestimmte ausgezeichnete Richtungen angeben lassen, und ich erwähnte den dann geltenden Satz, dass diese aufeinander senkrecht stehen. In besonderen Fällen kann es vorkommen, dass sich nur eine ausgezeichnete Richtung oder keine heraushebt. Das erstere tritt ein, wenn die zurücktreibende Kraft für alle Richtungen \perp zu der einen ausgezeichneten gleich gross ist, das letztere, wenn die zurücktreibende Kraft für alle Richtungen ohne Unterschied gleich gross ist. Für den Anschluss der Indikatoren unter der Vorschrift, dass die Aufzeichnungen eines jeden denen für einen Seismographen eines Freiheitsgrades gleichkommen sollen, folgt beidemal eine Verminderung der Beschränkung: Bei nur einer ausgezeichneten Richtung dürfen die beiden anderen Indikatorrichtungen in der Normalebene willkürlich ausgewählt werden, bei völliger Symmetrie ist die Auswahl der Indikatorrichtungen ganz dem Belieben anheim gestellt. —

Bei einem Seismographen mit 2 Freiheitsgraden haben wir eine Schwingungsfläche anzunehmen, die in einer für die Praxis wohl immer hinreichenden Annäherung als Ebene gelten darf. Das wirkende Kraftsystem ergibt in dieser 2 ausgezeichnete, oder durchweg gleichwerthige Richtungen. Zur vollen Ausnutzung der beiden Freiheitsgrade sind 2 Indikatoren anzubringen, und zwar parallel den ausgezeichneten Richtungen des Kraftsystemes, sofern solche vorhanden sind, andernfalls in beliebiger Orientirung. Der Seismograph zweier Freiheitsgrade verhält sich dann gerade so wie die Vereinigung zweier Seismographen je eines Freiheitsgrades.

§ 4. Reibungslose Seismographen mit räumlich vertheilter Masse.

29. *Das physikalische Pendel als Seismograph.* Bevor wir uns zu den Seismographen beliebiger Massenanordnung wenden, wird es sich empfehlen, die Benutzung des sogenannten „*physikalischen Pendels*“, also des Pendels mit räumlich vertheilter Masse als Seismographen zu besprechen, weil so in einfacher Weise auf die neuen Gesichtspunkte hingewiesen werden kann, welche bei der Aufgabe unserer bisherigen Annahme der punktförmigen Masse zur Geltung kommen, und wir damit einen Fall behandeln, dessen praktische Bedeutung unter allen Umständen eine besondere Besprechung verlangt.

Wir setzen eine horizontale Axe, also eine vertikale Schwingungsebene voraus und nehmen an, dass allein die Schwerkraft einwirkt, der Schwerpunkt also bei Ruhe vertikal unter der Axe liegt. Ein solcher Apparat wird zum Beispiel durch ein gewöhnliches Pendel oder durch den Balken einer Waage bei abgenommenen Schaalengehängen gegeben.

Die Aufstellung sei so, dass der Schwerpunkt bei Ruhe in der Vertikalen durch den Referenzpunkt liegt, und die x -Axe der Schwingungsebene parallel läuft. Trotzdem könnten bei Unsymmetrie des Baues die Neigungen i_y senkrecht zur Schwingungsebene und die Drehungen ϑ_z um die Vertikale Einfluss gewinnen; doch sollen diese Fälle als interesselos ausgeschlossen werden. *Unser Seismograph reagirt dann allein auf die Parallelverschiebungen ξ , die Neigungen i_x und die Schwereänderungen Δg_x .*

Wir untersuchen zunächst die *Eigenschwingungen* bei Abwesenheit von Störungen. Ist M die Masse des Pendels, S der Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe, so ergibt die Schwerkraft bei der Ablenkung a des Indikators ein Drehmoment $MgaS/I$, wobei I die Zeigerlänge bedeutet. Dasselbe Drehmoment würde durch eine am Indikator wirkende zurücktreibende Kraft $Q^{(a)}$ verursacht werden, wenn $Q^{(a)}I = -MgaS/I$ wäre. Hieraus folgt, dass die Einwirkung der Schwerkraft bei den Eigenschwingungen ganz ersetzt werden könnte durch eine am Indikator wirkende Kraft

$$(69) \quad Q^{(a)} = -fa,$$

wobei

$$(70) \quad f = Mg \frac{S}{I^2}$$

eine gewisse Konstante bedeutet.

Zur Ableitung der Bewegungsgleichung benutzen wir das *d'Alembert'sche Prinzip*, nach welchem die Beschleunigungen jederzeit so erfolgen, dass das System der bewegenden Kräfte durch das System der Trägheitskräfte gerade aufgehoben wird. Unter „*Trägheitskraft*“ des Massentheilchen $d\mu$ ist dabei eine Kraft zu verstehen, welche die entgegengesetzte Richtung hat wie die Beschleunigung, und deren Grösse gleich $d\mu \times$ der Beschleunigung ist. Bedeuten also ξ, η, ζ die Verschiebungen parallel x, y, z , so sind die zugehörigen Komponenten der Träg-

heitskraft

$$(71) \quad -d\mu \frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad -d\mu \frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad -d\mu \frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Für die Anwendung der Trägheitskräfte ist wichtig, dass sie sich gerade so superponiren wie die Verrückungen. *Wenn also die wirklich stattfindende Bewegung eines mechanischen Systemes irgend wie als Superposition von Einzelbewegungen aufgefasst wird* — zum Beispiel die Bewegung eines starren Körpers als Superposition von Parallelverschiebungen und Drehungen —, *so stellen sich die wirklichen Trägheitskräfte dar als Superposition der Trägheitskräfte, welche den Einzelbewegungen zugehören.* —

Bei den Eigenschwingungen des Pendels ergibt sich für ein Theilchen $d\mu$ im Abstände r von der Axe die Beschleunigung $(r/I) d^2a/dt^2$, also die Trägheitskraft

$$-d\mu \frac{r}{I} \frac{d^2a}{dt^2}$$

und es folgt als Drehmoment in der Richtung, in welcher wir i_x positiv rechnen:

$$d\mu \frac{r}{I} r \frac{d^2a}{dt^2}.$$

Zum ganzen System der Trägheitskräfte gehört hiernach das Drehmoment

$$(72) \quad \Theta \frac{d^2a}{dt^2},$$

wobei

$$(73) \quad \Theta = \int d\mu r^2$$

das Trägheitsmoment des Pendels darstellt. Wir wollen bemerken, dass das Drehmoment gerade so gross ist, als bewegte sich am Indikator die Masse

$$(74) \quad m = \frac{\Theta}{I^2} = \int d\mu \left(\frac{r}{I}\right)^2.$$

Indem wir gemäss dem zu verwerthenden Grundsatz der Mechanik die Summe der Drehmomente für die bewegenden Kräfte und die Trägheitskräfte gleich 0 setzen, erhalten wir als *Bewegungsgleichung* bei den Eigenschwingungen:

$$(75) \quad \frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{f}{m} a = -\frac{g}{\frac{\Theta}{MS}} a.$$

Zur Bestimmung der *Eigenperiode* T und der *äquivalenten Pendellänge* L ergeben sich hieraus die Beziehungen:

$$(76) \quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L} = g \frac{MS}{\Theta}; \quad L = \frac{\Theta}{MS}. -$$

Bei Neigungen des Gestelles giebt $i_x - a/I$ die Neigung des Pendels an. Veränderungen der Schwerkraft veranlassen das Drehmoment $-MS \Delta g_x$. So erhalten wir denn als Drehmoment der Schwere in Bezug auf die Pendelaxe während der Störungen im Ganzen:

$$(77) \quad MS \left(\frac{g}{I} a - g i_x - \Delta g_x \right).$$

Dies ist zugleich das *Drehmoment der gesammten bewegenden Kräfte* in Bezug auf die Pendelaxe *während der Störungen*, denn ausser der Schwere wirkt nur das Gestell durch Kräfte ein, die in der Pendelaxe selbst angreifen, also ein verschwindendes Drehmoment ergeben.

Zur Bestimmung des entsprechenden Drehmomentes der Trägheitskräfte während der Störungen denken wir uns die jeweilige Verrückung des Pendels als Superposition der Neigung $i_x - a/I$ um die Pendelaxe und der Parallelverschiebung $\xi + Z_A i_x$, wobei Z_A die Höhe der Drehungsaxe über dem Referenzniveau bezeichnet. Nach den bei der Ableitung der Bewegungsgleichung für die Eigenschwingungen angestellten Ueberlegungen verursachen die Aenderungen der Neigung das Drehmoment

$$(78) \quad -Im \frac{d^2}{dt^2} (I i_x - a) = -\Theta \left(\frac{d^2 i_x}{dt^2} - \frac{1}{I} \frac{d^2 a}{dt^2} \right).$$

Die Trägheitskräfte der Parallelbewegungen sind Parallelkräfte proportional mit der Masse der Elemente, haben also wie die Schwerkraft eine Resultante, welche der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse entspricht. Zu den Parallelverschiebungen $\xi + Z_A i_x$ gehört hiernach in Bezug auf die Pendelaxe das Drehmoment

$$(79) \quad MS \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} + Z_A \frac{d^2 i_x}{dt^2} \right).$$

Das d'Alembert'sche Prinzip verlangt, dass die Summe der Drehmomente (77), (78), (79) verschwindet, ergibt also als *Indikatorgleichung*

$$(80) \quad MS \left(\frac{g}{I} a - g i_x - \Delta g_x \right) - \Theta \left(\frac{d^2 i_x}{dt^2} - \frac{1}{I} \frac{d^2 a}{dt^2} \right) + MS \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} + Z_A \frac{d^2 i_x}{dt^2} \right) = 0,$$

oder

$$(81) \quad \begin{cases} \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(\omega)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right) - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} \\ \quad \quad \quad = -\frac{g}{L} a - \frac{J^{(\omega)}}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right) - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2}, \end{cases}$$

wenn (76) benutzt wird, und man ausserdem setzt:

$$(82) \quad J^{(\omega)} = I, \quad V^{(\omega)} = \frac{J^{(\omega)}}{L} = \frac{IMS}{\Theta}, \quad W^{(i_x)} = V^{(\omega)} (Z_A - L).$$

Hierin bedeutet $Z_A - L$ die Höhe des Körpers eines mathematischen Pendels von der Länge L und mit der Axe A . Das physikalische Pendel verhält sich also als Seismograph gerade so wie ein mathematisches Pendel mit der gleichen Schwingungsdauer und der gleichen Drehungsaxe.

Es ist nützlich zu beachten, dass nach der eben gewonnenen Erkenntniss bei sehr schnellen Querverschiebungen der Axe eines Pendels nicht etwa der Schwerpunkt, sondern ein Punkt stationär bleibt, der um die Länge eines mathematischen Pendels gleicher Schwingungsdauer, nämlich um $L = \Theta/MS$, von der Axe entfernt ist. Man nennt ihn den „Schwingungspunkt“. Es ist klar, dass seine so bestimmte Bedeutung bestehen bleiben muss, welche Orientierung auch die Axe im Raume haben mag, und welche Kräfte das Pendel beeinflussen mögen. L bedeutet dann die Länge eines einfachen Pendels, welches in dem besonderen Falle alleiniger Einwirkung der Schwere und horizontaler Lage der Axe gleiche Schwingungsdauer hat.

30. *Physikalisches Pendel unter Mitwirkung elastischer Kräfte; Klinograph von Schlüter.* Werden bei dem im vorigen Artikel behandelten physikalischen Pendel noch elastische Kräfte hinzugefügt, jedoch so, dass der Schwerpunkt im Falle der Ruhe in der Vertikalebene durch die Axe bleibt, so ändert sich die Bewegungsgleichung (80) nur insofern, als ein Drehmoment

$$(83) \quad f' 1a$$

hinzukommt, wobei f' eine gewisse Konstante bedeutet. Es ergibt sich dann als Indikatorgleichung wiederum (81), jedoch mit theilweise veränderten Konstanten. Es ist nämlich:

$$(84) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L} = \frac{f'}{m} \mp \frac{g}{L_0}, \\ V^{(a)} = \mp \frac{I}{L_0}, \quad J^{(a)} = V^{(a)}L = \mp I \frac{L}{L_0}, \quad W^{(ia)} = V^{(a)}Z = \mp I \frac{Z}{L_0}; \end{array} \right.$$

$$(85) \quad m = \frac{\Theta}{I^2}, \quad L = \frac{\Theta}{MS}, \quad Z = Z_A \pm L_0.$$

I bedeutet wie vorhin den Abstand der Indikatorspitze von der Drehaxe des Pendels, oder besser gesagt, den äquivalenten Abstand von der Drehaxe, denn es ist für die entwickelte Theorie offenbar gleichgültig, ob der Indikator direkt oder indirekt durch irgend einen Mechanismus mit dem Pendel verbunden ist; sie braucht auch nicht nothwendig materiell zu sein, sondern kann ebenso gut den Convergenzpunkt eines photographirenden Lichtbündels darstellen. — W. Schlüter nennt I bei der Beschreibung seines Klinographen die „mechanische Zeigerlänge“.

Θ ist das Trägheitsmoment des Pendels, M seine Masse, S der Abstand des Schwerpunktes, L_0 der Abstand des Schwingungspunktes von der Axe, Z_A die Höhe

der Axe, Z die *Höhe des Schwingungspunktes* über dem Referenzniveau der Erdoberfläche. Wegen der Mithilfe der elastischen Kräfte, auf welche sich die Konstante f' bezieht, ist eine stabile Gleichgewichtslage und darum eine brauchbare Konstruktion nun auch möglich, wenn Schwerpunkt und Schwingungspunkt über der Axe liegen; für diesen Fall gelten die *oberen*, für den entgegengesetzten die *unteren der doppelten Vorzeichen*.

Nach den Formeln (84), (85) verhält sich unser physischer Seismograph ganz so wie ein Pendelseismograph mit punktförmiger Masse, bei dem die Pendellänge $= L$, die Indikatorlänge $= J^{(e)}$ und der Pendelkörper sich in der Höhe $Z = Z_A \pm L_0$, also in der Höhe des Schwingungspunktes befindet.

Der Umstand, dass bei angemessener Konstruktion des physischen Pendels der Schwerpunkt leicht sehr nahe der Axe gelegt und damit Z sehr gross gemacht werden kann, ist von besonderem Interesse, denn wir haben in Artikel 23 erkannt, dass bei dem wichtigen Problem der Trennung seismischer Horizontalverrückungen und Neigungen gerade die Höhe Z entscheidend ist. Während nun das einfache Pendel aus praktischen Gründen eine hinreichende Variation der Höhe nicht gestattet, lässt sich diese mit dem physischen Pendel, wo es sich nur um die Verlegung des Schwingungspunktes handelt, in bequemer Weise erreichen.

Bei der Konstruktion seines *Klinographen* hat sich W. Schlüter diese Verhältnisse zu Nutze gemacht. Der pendelnde Körper erhielt die Gestalt eines Waagebalkens von 150 cm Länge mit festen Gewichten an den Enden. Die uns interessirenden Daten waren:

$$\begin{aligned} \Theta &= 7 \text{ kg m}^2, M = 15 \text{ kg}, S = 0,04 \text{ mm}, Z_A = 0, \\ I &= 700 \text{ m}, L_0 = \frac{\Theta}{MS} = 12000 \text{ m}, Z = Z_A - L_0 = -12000 \text{ m}, \\ T &= 20 \text{ sec}, L = 100 \text{ m}, V^{(e)} = -\frac{1}{20}, J^{(e)} = 6 \text{ m}, W^{(e)} = 700 \text{ m}. \end{aligned}$$

Der Klinograph entsprach hiernach bei seinen Registrirungen einem einfachen Pendel von 144 m Länge, das von einem starren Gerüst nicht weniger als 15000 m unterhalb des Referenzniveaus getragen wird, und dessen Ausschläge 20-mal verkleinert aufgezeichnet werden. Die ungeheure äquivalente Gerüstgrösse macht es einleuchtend, dass nicht daran zu denken ist, mit einfachen Pendeln Klinographen entsprechender Leistungsfähigkeit zu konstruieren.

Die Aufzeichnungen des Klinographen wurden verglichen mit denen eines Horizontalpendels folgender Daten:

$$T = 12 \text{ sec}, L = 36 \text{ m}, V^{(e)} = 25, J^{(e)} = 900 \text{ m}, W^{(e)} = 0, Z = 0.$$

Man erkennt die weite Ueberlegenheit des Horizontalpendels in dem Gliede I. Klasse und die des Klinographen in dem Gliede II. Klasse. Da der Klinograph auch von den stärksten beobachteten Erdbeben, bei denen die scheinbaren Neigungen in den langen Wellen $1\frac{1}{2}$ Sekunden erreichten, unbeeinflusst blieb,

konnte, geschlossen werden, dass nicht wirkliche Neigungen, sondern Horizontalverschiebungen im Wesentlichen die Aufzeichnung des Horizontalpendels und also auch die der übrigen ähnlichen Apparate veranlassen, während die wirklichen Neigungen sehr klein bleiben (in den beobachteten Fällen unter 1/40 Sekunde).

31. *Seismograph beliebiger Konstruktion für eine Komponente.* Wir wollen nun sogleich zu dem allgemeinsten Fall einer beliebigen Konstruktion übergehen, wobei für das Gehänge in irgend einer Weise Axen, Hebel, Federn und dergleichen verwendet sein können. Jedoch nehmen wir zur Vereinfachung der Darstellung vorläufig nur *einen Grad der Freiheit* an; relativ zum Gestell sollen sich also die Punkte des Gehänges nur in *Kurven* bewegen können, und es soll die Lage aller Punkte bestimmt sein, wenn die Lage eines einzigen vorge-schrieben ist. *Die Angabe des Ausschlags a eines Indikators und seiner Aenderungen genügt hiernach vollständig, um die jeweilige relative Lage und die relativen Bewegungen festzustellen.*

Die angenommene Verknüpfung der Bewegungen hat zur Folge, dass eine bewegende Kraft, die an irgend einer Stelle des Gehänges wirkt, durch eine Kraft an irgend einer anderen Stelle ersetzt werden kann. Nach dem mechanischen *Prinzip der virtuellen Verrückungen* müssen sich dabei die Intensitäten der beiden Kräfte umgekehrt verhalten wie die entsprechenden Verrückungen. Ist also zum Beispiel K die zunächst gegebene Kraft, Q ihr Aequivalent am Indikator, so muss

$$(86) \quad Q = K \frac{\alpha}{a}$$

sein, wenn α den zum Indikatorschlag a gehörigen Ausschlag des Angriffspunktes von K parallel ihrer Wirkungslinie bedeutet. *Von diesem Satze werden wir im Folgenden ausgiebigen Gebrauch machen, um das gesamte Kraftsystem in einer für die Anwendung bequemen Weise auf den Indikator zu beziehen.* Zunächst ist dabei freilich vorauszusetzen, dass der Indikator von einem starren Arm geführt werde, dass es sich also um mechanische Registrierung handle. Da jedoch die ideelle Kraft Q einfach als eine rechnerische Hilfsgrösse für die Entwicklung der Theorie aufgefasst werden kann, steht garnichts im Wege, sie selbst dann beizubehalten, wenn der Indikator durch einen photographirenden Lichtpunkt gebildet wird. Will man das aus besonderen Gründen nicht thun, *so ist an Stelle des Indikators irgend ein passend scheinender Punkt des Gehänges auszuwählen und unter a im Folgenden der Ausschlag dieses Punktes zu verstehen.* —

Bei der Berechnung der Trägheitskräfte (Artikel 29) sind die absoluten Bewegungen des Gehänges zu verfolgen. Doch darf dabei wie bisher von den Bewegungen der Erde als Weltkörper abgesehen werden, das heisst, *es genügt, als „absolute“ Bewegungen diejenigen relativ zur Erde im Ganzen zu bezeichnen.*

ξ^* , η^* , ζ^* seien die *absoluten Verschiebungen* eines Punktes des Gehänges, ξ' , η' , ζ' die *entsprechenden Verschiebungen relativ zum Gestell.* Wir nehmen stets

nur so kleine seismische Störungen an, dass gemäss Artikel 16:

$$(87) \quad \xi^* = \xi' + \xi + zi - y\vartheta, \quad \eta^* = \eta' + \eta + zi + x\vartheta, \quad \zeta^* = \zeta' + \zeta - xi - yi,$$

gesetzt werden kann, wobei x, y, z die Koordinaten der Ruhelage relativ zum Referenzpunkt der Erdoberfläche bedeuten.

32. *Seismische Ruhe.* Zunächst soll wie bei der Behandlung des physikalischen Pendels der *Fall seismischer Ruhe* untersucht werden. Bei einem Ausschlag a verursachen die bewegenden Kräfte — herrührend zum Beispiel von der Schwere oder von Federn irgend welcher Art — eine zurücktreibende Komponente. Es entspricht unserer Annahme über die Kleinheit der Verschiebungen, diese proportional mit a zu setzen.

$$(88) \quad Q^{(6)} = -fa$$

stelle demgemäss die *Resultante der auf das Gehänge wirkenden bewegenden Kräfte* in Bezug auf den Indikator dar, wobei f eine gewisse Konstante ist.

Um die Resultante der Trägheitskräfte zu finden, bedenken wir, dass bei kleinen Bewegungen die Verrückung eines jeden Theilchens proportional mit a gesetzt werden darf;

$$(89) \quad \left[\frac{\xi'}{a} \right], \quad \left[\frac{\eta'}{a} \right], \quad \left[\frac{\zeta'}{a} \right]$$

bedeuten hiernach für jedes Theilchen gewisse Konstanten, welche uns mittels

$$(90) \quad \left[\frac{\xi'}{a} \right] \frac{da}{dt}, \quad \left[\frac{\eta'}{a} \right] \frac{da}{dt}, \quad \left[\frac{\zeta'}{a} \right] \frac{da}{dt}$$

die Komponenten der Geschwindigkeit, mittels

$$(91) \quad \left[\frac{\xi'}{a} \right] \frac{d^2a}{dt^2}, \quad \left[\frac{\eta'}{a} \right] \frac{d^2a}{dt^2}, \quad \left[\frac{\zeta'}{a} \right] \frac{d^2a}{dt^2}$$

die Komponenten der Beschleunigung und mittels

$$(92) \quad -d\mu \left[\frac{\xi'}{a} \right] \frac{d^2a}{dt^2}, \quad -d\mu \left[\frac{\eta'}{a} \right] \frac{d^2a}{dt^2}, \quad -d\mu \left[\frac{\zeta'}{a} \right] \frac{d^2a}{dt^2}$$

die Komponenten der Trägheitskraft ergeben, wenn $d\mu$ die Masse des Theilchens bezeichnet. So folgt denn nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen für den Indikator die äquivalente Kraft

$$(93) \quad -d\mu \left[\frac{\xi'}{a} \right]^2 \frac{d^2a}{dt^2} - d\mu \left[\frac{\eta'}{a} \right]^2 \frac{d^2a}{dt^2} - d\mu \left[\frac{\zeta'}{a} \right]^2 \frac{d^2a}{dt^2},$$

und wir erhalten als *Resultante der Trägheitskräfte bei seismischer Ruhe*:

$$(94) \quad Q^{[6]} = -m \frac{d^2a}{dt^2},$$

wenn

$$(95) \quad m = \int d\mu \left\{ \left[\frac{\xi'}{a} \right]^2 + \left[\frac{\eta'}{a} \right]^2 + \left[\frac{\zeta'}{a} \right]^2 \right\} = \int d\mu \left[\frac{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}{a^2} \right]$$

gesetzt wird. $Q^{[G]}$ würde dieselbe Grösse erhalten, wenn sich eine Masse m am Indikator selbst bewegte; wir wollen demgemäss m die *resultirende Masse* des Gehänges nennen. Die Formel (95) lehrt unmittelbar folgenden für die Berechnung von m wichtigen Satz: *Der Antheil eines Elementes des Gehänges zur resultirenden Masse verhält sich zur eigenen Masse wie das Quadrat der relativen Verrückung zum Quadrat des zugehörigen Indikatorausschlags:*

$$(96) \quad dm : d\mu = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 : a^2.$$

Das D'Alembert'sche mechanische Prinzip, nach welchem die Trägheitskräfte jederzeit die bewegenden Kräfte aufheben müssen, verlangt bei Abwesenheit von Störungen $Q^{(a)} + Q^{[G]} = 0$ und ergibt so in

$$(97) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{f}{m} a$$

die Indikatorgleichung bei Eigenschwingungen. Schwingungsperiode T und äquivalente Pendellänge L werden nach (97) durch

$$(98) \quad \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{g}{L} = \frac{f}{m}$$

bestimmt.

33. *Ableitung der Indikatorgleichung.* Bei Neigungen des Gestelles und Aenderungen der Schwerkraft tritt zu der *Resultante der bewegenden Kräfte*:

$$Q^{(a)} = -fa,$$

welche im Falle der seismischen Ruhe allein zu berücksichtigen war, noch eine Kraft, welche der veränderten Einwirkung der Schwere entspricht. Die Neigung i_x ist gleichwerthig mit dem Auftreten einer horizontalen Komponente der Schwerkraft $\parallel x$ im Betrage von gi_x . Das Theilchen $d\mu$ des beweglichen Theiles erfährt also $\parallel x$ im ganzen eine Kraft $d\mu (gi_x + \Delta g_x)$ und ergibt für den Indikator die äquivalente Kraft $d\mu (gi_x + \Delta g_x) [\xi'/a]$. In gleicher Weise gehört zu y die Kraft $d\mu (gi_y + \Delta g_y) [\eta'/a]$, zu z die Kraft $d\mu \Delta g_z [\zeta'/a]$, und wir erhalten als *Resultante der bewegenden Kräfte, welche durch die Neigungen des Apparates und durch Schwerkraftänderungen erregt werden:*

$$(99) \quad Q^{(a)} + Q^{(s)} = \left(\int d\mu \left[\frac{\xi'}{a} \right] \right) (gi_x + \Delta g_x) + \left(\int d\mu \left[\frac{\eta'}{a} \right] \right) (gi_y + \Delta g_y) + \left(\int d\mu \left[\frac{\zeta'}{a} \right] \right) \Delta g_z.$$

Zur Berechnung der Trägheitskräfte soll die Bewegung des Gehänges aufgefasst werden als Superposition der Bewegung relativ zum Gestell und der vom Gestell selbst ausgeführten Bewegung. Diese letztere wiederum zerlegen wir in

die Parallelverschiebungen, ξ , η , ζ , die Neigungen i_x , i_y und die Drehung ϑ_z um die Vertikale. In allen Fällen wird es wiederum darauf ankommen, die Resultante der Trägheitskräfte in Bezug auf den Indikator festzustellen.

Die *Resultante der Trägheitskräfte der relativen Bewegungen* des Gehänges haben wir durch den vorigen Artikel schon in

$$(100) \quad Q^{[6]} = -m \frac{d^2 a}{dt^2}$$

kennen gelernt. —

Bei den Parallelbewegungen entsprechend ξ ergibt das Theilchen $d\mu$ die Trägheitskraft $-d\mu \frac{d^2 \xi}{dt^2}$ parallel x . Das Aequivalent am Indikator ist

$$-d\mu \left[\frac{\xi'}{a} \right] \frac{d^2 \xi}{dt^2}.$$

So folgt denn als *Resultante der Trägheitskräfte wegen der Parallelverschiebungen*:

$$(101) \quad Q^{[5]} = -\left(\int d\mu \left[\frac{\xi'}{a} \right] \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \left(\int d\mu \left[\frac{\eta'}{a} \right] \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \left(\int d\mu \left[\frac{\zeta'}{a} \right] \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \right) \right) \dots$$

Als Wirkung der Neigung i_x treten die Verschiebungen

$$\xi^* = z i_x, \quad \eta^* = 0, \quad \zeta^* = -x i_x$$

auf. Während der Bewegung ergibt sich also für das Theilchen $d\mu$ eine Trägheitskraft mit den Komponenten

$$-d\mu \frac{d^2 \xi^*}{dt^2} = -d\mu z \frac{d^2 i_x}{dt^2}, \quad -d\mu \frac{d^2 \eta^*}{dt^2} = 0, \quad -d\mu \frac{d^2 \zeta^*}{dt^2} = d\mu x \frac{d^2 i_x}{dt^2},$$

woraus zu schliessen ist, dass

$$(102) \quad Q^{[4]} = -\left(\int d\mu z \left[\frac{\xi'}{a} \right] - \int d\mu x \left[\frac{\zeta'}{a} \right] \right) \frac{d^2 i_x}{dt^2} - \left(\int d\mu z \left[\frac{\eta'}{a} \right] - \int d\mu y \left[\frac{\xi'}{a} \right] \right) \frac{d^2 i_y}{dt^2}$$

die *Resultante der durch Neigungen erregten Trägheitskräfte* darstellt.

Die Drehung ϑ_z verursacht die Verschiebungen

$$\xi^* = -y \vartheta_z, \quad \eta^* = +x \vartheta_z, \quad \zeta^* = 0,$$

also die Trägheitskräfte

$$-d\mu \frac{d^2 \xi^*}{dt^2} = +d\mu y \frac{d^2 \vartheta_z}{dt^2}, \quad -d\mu \frac{d^2 \eta^*}{dt^2} = -d\mu x \frac{d^2 \vartheta_z}{dt^2}, \quad -d\mu \frac{d^2 \zeta^*}{dt^2} = 0,$$

und für den Indikator die *Resultante*

$$(103) \quad Q^{[3]} = -\left(\int d\mu x \left[\frac{\eta'}{a} \right] - \int d\mu y \left[\frac{\xi'}{a} \right] \right) \frac{d^2 \vartheta_z}{dt^2}.$$

Indem wir die Resultanten aller aufgeführten Kraftsysteme addiren und

die Summe = 0 setzen:

$$(104) \quad Q^{(g)} + Q^{(i)} + Q^{(g)} + Q^{[g]} + Q^{[s]} + Q^{[i]} + Q^{[\vartheta_z]} = 0,$$

erhalten wir nach dem D'Alembert'schen Prinzip die *Bewegungsgleichung des Indikators*. Ausführlich geschrieben lautet sie bei geringer Umstellung:

$$(105) \quad \left. \begin{aligned} \left(\int d\mu \left[\frac{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}{a^2} \right] \right) \frac{d^2 a}{dt^2} &= -fa - \left(\int d\mu \left[\frac{\xi'}{a} \right] \right) \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - gi_x - \Delta g_x \right) \\ &\quad - \left(\int d\mu \left[\frac{\eta'}{a} \right] \right) \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - gi_y - \Delta g_y \right) - \left(\int d\mu \left[\frac{\zeta'}{a} \right] \right) \left(\frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \Delta g_z \right) \\ &\quad - \left(\int d\mu z \left[\frac{\xi'}{a} \right] - \int d\mu x \left[\frac{\zeta'}{a} \right] \right) \frac{d^2 i_x}{dt^2} - \left(\int d\mu z \left[\frac{\eta'}{a} \right] - \int d\mu y \left[\frac{\zeta'}{a} \right] \right) \frac{d^2 i_y}{dt^2} \\ &\quad - \left(\int d\mu x \left[\frac{\eta'}{a} \right] - \int d\mu y \left[\frac{\xi'}{a} \right] \right) \frac{d^2 \vartheta_z}{dt^2}. \end{aligned} \right\}$$

34. *Umgestaltung und Diskussion der Indikatorgleichung.* Schreibt man nun:

$$(106) \quad \left. \begin{aligned} m &= \int d\mu \left[\frac{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}{a^2} \right], \quad \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{g}{L} = \frac{f}{m}, \\ V^{(x)} &= \frac{J^{(x)}}{L} = \frac{1}{m} \int d\mu \left[\frac{\xi'}{a} \right], \quad V^{(y)} = \frac{J^{(y)}}{L} = \frac{1}{m} \int d\mu \left[\frac{\eta'}{a} \right], \quad V^{(z)} = \frac{J^{(z)}}{L} = \frac{1}{m} \int d\mu \left[\frac{\zeta'}{a} \right] \\ W^{(i_x)} &= \frac{1}{m} \int d\mu \left(z \left[\frac{\xi'}{a} \right] - x \left[\frac{\zeta'}{a} \right] \right), \quad W^{(i_y)} = \frac{1}{m} \int d\mu \left(z \left[\frac{\eta'}{a} \right] - y \left[\frac{\zeta'}{a} \right] \right), \\ W^{(\vartheta_z)} &= \frac{1}{m} \int d\mu \left(x \left[\frac{\eta'}{a} \right] - y \left[\frac{\xi'}{a} \right] \right), \end{aligned} \right\}$$

so erhält die Indikatorgleichung die Gestalt:

$$(107) \quad \left. \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a - V^{(x)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - gi_x - \Delta g_x \right) - V^{(y)} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - gi_y - \Delta g_y \right) - V^{(z)} \left(\frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \Delta g_z \right) \\ &\quad - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(i_y)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} - W^{(\vartheta_z)} \frac{d^2 \vartheta_z}{dt^2} \\ &= - \frac{g}{L} a - \frac{J^{(x)}}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - gi_x - \Delta g_x \right) - \frac{J^{(y)}}{L} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - gi_y - \Delta g_y \right) - \frac{J^{(z)}}{L} \left(\frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \Delta g_z \right) \\ &\quad - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(i_y)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} - W^{(\vartheta_z)} \frac{d^2 \vartheta_z}{dt^2}, \end{aligned} \right\}$$

welche uns in den früheren Untersuchungen spezieller Fälle wohl bekannt geworden ist. Wiederum geben also $-V^{(x)}$, $-V^{(y)}$, $-V^{(z)}$ die *Vergrößerungen sehr schneller Parallelverschiebungen* an, ebenso $J^{(x)}/g$, $J^{(y)}/g$, $J^{(z)}/g$ die *Empfindlichkeiten gegen dauernde Neigungen*, $J^{(x)}/g$, $J^{(y)}/g$, $J^{(z)}/g$ die *Empfindlichkeiten gegen Schwereänderungen*, $-W^{(i_x)}$, $-W^{(i_y)}$, $-W^{(\vartheta_z)}$ die *Empfindlichkeiten gegen sehr schnelle Neigungen und Drehungen* um Axen durch den Referenzpunkt. Wiederum

werden wir (nach Artikel 19) $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$ die *Indikatorvergrößerungen*, $J^{(x)}$, $J^{(y)}$, $J^{(z)}$ die „äquivalenten Indikatorlängen“ nennen, und (nach Artikel 23) die zugehörigen Störungsglieder zur I. Klasse, diejenigen mit den Faktoren $W^{(ix)}$, $W^{(iy)}$, $W^{(iz)}$ zur II. Klasse rechnen.

Vergleichen wir die Indikatorgleichung (107) rein äusserlich mit der für einen Seismographen punktförmiger Masse in Artikel 26, gewonnenen, so könnte es scheinen, dass auch ein Seismograph beliebiger Massenvertheilung sich geradeso verhielte wie ein solcher, also einem gewissen Seismographen punktförmiger Masse genau äquivalent sei. Das trifft aber nicht zu, denn von den Vektoren V , J , W , welche mittels der Gleichungen

$$(108) \quad \begin{cases} V^{(x)} = V \cos(x, V), & V^{(y)} = V \cos(y, V), & V^{(z)} = V \cos(z, V) \\ J^{(x)} = J \cos(x, J), & J^{(y)} = J \cos(y, J), & J^{(z)} = J \cos(z, J), \\ W^{(ix)} = W^{(iy)} = W \cos(y, W), & W^{(iy)} = -W^{(ix)} = -W \cos(x, W), \\ & & W^{(iz)} = W \cos(z, W), \end{cases}$$

die $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$, $J^{(x)}$, $J^{(y)}$, $J^{(z)}$, $W^{(ix)}$, $W^{(iy)}$, $W^{(iz)}$ zusammenfassen, *steht der Vektor II. Klasse W im allgemeinen nicht mehr auf den beiden gleichgerichteten Vektoren I. Klasse V und J senkrecht*, wie es bei punktförmiger Masse der Fall sein müsste. Die sich so ergebenden Unterschiede des Verhaltens werden im folgenden Artikel zur Sprache kommen, hier wollen wir zunächst dem für die Praxis weit wichtigeren gemeinsam Gültigen nachgehen.

$V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $J^{(x)}$, $J^{(y)}$, $W^{(x)}$, $W^{(y)}$ beziehen sich speciell auf Neigungen, horizontale Verrückungen und Schwereänderungen parallel den Vertikalebene (z , x), (z , y). Wir werden vermuthen können, dass in derselben Weise wie bei punktförmiger Masse in den Formeln (108) für x oder y jede beliebige horizontale Richtung s genommen werden darf, dass also allgemein die Formeln

$$(109) \quad V^{(s)} = V \cos(s, V), \quad J^{(s)} = J \cos(s, J), \quad W^{(is)} = W^{(is')} = W \cos(s', W)$$

gelten, wobei s' die Richtung der zu den Neigungen i_s gehörigen Drehaxe, also eine auf s senkrecht stehende, ebenfalls horizontale Richtung bedeutet. Betrachten wir zur Prüfung die Wirkung von Parallelverschiebungen σ parallel s , von Neigungen i_s parallel der Vertikalebene (z , s) und von Schwereänderungen Δg_s parallel s , indem wir beachten, dass σ äquivalent ist mit den Verschiebungen $\xi = \sigma \cos(s, x)$, $\eta = \sigma \cos(s, y)$, i_s mit den Neigungen $i_x = i_s \cos(s, x) = i_s \cos(s', y)$, $i_y = i_s \cos(s, y) = -i_s \cos(s', x)$, Δg_s mit den Schwereänderungen $\Delta g_x = \Delta g_s \cos(s, x)$, $\Delta g_y = \Delta g_s \cos(s, y)$, so erhalten wir mittels (107):

$$(110) \quad \begin{cases} \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - (V^{(x)} \cos(s, x) + V^{(y)} \cos(s, y)) \left(\frac{d^2 \sigma}{dt^2} - g i_s - \Delta g_s\right) \\ \quad \quad \quad - (W^{(ix)} \cos(s', y) - W^{(iy)} \cos(s', x)) \frac{d^2 i_s}{dt^2}. \end{cases}$$

Nun ist in der That, da s auf z senkrecht steht:

$$(111) \quad \left\{ \begin{array}{l} V^{(x)} \cos(s, x) + V^{(y)} \cos(s, y) = V \cos(s, V) = \frac{J}{L} \cos(s, J) \\ W^{(ix)} \cos(s', y) - W^{(iy)} \cos(s', x) = W \cos(s', W) \end{array} \right.$$

und damit die Berechtigung der Formeln (109) erwiesen. Die eigentliche Bedeutung hiervon liegt in der Erkenntniss dass die Vektoren V , J , W nicht durch die specielle Wahl der Koordinatenrichtungen x , y beeinflusst werden, sondern unabhängig von diesen relativ zum Apparat festbestimmte Richtungen haben. Die gemeinsame Richtung von V und J entspricht der Schwingungsrichtung bei punktförmiger Masse und kann darum zweckmässig die „äquivalente Schwingungsrichtung“ genannt werden. —

Im Ganzen zeigen diese Ueberlegungen, dass die Wirkungsweise eines Seismographen mit einem Freiheitsgrade durch folgende Grössen charakterisirt werden kann:

1) Die Schwingungsdauer T , bezüglich die äquivalente Pendellänge L , verbunden durch die Gleichung

$$(112) \quad \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{g}{L};$$

2) zwei parallele Vektoren I. Klasse, nämlich den Vektor der Indikatorvergrößerung V bezüglich den Indikatorvektor J , verbunden durch die Gleichung

$$(113) \quad V \cong \frac{J}{L},$$

ihre gemeinsame Richtung nennen wir äquivalente Schwingungsrichtung;

3) den Indikatorvektor II. Klasse W .

Die Vektoren V , J , W bestimmen $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$, $J^{(x)}$, $J^{(y)}$, $J^{(z)}$, $W^{(ix)}$, $W^{(iy)}$, $W^{(iz)}$ mittels der Gleichung (109), (108). —

Wie bei punktförmiger Masse kommen wir zu einer erheblichen Vereinfachung der Indikatorgleichung, wenn wir uns speciell auf diejenigen horizontalen Richtungen k und k' beziehen, welche der Projektion von V , J und W entsprechen. Unter Benutzung der Relation

$$V^{(x)} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + V^{(y)} \frac{d^2 \eta}{dt^2} = V^{(x)} \frac{d^2}{dt^2} (\xi \cos(k, x) + \eta \cos(k, y)) = V^{(x)} \frac{d^2 x}{dt^2}$$

und einiger ähnlicher ergibt sich nämlich auch hier:

$$(114) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 a}{dt^2} = - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a - V^{(x)} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} - g i_k - \Delta g_k \right) - V^{(y)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_z \right) - W^{(ix)} \frac{d^2 i_{k'}}{dt^2} - W^{(iy)} \frac{d^2 \vartheta_z}{dt^2} \\ = - \frac{g}{L} a - \frac{J^{(x)}}{L} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} - g i_k - \Delta g_k \right) - \frac{J^{(y)}}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_z \right) - W^{(ix)} \frac{d^2 i_{k'}}{dt^2} - W^{(iy)} \frac{d^2 \vartheta_z}{dt^2}. \end{array} \right.$$

Wiederum können für die gewöhnliche Praxis die Störungsglieder II. Klasse, das heisst diejenigen, welche den Vektor W , bezüglich seine Komponenten $W^{(x)}$, . . . enthalten, als unmerklich bei Seite gelassen werden. Der Fall $V^{(x)} = 0$, $J^{(x)} = 0$, $\angle(V, z) = \angle(J, z) = 90^\circ$ liefert Horizontalseismographen, der Fall $V^{(z)} = 0$, $J^{(z)} = 0$, $\angle(V, z) = \angle(J, z) = 0$ Vertikalseismographen. Um Seismographen zweiter Klasse zu erhalten, ist W im Verhältniss zu J so gross zu machen, dass die Glieder mit W vorherrschen, oder doch deutlich wirksam werden.

35. *Unterschied des Verhaltens gegenüber einem Seismographen mit punktförmiger Masse.* Wie schon erwähnt kann ein solcher Unterschied sich darin äussern, dass der Indikatorvektor W nicht auf der äquivalenten Schwingungsrichtung, also auf der Richtung von V und J senkrecht steht. Wir wollen in einem solchen Falle W in seine Komponenten senkrecht und parallel der Schwingungsrichtung zerlegt denken. W_n sei die senkrechte, W_p die parallele Komponente. Dann ist für eine beliebige Richtung μ

$$W \cos(\mu, W) = W_n \cos(\mu, W_n) + W_p \cos(\mu, W_p)$$

und (107) ergibt daher:

$$(115) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(x)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g_{ix} - \Delta g_x \right) - V^{(y)} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - g_{iy} - \Delta g_y \right) - V^{(z)} \left(\frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \Delta g_z \right) \\ &\quad - W_n^{(ix)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W_n^{(iy)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} - W_n^{(\theta_z)} \frac{d^2 \vartheta_z}{dt^2} - W_p^{(ix)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W_p^{(iy)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} - W_p^{(\theta_z)} \frac{d^2 \vartheta_z}{dt^2}. \end{aligned} \right.$$

Abgesehen von den 3 letzten Gliedern entspricht nun die rechte Seite genau einem Seismographen mit punktförmiger Masse. Die Koordinaten X, Y, Z des äquivalenten Massenpunktes werden nach (80) bestimmt durch die Gleichungen:

$$(116) \quad W_n^{(ix)} = V^{(x)} Z - V^{(z)} X, \quad W_n^{(iy)} = V^{(y)} Z - V^{(z)} Y, \quad W_n^{(\theta_z)} = V^{(y)} X - V^{(x)} Y,$$

seine Schwingungsrichtung ist durch V und J gegeben.

Die 3 letzten Glieder zeigen das Neue im Verhalten des Seismographen allgemeiner Art; man kann sie in das eine Glied $W_p d^2 \Theta / dt^2$ zusammenfassen, wenn unter Θ der Drehwinkel um die W_p -Linie, also um die äquivalente Schwingungsrichtung verstanden wird, denn es ist unter dieser Voraussetzung:

$$(117) \quad W_p^{(ix)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} + W_p^{(iy)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} + W_p^{(\theta_z)} \frac{d^2 \vartheta_z}{dt^2} = W_p \frac{d^2 \Theta}{dt^2}.$$

Die eventuell vorhandene Abweichung des Verhaltens eines Seismographen mit räumlich verteilter Masse von dem eines Seismographen mit punktförmiger Masse kann also dahin gedeutet werden, dass eine Empfindlichkeit gegen Drehungen um die äquivalente Schwingungsrichtung hinzugetreten ist. Dabei handelt es sich aber nur um eine Empfindlichkeit zweiter Klasse, sodass die Abweichung für die gewöhnliche Praxis nicht in Betracht kommt.

36. *Einfluss der Aufstellung.* Eine Veränderung der Aufstellung des Apparates mittels Drehung um die Vertikale durch den Referenzpunkt ist formal gleich-

werthig mit einer anderen Verfügung über die Referenzrichtungen x, y . Die Ueberlegungen des Artikels 34 lehren daher, dass die Vektoren V, J, W ihre Lage relativ zum Apparat ungeändert beibehalten. Die Beziehungen (109) können demgemäss zur Neuberechnung der $V^{(x)}, \dots$ benutzt werden, und die Formeln (114) bleiben ganz unverändert.

Bei einer Aenderung der Aufstellung durch *Parallelverschiebungen*, also bei einer Aenderung der Lage relativ zum Referenzpunkt müssen die Vektoren V, J nebst ihren Komponenten $V^{(x)}, \dots$ nach ihrer physikalischen Bedeutung — z. B. V als Vergrößerung sehr schneller Parallelverschiebungen — unbeeinflusst bleiben. Anders steht es um W , denn bei der Einwirkung schneller Drehungen kommt es nicht nur auf die Orientirung, sondern auch auf die Lage der Drehungsaxen relativ zum Gestell an, und diese ändert sich für i_x, i_y, ϑ_x mit der Aufstellung. Von Interesse ist für uns allein der Fall, dass die Verschiebung auf einem Untergestell — z. B. auf einem Pfeiler — stattfindet, welches als starr gelten kann. Die Verschiebung ist dann formal gleichwerthig mit einer anderen Annahme über die Lage des Referenzpunktes relativ zum Apparat. $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ seien die Verschiebungen parallel x, y, z ; dann dürfen wir offenbar (107), (115) auch nach der Verschiebung noch anwenden, wenn statt der $\xi, \eta, \zeta, i_x, i_y, \vartheta_x, \Theta$ diejenigen Werthe der Verschiebungen und Drehungen eingesetzt werden, welche sich auf den Punkt $x = \bar{X}, y = \bar{Y}, z = \bar{Z}$ beziehen, denn dieser hat ja nun die gleiche Lage relativ zum Gestell, wie vorhin der Referenzpunkt. Die Ersatzwerthe sind:

$$\xi + \bar{Z}i_x - \bar{Y}\vartheta_x, \eta + \bar{Z}i_y + \bar{X}\vartheta_x, \zeta - \bar{X}i_x - \bar{Y}i_y, i_x, i_y, \vartheta_x, \Theta.$$

Werden sie in (115) eingeführt, so entsteht die Gleichung von Neuem, mit dem einzigen Unterschied, dass für $W_n^{(i_x)}, W_n^{(i_y)}, W_n^{(\vartheta_x)}$ die Werthe:

$$(118) \left\{ \begin{aligned} W_n^{(i_x)} &= V^{(x)}(Z + \bar{Z}) - V^{(x)}(X + \bar{X}), & W_n^{(i_y)} &= V^{(y)}(Z + \bar{Z}) - V^{(y)}(Y + \bar{Y}), \\ W_n^{(\vartheta_x)} &= V^{(y)}(X + \bar{X}) - V^{(x)}(Y + \bar{Y}) \end{aligned} \right.$$

anstelle der früheren (116) treten. *Wir erkennen, dass der Einfluss von Parallelverschiebungen sich nur auf die Glieder zweiter Klasse erstreckt und gerade derselbe ist, wie bei dem äquivalenten Seismographen punktförmiger Masse.* Die etwa vorhandene durch W_p gemessene Empfindlichkeit gegen Drehungen um die äquivalente Schwingungsrichtung ist ebenso wie V und J von Parallelverschiebungen des Apparates unabhängig.

37. *Seismographen mehrerer Freiheitsgrade.* Den praktischen Bedürfnissen wird im Allgemeinen hinreichend Rechnung getragen, wenn wir bei der Entwicklung der Theorie, über den Seismographen eines Freiheitsgrades hinausgehend, nur noch den Fall einer bestimmten endlichen Anzahl von Freiheitsgraden betrachten. Genau genommen wird hierdurch verlangt, dass alle Theile des Seismographen ausser den Gelenken völlig starr seien, denn in elastischen Körpern sind stets unendlich viele verschiedene Arten von Schwingungen möglich.

Für die Praxis aber ist es hinreichend, wenn die überzähligen Schwingungen durch zweckmässige Konstruktion genügend klein gehalten werden. In der Regel wird es dabei darauf ankommen, die Periode der störenden Eigenschwingungen klein gegenüber den zu registrierenden Perioden zu machen. —

Die Anzahl der Freiheitsgrade des Seismographen sei n ; das Gehänge kann dann n verschiedenartige Schwingungen gegenüber dem Gestell ausführen, und zur Feststellung seiner jeweiligen relativen Lage gegenüber dem Gestell ist die Angabe von n Grössen erforderlich und hinreichend. Will man die Bewegungen des Gehänges seismographisch vollständig ausnutzen, so sind n Indikatoren anzubringen. Wir wollen annehmen, dieses sei geschehen, und die bezüglichen Ausschläge mit a, b, c, \dots bezeichnen. Jede Bewegung des Gehänges relativ zum Gestell äussert sich dann in einer Aenderung des Systemes der Werthe a, b, c, \dots .

Π sei irgend ein Punkt des Gehänges, ξ', η', ζ' mögen die von der Ruhelage ab gerechneten relativen Verschiebungen bezeichnen, sodass ξ', η', ζ' von den Ausschlägen a, b, c, \dots abhängen. Wiederum, wie in früheren ähnlichen Fällen setzen wir eine lineare Beziehung voraus, schreiben also:

$$(119) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi' = \left[\frac{\xi'}{a} \right] a + \left[\frac{\xi'}{b} \right] b + \left[\frac{\xi'}{c} \right] c + \dots, \quad \eta' = \left[\frac{\eta'}{a} \right] a + \left[\frac{\eta'}{b} \right] b + \left[\frac{\eta'}{c} \right] c + \dots, \\ \zeta' = \left[\frac{\zeta'}{a} \right] a + \left[\frac{\zeta'}{b} \right] b + \left[\frac{\zeta'}{c} \right] c + \dots, \end{array} \right.$$

wobei die Symbole $\left[\frac{\xi'}{a} \right], \left[\frac{\xi'}{b} \right], \dots$ gewisse Konstanten bezeichnen.

Griffe in Π eine Kraft Ξ parallel x an, so würde ihr nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen das Gleichgewicht gehalten, wenn an den Indikatoren die Kräfte $-Q_a, -Q_b, -Q_c, \dots$ wirkten, bestimmt durch die Formeln:

$$Q_a = \left[\frac{\xi'}{a} \right] \Xi, \quad Q_b = \left[\frac{\xi'}{b} \right] \Xi, \quad Q_c = \left[\frac{\xi'}{c} \right] \Xi, \quad \dots, \dots,$$

und es könnte demgemäss das Kraftsystem Q_a, Q_b, Q_c, \dots die Kraft Ξ genau ersetzen. Entsprechend ist eine beliebige in Π wirkende Kraft mit den Komponenten Ξ, H, Z äquivalent mit dem Indikatorkraftsystem:

$$(120) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_a = \left[\frac{\xi'}{a} \right] \Xi + \left[\frac{\eta'}{a} \right] H + \left[\frac{\zeta'}{a} \right] Z, \quad Q_b = \left[\frac{\xi'}{b} \right] \Xi + \left[\frac{\eta'}{b} \right] H + \left[\frac{\zeta'}{b} \right] Z, \\ Q_c = \left[\frac{\xi'}{c} \right] \Xi + \left[\frac{\eta'}{c} \right] H + \left[\frac{\zeta'}{c} \right] Z, \quad \dots, \dots, \end{array} \right.$$

sodass die so bestimmten Kräfte Q_a, Q_b, Q_c als die *Indikatorcomponenten* der gegebenen Kraft Ξ, H, Z bezeichnet werden können.

Die Bewegungsgleichungen sagen nach dem D'Alembert'schen Prinzip aus, dass die bewegenden Kräfte und die Trägheitskräfte einander zu Null ergänzen.

Wir erhalten sie daher, indem wir jede bewegende Kraft und jede Trägheitskraft durch ihre Indikatorkomponenten ersetzen und der Summe für jeden einzelnen Indikator den Werth Null geben.

Es sollen zunächst diejenigen Kräfte betrachtet werden, welche das Gehänge in die Ruhelage zurückzuführen streben. Bei nur einem Freiheitsgrad setzten wir die Indikatorresultante $Q^{(a)}$ proportional mit dem Indikatorausschlag a ; jetzt, bei mehreren Freiheitsgraden und dementsprechend mehrfach vorhandenen Indikatoren a, b, c, \dots , werden wir für die resultirenden Indikatorkomponenten eine lineare Abhängigkeit von den Ausschlägen a, b, c, \dots annehmen müssen, sodass geschrieben werden kann:

$$(121) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_a^{(a)} = -f_{11}a - f_{12}b - f_{13}c - \dots, \quad Q_b^{(a)} = -f_{21}a - f_{22}b - f_{23}c - \dots, \\ Q_c^{(a)} = -f_{31}a - f_{32}b - f_{33}c - \dots, \quad \dots, \end{array} \right.$$

wobei die f_{11}, f_{12}, \dots Konstanten bedeuten. Indem wir dabei wieder, wie in Artikel 28 voraussetzen, dass der Apparat nicht dauernd wie ein Motor Energie abgeben könne, ergibt sich für beliebige ν, μ die Beziehung:

$$(122) \quad f_{\mu\nu} = f_{\nu\mu}.$$

In den weiteren Untersuchungen gestaltet sich alles ganz ähnlich wie bei einem Freiheitsgrad, sodass ich mich unter Hinweis hierauf sehr kurz fassen darf.

38. *Eigenschwingungen des Apparates.* Bei den Eigenschwingungen des sich selbst überlassenen Apparates sind ausser den bewegenden Kräften $Q_a^{(a)}, Q_b^{(a)}, \dots$ nur noch die Trägheitskräfte infolge der Bewegungen des Gehänges relativ zum Gestelle zu beachten. Werden ihre Resultanten mit $Q_a^{[a]}, Q_b^{[a]}, \dots$ bezeichnet, so lauten die Bewegungsgleichungen $Q_a^{(a)} + Q_a^{[a]} = 0, Q_b^{(a)} + Q_b^{[a]} = 0, \dots$. Durch Einsetzen der Werthe für $Q_a^{(a)}, Q_b^{(a)}, \dots$ und den leicht zu berechnenden Werthen für $Q_a^{[a]}, Q_b^{[a]}, \dots$ ergeben sich die Formeln:

$$(123) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{11} \frac{d^2a}{dt^2} + m_{12} \frac{d^2b}{dt^2} + m_{13} \frac{d^2c}{dt^2} + \dots = -f_{11}a - f_{12}b - f_{13}c - \dots, \\ m_{21} \frac{d^2a}{dt^2} + m_{22} \frac{d^2b}{dt^2} + m_{23} \frac{d^2c}{dt^2} + \dots = -f_{21}a - f_{22}b - f_{23}c - \dots, \end{array} \right.$$

in welchen die Konstanten m_{11}, m_{12}, \dots folgende Bedeutung haben:

$$(124) \quad m_{11} = \int d\mu \left(\left[\frac{\xi'}{a} \right]^2 + \left[\frac{\eta'}{a} \right]^2 + \left[\frac{\zeta'}{a} \right]^2 \right), \quad m_{12} = \int d\mu \left(\left[\frac{\xi'}{a} \right] \left[\frac{\xi'}{b} \right] + \left[\frac{\eta'}{a} \right] \left[\frac{\eta'}{b} \right] + \left[\frac{\zeta'}{a} \right] \left[\frac{\zeta'}{b} \right] \right) = m_{21}, \dots$$

Setzen wir einer einheitlichen Schwingung mit der Periode T entsprechend:

$$(125) \quad a = p\alpha, \quad b = p\beta, \quad c = p\gamma, \dots$$

$$(126) \quad p = P \sin 2\pi \frac{t + \delta}{T}.$$

wobei die $\alpha, \beta, \gamma, \dots, T, \delta$ und der aus später zu Tage tretenden Gründen hinzugefügte Faktor P Konstanten sind, so liefern (123) die Bedingungen:

$$(127) \quad \begin{cases} \left(m_{11} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 - f_{11} \right) \alpha + \left(m_{12} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 - f_{12} \right) \beta + \left(m_{13} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 - f_{13} \right) \gamma + \dots = 0, \\ \left(m_{21} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 - f_{21} \right) \alpha + \left(m_{22} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 - f_{22} \right) \beta + \left(m_{23} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 - f_{23} \right) \gamma + \dots = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Aus ihnen folgt in bekannter Weise zur Bestimmung von T die Determinantengleichung:

$$(128) \quad \begin{vmatrix} m_{11} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 - f_{11} & m_{12} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 - f_{12} & m_{13} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 - f_{13} & \dots \\ m_{21} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 - f_{21} & m_{22} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 - f_{22} & m_{23} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 - f_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Als Unbekannte können wir in (128) die Grösse

$$\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{g}{L}$$

ansehen. Der Grad ist $= n$, ebenso gross wie die Anzahl der Freiheitsgrade; im Allgemeinen giebt es also auch ebenso viele verschiedene Schwingungsperioden T , bezüglich äquivalente Pendellängen L . Wir wollen die ersteren mit T_1, T_2, T_3, \dots bezeichnen. Wird irgend einer dieser Werthe in (127) eingeführt, so entstehen lineare Gleichungen zur Berechnung der $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Es scheint unnöthig, auf die sich eventuell einstellenden Unbestimmtheiten näher einzugehen; jedenfalls kann man schliesslich im Ganzen n verschiedene Systeme von Werthen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, die mit

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \dots, \dots$$

bezeichnet werden sollen, angeben, von denen jedes einem der n Werthe T zugeordnet ist, und mit diesem zusammen in (125) (126) eingesetzt bei beliebigen P und δ die Bewegungsgleichungen (123) erfüllt. So werden n mögliche verschiedene einheitliche Eigenschwingungen des Seismographen dargestellt. Die allgemeinste Art der Eigenschwingungen erhalten wir durch Superposition der einfachen Schwingungen, wenn

$$(129) \quad a = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \dots, \quad b = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3 + \dots, \dots$$

$$(130) \quad p_1 = P_1 \sin 2\pi \frac{t + \delta_1}{T_1}, \quad p_2 = P_2 \sin 2\pi \frac{t + \delta_2}{T_2}, \dots$$

geschrieben wird. Die $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ können hierin als ein für alle Mal fest-

stehende, bestimmte Zahlen, die P und δ dagegen als beliebige Zahlen, Integrationskonstanten, angesehen werden. Es bestimmen dann die $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ jedesmal die Art der einfachen Schwingung, während P die beliebig bleibende Intensität misst, und δ die ebenfalls beliebig bleibende Phase festlegt. — Man wird nun erkennen, warum vorhin der Faktor P von den Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ abgespalten wurde: es geschah, um die Bestimmung der Art und der Intensität der einzelnen Schwingungen in bequemer Weise von einander trennen zu können.

39. *Verhalten bei Störungen.* Bei seismischen Störungen und Schwereänderungen ergeben Erwägungen ähnlicher Art wie in Artikel 33 unter Benutzung von (127) zu (129) eine Reihe von Gleichungen anstelle von (123), deren erste, die zum Indikator (a) gehört, so geschrieben werden kann :

$$\left. \begin{aligned}
 & (m_{11}\alpha_1 + m_{12}\beta_1 + \dots)\left(\frac{d^2 p_1}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 p_1\right) + (m_{11}\alpha_2 + m_{12}\beta_2 + \dots)\left(\frac{d^2 p_2}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 p_2\right) + \dots \\
 (131) \quad & = -\left(\int d\mu \left[\frac{\xi'}{a}\right]\right)\left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g^i_x - \Delta g_x\right) - \left(\int d\mu \left[\frac{\eta'}{a}\right]\right)\left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - g^i_y - \Delta g_y\right) - \left(\int d\mu \left[\frac{\zeta'}{a}\right]\right)\left(\frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \Delta g_z\right) \\
 & - \left(\int d\mu z \left[\frac{\xi'}{a}\right]\right) - \int d\mu x \left[\frac{\xi'}{a}\right] \frac{d^2 i_x}{dt^2} - \left(\int d\mu z \left[\frac{\eta'}{a}\right]\right) - \int d\mu y \left[\frac{\xi'}{a}\right] \frac{d^2 i_y}{dt^2} - \left(\int d\mu x \left[\frac{\eta'}{a}\right]\right) - \int d\mu y \left[\frac{\xi'}{a}\right] \frac{d^2 \vartheta_x}{dt^2} .
 \end{aligned} \right\}$$

Zur bequemeren Gestaltung der Gleichungen bestimmen wir n Koeffizienten $V_1^{(a)}, V_2^{(a)}, V_3^{(a)}, \dots, V_n^{(a)}$ mittels der Formeln:

$$(132) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & (m_{11}\alpha_1 + m_{12}\beta_1 + \dots) V_1^{(a)} + (m_{11}\alpha_2 + m_{12}\beta_2 + \dots) V_2^{(a)} + \dots = \int d\mu \left[\frac{\xi'}{a}\right], \\
 & (m_{21}\alpha_1 + m_{22}\beta_1 + \dots) V_1^{(a)} + (m_{21}\alpha_2 + m_{22}\beta_2 + \dots) V_2^{(a)} + \dots = \int d\mu \left[\frac{\xi'}{b}\right], \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right.$$

und weitere Systeme von je n Koeffizienten $V_1^{(y)}, \dots, V_n^{(y)}, V_1^{(z)}, \dots, V_n^{(z)}, W_1^{(i_x)}, \dots, W_n^{(i_x)}, W_1^{(i_y)}, \dots, W_n^{(i_y)}, W_1^{(\vartheta_x)}, \dots, W_n^{(\vartheta_x)}$ mittels entsprechender Formeln, bei denen die Faktoren links stets gleich bleiben, und rechts nacheinander die Grössen $\int d\mu [\eta'/a], \dots, \int d\mu [\xi'/a], \dots, (\int d\mu z [\xi'/a] - \int d\mu x [\xi'/a]), \dots, (\int d\mu z [\eta'/a] - \int d\mu y [\xi'/a]), \dots, (\int d\mu x [\eta'/a] - \int d\mu y [\xi'/a]), \dots$ auftreten; dann erhalten wir mittels (131) und den entsprechenden Formeln für die anderen Indikatoren das folgende System der Bewegungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned}
 (133) \quad & \frac{d^2 p_v}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 p_v - V_v^{(z)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g^i_x - \Delta g_x\right) - V_v^{(y)} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - g^i_y - \Delta g_y\right) - V_v^{(a)} \left(\frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \Delta g_z\right) \\
 & - W_v^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W_v^{(i_y)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} - W_v^{(\vartheta_x)} \frac{d^2 \vartheta_x}{dt^2}, \\
 & v = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \right\}$$

Dabei ist nach der Ableitung

$$(134) \quad a = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \dots + \alpha_n p_n, \quad b = \beta_1 p_2 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3 + \dots + \beta_n p_n, \dots$$

und sind die α , β , γ , T Systeme von Konstanten, welche den Bedingungen (127), (128) genügen.

Wir erkennen durch Vergleich dieser Formeln mit (107), dass ein Seismograph von n Freiheitsgraden sich genau so verhält, als umfasste er n von einander unabhängige Seismographen je eines Freiheitsgrades. Die Bewegungen der letzteren werden bei unserer Bezeichnungsweise durch die Variablen p_1, p_2, \dots, p_n gekennzeichnet.

Die Aufzeichnungen jedes einzelnen der Indikatoren (a), (b), (c), . . . erscheinen im allgemeinen Falle von den sämtlichen Einzelseismographen beeinflusst. Hieran knüpfen sich nun ähnliche Bemerkungen, wie in Artikel 28 bei Besprechung der Seismographen mit punktförmiger Masse: In der Praxis kann und wird man in der Regel eine solche besondere Konstruktion verlangen, dass jeder Indikator nur von einem der unabhängig scheinenden Einzelseismographen abhängt. Wird dann p_1 zu a, p_2 zu b, u. s. w. zugeordnet, so darf in (133) p_1 durch a, p_2 durch b, u. s. w. ersetzt werden, und es entsteht ein System von Gleichungen, welches zeigt, dass in diesem Falle der Seismograph n mit Freiheitsgraden völlig äquivalent mit n einzelnen Seismographen je eines Freiheitsgrades ist.

40. *Schlussübersicht.* Das Endergebniss der bisherigen Untersuchungen können wir in der Erkenntniss sehen, dass bei jeder beliebigen Konstruktion der für uns in Betracht kommenden Seismographen die *Indikatorgleichung* folgende Form hat:

$$(135) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(x)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right) - V^{(y)} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - g i_y - \Delta g_y \right) - V^{(z)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_z \right) \\ &\quad - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(i_y)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} - W^{(\vartheta_x)} \frac{d^2 \vartheta_x}{dt^2} \\ &= -\frac{g}{L} a - \frac{J^{(x)}}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right) - \frac{J^{(y)}}{L} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - g i_y - \Delta g_y \right) - \frac{J^{(z)}}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_z \right) \\ &\quad - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(i_y)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} - W^{(\vartheta_x)} \frac{d^2 \vartheta_x}{dt^2} \end{aligned} \right.$$

ξ , η , ξ sind die Verrückungen des Apparates parallel den Referenzrichtungen x , y , z , i_x und i_y seine Neigungen parallel den Vertikalebene (z, x), (z, y); ϑ_x giebt die Drehung um die Vertikale an. a ist der Indikatorausschlag, T die *Schwingungsperiode* (= der doppelten Schwingungsdauer) des Gehänges bei Eigenschwingungen, L die „äquivalente Pendellänge“, d. h. die Länge eines einfachen Pendels gleicher Periode; $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$, $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_x)}$ oder $J^{(x)}$, $J^{(y)}$, $J^{(z)}$, $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_x)}$ sind sechs Konstanten, welche mit der siebenten T oder L zusammen die Eigenart des Seismographen und seiner Aufstellung charakterisieren. $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$, $J^{(x)}$, $J^{(y)}$, $J^{(z)}$, $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_x)}$ können gemäss (108) zu je einem Vektor V , J , W vereinigt werden.

Für Eigenart und Aufstellung sind also ein Skalar, nämlich T oder L , und zwei Vektoren, nämlich V oder J und W charakteristisch. T und L sind durch die skalare Gleichung

$$(136) \quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L},$$

V und J durch die vektorelle Gleichung

$$(137) \quad J \simeq LV$$

mit einander verbunden. Die Vektoren V und L sind relativ zum Seismographen fest bestimmt, d. h. sie hängen nach ihrer Grösse und nach ihrer Richtung relativ zum Apparat nicht von der Aufstellung ab. Ihre gemeinsame Richtung wird von uns „äquivalente Schwingungsrichtung“ genannt, weil sie die Schwingungsrichtung bei einem Seismographen mit punktförmiger Masse angiebt, der sich in Bezug auf T , L , V , J genau ebenso verhält wie der gegebene Seismograph. V bedeutet die Vergrösserung, mit welcher im äquivalenten Seismographen punktförmiger Masse die Bewegungen dieser vom Indikator wiedergegeben werden und heisst darum der „Vektor der Indikatorvergrösserung“ oder auch kürzer die „Indikatorvergrösserung“. J giebt im speciellen Falle des einfachen Pendels (§ 2) die Länge des indicirenden Zeigers an, und heisst darum „Vektor der Indikatorlänge“ oder kürzer „Indikatorvektor“. $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$, $V^{(s)}$ heissen „Indikatorvergrösserungen“, $J^{(x)}$, $J^{(y)}$, $J^{(z)}$, $J^{(s)}$, „äquivalente Indikatorlängen“ für die Richtungen x , y , z , s . Unter s ist hier eine beliebige Richtung im Raume zu verstehen, so dass $V^{(s)} = V \cos(s, V)$, $J^{(s)} = J \cos(s, J)$ wird. Sehr schnelle Parallelverschiebungen werden vom Indikator $-V^{(s)}$ mal vergrössert aufgezeichnet. Eine Aenderung der Schwerkraft um Δg , parallel s verändert die Ruhelage des Indikators um $(J^{(s)}/g) \Delta g$. Bezeichnet s speciell eine horizontale Richtung, so zeigt $J^{(s)} i_s$ den Indikatorausschlag für eine Neigung i_s parallel der Vertikalebene (z, s) bei Bogenmaass an; wird i_s in Winkelsekunden gemessen, so erhält der Ausschlag den Werth $(J^{(s)}/206000) i_s$.

Der Vektor W hängt ausser von der Eigenart des Seismographen auch davon ab, auf welchen Punkt man die Drehungsachsen für i_x , i_y , ϑ_z bezieht; sich anders ausdrückend, kann man sagen, dass für W auch die Stellung des Apparates relativ zum Referenzpunkt in Betracht kommt, auf den man die seismische Störungen i_x , i_y , ϑ_z bezieht (Artikel 36). — Die Unterscheidung zwischen scheinbaren und wahren Neigungen der Erdoberfläche verlangt die Beachtung von W , wir nennen demgemäss W den „Vektor II. Klasse“, seine angehörigen Glieder in der Indikatorgleichung „Glieder II. Klasse“ (Artikel 17).

Da es bisher noch nicht gelungen ist, Seismographen zu konstruieren, bei welchen der Vektor II. Klasse W die Indikatoraufzeichnungen merklich beeinflusste, so darf man für die gewöhnliche Praxis, die Glieder II. Klasse ganz beiseite

lassend, anstelle von (135) als Indikatorgleichung einfacher schreiben:

$$(138) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(x)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right) - V^{(y)} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - g i_y - \Delta g_y \right) - V^{(z)} \left(\frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \Delta g_z \right) \\ &= -\frac{g}{L} a - \frac{J^{(x)}}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right) - \frac{J^{(y)}}{L} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - g i_y - \Delta g_y \right) - \frac{J^{(z)}}{L} \left(\frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \Delta g_z \right), \end{aligned} \right.$$

sodass zur Charakterisierung der Wirksamkeit nur ein Skalar, nämlich T oder L , und ein Vektor, nämlich V oder J , übrig bleibt.

Bezeichnet k die Richtung der horizontalen Projektion von V und J , κ die zugehörige Komponente der Parallelverschiebung (ξ , η , ζ), so erhält die *allgemeine Indikatorgleichung* (138) folgende einfachere Form:

$$(139) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(k)} \left(\frac{d^2 \kappa}{dt^2} - g i_k - \Delta g_k \right) - V^{(z)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_z \right) \\ &= -\frac{g}{L} a - \frac{J^{(k)}}{L} \left(\frac{d^2 \kappa}{dt^2} - g i_k - \Delta g_k \right) - \frac{J^{(z)}}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_z \right). \end{aligned} \right.$$

Für einen *Horizontalseismographen* ist speziell

$$\sphericalangle(V, z) = \sphericalangle(J, z) = 90^\circ, \quad V^{(z)} = 0, \quad J^{(z)} = 0, \quad V^{(k)} = V, \quad J^{(k)} = J,$$

sodass sich als *Indikatorgleichung*

$$(140) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V \left(\frac{d^2 \kappa}{dt^2} - g i_k - \Delta g_k \right) = -\frac{g}{L} a - \frac{J}{L} \left(\frac{d^2 \kappa}{dt^2} - g i_k - \Delta g_k \right)$$

ergiebt. k bezeichnet hier zugleich die Richtungen der Vektoren V und J , also die „äquivalente Schwingungsrichtung“.

Für einen *Vertikalseismographen* ist $\sphericalangle(V, z) = \sphericalangle(J, z) = 0$, $V^{(k)} = 0$, $J^{(k)} = 0$, $V^{(z)} = V$, $J^{(z)} = J$; die *Indikatorgleichung* geht über in

$$(141) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_z \right) = -\frac{g}{L} a - \frac{J}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_z \right);$$

die äquivalente Schwingungsrichtung liegt $\parallel z$.

In der gewöhnlichen Praxis hat man es nur entweder mit Horizontalseismographen oder mit Vertikalseismographen zu thun, wird also entweder die Gleichung (140) oder die Gleichung (141) annehmen dürfen, welcher Art auch die Konstruktion des Seismographen sei. Der Horizontalseismograph verhält sich hiernach gerade so, wie ein einfacher Pendelseismograph mit der Pendellänge L und der Indikatorlänge J , der Vertikalseismograph so, als ob er eine punktförmige Masse mit vertikaler Schwingungsrichtung und der Eigenperiode T enthielte, deren Bewegungen vom Indikator V -mal vergrößert aufgezeichnet werden.

Angesichts dieser gewiss überraschenden und sehr erfreulichen Einfachheit der Resultate unserer theoretischen Untersuchungen, mag darauf hingewiesen

werden, dass wir von *Reibungswiderständen* bisher absahen. Es wird bald zu Tage treten, dass diese bei gut konstruirten Instrumenten eine nur geringe Komplikation der Indikatorgleichungen verursachen, und dass es sogar möglich ist. aus ihnen für die Verwerthbarkeit der Seismographen Nutzen zu ziehen (§ 6).

§ 5. Indikatorbewegungen reibungsloser Seismographen.

41. *Einleitung; Satz der Superposition.* Die allgemeine Indikatorgleichung lautet nach Artikel 40:

$$(142) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(x)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right) - V^{(y)} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - g i_y - \Delta g_y \right) - V^{(z)} \left(\frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \Delta g_z \right) \\ &\quad - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(i_y)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} - W^{(\vartheta_z)} \frac{d^2 \vartheta_z}{dt^2}, \\ &= -\frac{g}{L} a - \frac{J^{(x)}}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right) - \frac{J^{(y)}}{L} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - g i_y - \Delta g_y \right) - \frac{J^{(z)}}{L} \left(\frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \Delta g_z \right) \\ &\quad - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(i_y)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} - W^{(\vartheta_z)} \frac{d^2 \vartheta_z}{dt^2}. \end{aligned} \right.$$

Solange der Seismograph sich selbst überlassen ist, tritt anstelle dieser Gleichungen die einfachere:

$$(143) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a = -\frac{g}{L} a,$$

deren Lösung in der Form

$$(144) \quad a = A \sin 2\pi \frac{t + \delta}{T}$$

oder

$$(145) \quad a = S \sin 2\pi \frac{t}{T} + C \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

geschrieben werden kann und die *Eigenschwingungen* umfasst. A , δ bezüglich S , C sind Konstanten von beliebigen Werthen, zwischen denen die Beziehungen

$$(146) \quad S = A \cos 2\pi \frac{\delta}{T}, \quad C = A \sin 2\pi \frac{\delta}{T}, \quad A = \sqrt{S^2 + C^2}, \quad \operatorname{tg} 2\pi \frac{\delta}{T} = \frac{C}{S}$$

bestehen. Die Indikatorgeschwindigkeit wird durch

$$(147) \quad \frac{da}{dt} = \frac{2\pi}{T} A \cos 2\pi \frac{t + \delta}{T} = \frac{2\pi}{T} S \cos 2\pi \frac{t}{T} - \frac{2\pi}{T} C \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

angegeben.

Die Gleichung (142) lehrt jederzeit die Beschleunigung der Indikatorbewegung kennen, wenn der Anschlag und die von den Störungen abhängigen Grössen $d^2\xi/dt^2$, i_x, \dots gegeben sind. *Die Indikatorbewegung ist also von einem beliebigen Augenblick ab völlig bestimmt, wenn in diesem der Indikatorausschlag a sowie die Indikatorgeschwindigkeit da/dt und weiterhin die Störungen, also $\xi, \eta, \zeta, i_x, i_y, \vartheta, \Delta g_x, \Delta g_y, \Delta g_z$, bekannt sind.*

Hieran knüpft sich sogleich die Frage, wie der durch a und da/dt bestimmte Anfangszustand den weiteren Verlauf der Indikatorbewegungen beeinflusst. Um die Antwort zu finden, vergleichen wir zwei Fälle, in denen von gewissen Zeitpunkten ab — die Anfangspunkte genannt werden sollen — genau gleiche Störungen erfolgen, während die Anfangszustände verschieden sind. a_1 und a_2 seien die Ausschläge in den beiden Fällen. Wir stellen (142) für a_1 und a_2 auf und bilden die zu entsprechenden Zeitmomenten gehörige Differenz; dann folgt

$$\frac{d^2(a_2 - a_1)}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (a_2 - a_1),$$

also

$$a - a_1 = S \sin 2\pi \frac{t}{T} + C \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

und

$$\frac{da_2}{dt} - \frac{da_1}{dt} = \frac{2\pi}{T} S \cos 2\pi \frac{t}{T} - \frac{2\pi}{T} C \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wobei S und C durch die anfänglichen Werthe von a und da/dt bestimmt werden. *Verschiedene Anfangszustände verursachen hiernach für die Indikatorbewegung nur insofern einen Unterschied, als in einer anderen Weise Eigenschwingungen beigemischt erscheinen.* —

Die hier sich zeigende Superposition beliebiger Eigenschwingungen bildet einen speciellen Fall eines viel allgemeineren Satzes. Um zu ihm zu gelangen, vergleichen wir eine Reihe von Fällen (1), (2), (3) . . . irgend welcher Störungen:

$$\begin{aligned} &\xi_1, \eta_1, \zeta_1, (i_x)_1, (i_y)_1, (\vartheta)_1, (\Delta g_x)_1, (\Delta g_y)_1, (\Delta g_z)_1, \\ &\xi_2, \eta_2, \zeta_2, (i_x)_2, (i_y)_2, (\vartheta)_2, (\Delta g_x)_2, (\Delta g_y)_2, (\Delta g_z)_2, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

mit einem Störungsfall (0)

$$\xi, \eta, \zeta, i_x, i_y, \vartheta, \Delta g_x, \Delta g_y, \Delta g_z$$

solcher Art, dass dauernd

$$(148) \quad \xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots, \quad \eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \dots, \quad \Delta g_x = (\Delta g_x)_1 + (\Delta g_x)_2 + (\Delta g_x)_3 + \dots$$

ist, wenn man den Zeiten jedesmal von einem passend gewählten Anfangspunkte aus rechnet, oder — wie wir uns für die Darstellung bequemer aus-

drücken wollen —, wenn man die $\xi, \eta, \dots \xi_1, \eta_1, \dots$ für „entsprechende“ Zeiten auswählt. Die Störungen im Falle (0) erscheinen dann als Summe der Störungen in den Fällen (1), (2), (3) — Bildet man hier die Indikatorgleichung (142) der Reihe nach für entsprechende Zeitmomente in (1), (2), (3), summirt und subtrahirt das Resultat von der zu (0) gehörigen Indikatorgleichung, so ergibt sich

$$\frac{d^2(a - a_1 - a_2 - a_3 - \dots)}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (a - a_1 - a_2 - a_3 - \dots),$$

also:

$$(149) \quad \left\{ \begin{array}{l} a - a_1 - a_2 - a_3 - \dots = S \sin 2\pi \frac{t}{T} + C \cos 2\pi \frac{t}{T}, \\ \frac{da}{dt} - \frac{da_1}{dt} - \frac{da_2}{dt} - \frac{da_3}{dt} - \dots = \frac{2\pi}{T} S \cos 2\pi \frac{t}{T} - \frac{2\pi}{T} C \sin 2\pi \frac{t}{T}. \end{array} \right.$$

Ist insbesondere anfänglich

$$(150) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = a_1 + a_2 + a_3 + \dots, \\ \frac{da}{dt} = \frac{da_1}{dt} + \frac{da_2}{dt} + \frac{da_3}{dt} + \dots, \end{array} \right.$$

so gilt hiernach dauernd

$$(151) \quad a = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Die vorstehenden Formeln enthalten den in Aussicht gestellten Satz der *Superposition*, der so ausgesprochen werden kann: *Fasst man die während irgend eines Zeitraumes stattfindenden — durch $\xi, \eta, \xi, i, i_y, \vartheta, \Delta g_x, \Delta g_y, \Delta g_z$ dargestellten — Störungen in beliebiger Weise als die Summe von Einzelstörungen auf, die während jenes Zeitraumes gleichzeitig oder einander ablösend stattfinden, so stellt der jeweilige wirklich auftretende Indikатораusschlag abgesehen von etwa überlagerten Eigenschwingungen die Summe der Ausschläge dar, welche den Einzelstörungen entsprechen würden.* Die etwa überlagerten Eigenschwingungen sind durch die Anfangszustände bedingt, welche man bei der Zertheilung annimmt, und verschwinden, wenn dabei die Beziehungen (150) vorgeschrieben werden, wenn man also sozusagen auch den Anfangszustand restlos auftheilt.

Der vorstehende Satz ist für uns vor Allem deshalb von Bedeutung, weil er es erlaubt, die Wirkung von einzelnen Störungsursachen, zum Beispiel:
 von Parallelverschiebungen, Neigungen, Drehungen um die Vertikale, Schwereänderungen, —
 von Komponenten verschiedener Richtung der Parallelverschiebungen, oder der Neigungen, oder der Schwereänderungen, —
 von Erdbewegungen verschiedenen Ursprungs (Sturmbewegungen Erdbewegungen) oder verschiedener Art (Schwingungen verschiedener Periode) in bequemer Weise von einander zu trennen. Insbesondere haben wir es ihm zu verdanken, dass die Resultate, welche im Folgenden für die Wirkung einzelner

Störungsursachen gewonnen werden, ihre Bedeutung stets auch dann behalten, wenn zugleich beliebig viele andere Störungsursachen wirksam sind. —

Unser Satz der Superposition verlangt zunächst eine bestimmt gegebene Indikatorgleichung, also einen bestimmt gegebenen Seismographen. Es ist aber unmittelbar einleuchtend, dass wir gleiche Ueberlegungen auch zur Sonderung des Einflusses der verschiedenen Glieder in der Indikatorgleichung (142) anwenden können, indem wir dann gewissermassen die Aufzeichnungen von Seismographen verschiedener Konstruktion vergleichen, bei denen jedesmal nur eines der 6 Störungsglieder $V^{(s)} (d^2\xi/dt^2 - g_i - \Delta g_s), \dots$ zur Geltung kommt. Auch hier ergibt sich der Satz, dass die Wirkung der einzelnen Störungsglieder sich in dem Indikатораusschlag einfach summirt.

Schauen wir zurück auf die Ergebnisse dieses Artikels, so erscheint es erlaubt und zweckmässig, bei der Untersuchung der Einwirkung von Störungen nicht immer die ganze Indikatorgleichung (142) mit allen ihren Gliedern mitzuführen, sondern sich in der Regel auf die Beachtung einzelner Glieder zu beschränken. Wir werden demgemäss im Folgenden (142) meist ersetzen durch

$$(152) \quad \frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(s)} \frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\frac{g}{L} a - \frac{J^{(s)}}{L} \frac{d^2\sigma}{dt^2},$$

oder durch

$$(153) \quad \frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a + V^{(s)} g_i = -\frac{g}{L} a + \frac{J^{(s)}}{L} g_i.$$

(152) lehrt zunächst die Einwirkung von Parallelverschiebungen, (153) zunächst die von Neigungen in erster Klasse kennen. Denkt man sich dann in (152) $V^{(s)}$ durch $W^{(s)}$ oder $W^{(\vartheta)}$, σ durch i oder ϑ , und in (153) g_i durch Δg_s ersetzt, so ergeben sich unmittelbar auch die Einwirkungen zweiter Klasse und der Einfluss von Schwereänderungen.

42. Allgemeine Lösungen der Indikatorgleichung. Für Parallelverschiebungen σ ist

$$(154) \quad \frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(s)} \frac{d^2\sigma}{dt^2}.$$

Um diese Gleichung allgemein zu lösen, multipliciren wir sie mit $dt \sin 2\pi(t_1 - t)/T$ und integriren zwischen den Grenzen t_0 und t_1 . Dann folgt zunächst:

$$(155) \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d^2a}{dt^2} \sin 2\pi \frac{t_1 - t}{T} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \int_{t_0}^{t_1} dt a \sin 2\pi \frac{t_1 - t}{T} - V^{(s)} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d^2\sigma}{dt^2} \sin 2\pi \frac{t_1 - t}{T}.$$

Nun ergibt sich für eine beliebige Zeitfunktion f mittels partieller Integration:

$$(156) \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d^2f}{dt^2} \sin 2\pi \frac{t_1 - t}{T} = -\left(\frac{df}{dt}\right)_0 \sin 2\pi \frac{t_1 - t_0}{T} + \frac{2\pi}{T} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{df}{dt} \cos 2\pi \frac{t_1 - t}{T},$$

$$(156') \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{df}{dt} \cos 2\pi \frac{t_1-t}{T} = f_1 - f_0 \cos 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} - \frac{2\pi}{T} \int_{t_0}^{t_1} dt f \sin 2\pi \frac{t_1-t}{T}.$$

Verwendet man diese Gleichungen bei immer weiter gehender Umformung von (155), so entstehen folgende Lösungen von (154):

$$(157) \quad a_1 = a_0 \cos 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} + \frac{T}{2\pi} \left(\frac{da}{dt} \right)_0 \sin 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} - \frac{T}{2\pi} V^{(\omega)} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d^2\sigma}{dt^2} \sin 2\pi \frac{t_1-t}{T},$$

$$(158) \quad a_1 = a_0 \cos 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} + \frac{T}{2\pi} \left(\left(\frac{da}{dt} \right)_0 + V^{(\omega)} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_0 \right) \sin 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} - V^{(\omega)} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d\sigma}{dt} \cos 2\pi \frac{t_1-t}{T},$$

$$(159) \quad a_1 + V^{(\omega)} \sigma_1 = (a_0 + V^{(\omega)} \sigma_0) \cos 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} + \frac{T}{2\pi} \left(\left(\frac{da}{dt} \right)_0 + V^{(\omega)} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_0 \right) \sin 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} \\ + \frac{2\pi}{T} V^{(\omega)} \int_{t_0}^{t_1} dt \sigma \sin 2\pi \frac{t_1-t}{T}$$

Für Neigungsänderungen gilt:

$$(160) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a + V^{(\omega)} g i.$$

Der einzige Unterschied gegenüber (154) besteht darin, dass $-gi$, anstelle von $d^2\sigma/dt^2$ getreten ist; so kann denn unter Hinblick auf (157) eine Lösung von (160) sogleich hingeschrieben werden:

$$(161) \quad a_1 = a_0 \cos 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} + \frac{T}{2\pi} \left(\frac{da}{dt} \right)_0 \sin 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} + \frac{T}{2\pi} V^{(\omega)} g \int_{t_0}^{t_1} dt i \sin 2\pi \frac{t_1-t}{T} \\ = a_0 \cos 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} + \frac{T}{2\pi} \left(\frac{da}{dt} \right)_0 \sin 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} + \frac{2\pi}{T} J^{(\omega)} \int_{t_0}^{t_1} dt i \sin 2\pi \frac{t_1-t}{T}.$$

Für Zeitintervalle, welche gegenüber der Schwingungsdauer T hinreichend kurz sind, liefert (159) bei beliebig grossen Parallelverschiebungen:

$$(162) \quad a_1 - a_0 = -V^{(\omega)} (\sigma_1 - \sigma_0), \quad \left(\frac{da}{dt} \right)_1 - \left(\frac{da}{dt} \right)_0 = -V^{(\omega)} \left(\left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_1 - \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_0 \right),$$

und bestätigt damit den uns schon bekannten Satz, dass $-V^{(\omega)}$ die Vergrößerung sehr schneller Parallelverschiebungen angiebt. Für sehr schnelle Neigungsänderungen ist nach (161):

$$(162') \quad a_1 - a_0 = 0, \quad \left(\frac{da}{dt} \right)_1 - \left(\frac{da}{dt} \right)_0 = 0.$$

Schnellen Neigungsänderungen folgt der Indikator also nicht unmittelbar. Dies gilt aber nur, wenn wir uns auf die Glieder erster Klasse beschränken. Das Glied zweiter Klasse $-W^{(i)} d^2 i_s / dt^2$ ergäbe:

$$(162'') \quad a_1 - a_0 = -W^{(i)} ((i_s)_1 - (i_s)_0).$$

43. *Periodische Parallelverschiebungen.* In der Einleitung wurde erwähnt, dass bei den Erdbebenbewegungen und den seismischen Störungen infolge des Brandens von Meereswogen vielfach Wellenzüge mit regelmässigen Sinusschwingungen bemerkbar sind. So müssen wir denn auch hier, wie schon öfters bei früheren Gelegenheiten, die Sinusschwingungen besonders berücksichtigen. Für Parallelverschiebungen ist

$$(163) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a - V^{(s)} \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = -\frac{g}{L} a - \frac{J^{(s)}}{L} \frac{d^2 \sigma}{dt^2}.$$

Der Satz der Superposition erlaubt, Schwingungen einer bestimmten Periode herauszulösen und für sich zu betrachten. So setzen wir denn

$$(164) \quad \sigma = S_\sigma \sin 2\pi \frac{t}{T} + C_\sigma \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

oder

$$(164') \quad \sigma = \sqrt{S_\sigma^2 + C_\sigma^2} \sin 2\pi \frac{t + \delta_\sigma}{T}; \quad \operatorname{tg} 2\pi \frac{\delta_\sigma}{T} = \frac{C_\sigma}{S_\sigma}.$$

$\sqrt{S_\sigma^2 + C_\sigma^2}$ bezeichnet dann die Maximalamplitude, $2\sqrt{S_\sigma^2 + C_\sigma^2}$ den Schwingungsbereich, T die Periode der Störungen.

Es ist klar, dass das Gehänge des Seismographen und damit der Indikator ausser etwaigen Eigenschwingungen ebenfalls Schwingungen der Periode T ausführen wird. Von den beigemischten Eigenschwingungen soll vorläufig abgesehen werden; für a müssen dann analoge Formeln wie (164), (164') gelten, die Konstanten seien S_a , C_a , δ_a . Durch passende Verfügung über den Anfangspunkt der Zeitskala haben wir es ganz in unserer Hand einer der Grössen δ_σ , δ_a einen beliebigen Wert zu ertheilen; hieraus Nutzen ziehend setzen wir $\delta_a = 0$ und erhalten dann

$$(165) \quad a = S_a \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Unsere Bevorzugung von a entspricht genau dem Bedürfniss der Praxis, denn in dieser wird das Indikatordiagramm in der Regel das zunächst Gegebene sein.

Die Annahme (164) und (165) über σ und a führen die Indikatorgleichung (163) über in

$$\left\{ S_a \left(\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \right) - V^{(s)} S_\sigma \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \right\} \sin 2\pi \frac{t}{T} - V^{(s)} C_\sigma \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cos 2\pi \frac{t}{T} = 0,$$

und ergeben daher, da t beliebig ist:

$$(166) \quad S_{\sigma} = -\frac{S_a}{V^{(s)}} \frac{T^2 - T^2}{T^2}, \quad C_{\sigma} = 0.$$

Die Vergrößerung von Parallelverschiebungsschwingungen der Periode T im Indikator-diagramm ist hiernach

$$(167) \quad \mathfrak{B}_T^{(s)} = \frac{\sqrt{S_a^2 + C_a^2}}{\sqrt{S_{\sigma}^2 + C_{\sigma}^2}} = -V^{(s)} \frac{T^2}{T^2 - T^2} = -V^{(s)} \frac{L}{L - \Lambda} = -\frac{J^{(s)}}{L - \Lambda}.$$

Wie L die zu T , so ist hier Λ die zu T gehörige äquivalente Pendellänge.

Für sehr kurze Perioden T nimmt die Vergrößerung $\mathfrak{B}_T^{(s)}$ den Werth

$$(168) \quad \mathfrak{B}_0^{(s)} = -V^{(s)} = -\frac{J^{(s)}}{L}$$

an, was nach der uns bekannten Bedeutung von $V^{(s)}$ für schnelle Parallelverschiebungen von vorne herein zu erwarten war. Für sehr lange Perioden andererseits darf

$$(169) \quad \mathfrak{B}_T^{(s)} = V^{(s)} \frac{T^2}{T^2} = V^{(s)} \frac{L}{\Lambda} = \frac{J^{(s)}}{\Lambda}$$

gesetzt werden. Bis zum Werthe $T = T$ nimmt die Vergrößerung numerisch zu, dann numerisch ab; für $T = T$, wenn also die Schwingungsperiode mit der Eigenperiode des Seismographen zusammenfällt, ergibt sich eine unendliche Vergrößerung. Das ist praktisch eine Unmöglichkeit; was in Wirklichkeit tritt, werden wir sogleich erkennen, wenn wir nun daran gehen, auch die bei dem Einsatz der Sinusschwingungen erregten Eigenschwingungen zu berücksichtigen.

44. *Begleitende Eigenschwingungen.* Die etwa vorher schon vorhandenen Eigenschwingungen können bei Seite gelassen werden, da sie sich nach dem Satz der Superposition späterhin ohne Veränderung überlagern würden. So soll denn angenommen werden, dass die Seismograph bis zum Eintreffen der Sinusschwingungen in Ruhe gewesen sei. Eine besondere Schwierigkeit bietet die Feststellung der Art des Einsatzes, der ja auf die mannigfachste Weise vorsichgehen kann. Da es hier unnöthig scheint, die Untersuchung weit auszuspinnen, wollen wir uns mit der einfachsten Annahme eines plötzlichen Einsatzes bei beliebiger Phase begnügen.

Der Einsatz finde zur Zeit $t = t_0$ statt. Weiterhin sei

$$(170) \quad \sigma = S_{\sigma} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Dann muss zur Zeit $t = t_0$ die Ausweichung σ plötzlich den Werth σ_0 und die Verschiebungsgeschwindigkeit plötzlich den Werth $(d\sigma/dt)_0$ annehmen. Nach den Schlussbemerkungen des Artikels 42 erhalten dabei a und da/dt für die folgenden Bewegungen die Anfangswerthe $a_0 = -V^{(s)} \sigma_0$, $(da/dt)_0 = -V^{(s)} (d\sigma/dt)_0$. Benutzen

wir die allgemeine Lösung (159), so gilt darum fernerhin:

$$(171) \quad a_1 = -V^{(s)} \sigma_1 + \frac{2\pi}{T} V^{(s)} \int_{t_0}^{t_1} dt \sigma \sin 2\pi \frac{t_1 - t}{T}.$$

Eine im Anschluss hieran geführte Rechnung giebt unter Rücksicht auf (166) ohne Schwierigkeiten:

$$(172) \quad a = S_a \sin 2\pi \frac{t}{T} - \frac{T}{T} S_a \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{t - t_0}{T} - \left(\frac{T}{T}\right)^2 S_a \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \frac{t - t_0}{T};$$

es wurde hierbei, da Verwechslungen ausgeschlossen sind, t_1 durch t ersetzt und demgemäss der Index 1 bis a fortgelassen. — Die beiden letzten Glieder zeigen die erregten Eigenschwingungen; die Amplitude ergibt sich durch Wurzelziehen aus der Summe der Quadrate der Faktoren von $\sin 2\pi(t - t_0)/T$ und $\cos 2\pi(t - t_0)/T$ zu:

$$(173) \quad S'_a = \frac{T}{T} S_a \sqrt{\left(\frac{T}{T}\right)^2 \sin^2 2\pi \frac{t_0}{T} + \cos^2 2\pi \frac{t_0}{T}} = \frac{T}{T} S_a \sqrt{\left(\left(\frac{T}{T}\right)^2 - 1\right) \sin^2 2\pi \frac{t_0}{T} + 1}.$$

Die letzte Darstellung lehrt, dass die grösste und die kleinste Amplitude, welche die erregten Eigenschwingungen zeigen können, durch

$$\frac{T}{T} S_a \text{ und } \left(\frac{T}{T}\right)^2 S_a$$

angegeben werden. Für seismische Schwingungen von kleinerer Periode als die der Eigenschwingungen ($T < T$), haben also die erregten Eigenschwingungen kleinere Amplituden wie die erzwungenen Schwingungen der Periode T , für Schwingungen von grösserer Periode ($T > T$) dagegen grössere Amplituden. Geht die Periode der seismischen Schwingungen in die der Eigenschwingungen über, so wird die Amplitude der erregten Eigenschwingungen gleich der der erzwungenen Schwingungen. —

Besonderes Interesse erweckt die Wirkung seismischer Schwingungen, deren Periode nahe oder genau gleich der der Eigenschwingungen ist. Nach der eben hingeschriebenen Folgerung muss der Indikator dann gleichzeitig Schwingungen der beiden Perioden T und T von nahe gleicher Amplitude ausführen. Hieraus folgt, dass das Diagramm *Schwebungen* zeigen wird, indem die Amplitude von Zeit zu Zeit nahezu auf Null herabsinken, und dazwischen Maxima von nahezu der Grösse $2S_a$ erreichen muss. Die Zeit Θ von einem Minimum zum nächsten wird bestimmt durch die Zeit, in welcher die eine Periode gegenüber der anderen gerade eine volle Schwingung mehr oder weniger ergibt. Es ist also:

$$(174) \quad \frac{\Theta}{T} - \frac{\Theta}{T} = \pm 1; \quad \Theta = \pm \frac{TT}{T - T}.$$

Da beim Einsatz der seismischen Störung der Indikator zunächst kleine Schwingungen vollführt, so folgt, dass er mit einem Minimum der Amplitude beginnt, um dann in der Zeit

$$\frac{1}{2} \Theta = \pm \frac{1}{2} \frac{T\mathbb{T}}{T-\mathbb{T}}$$

das erste Maximum (von nahe der Grösse $2S_a$) erreichen. Ist $\mathbb{T} = T$, so geht das Anwachsen der Rechnung nach ins Unendliche, in Wirklichkeit so weit, als es dem Bau des Instrumentes und die Genauigkeit der bei der Berechnung zu Grunde gelegten Indikatorgleichung entspricht. Wie schnell das Anwachsen erfolgt, erfahren wir für $\mathbb{T} = T$ mittels (171) oder (172), denn diese Gleichungen ergeben für $\mathbb{T} = T$:

$$(175) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{1}{2} V^{(s)} S_o \cos 2\pi \frac{t_0}{T} \sin 2\pi \frac{t-t_0}{T} - V^{(s)} S_o \sin 2\pi \frac{t_0}{T} \cos 2\pi \frac{t-t_0}{T} \\ - V^{(s)} S_o \frac{\pi(t-t_0)}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T}. \end{array} \right.$$

Das Anwachsen der Amplitude wird durch das letzte Glied rechts dargestellt; die Zunahme innerhalb einer Periode T beträgt danach:

$$V^{(s)} S_o \pi,$$

also nahe dreimal so viel, als der einfachen Indikatorvergrößerung $V^{(s)}$ als Endwerth entsprechen würde. Das gleiche Resultat gilt auch für Perioden \mathbb{T} , welche der Eigenperiode nur nahezu gleich sind, und bei beliebiger Art des Einsatzes der Störungen. Wir erkennen hiernach, dass wenige seismische Schwingungen in einer der Eigenperiode benachbarten Periode hinreichen, um dem Indikator eine gegenüber $V^{(s)}$ vielfach vergrößerte Amplitude zu ertheilen.

45. *Periodische Neigungen.* Bei Untersuchung des Einflusses periodischer Neigungen werden wir ganz ähnlich vorgehen, wie in den beiden letzten Artikeln. Hier ist

$$(176) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a + V^{(s)} g i_s = -\frac{g}{L} a + \frac{J^{(s)}}{L} g i_s,$$

und

$$(177) \quad i_s = S_i \sin 2\pi \frac{t}{\mathbb{T}} + C_i \cos 2\pi \frac{t}{\mathbb{T}}$$

zu setzen. Wird zu (177) unter passender Verfügung über den Anfangspunkt der Zeit

$$(178) \quad a = S_a \sin 2\pi \frac{t}{\mathbb{T}}$$

hinzugenommen, so liefert (176):

$$(179) \quad S_i = -\frac{S_a}{J^{(s)}} \frac{T^2 - \mathbb{T}^2}{\mathbb{T}^2} = -\frac{S_a}{J^{(s)}} \frac{L - \Lambda}{\Lambda}; \quad C_i = 0.$$

$$(180) \quad S_a = \mathfrak{S}_T^{(o)} S_a, \quad \mathfrak{S}_T^{(o)} = -J^{(o)} \frac{T^2}{T^2 - T^2} = -J^{(o)} \frac{\Lambda}{L - \Lambda}.$$

Für sehr langsame Neigungsschwingungen erscheint hiernach die Empfindlichkeit $\mathfrak{S}_T^{(o)}$, wie zu erwarten, $= J^{(o)}$, für sehr schnelle Schwingungen ist sie $= -J^{(o)}\Lambda/L = -V^{(o)}\Lambda$. — Bis herauf zum Werthe $T = T$ nimmt die Empfindlichkeit numerisch zu, dann ab; für $T = T$ wird sie unendlich gross.

Bei einem *plötzlichen Einsatz* der Neigungsschwingungen zur Zeit $t = t_0$ sind hier als Anfangswerthe für a , da/dt einfacher wie vorhin $a_0 = 0$, $(da/dt)_0 = 0$ zu setzen, so ergibt (161):

$$(181) \quad a = S_a \sin 2\pi \frac{t}{T} - \frac{T}{T} S_a \cos 2\pi \frac{t_0}{T} \sin 2\pi \frac{t-t_0}{T} - S_a \sin 2\pi \frac{t_0}{T} \cos 2\pi \frac{t-t_0}{T}.$$

Die Amplitude der erregten Eigenschwingungen ist hiernach

$$(182) \quad S'_a = \frac{T}{T} S_a \sqrt{\left(\frac{T}{T}\right)^2 \sin^2 2\pi \frac{t_0}{T} + \cos^2 2\pi \frac{t_0}{T}} = \frac{T}{T} S_a \sqrt{\left(\left(\frac{T}{T}\right)^2 - 1\right) \sin^2 2\pi \frac{t_0}{T} + 1}.$$

Die grösste und die kleinste mögliche Amplitude werden durch

$$S_a \text{ und } \frac{T}{T} S_a$$

angegeben. Die erregten Eigenschwingungen haben also umgekehrt wie bei den Parallelverschiebungen eine grössere oder kleinere Amplitude als die erzwungenen Schwingungen der Periode T , jenachdem T kleiner oder grösser ist als T . Für $T = T$ werden die Amplituden wiederum einander gleich. —

Die vorhin gefundenen Schwebungen bei Perioden T , die nahe an der Eigenperiode des Seismographen liegen, treten auch hier in der gleichen Weise auf. Im Falle T nahe $= T$ ist ergibt sich zunächst nach dem Einsatze für die Amplitude innerhalb jeder Periode T eine Zunahme um

$$J^{(o)} S_a \pi.$$

§ 6. Einwirkung der Dämpfung.

46. *Indikatorgleichung.* Bis hierher wurde zur Vereinfachung der Untersuchungen stets angenommen, dass die innere Bewegung des Seismographen ohne jede Hemmung erfolge. Einmal bestehende Schwingungen müssten dann unendlich lange andauern und sich so allen weiterhin durch seismische Störungen und Schwereänderungen erregten Bewegungen unverändert überlagern. In Wirklichkeit trifft das nicht zu; stets treten Bewegungshindernisse mannigfacher Art auf,

welche die Wirkung vergangener Zeiten mehr und mehr vermindern und schliesslich unmerklich machen. Es ist ohne Weiteres klar, dass hierin für die Seismographen nicht nur kein Nachtheil, sondern sogar ein Vortheil liegt, und es entsteht so für uns die Aufgabe, die Bewegungshemmnisse zu studiren, um festzustellen, wie sie bei der Verwerthung der Diagramme zu berücksichtigen sind, und in welcher Art und Stärke sie wünschenswerth erscheinen. Von einfachen Anschlägen, die den Bewegungsbereich des Gehänges begrenzen, werden wir, als etwas Aeusserliches, absehen können.

Für die Praxis sind zwei Klassen von Bewegungswiderständen sehr scharf zu unterscheiden. Bei der einen vermehrt und vermindert sich der Bewegungswiderstand in bedeutendem Masse mit der Geschwindigkeit der Bewegung, und sinkt mit dieser zu Null herab. Bei der anderen ist der Widerstand in der Hauptsache von der Geschwindigkeit unabhängig und bleibt selbst im Ruhezustande bestehen. Die erste Klasse der Widerstände wird vor allem durch die Zähigkeit der Flüssigkeiten und Gase geboten, die zweite Klasse durch die Reibung fester Körper aufeinander. Wir wollen die Hemmung der Bewegung im ersten Falle als „Dämpfung“ bezeichnen, und wollen im zweiten Falle sagen, sie sei durch „Reibung“ verursacht. Es wird sich zeigen, dass die Dämpfung sehr nützlich ist, weil sie die Nachwirkung seismischer Störungen beschränkt, dass die Reibung dagegen ungünstig ist, weil sie starken Störungen gegenüber ungenügend wirkt, und die Aufzeichnungen schwacher Störungen in unliebsamer Weise beeinträchtigt.

In diesem Paragraphen soll zunächst der Einfluss der Dämpfung untersucht werden. Wir werden dabei den Widerstand gegen die Bewegung von dem Ausschlag unabhängig und mit der Geschwindigkeit proportional setzen. Wenn die Zähigkeit der tropfbaren oder gasförmigen Flüssigkeiten, oder die elektromagnetische Dämpfung benutzt wird, lässt sich dieses Gesetz bei zweckmässiger Konstruktion sehr leicht mit jeder wünschenswerthen Schärfe realisieren. Für die Praxis kommen wohl nur diese Fälle in Betracht, sodass unsere Annahme ihren Bedürfnissen gerecht wird. —

Bei der Aufstellung der Indikatorgleichung ist es genügend, wenn wir uns auf die Voraussetzung eines Freiheitsgrades beschränken, denn wiederum und in gleicher Weise wie früher lässt sich der Fall mehrerer Freiheitsgrade auf den eines einzigen zurückführen.

Wir knüpfen an die Ueberlegungen des Artikels 33. $Q^{(D)}$ sei die Resultante der dämpfenden Kräfte in Bezug auf den Indikator, dann ist nach der gemachten Annahme zu schreiben

$$(183) \quad Q^{(D)} = -\varphi \frac{da}{dt},$$

wobei φ eine gewisse Konstante bedeutet. Anstelle der bisher benutzten Indikatorgleichung tritt hiernach

$$(184) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= -\frac{f}{m} a - \frac{\varphi}{m} \frac{da}{dt} - V^{(\omega)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right) - V^{(\psi)} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - g i_y - \Delta g_y \right) \\ &\quad - V^{(\zeta)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_x \right) - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(i_y)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} - W^{(\vartheta_x)} \frac{d^2 \vartheta_x}{dt^2}. \end{aligned} \right.$$

Das zweite Glied rechts bildet den einzigen Unterschied gegen früher. Im Falle eines einfachen Pendels ist wiederum

$$\frac{f}{m} = \frac{g}{L}, \quad J = VL.$$

So wollen wir denn auch wieder L die „äquivalente Pendellänge“ nennen und die übrigen sich anschliessenden Beziehungen für V , J , $V^{(s)}$, $J^{(s)}$ beibehalten (vergl. z. B. Art. 40). Dass $J^{(x)}$, $J^{(y)}$ wie bisher die statischen Empfindlichkeiten gegen Neigungsänderungen angeben, und $g J^{(s)}$ die Empfindlichkeit gegen Schwereänderungen in der Richtung s bedeutet, ist aus (184) sogleich ersichtlich. Nicht so unmittelbar erkennbar ist, ob $V^{(\omega)}$, $V^{(\psi)}$, $V^{(\zeta)}$, $W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_x)}$ negativ genommen ihre Bedeutungen als Vergrösserungen sehr schneller Parallelverschiebungen, Neigungen und Drehungen um die Vertikale beibehalten, doch werden wir bald erfahren, dass auch dieses zutrifft. Die Entwicklungen des Artikels 36 über den Einfluss der Aufstellung auf die Koeffizienten bleiben gültig, sodass auch der Vergleich mit einem Seismographen punktförmiger Masse wie früher vorgenommen werden kann, und der gemeinsamen Richtung von V und J wieder der Name „äquivalente Schwingungsrichtung“ zukommt. —

Nur in einem wesentlichen Punkte finden wir gegen früher ein anderes Verhalten: Die Schwingungsperiode T wird nicht mehr durch die früheren Beziehungen mit f und L verbunden.

47. *Eigenbewegungen.* Es hängt dies mit dem Einfluss der Dämpfung auf die Eigenbewegungen zusammen, den wir nun näher untersuchen wollen. Bei Abwesenheit äusserer Störungen gilt die Gleichung:

$$(185) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{f}{m} a - \frac{\varphi}{m} \frac{da}{dt}.$$

Ihre Lösung ergibt sich in

$$(186) \quad a = A e^{-\frac{t}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t + \delta}{T} = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(S \sin 2\pi \frac{t}{T} + C \cos 2\pi \frac{t}{T} \right),$$

wobei e die Basis des natürlichen Logarithmensystemes, also die Zahl 2,71828... ist, und A , δ , S , C , T , τ Konstanten darstellen. A , δ bezüglich S , C bleiben willkürlich und entsprechen der Unbestimmtheit des Anfangszustandes. T und τ sind durch f , φ , m festbestimmt:

$$(187) \quad \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{f}{m} - \left(\frac{\varphi}{2m} \right)^2, \quad \tau = \frac{2m}{\varphi}$$

und zwar ist T die *Schwingungsperiode* — also $T/2$ die *Schwingungsdauer* — und τ die „*Relaxationszeit*“, d. h. diejenige Zeit, in welcher die Amplitude der Schwingungen auf $1/e$ des Werthes herabsinkt. — Ich habe bei diesen Angaben vorausgesetzt, dass mf grösser als $(\varphi/2)^2$, und demgemäss T reel sei. Wie die Verhältnisse sich ändern, wenn dieses nicht der Fall ist, wird sogleich besprochen werden.

Bei ausgeschalteter Dämpfung, also für $\varphi = 0$, $\tau = \infty$ ergäbe sich eine Schwingungsdauer T_0 bestimmt durch:

$$(188) \quad \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{f}{m} = \frac{g}{L}.$$

Wir wollen T_0 die „*reducirte Schwingungsperiode*“, $T_0/2$ die „*reducirte Schwingungsdauer*“ nennen. Werden T_0 und τ verwerthet, so wandelt sich (185) um in:

$$(189) \quad \frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt},$$

wobei dann die *reducirte Schwingungsdauer* T_0 die Intensität der inneren Kräfte des Seismographen und die *Relaxationszeit* τ die Intensität der Dämpfung charakterisirt. Zur Bestimmung der *Schwingungsperiode* ergibt (187) mittels (188) die Beziehung:

$$(190) \quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \frac{1}{\tau^2},$$

sodass

$$(191) \quad T = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2}}, \quad T_0 = T \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{T}{2\pi\tau}\right)^2}}$$

ist.

Das Verhältniss zweier grösster Ausweichungen, die unmittelbar aufeinander folgen — also auf verschiedenen Seiten der Ruhelage liegen —, heisst „*Dämpfungsverhältniss*“; einfache Rechnungen im Anschluss an (186) ergeben die Beziehung:

$$(192) \quad \text{Dämpfungsverhältniss} = 1 : e^{-\frac{T}{2\tau}} = e^{\frac{T}{2\tau}} : 1.$$

Das Verhältniss zweier aufeinander folgender im gleichen Sinne durchlaufener Schwingungsbögen — jeder gemessen von einer grössten Ausweichung bis zur nächsten auf der anderen Seite der Ruhelage — ist hiernach

$$= 1 : (e^{-T/2\tau})^2 = 1 : e^{-T/\tau} = e^{T/\tau} : 1.$$

Die Formel (186) ist zur Darstellung der Eigenschwingungen nur dann

bequem, wenn

$$(193) \quad \tau > \frac{T_0}{2\pi}$$

ist, d. h. wenn die Schwingungsperiode T einen reellen Werth hat. Andernfalls, wenn

$$(194) \quad \tau < \frac{T_0}{2\pi}$$

ist, empfiehlt es sich, (186) durch

$$(195) \quad a = A_1 e^{-\frac{t}{\tau'_1}} + A_2 e^{-\frac{t}{\tau'_2}}$$

zu ersetzen, wo dann A_1, A_2 die willkürlichen Konstanten sind, welche den Anfangszustand, nämlich die Anfangswerthe von a und da/dt bestimmen. τ'_1 und τ'_2 sollen weiterhin „Dämpfungszeiten“ genannt werden. Sie ergeben sich durch Einsetzen von (195) in (189) als Wurzeln der Gleichung:

$$(196) \quad \left(\frac{1}{\tau'}\right)^2 - \frac{2}{\tau} \frac{1}{\tau'} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 0,$$

sodass

$$(197) \quad \frac{1}{\tau'_1} = \frac{1}{\tau} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi\tau}{T_0}\right)^2}\right), \quad \frac{1}{\tau'_2} = \frac{1}{\tau} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi\tau}{T_0}\right)^2}\right)$$

gesetzt werden darf. Dabei ist

$$(198) \quad \tau'_1 \tau'_2 = \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2.$$

Für den Fall (194) werden τ'_1 und τ'_2 reell, wobei

$$(199) \quad \tau'_2 < \tau < \frac{T_0}{2\pi} < \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\tau} < \tau'_1,$$

und es folgt nach (195), dass die Eigenbewegungen aperiodisch werden. Auch im Grenzfall:

$$(200) \quad \tau = \frac{T_0}{2\pi}$$

finden wir schon aperiodische Bewegung, denn die Schwingungsperiode T wird dann nach (191) unendlich gross. Für die Darstellung der Eigenbewegungen bietet sich die aus (186) durch Grenzübergang folgende Gleichung:

$$(201) \quad a = e^{-\frac{t}{\tau}} (S't + C)$$

mit den willkürlichen Konstanten S' und C .

48. *Gesetze der Superposition; allgemeine Lösungen der Indikatorgleichung.* Unter Benutzung der charakteristischen Zeiten T und τ nimmt die Indikatorgleichung nun die Form an:

$$(202) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} - V^{(x)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - gi_x - \Delta g_x \right) - V^{(y)} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - gi_y - \Delta g_y \right) \\ &\quad - V^{(z)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_z \right) - W^{(ix)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(iy)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} - W^{(iz)} \frac{d^2 i_z}{dt^2} \\ &= -\frac{g}{L} a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} - \frac{J^{(x)}}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - gi_x - \Delta g_x \right) - \frac{J^{(y)}}{L} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - gi_y - \Delta g_y \right) \\ &\quad - \frac{J^{(z)}}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_z \right) - W^{(ix)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(iy)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} - W^{(iz)} \frac{d^2 i_z}{dt^2}. \end{aligned} \right.$$

Das Neue gegen früher ist das Dämpfungsglied $-(2/\tau)(da/dt)$; daneben muss beachtet werden, dass T_0 nun nicht mehr die Schwingungsperiode bezeichnet.

Alle im Artikel 41 festgestellten Gesetze der Superposition bleiben auch für (202), also bei Mitwirkung der Dämpfung gültig, sodass wir den ganzen Inhalt jenes Artikel hier übernehmen können. Wir werden später erkennen, dass dieses bei der gewöhnlichen Reibung nicht ebenso ist, und sich so für die Dämpfung ein sehr grosser Vortheil ergibt.

Mit Rücksicht auf die Superposition der Störungswirkungen ist es auch jetzt nicht nöthig, beim Aufsuchen der allgemeinen Lösungen der Indikatorgleichung alle Störungsglieder gleichzeitig zu berücksichtigen, sondern hinreichend, ihre Wirkung einzeln festzustellen. Wiederum genügen die beiden Beispiele:

$$(203) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} - V^{(x)} \frac{d^2 \sigma}{dt^2},$$

$$(204) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 J^{(x)} i_x,$$

von denen sich das erste auf Parallelverschiebungen, das zweite auf Neigungsänderungen bezieht.

I. *Parallelverschiebungen.* Multiplicirt man (203) mit

$$\frac{T}{2\pi} dt e^{-\frac{t_1-t}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t_1-t}{T}$$

und integrirt von t_0 bis t_1 , so ergibt sich mittels ähnlicher, wenn auch komplirter Rechnungen wie in Artikel 42 unter Rücksicht auf (190) als *allgemeine Lösung*:

$$(205) \quad \left\{ \begin{aligned} a_1 &= a_0 e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} \cos 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} + \frac{T}{2\pi\tau} a_0 e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} \\ &+ \frac{T}{2\pi} \left(\frac{da}{dt} \right)_0 e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} - \frac{T}{2\pi} V^{(s)} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d^2\sigma}{dt^2} e^{-\frac{t_1-t}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t_1-t}{T} \end{aligned} \right.$$

oder auch:

$$(206) \quad \left\{ \begin{aligned} a_1 + V^{(s)} \sigma_1 &= (a_0 + V^{(s)} \sigma_0) e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} \cos 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} + \frac{T}{2\pi\tau} (a_0 + V^{(s)} \sigma_0) e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} \\ &- 2 \frac{T}{2\pi\tau} V^{(s)} \sigma_0 e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} + \frac{T}{2\pi} \left(\left(\frac{da}{dt} \right)_0 + V^{(s)} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_0 \right) e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t_1-t_0}{T} \\ &+ \frac{2\pi T}{T_0} \left(1 - 2 \left(\frac{T_0}{2\pi\tau} \right)^2 \right) V^{(s)} \int_{t_0}^{t_1} dt \sigma e^{-\frac{t_1-t}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t_1-t}{T} + \frac{2}{\tau} V^{(s)} \int_{t_0}^{t_1} dt \sigma e^{-\frac{t_1-t}{\tau}} \cos 2\pi \frac{t_1-t}{T}. \end{aligned} \right.$$

Diese Formeln empfehlen sich bei *periodischen Einzelbewegungen*, also für den Fall:

$$(207) \quad \tau > \frac{T_0}{2\pi}, \quad T \text{ reel und endlich.}$$

Im *Grenzfall der Aperiodicität*:

$$(208) \quad \tau = \frac{T_0}{2\pi}, \quad T = \infty$$

sind sie zu ersetzen durch

$$(209) \quad a_1 = a_0 \left(1 + \frac{t_1-t_0}{\tau} \right) e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} + \left(\frac{da}{dt} \right)_0 (t_1-t_0) e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} - V^{(s)} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d^2\sigma}{dt^2} (t_1-t) e^{-\frac{t_1-t}{\tau}}$$

$$(210) \quad a_1 + V^{(s)} \sigma_1 = (a_0 + V^{(s)} \sigma_0) \left(1 + \frac{t_1-t_0}{\tau} \right) e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} - 2 V^{(s)} \sigma_0 \frac{t_1-t_0}{\tau} e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} \\ + \left(\left(\frac{da}{dt} \right)_0 + V^{(s)} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_0 \right) (t_1-t_0) e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau}} + \frac{2\pi}{T_0} V^{(s)} \int_{t_0}^{t_1} dt \sigma \left(2 - \frac{t_1-t}{\tau} \right) e^{-\frac{t_1-t}{\tau}}.$$

In den übrigen Fällen *aperiodischer Bewegung*:

$$(211) \quad \tau < \frac{T_0}{2\pi}, \quad T \text{ rein imaginär,}$$

erhalten wir zweckmässigere Formen, wenn berücksichtigt wird, dass:

$$(212) \left\{ \begin{aligned} e^{-\frac{t_1-t}{\tau}} \cos 2\pi \frac{t_1-t}{T} &= \frac{1}{2} e^{-(t_1-t) \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{2\pi \tau i}{T}\right)} + \frac{1}{2} e^{-(t_1-t) \frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{2\pi \tau i}{T}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{t_1-t}{\tau_1'}} + e^{-\frac{t_1-t}{\tau_2'}} \right), \\ e^{-\frac{t_1-t}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t_1-t}{T} &= \frac{1}{2i} e^{-(t_1-t) \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{2\pi \tau i}{T}\right)} - \frac{1}{2i} e^{-(t_1-t) \frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{2\pi \tau i}{T}\right)} \\ &= \frac{1}{2i} \left(e^{-\frac{t_1-t}{\tau_1'}} - e^{-\frac{t_1-t}{\tau_2'}} \right) \end{aligned} \right.$$

ist; es ergibt sich:

$$(213) \left\{ \begin{aligned} a_1 &= a_0 \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_1'}} + e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_2'}} \right) + a_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\pi \tau}{T_0}\right)^2}} \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_1'}} - e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_2'}} \right) \\ &+ \frac{\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\pi \tau}{T_0}\right)^2}} \left(\frac{da}{dt} \right) \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_1'}} - e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_2'}} \right) \\ &- \frac{\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\pi \tau}{T_0}\right)^2}} V^{(s)} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d^2 \sigma}{dt^2} \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{t_1-t}{\tau_1'}} - e^{-\frac{t_1-t}{\tau_2'}} \right); \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} a_1 + V^{(s)} \sigma_1 &= (a_0 + V^{(s)} \sigma_0) \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_1'}} + e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_2'}} \right) + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\pi \tau}{T_0}\right)^2}} (a_0 + V^{(s)} \sigma_0) \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_1'}} - e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_2'}} \right) \\ &- \frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\pi \tau}{T_0}\right)^2}} V^{(s)} \sigma_0 \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_1'}} - e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_2'}} \right) + \frac{\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\pi \tau}{T_0}\right)^2}} \left(\left(\frac{da}{dt} \right)_0 + V^{(s)} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_0 \right) \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_1'}} - e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_2'}} \right) \\ &- \frac{1}{\tau} \frac{2 - \left(\frac{2\pi \tau}{T_0}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\pi \tau}{T_0}\right)^2}} V^{(s)} \int_{t_0}^{t_1} dt \sigma \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{t_1-t}{\tau_1'}} - e^{-\frac{t_1-t}{\tau_2'}} \right) + \frac{2}{\tau} V^{(s)} \int_{t_0}^{t_1} dt \sigma \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{t_1-t}{\tau_1'}} + e^{-\frac{t_1-t}{\tau_2'}} \right). \end{aligned}$$

II *Neigungsänderungen*. Die allgemeinen Lösungen der Gleichung (204), welche für Neigungsänderungen gilt, noch besonders hinzuschreiben, scheint unnötig, denn sie ergeben sich in einfachster Weise aus (205), (209) und (213), wenn man dem Vergleiche von (203) und (204) entsprechend $V^{(s)}$ durch $-(2\pi/T_0)^2 J^{(s)}$ und $d^2\sigma/dt^2$ durch i_s ersetzt.

Finden in einem gegenüber T und τ sehr kurzen Zeitmoment erhebliche Parallelverschiebungen statt, so ist nach (206), (210), (214), oder nach (203) im Bereiche des Zeitmomentes:

$$(215) \quad \left\{ \begin{array}{l} a - a_0 = -V^{(s)}(\sigma - \sigma_0), \\ \frac{da}{dt} - \left(\frac{da}{dt}\right)_0 = -V^{(s)}\left(\frac{d\sigma}{dt} - \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0\right) + \frac{2}{\tau} V^{(s)}(\sigma - \sigma_0). \end{array} \right.$$

— $V^{(s)}$ bedeutet hiernach auch bei Dämpfung die Vergrößerung sehr schneller Parallelverschiebungen.

Entsprechende Anwendung der Gleichungen (205), (209), (213) bei Ersatz von $d^2\sigma/dt^2$ durch $-gi_s$, oder der Gleichung (204) ergibt

$$(215') \quad a - a_0 = 0, \quad \frac{da}{dt} - \left(\frac{da}{dt}\right)_0 = 0$$

und lehrt, dass sehr schnelle Neigungsänderungen bei ihrer Einwirkung in erster Klasse auch im Falle der Dämpfung ohne direkten Einfluss bleiben.

49. *Nachwirkungen von Anfangszuständen und Störungen*. Vergleicht man die hier für Dämpfung gefundenen Darstellungen der Indikatorbewegungen mit denjenigen, welche sich im Artikel (42) für den Fall der Abwesenheit aller Bewegungswiderstände ergaben, so zeigt sich als bedeutungsvoller Unterschied das

Hinzutreten von Faktoren der Form $e^{-\frac{t_1 - t}{\tau}}$. Da diese mit wachsender Zwischenzeit $t_1 - t$ kleiner und kleiner werden, so folgt, dass wegen der Dämpfung die Nachwirkung des Anfangszustandes oder späterer Störungen sich nicht mehr unvermindert in alle Zukunft erstreckt, sondern allmählich mehr und mehr, schliesslich unter jede Grenze herabsinkt.

Wir wollen untersuchen, wie die Geschwindigkeit, mit der die Nachwirkung verschwindet, sich ändert, wenn die Dämpfung grösser und grösser, die Relaxationszeit τ also kleiner und kleiner wird.

Anfänglich, solange

$$\tau > \frac{T_0}{2\pi}$$

ist, die Eigenbewegungen also *periodisch* sind, äussert sich die Dämpfung in dem Faktor $e^{-(t_1 - t)/\tau}$, bezüglich $e^{-(t_1 - t_0)/\tau}$. Die Nachwirkung verschwindet dann also um so schneller, je grösser die Dämpfung ist; die gleichen Veränderungen

finden bei n -mal kleinerer Relaxationszeit in n -mal kleineren Zeiten statt. Dieses gilt bis zur Grenze der Aperiodicität:

$$\tau = \frac{T_0}{2\pi}.$$

Von da ab, wenn

$$\tau < \frac{T_0}{2\pi}$$

ist, und die Eigenbewegungen aperiodisch sind, wirkt die Dämpfung durch die beiden Faktoren $e^{-(t_1-t)/\tau'_1}$, $e^{-(t_1-t)/\tau'_2}$, bezüglich $e^{-(t_1-t_0)/\tau'_1}$, $e^{-(t_1-t_0)/\tau'_2}$. Nun ist τ'_2 zwar kleiner als $T/2\pi$ und nimmt mit τ weiter und weiter ab; anders aber steht es um τ'_1 , denn diese Zeit wächst nach (197), wenn τ abnimmt, und ist nach (199) stets grösser als

$$\left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\tau}.$$

Wenn also die Dämpfung die Grenze der Aperiodicität überschreitet, so beginnt die Nachwirkung der Anfangszustände und der Störungen sich wieder über längere Zeiträume zu erstrecken und dehnt sich ohne Aufhören und ohne Grenze weiter und weiter aus.

Für uns knüpft sich hieran der äusserst wichtige Schluss, dass man zur Erzielung einer möglichst schnell verschwindenden Nachwirkung die Dämpfung nicht über die Grenze der Aperiodicität:

$$\tau = \frac{T}{2\pi}$$

hinaustreiben darf.

50. *Periodische Störungen.* Von besonderer Wichtigkeit für die Praxis ist auch jetzt wieder die mit den Artikeln 43—45 gleichlaufende Untersuchung des Einflusses periodischer Störungen. Wieder beginnen wir mit den *Parallelverschiebungen* und sehen zunächst von den etwaigen sich superponirenden Eigenbewegungen ab. In

$$(216) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} - V^{(s)} \frac{d^2 \sigma}{dt^2}$$

setzen wir also

$$(217) \quad \sigma = S_\sigma \sin 2\pi \frac{t}{T} + C_\sigma \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

oder

$$(217') \quad \sigma = \sqrt{S_\sigma^2 + C_\sigma^2} \sin 2\pi \frac{t + \delta}{T}; \quad \operatorname{tg} 2\pi \frac{\delta}{T} = \frac{C_\sigma}{S_\sigma}$$

und — über den Anfangspunkt der Zeitskala wiederum zu unserer Bequemlichkeit verfügend —:

$$(218) \quad a = S_a \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

dann bestimmt (216) den Zusammenhang zwischen S_σ , C_σ und S_a in den Gleichungen:

$$(219) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_\sigma = -\frac{S_a}{V^{(s)}} \left(1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right); \quad C_\sigma = \frac{S_a}{V^{(s)}} 2 \frac{T_0}{2\pi\tau} \frac{T}{T_0}, \\ \operatorname{ctg} 2\pi \frac{\delta_\sigma}{T} = \frac{1}{2} \frac{2\pi\tau}{T_0} \left(\frac{T}{T_0} - \frac{T_0}{T}\right). \end{array} \right.$$

Vergleicht man hiermit die Formeln (166) des Artikels 43, so zeigt sich, dass der Zusammenhang zwischen der Amplitude S_a von a und der Amplitude S_σ des gleichphasigen Antheiles in σ genau derselbe ist wie bei Abwesenheit der Dämpfung. Diese äussert sich allein in dem Auftreten des in der Phase um $T/4$ verschobenen Antheiles $C_\sigma \cos 2\pi t/T$. Das Verhältniss der Gesamtamplituden von a und σ ist:

$$(220) \quad S_a : \sqrt{S_\sigma^2 + C_\sigma^2} = V^{(s)} : \sqrt{\left(1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)^2 + 4 \left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^2};$$

die Vergrößerung von Parallelverschiebungen der Periode T im Indikator-diagramm wird hiernach angegeben durch:

$$(221) \quad \mathfrak{B}^{(s)} = \frac{V^{(s)}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)^2 + 4 \left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^2}}.$$

Der Wurzel wollen wir ein solches Vorzeichen geben, dass $\mathfrak{B}^{(s)}$ positiv wird. Sollte also $V^{(s)}$ negativ sein, so wäre für die Wurzel ebenfalls ein negatives Vorzeichen zu wählen.

Bei periodischen Neigungsänderungen gilt:

$$(222) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 J^{(s)} i_i;$$

setzen wir hierin:

$$(223) \quad i_i = S_i \sin 2\pi \frac{t}{T} + C_i \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

oder:

$$(223') \quad i_i = \sqrt{S_i^2 + C_i^2} \sin 2\pi \frac{t + \delta}{T}, \quad \operatorname{tg} 2\pi \frac{\delta}{T} = \frac{C_i}{S_i},$$

und wiederum:

$$(224) \quad a = S_a \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

so folgt:

$$(225) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_i = \frac{S_a}{J^{(s)}} \left(1 - \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 \right); \quad C_i = \frac{S_a}{J^{(s)}} 2 \frac{T_0}{2\pi\tau} \frac{T_0}{T}, \\ \operatorname{ctg} 2\pi \frac{\delta_i}{T} = \frac{1}{2} \frac{2\pi\tau}{T_0} \left(\frac{T}{T_0} - \frac{T_0}{T} \right), \end{array} \right.$$

und

$$(226) \quad S_a \cdot \sqrt{S_i^2 + C_i^2} = J^{(s)} \cdot \sqrt{\left(1 - \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 \right)^2 + 4 \left(\frac{T_0}{2\pi\tau} \right)^2 \left(\frac{T_0}{T} \right)^2}.$$

Die scheinbare Indikatorlänge für Neigungsänderungen der Periode T ist hiernach angegeben durch:

$$(227) \quad \mathfrak{S}^{(s)} = \frac{S_a}{\sqrt{S_i^2 + C_i^2}} = \frac{J^{(s)}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 \right)^2 + 4 \left(\frac{T_0}{2\pi\tau} \right)^2 \left(\frac{T_0}{T} \right)^2}}.$$

Gemäss der Ableitung gelten diese Formeln ganz unabhängig von der Intensität der Dämpfung, also für den Fall periodischer ebenso wohl wie für den Fall aperiodischer Eigenbewegungen.

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in den Darstellungen $\mathfrak{B}^{(s)}/V^{(s)}$ und $\mathfrak{S}^{(s)}/J^{(s)}$ ist seiner Form nach stets grösser als 0, die Vergrösserung periodischer Verschiebungen und die scheinbare Indikatorlänge für periodische Neigungen können also bei Dämpfung niemals unendlich gross werden.

$\mathfrak{S}^{(s)}$ und $\mathfrak{B}^{(s)}$ hängen innig zusammen, denn es ist

$$(228) \quad \frac{\mathfrak{S}^{(s)}}{J^{(s)}} = \frac{\mathfrak{B}^{(s)} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2}{V^{(s)} \left(\frac{T}{T_0} \right)} = \frac{\mathfrak{B}^{(s)} \Lambda}{V^{(s)} L}.$$

Λ bedeutet wieder die zur Schwingungsperiode T gehörige äquivalente Pendellänge. Da

$$(229) \quad J^{(s)} = V^{(s)} L$$

ist, ergibt sich die bemerkenswerthe Folgerung:

$$(230) \quad \mathfrak{S}^{(s)} = \mathfrak{B}^{(s)} \Lambda;$$

zwischen der scheinbaren Indikatorvergrösserung $\mathfrak{B}^{(s)}$, der scheinbaren äquivalenten Indikatorlänge $\mathfrak{S}^{(s)}$ und der zugehörigen Periode der Störungen T , bezüglich der zugehörigen äquivalenten Pendellänge Λ besteht also dieselbe einfache Beziehung, wie zwischen der wirklichen Indikatorvergrösserung $V^{(s)}$, der wirklichen äquivalenten Indikatorlänge $J^{(s)}$ und der reducirten Schwingungsperiode T_0 , bezüglich der äquivalenten Pendellänge L des Seismographen.

51. *Indikatorvergrößerungen periodischer Störungen.* Mit Rücksicht auf die Beziehungen zwischen $\mathfrak{B}^{(e)}$ und $\mathfrak{S}^{(e)}$ können wir uns auf die Untersuchung einer der beiden Grössen beschränken und werden dabei die praktisch wichtigere Indikatorvergrößerung $\mathfrak{B}^{(e)}$ bevorzugen. Diese ist gegeben durch:

$$(231) \quad \mathfrak{B}^{(e)} = \frac{V^{(e)}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2\left(\frac{T}{T_0}\right)^2}}.$$

Wir setzen $V^{(e)}$ als positiv voraus und geben der Wurzel rechts positives Vorzeichen, damit auch $\mathfrak{B}^{(e)}$ positiv wird.

Aus (231) folgt

$$(232) \quad \frac{d\mathfrak{B}^{(e)}}{dT} = 2V^{(e)} \frac{T}{T_0} \frac{1}{T_0} \frac{1 - 2\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2\left(\frac{T}{T_0}\right)^2}};$$

$d\mathfrak{B}^{(e)}/dT$ kann hiernach nur 0 sein, wenn

$$(233) \quad \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2$$

ist. Bei nicht zu starker Dämpfung, so lange

$$(234) \quad \tau > \sqrt{2} \frac{T_0}{2\pi},$$

ist dieses möglich. Dann hat $d\mathfrak{B}^{(e)}/dT$ nach (232) für kleine Werthe von T positives Vorzeichen, und geht für den durch (233) bestimmten Werth durch 0 hindurch, um weiterhin negativ zu bleiben. Die Vergrößerung $\mathfrak{B}^{(e)}$ wächst also mit wachsender Störungsperiode T bis diese den durch (233) gegebenen Werth erreicht, um dann dauernd abzunehmen. Für den Maximalwerth von $\mathfrak{B}^{(e)}$ liefern (231), (233) die Formel

$$(235) \quad \mathfrak{B}^{(e)}_{\text{Maximum}} = \frac{1}{2} \frac{2\pi\tau}{T_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2}}.$$

Ist die rechte Seite von (233) negativ, so giebt es keinen reellen, also keinen in Betracht kommenden Werth von T , für welche die Gleichung erfüllt ist, $d\mathfrak{B}^{(e)}/dT$ ist stets negativ, $\mathfrak{B}^{(e)}$ nimmt von Anfang an mit wachsender Periode T ab. Der Uebergang von dem einen zum anderen Falle findet für

$$(236) \quad \frac{T_0}{2\pi\tau} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

statt. Es ist dann $T/T_0 = \sqrt{2}$ und das Dämpfungsverhältniss ergibt sich

$$(237) \quad = e^\pi : 1 = 23,1 : 1.$$

Dies entspricht einer sehr starken, für die Praxis kaum noch in Betracht kommenden Dämpfung, sodass wir es in der Regel mit dem Falle einer erst steigenden, dann fallenden Vergrösserung zu thun haben.

Der Grenzwert von $\mathfrak{B}^{(o)}$ für verschwindende Perioden T ist nach (231) stets

$$(238) \quad \mathfrak{B}_0^{(o)} = V^{(o)}.$$

Für Störungsperioden T , welche die reducirte Eigenperiode T_0 vielfach übertreffen, kann nach (231)

$$(239) \quad \mathfrak{B}^{(o)} = V^{(o)} \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 = V^{(o)} \frac{L}{\Lambda}$$

gesetzt werden. *Der Einfluss der Dämpfung verschwindet hiernach sehr bemerkenswerther Weise sowohl für sehr kleine als auch für sehr grosse Störungsperioden.*

Eine genauere Einsicht in den Einfluss der Dämpfung auf die Indikatorvergrösserung periodischer Störungen bieten die Tabelle auf der nächsten Seite und Figur 5. Sie zeigen, dass bei geringer Dämpfung diejenigen Perioden, welche der Eigenperiode nahe kommen, sehr stark bevorzugt werden, und dass andererseits bei sehr starker Dämpfung die Empfindlichkeit gegenüber allen Perioden ausser den sehr kleinen und sehr grossen eine erhebliche Einbusse erleidet. *Dazwischen giebt es einen Bereich für das Dämpfungsverhältniss, etwa durch 3:1 und 8:1 begrenzt, wo die Vergrösserung $\mathfrak{B}^{(o)}$ bis hierauf zu Perioden T , welche die reducirte Schwingungsperiode T_0 etwas überschreiten, sich von der Indikatorvergrösserung $V^{(o)}$ weder nach der einen noch nach der anderen Seite erheblich entfernt.* Wählt man die Dämpfung also in diesem Bereich, so werden die periodischen Parallelverschiebungen in den Diagrammen des Seismographen bis etwas über $T = T_0$ hinaus nahezu in den richtigen Verhältnissen wiedergegeben. Am glücklichsten zeigt sich dieser ausgleichende Einfluss der Dämpfung wohl etwa bei dem Dämpfungsverhältniss 5:1, sodass dieses sich am meisten empfiehlt. — Ueber etwa $T = \sqrt{2} T_0 = 1,4 T_0$ hinaus verliert die Dämpfung dann allmählich ihren Einfluss, indem immer mehr der Abfall der Vergrösserung zur Geltung kommt, der auch bei Abwesenheit der Dämpfung eintreten würde.

In der Tabelle und in der Figur ist auch gemäss (219) die *Phasenverzögerung* der Indikatorbewegung gegenüber der Erdbewegung dargestellt. In Zeittheilen gemessen beträgt sie δ , in Bruchtheilen der Periode gemessen δ/T ; von der im Diagramm abgelesenen Zeit muss man um δ zurückgehen, um zu der entsprechenden Phase der Erdbewegung zu gelangen.

52. *Begleitende Eigenschwingungen.* Bei widerstandsloser Bewegung des Seismographengehänges haben wir in Artikel 44 die durch den Einsatz periodischer Störungen erregten Eigenbewegungen direkt mittels der allgemeinen Lösungen der Indikatorgleichung berechnet. Es wurde dieser Weg in Rücksicht

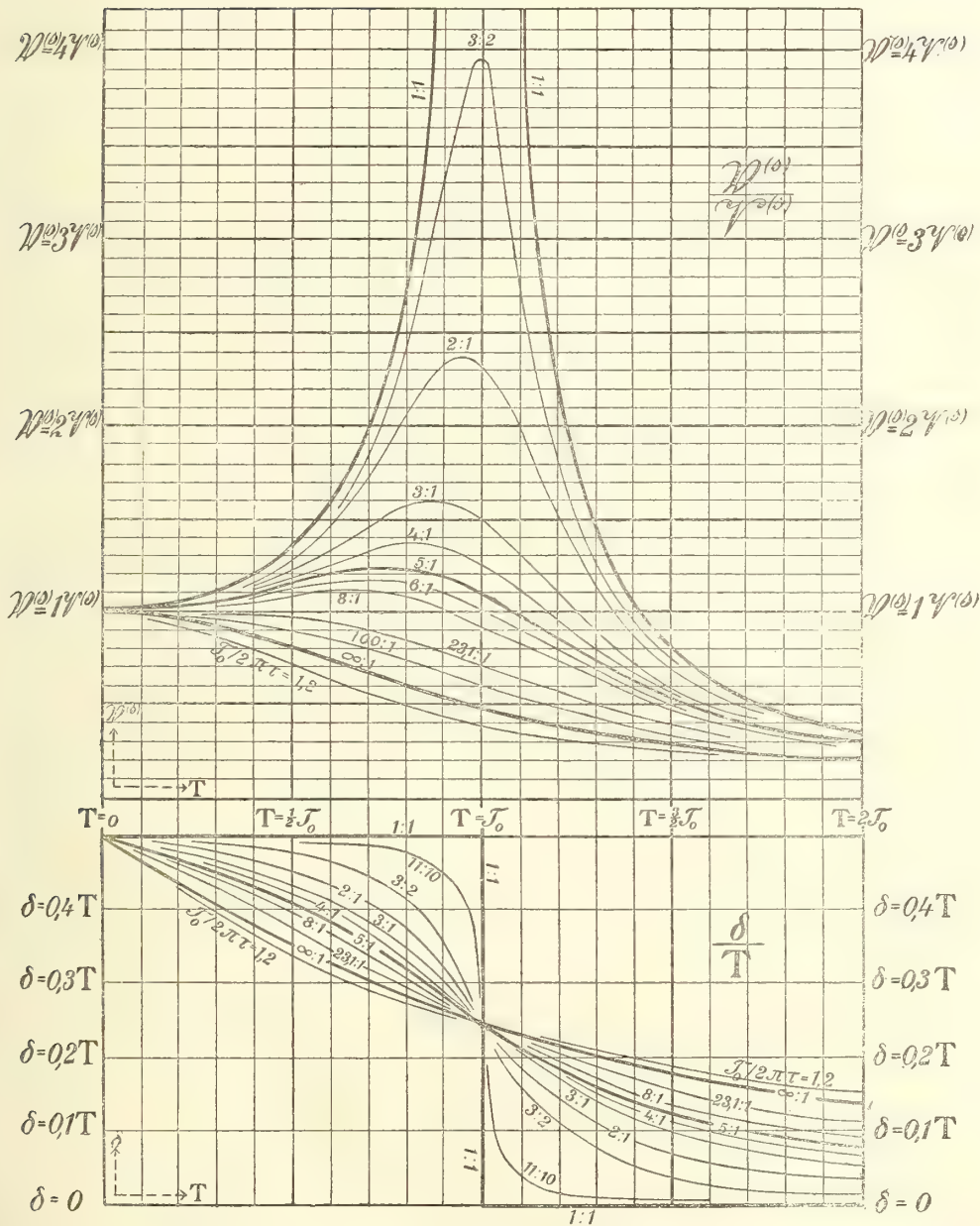
Abhängigkeit des Dämpfungs-Verhältnisses $\varepsilon : 1$ und der Schwingungsperiode T von der Relaxationszeit τ und der reducirten Schwingungsperiode T_0 . Vergrößerung $\mathfrak{B}^{(0)}$ und Phasenverschiebung δ periodischer Verschiebungen σ parallel s.

$\varepsilon : 1$	1:1	1,1:1	3:2	2:1	3:1	4:1	5:1	6:1	8:1	10:1	23,1:1	100:1	1000:1	$\infty : 1$	—
T/T_0	1	1,0004	1,008	1,024	1,059	1,093	1,124	1,151	1,199	1,240	1,414	1,775	2,416	∞	aperiod
τ/T_0	∞	5,247	1,233	0,721	0,455	0,361	0,311	0,279	0,240	0,217	0,159	0,109	0,072	0	—
τ/T_0	∞	5,249	1,243	0,739	0,482	0,394	0,349	0,321	0,288	0,270	0,225	1,193	0,175	0,159	0,133
$T_0/2\pi\tau$	0	0,0303	0,128	0,215	0,330	0,404	0,456	0,495	0,552	0,591	0,707	0,826	0,910	1	1,2
Maximal- werth von $\mathfrak{B}^{(0)}$	1	0,9991	0,983	0,952	0,884	0,821	0,764	0,714	0,625	0,549	0	(0)	(0)	(0)	(0)
$\mathfrak{B}^{(0)}/V^{(0)}$	∞	16,5	3,94	2,38	1,60	1,35	1,23	1,16	1,09	1,05	1	(1)	(1)	(1)	(1)
$T/T_0 = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1,332	1,31	1,27	1,22	1,17	1,14	1,11	1,07	1,05	0,97	0,90	0,85	8,10	0,71
$T/T_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$	2	1,993	1,88	1,71	1,46	1,32	1,23	1,16	1,08	1,03	0,89	0,79	0,72	2/3	0,56
$T/T_0 = 1$	∞	16,5	3,90	2,32	1,51	1,24	1,10	1,01	0,91	0,85	0,71	0,61	0,55	1/2	0,42
$T/T_0 = \sqrt{2}$	1	0,996	0,94	0,85	0,73	0,66	0,61	0,58	0,54	0,51	0,45	0,39	0,36	1/3	0,28
$T/T_0 = 2$	$\frac{3}{2}$	0,9990	0,99	0,96	0,91	0,88	0,85	0,83	0,81	0,78	0,73	0,67	0,64	1/3-6/10	0,53
$T/T_0 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0,493	0,473	0,456	0,434	0,422	0,413	0,407	0,399	0,394	0,380	0,367	0,360	0,352	0,339
$T/T_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	0,487	0,445	0,413	0,381	0,364	0,355	0,349	0,341	0,336	0,324	0,314	0,309	0,304	0,295
$T/T_0 = 1$	$\frac{1}{2}$	0,013	0,055	0,087	0,119	0,136	0,145	0,151	0,159	0,164	0,176	0,186	0,191	0,196	0,205
$T/T_0 = \sqrt{2}$	0	0,007	0,027	0,044	0,066	0,078	0,087	0,093	0,101	0,106	0,120	0,133	0,140	0,148	0,161

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} - V^{(0)} \frac{d^2 \sigma}{dt^2} \quad a = A \sin 2\pi \frac{t}{T}; \quad \sigma = \Sigma \sin 2\pi \frac{t+\delta}{T}; \quad A/\Sigma = \mathfrak{B}^{(0)}.$$

T bedeutet die Periode der Verschiebungen. Durch die Linie wird die Lage des Maximums von $\mathfrak{B}^{(0)}$ angezeigt. Die Bewegungen (σ) der Erdoberfläche gehen den Bewegungen (a) des Indikators um die Zeit δ voraus und haben eine $\mathfrak{B}^{(0)}$ -mal kleinere Amplitude.

Für das Dämpfungsverhältniss scheint sich am besten 5:1 zu empfehlen, doch sind 3:1 und 8:1 wohl noch zweckmässig.



Figur 5.

auf den Fall $T = T_0$ gewählt, wo eine Beziehung auf S_a wegen seines unendlich grossen Werthes zu vermeiden war. Jetzt, wo dieser Umstand nicht mehr störend ist, soll unter Benutzung von S_a ein kürzerer Weg eingeschlagen werden.

Wiederum nehmen wir an, dass die Störungen den bis dahin ruhenden Seismographen plötzlich mit voller Stärke treffen. t_0 sei der Zeitpunkt des Einsatzes, weiterhin gelte:

$$(240) \quad \sigma = S_0 \sin 2\pi \frac{t}{T} + C_0 \cos 2\pi \frac{t}{T};$$

es handele sich also um *Parallelverschiebungen*. Die nach der Zeit t_0 erfolgenden Indikatorbewegungen sind aufzufassen als Superposition einer erzwungenen Schwingung, deren Ausweichung mit $a^{(0)}$, und einer Eigenschwingung, deren Ausweichung mit a' bezeichnet werden soll:

$$(241) \quad a = a^{(0)} + a'.$$

Den Anfangspunkt der Zeit passend wählend, können wir

$$(242) \quad a^{(0)} = S_a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

setzen und zwischen S_a , S_0 , C_0 den in Artikel 50 festgestellten Zusammenhang annehmen. Für a' gilt die Formel

$$(243) \quad a' = S'_a e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \sin 2\pi \frac{t-t_0}{T} + C'_a e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \cos 2\pi \frac{t-t_0}{T}.$$

Unsere Aufgabe ist es, S'_a und C'_a zu bestimmen.

Bei sehr schnellen, sich über einen sehr kurzen Zeitraum erstreckenden Störungen ist nach (215) $a = -V^{(s)}\sigma + \text{const}$, $da/dt = -V^{(s)}(d\sigma/dt) + 2V^{(s)}\sigma/\tau + \text{const}$. Diese Formeln wenden wir auf den Einsatz an. Unmittelbar vorher ist $a = 0$, $da/dt = 0$, $\sigma = 0$, $d\sigma/dt = 0$, unmittelbar nachher $\sigma = \sigma_0$, $d\sigma/dt = (d\sigma/dt)_0$, so folgt für den Zeitpunkt unmittelbar nachher $a_0 = -V^{(s)}\sigma_0$, $(da/dt)_0 = -V^{(s)}(d\sigma/dt)_0 + 2V^{(s)}\sigma_0/\tau$. (241) in Verbindung mit (242), (243) sowie (240) und (219) ergibt daher

$$(244) \quad \left\{ \begin{array}{l} S'_a = S_a \frac{T}{T_0} \left\{ \frac{T_0}{2\pi\tau} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \sin 2\pi \frac{t_0}{T} - \left(1 - 2 \left(\frac{T_0}{2\pi\tau} \right)^2 \right) \frac{T}{T_0} \cos 2\pi \frac{t_0}{T} \right\} \\ C'_a = -S_a \left\{ \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \sin 2\pi \frac{t_0}{T} + 2 \frac{T_0}{2\pi\tau} \frac{T}{T_0} \cos 2\pi \frac{t_0}{T} \right\}. \end{array} \right.$$

Betrachten wir zunächst die für uns besonders wichtigen Fälle mittlerer Dämpfung, welche in der Tabelle auf Seite 80 durch Einrahmung hervorgehoben sind. Es liegt dann $T_0/2\pi\tau$ in der Nähe von $1/2$, T/T_0 in der Nähe von 1, sodass S'_a , C'_a und die Gesamtamplitude $\sqrt{S_a'^2 + C_a'^2}$ der beim Einsatz der Störungen erregten Eigenschwingungen für Perioden T unterhalb T_0 sowie

in dessen Nachbarschaft höchstens die Grössenordnung S_a und für grössere Perioden die Grössenordnung $S_a T^2/T_0^2$ erhalten, wobei S_a die Amplitude der den Störungen synchronen erzwungenen Schwingungen bedeutet. Nun bleibt S_a dauernd bestehen, solange die Störungen anhalten, während die Amplitude der Eigenschwingungen wegen der hier angenommenen Stärke der Dämpfung schon in einer Periode T auf $1/9$ bis $1/64$ des anfänglichen Werthes herabsinkt. Wir werden hieraus schliessen können, dass die beim Einsatz erregten Eigenschwingungen nur einen geringen, vorübergehenden Einfluss haben. Von besonderer Wichtigkeit ist, dass der Seismograph sich gegenüber Störungsperioden, welche der Eigenperiode nahe liegen, völlig anders als bei Abwesenheit der Dämpfung verhält. Da nämlich die Eigenschwingungen schon nach wenigen Hin- und Hergängen unmerklich werden, so finden keine Schwebungen statt und bei einer mit der Eigenperiode übereinstimmenden Störungsperiode tritt auch kein dauerndes Anwachsen der Amplitude ein. Es stellt sich vielmehr mit einer der Dämpfung entsprechenden Geschwindigkeit der von den Eigenschwingungen freie Endzustand her. Wie gross der Vorteil ist, der sich hiernach infolge der Dämpfung für die Lesbarkeit der Seismographen Diagramme ergibt, brauche ich wohl nicht noch zu betonen.

Mit geringer werdender Dämpfung vermindert sich deren schützender Einfluss; wählt man sie noch stärker, als dem Dämpfungsverhältniss $8:1$ entspricht, so werden die Eigenschwingungen bis zur Grenze der Aperiodicität zwar noch schneller beseitigt, aber der Gewinn ist nicht gross und wohl kein hinreichender Ersatz für die Einbusse an Empfindlichkeit

Bei einem plötzlichen Einsatz von periodischen Neigungsstörungen zur Zeit t_0 haben wir unmittelbar nacher $a = a_0 = 0$, $da/dt = (da/dt)_0 = 0$ zu setzen; so folgt hier mittels entsprechender Rechnungen

$$(245) \quad S'_a = -S_a \frac{T}{T_0} \left\{ \frac{T_0}{2\pi\tau} \sin 2\pi \frac{t_0}{T} + \frac{T_0}{T} \cos 2\pi \frac{t_0}{T} \right\}, \quad C'_a = -S_a \sin 2\pi \frac{t_0}{T}.$$

Bei mittelstarker Dämpfung ist hiernach die Anfangsamplitude der Eigenschwingungen für Perioden T unterhalb T_0 von der Grössenordnung $S_a T_0/T$, für Perioden in der Nähe von T_0 und darüber von der Grössenordnung S_a . Ueber den Einfluss der Dämpfung ist im Wesentlichen dasselbe zu sagen wie vorhin, nur können hier bei kleinen Störungsperioden T die Eigenschwingungen auf einige Zeit gegenüber den erzwungenen Schwingungen kräftig zur Geltung kommen.

§ 7. Einwirkung der Reibung im Gehänge.

53. *Reibung im Gehänge und am Schreibstift.* Unter den Bewegungshemmnissen wollen wir nun, nachdem die Dämpfung untersucht worden ist, nur noch die Reibung fester Körper aufeinander berücksichtigen. Dabei soll vorausgesetzt werden

1) dass die Widerstandskraft bei Bewegung von der Geschwindigkeit unabhängig ist, 2) dass die Reibung bei relativer Ruhe der Körper den Eintritt der Bewegung nur solange verhindert, als die Kräfte noch nicht gross genug sind, um die der Bewegung entsprechende Widerstandskraft zu überwinden.

Bekanntlich wird insbesondere das zweite Gesetz meist merklich verletzt, indem zur Einleitung der Bewegung ein erheblich grösserer Antrieb erforderlich ist, als nach dem Widerstand während der Bewegung zunächst zu erwarten wäre. Wir wollen aber die sich so ergebenden weiteren Komplikationen nicht besonders berücksichtigen, da sie nur eine unbedeutende Rolle spielen, solange die Reibung überhaupt soweit herabgedrückt ist, als im Interesse der Brauchbarkeit des Seismographen erforderlich scheint.

Bei photographischer Registrirung macht sich die Reibung nur im Gehänge selbst bemerkbar, bei mechanischer Registrirung überdies bei der Bewegung des Schreibstiftes auf der Schreibfläche. Im letzteren Falle bringt die Eigenbewegung der Schreibfläche ein wesentlich neues Moment in die Erscheinung, welches für die Arbeit des Seismographen von Vortheil ist, die theoretische Auffassung aber erheblich erschwert. Mit Rücksicht hierauf werden wir in den folgenden Untersuchungen zwischen „Reibung im Gehänge“ und „Reibung am Schreibstift“ unterscheiden.

54. *Indikatorgleichung bei Reibung im Gehänge.* $Q^{(R)}$ sei die Indikator-Resultante (Art. 31) der sämmtlichen im Gehänge wirkenden Reibungskräfte; die fingirte Kraft $Q^{(x)}$ vom Indikator ersetze also das gesammte im Gehänge wirksame durch Reibung veranlasste Kraftsystem. Bedeutet dann R die positiv genommene Intensität von $Q^{(R)}$ während der Bewegung, so ist nach den im vorigen Artikel formulirten Gesetzen bei positiver Bewegungsrichtung des Indikators $Q^{(R)} = -R$, bei negativer Bewegungsrichtung $Q^{(R)} = +R$; im Falle der Ruhe kann jeder Werth von $-R$ bis $+R$ auftreten.

Der Einfluss der Reibung auf die Bewegungen des Gehänges ist leicht zu erkennen, wenn $Q^{(x)}$ in die Bewegungsgleichung (104) eingefügt wird. Für die Bewegungsgleichung des Indikators in der von uns gewählten Form, wobei die linke Seite durch das Glied d^2a/dt^2 gebildet wird, ergibt sich so:

$$(246) \quad \frac{d^2a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} + \frac{Q^{(R)}}{m} + \text{Störungs-Glieder},$$

das heisst, es tritt rechts das „Reibungsglied“

$$(247) \quad \frac{Q^{(R)}}{m}$$

hinzu. m bedeutet die resultirende Masse des Gehänges (Art. 32). Nach den gemachten Auseinandersetzungen ist allgemein:

$$(248) \quad -\frac{R}{m} \leq \frac{Q^{(R)}}{m} \leq +\frac{R}{m},$$

und gilt speciell für $da/dt > 0$ der untere, für $da/dt < 0$ der obere Grenzwert.

Nach (246) muss bei Abwesenheit von Störungen im Falle der Ruhe die Beziehung

$$(249) \quad \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a = \frac{Q^{(R)}}{m}$$

erfüllt werden; da nun aber für $Q^{(R)}/m$ nur die Grenzbestimmung (248) vorgeschrieben ist, so folgt für a kein bestimmter Werth, sondern nur die Grenzbestimmung

$$(250) \quad -r \leq a \leq +r,$$

wobei r bestimmt ist durch die Formel

$$(251) \quad \frac{R}{m} = r \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = r \frac{g}{L}.$$

Bei Abwesenheit von Störungen vermag also die Reibung innerhalb der durch (250) gegebenen Grenzen jeden beliebigen Ausschlag des Gehänges dauernd aufrecht zu erhalten. r wird weiterhin „maximaler Reibungsausschlag“ genannt werden. Unter seiner Benutzung ergibt sich für das Reibungsglied der Indikatorgleichung (246) anstelle von (248) die Bedingung

$$(252) \quad -r \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = -r \frac{g}{L} \leq \frac{Q^{(R)}}{m} \leq +r \frac{g}{L} = +r \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.$$

Die Indikatorgleichung selbst kann unter Benutzung von r für Zeiten der Indikatorbewegung geschrieben werden:

$$(253) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} \mp \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 r + \text{Störungs-Glieder},$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist, jenachdem die Bewegungsrichtung, also auch da/dt , positiv oder negativ ist.

55. *Allgemeine Sätze.* Der Indikator sei in Ruhe und befinde sich in der Mittellage, es sei also $da/dt = 0$ und $a = 0$; dann kann Bewegung nur eintreten, wenn die Störungen für sich eine Beschleunigung $d^2 a/dt^2$ ergeben, welche das Reibungsglied vermöge seiner Beschränkung (252) nicht aufzuheben vermag. Betrachten wir also zum Beispiel das Störungsglied

$$-\frac{J^{(s)}}{L} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right),$$

so ist eine durch dieses bewirkte Bewegung des Indikators nur dann zu erwarten, wenn sein Werth über die Grenzen $\pm R/m = \pm gr/L$ hinausgeht. Die Neigungen i_x müssen hiernach die Grenzen $\pm r/J^{(s)}$, die Schwereänderungen Δg_x die Grenzen $\pm gr/J^{(s)}$ überschreiten und die Beschleunigungen $d^2 \xi/dt^2$ müssen äquivalent mit Schwereänderungen ausserhalb dieser Grenzen werden. Hieraus folgt das sehr übersichtliche Resultat, dass zur Einleitung der Indikatorbewegung die Neigungen i_x , die Schwereänderungen Δg_x und die Schwereänderungen, welche den Beschleunigungen $d^2 \xi/dt^2$ äquivalent sind, solche Werthe überschreiten müssen, welchen bei dauerndem

Bestehen eine Aenderung der Indikatormittellage um den maximalen Reibungsausschlag r entspräche. — Durch Weiterführung der Ueberlegungen ist leicht einzusehen, dass im Falle eines von vorne herein vorhandenen durch die Reibung aufrecht erhaltenen Ausschlages a zur Einleitung einer Indikatorbewegung nach der Seite des Ausschlages hin ein grösserer, nach der anderen Seite ein kleinerer Antrieb durch die Störungen nöthig ist; als Maass für die nothwendigen Intensitäten des Antriebes ergeben sich dabei die Ausschläge $a+r$ und $-a+r$.

Während eines Zeitintervalles, in welchem der Indikator sich nach einer und derselben Richtung bewegt, gilt nach (253)

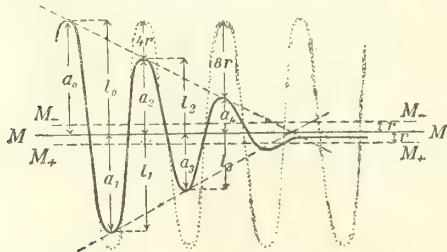
$$(253') \quad \frac{d^2(a \pm r)}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2(a \pm r) - \frac{2}{\tau} \frac{d(a \pm r)}{dt} + \text{Störungs-Glieder.}$$

Hieraus kann geschlossen werden, dass während eines jeden Intervalles unveränderlicher Bewegungsrichtung die Bewegungen des Indikators infolge der Reibung gerade so vorsichgehen, als ob die Mittellage des Indikators um den maximalen Reibungsausschlag entgegengesetzt der Bewegungsrichtung verschoben wäre. Wir wollen diesen Satz, der für die rechnerische Verwerthung der Reibung vielfach sehr bequem ist, den „Satz der verschobenen Mittellage“ nennen. Kehrt die Bewegungsrichtung des Indikators um, so springt die scheinbare Mittellage um $2r$, zu der symmetrisch zur wirklichen Mittellage auf der anderen Seite gelegenen Stelle.

Der Satz der Superposition der Wirkungen von Störungen (Art. 41) wird durch die Reibung aufgehoben. Dieses ist leicht einzusehen, wenn man beachtet, dass bei Reibung erst eine gewisse Grösse der Störung nothwendig ist, um eine Bewegung des Indikators zu veranlassen. Denkt man sich dergleichen einzeln unwirksame Störungen in genügender Zahl superponirt, so lassen sich immer wirksame Störungen konstruiren, während der Satz der Superposition dabei als Summe der Ausschläge 0 nur immer wieder den Ausschlag 0 ergäbe. — Man kann den Satz der Superposition für die Berechnung der Wirkungen von Störungen retten, wenn man den Kunstgriff anwendet, die Reibung selbst als eine äussere Störung zu betrachten, wenn man also in der Indikatorgleichung (246) das Reibungsglied $Q^{(R)}/m$ zu den Störungsgliedern zählt.

56. Eigenschwingungen bei Reibung im Gehänge. Um den Einfluss der Reibung im Gehänge auf die Eigenbewegungen festzustellen, wollen wir den im vorigen Artikel aufgestellten Satz der verschobenen Mittellage anwenden. Zunächst

möge der Fall unmerklicher Dämpfung behandelt werden. Fehlte dann auch die Reibung, so würde der Indikator gleich gross bleibende Sinusschwingungen vollführen und im Diagramm eine Sinuskurve, etwa die in Figur 6 punktirte, um die wirkliche Mittellinie, MM , zeichnen. Bei Mitwirkung der Reibung gehen die Schwingungen von einem



Figur 6.

Umkehrpunkt zum nächsten abwechselnd um die verschobenen Mittellinien, $M_+ M_+$ und $M_- M_-$ der Figur, von Statten. Da diese um r von der wirklichen Mittellinie abstehen, so nimmt der Ausschlag zunächst bei jeder Schwingung von einer Seite zur andern um $2r$, um den doppelten maximalen Reibungsausschlag ab. Zum Schluss, bei der letzten Schwingung, kann die Abnahme geringer sein. Dieses trifft, wie leicht ersichtlich, dann ein, wenn die wirkliche Mittellinie nicht mehr überschritten wird.

Sind a_0, a_1, a_2, \dots die aufeinander folgenden Ausschläge, und werden positiv gerechnete Beträge durch Einklammerung in geraden Strichen bezeichnet, so ist

$$(254) \quad |a_1| = ||a_0| - 2r|, |a_2| = ||a_1| - 2r| = ||a_0| - 4r|, \dots,$$

$$(254') \quad |a_n| = ||a_0| - 2nr|,$$

wobei die Formeln auch noch für die letzte Schwingung gültig sind. Man muss von dieser absehen, sobald die wirkliche Mittellinie nicht mehr überschritten wird, wenn man in Anlehnung an (254') schreibt:

$$(254'') \quad r = \frac{1}{2n} (|a_0| - |a_n|).$$

Von besonderem Interesse ist der Verlauf der *Scheitellinien* im Diagramm, das heisst, der Linien, welche die Punkte grösster Ausweichung nach derselben Seite verbinden. Sie liegen symmetrisch zu der wahren Mittellinie (MM) und sind in unserem Falle gerade. Ihre Neigung wird bestimmt durch die Bedingung, dass sie der Mittellinie in einer Schwingungsperiode T um $4r$ näherkommen. Die Stücke der Scheitellinien jenseits des Schnittpunktes haben für die Indikator-Schwingungen nur noch bis zu den verschobenen Mittellinien direkte Bedeutung; was darüber hinausliegt, ist nichts weiter als eine mathematische Fortsetzung, denn die Schwingungen hören auf, sowie ein Umkehrpunkt zwischen die verschobenen Scheitellinien fällt.

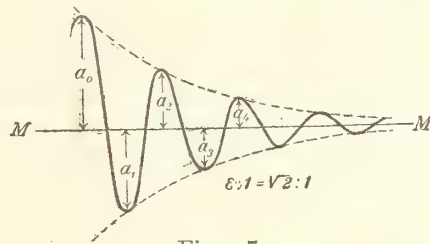
Die Geradlinigkeit der Scheitellinien und der im Endlichen liegende Schnittpunkt geben für die Reibung im Gehänge einen sehr charakteristischen Unterschied gegenüber der Dämpfung. Bei dieser sind die Scheitellinien, welche in Figur 7 für das Dämpfungsverhältniss $\varepsilon:1 = \sqrt{2}:1$ dargestellt sind, Exponentialkurven der Gleichung

$$(255) \quad a = \pm a_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}},$$

die sich der Mittellinie zwar immer mehr annähern, aber sie niemals völlig erreichen.

Für die Praxis ist es meist bequemer, statt mit „Ausschlägen“ a_0, a_1, a_2, \dots , mit „Schwingungswerten“

$$(256) \quad l_0 = a_0 - a_1, l_1 = |a_1 - a_2|, l_2 = |a_2 - a_3|, \dots$$



Figur 7.

zu rechnen. Für diese ergibt sich bis zum Schluss der Schwingungen, also durchweg, gültig:

$$(257) \quad l_n = l_0 - 4nr, \quad r = \frac{1}{4n}(l_0 - l_n).$$

Die Formeln (254) oder (257) ermöglichen es in einfacher Weise, aus den Diagrammen des in Schwingungen versetzten Seismographen die Grösse des Reibungsausschlages r festzustellen.

Während die Dämpfung nicht im Stande ist, den einmal schwingenden Seismographen jemals zur völligen Ruhe zu bringen, ist das bei der Reibung im Gehänge anders, hier gibt es eine bestimmte letzte Schwingung, von der ab der Indikator in Ruhe bleibt. In der Figur 6 findet sie in positiver Bewegungsrichtung um die verschobene Mittellinie $M_+ M_+$ statt. Wie hier, so endet die Bewegung im Allgemeinen nach Vollendung einer ganzen Schwingung um eine der verschobenen Mittellinien, sobald die erreichte Endlage innerhalb des von den verschobenen Mittellinien begrenzten Bereiches fällt.

Auch bei der Behandlung des Falles merklicher Dämpfung, zu der wir uns nun wenden wollen, benutzen wir den Satz der verschobenen Mittellage. Danach erfolgt die Schwingung von einem Umkehrpunkt zum nächsten um die betreffende der beiden verschobenen Mittellage genau so, wie bei Abwesenheit der Reibung um die wahre Mittellage. Bedeutet

$$\varepsilon : 1$$

das Dämpfungsverhältniss, so gilt hiernach für die aufeinander folgenden grössten Ausweichungen $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, wenn von der letzten eventuell abgesehen wird:

$$(258) \quad |a_1| + r = (|a_0| - r) \frac{1}{\varepsilon}, \quad |a_2| + r = (|a_1| - r) \frac{1}{\varepsilon}, \dots,$$

$$(258') \quad |a_n| + r \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} = \left(|a_0| + r \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} \right) \frac{1}{\varepsilon^n}.$$

Man kann diese Formeln auch mit Einschluss der letzten Ausweichung benutzen, wenn man für diese $-|a|$ anstelle von $|a|$ setzt.

Im Falle der Reibung sinkt nach (258') der Ausdruck $|a_n| + r(\varepsilon + 1)/(\varepsilon - 1)$ gerade so herab, wie ohne Reibung die Grösse $|a_n|$ des Ausschlages selbst. Analoges gilt für die Schwingungsweiten $l_0 = |a_0| + |a_1|$, $l_1 = |a_1| + |a_2|$, \dots , für welche (258') ergibt

$$(259) \quad l_n + 2r \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} = \left(l_0 + 2r \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} \right) \frac{1}{\varepsilon^n}.$$

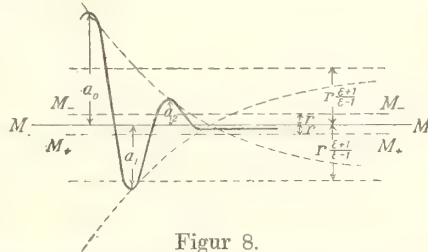
Bedeutet T die Schwingungsperiode, τ die Relaxationszeit, t_n die zum n -ten Ausschlag gehörige Zeit, so ist

$$(260) \quad \varepsilon = e^{\frac{T}{2\tau}}, \quad n = 2 \frac{t_n - t_0}{T}, \quad \frac{1}{\varepsilon^n} = e^{-\frac{t_n - t_0}{\tau}},$$

also nach (258')

$$(261) \quad |a_n| + r \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} = \left(|a_0| + r \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} \right) e^{-\frac{t_n - t_0}{\tau}}.$$

Diese Formel, erläutert durch Figur 8, lehrt, dass die Scheitellinien ebendieselden Exponentialkurven sind wie bei Abwesenheit der Reibung (Figur 7), dass sie aber gegen die wahre Mittellinie um $\pm r(\varepsilon + 1)/(\varepsilon - 1)$ verschoben erscheinen. Infolge der Verschiebung werden die Asymptoten nicht mehr durch die wahre Mittellinie, sondern durch zwei ihr im Abstände $r(\varepsilon + 1)/(\varepsilon - 1)$ parallel laufende Linien gebildet, und schneiden die Scheitellinien einander in einem im Endlichen gelegenen Punkte auf der wahren Mittellinie. Wieder kommen die Scheitellinien jenseits des Schnittpunktes nur noch bis zu den verschobenen Mittellinien in Betracht.



Figur 8.

In Figur 8 ist bei derselben Schwingungsperiode derselbe Reibungsaus Schlag wie in Figur 6 und dasselbe Dämpfungsverhältniss wie in Figur 7 angenommen, so dass sie uns die gemeinsame Wirkung der in Figur 6 und 7 getrennten Ursachen für die Verminderung der Schwingungsamplitude zeigt.

Ein unmittelbarer Bild von der Abnahme der Ausschläge a_n und der Schwingungswerten l_n als (258') und (259) ergeben die folgenden, aus ihnen leicht ableitbaren Gleichungen:

$$(262) \quad |a_n| = |a_0| \frac{1}{\varepsilon^n} - r \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^n} \right),$$

$$(263) \quad l_n = l_0 \frac{1}{\varepsilon^n} - 2r \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^n} \right).$$

Die Indikatorbewegung endet, wenn die rechte Seite von (262) einen Werth zwischen $+r$ und $-r$ annimmt; liegt er zwischen 0 und $-r$, so ist für ihn $|a_n|$ durch $-|a_n|$ zu ersetzen. Bei (263) kennzeichnet sich die Endlage des Indikators durch den letzten positiven Werth von l_n .

Für die Abnahme des Ausschlages von einer grössten Ausweichung bis zur nächsten nach der entgegengesetzten Seite erhalten wir mittels (262)

$$(264) \quad |a_n| - |a_{n+1}| = |a_n| \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) + r \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right),$$

ferner für die Abnahme des Ausschlages von einer grössten Ausweichung bis zur nächsten nach derselben Seite

$$(265) \quad |a_n| - |a_{n+2}| = |a_n| \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) + r \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right)^2.$$

Die für die Schwingungsweiten l gültigen Gleichungen, welche (264) und (265) entsprechen, enthalten $2r$ anstelle von r .

Beiläufig mag noch bemerkt werden, dass sich die Scheitellinien infolge der Dämpfung stets unter einem stumpferen Winkel in der wahren Mittellinie schneiden (Figur 8), als der Reibung allein entsprechen würde (Figur 6). Im letzten Falle wäre $8r$ der Betrag, um welchen die Scheitellinien für den Zeitzuwachs einer Periode T einander näher kommen. Bei Mitwirkung von Dämpfung findet man für den entsprechenden Betrag bei den Tangenten der Scheitellinien in ihrem Schnittpunkt auf der wahren Mittellinie

$$(266) \quad 2r \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} \frac{T}{\tau} = 8r \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{T}{2\tau} \right)^2 + \dots \right),$$

wobei in der Klammer höhere Potenzen von $T/2\tau$ folgen. Das hingeschriebene Glied mit der zweiten Potenz hat für $2\tau = T$ etwa den Werth $1/12$, das Dämpfungsverhältniss ist dabei $\varepsilon:1 = e:1 = 2,718 \dots :1$, also noch für diese recht erhebliche Dämpfung hat das erste Glied der Reihe hinter der 1 nur einen kleinen Einfluss:

Für eine nicht sehr grosse Dämpfung schneiden sich die Scheitellinien in der wahren Mittellinie sehr nahe unter demselben Winkel wie bei alleiniger Wirkung der Reibung.

Aus diesem Umstand wird man in manchen Fällen bei der Bestimmung des maximalen Reibungsausschlages r aus den Aufzeichnungen der Eigenbewegungen Nutzen ziehen können.

57. *Periodische Störungen bei Reibung im Gehänge.* Unter Berücksichtigung der Störungsglieder erster Klasse für die Richtung s lautet die Indikatorgleichung nach (253), wenn Reibung im Gehänge, jedoch keine Dämpfung wirksam ist:

$$(267) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a \mp \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r - V^{(s)} \left(\frac{d^2 \sigma}{dt^2} - g i_s - \Delta g_s \right).$$

Wir wollen zunächst fragen, welche Amplitude periodische Verschiebungs- und Neigungsstörungen mindestens haben müssen, um den Indikator trotz der Reibung in Bewegung zu setzen.

Für *Verschiebungsstörungen* ist hierzu nöthig, dass $V^{(s)} d^2 \sigma / dt^2$ die Grenzen $\mp (2\pi/T)^2 r$ überschreitet. Setzen wir also

$$(268) \quad \sigma = \sum \sin 2\pi \frac{t + \delta}{T},$$

sodass Σ die maximale Amplitude der Verschiebung und T die Periode bedeutet, so folgt als *Bedingung* für *Indikatorbewegungen*:

$$(269) \quad \Sigma > \left(\frac{T}{T} \right)^2 \frac{r}{V^{(s)}}.$$

Es mag hier bemerkt werden, dass $r/V^{(s)}$ diejenige Amplitude der Verschiebung angeibt, welche bei sehr kurzer Störungsperiode für die Indikatorbewegungen eine Amplitude gleich dem maximalen Reibungsausschlag r veranlassen würde. — Die Reibung zeigt nach (269) bei Verschiebungsstörungen einen um so geringeren Einfluss, je kürzer die Störungsperiode ist, und zwar nimmt die eben noch unterdrückte Amplitude proportional mit dem Quadrat der Störungsperiode ab.

Für Neigungsstörungen muss $V^{(s)} g i_s$ die Grenzen $\mp (2\pi/T_0)^2 r = \mp (g/L) r$ überschreiten, also i_s die Grenzen $\mp r/J^{(s)}$. Hier ist ein Einfluss der Störungsperiode nicht zu bemerken.

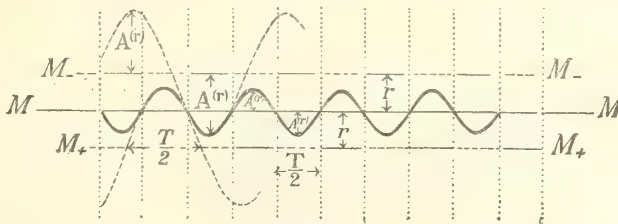
Ist die Amplitude der Störungen gross genug, um Bewegungen des Indikators zu verursachen, so bewirkt die Reibung eine Verkleinerung der Amplitude. a , A seien die jeweilig stattfindenden und die maximalen Ausschläge des Indikators, $a^{(0)}$, S_a diejenigen, welche sich bei Abwesenheit der Reibung ergeben würden. Für den letzteren Fall darf dann bei passender Verfügung über den Anfangspunkt der Zeit

$$(270) \quad a^{(0)} = S_a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

gesetzt werden.

Es kann vorkommen, dass der Indikator wegen der Reibung nicht stetig von einer Seite zur anderen, sondern ruckweise vorwärts schreitet, indem er von Zeit zu Zeit hängen bleibt; von dieser Komplikation soll abgesehen werden. Wir nehmen also an, dass der Indikator während je einer halben Periode T in der einen Richtung, während der anderen in der anderen fortschreitet. Die Reibung ergibt dann abwechselnd in Zeitabschnitten von der Länge $T/2$ konstante Kräfte in entgegengesetzten Richtungen. Gemäss der Bemerkung am Schlusse des Artikels 55 wollen wir die wirklich eintretende Indikatorbewegung als Superposition auffassen der durch (270) dargestellten Bewegung, welche ohne die Reibung stattfinden würde, und derjenigen, welche den Reibungskräften allein entspräche. Die letztere, nur fingirte, soll nun aufgesucht werden.

In Figur 9 stellen wie früher MM , M_-M_- , M_+M_+ die wahre und die beiden verschobenen Mittellinien dar. Die punktierten vertikalen Linien sollen die Um-



Figur 9.

kehrzeiten der wirklichen Indikatorbewegung bezeichnen, also die Zeiten, in welchen bei der fingirten Bewegung die Störungskräfte plötzlich umspringen.

Nach dem vorigen Artikel haben wir es in jedem Intervall zwischen zwei solchen Zeiten mit einer Eigenschwingung des Indikators um eine verschobene Mittellinie zu thun. Die so nach einander in Betracht kommenden Stücke der Mittellinien sind ausgezogen, die übrigen nur gestrichelt. Die Eigenschwingungen mit den maximalen Ausschlägen $A^{(r)}$ in ihrer weiteren, hier nicht zur Geltung kommenden Ausdehnung sind zum Theil gestrichelt angedeutet. Die Kurve mit der Amplitude $A^{(r)}$, welche der fingirten Indikatorbewegung entspricht, ist ausgezogen. Zu den Sprungzeiten muss mit den Kräften auch die Indikatorbeschleunigung d^2a/dt^2 den Werth wechseln, etwas ähnliches gilt aber nicht auch von der Geschwindigkeit da/dt und dem Ausschlag a . Hieraus und aus der Symmetrie der Bewegung ist leicht ersichtlich, dass der Indikator in der Reibungsbewegung zu den Sprungzeiten die wahre Mittellinie mit unveränderter Richtung passiren muss.

Diese Ueberlegungen lehren, dass die zu den Reibungskräften gehörige fingirte Bewegung zwar aus Theilen von Sinusschwingungen besteht, aber nicht eine einheitliche Sinusschwingung darstellt, also auch nicht durch eine Formel der Art (270) beschrieben werden kann.

Die *Eigenbewegungen, von denen die fingirte Indikatorbewegung Stücke herauslöst*, entsprechen bei passend gewählter Anfangszeit der Formel

$$(271) \quad a^{(r)} \pm r = A^{(r)} \cos 2\pi \frac{t}{T};$$

unter Rücksicht hierauf ist aus der Figur abzulesen:

$$(272) \quad A^{(r)} \cos 2\pi \frac{T}{4T} = r,$$

sodass für die Amplitude $A^{(r)}$ der fingirten Reibungsbewegung folgt:

$$(273) \quad A^{(r)} = A^{(r)} - r = r \frac{1 - \cos 2\pi \frac{T}{4T}}{\cos 2\pi \frac{T}{4T}}.$$

Ist die Störungsperiode T klein gegenüber der Eigenperiode T , so empfiehlt es sich, in (273) den Faktor des maximalen Reibungsanschlages r durch eine Reihenentwicklung zu ersetzen:

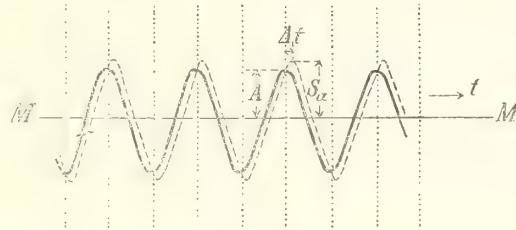
$$(274) \quad A^{(r)} = r \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{T}{T}\right)^2 \left(1 + \frac{5\pi^2}{48} \left(\frac{T}{T}\right)^2 + \dots\right).$$

Bei kleinen Störungsperioden T nimmt die Amplitude der fingirten Reibungsbewegung hiernach proportional mit dem Quadrat der Periode ab.

Für die Geschwindigkeit des Indikators an den Uebungsstellen von einer einheitlichen Schwingung zur anderen, ergibt sich mittels der Formel (271):

$$(275) \quad \frac{T}{2\pi} \frac{da^{(r)}}{dt} = r \frac{T}{T} \operatorname{tg} 2\pi \frac{T}{4T}.$$

Die wirkliche Indikatorbewegung entsteht durch Superposition der untersuchten fingierten Bewegung und derjenigen, welche ohne die Reibung stattfinden würde. Wird daher in Figur 10 durch die ausgezogene Kurve die wirkliche Bewegung, durch die gestrichelte Kurve diejenige bei Abwesenheit der Reibung bezeichnet, so müssen die Differenzen der jeweiligen Koordinaten $a^{(r)}$ angeben und durch die ausgezogene Kurve in Figur 9 dargestellt werden. Die punktirten vertikalen Linien in beiden Figuren sind hiernach einander zuzuordnen. Ihrer für Figur 9 festgestellten Bedeutung nach kennzeichnen sie die Umkehr der Bewegungsrichtung des Indikators, d. h. die Indikatorgeschwindigkeit 0. In Figur 10 müssen ihnen also maximale Ausweichungen der ausgezogenen Kurve entsprechen.



Figur 10.

Aus diesen Erwägungen ergibt sich als für unsere Rechnung wesentliches Resultat, dass die Indikatorgeschwindigkeit bei der fingierten Reibungsbewegung in den punktirten Linien der Figur 9 gleich und entgegengesetzt der Indikatorgeschwindigkeit zu entsprechenden Zeiten bei der in Figur 10 gestrichelt dargestellten Bewegung ohne Mitwirkung der Reibung sein muss. Unter Rücksicht hierauf folgt:

$$(276) \quad S_a \sin 2\pi \frac{\Delta t}{T} = \frac{T}{2\pi} \frac{da^{(r)}}{dt},$$

wenn S_a die grösste Ausweichung bei reibungsloser Bewegung bedeutet, diese selbst durch

$$(277) \quad a^{(0)} = S_a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

dargestellt wird, und Δt in Anlehnung an Figur 10 die *Verfrühung des grössten Ausschlages infolge der Reibung* bezeichnet. Ferner erhalten wir für die *Verkleinerung der grössten Ausschläge durch die Reibung* die Formeln:

$$(278) \quad A = S_a \cos 2\pi \frac{\Delta t}{T}, \quad S_a^2 - A^2 = \left(\frac{T}{2\pi} \frac{da^{(r)}}{dt} \right)^2,$$

in welchen S_a und A die grössten Ausschläge ohne und bei Mitwirkung der Reibung bezeichnen und $\frac{da^{(r)}}{dt}$ durch (275) angegeben wird.

Wenn die Bewegung, welche ohne Reibung eintreten würde, unter eine gewisse Grenze herabsinkt, versagen unsere Ueberlegungen und Formeln. Die konstruirte ausgezogene Kurve der Figur 10 erhält dann nämlich andere Umkehrpunkte, als unserer ursprünglichen Annahme über die Bewegung des Indikators entspricht. Um die Verhältnisse zu übersehen, wollen wir beachten, dass die ausgezogene Kurve an den punktirten Linien, d. h. in den bisher von uns angenommenen Um-

kehrpunkten einen Sprung in der Krümmung erleidet, wie es dem durch Reibung bewirkten Sprung in der Beschleunigung des Indikators entspricht. Hinter einer punktierten Linie ist die Krümmung jedesmal geringer als vorher. Sinkt nun die Amplitude der Bewegung mehr und mehr, so krümmt sich die Kurve schliesslich nach dem Sprunge umgekehrt und entfernt sich darum entgegen unserer Annahme von Neuem von der Mittellinie. Die bisherigen Umkehrpunkte werden dann durch andere ersetzt, indem sie selbst in Ruhepunkte übergehen. Die Reibungskräfte werden andere, als bei unseren Konstruktionen angenommen wurde, diese verlieren also ihre Bedeutung. Der Indikator wird nun abwechselnd auf jeder Seite der Mittellage eine Zeit lang ruhen, also im Diagramm eine parallele Linie zur Mittellinie ziehen, um dann mit neu beginnender Bewegung hinüberzugehen. —

Die *Grenze der Gültigkeit unserer früheren Darstellung* kennzeichnet sich dadurch, dass der zweite Differentialquotient des Ausschlags nach der Zeit für die ausgezogene Kurve der Figur 10 auf den punktierten Linien gerade zu 0 herabgeht. Hieraus folgt als Grenzbedingung:

$$(279) \quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A^{(s)} \cos 2\pi \frac{T}{4T} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 S_a \cos 2\pi \frac{At}{T}.$$

Unter Benutzung der früheren Formeln (271), (275), (276), (278) ergibt sich dann weiter, dass eine Kurve der in Figur 10 dargestellten einfachsten Art vom Indikator nur beschrieben wird, wenn die Störungen ohne die Reibung mindestens eine Amplitude

$$(280) \quad S_a = \left(\frac{T}{T}\right)^2 r \sqrt{1 + \left(\frac{T}{T}\right)^2 \operatorname{tg}^2 2\pi \frac{T}{4T}}$$

ergeben würden, und dass dabei die wirkliche Indikatorbewegung mindestens eine Amplitude von der Grösse

$$(281) \quad A = \left(\frac{T}{T}\right)^2 r$$

hat. Schwingungen geringerer Ausdehnung werden vom Indikator mit Ruhepausen ausgeführt; auf die Komplikationen, welche sich so ergeben, soll nicht näher eingegangen werden. Ebenso mag der Hinweis genügen, dass bei grösseren Störungsperioden leicht ersichtlich noch weiterer Anlass zur Komplikation der Indikatorbewegung durch zeitweiliges Hängenbleiben geboten wird.

58. *Periodische Störungen bei Reibung im Gehänge und Dämpfung.* Das Auftreten der Dämpfung hat zur Folge, dass in der Indikatorgleichung rechts das Glied $-(2/\tau)(da/dt)$ hinzukommt. Für die Frage, welche Störungen mindestens nothwendig sind, um den ruhenden Indikator in Bewegung zu setzen, ist das ohne Belang; unsere Schlüsse im vorigen Artikel in dieser Richtung gelten also auch im Falle der Dämpfung bei Ersatz von T durch T_0 .

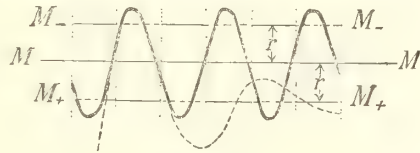
Die Verminderung des Indikatorausschlags durch die Reibung im Gehänge wird bei gleichzeitiger Wirkung von Dämpfung noch viel complicirter gestaltet,

als wir sie schon ohnedies fanden. Da aber dennoch die mathematischen Entwicklungen in wesentlich gleicher Weise geführt werden können, so werden hier unter Hinweis auf den vorigen Artikel kurze Andeutungen genügen.

Wieder beschränken wir uns auf den einfachsten Fall, wo der Indikator sich während einer halben Störungsperiode T in der einen Richtung und während der anderen in umgekehrter Richtung bewegt. Wiederum suchen wir zunächst die den Reibungskräften entsprechende Theilbewegung auf.

In jeder der halben Perioden findet auch jetzt eine freie Schwingung des Indikators in Bezug auf eine der beiden verschobenen Mittellagen statt, infolge der Dämpfung vollzieht sich der Uebergang von einer Schwingung zur nächsten jedoch nicht mehr in der wahren Mittellage.

In Figur 11, welche sich an Figur 9 anlehnt, zeigt sich dieses darin, dass die Schnittpunkte der ausgezogenen Kurve der fingirten Indikatorbewegung mit den punktiert gezeichneten Uebergangslinien nicht mehr in die Mittellinie MM fallen. Da an den



Figur 11.

Uebergangsstellen weder im Ausschlag a noch in der Geschwindigkeit da/dt ein Sprung eintreten darf, erhalten wir zur Bestimmung der Kurve die beiden Bedingungen, dass am Ende jedes der Stücke Ausschlag und Geschwindigkeit entgegengesetzt gleiche Werthe wie am Anfang haben müssen. Für eines der zu $M_+ M_+$ gehörigen Kurvenstücke darf bei passender Wahl des Anfangspunktes der Zeit geschrieben werden:

$$(282) \quad a^{(r)} = A^{(r)} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos 2\pi \frac{t}{T} - r.$$

t_1 und t_2 seien die Zeitpunkte, in welchen das Kurvenstück begonnen und beendet wird. Dann gilt die erste der folgenden Gleichungen:

$$(283) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{T}{4}, \quad \frac{t_2 + t_1}{2} = \Delta' t; \\ t_1 = \Delta' t - \frac{T}{4}; \quad t_2 = \Delta' t + \frac{T}{4}; \end{array} \right.$$

die zweite fügen wir zur Definition von $\Delta' t$ hinzu und erhalten in der dritten und der vierten uns weiterhin bequeme Darstellungen von t_1 und t_2 .

Zu t_1 und t_2 mögen die Werthe $a_1^{(r)}$, $a_2^{(r)}$, $(da^{(r)}/dt)_1$ und $(da^{(r)}/dt)_2$ gehören. Die vorhin formulirten Bedingungen zur Bestimmung der Indikatorcurve lauten dann:

$$(284) \quad a_1^{(r)} + a_2^{(r)} = 0, \quad \left(\frac{da^{(r)}}{dt}\right)_1 + \left(\frac{da^{(r)}}{dt}\right)_2 = 0$$

und ergeben mittels (282):

$$(285) \quad \operatorname{tg} 2\pi \frac{\Delta' t}{T} = - \frac{\frac{T}{2\pi\tau} \frac{e^{+\frac{T}{4\tau}} - e^{-\frac{T}{4\tau}}}{e^{+\frac{T}{4\tau}} + e^{-\frac{T}{4\tau}}} \operatorname{tg} 2\pi \frac{T}{4T}}{1 + \frac{T}{2\pi\tau} \frac{e^{+\frac{T}{4\tau}} - e^{-\frac{T}{4\tau}}}{e^{+\frac{T}{4\tau}} + e^{-\frac{T}{4\tau}}} \operatorname{tg} 2\pi \frac{T}{4T}},$$

$$(286) \quad A^{(r)} \frac{1}{2} \left\{ e^{-\frac{\Delta' t - \frac{T}{4}}{\tau}} \cos 2\pi \frac{\Delta' t - \frac{T}{4}}{T} + e^{-\frac{\Delta' t + \frac{T}{4}}{\tau}} \cos 2\pi \frac{\Delta' t + \frac{T}{4}}{T} \right\} = r.$$

Die erste Gleichung erlaubt die Berechnung von $\Delta' t$, die zweite giebt dann $A^{(r)}$. Für die Amplitude und die Geschwindigkeit an den Uebergangsstellen folgt:

$$(287) \quad \overline{a^{(r)}} = A^{(r)} \frac{1}{2} \left\{ e^{-\frac{\Delta' t - \frac{T}{4}}{\tau}} \cos 2\pi \frac{\Delta' t - \frac{T}{4}}{T} - e^{-\frac{\Delta' t + \frac{T}{4}}{\tau}} \cos 2\pi \frac{\Delta' t + \frac{T}{4}}{T} \right\},$$

$$(288) \quad \frac{T}{2\pi} \frac{d\overline{a^{(r)}}}{dt} = \mp A^{(r)} e^{-\frac{\Delta' t \mp \frac{T}{4}}{\tau}} \left\{ \frac{T}{2\pi\tau} \cos 2\pi \frac{\Delta' t \mp \frac{T}{4}}{T} + \frac{T}{T} \sin 2\pi \frac{\Delta' t \mp \frac{T}{4}}{T} \right\},$$

wobei in der zweiten Formel rechts nach Belieben die oberen oder die unteren Vorzeichen genommen werden können.

Die Bewegung des Indikators unter Mitwirkung der Reibung ergibt sich durch Superposition der so bestimmten fingirten Reibungsbewegung über die Bewegung:

$$(289) \quad a^{(0)} = S_a \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

welche ohne Reibung stattfinden würde. Die Ueberlegungen gestalten sich dabei ähnlich, wie diejenigen, welche an Figur 10 geknüpft wurden. Wir wollen wieder mit Δt die Zeitdifferenz der Uebergangszeiten von einer Abtheilung der fingirten Reibungsbewegung zur anderen gegenüber den Zeiten grösster Ausweichung in der reibungslosen Bewegung bezeichnen, sodass Δt die Phasenverfrühung der grössten Ausweichungen infolge der Reibung darstellt, dann ergibt sich zur Bestimmung von Δt wiederum die Formel

$$(290) \quad S_a \sin 2\pi \frac{\Delta t}{T} = \frac{T}{2\pi} \frac{d\overline{a^{(r)}}}{dt}.$$

Die Berechnung der Verkleinerung der grössten Ausschläge infolge der Reibung gestaltet sich aber dennoch complicirter wie früher, weil noch berücksichtigt

werden muss, dass die fingirte Reibungsbewegung nun nach (287) an den Uebergangsstellen von Null verschiedene Ausschläge besitzt. Bedeutet wiederum A den grössten Ausschlag bei Mitwirkung von Reibung, so folgt statt (278):

$$(291) \quad A = S_a \cos 2\pi \frac{\Delta t}{T} - \bar{a}.$$

Bei Störungsperioden, welche klein sind gegenüber der Eigenperiode, und bei nicht zu grosser Dämpfung — nicht stärkerer, als wir sie für die Praxis zweckmässig fanden, nähert sich nach diesen Formeln der Einfluss der Reibung bis auf Glieder höherer Ordnung in T/T_0 bezüglich $T/2\pi\tau$ dem ohne Dämpfung, sodass unter Ersatz der Eigenperiode T durch die reducirte Schwingungsperiode T_0 die einfachen Formeln des vorigen Artikels verwendet werden können. Man darf dann für jede Abtheilung der fingirten Reibungsbewegung statt (271) und (282) schreiben:

$$(292) \quad a^{(r)} = \pm r 2\pi^2 \left(\left(\frac{T}{4T_0} \right)^2 - \left(\frac{t}{T_0} \right)^2 \right),$$

wobei der Zeit t das Intervall von $-T/4$ bis $+T/4$ anzuweisen ist. Die grösste Ausweichung bei der Bewegung wird:

$$(293) \quad A^{(r)} = r \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2.$$

An den Uebergangsstellen ist

$$(294) \quad \bar{a}^{(r)} = 0, \quad \frac{T}{2\pi} \frac{d\bar{a}^{(r)}}{dt} = r \frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2$$

zu setzen. — Für die Verzögerung Δt des grössten Ausschlages des Indikators durch die Reibung erhalten wir entsprechend (277) die Formel:

$$(295) \quad S_a \sin 2\pi \frac{\Delta t}{T} = r \frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2,$$

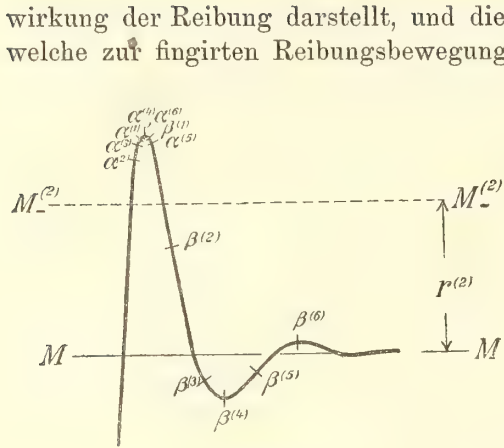
wobei S_a den grössten Ausschlag bei Abwesenheit der Reibung bedeutet. Die Verkleinerung des grössten Ausschlages durch die Reibung wird wie nach (278) durch

$$(296) \quad S_a^2 - A^2 = \left(r \frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \right)^2$$

bestimmt, wenn A den wirklichen grössten Ausschlag des Indikators angiebt. —

Nach (296) ist die Verkleinerung der Indikatorausschläge durch die Reibung bei kleinen Störungsperioden T auch im Falle der Dämpfung von der Grössenordnung $r(T/T_0)^2$.

Um eine Uebersicht über die sehr complicirten Verhältnisse bei grösseren Störungsperioden zu gewinnen, wo die eben zusammengestellten Formeln nicht mehr brauchbar sind, empfiehlt es sich, die Ueberlegungen an eine Figur, wie No. 12 zu knüpfen, welche die Eigenschwingungen des Instrumentes ohne Mit-



Figur 12.

wirkung der Reibung darstellt, und diejenigen Stücke der Kurve herauszusuchen, welche zu fingirten Reibungsbewegung gehören. Als Dämpfungsverhältniss ist in gezeichneten Falle 5:1 genommen worden. — Jedes zu einer fingirten Reibungsbewegung gehörige Stück, z. B. $\alpha^{(1)} \beta^{(1)}$, $\alpha^{(2)} \beta^{(2)}$, $\alpha^{(3)} \beta^{(3)}$, ... ist dadurch charakterisirt, dass an beiden Enden die gleiche Geschwindigkeit herrschen muss. Der zeitliche Abstand der Enden giebt jedesmal die halbe Störungsperiode, $T/2$ an. Das arithmetische Mittel der Ausschläge der beiden Enden muss gleich dem maximalen Reibungsausschlag r sein, das heisst, die beiden Enden müssen von einer der

verschobenen Mittellinien (der *nicht* zugehörigen, M_- in den Fällen der Figur) gleich weit abstehen. Die verschobene Mittellinie erhält hiernach in der Figur für jedes andere Kurvenstück eine andere Lage. Soll die Figur also wirklich ein Indikatordiagramm bei Abwesenheit der Reibung wiedergeben, so müsste für jede andere Störungsperiode eine andere Intensität der Reibung vorausgesetzt werden. Will man die letztere, also den maximalen Reibungsausschlag, festhalten, so kann angenommen werden, dass die Figur das Indikatordiagramm nicht direkt, sondern in variirten Querdimensionen darstellt.

In der Figur gehören $\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}$ zu $T = \frac{1}{10} T$, $\alpha^{(2)}, \beta^{(2)}$ zu $T = T/2$, $\alpha^{(4)}, \beta^{(4)}$ zu $T = T$, $\alpha^{(6)}, \beta^{(6)}$ zu $T = 2T$. Für $T = T/2$, also $T/4T = 45/360$ ist, da wir $\varepsilon:1 = 5:1$, $T/2\pi\tau = 0,512$ annehmen, $T/4\tau = 0,40$, $\Delta t/T = -6,2/360$, $\Delta t/\tau = 0,055$, $a_1^{(r)} = 0,988 A^{(r)} - r$, $a_2^{(r)} = 0,552 A^{(r)} - r$, $A^{(r)} = 1,30 r$, $\bar{a}^{(r)} = 0,28 r$.

Man wird der Figur leicht entnehmen, dass bei mittlerer Dämpfung für nicht zu kleine Störungsperioden T die Amplituden der fingirten Reibungsbewegung von der Grössenordnung des maximalen Reibungsausschlages r sind, dass also auch die Veränderung der Indikatorbewegung durch die Reibung von dieser Grössenordnung ist. Für sehr kleine Störungsperioden ist nach (293) der Einfluss geringer. —

§ 8. Einwirkung der Reibung am Schreibstift.

59. *Reibung am Schreibstift.* Bei der Reibung am Schreibstift, der bei mechanischer Registrirung den Indikator darstellt, kommt als charakteristisches Element die Bewegung der Schreibfläche mit in Wirksamkeit. Wir wollen ihre Geschwindigkeit mit v , die in der Schwingungsperiode T oder T_0 zurückgelegte

Strecke mit w oder w_0 bezeichnen. Es sei ferner x die Strecke, um welche die Schreibtafel von einem beliebig gewählten Zeitpunkt ab vorgerückt ist. Nach diesen Festsetzungen gilt:

$$(297) \quad w = vT, \quad w_0 = vT_0, \quad x = x_0 + vt.$$

Figur 13 stelle ein Indikatordiagramm vor, MM sei die Mittellinie, die Schreibfläche bewege sich nach *links*.

a) Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, in welchem der Indikator geradlinig und senkrecht zur Mittellinie MM hin- und hergeht.

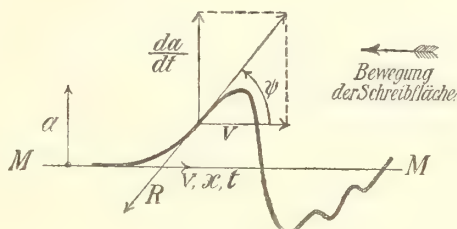
In Wirklichkeit bewegen sich Schreibfläche und Schreibstift, da es aber nur auf die Relativbewegung ankommt, ist es erlaubt und bequemer, in der Vorstellung die ganze Bewegung dem Schreibstift zu übertragen, also zum Beispiel für unsere Figur anzunehmen, dass er sich — ausser den Ausschlägen entsprechend auf und ab — der Registrierung entsprechend nach *rechts* bewege. ψ sei der Winkel seiner (Relativ-)Bewegung gegen die Mittellinie MM . Es ist dann:

$$(298) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{1}{v} \frac{da}{dt}.$$

Die Reibung giebt eine der Relativbewegung entgegengesetzte Kraft. Da die Geschwindigkeit niemals 0 werden kann, haben wir den früheren Festsetzungen (in Artikel 53) entsprechend anzunehmen, dass die Intensität der Kraft stets unverändert den Maximalwerth, den wir R' nennen wollen, besitze. Als treibende Kraft für den Indikator ergibt sich hiernach bei Anblick der Figur:

$$(299) \quad Q^{(R)} = -R' \sin \psi = -\frac{R'}{v} \frac{da}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{v} \frac{da}{dt}\right)^2}}.$$

Bei sehr kleinen Indikatorgeschwindigkeiten da/dt darf die Wurzel in dem letzten Gliede der Gleichung (299) durch 1 ersetzt werden, $Q^{(R)}$ erscheint dann proportional mit da/dt . Wird da/dt grösser und grösser, so nimmt im Vergleich damit die Indikatorkraft $Q^{(R)}$ immer langsamer zu und nähert sich schliesslich, wenn die Indikatorgeschwindigkeit da/dt weit über die Registrirgeschwindigkeit v hinauswächst, dem Maximalwerth R' an. Hieraus folgt, dass die Reibung am Schreibstift in ihrer Einwirkung auf die Indikatorbewegungen zwischen der Dämpfung und der Reibung im Gehänge steht. Sie zeigt um so genauer das Verhalten der Dämpfung, je kleiner die Indikatorgeschwindigkeit im Verhältniss zur Registrirgeschwindigkeit ist, und um so genauer das Verhalten der Reibung im Gehänge, je mehr die Indikatorgeschwindigkeit die Registrirgeschwindigkeit übertrifft. —

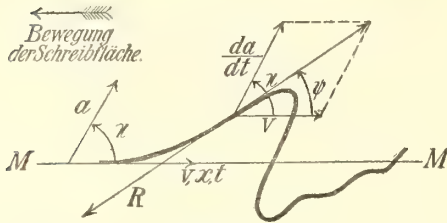


Figur 13.

Die bisherigen Schlussfolgerungen beziehen sich auf den Fall der geradlinigen und zur Mittellinie senkrechten Bewegung des Indikators. Wir wollen nun der Reihe nach untersuchen, wie sie bei immer complicirteren Bewegungsformen des Indikators zu ändern sind.

b) Der zunächst in Betracht kommende Fall ist derjenige, *in welchem die Indikatorbahn noch geradlinig, aber gegen die Mittellinie geneigt ist.*

χ sei der Winkel, den die Richtung der positiven Indikatorbewegung bei ruhend gedachter Schreibfläche gegen die Mittellinie bildet, ψ wiederum der entsprechende Winkel für die jeweilige Relativbewegung des Indikators (Figur 14). Es ist dann



Figur 14.

$$(300) \quad \operatorname{ctg} \psi = \frac{1}{\sin \chi} \frac{v}{\frac{da}{dt}} + \operatorname{ctg} \chi,$$

$$(301) \quad Q^{(R)} = -R' \cos(\chi - \psi). -$$

Ist da/dt sehr klein gegenüber v ,

so darf

$$(302) \quad \sin \psi = \sin \chi \frac{1}{v} \frac{da}{dt}, \quad \cos \psi = 1,$$

also

$$(303) \quad Q^{(R)} = -R' \cos \chi - \left(\frac{R'}{v} \sin^2 \chi \right) \frac{da}{dt}$$

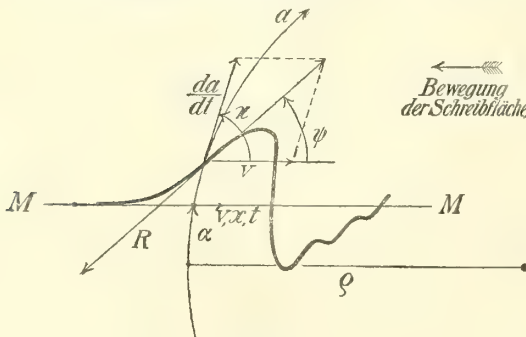
gesetzt werden. *Die Reibung im Gehänge entspricht also nun bei sehr kleinen Indikatorgeschwindigkeiten einer konstanten ablenkenden Kraft und einer Dämpfung.*

Ist andererseits da/dt sehr gross gegenüber v , so erhalten wir

$$(304) \quad \psi = \chi \quad \text{oder} \quad = \chi - \pi, \quad Q^{(R)} = \mp R';$$

bei sehr grossen Indikatorgeschwindigkeiten ergibt sich also wieder die gleiche Wirkung wie bei Reibung im Gehänge.

c) Drittens untersuchen wir den Fall einer kreisförmigen Indikatorbahn (Figur 15).



Figur 15.

Am einfachsten wäre es, wenn der Mittelpunkt der Indikatorbahn auf der Mittellinie des Diagramms läge, die Bahn die Mittellinie also senkrecht schnitte. Es scheint aber nicht nöthig diesen Fall noch besonders auszuzeichnen; wir wollen vielmehr sogleich den Fall einer „abgelenkten“ Mittellage betrachten und die „Ablenkung“, das heisst

den (Bogen-)Abstand der Mittellage von der Lage, in welcher die Bewegungsrichtung senkrecht zur Registrirrichtung ist, mit α bezeichnen. Der Ausschlag a werde wie gewöhnlich von der Mittellage ab gerechnet; ψ möge dieselbe, χ die analoge, aus der Figur ersichtliche, Bedeutung wie vorhin haben; χ_0 gehöre zu $a = 0$. Es variirt dann χ mit a und zwar ist

$$(305) \quad \chi = \frac{\pi}{2} \mp \frac{\alpha}{\rho} \mp \frac{a}{\rho} = \chi_0 \mp \frac{a}{\rho}.$$

Das obere oder untere Vorzeichen gilt, jenachdem die Registrirbewegung der Schreibfläche in der Richtung vom Mittelpunkt der Indikatorbahn zum Schreibstift, wie in der Figur, oder umgekehrt erfolgt. Zur Bestimmung der Kraft $Q^{(R)}$, welche der Indikator erfährt, erhalten wir wieder, wie im Falle b , die Formeln

$$(306) \quad \text{ctg } \psi = \frac{1}{\sin \chi} \frac{v}{\frac{da}{dt}} + \text{ctg } \chi, \quad Q^{(R)} = -R' \cos(\chi - \psi).$$

Bei sehr kleinen Indikatorgeschwindigkeiten ergibt sich wiederum die Gleichung (303), wobei aber zu beachten ist, dass χ mit a variirt. Um zu einfachen Schlussfolgerungen zu gelangen, setzen wir auch die Indikatorausschläge selbst als klein voraus, ersetzen in (303) demgemäss $\cos \chi$ durch $\cos \chi_0 \pm (a/\rho) \sin \chi_0$, $\sin^2 \chi$ durch $\sin^2 \chi_0$ und erhalten

$$(307) \quad Q^{(R)} = \mp \left(\frac{R'}{\rho} \sin \chi_0 \right) a - R' \cos \chi_0 - \left(\frac{R'}{v} \sin^2 \chi_0 \right) \frac{da}{dt}.$$

Bei (gegenüber der Registrirgeschwindigkeit v) sehr kleinen Indikatorgeschwindigkeiten da/dt und (gegenüber dem Radius der Indikatorbahn) sehr kleinen Indikatorausschlägen a entspricht die Reibung am Schreibstift einer dem Indikatorausschlag proportionalen stabilisirenden oder astasirenden Kraft, einer konstanten ablenkenden Kraft und einer mit der Indikatorgeschwindigkeit proportionalen dämpfenden Kraft.

Stabilisirung oder Astasirung tritt ein, jenachdem die Registrirbewegung der Schreibfläche in der Richtung vom Mittelpunkt der Indikatorbahn zum Schreibstift (wie in der Figur) oder umgekehrt erfolgt.

Bei (gegenüber der Registrirgeschwindigkeit v) sehr grossen Indikatorgeschwindigkeiten da/dt ergibt sich wieder

$$(308) \quad Q^{(R)} = \mp R',$$

also die gleiche Wirkung wie bei Reibung im Gehänge.

d) Im allgemeinsten Fall muss nicht nur angenommen werden, dass die Bahn beliebig gekrümmt ist, sondern auch, dass als Ausschlag a eine beliebige Funktion der Bogenlänge zu rechnen ist. Es scheint unnöthig, auf die dann eintretenden Komplikationen weiter einzugehen, und genügend, darauf hinzuweisen, dass doch auch dann für kleine Stückchen der Bahn Kreisform und lineare Verknüpfung zwischen Bogenlänge und Ausschlag angenommen werden kann, sodass

bei hinreichend kleinen Ausschlägen sowohl für sehr kleine als für sehr grosse Indikatorgeschwindigkeiten die Sätze unter c) gültig bleiben. —

Ueberblicken wir im Ganzen die Ueberlegungen dieses Artikels, so kann geschlossen werden, dass der Dämpfung gegenüber die Reibung am Schreibstift mit der Reibung im Gehänge den Uebelstand theilt, die Nachwirkung grosser Störungen nicht genügend stark zu beseitigen. Den schlimmsten Fehler der Reibung im Gehänge, den, die Aufzeichnungen sehr kleiner Störungen ganz zu unterdrücken, theilt sie nicht, indem sie sich solchen gegenüber wie eine Dämpfung verhält. Freilich zeigt die Erfahrung, dass manchmal sehr hohe, in der Praxis nicht erfüllbare Anforderungen in Betreff der Verminderung der Reibung am Schreibstift gestellt werden müssen, wenn die Beeinträchtigung der Aufzeichnungen kleiner Störungen nicht doch empfindlich hoch sein soll.

60. *Indikatorgleichung bei Reibung am Schreibstift.* In die Indikatorgleichung geht rechts Q/m ein, wobei m die resultirende Masse ist, die Gleichung erhält also im Falle (a) einer geradlinigen, zur Registrirrichtung senkrechten Indikatorbahn (Figur 13) die Form:

$$(309) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} \mp \frac{R}{m} - \frac{R'}{m} \sin \psi + \text{Störungsglieder} \\ &= -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} \mp \frac{R}{m} - \frac{R'}{mv} \frac{da}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{v} \frac{da}{dt}\right)^2}} + \text{Störungsglieder.} \end{aligned} \right.$$

R ist auf die Reibung im Gehänge zu beziehen. Wie hier im einfachsten Falle, so geht allgemein die Indikatorgeschwindigkeit bei Reibung im Gehänge in transcendenten Weise in die Indikatorgleichung ein. *Das Prinzip der Superposition wird hiernach wie bei der Reibung im Gehänge verletzt.* Es kann wiederum gerettet werden, wenn man die Reibung als äussere Störung ansieht.

Unnöthig scheint, noch für die Fälle (b), (c), (d) die Indikatorgleichung besonders hinzuschreiben, wichtig aber ist für uns, zu untersuchen, welche Formen die Indikatorgleichung in den schon vorhin ausgezeichneten Fällen sehr geringfügiger und sehr heftiger Störungen annimmt. Dies soll im Folgenden unter A und B geschehen.

A. *Die Indikatorausschläge sind im Verhältniss zur Registrirgeschwindigkeit so geringfügig, dass der Indikator in der Relativbewegung zur Schreibfläche stets nur mit geringer Neigung gegen die Registrirrichtung fortschreitet.*

Wir wollen hier sogleich den allgemeinsten Fall beliebig geformter Indikatorbahn annehmen, und dürfen dann gemäss dem unter (d) und (c) im vorigen Artikel Gesagten und mit Benutzung von (307) schreiben:

$$(310) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} &= -\frac{R'}{m} \cos \chi_0 - \left(\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \pm \frac{R'}{Qm} \sin \chi_0 \right) a - \left(\frac{2}{\tau} + \frac{R'}{vm} \sin^2 \chi_0 \right) \frac{da}{dt} \\ &\quad \mp \frac{R}{m} + \text{Störungsglieder.} \end{aligned} \right.$$

ϱ ist der Krümmungsradius der Indikatorbahn in der Mittellage des Indikators, χ_0 für diese der Winkel der positiven Richtung in der Indikatorbahn gegen die Richtung, in welcher im Diagramm die Zeit fortschreitet, $\chi = \chi_0 \mp a/\varrho$ der entsprechende Winkel beim Ausschlag a . Hier und in den Faktoren, welche R' enthalten, ist das obere Zeichen zu nehmen, wenn der Krümmungsmittelpunkt gegenüber der Bahn auf der Seite liegt, von welcher die Schreibfläche sich her bewegt — wie in Figur 15 —, andernfalls das untere Zeichen. Vor R'/m gilt das obere oder untere Zeichen, jenachdem da/dt positiv oder negativ ist.

Bedeutet T'_0 den durch die Reibung am Schreibstift veränderten Werth der reducirten Schwingungsdauer, so ist nach (310):

$$(311) \quad \left(\frac{2\pi}{T'_0}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \pm \frac{R'}{\varrho m} \sin \chi_0 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \left(1 \pm \frac{r'}{\varrho} \sin \chi_0\right).$$

r' bedeutet hier den maximalen Reibungsausschlag, der zu R' gehören würde, wenn die Reibung am Schreibstift ebenso wirkte, wie die Reibung im Gehänge:

$$(312) \quad r' = \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 \frac{R'}{m}.$$

Ist die Veränderung von T_0 infolge der Reibung am Schreibstift nur gering, so kann man nach (311) auch schreiben:

$$(313) \quad T'_0 = T_0 \left(1 \mp \frac{1}{2} \frac{r'}{\varrho} \sin \chi_0\right).$$

Für die konstante Ablenkung infolge der Reibung am Schreibstift ergibt sich nach (310) die Grösse

$$(314) \quad a' = -\frac{\frac{R'}{m} \cos \chi_0}{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \pm \frac{R'}{\varrho m} \sin \chi_0} = -\frac{r' \cos \chi_0}{1 \pm \frac{r'}{\varrho} \sin \chi_0},$$

wobei es meist erlaubt sein wird, einfacher

$$(315) \quad a' = -r' \cos \chi_0$$

zu schreiben.

Aenderung der reducirten Schwingungsdauer und konstante Ablenkung werden in der Regel wenig bedeutungsvoll sein. Von grosser Wichtigkeit aber ist die Verstärkung der Dämpfung, die wir nun untersuchen wollen, denn in ihr beruht ja die Verminderung der Empfindlichkeit des Seismographen gegen sehr kleine Störungen.

Als Relaxationszeit tritt nach (310) anstelle von τ eine durch die Gleichung

$$(316) \quad \frac{1}{\tau'} = \frac{1}{\tau} + \frac{R'}{2mv} \sin^2 \chi_0 = \frac{1}{\tau} + \frac{2\pi^2}{T_0} \frac{r'}{w_0} \sin^2 \chi_0$$

bestimmte Zeit τ' .

Je grösser die Relaxationszeit ist, um so kleiner ist die Dämpfung; wir erkennen hiernach aus (316), dass die Dämpfung infolge der Reibung am Schreibstift mit wachsender Registrirgeschwindigkeit abnimmt.

In die Rechnungen über den Einfluss der Dämpfung geht vornehmlich der Ausdruck $T_0/2\pi\tau$ ein. Der Ersatzwerth bei Reibung am Schreibstift ist:

$$(317) \quad \frac{T_0'}{2\pi\tau'} = \frac{T_0'}{2\pi\tau} + \frac{T_0'}{4\pi} \frac{R'}{mv} \sin^2 \chi_0 = \frac{T_0'}{2\pi\tau} + \pi \frac{T_0'}{T_0} \frac{r'}{w_0} \sin^2 \chi_0.$$

Die Eigenschwingungen des Seismographen werden aperiodisch, wenn $T_0'/2\pi\tau'$ den Werth 1 erreicht. Wird die Mittellinie von der Bahnkurve senkrecht geschnitten, und ist keine besondere Dämpfung vorhanden, so tritt dieses ein für

$$(318) \quad R' = \frac{4\pi mv}{T_0'}, \quad r' = \frac{w_0 T_0'}{\pi T_0'}$$

Findet auch abgesehen von der Reibung am Schreibstift Dämpfung statt, so tritt die Aperiodicität schon bei kleineren Werthen der Reibungskraft R' , bezüglich des zugehörigen maximalen Reibungsauschlages r' ein. Ist zum Beispiel ohne Mitwirkung der Reibung am Schreibstift das Dämpfungsverhältniss 5 : 1, also nach der Tabelle auf Seite 80 $T_0'/2\pi\tau = 0,456$, so ergibt sich Aperiodicität schon bei einer Intensität der Reibung entsprechend:

$$R' = 0,544 \cdot \frac{4\pi mv}{T_0'}, \quad r' = \frac{0,544}{\pi} w_0 = 0,173 w_0.$$

Von einer etwaigen Aenderung der reducirten Schwingungsperiode durch die Reibung ist hier abgesehen.

B. Die Indikatorbewegungen finden im Verhältniss zur Registrirgeschwindigkeit so heftig statt, dass der Indikator in seiner Relativbewegung zur Schreibfläche während des Haupttheiles der Zeit nahezu in derjenigen Richtung sich bewegt, welche sich bei ruhender Schreibfläche ergeben würde. Wir ersetzen dann entsprechend den Ueberlegungen des vorigen Artikels $Q^{(R)}$ durch $\mp R'$ und erhalten als Indikatorgleichung

$$(319) \quad \begin{cases} \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} \mp \frac{R+R'}{m} + \text{Störungsglieder} \\ \quad \quad \quad = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 (a \pm r \pm r') - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} + \text{Störungsglieder;} \end{cases}$$

wobei von den doppelten Vorzeichen das obere oder untere gilt, jenachdem da/dt positiv oder negativ ist. Die Reibung am Schreibstift nimmt ganz das Verhalten der Reibung am Gehänge an.

§ 9. Bestimmung der Konstanten.

61. *Direkte Bestimmung der Konstanten eines Horizontalseismographen ohne Reibung.* Wir wollen zunächst voraussetzen, dass die Reibung nicht merklich ist. Dann erfüllt der Indikatorausschlag a die Gleichung:

$$(320) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} - V^{(s)} \left(\frac{d^2 \sigma}{dt^2} - g i_s - \Delta g_s \right),$$

wenn mit s die (horizontale) Arbeitsrichtung des Seismographen bezeichnet wird. σ ist seine Verschiebung $\parallel s$, i_s die Neigung parallel der zugehörigen Vertikalenebene, Δg_s die ablenkende, parallel s gerichtete Komponente der Schwerkraft.

Direkt beobachtbar ist zunächst das Verhältniss $\varepsilon : 1$, in welchem wegen der Dämpfung die aufeinanderfolgenden grössten Ausschläge bei Eigenschwingungen abnehmen. Dieses *Dämpfungsverhältniss* liefert mittels der nach Artikel 47 gültigen Formeln:

$$(321) \quad \varepsilon = e^{\frac{T}{2\tau}}, \quad \frac{T}{2\pi\tau} = \frac{1}{\pi} \log \text{nat } \varepsilon = 0,733 \log \varepsilon,$$

wobei $\log \varepsilon$ den gewöhnlichen Logarithmus bezeichnet, den Werth von $T/2\pi\tau$. Wird überdies die *thatsächliche Schwingungsperiode* T beobachtet, so ist es möglich, die *Relaxationszeit* τ zu bestimmen, ferner mittels der Gleichung

$$(322) \quad \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{T}{2\pi\tau}\right)^2$$

die *reducirte Schwingungsperiode* T_0 .

Bei *starker Dämpfung* ist es schwierig, T mit Schärfe zu messen, und daher vortheilhaft, wenn Vorsorge getroffen ist, die Dämpfung ohne Aenderung von T_0 bis auf einen kleinen Rest ausschalten zu können. Man geht dann den angegebenen Weg bei verminderter Dämpfung und bestimmt so T_0 , schaltet darauf die volle Dämpfung ein und misst das Dämpfungsverhältniss $\varepsilon : 1$, welches mittels (321) und (322) die Relaxationszeit τ ergibt. (Tabelle auf Seite 80.)

Es mag noch darauf hingewiesen werden, dass man gut thun wird, mit der Berechnung von τ zugleich die von $T_0/2\pi\tau$ zu verbinden, da gerade dieser Werth vornehmlich in die Rechnungen eingeht.

Mit T_0 hängt die „äquivalente Pendellänge“ L durch die Beziehung

$$(323) \quad \frac{g}{L} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$$

zusammen. Bei der Berechnung, wird es in den meisten Fällen durchaus genügen, für die Fallbeschleunigung g den unter 45° Breite im Meeresspiegel

gültigen Werth

$$(324) \quad g = 9,81 \text{ (Meter, Sekunde)}$$

anzunehmen, der nirgends grössere Fehler als $\frac{1}{3}\%$ ergibt.

T_0, L, τ, T könnte man als „*innere Konstanten*“ des Seismographen bezeichnen, wenn man ihnen als „*äussere Konstanten*“ die *Indikatorvergrößerung* $V^{(s)}$, bezüglich die damit durch

$$(325) \quad J^{(s)} = LV^{(s)}$$

zusammenhängende *äquivalente Indikatorlänge* $J^{(s)}$ gegenüber stellt.

Die äusseren Konstanten ergeben sich am einfachsten durch Beobachtung der *Neigungsempfindlichkeit*. Bedeutet a den zur dauernden Neigung i_s gehörigen dauernden Ausschlag, so ist

$$(326) \quad \frac{a}{i_s} = J^{(s)} = LV^{(s)}.$$

i_s ist hier in Bogenmaass zu messen. — Benutzt man zur Herstellung von i_s zum Beispiel eine Stellschraube des Apparates von der Ganghöhe H , deren Kopf in N Theile getheilt ist, und die man um n Theile dreht, so ist

$$(327) \quad i_s = \frac{n}{N} \frac{H}{D} \sin \varphi,$$

wenn D den Abstand die Schraubenspitze von der Drehaxe und φ den Winkel zwischen der Drehaxe und der Arbeitsrichtung s bedeutet. Steht die Drehaxe auf der Arbeitsrichtung senkrecht, so geht (327) über in

$$(327') \quad i_s = \frac{n}{N} \frac{H}{D}.$$

Es ist von einigem praktischen Interesse, zu beachten, dass diese einfache Formel sich auch dann ergibt, wenn das Instrument auf drei Schrauben in den Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks steht, dessen Grundlinie parallel der Arbeitsrichtung s ist, sofern man eine der Schrauben an der Grundlinie zur Erzeugung der Neigung i_s benutzt und unter D die Länge der Grundlinie versteht.

Der *Ausschlag für eine Bogensekunde* ist $J^{(s)}/206000$.

62. *Indirekte Bestimmung der äusseren Konstanten eines Horizontalseismographen; Einleitung.* Ist es nicht möglich, die Neigungsempfindlichkeit zu messen, so ist, da wohl nur ausnahmsweise die Vergrößerung $V^{(s)}$ sehr kleiner Erschütterungen direkt bestimmt werden kann, die Feststellung der äusseren Konstanten erheblich umständlicher. *Es wird nöthig, auf die besondere Art der Konstruktion des Seismographen Rücksicht zu nehmen, und gemäss dieser $V^{(s)}$ oder $J^{(s)}$ zu berechnen.*

Manchmal lässt sich die *Empfindlichkeit gegen sehr schnelle Erschütterungen* leicht angeben, wie zum Beispiel bei den Horizontalpendeln einfachster Art. Man beginnt hier mit der Messung der Schwingungsperiode des eigentlichen Pendels unter der Einwirkung der Schwerkraft, wenn die Schwingungsaxe hori-

zontal gestellt ist. Bedeutet T' die gefundene Periode, so liegt der Schwingungsmittelpunkt um die Strecke

$$(328) \quad L' = g \left(\frac{T'}{2\pi} \right)^2$$

von der Drehaxe entfernt. Bedenkt man, dass in dem für die Registrirung vorbereiteten Instrument bei sehr schnellen Verschiebungen dieser Punkt in Ruhe bleibt, so wird es sogleich möglich, aus den Abmessungen des Instrumentes und seiner Stellung gegenüber dem Registrirapparat $V^{(s)}$ zu berechnen. — Ist eine Dämpfung vorhanden, und wird sie bei der Bestimmung von L' nicht in ordnungsmässiger Weise verwandt, so giebt die Methode allerdings nur dann brauchbare Resultate, wenn die Dämpfung nicht merklich T_0 ändert. Darüber wird eine besondere Untersuchung entscheiden müssen.

Sobald die Konstruktion Komplikationen zeigt, empfiehlt es sich, die durch die allgemeine Theorie (Artikel 34) gebotene Formel

$$(329) \quad V^{(s)} = \frac{1}{m} \int d\mu \left[\frac{\sigma'}{a} \right]$$

zu benutzen. Es bedeutet hierin m die resultirende Masse des Gehänges und ist die Summe über alle Massenelemente $d\mu$ des Gehänges auszudehnen, jedes multiplicirt mit der zum Ausschlag a gehörigen Verschiebung σ' relativ zum Gestell in der Richtung s und dividirt durch a .

63. *Bestimmung der resultirenden Masse.* Die resultirende Masse kann entweder durch Rechnung oder experimentell bestimmt werden. Im ersteren Falle kann man die allgemeine Formel

$$(330) \quad m = \int d\mu \left[\frac{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}{a^2} \right],$$

worin $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$ das Quadrat der zu a gehörigen Verschiebung von $d\mu$ gegen das Gestell bedeutet, meist in mannigfacher Weise bequemer gestalten.

In der Regel wird das Gehänge aus einer Anzahl von *festen Einzeltheilen* bestehen, deren jeder sich relativ zum Gestell um eine bestimmt gegebene Axe dreht. Es möge in einem solchen Falle l der Abstand irgend eines zweckmässig gewählten Punktes eines solchen Theiles von seiner Drehaxe, a die zu a gehörige Verschiebung des Punktes sein, M die ganze Masse des Theiles, p der Abstand seines Schwerpunktes von der Axe, Θ das Trägheitsmoment um eine zur Drehaxe parallelen Axe durch den Schwerpunkt. Dann ist

$$(331) \quad \left(\frac{p}{l} \right)^2 M + \frac{1}{l^2} \Theta = \frac{1}{l^2} (p^2 M + \Theta)$$

zunächst seine resultirende Masse im ausgewählten Punkt und also

$$(332) \quad \left[\frac{\alpha}{a} \right]^2 \frac{1}{l^2} (p^2 M + \Theta)$$

sein Antheil an der resultirenden Masse m im Indikator.

M wird im Allgemeinen durch direkte Wägung festgestellt werden können. p ergibt sich leicht, wenn man den Theil auf Schneiden auflegt oder an Fäden aufhängt.

Lässt sich die Drehaxe des Theiles horizontal lagern, und kann man ihn dann unter der alleinigen Einwirkung der Schwerkraft schwingen lassen, so ist

$$(333) \quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{gpM}{p^2M + \Theta},$$

wenn T die Schwingungsperiode bedeutet, man erhält also bei schon bekanntem Werth von pM sogleich $p^2M + \Theta$.

Kann man die Drehaxe des Theiles vertikal stellen, so empfiehlt sich folgende Methode zur Bestimmung von $p^2M + \Theta$. Man setzt eine Federkraft, welche den Theil in eine bestimmte Lage zu führen strebt, wenn eine solche noch nicht vorhanden sein sollte, in passender Weise hinzu, ohne die Massen merklich zu vergrössern. Die Schwingungsperiode sei T . Es ist dann

$$(334) \quad \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{p^2M + \Theta}{F},$$

wobei F von der Intensität der Federkraft abhängt. Im Abstände p' von der Drehaxe werde nun eine Masse M' mit dem Trägheitsmoment Θ' in Bezug auf die eigene Schwerpunktsaxe hinzugefügt und die sich ergebende Schwingungsperiode T' ebenfalls beobachtet. Es ist

$$(335) \quad \left(\frac{T'}{2\pi}\right)^2 = \frac{p^2M + \Theta + p'^2M' + \Theta'}{F},$$

also folgt:

$$(336) \quad \frac{T^2}{T'^2 - T^2} = \frac{p^2M + \Theta}{p'^2M' + \Theta'},$$

und es kann $p^2M + \Theta$ nun berechnet werden, wenn $p'^2M' + \Theta'$ bekannt ist. Das letztere ist in üblicher Weise zu erreichen, indem man das Zusatzgewicht (M') zweckmässig wählt.

Eine der zuletzt beschriebenen ähnliche Methode lässt sich manchmal mit sehr grossem Vortheil anwenden, um die ganze resultirende Masse m mit einem Mal zu bestimmen. Man fügt zu diesem Zweck an irgend einem der beweglichen Theile ohne Veränderung der zurücktreibenden Kräfte eine Masse so hinzu, dass die Vermehrung m' der resultirenden Masse m des Gehänges (mittels der Formel 332) leicht berechnet werden kann, und beobachtet die Vergrösserung der Schwingungsperiode. Ist T'_0 die vergrösserte reducirte Schwingungsperiode, so gilt die Beziehung

$$(337) \quad m : m + m' = T_0'^2 : T_0'^2,$$

welche m zu berechnen erlaubt. —

64. *Indirekte Bestimmung der äusseren Konstanten eines Horizontalseismographen; Einzelnes.* Auch für $\int d\mu [\sigma'/a]$ wird man leicht Vereinfachungen der Rechnung finden. Ein jeder der vorhin betrachteten drehbaren Theile liefert zu $\int d\mu [\sigma'/a]$ den Antheil

$$M \left[\frac{\sigma'}{a} \right],$$

wobei σ' die zum Ausschlag a gehörige Verschiebung des Schwerpunktes parallel der Arbeitsrichtung s bedeutet. —

Zuweilen ist es möglich und bequem die *äusseren Konstanten* $V^{(s)}$, $J^{(s)}$ durch *experimentelle Bestimmung der Empfindlichkeit gegen Schwereänderungen festzustellen.* Zwar hat man über die Schwerekomponente Δg_s , auf die es hier ankommt, keine Gewalt, man kann sie aber im Experiment ersetzen durch Kräfte anderer Art, die man auf die Massen des Gehänges in passender Weise einwirken lässt. Es geschieht das zum Beispiel, wenn man an jedem Massentheil M des Gehänges im Schwerpunkt eine Kraft von der Intensität

$$(338) \quad M \Delta g_s$$

parallel s wirken lässt. Ist der Ausschlag, den man dann erhält a , so folgt nach der Indikatorgleichung (320)

$$(339) \quad V^{(s)} = \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 \frac{a}{\Delta g_s}, \quad J^{(s)} = L V^{(s)} = \frac{g}{\Delta g_s} a. \quad -$$

Die erforderliche Kraft $M \Delta g_s$ entspricht einem Zug, welcher der Schwerkraft entgegen eine Masse

$$(340) \quad \Delta M = M \frac{\Delta g_s}{g}$$

zu tragen vermag. — Bezeichnen wir das für das Experiment gewählte Verhältniss $\Delta g_s/g$ mit i_s :

$$(341) \quad i_s = \frac{\Delta g_s}{g} = \frac{\Delta M}{M},$$

so wird

$$(342) \quad J^{(s)} = \frac{a}{i_s},$$

wodurch in leicht übersehbarer Weise die Bedeutung des Experimentes auch als eine indirekte Bestimmung der Neigungsempfindlichkeit dargethan wird. —

Bei der Ausführung der Messungen wird man sich für einen gewissen Werth i_s des Verhältnisses $\Delta g_s/g$ entscheiden, unter Verwerthung von (340) die Züge parallel s entsprechend reguliren, den Indikatorausschlag a beobachten und mittels (342) $J^{(s)}$ berechnen. —

Der Theorie wird in erster Linie entsprochen, wenn die Züge $M \Delta g_s = \Delta M \cdot g$ in den Schwerpunkten der Massen M wirken. Statt dessen kann man sie in beliebig anderer Weise angreifen lassen, sofern man dafür sorgt, dass die näm-

liche Indikatorresultante hervorgeht. Ist zum Beispiel für einen drehbaren Theil des Gehänges mit der Masse M der Abstand des Schwerpunktes von der Axe $= p$, so kann $M \Delta g = \Delta M \cdot g$ durch die Kraft $\Delta M' \cdot g = \Delta M \cdot (p/l)g$ im Abstände l in gleicher Richtung von der Axe ersetzt werden. — Lässt sich der Theil vom übrigen Mechanismus absondern und mit horizontaler Axe lagern, und ist im Abstände l von der Axe ein Zug $= M' \cdot g$, das heisst ein Zug, welcher der Schwere der Masse M' entspricht, nöthig, um den Schwerpunkt von M in gleicher Höhe mit der Drehaxe zu halten, so ist $M' = Mp/l$, also $\Delta M'/M' = i$. Die Rücksicht hierauf wird bei der experimentellen Feststellung von M' oftmals in willkommener Weise die Bestimmung des Schwerpunktes von M ersetzen.

Bei den mechanisch schreibenden Scismographen mit erheblicher Vergrößerung hat der Schreibarm zunächst auf die resultirende Masse und damit auch auf die äusseren Konstanten einen sehr grossen, leicht zu unterschätzenden Einfluss. Für mein astatiches Pendel ist bei 200-facher Vergrößerung der Bewegungen des Schwerpunktes des 1200 Kilogramm-Gewichtes die resultirende Masse des letzteren, im Schwerpunkt vereinigt gedacht, doch nur

$$\frac{1200}{200 \cdot 200} \text{ Kilogramm} = 30 \text{ Gramm.}$$

Wäre also der den Schreibstift führende Arm auch nur so schwer, dass er am Schreibstift einer Masse von 30 Gramm entspräche, so würde er nach (329) die Indikatorvergrößerung doch schon auf etwa die Hälfte reduciren. Wie man sieht, kommt es selbst bei so grossem Pendelgewicht sehr darauf an, die Massenwirkung des Schreibarmes mit Sorgfalt zu vermindern. —

65. *Bestimmung der Konstanten eines Vertikalseismographen.* Die Indikatorgleichung lautet, wenn von der Reibung abgesehen wird

$$(343) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} - V^{(s)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_z \right).$$

Ueber die Bestimmung der inneren Konstanten T_0 , $L = g(T_0/2\pi)^2$, τ gilt genau das in Artikel 61 Gesagte.

Eine direkte Methode zur Bestimmung der äusseren Konstante $V^{(s)}$, der *Indikatorvergrößerung*, welche der Benutzung der Neigungsempfindlichkeit bei Horizontalseismographen entspräche, giebt es nicht. Eine direkte Methode, welche auf die Bedeutung von $V^{(s)}$ als Vergrößerung sehr schneller Vertikalbewegungen Rücksicht nimmt, wird nur selten anwendbar sein, so muss man im allgemeinen seine Zuflucht zu indirekten Methoden nehmen, welche auf die Eigenart der Konstruktion gegründet sind. Was in den Artikeln 62—64 für die Horizontalseismographen gesagt wurde, ist dabei im Wesentlichen auch hier verwertbar.

Besonders empfehlenswerth ist meistens die in Artikel 64 besprochene Methode, welche der Benutzung einer Schwerkraftänderung entspricht. Da es sich hier um eine Schwerkraftvermehrung handelt, können die nothwendigen Züge

einfach durch Auflegen oder Anhängen von Zusatzgewichten ΔM , bezüglich $\Delta M'$ gewonnen werden. Ist $\Delta g_z = \gamma g$ die gewählte Schwerkraftvermehrung, so ist $\Delta M = \gamma M$, $\Delta M' = \gamma M'$ zu nehmen, und man erhält $V^{(z)}$ mittels der Formel

$$(344) \quad V^{(z)} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \frac{a}{\Delta g_z} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \frac{1}{g} \frac{a}{\gamma} = \frac{a}{\gamma L},$$

wenn a die gefundene Aenderung der Indikatorruhelage bedeutet. —

Ganz besonders wichtig ist es, jeden Vertikalseismographen sorgfältig auf eine etwaige Wirksamkeit auch als Horizontalseismographen zu untersuchen, denn es kann dazu sehr leicht versteckte Gelegenheit gegeben sein. Sollte sich eine Horizontalempfindlichkeit herausstellen, so lassen sich nur bei Vergleich der Aufzeichnungen des Apparates mit denen eines Horizontalseismographen sichere Schlüsse auf die Vertikalverrückungen ξ machen. Die Indikatorgleichung lautet dann (von der Reibung abgesehen):

$$(345) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} - V^{(z)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_z - \Delta g_z \right) - V^{(z)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_z \right),$$

wenn die Richtung der Horizontalempfindlichkeit mit x bezeichnet wird, oder auch:

$$(346) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} - V^{(z)} \left(\frac{d^2 \sigma}{dt^2} - g i_z \sin(s, z) - \Delta g_z \right),$$

wenn mit s die Wirkungsrichtung des Seismographen, seine „äquivalente Schwingungsrichtung“ bezeichnet wird, die in der Ebene (x, z) liegt und mit der Vertikalen einen Winkel (s, z) bildet, dessen Tangente $= V^{(z)}/V^{(z)}$ ist. i_z bedeutet die Neigung parallel der Verticalebene durch s und ist $= i_z$.

66. *Bestimmung der Konstanten bei Seismographen II. Klasse.* Bedeutung hat bisher von Seismographen II. Klasse nur der Klinograph von W. Schlüter gewonnen, es scheint daher hinreichend, allein diese Gruppe von Apparaten als ein Beispiel zu diskutieren. Da die Wirksamkeit als Seismograph I. Klasse sich kaum ganz beseitigen lässt, wollen wir als Indikatorgleichung annehmen:

$$(347) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 a}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} - V^{(z)} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right) \\ - V^{(y)} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - g i_y - \Delta g_y \right) - V^{(z)} \left(\frac{d^2 z}{dt^2} - \Delta g_z \right) - W^{(z)} \frac{d^2 i_z}{dt^2}, \end{array} \right.$$

wobei die x -Richtung der Verticalebene parallel gelegt ist, in der die Neigungen erfolgen, gegen welche der Seismograph in II. Klasse empfindlich ist. Ueber die Bestimmung der Konstanten T_0 , τ , $V^{(z)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$ gilt hier dasselbe, wie bei Seismographen I. Klasse. Es kommt für uns allein noch die Bestimmung der Konstanten II. Klasse $W^{(z)}$ in Betracht. Eine direkte Messung von $W^{(z)}$ als Empfindlichkeit gegen sehr schnelle Neigungsänderungen scheint möglich, aber nicht sehr vorteilhaft und ging bei dem bisher allein aktuellen Apparat von Schlüter nicht an. Die indirekte Bestimmung mittels der Rechnung wird an die

in Artikel 34 aufgestellte Formel

$$(348) \quad W^{(i_s)} = \frac{1}{m} \int d\mu \left(z \left[\frac{\xi'}{a} \right] - x \left[\frac{\xi'}{a} \right] \right)$$

knüpfen müssen, wobei m die resultirende Masse des Gehänges, x, z die Koordinaten seines Massenelementes $d\mu$ in Bezug auf ein System bedeuten, dessen y -Axe als Drehaxe für die Neigungen i_s gilt.

Zur Erhöhung der Uebersicht bei der Berechnung von $W^{(i_s)}$ wird man sich daran erinnern können, dass $a = -W^{(i_s)} i_s$ der plötzliche Indikatorausschlag bei einer plötzlich erfolgenden Neigung i_s ist, ferner, dass $-(d^2 i_s / dt^2) \int d\mu (z [\xi'/a] - x [\xi'/a])$ die Resultante der Trägheitskräfte ist, welche durch die Neigungsbeschleunigung $d^2 i_s / dt^2$ wach gerufen werden, wenn das Gehänge gezwungen wird, die Neigungen des Apparates mitzumachen. Erleichterungen der Rechnung werden sich ferner einstellen, wenn man beachtet, dass die Trägheitskräfte irgend eines Theiles des Gehänges nach dem einfachen Prinzip der Superposition gewonnen werden können, wenn man seine jeweilige Bewegung irgend wie in Parallelverschiebungen und Drehungen zertheilt. So wird man zum Beispiel leicht erkennen, dass ein fester Theil des Gehänges, der um eine zur x -Richtung senkrechte horizontale Axe drehbar ist und relativ zum Gestell die Neigung i_s' ausführt, wenn der Indikator um a ausschlägt, zum Integral $\int d\mu (z [\xi'/a] - x [\xi'/a])$ den Antheil

$$(349) \quad M \varrho p \cos(p, \varrho) \left[\frac{i_s'}{a} \right] + (p^2 M + \Theta) \left[\frac{i_s'}{a} \right]$$

liefert, wobei $\varrho = \sqrt{x^2 + z^2}$ den Abstand der Drehaxe des Theiles von der für die Neigungen i_s gültigen Drehaxe bedeutet, und M die Masse des Theiles, Θ das Trägheitsmoment um eine zur Drehaxe parallelen Axe durch den Schwerpunkt, p der Abstand des Schwerpunktes von der Drehaxe des Theiles ist. Der Winkel (p, ϱ) ist zu rechnen zwischen der Richtung von der für i_s gültigen Axe nach der Drehaxe des Theiles und der Richtung von der Drehaxe des Theiles nach dem Schwerpunkt seiner Masse. — Das erste Glied von (349) entspricht der Parallelverschiebung des Theiles, das zweite der Drehung um seine eigene Axe, die beide zusammen der Neigung i_s äquivalent sind. — Der Antheil des Theiles zur resultirenden Masse m ist

$$(350) \quad (p^2 M + \Theta) \left[\frac{i_s'^2}{a} \right]. \quad -$$

Der einfachste Klinograph wird geboten durch ein Pendel langsamer Schwingungsdauer, dessen Drehaxe in die für i_s angenommene Axe fällt. Dann giebt es nur einen drehbaren Theil, wie wir ihn besonders betrachteten, und es wird (bei $\varrho = 0$):

$$(351) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int d\mu \left(z \left[\frac{\xi'}{a} \right] - x \left[\frac{\xi'}{a} \right] \right) = (p^2 M + \Theta) \left[\frac{i_s'}{a} \right], \\ m = (p^2 M + \Theta) \left[\frac{i_s'}{a} \right]^2, \end{array} \right.$$

also

$$(352) \quad W^{(i_n)} = \left[\frac{a}{i'} \right],$$

wie ja von vorne herein einleuchtend ist. —

67. *Bestimmung der Reibungskonstanten.* Wirkt Reibung mit, so kann die Indikatorgleichung geschrieben werden:

$$(353) \quad \frac{d^2 a}{dt^2} = - \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 (a \pm r + r' \cos(\chi - \psi)) - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} + \text{Störungsglieder,}$$

wobei die Konstante r sich auf die Reibung im Gehänge und die Konstante r' sich auf die Reibung am Schreibstift bezieht ((253), (306), (312)). Vor r ist das positive oder negative Zeichen zu nehmen, jenachdem a wächst oder abnimmt; die Bedeutung von χ und ψ erhellt aus den Figuren 14 und 15 (Seite 100). Da die Reibung am Schreibstift, sofern sie überhaupt vorhanden ist, durch Abheben des Schreibstiftes leicht ausgeschaltet werden kann, wird es sich in allen Fällen zunächst darum handeln, unter Verwerthung von Artikel 56 neben T_0 und τ die Reibung im Gehänge, also den „maximalen Reibungsausschlag“ r zu bestimmen. T_0 kann durch Astasirung oder Stabilisirung meist mannigfach geändert werden, ohne dass die Reibungskräfte merklich variiren. Es bleibt dann

$$(354) \quad \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 r = \frac{R}{m}$$

konstant, wobei R die Indikatorresultante der Reibungskräfte ist; r aber ändert sich. Für die Beurtheilung der Intensität der Reibungskräfte ist r unter solchen Umständen nicht geeignet. *Es empfiehlt sich als Maass für den Fehler des Seismographen wegen Reibung*

$$(355) \quad (r)_1 = \frac{r}{T_0^2} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{R}{m},$$

das heisst „den zur Schwingungsperiode von einer Sekunde gehörigen maximalen Reibungsausschlag“ zu wählen. Durch Multiplikation mit $4\pi^2$ ergibt er R/m und erlaubt daher leicht die Berechnung der Reibungresultante R , sobald die resultirende Masse m bekannt ist.

Bei den experimentellen Bestimmungen ist zu beachten, dass wie T_0 und τ , so auch die Schwingungsperiode T durch die Reibung im Gehänge nicht beeinflusst wird. Für r steht uns nach Artikel 56 bei nicht merklicher Dämpfung die Gleichung

$$(356) \quad \frac{1}{4n} (l_0 - l_n) = r$$

zur Verfügung, wobei l_0 die anfängliche Schwingungsweite, das heisst den Weg des Indikators von einer grössten Ausweichung bis zur nächsten, l_n die Schwingungsweite der n ten folgenden Schwingung bedeutet (Figur 6, Seite 86).

Ist Dämpfung vorhanden, so tritt an Stelle von (356) nach (259):

$$(357) \quad l_0 \frac{1}{\varepsilon^n} - l_n = 2r \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^n}\right) = 2r \left(1 + \frac{2}{\varepsilon} + \dots + \frac{2}{\varepsilon^{n-1}} + \frac{1}{\varepsilon^n}\right),$$

wobei $\varepsilon:1$ das Dämpfungsverhältniss ist. Für die Berechnung ist es bequem, zu bemerken, dass bei verschiedenen gewählten Anfangswerthen l_0, l'_0 — die natürlich derselben Schwingungsreihe angehören können — und entsprechend verschiedenen Endwerthen l_n, l'_n

$$(358) \quad \frac{l_0 - l'_0}{l_n - l'_n} = \varepsilon^n$$

ist. Diese Gleichung kann zur Bestimmung von ε dienen, worauf sich dann r mittels (357) ergibt. Setzt man $l'_0 = l_1, n = 1$, daher $l_n = l_1, l'_n = l_2$, beobachtet demgemäss drei aufeinanderfolgende Schwingungsweiten, so wird

$$(359) \quad \frac{l_0 - l_1}{l_1 - l_2} = \varepsilon, \quad \frac{1}{2} \frac{l_1^2 - l_0 l_2}{l_0 - l_2} = r.$$

Bei sehr starker Dämpfung, wo l_2 nicht mehr gut beobachtbar ist, kann man den Seismographen zweimal in verschiedener Stärke in Schwingungen versetzen, der einen Schwingungsreihe l_0, l_1 , der anderen l'_0, l'_1 entnehmen, und erhält dann

$$(360) \quad \frac{l_0 - l'_0}{l_1 - l'_1} = \varepsilon, \quad \frac{1}{2} \frac{l_1 l'_0 - l_0 l'_1}{l_0 + l_1 - l'_0 - l'_1} = r.$$

Kann die Dämpfung ausgeschaltet, oder doch stark vermindert werden, so wird man zweckmässig zunächst bei verminderter Dämpfung r feststellen, dann unter Benutzung des gefundenen Werthes von r bei voller Dämpfung mittels (357) ε bestimmen. Setzt man dabei $n = 1$, so ergibt sich einfach

$$(361) \quad \frac{l_0 - 2r}{l_1 + 2r} = \varepsilon. \quad -$$

Auch bei der Reibung am Schreibstift wird man als festzustellende Grösse zweckmässig den *maximalen Reibungsausschlag* r' ansehen, der hier freilich nur bei ruhender Schreibfläche direkte Bedeutung hat, sonst Rechnungsgrösse ist. *Ein Maass für den Fehler des Instrumentes infolge der Reibung am Schreibstift ist wieder*

$$(362) \quad (r'_1) = \frac{r'}{T} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{R'}{m},$$

„der zur Schwingungsperiode von einer Sekunde gehörige maximale Reibungsausschlag“.

Bei der experimentellen Bestimmung von r' thut man gut, die Registrirgeschwindigkeit so zu verlangsamen, dass für die Eigenbewegungen des Seismometers die Kurve gerade noch auflösbar ist. Dann verhält sich die Reibung am Schreibstift nicht wesentlich anders als die im Gehänge, und es ergibt also die vorhin beschriebene Methode der Bestimmung des maximalen Reibungsausschlages direkt $r + r'$. Da r schon bekannt ist, folgt nun r' .

§ 10. Auswerthung der Diagramme.

68. *Einleitung.* Unser Weg durch die Theorie hat uns nun bis zur Grenze der Praxis geführt. Wir begannen mit der Untersuchung der Bewegungen der Erdoberfläche, welche durch den Seismographen aufgezeichnet werden sollen, fragten uns, wie die Aufzeichnungen von der Konstruktion des Seismographen abhängen, und studirten die bei materiellen Mechanismen nothwendig sich einstellenden Bewegungshemmnisse, welche in der Dämpfung nützlich, in der Reibung unerfreulich sind. Stets untersuchten wir ausführlich, wie die besonders wichtigen periodischen seismischen Störungen im Diagramm wiedergegeben werden. — Unsere Ueberlegungen führten zu der Erkenntniss, dass die Wirksamkeit eines Seismographen bei beliebiger Konstruktion von verhältnissmässig nur wenigen Konstanten bestimmt wird. Die Mittel zu ihrer Feststellung haben wir eben erst aufgesucht. So wissen wir denn nun, wie die Bewegung des Indikators mit dem Verlauf der Störungen zusammenhängt, und sehen uns vor die Aufgabe gestellt, die gewonnenen Kenntnisse für die Praxis zu verwerthen. Es möge erlaubt sein, im Hinblick hierauf noch einige Worte hinzuzufügen.

Für einen Horizontalseismographen kommen in erheblichem Abstände vom Erdbebenherde nur die Horizontalverrückungen parallel der Wirkungsrichtung des Seismographen in Betracht. Bezeichnen wir die Richtung mit s , die Verrückung mit σ , so ergibt demgemäss die Indikatorgleichung (353) bei seismischen Störungen:

$$(363) \quad \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = -\frac{1}{V^{(s)}} \left\{ \frac{d^2 a}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 (a \pm r + r' \cos(\chi - \psi)) + \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} \right\}$$

als eine gewiss recht complicirte Formel zur Bestimmung der seismischen Verrückungen σ . Zur Vereinfachung wird man bei der Konstruktion des Apparates vor allem danach streben müssen, die schädlichen und für die Auswerthung der Diagramme besonders unbequemen Reibungsglieder soweit herabzudrücken, dass sie zu Korrekturen herabsinken, die nur hin und wieder und beiläufig zu berücksichtigen sind. Können sie ganz vernachlässigt werden, so erhalten wir an Stelle von (363) die Formel

$$(364) \quad \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = -\frac{1}{V^{(s)}} \left\{ \frac{d^2 a}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 a + \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} \right\}.$$

Auch die Anwendung dieser macht noch erhebliche Umstände. Am einfachsten ist es, wenn die Periode T_0 so gross und gleichzeitig die Dämpfung so klein gemacht werden kann, dass die beiden letzten Glieder rechts für die seismischen Störungen nicht merklich in Betracht kommen; dann ergibt (364):

$$(365) \quad \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = -\frac{1}{V^{(s)}} \frac{d^2 a}{dt^2}, \quad \sigma = -\frac{1}{V^{(s)}} a,$$

der Seismograph scheint eine durchaus „stationäre“ Masse zu enthalten, relativ welcher die Bewegungen der Erdoberfläche parallel s in $V^{(s)}$ -facher Vergrößerung umgekehrt aufgezeichnet werden.

In der Regel wird es freilich nicht möglich sein, die Eigenperiode des Instrumentes gegenüber den Perioden der seismischen Störungen hoch genug zu treiben, um diese Vereinfachung zu erreichen. Es müssen dann die beiden letzten Glieder in (364) noch beachtet werden.

Verhältnissmässig einfach gestaltet sich die Beurtheilung periodischer Störungen. Von dem Satze der Superposition Nutzen ziehend, kann man im Diagramm selbst schon die verschiedenen vorkommenden Perioden aufsuchen, und gemäss Paragraph 6 auf die Amplitude und die Phase der Störungen schliessen. — Interessant ist dabei der hin und wieder sich ereignende Fall, dass zwei nahe gleiche Perioden gleichzeitig auftreten, sodass die Amplitude in der Indikatorcurve abwechselnd anschwillt und herabsinkt. In den Bäuchen erhält man dann die Summe der Amplituden beider Bewegungen, in den Knoten die Differenz. Die Zahl der Ausweichungen von einem Bauch bis zu einem Knoten entspricht der Zahl der Schwingungen mit der grösseren Amplitude, die Zahl der vollständigen Schwingungen mit der kleineren Amplitude ist um $\frac{1}{2}$ grösser oder kleiner, jenachdem sich die grössten Ausweichungen mehr um die Bäuche oder um die Knoten zusammenschieben. — Wenn die interferirenden Perioden der Eigenperiode des Seismographen nahe kommen, wird man unter Umständen zweifelhaft sein, ob nicht etwa die Störungen einheitlicher Periode sind, und Eigenschwingungen das Phänomen verursachen, die durch die Störungen sekundär erregt worden sind. Bei wenig gedämpften Eigenschwingungen kann dem in der That so sein; bei kräftiger Dämpfung wird man bedenken müssen, dass die anfänglich erregten Eigenschwingungen entsprechend schnell herabsinken, also nur wenige Hin- und Her-Gänge des Indikators beeinflussen können. —

So wichtig die Rolle auch ist, welche die periodischen Schwingungen in den seismischen Störungen übernehmen, so kommen sie doch keineswegs allein in Betracht. Insbesondere zeigen sich oft stossartige Bewegungen in sehr charakteristischer Weise als Einleitung der einzelnen Phasen des Erdbebens, oder auch sonst in seinem Verlaufe. Die Göttinger Erfahrungen machen es wahrscheinlich, dass das Studium dieser einzelnen Stösse sich für die Seismometrie einst als wichtig erweisen wird. Mehrfach ist es schon jetzt gelungen, aus der Art, wie sich die Stösse in den verschiedenen Komponenten der Bewegungen der Erdoberfläche äussern, Schlüsse auf die Richtung zu ziehen, in welcher der Herd liegt. In den in der Einleitung erwähnten Fällen ferner, wo zwei oder mehrfach nacheinander sehr nahe übereinstimmende Erdbebendiagramme erhalten wurden, zeigten sich insbesondere auch die stossartigen Bewegungen in gleicher Weise. So scheint es denn durchaus geboten, diesen besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Bei ihrer Behandlung wird sich die direkte Bezugnahme auf die Gleichung (364), eventuell sogar unter Berücksichtigung der Reibungsglieder auf (363) nicht umgehen lassen. Doch kommt uns dabei oft zugute, dass es

sich um Episoden handelt, die verhältnissmässig einfach und schnell verlaufen, oder die doch wenigstens einen charakteristischen und scharf markirten Anfang zeigen, auf dessen Untersuchung man sich eventuell beschränken kann.

Es bieten sich zwei Wege der direkten Rechnungen mittels (364) oder (363), indem man entweder darauf ausgehen kann $d^2\sigma/dt^2$ oder σ zu bestimmen.

69. *Bestimmung der Beschleunigungen, Kräfte und scheinbaren Neigungen.* $d^2\sigma/dt^2$ bedeutet zunächst die Beschleunigung der Erdoberfläche in der Richtung σ , dann, für einen Körper, der gezwungen ist, die Bewegungen der Erdoberfläche mitzumachen, eine Zugkraft in der Richtung σ . Rechnet man gemäss dem physikalischen Maasssystem nach Centimeter und Sekunden, so heisst die Einheit der Beschleunigung „Gal“. Die Schwerebeschleunigung, die man gerne zum Vergleich heranziehen wird, ist im Mittel 981 Gal; bei Naheerdbeben kann es sich um viele Gal handeln, bei Fernerdbeben wird das „Milligal“ = 1/1000 Gal eine bequeme Einheit sein. — Der Zug, welchen 1 Gramm Masse erfährt, ist gleich so viel Dynen als $d^2\sigma/dt^2$ Gal beträgt, und der Zug, welchen 1 Kilogramm erfährt, gleich so viel Dynen als $d^2\sigma/dt^2$ Milligal beträgt. $(-d^2\sigma/dt^2)/g$ giebt, wie wir in der Einleitung erfuhren, die scheinbare Neigung $[i_s]$ der Erdoberfläche an. 1 Milligal in $d^2\sigma/dt^2$ bedeutet daher $(1/1000) \cdot (1/981) \cdot 206000 = 0,210$ Winkelsekunden:

$$(366) \quad [i_s] = -\frac{1}{g} \frac{d^2\sigma}{dt^2} \text{ in Bogenmaass } \left(= -0,210 \cdot 1000 \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} \text{ in Winkelsekunden} \right).$$

Um $d^2\sigma/dt^2$ aus den Seismogrammen mittels der Gleichung

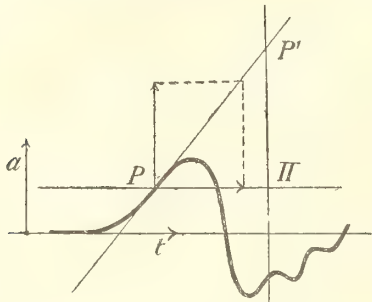
$$(367) \quad \frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\frac{1}{V^{(s)}} \left\{ \frac{d^2 a}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 a + \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} \right\}$$

zu erhalten, wird man zunächst den Ausschlag a selbst ablesen und das zweite Glied rechts berechnen. Dabei können mancherlei Hilfsmittel zur Erleichterung der Ablesung und der Berechnung (Tabellen, Rechenschieber etc.) verwendet werden. Bewegt sich der Indikator auf einem Kreisbogen, so wird — wenigstens für grössere Ausschläge — auch die Ablesung auf einem solchen erfolgen müssen.

Auch da/dt liesse sich durch Messung der Kurvenneigung direkt dem Diagramm entnehmen. Aus verschiedenen praktischen Gründen, vor allem, weil bei schnellen Indikatorbewegungen die Messung so zu ungenau würde, empfiehlt es sich meist mehr, zunächst mittels der abgelesenen a -Werthe eine neue Indikator-kurve in zweckmässigen Grössenverhältnissen zu zeichnen, wobei t als Abscisse, a als rechtwinklige Ordinate genommen werden. Es wird damit im Grunde nichts anderes als ein neues Indikator-diagramm mit zur Mittellinie senkrechten Indikatorbahn gewonnen, wie ein solches in Figur 13 Seite 99 dargestellt worden ist, und mit passenden Aenderungen hier in Figur 16 nochmals beigelegt wird. Man konstruirt nun in dem betreffenden Punkt, etwa P , die Parallele zur Mittellinie und die Tangente der Kurve, sucht dann auf einer in einem bestimmten Abstände von P zur Mittellinie senkrechten Geraden die Schnittpunkte Π und P' auf, und

erhält in $\Pi P'$ ein Maass für da/dt . Entspricht $P\Pi$ auf der Abscissenskala der Zeit einem Zeitintervall von U Sekunden und $\Pi P'$ auf der Ordinatenkala der Indikатораusschläge einem Ausschlag A , so ist:

$$(368) \quad \frac{da}{dt} = \frac{A}{U}.$$



Figur 16.

Will man in $\Pi P'$ direkt da/dt ablesen, so ist nach (368) eine Theilung mit U -mal grösseren Intervallen zu benutzen als bei dem Auftragen der Ordinaten a .

Die Bestimmung von d^2a/dt^2 und damit des Hauptgliedes rechts in (367), des ersten Gliedes, bietet die meisten Schwierigkeiten. Eine direkte Auswerthung — durch Beobachtung des Krümmungsradius der Indikatorcurve — ist noch weniger zu empfehlen als bei da/dt . Weit zweckmässiger scheint es, die für da/dt gefundenen Werthe nun zur Konstruktion einer Curve zu benutzen, welche da/dt in ganz gleicher Weise in rechtwinkligen Koordinaten darstellt, wie die Curve in Figur 16 den Ausschlag a . Man erhält dann d^2a/dt^2 durch die gleiche Operation wie vorhin da/dt . Ist U wiederum das mit $P\Pi$ äquivalente Zeitintervall und bedeutet A' den Werth von da/dt , welcher gemäss der Ordinatenheilung zur Strecke $\Pi P'$ gehört, so ist

$$(369) \quad \frac{d^2a}{dt^2} = \frac{A'}{U}.$$

Wieder kann d^2a/dt^2 in $\Pi P'$ direkt abgelesen werden, wenn die benutzte Theilung U -mal weitläufiger als die Ordinatenheilung ist.

Ist es nöthig, die Reibung zu berücksichtigen, so wird man bei der Bestimmung des zweiten Gliedes rechts in (367) nach Vorschrift von (363) Korrekturen anbringen müssen. —

70. *Bestimmung von Verrückungen.* Für die Bestimmung der Verrückung σ liefert die Indikatorgleichung (364) ohne Berücksichtigung der Reibung:

$$(370) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 + \frac{1}{V^{(s)}} \left\{ a_0 + (t - t_0) \left(V^{(s)} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_0 + \left(\frac{da}{dt} \right)_0 + \frac{2}{\tau} a_0 \right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{V^{(s)}} \left\{ a + \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t dt a + \frac{2}{\tau} \int_{t_0}^t dt a \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die in der ersten Zeile rechts geschriebenen konstanten und mit t proportionalen Glieder haben für die Praxis nur geringe Bedeutung. Man wird in der Regel gut thun, sie zunächst beiseite zu lassen und aus den sich dann für σ ergebenden Resultaten nachträglich, wenn nöthig, auf ihren Beitrag zu schliessen. Setzt eine seismische Störung plötzlich ein, während der Apparat bis dahin in Ruhe war, so fallen sie ganz fort.

Von den drei wesentlichen, letzten Gliedern rechts in (370) bereitet hier gerade umgekehrt wie bei der Bestimmung der Beschleunigung das erste, welches wieder das Hauptglied ist, die geringsten, das zweite die meisten Schwierigkeiten.

Wir haben es jetzt mit Längen zu thun und werden passend nach Millimetern oder Bruchtheilen davon rechnen.

Der Werth des ersten Gliedes ergibt sich durch direkte Ablesung.

Die Auswerthung des dritten Gliedes verlangt einfache, die des zweiten Gliedes doppelte Integration. Es ist wohl denkbar, dass die Anwendung besonderer Integrationsmaschinen Vortheile bieten kann, im Allgemeinen und vorläufig wird man aber wohl auf die Rechnung angewiesen sein. Ich möchte folgendes Verfahren empfehlen, welches die einfache Trapezformel benutzt und sogleich erlaubt, den Verlauf von σ in einem gegebenen Zeitintervall festzustellen.

Die Trapezformel lautet für das Integral einer beliebigen Funktion p von x in den Grenzen x_0 und x :

$$(371) \quad \int_{x_0}^x dx p = \frac{\Delta x}{2} ((p_0 + p_1) + (p_1 + p_2) + (p_2 + p_3) + \dots + (p_{n-1} + p_n)).$$

Dabei ist eine Theilung der Strecke von x_0 bis x in n gleiche Theile der Länge $\Delta x (= (x - x_0)/n)$ vorausgesetzt. $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ sind die Werthe von p am Anfang, in den Theilpunkten und am Ende der Strecke. Zur Anwendung von (371) in unserem Falle werden wir im Diagramm nach einem gewissen möglichst engen Zeitintervall (1 Sekunde, $\frac{1}{2}$ Sekunde, ...) fortschreiten. Sind dann t_0, t_1, t_2, \dots die zugehörigen Zeiten, a_0, a_1, a_2, \dots die zugehörigen Ausschläge, so erhalten wir

$$(372) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} dt a &= \frac{\Delta t}{2} (a_0 + a_1), \\ \int_{t_0}^{t_2} dt a &= \frac{\Delta t}{2} ((a_0 + a_1) + (a_1 + a_2)), \\ \int_{t_0}^{t_3} dt a &= \frac{\Delta t}{2} ((a_0 + a_1) + (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3)), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Die praktische Ausführung der Rechnung kann man etwa gemäss folgendem Schema gestalten:

	I	II	III	IV	V
(373)	a_0	a_0	0	0	0
		0		0	
	a_1	a_1	Σa_1	Σa_1	$\Sigma \Sigma a_1$
		Σa_1		$\Sigma \Sigma a_1$	
	a_2	a_2	Σa_2	Σa_2	$\Sigma \Sigma a_2$
	Σa_2		$\Sigma \Sigma a_2$		
	a_3	a_3	Σa_3	Σa_3	$\Sigma \Sigma a_3$
	Σa_3		$\Sigma \Sigma a_3$		
	a_4	a_4	Σa_4	Σa_4	$\Sigma \Sigma a_4$

Man schreibt die abgelesenen Werthe a_0, a_1, a_2, \dots der Reihe nach, jedoch mit Lücken von je einer Zeile untereinander, wie unter I angedeutet, und füllt dann die Lücken aus, nacheinander $a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_1 + a_2, \dots$ berechnend. Setzt man zur Abkürzung

$$(374) \quad \Sigma a_1 = a_0 + a_1, \quad \Sigma a_2 = a_0 + 2a_1 + a_2, \quad \Sigma a_3 = a_0 + 2a_1 + 2a_2 + a_3, \quad \dots,$$

zu lesen: „Summe bis a_1 “ = $a_0 + a_1$, „Summe bis a_2 “ = $a_0 + 2a_1 + a_2$, und so fort, so ist

$$(375) \quad \Sigma a_1 = a_0 + a_1, \quad \Sigma a_2 = a_1 + \Sigma a_1 + a_2, \quad \Sigma a_3 = a_2 + \Sigma a_2 + a_3, \quad \dots,$$

man hat also bei Ausführung der Rechnung stets drei übereinanderstehende Zahlen zu addiren, um den nächsten Summenwerth zu finden. Das Resultat ist die Aufstellung II. Eine Kontrolle der Rechnung lässt sich jederzeit erreichen, indem man den schrittweise berechneten Werth Σa_v mit dem direkt mittels der Formel

$$(374') \quad \Sigma a_v = a_0 + 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{v+1}) + a_v$$

sich ergebenden Werth vergleicht. — Zweckmässiger, als Hineinschreiben der Zahlen Σa_v auf der Schreibfläche der a_v selbst, ist die Verwendung eines darübergelegten durchsichtigen oder kammartig ausgeschnittenen Papierses. Man kann die Reihe II dann jederzeit in die Reihen I und III zertheilen.

Für die Formel (370) zur Berechnung der Verrückung σ ist schliesslich

$$(376) \quad \int_{t_0}^{t_v} dt a = \frac{\Delta t}{2} \Sigma a_v$$

zu setzen. —

$\iint dt a$ folgt aus $\int dt a$ gerade so wie $\int dt a$ aus a , wir werden also in (370)

$$(377) \quad \int_{t_0}^{t_v} dt \int_{t_0}^{t_v} dt a = \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \Sigma \Sigma a_v$$

setzen, und die Doppelsummen gemäss dem Schema IV in (273) in derselben Weise aus den einfachen Summen berechnen, wie vorhin diese aus den Ausschlägen a_v . —

Die *Reibung* entspricht nach der vollständigen Indikatorgleichung (353) in ihrer Wirkung einem Ausschlag

$$(378) \quad a^{(R)} = \pm r + r' \cos(\chi - \psi),$$

hat also bei der Bestimmung der Verrückung σ mittels der Integralformel (370) das Auftreten eines Gliedes

$$(379) \quad -\frac{1}{V^{(R)}} \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t dt a^{(R)}$$

zur Folge. Die Berechnung kann gemäss dem Schema (373) gerade so geschehen wie die des entsprechenden Gliedes in (370).

Die Multiplikationen der zunächst berechneten Funktionen rechts in (370) mit den Faktoren $1/V^{(s)}$, $(2\pi/T_0)^2/V^{(s)}$, $2/\tau V^{(s)}$ lassen sich bei Anwendung von Rechenmaschinen oder Rechenschieber ziemlich leicht ausführen. Sie können ganz vermieden werden, wenn man darauf ausgeht, für σ eine Kurve zu zeichnen, und wenn man dabei die Ordinaten σ_v aus den einzelnen Theilen rechts in (370) unter Anwendung verschiedener Maassstäbe zusammensetzt. Die Schwierigkeit, welche hierbei durch die im Allgemeinen etwas veränderliche Grösse von T_0 und τ bereitet wird, kann durch Anwendung von Maassstäben mit konvergierenden Theilstrichen, von Proportionalzirkeln und ähnlichen Hilfsmitteln umgangen werden. —

71. *Besondere Fälle.* Auch ohne die soeben beschriebenen umständlichen Rechnungen ist es oftmals möglich, in Bezug auf die unperiodischen Störungen bedeutungsvolle Schlüsse zu ziehen. Besonders wichtig scheinen folgende Sätze: *Wenn der vorher ruhige oder nur unbedeutend bewegte Indikator in Bewegung geräth und bis zur ersten Umkehr den grössten Ausschlag a erreicht, so ist die entsprechende Verrückung der Erdoberfläche mindestens gleich $-a/V^{(s)}$. Zur Zeit des grössten Ausschlages hat die Erdoberfläche die ursprüngliche Lage noch nicht wieder erreicht.* — Ist die Reibung nicht merklich, so kann weitergehend noch hinzugefügt werden, *dass die ursprüngliche Lage von der Erdoberfläche auch dann noch nicht erreicht ist, wenn der Indikator die Ruhelage wieder passirt.* — Die Richtigkeit der Sätze lässt sich leicht erkennen, sobald man beachtet, dass in den betrachteten Zeiträumen die Glieder rechts in (370) sämmtlich Werthe gleichen Vorzeichens haben. —

Liefert ein reibungsloser Horizontalseismograph Diagramme mit gleichen Konstanten für 2 verschiedene Arbeitsrichtungen, oder sind 2 solche einfache Seismographen mit gleichen Konstanten für die beiden Arbeitsrichtungen aufgestellt, und findet man in den Diagrammen nach vorheriger Ruhe die gleichen Bewegungen nur mit anderer Intensität aufgezeichnet, so folgt, *dass der Erdboden die entsprechende Bewegung in gerader Linie ausgeführt hat und in einer Richtung, die durch den Satz vom Parallelogramm angegeben wird.* Stehen insbesondere die beiden Arbeitsrichtungen aufeinander senkrecht und bezeichnen wir sie mit x, y , die zugehörigen Ausschläge mit a_x, a_y , so ist

$$(380) \quad \operatorname{tg}(s, x) = \frac{a_y}{a_x},$$

wenn (s, x) den Winkel zwischen der Erdbewegung und der x -Richtung bedeutet.

Eine etwaige Reibung verkleinert den kleineren Ausschlag relativ stärker als den grösseren, lässt also die Schwingungsrichtung des Erdbodens der stärkeren Komponente näher liegend erscheinen, als zutreffend ist. —

72. *Vervollständigungen.* Bei *Vertikalseismographen, welche auch gegen Horizontalverrückungen noch merklich empfindlich sind*, erhält man mittels der Rechnungen

der beiden letzten Paragraphen nicht direkt $d^2\xi/dt^2$ bezüglich ξ , sondern

$$(381) \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{V^{(x)}}{V^{(z)}} \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{V^{(y)}}{V^{(z)}} \frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad \text{bezüglich} \quad \xi + \frac{V^{(x)}}{V^{(z)}} \xi + \frac{V^{(y)}}{V^{(z)}} \eta.$$

Die Vertikalkomponente der Erdbodenbewegung ergibt sich daher erst, wenn mittels Horizontalseismographen die Horizontalkomponente festgestellt ist.

In besonderen Fällen, vor Allem in der Nähe der Erdbebenherde, *kommen bei den seismischen Störungen neben den Verrückungen auch die Neigungen in Betracht*. In solchen Fällen werden die Integralrechnungen des Artikels 70 zunächst bedeutungslos, die Differentialrechnungen des Artikels 69 aber ergeben

$$(382) \quad -\frac{1}{g} \frac{d^2\sigma}{dt^2} + i_s = [i_s] + i_s,$$

anstelle von $-d^2\sigma/gdt^2$, also die *Summe der scheinbaren und der wirklichen Neigungen* anstelle der scheinbaren Neigungen. Zur Trennung muss ein Seismograph II. Klasse herangezogen werden. Nehmen wir an, dass er auch eine Empfindlichkeit I. Klasse hat, so liefert sein Diagramm mittels gleicher Rechnungen, wobei nur $W^{(i_s)}$ anstelle von $V^{(s)}$ tritt:

$$(383) \quad -\frac{1}{g} \frac{d^2i_s}{dt^2} + \frac{V^{(s)}}{W^{(s)}} ([i_s] + i_s).$$

So kann denn durch Verwerthung beider Diagramme d^2i_s/dt^2 und weiter — etwa durch Rechnungen gemäss Schema (373) — i_s berechnet werden. Unter Rücksicht auf die Ergebnisse des Seismographen I. Klasse für $[i_s] + i_s$, folgt dann auch $[i_s]$ und durch Integration σ .

Bei periodischen Störungen wird es vortheilhaft sein, die Resultate der Artikel 50 und 51 zu benutzen. Macht sich die Reibung bemerkbar, so kann man entweder die Ueberlegungen der Paragraphen 7 und 8 in Bezug auf periodische Störungen verwerthen, oder zunächst die Einwirkung der Reibung aus den Diagrammen durch Rechnung eliminiren.

Erklärung einiger Bezeichnungen.

Allgemeines.

$$e = 2,71828 \dots, \quad \pi = 3,14159 \dots$$

g = Schwerebeschleunigung (= ca. 981 Centimeter, Sekunden).

Periode (einer Schwingung): Zeitintervall bis zur Wiederkehr der gleichen Phase,
— umfasst also zwei sogenannte „einfache“ Schwingungen.

Koordinaten und Bewegungen der Erdoberfläche.

Referenzpunkt: Punkt der Erdoberfläche, auf den die seismischen Störungen bezogen werden.

x, y, z : *rechtwinklige Koordinaten* eines Systemes, dessen Anfangspunkt im Referenzpunkt liegt, und dessen z -Axe vertikal nach oben gerichtet ist; zugleich Bezeichnungen für die *Richtungen* der Koordinaten-Axen.

s : beliebige Richtung, im Speziellen also auch x, y, z .

ξ, η, ζ, σ : *Verschiebungen* parallel x, y, z, s .

$\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z, \vartheta_s$: *Drehungen* (in Bogenmaass) um Axen parallel x, y, z, s .

i_x, i_y, i_s : *Neigungen* (in Bogenmaass) parallel Vertikalebene, welche die Richtungen x, y, s enthalten, also Drehungen um horizontale Axen, welche auf x, y, s senkrecht stehen. Als Richtung der Neigung ist diejenige zu verstehen, welche parallel x, y, s verlaufende Linien *herabführt*.

$\Delta g_x, \Delta g_y, \Delta g_z, \Delta g_s$: *Aenderungen der Schwerkraft* parallel x, y, z, s .

$[i_x], [i_y], [i_s]$: *Scheinbare Neigungen* infolge von Verschiebungen und Aenderungen der Schwerkraft ($[i_s] = - (d^2 \sigma / dt^2) / g + \Delta g_s / g$, wenn s horizontal).

Indikator und Indikator-Gleichung.

Indikator: Lichtpunkt oder Schreibspitze etc., bestimmt zur Zeichnung der registrierenden Kurve.

Indikator-Gleichung: Gleichung, welche die Indikatorausschläge beherrscht. — Im allgemeinsten Falle, der hier betrachtet wird, lautet sie:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a}{dt^2} = & -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 a - \frac{2}{\tau} \frac{da}{dt} - \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 (\pm r + r' \cos(\chi - \psi)) \\ & - V^{(x)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - g i_x - \Delta g_x \right) - V^{(y)} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} - g i_y - \Delta g_y \right) - V^{(z)} \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \Delta g_z \right) \\ & - W^{(i_x)} \frac{d^2 i_x}{dt^2} - W^{(i_y)} \frac{d^2 i_y}{dt^2} - W^{(\vartheta_x)} \frac{d^2 \vartheta_x}{dt^2}, \end{aligned}$$

wobei auch

$$\left(\frac{\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{g}{L}, \quad V^{(x)} = \frac{J^{(x)}}{L}, \quad V^{(y)} = \frac{J^{(y)}}{L}, \quad V^{(z)} = \frac{J^{(z)}}{L}$$

gesetzt werden kann.

a : Indikatorausschlag.

t : Zeit.

Innere Konstanten.

T_0 : *Reducirte Eigenperiode*, Periode, welche sich ohne Dämpfung ($\tau = \infty$) und ohne Reibung am Schreibstift ($r' = 0$) einstellen würde.

L : *Aequivalente Pendellänge*, Länge eines einfachen Pendels der Schwingungsperiode T_0 .

T : *Eigenperiode* ohne Mitwirkung der Reibung am Schreibstift ($r' = 0$).

τ : *Relaxationszeit* infolge der Dämpfung.

ε : 1: *Dämpfungsverhältniss*, Verhältniss zweier auf einander folgender grösster Ausweichungen nach verschiedenen Seiten, welches sich ohne Reibung ergeben würde ($r = 0$, $r' = 0$).

r : *Maximaler Reibungsausschlag infolge der Reibung im Gehänge*.

$(r)_1 = r/T_0^2$: Desgleichen zur Periode 1 gehörig.

r' : *Maximaler Reibungsausschlag infolge der Reibung am Schreibstift*.

$(r')_1 = r'/T_0^2$: Desgleichen zur Periode 1 gehörig.

Aeussere Konstanten.

$V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$, $V^{(s)}$: *Indikatorvergrösserungen*. Geben die Vergrösserung sehr schneller Verrückungen parallel x , y , z , s an, indem dabei $V^{(s)} = -a/\sigma$ ist.

$J^{(x)}$, $J^{(y)}$, $J^{(z)}$, $J^{(s)}$: *Aequivalente Indikatorlängen*. Sind die *Relativ-Empfindlichkeiten* für dauernde Schwerkraftänderungen ($J^{(s)} = ag/\Delta g_s$) und für horizontale Richtungen (x , y , s) die *Empfindlichkeiten* für dauernde Neigungen ($J^{(s)} = a/i_s$, oder $= 206000 a/i_s$, wenn i_s in Winkelsekunden gemessen wird).

$W^{(i_x)}$, $W^{(i_y)}$, $W^{(\vartheta_x)}$: *Empfindlichkeiten* für sehr schnelle Neigungen und Drehungen in II. Klasse ($W^{(i_x)} = a/i_x$, etc.).

Störungsglieder I. Klasse: Glieder mit $V^{(s)}$ bezüglich $J^{(s)}$.

Störungsglieder II. Klasse: Glieder mit $W^{(i_s)}$, $W^{(d_s)}$.

Arten der Seismographen.

Seismographen I. und II. Klasse: Unterscheidung gemäss dem Einfluss der entsprechenden Störungsglieder.

Horizontal- und Vertikalseismographen: Seismographen I. Klasse, bei denen die Glieder mit $V^{(s)}$, $V^{(v)}$, bezüglich mit $V^{(s)}$ vorherrschend sind.

Mechanismus der Seismographen.

Gestell und Gehänge: Fester und beweglicher Theil.

Aequivalent einer (auf das Gehänge wirkenden) *Kraft im Indikator:* Ideelle Kraft, welche, am Indikator angreifend, die gegebene Kraft ersetzen könnte. Der Indikator wird dabei (abgesehen von den Gelenken) in starrer Verbindung mit dem Gehänge gedacht.

Indikator-Resultante eines Kraftsystemes: Aequivalent des Kraftsystemes.

Resultirende Masse des Gehänges oder eines seiner Theile *im Indikator:* Ideelle Masse am Indikator, welche in Bezug auf die Trägheit gleichwerthig wäre.

m: *Resultirende Masse des Gehänges.*

Inhaltsübersicht.

Einleitung, p. 3.

1. Vorwort, p. 3; 2. Auswahl des Stoffes, p. 4; 3. Einige Probleme, p. 4; 4. Inhaltsübersicht, p. 6; 5. Praktische Grundlagen, p. 7; 6. Dieselben für mechanische Registrierung, p. 8; 7. Dieselben für das Studium der vertikalen Komponente, p. 9.

I. Theil. Allgemeine Theorie.

§ 1. Die zu beobachtenden Bewegungen, p. 10.

8. Verrückungen, p. 10; 9. Aenderungen der Schwerkraft, p. 10; 10. Schwereänderungen bei Sinusschwingungen der Erdoberfläche, p. 12; 11. Einführung der äquivalenten Pendellänge, p. 13; 12. Neigungen der Erdoberfläche, p. 14; 13. Fortschreitende Sinuswellen mit vertikalen und longitudinalen horizontalen Bewegungen, p. 14; 14. Drehungen um die Vertikale, p. 16; 15. Drehungen bei fortschreitenden Sinuswellen, p. 17; 16. Bewegungen des Gestelles, p. 18; 17. Eintheilung der Seismographen, p. 20.

§ 2. Das reibungslose einfache Pendel als Seismograph, p. 21.

18. Der Apparat, p. 21; 19. Charakteristische Konstanten, p. 21; 20. Einwirkung von Parallelverschiebungen, p. 24; 21. Einwirkungen von Drehungen und Aenderungen der Schwerkraft, p. 24; 22. Indikatorgleichung für beliebige Störungen, p. 25; 23. Beliebige Aufstellung, p. 26; 24. Trennung verschiedenartiger Störungen, p. 27.

§ 3. Reibungslose Seismographen mit punktförmiger Masse, p. 28.

25. Horizontalseismographen, p. 28; 26. Vertikalseismographen, p. 29; 27. Seismographen eines Freiheitsgrades mit beliebiger Schwingungsrichtung, p. 30; 28. Seismographen für mehrere Komponenten, p. 33.

§ 4. Reibungslose Seismographen mit räumlich vertheilter Masse, p. 36.

29. Das physikalische Pendel als Seismograph, p. 36; 30. Physikalisches Pendel unter Mitwirkung elastischer Kräfte; Klinograph von Schlüter, p. 39; 31. Seismograph beliebiger Konstruktion für eine Komponente, p. 41; 32. Seismische Ruhe, p. 42; 33. Ableitung der Indikatorgleichung, p. 43; 34. Umgestaltung und Diskussion der Indikatorgleichung, p. 45; 35. Unterschied des Verhaltens gegenüber einem Seismographen mit punktförmiger Masse, p. 48; 36. Einfluss der Aufstellung, p. 48; 37. Seismographen mehrerer Freiheitsgrade, p. 49; 38. Eigenschwingungen des Apparates, p. 51; 39. Verhalten bei Störungen, p. 53; 40. Schlussübersicht, p. 54.

§ 5. **Indikatorbewegungen reibungsloser Seismographen**, p. 57.

41. Einleitung; Satz der Superposition, p. 57; 42. Allgemeine Lösungen der Indikatorgleichung, p. 60; 43. Periodische Parallelverschiebungen, p. 62; 44. Begleitende Eigenschwingungen, p. 63; 45. Periodische Neigungen, p. 65.

§ 6. **Einwirkung der Dämpfung**, p. 66.

46. Indikatorgleichung, p. 66; 47. Eigenbewegungen, p. 68; 48. Gesetze der Superposition; allgemeine Lösungen der Indikatorgleichung, p. 71; 49. Nachwirkungen von Anfangszuständen und Störungen, p. 74; 50. Periodische Störungen, p. 75; 51. Indikatorvergrößerungen periodischer Störungen, p. 78; 52. Begleitende Eigenschwingungen, p. 79.

§ 7. **Einwirkung der Reibung im Gehänge**, p. 83.

53. Reibung im Gehänge und am Schreibstift, p. 83; 54. Indikatorgleichung bei Reibung im Gehänge, p. 84; 55. Allgemeine Sätze, p. 85; 56. Eigenschwingungen bei Reibung im Gehänge, p. 86; 57. Periodische Störungen bei Reibung im Gehänge, p. 90; 58. Periodische Störungen bei Reibung im Gehänge und Dämpfung, p. 94.

§ 8. **Einwirkung der Reibung am Schreibstift**, p. 98.

59. Reibung am Schreibstift, p. 98; 60. Indikatorgleichung bei Reibung am Schreibstift, p. 102.

§ 9. **Bestimmung der Konstanten**, p. 105.

61. Direkte Bestimmung der Konstanten eines Horizontalseismographen ohne Reibung, p. 105; 62. Indirekte Bestimmung der äusseren Konstanten eines Horizontalseismographen; Einleitung, p. 106; 63. Bestimmung der resultirenden Masse, p. 107; 64. Indirekte Bestimmung der äusseren Konstanten eines Horizontalseismographen; Einzelnes, p. 109; 65. Bestimmung der Konstanten eines Vertikal-seismographen, p. 110; 66. Bestimmung der Konstanten bei Seismographen II. Klasse, p. 111; 67. Bestimmung der Reibungskonstanten, p. 113.

§ 10. **Auswerthung der Diagramme**, p. 115.

68. Einleitung, p. 115; 69. Bestimmung der Beschleunigungen, Kräfte und scheinbaren Neigungen, p. 117; 70. Bestimmung der Verrückungen, p. 118; 71. Besondere Fälle, p. 121; 72. Vollständigungen, p. 121.

Erklärung einiger Bezeichnungen, p. 123.

17 MAR. 1903



ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN

PHILOLOG.-HIST. KL. NEUE FOLGE.

- I. Band, No. 1. **Kehr, P.**, *Ueber eine römische Papyrusurkunde im Staatsarchiv zu Marburg*. Mit drei Facsimile auf zwei Tafeln. 4. (28 S.) 1896. 3 M.
- I. Band, No. 2. **Meyer, Wilhelm** (aus Speyer), *Ueber Lauterbachs und Aurifabers Sammlungen der Tischreden Luthers*. 4. (43 S.) 1896. 3 M.
- I. Band, No. 3. **Bonwetsch, N.**, *Das slavische Henochbuch*. 4. (57 S.) 1896. 4 M.
- I. Band, No. 4. **Wellhausen, J.**, *Der arabische Josipus*. 4. (50 S.) 1897. 3 M. 50 Pf.
- I. Band, No. 5. **Hultsch, Fr.**, *Poseidonios über die Größe und Entfernung der Sonne*. 4. (48 S.) 1897. 3 M.
- I. Band, No. 6. **Meyer, Wilhelm**, (aus Speyer), *Die Buchstabenverbindungen der sogenannten gothischen Schrift*. Mit 5 Tafeln. 4. (124 S.) 1897. 9 M. 50 Pf.
- I. Band, No. 7. **Leo, Fr.**, *Die plautinischen Cantica und die hellenistische Lyrik*. 4. (114 S.) 1897. 7 M. 50 Pf.
- I. Band, No. 8. **Asadi's neupersisches Wörterbuch Lughat-i Furs** nach der einzigen vatikanischen Handschrift herausgegeben von Paul Horn. 4. (37 u. 133 S.) 1897. 18 M.
- II. Band, No. 1. **Wellmann, M.**, *Krateuas*. Mit 2 Tafeln. 4. (32 S.) 1897. 3 M.
- II. Band, No. 2. *Das hebräische Fragment der Weisheit des Jesus Sirach* herausgegeben von **Rudolf Smend**. 4. (34 S.) 1897. 3 M. 50 Pf.
- II. Band, No. 3. **Schulten, Adolf**, *Die Lex Manciana*, eine afrikanische Domänenordnung. 4. (51 S.) 1897. 3 M. 50 Pf.
- II. Band, No. 4. **Kaibel, Georg**, *Die Prolegomena ΠΕΡΙ ΚΩΜΩΛΙΑΙΑΣ*. 4. (70 S.) 1898. 4 M. 50 Pf.
- II. Band, No. 5. **Bechtel, Fr.**, *Die einstämmigen männlichen Personennamen des Griechischen*, die aus Spitznamen hervorgegangen sind. 4. (85 S.) 1898. 5 M. 50 Pf.
- II. Band, No. 6. **Meyer, Wilhelm**, *Die Spaltung des Patriarchats Aquileja*. 4. (37 S.) 1898. 2 M. 50 Pf.
- II. Band, No. 7. **Schulten, Adolf**, *Die römische Flurteilung und ihre Reste*. Mit 5 Figuren im Text und sieben Karten. 4. (38 S.) 1898. 5 M.

- II. Band, Nr. 8. **Roethe, Gustav**, *Die Reimreden des Sachsenspiegels*. 4. (110 S.) 1899. 8 M.
- III. Band, Nr. 1. *Die charakteristischen Unterschiede der Brüder van Eyck* von **Otto Seek**. 4. (77 S.) 1899. 5 M.
- III. Band, Nr. 2. **Marquardt, J.**, *Eränssähr nach der Geographie des Ps. Moses Xorenaci*. Mit historisch kritischem Kommentar und topographischen Excursen. 4. (358 S.) 1901. 30 M.
- III. Band, No. 3. **Achelis, H.**, *Die Martyrologien, ihre Geschichte und ihr Wert*. 4. (VIII u. 247 S.) 1900. 16 M.
- IV. Band, No. 1. **Tüselmann, Otto**, *Die Paraphrase des Euteknios zu Oppians Kynegetika*. 4. (43 S.) 1900. 4 M.
- IV. Band, No. 2. **Schulten, Adolf**, *Die Mosaikkarte von Madaba und ihr Verhältnis zu den ältesten Karten und Beschreibungen des heiligen Landes*. Mit 3 Kartenbildern u. 1. Figurentafel. 4. (121 S.) 1900. 10 M.
- IV. Band, No. 3. **Wilamowitz-Moellendorff, U. v.**, *Die Textgeschichte der griechischen Lyriker*. 4. (121 S.) 1900. 8 M.
- IV. Band, No. 4. **Rahfs, Alfred**, *Die Berliner Handschrift des sahidischen Psalters*. Mit drei Lichtdrucktafeln. 1901. 11 M.
- IV. Band, No. 5. **Meyer, Wilhelm**, *Der Gelegenheitsdichter Venantius Fortunatus*. 4. (140 S.) 1901. 9 M.
- IV. Band, No. 6. **Lüders, Heinrich**, *Über die Grantharecension des Mahābhārata*. (Epi-sche Studien I). 6 M.
- V. Band, No. 1. **Roethe, Gustav**, *Brentanos 'Ponce de Leon'*, eine Saecularstudie. 4. (100 S.) 1901. 6 M. 50 Pf.
- V. Band, No. 2. **Wellhausen, J.**, *Die religiös-politischen Oppositionsparteien im alten Islam*. 6 M. 50 Pf.
- V. Bd. No. 3. *Neuarabische Volkspoese* gesammelt und übersetzt von **Enno Littmann**. Im Druck.
- V. Bd. No. 4. **Pischel, R.**, *Materialien zur Kenntnis des Apabhramśa*. Ein Nachtrag zur Grammatik der Prākrit-Sprachen. (86 S.) 6 M.
- V. Bd. No. 5. **Schulze, Wilhelm**, *Zur Geschichte lateinischer Eigennamen*. Im Druck.

- VI. Bd. No. 1. **Kraus, Carl**, *Metrische Untersuchungen über Reinbots Georg. Excursen*.

- VI. Bd. No. 2. **Meyer, Wilhelm**, *Henricus über die Regii Typi Graecae*.

- VI. Bd. No. 3. **Möller, Hermann**, *Ein-sches und zwei niederdeutsche Lieder 1563—1565 aus dem siebenjährigen Kriege*. Mit einem Anhang von *Ein-sche Lieder aus der Grafenfeld*.

MATH.-PHYSIKAL. KL. NEUE FOLGE.

- I. Band, No. 1. **Koenen, A. v.**, *Über die Unterere Kreide am Ufer von Kamerun*. Mit 4 Tafeln. 1897. Nachtrag dazu. 4. (S. 49—65 u. V—VII.) 1898.
- I. Band, No. 2. **Brendel, Martin**, *Die kleinen Planeten*. Erster Teil. 1898.
- I. Band, No. 3. **Schur, W.**, *Ablatung der Oerter des Mondes gegen die heliometrischen Messungen von Schur ausgeführt auf der Sternwarte zu Göttingen während der partiellen Sonnenfinsternisse von 1890 Juni 16/17 (Beobachter: Ambronn und Hayn) und von 1891 (Beobachter: Schur)*. Mit 3 Tafeln. Sternwarte nebst Verzeichnisse der Instrumente. 4. (26 S.) 1898.
- I. Band, No. 4. **Schur, W.**, *Vermessung beider Sternhaufen η und α Perseus* sechs-zölligen Heliometer der Sternwarte Göttingen verbunden mit einer *aller bis zum Jahre 1900 ausgeführten Instrumentaluntersuchungen*. Mit Sternkarte. 4. (88 S.) 1900.
- II. Bd. No. 1. **Wiechert, E.**, *Theorie der Seismographen*.
- II. Bd. No. 2. **Kramer, Julius**, *Theorie der Planeten*. Die Planeten nach dem Typus. (153 S.)
- II. Bd. No. 3. **Furtwängler, Ph.**, *Über die ciprocitäts-gesetz der 1ten Potenzreihe der hebraischen Zahlkörpern, wenn die Primzahl bedeutet*. (82 S.)

3 JUN. 1902

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND II. Nro. 2.

Theorie der kleinen Planeten.

Die Planeten vom Hecuba-Typus.

Von

Julius Kramer.



Berlin,
Weidmannsche Buchhandlung.
1902.

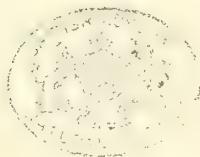
ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND II. Nro 2.

Theorie der kleinen Planeten.

Die Planeten vom Hecuba - Typus.

Von

Julius Kramer.



Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1901.

Theorie der kleinen Planeten.

Die Planeten vom Hecuba-Typus.

Von

Julius Kramer.

Vorgelegt von W. Schur in der Sitzung vom 23. Februar 1901.

Vorwort.

Unter den in letzter Zeit entwickelten Theorieen einer gruppenweisen Ermittlung der Hauptungleichheiten der kleinen Planeten dürfte die von Herrn Brendel gegebene Methode, was Durchsichtigkeit und Vollständigkeit der analytischen Entwicklungen betrifft, für die rechnende Astronomie sehr wertvoll sein. Die Entwicklungen für die gewöhnlichen Planeten sind in Herrn Brendels „Theorie der kleinen Planeten“¹⁾ vollständig durchgeführt.

Der Specialfall des Hestia-Typus ist in seiner Abhandlung²⁾ „Om användningar af den absoluta störingsteorien etc.“ sowie in seiner Dissertationsschrift³⁾ mit einer obigen Zielen entsprechenden Genauigkeit behandelt. Für die zweite Hauptgruppe, für die Planeten vom Hecuba-Typus, hat Herr Ludendorff in seiner Inauguraldissertation⁴⁾ die Formeln der Bewegung in der instantanen Bahnebene abgeleitet, während die zu der mittleren Bewegung des Mars in einem komensurablen Verhältnis stehenden Planeten in Herrn Lemkes Inauguraldissertation⁵⁾ behandelt sind.

1) Abhdlgn. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. N. F. Bd. I, 2.

2) Jakttagelser och Undersökningar anställda på Stockholms Observatorium IV, 3. 1889.

3) Ueber die Anwendung der Gylden'schen absoluten Störungstheorie auf die Breitenstörungen einer gewissen Klasse kleiner Planeten. Berlin-Göttingen 1890.

4) Die Jupiterstörungen der kleinen Planeten vom Hecuba-Typus. Berlin 1897.

5) Ueber die Mars- und Jupiterstörungen der kleinen Planeten vom Hebe-Typus. Berlin 1897.

Daraus, dass unter den charakteristischen Planeten die vom Hecuba-Typus an Zahl wie an Schwierigkeit der theoretischen Behandlung von Bedeutung sind, dass ferner Herr Ludendorff die Störungen der Bahnebene nicht berücksichtigt hat, glaubte ich auf Berechtigung zu einer Weiterführung dieser Arbeit schliessen zu dürfen. Es schien mir erwünscht, nicht nur den Einfluss der Breitenstörungen zu berücksichtigen, sondern auch die Veränderlichkeit gewisser langperiodischer Funktionen, wenigstens in den Gliedern der Form C und D . Ebenso hielt ich eine Mitnahme der wichtigsten Glieder dritten Grades für zweckmässig, insofern sie durch die Form der Differentialgleichung oder durch die angewandte Integrationsmethode aus solchen niederen Grades entstanden sind. Vor allem aber suchte ich die Untersuchung auf den Fall der kritischen Planeten auszudehnen, welche allerdings im „ $1/2$ “-Typus bisher noch nicht entdeckt worden sind. Die Durchsichtigkeit und Einfachheit der von Herrn Brendel überall angewandten Gylden'schen partiellen Integrationsmethode veranlassten mich hierzu umsomehr, da Herr Brendel ihre Anwendbarkeit auch für eine sogenannte strenge Kommen-surabilität nachgewiesen hat. Dass diese Methode ohne verhältnismässig grosse Schwierigkeiten bei derartigen Planeten zum Ziele führt, sollen die im folgenden gegebenen Untersuchungen darthun.

Hinsichtlich des Grades der Annäherung, den eine mit der im folgenden eingehaltenen Genauigkeit gerechnete Bahn gewährt, kann das entscheidende Wort nur der numerischen Rechnung zustehen. Immerhin glaube ich aus der theoretischen Entwicklung schliessen zu dürfen, dass bei charakteristischen Planeten sich eine Darstellung innerhalb der Beobachtungsgrenzen erreichen lässt.

Das Hauptgewicht ist in den folgenden Ausführungen auf die charakteristischen Glieder gelegt worden, da diese für die hier verfolgten Zwecke von grösserer Bedeutung zu sein scheinen, als die elementaren Glieder, deren erst nach einem längeren Zeitraum merklich werdender Einfluss durch eine seculare Variation der Elemente berücksichtigt werden kann, wie Herr Brendel gezeigt hat. Die A -Glieder, die in S von der Ordnung m' resp. $\frac{m'}{\delta_1}$ sind, habe ich in der Differentialgleichung für W noch vor der Integration in secularer Form dargestellt, so dass sie nicht vergrössert erscheinen können. Eine derartige Darstellung ist möglich, da es sich hier um keine absolute Bahn im Sinne Gyldens handelt.

Es möge mir noch gestattet sein, Herrn Brendel für die mannigfache Anregung und wertvollen Ratschläge, die ich während dieser Untersuchungen von ihm empfangen habe, und Herrn Schur, welcher diese Arbeit der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt hat, für das dabei bekundete Interesse meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Erstes Kapitel.

Die Differentialgleichungen der Gyldén'schen Störungstheorie. — Ergänzungen zur Entwicklung der Störungsfunktion und ihrer Derivierten in der von Herrn Brendel gegebenen Form. — Transformation dieser Ausdrücke.

1) Obwohl Herr Brendel (a. a. O.) eine erschöpfende Herleitung der Differentialgleichungen des Problems gegeben hat, und obwohl in den verschiedenen Abhandlungen, die einen weiteren Ausbau dieser Methode anstreben, ebenfalls kürzere Uebersichten über die Grundlagen der Theorie angeführt sind, sollen hier dennoch die wichtigeren Formeln mitgeteilt werden, um ein allzuhäufiges Hinweisen auf diese Schriften zu vermeiden.

Dem Vorgehen Hansens folgend hatte Gyldén ebenfalls „ideale Koordinaten“ eingeführt, welche eine vollständige Trennung der Bewegung in der Bahnebene von den Störungen dieser Ebene selbst gestatten. Für den ersten Teil des Problems lauten die Differentialgleichungen in der von Herrn Brendel angewandten Gestalt:

$$(1) \quad \frac{1}{1+S} \frac{dS}{dv} = -(1+S)^2 Q - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\eta^2} \frac{d\eta^2}{dv},$$

$$(2) \quad \frac{d^2[(\varrho) + R]}{dv^2} + [(\varrho) + R] = - \left[\frac{2}{1-\eta^2} \frac{d\eta^2}{dv} + (1+S)^2 Q \right] \frac{d[(\varrho) + R]}{dv} \\ - \left[\frac{1}{1-\eta^2} \frac{d^2\eta^2}{dv^2} + \frac{2}{(1-\eta^2)^2} \left(\frac{d\eta^2}{dv} \right)^2 + \frac{(1+S)^2}{1-\eta^2} \frac{d\eta^2}{dv} Q \right] (1+(\varrho) + R) + 2S + S^2 - (1+S)^2 P,$$

$$(3) \quad \frac{dW}{dv} = S - 2R - 2RS + 3R^2 \pm \dots \\ + [6R - 2S - 12R^2 + 6RS \pm \dots] \eta \cos v \\ - 3\eta^2 R + [\frac{3}{2}S - 6R \pm \dots] \eta^2 \cos 2v \pm \dots - \frac{dE}{dv}.$$

Hier bezeichnet S die eine Gyldén'sche Koordinate, welche den Zusammenhang zwischen der wahren Länge in der Bahn v und der Zeit t für die gestörte Bewegung vermittelt und durch folgende Gleichung definiert ist:

$$(4) \quad r^2 \frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{Ma(1-\eta^2)}}{1+S}.$$

Es ist gesetzt $M = k^2(1+m)$, und unter a , dem Protometer Gyldéns, wird hier kein absolutes Element verstanden. η ist eine langperiodische elementare Funktion und so gewählt, dass S derartige Glieder nicht mehr enthalten kann. Die andere Gyldén'sche Koordinate ($= \varrho$) ist definiert durch

$$(5) \quad r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho},$$

und ist in zwei Teile zerspalten worden, einen elementaren Teil (ϱ), und einen Teil R , der, von besonderen Fällen abgesehen, von der Ordnung der störenden Masse ist.

Unter $\frac{1}{n} W$ ist die „Zeitreduktion“ verstanden, eine Grösse, die durch die Einführung der wahren Länge als Integrationsvariable bedingt wird. Sie stellt die Verbindung dar zwischen der wahren Zeit t , welche von vornherein bekannt ist, und der reducierten Zeit (t), welche sich von der wahren nur um den Betrag der periodischen Störungen, eben dieses W , unterscheidet. Also

$$(6) \quad nt = n(t) + W;$$

(t) ist demnach die ungestörte Zeit, analog den ungestörten Anomalieen in den älteren Theorien.

P und Q sind gewisse partielle Ableitungen der Störungsfunktion, deren Bedeutung weiter unten mitgeteilt wird.

Versteht man unter \mathfrak{z} den Sinus der heliocentrischen Breite des gestörten Planeten, so lässt sich sein von den Störungen afficierter Wert aus folgender Gleichung ermitteln:

$$(7) \quad \frac{d^3[(\mathfrak{z}) + \mathfrak{Z}]}{dv^2} + [(\mathfrak{z}) + \mathfrak{Z}] = -(1+S)^2 Q \frac{d[(\mathfrak{z}) + \mathfrak{Z}]}{dv} + (1+S)^2 Z,$$

wo Z wieder eine Derivierte der Störungsfunktion bezeichnet, und \mathfrak{z} analog früherem in einen elementaren Teil (\mathfrak{z}) und einen Teil \mathfrak{Z} von der Ordnung der störenden Masse zerlegt ist.

Die beiden langperiodischen Funktionen (ϱ) und (\mathfrak{z}) sollen so definiert werden:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\varrho) = \eta \cos v \quad , \quad v = v - II, \\ (\mathfrak{z}) = \sin j \sin v, \quad v = v - \sigma, \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\varrho) = \eta \cos v \quad , \quad v = v - II, \\ (\mathfrak{z}) = \sin j \sin v, \quad v = v - \sigma, \end{array} \right.$$

wo $\sin j$, η , σ und II vier weitere langperiodische Funktionen sind, und zwar sind η und II der elliptischen Excentricität und Perihellänge, $\sin j$ und σ der elliptischen Bahnneigung und Knotenlänge ähnlich; nur dass sie nicht konstant sind, sondern sich sehr langsam im Laufe der Zeit ändern. Die Einführung dieser Funktionen verhindert das Auftreten von secularen Gliedern in der Gyl-dén'schen Theorie. Definiert sind sie durch die Gleichungen:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta \frac{\cos}{\sin} II = \kappa \frac{\cos}{\sin} \omega + \sum \kappa_n \frac{\cos}{\sin} \omega_n, \\ \sin j \frac{\cos}{\sin} \sigma = \sin \iota \frac{\cos}{\sin} \vartheta + \sum \sin \iota_n \frac{\cos}{\sin} \vartheta_n, \\ \omega = \Gamma + s v, \quad \vartheta = \Theta - \tau v, \\ \omega_n = \Gamma_n + s_n v, \quad \vartheta_n = \Theta_n - \tau_n v. \end{array} \right.$$

ist, wird nach dem Vorgange Gyldéns nach Vielfachen des $\cos H$ und nach Potenzen einer Grösse λ entwickelt, die ihrerseits wieder Funktion des Verhältnisses $\alpha = \frac{a}{a'}$ der Halbachsen vom störenden und gestörten Körper ist. Eine solche Entwicklung nach Potenzen von α wird, insofern diese Halbachsen wesentlich von einander verschieden sind, gut konvergieren. Die Koeffizienten dieser Entwicklung werden $\gamma_{k,l}$ bezeichnet und sind Funktionen von α sowie gewisser Grössen $\beta_n^{(s)}$, die von Masal tabuliert worden sind¹⁾ und durch das elliptische Integral I. und II. Gattung dargestellt werden können. Für die $\gamma_{k,l}$ hat Gyldén Tafeln entworfen²⁾. Da in λ noch das Verhältnis der Radiivektoren auftritt, so wird in Hinsicht auf Formel (5) die Entwicklung der Störungsfunktion nach Potenzen von η und ϱ fortschreiten. Das Auftreten des $\cos H$ dagegen bringt, wie aus Formel (12) hervorgeht, den $\sin b$, d. h. z herein.

Gyldén hat der Störungsfunktion (cf. Brendel: Theorie d. kl. Planeten, pag. 46—56) folgende Gestalt gegeben, unter Vernachlässigung von Gliedern vierten Grades:

$$(13) \quad a\Omega = a(\Omega) + \frac{ad(\Omega)}{d \cos H_1} h,$$

und $a(\Omega)$ durch folgende trigonometrische Reihe dargestellt:

$$(14) \quad a(\Omega) = 2 \sum' \Omega_{(n,s,s')v,v'} \varrho^s \varrho^{s'} \eta^{2v} \eta^{2v'} \cos n H_1.$$

Die Werte der Ω -Koeffizienten sind pag. 52 gegeben. $\cos H$ ist unter Vernachlässigung von Grössen vierten Grades in 2 Teile zerlegt worden, in den Hauptteil $\cos H_1$ und einen Teil zweiten Grades = h . Der zweite Teil der Störungsfunktion wird gegeben durch

$$(15) \quad \frac{ad(\Omega)}{d \cos H_1} = 2 \sum' \bar{\Omega}_{(n,s,s')v,v'} \varrho^s \varrho^{s'} \eta^{2v} \eta^{2v'} \cos n H_1 \quad (\text{a. a. O. pag. 55}).$$

Nach diesen Vorbemerkungen sollen jetzt die Formeln für die partiellen Derivierten Q, P, Z aufgeführt werden. Gyldén hat definiert: $Q = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)} \frac{\partial \Omega}{\partial v}$, und es folgt unter Vernachlässigung von Gliedern dritten Grades folgende trigonometrische Reihe für Q :

$$(16) \quad Q = -2 \sum n Q_{(n,s,s')v,v'} \varrho^s \varrho^{s'} \eta^{2v} \eta^{2v'} \sin n H_1 \\ - 2 \sum n \bar{Q}_{n,0,0} h \sin n H_1 + 2 \sum' \bar{Q}_{n,0,0} \frac{\partial h}{\partial v} \cos n H_1.$$

1) Masal: Table de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} \varphi d\varphi}{(1-\alpha^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{s}{2}}}$ servant à la détermination des perturbations

des petites planètes par Jupiter et Saturne. Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar etc. IV. 5. Stockholm 1891.

2) Gyldén: Hülftafeln zur Berechnung der Hauptungleichheiten in den absoluten Bewegungstheorien der kleinen Planeten. Publ. XXI d. Astron. Gesellschaft. Leipzig 1896.

Der Strich am Summenzeichen zeigt an, dass für $n = 0$ der Faktor 2 zu unterdrücken ist. Die Werte der Q -Koeffizienten stehen Br.¹⁾ pag. 56, die Reihen für h und $\frac{\partial h}{\partial v}$ sind pag. 75 zu finden.

Fernerhin ist $P = r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r}$, sowie $Z = \frac{m'}{1+m} \frac{r^3 r'}{a(1-\eta^2)} \left(\frac{1}{\mathcal{A}^3} - \frac{1}{r'^3} \right) (\mathcal{A}' - \mathcal{A} \cos H)$, und es gelten folgende Reihen für P und Z unter Vernachlässigung des dritten Grades:

$$(17) \quad P = 2 \sum' P_{(n,s,s')_{v,v'}} \varrho^s \varrho^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \cos n H_1 \\ + 2 \sum' \bar{P}_{n-0,0} h \cos n H_1$$

$$(18) \quad Z = 2 \sum' Y_{(n,s,s')_{v,v'}} \varrho^s \varrho^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \mathcal{A} \cos n H_1 \\ + 2 \sum' X_{(n,s,s')_{v,v'}} \varrho^s \varrho^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \mathcal{A}' \cos n H_1.$$

Die Werte der P, Y, X -Koeffizienten sind in Br. pag. 57 und 59 zu finden. Bei den folgenden Untersuchungen hat es sich herausgestellt, dass für unseren Fall noch einige dieser Koeffizienten benötigt werden, welche dort nicht gegeben worden sind, und die hier ohne Ableitung angeführt werden sollen:

$$(19) \quad \bar{Q}_{n-1,0} = \bar{\Omega}_{n-1,0} - 2\bar{\Omega}_{n-0,0}$$

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{ll} P_{n-3,0} = -4\Omega_{n-4,0} & P_{(n-1,0)_{1,0}} = -2\Omega_{(n-2,0)_{1,0}} + 2\Omega_{n-2,0} \\ P_{n-2,1} = -3\Omega_{n-3,1} & P_{(n-1,0)_{0,1}} = -2\Omega_{(n-2,0)_{0,1}} \\ P_{n-1,2} = -2\Omega_{n-2,2} & \bar{P}_{n-1,0} = -2\bar{\Omega}_{n-2,0} \end{array} \right.$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{ll} X_{n-2,0} = \bar{Q}_{n-2,0} = \bar{\Omega}_{n-2,0} - 2\bar{\Omega}_{n-1,0} + 3\bar{\Omega}_{n-0,0} \\ X_{n-1,1} = \bar{Q}_{n-1,1} = \bar{\Omega}_{n-1,1} - 2\bar{\Omega}_{n-0,1} \\ Y_{n-2,0} = -\frac{X_{n-1,2,0} + X_{n+1,2,0}}{2}, & Y_{0,2,0} = -X_{1,2,0} \\ Y_{n-1,1} = -\frac{X_{n-1,1,1} + X_{n+1,1,1}}{2}, & Y_{0,1,1} = -X_{1,1,1} \end{array} \right.$$

Ihre Berechnung erfordert noch die Kenntnis folgender Ω -Koeffizienten:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_{n-2,0} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \bar{g}_{n-0} + (2n+5) g_{n-1} + 4g_{n-2} \\ \bar{\Omega}_{n-1,1} = -(n+1)(n+2) \bar{g}_{n-0} - 2(2n+5) g_{n-1} - 8g_{n-2}, \end{array} \right.$$

ferner der Glieder $\Omega_{n-4,0}$, $\Omega_{n-3,1}$, $\Omega_{n-2,2}$, $\Omega_{(n-2,0)_{1,0}}$, $\Omega_{(n-2,0)_{0,1}}$, für welche die Entwicklung der Störungsfunktion bis zum vierten Grade inclusive zu leisten wäre.

1) Mit Br. sei hier und im folgenden abkürzend Brendel, Theorie der kl. Planeten, bezeichnet.

3) Zur weiteren Verwendung dieser Reihen bedarf es noch einer Transformation, dadurch bedingt, dass H_1 die Längen v und v' des störenden und gestörten Körpers enthält, und dass die Beibehaltung dieser beiden Variablen die Integration sehr erschweren würde. Nach einem von Gyldén gegebenen eleganten Verfahren wird die Länge des störenden Körpers durch die des gestörten ersetzt. Das Nähere hierüber findet sich in Br. Kap. 5, und soll hier nur erwähnt werden, dass ebenfalls für den störenden Körper eine Zerlegung in (ϱ') und R' sowie (\mathfrak{z}') und \mathfrak{Z}' vorgenommen wird, dass ferner R' und \mathfrak{Z}' für unsere Zwecke vernachlässigt werden, dass nach R und \mathfrak{Z} dagegen entwickelt wird. Weiterhin besteht H_1 der Hauptsache nach aus $v - v'$, und die Ersetzung von v' durch v führt W und W' ein. Es wird W' vernachlässigt und W in 2 Teile zerlegt, in V , das sämtliche langperiodisch elementaren und charakteristischen Glieder enthalten soll, sowie die secularen, die durch die partielle Integration und ein anderes noch später eingehend zu behandelndes Verfahren bei uns wieder eingeführt werden, und in K , welches kurzperiodisch, also von der Ordnung der Masse ist. Weiter treten noch die in der Reduktion auf die Ekliptik (Formel 11) eine Rolle spielenden Grössen H und H' auf, von denen nur ihre secularen Teile c und c' mitgenommen werden. Dann wird nach Potenzen von K entwickelt, V dagegen unter dem trigonometrischen Zeichen belassen, da diese Grösse sich bei den charakteristischen Planeten schon der Einheit nähert, und eine Reihe nach ihren Potenzen nur sehr langsam fallen würde. Des weiteren wird dann noch in (ϱ') sowie (\mathfrak{z}') und h das v' durch v ersetzt.

Hierdurch erscheinen die Derivierten der Störungsfunktion P , Q , Z unter Vernachlässigung von Grössen rein zweiter Ordnung und dritten Grades als trigonometrische Reihen von folgender Gestalt:

$$\begin{aligned}
 (23) \quad Q = & \sum A_n \eta^v \eta'^{v_1} \sin(nw \pm v'v \pm v'_1 v_1) + \sum A_n^{1^0} R \eta^v \eta'^{v_1} \sin(nw \pm v'v \pm v'_1 v_1) \\
 & + \sum k_n A_n K \eta^v \eta'^{v_1} \cos(nw \pm v'v \pm v'_1 v_1) \\
 & + \sum \bar{A}_n \sin^v j \sin^{v_1} j' \sin(nw \pm v'v \pm v'_1 v_1) + \sum k_n \bar{A}_n K \sin^v j \sin^{v_1} j' \cos(nw \pm v'v \pm v'_1 v_1) \\
 & + \sum \bar{A}_n^{1^0} \mathfrak{Z} \sin^v j \sin^{v_1} j' \cos(nw \pm v'v \pm v'_1 v_1) \\
 & + \sum \bar{A}_n^{0^{\pm 1}} \frac{d\mathfrak{Z}}{dv} \sin^v j \sin^{v_1} j' \sin(nw \pm v'v \pm v'_1 v_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (24) \quad P = & \sum B_n \eta^v \eta'^{v_1} \cos(nw \pm v'v \pm v'_1 v_1) + \sum B_n^{1^0} R \eta^v \eta'^{v_1} \cos(nw \pm v'v \pm v'_1 v_1) \\
 & + \sum k_n B_n K \eta^v \eta'^{v_1} \sin(nw \pm v'v \pm v'_1 v_1) + \sum \bar{B}_n \sin^v j \sin^{v_1} j' \cos(nw \pm v'v \pm v'_1 v_1) \\
 & + \sum \bar{B}_n^{1^0} \mathfrak{Z} \sin^v j \sin^{v_1} j' \sin(nw \pm v'v \pm v'_1 v_1) + \sum \bar{B}_n^{0^{\pm 1}} \frac{d\mathfrak{Z}}{dv} \sin^v j \sin^{v_1} j' \cos(nw \pm v'v \pm v'_1 v_1)
 \end{aligned}$$

$$(25) \quad Z = \sum C_n \eta^v \sin j^v \sin(nw \pm v \nu \pm \nu \nu) + \sum C_n^{1^0} R \eta^v \sin j^v \sin(nw \pm v \nu \pm \nu \nu) \\ + \sum k_n C_n K \eta^v \sin j^v \cos(nw \pm v \nu \pm \nu \nu) + \sum C_n^{0^1} \beta \cos nw + \dots \dots \dots \\ \text{(analog für } \eta' \text{ und } j'),$$

wo die mit R , K , β und $\frac{d\beta}{dv}$ multiplizierten Glieder schon Störungen zweiter Ordnung geben, deren Mitnahme später gerechtfertigt werden soll; k_n bezeichnet gewisse Zahlenfaktoren. Hinsichtlich der Einzelheiten in Gestalt der Formeln, sowie der Wahl der Indices muss auf Br. pag. 70 bis 72 und pag. 76 bis 83 verwiesen werden.

4) Es hat sich gezeigt, dass in unserem Falle noch Glieder berücksichtigt werden müssen, die Herr Brendel nicht gegeben hat, und hier sollen diese Ergänzungen mitgeteilt werden, so dass einschliesslich dieser Glieder die Formeln für die Q , P , Z in allen Fällen des Planetensystems ausreichen werden:

$$(21) \quad \text{pars } Q = \sum \bar{A}_{n,2,0}^{1^0} R \sin^2 j \sin nw + \sum \bar{A}_{n,2,0}^{+2,1^0} R \sin^2 j \sin(nw + 2v) \\ + \sum \bar{A}_{n,2,0}^{-2,1^0} R \sin^2 j \sin(nw - 2v) \\ + \sum \bar{A}_{n,1,1}^{+2,1^0} R \sin j \sin j' \sin(nw + v + v_1) + \sum \bar{A}_{n,1,1}^{+1,1^0} R \sin j \sin j' \sin(nw + v - v_1) \\ + \sum \bar{A}_{n,1,1}^{-1,1^0} R \sin j \sin j' \sin(nw - v + v_1) + \sum \bar{A}_{n,1,1}^{-2,1^0} R \sin j \sin j' \sin(nw - v - v_1) \\ + \sum \bar{A}_{n,0,2}^{1^0} R \sin^2 j' \sin nw + \sum \bar{A}_{n,0,2}^{+2,1^0} R \sin^2 j' \sin(nw + 2v_1) \\ + \sum \bar{A}_{n,0,2}^{-2,1^0} R \sin^2 j' \sin(nw - 2v_1)$$

Die Koeffizienten sind:

$$(22) \quad \bar{A}_{n,2,0}^{1^0} = \frac{n}{4} (\bar{Q}_{n-1,1,0} + \bar{Q}_{n+1,1,0}) \quad \bar{A}_{n,1,1}^{+2,1^0} = \frac{n+2}{2} \bar{Q}_{n+1,1,0} \quad \bar{A}_{n,0,2}^{1^0} = \frac{n}{4} (\bar{Q}_{n-1,1,0} + \bar{Q}_{n+1,1,0}) \\ \bar{A}_{n,2,0}^{+2,1^0} = -\frac{n+2}{4} \bar{Q}_{n+1,1,0} \quad \bar{A}_{n,1,1}^{+1,1^0} = -\frac{n}{2} \bar{Q}_{n-1,1,0} \quad \bar{A}_{n,0,2}^{+2,1^0} = -\frac{n+2}{4} \bar{Q}_{n+1,1,0} \\ \bar{A}_{n,2,0}^{-2,1^0} = -\frac{n-2}{4} \bar{Q}_{n-1,1,0} \quad \bar{A}_{n,1,1}^{-1,1^0} = -\frac{n}{2} \bar{Q}_{n+1,1,0} \quad \bar{A}_{n,0,2}^{-2,1^0} = -\frac{n-2}{4} \bar{Q}_{n-1,1,0} \\ \bar{A}_{n,1,1}^{-2,1^0} = \frac{n-2}{2} \bar{Q}_{n-1,1,0} \\ \bar{A}_{0,2,0}^{1^0} = 0 \quad \bar{A}_{0,1,1}^{+2,1^0} = \bar{Q}_{1,1,0} \quad \bar{A}_{0,0,2}^{1^0} = 0 \\ \bar{A}_{0,2,0}^{+2,1^0} = -\frac{1}{2} \bar{Q}_{1,1,0} \quad \bar{A}_{0,1,1}^{+1,1^0} = 0 \quad \bar{A}_{0,0,2}^{+2,1^0} = -\frac{1}{2} \bar{Q}_{1,1,0} \\ \bar{A}_{0,2,0}^{-2,1^0} = 0 \quad \bar{A}_{0,1,1}^{-1,1^0} = 0 \quad \bar{A}_{0,0,2}^{-2,1^0} = 0 \\ \bar{A}_{0,1,1}^{-2,1^0} = 0$$

In P kämen noch folgende von Herrn Brendel nicht gegebene Glieder hinzu:

$$\begin{aligned}
 (24a) \text{ pars } P = & \sum B_{n-2,0}^{1,0} R \eta^2 \cos nw & + \sum B_{n-1,1}^{+2,1,0} R \eta \eta' \cos(nw + v + v_1) & + \sum B_{n-0,2}^{1,0} R \eta'^2 \cos nw \\
 & + \sum B_{n-2,0}^{+2,1,0} R \eta^2 \cos(nw + 2v) & + \sum B_{n-1,1}^{+1,1,0} R \eta \eta' \cos(nw + v - v_1) & + \sum B_{n-0,2}^{+2,1,0} R \eta'^2 \cos(nw + 2v) \\
 & + \sum B_{n-2,0}^{-2,1,0} R \eta^2 \cos(nw - 2v) & + \sum B_{n-1,1}^{-1,1,0} R \eta \eta' \cos(nw - v + v_1) & + \sum B_{n-0,2}^{-2,1,0} R \eta'^2 \cos(nw - 2v) \\
 & & + \sum B_{n-1,1}^{-2,1,0} R \eta \eta' \cos(nw - v - v_1) & \\
 & + \sum n\mu B_{n-2,0} K \eta^2 \sin nw & + \sum n\mu B_{n-1,1}^{+2} K \eta \eta' \sin(nw + v + v_1) & + \sum n\mu B_{n-0,2} K \eta'^2 \sin nw \\
 & + \sum n\mu B_{n-2,0}^{+2} K \eta^2 \sin(nw + 2v) & + \sum n\mu B_{n-1,1}^{+1} K \eta \eta' \sin(nw + v - v_1) & + \sum n\mu B_{n-0,2}^{+2} K \eta'^2 \sin(nw + 2v) \\
 & + \sum n\mu B_{n-2,0}^{-2} K \eta^2 \sin(nw - 2v) & + \sum n\mu B_{n-1,1}^{-1} K \eta \eta' \sin(nw - v + v_1) & + \sum n\mu B_{n-0,2}^{-2} K \eta'^2 \sin(nw - 2v) \\
 & & + \sum n\mu B_{n-1,1}^{-2} K \eta \eta' \sin(nw - v - v_1) & \\
 & + \sum \bar{B}_{n-2,0}^{1,0} R \sin^2 j \cos nw & + \sum \bar{B}_{n-1,1}^{+2,1,0} R \sin j \sin j' \cos(nw + v + v_1) & + \sum \bar{B}_{n-0,2}^{1,0} R \sin^2 j' \cos nw \\
 & + \sum \bar{B}_{n-2,0}^{+2,1,0} R \sin^2 j \cos(nw + 2v) & + \sum \bar{B}_{n-1,1}^{+1,1,0} R \sin j \sin j' \cos(nw + v - v_1) & + \sum \bar{B}_{n-0,2}^{+2,1,0} R \sin^2 j' \cos(nw + 2v) \\
 & + \sum \bar{B}_{n-2,0}^{-2,1,0} R \sin^2 j \cos(nw - 2v) & + \sum \bar{B}_{n-1,1}^{-1,1,0} R \sin j \sin j' \cos(nw - v + v_1) & + \sum \bar{B}_{n-0,2}^{-2,1,0} R \sin^2 j' \cos(nw - 2v) \\
 & & + \sum \bar{B}_{n-1,1}^{-2,1,0} R \sin j \sin j' \cos(nw - v - v_1) & \\
 & + \sum n\mu \bar{B}_{n-2,0} K \sin^2 j \sin nw & + \sum n\mu \bar{B}_{n-1,1}^{+2} K \sin j \sin j' \sin(nw + v + v_1) & + \sum n\mu \bar{B}_{n-0,2} K \sin^2 j' \sin nw \\
 & + \sum n\mu \bar{B}_{n-2,0}^{+2} K \sin^2 j \sin(nw + 2v) & + \sum n\mu \bar{B}_{n-1,1}^{+1} K \sin j \sin j' \sin(nw + v - v_1) & + \sum n\mu \bar{B}_{n-0,2}^{+2} K \sin^2 j' \sin(nw + 2v) \\
 & + \sum n\mu \bar{B}_{n-2,0}^{-2} K \sin^2 j \sin(nw - 2v) & + \sum n\mu \bar{B}_{n-1,1}^{-1} K \sin j \sin j' \sin(nw - v + v_1) & + \sum n\mu \bar{B}_{n-0,2}^{-2} K \sin^2 j' \sin(nw - 2v) \\
 & & + \sum n\mu \bar{B}_{n-1,1}^{-2} K \sin j \sin j' \sin(nw - v - v_1) &
 \end{aligned}$$

Die Werte der B -Koeffizienten sind:

$$\begin{aligned}
 (24a) \quad B_{n-2,0}^{1,0} &= 3 P_{n-3,0} - 2n^2 \mu^2 P_{n-1,0} + 2 P_{(n-1,0)1,0} & \bar{B}_{n-2,0}^{1,0} &= -\frac{1}{4} (\bar{P}_{n-1,1,0} + \bar{P}_{n+1,1,0}) \\
 B_{n-2,0}^{+2,1,0} &= \frac{3}{2} P_{n-3,0} + 2n\mu P_{n-2,0} + (n^2 \mu^2 - \frac{3}{4} n\mu) P_{n-1,0} & \bar{B}_{n-2,0}^{+2,1,0} &= \frac{1}{4} \bar{P}_{n+1,1,0} \\
 B_{n-2,0}^{-2,1,0} &= \frac{3}{2} P_{n-3,0} - 2n\mu P_{n-2,0} + (n^2 \mu^2 + \frac{3}{4} n\mu) P_{n-1,0} & \bar{B}_{n-2,0}^{-2,1,0} &= \frac{1}{4} \bar{P}_{n-1,1,0} \\
 B_{n-1,1}^{+2,1,0} &= P_{n+1,2,1} - 2(n+1) P_{n+1,2,0} + n\mu P_{n+1,1,1} - 2n(n+1)\mu P_{n+1,1,0} & \bar{B}_{n-1,1}^{+2,1,0} &= -\frac{1}{2} \bar{P}_{n+1,1,0} \\
 B_{n-1,1}^{+1,1,0} &= P_{n-1,2,1} + 2(n-1) P_{n-1,2,0} + n\mu P_{n-1,1,1} + 2n(n-1)\mu P_{n-1,1,0} & \bar{B}_{n-1,1}^{+1,1,0} &= \frac{1}{2} \bar{P}_{n-1,1,0} \\
 B_{n-1,1}^{-1,1,0} &= P_{n+1,2,1} - 2(n+1) P_{n+1,2,0} - n\mu P_{n+1,1,1} + 2n(n+1)\mu P_{n+1,1,0} & \bar{B}_{n-1,1}^{-1,1,0} &= \frac{1}{2} \bar{P}_{n+1,1,0} \\
 B_{n-1,1}^{-2,1,0} &= P_{n-1,2,1} + 2(n-1) P_{n-1,2,0} - n\mu P_{n-1,1,1} - 2n(n-1)\mu P_{n-1,1,0} & \bar{B}_{n-1,1}^{-2,1,0} &= -\frac{1}{2} \bar{P}_{n-1,1,0} \\
 B_{n-0,2}^{1,0} &= P_{n-1,2} - 2P_{n-1,1} - 2n^2 P_{n-1,0} + 2 P_{(n-1,0)0,1} & \bar{B}_{n-0,2}^{1,0} &= -\frac{1}{4} (\bar{P}_{n-1,1,0} + \bar{P}_{n+1,1,0}) \\
 B_{n-0,2}^{+2,1,0} &= \frac{1}{2} P_{n+2,1,2} - (n+1) P_{n+2,1,1} + (n^2 + \frac{11}{4} n + \frac{3}{2}) P_{n+2,1,0} & \bar{B}_{n-0,2}^{+2,1,0} &= \frac{1}{4} \bar{P}_{n+1,1,0} \\
 B_{n-0,2}^{-2,1,0} &= \frac{1}{2} P_{n-2,1,2} + (n-1) P_{n-2,1,1} + (n^2 - \frac{11}{4} n + \frac{3}{2}) P_{n-2,1,0} & \bar{B}_{n-0,2}^{-2,1,0} &= \frac{1}{4} \bar{P}_{n-1,1,0}
 \end{aligned}$$

Die Abteilung $n = 0$ lautet hier:

$$\begin{aligned}
 (24a) \quad B_{0-2-0}^{1-0} &= \frac{3}{2} P_{0-3-0} + P_{(0-1-0)1-0} & B_{0-1-1}^{+2-1-0} &= P_{1-2-1} - 2P_{1-2-0} & B_{0-0-2}^{1-0} &= \frac{1}{2} P_{0-1-2} - P_{0-1-1} + P_{(0-1-0)0-1} \\
 B_{0-2-0}^{+2-1-0} &= \frac{3}{2} P_{0-3-0} & B_{0-1-1}^{+1-1-0} &= P_{1-2-1} - 2P_{1-2-0} & B_{0-0-2}^{+2-1-0} &= \frac{1}{2} P_{2-1-2} - P_{2-1-1} + \frac{3}{2} P_{2-1-0} \\
 B_{0-2-0}^{-2-1-0} &= 0 & B_{0-1-1}^{-1-1-0} &= 0 & B_{0-0-2}^{-2-1-0} &= 0, \quad B_{1-0-2}^{-2-1-0} = \frac{1}{2} P_{1-1-2} - \frac{1}{4} P_{1-1-0} \\
 & & B_{0-1-1}^{-2-1-0} &= 0 & & \\
 \bar{B}_{0-2-0}^{1-0} &= -\frac{1}{4} \bar{P}_{1-1-0} & \bar{B}_{0-1-1}^{+2-1-0} &= -\frac{1}{2} \bar{P}_{1-1-0} & \bar{B}_{0-0-2}^{1-0} &= -\frac{1}{4} \bar{P}_{1-1-0} \\
 \bar{B}_{0-2-0}^{+2-1-0} &= \frac{1}{4} \bar{P}_{1-1-0} & \bar{B}_{0-1-1}^{+1-1-0} &= \frac{1}{2} \bar{P}_{1-1-0} & \bar{B}_{0-0-2}^{+2-1-0} &= \frac{1}{4} \bar{P}_{1-1-0} \\
 \bar{B}_{0-2-0}^{-2-1-0} &= 0 & \bar{B}_{0-1-1}^{-1-1-0} &= 0 & \bar{B}_{0-0-2}^{-2-1-0} &= 0 \\
 & & \bar{B}_{0-1-1}^{-2-1-0} &= 0 & &
 \end{aligned}$$

Schliesslich sollen noch einige Ergänzungen zu Z gegeben werden:

$$\begin{aligned}
 (25a) \quad \text{pars } Z &= \sum C_{n-0-0-1-0}^{+1-0-1} \mathfrak{Z} \eta \cos(nw + v) & + \sum C_{n-0-0-0-1}^{+1-0-1} \mathfrak{Z} \eta' \cos(nw + v_1) \\
 &+ \sum C_{n-0-0-1-0}^{-1-0-1} \mathfrak{Z} \eta \cos(nw - v) & + \sum C_{n-0-0-0-1}^{-1-0-1} \mathfrak{Z} \eta' \cos(nw - v_1) \\
 &+ \sum C_{n-1-0-1-0}^{+2-1-0} R \eta \sin j \sin(nw + v + v) & + \sum C_{n-1-0-0-1}^{+2-1-0} R \eta' \sin j \sin(nw + v + v_1) \\
 &+ \sum C_{n-1-0-1-0}^{+1-1-0} R \eta \sin j \sin(nw + v - v) & + \sum C_{n-1-0-0-1}^{+1-1-0} R \eta' \sin j \sin(nw + v - v_1) \\
 &+ \sum C_{n-1-0-1-0}^{-1-1-0} R \eta \sin j \sin(nw - v + v) & + \sum C_{n-1-0-0-1}^{-1-1-0} R \eta' \sin j \sin(nw - v + v_1) \\
 &+ \sum C_{n-1-0-1-0}^{-2-1-0} R \eta \sin j \sin(nw - v - v) & + \sum C_{n-1-0-0-1}^{-2-1-0} R \eta' \sin j \sin(nw - v - v_1) \\
 &+ \sum C_{n-0-1-1-0}^{+2-1-0} R \eta \sin j' \sin(nw + v_1 + v) & + \sum C_{n-0-1-0-1}^{+2-1-0} R \eta' \sin j' \sin(nw + v_1 + v_1) \\
 &+ \sum C_{n-0-1-1-0}^{+1-1-0} R \eta \sin j' \sin(nw + v_1 - v) & + \sum C_{n-0-1-0-1}^{+1-1-0} R \eta' \sin j' \sin(nw + v_1 - v_1) \\
 &+ \sum C_{n-0-1-1-0}^{-1-1-0} R \eta \sin j' \sin(nw - v_1 + v) & + \sum C_{n-0-1-0-1}^{-1-1-0} R \eta' \sin j' \sin(nw - v_1 + v_1) \\
 &+ \sum C_{n-0-1-1-0}^{-2-1-0} R \eta \sin j' \sin(nw - v_1 - v) & + \sum C_{n-0-1-0-1}^{-2-1-0} R \eta' \sin j' \sin(nw - v_1 - v_1) \\
 &- \sum n\mu C_{n-1-0-1-0}^{+2} K \eta \sin j \cos(nw + v + v) & - \sum n\mu C_{n-1-0-0-1}^{+2} K \eta' \sin j \cos(nw + v + v_1) \\
 &- \sum n\mu C_{n-1-0-1-0}^{+1} K \eta \sin j \cos(nw + v - v) & - \sum n\mu C_{n-1-0-0-1}^{+1} K \eta' \sin j \cos(nw + v - v_1) \\
 &- \sum n\mu C_{n-1-0-1-0}^{-1} K \eta \sin j \cos(nw - v + v) & - \sum n\mu C_{n-1-0-0-1}^{-1} K \eta' \sin j \cos(nw - v + v_1) \\
 &- \sum n\mu C_{n-1-0-1-0}^{-2} K \eta \sin j \cos(nw - v - v) & - \sum n\mu C_{n-1-0-0-1}^{-2} K \eta' \sin j \cos(nw - v - v_1) \\
 &- \sum n\mu C_{n-0-1-1-0}^{+2} K \eta \sin j' \cos(nw + v_1 + v) & - \sum n\mu C_{n-0-1-0-1}^{+2} K \eta' \sin j' \cos(nw + v_1 + v_1) \\
 &- \sum n\mu C_{n-0-1-1-0}^{+1} K \eta \sin j' \cos(nw + v_1 - v) & - \sum n\mu C_{n-0-1-0-1}^{+1} K \eta' \sin j' \cos(nw + v_1 - v_1) \\
 &- \sum n\mu C_{n-0-1-1-0}^{-1} K \eta \sin j' \cos(nw - v_1 + v) & - \sum n\mu C_{n-0-1-0-1}^{-1} K \eta' \sin j' \cos(nw - v_1 + v_1) \\
 &- \sum n\mu C_{n-0-1-1-0}^{-2} K \eta \sin j' \cos(nw - v_1 - v) & - \sum n\mu C_{n-0-1-0-1}^{-2} K \eta' \sin j' \cos(nw - v_1 - v_1)
 \end{aligned}$$

Hier ist

$$\begin{aligned}
 (25a) \quad C_{n-0-0-1-0}^{+1-0-1} &= 2n\mu Y_{n-0-0} + Y_{n-1-0} & C_{n-0-0-0-1}^{+1-0-1} &= -2(n+1) Y_{n+1-0-0} + Y_{n+1-0-1} \\
 C_{n-0-0-1-0}^{-1-0-1} &= -2n\mu Y_{n-0-0} + Y_{n-1-0} & C_{n-0-0-0-1}^{-1-0-1} &= 2(n-1) Y_{n-1-0-0} + Y_{n-1-0-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{n-1,0,1,0}^{+2,1,0} &= Y_{n,2,0} & C_{n-1,0,0,1}^{+2,1,0} &= \frac{1}{2} Y_{n+1,1,1} \\
C_{n-1,0,1,0}^{+1,1,0} &= Y_{n,2,0} & C_{n-1,0,0,1}^{+1,1,0} &= \frac{1}{2} Y_{n-1,1,1} \\
C_{n-1,0,1,0}^{-1,1,0} &= -Y_{n,2,0} & C_{n-1,0,0,1}^{-1,1,0} &= -\frac{1}{2} Y_{n+1,1,1} \\
C_{n-1,0,1,0}^{-2,1,0} &= -Y_{n,2,0} & C_{n-1,0,0,1}^{-2,1,0} &= -\frac{1}{2} Y_{n-1,1,1} \\
\\
C_{n,0,1,1,0}^{+2,1,0} &= X_{n+1,2,0} & C_{n,0,1,0,1}^{+2,1,0} &= \frac{1}{2} X_{n+2,1,1} \\
C_{n,0,1,1,0}^{+1,1,0} &= X_{n+1,2,0} & C_{n,0,1,0,1}^{+1,1,0} &= \frac{1}{2} X_{n-1,1} \\
C_{n,0,1,1,0}^{-1,1,0} &= -X_{n-1,2,0} & C_{n,0,1,0,1}^{-1,1,0} &= -\frac{1}{2} X_{n-1,1} \\
C_{n,0,1,1,0}^{-2,1,0} &= -X_{n-1,2,0} & C_{n,0,1,0,1}^{-2,1,0} &= -\frac{1}{2} X_{n-2,1,1}
\end{aligned}$$

Des weiteren ist:

$$\begin{aligned}
(25a) \quad C_{0,0,0,1,0}^{+1,0,1} &= Y_{0,1,0} & C_{0,1,0,1,0}^{+2,1,0} &= Y_{0,2,0} & C_{0,1,0,0,1}^{+2,1,0} &= \frac{1}{2} Y_{1,1,1} \\
C_{0,0,0,1,0}^{-1,0,1} &= 0 & C_{0,1,0,1,0}^{+1,1,0} &= Y_{0,2,0} & C_{0,1,0,0,1}^{+1,1,0} &= \frac{1}{2} Y_{1,1,1} \\
C_{0,0,0,0,1}^{+1,0,1} &= -2Y_{1,0,0} + Y_{1,0,1} & C_{0,1,0,1,0}^{-1,1,0} &= 0 & C_{0,1,0,0,1}^{-1,1,0} &= 0 \\
C_{0,0,0,0,1}^{-1,0,1} &= 0 & C_{0,1,0,1,0}^{-2,1,0} &= 0 & C_{0,1,0,0,1}^{-2,1,0} &= 0 \\
\\
C_{0,0,1,1,0}^{+2,1,0} &= X_{1,2,0} & C_{0,0,1,0,1}^{+2,1,0} &= \frac{1}{2} X_{2,1,1} \\
C_{0,0,1,1,0}^{+1,1,0} &= X_{1,2,0} & C_{0,0,1,0,1}^{+1,1,0} &= \frac{1}{2} X_{0,1,1} \\
C_{0,0,1,1,0}^{-1,1,0} &= 0 & C_{0,0,1,0,1}^{-1,1,0} &= 0 \\
C_{0,0,1,1,0}^{-2,1,0} &= 0 & C_{0,0,1,0,1}^{-2,1,0} &= 0, \quad C_{1,0,1,0,1}^{-2,1,0} &= -\frac{1}{2} X_{1,1,1}
\end{aligned}$$

Wie aus den Formeln 23, 24, 25 hervorgeht, schreiten die Entwicklungen direkt nach Potenzen von Excentricitäts- und Neigungsmodul fort, was ein Grundprincip der Methode Herrn Brendels ist. Ausserdem treten noch die Potenzen der störenden Masse auf, ein Umstand, der nur für die charakteristischen Planeten von Bedeutung ist, da nur für sie eine Mitnahme von Störungen zweiter Ordnung in Bezug auf die Masse nötig ist. Demnach kommen die hier gegebenen Ergänzungen zu Q , P , Z auch nur für diese Planeten in Betracht, und da bei der Entwicklung der Derivierten schon Glieder dritten Grades vernachlässigt sind, also wir auch in diesen Reihen den dritten Grad fortlassen können, so werden sie auch nur für charakteristische Planeten der ersten Klasse gebraucht werden, also für den Hecuba-, Hilda- und Thule-Typus.

Zweites Kapitel.

Definition der charakteristischen und kritischen Planeten. —
 Aufstellung der Differentialgleichungen für die Planeten des Hecuba-
 Typus unter Mitnahme der zweiten Potenz der störenden Masse in
 den charakteristischen Gliedern in Q, P, Z .

1) Es sollen jetzt die charakteristischen und kritischen Planeten, mit denen sich unsere Untersuchungen hauptsächlich zu beschäftigen haben, genau definiert werden. Zu dem Zwecke wollen wir die Form der Argumente betrachten. Nach Herrn Brendel ist:

$$(26) \quad w = (1 - \mu_1)v - B - \mu \bar{V},$$

welche Grösse ja in allen charakteristischen Argumenten auftritt. Hier ist v die wahre Länge in der momentanen Bahnebene, B eine Konstante, und zwar ist

$$(27) \quad B = A' - \mu A.$$

\bar{V} ist bis auf ein seculares Glied gleich V , dem langperiodischen und secularen Teile der Funktion W , wie wir ihn durch Integration der Differentialgleichung erhalten. Ferner ist

$$(28) \quad \mu = \frac{n'}{n}$$

gleich dem Verhältnis der Bewegungskonstanten des störenden und gestörten Körpers. Es ist demnach hier n das Bahn-Element, wie es den Principien der Gylden'schen Theorie entsprechend unter Berücksichtigung der charakteristischen und elementaren Glieder bestimmt wird. Dagegen sei gesetzt

$$(29) \quad \mu_1 = \frac{n'}{n_1},$$

und hier ist, wo es sich um kritische Planeten handelt, n_1 nicht identisch mit n . Den Grund sieht man leicht ein. Nach den Bemerkungen, die wir zur Ersetzung von v' durch v im vorigen Kapitel machten, wurde ja das Argument so umgestaltet, dass in ihm nur seculare und langperiodische Teile blieben. Also

$$(26a) \quad w = (1 - \mu)v - B - \mu V + p. \text{ sec. H} - p. \text{ sec. H}'.$$

V erhalten wir aus der Differentialgleichung von W und es soll alle langperiodischen und secularen Glieder enthalten. Lassen wir einstweilen noch die sogenannten exargumentalen und A-Glieder fort, so ist die Form $V = (c_0 + \gamma)v + \text{period. Glieder}$.

Hier bezeichnet c_0 eine Grösse von der Ordnung m' , während γ für „gewöhnliche Planeten“, deren mittlere Bewegung zu der des störenden Körpers in keinem niedrigzahligen Verhältnis steht, rein zweiter Ordnung ist. Unter „charakteristischen Planeten“ sollen dagegen solche verstanden werden, bei denen das Verhältnis der beiden mittleren Bewegungen sich einem echten Bruche nähert, für diese ist γ noch als von der Ordnung der störenden Masse anzusehen. Als „kritisch“ wollen wir nach Herrn Brendel solche Planeten betrachten, bei denen das Verhältnis diesen Bruch fast erreicht und die Grösse γ sich wesentlich der Einheit nähert, also mit der störenden Masse nicht mehr verglichen werden kann.

Wie nun aus Formel (3) hervorgeht, setzt sich $W = V + K$ der Hauptsache nach aus S und R zusammen, der konstante Teil muss es demnach auch thun. Bei der Integration der Gleichung für S entsteht durch das Auftreten eines Gliedes $\frac{1}{v}$ eine willkürliche Konstante $= a_0$; und der konstante Teil in R_0 wird sich gemäss der Differentialgleichung (2) aus dieser, sowie aus P zusammensetzen, soweit es Glieder nullten Grades betrifft. Nennen wir diese Konstante b_0 , so wird nach (3) unter Vernachlässigung von Gliedern rein zweiter und höherer Ordnung sein:

$$c_0 + \gamma = a_0 - 2b_0.$$

Da ferner die 6 Integrationskonstanten des Problems bestimmt sind, so ist a_0 überzählig. Herr Brendel verfügt für die gewöhnlichen und charakteristischen Planeten so über sie, dass

$$(30) \quad a_0 - 2b_0 = c_0 + \gamma = 0$$

wird. Für den Fall kritischer Planeten, wo γ bedeutend gross ist, müssten wir auch a_0 einen entsprechend grossen Wert geben, um die rechte Seite annullieren zu können, und da in den Differentialgleichungen für R und W nach Potenzen von S entwickelt wird, so würden wir bei kritischen Planeten eine brauchbare Entwicklung infolge dieses a_0 nicht erhalten. Deswegen gilt für kritische Planeten die Bedingung

$$(30a) \quad a_0 - 2b_0 = c_0 = 0, \quad \gamma \neq 0.$$

Aus diesem Grunde wird V ein seculares Glied erhalten.

Nun tritt V in den Argumenten auf, und da es bei charakteristischen Planeten nicht mehr mit der störenden Masse vergleichbar ist, wird man nicht nach Potenzen von V entwickeln dürfen. Wir müssen demnach seinem Vorhandensein innerhalb des Argumentes Rechnung tragen, und dies geschieht durch die Gyldén'sche partielle Integration. Hierdurch entstehen die von Gyldén als „ex-argumentale Glieder“ bezeichneten Grössen, und zwar tritt $\frac{dV}{dv}$ als Faktor zu dem betreffenden Gliede aus dem Argument heraus. Um diesen Nachteil einigermassen auszugleichen, sucht man zu bewirken, dass $\frac{dV}{dv}$ von möglichst

hohem Grade, also erst in höheren Gliedern der Entwicklung merkbar wird; da $\frac{dV}{dv}$ mindestens ersten Grades ist, so käme hier nur ein konstantes Glied als gefährlich in Betracht. Dieses lässt sich beseitigen. Herr Brendel erreicht es dadurch, dass er noch eine zweite mittlere Bewegung einführt, das bereits erwähnte n_1 .

Um recht klar zu sein, soll schon an dieser Stelle über die auftretenden secularen Glieder gehandelt werden. Wir hatten $W = K + V$ gesetzt, wo V alle langperiodischen und secularen Glieder enthalten soll. Wie später dargegan wird, sind die secularen Teile

$$\text{p. sec. } V = \gamma v + \gamma_0 v + [\bar{\gamma}_0 + \bar{g}v + \bar{g}v^2 + \dots]v,$$

γ ist nullten resp. geraden Grades, γ_0 und $\bar{\gamma}_0$ etc. mindestens zweiten Grades.

γ_0 entsteht bei Ausführung der Integration von $\frac{dV}{dv}$ infolge der von uns angewandten partiellen Integrationsmethode. Die Klammer stellt die A-Glieder dar und tritt ebenfalls erst während des Integrationsprocesses auf; denn wie später gezeigt wird, sind diese Glieder selbst im Falle kritischer Planeten in $\frac{dV}{dv}$ von der Ordnung m' resp. $\frac{m'^2}{d_1}$. Durch die Integration erhalten sie einen Divisor von beiläufig der Ordnung m' und erscheinen in V stark vergrößert. Um dies zu vermeiden, verwandeln wir sie kurz vor der Integration in eine Potenzreihe, was in unserem Falle der Bewegung für beschränkte Zeiträume statthaft ist.

Die Differentialgleichung $\frac{dV}{dv}$ soll dagegen die A-Glieder noch in periodischer Form enthalten, d. h. $[\bar{\gamma}_0 + \bar{g}v + \dots]$ nicht, natürlich auch γ_0 nicht, da es ebenfalls erst während des Integrationsprocesses auftritt, sondern nur γ .

Das Integral V wird alle secularen Glieder haben.

Während p. sec. V obigen Wert hat, ist p. const. $\frac{dV}{dv} = \gamma$.

Wir wollen nun schreiben:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = \bar{V} + \gamma v, \quad \text{also } \bar{V} = \gamma_0 v + [\bar{\gamma}_0 + \bar{g}v + \dots]v + \text{period. Glied.}, \\ \frac{dV}{dv} = \frac{d\bar{V}}{dv} + \gamma, \end{array} \right.$$

dagegen ist $\frac{d\bar{V}}{dv}$ rein periodisch, da nach obigem $\frac{dV}{dv}$ nur das konstante Glied γ ,

also $\frac{dV}{dv} - \gamma = \frac{d\bar{V}}{dv}$ keins mehr enthalten kann.

Setzt man:

$$(32) \quad \text{p. sec. } H = cv, \quad \text{p. sec. } H' = \mu_2 c'v,$$

wo über die Bedeutung des μ_2 später gesprochen wird, so geht (26a) über in:

$$w = v + [-\mu + c - \mu_2 c' - \mu\gamma]v - B - \mu\bar{V}.$$

Wir bezeichnen nun:

$$(33) \quad \mu_1 = \mu(1 + \gamma) - c + \mu_2 c',$$

und nach Formel (29):

$$\mu_1 = \frac{n'}{n_1},$$

so dass wird:

$$(34) \quad w = (1 - \mu_1)v - B - \mu \bar{V}.$$

Durch Aussonderung des γv aus V und Einführung des μ_1 , steht nur noch \bar{V} im Argumente, und da bei der partiellen Integration der Differentialquotient heraustritt, so kann dies nur $\frac{d\bar{V}}{dv}$ sein. Dies enthält aber, wie eben gezeigt wurde, kein konstantes Glied mehr und unser Zweck wäre damit erfüllt.

Durch Einführung von n_1 resp. μ_1 in die Argumente ist ein weiterer Vorteil von grundlegender Bedeutung für unsere Theorie erreicht. Man bezeichnet für den Specialfall des Hecuba-Typus

$$(35) \quad \mu = \frac{1 - \delta}{2} \quad \text{resp.} \quad \mu_1 = \frac{1 - \delta_1}{2}$$

wo δ im Falle einer Kommensurabilität numerisch der Masse vergleichbar, sogar null werden kann. Integrieren wir z. B. $\int m' \cos(2w - v) dv$, so tritt als Integrationsdivisor $2(1 - \mu_1) - 1 = \delta_1$ auf. Würde nun im Falle einer strengen Kommensurabilität $\delta_1 = 0$, so erhalten wir ein unendlich grosses Glied, die Methode wäre vollständig hinfällig. Herr Brendel hat bewiesen, dass eine strenge Kommensurabilität nur zwischen den Bewegungskonstanten n und n' eintreten kann, also dass nur $\delta = 0$ werden kann. Hingegen wird δ_1 stets von null verschieden sein, und mit diesem Divisor allein haben wir es infolge unserer Definition des μ_1 und \bar{V} zu thun. Während δ durch die Nullstelle geht, macht δ_1 einen endlichen Sprung und kann sich der Null höchstens bis auf Grössen von der Ordnung $\sqrt[3]{m'^2}$ nähern, und dies auch nur für $\kappa = \kappa' = 0$. Den Beweis hat Herr Brendel für den Hecuba- und Hilda-Typus specialisiert¹⁾. Für uns kommt nur der erstere in Betracht.

Wir haben durch diese Bestimmung des μ_1 und des Argument- \bar{V} nicht nur das Auftreten von exargumentalen Gliedern nullten Grades verhindert, sondern auch das Erscheinen fast verschwindender Divisoren, zwei Vorteile, welche für die Konvergenz der Methode von einschneidender Bedeutung sind und uns für den Zweck abgekürzter Tafeln gestatten, die kurze und mathematisch sehr einfache Gyldén'sche partielle Integration anzuwenden. Was die in Formel (32) er-

1) Astronomische Nachrichten Bd. 140, No. 3346, sowie Theorie der kleinen Planeten, Kap. 7, pag. 124—132 und pag. 150—154.

wähnte Grösse μ_2 betrifft, so definiert sie Herr Brendel durch

$$(36) \quad \mu_2 = \frac{n'}{n_2} = \frac{1-\delta_2}{2}, \quad \text{p. sec. } w = (1-\mu_2)v,$$

wo n_2 als „mittlere Bewegung in Länge“ bezeichnet wird. Man erhält μ_2 durch Hinzufügung des durch die partielle Integration hervorgerufenen secularen Teiles $[\gamma_0 + \bar{\gamma}_0]v$, so dass ist

$$(36a) \quad (1-c')\mu_2 = \mu(1+\gamma+\gamma_0+\bar{\gamma}_0)-c,$$

und man unter Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung und vierten Grades, d. h. von cc' , c'^2 und $c'[\gamma_0 + \bar{\gamma}_0]$ das μ_1 schreiben kann:

$$(33a) \quad \mu_1 = \mu(1+\gamma)(1+c')-c.$$

Diese Definition von μ_1 will ich im Einverständnis mit Herrn Brendel an Stelle der Gleichung Br. pag. 95 setzen. Es möge hier gleichzeitig auf einen Fehler aufmerksam gemacht werden, der sich in Br. pag. 69 findet. Dort muss die vierte Formel von unten heissen p. sec. $\mathcal{V} = \gamma_0 v - \frac{1}{\mu}(c - \mu_2 c')v$ und weiter p. const. $\mu \frac{d\mathcal{V}}{dv} = -c + \mu_2 c'$. Dieses Versehen ist jedoch für das Weitere von keinem Einfluss.

2) Wir wollen nun nachsehen, welche Glieder beim Hecuba-Typus durch das Auftreten eines kleinen Divisors stark vergrössert werden. Nach Gylden unterscheidet man hier zwischen elementaren und charakteristischen Gliedern, in dem ersteren Falle wird der Divisor ζ_n oder τ_n sein, also von der Ordnung m' , in dem anderen Falle ist er δ_1 und im allgemeinen grösser als von der Ordnung m' . Nach Herrn Harzers Vorschlage bezeichnet man die Argumente der

langperiodisch elementaren	Glieder mit	A)	}	Argument =	$\begin{cases} \sigma_n v - A_n \\ (1-\sigma_n)v - \Gamma_n \\ \delta_n v - C_n \\ (1-\delta_n)v - D_n \end{cases}$
kurzperiodisch	"	B)			
langperiodisch charakteristischen	"	C)			
kurzperiodisch	"	D)			

Was die elementaren Glieder betrifft, so können sie nur dann auftreten, wenn die Argumente 0 sind oder w nicht enthalten. Wir werden sie vorläufig ausser acht lassen und uns nur mit den charakteristischen beschäftigen.

Die Differentialgleichungen für S und W sind linear¹⁾ und von der ersten Ordnung, es wird hier bei der Integration der Faktor von v direkt als Divisor auftreten, die für R und \mathcal{Z} sind von der zweiten Ordnung, es tritt hier, entsprechend ihrer Gestalt (1 + Faktor) \times (1 - Faktor) als Divisor auf. Mithin werden in S und

1) In der auf pag. 5 gegebenen Gestalt sind die Differentialgleichungen noch nicht auf die lineare Form gebracht. Dieselbe lässt sich jedoch ohne weiteres herstellen.

W die C-Glieder zu kleinen Divisoren Anlass geben, in R und \mathfrak{Z} dagegen die D-Glieder. Ausserdem werden jedoch in R die C-Glieder als gross erscheinen, da ja in der Differentialgleichung $2S$ auftritt; ebenso werden in W die D-Glieder beträchtlich sein, da $-2R$ in der Differentialgleichung auftritt, und da ebenfalls S auftritt, werden die C-Glieder das Quadrat des Divisors erhalten, also ausserordentlich gross werden. In \mathfrak{Z} werden wegen der Gestalt der Differentialgleichung nur die D-Glieder stark vergrössert erscheinen.

Die Gestalt der für S und W in Betracht kommenden Argumente ist:

$$nw - v, \quad nw - 2v, \quad nw - 3v,$$

oder besser geschrieben in Hinsicht auf (34) und auf $1 - \mu_1 = \frac{1 + \delta_1}{2}$

$$\text{I) } \left[\frac{n}{2}(1 + \delta_1) - 1 \right] v + C_n; \quad \text{II) } \left[\frac{n}{2}(1 + \delta_1) - 2 \right] + C_n; \quad \text{III) } \left[\frac{n}{2}(1 + \delta_1) - 3 \right] + C_n.$$

Divisoren von der Ordnung δ_1 , können demnach nur in folgenden Fällen auftreten:

- I) bei allen Gliedern ungeraden Grades, wenn $n = 2$ ist, mit dem ersten Grade beginnend;
- II) bei allen Gliedern geraden Grades, wenn $n = 4$ ist, mit dem zweiten Grade beginnend;
- III) bei allen Gliedern ungeraden Grades, wenn $n = 6$ ist, mit dem dritten Grade beginnend.

Für R und \mathfrak{Z} treten kleine Divisoren auf bei folgenden Argumenten:

Für den 0 ^{ten} Grad:	$2w$;	der Divisor wird dann:	$2 \left(\frac{1 + \delta_1}{2} \right) - 1$
" " 1	" $4w - v$;	" " " "	$4 \left(\frac{1 + \delta_1}{2} \right) - 2$
" " 2	" $\left\{ \begin{array}{l} 2w \\ 6w - 2v \end{array} \right.$;	" " " "	$\left\{ \begin{array}{l} 2 \left(\frac{1 + \delta_1}{2} \right) - 1 \\ 6 \left(\frac{1 + \delta_1}{2} \right) - 3 \end{array} \right.$
" " 3	" $\left\{ \begin{array}{l} 4w - v \\ 8w - 3v \end{array} \right.$;	" " " "	$\left\{ \begin{array}{l} 4 \left(\frac{1 + \delta_1}{2} \right) - 2 \\ 8 \left(\frac{1 + \delta_1}{2} \right) - 4 \end{array} \right.$

Eine genaue Uebersicht der Argumente der C- und der D-Glieder vom 0^{ten}, 1^{ten} und 2^{ten} Grade ist in Tafel I gegeben sowohl für die wichtigsten Typen der

ersten Klasse¹⁾, als auch die der zweiten Klasse. Aus dieser Tafel geht zweierlei hervor:

I) Erhöht sich die Klasse um eins, so treten auch erst bei einem um eins höheren Grade charakteristische Divisoren auf.

II) Innerhalb jeder Klasse ist eine deutliche Abstufung bemerkbar: Erhöht sich Zähler und Nenner des Bruches μ um die Klassenzahl, so vergrößert sich auch das Vielfache des Arguments um diese. Man könnte in jeder Klasse wieder von charakteristischen Planeten verschiedener Gattung sprechen. Je niedriger die Gattung, desto niedriger das Vielfache des Arguments, und um so früher treten in der Entwicklung charakteristische Glieder auf²⁾. Auch in dieser Hinsicht steht der Hecuba-Typus an erster Stelle.

3) Wie schon erwähnt, erhalten die C-Glieder in S einen Divisor δ_1 und in V sogar δ_1^2 . Für kritische Planeten, für welche $\delta_1 < \sqrt{m'}$ ist, werden derartige Glieder, soweit sie erster Ordnung, d. h. von der ersten Potenz der Masse sind, in V nullter Ordnung und noch grösser werden. Für diese Fälle dürfte eine erste Annäherung, d. h. eine Mitnahme Glieder erster Ordnung nicht genügen; denn die Glieder zweiter Ordnung werden dann schon von der Ordnung m' und grösser, also sehr merklich. Für die Konvergenz kommt dies weniger in Betracht, da es für unsere Zwecke ausreicht, in V nur eine endliche Anzahl Glieder mitzunehmen, und bei einer endlichen Reihe die Konvergenz nicht in Frage tritt; die rechnerische Arbeit dagegen wird hierdurch beträchtlich vermehrt.

In den älteren Theorieen pflegte man, wenn die erste Näherung in Bezug auf die Masse nicht ausreichte, die Störungen von der zweiten Potenz der Masse erst nachher mitzunehmen. In der Hansen'schen Theorie muss sogar so verfahren werden, da dort schon bei der Entwicklung der Störungsfunktion numerische Werte eingeführt werden, man sich also des Mittels begiebt, von vornherein zu untersuchen, ob Störungen zweiter Ordnung mitgenommen werden müssen und in welchen Gliedern. Nachdem jedoch Gylden und Tisserand Methoden zu einer vollständig analytischen Entwicklung der Störungsfunktion gegeben haben, welche sich ganz besonders für kleine Planeten eignen, dürfte es geraten sein, diesen Vorteil in obiger Hinsicht zu verwerten.

Herr Brendel hat ein sehr schönes Näherungsverfahren entwickelt, um gleich von vornherein in der ersten Näherung die zweite Potenz der Masse wenigstens in den charakteristischen Gliedern zu berücksichtigen, so dass in den meisten Fällen, jedenfalls stets für den Zweck abgekürzter Tafeln, diese erste Näherung ausreichen dürfte.

1) Unter Klasse wird die Differenz Nenner—Zähler im Bruche μ verstanden. Beim Hecuba-Typus ist $\mu = \frac{1}{2}$, die Klassenzahl = 1. Beim Hestia-Typus ist $\mu = \frac{1}{3}$, die Klassenzahl = 2.

2) Unter „charakteristischen Gliedern“ will ich im folgenden kurz immer diejenigen verstehen, welche bei der Integration kleine Divisoren der Ordnung δ_1 bedingen.

Ich will hier dasselbe in seinen Grundzügen auseinandersetzen.

Wie aus den Gleichungen (23), (24), (25) hervorgeht, treten infolge von R , K , \mathfrak{Z} die zweiten Potenzen der Masse auf. Wir wollen nun in Q , P , Z diese zweiten Potenzen der Masse in allen den Gliedern mitnehmen, welche durch kleine Divisoren vergrössert werden. Nach Tabelle I sind die C- und D-Glieder in R und K , sowie die D-Glieder in \mathfrak{Z} von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$, d. h. nicht rein erster Ordnung — so nennen wir die Glieder, welche durch einen Divisor vergrössert werden. Wir machen jetzt für R , K , \mathfrak{Z} Ansätze, welche nur diese Glieder enthalten, und deren Koeffizienten wir als Unbekannte einführen. Multiplizieren wir diese mit P , Q , Z aus, so erhalten wir nominell Glieder zweiter Ordnung, in Wirklichkeit Glieder von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$, also erster bis zweiter Ordnung je nach Kleinheit des Divisors. Sind diese Glieder in P , Q , Z wieder charakteristische, so werden sie bei der Integration δ_1 als Divisor erhalten, also in S , R , W , \mathfrak{Z} , obwohl nominell zweiter Ordnung, rein nur erster Ordnung werden, oder noch grösser im Falle kritischer Planeten. Wir werden nun die Ansätze für R und K , sowie \mathfrak{Z} derartig mit P , Q , Z komponieren, dass das Produkt nur aus charakteristischen Gliedern besteht. Wir bekommen dann den charakteristischen Teil dieser Derivierten genau einschliesslich Glieder zweiter Ordnung (in Wirklichkeit $\frac{m'^2}{\delta_1}$), aber ausschliesslich rein zweiter Ordnung.

Wir machen also den folgenden Ansatz für R :

$$(37) \quad \text{pars } R = \beta_1 \cos 2w + \beta_2 \eta \cos(2w - v) + \beta_4 \eta \cos(4w - v) \\ + \beta_3 \eta' \cos(2w - v_1) + \beta_5 \eta' \cos(4w - v)$$

$$+ \beta_7 \eta^2 \cos 2w \quad + \beta_{11} \eta^2 \cos(2w - 2v) \quad + \beta_{14} \eta^2 \cos(4w - 2v) \quad + \beta_{17} \eta^2 \cos(6w - 2v) \\ + \beta_8 \eta \eta' \cos(2w + v - v_1) + \beta_{12} \eta \eta' \cos(2w - v - v_1) + \beta_{15} \eta \eta' \cos(4w - v - v_1) + \beta_{18} \eta \eta' \cos(6w - v - v_1) \\ + \beta_9 \eta \eta' \cos(2w - v + v_1) + \beta_{13} \eta'^2 \cos(2w - 2v_1) \quad + \beta_{16} \eta'^2 \cos(4w - 2v_1) \quad + \beta_{19} \eta'^2 \cos(6w - 2v_1) \\ + \beta_{10} \eta'^2 \cos 2w$$

$$+ \beta_{23} \sin^2 j \cos 2w + \beta_{24} \sin j \sin j' \cos(2w + v - v_1) + \beta_{25} \sin j \sin j' \cos(2w - v + v_1) + \beta_{26} \sin^2 j' \cos 2w \\ + \beta_{27} \sin^2 j \cos(2w - 2v) \quad + \beta_{30} \sin^2 j \cos(4w - 2v) \quad + \beta_{33} \sin^2 j \cos(6w - 2v) \\ + \beta_{28} \sin j \sin j' \cos(2w - v - v_1) + \beta_{31} \sin j \sin j' \cos(4w - v - v_1) + \beta_{34} \sin j \sin j' \cos(6w - v - v_1) \\ + \beta_{29} \sin^2 j' \cos(2w - 2v_1) \quad + \beta_{32} \sin^2 j' \cos(4w - 2v_1) \quad + \beta_{35} \sin^2 j' \cos(6w - 2v_1)$$

Ich bezeichne hier nach Herrn Brendels Vorgänge alle Koeffizienten, welche mindestens von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$ oder noch grösser sind, mit griechischen Buchstaben. Die Koeffizienten elementarer Glieder mögen dagegen mit deutschen Buchstaben bezeichnet werden. Die Wahl der Indices ist hier und überhaupt im folgenden anders angeordnet, als es Herr Ludendorff in seiner früher citierten

Arbeit gethan hat, und zum Teil durch die Mitnahme der Breitenstörungen veranlasst. Ausserdem will ich gleich hier bemerken, dass ich sämtliche von Herrn Ludendorff gegebenen Formeln zur Kontrolle noch einmal unabhängig hiervon gerechnet habe. Es hat sich gezeigt, dass die Formeln im Druck, vor allem aber in der Entwicklung vollständig ohne Fehler sind, welcher Umstand es mir nahe legte, die Weiterführung der Theorie in gleicher mustergültiger Weise zu versuchen. Es sind sämtliche Formeln mindestens zweimal gerechnet oder durch Vergleichung mit denen Herrn Ludendorffs kontrolliert. Ausserdem gab der ähnliche Aufbau des von der Neigung herrührenden Teiles die Mittel zu einer weiteren Kontrolle an die Hand. Kompliziertere Entwicklungen sind dreimal unabhängig von einander durchgeführt.

Für K und $\frac{d\bar{V}}{dv}$, welches für die exargumentalen Glieder von Wichtigkeit ist, mache ich folgenden Ansatz:

$$(38) \quad K = \gamma_1 \sin 2w + \gamma_4 \eta \sin(4w - v) + \gamma_6 \eta \sin(2w + v) \\ + \gamma_5 \eta' \sin(4w - v_1)$$

$$+ \gamma_7 \eta^2 \sin 2w \quad + \gamma_{11} \eta^2 \sin(2w - 2v) \quad + \gamma_{17} \eta^2 \sin(6w - 2v) \quad + \gamma_{20} \eta^2 \sin(2w + 2v) \\ + \gamma_8 \eta \eta' \sin(2w + v - v_1) + \gamma_{12} \eta \eta' \sin(2w - v - v_1) + \gamma_{18} \eta \eta' \sin(6w - v - v_1) + \gamma_{21} \eta^2 \sin 4w \\ + \gamma_9 \eta \eta' \sin(2w - v + v_1) + \gamma_{13} \eta'^2 \sin(2w - 2v_1) \quad + \gamma_{19} \eta'^2 \sin(6w - 2v_1) \quad + \gamma_{22} \eta \eta' \sin(4w + v - v_1) \\ + \gamma_{10} \eta'^2 \sin 2w$$

$$+ \gamma_{23} \sin^2 j \sin 2w \quad + \gamma_{27} \sin^2 j \sin(2w - 2v) \quad + \gamma_{33} \sin^2 j \sin(6w - 2v) \\ + \gamma_{24} \sin j \sin j' \sin(2w + v - v_1) + \gamma_{28} \sin j \sin j' \sin(2w - v - v_1) + \gamma_{34} \sin j \sin j' \sin(6w - v - v_1) \\ + \gamma_{25} \sin j \sin j' \sin(2w - v + v_1) + \gamma_{29} \sin^2 j' \sin(2w - 2v_1) \quad + \gamma_{35} \sin^2 j' \sin(6w - 2v_1) \\ + \gamma_{26} \sin^2 j' \sin 2w$$

$$(39) \quad \frac{d\bar{V}}{dv} = \gamma_2 \eta \cos(2w - v) + \gamma_{14} \eta^2 \cos(4w - 2v) \quad + \gamma_{30} \sin^2 j \cos(4w - 2v) \\ + \gamma_3 \eta' \cos(2w - v_1) + \gamma_{15} \eta \eta' \cos(4w - v - v_1) + \gamma_{31} \sin j \sin j' \cos(4w - v - v_1) \\ + \gamma_{16} \eta'^2 \cos(4w - 2v_1) \quad + \gamma_{32} \sin^2 j' \cos(4w - 2v_1)$$

γ_6 , sowie γ_{20} , γ_{21} , γ_{22} sind keine charakteristischen Glieder, aber trotzdem von der Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$. Wir wollen derartige Grössen „koordinierte Glieder“ nennen. Ihr Auftreten ist durch die Gestalt der Differentialgleichung für K bedingt, da dort S und R multipliziert mit $\eta \cos v$ resp. $\eta^2 \cos 2v$ auftritt. Da h , welches in P und Q , und somit in S , R , W die Neigungsglieder verursacht, zweiten Grades ist, so müssen offenbar die koordinierten Glieder in K , soweit es von der Neigung herrührt, mindestens dritten Grades sein.

Die β_k und γ_k sind sämtlich unbekannt. Da diese Ansätze zu einer zweiten Näherung dienen und sie mit P , Q , Z multipliziert nur Beiträge von der

Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$ zu den Differentialgleichungen liefern, so kann man nach Herrn Brendels Vorgang die γ_k in K sehr bequem durch die β_k ersetzen. Wir vernachlässigen in den γ_k die Teile von der Ordnung m' sowie $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ und $\frac{m'^3}{\delta_1^3}$ und setzen $\mu_1 = \frac{1}{2}$, was einem Fehler von der Ordnung m'^2 bis $\frac{m'^2}{\delta_1}$ im Schlussresultate von P, Q, Z gleichkommt. Wir dürfen dies, denn unsere Aufgabe ist es, diese Derivierten bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$ einschliesslich zu berechnen. Dann ergeben sich folgende Beziehungen für die γ_k , welche wohlverstanden nur für diesen Zweck der Näherung zu verwenden sind:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -2\beta_1 & \gamma_7 &= -3\beta_1 + 3\beta_2 - 2\beta_7 - \frac{A_{2,1,0}^{-1}}{\delta_1} & \gamma_{11} &= 3\beta_1 - 3\beta_2 + 2\beta_{11} + \frac{A_{2,1,0}^{-1}}{\delta_1} \\ \gamma_4 &= -2\beta_4 & \gamma_8 &= 3\beta_3 - 2\beta_8 - \frac{A_{2,0,1}^{-1}}{\delta_1} & \gamma_{12} &= -3\beta_3 + 2\beta_{12} + \frac{A_{2,0,1}^{-1}}{\delta_1} \\ \gamma_5 &= -2\beta_5 & \gamma_9 &= -2\beta_9 & \gamma_{13} &= 2\beta_{13} \\ \gamma_6 &= \frac{3}{2}\beta_1 & \gamma_{10} &= -2\beta_{10} \\ \gamma_{17} &= -2\beta_{17} & \gamma_{20} &= -\beta_1 & \gamma_{23} &= -2\beta_{23} & \gamma_{27} &= 2\beta_{27} & \gamma_{33} &= -2\beta_{33} \\ \gamma_{18} &= -2\beta_{18} & \gamma_{21} &= \frac{3}{2}\beta_4 & \gamma_{24} &= -2\beta_{24} & \gamma_{28} &= 2\beta_{28} & \gamma_{34} &= -2\beta_{34} \\ \gamma_{19} &= -2\beta_{19} & \gamma_{22} &= \frac{3}{2}\beta_5 & \gamma_{25} &= -2\beta_{25} & \gamma_{29} &= 2\beta_{29} & \gamma_{35} &= -2\beta_{35} \\ & & & & \gamma_{26} &= -2\beta_{26} \end{aligned}$$

Die γ_k in $\frac{d\bar{V}}{dv}$ lassen wir einstweilen als Unbekannte bestehen und es folgt ihre strenge Berechnung später, ebenso die β_k , welche durch Vergleichung der Koeffizienten des Integrals bestimmt werden. Weiterhin setzen wir:

$$(41) \quad \left. \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial v} \right\} = \xi_1 \sin j \frac{\sin}{\cos} (4w - v) + \xi_3 \eta \sin j \frac{\sin}{\cos} (2w + v - v) + \xi_5 \eta' \sin j \frac{\sin}{\cos} (2w + v - v_1) \\ + \xi_2 \sin j' \frac{\sin}{\cos} (4w - v_1) + \xi_4 \eta \sin j \frac{\sin}{\cos} (2w - v + v) + \xi_6 \eta' \sin j \frac{\sin}{\cos} (2w - v + v_1) \\ + \xi_7 \eta \sin j' \frac{\sin}{\cos} (2w + v_1 - v) \pm \xi_{11} \eta \sin j \frac{\sin}{\cos} (2w - v - v) + \xi_{15} \eta \sin j \frac{\sin}{\cos} (6w - v - v) \\ + \xi_8 \eta \sin j' \frac{\sin}{\cos} (2w - v_1 + v) \pm \xi_{12} \eta' \sin j \frac{\sin}{\cos} (2w - v - v_1) + \xi_{16} \eta' \sin j \frac{\sin}{\cos} (6w - v - v_1) \\ + \xi_9 \eta' \sin j' \frac{\sin}{\cos} (2w + v_1 - v_1) \pm \xi_{13} \eta \sin j' \frac{\sin}{\cos} (2w - v_1 - v) + \xi_{17} \eta \sin j' \frac{\sin}{\cos} (6w - v_1 - v) \\ + \xi_{10} \eta' \sin j' \frac{\sin}{\cos} (2w - v_1 + v_1) \pm \xi_{14} \eta' \sin j' \frac{\sin}{\cos} (2w - v_1 - v_1) + \xi_{18} \eta' \sin j' \frac{\sin}{\cos} (6w - v_1 - v_1)$$

$\frac{d\mathfrak{B}}{dv}$ ist richtig bis auf Grössen v. d. Ord. m' . Der Fehler in R und P wird demnach v. d. Ord. m'^2 sein. Die ξ_b werden ebenfalls als Unbekannte in das Problem eingeführt und später durch Koeffizientenvergleichung bestimmt.

4) Unter Berücksichtigung dieser Ansätze müssen wir nun die Derivierten der Störungsfunktion nach Massgabe der Formeln (23), (24), (25) berechnen. Wir erhalten sie in den gewöhnlichen Gliedern erster und zwar rein erster Ordnung. In den charakteristischen und auch in den elementaren dagegen wollen wir die zweiten Potenzen der Masse insofern berücksichtigen, als dieselben von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$ werden. Es ist uns dann gelungen, in den P, Q, Z die grössten Glieder zweiter Ordnung gleich in der ersten Näherung mitzunehmen, unter einem Fehler, der selbst für den Grenzwert von δ_1 kleiner als $\frac{m'^2}{\delta_1}$ ist. Der Fehler, den wir begehen, dass wir die dritte Potenz der Masse in den charakteristischen Gliedern hier vernachlässigen, wird dagegen im Maximum für den nullten Grad $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$, den ersten Grad $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$ resp. $\frac{m'^5}{\delta_1^6}$, den zweiten Grad $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$ resp. $\frac{m'^5}{\delta_1^4}$ resp. $\frac{m'^5}{\delta_1^6}$ resp. $\frac{m'^7}{\delta_1^{10}}$, also für den Grenzwert von $\delta_1 \leq \sqrt[3]{m'^2}$ kleiner als $\frac{m'^2}{\delta_1}$, und nur durch die exargumentalen Glieder m' . Aus diesem Grunde werden wir bei der zweiten Ordnung verbleiben.

Die Ausmultiplizierung dieser Ansätze und das Heraussuchen der charakteristischen Glieder ist eine äusserst mühsame Arbeit und ohne Interesse, so dass wir hier nur die Resultate geben wollen. Den Entstehungsprozess kann man sich leicht vergegenwärtigen.

Die P -Koeffizienten habe ich in den C -Gliedern etwas genauer berechnet als Herr Ludendorff, was die Behandlung der kritischen Planeten erforderte. Um die hier gegebenen Resultate mit denen Herrn Ludendorffs vergleichen zu können, ist in Tafel II eine Umwandlungstabelle für die Bezeichnungen gegeben. Wir bekommen folgende Ausdrücke für die zu berücksichtigenden Teile der Derivierten der Störungsfunktion:

$$(42) \text{ pars } Q = q_1 \eta \sin v + q_2 \eta' \sin v_1 + q_4 \eta \eta' \sin(v - v_1) + q_7 \sin j \sin j' \sin(v - v_1)$$

$$+ q_1 \sin 2w + q_2 \eta \sin(2w - v) + q_4 \eta \sin(4w - v)$$

$$+ q_8 \eta' \sin(2w - v_1) + q_5 \eta' \sin(4w - v_1)$$

$$+ q_7 \eta^2 \sin 2w \quad + q_{11} \eta^2 \sin(2w - 2v) \quad + q_{14} \eta^2 \sin(4w - 2v) \quad + q_{17} \eta^2 \sin(6w - 2v)$$

$$+ q_8 \eta \eta' \sin(2w + v - v_1) + q_{12} \eta \eta' \sin(2w - v - v_1) + q_{15} \eta \eta' \sin(4w - v - v_1) + q_{18} \eta \eta' \sin(6w - v - v_1)$$

$$+ q_9 \eta \eta' \sin(2w - v + v_1) + q_{13} \eta'^2 \sin(2w - 2v_1) \quad + q_{16} \eta'^2 \sin(4w - 2v_1) \quad + q_{19} \eta'^2 \sin(6w - 2v_1)$$

$$+ q_{10} \eta'^2 \sin 2w$$

$$\begin{aligned}
& + q_{23} \sin^2 j \sin 2w + q_{24} \sin j \sin j' \sin (2w + v - v_1) + q_{25} \sin j \sin j' \sin (2w - v + v_1) + q_{26} \sin^2 j' \sin 2w \\
& + q_{27} \sin^2 j \sin (2w - 2v) \quad + q_{30} \sin^2 j \sin (4w - 2v) \quad + q_{33} \sin^2 j \sin (6w - 2v) \\
& + q_{28} \sin j \sin j' \sin (2w - v - v_1) + q_{31} \sin j \sin j' \sin (4w - v - v_1) + q_{34} \sin j \sin j' \sin (6w - v - v_1) \\
& + q_{29} \sin^2 j' \sin (2w - 2v_1) \quad + q_{32} \sin^2 j' \sin (4w - 2v_1) \quad + q_{35} \sin^2 j' \sin (6w - 2v_1)
\end{aligned}$$

$$(43) \text{ pars coord. } Q = r_1 \sin 4w + r_2 \eta \sin (2w + v) + r_3 \eta' \sin (2w + v_1) + r_4 \eta \sin (6w - v) + r_5 \eta' \sin (6w - v_1)$$

Die Verbindung dieser letzteren (43) mit charakteristischen Gliedern v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ giebt in der Differentialgleichung für R zu kritischen Argumenten Anlass. Nur Q hat einen koordinierten Teil.

$$(44) \text{ pars } P = p_0 + p_1 \eta \cos v + p_3 \eta^2 \quad + p_4 \eta \eta' \cos (v - v_1) \quad + p_5 \eta'^2 \\ + p_2 \eta' \cos v_1 + p_6 \sin^2 j + p_7 \sin j \sin j' \cos (v - v_1) + p_8 \sin^2 j'$$

$$\begin{aligned}
& p_1 \cos 2w + p_2 \eta \cos (2w - v) + p_4 \eta \cos (4w - v) \\
& + p_3 \eta' \cos (2w - v_1) + p_5 \eta' \cos (4w - v_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p_7 \eta^2 \cos 2w \quad + p_{11} \eta^2 \cos (2w - 2v) \quad + p_{14} \eta^2 \cos (4w - 2v) \quad + p_{17} \eta^2 \cos (6w - 2v) \\
& + p_8 \eta \eta' \cos (2w + v - v_1) + p_{12} \eta \eta' \cos (2w - v - v_1) + p_{15} \eta \eta' \cos (4w - v - v_1) + p_{18} \eta \eta' \cos (6w - v - v_1) \\
& + p_9 \eta \eta' \cos (2w - v + v_1) + p_{13} \eta'^2 \cos (2w - 2v_1) \quad + p_{16} \eta'^2 \cos (4w - 2v_1) \quad + p_{19} \eta'^2 \cos (6w - 2v_1) \\
& + p_{10} \eta'^2 \cos 2w
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p_{23} \sin^2 j \cos 2w + p_{24} \sin j \sin j' \cos (2w + v - v_1) + p_{25} \sin j \sin j' \cos (2w - v + v_1) + p_{26} \sin^2 j' \cos 2w \\
& + p_{27} \sin^2 j \cos (2w - 2v) \quad + p_{30} \sin^2 j \cos (4w - 2v) \quad + p_{33} \sin^2 j \cos (6w - 2v) \\
& + p_{28} \sin j \sin j' \cos (2w - v - v_1) + p_{31} \sin j \sin j' \cos (4w - v - v_1) + p_{34} \sin j \sin j' \cos (6w - v - v_1) \\
& + p_{29} \sin^2 j' \cos (2w - 2v_1) \quad + p_{32} \sin^2 j' \cos (4w - 2v_1) \quad + p_{35} \sin^2 j' \cos (6w - 2v_1)
\end{aligned}$$

$$(45) \text{ pars } Z = z_1 \sin j \sin v + z_3 \eta \sin j \sin (v - v) + z_5 \eta \sin j' \sin (v_1 - v) \\ + z_2 \sin j' \sin v_1 + z_4 \eta' \sin j \sin (v - v_1) + z_6 \eta' \sin j' \sin (v_1 - v_1)$$

$$z_1 \sin j \sin (4w - v) + z_2 \sin j' \sin (4w - v_1)$$

$$\begin{aligned}
& + z_3 \eta \sin j \sin (2w + v - v) + z_7 \eta \sin j' \sin (2w + v_1 - v) + z_{11} \eta \sin j \sin (2w - v - v) + z_{15} \eta \sin j \sin (6w - v - v) \\
& + z_4 \eta \sin j \sin (2w - v + v) + z_8 \eta \sin j' \sin (2w - v_1 + v) + z_{12} \eta' \sin j \sin (2w - v - v_1) + z_{16} \eta' \sin j \sin (6w - v - v_1) \\
& + z_5 \eta' \sin j \sin (2w + v - v_1) + z_9 \eta' \sin j' \sin (2w + v_1 - v_1) + z_{13} \eta \sin j' \sin (2w - v_1 - v) + z_{17} \eta \sin j' \sin (6w - v_1 - v) \\
& + z_6 \eta' \sin j \sin (2w - v + v_1) + z_{10} \eta' \sin j' \sin (2w - v_1 + v_1) + z_{14} \eta' \sin j' \sin (2w - v_1 - v_1) + z_{18} \eta' \sin j' \sin (6w - v_1 - v_1)
\end{aligned}$$

Die Anordnung ist so vorgenommen, dass zuerst die Excentricität des gestörten Körpers kommt, dann die des störenden. Darauf folgt die Neigung des gestörten und dann die des störenden Planeten. Auch ist die Folge der Indices

in den p, q, z , sowie α, β, γ dieselbe. Diese Gründe hatten mich veranlasst, die von Herrn Ludendorff eingeschlagene Anordnung der Glieder aufzugeben. Die q_k, p_k, z_k selbst stellen sich als Funktionen der β_k und ζ_k folgendermassen dar:

$$(46) \quad \begin{array}{l} q_1 = q_1^{(0)} + q_1^{(1)} \beta_1 \\ q_2 = q_2^{(0)} + q_2^{(1)} \beta_1 + q_2^{(4)} \beta_4 \\ q_3 = q_3^{(0)} + q_3^{(1)} \beta_1 + q_3^{(5)} \beta_5 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} q_4 = q_4^{(0)} + q_4^{(1)} \beta_1 + q_4^{(2)} \beta_2 \\ q_5 = q_5^{(0)} + q_5^{(1)} \beta_1 + q_5^{(3)} \beta_3 \\ q_1 = q_1^{(1)} \beta_1 + q_1^{(2)} \beta_2 + q_1^{(4)} \beta_4 \\ q_2 = q_2^{(0)} + q_2^{(1)} \beta_1 + q_2^{(3)} \beta_3 + q_2^{(5)} \beta_5 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} q_4 = q_{4-1} + q_4^{(8)} \beta_8 + q_4^{(9)} \beta_9 \\ q_7 = q_{7-1} + q_7^{(7)} \beta_7 \\ q_8 = q_{8-1} + q_8^{(9)} \beta_9 \\ q_9 = q_{9-1} + q_9^{(8)} \beta_8 \\ q_{10} = q_{10-1} + q_{10}^{(10)} \beta_{10} \\ q_{11} = q_{11-1} + q_{11}^{(14)} \beta_{14} + q_{11}^{(17)} \beta_{17} \\ q_{12} = q_{12-1} + q_{12}^{(15)} \beta_{15} + q_{12}^{(18)} \beta_{18} \\ q_{13} = q_{13-1} + q_{13}^{(16)} \beta_{16} + q_{13}^{(19)} \beta_{19} \\ q_{14} = q_{14-1} + q_{14}^{(11)} \beta_{11} + q_{14}^{(17)} \beta_{17} \\ q_{15} = q_{15-1} + q_{15}^{(12)} \beta_{12} + q_{15}^{(18)} \beta_{18} \\ q_{16} = q_{16-1} + q_{16}^{(13)} \beta_{13} + q_{16}^{(19)} \beta_{19} \\ q_{17} = q_{17-1} + q_{17}^{(11)} \beta_{11} + q_{17}^{(14)} \beta_{14} \\ q_{18} = q_{18-1} + q_{18}^{(12)} \beta_{12} + q_{18}^{(15)} \beta_{15} \\ q_{19} = q_{19-1} + q_{19}^{(13)} \beta_{13} + q_{19}^{(16)} \beta_{16} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} q_{4-1} = q_4^{(0)} + q_4^{(1)} \beta_1 + q_4^{(2)} \beta_2 + q_4^{(3)} \beta_3 + q_4^{(4)} \beta_4 + q_4^{(5)} \beta_5 \\ q_{7-1} = q_7^{(0)} + q_7^{(1)} \beta_1 + q_7^{(2)} \beta_2 + q_7^{(4)} \beta_4 \\ q_{8-1} = q_8^{(0)} + q_8^{(1)} \beta_1 + q_8^{(2)} \beta_2 + q_8^{(4)} \beta_4 + q_8^{(5)} \beta_5 \\ q_{9-1} = q_9^{(0)} + q_9^{(1)} \beta_1 + q_9^{(2)} \beta_2 + q_9^{(3)} \beta_3 + q_9^{(4)} \beta_4 + q_9^{(5)} \beta_5 \\ q_{10-1} = q_{10}^{(0)} + q_{10}^{(1)} \beta_1 + q_{10}^{(3)} \beta_3 + q_{10}^{(5)} \beta_5 \\ q_{11-1} = q_{11}^{(0)} + q_{11}^{(1)} \beta_1 + q_{11}^{(4)} \beta_4 \\ q_{12-1} = q_{12}^{(0)} + q_{12}^{(1)} \beta_1 + q_{12}^{(2)} \beta_2 + q_{12}^{(4)} \beta_4 + q_{12}^{(5)} \beta_5 \\ q_{13-1} = q_{13}^{(0)} + q_{13}^{(1)} \beta_1 + q_{13}^{(3)} \beta_3 + q_{13}^{(5)} \beta_5 \\ q_{14-1} = q_{14}^{(0)} + q_{14}^{(1)} \beta_1 + q_{14}^{(2)} \beta_2 \\ q_{15-1} = q_{15}^{(0)} + q_{15}^{(1)} \beta_1 + q_{15}^{(2)} \beta_2 + q_{15}^{(3)} \beta_3 + q_{15}^{(4)} \beta_4 \\ q_{16-1} = q_{16}^{(0)} + q_{16}^{(1)} \beta_1 + q_{16}^{(3)} \beta_3 + q_{16}^{(5)} \beta_5 \\ q_{17-1} = q_{17}^{(0)} + q_{17}^{(1)} \beta_1 + q_{17}^{(2)} \beta_2 + q_{17}^{(4)} \beta_4 \\ q_{18-1} = q_{18}^{(0)} + q_{18}^{(1)} \beta_1 + q_{18}^{(2)} \beta_2 + q_{18}^{(3)} \beta_3 + q_{18}^{(4)} \beta_4 + q_{18}^{(5)} \beta_5 \\ q_{19-1} = q_{19}^{(0)} + q_{19}^{(1)} \beta_1 + q_{19}^{(3)} \beta_3 + q_{19}^{(5)} \beta_5 \end{array} \right.$$

Von der Neigung kommen:

$$\begin{array}{l} q_7 = q_{7-1} + q_7^{(24)} \beta_{24} + q_7^{(25)} \beta_{25} \\ q_{23} = q_{23-1} + q_{23}^{(23)} \beta_{23} \\ q_{24} = q_{24-1} + q_{24}^{(25)} \beta_{25} \\ q_{25} = q_{25-1} + q_{25}^{(24)} \beta_{24} \\ q_{26} = q_{26-1} + q_{26}^{(26)} \beta_{26} \\ q_{27} = q_{27-1} + q_{27}^{(30)} \beta_{30} + q_{27}^{(33)} \beta_{33} \\ q_{28} = q_{28-1} + q_{28}^{(31)} \beta_{31} + q_{28}^{(34)} \beta_{34} \\ q_{29} = q_{29-1} + q_{29}^{(32)} \beta_{32} + q_{29}^{(35)} \beta_{35} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} q_{7-1} = q_7^{(1)} \beta_1 + q_7^I \xi_1 + q_7^{II} \xi_2 \\ q_{23-1} = q_{23}^{(0)} + q_{23}^{(1)} \beta_1 + q_{23}^I \xi_1 \\ q_{24-1} = q_{24}^{(0)} + q_{24}^{(1)} \beta_1 + q_{24}^I \xi_1 + q_{24}^{II} \xi_2 \\ q_{25-1} = q_{25}^{(0)} + q_{25}^{(1)} \beta_1 + q_{25}^I \xi_1 + q_{25}^{II} \xi_2 \\ q_{26-1} = q_{26}^{(0)} + q_{26}^{(1)} \beta_1 + q_{26}^{II} \xi_2 \\ q_{27-1} = q_{27}^{(0)} + q_{27}^{(1)} \beta_1 + q_{27}^I \xi_1 \\ q_{28-1} = q_{28}^{(0)} + q_{28}^{(1)} \beta_1 + q_{28}^I \xi_1 + q_{28}^{II} \xi_2 \\ q_{29-1} = q_{29}^{(0)} + q_{29}^{(1)} \beta_1 + q_{29}^{II} \xi_2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l|l}
 q_{30} = q_{30.1} + q_{30}^{(27)} \beta_{27} + q_{30}^{(33)} \beta_{33} & q_{30.1} = q_{30}^{(0)} + q_{30}^{(1)} \beta_1 + q_{30}^I \xi_1 \\
 q_{31} = q_{31.1} + q_{31}^{(28)} \beta_{28} + q_{31}^{(34)} \beta_{34} & q_{31.1} = q_{31}^{(0)} + q_{31}^{(1)} \beta_1 + q_{31}^I \xi_1 + q_{31}^{II} \xi_2 \\
 q_{32} = q_{32.1} + q_{32}^{(29)} \beta_{29} + q_{32}^{(35)} \beta_{35} & q_{32.1} = q_{32}^{(0)} + q_{32}^{(1)} \beta_1 + q_{32}^{II} \xi_2 \\
 q_{33} = q_{33.1} + q_{33}^{(27)} \beta_{27} + q_{33}^{(30)} \beta_{30} & q_{33.1} = q_{33}^{(0)} + q_{33}^{(1)} \beta_1 + q_{33}^I \xi_1 \\
 q_{34} = q_{34.1} + q_{34}^{(28)} \beta_{28} + q_{34}^{(31)} \beta_{31} & q_{34.1} = q_{34}^{(0)} + q_{34}^{(1)} \beta_1 + q_{34}^I \xi_1 + q_{34}^{II} \xi_2 \\
 q_{35} = q_{35.1} + q_{35}^{(29)} \beta_{29} + q_{35}^{(32)} \beta_{32} & q_{35.1} = q_{35}^{(0)} + q_{35}^{(1)} \beta_1 + q_{35}^{II} \xi_2
 \end{array}$$

Koordinierte Glieder sind:

$$\begin{array}{l}
 (47) \quad r_1 = r_1^{(0)} + r_1^{(1)} \beta_1 \\
 r_2 = r_2^{(0)} + r_2^{(1)} \beta_1 + r_2^{(2)} \beta_2 + r_2^{(4)} \beta_4 \\
 r_3 = r_3^{(0)} + r_3^{(1)} \beta_1 + r_3^{(3)} \beta_3 + r_3^{(5)} \beta_5 \\
 r_4 = r_4^{(0)} + r_4^{(1)} \beta_1 + r_4^{(2)} \beta_2 + r_4^{(4)} \beta_4 \\
 r_5 = r_5^{(0)} + r_5^{(1)} \beta_1 + r_5^{(3)} \beta_3 + r_5^{(5)} \beta_5
 \end{array}$$

Die p -Koeffizienten werden:

$$\begin{array}{l|l|l}
 (48) \quad p_0 = p_0^{(0)} + p_0^{(1)} \beta_1 & & \\
 p_1 = p_1^{(0)} + p_1^{(1)} \beta_1 & p_1 = p_1^{(0)} + p_1^{(1)} \beta_1 + p_1^{(2)} \beta_2 + p_1^{(4)} \beta_4 & \\
 p_2 = p_2^{(0)} + p_2^{(1)} \beta_1 + p_2^{(2)} \beta_2 + p_2^{(4)} \beta_4 & p_2 = p_2^{(0)} + p_2^{(1)} \beta_1 + p_2^{(3)} \beta_3 + p_2^{(5)} \beta_5 & p_{3.1} = p_3^{(0)} + p_3^{(1)} \beta_1 + p_3^{(2)} \beta_2 + p_3^{(4)} \beta_4 \\
 p_3 = p_3^{(0)} + p_3^{(1)} \beta_1 + p_3^{(3)} \beta_3 + p_3^{(5)} \beta_5 & p_3 = p_{3.1} + p_3^{(7)} \beta_7 & p_{4.1} = p_4^{(0)} + p_4^{(1)} \beta_1 + p_4^{(2)} \beta_2 + p_4^{(3)} \beta_3 \\
 p_4 = p_4^{(0)} + p_4^{(1)} \beta_1 + p_4^{(2)} \beta_2 + p_4^{(4)} \beta_4 & p_4 = p_{4.1} + p_4^{(6)} \beta_6 + p_4^{(9)} \beta_9 & \quad + p_4^{(4)} \beta_4 + p_4^{(5)} \beta_5 \\
 p_5 = p_5^{(0)} + p_5^{(1)} \beta_1 + p_5^{(3)} \beta_3 + p_5^{(5)} \beta_5 & p_5 = p_{5.1} + p_5^{(10)} \beta_{10} & p_{5.1} = p_5^{(0)} + p_5^{(1)} \beta_1 + p_5^{(3)} \beta_3 + p_5^{(5)} \beta_5 \\
 \\
 p_7 = p_{7.1} + p_7^{(7)} \beta_7 & & \\
 p_8 = p_{8.1} + p_8^{(8)} \beta_8 + p_8^{(9)} \beta_9 & p_{7.1} = p_7^{(0)} + p_7^{(1)} \beta_1 + p_7^{(2)} \beta_2 + p_7^{(4)} \beta_4 & \\
 p_9 = p_{9.1} + p_9^{(8)} \beta_8 + p_9^{(9)} \beta_9 & p_{8.1} = p_8^{(0)} + p_8^{(1)} \beta_1 + p_8^{(2)} \beta_2 + p_8^{(3)} \beta_3 + p_8^{(4)} \beta_4 + p_8^{(5)} \beta_5 & \\
 p_{10} = p_{10.1} + p_{10}^{(10)} \beta_{10} & p_{9.1} = p_9^{(0)} + p_9^{(1)} \beta_1 + p_9^{(2)} \beta_2 + p_9^{(3)} \beta_3 + p_9^{(4)} \beta_4 + p_9^{(5)} \beta_5 & \\
 & p_{10.1} = p_{10}^{(0)} + p_{10}^{(1)} \beta_1 + p_{10}^{(3)} \beta_3 + p_{10}^{(5)} \beta_5 & \\
 p_{11} = p_{11.1} + p_{11}^{(11)} \beta_{11} + p_{11}^{(14)} \beta_{14} + p_{11}^{(17)} \beta_{17} & p_{11.1} = p_{11}^{(0)} + p_{11}^{(1)} \beta_1 + p_{11}^{(2)} \beta_2 + p_{11}^{(4)} \beta_4 & \\
 p_{12} = p_{12.1} + p_{12}^{(12)} \beta_{12} + p_{12}^{(15)} \beta_{15} + p_{12}^{(18)} \beta_{18} & p_{12.1} = p_{12}^{(0)} + p_{12}^{(1)} \beta_1 + p_{12}^{(2)} \beta_2 + p_{12}^{(3)} \beta_3 + p_{12}^{(4)} \beta_4 + p_{12}^{(5)} \beta_5 & \\
 p_{13} = p_{13.1} + p_{13}^{(13)} \beta_{13} + p_{13}^{(16)} \beta_{16} + p_{13}^{(19)} \beta_{19} & p_{13.1} = p_{13}^{(0)} + p_{13}^{(1)} \beta_1 + p_{13}^{(3)} \beta_3 + p_{13}^{(5)} \beta_5 & \\
 p_{14} = p_{14.1} + p_{14}^{(11)} \beta_{11} + p_{14}^{(14)} \beta_{14} + p_{14}^{(17)} \beta_{17} & p_{14.1} = p_{14}^{(0)} + p_{14}^{(1)} \beta_1 + p_{14}^{(2)} \beta_2 + p_{14}^{(4)} \beta_4 & \\
 p_{15} = p_{15.1} + p_{15}^{(12)} \beta_{12} + p_{15}^{(15)} \beta_{15} + p_{15}^{(18)} \beta_{18} & p_{15.1} = p_{15}^{(0)} + p_{15}^{(1)} \beta_1 + p_{15}^{(2)} \beta_2 + p_{15}^{(3)} \beta_3 + p_{15}^{(4)} \beta_4 + p_{15}^{(5)} \beta_5 & \\
 p_{16} = p_{16.1} + p_{16}^{(13)} \beta_{13} + p_{16}^{(16)} \beta_{16} + p_{16}^{(19)} \beta_{19} & p_{16.1} = p_{16}^{(0)} + p_{16}^{(1)} \beta_1 + p_{16}^{(3)} \beta_3 + p_{16}^{(5)} \beta_5 & \\
 p_{17} = p_{17.1} + p_{17}^{(11)} \beta_{11} + p_{17}^{(14)} \beta_{14} + p_{17}^{(17)} \beta_{17} & p_{17.1} = p_{17}^{(0)} + p_{17}^{(1)} \beta_1 + p_{17}^{(2)} \beta_2 + p_{17}^{(4)} \beta_4 & \\
 p_{18} = p_{18.1} + p_{18}^{(12)} \beta_{12} + p_{18}^{(15)} \beta_{15} + p_{18}^{(18)} \beta_{18} & p_{18.1} = p_{18}^{(0)} + p_{18}^{(1)} \beta_1 + p_{18}^{(2)} \beta_2 + p_{18}^{(3)} \beta_3 + p_{18}^{(4)} \beta_4 + p_{18}^{(5)} \beta_5 & \\
 p_{19} = p_{19.1} + p_{19}^{(13)} \beta_{13} + p_{19}^{(16)} \beta_{16} + p_{19}^{(19)} \beta_{19} & p_{19.1} = p_{19}^{(0)} + p_{19}^{(1)} \beta_1 + p_{19}^{(3)} \beta_3 + p_{19}^{(5)} \beta_5 &
 \end{array}$$

Von der Neigung kommen:

$$\begin{aligned}
 p_{23} &= p_{23.1} + p_{23}^{(23)} \beta_{23} \\
 p_{24} &= p_{24.1} + p_{24}^{(24)} \beta_{24} + p_{24}^{(25)} \beta_{25} \\
 p_{25} &= p_{25.1} + p_{25}^{(24)} \beta_{24} + p_{25}^{(25)} \beta_{25} \\
 p_{26} &= p_{26.1} + p_{26}^{(26)} \beta_{26} \\
 p_{27} &= p_{27.1} + p_{27}^{(27)} \beta_{27} + \beta_{27}^{(30)} \beta_{30} + p_{27}^{(33)} \beta_{33} \\
 p_{28} &= p_{28.1} + p_{28}^{(28)} \beta_{28} + p_{28}^{(31)} \beta_{31} + p_{28}^{(34)} \beta_{34} \\
 p_{29} &= p_{29.1} + p_{29}^{(29)} \beta_{29} + p_{29}^{(32)} \beta_{32} + p_{29}^{(35)} \beta_{35} \\
 p_{30} &= p_{30.1} + p_{30}^{(27)} \beta_{27} + p_{30}^{(30)} \beta_{30} + p_{30}^{(33)} \beta_{33} \\
 p_{31} &= p_{31.1} + p_{31}^{(28)} \beta_{28} + p_{31}^{(31)} \beta_{31} + p_{31}^{(34)} \beta_{34} \\
 p_{32} &= p_{32.1} + p_{32}^{(29)} \beta_{29} + p_{32}^{(32)} \beta_{32} + p_{32}^{(35)} \beta_{35} \\
 p_{33} &= p_{33.1} + p_{33}^{(27)} \beta_{27} + p_{33}^{(30)} \beta_{30} + p_{33}^{(33)} \beta_{33} \\
 p_{34} &= p_{34.1} + p_{34}^{(28)} \beta_{28} + p_{34}^{(31)} \beta_{31} + p_{34}^{(34)} \beta_{34} \\
 p_{35} &= p_{35.1} + p_{35}^{(29)} \beta_{29} + p_{35}^{(32)} \beta_{32} + p_{35}^{(35)} \beta_{35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_6 &= p_{6.1} + p_6^{(23)} \beta_{23} \\
 p_7 &= p_{7.1} + p_7^{(24)} \beta_{24} + p_7^{(25)} \beta_{25} \\
 p_8 &= p_{8.1} + p_8^{(26)} \beta_{26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{23.1} &= p_{23}^{(0)} + p_{23}^{(1)} \beta_1 + p_{23}^I \xi_1 \\
 p_{24.1} &= p_{24}^{(0)} + p_{24}^{(1)} \beta_1 + p_{24}^I \xi_1 + p_{24}^{II} \xi_2 \\
 p_{25.1} &= p_{25}^{(0)} + p_{25}^{(1)} \beta_1 + p_{25}^I \xi_1 + p_{25}^{II} \xi_2 \\
 p_{26.1} &= p_{26}^{(0)} + p_{26}^{(1)} \beta_1 + p_{26}^{II} \xi_2 \\
 p_{27.1} &= p_{27}^{(0)} + p_{27}^{(1)} \beta_1 + p_{27}^I \xi_1 \\
 p_{28.1} &= p_{28}^{(0)} + p_{28}^{(1)} \beta_1 + p_{28}^I \xi_1 + p_{28}^{II} \xi_2 \\
 p_{29.1} &= p_{29}^{(0)} + p_{29}^{(1)} \beta_1 + p_{29}^{II} \xi_2 \\
 p_{30.1} &= p_{30}^{(0)} + p_{30}^{(1)} \beta_1 + p_{30}^I \xi_1 \\
 p_{31.1} &= p_{31}^{(0)} + p_{31}^{(1)} \beta_1 + p_{31}^I \xi_1 + p_{31}^{II} \xi_2 \\
 p_{32.1} &= p_{32}^{(0)} + p_{32}^{(1)} \beta_1 + p_{32}^{II} \xi_2 \\
 p_{33.1} &= p_{33}^{(0)} + p_{33}^{(1)} \beta_1 + p_{33}^I \xi_1 \\
 p_{34.1} &= p_{34}^{(0)} + p_{34}^{(1)} \beta_1 + p_{34}^I \xi_1 + p_{34}^{II} \xi_2 \\
 p_{35.1} &= p_{35}^{(0)} + p_{35}^{(1)} \beta_1 + p_{35}^{II} \xi_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{6.1} &= p_6^{(0)} + p_6^{(1)} \beta_1 + p_6^I \xi_1 \\
 p_{7.1} &= p_7^{(0)} + p_7^{(1)} \beta_1 + p_7^I \xi_1 + p_7^{II} \xi_2 \\
 p_{8.1} &= p_8^{(0)} + p_8^{(1)} \beta_1 + p_8^{II} \xi_2
 \end{aligned}$$

Die ε -Koeffizienten lauten:

$$\begin{aligned}
 (49) \quad \varepsilon_1 &= \varepsilon_1^{(0)} + \varepsilon_1^I \beta_1 + \varepsilon_1^{(1)} \xi_1 \\
 \varepsilon_2 &= \varepsilon_2^{(0)} + \varepsilon_2^I \beta_1 + \varepsilon_2^{(2)} \xi_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_3 &= \varepsilon_{3.1} + \varepsilon_3^{(3)} \xi_3 + \varepsilon_3^{(4)} \xi_4 \\
 \varepsilon_4 &= \varepsilon_{4.1} + \varepsilon_4^{(5)} \xi_5 + \varepsilon_4^{(6)} \xi_6 \\
 \varepsilon_5 &= \varepsilon_{5.1} + \varepsilon_5^{(7)} \xi_7 + \varepsilon_5^{(8)} \xi_8 \\
 \varepsilon_6 &= \varepsilon_{6.1} + \varepsilon_6^{(9)} \xi_9 + \varepsilon_6^{(10)} \xi_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_3 &= \varepsilon_{3.1} + \varepsilon_3^I \xi_3 + \varepsilon_3^{(4)} \xi_4 \\
 \varepsilon_4 &= \varepsilon_{4.1} + \varepsilon_4^I \xi_4 + \varepsilon_4^{(4)} \xi_4 \\
 \varepsilon_5 &= \varepsilon_{5.1} + \varepsilon_5^I \xi_5 + \varepsilon_5^{(6)} \xi_6 \\
 \varepsilon_6 &= \varepsilon_{6.1} + \varepsilon_6^I \xi_5 + \varepsilon_6^{(6)} \xi_6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{1.1} &= \varepsilon_1^{(0)} + \varepsilon_1^I \beta_1 + \varepsilon_1^{(1)} \xi_1 \\
 \varepsilon_{2.1} &= \varepsilon_2^{(0)} + \varepsilon_2^I \beta_1 + \varepsilon_2^{(2)} \xi_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{3.1} &= \varepsilon_3^{(0)} + \varepsilon_3^I \beta_1 + \varepsilon_3^{II} \beta_2 + \varepsilon_3^{IV} \beta_4 + \varepsilon_3^{(1)} \xi_1 \\
 \varepsilon_{4.1} &= \varepsilon_4^{(0)} + \varepsilon_4^I \beta_1 + \varepsilon_4^{III} \beta_3 + \varepsilon_4^V \beta_5 + \varepsilon_4^{(1)} \xi_1 \\
 \varepsilon_{5.1} &= \varepsilon_5^{(0)} + \varepsilon_5^I \beta_1 + \varepsilon_5^{II} \beta_2 + \varepsilon_5^{IV} \beta_4 + \varepsilon_5^{(2)} \xi_2 \\
 \varepsilon_{6.1} &= \varepsilon_6^{(0)} + \varepsilon_6^I \beta_1 + \varepsilon_6^{III} \beta_3 + \varepsilon_6^V \beta_5 + \varepsilon_6^{(2)} \xi_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{3.1} &= \varepsilon_3^{(0)} + \varepsilon_3^I \beta_1 + \varepsilon_3^{II} \beta_2 + \varepsilon_3^{IV} \beta_4 + \varepsilon_3^{(1)} \xi_1 \\
 \varepsilon_{4.1} &= \varepsilon_4^{(0)} + \varepsilon_4^I \beta_1 + \varepsilon_4^{II} \beta_2 + \varepsilon_4^{IV} \beta_4 + \varepsilon_4^{(1)} \xi_1 \\
 \varepsilon_{5.1} &= \varepsilon_5^{(0)} + \varepsilon_5^I \beta_1 + \varepsilon_5^{III} \beta_3 + \varepsilon_5^V \beta_5 + \varepsilon_5^{(1)} \xi_1 \\
 \varepsilon_{6.1} &= \varepsilon_6^{(0)} + \varepsilon_6^I \beta_1 + \varepsilon_6^{III} \beta_3 + \varepsilon_6^V \beta_5 + \varepsilon_6^{(1)} \xi_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_7 &= z_{7-1} + z_7^{(7)} \xi_7 + z_7^{(8)} \xi_8 \\ z_8 &= z_{8-1} + z_8^{(7)} \xi_7 + z_8^{(8)} \xi_8 \\ z_9 &= z_{9-1} + z_9^{(6)} \xi_9 + z_9^{(10)} \xi_{10} \\ z_{10} &= z_{10-1} + z_{10}^{(9)} \xi_9 + z_{10}^{(10)} \xi_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{11} &= z_{11-1} + z_{11}^{(11)} \xi_{11} + z_{11}^{(15)} \xi_{15} \\ z_{12} &= z_{12-1} + z_{12}^{(12)} \xi_{12} + z_{12}^{(16)} \xi_{16} \\ z_{13} &= z_{13-1} + z_{13}^{(13)} \xi_{13} + z_{13}^{(17)} \xi_{17} \\ z_{14} &= z_{14-1} + z_{14}^{(14)} \xi_{14} + z_{14}^{(18)} \xi_{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{15} &= z_{15-1} + z_{15}^{(11)} \xi_{11} + z_{15}^{(15)} \xi_{15} \\ z_{16} &= z_{16-1} + z_{16}^{(12)} \xi_{12} + z_{16}^{(16)} \xi_{16} \\ z_{17} &= z_{17-1} + z_{17}^{(13)} \xi_{13} + z_{17}^{(17)} \xi_{17} \\ z_{18} &= z_{18-1} + z_{18}^{(14)} \xi_{14} + z_{18}^{(18)} \xi_{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{7-1} &= z_7^{(0)} + z_7^I \beta_1 + z_7^{II} \beta_2 + z_7^{IV} \beta_4 + z_7^{(2)} \xi_2 \\ z_{8-1} &= z_8^{(0)} + z_8^I \beta_1 + z_8^{II} \beta_2 + z_8^{IV} \beta_4 + z_8^{(2)} \xi_2 \\ z_{9-1} &= z_9^{(0)} + z_9^I \beta_1 + z_9^{III} \beta_3 + z_9^V \beta_5 + z_9^{(2)} \xi_2 \\ z_{10-1} &= z_{10}^{(0)} + z_{10}^I \beta_1 + z_{10}^{III} \beta_3 + z_{10}^V \beta_5 + z_{10}^{(2)} \xi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{11-1} &= z_{11}^{(0)} + z_{11}^I \beta_1 + z_{11}^{II} \beta_2 + z_{11}^{IV} \beta_4 + z_{11}^{(1)} \xi_1 \\ z_{12-1} &= z_{12}^{(0)} + z_{12}^I \beta_1 + z_{12}^{III} \beta_3 + z_{12}^V \beta_5 + z_{12}^{(1)} \xi_1 \\ z_{13-1} &= z_{13}^{(0)} + z_{13}^I \beta_1 + z_{13}^{II} \beta_2 + z_{13}^{IV} \beta_4 + z_{13}^{(2)} \xi_2 \\ z_{14-1} &= z_{14}^{(0)} + z_{14}^I \beta_1 + z_{14}^{III} \beta_3 + z_{14}^V \beta_5 + z_{14}^{(2)} \xi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{15-1} &= z_{15}^{(0)} + z_{15}^I \beta_1 + z_{15}^{II} \beta_2 + z_{15}^{IV} \beta_4 + z_{15}^{(1)} \xi_1 \\ z_{16-1} &= z_{16}^{(0)} + z_{16}^I \beta_1 + z_{16}^{III} \beta_3 + z_{16}^V \beta_5 + z_{16}^{(1)} \xi_1 \\ z_{17-1} &= z_{17}^{(0)} + z_{17}^I \beta_1 + z_{17}^{II} \beta_2 + z_{17}^{IV} \beta_4 + z_{17}^{(2)} \xi_2 \\ z_{18-1} &= z_{18}^{(0)} + z_{18}^I \beta_1 + z_{18}^{III} \beta_3 + z_{18}^V \beta_5 + z_{18}^{(2)} \xi_2 \end{aligned}$$

Die Werte der $q_k^{(i)}$, $r_k^{(i)}$, $p_{k,s}^{(i)}$, $z_k^{(i)}$ sind auf Seite 31 und folgenden zusammengestellt. Die grosse Zahl der dort gegebenen Formeln schmilzt aber in Wirklichkeit über die Hälfte zusammen, da sehr viele Koeffizienten die gleichen sind. Es bestehen, wie aus der Tafel hervorgeht, die $q_k^{(i)}$ und $r_k^{(i)}$ nur aus A -Koeffizienten, die $p_k^{(i)}$ dagegen aus B - und einigen A -Koeffizienten, weil S in der Differentialgleichung für R auftritt. Die A - und B -Koeffizienten sind nach den von Herrn Brendel gegebenen Formeln und den im I. Kapitel angeführten Zusätzen zu rechnen, oder aus Gyldéns schon erwähnten Hilfstafeln zu entnehmen. $z_k^{(i)}$ besteht nur aus C -Koeffizienten. Da P eine gerade Funktion ist, so treten hier konstante Glieder nullten Grades und zweiten Grades auf. Die letzteren aus η^2 etc., wie sich später zeigen wird.

Damit wäre die erste Aufgabe für die Behandlung der charakteristischen und kritischen Planeten erledigt, die Herstellung der P , Q , Z in der Differentialgleichung bis auf Glieder v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ incl. genau in den Hauptgliedern. Nun müssen diese Differentialgleichungen, da sie nach Vielfachen von S und R fortschreiten, weiter entwickelt werden, indem auch hier die Koeffizienten der Hauptglieder bis auf Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ genau gerechnet werden.

Ermittlung der q -Koeffizienten.

$$q_2^0 = A_{2,0,0}$$

$$q_2^{(1)} = \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} - 2A_{4,0,0} = q_1^{(4)}$$

$$q_2^1 = A_{2,1,0}^{-1}$$

$$q_2^{(2)} = \frac{1}{2} A_{4,1,0}^{-1,1,0} - 2A_{4,1,0}^{-1} + \frac{3}{2} A_{4,0,0}$$

$$q_2^{(3)} = -\frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} + A_{2,0,0}$$

$$q_2^0 = A_{2,0,1}^{-1}$$

$$q_2^{(1)} = -\frac{1}{2} A_{0,0,1}^{+1,1,0} + \frac{1}{2} A_{4,0,1}^{-1,1,0} - 2A_{4,0,1}^{-1}$$

$$q_2^{(2)} = -\frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} + A_{2,0,0} = q_2^{(4)}$$

$$q_2^0 = A_{4,1,0}^{-1}$$

$$q_2^{(1)} = \frac{1}{2} A_{2,1,0}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} A_{6,1,0}^{-1,1,0} + A_{2,1,0}^{-1} + \frac{9}{4} A_{6,0,0} - 3A_{6,1,0}^{-1}$$

$$q_2^{(2)} = \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} = q_1^{(2)}$$

$$q_2^0 = A_{4,0,1}^{-1}$$

$$q_2^{(1)} = \frac{1}{2} A_{2,0,1}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} A_{6,0,1}^{-1,1,0} + A_{2,0,1}^{-1} - 3A_{6,0,1}^{-1}$$

$$q_2^{(2)} = \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} = q_1^{(2)}$$

$$q_7^0 = A_{2,2,0} - \frac{A_{4,0,0} \times A_{2,1,0}^{-1}}{\delta_1}$$

$$q_7^{(1)} = \frac{1}{2} A_{4,2,0}^{1,0} - 3A_{4,0,0} - 2A_{4,2,0} + \frac{3}{2} A_{4,1,0}^{+1}$$

$$q_7^{(2)} = \frac{1}{2} A_{4,1,0}^{-1,1,0} + 3A_{4,0,0}$$

$$q_7^{(3)} = -\frac{1}{2} A_{2,1,0}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} A_{6,1,0}^{-1,1,0} - 3A_{6,1,0}^{-1} + \frac{9}{4} A_{6,0,0} - \frac{3}{4} A_{2,0,0}^{1,0} + A_{2,1,0}^{-1} = q_4^{(1)} - \frac{3}{4} q_1^{(0)} - A_{2,1,0}^{-1,1,0}$$

$$q_7^{(4)} = \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} - 2A_{4,0,0} = q_1^{(4)}$$

$$q_8^0 = A_{2,1,1}^{+1}$$

$$q_8^{(1)} = \frac{1}{2} A_{4,1,1}^{+1,1,0} + \frac{1}{2} A_{0,1,1}^{+1,1,0} - 2A_{4,1,1}^{+1}$$

$$q_8^{(2)} = \frac{1}{2} A_{4,0,1}^{-1,1,0}$$

$$q_8^{(3)} = \frac{1}{2} A_{6,0,1}^{-1,1,0} - 3A_{6,0,1}^{-1}$$

$$q_8^{(4)} = -\frac{1}{2} A_{2,1,0}^{-1,1,0} + A_{2,1,0}^{-1} - \frac{3}{4} A_{2,0,0}$$

$$q_8^{(5)} = \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} - 2A_{4,0,0} = q_1^{(4)}$$

$$q_{11}^{(0)} = A_{2,2,0}^{-2}$$

$$q_{11}^{(1)} = \frac{1}{2} A_{4,2,0}^{-2,1,0} - \frac{1}{2} A_{0,2,0}^{+2,1,0} - 2A_{4,2,0}^{-2} + \frac{3}{2} A_{4,1,0}^{-1} - A_{4,0,0}$$

$$q_{11}^{(4)} = -\frac{1}{2} A_{2,1,0}^{+1,1,0} + A_{2,1,0}^{+1} = q_8^{(5)} - q_1^{(1)}$$

$$q_{11}^{(14)} = -\frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} = -q_1^{(2)}$$

$$q_{11}^{(17)} = -\frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} + 2A_{4,0,0} = -q_1^{(4)}$$

$$q_1^{(1)} = \frac{1}{2} A_{2,1,0}^{+1,1,0} - \frac{1}{2} A_{2,1,0}^{-1,1,0} - A_{2,1,0}^{+1} + A_{2,1,0}^{-1} - \frac{3}{4} A_{2,0,0}$$

$$q_1^{(2)} = \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0}$$

$$q_1^{(4)} = \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} - 2A_{4,0,0}$$

$$q_2^{(0)} = A_{0,0,1}^{+1}$$

$$q_2^{(1)} = \frac{1}{2} A_{2,0,1}^{+1,1,0} - \frac{1}{2} A_{2,0,1}^{-1,1,0} - A_{2,0,1}^{+1} + A_{2,0,1}^{-1}$$

$$q_2^{(3)} = \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} = q_1^{(2)}$$

$$q_2^{(5)} = \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} - 2A_{4,0,0} = q_1^{(4)}$$

$$q_4^{(0)} = A_{0,1,1}^{+1} + \frac{1}{2} \frac{A_{2,0,0} \times A_{2,0,1}^{-1}}{\delta_1}$$

$$q_4^{(1)} = \frac{1}{2} A_{2,1,1}^{+1,1,0} - \frac{1}{2} A_{2,1,1}^{-1,1,0} - A_{2,1,1}^{+1} + A_{2,1,1}^{-1} - \frac{3}{4} A_{2,0,1}^{+1}$$

$$q_4^{(2)} = \frac{1}{2} A_{2,0,1}^{-1,1,0}$$

$$q_4^{(3)} = -\frac{1}{2} A_{2,1,0}^{-1,1,0} - \frac{3}{2} A_{2,0,0}$$

$$q_4^{(4)} = \frac{1}{2} A_{4,0,1}^{-1,1,0} - 2A_{4,0,1}^{-1}$$

$$q_4^{(5)} = -\frac{1}{2} A_{4,1,0}^{-1,1,0} + 2A_{4,1,0}^{-1} - \frac{3}{2} A_{4,0,0} = -q_2^{(1)}$$

$$q_4^{(8)} = -\frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} + A_{2,0,0} = q_2^{(4)}$$

$$q_4^{(9)} = \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} - A_{2,0,0} = -q_2^{(4)}$$

$$q_9^{(0)} = A_{2,1,1}^{-1} - \frac{A_{4,0,0} \times A_{2,0,1}^{-1}}{\delta_1}$$

$$q_9^{(1)} = \frac{1}{2} A_{4,1,1}^{-1,1,0} - \frac{1}{2} A_{0,1,1}^{+1,1,0} - 2A_{4,1,1}^{-1} + \frac{3}{2} A_{4,0,1}^{+1}$$

$$q_9^{(2)} = \frac{1}{2} A_{0,0,1}^{+1,1,0}$$

$$q_9^{(3)} = \frac{1}{2} A_{4,1,0}^{-1,1,0} + 3A_{4,0,0} = q_7^{(2)}$$

$$q_9^{(4)} = -\frac{1}{2} A_{2,0,1}^{-1,1,0} + A_{2,0,1}^{-1}$$

$$q_9^{(5)} = \frac{1}{2} A_{6,1,0}^{-1,1,0} - 3A_{6,1,0}^{-1} + \frac{9}{4} A_{6,0,0}$$

$$q_9^{(8)} = \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} - 2A_{4,0,0} = q_1^{(4)}$$

$$q_{10}^{(0)} = A_{2,0,2}$$

$$q_{10}^{(1)} = \frac{1}{2} A_{4,0,2}^{1,0} - 2A_{4,0,2}$$

$$q_{10}^{(3)} = \frac{1}{2} A_{0,0,1}^{+1,1,0} + \frac{1}{2} A_{4,0,1}^{-1,1,0}$$

$$q_{10}^{(5)} = \frac{1}{2} A_{6,0,1}^{-1,1,0} - \frac{1}{2} A_{2,0,1}^{-1,1,0} - 3A_{6,0,1}^{-1} + A_{2,0,1}^{-1} = q_8^{(4)} + q_9^{(4)}$$

$$q_{10}^{(10)} = \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} - 2A_{4,0,0} = q_1^{(4)}$$

$$\begin{aligned}
q_{12}^{(0)} &= A_{2,1,1}^{-2} \\
q_{12}^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{4,1,1}^{-2,1,0} - \frac{1}{2} A_{0,1,1}^{+2,1,0} - 2A_{4,1,1}^{-2} + \frac{3}{2} A_{4,0,1}^{-1} \\
q_{12}^{(2)} &= -\frac{1}{2} A_{0,0,1}^{+1,1,0} = -q_9^{(2)} \\
q_{12}^{(4)} &= -\frac{1}{2} A_{2,0,1}^{+1,1,0} + A_{2,0,1}^{+1} \\
q_{12}^{(5)} &= -\frac{1}{2} A_{2,1,0}^{+1,1,0} + A_{2,1,0}^{+1} = q_{11}^{(4)} \\
q_{12}^{(15)} &= -\frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} = -q_{11}^{(2)} \\
q_{12}^{(18)} &= -\frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} + 2A_{4,0,0} = -q_1^{(4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{13}^{(0)} &= A_{2,0,2}^{-2} \\
q_{13}^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,2}^{-2,1,0} - \frac{1}{2} A_{0,0,2}^{+2,1,0} - 2A_{4,0,2}^{-2} \\
q_{13}^{(3)} &= -\frac{1}{2} A_{0,0,1}^{+1,1,0} = -q_9^{(2)} \\
q_{13}^{(5)} &= -\frac{1}{2} A_{2,0,1}^{+1,1,0} + A_{2,0,1}^{+1} = q_{12}^{(4)} \\
q_{13}^{(16)} &= -\frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} = -q_1^{(2)} \\
q_{13}^{(19)} &= -\frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} + 2A_{4,0,0} = -q_1^{(4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{14}^{(0)} &= A_{4,2,0}^{-2} - \frac{1}{2} \frac{A_{2,0,0} \times A_{2,1,0}^{-1}}{\delta_1} \\
q_{14}^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{2,2,0}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} A_{6,2,0}^{-2,1,0} + A_{2,2,0}^{-2} - 3A_{6,2,0}^{-2} \\
&\quad + \frac{9}{4} A_{6,1,0}^{-1} - \frac{3}{2} A_{6,0,0}^{-1} - \frac{3}{2} A_{2,0,0}^{-1} \\
q_{14}^{(2)} &= \frac{1}{2} A_{2,1,0}^{-1,1,0} + \frac{3}{2} A_{2,0,0} = -q_4^{(3)} \\
q_{14}^{(11)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} - A_{2,0,0} = -q_2^{(4)} \\
q_{14}^{(17)} &= -\frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} + A_{2,0,0} = q_2^{(4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{15}^{(0)} &= A_{4,1,1}^{-2} - \frac{1}{2} \frac{A_{2,0,0} \times A_{2,0,1}^{-1}}{\delta_1} \\
q_{15}^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{2,1,1}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} A_{6,1,1}^{-2,1,0} + A_{2,1,1}^{-2} - 3A_{6,1,1}^{-2} + \frac{9}{4} A_{6,0,1}^{-1} \\
q_{15}^{(2)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,1}^{-1,1,0} = q_4^{(2)} \\
q_{15}^{(3)} &= \frac{1}{2} A_{2,1,0}^{-1,1,0} + \frac{3}{2} A_{2,0,0} = -q_4^{(3)} \\
q_{15}^{(4)} &= -\frac{1}{2} A_{0,0,1}^{+1,1,0} = -q_9^{(2)} \\
q_{15}^{(12)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} - A_{2,0,0} = -q_2^{(4)} \\
q_{15}^{(18)} &= -\frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} + A_{2,0,0} = q_2^{(4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{16}^{(0)} &= A_{4,0,2}^{-2} \\
q_{16}^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,2}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} A_{6,0,2}^{-2,1,0} + A_{2,0,2}^{-2} - 3A_{6,0,2}^{-2} \\
q_{16}^{(3)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,1}^{-1,1,0} = q_4^{(2)} \\
q_{16}^{(5)} &= -\frac{1}{2} A_{0,0,1}^{+1,1,0} = -q_9^{(2)} \\
q_{16}^{(13)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} - A_{2,0,0} = -q_2^{(4)} \\
q_{16}^{(19)} &= -\frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} + A_{2,0,0} = q_2^{(4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{17}^{(0)} &= A_{6,2,0}^{-2} - \frac{A_{4,0,0} \times A_{2,1,0}^{-1}}{\delta_1} \\
q_{17}^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{4,2,0}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} A_{8,2,0}^{-2,1,0} + 2A_{4,2,0}^{-2} - 4A_{8,2,0}^{-2} \\
&\quad + 3A_{8,1,0}^{-1} - 2A_{8,0,0}^{-1} - 3A_{4,0,0}^{-1} \\
q_{17}^{(2)} &= \frac{1}{2} A_{4,1,0}^{-1,1,0} + 3A_{4,0,0} = q_7^{(2)} \\
q_{17}^{(4)} &= \frac{1}{2} A_{2,1,0}^{-1,1,0} + A_{2,1,0}^{-1} = -q_9^{(5)} + q_4^{(1)} \\
q_{17}^{(11)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} - 2A_{4,0,0} = q_1^{(3)} \\
q_{17}^{(14)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} = q_1^{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{18}^{(0)} &= A_{6,1,1}^{-2} - \frac{A_{4,0,0} \times A_{2,0,1}^{-1}}{\delta_1} \\
q_{18}^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{4,1,1}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} A_{8,1,1}^{-2,1,0} + 2A_{4,1,1}^{-2} - 4A_{8,1,1}^{-2} + 3A_{8,0,1}^{-1} \\
q_{18}^{(2)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,1}^{-1,1,0} = q_8^{(2)} \\
q_{18}^{(3)} &= \frac{1}{2} A_{4,1,0}^{-1,1,0} + 3A_{4,0,0} = q_7^{(2)} \\
q_{18}^{(4)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,1}^{-1,1,0} + A_{2,0,1}^{-1} = q_5^{(1)} - q_8^{(4)} \\
q_{18}^{(5)} &= \frac{1}{2} A_{2,1,0}^{-1,1,0} + A_{2,1,0}^{-1} = q_{17}^{(4)} \\
q_{18}^{(12)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} - 2A_{4,0,0} = q_1^{(4)} \\
q_{18}^{(15)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} = q_1^{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{19}^{(0)} &= A_{6,0,2}^{-2} \\
q_{19}^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,2}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} A_{8,0,2}^{-2,1,0} + 2A_{4,0,2}^{-2} - 4A_{8,0,2}^{-2} \\
q_{19}^{(3)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,1}^{-1,1,0} = q_8^{(2)} \\
q_{19}^{(5)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,1}^{-1,1,0} + A_{2,0,1}^{-1} = q_{18}^{(4)} \\
q_{19}^{(13)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} - 2A_{4,0,0} = q_1^{(4)} \\
q_{19}^{(16)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} = q_1^{(2)}
\end{aligned}$$

Von der Neigung abhängig:

$$\begin{aligned}
q_7^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{2,1,1}^{+1,1,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{2,1,1}^{-1,1,0} - \bar{A}_{2,1,1}^{+1} + \bar{A}_{2,1,1}^{-1} \\
q_7^{(24)} &= -\frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} + A_{3,0,0} = q_2^{(4)} \\
q_7^{(25)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} - A_{2,0,0} = -q_2^{(4)} \\
q_7^I &= -\frac{1}{2} \bar{A}_{4,0,1}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} \bar{A}_{4,0,1}^{-1,0,1} \\
q_7^{II} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{4,1,0}^{-1,1,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{4,1,0}^{-1,0,1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{23}^{(0)} &= \bar{A}_{2,2,0} \\
 q_{23}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{4,2,0}^{1,0} - 2\bar{A}_{4,2,0} \\
 q_{23}^{(23)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} - 2A_{4,0,0} = q_1^{(4)} \\
 q_{23}^I &= \frac{1}{2} \bar{A}_{2,1,0}^{-1,I,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{6,1,0}^{-1,I,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{2,1,0}^{-1,0,I} + \frac{1}{2} \bar{A}_{6,1,0}^{-1,0,I} \\
 q_{24}^{(0)} &= \bar{A}_{2,1,1}^{+1} \\
 q_{24}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{4,1,1}^{+1,1,0} - 2\bar{A}_{4,1,1}^{+1} \\
 q_{24}^{(25)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} - 2A_{4,0,0} = q_1^{(4)} \\
 q_{24}^I &= -\frac{1}{2} \bar{A}_{6,0,1}^{-1,I,0} + \frac{1}{2} \bar{A}_{6,0,1}^{-1,0,I} \\
 q_{24}^{II} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{2,1,0}^{-1,I,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{2,1,0}^{-1,0,I}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{27}^{(0)} &= \bar{A}_{2,2,0}^{-2} \\
 q_{27}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{4,2,0}^{-2,1,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{0,2,0}^{+2,1,0} - 2\bar{A}_{4,2,0}^{-2} \\
 q_{27}^{(30)} &= -\frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} = -q_1^{(2)} \\
 q_{27}^{(33)} &= -\frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} + 2A_{4,0,0} = -q_1^{(4)} \\
 q_{27}^I &= \frac{1}{2} \bar{A}_{2,1,0}^{+1,I,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{2,1,0}^{+1,0,I}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{28}^{(0)} &= \bar{A}_{2,1,1}^{-2} \\
 q_{28}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{4,1,1}^{-2,1,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{0,1,1}^{+2,1,0} - 2\bar{A}_{4,1,1}^{-2} \\
 q_{28}^{(31)} &= -\frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} = -q_1^{(2)} \\
 q_{28}^{(34)} &= -\frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} + 2A_{4,0,0} = -q_1^{(4)} \\
 q_{28}^I &= \frac{1}{2} \bar{A}_{2,0,1}^{+1,I,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{2,0,1}^{+1,0,I} \\
 q_{28}^{II} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{2,1,0}^{+1,I,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{2,1,0}^{+1,0,I} = q_{27}^I
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{29}^{(0)} &= \bar{A}_{2,0,2}^{-2} \\
 q_{29}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{4,0,2}^{-2,1,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{0,0,2}^{+2,1,0} - 2\bar{A}_{4,0,2}^{-2} \\
 q_{29}^{(32)} &= -\frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} = -q_1^{(2)} \\
 q_{29}^{(35)} &= -\frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} + 2A_{4,0,0} = -q_1^{(4)} \\
 q_{29}^{II} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{2,0,1}^{+1,I,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{2,0,1}^{+1,0,I} = q_{28}^I
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{30}^{(0)} &= \bar{A}_{4,2,0}^{-2} \\
 q_{30}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{2,2,0}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} \bar{A}_{6,2,0}^{-2,1,0} + \bar{A}_{2,2,0}^{-2} - 3\bar{A}_{6,2,0}^{-2} \\
 q_{30}^{(27)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} - A_{2,0,0} = -q_2^{(4)} \\
 q_{30}^{(33)} &= -\frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} + A_{2,0,0} = q_2^{(4)} \\
 q_{30}^I &= \frac{1}{2} \bar{A}_{0,1,0}^{+1,I,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{0,1,0}^{+1,0,I}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{25}^{(0)} &= \bar{A}_{2,1,1}^{-1} \\
 q_{25}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{4,1,1}^{-1,1,0} - 2\bar{A}_{4,1,1}^{-1} \\
 q_{25}^{(24)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} - 2A_{4,0,0} = q_1^{(4)} \\
 q_{25}^I &= \frac{1}{2} \bar{A}_{2,0,1}^{-1,I,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{2,0,1}^{-1,0,I} \\
 q_{25}^{II} &= -\frac{1}{2} \bar{A}_{6,1,0}^{-1,I,0} + \frac{1}{2} \bar{A}_{6,1,0}^{-1,0,I} = q_{23}^I - q_{24}^{II} \\
 q_{26}^{(0)} &= \bar{A}_{2,0,2} \\
 q_{26}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{4,0,2}^{1,0} - 2\bar{A}_{4,0,2} \\
 q_{26}^{(26)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} - 2A_{4,0,0} = q_1^{(4)} \\
 q_{26}^{II} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{2,0,1}^{-1,I,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{6,0,1}^{-1,I,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{2,0,1}^{-1,0,I} + \frac{1}{2} \bar{A}_{6,0,1}^{-1,0,I} \\
 &= q_{24}^I + q_{25}^I
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{31}^{(0)} &= \bar{A}_{4,1,1}^{-2} \\
 q_{31}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{2,1,1}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} \bar{A}_{6,1,1}^{-2,1,0} + \bar{A}_{2,1,1}^{-2} - 3\bar{A}_{6,1,1}^{-2} \\
 q_{31}^{(28)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} - A_{2,0,0} = -q_2^{(4)} \\
 q_{31}^{(34)} &= -\frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} + A_{2,0,0} = q_2^{(4)} \\
 q_{31}^I &= \frac{1}{2} \bar{A}_{0,0,1}^{+1,I,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{0,0,1}^{+1,0,I} \\
 q_{31}^{II} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{0,1,0}^{+1,I,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{0,1,0}^{+1,0,I} = q_{30}^I
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{32}^{(0)} &= \bar{A}_{4,0,2}^{-2} \\
 q_{32}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{6,0,2}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} \bar{A}_{2,0,2}^{-2,1,0} + \bar{A}_{4,0,2}^{-2} - 3\bar{A}_{6,0,2}^{-2} \\
 q_{32}^{(29)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} - A_{2,0,0} = -q_2^{(4)} \\
 q_{32}^{(35)} &= -\frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} + A_{2,0,0} = q_2^{(4)} \\
 q_{32}^{II} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{0,0,1}^{+1,I,0} - \frac{1}{2} \bar{A}_{0,0,1}^{+1,0,I} = q_{31}^I
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{33}^{(0)} &= \bar{A}_{6,2,0}^{-2} \\
 q_{33}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{4,2,0}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} \bar{A}_{8,2,0}^{-2,1,0} + 2\bar{A}_{4,2,0}^{-2} - 4\bar{A}_{8,2,0}^{-2} \\
 q_{33}^{(27)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} - 2A_{4,0,0} = q_1^{(4)} \\
 q_{33}^{(30)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} = q_1^{(2)} \\
 q_{33}^I &= \frac{1}{2} \bar{A}_{2,1,0}^{-1,I,0} + \frac{1}{2} \bar{A}_{2,1,0}^{-1,0,I}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{34}^{(0)} &= \bar{A}_{6,1,1}^{-2} \\
 q_{34}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{4,1,1}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} \bar{A}_{8,1,1}^{-2,1,0} + 2\bar{A}_{4,1,1}^{-2} - 4\bar{A}_{8,1,1}^{-2} \\
 q_{34}^{(28)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} - 2A_{4,0,0} = q_1^{(4)} \\
 q_{34}^{(31)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} = q_1^{(2)} \\
 q_{34}^I &= \frac{1}{2} \bar{A}_{2,0,1}^{-1,I,0} + \frac{1}{2} \bar{A}_{2,0,1}^{-1,0,I} \\
 q_{34}^{II} &= \frac{1}{2} \bar{A}_{2,1,0}^{-1,I,0} + \frac{1}{2} \bar{A}_{2,1,0}^{-1,0,I} = q_{33}^I
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{35}^{(0)} &= \overline{A}_{6,0,2}^{-2} \\
q_{35}^{(1)} &= \frac{1}{2} \overline{A}_{4,0,2}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} \overline{A}_{8,0,2}^{-2,1,0} + 2\overline{A}_{4,0,2}^{-2} - 4\overline{A}_{8,0,2}^{-2} \\
q_{35}^{(2)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} - 2A_{4,0,0} = q_1^{(4)} \\
q_{35}^{(3)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} = q_1^{(2)} \\
q_{35}^{\text{II}} &= \frac{1}{2} \overline{A}_{2,0,1}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} \overline{A}_{2,0,1}^{-1,0,1} = q_{34}^{\text{I}}
\end{aligned}$$

Ermittlung der Koeffizienten koordiniert in Q .

$$\begin{aligned}
r_1^{(0)} &= A_{4,0,0} \\
r_1^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} + \frac{1}{2} A_{6,0,0}^{1,0} + A_{2,0,0} - 3A_{6,0,0} \\
r_2^{(0)} &= A_{2,1,0}^{+1} \\
r_2^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{4,1,0}^{+1,1,0} - 2A_{4,1,0}^{+1} \\
r_2^{(2)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} \\
r_2^{(4)} &= \frac{1}{2} A_{6,0,0}^{1,0} - 3A_{6,0,0} \\
r_3^{(0)} &= A_{2,0,1}^{+1} \\
r_3^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{0,0,1}^{+1,1,0} + \frac{1}{2} A_{4,0,1}^{+1,1,0} - 2A_{4,0,1}^{+1} \\
r_3^{(3)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} = r_2^{(2)} \\
r_3^{(5)} &= \frac{1}{2} A_{6,0,0}^{1,0} - 3A_{6,0,0} = r_2^{(4)} \\
r_4^{(0)} &= A_{6,1,0}^{-1} \\
r_4^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{4,1,0}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} A_{8,1,0}^{-1,1,0} + 2A_{4,1,0}^{-1} - 4A_{8,1,0}^{-1} + 3A_{8,0,0} \\
r_4^{(2)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} = r_2^{(2)} \\
r_4^{(4)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} + A_{2,0,0} = r_1^{(1)} - r_2^{(4)} \\
r_5^{(0)} &= A_{6,0,1}^{-1} \\
r_5^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,1}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} A_{8,0,1}^{-1,1,0} + 2A_{4,0,1}^{-1} - 4A_{8,0,1}^{-1} \\
r_5^{(3)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} = r_2^{(2)} \\
r_5^{(5)} &= \frac{1}{2} A_{2,0,0}^{1,0} + A_{2,0,0} = r_4^{(4)}
\end{aligned}$$

Ermittlung der p -Koeffizienten.

$$\begin{aligned}
p_0^{(0)} &= B_{0,0,0} \\
p_0^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} - B_{2,0,0} \\
p_2^{(0)} &= B_{2,1,0}^{-1} \\
p_2^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{0,1,0}^{+1,1,0} + \frac{1}{2} B_{4,1,0}^{-1,1,0} - 2B_{4,1,0}^{-1} + \frac{3}{2} B_{4,0,0} \\
p_2^{(2)} &= B_{0,0,0}^{1,0} \\
p_2^{(4)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} - B_{2,0,0} = p_0^{(1)} \\
p_3^{(0)} &= B_{2,0,1}^{-1} \\
p_3^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{0,0,1}^{+1,1,0} + \frac{1}{2} B_{4,0,1}^{-1,1,0} - 2B_{4,0,1}^{-1} \\
p_3^{(3)} &= B_{0,0,0}^{1,0} = p_2^{(2)} \\
p_3^{(5)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} - B_{2,0,0} = p_0^{(1)} \\
p_4^{(0)} &= B_{4,1,0}^{-1} \\
p_4^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{2,1,0}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} B_{6,1,0}^{-1,1,0} + B_{2,1,0}^{-1} - 3B_{6,1,0}^{-1} + \frac{9}{4} B_{6,0,0} \\
p_4^{(2)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} = p_1^{(2)} \\
p_4^{(4)} &= B_{0,0,0}^{1,0} = p_2^{(2)} \\
p_5^{(0)} &= B_{4,0,1}^{-1} \\
p_5^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,1}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} B_{6,0,1}^{-1,1,0} + B_{2,0,1}^{-1} - 3B_{6,0,1}^{-1} \\
p_5^{(3)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} = p_1^{(2)} \\
p_5^{(5)} &= B_{0,0,0}^{1,0} = p_2^{(2)} \\
p_1^{(0)} &= B_{0,1,0}^{+1} \\
p_1^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{2,1,0}^{+1,1,0} + \frac{1}{2} B_{2,1,0}^{-1,1,0} - B_{2,1,0}^{+1} - B_{2,1,0}^{-1} + \frac{3}{4} B_{2,0,0} \\
p_1^{(2)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} \\
p_1^{(4)} &= \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} - 2B_{4,0,0} \\
p_1^{(5)} &= \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} - 2B_{4,0,0} = p_1^{(4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3^{(0)} &= B_{0-2-0} - \frac{1}{2} \frac{B_{2-0-0} \times A_{2-1-0}^{-1}}{\delta_1} \\ p_3^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{2-2-0}^{1-0} - B_{2-2-0} + \frac{3}{4} B_{2-1-0}^{+1} - \frac{3}{2} B_{2-0-0} \\ p_3^{(2)} &= \frac{1}{2} B_{2-1-0}^{-1-1-0} + \frac{3}{2} B_{2-0-0} \\ p_3^{(4)} &= \frac{1}{2} B_{4-1-0}^{-1-1-0} - 2B_{4-1-0}^{-1} + \frac{3}{2} B_{4-0-0} = p_2^{(1)} - \frac{1}{2} B_{0-1-0}^{+1-1-0} \\ p_3^{(7)} &= \frac{1}{2} B_{2-0-0}^{1-0} - B_{2-0-0} = p_0^{(1)} \\ p_4^{(0)} &= B_{0-1-1}^{+1} + \frac{1}{2} \frac{B_{2-0-0} \times A_{2-0-1}^{-1}}{\delta_1} \\ p_4^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{2-1-1}^{+1-1-0} + \frac{1}{2} B_{2-1-1}^{-1-1-0} - B_{2-1-1}^{+1} - B_{2-1-1}^{-1} + \frac{3}{4} B_{2-0-1}^{+1} \\ p_4^{(2)} &= \frac{1}{2} B_{2-0-1}^{-1-1-0} \\ p_4^{(3)} &= \frac{1}{2} B_{2-1-0}^{-1-1-0} + \frac{3}{2} B_{2-0-0} = p_3^{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4^{(4)} &= \frac{1}{2} B_{4-0-1}^{-1-1-0} - 2B_{4-0-1}^{-1} \\ p_4^{(5)} &= \frac{1}{2} B_{4-1-0}^{-1-1-0} - 2B_{4-1-0}^{-1} + \frac{3}{2} B_{4-0-0} = p_3^{(4)} \\ p_4^{(8)} &= \frac{1}{2} B_{2-0-0}^{1-0} - B_{2-0-0} = p_0^{(1)} \\ p_4^{(9)} &= \frac{1}{2} B_{2-0-0}^{1-0} - B_{2-0-0} = p_0^{(1)} \\ p_5^{(0)} &= B_{0-0-2} \\ p_5^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{2-0-2}^{1-0} - B_{2-0-2} \\ p_5^{(5)} &= \frac{1}{2} B_{2-0-1}^{-1-1-0} = p_4^{(2)} \\ p_5^{(5)} &= \frac{1}{2} B_{4-0-1}^{-1-1-0} - 2B_{4-0-1}^{-1} = p_4^{(4)} \\ p_5^{(10)} &= \frac{1}{2} B_{2-0-0}^{1-0} - B_{2-0-0} = p_0^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_7^{(0)} &= B_{2-2-0} - \frac{B_{4-0-0} \times A_{2-1-0}^{-1}}{\delta_1} \\ p_7^{(1)} &= B_{0-2-0}^{1-0} + \frac{1}{2} B_{4-2-0}^{1-0} - 2B_{4-2-0} + \frac{3}{2} B_{4-1-0}^{+1} - 3B_{4-0-0} \\ p_7^{(2)} &= \frac{1}{2} B_{0-1-0}^{+1-1-0} + \frac{1}{2} B_{4-1-0}^{-1-1-0} + 3B_{4-0-0} \\ p_7^{(4)} &= \frac{1}{2} B_{2-1-0}^{-1-1-0} + \frac{1}{2} B_{6-1-0}^{-1-1-0} - 3B_{6-1-0}^{-1} - B_{2-1-0}^{-1} + \frac{3}{4} B_{2-0-0} \\ &\quad + \frac{9}{4} B_{6-0-0} = p_4^{(3)} - 2p_2^{(0)} + \frac{3}{4} p_1^{(0)} \\ p_7^{(7)} &= B_{0-0-0}^{1-0} + \frac{1}{2} B_{4-0-0}^{1-0} - 2B_{4-0-0} = p_1^{(1)} \\ p_8^{(0)} &= B_{2-1-1}^{+1} \\ p_8^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{0-1-1}^{+1-1-0} + \frac{1}{2} B_{4-1-1}^{+1-1-0} - 2B_{4-1-1}^{+1} \\ p_8^{(2)} &= \frac{1}{2} B_{4-0-1}^{-1-1-0} \\ p_8^{(3)} &= \frac{1}{2} B_{0-1-0}^{+1-1-0} \\ p_8^{(4)} &= \frac{1}{2} B_{6-0-1}^{-1-1-0} - 3B_{6-0-1}^{-1} \\ p_8^{(5)} &= \frac{1}{2} B_{2-1-0}^{-1-1-0} - B_{2-1-0}^{-1} + \frac{3}{4} B_{2-0-0} \\ p_8^{(8)} &= B_{0-0-0}^{1-0} = p_2^{(2)} \\ p_8^{(9)} &= \frac{1}{2} B_{4-0-0}^{1-0} - 2B_{4-0-0} = p_1^{(4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_9^{(0)} &= B_{2-1-1}^{-1} - \frac{B_{4-0-0} \times A_{2-0-1}^{-1}}{\delta_1} \\ p_9^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{0-1-1}^{+1-1-0} + \frac{1}{2} B_{4-1-1}^{-1-1-0} - 2B_{4-1-1}^{-1} + \frac{3}{2} B_{4-0-1}^{+1} \\ p_9^{(2)} &= \frac{1}{2} B_{0-0-1}^{+1-1-0} \\ p_9^{(3)} &= \frac{1}{2} B_{4-1-0}^{-1-1-0} + 3B_{4-0-0} = p_7^{(2)} - p_8^{(3)} \\ p_9^{(4)} &= \frac{1}{2} B_{2-0-1}^{-1-1-0} - B_{2-0-1}^{-1} \\ p_9^{(5)} &= \frac{1}{2} B_{6-1-0}^{-1-1-0} - 3B_{6-1-0}^{-1} + \frac{9}{4} B_{6-0-0} \\ p_9^{(8)} &= \frac{1}{2} B_{4-0-0}^{1-0} - 2B_{4-0-0} = p_1^{(4)} \\ p_9^{(9)} &= B_{0-0-0}^{1-0} = p_2^{(2)} \\ p_{10}^{(0)} &= B_{2-0-2} \\ p_{10}^{(1)} &= B_{0-0-2}^{1-0} + \frac{1}{2} B_{4-0-2}^{1-0} - 2B_{4-0-2} \\ p_{10}^{(3)} &= \frac{1}{2} B_{0-0-1}^{+1-1-0} + \frac{1}{2} B_{4-0-1}^{-1-1-0} = p_8^{(1)} + 2p_5^{(0)} \\ p_{10}^{(5)} &= \frac{1}{2} B_{2-0-1}^{-1-1-0} + \frac{1}{2} B_{6-0-1}^{-1-1-0} - B_{2-0-1}^{-1} - 3B_{6-0-1}^{-1} = p_8^{(4)} + p_9^{(4)} \\ p_{10}^{(10)} &= B_{0-0-0}^{1-0} + \frac{1}{2} B_{4-0-0}^{1-0} - 2B_{4-0-0} = p_1^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{11}^{(0)} &= B_{2-2-0}^{-2} \\ p_{11}^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{0-2-0}^{+2-1-0} + \frac{1}{2} B_{4-2-0}^{-2-1-0} - 2B_{4-2-0}^{-2} + \frac{3}{2} B_{4-1-0}^{-1} - B_{4-0-0} \\ p_{11}^{(2)} &= \frac{1}{2} B_{0-1-0}^{+1-1-0} = p_8^{(3)} \\ p_{11}^{(4)} &= \frac{1}{2} B_{2-1-0}^{+1-1-0} - B_{2-1-0}^{+1} = p_1^{(1)} - p_8^{(5)} \\ p_{11}^{(11)} &= B_{0-0-0}^{1-0} = p_2^{(2)} \\ p_{11}^{(14)} &= \frac{1}{2} B_{2-0-0}^{1-0} = p_1^{(2)} \\ p_{11}^{(17)} &= \frac{1}{2} B_{4-0-0}^{1-0} - 2B_{4-0-0} = p_1^{(4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{12}^{(0)} &= B_{2-1-1}^{-2} \\ p_{12}^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{0-1-1}^{+2-1-0} + \frac{1}{2} B_{4-1-1}^{-2-1-0} - 2B_{4-1-1}^{-2} + \frac{3}{2} B_{4-0-1}^{-1} \\ p_{12}^{(2)} &= \frac{1}{2} B_{0-0-1}^{+1-1-0} = p_9^{(2)} \\ p_{12}^{(3)} &= \frac{1}{2} B_{0-1-0}^{+1-1-0} = p_8^{(3)} \\ p_{12}^{(4)} &= \frac{1}{2} B_{2-0-1}^{+1-1-0} - B_{2-0-1}^{+1} \\ p_{12}^{(5)} &= \frac{1}{2} B_{2-1-0}^{+1-1-0} - B_{2-1-0}^{+1} = p_{11}^{(4)} \\ p_{12}^{(12)} &= B_{0-0-0}^{1-0} = p_2^{(2)} \\ p_{12}^{(15)} &= \frac{1}{2} B_{2-0-0}^{1-0} = p_1^{(2)} \\ p_{12}^{(18)} &= \frac{1}{2} B_{4-0-0}^{1-0} - 2B_{4-0-0} = p_1^{(4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{13}^{(0)} &= B_{2,0,2}^{-2} \\
p_{13}^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{0,0,2}^{+2,1,0} + \frac{1}{2} B_{4,0,2}^{-2,1,0} - 2B_{4,0,2}^{-2} \\
p_{13}^{(3)} &= \frac{1}{2} B_{0,0,1}^{+1,1,0} = p_9^{(2)} \\
p_{13}^{(5)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,1}^{+1,1,0} - B_{2,0,1}^{+1} = p_{12}^{(4)} \\
p_{13}^{(13)} &= B_{0,0,0}^{1,0} = p_2^{(2)} \\
p_{13}^{(16)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} = p_1^{(2)} \\
p_{13}^{(19)} &= \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} - 2B_{4,0,0} = p_1^{(4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{14}^{(0)} &= B_{4,2,0}^{-2} - \frac{1}{2} \frac{B_{2,0,0} \times A_{2,1,0}^{-1}}{\delta_1} \\
p_{14}^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{2,2,0}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} B_{6,2,0}^{-2,1,0} + B_{2,2,0}^{-2} - 3B_{6,2,0}^{-3} \\
&\quad + \frac{9}{4} B_{6,1,0}^{-1} - \frac{3}{2} B_{2,0,0} - \frac{3}{2} B_{6,0,0} \\
p_{14}^{(2)} &= \frac{1}{2} B_{2,1,0}^{-1,1,0} + \frac{3}{2} B_{3,0,0} = p_8^{(2)} \\
p_{14}^{(4)} &= \frac{1}{2} B_{0,1,0}^{+1,1,0} = p_8^{(3)} \\
p_{14}^{(11)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} - B_{2,0,0} = p_0^{(1)} \\
p_{14}^{(14)} &= B_{0,0,0}^{1,0} = p_2^{(2)} \\
p_{14}^{(17)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} - B_{2,0,0} = p_0^{(1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{15}^{(0)} &= B_{4,1,1}^{-2} - \frac{1}{2} \frac{B_{2,0,0} \times A_{2,0,1}^{-1}}{\delta_1} \\
p_{15}^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{2,1,1}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} B_{6,1,1}^{-2,1,0} + B_{2,1,1}^{-2} - 3B_{6,1,1}^{-2} + \frac{9}{4} B_{6,0,1}^{-1} \\
p_{15}^{(2)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,1}^{-1,1,0} = p_4^{(2)} \\
p_{15}^{(3)} &= \frac{1}{2} B_{2,1,0}^{-1,1,0} + \frac{3}{2} B_{2,0,0} = p_3^{(2)} \\
p_{15}^{(4)} &= \frac{1}{2} B_{0,0,1}^{+1,1,0} = p_9^{(2)} \\
p_{15}^{(5)} &= \frac{1}{2} B_{0,1,0}^{+1,1,0} = p_8^{(3)} \\
p_{15}^{(12)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} - B_{2,0,0} = p_0^{(1)} \\
p_{15}^{(15)} &= B_{0,0,0}^{1,0} = p_2^{(2)} \\
p_{15}^{(18)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} - B_{2,0,0} = p_0^{(1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{16}^{(0)} &= B_{4,0,2}^{-2} \\
p_{16}^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,2}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} B_{6,0,2}^{-2,1,0} + B_{2,0,2}^{-2} - 3B_{6,0,2}^{-2} \\
p_{16}^{(3)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,1}^{-1,1,0} = p_4^{(2)} \\
p_{16}^{(5)} &= \frac{1}{2} B_{0,0,1}^{+1,1,0} = p_9^{(2)} \\
p_{16}^{(13)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} - B_{2,0,0} = p_0^{(1)} \\
p_{16}^{(16)} &= B_{0,0,0}^{1,0} = p_2^{(2)} \\
p_{16}^{(19)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} - B_{2,0,0} = p_0^{(1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{17}^{(0)} &= B_{6,2,0}^{-2} - \frac{B_{4,0,0} \times A_{2,1,0}^{-1}}{\delta_1} \\
p_{17}^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{4,2,0}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} B_{8,2,0}^{-2,1,0} + 2B_{4,2,0}^{-2} - 4B_{8,2,0}^{-2} \\
&\quad + 3B_{8,1,0}^{-1} - 3B_{4,0,0} - 2B_{8,0,0} \\
p_{17}^{(2)} &= \frac{1}{2} B_{4,1,0}^{-1,1,0} + 3B_{4,0,0} = p_7^{(2)} - p_8^{(3)} \\
p_{17}^{(4)} &= \frac{1}{2} B_{2,1,0}^{-1,1,0} + B_{2,1,0}^{-1} = p_4^{(1)} - p_9^{(5)} \\
p_{17}^{(11)} &= \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} - 2B_{4,0,0} = p_1^{(4)} \\
p_{17}^{(14)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} = p_1^{(2)} \\
p_{17}^{(17)} &= B_{0,0,0}^{1,0} = p_2^{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{18}^{(0)} &= B_{6,1,1}^{-2} - \frac{B_{4,0,0} \times A_{2,0,1}^{-1}}{\delta_1} \\
p_{18}^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{4,1,1}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} B_{8,1,1}^{-2,1,0} + 2B_{4,1,1}^{-2} - 4B_{8,1,1}^{-2} + 3B_{8,0,1}^{-1} \\
p_{18}^{(2)} &= \frac{1}{2} B_{4,0,1}^{-1,1,0} = p_8^{(2)} \\
p_{18}^{(3)} &= \frac{1}{2} B_{4,1,0}^{-1,1,0} + 3B_{4,0,0} = p_{17}^{(2)} \\
p_{18}^{(4)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,1}^{-1,1,0} + B_{2,0,1}^{-1} = p_5^{(1)} - p_8^{(4)} \\
p_{18}^{(5)} &= \frac{1}{2} B_{2,1,0}^{-1,1,0} + B_{2,1,0}^{-1} = p_{17}^{(4)} \\
p_{18}^{(12)} &= \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} - 2B_{4,0,0} = p_1^{(4)} \\
p_{18}^{(15)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} = p_1^{(2)} \\
p_{18}^{(18)} &= B_{0,0,0}^{1,0} = p_2^{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{19}^{(0)} &= B_{6,0,2}^{-2} \\
p_{19}^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{4,0,2}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} B_{8,0,2}^{-2,1,0} + 2B_{4,0,2}^{-2} - 4B_{8,0,2}^{-2} \\
p_{19}^{(3)} &= \frac{1}{2} B_{4,0,1}^{-1,1,0} = p_8^{(2)} \\
p_{19}^{(5)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,1}^{-1,1,0} + B_{2,0,1}^{-1} = p_{15}^{(4)} \\
p_{19}^{(13)} &= \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} - 2B_{4,0,0} = p_1^{(4)} \\
p_{19}^{(16)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} = p_1^{(2)} \\
p_{19}^{(19)} &= B_{0,0,0}^{1,0} = p_2^{(2)}
\end{aligned}$$

Ermittlung der p -Koeffizienten, welche von der Neigung abhängen.

$$\begin{aligned}
 p_6^{(0)} &= \bar{B}_{0,2,0} \\
 p_6^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{2,2,0}^{1,0} - \bar{B}_{2,2,0} \\
 p_6^{(23)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} - B_{2,0,0} = p_0^{(1)} \\
 p_6^I &= \frac{1}{2} \bar{B}_{4,1,0}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{4,1,0}^{-1,0,1} \\
 p_7^{(0)} &= \bar{B}_{0,1,1}^{+1} \\
 p_7^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{2,1,1}^{+1,1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{2,1,1}^{-1,1,0} - \bar{B}_{2,1,1}^{+1} - \bar{B}_{2,1,1}^{-1} \\
 p_7^{(24)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} - B_{2,0,0} = p_0^{(1)} \\
 p_7^{(25)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} - B_{2,0,0} = p_0^{(1)} \\
 p_7^I &= \frac{1}{2} \bar{B}_{4,0,1}^{-1,1,0} \\
 p_7^{II} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{4,1,0}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{4,1,0}^{-1,0,1} = p_6^I \\
 p_8^{(0)} &= \bar{B}_{0,0,2} \\
 p_8^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{2,0,2}^{1,0} - \bar{B}_{2,0,2} \\
 p_8^{(26)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} - B_{2,0,0} = p_0^{(1)} \\
 p_8^{II} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{4,0,1}^{-1,1,0} = p_7^I \\
 p_{23}^{(0)} &= \bar{B}_{2,2,0} \\
 p_{23}^{(1)} &= \bar{B}_{0,2,0}^{1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{4,2,0}^{1,0} - 2\bar{B}_{4,2,0} \\
 p_{23}^{(23)} &= B_{0,0,0}^{1,0} + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} - 2B_{4,0,0} = p_1^{(1)} \\
 p_{23}^I &= \frac{1}{2} \bar{B}_{2,1,0}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{2,1,0}^{-1,0,1} + \frac{1}{2} \bar{B}_{6,1,0}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{6,1,0}^{-1,0,1} \\
 p_{24}^{(0)} &= \bar{B}_{2,1,1}^{+1} \\
 p_{24}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{0,1,1}^{+1,1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{4,1,1}^{+1,1,0} - 2\bar{B}_{4,1,1}^{+1} \\
 p_{24}^{(24)} &= B_{0,0,0}^{1,0} = p_2^{(2)} \\
 p_{24}^{(25)} &= \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} - 2B_{4,0,0} = p_1^{(4)} \\
 p_{24}^I &= \frac{1}{2} \bar{B}_{6,0,1}^{-1,1,0} \\
 p_{24}^{II} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{2,1,0}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{2,1,0}^{-1,0,1} \\
 p_{25}^{(0)} &= \bar{B}_{2,1,1}^{-1} \\
 p_{25}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{0,1,1}^{+1,1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{4,1,1}^{-1,1,0} - 2\bar{B}_{4,1,1}^{-1} \\
 p_{25}^{(24)} &= \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} - 2B_{4,0,0} = p_1^{(4)} \\
 p_{25}^{(25)} &= B_{0,0,0}^{1,0} = p_2^{(2)} \\
 p_{25}^I &= \frac{1}{2} \bar{B}_{2,0,1}^{-1,1,0} \\
 p_{25}^{II} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{6,1,0}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{6,1,0}^{-1,0,1} = p_{23}^I - p_{24}^{II} \\
 p_{26}^{(0)} &= \bar{B}_{2,0,2} \\
 p_{26}^{(1)} &= \bar{B}_{0,0,2}^{1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{4,0,2}^{1,0} - 2\bar{B}_{4,0,2} \\
 p_{26}^{(26)} &= B_{0,0,0}^{1,0} - 2B_{4,0,0} + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} = p_1^{(1)} \\
 p_{26}^{II} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{2,0,1}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{6,0,1}^{-1,1,0} \\
 p_{27}^{(0)} &= \bar{B}_{2,2,0}^{-2} \\
 p_{27}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{0,2,0}^{+2,1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{4,2,0}^{-2,1,0} - 2\bar{B}_{4,2,0}^{-2} \\
 p_{27}^{(27)} &= B_{0,0,0}^{1,0} = p_2^{(2)} \\
 p_{27}^{(30)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} = p_1^{(2)} \\
 p_{27}^{(33)} &= \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} - 2B_{4,0,0} = p_1^{(4)} \\
 p_{27}^I &= \frac{1}{2} \bar{B}_{2,1,0}^{+1,1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{2,1,0}^{+1,0,1} \\
 p_{28}^{(0)} &= \bar{B}_{2,1,1}^{-2} \\
 p_{28}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{0,1,1}^{+2,1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{4,1,1}^{-2,1,0} - 2\bar{B}_{4,1,1}^{-2} \\
 p_{28}^{(28)} &= B_{0,0,0}^{1,0} = p_2^{(2)} \\
 p_{28}^{(31)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} = p_1^{(2)} \\
 p_{28}^{(34)} &= \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} - 2B_{4,0,0} = p_1^{(4)} \\
 p_{28}^I &= \frac{1}{2} \bar{B}_{2,0,1}^{+1,1,0} \\
 p_{28}^{II} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{2,1,0}^{+1,1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{2,1,0}^{+1,0,1} = p_{27}^I \\
 p_{29}^{(0)} &= \bar{B}_{2,0,2}^{-2} \\
 p_{29}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{0,0,2}^{+2,1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{4,0,2}^{-2,1,0} - 2\bar{B}_{4,0,2}^{-2} \\
 p_{29}^{(29)} &= B_{0,0,0}^{1,0} = p_2^{(2)} \\
 p_{29}^{(32)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} = p_1^{(2)} \\
 p_{29}^{(35)} &= \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} - 2B_{4,0,0} = p_1^{(4)} \\
 p_{29}^{II} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{2,0,1}^{+1,1,0} = p_{28}^I \\
 p_{30}^{(0)} &= \bar{B}_{4,2,0}^{-2} \\
 p_{30}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{2,2,0}^{-2,1,0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{6,2,0}^{-2,1,0} + \bar{B}_{2,2,0}^{-2} - 3\bar{B}_{6,2,0}^{-2} \\
 p_{30}^{(27)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} - B_{2,0,0} = p_0^{(1)} \\
 p_{30}^{(30)} &= B_{0,0,0}^{1,0} = p_2^{(2)} \\
 p_{30}^{(33)} &= \frac{1}{2} B_{2,0,0}^{1,0} - B_{2,0,0} = p_0^{(1)} \\
 p_{30}^I &= \frac{1}{2} \bar{B}_{0,1,0}^{+1,1,0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{31}^{(0)} &= \bar{B}_{4 \cdot 1 \cdot 1}^{-2} \\
p_{31}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{2 \cdot 1 \cdot 1}^{-2 \cdot 1 \cdot 0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{6 \cdot 1 \cdot 1}^{-2 \cdot 1 \cdot 0} + \bar{B}_{2 \cdot 1 \cdot 1}^{-2} - 3\bar{B}_{6 \cdot 1 \cdot 1}^{-2} \\
p_{31}^{(28)} &= \frac{1}{2} B_{2 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} - B_{2 \cdot 0 \cdot 0} = p_0^{(1)} \\
p_{31}^{(31)} &= B_{0 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} = p_2^{(2)} \\
p_{31}^{(34)} &= \frac{1}{2} B_{2 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} - B_{2 \cdot 0 \cdot 0} = p_0^{(1)} \\
p_{31}^I &= \frac{1}{2} \bar{B}_{0 \cdot 0 \cdot 1}^{+1 \cdot 1 \cdot 0} \\
p_{31}^{II} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{0 \cdot 1 \cdot 0}^{+1 \cdot 1 \cdot 0} = p_{30}^I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{32}^{(0)} &= \bar{B}_{4 \cdot 0 \cdot 2}^{-2} \\
p_{32}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{2 \cdot 0 \cdot 2}^{-2 \cdot 1 \cdot 0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{6 \cdot 0 \cdot 2}^{-2 \cdot 1 \cdot 0} + \bar{B}_{2 \cdot 0 \cdot 2}^{-2} - 3\bar{B}_{6 \cdot 0 \cdot 2}^{-2} \\
p_{32}^{(29)} &= \frac{1}{2} B_{2 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} - B_{2 \cdot 0 \cdot 0} = p_0^{(1)} \\
p_{32}^{(32)} &= B_{0 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} = p_2^{(2)} \\
p_{32}^{(35)} &= \frac{1}{2} B_{2 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} - B_{2 \cdot 0 \cdot 0} = p_0^{(1)} \\
p_{32}^{II} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{0 \cdot 0 \cdot 1}^{+1 \cdot 1 \cdot 0} = p_{31}^I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{33}^{(0)} &= \bar{B}_{6 \cdot 2 \cdot 0}^{-2} \\
p_{33}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{4 \cdot 2 \cdot 0}^{-2 \cdot 1 \cdot 0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{8 \cdot 2 \cdot 0}^{-2 \cdot 1 \cdot 0} + 2\bar{B}_{4 \cdot 2 \cdot 0}^{-2} - 4\bar{B}_{8 \cdot 2 \cdot 0}^{-2} \\
p_{33}^{(27)} &= \frac{1}{2} B_{4 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} - 2B_{4 \cdot 0 \cdot 0} = p_1^{(4)} \\
p_{33}^{(30)} &= \frac{1}{2} B_{2 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} = p_1^{(2)} \\
p_{33}^{(33)} &= B_{0 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} = p_2^{(2)} \\
p_{33}^I &= -\frac{1}{2} \bar{B}_{2 \cdot 1 \cdot 0}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{2 \cdot 1 \cdot 0}^{-1 \cdot 0 \cdot 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{34}^{(0)} &= \bar{B}_{6 \cdot 1 \cdot 1}^{-2} \\
p_{34}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{4 \cdot 1 \cdot 1}^{-2 \cdot 1 \cdot 0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{8 \cdot 1 \cdot 1}^{-2 \cdot 1 \cdot 0} + 2\bar{B}_{4 \cdot 1 \cdot 1}^{-2} - 4\bar{B}_{8 \cdot 1 \cdot 1}^{-2} \\
p_{34}^{(28)} &= \frac{1}{2} B_{4 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} - 2B_{4 \cdot 0 \cdot 0} = p_1^{(4)} \\
p_{34}^{(31)} &= \frac{1}{2} B_{2 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} = p_1^{(2)} \\
p_{34}^{(34)} &= B_{0 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} = p_2^{(2)} \\
p_{34}^I &= -\frac{1}{2} \bar{B}_{2 \cdot 0 \cdot 1}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} \\
p_{34}^{II} &= -\frac{1}{2} \bar{B}_{2 \cdot 1 \cdot 0}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{2 \cdot 1 \cdot 0}^{-1 \cdot 0 \cdot 1} = p_{33}^I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{35}^{(0)} &= \bar{B}_{6 \cdot 0 \cdot 2}^{-2} \\
p_{35}^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{B}_{4 \cdot 0 \cdot 2}^{-2 \cdot 1 \cdot 0} + \frac{1}{2} \bar{B}_{8 \cdot 0 \cdot 2}^{-2 \cdot 1 \cdot 0} + 2\bar{B}_{4 \cdot 0 \cdot 2}^{-2} - 4\bar{B}_{8 \cdot 0 \cdot 2}^{-2} \\
p_{35}^{(29)} &= \frac{1}{2} B_{4 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} - 2B_{4 \cdot 0 \cdot 0} = p_1^{(4)} \\
p_{35}^{(32)} &= \frac{1}{2} B_{2 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} = p_1^{(2)} \\
p_{35}^{(35)} &= B_{0 \cdot 0 \cdot 0}^{1 \cdot 0} = p_2^{(2)} \\
p_{35}^{II} &= -\frac{1}{2} \bar{B}_{2 \cdot 0 \cdot 1}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} = p_{34}^I
\end{aligned}$$

Ermittlung der z -Koeffizienten.

$$\begin{aligned}
\delta_1^{(0)} &= C_{0 \cdot 1 \cdot 0}^{+1} \\
\delta_1^I &= \frac{1}{2} C_{2 \cdot 1 \cdot 0}^{+1 \cdot 1 \cdot 0} - \frac{1}{2} C_{2 \cdot 1 \cdot 0}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} - C_{2 \cdot 1 \cdot 0}^{+1} + C_{2 \cdot 1 \cdot 0}^{-1} \\
\delta_1^{(1)} &= -\frac{1}{2} C_{4 \cdot 0 \cdot 0}^{0 \cdot 1} \\
\delta_2^{(0)} &= C_{0 \cdot 0 \cdot 1}^{+1} \\
\delta_2^I &= \frac{1}{2} C_{2 \cdot 0 \cdot 1}^{+1 \cdot 1 \cdot 0} - \frac{1}{2} C_{2 \cdot 0 \cdot 1}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} - C_{2 \cdot 0 \cdot 1}^{+1} + C_{2 \cdot 0 \cdot 1}^{-1} \\
\delta_2^{(2)} &= -\frac{1}{2} C_{4 \cdot 0 \cdot 0}^{0 \cdot 1} = \delta_1^{(1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1^{(0)} &= C_{4 \cdot 1 \cdot 0}^{-1} \\
z_1^I &= \frac{1}{2} C_{2 \cdot 1 \cdot 0}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} + \frac{1}{2} C_{6 \cdot 1 \cdot 0}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} + C_{2 \cdot 1 \cdot 0}^{-1} - 3C_{6 \cdot 1 \cdot 0}^{-1} \\
z_1^{(1)} &= C_{0 \cdot 0 \cdot 0}^{0 \cdot 1} \\
z_2^{(0)} &= C_{4 \cdot 0 \cdot 1}^{-1} \\
z_2^I &= \frac{1}{2} C_{2 \cdot 0 \cdot 1}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} + \frac{1}{2} C_{6 \cdot 0 \cdot 1}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} + C_{2 \cdot 0 \cdot 1}^{-1} - 3C_{6 \cdot 0 \cdot 1}^{-1} \\
z_2^{(2)} &= C_{0 \cdot 0 \cdot 0}^{0 \cdot 1} = z_1^{(1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_3^{(0)} &= C_{0 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0}^{+1} \\
\delta_3^I &= \frac{1}{2} C_{2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0}^{+1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0} - \frac{1}{2} C_{2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0}^{-1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0} - C_{2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0}^{+1} + C_{2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0}^{-1} + \frac{3}{4} C_{2 \cdot 1 \cdot 0}^{+1} \\
\delta_3^{II} &= -\frac{1}{2} C_{2 \cdot 1 \cdot 0}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} \\
\delta_3^{IV} &= -\frac{1}{2} C_{4 \cdot 1 \cdot 0}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} + 2C_{4 \cdot 1 \cdot 0}^{-1} \\
\delta_3^{(1)} &= -\frac{1}{2} C_{4 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1}^{-1 \cdot 0 \cdot 1} \\
\delta_3^{(3)} &= \frac{1}{2} C_{2 \cdot 0 \cdot 0}^{0 \cdot 1} \\
\delta_3^{(4)} &= -\frac{1}{2} C_{2 \cdot 0 \cdot 0}^{0 \cdot 1} = -\delta_3^{(3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_4^{(0)} &= C_{0 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0}^{+1} \\
\delta_4^I &= \frac{1}{2} C_{2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0}^{+1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0} - \frac{1}{2} C_{2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0}^{-1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0} - C_{2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0}^{+1} + C_{2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0}^{-1} \\
\delta_4^{III} &= -\frac{1}{2} C_{2 \cdot 1 \cdot 0}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} = \delta_3^{II} \\
\delta_4^V &= -\frac{1}{2} C_{4 \cdot 1 \cdot 0}^{-1 \cdot 1 \cdot 0} + 2C_{4 \cdot 1 \cdot 0}^{-1} = \delta_3^{IV} \\
\delta_4^{(1)} &= -\frac{1}{2} C_{4 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}^{-1 \cdot 0 \cdot 1} \\
\delta_4^{(5)} &= \frac{1}{2} C_{2 \cdot 0 \cdot 0}^{0 \cdot 1} = \delta_3^{(3)} \\
\delta_4^{(6)} &= -\frac{1}{2} C_{2 \cdot 0 \cdot 0}^{0 \cdot 1} = -\delta_3^{(3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{55}^{(0)} &= C_{0-0-1-1-0}^{+1} \\ z_{55}^{\text{I}} &= \frac{1}{2} C_{2-0-1-1-0}^{+1-1-0} - \frac{1}{2} C_{2-0-1-1-0}^{-1-1-0} - C_{2-0-1-1-0}^{+1} + C_{2-0-1-1-0}^{-1} + \frac{3}{4} C_{2-0-1}^{+1} \\ z_{55}^{\text{II}} &= -\frac{1}{2} C_{2-0-1}^{-1-1-0} \\ z_{55}^{\text{IV}} &= -\frac{1}{2} C_{4-0-1}^{-1-1-0} + 2C_{4-0-1}^{-1} \\ z_{55}^{(2)} &= -\frac{1}{2} C_{4-0-0-1-0}^{-1-0-1} = z_{53}^{(1)} \\ z_{55}^{(7)} &= \frac{1}{2} C_{2-0-0}^{0-1} = z_{53}^{(3)} \\ z_{55}^{(8)} &= -\frac{1}{2} C_{2-0-0}^{0-1} = -z_{53}^{(3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{56}^{(0)} &= C_{0-0-1-0-1}^{+1} \\ z_{56}^{\text{I}} &= \frac{1}{2} C_{2-0-1-0-1}^{+1-1-0} - \frac{1}{2} C_{2-0-1-0-1}^{-1-1-0} - C_{2-0-1-0-1}^{+1} + C_{2-0-1-0-1}^{-1} \\ z_{56}^{\text{III}} &= -\frac{1}{2} C_{2-0-1}^{-1-1-0} = z_{55}^{\text{II}} \\ z_{56}^{\text{V}} &= -\frac{1}{2} C_{4-0-1}^{-1-1-0} + 2C_{4-0-1}^{-1} = z_{55}^{\text{IV}} \\ z_{56}^{(2)} &= -\frac{1}{2} C_{4-0-0-0-1}^{-1-0-1} = z_{54}^{(1)} \\ z_{56}^{(9)} &= \frac{1}{2} C_{2-0-0}^{0-1} = z_{53}^{(3)} \\ z_{56}^{(10)} &= -\frac{1}{2} C_{2-0-0}^{0-1} = -z_{53}^{(3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3^{(0)} &= C_{2-1-0-1-0}^{+1} \\ z_3^{\text{I}} &= \frac{1}{2} C_{0-1-0-1-0}^{+1-1-0} + \frac{1}{2} C_{4-1-0-1-0}^{+1-1-0} - 2C_{4-1-0-1-0}^{+1} + \frac{3}{2} C_{4-1-0}^{+1} \\ z_3^{\text{II}} &= \frac{1}{2} C_{0-1-0}^{+1-1-0} \\ z_3^{\text{IV}} &= -\frac{1}{2} C_{2-1-0}^{-1-1-0} + C_{2-1-0}^{-1} = z_{53}^{\text{II}} + C_{2-1-0}^{-1} \\ z_3^{(1)} &= -\frac{1}{2} C_{6-0-0-1-0}^{-1-0-1} \\ z_3^{(3)} &= C_{0-0-0}^{0-1} = z_1^{(1)} \\ z_3^{(4)} &= -\frac{1}{2} C_{4-0-0}^{0-1} = z_{51}^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_5^{(5)} &= C_{2-1-0-0-1}^{+1} \\ z_5^{\text{I}} &= \frac{1}{2} C_{0-1-0-0-1}^{+1-1-0} + \frac{1}{2} C_{4-1-0-0-1}^{+1-1-0} - 2C_{4-1-0-0-1}^{+1} \\ z_5^{\text{III}} &= \frac{1}{2} C_{0-1-0}^{+1-1-0} = z_3^{\text{II}} \\ z_5^{\text{V}} &= -\frac{1}{2} C_{2-1-0}^{-1-1-0} + C_{2-1-0}^{-1} = z_3^{\text{IV}} \\ z_5^{(1)} &= -\frac{1}{2} C_{6-0-0-0-1}^{-1-0-1} \\ z_5^{(5)} &= C_{0-0-0}^{0-1} = z_1^{(1)} \\ z_5^{(6)} &= -\frac{1}{2} C_{4-0-0}^{0-1} = z_{51}^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4^{(0)} &= C_{2-1-0-1-0}^{-1} \\ z_4^{\text{I}} &= -\frac{1}{2} C_{0-1-0-1-0}^{+1-1-0} + \frac{1}{2} C_{4-1-0-1-0}^{-1-1-0} - 2C_{4-1-0-1-0}^{-1} \\ z_4^{\text{II}} &= \frac{1}{2} C_{4-1-0}^{-1-1-0} = 2z_1^{(0)} - z_{53}^{\text{IV}} \\ z_4^{\text{IV}} &= \frac{1}{2} C_{6-1-0}^{-1-1-0} - 3C_{6-1-0}^{-1} \\ z_4^{(1)} &= \frac{1}{2} C_{2-0-0-1-0}^{-1-0-1} \\ z_4^{(3)} &= -\frac{1}{2} C_{4-0-0}^{0-1} = z_{51}^{(1)} \\ z_4^{(4)} &= C_{0-0-0}^{0-1} = z_1^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_6^{(0)} &= C_{2-1-0-0-1}^{-1} \\ z_6^{\text{I}} &= -\frac{1}{2} C_{0-1-0-0-1}^{+1-1-0} + \frac{1}{2} C_{4-1-0-0-1}^{-1-1-0} - 2C_{4-1-0-0-1}^{-1} \\ z_6^{\text{III}} &= \frac{1}{2} C_{4-1-0}^{-1-1-0} = z_4^{\text{II}} \\ z_6^{\text{V}} &= \frac{1}{2} C_{6-1-0}^{-1-1-0} - 3C_{6-1-0}^{-1} = z_4^{\text{IV}} \\ z_6^{(1)} &= \frac{1}{2} C_{2-0-0-0-1}^{-1-0-1} \\ z_6^{(5)} &= -\frac{1}{2} C_{4-0-0}^{0-1} = z_{51}^{(1)} \\ z_6^{(6)} &= C_{0-0-0}^{0-1} = z_1^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_7^{(0)} &= C_{2-0-1-1-0}^{+1} \\ z_7^{\text{I}} &= \frac{1}{2} C_{0-0-1-1-0}^{+1-1-0} + \frac{1}{2} C_{4-0-1-1-0}^{+1-1-0} - 2C_{4-0-1-1-0}^{+1} + \frac{3}{2} C_{4-0-1}^{+1} \\ z_7^{\text{II}} &= \frac{1}{2} C_{0-0-1}^{+1-1-0} \\ z_7^{\text{IV}} &= -\frac{1}{2} C_{2-0-1}^{-1-1-0} + C_{2-0-1}^{-1} = z_{55}^{\text{II}} + C_{2-0-1}^{-1} \\ z_7^{(2)} &= -\frac{1}{2} C_{6-0-0-1-0}^{-1-0-1} = z_3^{(1)} \\ z_7^{(7)} &= C_{0-0-0}^{0-1} = z_1^{(1)} \\ z_7^{(8)} &= -\frac{1}{2} C_{4-0-0}^{0-1} = z_{51}^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_9^{(0)} &= C_{2-0-1-0-1}^{+1} \\ z_9^{\text{I}} &= \frac{1}{2} C_{0-0-1-0-1}^{+1-1-0} + \frac{1}{2} C_{4-0-1-0-1}^{+1-1-0} - 2C_{4-0-1-0-1}^{+1} \\ z_9^{\text{III}} &= \frac{1}{2} C_{0-0-1}^{+1-1-0} = z_7^{\text{II}} \\ z_9^{\text{V}} &= -\frac{1}{2} C_{2-0-1}^{-1-1-0} + C_{2-0-1}^{-1} = z_7^{\text{IV}} \\ z_9^{(2)} &= -\frac{1}{2} C_{6-0-0-1-0}^{-1-0-1} = z_5^{(1)} \\ z_9^{(9)} &= C_{0-0-0}^{0-1} = z_1^{(1)} \\ z_9^{(10)} &= -\frac{1}{2} C_{4-0-0}^{0-1} = z_{51}^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_8^{(0)} &= C_{2-0-1-1-0}^{-1} \\ z_8^{\text{I}} &= -\frac{1}{2} C_{0-0-1-1-0}^{+1-1-0} + \frac{1}{2} C_{4-0-1-1-0}^{-1-1-0} - 2C_{4-0-1-1-0}^{-1} \\ z_8^{\text{II}} &= \frac{1}{2} C_{4-0-1}^{-1-1-0} = 2z_2^{(0)} - z_{55}^{\text{IV}} \\ z_8^{\text{IV}} &= \frac{1}{2} C_{6-0-1}^{-1-1-0} - 3C_{6-0-1}^{-1} \\ z_8^{(2)} &= \frac{1}{2} C_{2-0-0-1-0}^{-1-0-1} = z_4^{(1)} \\ z_8^{(7)} &= -\frac{1}{2} C_{4-0-0}^{0-1} = z_{51}^{(1)} \\ z_8^{(8)} &= C_{0-0-0}^{0-1} = z_1^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{10}^{(0)} &= C_{2-0-1-0-1}^{-1} \\ z_{10}^{\text{I}} &= -\frac{1}{2} C_{0-0-1-0-1}^{+1-1-0} + \frac{1}{2} C_{4-0-1-0-1}^{-1-1-0} - 2C_{4-0-1-0-1}^{-1} \\ z_{10}^{\text{III}} &= \frac{1}{2} C_{4-0-1}^{-1-1-0} = z_8^{\text{II}} \\ z_{10}^{\text{V}} &= \frac{1}{2} C_{6-0-1}^{-1-1-0} - 3C_{6-0-1}^{-1} = z_8^{\text{IV}} \\ z_{10}^{(2)} &= \frac{1}{2} C_{2-0-0-0-1}^{-1-0-1} = z_6^{(1)} \\ z_{10}^{(9)} &= -\frac{1}{2} C_{4-0-0}^{0-1} = z_{51}^{(1)} \\ z_{10}^{(10)} &= C_{0-0-0}^{0-1} = z_1^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{11}^{(0)} &= C_{2-1-0-1-0}^{-2} \\
z_{11}^I &= -\frac{1}{2} C_{0-1-0-1-0}^{+2-1-0} + \frac{1}{2} C_{4-1-0-1-0}^{-2-1-0} - 2C_{4-1-0-1-0}^{-2} + \frac{3}{2} C_{4-1-0}^{-1} \\
z_{11}^{II} &= -\frac{1}{2} C_{0-1-0}^{+1-1-0} = -z_3^{II} \\
z_{11}^{IV} &= -\frac{1}{2} C_{2-1-0}^{+1-1-0} + C_{2-1-0}^{+1} = z_3^{IV} - \delta_1^I \\
z_{11}^{(1)} &= \frac{1}{2} C_{2-0-0-1-0}^{+1-0-1} \\
z_{11}^{(11)} &= C_{0-0-0}^{0-1} = z_1^{(1)} \\
z_{11}^{(15)} &= \frac{1}{2} C_{4-0-0}^{0-1} = -\delta_1^{(1)} \\
z_{12}^{(0)} &= C_{2-1-0-0-1}^{-2} \\
z_{12}^I &= -\frac{1}{2} C_{0-1-0-0-1}^{+2-1-0} + \frac{1}{2} C_{4-1-0-0-1}^{-2-1-0} - 2C_{4-1-0-0-1}^{-2} \\
z_{12}^{III} &= -\frac{1}{2} C_{0-1-0}^{+1-1-0} = -z_3^{III} \\
z_{12}^V &= -\frac{1}{2} C_{2-1-0}^{+1-1-0} + C_{2-1-0}^{+1} = z_{11}^{IV} \\
z_{12}^{(1)} &= \frac{1}{2} C_{2-0-0-0-1}^{+1-0-1} \\
z_{12}^{(12)} &= C_{0-0-0}^{0-1} = z_1^{(1)} \\
z_{12}^{(16)} &= \frac{1}{2} C_{4-0-0}^{0-1} = -\delta_1^{(1)} \\
z_{13}^{(0)} &= C_{2-0-1-1-0}^{-2} \\
z_{13}^I &= -\frac{1}{2} C_{0-0-1-1-0}^{+2-1-0} + \frac{1}{2} C_{4-0-1-1-0}^{-2-1-0} - 2C_{4-0-1-1-0}^{-2} + \frac{3}{2} C_{4-0-1}^{-1} \\
z_{13}^{II} &= -\frac{1}{2} C_{0-0-1}^{+1-1-0} = -z_7^{II} \\
z_{13}^{IV} &= -\frac{1}{2} C_{2-0-1}^{+1-1-0} + C_{2-0-1}^{+1} = z_7^{IV} - \delta_2^I \\
z_{13}^{(2)} &= \frac{1}{2} C_{2-0-0-1-0}^{+1-0-1} = z_{11}^{(1)} \\
z_{13}^{(13)} &= C_{0-0-0}^{0-1} = z_1^{(1)} \\
z_{13}^{(17)} &= \frac{1}{2} C_{4-0-0}^{0-1} = -\delta_1^{(1)} \\
z_{14}^{(0)} &= C_{2-0-1-0-1}^{-2} \\
z_{14}^I &= -\frac{1}{2} C_{0-0-1-0-1}^{+2-1-0} + \frac{1}{2} C_{4-0-1-0-1}^{-2-1-0} - 2C_{4-0-1-0-1}^{-2} \\
z_{14}^{III} &= -\frac{1}{2} C_{0-0-1}^{+1-1-0} = -z_7^{III} \\
z_{14}^V &= -\frac{1}{2} C_{2-0-1}^{+1-1-0} + C_{2-0-1}^{+1} = z_{13}^{IV} \\
z_{14}^{(2)} &= \frac{1}{2} C_{2-0-0-0-1}^{+1-0-1} = z_{12}^{(1)} \\
z_{14}^{(14)} &= C_{0-0-0}^{0-1} = z_1^{(1)} \\
z_{14}^{(18)} &= \frac{1}{2} C_{4-0-0}^{0-1} = -\delta_1^{(1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{15}^{(0)} &= C_{6-1-0-1-0}^{-2} \\
z_{15}^I &= \frac{1}{2} C_{4-1-0-1-0}^{-2-1-0} + \frac{1}{2} C_{8-1-0-1-0}^{-2-1-0} + 2C_{4-1-0-1-0}^{-2} - 4C_{8-1-0-1-0}^{-2} + \dots \\
z_{15}^{II} &= \frac{1}{2} C_{4-1-0}^{-1-1-0} = z_4^{II} \\
z_{15}^{IV} &= \frac{1}{2} C_{2-1-0}^{-1-1-0} + C_{2-1-0}^{-1} = z_4^I - z_4^{IV} \\
z_{15}^{(1)} &= \frac{1}{2} C_{2-0-0-1-0}^{-1-0-1} = z_4^{(1)} \\
z_{15}^{(11)} &= \frac{1}{2} C_{4-0-0}^{0-1} = -\delta_1^{(1)} \\
z_{15}^{(15)} &= C_{0-0-0}^{0-1} = z_1^{(1)} \\
z_{16}^{(0)} &= C_{6-1-0-0-1}^{-2} \\
z_{16}^I &= \frac{1}{2} C_{4-1-0-0-1}^{-2-1-0} + \frac{1}{2} C_{8-1-0-0-1}^{-2-1-0} + 2C_{4-1-0-0-1}^{-2} - 4C_{8-1-0-0-1}^{-2} + \dots \\
z_{16}^{III} &= \frac{1}{2} C_{4-1-0}^{-1-1-0} = z_4^{III} \\
z_{16}^V &= \frac{1}{2} C_{2-1-0}^{-1-1-0} + C_{2-1-0}^{-1} = z_{15}^{IV} \\
z_{16}^{(1)} &= \frac{1}{2} C_{2-0-0-0-1}^{-1-0-1} = z_6^{(1)} \\
z_{16}^{(12)} &= \frac{1}{2} C_{4-0-0}^{0-1} = -\delta_1^{(1)} \\
z_{16}^{(16)} &= C_{0-0-0}^{0-1} = z_1^{(1)} \\
z_{17}^{(0)} &= C_{6-0-1-1-0}^{-2} \\
z_{17}^I &= \frac{1}{2} C_{4-0-1-1-0}^{-2-1-0} + \frac{1}{2} C_{8-0-1-1-0}^{-2-1-0} + 2C_{4-0-1-1-0}^{-2} - 4C_{8-0-1-1-0}^{-2} + \dots \\
z_{17}^{II} &= \frac{1}{2} C_{4-0-1}^{-1-1-0} = z_8^{II} \\
z_{17}^{IV} &= \frac{1}{2} C_{2-0-1}^{-1-1-0} + C_{2-0-1}^{-1} = z_2^I - z_8^{IV} \\
z_{17}^{(2)} &= \frac{1}{2} C_{2-0-0-1-0}^{-1-0-1} = z_4^{(1)} \\
z_{17}^{(13)} &= \frac{1}{2} C_{4-0-0}^{0-1} = -\delta_1^{(1)} \\
z_{17}^{(17)} &= C_{0-0-0}^{0-1} = z_1^{(1)} \\
z_{18}^{(0)} &= C_{6-0-1-0-1}^{-2} \\
z_{18}^I &= \frac{1}{2} C_{4-0-1-0-1}^{-2-1-0} + \frac{1}{2} C_{8-0-1-0-1}^{-2-1-0} + 2C_{4-0-1-0-1}^{-2} - 4C_{8-0-1-0-1}^{-2} + \dots \\
z_{18}^{III} &= \frac{1}{2} C_{4-0-1}^{-1-1-0} = z_8^{III} \\
z_{18}^V &= \frac{1}{2} C_{2-0-1}^{-1-1-0} + C_{2-0-1}^{-1} = z_{17}^{IV} \\
z_{18}^{(2)} &= \frac{1}{2} C_{2-0-0-0-1}^{-1-0-1} = z_6^{(1)} \\
z_{18}^{(14)} &= \frac{1}{2} C_{4-0-0}^{0-1} = -\delta_1^{(1)} \\
z_{18}^{(18)} &= C_{0-0-0}^{0-1} = z_1^{(1)}
\end{aligned}$$

Damit wäre die erste Aufgabe für die Behandlung der charakteristischen und kritischen Planeten erledigt, die Herstellung der Q , P , Z in den Differentialgleichungen bis auf Glieder v. d. Ord. $\frac{m^{1/2}}{\delta_1}$ incl. genau in den Hauptgliedern. Nun müssen diese Differentialgleichungen, da sie nach Potenzen von S und R fortschreiten, weiter entwickelt werden, indem auch hier die Koeffizienten der Hauptglieder bis auf Grössen v. d. Ord. $\frac{m^{1/2}}{\delta_1}$ genau gerechnet werden.

An dieser Stelle will ich auch Herrn Ludendorff für die Bereitwilligkeit, mit der er mir gestattete, aus seinen Resultaten Nutzen zu ziehen, meinen besten Dank sagen.

Drittes Kapitel.

Die Integration der Differentialgleichungen für die Glieder nullten, ersten und zweiten Grades ohne Berücksichtigung der exargumentalen Glieder sowie der Veränderlichkeit von η , Π ; η' , Π' und $\sin j$, σ ; $\sin j'$, σ' .

§ 1. Die Glieder nullten und ersten Grades.

1) Das vorliegende Kapitel wird über die Integration der Differentialgleichungen handeln, wie sie in Formel (1), (2), (3), (7) gegeben sind. Es kommen in diesen ausser gewissen Potenzen und Derivierten von η , d. h. ausser langperiodisch elementaren Teilen, die Funktionen Q , P , Z vor. Die ersteren wollen wir bei unseren vorläufigen Betrachtungen ausser Acht lassen; ausserdem kommt noch S , R , β rechts vor. Für diese benutzen wir, soweit sie in der zweiten Potenz der Masse auftreten, unsere Ansätze des vorigen Kapitels. Für S wollen wir noch folgende Annahme für den charakteristischen Teil machen:

$$(50) \quad S = \alpha_2 \eta \cos(2w - v) + \alpha_{14} \eta^2 \cos(4w - 2v) + \alpha_{30} \sin^2 j \cos(4w - 2v) \\ + \alpha_3 \eta' \cos(2w - v_1) + \alpha_{15} \eta \eta' \cos(4w - v - v_1) + \alpha_{31} \sin j \sin j' \cos(4w - v - v_1) \\ \alpha_{16} \eta'^2 \cos(4w - 2v_1) + \alpha_{32} \sin^2 j' \cos(4w - 2v_1).$$

Unsere Entwicklungen schreiten direkt nach Potenzen von Grössen fort, die mit Excentricität und Neigung vergleichbar sind. Also von diesen Grössen wird es in erster Linie abhängen, bis zu welchem Grade (so wollen wir die Potenzen dieser Grössen nennen) in den Formeln zu gehen ist. Es scheint im allgemeinen für Planeten mit mittlerer Excentricität und Neigung die Mitnahme des zweiten Grades noch erforderlich, die des dritten jedoch nicht mehr. Andererseits treten, wie wir ersahen, noch Potenzen der Masse auf, und zwar kann man sich bei gewöhnlichen Planeten in den meisten Fällen mit der ersten Potenz der Masse (ersten Ordnung) begnügen oder braucht nur wenige Glieder zweiter Ordnung nachzutragen. Anders ist es jedoch bei charakteristischen und kritischen Planeten, bei welchen eine Mitnahme der zweiten Potenz in den Hauptgleichheiten von Anfang an erforderlich ist.

Ausserdem bringt die partielle Integration noch das Auftreten exargumentaler Glieder mit sich, welche, obwohl nominell mindestens zweiter Ordnung, durch hohe Potenzen der Divisoren verhältnismässig gross und gemäss unserer Definition des $\frac{d\bar{V}}{dv}$ mindestens von einem um eins höheren Grade werden als diejenigen Glieder, aus denen sie entstehen. Deswegen dürfte es bei kritischen Planeten ganz besonders geboten sein, auch die aus den Gliedern zweiten

Grades entstehenden exargumentalen Glieder zu berücksichtigen. In dieser Hinsicht ist das Auftreten von Gliedern dritten Grades zu erklären.

Wir wollen nun bei der Integration derart verfahren, dass wir in diesem Kapitel die Integration der charakteristischen und koordinierten Glieder durchführen, ohne Rücksicht auf das Auftreten des \bar{V} im Argumente, und zwar sollen die Differentialgleichungen einschliesslich Glieder zweiten Grades und zweiter Ordnung in den charakteristischen Termen gegeben werden. Ebenso sollen zuerst die langperiodischen Funktionen $\eta, II, \dots \sin j, \sigma \dots$ als konstant betrachtet werden. Auch die Integration des elementaren Teils der Funktionen S und V sowie (ϱ) und (λ) wollen wir hier fortlassen. Was die Integration der gewöhnlichen Glieder betrifft, so reichen die in Br. Kap. 6 gegebenen Formeln vollkommen aus und wir brauchen diese nicht weiter zu berücksichtigen.

Ist dies erledigt, so wollen wir das Auftreten von \bar{V} in den charakteristischen Argumenten berücksichtigen. Dies führt uns auf die exargumentalen Zusätze ersten und zweiten Grades, sowie auf die exargumentalen Teile der Glieder dritten Grades.

In demselben Kapitel werden wir dann der Veränderlichkeit von η, II etc. in den charakteristischen Gliedern Rechnung tragen und die hieraus entstehenden „Zusatzglieder“ herleiten. Im engsten Anschluss hieran steht die Ermittlung der elementaren und konstanten Glieder.

Dann erst sind unsere Formeln vollständig, und es erübrigt noch, sie für eine bequemere numerische Rechnung umzuformen.

2) Was die Integration für Glieder nullten und ersten Grades betrifft, so kann ich mich kurz fassen und in Einzelheiten auf Herrn Ludendorffs Dissertationsschrift sowie auf Br. Kap. 7 verweisen.

Wir machen folgenden Ansatz für die Differentialgleichung in S :

$$\left(\frac{dS}{dv}\right)_0 + \left(\frac{dS}{dv}\right)_1 = \frac{dS_0}{dv} + \frac{dS_1}{dv}.$$

Dies dürfen wir, da wir vorläufig \bar{V} in den Argumenten nicht berücksichtigen. Erklärend sei hierzu bemerkt, dass S_n den Teil n -ten Grades der Funktion bezeichnet und dass ist

$$\left(\frac{dS}{dv}\right)_n = \text{dem Teil der Differentialgleichung vom } n\text{-ten Grade,}$$

dass dagegen ist

$$\frac{dS_n}{dv} = \left(\frac{dS}{dv}\right)_n + \frac{\partial S_n}{\partial \bar{V}} \frac{d\bar{V}}{dv} = \left(\frac{dS}{dv}\right)_n + \frac{\partial S_n}{\partial \bar{V}} \times (\text{Glieder von mindestens erstem Grade}),$$

also dann verschieden, wenn wir \bar{V} nicht als konstant in den Argumenten ansehen:

$$(51) \quad \frac{d(S_0 + S_1)}{dv} = -Q_0 - Q_1 - 3S_1 Q_0.$$

Hier brauchen wir nur die C-Glieder ersten Grades von der Funktion S . Das letzte Glied ist v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$, und da Q_0 keine Konstante enthält, kann es zu C-Gliedern keine Veranlassung geben, es bleibt also auch im Integral von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$, wird dagegen in R von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$, weswegen wir es mitnehmen.

Wir wollen hier noch einen Schritt weiter gehen als Herr Ludendorff, damit unsere Formeln auch für kritische Planeten Giltigkeit behalten. Da S und W bei denselben Gliedern denselben Divisor erhalten, also in W das Quadrat des Divisors auftritt, wollen wir hier in $\frac{dS}{dv}$ auch Glieder rein zweiter Ordnung mitnehmen, insofern sie von der Art C sind; sie werden dann in V von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^2} < m'$.

Wir bilden also, soweit C-Glieder entstehen:

$$\frac{dS_1}{dv} = -3S_1 Q_0 - 3S_0 Q_1.$$

Bezeichnen wir nun mit $T_c S_1$ die C-Glieder in S_1 , so ergibt sich folgendes merkwürdige Resultat:

$$T_c S_1 = -\int [3S_1 Q_0 + 3S_0 Q_1] dv = 0.$$

Die C-Glieder in S_1 werden, soweit sie rein zweiter Ordnung in der Differentialgleichung sind, im Integral Null mit einem Fehler v. d. Ord. m'^2 resp. $\frac{m'^3}{\delta_1}$, mit Ausnahme von p.const. S . Den Beweis will ich hier nicht geben; er ist ohne weiteres einzusehen.

Wir erhalten also $T_c S_1$ genau bis zu Gliedern rein zweiter Ordnung excl. Unter Berücksichtigung der Formeln für Q sowie des Ansatzes für S erhalten wir, wenn wir sofort integrieren, für den charakteristischen Teil in S :

$$(52) \quad \text{pars}(S_0 + S_1) = a_1 \cos 2w + \alpha_2 \eta \cos(2w - v) + a_4 \eta \cos(4w - v) \\ + \alpha_3 \eta' \cos(2w - v_1) + \alpha_5 \eta' \cos(4w - v_1).$$

Die Werte der Koeffizienten sind:

$$(53) \quad a_1 = \frac{q_1}{1 + \delta_1}, \quad \alpha_2 = \frac{q_2 + 2\rho_0^{(0)} q_2^{(0)}}{\delta_1}, \quad a_4 = \frac{1}{1 + 2\delta_1} [q_4 + \frac{3}{2} q_1^{(0)} \alpha_2] \\ \alpha_3 = \frac{q_3 + 2\rho_0^{(0)} q_3^{(0)}}{\delta_1}, \quad a_5 = \frac{1}{1 + 2\delta_1} [q_5 + \frac{3}{2} q_1^{(0)} \alpha_3]$$

Den elementaren Teil ersten Grades wollen wir zusammen mit (ϱ) ermitteln. Auf einen Umstand will ich hier gleich noch aufmerksam machen, die Grössen s_n und τ_n werden in diesen Untersuchungen niemals als Divisor in Verbindung mit δ_1 auftreten, im Gegensatz zu Herrn Ludendorffs Formeln; denn wir betrachten η sowie II , $\sin j$ und σ überall als vollständig konstant, mit Ausnahme der charakteristischen Glieder, welche δ_1 als Divisor erhalten. Dort nehmen wir η , II etc. als variabel an und erhalten infolgedessen ganz neue Glieder. Herr Ludendorff hat dagegen η , $\sin j$ durchweg als konstant angenommen, in II , σ aber den secularen Teil berücksichtigt, d. h. gesetzt:

$$II = II_0 + \varsigma v, \quad \sigma = \sigma_0 - \tau v \quad \text{etc.}$$

wo II_0 und σ_0 an Stelle von II und σ in Gleichung (10) auftreten. Unsere Definition von η , II sowie $\sin j$, σ schliesst dies aus, und wir folgen hierin Herrn Brendels Theorie der kleinen Planeten.

3) Da R eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, so werden hier die kurzperiodisch elementaren Glieder einen kleinen Divisor erhalten, also schon ein Glied nullten Grades. Wir machen folgenden Ansatz:

$$\frac{d^2(R_0 + R_1)}{dv^2} + (R_0 + R_1) =$$

$$2S_0 - P_0 - Q_0 \frac{dR_0}{dv} + 2S_1 - P_1 + 2S_0 S_1 - 2S_1 P_0 - Q_0 \frac{dR_1}{dv} - Q_1 \frac{dR_0}{dv} - Q_0 \frac{d(\varrho)}{dv}.$$

Hier vernachlässigen wir stets in $Q_n \frac{dR_n}{dv}$, sowie in $Q_n \frac{d(\varrho)}{dv}$ die Veränderlichkeit von η , II , sowie im ersteren auch die Anwesenheit von \bar{V} im Argument. Denn wegen des Faktors ς werden die aus η , II entspringenden Zusatz-Teile rein erster Ordnung, also nicht mehr elementar, treten stets in m' multipliziert auf und werden dann rein zweiter Ordnung. Da ferner

$$\frac{dR_n}{dv} = \left(\frac{dR}{dv} \right)_n + \frac{\partial R_n}{\partial \bar{V}} \frac{d\bar{V}}{dv}$$

ist, und da $\frac{\partial R_n}{\partial \bar{V}}$ v. d. Ord. m' bis $\frac{m'}{\delta_1}$ und $\frac{d\bar{V}}{dv}$ v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ ist, so würde der aus \bar{V} entspringende Zusatz ungünstigen Falles v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ und er tritt dann überall in m' multipliziert auf; der Fehler ist demnach v. d. Ord. $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$, liegt also unterhalb unserer Genauigkeitsgrenze.

Die Integration führt Herr Ludendorff mittelst des früher gegebenen Ansatzes für R_0 und R_1 und mit Hilfe der Koeffizientenvergleichung aus. Wir

wollen uns hier der Variation der Parameter bedienen, welchen Weg auch Herr Brendel in seiner Theorie der kleinen Planeten eingeschlagen hat, und welcher eine bequemere Berücksichtigung der Variabilität von η und Π gestattet. Da das Hauptintegral mit den Konstanten schon ermittelt ist, es sich hier also nur um die Ermittlung des particularen Integrals handelt, bedienen wir uns folgender Formeln:

$$\frac{d^2x}{dy^2} + x = b \frac{\sin}{\cos} cy.$$

Das Hauptintegral unter Vernachlässigung des zweiten Gliedes lautet dann in periodischer Form: $x = g_1 \sin y - g_2 \cos y$. Variieren wir die Parameter, so erhalten wir die bekannten Bedingungsgleichungen:

$$(54) \quad \begin{aligned} \frac{dg_1}{dy} &= \frac{1}{2} b \left[\frac{\sin}{\cos} (c+1)y + \frac{\sin}{\cos} (c-1)y \right] \\ \frac{dg_2}{dy} &= \mp \frac{1}{2} b \left[\frac{\cos}{\sin} (c+1)y - \frac{\cos}{\sin} (c-1)y \right], \end{aligned}$$

und das particulare Integral ist gleich $\frac{b}{(1-c)(1+c)} \frac{\sin}{\cos} cy$.

Komponieren wir die in der Differentialgleichung für R stehenden periodischen Aggregate zu charakteristischen Gliedern, so können wir diese schreiben:

$$(55) \quad \begin{aligned} \frac{d^2R}{dv^2} + R &= b_{2,0,0} \cos 2w + b_{2,1,0}^{-1} \eta \cos(2w - v) + b_{4,1,0}^{-1} \eta \cos(4w - v) \\ &\quad + b_{2,0,1}^{-1} \eta' \cos(2w - v_1) + b_{4,0,1}^{-1} \eta' \cos(4w - v_1). \end{aligned}$$

Hier ist:

$$(56) \quad \begin{aligned} b_{2,0,0} &= 2a_1 - p_1 & b_{2,1,0}^{-1} &= 2\alpha_2 - p_2 + \frac{1}{2} q_1 + \frac{1}{2} q_4 \beta_1 + \frac{1}{2} q_1 \beta_4 \\ b_{2,0,1}^{-1} & & b_{2,0,1}^{-1} &= 2\alpha_3 - p_3 + \frac{1}{2} (q_2^{(0)} + q_5) \beta_1 + \frac{1}{2} q_1 \beta_5 \\ b_{4,1,0}^{-1} & & b_{4,1,0}^{-1} &= 2\alpha_4 - p_4 + \frac{1}{2} r_1 + \frac{1}{2} (r_4 - q_2) \beta_1 + (a_1 - p_1) \alpha_2 \\ b_{4,0,1}^{-1} & & b_{4,0,1}^{-1} &= 2\alpha_5 - p_5 + \frac{1}{2} (r_5 - q_3) \beta_1 + (a_1 - p_1) \alpha_3. \end{aligned}$$

Das Resultat der Integration lässt sich in die Form bringen:

$$(57) \quad \begin{aligned} R_0 + R_1 &= \beta_1 \cos 2w + \beta_2 \eta \cos(2w - v) + \beta_4 \eta \cos(4w - v) \\ &\quad + \beta_3 \eta' \cos(2w - v_1) + \beta_5 \eta' \cos(4w - v_1). \end{aligned}$$

Wie im vorigen Kapitel erwähnt wurde, treten infolge Mitnahme der zweiten Ordnung alle Koeffizienten als Funktionen dieser β_k auf, von welcher Thatsache man sich leicht durch einen Blick auf die q - und p -Koeffizienten überzeugen kann. Die β_k werden sich demnach nicht direkt ermitteln lassen. Wir bekommen vielmehr für den ersten Grad je zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten für sie. Sind diese aufgelöst, was im Schlusskapitel geschehen wird, so sind erst die Werte der β_k ermittelt, und dann können wir die Koeffizienten in S , die ebenfalls

in Funktion dieser β_1 bis β_5 gegeben sind, berechnen. Wir wollen uns vorläufig mit folgendem Resultate begnügen:

$$(58) \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = -\frac{b_{2,0,0}^{-1}}{\delta_1(2+\delta_1)}, \quad \beta_2 = \frac{b_{2,1,0}^{-1}}{(1+\delta_1)(1-\delta_1)}, \quad \beta_4 = -\frac{b_{4,1,0}^{-1}}{4\delta_1(1+\delta_1)} \\ \beta_3 = \frac{b_{2,0,1}^{-1}}{(1+\delta_1)(1-\delta_1)}, \quad \beta_5 = -\frac{b_{4,0,1}^{-1}}{4\delta_1(1+\delta_1)}. \end{array} \right.$$

In Wirklichkeit werden die Gleichungen wegen des Auftretens der exar-gumentalen Glieder nicht so einfach sein, weil die γ_k in $\frac{d\bar{V}}{dv}$ ebenfalls durch die β_k auszudrücken sind.

4) Wir wollen jetzt die B-Glieder in S_1 und $\varrho_1 = (\varrho)$ ermitteln. Zu diesem Zwecke schreiben wir die Differentialgleichungen hinreichend genau folgendermassen:

$$T_1 \frac{dS_1}{dv} = -Q_1 - 3S_1 Q_0$$

$$\frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + (\varrho) = 2S_1 - P_1 + 2S_0 S_1 - 2S_1 P_0 - Q_0 \frac{dR_1}{dv} - Q_1 \frac{dR_0}{dv},$$

oder, die B-Glieder ausgesondert und S integriert:

$$(59) \quad \begin{aligned} T_1 S_1 &= a_1 \eta \cos v + a_2 \eta' \cos v_1 \\ a_1 &= \frac{1}{1-\varepsilon} [q_1 + \frac{3}{2} q_1 \alpha_2] \\ a_2 &= \frac{1}{1-\varepsilon_1} [q_2 + \frac{3}{2} q_1 \alpha_3]. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$(60) \quad \begin{aligned} \frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + (\varrho) &= b_{0,1,0}^{+1} \eta \cos v + b_{0,0,1}^{+1} \eta' \cos v_1 \\ b_{0,1,0}^{+1} &= 2a_1 - p_1 + \alpha_2 (a_1 - p_1) + \frac{1}{2} \beta_1 (q_2 + r_2) + \frac{1}{2} r_1 \beta_4 \\ b_{0,0,1}^{+1} &= 2a_2 - p_2 + \alpha_3 (a_1 - p_1) + \frac{1}{2} \beta_1 (q_3 + r_3) + \frac{1}{2} r_1 \beta_5. \end{aligned}$$

In betreff der Integration bedenken wir, dass wir unbedingt η und Π als variabel betrachten müssen, und dass nach Gleichung (10) geschrieben werden kann

$$(61) \quad \begin{aligned} \eta \frac{\cos}{\sin} (2v - \Pi) &= \kappa \frac{\cos}{\sin} (2v - \omega) + \sum \kappa_n \frac{\cos}{\sin} (2v - \omega_n) \\ \eta' \frac{\cos}{\sin} (2v - \Pi_1) &= \sum \kappa_n' \frac{\cos}{\sin} (2v - \omega_n), \end{aligned}$$

und da $v = v - \Pi$, $v_1 = v - \Pi_1$ ist, so erhalten wir unter Anwendung der Va-

riation der Parameter:

$$(62) \quad \left. \begin{aligned} g_1 \\ g_2 \end{aligned} \right\} = \frac{b_{0.1.0}^{+1}}{2} \int \eta \frac{\cos}{\sin} (2v - \Pi) dv + \frac{b_{0.1.0}^{+1}}{2} \int \eta \frac{\cos}{\sin} \Pi dv \\ + \frac{b_{0.0.1}^{+1}}{2} \int \eta' \frac{\cos}{\sin} (2v - \Pi_1) dv + \frac{b_{0.0.1}^{+1}}{2} \int \eta' \frac{\cos}{\sin} \Pi_1 dv.$$

Unter Anwendung der Gleichungen (10) und (61) integriert:

$$(63) \quad \left. \begin{aligned} g_1 \\ g_2 \end{aligned} \right\} = \pm \frac{b_{0.1.0}^{+1}}{2} \left[\frac{x}{2-s} \frac{\sin}{\cos} (2v - \omega) + \sum \frac{x_n}{2-s_n} \frac{\sin}{\cos} (2v - \omega_n) \right] \\ \pm \frac{b_{0.1.0}^{+1}}{2} \left[\frac{x}{s} \frac{\sin}{\cos} \omega + \sum \frac{x_n}{s_n} \frac{\sin}{\cos} \omega_n \right] \\ \pm \frac{b_{0.0.1}^{+1}}{2} \sum \frac{x'_n}{2-s_n} \frac{\sin}{\cos} (2v - \omega_n) \pm \frac{b_{0.0.1}^{+1}}{2} \sum \frac{x'_n}{s_n} \frac{\sin}{\cos} \omega_n \\ (\varrho) = \frac{x}{2} \left[\frac{b_{0.1.0}^{+1}}{s} + \frac{b_{0.1.0}^{+1}}{2-s} \right] \cos (v - \omega) + \sum \frac{x_n}{2} \left[\frac{b_{0.1.0}^{+1}}{s_n} + \frac{b_{0.1.0}^{+1}}{2-s_n} \right] \cos (v - \omega_n) \\ + \sum \frac{x'_n}{2} \left[\frac{b_{0.0.1}^{+1}}{s_n} + \frac{b_{0.0.1}^{+1}}{2-s_n} \right] \cos (v - \omega_n)$$

Andererseits muss sein:

$$(64) \quad (\varrho) = \eta \cos (v - \Pi) = x \cos (v - \omega) + \sum x_n \cos (v - \omega_n).$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten kann man x_n und s berechnen. Doch wollen wir dies im nächsten Kapitel genauer ausführen unter Berücksichtigung der exargumentalen Glieder. Die s_n und x'_n liegen schon anderweitig ermittelt vor.

5) Wir kommen jetzt zur Berechnung von $W = K + V$, soweit es vom nullten und ersten Grade ist. Wir erhalten die Differentialgleichung hinreichend genau, wenn wir schreiben:

$$\frac{d(K_0 + K_1 + V_0 + V_1)}{dv} = S_0 - 2R_0 - 2R_0 S_0 + 3R_0^2 \\ + S_1 - 2R_1 - 2R_0 S_1 - 2R_1 S_0 + (6R_0 - 2S_0 - 12R_0^2 + 6R_0 S_0) \eta \cos v \\ - \frac{dE}{dv}.$$

Ebenfalls mit hinreichender Genauigkeit erhält man folgenden Ausdruck, wenn man sofort mit Hilfe der linearen Integrationsdivisoren integriert:

$$(65) \quad K_0 + K_1 = c_0 + \gamma_1 \sin 2w + W_{4.0.0} \sin 4w \\ + W_{0.1.0}^{+1} \eta \sin v + \gamma_4 \eta \sin (4w - v) + \gamma_6 \eta \sin (2w + v) + W_{6.1.0}^{-1} \eta \sin (6w - v) \\ + W_{0.0.1}^{+1} \eta' \sin v_1 + \gamma_5 \eta' \sin (4w - v_1) + W_{6.0.1}^{-1} \eta' \sin (6w - v_1).$$

Ξ , welches sehr klein ist, werden wir später berücksichtigen, da es aus der Veränderlichkeit von η und Π in der Mittelpunktgleichung entspringt. Es tritt hier ein koordiniertes Glied γ_6 auf, sowie fünf Glieder, die Teile v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ enthalten, was durch die Gestalt der Differentialgleichung verursacht wird. Die Koeffizienten lauten:

$$(66) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \frac{1}{1+\delta_1} [a_1 - 2\beta_1], \quad \gamma_4 = \frac{1}{1+2\delta_1} [a_4 - 2\beta_4 - \beta_1\alpha_2 + 3\beta_1\beta_2 + 3R_{4.0.0} - S_{4.0.0} - 3\beta_1^2] \\ W_{4.0.0} = \frac{1}{2(1+\delta_1)} [S_{4.0.0} - 2R_{4.0.0} + \frac{3}{2}\beta_1^2], \quad \gamma_5 = \frac{1}{1+2\delta_1} [a_5 - 2\beta_5 - \beta_1\alpha_3 + 3\beta_1\beta_3] \\ \gamma_6 = \frac{1}{2+\delta_1} [S_{2.1.0}^{+1} - 2R_{2.1.0}^{+1} + 3\beta_1 - S_{2.0.0}] \\ W_{0.1.0}^{+1} = \frac{1}{1-s} [a_1 - a_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + 3\beta_1\beta_2 + a_0 - 6\beta_1^2] \\ W_{0.0.1}^{+1} = \frac{1}{1-s_1} [a_2 - a_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 + 3\beta_1\beta_3] \\ W_{6.1.0}^{-1} = \frac{1}{2+3\delta_1} [S_{6.1.0}^{-1} - 2R_{6.1.0}^{-1} + 3\beta_1\beta_4 + 3R_{6.0.0} - S_{6.0.0}] \\ W_{6.0.1}^{-1} = \frac{1}{2+3\delta_1} [S_{6.0.1}^{-1} - 2R_{6.0.1}^{-1} + 3\beta_1\beta_5] \end{array} \right.$$

Jetzt sind wir auch in der Lage, a_0 und b_0 zu bestimmen. Da c_0 nur Glieder rein erster Ordnung enthalten soll, und da andererseits sein muss:

$$c_0 = a_0 - 2b_0 = 0$$

so folgt:

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{2}{3} p_0^{(0)} + \frac{2}{3} (p_0^{(1)} - \frac{1}{2} q_1^{(0)}) \beta_1 \\ b_0 = \frac{1}{2} a_0 \end{array} \right.$$

Das Integral für V können wir folgendermassen schreiben:

$$(68) \quad V_0 + V_1 = \gamma v + \gamma'_2 \eta \sin(2w - v) + \gamma'_3 \eta' \sin(2w - v_1)$$

Hier tritt also der seculare Teil auf, der bei kritischen Planeten sich fast der nullten Ordnung nähert und deswegen nicht gleich Null gesetzt werden darf; er ist, soweit er nullten Grades ist:

$$(69) \left\{ \begin{array}{l} \gamma = \frac{3}{2} \beta_1^2; \text{ ferner } \gamma'_2 = \frac{\gamma_2}{\delta_1}, \quad \gamma'_3 = \frac{\gamma_3}{\delta_1} \\ \gamma_2 = \left[\frac{q_2^{(0)}}{\delta_1} (1 + \frac{4}{3} p_0^{(0)}) - \frac{q_1^{(0)}}{1+\delta_1} \right] + \left[\frac{q_2^{(1)}}{\delta_1} - \frac{q_1^{(1)}}{1+\delta_1} - \frac{q_4^{(0)}}{1+2\delta_1} + 3 \right] \beta_1 + \left[\frac{2}{3} p_0^{(0)} - 2 \right] \beta_2 + \left[\frac{q_3^{(4)}}{\delta_1} - \frac{q_1^{(0)}}{1+\delta_1} + 3\beta_1 \right] \beta_4 \\ \gamma_3 = \frac{q_3^{(0)}}{\delta_1} (1 + \frac{4}{3} p_0^{(0)}) + \left[\frac{q_3^{(1)}}{\delta_1} - \frac{q_5^{(0)}}{1+2\delta_1} \right] \beta_1 + \left[\frac{2}{3} p_0^{(0)} - 2 \right] \beta_3 + \left[\frac{q_3^{(5)}}{\delta_1} - \frac{q_1^{(0)}}{1+\delta_1} + 3\beta_1 \right] \beta_5 \end{array} \right.$$

Es sind dies bis auf die exargumentalen Zusatzteile die Formeln, wie sie Herr Ludendorff gegeben hat. Eine Vergleichung der Resultate zeigt jedoch, dass wir in der Genauigkeit weiter gegangen sind. So haben wir in R_1 die C-Glieder incl. Grössen v. d. Ord. $\frac{m^{1/2}}{\delta_1}$ berechnet, wir erhalten also, da $T_c S_1$ mit derselben Genauigkeit gerechnet ist, V_1 genau einschliesslich Grössen v. d. Ord. $\frac{m^{1/2}}{\delta_1^2}$, da wir auch in der Differentialgleichung für V die Entwicklung bis zu Grössen v. d. Ord. $\frac{m^{1/2}}{\delta_1}$ incl. geführt haben. Diese Genauigkeit dürfte in Anbetracht kritischer Planeten nicht zu weit getrieben sein, bei denen Glieder v. d. Ord. $\frac{m^{1/2}}{\delta_1^2}$ ausserordentlich vergrössert erscheinen; und auch für die Grenzfälle der charakteristischen Planeten, wo $\delta_1 = \sqrt{m'}$ ist, werden derartige Glieder in V erster Ordnung.

6) Wir haben jetzt den charakteristischen und elementaren Teil der Funktion \mathfrak{z} , des gestörten Sinus der Breite, zu bestimmen. Wie aus der Differentialgleichung und aus der Entwicklung von Z hervorgeht, wird diese Funktion mindestens ersten Grades. Wir machen folgenden Ansatz für die Differentialgleichung unter Vernachlässigung der Glieder v. d. Ord. $m^{1/2}$.

$$(70) \quad \begin{cases} \frac{d^2(\mathfrak{z})}{dv^2} + (\mathfrak{z}) = Z_1 = \mathfrak{z}_1 \sin j \sin v + \mathfrak{z}_2 \sin j' \sin v_1 \\ \frac{d^2 \mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = Z_1 - Q_0 \frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = c_{4,0}^{-1} \sin j \sin(4w - v) + c_{4,0,1}^{-1} \sin j' \sin(4w - v_1). \end{cases}$$

In $Q_0 \frac{d(\mathfrak{z})}{dv}$ wird die Variabilität von $\sin j$ und σ vernachlässigt, was einem Fehler v. d. Ord. $\frac{m^{1/2}}{\delta_1}$ im Integrale gleichkommt. Die Koeffizienten lauten, da \mathfrak{z}_1 und \mathfrak{z}_2 aus dem vorigen Kapitel als Funktionen der ξ_1 und ξ_2 bekannt sind:

$$(71) \quad c_{4,0,0}^{-1} = \mathfrak{z}_1 - \frac{1}{2} r_1, \quad c_{4,0,1}^{-1} = \mathfrak{z}_2.$$

Integrieren wir mit Hülfe der Variation der Parameter, und bedenken wir, dass die exargumentalen Glieder immer um einen Grad höher sind als die Glieder, aus denen sie entstehen, sie also hier mindestens zweiten Grades sein müssen, so erhalten wir diesmal vollständig genau:

$$(71) \quad \mathfrak{z}_1 = \xi_1 \sin j \sin(4w - v) + \xi_2 \sin j' \sin(4w - v_1),$$

wo ist

$$\xi_1 = \frac{-1}{4\delta_1(1+\delta_1)} [z_1^{(0)} - \frac{1}{2}r_1^{(0)} + (z_1^I - \frac{1}{2}r_1^{(I)})\beta_1 + z_1^{(I)}\xi_1]$$

$$\xi_2 = \frac{-1}{4\delta_1(1+\delta_1)} [z_2^{(0)} + z_2^I\beta_1 + z_2^{(2)}\xi_2],$$

und wo die ξ_s diesmal von vornherein leicht zu berechnen sind. Zur Ermittlung der B-Glieder verfahren wir ähnlich wie in (ϱ). Aus (10) folgt:

$$(72) \quad \begin{cases} \sin j \frac{\sin}{\cos} (2v - \sigma) = \sin \iota \frac{\sin}{\cos} (2v - \vartheta) + \sum \sin \iota_n \frac{\sin}{\cos} (2v - \vartheta_n) \\ \sin j' \frac{\sin}{\cos} (2v - \sigma_1) = \sum \sin \iota'_n \frac{\sin}{\cos} (2v - \vartheta_n). \end{cases}$$

Da nun $v = v - \sigma$, $v_1 = v - \sigma_1$ ist, und da ferner ist:

$$\left. \begin{aligned} g_1 \\ g_2 \end{aligned} \right\} = \pm \frac{1}{2} \beta_1 \left[\int \sin j \frac{\sin}{\cos} (v+v) dv \pm \int \sin j \frac{\sin}{\cos} (v-v) dv \right]$$

$$\pm \frac{1}{2} \beta_2 \left[\int \sin j' \frac{\sin}{\cos} (v_1+v) dv \pm \int \sin j' \frac{\sin}{\cos} (v_1-v) dv \right],$$

wo g_1 und g_2 jetzt eine andere Bedeutung haben als in ϱ , so folgt, wenn man (72) hier einführt, integriert und dabei bedenkt, dass (β) = $g_1 \sin v - g_2 \cos v$ ist:

$$(\beta) = \frac{-1}{\tau(2+\tau)} \beta_1 \sin \iota \sin (v - \vartheta) - \sum \frac{1}{\tau_n(2+\tau_n)} [\beta_1 \sin \iota_n + \beta_2 \sin \iota'_n] \sin (v - \vartheta_n).$$

Andrerseits sollte sein:

$$(73) \quad (\beta) = \sin j \sin v = \sin \iota \sin (v - \vartheta) + \sum \sin \iota_n \sin (v - \vartheta_n).$$

Durch Koeffizientenvergleichung folgt

näherungsweise: $\tau = -\frac{\beta_1}{2}$; $\sin \iota_n = -\frac{\beta_2 \sin \iota'_n}{2(\tau_n - \tau)}$,

streng dagegen:

$$(73) \quad \tau(2+\tau) = -\beta_1; \quad \sin \iota_n = \frac{\beta_2 \sin \iota'_n}{2(\tau - \tau_n) \left[1 + \frac{\tau + \tau_n}{2} \right]}$$

Weiter ist:

$$(73a) \quad \tau_n = \mu_2 \tau'_n + c - \mu_2 c', \quad \Theta_n = \Theta'_n - \tau'_n B, \quad \vartheta_n = \Theta_n - \tau_n v.$$

Die τ'_n und $\sin \iota'_n$ liegen aus der Theorie der grossen Planeten als bekannt vor. Da hier keine exargumentalen Glieder auftreten können, so haben wir (β) wie β_1 bis auf die Zusatzglieder in definitiver Form ermittelt, und mit einem Fehler v. d. Ord. $\frac{m^{1/2}}{\delta_1}$ im Integral.

§ 2. Die Glieder zweiten Grades.

7) Wir wollen jetzt die charakteristischen und auch langperiodisch elementaren Glieder in S_2 ermitteln. Wir erhalten sie mit hinreichender Genauigkeit, wenn wir die Differentialgleichung folgendermassen ansetzen:

$$\frac{dS}{dv} = -Q_2 - 3S_0 Q_2 - 3S_1 Q_1 - 3S_2 Q_0 - \frac{1}{2} \frac{d\eta^2}{dv},$$

indem hier in S_1 und S_2 , soweit diese Grössen in Q multipliziert sind, nur die charakteristischen Glieder zu nehmen sind. Das letzte Glied wollen wir vorläufig noch weglassen, da es nur A-Glieder hervorruft. Ausserdem wollen wir uns erinnern, dass durch Q_2 und S_2 schon der Neigungsteil hier auftreten wird, dass also das Integral doppelt soviel Glieder enthalten wird als bei Herrn Ludendorff. Wir wollen auch hier die C-Glieder bis rein zweiter Ordnung in der Differentialgleichung bilden. Es ergibt sich dann analog dem ersten Grade das Resultat:

$$\text{pars } T_c \frac{dS_2}{dv} = -3[S_0 Q_2 + S_2 Q_0 + S_1 Q_1] = 0.$$

Die C-Glieder werden, abgesehen von dem konstanten Teile in S_0 , soweit sie in $\frac{dS}{dv}$ rein zweiter Ordnung sind, null bis auf Glieder v. d. Ord. $\delta_1 m'^2$, also im Integral bis auf m'^2 . Bei der Zusammensetzung zu C-Gliedern sind jedoch in S und Q nur die Vielfachen des Arguments bis $n = 6$ incl. berücksichtigt worden.

Wir haben demnach die C-Glieder in S_2 wieder bis zu Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ incl. berechnet. Für den Neigungsteil folgt mit derselben Genauigkeit:

$$\text{pars } T_c \frac{dS_2}{dv} = -3[S_0 \bar{Q}_2 + \bar{S}_2 Q_0] = 0.$$

Komponiert man wieder die periodischen Aggregate zu charakteristischen Gliedern und integriert sofort, so ergibt sich:

$$(74) \text{ pars } S_2 =$$

$$\begin{aligned} &+ a_7 \eta^2 \cos 2w &+ a_{11} \eta^2 \cos (2w - 2v) &+ a_{14} \eta^2 \cos (4w - 2v) &+ a_{17} \eta^2 \cos (6w - 2v) \\ &+ a_8 \eta \eta' \cos (2w + v - v_1) &+ a_{12} \eta \eta' \cos (2w - v - v_1) &+ a_{15} \eta \eta' \cos (4w - v - v_1) &+ a_{18} \eta \eta' \cos (6w - v - v_1) \\ &+ a_9 \eta \eta' \cos (2w - v + v_1) &+ a_{13} \eta'^2 \cos (2w - 2v_1) &+ a_{16} \eta'^2 \cos (4w - 2v_1) &+ a_{19} \eta'^2 \cos (6w - 2v_1) \\ &+ a_{10} \eta'^2 \cos 2w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{23} \sin^2 j \cos 2w + a_{24} \sin j \sin j' \cos (2w + v - v_1) + a_{25} \sin j \sin j' \cos (2w - v + v_1) + a_{26} \sin^2 j' \cos 2w \\
& + a_{27} \sin^2 j \cos (2w - 2v) \quad + a_{30} \sin^2 j \cos (4w - 2v) \quad + a_{33} \sin^2 j \cos (6w - 2v) \\
& + a_{28} \sin j \sin j' \cos (2w - v - v_1) + a_{31} \sin j \sin j' \cos (4w - v - v_1) + a_{34} \sin j \sin j' \cos (6w - v - v_1) \\
& + a_{29} \sin^2 j' \cos (2w - 2v_1) \quad + a_{32} \sin^2 j' \cos (4w - 2v_1) \quad + a_{35} \sin^2 j' \cos (6w - 2v_1),
\end{aligned}$$

wo die Koeffizienten sich zusammensetzen aus:

$$(75) \quad \left\{ \begin{aligned}
a_7 &= \frac{1}{1 + \delta_1} [q_7 + \frac{3}{2} (q_1 + q_4) \alpha_2], & a_{11} &= \frac{-1}{1 - \delta_1} [q_{11} - \frac{3}{2} q_1 \alpha_{14} - \frac{3}{2} q_1 \alpha_2], \\
a_8 &= \frac{1}{1 + \delta_1} [q_8 + \frac{3}{2} (q_1 \alpha_8 + q_5 \alpha_2)], & a_{12} &= \frac{-1}{1 - \delta_1} [q_{12} - \frac{3}{2} q_1 \alpha_{15} - \frac{3}{2} (q_1 \alpha_8 + q_2 \alpha_2)], \\
a_9 &= \frac{1}{1 + \delta_1} [q_9 + \frac{3}{2} (q_2 \alpha_2 + q_4 \alpha_8)], & a_{13} &= \frac{-1}{1 - \delta_1} [q_{13} - \frac{3}{2} q_1 \alpha_{16} - \frac{3}{2} q_2 \alpha_3], \\
a_{10} &= \frac{1}{1 + \delta_1} [q_{10} + \frac{3}{2} (q_2 + q_5) \alpha_3], & & \\
a_{14} &= \frac{1}{2\delta_1} [q_{14} (1 + 2p_0^{(0)}) + \frac{3}{2} q_2 \alpha_2], & a_{17} &= \frac{1}{1 + 3\delta_1} [q_{17} + \frac{3}{2} q_1 \alpha_{14} + \frac{3}{2} q_4 \alpha_2], \\
a_{15} &= \frac{1}{2\delta_1} [q_{15} (1 + 2p_0^{(0)}) + \frac{3}{2} (q_3 \alpha_2 + q_2 \alpha_3)], & a_{18} &= \frac{1}{1 + 3\delta_1} [q_{18} + \frac{3}{2} q_1 \alpha_{15} + \frac{3}{2} (q_4 \alpha_3 + q_5 \alpha_2)], \\
a_{16} &= \frac{1}{2\delta_1} [q_{16} (1 + 2p_0^{(0)}) + \frac{3}{2} q_3 \alpha_3], & a_{19} &= \frac{1}{1 + 3\delta_1} [q_{19} + \frac{3}{2} q_1 \alpha_{16} + \frac{3}{2} q_5 \alpha_3].
\end{aligned} \right.$$

Diese a_k -Koeffizienten sind wieder Funktionen der β_k , und soweit diese zweiten Grades sind, noch unbekannt. Die β_k ergeben sich später analog dem ersten Grade aus gewissen Gleichungen, und nach ihrer Ermittlung können wir erst die a_k berechnen.

Hierzu kommen noch die exargumentalen Zusätze und die aus der Variabilität von η , Π etc. in den C-Gliedern entstehenden Zusatzglieder, was wir, wie schon erwähnt, im nächsten Kapitel nachholen werden. Die Koeffizienten der Neigungsteile enthalten auch noch ξ_1 und ξ_2 , welche aus den Gliedern ersten Grades als ermittelt vorliegen. Sie werden:

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned}
a_{23} &= \frac{1}{1 + \delta_1} q_{23}, & a_{24} &= \frac{1}{1 + \delta_1} q_{24}, & a_{25} &= \frac{1}{1 + \delta_1} q_{25}, & a_{26} &= \frac{1}{1 + \delta_1} q_{26}, \\
a_{27} &= \frac{-1}{1 - \delta_1} [q_{27} - \frac{3}{2} q_1 \alpha_{30}], & \alpha_{30} &= \frac{q_{30}}{2\delta_1} (1 + 2p_0^{(0)}), & a_{33} &= \frac{1}{1 + 3\delta_1} [q_{33} + \frac{3}{2} q_1 \alpha_{30}], \\
a_{28} &= \frac{-1}{1 - \delta_1} [q_{28} - \frac{3}{2} q_1 \alpha_{31}], & \alpha_{31} &= \frac{q_{31}}{2\delta_1} (1 + 2p_0^{(0)}), & a_{34} &= \frac{1}{1 + 3\delta_1} [q_{34} + \frac{3}{2} q_1 \alpha_{31}], \\
a_{29} &= \frac{-1}{1 - \delta_1} [q_{29} - \frac{3}{2} q_1 \alpha_{32}], & \alpha_{32} &= \frac{q_{32}}{2\delta_1} (1 + 2p_0^{(0)}), & a_{35} &= \frac{1}{1 + 3\delta_1} [q_{35} + \frac{3}{2} q_1 \alpha_{32}].
\end{aligned} \right.$$

Den konstanten Teil, soweit er zweiten Grades ist, können wir erst angeben, wenn c_0 bekannt ist. Dagegen wollen wir hier noch die A-Glieder be-

trachten. Herr Ludendorff hat in seiner Dissertationsschrift nachgewiesen, dass $T_a S_2$ keine Glieder v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1^2}, \frac{m'}{\delta_1}, \frac{m'^2}{\delta_1^3}, \frac{m'^3}{\delta_1^5}$ enthält, insofern man die η und Π als konstant ansieht, was hier noch der Fall ist. $T_a S_2$ kann nur Glieder v. d. Ord. $m', \frac{m'^2}{\delta_1^2}, \frac{m'^3}{\delta_1^4}$ etc. enthalten. Diese sind einmal mindestens zweiter Ordnung und nur durch die Häufung kleiner Divisoren vergrössert, und dann nähern sich die A-Glieder fast dem Charakter konstanter Grössen. Aus diesem Grunde wollen wir ebenfalls $T_a S_2$ vernachlässigen, der hierdurch entstehende Fehler wird sich in W derart bemerkbar machen, dass \mathcal{A} einen anderen Wert erhält, und ebenso n im Laufe grösserer Zeiträume von der wahren Bewegung eine der Zeit proportionale Abweichung erleiden wird. Die Sekularvariation der Konstanten soll dies dann ausgleichen.

Für S_2 , soweit es aus der Neigung herrührt, habe ich die A-Glieder untersucht und gefunden, dass sich nur in der Differentialgleichung der Teil, welcher rein erster Ordnung ist, aufhebt, dass also $(T_a S_2)_{\text{Neigung}} = \frac{m'}{\delta_1}$ wird. Glieder v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1^2}$ können hier nicht vorkommen. Wir wollen $(T_a S_2)_{\text{Neigung}}$ nicht vernachlässigen, damit nachher in $T_a W$ nicht Glieder v. d. Ord. $\frac{1}{\delta_1}$ vernachlässigt werden, obwohl es selbst bei kritischen Planeten wegen der geringen Veränderlichkeit dieser Glieder wenig ausmachen würde. Es lautet:

$$(76) \quad T_a \frac{dS_2}{dv} = q_r \sin j \sin j' \sin(\sigma - \sigma_1).$$

Die Integration selbst wollen wir im nächsten Kapitel geben.

8) Die Differentialgleichung für R_2 schreibt sich so:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_2}{dv^2} + R_2 = & 2S_2 - P_2 + S_1^2 + 2S_0 S_2 - 2S_2 P_0 - 2S_1 P_1 - Q_1 \frac{d(\varrho)}{dv} - 2S_1 Q_0 \frac{d(\varrho)}{dv} \\ & - 2 \frac{d\eta^2}{dv} \frac{dR_0}{dv} - Q_0 \frac{dR_2}{dv} - Q_1 \frac{dR_1}{dv} - Q_2 \frac{dR_0}{dv}. \end{aligned}$$

In dem Ansatz für $\frac{dR}{dv}$ lasse ich die C-Glieder fort, da sie wegen des Faktors δ_1 rein zweiter Ordnung werden, ebenso vernachlässige ich hier in den aus dem Argument heraustretenden Faktoren δ_1 gegenüber der Einheit, da der Fehler zweiter Ordnung wird, und ausserdem die Veränderlichkeit von η und Π in $\frac{d(\varrho)}{dv}$ wie in $\frac{dR}{dv}$ mit derselben Genauigkeit. Für $\frac{d\eta^2}{dv}$ bedienen wir uns nicht des

von Herrn Brendel gegebenen Ausdrucks, sondern gehen in der Genauigkeit noch etwas weiter. In Br. pag. 109 wird unter Vernachlässigung der Glieder rein zweiter Ordnung gesetzt:

$$T_a \left[\left(\frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + (\varrho) \right) \frac{d(\varrho)}{dv} \right] = \frac{1}{2} \frac{d\eta^2}{dv}.$$

Nun war nach (60):

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + (\varrho) &= b_{0.1.0}^{+1} \eta \cos v + b_{0.0.1}^{+1} \eta' \cos v_1, \\ \frac{d(\varrho)}{dv} &= -\eta \sin v, \end{aligned}$$

mithin unter Vernachlässigung der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1}$.

$$(77) \quad \frac{d\eta^2}{dv} = p_1 \eta^2 \sin 2v + (p_2 - 2q_2) \eta \eta' \sin(v + v_1) + (p_2 - 2q_2) \eta \eta' \sin(v - v_1).$$

Der genauere Wert (Fehler m'^2 resp. $\frac{m'^3}{\delta_1}$) ist dagegen:

$$(77a) \quad \frac{d\eta^2}{dv} = -b_{0.1.0}^{+1} \eta^2 \sin 2v - b_{0.0.1}^{+1} \eta \eta' \sin(v + v_1) - b_{0.0.1}^{+1} \eta \eta' \sin(v - v_1).$$

Herr Brendel sowohl wie Herr Ludendorff vernachlässigen die ersten beiden Glieder, was für kritische Planeten nicht gerechtfertigt ist; denn nehmen wir z. B.

$$-2 \frac{d\eta^2}{dv} \frac{dR_0}{dv} = -2b_{0.1.0}^{+1} \eta^2 \sin 2v \beta_1 \sin 2w = -b_{0.1.0}^{+1} \beta_1 \eta^2 \cos(2w - 2v),$$

so wird schon in der Differentialgleichung ein Glied $\frac{m'^2}{\delta_1}$, also im Integral $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ fortgelassen. Multiplizieren wir aus und suchen wir uns die charakteristischen Glieder heraus, so folgt:

$$(78) \quad \frac{d^2 R_2}{dv^2} + R_2 =$$

$$\begin{aligned} & b_{2.2.0} \eta^2 \cos 2w + b_{2.1.1}^{+1} \eta \eta' \cos(2w + v - v_1) + b_{2.1.1}^{-1} \eta \eta' \cos(2w - v + v_1) + b_{2.0.2} \eta'^2 \cos 2w \\ & + \bar{b}_{2.2.0}^{-2} \eta^2 \cos(2w - 2v) \quad + \bar{b}_{4.2.0}^{-2} \eta^2 \cos(4w - 2v) \quad + \bar{b}_{6.2.0}^{-2} \eta^2 \cos(6w - 2v) \\ & + \bar{b}_{2.1.1}^{-2} \eta \eta' \cos(2w - v - v_1) \quad + \bar{b}_{4.1.1}^{-2} \eta \eta' \cos(4w - v - v_1) \quad + \bar{b}_{6.1.1}^{-2} \eta \eta' \cos(6w - v - v_1) \\ & + \bar{b}_{2.0.2}^{-2} \eta'^2 \cos(2w - 2v_1) \quad + \bar{b}_{4.0.2}^{-2} \eta'^2 \cos(4w - 2v_1) \quad + \bar{b}_{6.0.2}^{-2} \eta'^2 \cos(6w - 2v_1) \\ & + \bar{b}_{2.2.0} \sin^2 j \cos 2w + \bar{b}_{2.1.1}^{+1} \sin j \sin j' \cos(2w + v - v_1) + \bar{b}_{2.1.1}^{-1} \sin j \sin j' \cos(2w - v + v_1) + \bar{b}_{2.0.2} \sin^2 j' \cos 2w \\ & + \bar{b}_{2.2.0}^{-2} \sin^2 j \cos(2w - 2v) \quad + \bar{b}_{4.2.0}^{-2} \sin^2 j \cos(4w - 2v) \quad + \bar{b}_{6.2.0}^{-2} \sin^2 j \cos(6w - 2v) \\ & + \bar{b}_{2.1.1}^{-2} \sin j \sin j' \cos(2w - v - v_1) + \bar{b}_{4.1.1}^{-2} \sin j \sin j' \cos(4w - v - v_1) + \bar{b}_{6.1.1}^{-2} \sin j \sin j' \cos(6w - v - v_1) \\ & + \bar{b}_{2.0.2}^{-2} \sin^2 j' \cos(2w - 2v_1) \quad + \bar{b}_{4.0.2}^{-2} \sin^2 j' \cos(4w - 2v_1) \quad + \bar{b}_{6.0.2}^{-2} \sin^2 j' \cos(6w - 2v_1). \end{aligned}$$

Die A-Glieder werden:

$$+ \bar{b}_{0,2,0} \eta^2 + \bar{b}_{0,1,1}^+ \eta \eta' \cos(v - v_1) + \bar{b}_{0,0,2} \eta'^2 \\ + \bar{b}_{2,1,1} \sin^2 j + \bar{b}_{0,1,1}^+ \sin j \sin j' \cos(v - v_1) + \bar{b}_{0,0,2} \sin^2 j'.$$

Die Koeffizienten haben folgende Werte:

$$\begin{aligned} 79) \quad b_{2,2,0} &= 2a_7 - p_7 - \frac{1}{2}(q_2 - r_2) + \frac{1}{2}\beta_1 A_{4,2,0} + \alpha_2(a_1 - p_1 + \frac{1}{2}r_1 + a_4 - p_4) + \frac{1}{2}\beta_4(q_2 + r_4) + \frac{1}{2}r_1\beta_7 \\ b_{2,1,1}^+ &= 2a_8 - p_8 - \frac{1}{2}q_3 + \beta_1(b_{0,0,1}^+ - \frac{1}{2}q_4 + \frac{1}{2}A_{4,1,1}^+) + \alpha_2(a_5 - p_5) + \alpha_3(a_1 - p_1) + \frac{1}{2}\beta_4 r_5 + \frac{1}{2}\beta_5 q_2 + \frac{1}{2}r_1\beta_9 \\ b_{2,1,1}^- &= 2a_9 - p_9 + \frac{1}{2}r_3 + \beta_1(-b_{0,0,1}^+ + \frac{1}{2}q_4 + \frac{1}{2}A_{4,1,1}^-) + \alpha_2(a_2 - p_2) + \alpha_3(\frac{1}{2}r_1 + a_4 - p_4) + \frac{1}{2}\beta_4 q_3 + \frac{1}{2}\beta_5 r_4 + \frac{1}{2}r_1\beta_8 \\ b_{2,0,2} &= 2a_{10} - p_{10} + \frac{1}{2}\beta_1 A_{4,0,2} + \alpha_3(a_2 - p_2 + a_5 - p_5) + \frac{1}{2}\beta_5(q_3 + r_5) + \frac{1}{2}r_1\beta_{10} \\ b_{2,2,0}^- &= 2a_{11} - p_{11} + \frac{1}{2}q_2 + \beta_1(-b_{0,1,0}^+ + \frac{1}{2}q_{14}) + \alpha_2(a_1 - p_1) + \frac{1}{2}\beta_4 r_2 + \alpha_{14}(a_1 - p_1) + \frac{1}{2}r_1\beta_{17} \\ b_{2,1,1}^- &= 2a_{12} - p_{12} + \frac{1}{2}q_3 + \beta_1(-b_{0,0,1}^+ + \frac{1}{2}q_{15} + \frac{1}{2}A_{0,1,1}^+) + \alpha_2(a_2 - p_2) + \alpha_3(a_1 - p_1) + \frac{1}{2}\beta_4 r_3 + \frac{1}{2}\beta_5 r_2 + \alpha_{15}(a_1 - p_1) + \frac{1}{2}r_1\beta_{18} \\ b_{2,0,2}^- &= 2a_{13} - p_{13} + \frac{1}{2}\beta_1 q_{16} + \alpha_3(a_2 - p_2) + \frac{1}{2}\beta_5 r_8 + \alpha_{16}(a_1 - p_1) + \frac{1}{2}r_1\beta_{19} \\ b_{4,2,0}^- &= 2\alpha_{14}(1 + \frac{1}{3}p_0^{(0)}) - p_{14} + \frac{1}{2}q_4 - \frac{1}{2}\beta_1(q_{11} - q_{17}) + \frac{1}{2}\alpha_2(q_1 - 2p_2 + \alpha_2) + \frac{1}{2}\beta_4 q_1 + \frac{1}{2}q_1(\beta_{11} + \beta_{17}) \\ b_{4,1,1}^- &= 2\alpha_{15}(1 + \frac{1}{3}p_0^{(0)}) - p_{15} + \frac{1}{2}q_5 - \frac{1}{2}\beta_1(q_{12} - q_{18}) - \alpha_2(p_3 - \frac{1}{2}\alpha_3) + \frac{1}{2}\alpha_3(q_1 - 2p_2 + \alpha_2) + \frac{1}{2}\beta_4 q_2 + \frac{1}{2}\beta_5 q_1 + \frac{1}{2}q_1(\beta_{12} + \beta_{18}) \\ b_{4,0,2}^- &= 2\alpha_{16}(1 + \frac{1}{3}p_0^{(0)}) - p_{16} - \frac{1}{2}\beta_1(q_{13} - q_{19}) - \alpha_3(p_3 - \frac{1}{2}\alpha_3) + \frac{1}{2}\beta_5 q_2 + \frac{1}{2}q_1(\beta_{13} + \beta_{19}) \\ b_{6,2,0}^- &= 2a_{17} - p_{17} + \frac{1}{2}r_4 - \frac{1}{2}\beta_1(q_{14} - A_{8,2,0}^-) + \alpha_2(\frac{1}{2}r_1 + a_4 - p_4) - \frac{1}{2}\beta_4 q_2 + \frac{1}{2}r_1\beta_{11} + \alpha_{14}(a_1 - p_1) \\ b_{6,1,1}^- &= 2a_{18} - p_{18} + \frac{1}{2}r_5 - \frac{1}{2}\beta_1(q_{15} - A_{8,1,1}^-) + \alpha_2(a_5 - p_5) + \alpha_3(\frac{1}{2}r_1 + a_4 - p_4) - \frac{1}{2}\beta_4 q_3 - \frac{1}{2}\beta_5 q_2 + \frac{1}{2}r_1\beta_{12} + \alpha_{15}(a_1 - p_1) \\ b_{6,0,2}^- &= 2a_{19} - p_{19} - \frac{1}{2}\beta_1(q_{16} - A_{8,0,2}^-) + \alpha_3(a_5 - p_5) - \frac{1}{2}\beta_5 q_3 + \frac{1}{2}r_1\beta_{13} + \alpha_{16}(a_1 - p_1) \\ \bar{b}_{2,2,0} &= 2a_{23} - p_{23} + \frac{1}{2}\beta_1 \bar{A}_{4,2,0} + \frac{1}{2}r_1\beta_{23} & \bar{b}_{2,2,0}^- &= 2a_{27} - p_{27} + \frac{1}{2}\beta_1 q_{30} + \alpha_{30}(a_1 - p_1) + \frac{1}{2}r_1\beta_{33} \\ \bar{b}_{2,1,1}^+ &= 2\bar{a}_{24} - p_{24} + \frac{1}{2}\beta_1 \bar{A}_{4,1,1}^+ + \frac{1}{2}r_1\beta_{25} - \frac{1}{2}\beta_1 q_7 & \bar{b}_{2,1,1}^- &= 2a_{28} - p_{28} + \frac{1}{2}\beta_1 q_{31} + \alpha_{31}(a_1 - p_1) + \frac{1}{2}r_1\beta_{34} \\ \bar{b}_{2,1,1}^- &= 2a_{25} - p_{25} + \frac{1}{2}\beta_1 \bar{A}_{4,1,1}^- + \frac{1}{2}r_1\beta_{24} + \frac{1}{2}\beta_1 q_7 & \bar{b}_{2,0,2}^- &= 2a_{29} - p_{29} + \frac{1}{2}\beta_1 q_{32} + \alpha_{32}(a_1 - p_1) + \frac{1}{2}r_1\beta_{35} \\ \bar{b}_{2,0,2} &= 2a_{26} - p_{26} + \frac{1}{2}\beta_1 \bar{A}_{4,0,2} + \frac{1}{2}r_1\beta_{26} \\ \bar{b}_{4,2,0}^- &= 2\alpha_{30}(1 + \frac{1}{3}p_0^{(0)}) - p_{30} - \frac{1}{2}\beta_1(q_{27} - q_{33}) + \frac{1}{2}q_1(\beta_{27} + \beta_{33}) & \bar{b}_{6,2,0}^- &= 2a_{33} - p_{33} - \frac{1}{2}\beta_1(q_{30} - \bar{A}_{8,2,0}^-) + \alpha_{30}(a_1 - p_1) + \frac{1}{2}r_1\beta_{27} \\ \bar{b}_{4,1,1}^- &= 2\alpha_{31}(1 + \frac{1}{3}p_0^{(0)}) - p_{31} - \frac{1}{2}\beta_1(q_{28} - q_{34}) + \frac{1}{2}q_1(\beta_{28} + \beta_{34}) & \bar{b}_{6,1,1}^- &= 2a_{34} - p_{34} - \frac{1}{2}\beta_1(q_{31} - \bar{A}_{8,1,1}^-) + \alpha_{31}(a_1 - p_1) + \frac{1}{2}r_1\beta_{28} \\ \bar{b}_{4,0,2}^- &= 2\alpha_{32}(1 + \frac{1}{3}p_0^{(0)}) - p_{32} - \frac{1}{2}\beta_1(q_{29} - q_{35}) + \frac{1}{2}q_1(\beta_{29} + \beta_{35}) & \bar{b}_{6,0,2}^- &= 2a_{35} - p_{35} - \frac{1}{2}\beta_1(q_{32} - \bar{A}_{8,0,2}^-) + \alpha_{32}(a_1 - p_1) + \frac{1}{2}r_1\beta_{29} \\ b_{0,2,0} &= -p_8 + \frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \alpha_2(\frac{1}{2}q_1 - p_2) + \frac{1}{2}q_2\beta_2 + \frac{1}{2}q_4\beta_4 + \frac{1}{2}q_7\beta_7 + \frac{1}{2}q_1\beta_7 \\ b_{0,1,1}^+ &= -p_4 + \frac{1}{2}q_2 + \alpha_2\alpha_3 - \alpha_2 p_3 + \alpha_3(\frac{1}{2}q_1 - p_2) + \frac{1}{2}q_3\beta_2 + \frac{1}{2}q_2\beta_3 + \frac{1}{2}q_5\beta_4 + \frac{1}{2}q_4\beta_5 + \frac{1}{2}\beta_1(q_8 + q_9) + \frac{1}{2}q_1(\beta_8 + \beta_9) \\ b_{0,0,2} &= -p_5 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \alpha_3 p_3 + \frac{1}{2}q_3\beta_3 + \frac{1}{2}q_5\beta_5 + \frac{1}{2}\beta_1 q_{10} + \frac{1}{2}\beta_{10} q_1 \\ \bar{b}_{0,2,0} &= -p_6 + \frac{1}{2}\beta_1 q_{23} + \frac{1}{2}q_1\beta_{23} \\ \bar{b}_{0,1,1}^+ &= -p_7 + \frac{1}{2}\beta_1(q_{24} + q_{25}) + \frac{1}{2}q_1(\beta_{24} + \beta_{25}) \\ \bar{b}_{0,0,2} &= -p_8 + \frac{1}{2}\beta_1 q_{26} + \frac{1}{2}q_1\beta_{26}. \end{aligned}$$

Hier ist $2T_a S_2$ in der Differentialgleichung fortgelassen, da es später berücksichtigt wird.

In den C-Gliedern habe ich solche v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ mitgenommen, die also auch im Integral von derselben Ordnung werden. Es geschah dies in Hinsicht auf W , wo sie dann v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ werden. Auch habe ich die A-Glieder bis auf Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ incl. gerechnet, trotzdem sie hier keine kleinen Divisoren durch die Integration erhalten, nur um die konstanten Teile a_0, b_0 möglichst genau zu erhalten, und um genaue Rechenschaft über den Fehler zu bekommen, der durch Vernachlässigung von $c_0 = a_0 - 2b_0$ entsteht.

Integriert man mit Hilfe der Formeln für die Variation der Parameter und unter Vernachlässigung des \bar{V} in den Argumenten, sowie der Variabilität von η, Π etc., so kann man das Integral gemäss der Formel (37) schreiben. Die Integration der A-Glieder soll erst im nächsten Kapitel erfolgen, und damit auch die Ermittlung des Teiles von b_0 , welcher zweiten Grades ist. Die β_k haben folgende Werte:

$$(80) \quad \begin{aligned} \beta_7 &= \frac{-b_{2.2.0}}{\delta_1(2+\delta_1)}, & \beta_{11} &= \frac{b_{4.2.0}^{-2}}{\delta_1(2-\delta_1)}, & \beta_{14} &= \frac{b_{4.2.0}^{-2}}{1-4\delta_1^2}, & \beta_{17} &= \frac{-b_{6.2.0}^{-2}}{3\delta_1(2+3\delta_1)}, \\ \beta_8 &= \frac{-b_{2.1.1}^{+1}}{\delta_1(2+\delta_1)}, & \beta_{12} &= \frac{b_{2.1.1}^{-2}}{\delta_1(2-\delta_1)}, & \beta_{15} &= \frac{b_{4.1.1}^{-2}}{1-4\delta_1^2}, & \beta_{18} &= \frac{-b_{6.1.1}^{-2}}{3\delta_1(2+3\delta_1)}, \\ \beta_9 &= \frac{-b_{2.1.1}^{-1}}{\delta_1(2+\delta_1)}, & \beta_{13} &= \frac{b_{2.0.2}^{-2}}{\delta_1(2-\delta_1)}, & \beta_{16} &= \frac{b_{4.0.2}^{-2}}{1-4\delta_1^2}, & \beta_{19} &= \frac{-b_{6.0.2}^{-2}}{3\delta_1(2+3\delta_1)}, \\ \beta_{10} &= \frac{-b_{2.0.2}}{\delta_1(2+\delta_1)}, \\ \\ \beta_{23} &= \frac{-\bar{b}_{2.2.0}}{\delta_1(2+\delta_1)}, & \beta_{27} &= \frac{\bar{b}_{2.2.0}^{-2}}{\delta_1(2-\delta_1)}, & \beta_{30} &= \frac{\bar{b}_{4.2.0}^{-2}}{1-4\delta_1^2}, & \beta_{33} &= \frac{-\bar{b}_{6.2.0}^{-2}}{3\delta_1(2+3\delta_1)}, \\ \beta_{24} &= \frac{-\bar{b}_{2.1.1}^{+1}}{\delta_1(2+\delta_1)}, & \beta_{28} &= \frac{\bar{b}_{2.1.1}^{-2}}{\delta_1(2-\delta_1)}, & \beta_{31} &= \frac{\bar{b}_{4.1.1}^{-2}}{1-4\delta_1^2}, & \beta_{34} &= \frac{-\bar{b}_{6.1.1}^{-2}}{3\delta_1(2+3\delta_1)}, \\ \beta_{25} &= \frac{-\bar{b}_{2.1.1}^{-1}}{\delta_1(2+\delta_1)}, & \beta_{29} &= \frac{\bar{b}_{2.0.2}^{-2}}{\delta_1(2-\delta_1)}, & \beta_{32} &= \frac{\bar{b}_{4.0.2}^{-2}}{1-4\delta_1^2}, & \beta_{35} &= \frac{-\bar{b}_{6.0.2}^{-2}}{3\delta_1(2+3\delta_1)}, \\ \beta_{26} &= \frac{-\bar{b}_{2.0.2}}{\delta_1(2+\delta_1)}. \end{aligned}$$

Definitiv sind die Werte von $\beta_{30}, \beta_{31}, \beta_{32}$, die andern erhalten noch exarumentale Zusätze. Die β_k kommen auch auf der rechten Seite vor, und es ergeben sich zu ihrer Bestimmung je drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Ueber ihre Auflösung und die Gleichheit der Koeffizienten der Unbekannten wird nachher gehandelt werden.

Nachdem die β_k bekannt sind, können erst die a_k gerechnet werden, welche ja in Funktion der β_k gegeben sind.

9) Wir wollen jetzt den langperiodischen und kurzperiodischen charakteristischen Teil von W , soweit er zweiten Grades ist, herstellen. In $\frac{dK_2}{dv}$ brauchen wir nur die Glieder bis m' mitzunehmen, in $\frac{dV_2}{dv}$ wollen wir sie dagegen bis $\frac{m'^2}{\delta_1}$ mitnehmen, da δ_1 hier als Integrationsdivisor auftritt. Wir sind dann in der Lage, weil wir die Genauigkeitsgrenze in S_2 und R_2 entsprechend gewählt haben, $\frac{dV_2}{dv}$ genau bis auf Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ incl. herzustellen. Die Differentialgleichung lautet:

$$\begin{aligned} \frac{dW_2}{dv} &= S_2 - 2R_2 - 2R_0S_2 - 2R_1S_1 - 2R_2S_0 + 6R_0R_2 + 3R_1^2 \\ &+ [6R_1 - 2S_1 - 24R_0R_1 + 6R_0S_1 + 6R_1S_0] \eta \cos v - 3\eta^2 R_0 \\ &+ \left[\frac{3}{2}S_0 - 6R_0 \right] \eta^2 \cos 2v - \frac{d\mathfrak{E}}{dv}. \end{aligned}$$

Die Funktion \mathfrak{E} lassen wir vorläufig fort, da sie bequemer zusammen mit den Zusatzgliedern ermittelt wird. Wir wollen hier ausser den charakteristischen Gliedern noch die koordinierten aussuchen. Ferner wollen wir den konstanten Teil mit einer b_0 entsprechenden Genauigkeit, d. h. bis auf Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ incl. berechnen. Die elementaren Glieder werden wir jedoch nur mit Einschluss der Glieder $\frac{m'}{\delta_1}$ resp. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ und m' berechnen, da wir nur mit dieser Genauigkeit $T_a S_2$ und $T_a R_2$ ermittelt haben. Auch sollen die A-Glieder noch nicht integriert werden. Wir schreiben:

$$(81) \quad T_a \frac{dV_2}{dv} = T_{0.2.0} \eta^2 + T_{0.1.1}^{+1} \eta \eta' \cos(v - v_1) + T_{0.0.2} \eta'^2 \\ + \overline{T}_{0.2.0} \sin^2 j + \overline{T}_{0.1.1}^{+1} \sin j \sin j' \cos(v - v_1) + \overline{T}_{0.0.2} \sin^2 j'.$$

Hieraus ergeben sich auch die konstanten Glieder zweiten Grades. Die genauere Berechnung dieser Grössen soll jedoch später gegeben werden. Die Koeffizienten sind mit der für die konstanten Teile erforderlichen Genauigkeit:

$$(82) \quad \begin{aligned} T_{0.2.0} &= -2b_{0.2.0} - \beta_1 a_7 - \alpha_2 \beta_2 - a_4 \beta_4 - a_1 \beta_7 + \frac{3}{2}(\beta_2^2 + \beta_4^2) + 3\beta_1 \beta_7 - a_1 \\ &- 6\beta_1 \beta_2 - 6R_{4.0.0} \beta_4 + \frac{3}{2} \beta_1 \alpha_2 + \frac{3}{2} a_1 \beta_2 + \frac{3}{2} S_{4.0.0} \beta_4 - 3b_0 \\ T_{0.1.1}^{+1} &= -2b_{0.1.1}^{+1} - \beta_1 (a_8 + a_9) - \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 - a_5 \beta_4 - a_4 \beta_5 - a_1 (\beta_8 + \beta_9) + 3(\beta_2 \beta_8 + \beta_4 \beta_5) \\ &+ 3\beta_1 (\beta_8 + \beta_9) - a_2 - 6\beta_1 \beta_3 - 6R_{4.0.0} \beta_5 + \frac{3}{2} \beta_1 \alpha_3 + \frac{3}{2} a_1 \beta_3 + \frac{3}{2} S_{4.0.0} \beta_5 \\ T_{0.0.2} &= -2b_{0.0.2} - \beta_1 a_{10} - \alpha_3 \beta_3 - a_5 \beta_5 - a_1 \beta_{10} + \frac{3}{2}(\beta_3^2 + \beta_5^2) + 3\beta_1 \beta_{10} \\ \overline{T}_{0.2.0} &= -2\overline{b}_{0.2.0} - \beta_1 a_{23} - a_1 \beta_{23} + 3\beta_1 \beta_{23} \\ \overline{T}_{0.1.1}^{+1} &= -2\overline{b}_{0.1.1}^{+1} - \beta_1 (a_{24} + a_{25}) - a_1 (\beta_{24} + \beta_{25}) + 3\beta_1 (\beta_{24} + \beta_{25}) + T_a S_2 \\ \overline{T}_{0.0.2} &= -2\overline{b}_{0.0.2} - \beta_1 a_{26} - a_1 \beta_{26} + 3\beta_1 \beta_{26}. \end{aligned}$$

Integrieren wir jetzt, um K und V zu erhalten, so bekommen wir:

(83) pars $K_2 =$

$$\begin{array}{lll}
 \gamma_7 \eta^2 \sin 2w & + \gamma_{11} \eta^2 \sin(2w - 2v) & + \gamma_{17} \eta^2 \sin(6w - 2v) \\
 + \gamma_8 \eta \eta' \sin(2w + v - v_1) & + \gamma_{12} \eta \eta' \sin(2w - v - v_1) & + \gamma_{18} \eta \eta' \sin(6w - v - v_1) \\
 + \gamma_9 \eta \eta' \sin(2w - v + v_1) & + \gamma_{13} \eta'^2 \sin(2w - 2v_1) & + \gamma_{19} \eta'^2 \sin(6w - 2v_1) \\
 + \gamma_{10} \eta'^2 \sin 2w & & \\
 \\
 + \gamma_{20} \eta^2 \sin(2w + 2v) & + W_{4.1.1}^{-1} \eta \eta' \sin(4w - v + v_1) & + W_{8.2.0}^{-2} \eta^2 \sin(8w - 2v) \\
 + \gamma_{21} \eta^2 \sin 4w & + W_{4.0.2} \eta'^2 \sin 4w & + W_{8.1.1}^{-2} \eta \eta' \sin(8w - v - v_1) \\
 + \gamma_{22} \eta \eta' \sin(4w + v - v_1) & + W_{6.2.0} \eta^2 \sin 6w & + W_{8.0.2}^{-2} \eta'^2 \sin(8w - 2v_1) \\
 & + W_{6.1.1}^{+1} \eta \eta' \sin(6w + v - v_1) & \\
 \\
 + \gamma_{23} \sin^2 j \sin 2w & + \gamma_{27} \sin^2 j \sin(2w - 2v) & + \gamma_{33} \sin^2 j \sin(6w - 2v) \\
 + \gamma_{24} \sin j \sin j' \sin(2w + v - v_1) & + \gamma_{28} \sin j \sin j' \sin(2w - v - v_1) & + \gamma_{34} \sin j \sin j' \sin(6w - v - v_1) \\
 + \gamma_{25} \sin j \sin j' \sin(2w - v + v_1) & + \gamma_{29} \sin^2 j' \sin(2w - 2v_1) & + \gamma_{35} \sin^2 j' \sin(6w - 2v_1) \\
 + \gamma_{26} \sin^2 j' \sin 2w & & \\
 \\
 + \overline{W}_{4.2.0} \sin^2 j \sin 4w & + \overline{W}_{4.1.1}^{-1} \sin j \sin j' \sin(4w - v + v_1) & + \overline{W}_{8.2.0}^{-2} \sin^2 j \sin(8w - 2v) \\
 + \overline{W}_{4.1.1}^{+1} \sin j \sin j' \sin(4w + v - v_1) & + \overline{W}_{4.0.2} \sin^2 j' \sin 4w & + \overline{W}_{8.1.1}^{-2} \sin j \sin j' \sin(8w - v - v_1) \\
 & & + \overline{W}_{8.0.2}^{-2} \sin^2 j' \sin(8w - 2v_1).
 \end{array}$$

$$(84) \quad \gamma_7 = \frac{1}{1 + \delta_1} [a_7 - 2\beta_7 - \alpha_2 - 3\beta_1 + 3\beta_2 - \beta_4 (\alpha_2 - 3\beta_2 + 6\beta_1) + 3R_{2.1.0}^{+1} - S_{2.1.0}^{+1}]$$

$$\gamma_8 = \frac{1}{1 + \delta_1} [a_8 - 2\beta_8 - \alpha_3 + 3\beta_3 - \beta_5 (\alpha_3 - 3\beta_2 + 6\beta_1)]$$

$$\gamma_9 = \frac{1}{1 + \delta_1} [a_9 - 2\beta_9 - \beta_4 (\alpha_3 - 3\beta_3) + 3R_{2.0.1}^{+1} - S_{2.0.1}^{+1}]$$

$$\gamma_{10} = \frac{1}{1 + \delta_1} [a_{10} - 2\beta_{10} - \beta_5 (\alpha_3 - 3\beta_3)]$$

$$\gamma_{11} = \frac{-1}{1 - \delta_1} [a_{11} - 2\beta_{11} - \alpha_2 - 3\beta_1 + 3\beta_2 - 6\beta_1 \beta_4 - \beta_1 (\alpha_{14} - 3\beta_{14}) + \frac{3}{4} a_1]$$

$$\gamma_{12} = \frac{-1}{1 - \delta_1} [a_{12} - 2\beta_{12} - \alpha_3 + 3\beta_3 - 6\beta_1 \beta_5 - \beta_1 (\alpha_{15} - 3\beta_{15})]$$

$$\gamma_{13} = \frac{-1}{1 - \delta_1} [a_{13} - 2\beta_{13} - \beta_1 (\alpha_{16} - 3\beta_{16})]$$

$$\gamma_{17} = \frac{1}{1+3\delta_1} [a_{17} - 2\beta_{17} - \beta_4(\alpha_2 - 3\beta_2 + 6\beta_1) - \beta_1(\alpha_{14} - 3\beta_{14}) + 3R_{6.1.0}^{-1} - S_{6.1.0}^{-1} + \frac{3}{4}S_{6.0.0} - 3R_{6.0.0}]$$

$$\gamma_{18} = \frac{1}{1+3\delta_1} [a_{18} - 2\beta_{18} - \beta_4(\alpha_3 - 3\beta_3) - \beta_5(\alpha_2 - 3\beta_2 + 6\beta_1) - \beta_1(\alpha_{15} - 3\beta_{15}) + 3R_{6.0.1}^{-1} - S_{6.0.1}^{-1}]$$

$$\gamma_{19} = \frac{1}{1+3\delta_1} [a_{19} - 2\beta_{19} - \beta_5(\alpha_3 - 3\beta_3) - \beta_1(\alpha_{16} - 3\beta_{16})]$$

$$\gamma_{20} = \frac{1}{3+\delta_1} [-3\beta_1 + S_{2.2.0}^{+2} - 2R_{2.2.0}^{+2} + 3R_{2.1.0}^{+1} - S_{2.1.0}^{+1} + \frac{3}{4}S_{2.0.0}]$$

$$\gamma_{21} = \frac{1}{2(1+\delta_1)} [3\beta_4 + 3\beta_1(\frac{1}{2}\alpha_2 - 2\beta_2 + \beta_7) - a_4 + S_{4.2.0} - 2R_{4.2.0} + 3R_{4.1.0}^{+1} - S_{4.1.0}^{+1} - 3R_{4.0.0}]$$

$$\gamma_{22} = \frac{1}{2(1+\delta_1)} [3\beta_5 + 3\beta_1(\frac{1}{2}\alpha_3 - 2\beta_3 + \beta_8) + S_{4.1.1}^{+1} - 2R_{4.1.1}^{+1} - a_5]$$

$$W_{4.1.1}^{-1} = \frac{1}{2(1+\delta_1)} [3\beta_1\beta_9 + S_{4.1.1}^{-1} - 2R_{4.1.1}^{-1} + 3R_{4.0.1}^{+1} - S_{4.0.1}^{+1}]$$

$$W_{4.0.2} = \frac{1}{2(1+\delta_1)} [3\beta_1\beta_{10} + S_{4.0.2} - 2R_{4.0.2}]$$

$$W_{6.2.0} = \frac{1}{3(1+\delta_1)} [-6\beta_1\beta_4 + S_{6.2.0} - 2R_{6.2.0} + 3R_{6.1.0}^{+1} + 3R_{6.1.0}^{-1} - S_{6.1.0}^{+1} - S_{6.1.0}^{-1} - 3R_{6.0.0}]$$

$$W_{6.1.1}^{+1} = \frac{1}{3(1+\delta_1)} [-6\beta_1\beta_5 + S_{6.1.1}^{+1} - 2R_{6.1.1}^{+1} + 3R_{6.0.1}^{-1} - S_{6.0.1}^{-1}]$$

$$W_{8.2.0}^{-2} = \frac{1}{2(1+2\delta_1)} [\frac{3}{2}\beta_4^2 + 3\beta_1\beta_{17} + S_{8.2.0}^{-2} - 2R_{8.2.0}^{-2} + 3R_{8.1.0}^{-1} - S_{8.1.0}^{-1} + \frac{3}{4}S_{8.0.0} - 3R_{8.0.0}]$$

$$W_{8.1.1}^{-2} = \frac{1}{2(1+2\delta_1)} [3\beta_4\beta_5 + 3\beta_1\beta_{18} + S_{8.1.1}^{-2} - 2R_{8.1.1}^{-2} + 3R_{8.0.1}^{-1} - S_{8.0.1}^{-1}]$$

$$W_{8.0.2}^{-2} = \frac{1}{2(1+2\delta_1)} [\frac{3}{2}\beta_5^2 + 3\beta_1\beta_{19} + S_{8.0.2}^{-2} - 2R_{8.0.2}^{-2}]$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{1+\delta_1} (a_{23} - 2\beta_{23}) \quad \gamma_{27} = \frac{-1}{1+\delta_1} [a_{27} - 2\beta_{27} - \beta_1(\alpha_{30} - 3\beta_{30})] \quad \gamma_{33} = \frac{1}{1+3\delta_1} [a_{33} - 2\beta_{33} - \beta_1(\alpha_{30} - 3\beta_{30})]$$

$$\gamma_{24} = \frac{1}{1+\delta_1} (a_{24} - 2\beta_{24}) \quad \gamma_{28} = \frac{-1}{1+\delta_1} [a_{28} - 2\beta_{28} - \beta_1(\alpha_{31} - 3\beta_{31})] \quad \gamma_{34} = \frac{1}{1+3\delta_1} [a_{34} - 2\beta_{34} - \beta_1(\alpha_{31} - 3\beta_{31})]$$

$$\gamma_{25} = \frac{1}{1+\delta_1} (a_{25} - 2\beta_{25}) \quad \gamma_{29} = \frac{-1}{1+\delta_1} [a_{29} - 2\beta_{29} - \beta_1(\alpha_{32} - 3\beta_{32})] \quad \gamma_{35} = \frac{1}{1+3\delta_1} [a_{35} - 2\beta_{35} - \beta_1(\alpha_{32} - 3\beta_{32})]$$

$$\gamma_{26} = \frac{1}{1+\delta_1} (a_{26} - 2\beta_{26})$$

$$\begin{array}{l|l}
\overline{W}_{4 \cdot 2 \cdot 0} = \frac{1}{2(1+\delta_1)} [3\beta_1\beta_{23} + \overline{S}_{4 \cdot 2 \cdot 0} - 2\overline{R}_{4 \cdot 2 \cdot 0}] & \overline{W}_{8 \cdot 2 \cdot 0}^{-2} = \frac{1}{2(1+2\delta_1)} [3\beta_1\beta_{33} + \overline{S}_{8 \cdot 2 \cdot 0}^{-2} - 2\overline{R}_{8 \cdot 2 \cdot 0}^{-2}] \\
\overline{W}_{4 \cdot 1 \cdot 1}^{+1} = \frac{1}{2(1+\delta_1)} [3\beta_1\beta_{24} + \overline{S}_{4 \cdot 1 \cdot 1}^{+1} - 2\overline{R}_{4 \cdot 1 \cdot 1}^{+1}] & \overline{W}_{8 \cdot 1 \cdot 1}^{-2} = \frac{1}{2(1+2\delta_1)} [3\beta_1\beta_{34} + \overline{S}_{8 \cdot 1 \cdot 1}^{-2} - 2\overline{R}_{8 \cdot 1 \cdot 1}^{-2}] \\
\overline{W}_{4 \cdot 1 \cdot 1}^{-1} = \frac{1}{2(1+\delta_1)} [3\beta_1\beta_{25} + \overline{S}_{4 \cdot 1 \cdot 1}^{-1} - 2\overline{R}_{4 \cdot 1 \cdot 1}^{-1}] & \overline{W}_{8 \cdot 0 \cdot 2}^{-2} = \frac{1}{2(1+2\delta_1)} [3\beta_1\beta_{35} + \overline{S}_{8 \cdot 0 \cdot 2}^{-2} - 2\overline{R}_{8 \cdot 0 \cdot 2}^{-2}] \\
\overline{W}_{4 \cdot 0 \cdot 2} = \frac{1}{2(1+\delta_1)} [3\beta_1\beta_{26} + \overline{S}_{4 \cdot 0 \cdot 2} - 2\overline{R}_{4 \cdot 0 \cdot 2}] &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(85) \quad \text{pars } V_2 = & \gamma'_{14} \eta^2 \sin(4w - 2v) + \gamma'_{30} \sin^2 j \sin(4w - 2v) \\
& + \gamma'_{15} \eta \eta' \sin(4w - v - v_1) + \gamma'_{31} \sin j \sin j' \sin(4w - v - v_1) \\
& + \gamma'_{16} \eta'^2 \sin(4w - 2v_1) + \gamma'_{32} \sin^2 j' \sin(4w - 2v_1).
\end{aligned}$$

Hier ist

$$\begin{aligned}
(86) \quad \gamma'_{14} &= \frac{\gamma_{14}}{2\delta_1}, & \gamma'_{15} &= \frac{\gamma_{15}}{2\delta_1}, & \gamma'_{16} &= \frac{\gamma_{16}}{2\delta_1}, \\
\gamma'_{30} &= \frac{\gamma_{30}}{2\delta_1}, & \gamma'_{31} &= \frac{\gamma_{31}}{2\delta_1}, & \gamma'_{32} &= \frac{\gamma_{32}}{2\delta_1}.
\end{aligned}$$

Die γ_k sind die im Ansatz für $\frac{d\overline{V}}{dw}$ (Formel 39) gebrauchten Koeffizienten.

Wir sind jetzt in der Lage, ihre Werte in Funktion der β_k geben zu können.

$$\begin{aligned}
(86) \quad \gamma_{14} &= \alpha_{14} (1 - \frac{2}{3} p_0^{(0)}) - 2\beta_{14} (1 - \frac{1}{3} p_0^{(0)}) + \frac{3}{2} \beta_1 (\alpha_2 + S_{6 \cdot 1 \cdot 0}^{-1} - 4R_{6 \cdot 1 \cdot 0}^{-1}) - \beta_2 (\alpha_2 + 6\beta_1 - \frac{3}{2} \beta_2 - \frac{3}{2} \alpha_1) \\
& + \beta_4 (3 - \alpha_1 - 2p_0^{(0)}) + (3\beta_1 - \alpha_1) (\beta_{11} + \beta_{17}) - \beta_1 (a_{11} + a_{17}) + \frac{3}{4} S_{4 \cdot 0 \cdot 0} - 3R_{4 \cdot 0 \cdot 0} - \alpha_4 \\
\gamma_{15} &= \alpha_{15} (1 - \frac{2}{3} p_0^{(0)}) - 2\beta_{15} (1 - \frac{1}{3} p_0^{(0)}) + \frac{3}{2} \beta_1 (\alpha_3 + S_{6 \cdot 0 \cdot 1}^{-1} - 4R_{6 \cdot 0 \cdot 1}^{-1}) - \beta_2 (\alpha_3 - \frac{3}{2} \beta_3) - \beta_3 (\alpha_2 + 6\beta_1 - \frac{3}{2} \beta_2 - \frac{3}{2} \alpha_1) \\
& - \beta_4 a_2 + \beta_5 (3 - \alpha_1 - 2p_0^{(0)}) + (3\beta_1 - \alpha_1) (\beta_{12} + \beta_{18}) - \beta_1 (a_{12} + a_{18}) - \alpha_5 \\
\gamma_{16} &= \alpha_{16} (1 - \frac{2}{3} p_0^{(0)}) - 2\beta_{16} (1 - \frac{1}{3} p_0^{(0)}) - \beta_3 (\alpha_3 - \frac{3}{2} \beta_3) - \beta_5 a_2 + (3\beta_1 - \alpha_1) (\beta_{13} + \beta_{19}) - \beta_1 (a_{13} + a_{19}) \\
\gamma_{30} &= \alpha_{30} (1 - \frac{2}{3} p_0^{(0)}) - 2\beta_{30} (1 - \frac{1}{3} p_0^{(0)}) + (3\beta_1 - \alpha_1) (\beta_{27} + \beta_{33}) - \beta_1 (a_{27} + a_{33}) \\
\gamma_{31} &= \alpha_{31} (1 - \frac{2}{3} p_0^{(0)}) - 2\beta_{31} (1 - \frac{1}{3} p_0^{(0)}) + (3\beta_1 - \alpha_1) (\beta_{28} + \beta_{34}) - \beta_1 (a_{28} + a_{34}) \\
\gamma_{32} &= \alpha_{32} (1 - \frac{2}{3} p_0^{(0)}) - 2\beta_{32} (1 - \frac{1}{3} p_0^{(0)}) + (3\beta_1 - \alpha_1) (\beta_{29} + \beta_{35}) - \beta_1 (a_{29} + a_{35}).
\end{aligned}$$

Die γ_{14} , γ_{15} , γ_{16} , γ_{30} , γ_{31} , γ_{32} sind definitive Werte, dagegen tritt zu den γ'_k später noch ein exargumentaler Teil hinzu. Die Integration der A-Glieder, sowie die Ermittlung des konstanten Teiles zweiten Grades wird besser im folgenden Kapitel erledigt werden zugleich mit der Berücksichtigung der Funktion Ξ und der Zusatzglieder aus η , II etc.

10) Die Berechnung von \mathfrak{B}_2 gestaltet sich wesentlich einfacher, bedingt durch die einfachere Form der Differentialgleichung. Bekanntlich werden die kurzperiodischen Glieder in \mathfrak{B}_2 durch den Divisor bei der Integration vergrößert, wir brauchen also nur diese genau bis zu Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ in der Differentialgleichung. Die A-Glieder wollen wir nur genau bis auf Grössen v. d. Ord. m' und $\frac{m'}{\delta_1}$ in der Differentialgleichung herstellen, B-Glieder kommen nicht vor. Es ist:

$$\frac{d^2 \mathfrak{B}_2}{dv^2} + \mathfrak{B}_2 = -Q_0 \frac{d\mathfrak{B}_2}{dv} - Q_1 \frac{d\mathfrak{B}_1}{dv} + Z_2 + 2S_1 Z_1 - Q_1 \frac{d(\lambda)}{dv}.$$

Analog $\frac{d(\rho)}{dv}$ setzen wir $\frac{d(\lambda)}{dv} = \sin j \cos v$, vernachlässigen also hier, ebenso in $\frac{d\mathfrak{B}}{dv}$, die Veränderlichkeit von $\sin j$, σ etc. mit einem Fehler $\frac{m'^2}{\delta_1}$ im Integral. Für $\frac{d\mathfrak{B}}{dv}$ brauchen wir nur die D-Glieder anzusetzen. Multiplizieren wir die periodischen Aggregate aus und suchen die entstehenden D-Glieder, sowie die von der Form A heraus, so können wir schreiben:

$$(87) \quad \frac{d^2 \mathfrak{B}_2}{dv^2} + \mathfrak{B}_2 = c_3 \eta \sin j \sin(2w + v - v) + c_7 \eta \sin j' \sin(2w + v_1 - v) \\ + c_4 \eta \sin j \sin(2w - v + v) + c_8 \eta \sin j' \sin(2w - v_1 + v) \\ + c_5 \eta' \sin j \sin(2w + v - v_1) + c_9 \eta' \sin j' \sin(2w + v_1 - v_1) \\ + c_6 \eta' \sin j \sin(2w - v + v_1) + c_{10} \eta' \sin j' \sin(2w - v_1 + v_1) \\ + c_{11} \eta \sin j \sin(2w - v - v) + c_{15} \eta \sin j \sin(6w - v - v_1) \\ + c_{12} \eta' \sin j \sin(2w - v - v_1) + c_{16} \eta' \sin j \sin(6w - v - v_1) \\ + c_{13} \eta \sin j' \sin(2w - v_1 - v) + c_{17} \eta \sin j' \sin(6w - v_1 - v) \\ + c_{14} \eta' \sin j' \sin(2w - v_1 - v_1) + c_{18} \eta' \sin j' \sin(6w - v_1 - v_1).$$

Die Koeffizienten lauten:

$$(88) \quad \begin{array}{l|l} c_3 = z_3 - \frac{1}{2} q_2 + \alpha_2 \delta_1 - \frac{1}{2} (r_4 \xi_1 + r_1 \xi_4) & c_7 = z_7 + \alpha_2 \delta_2 - \frac{1}{2} (r_4 \xi_2 + r_1 \xi_8) \\ c_4 = z_4 - \frac{1}{2} r_2 + \alpha_2 (z_1 - \frac{1}{2} r_1) + \frac{1}{2} (q_2 \xi_1 - r_1 \xi_3) & c_8 = z_8 + \alpha_2 z_2 + \frac{1}{2} (q_2 \xi_2 - r_1 \xi_7) \\ c_5 = z_5 - \frac{1}{2} q_3 + \alpha_3 \delta_1 - \frac{1}{2} (r_5 \xi_1 + r_1 \xi_6) & c_9 = z_9 + \alpha_3 \delta_2 - \frac{1}{2} (r_5 \xi_2 + r_1 \xi_{10}) \\ c_6 = z_6 - \frac{1}{2} r_3 + \alpha_3 (z_1 - \frac{1}{2} r_1) + \frac{1}{2} (q_3 \xi_1 - r_1 \xi_5) & c_{10} = z_{10} + \alpha_3 z_2 + \frac{1}{2} (q_3 \xi_2 - r_1 \xi_9) \\ \\ c_{11} = z_{11} - \frac{1}{2} q_2 - \alpha_2 \delta_1 + \frac{1}{2} (r_2 \xi_1 + r_1 \xi_{15}) & c_{15} = z_{15} - \frac{1}{2} r_4 + \alpha_2 (z_1 - \frac{1}{2} r_1) - \frac{1}{2} (q_2 \xi_1 - r_1 \xi_{11}) \\ c_{12} = z_{12} - \frac{1}{2} q_3 - \alpha_3 \delta_1 + \frac{1}{2} (r_3 \xi_1 + r_1 \xi_{16}) & c_{16} = z_{16} - \frac{1}{2} r_5 + \alpha_3 (z_1 - \frac{1}{2} r_1) - \frac{1}{2} (q_3 \xi_1 - r_1 \xi_{12}) \\ c_{13} = z_{13} - \alpha_2 \delta_2 + \frac{1}{2} (r_2 \xi_2 + r_1 \xi_{17}) & c_{17} = z_{17} + \alpha_2 z_2 - \frac{1}{2} (q_2 \xi_2 - r_1 \xi_{13}) \\ c_{14} = z_{14} - \alpha_3 \delta_2 + \frac{1}{2} (r_3 \xi_2 + r_1 \xi_{18}) & c_{18} = z_{18} + \alpha_3 z_2 - \frac{1}{2} (q_3 \xi_2 - r_1 \xi_{14}). \end{array}$$

Da in den elementaren Gliedern der Differentialgleichung solche v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ nicht vorkommen und wir schon $\frac{m'^2}{\delta_1}$ vernachlässigen, so folgt:

$$(89) \quad T_\alpha \left(\frac{d^2 \mathfrak{B}_2}{dv^2} + \mathfrak{B}_2 \right) = \mathfrak{z}_3^{(0)} \eta \sin j \sin(v-v) + \mathfrak{z}_5^{(0)} \eta \sin j' \sin(v_1-v) \\ + (\mathfrak{z}_4^{(0)} + \frac{1}{2} q_2^{(0)}) \eta' \sin j \sin(v-v_1) + \mathfrak{z}_6^{(0)} \eta' \sin j' \sin(v_1-v_1).$$

Die Koeffizienten sind aus dem zweiten Kapitel bekannt. Die Integration soll im folgenden Kapitel geleistet werden, zusammen mit der Berücksichtigung der Zusatzglieder und der exargumentalen Teile der Koeffizienten. Das Integral von \mathfrak{B}_2 hat die im Ansatz für \mathfrak{B} (Formel 41) angegebene Form. Die Koeffizienten sind:

$$(90) \quad \xi_3 = -\frac{c_3}{\delta_1(2+\delta_1)}, \quad \xi_4 = -\frac{c_4}{\delta_1(2+\delta_1)}, \quad \xi_{11} = \frac{c_{11}}{\delta_1(2-\delta_1)}, \quad \xi_{15} = -\frac{c_{15}}{3\delta_1(2+3\delta_1)}, \\ \xi_5 = -\frac{c_5}{\delta_1(2+\delta_1)}, \quad \xi_6 = -\frac{c_6}{\delta_1(2+\delta_1)}, \quad \xi_{12} = \frac{c_{12}}{\delta_1(2-\delta_1)}, \quad \xi_{16} = -\frac{c_{16}}{3\delta_1(2+3\delta_1)}, \\ \xi_7 = -\frac{c_7}{\delta_1(2+\delta_1)}, \quad \xi_8 = -\frac{c_8}{\delta_1(2+\delta_1)}, \quad \xi_{13} = \frac{c_{13}}{\delta_1(2-\delta_1)}, \quad \xi_{17} = -\frac{c_{17}}{3\delta_1(2+3\delta_1)}, \\ \xi_9 = -\frac{c_9}{\delta_1(2+\delta_1)}, \quad \xi_{10} = -\frac{c_{10}}{\delta_1(2+\delta_1)}, \quad \xi_{14} = \frac{c_{14}}{\delta_1(2-\delta_1)}, \quad \xi_{18} = -\frac{c_{18}}{3\delta_1(2+3\delta_1)}.$$

$\xi_3, \xi_5, \xi_7, \xi_9$ und $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{14}$ sind definitive Werte. Die andern erhalten noch exargumentale Zusätze.

Viertes Kapitel.

Berücksichtigung der exargumentalen Teile in den Gliedern ersten bis dritten Grades, sowie der Veränderlichkeit der langperiodischen Funktionen η, II etc. in den C- und D-Gliedern ersten und zweiten Grades, soweit diese kleine Divisoren erhalten.

§ 1. Die Gylden'sche partielle Integration. — Ableitung mehrerer Hilfsformeln.

1) Im vorigen Kapitel integrierten wir die Differentialgleichungen des Problems, indem wir die langperiodische charakteristische Funktion \bar{V} innerhalb der Argumente als konstant ansahen. Ebenso verfahren wir mit den langperiodisch elementaren Funktionen $\eta, II, \sin j, \sigma$ etc. Beides ist bei charakteristischen Planeten nicht gestattet. Haben wir gewöhnliche Planeten, so ist dort \bar{V} von der Ordnung

der störenden Masse, man kann unbedenklich nach Potenzen dieser Grösse entwickeln und schon die erste Potenz in der Entwicklung vernachlässigen (Störungen zweiter Ordnung). „Gewöhnliche Planeten haben demnach keine exargumentalen Glieder“.

Bei charakteristischen Planeten, wo die als Divisor auftretende Grösse δ_1 Werte bis zu $\sqrt[3]{m'}$ annehmen kann, nähert sich \bar{V} stark der Einheit und muss in den Argumenten bleiben. Die Gyldén'sche partielle Integration trägt diesem Vorhandensein des \bar{V} in den Argumenten Rechnung. „Bei charakteristischen Planeten treten exargumentale Glieder auf“.

Bei kritischen Planeten, definiert durch $\sqrt[2]{m'} \geq \delta_1 > \sqrt[3]{m'^2}$ müssen unbedingt exargumentale Glieder berücksichtigt werden. Hier können wir aber auch die η, II etc. nicht mehr als konstant ansehen, sondern müssen ihrem funktionalen Charakter durch die partielle Integration Rechnung tragen, welche im folgenden in Gestalt einer Reihenentwicklung gegeben werden soll, die nach Potenzen von $\frac{m'}{\delta_1}$ fortschreitet. Hier dürfte wohl die zweite Potenz dieser Entwicklung ausreichen. „Kritische Planeten haben sowohl exargumentale Glieder als auch Zusatzglieder (durch η, II etc. hervorgerufen)“.

Wir haben uns im vorigen Kapitel einer nur für gewöhnliche Planeten ausreichenden Integrationsmethode bedient, sind aber insofern in der Genauigkeit erheblich weiter gegangen, als wir die Koeffizienten unter Berücksichtigung der zweiten Potenz der Masse in charakteristischen Gliedern bestimmten. Wir wollen jetzt zuerst die exargumentalen Zusätze herleiten, die an diese Koeffizienten anzubringen sind, damit sie für charakteristische Planeten genügen. Ist uns dies gelungen, so sollen die η, II etc. als variabel betrachtet werden. Die Koeffizienten der Entwicklungen bleiben davon unberührt, wie wir gleich sehen werden; die Reihen für S, R, W, \mathfrak{B} etc. werden dagegen fast um die bereits vorhandene Anzahl Terme vermehrt, und es bestehen die Koeffizienten aus den alten Gliedern, sowie aus gewissen Grössen \mathfrak{s}_n und τ_n .

Ich will jetzt eine kurze Ableitung der Gyldén'schen partiellen Integration in einer etwas anderen Form geben.

In dem Argument w tritt v explicit wie implicit auf, und dies muss bei der Integration berücksichtigt werden. Es geschieht das ganz analog der partiellen Differentiation, indem man zuerst nur das explicite v berücksichtigt und dies dann durch einen Zusatz berichtigt. Es sei folgendes Argument zu integrieren:

$$J = \int \sin(ax + by) dx, \quad y = f(x)$$

Sehen wir y als konstant an:

$$J = \int \overset{y = \text{const.}}{\sin(ax + by)} dx + \varphi,$$

wo die Funktion φ so zu bestimmen ist, dass die rechte Seite den Wert des

Integrals unter Berücksichtigung von y giebt. Differentiieren wir, so folgt einmal:

$$\frac{dJ}{dx} = \sin(ax + by),$$

und

$$\frac{dJ}{dx} = \sin(ax + by) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\int^{y = \text{const.}} \sin(ax + by) dx \right] \frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}.$$

Aus der Gleichsetzung beider Ausdrücke ergibt sich zur Bestimmung von φ folgender Differentialausdruck:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left[\int^{y = \text{const.}} \sin(ax + by) dx \right] \frac{dy}{dx} \\ \varphi &= -\int \frac{\partial}{\partial y} \left[\int^{y = \text{const.}} \sin(ax + by) dx \right] \frac{dy}{dx} \cdot dx. \end{aligned}$$

Es lautet demnach das Resultat:

$$(91) \quad J = \int^{y = \text{const.}} \sin(ax + by) dx - \int \frac{\partial}{\partial y} \left[\int^{y = \text{const.}} \sin(ax + by) dx \right] \frac{dy}{dx} dx.$$

Das Integral ohne Index ist wieder über x und y zu erstrecken; wendet man obiges Verfahren von neuem auf dieses erste Integral an, so folgt:

$$(91a) \quad \begin{aligned} J &= \int^{y = \text{const.}} \sin(ax + by) dx - \int \frac{\partial}{\partial y} \left[\int^{y = \text{const.}} \int^{y = \text{const.}} \sin(ax + by) dx \right] \frac{dy}{dx} \cdot dx \\ &\quad + \int \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int^{y = \text{const.}} \frac{\partial}{\partial y} \left[\int^{y = \text{const.}} \sin(ax + by) dx \right] \frac{dy}{dx} dx \right\} \frac{dy}{dx} dx. \end{aligned}$$

Und so liesse sich die Reihe leicht weiter fortsetzen. Die Integrationen sind hier aus gutem Grunde nicht ausgeführt, ebenso die Differentiationen, denn wir haben ja $\frac{dy}{dx}$ (bei uns $\frac{d\bar{V}}{dv}$) in periodischer Form. Wir komponieren dies dann mit dem Integranden und integrieren jetzt erst.

Wie man sieht, muss bei der letzten Integration, mit der man die Reihe abbrechen will, y doch als konstant betrachtet werden. Hier tritt aber schon $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ auf, bei uns $\left(\frac{d\bar{V}}{dv}\right)^2$, und dies ist v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$. Würde nun der Koeffizient von $\sin(ax + by)$ v. d. Ord. m' sein und durch jede Integration den Divisor $a = \delta_1$ erhalten, so würde er also infolge des dreimaligen Integrationsprocesses werden $\frac{m'}{\delta_1^3} \times \left(\frac{d\bar{V}}{dv}\right)^2 = \frac{m'^3}{\delta_1^5}$, während der Koeffizient, ohne Berücksichtigung des \bar{V} v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ wäre. Es entsteht eine Reihe von folgender Form:

$$(A) \quad J = C_1 \frac{m'}{\delta_1} + C_2 \frac{m'^2}{\delta_1^3} + C_3 \frac{m'^3}{\delta_1^5} + C_4 \frac{m'^4}{\delta_1^7} + \dots$$

wo die C_n Zahlenfaktoren und Potenzen der Excentricitäten enthalten. Herr Brendel definiert nun (Br. pg. 153) δ_1 folgendermassen:

$$(B) \quad \delta_1 = \delta - 2\mu \sum \frac{c_n m'^{2n}}{\delta_1^{4n-2}} \kappa^{2n-2},$$

wo die c_n Koeffizienten v. d. Ord. der Einheit sind, und κ v. d. Ord. der Excentricität ist. Hieraus geht direkt hervor, dass einmal δ_1 nicht streng null werden kann und dass zweitens δ_1 so definiert wird, dass für diesen Wert die Reihe (A) konvergiert.

Nun tritt aber in V der Fall ein, dass der Koeffizient in der Differentialgleichung schon v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ ist, also bei der ersten Integration v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1^2}$ wird, bei der zweiten v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^4}$ etc. Wir bekommen hier eine Reihe:

$$J = C_1 \frac{m'}{\delta_1^2} + C_2 \frac{m'^2}{\delta_1^4} + C_3 \frac{m'^3}{\delta_1^6} + \dots$$

Es ist dies die in den A. N. No. 3346 erwähnte steigende Reihe, welche jedoch nur eine endliche Zahl Glieder besitzt, deren Konvergenz demnach gar nicht in Betracht kommt. Hier ist überall der Grenzwert von δ_1 bei kritischen Planeten angenommen, also der ungünstigste Fall, welcher überhaupt eintreten kann.

Wollte man bei kritischen Planeten mit Hilfe dieser Methode der partiellen Integration eine Darstellung des gerechneten Ortes innerhalb der Beobachtungsgrenzen erreichen, so müsste man sehr hohe Potenzen sowohl der Excentricität als auch in Bezug auf die Masse bei diesen exargumentalen Gliedern mitnehmen, was eine bedeutende Mehrarbeit verursacht.

Specialisieren wir nun die in (91) gegebene allgemeine Formel der partiellen Integration für unsere Zwecke.

Das Argument w war ja

$$w = (1 - \mu_1)v - \mu \bar{V} - B.$$

Mithin erhält man folgende Formeln ohne Mühe aus (91), indem man die partielle Integration nur einmal anwendet. Denn in der Praxis wird man sofort den Integranden mit dem periodischen Aggregate $\frac{d\bar{V}}{dv}$ ausmultiplizieren und auf die Integration dieser neuen periodischen Reihe wieder die Formel (91) anwenden.

$$(92) \begin{cases} \int \frac{\sin}{\cos} nv \, dv = \mp \frac{1}{n(1-\mu_1)} \frac{\cos}{\sin} nv + \frac{\mu}{1-\mu_1} \int \frac{d\bar{V}}{dv} \frac{\sin}{\cos} nv \, dv \\ \int \sin(nv \pm kv) \, dv = -\frac{1}{n(1-\mu_1) \pm k} \cos(nv \pm kv) + \frac{n\mu}{n(1-\mu_1) \pm k} \int \frac{d\bar{V}}{dv} \sin(nv \pm kv) \, dv \\ \int \cos(nv \pm kv) \, dv = \frac{1}{n(1-\mu_1) \pm k} \sin(nv \pm kv) + \frac{n\mu}{n(1-\mu_1) \pm k} \int \frac{d\bar{V}}{dv} \cos(nv \pm kv) \, dv. \end{cases}$$

Für $\frac{d\bar{V}}{dv}$ ist der in Formel (39) gegebene Ansatz zu benutzen.

Des weiteren soll noch erwähnt werden, dass die aus charakteristischen Gliedern entstehenden exargumentalen Glieder wieder charakteristische sind, also besonders betrachtet werden müssen, dass dagegen aus gewöhnlichen Gliedern auch nur exargumentale gewöhnliche entstehen, also sofort weggelassen werden können, da sie v. d. Ord. $\frac{m^{12}}{\delta_1}$, $\frac{m^{13}}{\delta_1^2}$ etc. sind.

2) Die Veränderlichkeit der η , Π etc. soll, wie bereits erwähnt wurde, mit Hilfe der gewöhnlichen partiellen Integration berücksichtigt werden, und wir wollen für diese eine etwas andere, unseren Zwecken mehr entsprechende Ableitung geben. Es liege folgender Ausdruck vor:

$$J = \int f \frac{d\varphi}{dx} dx,$$

wo f und φ Funktionen von x sind, und zwar sei f eine langperiodische, welche sich für kürzere Zeitintervalle von einer Konstanten nur wenig unterscheidet. In erster Näherung werde gesetzt $f = \text{const.}$, so dass ist

$$J = \int f \frac{d\varphi}{dx} dx = f \int \frac{d\varphi}{dx} dx + \psi_1,$$

wo ψ_1 so bestimmt werden soll, dass der Ausdruck rechts den wahren Wert des Integrals giebt. Differentiiert man beide Ausdrücke für J und setzt sie gleich:

$$f \frac{d\varphi}{dx} = \frac{df}{dx} \int \frac{d\varphi}{dx} dx + f \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi_1}{dx},$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dx} &= -\frac{df}{dx} \int \frac{d\varphi}{dx} dx, \\ \psi_1 &= -\int \frac{df}{dx} \int \frac{d\varphi}{dx} dx^2. \end{aligned}$$

In zweiter Näherung wird gesetzt: $\frac{df}{dx} = \text{const.}$, also

$$J = f \int \frac{d\varphi}{dx} dx - \frac{df}{dx} \int \int \frac{d\varphi}{dx} dx^2 + \psi_2,$$

wo ψ_2 den Fehler annullieren soll, also sein muss

$$\frac{d\psi_2}{dx} = \frac{d^2f}{dx^2} \int \int \frac{d\varphi}{dx} dx^2,$$

$$\psi_2 = \int \frac{d^2f}{dx^2} \int \int \frac{d\varphi}{dx} dx^3.$$

Führt man so fort, so erhält man folgende Reihe für das Integral:

$$(93) \quad \int f \frac{d\varphi}{dx} dx = f \int \frac{d\varphi}{dx} dx - \frac{df}{dx} \int \int \frac{d\varphi}{dx} dx^2 + \frac{d^2f}{dx^2} \int \int \int \frac{d\varphi}{dx} dx^3 - \frac{d^3f}{dx^3} \int \int \int \int \frac{d\varphi}{dx} dx^4 + \dots$$

$$\dots \mp \frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}} \int \int \int \int \int \frac{d\varphi}{dx} dx^n \pm \psi_n,$$

wo ψ_n das Restglied der Reihe vertritt.

$$\psi_n = \int \frac{d^n f}{dx^n} \int \int \int \frac{d\varphi}{dx} dx^{n+1}.$$

Hieraus folgt sofort die bekannte Thatsache, dass, wenn f eine ganze rationale Funktion $(n-1)$ ten Grades ist, ψ_n streng Null wird, ein endlicher Integrationsprozess also zum Ziele führt. Eine gute Annäherung wird aber diese Methode im Falle langperiodischer Funktionen geben. Denken wir uns $\varphi =$ kurzperiodisch, $f =$ langperiodisch, und zwar $f = \sin sx$, s v. d. Ord. m' , so wird $\frac{d^n f}{dx^n}$ v. d. Ord. m'^n , also selbst im Falle kritischer Planeten, wo φ langperiodisch charakteristisch ist, würde werden, wenn wir von den Potenzen der Excentricität absehen,

$$\frac{d\psi_n}{dx} = m'^n \cdot \frac{m'}{\delta_1^n} \text{ resp. } m'^n \cdot \frac{m'}{\delta_1^{n+1}}$$

oder im Grenzwerte von $\delta_1 = \sqrt[3]{m'^2}$

$$\frac{d\psi_n}{dx} = \sqrt[3]{m'^{n+3}} \text{ resp. } \sqrt[3]{m'^{n+1}}.$$

Der erste Fall entspricht den Funktionen S, R, Z, K , der zweite V . Brechen wir nun mit dem zweiten Gliede ab, sehen also schon den ersten Differentialquotienten als konstant an, und vernachlässigen ψ_2 , so werden wir die Variabilität von f bei einem Gliede v. d. Ord. $m'^{\frac{2}{3}}$ in der Differentialgleichung für S, R, Z, K , resp. m' in der für V vernachlässigen, also ungünstigen Falls einen Fehler v. d. Ord. m' resp. $\sqrt[3]{m'}$ im Integral begehen. Hätten wir dagegen f als konstant angesehen, so wäre der Fehler v. d. Ord. $\sqrt[3]{m'^2}$ resp. nullter Ordnung geworden. Es zeigt dies, dass die Annäherungsmethode wirklich eine solche ist und dass wenigstens das zweite Glied der Reihe (93) noch mitgenommen werden muss.

Die Formel (93) wird daher bei langperiodischen Funktionen f , wo der Differentialquotient um eine Ordnung kleiner wird als die Funktion, eine schnell fallende Reihe darstellen, welche ausserdem mit den Potenzen von Excentricität oder Neigung multipliziert ist.

Die Anwendung dieser Formel auf Ausdrücke wie :

$$\eta^2 \sin(nv - 2v) = \eta^2 \sin(nv - 2v + 2\Pi)$$

geschieht dadurch, dass man den Sinus auflöst und $\eta^2 \frac{\sin}{\cos} 2\Pi$ als die langperiodische Funktion f betrachtet. Wir wollen im folgenden die Integrationsformeln für die bei uns auftretenden langperiodischen Funktionen geben, indem wir schon deren ersten Differentialquotienten als konstant betrachten. Auch in V wollen wir nicht weiter gehen und auf das bei den exargumentalen Gliedern hierüber Gesagte verweisen.

Für die Glieder ersten Grades hat Herr Brendel im sechsten Kapitel der Theorie der kleinen Planeten die Formeln gegeben. (Formel 214, 221, 235). Sie sollen deswegen hier nur für den zweiten Grad hingeschrieben werden.

$$(94) \quad \int \eta^2 \frac{\sin}{\cos} nv dv = \eta^2 \int \frac{\sin}{\cos} nv dv - \frac{d\eta^2}{dv} \iint \frac{\sin}{\cos} nv dv^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int \eta^2 \sin(nv \pm 2v) dv &= \eta^2 \cos 2\Pi \int \sin(nv \pm 2v) dv \mp \eta^2 \sin 2\Pi \int \cos(nv \pm 2v) dv \\ &\quad - \frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \iint \sin(nv \pm 2v) dv^2 \pm \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \iint \cos(nv \pm 2v) dv^2 \\ \int \eta^2 \cos(nv \pm 2v) dv &= \eta^2 \cos 2\Pi \int \cos(nv \pm 2v) dv \pm \eta^2 \sin 2\Pi \int \sin(nv \pm 2v) dv \\ &\quad - \frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \iint \cos(nv \pm 2v) dv^2 \mp \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \iint \sin(nv \pm 2v) dv^2. \end{aligned} \right.$$

Für den störenden Planeten gelten diese Formeln unter Berücksichtigung folgender Substitution: $\eta \parallel \eta'$, $\Pi \parallel \Pi_1$, $v \parallel v_1$.

$$\left\{ \begin{aligned} \int \eta \eta' \sin[nv \pm (v + v_1)] dv &= \eta \eta' \cos(\Pi + \Pi_1) \int \sin(nv \pm 2v) dv \mp \eta \eta' \sin(\Pi + \Pi_1) \int \cos(nv \pm 2v) dv \\ &\quad - \frac{d\eta \eta' \cos(\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \sin(nv \pm 2v) dv^2 \pm \frac{d\eta \eta' \sin(\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \cos(nv \pm 2v) dv^2 \\ \int \eta \eta' \cos[nv \pm (v + v_1)] dv &= \eta \eta' \cos(\Pi + \Pi_1) \int \cos(nv \pm 2v) dv \pm \eta \eta' \sin(\Pi + \Pi_1) \int \sin(nv \pm 2v) dv \\ &\quad - \frac{d\eta \eta' \cos(\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \cos(nv \pm 2v) dv^2 \mp \frac{d\eta \eta' \sin(\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \sin(nv \pm 2v) dv^2 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int \eta \eta' \sin[nv \pm (v - v_1)] dv &= \eta \eta' \cos(\Pi - \Pi_1) \int \sin nv dv \mp \eta \eta' \sin(\Pi - \Pi_1) \int \cos nv dv \\ &\quad - \frac{d\eta \eta' \cos(\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \sin nv dv^2 \pm \frac{d\eta \eta' \sin(\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \cos nv dv^2 \\ \int \eta \eta' \cos[nv \pm (v - v_1)] dv &= \eta \eta' \cos(\Pi - \Pi_1) \int \cos nv dv \pm \eta \eta' \sin(\Pi - \Pi_1) \int \sin nv dv \\ &\quad - \frac{d\eta \eta' \cos(\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \cos nv dv^2 \mp \frac{d\eta \eta' \sin(\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \sin nv dv^2. \end{aligned} \right.$$

Die Formeln gelten für die linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Den Neigungsteil erhält man durch die Substitution:

$$\eta \parallel \sin j \text{ und } \eta' \parallel \sin j', \quad \Pi \parallel \sigma \text{ und } \Pi_1 \parallel \sigma_1, \quad v \parallel \mathfrak{v} \text{ und } v_1 \parallel \mathfrak{v}_1.$$

Für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung in R gelten folgende Formeln, jedoch nur bei Anwendung der Variation der Parameter:

$$(95) \quad \int \eta^2 \frac{\sin}{\cos} (nw \pm v) dv = \eta^2 \int \frac{\sin}{\cos} (nw \pm v) dv - \frac{d\eta^2}{dv} \iint \frac{\sin}{\cos} (nw \pm v) dv^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int \eta^2 \sin \left[nw \pm \left(2v \begin{smallmatrix} +v \\ -v \end{smallmatrix} \right) \right] dv &= \eta^2 \cos 2\Pi \int \sin \left(nw \begin{smallmatrix} \pm 3v \\ \pm v \end{smallmatrix} \right) dv \mp \eta^2 \sin 2\Pi \int \cos \left(nw \begin{smallmatrix} \pm 3v \\ \pm v \end{smallmatrix} \right) dv \\ &\quad - \frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \iint \sin \left(nw \begin{smallmatrix} \pm 3v \\ \pm v \end{smallmatrix} \right) dv^2 \pm \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \iint \cos \left(nw \begin{smallmatrix} \pm 3v \\ \pm v \end{smallmatrix} \right) dv^2 \\ \int \eta^2 \cos \left[nw \pm \left(2v \begin{smallmatrix} +v \\ -v \end{smallmatrix} \right) \right] dv &= \eta^2 \cos 2\Pi \int \cos \left(nw \begin{smallmatrix} \pm 3v \\ \pm v \end{smallmatrix} \right) dv \pm \eta^2 \sin 2\Pi \int \sin \left(nw \begin{smallmatrix} \pm 3v \\ \pm v \end{smallmatrix} \right) dv \\ &\quad - \frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \iint \cos \left(nw \begin{smallmatrix} \pm 3v \\ \pm v \end{smallmatrix} \right) dv^2 \mp \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \iint \sin \left(nw \begin{smallmatrix} \pm 3v \\ \pm v \end{smallmatrix} \right) dv^2. \end{aligned} \right.$$

Für den störenden Planeten hat man zu substituieren:

$$\eta \parallel \eta', \quad \Pi \parallel \Pi_1, \quad v \parallel v_1.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int \eta \eta' \sin \left[nw \pm \left(v + v_1 \begin{smallmatrix} +v \\ -v \end{smallmatrix} \right) \right] dv &= \eta \eta' \cos (\Pi + \Pi_1) \int \sin \left(nw \begin{smallmatrix} \pm 3v \\ \pm v \end{smallmatrix} \right) dv \mp \eta \eta' \sin (\Pi + \Pi_1) \int \cos \left(nw \begin{smallmatrix} \pm 3v \\ \pm v \end{smallmatrix} \right) dv \\ &\quad - \frac{d\eta \eta' \cos (\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \sin \left(nw \begin{smallmatrix} \pm 3v \\ \pm v \end{smallmatrix} \right) dv^2 \pm \frac{d\eta \eta' \sin (\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \cos \left(nw \begin{smallmatrix} \pm 3v \\ \pm v \end{smallmatrix} \right) dv^2 \\ \int \eta \eta' \cos \left[nw \pm \left(v + v_1 \begin{smallmatrix} +v \\ -v \end{smallmatrix} \right) \right] dv &= \eta \eta' \cos (\Pi + \Pi_1) \int \cos \left(nw \begin{smallmatrix} \pm 3v \\ \pm v \end{smallmatrix} \right) dv \pm \eta \eta' \sin (\Pi + \Pi_1) \int \sin \left(nw \begin{smallmatrix} \pm 3v \\ \pm v \end{smallmatrix} \right) dv \\ &\quad - \frac{d\eta \eta' \cos (\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \cos \left(nw \begin{smallmatrix} \pm 3v \\ \pm v \end{smallmatrix} \right) dv^2 \mp \frac{d\eta \eta' \sin (\Pi + \Pi_1)}{dv} \iint \sin \left(nw \begin{smallmatrix} \pm 3v \\ \pm v \end{smallmatrix} \right) dv^2 \\ \int \eta \eta' \sin \left[nw \pm \left(v - v_1 \begin{smallmatrix} +v \\ -v \end{smallmatrix} \right) \right] dv &= \eta \eta' \cos (\Pi - \Pi_1) \int \sin \left(nw \begin{smallmatrix} \pm v \\ \mp v \end{smallmatrix} \right) dv \mp \eta \eta' \sin (\Pi - \Pi_1) \int \cos \left(nw \begin{smallmatrix} \pm v \\ \mp v \end{smallmatrix} \right) dv \\ &\quad - \frac{d\eta \eta' \cos (\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \sin \left(nw \begin{smallmatrix} \pm v \\ \mp v \end{smallmatrix} \right) dv^2 \pm \frac{d\eta \eta' \sin (\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \cos \left(nw \begin{smallmatrix} \pm v \\ \mp v \end{smallmatrix} \right) dv^2 \\ \int \eta \eta' \cos \left[nw \pm \left(v - v_1 \begin{smallmatrix} +v \\ -v \end{smallmatrix} \right) \right] dv &= \eta \eta' \cos (\Pi - \Pi_1) \int \cos \left(nw \begin{smallmatrix} \pm v \\ \mp v \end{smallmatrix} \right) dv \pm \eta \eta' \sin (\Pi - \Pi_1) \int \sin \left(nw \begin{smallmatrix} \pm v \\ \mp v \end{smallmatrix} \right) dv \\ &\quad - \frac{d\eta \eta' \cos (\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \cos \left(nw \begin{smallmatrix} \pm v \\ \mp v \end{smallmatrix} \right) dv^2 \mp \frac{d\eta \eta' \sin (\Pi - \Pi_1)}{dv} \iint \sin \left(nw \begin{smallmatrix} \pm v \\ \mp v \end{smallmatrix} \right) dv^2. \end{aligned} \right.$$

Den Neigungsteil erhält man durch die Substitution:

$$\eta \parallel \sin j \text{ und } \eta' \parallel \sin j', \quad \Pi \parallel \sigma \text{ und } \Pi_1 \parallel \sigma_1, \quad v \parallel \mathfrak{v} \text{ und } v_1 \parallel \mathfrak{v}_1.$$

Für die Differentialgleichung für \mathfrak{B} gelten folgende Formeln:

$$(96) \left\{ \begin{aligned} \int \eta \sin j \sin \left[nw \pm \left(v + v \frac{+v}{-v} \right) \right] dv &= \eta \sin j \cos (\Pi + \sigma) \int \sin \left(nw \frac{\pm 3v}{\pm v} \right) dv \mp \eta \sin j \sin (\Pi + \sigma) \int \cos \left(nw \frac{\pm 3v}{\pm v} \right) dv \\ &\quad - \frac{d\eta \sin j \cos (\Pi + \sigma)}{dv} \iint \sin \left(nw \frac{\pm 3v}{\pm v} \right) dv^2 \pm \frac{d\eta \sin j \sin (\Pi + \sigma)}{dv} \iint \cos \left(nw \frac{\pm 3v}{\pm v} \right) dv^2 \\ \int \eta \sin j \cos \left[nw \pm \left(v + v \frac{+v}{-v} \right) \right] dv &= \eta \sin j \cos (\Pi + \sigma) \int \cos \left(nw \frac{\pm 3v}{\pm v} \right) dv \pm \eta \sin j \sin (\Pi + \sigma) \int \sin \left(nw \frac{\pm 3v}{\pm v} \right) dv \\ &\quad - \frac{d\eta \sin j \cos (\Pi + \sigma)}{dv} \iint \cos \left(nw \frac{\pm 3v}{\pm v} \right) dv^2 \mp \frac{d\eta \sin j \sin (\Pi + \sigma)}{dv} \iint \sin \left(nw \frac{\pm 3v}{\pm v} \right) dv^2 \\ \int \eta \sin j \sin \left[nw \pm \left(v - v \frac{+v}{-v} \right) \right] dv &= \eta \sin j \cos (\Pi - \sigma) \int \sin \left(nw \frac{\pm v}{\mp v} \right) dv \mp \eta \sin j \sin (\Pi - \sigma) \int \cos \left(nw \frac{\pm v}{\mp v} \right) dv \\ &\quad - \frac{d\eta \sin j \cos (\Pi - \sigma)}{dv} \iint \sin \left(nw \frac{\pm v}{\mp v} \right) dv^2 \pm \frac{d\eta \sin j \sin (\Pi - \sigma)}{dv} \iint \cos \left(nw \frac{\pm v}{\mp v} \right) dv^2 \\ \int \eta \sin j \cos \left[nw \pm \left(v - v \frac{+v}{-v} \right) \right] dv &= \eta \sin j \cos (\Pi - \sigma) \int \cos \left(nw \frac{\pm v}{\mp v} \right) dv \pm \eta \sin j \sin (\Pi - \sigma) \int \sin \left(nw \frac{\pm v}{\mp v} \right) dv \\ &\quad - \frac{d\eta \sin j \cos (\Pi - \sigma)}{dv} \iint \cos \left(nw \frac{\pm v}{\mp v} \right) dv^2 \mp \frac{d\eta \sin j \sin (\Pi - \sigma)}{dv} \iint \sin \left(nw \frac{\pm v}{\mp v} \right) dv^2 \end{aligned} \right.$$

Die übrigen Formeln erhält man durch die Substitutionen:

$$\eta \parallel \eta', \quad \Pi \parallel \Pi_1, \quad v \parallel v_1, \quad \text{sowie } j \parallel j', \quad \sigma \parallel \sigma', \quad v \parallel v_1.$$

3) Für die Anwendung der obigen Formeln ist noch die Kenntnis der Differentialquotienten dieser langperiodischen Funktionen $\eta \frac{\sin}{\cos} \Pi$, $\sin j \frac{\sin}{\cos} \sigma$ etc. nötig, sowie die ihrer Quadrate und Produkte. Zu diesem Zwecke haben wir ihre Definitionsgleichungen (Formel 10) zu quadrieren und zu multiplizieren. Wir wollen hier jedoch gleich die Differentialformeln geben, wobei wir uns einer abgekürzten Bezeichnung bedienen. Wir wollen bei diesen Funktionen für den gestörten Körper den störenden Einfluss von Jupiter, Saturn und Uranus, und für den störenden Körper, — Jupiter in unserem Falle, — den Einfluss von Uranus und Neptun berücksichtigen. Demnach schreiben sich die Gleichungen (10):

$$\eta \frac{\cos}{\sin} \Pi = \kappa \frac{\cos}{\sin} \omega + \kappa_1 \frac{\cos}{\sin} \omega_1 + \kappa_2 \frac{\cos}{\sin} \omega_2 + \kappa_3 \frac{\cos}{\sin} \omega_3 = \kappa \frac{\cos}{\sin} \omega + \sum \kappa_n \frac{\cos}{\sin} \omega_n$$

$$\eta' \frac{\cos}{\sin} \Pi_1 = \kappa' \frac{\cos}{\sin} \omega_1 + \kappa'_2 \frac{\cos}{\sin} \omega_2 + \kappa'_3 \frac{\cos}{\sin} \omega_3 = \sum \kappa'_n \frac{\cos}{\sin} \omega_n.$$

κ' und Γ' in ω_1 sind die Integrationskonstanten der Jupiterbewegung. Die Formeln für j und σ lauten ganz analog. Wir wollen nun aus einem ganz be-

stimmten Grunde κ und ω sowie $\sin \iota$ und ϑ aus diesen Summen herausnehmen. Da bei den Quadraten und Produkten Doppelsummen auftreten, wollen wir diese so zerlegen, dass wir das indexfreie Glied für sich behalten, dass wir ferner mit „ $\sum_{m,n}$ “ eine dreigliedrige Summe bezeichnen wollen, wo n nur die Werte 1, 2, 3 ohne Wiederholung erhalten darf. Z. B.

$$\sum s_n \kappa_n \kappa'_n \frac{\sin 2\omega_n}{\cos} = s_1 \kappa_1 \kappa'_1 \frac{\sin 2\omega_1}{\cos} + s_2 \kappa_2 \kappa'_2 \frac{\sin 2\omega_2}{\cos} + s_3 \kappa_3 \kappa'_3 \frac{\sin 2\omega_3}{\cos};$$

dagegen wollen wir mit dem Symbol „ $\mathbf{S}_{m,n}$ “ eine specielle dreigliedrige Summe bezeichnen, derart, dass nur zu setzen ist $m \neq n$ und für $m = 1$, $n = 2$ und $n = 3$, für $m = 2$ nur $n = 3$. Keine anderen Werte der Indices sind zu verwenden. Z. B. ist:

$$\mathbf{S}(s_m - s_n) \kappa'_m \kappa'_n \sin(\omega_m - \omega_n) = (s_1 - s_2) \kappa'_1 \kappa'_2 \sin(\omega_1 - \omega_2) + (s_1 - s_3) \kappa'_1 \kappa'_3 \sin(\omega_1 - \omega_3) \\ + (s_2 - s_3) \kappa'_2 \kappa'_3 \sin(\omega_2 - \omega_3).$$

Die Formeln lassen sich dann sehr bequem schreiben, besonders bei der Quadrierung etc. Die Differentialformeln für die erste Potenz gehen ohne weiteres aus (10) hervor, die für die zweite Potenz sind:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta^2}{dv} &= -2 \sum (s - s_n) \kappa \kappa_n \sin(\omega - \omega_n) - 2\mathbf{S}(s_m - s_n) \kappa_m \kappa_n \sin(\omega_m - \omega_n) \\ \frac{d\eta'^2}{dv} &= -2\mathbf{S}(s_m - s_n) \kappa'_m \kappa'_n \sin(\omega_m - \omega_n) \\ \frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} &= \mp 2s \kappa^2 \frac{\sin 2\omega}{\cos} \mp 2 \sum (s + s_n) \kappa \kappa_n \frac{\sin(\omega + \omega_n)}{\cos} \mp 2 \sum s_n \kappa_n^2 \frac{\sin 2\omega_n}{\cos} \mp 2\mathbf{S}(s_m + s_n) \kappa_m \kappa_n \frac{\sin(\omega_m + \omega_n)}{\cos} \\ \frac{d\eta'^2 \cos 2\Pi_1}{dv} &= \mp 2 \sum s_n \kappa_n^2 \frac{\sin 2\omega_n}{\cos} \mp 2\mathbf{S}(s_m + s_n) \kappa'_m \kappa'_n \frac{\sin(\omega_m + \omega_n)}{\cos} \\ \frac{d\eta\eta' \cos(\Pi + \Pi_1)}{dv} &= \mp \sum (s + s_n) \kappa \kappa'_n \frac{\sin(\omega + \omega_n)}{\cos} \mp 2 \sum s_n \kappa_n \kappa'_n \frac{\sin 2\omega_n}{\cos} \mp \mathbf{S}(s_m + s_n) [\kappa_m \kappa'_n + \kappa_n \kappa'_m] \frac{\sin(\omega_m + \omega_n)}{\cos} \\ \frac{d\eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1)}{dv} &= - \sum (s - s_n) \kappa \kappa'_n \sin(\omega - \omega_n) - \mathbf{S}(s_m - s_n) [\kappa_m \kappa'_n + \kappa_n \kappa'_m] \sin(\omega_m - \omega_n) \\ \frac{d\eta\eta' \sin(\Pi - \Pi_1)}{dv} &= + \sum (s - s_n) \kappa \kappa'_n \cos(\omega - \omega_n) + \mathbf{S}(s_m - s_n) [\kappa_m \kappa'_n - \kappa_n \kappa'_m] \cos(\omega_m - \omega_n); \end{aligned} \right\}$$

und für den Neigungsteil:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \sin^2 j}{dv} &= 2 \sum (\tau - \tau_n) \sin \iota \sin \iota_n \sin(\vartheta - \vartheta_n) + 2\mathbf{S}(\tau_m - \tau_n) \sin \iota_m \sin \iota_n \sin(\vartheta_m - \vartheta_n) \\ \frac{d \sin^2 j'}{dv} &= 2\mathbf{S}(\tau_m - \tau_n) \sin \iota'_m \sin \iota'_n \sin(\vartheta_m - \vartheta_n) \end{aligned} \right\}$$

$$(98) \left\{ \begin{aligned} \frac{d \sin^2 j \frac{\cos 2\sigma}{\sin 2\sigma}}{dv} &= \pm 2\tau \sin^2 \iota \frac{\sin 2\vartheta}{\cos} \pm 2 \sum (\tau + \tau_n) \sin \iota \sin \iota_n \frac{\sin (\vartheta + \vartheta_n)}{\cos} \pm 2 \sum \tau_n \sin^2 \iota_n \frac{\sin 2\vartheta_n}{\cos} \\ &\quad \pm 2\mathbf{S}(\tau_m + \tau_n) \sin \iota_m \sin \iota_n \frac{\sin (\vartheta_m + \vartheta_n)}{\cos} \\ \frac{d \sin^2 j' \frac{\cos 2\sigma_1}{\sin 2\sigma_1}}{dv} &= \pm 2 \sum \tau_n \sin^2 \iota'_n \frac{\sin 2\vartheta_n}{\cos} \pm 2\mathbf{S}(\tau_m + \tau_n) \sin \iota'_m \sin \iota'_n \frac{\sin (\vartheta_m + \vartheta_n)}{\cos} \\ \frac{d \sin j \sin j' \frac{\cos (\sigma + \sigma_1)}{\sin (\sigma + \sigma_1)}}{dv} &= \pm \sum (\tau + \tau_n) \sin \iota \sin \iota'_n \frac{\sin (\vartheta + \vartheta_n)}{\cos} \pm 2 \sum \tau_n \sin \iota_n \sin \iota'_n \frac{\sin 2\vartheta_n}{\cos} \\ &\quad \pm \mathbf{S}(\tau_m + \tau_n) [\sin \iota_m \sin \iota'_m + \sin \iota_n \sin \iota'_n] \frac{\sin (\vartheta_m + \vartheta_n)}{\cos} \\ \frac{d \sin j \sin j' \frac{\cos (\sigma - \sigma_1)}{\sin (\sigma - \sigma_1)}}{dv} &= \sum (\tau - \tau_n) \sin \iota \sin \iota'_n \sin (\vartheta - \vartheta_n) + \mathbf{S}(\tau_m - \tau_n) [\sin \iota_m \sin \iota'_m + \sin \iota_n \sin \iota'_n] \sin (\vartheta_m - \vartheta_n) \\ \frac{d \sin j \sin j' \frac{\sin (\sigma - \sigma_1)}{\sin (\sigma - \sigma_1)}}{dv} &= - \sum (\tau - \tau_n) \sin \iota \sin \iota'_n \cos (\vartheta - \vartheta_n) - \mathbf{S}(\tau_m - \tau_n) [\sin \iota_m \sin \iota'_m - \sin \iota_n \sin \iota'_n] \cos (\vartheta_m - \vartheta_n) \end{aligned} \right.$$

Für die Differentialgleichung in § ist erforderlich:

$$(99) \left\{ \begin{aligned} \frac{d\eta \sin j \frac{\cos (\Pi + \sigma)}{\sin (\Pi + \sigma)}}{dv} &= \mp (s - \tau) \kappa \sin \iota \frac{\sin (\omega + \vartheta)}{\cos} \mp \sum (s_n - \tau_n) \kappa_n \sin \iota_n \frac{\sin (\omega_n + \vartheta_n)}{\cos} \mp \sum (s - \tau_n) \kappa \sin \iota_n \frac{\sin (\omega + \vartheta)}{\cos} \\ &\quad \mp \sum (s_n - \tau_n) \kappa_n \sin \iota_n \frac{\sin (\omega_n + \vartheta_n)}{\cos} \mp \mathbf{S}(s_m - \tau_m) \kappa_m \sin \iota_m \frac{\sin (\omega_m + \vartheta_m)}{\cos} \mp \mathbf{S}(s_n - \tau_n) \kappa_n \sin \iota_n \frac{\sin (\omega_n + \vartheta_n)}{\cos} \\ \frac{d\eta \sin j \frac{\cos (\Pi - \sigma)}{\sin (\Pi - \sigma)}}{dv} &= \mp (s + \tau) \kappa \sin \iota \frac{\sin (\omega - \vartheta)}{\cos} \mp \sum (s_n + \tau_n) \kappa_n \sin \iota_n \frac{\sin (\omega_n - \vartheta_n)}{\cos} \mp \sum (s + \tau_n) \kappa \sin \iota_n \frac{\sin (\omega - \vartheta)}{\cos} \\ &\quad \mp \sum (s_n + \tau_n) \kappa_n \sin \iota_n \frac{\sin (\omega_n - \vartheta_n)}{\cos} \mp \mathbf{S}(s_m + \tau_m) \kappa_m \sin \iota_m \frac{\sin (\omega_m - \vartheta_m)}{\cos} \mp \mathbf{S}(s_n + \tau_n) \kappa_n \sin \iota_n \frac{\sin (\omega_n - \vartheta_n)}{\cos} \\ \frac{d\eta' \sin j' \frac{\cos (\Pi_1 + \sigma_1)}{\sin (\Pi_1 + \sigma_1)}}{dv} &= \mp \sum (s_n - \tau_n) \kappa'_n \sin \iota'_n \frac{\sin (\omega_n + \vartheta_n)}{\cos} \mp \mathbf{S}(s_m - \tau_m) \kappa'_m \sin \iota'_m \frac{\sin (\omega_m + \vartheta_m)}{\cos} \\ &\quad \mp \mathbf{S}(s_n - \tau_n) \kappa'_n \sin \iota'_n \frac{\sin (\omega_n + \vartheta_n)}{\cos} \\ \frac{d\eta' \sin j' \frac{\cos (\Pi_1 - \sigma_1)}{\sin (\Pi_1 - \sigma_1)}}{dv} &= \mp \sum (s_n + \tau_n) \kappa'_n \sin \iota'_n \frac{\sin (\omega_n - \vartheta_n)}{\cos} \mp \mathbf{S}(s_m + \tau_m) \kappa'_m \sin \iota'_m \frac{\sin (\omega_m - \vartheta_m)}{\cos} \\ &\quad \mp \mathbf{S}(s_n + \tau_n) \kappa'_n \sin \iota'_n \frac{\sin (\omega_n - \vartheta_n)}{\cos} \end{aligned} \right.$$

$$(99) \left\{ \begin{aligned} \frac{d\eta' \sin j \frac{\cos}{\sin} (\Pi_1 + \sigma)}{dv} &= \mp \sum (s_n - \tau) \kappa'_n \sin \iota \frac{\sin}{\cos} (\omega_n + \vartheta) \mp \sum (s_n - \tau_n) \kappa'_n \sin \iota_n \frac{\sin}{\cos} (\omega_n + \vartheta_n) \\ &\quad \mp \mathbf{S} (s_m - \tau_n) \kappa'_m \sin \iota_n \frac{\sin}{\cos} (\omega_m + \vartheta_n) \mp \mathbf{S} (s_n - \tau_m) \kappa'_n \sin \iota_m \frac{\sin}{\cos} (\omega_n + \vartheta_m) \\ \frac{d\eta' \sin j \frac{\cos}{\sin} (\Pi_1 - \sigma)}{dv} &= \mp \sum (s_n + \tau) \kappa'_n \sin \iota \frac{\sin}{\cos} (\omega_n - \vartheta) \mp \sum (s_n + \tau_n) \kappa'_n \sin \iota_n \frac{\sin}{\cos} (\omega_n - \vartheta_n) \\ &\quad \mp \mathbf{S} (s_m + \tau_n) \kappa'_m \sin \iota_n \frac{\sin}{\cos} (\omega_m - \vartheta_n) \mp \mathbf{S} (s_n + \tau_m) \kappa'_n \sin \iota_m \frac{\sin}{\cos} (\omega_n - \vartheta_m) \\ \frac{d\eta \sin j' \frac{\cos}{\sin} (\Pi + \sigma_1)}{dv} &= \mp \sum (s - \tau_n) \kappa \sin \iota'_n \frac{\sin}{\cos} (\omega + \vartheta_n) \mp \sum (s_n - \tau_n) \kappa_n \sin \iota'_n \frac{\sin}{\cos} (\omega_n + \vartheta_n) \\ &\quad \mp \mathbf{S} (s_m - \tau_n) \kappa_m \sin \iota'_n \frac{\sin}{\cos} (\omega_m + \vartheta_n) \mp \mathbf{S} (s_n - \tau_m) \kappa_n \sin \iota'_m \frac{\sin}{\cos} (\omega_n + \vartheta_m) \\ \frac{d\eta \sin j' \frac{\cos}{\sin} (\Pi - \sigma_1)}{dv} &= \mp \sum (s + \tau_n) \kappa \sin \iota'_n \frac{\sin}{\cos} (\omega - \vartheta_n) \mp \sum (s_n + \tau_n) \kappa_n \sin \iota'_n \frac{\sin}{\cos} (\omega_n - \vartheta_n) \\ &\quad \mp \mathbf{S} (s_m + \tau_n) \kappa_m \sin \iota'_n \frac{\sin}{\cos} (\omega_m - \vartheta_n) \mp \mathbf{S} (s_n + \tau_m) \kappa_n \sin \iota'_m \frac{\sin}{\cos} (\omega_n - \vartheta_m). \end{aligned} \right.$$

Wir wollen hier noch einige für die Integration in den A-Gliedern wichtige Hilfsformeln geben. Dort treten η^2 , $\sin^2 j$ sowie $\eta\eta' \frac{\sin}{\cos} (v - v_1) = \mp \eta\eta' \frac{\sin}{\cos} (\Pi - \Pi_1)$ auf, und wir werden an ihre Stelle die Ausdrücke (10) sowie ihre Quadrate und Produkte setzen und diese integrieren. Die betreffenden Integralformeln lauten:

$$(100) \left\{ \begin{aligned} \int \eta^2 dv &= \kappa^2 v + v \sum \kappa_n^2 + 2 \sum \frac{\kappa \kappa_n}{s - s_n} \sin (\omega - \omega_n) + 2 \mathbf{S} \frac{\kappa_m \kappa_n}{s_m - s_n} \sin (\omega_m - \omega_n) \\ \int \eta'^2 dv &= v \sum \kappa_n'^2 + 2 \mathbf{S} \frac{\kappa'_m \kappa'_n}{s_m - s_n} \sin (\omega_m - \omega_n) \\ \int \eta\eta' \cos (\Pi - \Pi_1) dv &= v \sum \kappa_n \kappa'_n + \sum \frac{\kappa \kappa'_n}{s - s_n} \sin (\omega - \omega_n) + \mathbf{S} \frac{\kappa_m \kappa'_n + \kappa_n \kappa'_m}{s_m - s_n} \sin (\omega_m - \omega_n) \\ \int \eta\eta' \sin (\Pi - \Pi_1) dv &= - \sum \frac{\kappa \kappa'_n}{s - s_n} \cos (\omega - \omega_n) - \mathbf{S} \frac{\kappa_m \kappa'_n - \kappa_n \kappa'_m}{s_m - s_n} \cos (\omega_m - \omega_n) \end{aligned} \right.$$

$$(101) \left\{ \begin{aligned} \int \sin^2 j \, dv &= [\sin^2 \iota + \sum \sin^2 \iota_n] v - 2 \sum \frac{\sin \iota \sin \iota_n}{\tau - \tau_n} \sin(\vartheta - \vartheta_n) - 2 \mathbf{S} \frac{\sin \iota_m \sin \iota_n}{\tau_m - \tau_n} \sin(\vartheta_m - \vartheta_n) \\ \int \sin^2 j' \, dv &= v \sum \sin^2 \iota'_n - 2 \mathbf{S} \frac{\sin \iota'_m \sin \iota'_n}{\tau_m - \tau_n} \sin(\vartheta_m - \vartheta_n) \\ \int \sin j \sin j' \cos(\sigma - \sigma_1) \, dv &= v \sum \sin \iota_n \sin \iota'_n - \sum \frac{\sin \iota \sin \iota'_n}{\tau - \tau_n} \sin(\vartheta - \vartheta_n) - \mathbf{S} \frac{\sin \iota_m \sin \iota'_n + \sin \iota_n \sin \iota'_m}{\tau_m - \tau_n} \sin(\vartheta_m - \vartheta_n) \\ \int \sin j \sin j' \sin(\sigma - \sigma_1) \, dv &= \sum \frac{\sin \iota \sin \iota'_n}{\tau - \tau_n} \cos(\vartheta - \vartheta_n) + \mathbf{S} \frac{\sin \iota_m \sin \iota'_n - \sin \iota_n \sin \iota'_m}{\tau_m - \tau_n} \cos(\vartheta_m - \vartheta_n) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int \eta \sin j \frac{\cos}{\sin} (\Pi - \sigma) \, dv &= \pm \frac{\varkappa \sin \iota \sin}{\varsigma + \tau \cos} (\omega - \vartheta) \pm \sum \frac{\varkappa_n \sin \iota \sin}{\varsigma_n + \tau \cos} (\omega_n - \vartheta) \pm \sum \frac{\varkappa \sin \iota_n \sin}{\varsigma + \tau_n \cos} (\omega - \vartheta_n) \\ &\pm \sum \frac{\varkappa_n \sin \iota_n \sin}{\varsigma_n + \tau_n \cos} (\omega_n - \vartheta_n) \pm \mathbf{S} \frac{\varkappa_m \sin \iota_n \sin}{\varsigma_m + \tau_n \cos} (\omega_m - \vartheta_n) \pm \mathbf{S} \frac{\varkappa_n \sin \iota_m \sin}{\varsigma_n + \tau_m \cos} (\omega_n - \vartheta_m) \\ \int \eta' \sin j' \frac{\cos}{\sin} (\Pi_1 - \sigma_1) \, dv &= \pm \sum \frac{\varkappa'_n \sin \iota'_n \sin}{\varsigma_n + \tau_n \cos} (\omega_n - \vartheta_n) \pm \mathbf{S} \frac{\varkappa'_m \sin \iota'_n \sin}{\varsigma_m + \tau_n \cos} (\omega_m - \vartheta_n) \pm \mathbf{S} \frac{\varkappa'_n \sin \iota'_m \sin}{\varsigma_n + \tau_m \cos} (\omega_n - \vartheta_m) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int \eta' \sin j \frac{\cos}{\sin} (\Pi_1 - \sigma) \, dv &= \pm \sum \frac{\varkappa'_n \sin \iota \sin}{\varsigma_n + \tau \cos} (\omega_n - \vartheta) \pm \sum \frac{\varkappa'_m \sin \iota_n \sin}{\varsigma_n + \tau_n \cos} (\omega_n - \vartheta_n) \pm \mathbf{S} \frac{\varkappa'_m \sin \iota_n \sin}{\varsigma_m + \tau_n \cos} (\omega_m - \vartheta_n) \\ &\pm \mathbf{S} \frac{\varkappa'_n \sin \iota_m \sin}{\varsigma_n + \tau_m \cos} (\omega_n - \vartheta_m) \\ \int \eta \sin j' \frac{\cos}{\sin} (\Pi - \sigma_1) \, dv &= \pm \sum \frac{\varkappa \sin \iota'_n \sin}{\varsigma + \tau_n \cos} (\omega - \vartheta_n) \pm \sum \frac{\varkappa_n \sin \iota'_n \sin}{\varsigma_n + \tau_n \cos} (\omega_n - \vartheta_n) \pm \mathbf{S} \frac{\varkappa_m \sin \iota'_n \sin}{\varsigma_m + \tau_n \cos} (\omega_m - \vartheta_n) \\ &\pm \mathbf{S} \frac{\varkappa_n \sin \iota'_m \sin}{\varsigma_n + \tau_m \cos} (\omega_n - \vartheta_m). \end{aligned} \right.$$

Für die Annahme einer elliptischen Jupiterbewegung ist in der Formel ausser \varkappa selbst nur $n = 1$ in $\varkappa_n, \varkappa'_n$ etc. zu nehmen, und es fallen die mit den Symbolen \mathbf{S} bezeichneten Summen überall fort, so wird:

$$\int \eta^2 \, dv = [\varkappa^2 + \varkappa_1^2] v + \frac{2\varkappa\varkappa_1}{\varsigma} \sin(\omega - \omega_1).$$

§ 2. Die Reihe der exargumentalen Glieder bis zum dritten Grade inclusive.

4) Wir beabsichtigten die exargumentalen Glieder aller der Formen mitzunehmen, welche durch einen kleinen Divisor vergrößert werden. Demnach müssten wir in R schon mit dem nullten Grade beginnen, in S und W dagegen mit dem ersten. Wir werden aber auch hier mit dem nullten Grade anfangen, obwohl er im Integral S rein erster Ordnung, also der exargumentale Teil in S v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ wird, in Hinsicht auf unsere Genauigkeitsgrenze.

Wir beginnen wieder mit S . Die C- und D-Glieder sind hier:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dv} = & -(\alpha_1) \sin 2w - (\alpha_2) \eta \sin(2w - v) & -(\alpha_4) \eta \sin(4w - v) \\ & -(\alpha_3) \eta' \sin(2w - v_1) & -(\alpha_5) \eta' \sin(4w - v_1) \\ & -(\alpha_{14}) \eta^2 \sin(4w - 2v) & -(\alpha_{30}) \sin^2 j \sin(4w - 2v) \\ & -(\alpha_{15}) \eta \eta' \sin(4w - v - v_1) & -(\alpha_{31}) \sin j \sin j' \sin(4w - v - v_1) \\ & -(\alpha_{16}) \eta'^2 \sin(4w - 2v_1) \text{ etc.} & -(\alpha_{32}) \sin^2 j' (4w - 2v_1) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Da aus den Gliedern zweiten Grades nur exargumentale dritten und höheren Grades entspringen, und wir hier die aus der Störungsfunktion herkommenden Teile dritten Grades, also solche v. d. Ord. m' , schon vernachlässigen, so werden wir jetzt nur die C-Glieder der Differentialgleichung berücksichtigen. Die übrigen würden exargumentale Glieder dritten Grades v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ geben. Die Klammern sollen anzeigen, dass hier der dem Integral entsprechende Koeffizient der Differentialgleichung gemeint ist; sie stehen als Abkürzung zur Vermeidung neuer Bezeichnungen. Integrieren wir nun nach Formel (92) und bedenken wir, dass wir den ersten Teil der Formeln schon im vorigen Kapitel behandelt haben, dass es also nur auf den exargumentalen Teil ankommt, und dass der Divisor $n(1-\mu_1)$ resp. $n(1-\mu_1) \pm k$ das Verschwinden der Klammern in den (α_k) bewirkt, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{pars } S_{1+2} = & -2\mu\alpha_1 \int \sin 2w \frac{d\bar{V}}{dv} dv - 2\mu\alpha_2 \int \eta \sin(2w - v) \frac{d\bar{V}}{dv} dv - 2\mu\alpha_3 \int \eta' \sin(2w - v_1) \frac{d\bar{V}}{dv} dv \\ & - 4\mu\alpha_4 \int \eta \sin(4w - v) \frac{d\bar{V}}{dv} dv - 4\mu\alpha_5 \int \eta' \sin(4w - v_1) \frac{d\bar{V}}{dv} dv \\ \text{pars } S_3 = & -2\mu\alpha_{14} \int \eta^2 \sin(4w - 2v) \frac{d\bar{V}}{dv} dv - 2\mu\alpha_{15} \int \eta \eta' \sin(4w - v - v_1) \frac{d\bar{V}}{dv} dv - 2\mu\alpha_{16} \int \eta'^2 \sin(4w - 2v_1) \frac{d\bar{V}}{dv} dv \\ & - 2\mu\alpha_{30} \int \sin^2 j \sin(4w - 2v) \frac{d\bar{V}}{dv} dv - 2\mu\alpha_{31} \int \sin j \sin j' \sin(4w - v - v_1) \frac{d\bar{V}}{dv} dv - 2\mu\alpha_{32} \int \sin^2 j' \sin(4w - 2v_1) \frac{d\bar{V}}{dv} dv. \end{aligned}$$

Setzt man nun für $\frac{d\bar{V}}{dv}$ den in Formel (39) gegebenen Ansatz ein, so folgt, wenn man sofort die Reihen wieder zu charakteristischen und elementaren Gliedern komponiert und dann integriert:

$$\begin{aligned} \text{pars } S = & \frac{\mu\alpha_1\gamma_2}{1-\varepsilon} \eta \cos v & + \frac{\mu\alpha_1\gamma_2}{1+2\delta_1} \eta \cos(4w - v) \\ & + \frac{\mu\alpha_1\gamma_3}{1-\varepsilon_1} \eta' \cos v_1 & + \frac{\mu\alpha_1\gamma_3}{1+2\delta_1} \eta' \cos(4w - v_1) \\ + \frac{2\mu\alpha_4\gamma_2}{1+\delta_1} \eta^2 \cos 2w & + \frac{2\mu\alpha_5\gamma_2}{1+\delta_1} \eta \eta' \cos(2w + v - v_1) & + \frac{2\mu\alpha_4\gamma_3}{1+\delta_1} \eta \eta' \cos(2w - v + v_1) & + \frac{2\mu\alpha_5\gamma_3}{1+\delta_1} \eta'^2 \cos 2w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu a_1 \gamma_{14}}{1 - \delta_1} \eta^2 \cos(2w - 2v) & + \frac{\mu \alpha_2 \gamma_2}{2\delta_1} \eta^2 \cos(4w - 2v) & + \frac{\mu (a_1 \gamma_{14} + 2a_4 \gamma_2)}{1 + 3\delta_1} \eta^2 \cos(6w - 2v) \\
& + \frac{\mu a_1 \gamma_{15}}{1 - \delta_1} \eta \eta' \cos(2w - v - v_1) & + \frac{\mu (\alpha_2 \gamma_3 + \alpha_3 \gamma_2)}{2\delta_1} \eta \eta' \cos(4w - v - v_1) & + \frac{\mu (a_1 \gamma_{15} + 2(a_4 \gamma_3 + a_5 \gamma_2))}{1 + 3\delta_1} \eta \eta' \cos(6w - v - v_1) \\
& + \frac{\mu a_1 \gamma_{16}}{1 - \delta_1} \eta'^2 \cos(2w - 2v_1) & + \frac{\mu \alpha_3 \gamma_3}{2\delta_1} \eta'^2 \cos(4w - 2v_1) & + \frac{\mu (a_1 \gamma_{16} + 2a_5 \gamma_3)}{1 + 3\delta_1} \eta'^2 \cos(6w - 2v_1) \\
& & + \frac{\mu a_1 \gamma_{30}}{1 - \delta_1} \sin^2 j \cos(2w - 2v) & + \frac{\mu a_1 \gamma_{30}}{1 + 3\delta_1} \sin^2 j \cos(6w - 2v) \\
& & + \frac{\mu a_1 \gamma_{31}}{1 - \delta_1} \sin j \sin j' \cos(2w - v - v_1) & + \frac{\mu a_1 \gamma_{31}}{1 + 3\delta_1} \sin j \sin j' \cos(6w - v - v_1) \\
& & + \frac{\mu a_1 \gamma_{32}}{1 - \delta_1} \sin^2 j' \cos(2w - 2v_1) & + \frac{\mu a_1 \gamma_{32}}{1 + 3\delta_1} \sin^2 j' \cos(6w - 2v_1).
\end{aligned}$$

Ehe wir jedoch die Glieder dritten Grades zusammenstellen, wollen wir bedenken, dass solche noch aus den exargumentalen Gliedern zweiten Grades v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^3}$ entstehen. Wenden wir zur Ermittlung dieser Terme noch einmal die partielle Integration auf die Differentialgleichung für S an, so folgt:

$$\begin{aligned}
\text{pars } S_3 = & - \frac{2\mu^2 \alpha_2 \gamma_2}{\delta_1} \int \eta^2 \sin(4w - 2v) \frac{d\bar{V}}{dv} dv - 2 \frac{\mu^2 (\alpha_2 \gamma_3 + \alpha_3 \gamma_2)}{\delta_1} \int \eta \eta' \sin(4w - v - v_1) \frac{d\bar{V}}{dv} dv \\
& - 2 \frac{\mu^2 \alpha_3 \gamma_3}{\delta_1} \int \eta'^2 \sin(4w - 2v_1) \frac{d\bar{V}}{dv} dv.
\end{aligned}$$

Integriert man diesen und den vorigen Teil und vereinigt die zusammengehörigen Glieder, so kann man S_3 folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned}
(102) \quad S_3 = & \alpha_{40} \eta^3 \cos(2w - v) & + \alpha_{56} \eta^3 \cos(6w - 3v) \\
& + \alpha_{41} \eta^2 \eta' \cos(2w - 2v + v_1) & + \alpha_{57} \eta^2 \eta' \cos(6w - 2v - v_1) \\
& + \alpha_{42} \eta^2 \eta' \cos(2w - v_1) & + \alpha_{58} \eta \eta'^2 \cos(6w - v - 2v_1) \\
& + \alpha_{43} \eta \eta'^2 \cos(2w - v) & + \alpha_{59} \eta'^3 \cos(6w - 3v_1) \\
& + \alpha_{44} \eta \eta'^2 \cos(2w + v - 2v_1) \\
& + \alpha_{45} \eta'^3 \cos(2w - v_1) \\
& + \alpha_{64} \eta \sin^2 j \cos(2w - 2v + v) & + \alpha_{60} \eta \sin^2 j \cos(6w - 2v - v) \\
& + \alpha_{65} \eta' \sin^2 j \cos(2w - 2v + v_1) & + \alpha_{61} \eta' \sin^2 j \cos(6w - 2v - v_1) \\
& + \alpha_{66} \eta \sin j \sin j' \cos(2w - v - v_1 + v) & + \alpha_{62} \eta \sin j \sin j' \cos(6w - v - v_1 - v) \\
& + \alpha_{67} \eta' \sin j \sin j' \cos(2w - v - v_1 + v_1) & + \alpha_{63} \eta' \sin j \sin j' \cos(6w - v - v_1 - v_1) \\
& + \alpha_{68} \eta \sin^2 j' \cos(2w - 2v_1 + v) & + \alpha_{64} \eta \sin^2 j' \cos(6w - 2v_1 - v) \\
& + \alpha_{69} \eta' \sin^2 j' \cos(2w - 2v_1 + v_1) & + \alpha_{65} \eta' \sin^2 j' \cos(6w - 2v_1 - v_1).
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten werden:

$$(103) \quad \left. \begin{aligned} \alpha_{40} &= \frac{\mu(\alpha_{14}\gamma_2 - \alpha_2\gamma_{14})}{\delta_1} + \frac{\mu^2\alpha_2\gamma_2^2}{\delta_1^2} \\ \alpha_{41} &= \frac{\mu(\alpha_{14}\gamma_3 - \alpha_3\gamma_{14})}{\delta_1} + \frac{\mu^2\alpha_2\gamma_2\gamma_3}{\delta_1^2} \\ \alpha_{42} &= \frac{\mu(\alpha_{15}\gamma_2 - \alpha_2\gamma_{15})}{\delta_1} + \frac{\mu^2(\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2)\gamma_2}{\delta_1^2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha_{43} &= \frac{\mu(\alpha_{15}\gamma_3 - \alpha_3\gamma_{15})}{\delta_1} + \frac{\mu^2(\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2)\gamma_3}{\delta_1^2} \\ \alpha_{44} &= \frac{\mu(\alpha_{16}\gamma_2 - \alpha_2\gamma_{16})}{\delta_1} + \frac{\mu^3\alpha_3\gamma_2\gamma_3}{\delta_1^2} \\ \alpha_{45} &= \frac{\mu(\alpha_{16}\gamma_3 - \alpha_3\gamma_{16})}{\delta_1} + \frac{\mu^2\alpha_3\gamma_3^2}{\delta_1^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{56} &= \frac{\mu(\alpha_{14}\gamma_2 + \alpha_2\gamma_{14})}{3\delta_1} + \frac{\mu^2\alpha_2\gamma_2^2}{3\delta_1^2} \\ \alpha_{57} &= \frac{\mu(\alpha_{15}\gamma_2 + \alpha_2\gamma_{15} + \alpha_{14}\gamma_3 + \alpha_3\gamma_{14})}{3\delta_1} + \frac{\mu^2(2\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2)\gamma_2}{3\delta_1^2} \\ \alpha_{58} &= \frac{\mu(\alpha_{16}\gamma_2 + \alpha_2\gamma_{16} + \alpha_{15}\gamma_3 + \alpha_3\gamma_{15})}{3\delta_1} + \frac{\mu^2(\alpha_2\gamma_3 + 2\alpha_3\gamma_2)\gamma_3}{3\delta_1^2} \\ \alpha_{59} &= \frac{\mu(\alpha_{16}\gamma_3 + \alpha_3\gamma_{16})}{3\delta_1} + \frac{\mu^2\alpha_3\gamma_3^2}{3\delta_1^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{64} &= \frac{\mu(\alpha_{30}\gamma_2 - \alpha_2\gamma_{30})}{\delta_1} & \alpha_{90} &= \frac{\mu(\alpha_{30}\gamma_2 + \alpha_2\gamma_{30})}{3\delta_1} \\ \alpha_{65} &= \frac{\mu(\alpha_{30}\gamma_3 - \alpha_3\gamma_{30})}{\delta_1} & \alpha_{91} &= \frac{\mu(\alpha_{30}\gamma_3 + \alpha_3\gamma_{30})}{3\delta_1} \\ \alpha_{66} &= \frac{\mu(\alpha_{31}\gamma_2 - \alpha_2\gamma_{31})}{\delta_1} & \alpha_{92} &= \frac{\mu(\alpha_{31}\gamma_2 + \alpha_2\gamma_{31})}{3\delta_1} \\ \alpha_{67} &= \frac{\mu(\alpha_{31}\gamma_3 - \alpha_3\gamma_{31})}{\delta_1} & \alpha_{93} &= \frac{\mu(\alpha_{31}\gamma_3 + \alpha_3\gamma_{31})}{3\delta_1} \\ \alpha_{68} &= \frac{\mu(\alpha_{32}\gamma_2 - \alpha_2\gamma_{32})}{\delta_1} & \alpha_{94} &= \frac{\mu(\alpha_{32}\gamma_2 + \alpha_2\gamma_{32})}{3\delta_1} \\ \alpha_{69} &= \frac{\mu(\alpha_{32}\gamma_3 - \alpha_3\gamma_{32})}{\delta_1} & \alpha_{95} &= \frac{\mu(\alpha_{32}\gamma_3 + \alpha_3\gamma_{32})}{3\delta_1} \end{aligned}$$

Zu den Koeffizienten in S_1 und S_2 kommen nach der vorigen Formel noch die folgenden Zusätze hinzu:

$$(104) \quad \begin{aligned} \text{pars } a_1 &= \frac{\mu a_1 \gamma_2}{1 - \varsigma} & \text{pars } a_4 &= \frac{\mu a_1 \gamma_2}{1 + 2\delta_1} \\ \text{pars } a_2 &= \frac{\mu a_1 \gamma_3}{1 - \varsigma_1} & \text{pars } a_5 &= \frac{\mu a_1 \gamma_3}{1 + 2\delta_1} \end{aligned}$$

$$(105) \quad \begin{array}{l} \text{pars } a_7 = \frac{2\mu a_4 \gamma_2}{1 + \delta_1} \\ \text{pars } a_8 = \frac{2\mu a_5 \gamma_2}{1 + \delta_1} \\ \text{pars } a_9 = \frac{2\mu a_4 \gamma_3}{1 + \delta_1} \\ \text{pars } a_{10} = \frac{2\mu a_5 \gamma_3}{1 + \delta_1} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{pars } a_{11} = \frac{\mu a_1 \gamma_{14}}{1 - \delta_1} \\ \text{pars } a_{12} = \frac{\mu a_1 \gamma_{15}}{1 - \delta_1} \\ \text{pars } a_{13} = \frac{\mu a_1 \gamma_{16}}{1 - \delta_1} \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{pars } a_{14} = \frac{\mu \alpha_2 \gamma_2}{2\delta_1} \\ \text{pars } a_{15} = \frac{\mu (\alpha_2 \gamma_3 + \alpha_3 \gamma_2)}{2\delta_1} \\ \text{pars } a_{16} = \frac{\mu \alpha_3 \gamma_3}{2\delta_1} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{pars } a_{17} = \frac{\mu (a_1 \gamma_{14} + 2a_4 \gamma_2)}{1 + 3\delta_1} \\ \text{pars } a_{18} = \frac{\mu (a_1 \gamma_{15} + 2a_4 \gamma_3 + 2a_5 \gamma_2)}{1 + 3\delta_1} \\ \text{pars } a_{19} = \frac{\mu (a_1 \gamma_{16} + 2a_5 \gamma_3)}{1 + 3\delta_1} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{pars } a_{27} = \frac{\mu a_1 \gamma_{30}}{1 - \delta_1} \\ \text{pars } a_{28} = \frac{\mu a_1 \gamma_{31}}{1 - \delta_1} \\ \text{pars } a_{29} = \frac{\mu a_1 \gamma_{32}}{1 - \delta_1} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{pars } a_{33} = \frac{\mu a_1 \gamma_{30}}{1 + 3\delta_1} \\ \text{pars } a_{34} = \frac{\mu a_1 \gamma_{31}}{1 + 3\delta_1} \\ \text{pars } a_{35} = \frac{\mu a_1 \gamma_{32}}{1 + 3\delta_1} \end{array}$$

Damit wären die Koeffizienten in S , von den A-Gliedern abgesehen, vollständig und mit der vorgeschriebenen Genauigkeit ermittelt.

5) Die Ermittlung der exargumentalen Zusätze in R ist bedeutend umständlicher wegen der Differentialgleichung zweiter Ordnung, und weil in R_0 ein Glied v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ auftritt, also hier die exargumentalen Glieder bis zum dritten Grade und der vierten Ordnung geführt werden müssen. Nach den Formeln für die Variation der Parameter lauten die beiden particulären Integrale, indem man nach (91) partiell integriert und nur den exargumentalen Teil berücksichtigt und in den C-Gliedern $b_{2,1,0}^{-1}$ und $b_{2,0,1}^{-1}$ nur das Glied v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ mitnimmt:

$$(106) \quad \left. \begin{array}{l} g_1 \\ g_2 \end{array} \right\} = \frac{\mu b_{2,0,0}}{2 + \delta_1} \int \frac{\cos(2w+v)}{\sin} \frac{d\bar{V}}{dv} dv \pm \frac{\mu b_{2,0,0}}{\delta_1} \int \frac{\cos(2w-v)}{\sin} \frac{d\bar{V}}{dv} dv$$

$$+ \frac{2\mu \alpha_2}{1 + \delta_1} \int \eta \frac{\cos(2w-v+v)}{\sin} \frac{d\bar{V}}{dv} dv \mp \frac{2\mu \alpha_2}{1 - \delta_1} \int \eta \frac{\cos(2w-v-v)}{\sin} \frac{d\bar{V}}{dv} dv$$

$$+ \frac{2\mu \alpha_3}{1 + \delta_1} \int \eta' \frac{\cos(2w-v_1+v)}{\sin} \frac{d\bar{V}}{dv} dv \mp \frac{2\mu \alpha_3}{1 - \delta_1} \int \eta' \frac{\cos(2w-v_1-v)}{\sin} \frac{d\bar{V}}{dv} dv$$

$$+ \frac{\mu b_{4,1,0}^{-1}}{1 + \delta_1} \int \eta \frac{\cos(4w-v+v)}{\sin} \frac{d\bar{V}}{dv} dv \pm \frac{\mu b_{4,1,0}^{-1}}{\delta_1} \int \eta \frac{\cos(4w-v-v)}{\sin} \frac{d\bar{V}}{dv} dv$$

$$+ \frac{\mu b_{4,0,1}^{-1}}{1 + \delta_1} \int \eta' \frac{\cos(4w-v_1+v)}{\sin} \frac{d\bar{V}}{dv} dv \pm \frac{\mu b_{4,0,1}^{-1}}{\delta_1} \int \eta' \frac{\cos(4w-v_1-v)}{\sin} \frac{d\bar{V}}{dv} dv.$$

Für R_3 folgt:

$$\begin{aligned}
 (107) \quad \left. \begin{array}{l} g_1 \\ g_2 \end{array} \right\} &= \pm \frac{\mu b_{2,2,0}}{\delta_1} \int \eta^2 \frac{\cos}{\sin} (2w-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\
 &+ \frac{\mu \bar{b}_{2,2,0}^{-2}}{\delta_1} \int \eta^2 \frac{\cos}{\sin} (2w-2v+v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \quad \pm \frac{\mu \bar{b}_{6,2,0}^{-2}}{\delta_1} \int \eta^2 \frac{\cos}{\sin} (6w-2v-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\
 &\quad \pm \frac{\mu \bar{b}_{2,1,1}^{+1}}{\delta_1} \int \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} (2w+v-v_1-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\
 &+ \frac{\mu \bar{b}_{2,1,1}^{-2}}{\delta_1} \int \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} (2w-v-v_1+v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \quad \pm \frac{\mu \bar{b}_{6,1,1}^{-2}}{\delta_1} \int \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} (6w-v-v_1-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\
 &\quad \pm \frac{\mu \bar{b}_{2,1,1}^{-1}}{\delta_1} \int \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} (2w-v+v_1-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\
 &+ \frac{\mu \bar{b}_{2,0,2}^{-2}}{\delta_1} \int \eta'^2 \frac{\cos}{\sin} (2w-2v_1+v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \quad \pm \frac{\mu \bar{b}_{6,0,2}^{-2}}{\delta_1} \int \eta'^2 \frac{\cos}{\sin} (6w-2v_1-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\
 &\quad \pm \frac{\mu \bar{b}_{2,0,2}}{\delta_1} \int \eta'^2 \frac{\cos}{\sin} (2w-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\
 &\quad \pm \frac{\mu \bar{b}_{2,2,0}}{\delta_1} \int \sin^2 j \frac{\cos}{\sin} (2w-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\
 &+ \frac{\mu \bar{b}_{2,2,0}^{-2}}{\delta_1} \int \sin^2 j \frac{\cos}{\sin} (2w-2v+v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \quad \pm \frac{\mu \bar{b}_{6,2,0}^{-2}}{\delta_1} \int \sin^2 j \frac{\cos}{\sin} (6w-2v-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\
 &\quad \pm \frac{\mu \bar{b}_{2,1,1}^{+1}}{\delta_1} \int \sin j \sin j' \frac{\cos}{\sin} (2w+v-v_1-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\
 &+ \frac{\mu \bar{b}_{2,1,1}^{-2}}{\delta_1} \int \sin j \sin j' \frac{\cos}{\sin} (2w-v-v_1+v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \quad \pm \frac{\mu \bar{b}_{6,1,1}^{-2}}{\delta_1} \int \sin j \sin j' \frac{\cos}{\sin} (6w-v-v_1-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\
 &\quad \pm \frac{\mu \bar{b}_{2,1,1}^{-1}}{\delta_1} \int \sin j \sin j' \frac{\cos}{\sin} (2w-v+v_1-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\
 &+ \frac{\mu \bar{b}_{2,0,2}^{-2}}{\delta_1} \int \sin^2 j' \frac{\cos}{\sin} (2w-2v_1+v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \quad \pm \frac{\mu \bar{b}_{6,0,2}^{-2}}{\delta_1} \int \sin^2 j' \frac{\cos}{\sin} (6w-2v_1-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\
 &\quad \pm \frac{\mu \bar{b}_{2,0,2}}{\delta_1} \int \sin^2 j' \frac{\cos}{\sin} (2w-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv.
 \end{aligned}$$

In den Variationsgleichungen für R_3 haben wir diejenigen Teile der Integrale, welche keine kleinen Divisoren haben, fortgelassen. Der Fehler wird v. d. Ord. $\frac{m^{1/2}}{\delta_1^2}$ im Integral, ebenso gross wird der aus der Vernachlässigung der C-Glieder entspringende Fehler. Es ist dies gerechtfertigt, da wir auch die aus der Störungsfunktion kommenden Glieder dritten Grades nicht mitnehmen,

und diese werden schon v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$. Ebenso können wir die C-Glieder ersten Grades fortlassen, insoweit sie mit $\frac{d\bar{V}_2}{dv}$ Glieder dritten Grades geben. Setzen wir dann für $\frac{d\bar{V}}{dv}$ den bekannten Ansatz ein und multiplizieren wir aus, so bekommen wir:

$$(108) \quad \left. \begin{aligned} g_1 \\ g_2 \end{aligned} \right\} = \frac{\mu b_{2.0.0} \gamma_2}{2(2+\delta_1)} \int \eta \cos(v+v) dv \pm \frac{\mu b_{2.0.0} \gamma_2}{2\delta_1} \int \eta \cos(v-v) dv \\ + \frac{\mu b_{2.0.0} \gamma_3}{2(2+\delta_1)} \int \eta' \cos(v_1+v) dv \pm \frac{\mu b_{2.0.0} \gamma_3}{2\delta_1} \int \eta' \cos(v_1-v) dv.$$

Für den charakteristischen Teil ersten und zweiten Grades folgt:

$$(109) \quad \left. \begin{aligned} g_1 \\ g_2 \end{aligned} \right\} = \frac{\mu b_{2.0.0} \gamma_2}{2(2+\delta_1)} \int \eta \cos(4w-v+v) dv \quad \pm \frac{\mu b_{2.0.0} \gamma_2}{2\delta_1} \int \eta \cos(4w-v-v) dv \\ + \frac{\mu b_{2.0.0} \gamma_3}{2(2+\delta_1)} \int \eta' \cos(4w-v_1+v) dv \quad \pm \frac{\mu b_{2.0.0} \gamma_3}{2\delta_1} \int \eta' \cos(4w-v_1-v) dv \\ + \frac{\mu b_{4.1.0}^{-1} \gamma_2}{2(1+\delta_1)} \int \eta^2 \cos(2w+v) dv \quad \pm \frac{\mu b_{4.1.0}^{-1} \gamma_2}{2\delta_1} \int \eta^2 \cos(2w-v) dv \\ + \frac{\mu b_{4.0.1}^{-1} \gamma_2}{2(1+\delta_1)} \int \eta \eta' \cos(2w+v-v_1+v) dv \pm \frac{\mu b_{4.0.1}^{-1} \gamma_2}{2\delta_1} \int \eta \eta' \cos(2w+v-v_1-v) dv \\ + \frac{\mu b_{4.1.0}^{-1} \gamma_3}{2(1+\delta_1)} \int \eta \eta' \cos(2w-v+v_1+v) dv \pm \frac{\mu b_{4.1.0}^{-1} \gamma_3}{2\delta_1} \int \eta \eta' \cos(2w-v+v_1-v) dv \\ + \frac{\mu b_{4.0.1}^{-1} \gamma_3}{2(1+\delta_1)} \int \eta'^2 \cos(2w+v) dv \quad \pm \frac{\mu b_{4.0.1}^{-1} \gamma_3}{2\delta_1} \int \eta'^2 \cos(2w-v) dv \\ \pm \frac{\mu b_{2.0.0} \gamma_{14}}{2(2+\delta_1)} \int \eta^2 \cos(2w-2v-v) dv \quad + \frac{\mu b_{2.0.0} \gamma_{14}}{2\delta_1} \int \eta^2 \cos(2w-2v+v) dv \\ \pm \frac{\mu b_{2.0.0} \gamma_{15}}{2(2+\delta_1)} \int \eta \eta' \cos(2w-v-v_1-v) dv + \frac{\mu b_{2.0.0} \gamma_{15}}{2\delta_1} \int \eta \eta' \cos(2w-v-v_1+v) dv \\ \pm \frac{\mu b_{2.0.0} \gamma_{16}}{2(2+\delta_1)} \int \eta'^2 \cos(2w-2v_1-v) dv \quad + \frac{\mu b_{2.0.0} \gamma_{16}}{2\delta_1} \int \eta'^2 \cos(2w-2v_1+v) dv \\ + \frac{\mu \alpha_2 \gamma_2}{1+\delta_1} \int \eta^2 \cos(4w-2v+v) dv \quad \mp \frac{\mu \alpha_2 \gamma_2}{1-\delta_1} \int \eta^2 \cos(4w-2v-v) dv \\ + \frac{\mu (\alpha_2 \gamma_3 + \alpha_3 \gamma_2)}{1+\delta_1} \int \eta \eta' \cos(4w-v-v_1+v) dv \mp \frac{\mu (\alpha_2 \gamma_3 + \alpha_3 \gamma_2)}{1-\delta_1} \int \eta \eta' \cos(4w-v-v_1-v) dv \\ + \frac{\mu \alpha_3 \gamma_3}{1+\delta_1} \int \eta'^2 \cos(4w-2v_1+v) dv \quad \mp \frac{\mu \alpha_3 \gamma_3}{1-\delta_1} \int \eta'^2 \cos(4w-2v_1-v) dv$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{14}}{(2+\delta_1) + \frac{\mu b_{4,1,0}^{-1} \gamma_2}{2(1+\delta_1)}} \int \eta^2 \cos \sin (6w-2v+v) dv & \pm \left[\frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{14}}{2\delta_1} + \frac{\mu b_{4,1,0}^{-1} \gamma_2}{2\delta_1} \right] \int \eta^2 \cos \sin (6w-2v-v) dv \\
& + \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{15}}{(2+\delta_1) + \frac{\mu (b_{4,1,0}^{-1} \gamma_3 + b_{4,0,1}^{-1} \gamma_2)}{2(1+\delta_1)}} \int \eta \eta' \cos \sin (6w-v-v_1+v) dv & \pm \left[\frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{15}}{2\delta_1} + \frac{\mu (b_{4,1,0}^{-1} \gamma_3 + b_{4,0,1}^{-1} \gamma_2)}{2\delta_1} \right] \int \eta \eta' \cos \sin (6w-v-v_1-v) dv \\
& + \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{16}}{(2+\delta_1) + \frac{\mu b_{4,0,1}^{-1} \gamma_3}{2(1+\delta_1)}} \int \eta'^2 \cos \sin (6w-2v_1+v) dv & \pm \left[\frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{16}}{2\delta_1} + \frac{\mu b_{4,0,1}^{-1} \gamma_3}{2\delta_1} \right] \int \eta'^2 \cos \sin (6w-2v_1-v) dv
\end{aligned}$$

Und für die A-Glieder erhält man:

$$\begin{aligned}
(110) \quad \left. \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix} \right\} &= -\frac{2\delta_1 \mu \alpha_2 \gamma_2}{1-\delta_1^2} \int \eta^2 \cos \sin v dv + \left[\frac{\mu \alpha_2 \gamma_3}{1+\delta_1} - \frac{\mu \alpha_2 \gamma_2}{1-\delta_1} \right] \int \eta \eta' \cos \sin (\Pi - \Pi_1 + v) dv \\
&\pm \left[\frac{\mu \alpha_3 \gamma_2}{1+\delta_1} - \frac{\mu \alpha_2 \gamma_3}{1-\delta_1} \right] \int \eta \eta' \cos \sin (\Pi - \Pi_1 - v) dv - \frac{2\delta_1 \mu \alpha_3 \gamma_3}{1-\delta_1^2} \int \eta'^2 \cos \sin v dv.
\end{aligned}$$

Aus der Neigung kommen noch folgende Glieder:

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix} \right\} = \\
& + \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{30}}{(2+\delta_1) + \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{30}}{2\delta_1}} \int \sin^2 j \cos \sin (2w-2v-v) dv \pm \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{31}}{2(2+\delta_1)} \int \sin j \sin j' \cos \sin (2w-v-v_1-v) dv \pm \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{32}}{2(2+\delta_1)} \int \sin^2 j' \cos \sin (2w-2v_1-v) dv \\
& + \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{30}}{2\delta_1} \int \sin^2 j \cos \sin (2w-2v+v) dv + \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{31}}{2\delta_1} \int \sin j \sin j' \cos \sin (2w-v-v_1+v) dv + \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{32}}{2\delta_1} \int \sin^2 j' \cos \sin (2w-2v_1+v) dv \\
& + \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{30}}{(1+\delta_1) + \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{30}}{2\delta_1}} \int \sin^2 j \cos \sin (6w-2v+v) dv + \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{31}}{2(2+\delta_1)} \int \sin j \sin j' \cos \sin (6w-v-v_1+v) dv + \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{32}}{2(2+\delta_1)} \int \sin^2 j' \cos \sin (6w-2v_1+v) dv \\
& + \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{30}}{\delta_1} \int \sin^2 j \cos \sin (6w-2v-v) dv \pm \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{31}}{2\delta_1} \int \sin j \sin j' \cos \sin (6w-v-v_1-v) dv \pm \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{32}}{2\delta_1} \int \sin^2 j' \cos \sin (6w-2v_1-v) dv
\end{aligned}$$

Integriert man nun Formel (109), (110), (111) mit Hilfe der linearen Divisoren und setzt das Integral nach

$$R = g_1 \sin v - g_2 \cos v$$

zusammen, so erhält man folgende exargumentalen Zusätze zweiter Ordnung für die β_k :

$$(112) \quad \text{pars } \beta_4 = -\frac{(2+3\delta_1)\mu b_{2,0,0} \gamma_2}{4\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)}, \quad \text{pars } \beta_5 = -\frac{(2+3\delta_1)\mu b_{2,0,0} \gamma_3}{4\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)},$$

$$\begin{array}{l}
\text{pars } \beta_7 = -\frac{(2+3\delta_1)\mu b_{4,1,0}^{-1} \gamma_2}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)} \quad \left| \quad \text{pars } \beta_{11} = \frac{2\mu b_{2,0,0} \gamma_{14}}{\delta_1^2(4-\delta_1^2)} \quad \left| \quad \text{pars } \beta_{14} = -\frac{6\delta_1 \mu \alpha_2 \gamma_2}{1-4\delta_1^2} \right. \\
\text{pars } \beta_8 = -\frac{(2+3\delta_1)\mu b_{4,0,1}^{-1} \gamma_2}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)} \quad \left| \quad \text{pars } \beta_{12} = \frac{2\mu b_{2,0,0} \gamma_{15}}{\delta_1^2(4-\delta_1^2)} \quad \left| \quad \text{pars } \beta_{15} = -\frac{6\delta_1 \mu (\alpha_2 \gamma_3 + \alpha_3 \gamma_2)}{1-4\delta_1^2} \right. \\
\text{pars } \beta_9 = -\frac{(2+3\delta_1)\mu b_{4,1,0}^{-1} \gamma_3}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)} \quad \left| \quad \text{pars } \beta_{13} = \frac{2\mu b_{2,0,0} \gamma_{16}}{\delta_1^2(4-\delta_1^2)} \quad \left| \quad \text{pars } \beta_{16} = -\frac{6\delta_1 \mu \alpha_3 \gamma_3}{1-4\delta_1^2} \right. \\
\text{pars } \beta_{10} = -\frac{(2+3\delta_1)\mu b_{4,0,1}^{-1} \gamma_3}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)}
\end{array}$$

$$\text{pars } \beta_{17} = -\frac{(2+5\delta_1)\mu b_{4.1.0}^{-1}\gamma_2}{6\delta_1^2(1+\delta_1)(2+3\delta_1)} - \frac{2(1+2\delta_1)\mu b_{2.0.0}\gamma_{14}}{3\delta_1^2(2+\delta_1)(2+3\delta_1)}$$

$$\text{pars } \beta_{18} = -\frac{(2+5\delta_1)\mu [b_{4.0.1}^{-1}\gamma_2 + b_{4.1.0}^{-1}\gamma_3]}{6\delta_1^2(1+\delta_1)(2+3\delta_1)} - \frac{2(1+2\delta_1)\mu b_{2.0.0}\gamma_{15}}{3\delta_1^2(2+\delta_1)(2+3\delta_1)}$$

$$\text{pars } \beta_{19} = -\frac{(2+5\delta_1)\mu b_{4.0.1}^{-1}\gamma_3}{6\delta_1^2(1+\delta_1)(2+3\delta_1)} - \frac{2(1+2\delta_1)\mu b_{2.0.0}\gamma_{16}}{3\delta_1^2(2+\delta_1)(2+3\delta_1)}$$

$$\begin{array}{l} \text{pars } \beta_{27} = \frac{2\mu b_{2.0.0}\gamma_{30}}{\delta_1^2(4-\delta_1^2)} \\ \text{pars } \beta_{33} = -\frac{2(1+2\delta_1)\mu b_{2.0.0}\gamma_{30}}{3\delta_1^2(2+\delta_1)(2+3\delta_1)} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{pars } \beta_{28} = \frac{2\mu b_{2.0.0}\gamma_{31}}{\delta_1^2(4-\delta_1^2)} \\ \text{pars } \beta_{34} = -\frac{2(1+2\delta_1)\mu b_{2.0.0}\gamma_{31}}{3\delta_1^2(2+\delta_1)(2+3\delta_1)} \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{pars } \beta_{29} = \frac{2\mu b_{2.0.0}\gamma_{32}}{\delta_1^2(4-\delta_1^2)} \\ \text{pars } \beta_{35} = -\frac{2(1+2\delta_1)\mu b_{2.0.0}\gamma_{32}}{3\delta_1^2(2+\delta_1)(2+3\delta_1)} \end{array}$$

Die Integration in (110) wollen wir nachher bei der Berechnung des γ ausführen. Vergleicht man (108) mit der Integration der Differentialgleichung für (ϱ) im vorigen Kapitel (Formel 62), so sieht man, dass zu den Koeffizienten exargumentale Zusätze hinzutreten, und dass wir sie schreiben können:

$$(113) \quad \begin{array}{ll} b_1 = b_{0.1.0}^{+1} + \frac{\mu b_{2.0.0}\gamma_2}{\delta_1} & b_3 = b_{0.1.0}^{+1} + \frac{\mu b_{2.0.0}\gamma_2}{2+\delta_1} \\ b_2 = b_{0.0.1}^{+1} + \frac{\mu b_{2.0.0}\gamma_3}{\delta_1} & b_4 = b_{0.0.1}^{+1} + \frac{\mu b_{2.0.0}\gamma_3}{2+\delta_1} \end{array}$$

Dann erhalten wir nach Formel (63):

$$(114) \quad (\varrho) = \frac{\varkappa}{2} \left[\frac{b_1}{s} + \frac{b_3}{2-s} \right] \cos(v-\omega) + \sum \left\{ \frac{\varkappa_n}{2} \left[\frac{b_1}{s_n} + \frac{b_3}{2-s_n} \right] + \frac{\varkappa'_n}{2} \left[\frac{b_3}{s_n} + \frac{b_4}{2-s_n} \right] \right\} \cos(v-\omega_n)$$

und durch Vergleichung mit

$$(64) \quad (\varrho) = \eta \cos(v-II) = \varkappa \cos(v-\omega) + \sum \varkappa_n \cos(v-\omega_n)$$

ergeben sich folgende strengen Werte für die \varkappa_n und s :

$$(114a) \quad 2s = b_1 + \frac{s b_3}{2-s}, \quad \left[2s_n - b_1 - \frac{s_n b_3}{2-s_n} \right] \varkappa_n = \left[b_2 - \frac{s_n b_4}{2-s_n} \right] \varkappa'_n.$$

Genähert ist:

$$s = \frac{b_1}{2}, \quad \varkappa_n = \frac{b_2 \varkappa'_n}{2(s_n - s)}.$$

Bekannt aus der Theorie der grossen Planeten ist s'_n und \varkappa'_n , und es ist

$$(114b) \quad \begin{array}{l} s_n = \mu_2 s'_n - c + \mu_2 c' \\ \Gamma_n = \Gamma'_n + s'_n B \\ \omega_n = \Gamma_n + s_n v. \end{array}$$

Damit ist (ρ) erledigt, da es erst wieder Zusätze aus dem dritten Grade erhält und wir diese fortlassen wollen.

Die Integration von (110) soll nachher zugleich mit der Berechnung von a_0 und b_0 , soweit es zweiten Grades ist, und der von γ erfolgen.

Ehe wir jedoch zur Ermittlung der exargumentalen Glieder dritten Grades schreiten, wollen wir bedenken, dass in (109) aus den exargumentalen Gliedern ersten Grades und zweiter Ordnung wieder solche zweiten und dritten Grades und dritter Ordnung entstehen, die wir auch mitnehmen müssen, und ebenso aus den exargumentalen Gliedern zweiten Grades solche dritten Grades und dritter Ordnung. Wenden wir also auf (109) nochmals die partielle Integration an gemäss Formel (91), setzen $\frac{d\bar{V}_1}{dv}$ gleich in periodischer Form an und multiplizieren dies aus, womit wir erhalten:

$$(115) \quad \left. \begin{aligned} g_1 \\ g_2 \end{aligned} \right\} = \frac{\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_2^2}{2(1+\delta_1)(2+\delta_1)} \int \eta^2 \frac{\cos}{\sin} (2w+v) dv \quad \pm \frac{\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_2^2}{2\delta_1^2} \int \eta^2 \frac{\cos}{\sin} (2w-v) dv \\ + \frac{\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_2 \gamma_3}{2(1+\delta_1)(2+\delta_1)} \int \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} (2w-v+v_1+v) dv \pm \frac{\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_2 \gamma_3}{2\delta_1^2} \int \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} (2w-v+v_1-v) dv \\ + \frac{\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_2 \gamma_3}{2(1+\delta_1)(2+\delta_1)} \int \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} (2w+v-v_1+v) dv \pm \frac{\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_2 \gamma_3}{2\delta_1^2} \int \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} (2w+v-v_1-v) dv \\ + \frac{\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_3^2}{2(1+\delta_1)(2+\delta_1)} \int \eta'^2 \frac{\cos}{\sin} (2w+v) dv \quad \pm \frac{\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_3^2}{2\delta_1^2} \int \eta'^2 \frac{\cos}{\sin} (2w-v) dv \\ \dots \dots \dots \text{etc. (analog für } 6w).$$

Soweit jedoch Glieder dritten Grades entstehen, wollen wir $\frac{d\bar{V}}{dv}$ selbst in den Integralen belassen und nur die Teile mit einem kleinen Divisor berücksichtigen. Dann folgt aus (109) und (111):

$$16) \quad \left. \begin{aligned} g_1 \\ g_2 \end{aligned} \right\} = \frac{\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_2}{\delta_1^2} \int \eta \frac{\cos}{\sin} (4w-v-v) \frac{d\bar{V}_2}{dv} dv \quad \pm \frac{\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_3}{\delta_1^2} \int \eta' \frac{\cos}{\sin} (4w-v_1-v) \frac{d\bar{V}_2}{dv} dv \\ \frac{\mu^2 b_{4.1.0}^{-1} \gamma_2}{\delta_1^2} \int \eta^2 \frac{\cos}{\sin} (2w-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \quad \pm \frac{\mu^2 b_{4.0.1}^{-1} \gamma_2}{\delta_1^2} \int \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} (2w+v-v_1-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\ \frac{\mu^2 b_{4.1.0}^{-1} \gamma_3}{\delta_1^2} \int \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} (2w-v+v_1-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \pm \frac{\mu^2 b_{4.0.1}^{-1} \gamma_3}{\delta_1^2} \int \eta'^2 \frac{\cos}{\sin} (2w-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\ \frac{\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_{14}}{\delta_1^2} \int \eta^2 \frac{\cos}{\sin} (2w-2v+v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \quad \pm \frac{\mu^2 [b_{2.0.0} \gamma_{14} + b_{4.1.0}^{-1} \gamma_2]}{\delta_1^2} \int \eta^2 \frac{\cos}{\sin} (6w-2v-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\ \frac{\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_{15}}{\delta_1^2} \int \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} (2w-v-v_1+v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \pm \frac{\mu^2 [b_{2.0.0} \gamma_{15} + b_{4.1.0}^{-1} \gamma_3 + b_{4.0.1}^{-1} \gamma_2]}{\delta_1^2} \int \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} (6w-v-v_1-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\ \frac{\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_{16}}{\delta_1^2} \int \eta'^2 \frac{\cos}{\sin} (2w-2v_1+v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \quad \pm \frac{\mu^2 [b_{2.0.0} \gamma_{16} + b_{4.0.1}^{-1} \gamma_3]}{\delta_1^2} \int \eta'^2 \frac{\cos}{\sin} (6w-2v_1-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{\mu^2 b_{2,0,0} \gamma_{30}}{\delta_1^2} \int \sin^2 j \frac{\cos}{\sin} (2w-2v+v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv & \pm \frac{\mu^2 b_{2,0,0} \gamma_{30}}{\delta_1^2} \int \sin^2 j \frac{\cos}{\sin} (6w-2v_1-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\
 &+ \frac{\mu^2 b_{2,0,0} \gamma_{31}}{\delta_1^2} \int \sin j \sin j' \frac{\cos}{\sin} (2w-v-v_1+v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv & \pm \frac{\mu^2 b_{2,0,0} \gamma_{31}}{\delta_1^2} \int \sin j \sin j' \frac{\cos}{\sin} (6w-v-v_1-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\
 &+ \frac{\mu^2 b_{2,0,0} \gamma_{32}}{\delta_1^2} \int \sin^2 j' \frac{\cos}{\sin} (2w-2v_1+v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv & \pm \frac{\mu^2 b_{2,0,0} \gamma_{32}}{\delta_1^2} \int \sin^2 j' \frac{\cos}{\sin} (6w-2v_1-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv
 \end{aligned}$$

Wendet man auf (115) nun noch einmal die partielle Integration an, so wird man jetzt nur noch Glieder dritten Grades und schon vierter Ordnung erhalten. Auch diese sollen noch berücksichtigt werden. Dann sind die exargumentalen Glieder erschöpft, denn eine weitere Anwendung der partiellen Integration liefert bereits Glieder vierten Grades, welche wir vernachlässigen. Schreiben wir wieder nur die durch δ_1 vergrößerten Teile des Integrals hin:

$$\begin{aligned}
 (117) \quad \left. \begin{aligned} g_1 \\ g_2 \end{aligned} \right\} &= \pm \frac{\mu^3 b_{2,0,0} \gamma_2^2}{\delta_1^3} \int \eta^2 \frac{\cos}{\sin} (2w-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \pm \frac{\mu^3 b_{2,0,0} \gamma_2 \gamma_3}{\delta_1^3} \int \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} (2w+v-v_1-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\
 &\pm \frac{\mu^3 b_{2,0,0} \gamma_2 \gamma_3}{\delta_1^3} \int \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} (2w-v+v_1-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \pm \frac{\mu^3 b_{2,0,0} \gamma_3^2}{\delta_1^3} \int \eta'^2 \frac{\cos}{\sin} (2w-v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\
 &\dots \dots \dots \text{etc. (analog für } 6w\text{)}.
 \end{aligned}$$

Integrieren wir nun (115) und setzen das Integral zusammen, so erhalten wir noch folgende Zusätze dritter Ordnung zu den Gliedern zweiten Grades:

$$(118) \quad \left. \begin{aligned} \text{pars } \beta_7 &= -\frac{(4+8\delta_1+5\delta_1^2)\mu^2 b_{2,0,0} \gamma_2^2}{2\delta_1^3(1+\delta_1)(2+\delta_1)^2} \\ \text{pars } \beta_8 &= -\frac{(4+8\delta_1+5\delta_1^2)\mu^2 b_{2,0,0} \gamma_2 \gamma_3}{2\delta_1^3(1+\delta_1)(2+\delta_1)^2} \\ \text{pars } \beta_9 &= -\frac{(4+8\delta_1+5\delta_1^2)\mu^2 b_{2,0,0} \gamma_2 \gamma_3}{2\delta_1^3(1+\delta_1)(2+\delta_1)^2} \\ \text{pars } \beta_{10} &= -\frac{(4+8\delta_1+5\delta_1^2)\mu^2 b_{2,0,0} \gamma_3^2}{2\delta_1^3(1+\delta_1)(2+\delta_1)^2} \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} \text{pars } \beta_{17} &= -\frac{(4+12\delta_1+11\delta_1^2)\mu^2 b_{2,0,0} \gamma_2^2}{6\delta_1^3(1+\delta_1)(2+\delta_1)(2+3\delta_1)} \\ \text{pars } \beta_{18} &= -\frac{(4+12\delta_1+11\delta_1^2)\mu^2 b_{2,0,0} \gamma_2 \gamma_3}{3\delta_1^3(1+\delta_1)(2+\delta_1)(2+3\delta_1)} \\ \text{pars } \beta_{19} &= -\frac{(4+12\delta_1+11\delta_1^2)\mu^2 b_{2,0,0} \gamma_3^2}{6\delta_1^3(1+\delta_1)(2+\delta_1)(2+3\delta_1)} \end{aligned} \right.$$

Dann haben wir in den Formeln (58), (80), (112), (118) die definitiven Werte der β_k nullten, ersten und zweiten Grades, soweit sie zu charakteristischen Argumenten gehören, mit der vorgeschriebenen Genauigkeit ermittelt.

Um die Glieder dritten Grades zu erhalten, brauchen wir nur für $\frac{d\bar{V}}{dv}$ den Ansatz in den Gleichungen (106), (107), (116), (117) einzusetzen, dann auszumultiplizieren unter Berücksichtigung der D-Glieder. Darauf ist die Integration auszuführen und das Integral zusammenzustellen nach der Formel:

$$R_3 = g_1 \sin v - g_2 \cos v.$$

Diese recht mühsamen und interesselosen Rechnungen sollen hier nicht angeführt werden, da sie keine Schwierigkeit bieten. Die Resultate für die Glieder dritten Grades werden lauten, wenn wir noch die C-Glieder aus S_3 in R_3 mitnehmen, die aus R_2 kommenden exargumentalen Teile in $T_c R_3$ dagegen vernachlässigen, was einem Fehler v. d. Ord. $\frac{m^{12}}{\delta_1}$ gleichkommt:

(119) $R_3 =$

$$\begin{aligned}
& 2\alpha_{40}\eta^3\cos(2w-v) + \beta_{46}\eta^3\cos(4w-v) + \beta_{52}\eta^3\cos(4w-3v) + 2\alpha_{56}\eta^3\cos(6w-3v) \\
& 2\alpha_{41}\eta^2\eta'\cos(2w-2v+v_1) + \beta_{47}\eta^2\eta'\cos(4w-2v+v_1) + \beta_{53}\eta^2\eta'\cos(4w-2v-v_1) + 2\alpha_{57}\eta^2\eta'\cos(6w-2v-v_1) \\
& 2\alpha_{42}\eta^2\eta'\cos(2w-v_1) + \beta_{48}\eta^2\eta'\cos(4w-v_1) + \beta_{54}\eta\eta'^2\cos(4w-v-2v_1) + 2\alpha_{58}\eta\eta'^2\cos(6w-v-2v_1) \\
& 2\alpha_{43}\eta\eta'^2\cos(2w-v) + \beta_{49}\eta\eta'^2\cos(4w-v) + \beta_{55}\eta'^3\cos(4w-3v_1) + 2\alpha_{59}\eta'^3\cos(6w-3v_1) \\
& 2\alpha_{44}\eta\eta'^2\cos(2w+v-2v_1) + \beta_{50}\eta\eta'^2\cos(4w+v-2v_1) \\
& 2\alpha_{45}\eta'^3\cos(2w-v_1) + \beta_{51}\eta'^3\cos(4w-v_1) \\
& \beta_{60}\eta^3\cos(8w-3v) + 2\alpha_{64}\eta\sin^2j\cos(2w-2v+v) + \beta_{70}\eta\sin^2j\cos(4w-2v+v) \\
& \beta_{61}\eta^2\eta'\cos(8w-2v-v_1) + 2\alpha_{65}\eta'\sin^2j\cos(2w-2v+v_1) + \beta_{71}\eta'\sin^2j\cos(4w-2v+v_1) \\
& \beta_{62}\eta\eta'^2\cos(8w-v-2v_1) + 2\alpha_{66}\eta\sin j\sin j'\cos(2w-v-v_1+v) + \beta_{72}\eta\sin j\sin j'\cos(4w-v-v_1+v) \\
& \beta_{63}\eta'^3\cos(8w-3v_1) + 2\alpha_{67}\eta'\sin j\sin j'\cos(2w-v-v_1+v_1) + \beta_{73}\eta'\sin j\sin j'\cos(4w-v-v_1+v_1) \\
& + 2\alpha_{68}\eta\sin^2j'\cos(2w-2v_1+v) + \beta_{74}\eta\sin^2j'\cos(4w-2v_1+v) \\
& + 2\alpha_{69}\eta'\sin^2j'\cos(2w-2v_1+v_1) + \beta_{75}\eta'\sin^2j'\cos(4w-2v_1+v_1) \\
& \beta_{76}\eta\sin^2j\cos(4w-2v-v) + \beta_{82}\eta\sin^2j\cos(4w-v) + \beta_{88}\eta\sin j\sin j'\cos(4w-v+v_1-v) \\
& \beta_{77}\eta'\sin^2j\cos(4w-2v-v_1) + \beta_{83}\eta'\sin^2j\cos(4w-v_1) + \beta_{87}\eta'\sin j\sin j'\cos(4w-v+v_1-v_1) \\
& \beta_{78}\eta\sin j\sin j'\cos(4w-v-v_1-v) + \beta_{84}\eta\sin j\sin j'\cos(4w+v-v_1-v) + \beta_{88}\eta\sin^2j'\cos(4w-v) \\
& \beta_{79}\eta'\sin j\sin j'\cos(4w-v-v_1-v_1) + \beta_{85}\eta'\sin j\sin j'\cos(4w+v-v_1-v_1) + \beta_{89}\eta'\sin^2j'\cos(4w-v_1) \\
& \beta_{80}\eta\sin^2j'\cos(4w-2v_1-v) \\
& \beta_{81}\eta'\sin^2j'\cos(4w-2v_1-v_1) \\
& + 2\alpha_{90}\eta\sin^2j\cos(6w-2v-v) + \beta_{96}\eta\sin^2j\cos(8w-2v-v) \\
& + 2\alpha_{91}\eta'\sin^2j\cos(6w-2v-v_1) + \beta_{97}\eta'\sin^2j\cos(8w-2v-v_1) \\
& + 2\alpha_{92}\eta\sin j\sin j'\cos(6w-v-v_1-v) + \beta_{98}\eta\sin j\sin j'\cos(8w-v-v_1-v) \\
& + 2\alpha_{93}\eta'\sin j\sin j'\cos(6w-v-v_1-v_1) + \beta_{99}\eta'\sin j\sin j'\cos(8w-v-v_1-v_1) \\
& + 2\alpha_{94}\eta\sin^2j'\cos(6w-2v_1-v) + \beta_{100}\eta\sin^2j'\cos(8w-2v_1-v) \\
& + 2\alpha_{95}\eta'\sin^2j'\cos(6w-2v_1-v_1) + \beta_{101}\eta'\sin^2j'\cos(8w-2v_1-v_1)
\end{aligned}$$

Die Werte der Koeffizienten sind folgende:

$$\begin{aligned}
(120) \quad \beta_{46} &= -\frac{\mu(b_{2.2.0}+b_{6.2.0}^{-2})\gamma_2}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2[2(\delta_1 b_{4.1.0}^{-1} + \mu b_{2.0.0}\gamma_2)\gamma_2 + \delta_1 b_{2.0.0}\gamma_{14}]\gamma_2}{4\delta_1^4} \\
\beta_{47} &= -\frac{\mu(b_{2.1.1}^{-1}\gamma_2 + b_{6.2.0}^{-2}\gamma_3)}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2[2(\delta_1 b_{4.1.0}^{-1} + \mu b_{2.0.0}\gamma_2)\gamma_2 + \delta_1 b_{2.0.0}\gamma_{14}]\gamma_3}{4\delta_1^4}
\end{aligned}$$

$$(120) \beta_{48} = -\frac{\mu(b_{2-1-1}^{+1} + b_{6-1-1}^{-2})\gamma_2 + \mu b_{2-2-0}\gamma_3}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2[2(\delta_1 b_{4-0-1}^{-1} + \mu b_{2-0-0}\gamma_3)\gamma_2 + (2\delta_1 b_{4-1-0}^{-1} + \mu b_{2-0-0}\gamma_2)\gamma_3 + \delta_1 b_{2-0-0}\gamma_{15}]\gamma_2}{4\delta_1^4}$$

$$\beta_{49} = -\frac{\mu(b_{2-1-1}^{-1} + b_{6-1-1}^{-2})\gamma_3 + \mu b_{2-0-2}\gamma_2}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2[2(\delta_1 b_{4-0-1}^{-1} + \mu b_{2-0-0}\gamma_3)\gamma_2 + (2\delta_1 b_{4-1-0}^{-1} + \mu b_{2-0-0}\gamma_2)\gamma_3 + \delta_1 b_{2-0-0}\gamma_{15}]\gamma_3}{4\delta_1^4}$$

$$\beta_{50} = -\frac{\mu(b_{2-1-1}^{+1}\gamma_3 + b_{6-0-2}^{-2}\gamma_2)}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2[2(\delta_1 b_{4-0-1}^{-1} + \mu b_{2-0-0}\gamma_3)\gamma_3 + \delta_1 b_{2-0-0}\gamma_{16}]\gamma_2}{4\delta_1^4}$$

$$\beta_{51} = -\frac{\mu(b_{2-0-2} + b_{6-0-2}^{-2})\gamma_3}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2[2(\delta_1 b_{4-0-1}^{-1} + \mu b_{2-0-0}\gamma_3)\gamma_3 + \delta_1 b_{2-0-0}\gamma_{16}]\gamma_3}{4\delta_1^4}$$

$$\beta_{52} = \frac{\mu b_{2-2-0}^{-2}\gamma_2}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2-0-0}\gamma_2\gamma_{14}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{53} = \frac{\mu(b_{2-1-1}^{-2}\gamma_2 + b_{2-2-0}^{-2}\gamma_3)}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2-0-0}(\gamma_2\gamma_{15} + \gamma_3\gamma_{14})}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{54} = \frac{\mu(b_{2-0-2}^{-2}\gamma_2 + b_{2-1-1}^{-2}\gamma_3)}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2-0-0}(\gamma_2\gamma_{16} + \gamma_3\gamma_{15})}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{55} = \frac{\mu b_{2-0-2}^{-2}\gamma_3}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2-0-0}\gamma_3\gamma_{16}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{60} = -\frac{\mu[b_{6-2-0}^{-2}\gamma_2 + b_{4-1-0}^{-1}\gamma_{14}]}{8\delta_1^2} - \frac{\mu^2[(\delta_1 b_{4-1-0}^{-1} + \mu b_{2-0-0}\gamma_2)\gamma_2 + 2\delta_1 b_{2-0-0}\gamma_{14}]\gamma_2}{8\delta_1^4}$$

$$\beta_{61} = -\frac{\mu[b_{6-1-1}^{-2}\gamma_2 + b_{6-2-0}^{-2}\gamma_3 + b_{4-0-1}^{-1}\gamma_{14} + b_{4-1-0}^{-1}\gamma_{15}]}{8\delta_1^2} - \frac{\mu^2[2(\delta_1 b_{4-1-0}^{-1} + \mu b_{2-0-0}\gamma_2)\gamma_2\gamma_3 + (\delta_1 b_{4-0-1}^{-1} + \mu b_{2-0-0}\gamma_3)\gamma_2^2 + 2\delta_1(\gamma_2\gamma_{15} + \gamma_3\gamma_{14})\gamma_2]}{8\delta_1^4}$$

$$\beta_{62} = -\frac{\mu[b_{6-0-2}^{-2}\gamma_2 + b_{6-1-1}^{-2}\gamma_3 + b_{4-0-1}^{-1}\gamma_{15} + b_{4-1-0}^{-1}\gamma_{16}]}{8\delta_1^2} - \frac{\mu^2[2(\delta_1 b_{4-0-1}^{-1} + \mu b_{2-0-0}\gamma_3)\gamma_2\gamma_3 + (\delta_1 b_{4-1-0}^{-1} + \mu b_{2-0-0}\gamma_2)\gamma_3^2 + 2\delta_1(\gamma_2\gamma_{16} + \gamma_3\gamma_{15})\gamma_2]}{8\delta_1^4}$$

$$\beta_{63} = -\frac{\mu[b_{6-0-2}^{-2}\gamma_3 + b_{4-0-1}^{-1}\gamma_{16}]}{8\delta_1^2} - \frac{\mu^2[(\delta_1 b_{4-0-1}^{-1} + \mu b_{2-0-0}\gamma_3)\gamma_3 + 2\delta_1 b_{2-0-0}\gamma_{16}]\gamma_3}{8\delta_1^4}$$

$$\beta_{70} = -\frac{\mu \bar{b}_{6-2-0}^{-2}\gamma_2}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 b_{2-0-0}\gamma_2\gamma_{30}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{76} = \frac{\mu \bar{b}_{2-2-0}^{-2}\gamma_2}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2-0-0}\gamma_2\gamma_{30}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{71} = -\frac{\mu \bar{b}_{6-2-0}^{-2}\gamma_3}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 b_{2-0-0}\gamma_3\gamma_{30}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{77} = \frac{\mu \bar{b}_{2-2-0}^{-2}\gamma_3}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2-0-0}\gamma_3\gamma_{30}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{72} = -\frac{\mu \bar{b}_{6-1-1}^{-2}\gamma_2}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 b_{2-0-0}\gamma_2\gamma_{31}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{78} = \frac{\mu \bar{b}_{2-1-1}^{-2}\gamma_2}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2-0-0}\gamma_2\gamma_{31}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{73} = -\frac{\mu \bar{b}_{6-1-1}^{-2}\gamma_3}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 b_{2-0-0}\gamma_3\gamma_{31}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{79} = \frac{\mu \bar{b}_{2-1-1}^{-2}\gamma_3}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2-0-0}\gamma_3\gamma_{31}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{74} = -\frac{\mu \bar{b}_{6-0-2}^{-2}\gamma_2}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 b_{2-0-0}\gamma_2\gamma_{32}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{80} = \frac{\mu \bar{b}_{2-0-2}^{-2}\gamma_2}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2-0-0}\gamma_2\gamma_{32}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{75} = -\frac{\mu \bar{b}_{6-0-2}^{-2}\gamma_3}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 b_{2-0-0}\gamma_3\gamma_{32}}{4\delta_1^3}$$

$$\beta_{81} = \frac{\mu \bar{b}_{2-0-2}^{-2}\gamma_3}{4\delta_1^2} + \frac{\mu^2 b_{2-0-0}\gamma_3\gamma_{32}}{4\delta_1^3}$$

$$\begin{aligned}
(120) \quad \beta_{96} &= -\frac{\mu[\bar{b}_{6.2.0}^{-2}\gamma_2 + b_{4.1.0}^{-1}\gamma_{30}]}{8\delta_1^2} - \frac{2\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_2 \gamma_{30}}{8\delta_1^3} & \beta_{82} &= -\frac{\mu\bar{b}_{2.2.0} \gamma_2}{4\delta_1^2} \\
\beta_{97} &= -\frac{\mu[\bar{b}_{6.2.0}^{-2}\gamma_3 + b_{4.0.1}^{-1}\gamma_{30}]}{8\delta_1^2} - \frac{2\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_3 \gamma_{30}}{8\delta_1^3} & \beta_{83} &= -\frac{\mu\bar{b}_{2.2.0} \gamma_3}{4\delta_1^2} \\
\beta_{98} &= -\frac{\mu[\bar{b}_{6.1.1}^{-2}\gamma_2 + b_{4.1.0}^{-1}\gamma_{31}]}{8\delta_1^2} - \frac{2\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_2 \gamma_{31}}{8\delta_1^3} & \beta_{84} &= -\frac{\mu\bar{b}_{2.1.1}^{+1} \gamma_2}{4\delta_1^2} \\
\beta_{99} &= -\frac{\mu[\bar{b}_{6.1.1}^{-2}\gamma_3 + b_{4.0.1}^{-1}\gamma_{31}]}{8\delta_1^2} - \frac{2\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_3 \gamma_{31}}{8\delta_1^3} & \beta_{85} &= -\frac{\mu\bar{b}_{2.1.1}^{+1} \gamma_3}{4\delta_1^2} \\
\beta_{100} &= -\frac{\mu[\bar{b}_{6.0.2}^{-2}\gamma_2 + b_{4.1.0}^{-1}\gamma_{32}]}{8\delta_1^2} - \frac{2\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_2 \gamma_{32}}{8\delta_1^3} & \beta_{86} &= -\frac{\mu\bar{b}_{2.1.1}^{-1} \gamma_2}{4\delta_1^2} \\
\beta_{101} &= -\frac{\mu[\bar{b}_{6.0.2}^{-2}\gamma_3 + b_{4.0.1}^{-1}\gamma_{32}]}{8\delta_1^2} - \frac{2\mu^2 b_{2.0.0} \gamma_3 \gamma_{32}}{8\delta_1^3} & \beta_{87} &= -\frac{\mu\bar{b}_{2.1.1}^{-1} \gamma_3}{4\delta_1^2} \\
& & \beta_{88} &= -\frac{\mu\bar{b}_{2.0.2} \gamma_2}{4\delta_1^2} \\
& & \beta_{89} &= -\frac{\mu\bar{b}_{2.0.2} \gamma_3}{4\delta_1^2}.
\end{aligned}$$

Wie man aus diesen Gliedern ersieht, ist die Reihe der exargumentalen Teile eine endliche innerhalb der einzelnen Grade. Während in R_1 nur die Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^3}$ auftritt, — die γ_k in $\frac{d\bar{V}}{dv}$ vorläufig v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ angenommen, — kommen in R_2 schon vor $\frac{m'^2}{\delta_1^3} + \frac{m'^3}{\delta_1^5}$, und in R_3 $\frac{m'^2}{\delta_1^3} + \frac{m'^3}{\delta_1^5} + \frac{m'^4}{\delta_1^7}$. Es entspricht dies ganz unserer Voraussetzung auf pag. 65. Der Fehler, der entsteht durch Vernachlässigung der Teile des Integrals, welche keinen kleinen Divisor haben, wird demnach in R_3 v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^3} + \frac{m'^3}{\delta_1^5} + \frac{m'^4}{\delta_1^7}$ und ist in Anbetracht dessen, dass die aus der Störungsfunktion kommenden Glieder v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ schon vernachlässigt wurden, vollständig gerechtfertigt. Die C-Glieder waren in R_2 v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$, und ihre exargumentalen Zusätze zu R_3 würden demnach v. d. Ord. $\frac{m'^3}{\delta_1^3}$ werden. Ihre Vernachlässigung ist also ebenfalls gerechtfertigt. Die Reihe der exargumentalen Glieder hat Herr Ludendorff in Bezug auf den ersten und zweiten Grad mit derselben Genauigkeit hergestellt, wengleich auch die Formeln in etwas anderer Gestalt erscheinen, bedingt durch das von ihm angewandte Integrationsverfahren.

Würde man die Reihe der exargumentalen Glieder in R weiter fortsetzen wollen, so käme man bereits auf den vierten Grad und zu Gliedern v. d. Ord.

$\frac{m'^2}{\delta_1^2} + \dots + \frac{m'^5}{\delta_1^5}$. Es ist für mittlere Excentricitäten $\kappa^3 = m'$, also wird der Fehler für den Grenzwert des δ_1 v. d. Ord. der Excentricität, was durch die hier im Divisor auftretenden grösseren Zahlenfaktoren etwas günstiger wird. Im Grenzfalle von δ_1 tritt also die langsame Konvergenz der Reihe schon störend hervor. Für die Zwecke abgekürzter Tafeln dürfte die Mitnahme der exargumentalen Teile dritten Grades hier vollständig ausreichen, für eine strenge Darstellung des Planetenortes jedoch kaum. Für charakteristische Planeten, wo $\delta_1^2 \cong m'$ ist, wird der Fehler kleiner als $\frac{m'^2}{\delta_1}$. Hier ist die Vernachlässigung vollkommen gerechtfertigt, ja sogar schon die der Glieder dritten Grades bei Excentricitäten bis zu 6^0 .

Ausserdem ist zu bedenken, dass die exargumentalen Glieder höherer als zweiter Ordnung in R_2 nur in den D-Gliedern auftreten, dass also diese gefährlichen Glieder in V nicht weiter vergrössert werden, und dass die exargumentalen C-Glieder dritten Grades v. d. Ord. $\frac{m'^3}{\delta_1^3}$ sind.

6) Um die exargumentalen Glieder aus $W = K + V$ zu erhalten, benutzen wir folgenden Ansatz, den man ganz entsprechend dem für S erhält:

$$(121) \quad K_1 = 2\mu\gamma_1 \int \cos 2w \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv + 3\mu\beta_1^2 \int \cos 4w \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv.$$

$$(122) \quad K_2 = 2\mu\gamma_1 \int \cos 2w \frac{d\bar{V}_2}{dv} dv + 3\mu\beta_1^2 \int \cos 4w \frac{d\bar{V}_2}{dv} dv \\ + 4\mu\gamma_2 \int \eta \cos(4w - v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv + 4\mu\gamma_3 \int \eta' \cos(4w - v_1) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv + 2\mu\gamma_6 \int \eta \cos(2w + v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv.$$

In dem Glied mit β_1^2 ist δ_1 im Nenner gegen die Einheit vernachlässigt. Der Fehler im Integral ist v. d. Ord. $\frac{m'^3}{\delta_1^3}$. Die aus (121) und (122) entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades sind fortzulassen, weil ein kleiner Divisor nicht auftritt, und sie v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ werden. Andererseits vernachlässigen wir in K die aus der Störungsfunktion kommenden Glieder dritten Grades und v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$. Wir werden demnach exargumentale Glieder dritten Grades nur in V zu bilden haben. Es ist:

$$(123) \quad V_2 = \frac{2\mu\gamma_2}{\delta_1} \int \eta \cos(2w - v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv + \frac{2\mu\gamma_3}{\delta_1} \int \eta' \cos(2w - v_1) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv.$$

$$(124) \quad V_3 = \frac{2\mu\gamma_2}{\delta_1} \int \eta \cos(2w - v) \frac{d\bar{V}_2}{dv} dv + \frac{2\mu\gamma_3}{\delta_1} \int \eta' \cos(2w - v_1) \frac{d\bar{V}_2}{dv} dv.$$

Setzt man für $\frac{d\bar{V}}{dv}$ den Ansatz (39) in (121) und (123) ein und multipliziert die periodischen Aggregate aus, so erhält man folgende Terme:

$$(121a) \quad \begin{aligned} K_1 = & \mu\gamma_1\gamma_2 \int \eta \cos(4w - v) dv + \mu\gamma_1\gamma_3 \int \eta' \cos(4w - v_1) dv \\ & + \frac{3}{2} \mu\beta_1^2 \gamma_2 \int \eta \cos(2w + v) dv + \frac{3}{2} \mu\beta_1^2 \gamma_3 \int \eta' \cos(2w + v_1) dv \\ & + \frac{3}{2} \mu\beta_1^2 \gamma_2 \int \eta \cos(6w - v) dv + \frac{3}{2} \mu\beta_1^2 \gamma_3 \int \eta' \cos(6w - v_1) dv \\ & + \mu\gamma_1\gamma_2 \int \eta \cos v dv + \mu\gamma_1\gamma_3 \int \eta' \cos v_1 dv \end{aligned}$$

$$(123a) \quad \begin{aligned} V_2 = & \frac{\mu\gamma_2^2}{\delta_1} \int \eta^2 \cos(4w - 2v) dv + \frac{2\mu\gamma_2\gamma_3}{\delta_1} \int \eta\eta' \cos(4w - v - v_1) dv + \frac{\mu\gamma_3^2}{\delta_1} \int \eta'^2 \cos(4w - 2v_1) dv \\ & + \frac{\mu\gamma_2^2}{\delta_1} \int \eta^2 dv + \frac{2\mu\gamma_2\gamma_3}{\delta_1} \int \eta\eta' \cos(v - v_1) dv + \frac{\mu\gamma_3^2}{\delta_1} \int \eta'^2 dv. \end{aligned}$$

Wenden wir auf gewisse Glieder in (121a) und (123a) nochmals die partielle Integration an:

$$(125) \quad K_2 = 4\mu^2\gamma_1\gamma_2 \int \eta \cos(4w - v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv + 4\mu^2\gamma_1\gamma_3 \int \eta' \cos(4w - v_1) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv.$$

Hier haben wir δ_1 im Nenner gegen die Einheit vernachlässigt. Der Fehler ist v. d. Ord. $\frac{m^{13}}{\delta_1^2}$, also die Vernachlässigung vollkommen gerechtfertigt, da im Integral kein kleiner Divisor hinzutritt.

$$(126) \quad \begin{aligned} V_3 = & \frac{2\mu^2\gamma_2^2}{\delta_1^2} \int \eta^2 \cos(4w - 2v) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv + \frac{4\mu^2\gamma_2\gamma_3}{\delta_1^2} \int \eta\eta' \cos(4w - v - v_1) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv \\ & + \frac{2\mu^2\gamma_3^2}{\delta_1^2} \int \eta'^2 \cos(4w - 2v_1) \frac{d\bar{V}_1}{dv} dv. \end{aligned}$$

Wir werden demnach aus (125) und (126) Glieder zweiten resp. dritten Grades und dritter Ordnung bekommen. Die andern Glieder in (121a) haben wir nicht berücksichtigt, denn sie geben Glieder zweiten Grades und v. d. Ord. $\frac{m^{14}}{\delta_1^4}$ im Integral von K , d. h. für den Grenzwert von δ_1 v. d. Ord. $\frac{m^{12}}{\delta_1}$. Man erhält nun durch Einführung des Ansatzes, Ausmultiplizieren und gewöhnliche Integration folgende Zusätze ersten und zweiten Grades in W aus den Formeln (121a), (122), (123a), (125), (124), (126), indem man die A-Glieder vorläufig noch fortlässt:

(127) In K_1 und K_2 ,

$$\begin{array}{l} \text{pars } W_{0.1.0}^{+1} = \frac{\mu\gamma_1\gamma_2}{1-\delta_1} \quad \text{pars } \gamma_4 = \frac{\mu\gamma_1\gamma_2}{1+2\delta_1} \quad \text{pars } \gamma_6 = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_2}{2+\delta_1} \quad \left| \quad \text{pars } W_{6.1.0}^{-1} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_2}{2+3\delta_1} \right. \\ \text{pars } W_{0.0.1}^{+1} = \frac{\mu\gamma_1\gamma_3}{1-\delta_1} \quad \text{pars } \gamma_5 = \frac{\mu\gamma_1\gamma_3}{1+2\delta_1} \quad \text{pars } W_{2.0.1}^{+1} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_3}{2+\delta_1} \quad \left| \quad \text{pars } W_{6.0.1}^{-1} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_3}{2+3\delta_1} \right. \end{array}$$

$$\text{pars } \gamma_7 = \frac{2\mu(\gamma_4 + \mu\gamma_1\gamma_2)\gamma_2}{1+\delta_1} \quad \text{pars } \gamma_9 = \frac{2\mu(\gamma_4 + \mu\gamma_1\gamma_2)\gamma_3}{1+\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_8 = \frac{2\mu(\gamma_5 + \mu\gamma_1\gamma_3)\gamma_2}{1+\delta_1} \quad \text{pars } \gamma_{10} = \frac{2\mu(\gamma_5 + \mu\gamma_1\gamma_3)\gamma_3}{1+\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{11} = -\frac{\mu\gamma_1\gamma_{14}}{1-\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{17} = \frac{\mu\gamma_1\gamma_{14} + 2\mu(\gamma_4 + \mu\gamma_1\gamma_2)\gamma_2}{1+3\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{12} = -\frac{\mu\gamma_1\gamma_{15}}{1-\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{18} = \frac{\mu\gamma_1\gamma_{15} + 2\mu(\gamma_4 + \mu\gamma_1\gamma_2)\gamma_3 + 2\mu(\gamma_5 + \mu\gamma_1\gamma_3)\gamma_2}{1+3\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{13} = -\frac{\mu\gamma_1\gamma_{16}}{1-\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{19} = \frac{\mu\gamma_1\gamma_{16} + 2\mu(\gamma_5 + \mu\gamma_1\gamma_3)\gamma_3}{1+3\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{21} = \frac{\mu\gamma_2\gamma_6}{2+2\delta_1}$$

$$\text{pars } W_{8.2.0}^{-2} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_{14}}{2+4\delta_1}$$

$$\text{pars } W_{8.0.2}^{-2} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_{16}}{2+4\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{22} = \frac{\mu\gamma_3\gamma_6}{2+2\delta_1}$$

$$\text{pars } W_{8.1.1}^{-2} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_{15}}{2+4\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{27} = -\frac{\mu\gamma_1\gamma_{30}}{1-\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{33} = \frac{\mu\gamma_1\gamma_{30}}{1+3\delta_1}$$

$$\text{pars } \bar{W}_{8.2.0}^{-2} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_{30}}{2+4\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{28} = -\frac{\mu\gamma_1\gamma_{31}}{1-\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{34} = \frac{\mu\gamma_1\gamma_{31}}{1+3\delta_1}$$

$$\text{pars } \bar{W}_{8.1.1}^{-2} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_{31}}{2+4\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{29} = -\frac{\mu\gamma_1\gamma_{32}}{1-\delta_1}$$

$$\text{pars } \gamma_{35} = \frac{\mu\gamma_1\gamma_{32}}{1+3\delta_1}$$

$$\text{pars } \bar{W}_{8.0.2}^{-2} = \frac{\frac{3}{2}\mu\beta_1^2\gamma_{32}}{2+4\delta_1}$$

in V_2 ,

$$\text{pars } \gamma'_{14} = \frac{\mu\gamma_2^2}{2\delta_1^2}$$

$$\text{pars } \gamma'_{15} = \frac{\mu\gamma_2\gamma_3}{\delta_1^2}$$

$$\text{pars } \gamma'_{16} = \frac{\mu\gamma_3^2}{2\delta_1^2}$$

Damit haben wir für die Koeffizienten in K_1 und K_2 sowie V_1 und V_2 die definitiven Werte erhalten. Ehe wir die exargumentalen Teile dritten Grades in K und V hinschreiben, wollen wir bedenken, dass durch die Gestalt der Differentialgleichung auch sehr grosse Glieder entstehen. Wir vernachlässigen ja die Glieder dritten Grades, soweit sie aus der Störungsfunktion kommen, d. h. Glieder v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ in der Differentialgleichung. Demnach könnten wir die hier in Frage kommenden Glieder auch vernachlässigen, da sie in K_3 v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ sind und in V_3 v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1^2}$ resp. $\frac{m'^2}{\delta_1^3}$. Wir wollen sie trotzdem berücksichtigen.

sichtigen, da sie in gewisser Hinsicht eine etwas andere Stellung einnehmen als die aus der Störungfunktion kommenden Teile dritten Grades; denn sie entstehen schon aus Gliedern ersten und zweiten Grades und sind dadurch bedingt, dass die Differentialgleichungen selbst wieder keine geschlossenen Ausdrücke sind, sondern Reihen.

Zu diesem Zwecke geben wir der Differentialgleichung folgende Gestalt:

$$\frac{dK_3}{dv} = -2(R_3)_{\text{exarg.}} + 6R_2 \eta \cos v - 3\eta^2 R_1 - 6R_1 \eta^2 \cos 2v$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_3}{dv} = (S_3 - 2R_3)_{\text{exarg.}} + [6R_2 - 12R_1^2 - 24R_0 R_2 + 6R_0 S_2 + 6R_1 S_1] \eta \cos v - 3\eta^2 R_1 \\ - 2R_1 S_2 - 2R_2 S_1 + 6R_1 R_2. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir hier die periodischen Aggregate aus, berücksichtigen wir nur die C- und D-Glieder und integrieren diese Gleichungen sowie (124) und (126), welche die exargumentalen Glieder dritten Grades in V hervorrufen, so können wir dem Resultat folgende Form geben:

$$(128) \quad K_3 =$$

$$\begin{aligned} & \gamma_{46} \eta^3 \sin(4w - v) & + \gamma_{52}^{\prime} \eta^3 \sin(4w - 3v) & - 2\beta_{60} \eta^3 \sin(8w - 3v) \\ - 2\beta_{47} \eta^2 \eta' \sin(4w - 2v + v_1) & + \gamma_{53} \eta^2 \eta' \sin(4w - 2v - v_1) & - 2\beta_{61} \eta^2 \eta' \sin(8w - 2v - v_1) \\ + \gamma_{48} \eta^2 \eta' \sin(4w - v_1) & + \gamma_{54} \eta \eta'^2 \sin(4w - v - 2v_1) & - 2\beta_{62} \eta \eta'^2 \sin(8w - v - 2v_1) \\ - 2\beta_{49} \eta \eta'^2 \sin(4w - v) & + 2\beta_{55} \eta'^3 \sin(4w - 3v_1) & - 2\beta_{63} \eta'^3 \sin(8w - 3v_1) \\ + \gamma_{50} \eta \eta'^2 \sin(4w + v - 2v_1) & & \\ - 2\beta_{51} \eta'^3 \sin(4w - v_1) & & \\ & + \gamma_{70} \eta \sin^2 j \sin(4w - 2v + v) & + \gamma_{76} \eta \sin^2 j \sin(4w - 2v - v) \\ - 2\beta_{71} \eta' \sin^2 j \sin(4w - 2v + v_1) & + 2\beta_{77} \eta' \sin^2 j \sin(4w - 2v - v_1) & \\ + \gamma_{72} \eta \sin j \sin j' \sin(4w - v - v_1 + v) & + \gamma_{78} \eta \sin j \sin j' \sin(4w - v - v_1 - v) & \\ - 2\beta_{73} \eta' \sin j \sin j' \sin(4w - v - v_1 + v_1) & + 2\beta_{79} \eta' \sin j \sin j' \sin(4w - v - v_1 - v_1) & \\ + \gamma_{74} \eta \sin^2 j' \sin(4w - 2v_1 + v) & + \gamma_{80} \eta \sin^2 j' \sin(4w - 2v_1 - v) & \\ - 2\beta_{75} \eta' \sin^2 j' \sin(4w - 2v_1 + v_1) & + 2\beta_{81} \eta' \sin^2 j' \sin(4w - 2v_1 - v_1) & \\ & - 2\beta_{82} \eta \sin^2 j \sin(4w - v) & - 2\beta_{86} \eta \sin j \sin j' \sin(4w - v + v_1 - v) \\ - 2\beta_{83} \eta' \sin^2 j \sin(4w - v_1) & - 2\beta_{87} \eta' \sin j \sin j' \sin(4w - v + v_1 - v_1) & \\ - 2\beta_{84} \eta \sin j \sin j' \sin(4w + v - v_1 - v) & - 2\beta_{88} \eta \sin^2 j' \sin(4w - v) & \\ - 2\beta_{85} \eta' \sin j \sin j' \sin(4w + v - v_1 - v_1) & - 2\beta_{89} \eta' \sin^2 j' \sin(4w - v_1) & \\ & - 2\beta_{96} \eta \sin^2 j \sin(8w - 2v - v) & - 2\beta_{99} \eta' \sin j \sin j' \sin(8w - v - v_1 - v_1) \\ - 2\beta_{97} \eta' \sin^2 j \sin(8w - 2v - v_1) & - 2\beta_{100} \eta \sin^2 j' \sin(8w - 2v_1 - v) & \\ - 2\beta_{98} \eta \sin j \sin j' \sin(8w - v - v_1 - v) & - 2\beta_{101} \eta' \sin^2 j' \sin(8w - 2v_1 - v_1) & \end{aligned}$$

Hier ist:

$$(129) \quad \begin{aligned} \gamma_{48} &= -3(\beta_4 - \beta_{14} + \frac{2}{3}\beta_{46}) & \gamma_{52} &= 3(\beta_4 - \beta_{14} + \frac{2}{3}\beta_{52}) & \gamma_{70} &= 3\beta_{30} - 2\beta_{70} \\ \gamma_{48} &= -3(\beta_5 - \beta_{15} + \frac{2}{3}\beta_{48}) & \gamma_{53} &= 3(\beta_5 - \beta_{15} + \frac{2}{3}\beta_{53}) & \gamma_{72} &= 3\beta_{31} - 2\beta_{72} \\ \gamma_{50} &= 3\beta_{16} - 2\beta_{50} & \gamma_{54} &= -3\beta_{16} + 2\beta_{54} & \gamma_{74} &= 3\beta_{32} - 2\beta_{74} \\ \gamma_{76} &= -3\beta_{30} + 2\beta_{76} & \gamma_{78} &= -3\beta_{31} + 2\beta_{78} & \gamma_{80} &= -3\beta_{32} + 2\beta_{80}. \end{aligned}$$

Dagegen wird:

$$(130) \quad V_3 =$$

$$\begin{aligned} & \gamma_{40} \eta^3 \sin(2w - v) & + \gamma_{56} \eta^3 \sin(6w - 3v) & + \gamma_{64} \eta \sin^2 j \sin(2w - 2v + v) \\ + \gamma_{41} \eta^2 \eta' \sin(2w - 2v + v_1) & + \gamma_{57} \eta^2 \eta' \sin(6w - 2v - v_1) & + \gamma_{65} \eta' \sin^2 j \sin(2w - 2v + v_1) \\ + \gamma_{42} \eta^2 \eta' \sin(2w - v_1) & + \gamma_{58} \eta \eta'^2 \sin(6w - v - 2v_1) & + \gamma_{66} \eta \sin j \sin j' \sin(2w - v - v_1 + v) \\ + \gamma_{43} \eta \eta'^2 \sin(2w - v) & + \gamma_{59} \eta'^3 \sin(6w - 3v_1) & + \gamma_{67} \eta' \sin j \sin j' \sin(2w - v - v_1 + v_1) \\ + \gamma_{44} \eta \eta'^2 \sin(2w + v - 2v_1) & & + \gamma_{68} \eta \sin^2 j' \sin(2w - 2v_1 + v) \\ + \gamma_{45} \eta'^3 \sin(2w - v_1) & & + \gamma_{69} \eta' \sin^2 j' \sin(2w - 2v_1 + v_1) \\ \\ + \gamma_{102} \eta \sin^2 j \sin(2w - v) & + \gamma_{106} \eta \sin j \sin j' \sin(2w - v + v_1 - v) & + \gamma_{90} \eta \sin^2 j \sin(6w - 2v - v) \\ + \gamma_{103} \eta' \sin^2 j \sin(2w - v_1) & + \gamma_{107} \eta' \sin j \sin j' \sin(2w - v + v_1 - v_1) & + \gamma_{91} \eta' \sin^2 j \sin(6w - 2v - v_1) \\ + \gamma_{104} \eta \sin j \sin j' \sin(2w + v - v_1 - v) & + \gamma_{108} \eta \sin^2 j' \sin(2w - v) & + \gamma_{92} \eta \sin j \sin j' \sin(6w - v - v_1 - v) \\ + \gamma_{105} \eta' \sin j \sin j' \sin(2w + v - v_1 - v_1) & + \gamma_{109} \eta' \sin^2 j' \sin(2w - v_1) & + \gamma_{93} \eta' \sin j \sin j' \sin(6w - v - v_1 - v) \\ & & + \gamma_{94} \eta \sin^2 j' \sin(6w - 2v_1 - v) \\ & & + \gamma_{95} \eta' \sin^2 j' \sin(6w - 2v_1 - v_1). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten werden hier:

$$(131) \quad \begin{aligned} \gamma_{40} &= \frac{1}{\delta_1} \left[3(\beta_7 + \beta_{11} - \alpha_{40}) - 3\beta_4(2\beta_2 - \frac{1}{2}\alpha_2) - 3\beta_1(2\beta_{14} - \frac{1}{2}\alpha_{14}) - \beta_2(\alpha_{14} - 3\beta_{14}) - \alpha_2\beta_{14} + 3\beta_4(\beta_7 + \beta_{17}) + \frac{\mu\gamma_2\gamma_{14}}{\delta_1} + \frac{\mu^2\gamma_2^2}{\delta_1^2} \right] \\ \gamma_{41} &= \frac{1}{\delta_1} \left[3(\beta_9 - \alpha_{41}) - 3\beta_4(2\beta_3 - \frac{1}{2}\alpha_3) - \beta_3(\alpha_{14} - 3\beta_{14}) - \alpha_3\beta_{14} + 3(\beta_4\beta_8 + \beta_5\beta_{17}) + \frac{\mu\gamma_3\gamma_{14}}{\delta_1} + \frac{\mu^2\gamma_2^2\gamma_3}{\delta_1^2} \right] \\ \gamma_{42} &= \frac{1}{\delta_1} \left[3(\beta_8 + \beta_{12} - \alpha_{42}) - 3\beta_5(2\beta_2 - \frac{1}{2}\alpha_2) - 3\beta_1(2\beta_{15} - \frac{1}{2}\alpha_{15}) - \beta_2(\alpha_{15} - 3\beta_{15}) - \alpha_2\beta_{15} + 3\beta_4(\beta_9 + \beta_{18}) + 3\beta_5\beta_7 + \frac{\mu\gamma_2\gamma_{15}}{\delta_1} + \frac{2\mu^2\gamma_2}{\delta_1^2} \right] \\ \gamma_{43} &= \frac{1}{\delta_1} \left[3(\beta_{10} - \alpha_{43}) - 3\beta_5(2\beta_3 - \frac{1}{2}\alpha_3) - \beta_3(\alpha_{15} - 3\beta_{15}) - \alpha_3\beta_{15} + 3\beta_5(\beta_8 + \beta_{18}) + 3\beta_4\beta_{10} + \frac{\mu\gamma_3\gamma_{15}}{\delta_1} + \frac{2\mu^2\gamma_2^2\gamma_3}{\delta_1^2} \right] \\ \gamma_{44} &= \frac{1}{\delta_1} \left[3(\beta_{13} - \alpha_{44}) - 3\beta_1(2\beta_{16} - \frac{1}{2}\alpha_{16}) - \beta_2(\alpha_{16} - 3\beta_{16}) - \alpha_2\beta_{16} + 3\beta_5\beta_9 + 3\beta_4\beta_{19} + \frac{\mu\gamma_2\gamma_{16}}{\delta_1} + \frac{\mu^2\gamma_2^2\gamma_3}{\delta_1^2} \right] \\ \gamma_{45} &= \frac{1}{\delta_1} \left[-3\alpha_{45} - \beta_3(\alpha_{16} - 3\beta_{16}) - \alpha_3\beta_{16} + 3\beta_5(\beta_{10} + \beta_{19}) + \frac{\mu\gamma_3\gamma_{16}}{\delta_1} + \frac{\mu^2\gamma_3^2}{\delta_1^2} \right] \\ \gamma_{56} &= \frac{1}{3\delta_1} \left[3(\beta_{17} - \alpha_{56}) - 3\beta_4(2\beta_2 - \frac{1}{2}\alpha_2) + 3\beta_4\beta_{11} - 3\beta_1(2\beta_{14} - \frac{1}{2}\alpha_{14}) - \beta_2(\alpha_{14} - 3\beta_{14}) - \alpha_2\beta_{14} + \frac{\mu\gamma_2\gamma_{14}}{\delta_1} + \frac{\mu^2\gamma_2^2}{\delta_1^2} \right] \end{aligned}$$

$$[31] \gamma_{57} = \frac{1}{3\delta_1} \left[3(\beta_{18} - \alpha_{57}) - 3\beta_4(2\beta_3 - \frac{1}{2}\alpha_8) + 3\beta_4\beta_{12} - 3\beta_5(2\beta_2 - \frac{1}{2}\alpha_2) + 3\beta_5\beta_{11} - 3\beta_1(2\beta_{15} - \frac{1}{2}\alpha_{15}) - \beta_2(\alpha_{15} - 3\beta_{15}) \right. \\ \left. - \beta_3(\alpha_{14} - 3\beta_{14}) - \alpha_2\beta_{15} - \alpha_3\beta_{14} + \frac{\mu(\gamma_2\gamma_{15} + \gamma_3\gamma_{14})}{\delta_1} + \frac{3\mu^2\gamma_2^2\gamma_3}{\delta_1^2} \right]$$

$$\gamma_{58} = \frac{1}{3\delta_1} \left[3(\beta_{19} - \alpha_{58}) - 3\beta_5(2\beta_3 - \frac{1}{2}\alpha_3) + 3\beta_5\beta_{12} - 3\beta_1(2\beta_{16} - \frac{1}{2}\alpha_{16}) - \beta_2(\alpha_{16} - 3\beta_{16}) - \beta_3(\alpha_{15} - 3\beta_{15}) - \alpha_2\beta_{16} \right. \\ \left. - \alpha_3\beta_{15} + 3\beta_4\beta_{13} + \frac{\mu(\gamma_2\gamma_{16} + \gamma_3\gamma_{15})}{\delta_1} + \frac{3\mu^2\gamma_2^2\gamma_3^2}{\delta_1^2} \right]$$

$$\gamma_{59} = \frac{1}{3\delta_1} \left[-3\alpha_{59} - \beta_3(\alpha_{16} - 3\beta_{16}) - \alpha_3\beta_{15} + 3\beta_5\beta_{13} + \frac{\mu\gamma_3\gamma_{16}}{\delta_1} + \frac{\mu^2\gamma_3^3}{\delta_1^2} \right]$$

$$\gamma_{64} = \frac{1}{\delta_1} \left[3(\beta_{27} - \alpha_{64}) - 3\beta_1(2\beta_{30} - \frac{1}{2}\alpha_{30}) - \beta_2(\alpha_{30} - 3\beta_{30}) - \alpha_2\beta_{30} + 3\beta_4\beta_{33} + \frac{\mu\gamma_2\gamma_{30}}{\delta_1} \right]$$

$$\gamma_{65} = \frac{1}{\delta_1} \left[-3\alpha_{65} - \beta_3(\alpha_{30} - 3\beta_{30}) - \alpha_3\beta_{30} + 3\beta_5\beta_{33} + \frac{\mu\gamma_3\gamma_{30}}{\delta_1} \right]$$

$$\gamma_{66} = \frac{1}{\delta_1} \left[3(\beta_{28} - \alpha_{66}) - 3\beta_1(2\beta_{31} - \frac{1}{2}\alpha_{31}) - \beta_2(\alpha_{31} - 3\beta_{31}) - \alpha_2\beta_{31} + 3\beta_4\beta_{34} + \frac{\mu\gamma_2\gamma_{31}}{\delta_1} \right]$$

$$\gamma_{67} = \frac{1}{\delta_1} \left[-3\alpha_{67} - \beta_3(\alpha_{31} - 3\beta_{31}) - \alpha_3\beta_{31} + 3\beta_5\beta_{34} + \frac{\mu\gamma_3\gamma_{31}}{\delta_1} \right]$$

$$\gamma_{68} = \frac{1}{\delta_1} \left[3(\beta_{29} - \alpha_{68}) - 3\beta_1(2\beta_{32} - \frac{1}{2}\alpha_{32}) - \beta_2(\alpha_{32} - 3\beta_{32}) - \alpha_2\beta_{32} + 3\beta_4\beta_{35} + \frac{\mu\gamma_2\gamma_{32}}{\delta_1} \right]$$

$$\gamma_{69} = \frac{1}{\delta_1} \left[-3\alpha_{69} - \beta_3(\alpha_{32} - 3\beta_{32}) - \alpha_3\beta_{32} + 3\beta_5\beta_{35} + \frac{\mu\gamma_3\gamma_{32}}{\delta_1} \right]$$

$$\gamma_{90} = \frac{1}{3\delta_1} \left[3(\beta_{33} - \alpha_{90}) - 3\beta_1(2\beta_{30} - \frac{1}{2}\alpha_{30}) - \beta_2(\alpha_{30} - 3\beta_{30}) - \alpha_2\beta_{30} + 3\beta_4\beta_{27} + \frac{\mu\gamma_2\gamma_{30}}{\delta_1} \right]$$

$$\gamma_{91} = \frac{1}{3\delta_1} \left[-3\alpha_{91} - \beta_3(\alpha_{30} - 3\beta_{30}) - \alpha_3\beta_{30} + 3\beta_5\beta_{27} + \frac{\mu\gamma_3\gamma_{30}}{\delta_1} \right]$$

$$\gamma_{92} = \frac{1}{3\delta_1} \left[3(\beta_{34} - \alpha_{92}) - 3\beta_1(2\beta_{31} - \frac{1}{2}\alpha_{31}) - \beta_2(\alpha_{31} - 3\beta_{31}) - \alpha_2\beta_{31} + 3\beta_4\beta_{28} + \frac{\mu\gamma_2\gamma_{31}}{\delta_1} \right]$$

$$\gamma_{93} = \frac{1}{3\delta_1} \left[-3\alpha_{93} - \beta_3(\alpha_{31} - 3\beta_{31}) - \alpha_3\beta_{31} + 3\beta_5\beta_{28} + \frac{\mu\gamma_3\gamma_{31}}{\delta_1} \right]$$

$$\gamma_{94} = \frac{1}{3\delta_1} \left[3(\beta_{35} - \alpha_{94}) - 3\beta_1(2\beta_{32} - \frac{1}{2}\alpha_{32}) - \beta_2(\alpha_{32} - 3\beta_{32}) - \alpha_2\beta_{32} + 3\beta_4\beta_{29} + \frac{\mu\gamma_2\gamma_{32}}{\delta_1} \right]$$

$$\gamma_{95} = \frac{1}{3\delta_1} \left[-3\alpha_{95} - \beta_3(\alpha_{32} - 3\beta_{32}) - \alpha_3\beta_{32} + 3\beta_5\beta_{29} + \frac{\mu\gamma_3\gamma_{32}}{\delta_1} \right]$$

$$\gamma_{102} = \frac{3}{\delta_1} (1 + \beta_4)\beta_{23} \quad \gamma_{103} = \frac{3\beta_5\beta_{23}}{\delta_1}$$

$$\gamma_{104} = \frac{3}{\delta_1} (\beta_{24} + \beta_4\beta_{25}) \quad \gamma_{105} = \frac{3\beta_5\beta_{25}}{\delta_1} \quad \gamma_{106} = \frac{3}{\delta_1} (\beta_{25} + \beta_4\beta_{24})$$

$$\gamma_{107} = \frac{3\beta_5\beta_{24}}{\delta_1} \quad \gamma_{108} = \frac{3}{\delta_1} (1 + \beta_4)\beta_{26} \quad \gamma_{109} = \frac{3\beta_5\beta_{26}}{\delta_1}$$

Somit hätten wir die definitiven Werte der Koeffizienten dritten Grades in K und V erlangt und es gilt dann das auf pag. 64 und 65 Gesagte. Die Reihe der exargumentalen Glieder würde divergieren, wenn sie eine unendliche wäre, für den Grenzwert von δ_1 , für $\delta_1 > \sqrt[2]{m'}$ schreitet sie dagegen nach Potenzen der Excentricität fort. Während in den Gliedern zweiten Grades in V die exargumentalen Teile v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^4}$ sind, sind sie im dritten Grade v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^4} + \frac{m'^3}{\delta_1^6}$. Im vierten Grade sind sie v. d. Ord. $\left(\frac{m'^2}{\delta_1^4} + \frac{m'^3}{\delta_1^6} + \frac{m'^4}{\delta_1^8}\right) \alpha^4$. Also für mittlere Excentricitäten ($\alpha^3 = m'$) und den Grenzwert des $\delta_1 = \sqrt[3]{m'^2}$ wird der durch Vernachlässigung der exargumentalen Glieder vierten Grades begangene Fehler zwischen den Grenzen $\frac{m'}{\delta_1}$ und $\frac{m'}{\delta_1^2}$ liegen. Der Fehler ist beträchtlich, und deswegen kann für die kritischen Planeten die Darstellung der Bewegung nur eine genäherte sein für endliche Zeiträume.

Bei charakteristischen Planeten wird der Fehler infolge Vernachlässigung der exargumentalen Glieder vierten Grades $> m'$ sein, und für Excentricitäten bis zu 6^0 ebenfalls $> m'$, wenn wir schon die exargumentalen Glieder vom dritten Grade fortlassen, denn hier fällt die Reihe rein nach Potenzen der Excentricität. Fassen wir dies zusammen mit dem über R_3 Gesagten, so ist der Schluss nicht unberechtigt, dass man für die Zwecke abgekürzter Tafeln bei charakteristischen Planeten ($\delta_1 > \sqrt[2]{m'}$) und mittleren Excentricitäten bis zu 10^0 nur die exargumentalen Teile dritten Grades in den C-Gliedern zu berücksichtigen braucht; bei Excentricitäten bis zu 5^0 und δ_1 erheblich $> \sqrt[2]{m'}$ wird man den dritten Grad gar nicht mitzunehmen brauchen. Bei kritischen Planeten $\sqrt[2]{m'} \cong \delta_1 > \sqrt[3]{m'^2}$ ist die Mitnahme der exargumentalen Teile in den C- und D-Gliedern dritten Grades erforderlich, nur um den Planetenort genähert (innerhalb der Bogenminute) darzustellen. Eine strenge Darstellung der Bewegung dürfte sich in dem Grenzfalle des δ_1 mit Hilfe der partiellen Integration nicht mehr erreichen lassen und für kritische Planeten überhaupt nur mit bedeutenden Schwierigkeiten zu ermöglichen sein.

Zu bemerken ist noch, dass dies alles nur für endliche Zeiträume gilt, und dass wir hieraus nicht ohne weiteres auf eine Bewegung des betreffenden Planeten für mehr als 100 Jahre schliessen können. Streng kritische Planeten des Hecuba-Typus in unserem Sinne sind bis jetzt noch nicht entdeckt, dadurch wird die Wahrscheinlichkeit, die hier gegebene Methode überall anwenden zu können, fast zur Gewissheit.

Zur Feststellung dessen, inwieweit diese Schlüsse in der Praxis auch wirklich zutreffen, bedarf es selbstverständlich der numerischen Anwendung, und es wird im allgemeinen bei derartig kommensurablen Planeten erst bei der numerischen Rechnung festgestellt werden können, wie weit man zu gehen hat.

Was die Ermittlung der Konstanten γ , γ_0 , a_0 und b_0 betrifft, sowie der A-Glieder in S , R , V , so soll sie zusammen mit den Zusatzgliedern geleistet werden.

7) Die Ermittlung der exargumentalen Teile in \mathfrak{B} gestaltet sich wesentlich einfacher. Da \mathfrak{B} mindestens ersten Grades ist, so können nur exargumentale Glieder zweiter Ordnung im zweiten und dritten Grade auftreten, solche dritter Ordnung überhaupt nur im dritten Grade. Da die Differentialgleichung für \mathfrak{B} zweiter Ordnung ist, so müssen wir behufs Integration die Variation der Parameter anwenden. Die Entwicklungen gestalten sich analog denen für R und wir können daher sofort das Resultat hinschreiben.

$$(132) \quad \begin{aligned} \text{pars } \xi_4 &= -\frac{(2+3\delta_1)\mu c_1 \gamma_2}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)} & \text{pars } \xi_{15} &= -\frac{(2+5\delta_1)\mu c_1 \gamma_2}{6\delta_1^2(1+\delta_1)(2+3\delta_1)} \\ \text{pars } \xi_6 &= -\frac{(2+3\delta_1)\mu c_1 \gamma_3}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)} & \text{pars } \xi_{16} &= -\frac{(2+5\delta_1)\mu c_1 \gamma_3}{6\delta_1^2(1+\delta_1)(2+3\delta_1)} \\ \text{pars } \xi_8 &= -\frac{(2+3\delta_1)\mu c_2 \gamma_2}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)} & \text{pars } \xi_{17} &= -\frac{(2+5\delta_1)\mu c_2 \gamma_2}{6\delta_1^2(1+\delta_1)(2+3\delta_1)} \\ \text{pars } \xi_{10} &= -\frac{(2+3\delta_1)\mu c_2 \gamma_3}{2\delta_1^2(1+\delta_1)(2+\delta_1)} & \text{pars } \xi_{18} &= -\frac{(2+5\delta_1)\mu c_2 \gamma_3}{6\delta_1^2(1+\delta_1)(2+3\delta_1)} \end{aligned}$$

$$(133) \quad \mathfrak{B}_3 =$$

$$\begin{aligned} & \xi_{20} \eta^2 \sin j \sin(4w-v) & + \xi_{24} \eta^2 \sin j' \sin(4w-v_1) & + \xi_{28} \eta^2 \sin j \sin(4w+v-2v) \\ + \xi_{21} \eta \eta' \sin j \sin(4w-v+v-v_1) & + \xi_{25} \eta \eta' \sin j' \sin(4w-v_1+v-v_1) & + \xi_{29} \eta \eta' \sin j \sin(4w+v-v-v_1) \\ + \xi_{22} \eta \eta' \sin j \sin(4w-v-v+v_1) & + \xi_{26} \eta \eta' \sin j' \sin(4w-v_1-v+v_1) & + \xi_{30} \eta'^2 \sin j \sin(4w+v-2v_1) \\ + \xi_{23} \eta'^2 \sin j \sin(4w-v) & + \xi_{27} \eta'^2 \sin j' \sin(4w-v_1) & \\ + \xi_{31} \eta^2 \sin j' \sin(4w+v_1-2v_1) & + \xi_{34} \eta^2 \sin j \sin(4w-v-2v) & + \xi_{37} \eta^2 \sin j' \sin(4w-v_1-2v) \\ + \xi_{32} \eta \eta' \sin j' \sin(4w+v_1-v-v_1) & + \xi_{35} \eta \eta' \sin j \sin(4w-v-v-v_1) & + \xi_{38} \eta \eta' \sin j' \sin(4w-v_1-v-v_1) \\ + \xi_{33} \eta'^2 \sin j' \sin(4w+v_1-2v_1) & + \xi_{36} \eta'^2 \sin j \sin(4w-v-2v_1) & + \xi_{39} \eta'^2 \sin j' \sin(4w-v_1-2v_1) \\ + \xi_{40} \eta^2 \sin j \sin(8w-v-2v) & + \xi_{43} \eta^2 \sin j' \sin(8w-v_1-2v) & + \xi_{46} \sin^3 j \sin(8w-3v) \\ + \xi_{41} \eta \eta' \sin j \sin(8w-v-v-v_1) & + \xi_{44} \eta \eta' \sin j' \sin(8w-v_1-v-v_1) & + \xi_{47} \sin^2 j \sin j' \sin(8w-2v-v_1) \\ + \xi_{42} \eta'^2 \sin j \sin(8w-v-2v_1) & + \xi_{45} \eta'^2 \sin j' \sin(8w-v_1-2v_1) & + \xi_{48} \sin j \sin^2 j' \sin(8w-v-2v_1) \\ & & + \xi_{49} \sin^3 j' \sin(8w-3v_1). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten haben folgende Werte:

$$(134) \quad \begin{aligned} \xi_{20} &= -\frac{\mu(c_4+c_{15})\gamma_2}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_1 \gamma_2^2}{2\delta_1^3} & \xi_{22} &= -\frac{\mu(c_6\gamma_2+c_{15}\gamma_3)}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_1 \gamma_2 \gamma_3}{2\delta_1^3} \\ \xi_{21} &= -\frac{\mu(c_4\gamma_3+c_{16}\gamma_2)}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_1 \gamma_2 \gamma_3}{2\delta_1^3} & \xi_{23} &= -\frac{\mu(c_6+c_{16})\gamma_3}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_1 \gamma_3^2}{2\delta_1^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (134) \quad \xi_{24} &= -\frac{\mu(c_8 + c_{17})\gamma_2}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_2 \gamma_2^2}{2\delta_1^3} & \xi_{26} &= -\frac{\mu(c_{10}\gamma_2 + c_{17}\gamma_3)}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_2 \gamma_2 \gamma_3}{2\delta_1^3} \\
 \xi_{25} &= -\frac{\mu(c_8\gamma_3 + c_{18}\gamma_3)}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_2 \gamma_2 \gamma_3}{2\delta_1^3} & \xi_{27} &= -\frac{\mu(c_{10} + c_{18})\gamma_3}{4\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_2 \gamma_3^2}{2\delta_1^3} \\
 \xi_{28} &= -\frac{\mu c_3 \gamma_2}{4\delta_1^2} & \xi_{31} &= -\frac{\mu c_7 \gamma_2}{4\delta_1^2} & \xi_{34} &= \frac{\mu c_{11} \gamma_2}{4\delta_1^2} \\
 \xi_{29} &= -\frac{\mu(c_5\gamma_3 + c_5\gamma_3)}{4\delta_1^2} & \xi_{32} &= -\frac{\mu(c_7\gamma_3 + c_9\gamma_2)}{4\delta_1^2} & \xi_{35} &= \frac{\mu(c_{11}\gamma_3 + c_{12}\gamma_2)}{4\delta_1^2} \\
 \xi_{30} &= -\frac{\mu c_5 \gamma_3}{4\delta_1^2} & \xi_{33} &= -\frac{\mu c_9 \gamma_3}{4\delta_1^2} & \xi_{36} &= \frac{\mu c_{12} \gamma_3}{4\delta_1^2} \\
 \xi_{37} &= \frac{\mu c_{13} \gamma_2}{4\delta_1^2} & \xi_{38} &= \frac{\mu(c_{13}\gamma_3 + c_{14}\gamma_2)}{4\delta_1^2} & \xi_{39} &= \frac{\mu c_{14} \gamma_3}{4\delta_1^2} \\
 (135) \quad \xi_{40} &= -\frac{\mu(c_1\gamma_{14} + c_{15}\gamma_2)}{8\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_1 \gamma_2^2}{8\delta_1^3} & \xi_{43} &= -\frac{\mu(c_2\gamma_{14} + c_{17}\gamma_2)}{8\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_2 \gamma_2^2}{8\delta_1^3} \\
 \xi_{41} &= -\frac{\mu(c_1\gamma_{15} + c_{15}\gamma_3 + c_{16}\gamma_2)}{8\delta_1^2} - \frac{2\mu^2 c_1 \gamma_2 \gamma_3}{8\delta_1^3} & \xi_{44} &= -\frac{\mu(c_2\gamma_{15} + c_{17}\gamma_3 + c_{18}\gamma_2)}{8\delta_1^2} - \frac{2\mu^2 c_2 \gamma_2 \gamma_3}{8\delta_1^3} \\
 \xi_{42} &= -\frac{\mu(c_1\gamma_{16} + c_{16}\gamma_3)}{8\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_1 \gamma_3^2}{8\delta_1^3} & \xi_{45} &= -\frac{\mu(c_2\gamma_{16} + c_{18}\gamma_3)}{8\delta_1^2} - \frac{\mu^2 c_2 \gamma_3^2}{8\delta_1^3} \\
 \xi_{46} &= -\frac{\mu c_1 \gamma_{30}}{8\delta_1^2} & \xi_{48} &= -\frac{\mu(c_2\gamma_{31} + c_1\gamma_{32})}{8\delta_1^2} \\
 \xi_{47} &= -\frac{\mu(c_2\gamma_{30} + c_1\gamma_{31})}{8\delta_1^2} & \xi_{49} &= -\frac{\mu c_2 \gamma_{32}}{8\delta_1^2}
 \end{aligned}$$

Ueber die Reihe der exargumentalen Glieder und ihre Konvergenz gilt das für R Gesagte. Hier werden jedoch alle Glieder um einen Grad erhöht, da β mindestens ersten Grades ist. Die Glieder dritten Grades wird man hier bei charakteristischen Planeten und mittleren Neigungen stets vernachlässigen dürfen, so lange es sich um abgekürzte Tafeln handelt. Sie müssen dagegen bei kritischen Planeten berücksichtigt werden. Die Glieder vierten Grades können stets fortgelassen werden, da sie in maximo werden $\left(\frac{m'}{\delta_1} + \frac{m'^2}{\delta_1^3} + \frac{m'^3}{\delta_1^5} + \frac{m'^4}{\delta_1^7}\right) \times (m')$ für Excentricitäten und Neigungen bis zu 10° . Mithin wird für $\delta_1 > \sqrt[3]{m'^2}$ der Fehler innerhalb der Grenzen $\frac{m'}{\delta_1}$ und $\frac{m'^2}{\delta_1}$ liegen.

§ 3. Berechnung der konstanten und secularen Glieder, sowie der Zusatzglieder ersten und zweiten Grades.

8) Die elementaren Glieder hatten wir, soweit sie von der Form B und ersten Grades sind, bereits vollständig behandelt [Formel (72), (73) für (λ) und Formel (60), (113), (114) für (ϱ)]. Die aus dem dritten Grade hinzutretenden Zusätze wollten wir nicht berücksichtigen. Die Konstanten sind, soweit sie vom nullten Grade waren, ebenfalls behandelt [Formel (67) und (69)]. Es erübrigt jetzt noch die A-Glieder, welche mindestens zweiten Grades sind, zu ermitteln sowie die entstehenden konstanten Teile zweiten Grades. Ausserdem wollten wir die A-Glieder in V_2 während des Integrationsprozesses in seculare Form bringen, um das Auftreten eines Divisors m'^2 zu verhindern. Wir hatten die A-Glieder in den Differentialgleichungen hergestellt, ebenso ihre exargumentalen Zusätze, soweit solche berücksichtigt werden, und jetzt ist nur noch die Integration auszuführen. Hierbei muss wenigstens in S und V , wo kleine Divisoren v. d. Ord. m' auftreten, die Variabilität von η , Π etc. berücksichtigt werden, und wir wollen diese Rechnung im Zusammenhange mit den Zusatzgliedern durchführen.

Es war nach (76):

$$(136) \quad T_a S_2 = \int q_7 \sin j \sin j' \sin(\sigma - \sigma_1) dv.$$

Nach Formel (101) wird dies aber:

$$(137) \quad T_a S_2 = \sum \frac{q_7}{\tau - \tau_n} \sin \iota \sin \iota'_n \cos(\vartheta - \vartheta_n) + \mathbf{S} \frac{q_7}{\tau_m - \tau_n} [\sin \iota_m \sin \iota'_n - \sin \iota_n \sin \iota'_m] \cos(\vartheta_m - \vartheta_n).$$

Ein konstanter Teil entsteht hieraus nicht. $\frac{q_7}{\tau_k - \tau_l}$ ist v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$.

In der Differentialgleichung für R erhalten die A-Glieder keine kleinen Divisoren, und wir können dort η , Π etc. als konstant ansehen. Wendet man auf die Formel (78) die Variation der Parameter an und vereinigt die entstehenden Glieder mit den aus Formel (110) hervorgehenden exargumentalen Teilen, so folgt, wie man leicht ausrechnen kann:

$$(138) \quad \left. \begin{aligned} g_1 \\ g_2 \end{aligned} \right\} = [b_{0.2.0} - 2\delta_1 \mu \alpha_2 \gamma_2] \int \eta^2 \frac{\cos v}{\sin v} dv + \left[\frac{b_{0.1.1}^+}{2} + \frac{\mu \alpha_2 \gamma_3}{1 + \delta_1} - \frac{\mu \alpha_3 \gamma_2}{1 - \delta_1} \right] \int \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} (\Pi - \Pi_1 + v) dv \\ \pm \left[\frac{b_{0.1.1}^+}{2} + \frac{\mu \alpha_3 \gamma_2}{1 + \delta_1} - \frac{\mu \alpha_2 \gamma_3}{1 - \delta_1} \right] \int \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} (\Pi - \Pi_1 - v) dv + [b_{0.0.2} - 2\delta_1 \mu \alpha_3 \gamma_3] \int \eta'^2 \frac{\cos v}{\sin v} dv \\ + \bar{b}_{0.2.0} \int \sin^2 j \frac{\cos v}{\sin v} dv + \frac{\bar{b}_{0.1.1}^+}{2} \int \sin j \sin j' \left[\frac{\cos}{\sin} (\sigma - \sigma_1 + v) \pm \frac{\cos}{\sin} (\sigma - \sigma_1 - v) \right] dv + \bar{b}_{0.0.2} \int \sin^2 j' \frac{\cos v}{\sin v} dv,$$

wo nur δ_1^2 gegen die Einheit im Nenner vernachlässigt ist, mit einem Fehler v. d. Ord. $m'^2 \times \delta_1$ im Integral. Wendet man hierauf die Formel (101) an und

berücksichtigt nur den entstehenden konstanten Teil, so folgt für das Integral selbst:

$$(139) \text{ pars const. } R_2 = [b_{0.2.0} - 2\delta_1 u \alpha_2 \gamma_2] (\chi^2 + \sum \chi_n^2) + [b_{0.1.1}^{+1} - 2\delta_1 u (\alpha_2 \gamma_3 + \alpha_3 \gamma_2)] \sum \chi_n \chi_n' \\ + [b_{0.0.2} - 2\delta_1 u \alpha_3 \gamma_3] \sum \chi_n'^2 \\ + \bar{b}_{0.2.0} (\sin^2 \iota + \sum \sin^2 \iota_n) + \bar{b}_{0.0.1}^{+1} \sum \sin \iota_n \sin \iota_n' + \bar{b}_{0.0.2} \sum \sin^2 \iota_n'.$$

Wie aus Formel (137) hervorgeht, kommen aus $T_a S_2$ nur periodische Zusätze in $T_a R_2$ hinein. Was den elementaren Teil betrifft, so wollten wir nur die Ordnung $\frac{m'}{\delta_1}$ resp. m' und $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ berücksichtigen. Deswegen können wir (138) in Hinsicht auf Formel (101) schreiben:

$$(140) \left. \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix} \right\} = \left[b_{0.2.0} \sum \chi \chi_n + \frac{b_{0.1.1}^{+1}}{2} \sum \chi \chi_n' \right] \int \left[\frac{\cos(\omega - \omega_n + v) \pm \cos(\omega - \omega_n - v)}{\sin(\omega - \omega_n + v)} \right] dv \\ + \left[b_{0.2.0} \mathbf{S} \chi_m \chi_n + \frac{b_{0.1.1}^{+1}}{2} \mathbf{S} (\chi_m \chi_n' + \chi_n \chi_m') + b_{0.0.2} \mathbf{S} \chi_m' \chi_n' \right] \int \left[\frac{\cos(\omega_m - \omega_n + v) \pm \cos(\omega_m - \omega_n - v)}{\sin(\omega_m - \omega_n + v)} \right] dv$$

Bei dem Neigungsteil von $T_a R_2$ ist noch das aus $2T_a S_2$ kommende A-Glied zu berücksichtigen. Wir können demnach mit Hilfe der bekannten Formeln für $\sin^2 j$ etc. die Differentialgleichung (78) genau genug für die A-Glieder schreiben:

$$(141) T_a \left(\frac{d^2 R_2}{dv^2} + R_2 \right) = \sum \left[-2p_6 \sin \iota \sin \iota_n - \left(p_7 - \frac{2q_7}{\tau - \tau_n} \right) \sin \iota \sin \iota_n' \right] \cos(\vartheta - \vartheta_n) \\ + S \left[-2p_6 \sin \iota_m \sin \iota_n - \left(p_7 - \frac{2q_7}{\tau_m - \tau_n} \right) \sin \iota_m \sin \iota_n' - \left(p_7 + \frac{2q_7}{\tau_m - \tau_n} \right) \sin \iota_n \sin \iota_m' - 2p_8 \sin \iota_m' \sin \iota_n' \right] \cos(\vartheta_m - \vartheta_n)$$

Integriert man nun (140) und (141) und vernachlässigt die s_n und τ_n im Nenner der Einheit gegenüber, so folgt:

$$(142) T_a R_2 = \sum \bar{b}_{I.n} \cos(\omega - \omega_n) + \mathbf{S} \bar{b}_{II.m.n} \cos(\omega_m - \omega_n) + \sum \bar{b}_{III.n} \cos(\vartheta - \vartheta_n) + \mathbf{S} \bar{b}_{IV.m.n} \cos(\vartheta_m - \vartheta_n),$$

wo über die Summenbezeichnung auf pag. 71 das Nähere gesagt war. Hier ist hinreichend genau:

$$(143) \begin{aligned} \bar{b}_{I.n} &= [(-2p_3 + q_1 + \alpha_2^2) \chi_n + (-p_4 + \frac{1}{2} q_2 + \alpha_2 \alpha_3) \chi_n'] \chi \\ \bar{b}_{II.m.n} &= [(-2p_3 + q_1 + \alpha_2^2) \chi_n + (-p_4 + \frac{1}{2} q_2 + \alpha_2 \alpha_3) \chi_n'] \chi_m + [(-p_4 + \frac{1}{2} q_2 + \alpha_2 \alpha_3) \chi_n + (-2p_5 + \alpha_3^2) \chi_n'] \chi_m' \\ \bar{b}_{III.n} &= \left[-2p_6 \sin \iota_n + \left(-p_7 + \frac{2q_7}{\tau - \tau_n} \right) \sin \iota_n' \right] \sin \iota \\ \bar{b}_{IV.m.n} &= \left[-2p_6 \sin \iota_n + \left(-p_7 + \frac{2q_7}{\tau_m - \tau_n} \right) \sin \iota_n' \right] \sin \iota_m + \left[\left(-p_7 - \frac{2q_7}{\tau_m - \tau_n} \right) \sin \iota_n - 2p_8 \sin \iota_n' \right] \sin \iota_m'. \end{aligned}$$

Demnach ist durch (142) und (143) $T_a R_2$ definitiv gegeben unter Berücksichtigung der Glieder v. d. Ord. m' resp. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ und $\frac{m'}{\delta_1}$, wie wir es beabsichtigt

batten. In (139) ist der konstante Teil von R_2 gegeben und zwar auch die Glieder v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ mit eingeschlossen. Zu diesem Werte kommt jedoch noch ein Teil aus den Zusatzgliedern, bedingt durch die Form der Differentialgleichung, welcher zusammen mit den Zusatzgliedern ermittelt werden soll.

Jetzt wollen wir den konstanten Teil sowie die A-Glieder in $T_a \left(\frac{dV_2}{dv} \right)$ herleiten. Wir wollen bedenken, dass wir für den konstanten Teil auch Glieder v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ mitnehmen. Nach Formel (81) war:

$$T_a V_2 = T_{0.2.0} \int \eta^2 dv + T_{0.1.1}^{+1} \int \eta \eta' \cos(\Pi - \Pi_1) dv + T_{0.0.2} \int \eta'^2 dv \\ + \bar{T}_{0.2.0} \int \sin^2 j dv + \bar{T}_{0.1.1}^{+1} \int \sin j \sin j' \cos(\sigma - \sigma_1) dv + \bar{T}_{0.0.2} \int \sin^2 j' dv.$$

Die Koeffizienten wollen wir aber noch genauer geben, als es in Formel (82) geschehen, da wir $T_a R_2$ incl. der exargumentalen Glieder ermittelt haben, ebenso kommen nach (123a) einige exargumentale Glieder hinzu. Nach Formel (100) und (101) lautet das Integral, wenn wir uns alle diese Zusätze hinzugefügt denken, für den secularen Teil:

$$(144) \quad T_a V_2 = [T_{0.2.0}(\chi^2 + \sum \chi_n^2) + T_{0.1.1}^{+1} \sum \chi_n \chi_n' + T_{0.0.2} \sum \chi_n'^2] v \\ + [\bar{T}_{0.2.0}(\sin^2 \iota + \sum \sin^2 \iota_n) + \bar{T}_{0.1.1}^{+1} \sum \sin \iota_n \sin \iota_n' + \bar{T}_{0.0.2} \sum \sin^2 \iota_n'] v.$$

In den T -Koeffizienten haben wir uns den exargumentalen Teil aus (123a), sowie $T_a S_2$ und $T_a R_2$ einschl. des exargumentalen Teiles enthalten zu denken, und zwar sind alle Glieder bis auf Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ mitgenommen. Dies ist für den konstanten Teil notwendig. Nun wollten wir diesen konstanten Teil zerlegen in $c_0 + \gamma + \gamma_0$, wo c_0 rein v. d. Ord. der Masse ist, und γ_0 erst durch die Integration aus $\frac{dV}{dv}$ entsteht, also aus der Integration von (123a) herührt. Zerlegen wir die Konstante in dieser Weise, so folgt, gleich in definitiver Form geschrieben:

$$(145) \quad \gamma_0 = \frac{\mu \gamma_2^2}{\delta_1} (\chi^2 + \sum \chi_n^2) + \frac{2\mu \gamma_2 \gamma_3}{\delta_1} \sum \chi_n \chi_n' + \frac{\mu \gamma_3^2}{\delta_1} \sum \chi_n'$$

$$(146) \quad \text{pars } \gamma = \xi_1 (\chi^2 + \sum \chi_n^2) + \xi_2 \sum \chi_n \chi_n' + \xi_3 \sum \chi_n'^2 \\ + \xi_4 (\sin^2 \iota + \sum \sin^2 \iota_n) + \xi_5 \sum \sin \iota_n \sin \iota_n' + \xi_6 \sum \sin^2 \iota_n'$$

Die Koeffizienten sind hier:

$$(147) \quad \xi_1 = -\alpha_2 (\alpha_2 - \frac{3}{2} \beta_1) - \beta_2 (\alpha_2 + 6\beta_1 - \frac{3}{2} \beta_2) + \frac{3}{2} \beta_4^2 + 3\beta_1 \beta_7 \\ \xi_2 = -2\alpha_3 (\alpha_2 - \frac{3}{4} \beta_1) - \beta_2 (\alpha_3 - \frac{3}{2} \beta_3) - \beta_3 (\alpha_2 + 6\beta_1 - \frac{3}{2} \beta_2) + 3\beta_4 \beta_5 + 3\beta_1 (\beta_8 + \beta_9) \\ \xi_3 = -\alpha_3^2 - \beta_3 (\alpha_3 - \frac{3}{2} \beta_3) + \frac{3}{2} \beta_5^2 + 3\beta_1 \beta_{10} \\ \xi_4 = 3\beta_1 \beta_{23}, \quad \xi_5 = 3\beta_1 (\beta_{24} + \beta_{25}), \quad \xi_6 = 3\beta_1 \beta_{26}.$$

Aus der Bedingung: $c_0 = 0 = a_0 - 2b_0$ folgt:

$$(148) \quad \begin{aligned} \text{pars } a_0 &= x_1(x^2 + \sum x_n^2) + x_2 \sum x_n x_n' + x_3 \sum x_n'^2 \\ &\quad + x_4(\sin^2 \iota + \sum \sin^2 \iota_n) + x_5 \sum \sin \iota_n \sin \iota_n' + x_6 \sum \sin^2 \iota_n' \\ \text{pars } b_0 &= \frac{1}{2} a_0, \end{aligned}$$

wo:

$$(149) \quad \begin{aligned} x_1 &= -2p_3 + p_0^{(0)} + q_1 + a_1 + \alpha_2(q_1 - 2p_2) + \beta_1(q_7 + a_7) + \beta_2(q_2 - \frac{3}{2}a_1) \\ &\quad + \beta_4(q_4 + a_4 - \frac{3}{2}S_{4,0,0} + 6R_{4,0,0}) + \beta_7(q_1 + a_1) - 4\delta_1 \mu \alpha_2 \gamma_2 \\ x_2 &= -2p_4 + q_2 + a_2 - 2\alpha_2 p_3 + \alpha_3(q_1 - 2p_2) + \beta_1(q_8 + q_9 + a_8 + a_9) + \beta_2 q_3 + \beta_3(q_2 - \frac{3}{2}a_1) \\ &\quad + \beta_4(q_5 + a_5) + \beta_5(q_4 + a_4 - \frac{3}{2}S_{4,0,0} + 6R_{4,0,0}) + (\beta_8 + \beta_9)(q_1 + a_1) - 4\delta_1 \mu (\alpha_2 \gamma_3 + \alpha_3 \gamma_2) \\ x_3 &= -2p_5 - 2\alpha_3 p_3 + \beta_1(q_{10} + a_{10}) + \beta_3 q_3 + \beta_5(q_5 + a_5) + \beta_{10}(q_1 + a_1) - 4\delta_1 \mu \alpha_3 \gamma_3 \\ x_4 &= -2p_6 + \beta_1(q_{23} + a_{23}) + \beta_{23}(q_1 + a_1) \\ x_5 &= -2p_7 + \beta_1(q_{24} + q_{25} + a_{24} + a_{25}) + (\beta_{24} + \beta_{25})(q_1 + a_1) \\ x_6 &= -2p_8 + \beta_1(q_{26} + a_{26}) + \beta_{26}(q_1 + a_1). \end{aligned}$$

Zu γ kommt noch, bedingt durch die Form der Differentialgleichung für W , ein Teil aus den Zusatzgliedern hinzu, der v. d. Ord. $\frac{m^{13}}{\delta_1^3}$ resp. $\frac{m^{14}}{\delta_1^4}$ ist. Die Werte für a_0 , b_0 , γ_0 sind dagegen definitive.

Wir müssen jetzt die Werte der A-Glieder ermitteln, und zwar kann dies gleich in definitiver Form geschehen, da die aus den Zusatzgliedern resultierenden Teile hierfür nicht in Betracht kommen. Formel (81) können wir unter Benutzung der bekannten Reihen und Fortlassung der konstanten Glieder, wenn nur die Glieder v. d. Ord. m' , $\frac{m'}{\delta_1}$, $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ mitgenommen werden und die Formeln (137) und (142) für $T_a R_2$ benutzt werden, folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} T_a V_2 &= \int \sum (2\bar{w}_1 x_n + \bar{w}_2 x_n') x \cos(\omega - \omega_n) dv \\ &\quad + \int \mathbf{S} [(2\bar{w}_1 x_n + \bar{w}_2 x_n') x_m + (\bar{w}_2 x_n + 2\bar{w}_3 x_n') x_m'] \cos(\omega_m - \omega_n) dv \\ &\quad + \int \sum \left[2\bar{w}_4 \sin \iota_n + \left(\bar{w}_5 - \frac{3q_7}{\tau - \tau_n} \right) \sin \iota_n' \right] \sin \iota \cos(\vartheta - \vartheta_n) dv \\ &\quad + \int \mathbf{S} \left\{ \left[2\bar{w}_4 \sin \iota_n + \left(\bar{w}_5 - \frac{3q_7}{\tau_m - \tau_n} \right) \sin \iota_n' \right] \sin \iota_m \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\bar{w}_5 + \frac{3q_7}{\tau_m - \tau_n} \right) \sin \iota_n + 2\bar{w}_6 \sin \iota_n' \right] \sin \iota_m' \right\} \cos(\vartheta_m - \vartheta_n) dv. \end{aligned}$$

Weiter führen wir eine abgekürzte Bezeichnung ein:

$$(150) \quad \begin{aligned} T_a V_2 &= \int \sum \bar{\xi}_{5,n} \cos(\omega - \omega_n) dv + \int \mathbf{S} \bar{\xi}_{6,m,n} \cos(\omega_m - \omega_n) dv \\ &\quad + \int \sum \bar{\xi}_{7,n} \cos(\vartheta - \vartheta_n) dv + \int \mathbf{S} \bar{\xi}_{8,m,n} \cos(\vartheta_m - \vartheta_n) dv. \end{aligned}$$

Die Werte der Koeffizienten sind:

$$(151) \quad \begin{aligned} \bar{\xi}_{5,n} &= [2\bar{w}_1 \kappa_n + \bar{w}_2 \kappa'_n] \kappa \\ \bar{\xi}_{6,m,n} &= [2\bar{w}_1 \kappa_n + \bar{w}_2 \kappa'_n] \kappa_m + [\bar{w}_2 \kappa_n + \bar{w}_3 \kappa'_n] \kappa'_m \\ \bar{\xi}_{7,n} &= \left[2\bar{w}_4 \sin \iota_n + \left(\bar{w}_5 - \frac{3q_7}{\tau - \tau_n} \right) \sin \iota'_n \right] \sin \iota \\ \bar{\xi}_{8,m,n} &= \left[2\bar{w}_4 \sin \iota_n + \left(\bar{w}_5 - \frac{3q_7}{\tau_m - \tau_n} \right) \sin \iota'_n \right] \sin \iota_m + \left[\left(\bar{w}_5 + \frac{3q_7}{\tau_m - \tau_n} \right) \sin \iota_n + 2\bar{w}_6 \sin \iota'_n \right] \sin \iota'_m \\ \bar{w}_1 &= 2p_3 - q_1 - \alpha_1 - p_0^{(0)} + \xi_1 + \frac{\mu \gamma_2^2}{\delta_1} & \bar{w}_4 &= 2p_6 + \xi_4 \\ \bar{w}_2 &= 2p_4 - q_2 - \alpha_2 + \xi_2 + \frac{2\mu \gamma_2 \gamma_3}{\delta_1} & \bar{w}_5 &= 2p_7 + \xi_5 \\ \bar{w}_3 &= 2p_5 + \xi_3 + \frac{\mu \gamma_3^2}{\delta_1} & \bar{w}_6 &= 2p_8 + \xi_6. \end{aligned}$$

Ehe wir an die Integration von (150) gehen, müssen wir diese Gleichung in seculare Form bringen. Zu diesem Zwecke nehmen wir die konstanten Teile aus den Cosinuszeichen heraus, da ja ist

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_n) &= (s - s_n) v + (\Gamma - \Gamma_n) \\ (\vartheta - \vartheta_n) &= -(\tau - \tau_n) v + (\Theta - \Theta_n). \end{aligned}$$

$$(152) \quad \begin{aligned} \xi_{1,n} &= \bar{\xi}_{5,n} \cos(\Gamma - \Gamma_n) & \xi_{5,n} &= \bar{\xi}_{7,n} \cos(\Theta - \Theta_n) \\ \xi_{2,n} &= -\bar{\xi}_{5,n} \sin(\Gamma - \Gamma_n) & \xi_{6,n} &= \bar{\xi}_{7,n} \sin(\Theta - \Theta_n) \\ \xi_{3,m,n} &= \bar{\xi}_{6,m,n} \cos(\Gamma_m - \Gamma_n) & \xi_{7,m,n} &= \bar{\xi}_{8,m,n} \cos(\Theta_m - \Theta_n) \\ \xi_{4,m,n} &= -\bar{\xi}_{6,m,n} \sin(\Gamma_m - \Gamma_n) & \xi_{8,m,n} &= \bar{\xi}_{8,m,n} \sin(\Theta_m - \Theta_n). \end{aligned}$$

Dann geht (150) über in:

$$\begin{aligned} T_a V_2 &= \int \sum \xi_{1,n} \cos(s - s_n) v dv + \int \sum \xi_{2,n} \sin(s - s_n) v dv + \int \mathbf{S} \xi_{3,m,n} \cos(s_m - s_n) v dv \\ &+ \int \mathbf{S} \xi_{4,m,n} \sin(s_m - s_n) v dv + \int \sum \xi_{5,n} \cos(\tau - \tau_n) v dv + \int \sum \xi_{6,n} \sin(\tau - \tau_n) v dv \\ &+ \int \mathbf{S} \xi_{7,m,n} \cos(\tau_m - \tau_n) v dv + \int \mathbf{S} \xi_{8,m,n} \sin(\tau_m - \tau_n) v dv. \end{aligned}$$

Wenden wir hierauf jetzt die bekannte Reihe für Sinus und Cosinus an und schreiben abkürzend unter Vernachlässigung der dritten Potenz:

$$(153) \quad \begin{aligned} \bar{p}_0 &= \sum \xi_{1,n} + \xi_{5,n} + \mathbf{S} \xi_{3,m,n} + \xi_{7,m,n} \\ \bar{q} &= \frac{1}{2} \sum (s - s_n) \xi_{2,n} + (\tau - \tau_n) \xi_{6,n} + \frac{1}{2} \mathbf{S} (s_m - s_n) \xi_{4,m,n} + (\tau_m - \tau_n) \xi_{8,m,n} \\ \bar{g} &= -\frac{1}{6} \sum (s - s_n)^2 \xi_{1,n} + (\tau - \tau_n)^2 \xi_{5,n} - \frac{1}{6} \mathbf{S} (s_m - s_n)^2 \xi_{3,m,n} + (\tau_m - \tau_n)^2 \xi_{7,m,n}, \end{aligned}$$

so geht die vorige Gleichung über in:

$$(154) \quad T_a V_2 = \int \bar{p}_0 dv + 2 \int \bar{q} v dv + 3 \int \bar{g} v^2 dv.$$

Wie hieraus hervorgeht, tritt durch die Verwandlung in *seculare* Form noch ein konstantes Glied zweiten Grades auf. Nicht aber in der Differentialgleichung $\frac{dV_2}{dv}$, denn sonst hätten wir es mit μ_1 vereinigen müssen, vielmehr während des Integrationsprozesses, und ist dem γ_0 gleich zu achten. Integrieren wir nun, so erhalten wir als definitives Resultat:

$$(155) \quad T_a V_2 = (\gamma + \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 + \bar{g}v + \bar{g}v^2)v.$$

Hätte man nach dem Integrationsprozesse $T_a V_2$ in *seculare* Form gebracht, so wäre, abgesehen von einer Konstanten, das Resultat dasselbe geworden. Das Auftreten dieser Konstanten bewirkt, dass wir das Element \mathcal{A} anders erhalten.

$\bar{\gamma}_0$ ist v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ und zweiten Grades, \bar{g} ist dagegen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ und zweiten Grades, also schon beträchtlich klein, \bar{g} ist v. d. Ord. $\frac{m'^3}{\delta_1}$ und zweiten Grades und kann wohl meistens fortgelassen werden. In Fällen mittlerer Excentricitäten und charakteristischer Planeten wird man nur $\bar{\gamma}_0$ zu berücksichtigen haben.

Hätte man $T_a V_2$ in periodischer Form integriert und dann die trigonometrischen Funktionen in Potenzreihen entwickelt, so hätte man erhalten:

$$T_a V_2 = a + bv + cv^2 + \dots$$

$$nt + \mathcal{A} = v + \sum B_n \sin nv + K + V = a + (1 + b + cv + \dots)v + \text{pars per.}$$

oder, da $v = nt$ gesetzt werden kann, abgesehen von periodischen Gliedern:

$$nt + \mathcal{A} = a + (1 + b + c't + \dots)nt + \text{per. Glieder.}$$

Lassen wir also $T_a V_2$ ganz fort, so wird nicht nur \mathcal{A} einen um a anderen Wert erhalten, sondern auch n wird um b anders und sich ausserdem proportional der Zeit ändern. Da wir vor der Integration die *seculare* Form herstellen und $T_a V_2$ berücksichtigen wollten, so erhielten wir nach (155):

$$T_a V_2 = bnt + c'nt^2 + \dots + \text{per. Glieder,}$$

wir werden also \mathcal{A} ebenfalls um a anders erhalten, n dagegen richtig und fast konstant, sicher für den hier betrachteten endlichen Zeitraum, da wir nur höhere Potenzen der Zeit vernachlässigen, die merklich werdenden aber mitnehmen. Das Resultat wird einmal genauer, und dann ist das Auftreten von Gliedern von der nullten resp. $\left(\frac{1}{\delta_1}\right)$ -ten Ordnung vermieden.

Da die A-Glieder in \mathfrak{Z}_2 keinen kleinen Divisor erhalten, so könnten wir sie fortlassen, und dies wird auch in den meisten Fällen gerechtfertigt sein. Es soll jedoch $T_a \mathfrak{Z}_2$ mit derselben Genauigkeit gegeben werden wie $T_a R_2$. Hier tritt

der Sinus in der Differentialgleichung auf, demnach sind konstante Glieder ausgeschlossen; ebenso sind, wie früher erörtert, die exargumentalen Teile ohne Bedeutung. Der Wert für $T_a \mathfrak{B}_2$ ist ohne Schwierigkeit aus Formel (89) zu ermitteln. Ich will hier nur das Resultat geben:

$$(156) \quad T_a \mathfrak{B}_2 = \bar{c}_I \sin(\vartheta - \omega) + \sum \bar{c}_{II,n} \sin(\vartheta - \omega_n) + \sum \bar{c}_{III,n} \sin(\vartheta_n - \omega) + \sum \bar{c}_{IV,n} \sin(\vartheta_n - \omega_n) \\ + \mathbf{S} \bar{c}_{V,m,n} \sin(\vartheta_m - \omega_n) + \mathbf{S} \bar{c}_{VI,m,n} \sin(\vartheta_n - \omega_m)$$

$$\bar{c}_I = -(\delta_3 + \frac{1}{2} q_1) \varkappa \sin \iota$$

$$\bar{c}_{II,n} = -[(\delta_3 + \frac{1}{2} q_1) \varkappa_n + (\delta_4 + \frac{1}{2} q_2) \varkappa'_n] \sin \iota$$

$$\bar{c}_{III,n} = -[(\delta_3 + \frac{1}{2} q_1) \sin \iota_n + \delta_5 \sin \iota'_n] \varkappa$$

$$\bar{c}_{IV,n} = -[(\delta_3 + \frac{1}{2} q_1) \varkappa_n + (\delta_4 + \frac{1}{2} q_2) \varkappa'_n] \sin \iota_n - [\delta_5 \varkappa_n + \delta_6 \varkappa'_n] \sin \iota'_n$$

$$\bar{c}_{V,m,n} = -[(\delta_3 + \frac{1}{2} q_1) \varkappa_n + (\delta_4 + \frac{1}{2} q_2) \varkappa'_n] \sin \iota_m - [\delta_5 \varkappa_n + \delta_6 \varkappa'_n] \sin \iota'_m$$

$$\bar{c}_{VI,m,n} = -[(\delta_3 + \frac{1}{2} q_1) \sin \iota_n + \delta_5 \sin \iota'_n] \varkappa_m - [(\delta_4 + \frac{1}{2} q_2) \sin \iota_n + \delta_6 \sin \iota'_n] \varkappa'_m,$$

wo hier wieder in den Divisoren die g gegenüber der Einheit vernachlässigt sind.

9) Wir haben jetzt die aus der Veränderlichkeit der langperiodischen Funktionen η , Π , $\sin j$, σ etc. hervorgehenden Zusatzglieder aufzustellen. Wir wenden zu diesem Zwecke die am Anfange des Kapitels auseinandergesetzte Methode der partiellen Integration an und werden die ersten Differentialquotienten dieser Funktionen bei der Integration schon als konstant ansehen mit einer hinreichenden Genauigkeit. Diese Zusatzglieder werden wir nur dort ermitteln, wo die Terme im Integral einen kleinen Divisor von der Ordnung δ_1 erhalten. Wo der Divisor s_n resp. τ_n auftritt, ist ja die Veränderlichkeit dieser Funktionen im vorigen Abschnitte von vornherein berücksichtigt worden.

Wir werden also Zusatzglieder in S nur bei den charakteristischen Gliedern der Form C erhalten. Es war:

$$\frac{dS}{dv} = -[\alpha_2] \eta \sin(2w - v) - [\alpha_3] \eta' \sin(2w - v_1) \\ - [\alpha_{14}] \eta^2 \sin(4w - 2v) - [\alpha_{15}] \eta \eta' \sin(4w - v - v_1) - [\alpha_{16}] \eta'^2 \sin(4w - 2v_1) \\ - [\alpha_{30}] \sin^2 j \sin(4w - 2v) - [\alpha_{31}] \sin j \sin j' \sin(4w - v - v_1) - [\alpha_{32}] \sin^2 j' \sin(4w - 2v_1).$$

Die Klammern der Koeffizienten sollen anzeigen, dass hier die Divisoren und die exargumentalen Glieder zu unterdrücken sind, hier also die reinen Koeffizienten der Differentialgleichung stehen.

Vorher soll jedoch untersucht werden, ob es gerechtfertigt ist, den Einfluss der aus der Veränderlichkeit von η , Π etc. resultierenden Glieder erst nach Ermittlung der exargumentalen Teile zu berücksichtigen. Gegeben:

$$\frac{dX}{dv} = a \eta \sin(2w - v).$$

Dann ist in bekannter Weise:

$$(a) \quad X_1 = a \int_{\bar{v} = \text{const.}} \eta \sin(2w - v) dv + 2\mu \int a \int_{\bar{v} = \text{const.}} \eta \cos(2w - v) \frac{d\bar{V}}{dv} dv^2.$$

Betrachten wir nun η , Π im ersten Gliede als variabel, so ist nach den bekannten Formeln:

$$(b) \quad X_1 = a \eta \cos \Pi \int_{\bar{v} = \text{const.}} \sin(2w - v) dv + a \eta \sin \Pi \int_{\bar{v} = \text{const.}} \cos(2w - v) dv \\ - a \frac{d\eta \cos \Pi}{dv} \iint_{\bar{v} = \text{const.}} \sin(2w - v) dv^2 - a \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} \iint_{\bar{v} = \text{const.}} \cos(2w - v) dv^2 + \dots$$

Bei Ermittlung des Doppelintegrals in (a) können wir einmal η und Π als konstant ansehen, da wir sonst den zweiten Differentialquotienten dieser Funktionen erhielten, und dieser soll unserer Voraussetzung nach null werden. Wir können den zweiten Teil in (a) schreiben, indem wir im zweiten Integrale nicht bloss \bar{V} , sondern auch η und Π als konstant ansehen und diese Integration sofort ausführen:

$$(c) \quad \frac{2\mu a}{\delta_1} \int \eta \sin(2w - v) \frac{d\bar{V}}{dv} dv = \text{pars } X_1.$$

Wir wollen in diesem Integral erst mit \bar{V} auch η und Π als variabel betrachten. Wir machen also zur Ermittlung von (c) folgende Annahme:

$$(d) \quad X_1 = a \int_{\bar{v} = \text{const.}, \eta, \Pi \text{ variabel}} \eta \sin(2w - v) dv + 2\mu \int_{\eta, \Pi, \bar{v} = \text{const.}} \frac{\eta, \Pi, \bar{v} \text{ variabel}}{a} \eta \cos(2w - v) \frac{d\bar{V}}{dv} dv^2.$$

Es möge nun durch Multiplizieren mit $\frac{d\bar{V}}{dv}$ das zweite Glied in (d) folgende Form erhalten, während das erste jetzt als erledigt gilt:

$$X_2' = + \frac{\mu a \gamma}{\delta_1} \int \eta^2 \sin(4w - 2v) dv = \text{pars } X_1.$$

Dies können wir offenbar mit dem betreffenden Gliede zweiten Grades aus der Differentialgleichung vereinigen, welches lauten möge:

$$X_2 = a' \int \eta^2 \sin(4w - 2v) dv,$$

also

$$X_2 + X_2' = \left(a' + \frac{\mu a \gamma}{\delta_1} \right) \int \eta^2 \sin(4w - 2v) dv.$$

Lassen wir die hieraus entstehenden exargumentalen Glieder als von höherem Grade fort und integrieren, wobei jetzt η , Π als variabel anzusehen sind:

$$X_2 + X'_2 = -\frac{a' + \frac{\mu a \gamma_2}{\delta_1}}{2\delta_1} \eta^2 \cos(4w - 2v) \\ + \frac{a' + \frac{\mu a \gamma_2}{\delta_1}}{4\delta_1^2} \left[\frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \sin(4w - 2v) + \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \cos(4w - 2v) \right]$$

Setzen wir $-\frac{a' + \frac{\mu a \gamma_2}{\delta_1}}{2\delta_1} = \alpha'$, so wird hiernach der Koeffizient des Zusatzgliedes gleich $-\frac{\alpha'}{2\delta_1}$. Der Koeffizient des Zusatzgliedes ersten Grades folgt unmittelbar aus (b), weil dort $\bar{V} = \text{const.}$ für das Doppelintegral ebenfalls gilt, also exargumentale Teile nicht mehr auftreten können. Mithin ergibt sich:

»Bei Differentialgleichungen erster Ordnung wird der Koeffizient der Zusatzglieder im Integral derselbe, wie der der Hauptglieder, nur dass das Quadrat des Divisors auftritt. Wir brauchen in den Zusatzgliedern also nicht noch einmal die exargumentalen Teile zu berechnen, insofern wir diese zuerst ermitteln und dann erst die aus der Variabilität von η , Π resultierenden Zusätze«.

Für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung gilt dies nur näherungsweise, wie wir nachher sehen werden.

Die Reihenfolge, in welcher wir die Ermittlung der exargumentalen Teile sowie der Zusatzglieder vornehmen, ist demnach berechtigt und wir brauchen auch in S_2 nicht weiter auf die Werte der Koeffizienten zu achten; es bedeute demnach die Bezeichnung $[\alpha_k]$ hier nur, dass der Divisor zu unterdrücken ist, dass die exargumentalen Glieder dagegen schon darin enthalten seien. Wenden wir nun die zu Anfang des Kapitels gegebenen Integrationsformeln hierauf an und nehmen nur die zweiten Teile hier mit, aus welchen allein die Zusatzglieder folgen, so ergibt sich:

$$\text{pars } S = +[\alpha_2] \left[\frac{d\eta \cos \Pi}{dv} \iint' \sin(2w - v) dv^2 + \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} \iint' \cos(2w - v) dv^2 \right] + \dots \\ + [\alpha_{14}] \left[\frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \iint' \sin(4w - 2v) dv^2 + \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \iint' \cos(4w - 2v) dv^2 \right] + \dots \\ + [\alpha_{30}] \left[\frac{d \sin^2 j \cos 2\sigma}{dv} \iint' \sin(4w - 2v) dv^2 + \frac{d \sin^2 j \sin 2\sigma}{dv} \iint' \cos(4w - 2v) dv^2 \right] + \dots,$$

wo wir die andern Glieder nicht hingeschrieben haben, da sie ganz analog sind. Führen wir die zweifache Integration aus und berücksichtigen wir den vorhin abgeleiteten Satz, so folgt:

$$\text{pars } S = -\frac{\alpha_2}{\delta_1} \left[\frac{d\eta \cos \Pi}{dv} \sin(2w - v) + \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} \cos(2w - v) \right] \\ - \frac{\alpha_3}{\delta_1} \left[\frac{d\eta' \cos \Pi_1}{dv} \sin(2w - v) + \frac{d\eta' \sin \Pi_1}{dv} \cos(2w - v) \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\alpha_{14}}{2\delta_1} \left[\frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \sin(4w-2v) + \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \cos(4w-2v) \right] \\
& - \frac{\alpha_{15}}{2\delta_1} \left[\frac{d\eta\eta' \cos(\Pi+\Pi_1)}{dv} \sin(4w-2v) + \frac{d\eta\eta' \sin(\Pi+\Pi_1)}{dv} \cos(4w-2v) \right] \\
& - \frac{\alpha_{16}}{2\delta_1} \left[\frac{d\eta'^2 \cos 2\Pi_1}{dv} \sin(4w-2v) + \frac{d\eta'^2 \sin 2\Pi_1}{dv} \cos(4w-2v) \right] \\
& - \frac{\alpha_{30}}{2\delta_1} \left[\frac{d \sin^2 j \cos 2\sigma}{dv} \sin(4w-2v) + \frac{d \sin^2 j \sin 2\sigma}{dv} \cos(4w-2v) \right] \\
& - \frac{\alpha_{31}}{2\delta_1} \left[\frac{d \sin j \sin j' \cos(\sigma+\sigma_1)}{dv} \sin(4w-2v) + \frac{d \sin j \sin j' \sin(\sigma+\sigma_1)}{dv} \cos(4w-2v) \right] \\
& - \frac{\alpha_{32}}{2\delta_1} \left[\frac{d \sin^2 j' \cos 2\sigma_1}{dv} \sin(4w-2v) + \frac{d \sin^2 j' \sin 2\sigma_1}{dv} \cos(4w-2v) \right].
\end{aligned}$$

Benutzt man die zu Anfang des Kapitels, sowie in Brendel, Th. d. kl. Pl. gegebenen Differentialformeln dieser langperiodischen Functionen und multipliziert die periodischen Aggregate aus, so erhält man:

pars $S =$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\alpha_2}{\delta_1} s \kappa \cos(2w-v+\omega) - \frac{\alpha_2}{\delta_1} \sum s_n \kappa_n \cos(2w-v+\omega_n) - \frac{\alpha_3}{\delta_1} \sum s_n \kappa'_n \cos(2w-v+\omega_n) \\
& - \frac{S}{\delta_1} \alpha_{14} \kappa^2 \cos(4w-2v+2\omega) - \alpha_{14} \sum \frac{S+S_n}{\delta_1} \kappa \kappa_n \cos(4w-2v+\omega+\omega_n) - \alpha_{14} \sum \frac{S_n}{\delta_1} \kappa^2 \cos(4w-2v+2\omega_n) \\
& - \alpha_{14} S \frac{S_m+S_n}{\delta_1} \kappa_m \kappa_n \cos(4w-2v+\omega_m+\omega_n) - \alpha_{15} \sum \frac{S+S_n}{2\delta_1} \kappa \kappa'_n \cos(4w-2v+\omega+\omega_n) \\
& - \alpha_{15} \sum \frac{S_n}{\delta_1} \kappa_n \kappa'_n \cos(4w-2v+2\omega_n) - \alpha_{15} S \frac{S_m+S_n}{2\delta_1} (\kappa_m \kappa'_n + \kappa_n \kappa'_m) \cos(4w-2v+\omega_m+\omega_n) \\
& - \alpha_{16} \sum \frac{S_n}{\delta_1} \kappa_n'^2 \cos(4w-2v+2\omega_n) - \alpha_{16} S \frac{S_m+S_n}{\delta_1} \kappa'_m \kappa'_n \cos(4w-2v+\omega_m+\omega_n) \\
& + \alpha_{30} \frac{\tau}{\delta_1} \sin^2 \iota \cos(4w-2v+2\vartheta) + \alpha_{30} \sum \frac{\tau+\tau_n}{\delta_1} \sin \iota \sin \iota_n \cos(4w-2v+\vartheta+\vartheta_n) + \alpha_{30} \sum \frac{\tau_n}{\delta_1} \sin^2 \iota_n \cos(4w-2v+2\vartheta) \\
& + \alpha_{30} S \frac{\tau_m+\tau_n}{\delta_1} \sin \iota_m \sin \iota_n \cos(4w-2v+\vartheta_m+\vartheta_n) + \alpha_{31} \sum \frac{\tau+\tau_n}{2\delta_1} \sin \iota \sin \iota'_n \cos(4w-2v+\vartheta+\vartheta_n) \\
& + \alpha_{31} \sum \frac{\tau_n}{\delta_1} \sin \iota_n \sin \iota'_n \cos(4w-2v+2\vartheta_n) + \alpha_{31} S \frac{\tau_m+\tau_n}{2\delta_1} [\sin \iota_m \sin \iota'_n + \sin \iota_n \sin \iota'_m] \cos(4w-2v+\vartheta_m+\vartheta_n) \\
& + \alpha_{32} \sum \frac{\tau_n}{\delta_1} \sin^2 \iota'_n \cos(4w-2v+2\vartheta_n) + \alpha_{32} S \frac{\tau_m+\tau_n}{\delta_1} \sin \iota'_m \sin \iota'_n \cos(4w-2v+\vartheta_m+\vartheta_n).
\end{aligned}$$

Es ist hier die Rechnung ausführlich wiedergegeben, um den Gang derselben besser veranschaulichen zu können. Wir wollen jetzt bezeichnen:

$$\begin{aligned}
(157) \quad v-\omega &= g & v-\vartheta &= h \\
v-\omega_n &= g_n & v-\vartheta_n &= h_n.
\end{aligned}$$

Dann schreiben sich die Zusatzglieder am besten in folgender Form, wo die Symbole \sum_n und $\mathbf{S}_{m,n}$ die zu Anfang des Kapitels erläuterte Bedeutung haben:

$$(158) \quad \text{pars } S = \bar{a}_1 \cos(2w-g) + \sum \bar{a}_{2,n} \cos(2w-g_n) \\ + \bar{a}_{13} \cos(4w-2g) + \bar{a}_{29} \cos(4w-2h) \\ + \sum \bar{a}_{14,n} \cos(4w-g-g_n) + \sum \bar{a}_{30,n} \cos(4w-h-h_n) \\ + \sum \bar{a}_{15,n} \cos(4w-2g_n) + \sum \bar{a}_{31,n} \cos(4w-2h_n) \\ + \mathbf{S} \bar{a}_{16,m,n} \cos(4w-g_m-g_n) + \mathbf{S} \bar{a}_{32,m,n} \cos(4w-h_m-h_n).$$

Die Koeffizienten haben folgende Bedeutung:

$$(159) \quad \bar{a}_1 = -\frac{S}{\delta_1} \alpha_2 \kappa, \quad \bar{a}_{2,n} = -\frac{S_n}{\delta_1} [\alpha_2 \kappa_n + \alpha_3 \kappa'_n] \\ \bar{a}_{13} = -\frac{S}{\delta_1} \alpha_{14} \kappa^2 \\ \bar{a}_{14,n} = -\frac{S+S_n}{\delta_1} \left[\alpha_{14} \kappa_n + \frac{\alpha_{15}}{2} \kappa'_n \right] \kappa \\ \bar{a}_{15,n} = -\frac{S_n}{\delta_1} \left[\left(\alpha_{14} \kappa_n + \frac{\alpha_{15}}{2} \kappa'_n \right) \kappa_n + \left(\frac{\alpha_{15}}{2} \kappa_n + \alpha_{16} \kappa'_n \right) \kappa'_n \right] \\ \bar{a}_{16,m,n} = -\frac{S_m+S_n}{\delta_1} \left[\left(\alpha_{14} \kappa_n + \frac{\alpha_{15}}{2} \kappa'_n \right) \kappa_m + \left(\frac{\alpha_{15}}{2} \kappa_n + \alpha_{16} \kappa'_n \right) \kappa'_m \right] \\ \bar{a}_{29} = \frac{\tau}{\delta_1} \alpha_{30} \sin^2 \iota \\ \bar{a}_{30,n} = \frac{\tau+\tau_n}{\delta_1} \left[\alpha_{30} \sin \iota_n + \frac{\alpha_{31}}{2} \sin \iota'_n \right] \sin \iota \\ \bar{a}_{31,n} = \frac{\tau_n}{\delta_1} \left[\left(\alpha_{30} \sin \iota_n + \frac{\alpha_{31}}{2} \sin \iota'_n \right) \sin \iota_n + \left(\frac{\alpha_{31}}{2} \sin \iota_n + \alpha_{32} \sin \iota'_n \right) \sin \iota'_n \right] \\ \bar{a}_{32,m,n} = \frac{\tau_m+\tau_n}{\delta_1} \left[\left(\alpha_{30} \sin \iota_n + \frac{\alpha_{31}}{2} \sin \iota'_n \right) \sin \iota_m + \left(\frac{\alpha_{31}}{2} \sin \iota_n + \alpha_{32} \sin \iota'_n \right) \sin \iota'_m \right].$$

Diese Koeffizienten sind, wie schon erwähnt, v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ und für den Grenzfall der charakteristischen Planeten, sowie für die kritischen $\cong m'$.

10) Die Zusatzglieder in R sind bedeutend schwieriger zu ermitteln. Wir wollen diesmal jedoch die Rechnung nicht so ausführlich darlegen, da sie nach den vorigen Angaben leicht zu übersehen ist. Analog den Formeln (106) und (107) werden wir hier bekommen, indem wir nur die zweiten Teile der Formeln für die partielle Integration berücksichtigen, die allein die Zusatzglieder geben, und

indem wir in den partikularen Integralen nur die Teile mitnehmen, welche kleine Divisoren erhalten:

$$\begin{aligned}
 g_1 = & \frac{1}{2} \frac{[b_{4,1,0}^{-1}]}{4\delta_1^2} \left[\frac{d\eta \cos \Pi}{dv} \cos(4w-2v) - \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} \sin(4w-2v) \right] + \dots \\
 & + \frac{1}{2} \frac{[b_{2,2,0}]}{\delta_1^2} \frac{d\eta^2}{dv} \cos(2w-v) + \frac{1}{2} \frac{[b_{2,1,1}^{+1}]}{\delta_1^2} \left[\frac{d\eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1)}{dv} \cos(2w-v) + \frac{d\eta\eta' \sin(\Pi - \Pi_1)}{dv} \sin(2w-v) \right] \\
 & + \frac{1}{2} \frac{[b_{2,1,1}^{-1}]}{\delta_1^2} \left[\frac{d\eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1)}{dv} \cos(2w-v) - \frac{d\eta\eta' \sin(\Pi - \Pi_1)}{dv} \sin(2w-v) \right] + \dots \\
 & + \frac{1}{2} \frac{[b_{2,2,0}]}{\delta_1^2} \left[\frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \cos(2w-v) - \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \sin(2w-v) \right] + \dots \\
 & + \frac{1}{2} \frac{[b_{6,2,0}^{-2}]}{9\delta_1^2} \left[\frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \cos(6w-3v) - \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \sin(6w-3v) \right] + \dots \\
 & + \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_2 = & -\frac{1}{2} \frac{[b_{4,1,0}^{-1}]}{4\delta_1^2} \left[\frac{d\eta \cos \Pi}{dv} \sin(4w-2v) + \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} \cos(4w-2v) \right] + \dots \\
 & -\frac{1}{2} \frac{[b_{2,2,0}]}{\delta_1^2} \frac{d\eta^2}{dv} \sin(2w-v) - \frac{1}{2} \frac{[b_{2,1,1}^{+1}]}{\delta_1^2} \left[\frac{d\eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1)}{dv} \sin(2w-v) - \frac{d\eta\eta' \sin(\Pi - \Pi_1)}{dv} \cos(2w-v) \right] \\
 & -\frac{1}{2} \frac{[b_{2,1,1}^{-1}]}{\delta_1^2} \left[\frac{d\eta\eta' \cos(\Pi - \Pi_1)}{dv} \sin(2w-v) + \frac{d\eta\eta' \sin(\Pi - \Pi_1)}{dv} \cos(2w-v) \right] + \dots \\
 & + \frac{1}{2} \frac{[b_{2,2,0}]}{\delta_1^2} \left[\frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \sin(2w-v) + \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \cos(2w-v) \right] + \dots \\
 & -\frac{1}{2} \frac{[b_{6,2,0}^{-2}]}{9\delta_1^2} \left[\frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \sin(6w-3v) + \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \cos(6w-3v) \right] + \dots \\
 & + \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Die Vernachlässigung der Integral-Teile ohne kleinen Divisor giebt im Integral einen Fehler v. d. Ord. $m'^2 + \frac{m'^3}{\delta_1}$, ist also gerechtfertigt. $[b_k]$ soll abkürzend anzeigen, dass der zugehörige exargumentale Teil mit einbegriffen ist, also:

$$[b_{2,2,0}] = b_{2,2,0} + \text{pars exarg. aus } R_{0+1}.$$

Wir dürfen so vorgehen, da die Differentialgleichungen für die Parameter g_1 und g_2 erster Ordnung sind, also für sie voriger Satz gilt. Man muss nun

für die $\frac{d\eta \cos \Pi}{\sin dv}$ etc. die im § 1 dieses Kapitels gegebenen periodischen Aggregate einführen, dann die Ausmultiplizierung bewerkstelligen und die Integrale vereinigen nach der Formel:

$$R = g_1 \sin v - g_2 \cos v.$$

Wir wollen dies an einem Gliede zur Probe ausführen und daran einige Bemerkungen über die hierbei begangenen Vernachlässigungen knüpfen.

$$g_1 = \frac{1}{2} \frac{[b_{2,2,0}^{-2}]}{\delta_1^2} \left[\frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \cos(2w-v) - \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \sin(2w-v) \right]$$

$$g_2 = \frac{1}{2} \frac{[b_{2,2,0}^{-2}]}{\delta_1^2} \left[\frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \sin(2w-v) + \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \cos(2w-v) \right].$$

Mithin wird:

$$\text{pars } R_2 = - \frac{[b_{2,2,0}^{-2}]}{2\delta_1^2} \left[\frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \sin(2w-2v) + \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \cos(2w-2v) \right].$$

Nun ist:

$$\frac{[b_{2,2,0}^{-2}]}{2\delta_1^2} = \frac{b_{2,2,0}^{-2}}{2\delta_1^2} + \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{14}}{2\delta_1^3},$$

wie aus Formel (78) und (109) hervorgeht. Wir wollen nun versuchen, dies analog dem Ausdruck für S auf die Form zu bringen $\frac{\beta_k}{\text{Divisor}}$. In diesem Falle ist:

$$\beta_{11} = \frac{b_{2,2,0}^{-2}}{\delta_1(2-\delta_1)} + \frac{2\mu b_{2,0,0} \gamma_{14}}{\delta_1^2(4-\delta_1^2)} = \frac{b_{2,2,0}^{-2}}{2\delta_1^2} (1 - \frac{1}{2}\delta_1)^{-1} + \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{14}}{2\delta_1^3} (1 - \frac{1}{4}\delta_1^2)^{-1}$$

oder

$$\beta_{11} = \frac{b_{2,2,0}^{-2}}{2\delta_1^2} + \frac{\mu b_{2,0,0} \gamma_{14}}{2\delta_1^3} + \frac{m'}{4} + \frac{m'^2}{16\delta_1^2}.$$

Da nun diese Glieder in den Zusätzen mit $\frac{S_n}{\delta_1}$, d. h. mit $\frac{m'}{\delta_1}$ multipliziert werden, so können wir in der That ganz wie in S verfahren, also auch schreiben $\frac{\beta_k}{\text{Divisor}} \times \text{Zusatzglied}$ mit einem Fehler $\frac{m'^2}{4\delta_1}$ resp. $\frac{m'^3}{16\delta_1^2}$. Dieser ist im Verhältnis zu den vorigen Vernachlässigungen erlaubt. Mit derselben Genauigkeit lässt sich dies auch für die andern Koeffizienten nachweisen, was ich hier wohl nicht näher zu erörtern brauche.

Ohne auf weitere Einzelheiten dieser äusserst mühsamen und ermüdenden Entwicklungen einzugehen, die sich nebst den Controllrechnungen über 23 Folio-Seiten hinziehen, werde ich hier die Schlussresultate der Zusatzglieder in R geben. Ich will nur bemerken, dass die aus den D-Gliedern resultierenden Zusatzglieder in R berücksichtigt sind, und dass die C-Glieder aufgeführt sind, soweit sie aus

$$\text{pars } \frac{d^2 R}{dv^2} + R = (2S)_{\text{Zusatz}}$$

herrühren. Es wird dann:

$$(160) \quad \text{pars } R_1 = 2\bar{a}_1 \cos(2w-g) + 2\sum \bar{a}_{2,n} \cos(2w-g_n) \\ + \bar{b}_3 \cos(4w-g) + \sum \bar{b}_{4,n} \cos(4w-g_n)$$

$$\begin{aligned}
(160) \quad \text{pars } R_2 = & \sum \bar{b}_{5,n} \cos(2w+g-g_n) + \bar{b}_9 \cos(2w-2g) + 2\bar{a}_{13} \cos(4w-2g) \\
& + \sum \bar{b}_{6,n} \cos(2w-g+g_n) + \sum \bar{b}_{10,n} \cos(2w-g-g_n) + 2\sum \bar{a}_{14,n} \cos(4w-g-g_n) \\
& + \mathbf{S} \bar{b}_{7,m,n} \cos(2w+g_m-g_n) + \sum \bar{b}_{11,n} \cos(2w-2g_n) + 2\sum \bar{a}_{15,n} \cos(4w-2g_n) \\
& + \mathbf{S} \bar{b}_{8,m,n} \cos(2w-g_m+g_n) + \mathbf{S} \bar{b}_{12,m,n} \cos(2w-g_m-g_n) + 2\mathbf{S} \bar{a}_{16,m,n} \cos(4w-g_m-g_n) \\
& + \bar{b}_{17} \cos(6w-2g) + \sum \bar{b}_{21,n} \cos(2w+h-h_n) + \bar{b}_{25} \cos(2w-2h) \\
& + \sum \bar{b}_{18,n} \cos(6w-g-g_n) + \sum \bar{b}_{22,n} \cos(2w-h+h_n) + \sum \bar{b}_{26,n} \cos(2w-h-h_n) \\
& + \sum \bar{b}_{19,n} \cos(6w-2g_n) + \mathbf{S} \bar{b}_{23,m,n} (\cos 2w+h_m-h_n) + \sum \bar{b}_{27,n} \cos(2w-2h_n) \\
& + \mathbf{S} \bar{b}_{20,m,n} \cos(6w-g_m-g_n) + \mathbf{S} \bar{b}_{24,m,n} \cos(2w-h_m+h_n) + \mathbf{S} \bar{b}_{28,m,n} \cos(2w-h_m-h_n) \\
& + 2\bar{a}_{29} \cos(4w-2h) + \bar{b}_{33} \cos(6w-2h) \\
& + 2\sum \bar{a}_{30,n} \cos(4w-h-h_n) + \sum \bar{b}_{34,n} \cos(6w-h-h_n) \\
& + 2\sum \bar{a}_{31,n} \cos(4w-2h_n) + \sum \bar{b}_{35,n} \cos(6w-2h_n) \\
& + 2\mathbf{S} \bar{a}_{32,m,n} \cos(4w-h_m-h_n) + \mathbf{S} \bar{b}_{36,m,n} \cos(6w-h_m-h_n)
\end{aligned}$$

Die Werte der Koeffizienten sind:

$$\begin{aligned}
(161) \quad \bar{b}_3 &= -\frac{S}{2\delta_1} \beta_4 \kappa & \bar{b}_{4,n} &= -\frac{S_n}{2\delta_1} [\beta_4 \kappa_n + \beta_5 \kappa'_n] \\
\bar{b}_{5,n} &= \frac{S-S_n}{\delta_1} (\beta_7 \kappa_n + \beta_8 \kappa'_n) \kappa & \bar{b}_{7,m,n} &= \frac{S_m-S_n}{\delta_1} [(\beta_7 \kappa_n + \beta_8 \kappa'_n) \kappa_m + (\beta_9 \kappa_n + \beta_{10} \kappa'_n) \kappa'_m] \\
\bar{b}_{6,n} &= -\frac{S-S_n}{\delta_1} (\beta_7 \kappa_n + \beta_9 \kappa'_n) \kappa & \bar{b}_{8,m,n} &= -\frac{S_m-S_n}{\delta_1} [(\beta_7 \kappa_n + \beta_9 \kappa'_n) \kappa_m + (\beta_8 \kappa_n + \beta_{10} \kappa'_n) \kappa'_m] \\
\bar{b}_9 &= -\frac{2S}{\delta_1} \beta_{11} \kappa^2 & \bar{b}_{11,n} &= -2\frac{S_n}{\delta_1} \left[\left(\beta_{11} \kappa_n + \frac{\beta_{12}}{2} \kappa'_n \right) \kappa_n + \left(\frac{\beta_{12}}{2} \kappa_n + \beta_{13} \kappa'_n \right) \kappa'_n \right] \\
\bar{b}_{10,n} &= -2\frac{S+S_n}{\delta_1} \left(\beta_{11} \kappa_n + \frac{\beta_{12}}{2} \kappa'_n \right) \kappa & \bar{b}_{12,m,n} &= -2\frac{S_m+S_n}{\delta_1} \left[\left(\beta_{11} \kappa_n + \frac{\beta_{12}}{2} \kappa'_n \right) \kappa_m + \left(\frac{\beta_{12}}{2} \kappa_n + \beta_{13} \kappa'_n \right) \kappa'_m \right] \\
\bar{b}_{17} &= -\frac{2S}{3\delta_1} \beta_{17} \kappa^2 & \bar{b}_{19,n} &= -\frac{2}{3} \frac{S_n}{\delta_1} \left[\left(\beta_{17} \kappa_n + \frac{\beta_{18}}{2} \kappa'_n \right) \kappa_n + \left(\frac{\beta_{18}}{2} \kappa_n + \beta_{19} \kappa'_n \right) \kappa'_n \right] \\
\bar{b}_{18,n} &= -\frac{2}{3} \frac{S+S_n}{\delta_1} \left(\beta_{17} \kappa_n + \frac{\beta_{18}}{2} \kappa'_n \right) \kappa & \bar{b}_{20,m,n} &= -\frac{2}{3} \frac{S_m+S_n}{\delta_1} \left[\left(\beta_{17} \kappa_n + \frac{\beta_{18}}{2} \kappa'_n \right) \kappa_m + \left(\frac{\beta_{18}}{2} \kappa_n + \beta_{19} \kappa'_n \right) \kappa'_m \right] \\
\bar{b}_{21,n} &= -\frac{\tau-\tau_n}{\delta_1} (\beta_{23} \sin \iota_n + \beta_{24} \sin \iota'_n) \sin \iota & \bar{b}_{23,m,n} &= -\frac{\tau_m-\tau_n}{\delta_1} [(\beta_{23} \sin \iota_n + \beta_{24} \sin \iota'_n) \sin \iota_m + (\beta_{25} \sin \iota_n + \beta_{26} \sin \iota'_n) \sin \iota'_m] \\
\bar{b}_{22,n} &= \frac{\tau-\tau_n}{\delta_1} (\beta_{23} \sin \iota_n + \beta_{25} \sin \iota'_n) \sin \iota & \bar{b}_{24,m,n} &= \frac{\tau_m-\tau_n}{\delta_1} [(\beta_{23} \sin \iota_n + \beta_{25} \sin \iota'_n) \sin \iota_m + (\beta_{24} \sin \iota_n + \beta_{26} \sin \iota'_n) \sin \iota'_m] \\
\bar{b}_{25} &= \frac{2\tau}{\delta_1} \beta_{27} \sin^2 \iota & \bar{b}_{27,n} &= \frac{2\tau_n}{\delta_1} \left[\left(\beta_{27} \sin \iota_n + \frac{\beta_{28}}{2} \sin \iota'_n \right) \sin \iota_n + \left(\frac{\beta_{28}}{2} \sin \iota_n + \beta_{29} \sin \iota'_n \right) \sin \iota'_n \right] \\
\bar{b}_{26,n} &= 2\frac{\tau+\tau_n}{\delta_1} \left(\beta_{27} \sin \iota_n + \frac{\beta_{28}}{2} \sin \iota'_n \right) \sin \iota & \bar{b}_{28,m,n} &= 2\frac{\tau_m+\tau_n}{\delta_1} \left[\left(\beta_{27} \sin \iota_n + \frac{\beta_{28}}{2} \sin \iota'_n \right) \sin \iota_m + \left(\frac{\beta_{28}}{2} \sin \iota_n + \beta_{29} \sin \iota'_n \right) \sin \iota'_m \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b}_{33} &= \frac{2\tau}{3\delta_1} \beta_{33} \sin^2 \iota & \bar{b}_{33 \cdot n} &= \frac{2}{3} \frac{\tau_n}{\delta_1} \left[\left(\beta_{33} \sin \iota_n + \frac{\beta_{34}}{2} \sin \iota'_n \right) \sin \iota_n + \left(\frac{\beta_{34}}{2} \sin \iota_n + \beta_{35} \sin \iota'_n \right) \sin \iota'_n \right] \\ \bar{b}_{34 \cdot n} &= \frac{2}{3} \frac{\tau + \tau_n}{\delta_1} \left(\beta_{33} \sin \iota_n + \frac{\beta_{34}}{2} \sin \iota'_n \right) \sin \iota & \bar{b}_{36 \cdot m \cdot n} &= \frac{2}{3} \frac{\tau_m + \tau_n}{\delta_1} \left[\left(\beta_{33} \sin \iota_n + \frac{\beta_{34}}{2} \sin \iota'_n \right) \sin \iota_m + \left(\frac{\beta_{34}}{2} \sin \iota_n + \beta_{35} \sin \iota'_n \right) \sin \iota'_m \right].\end{aligned}$$

Die Glieder sind hier alle von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$, abgesehen von den exargumentalen Teilen. Die Reihe der exargumentalen Glieder ist die gleiche wie in R_1 und R_2 , nur dass hier der Faktor $\frac{m'}{\delta_1}$ noch hinzutritt und die Konvergenz etwas erhöht. Wir wollen nun noch in R_2 den aus gewissen Zusatzgliedern resultierenden konstanten Teil berücksichtigen, denn für die A-Glieder kommen diese wegen ihrer Kleinheit nicht in Betracht. Wir nehmen nur mit

$$\text{pars } \frac{d^2 R}{dv^2} + R = (S_1^2)_{\text{Zusatz}} = \frac{1}{2} \bar{a}_1^2 + \frac{1}{2} \sum \bar{a}_{2 \cdot n}^2,$$

also hinreichend genau

$$(162) \quad \text{pars const. } R_2 = \frac{1}{2} \bar{a}_1^2 + \frac{1}{2} \sum \bar{a}_{2 \cdot n}^2.$$

Diese Glieder sind v. d. Ord. $\frac{m'^4}{\delta_1^4}$ und wohl stets zu vernachlässigen.

11) Wir haben jetzt die Zusatzglieder in K und V zu ermitteln. Wir werden hier nur für V neue Zusatzglieder aufzustellen haben, da nur dies einen kleinen Divisor erhält. In K brauchen wir nur die aus $2R$ kommenden Zusätze der Form D mitzunehmen und zwar unter Vernachlässigung des jetzt entstehenden Divisors. Ausserdem wollen wir noch einige Glieder v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ mitnehmen und müssen auch die Funktion \mathfrak{E} berücksichtigen, d. h. die aus der Mittelpunktsgleichung entspringenden Zusatzglieder. Zu dem Zwecke schreiben wir:

$$\frac{dK}{dv} = -2(R)_{\text{Zusatz}} + (6R_1 - 2S_1)_{\text{Zusatz}} \eta \cos v - \frac{d\mathfrak{E}}{dv},$$

wir setzen hier:

$$\eta \cos v = \varkappa \cos g + \sum \varkappa_n \cos g_n.$$

Ferner ist nach Br. Formel (228b) und (253b):

$$\mathfrak{E} = 2 \frac{d\eta \cos \Pi}{dv} \cos v + 2 \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} \sin v - \frac{3}{8} \frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \cos 2v - \frac{3}{8} \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \sin 2v.$$

Mit Hülfe dieser Formeln, sowie der zu Anfang des Kapitels gegebenen Relation erhalten wir, wenn wir ausmultiplizieren, integrieren und in den Divi-

soren die δ_1 gegen die Einheit vernachlässigen (Fehler $\frac{m'^2}{\delta_1}$):

$$\begin{aligned}
 (163) \quad \text{pars } [K_1 + K_2] &= -2\mathcal{E}\kappa \sin g - 2\sum \mathcal{E}_n \kappa_n \sin g_n \\
 &+ \frac{3}{4}\mathcal{E}\kappa^2 \sin 2g + \frac{3}{4}\sum (\mathcal{E} + \mathcal{E}_n) \kappa \kappa_n \sin (g + g_n) + \frac{3}{4}\sum \mathcal{E}_n \kappa_n^2 \sin 2g_n + \frac{3}{4}\mathcal{S}(\mathcal{E}_m + \mathcal{E}_n) \kappa_m \kappa_n \sin (g_m + g_n) \\
 &- 2\bar{b}_s \sin (4w - g) - 2\sum \bar{b}_{4,n} \sin (4w - g_n) \\
 &+ 5\sum (\bar{a}_1 \kappa + \bar{a}_{2,n} \kappa_n) \sin 2w \quad + \bar{\gamma}_9 \sin (2w - 2g) \quad - 2\bar{b}_{17} \sin (6w - 2g) \\
 &+ \sum \bar{\gamma}_{5,n} \sin (2w + g - g_n) \quad + \sum \bar{\gamma}_{10,n} \sin (2w - g - g_n) \quad - 2\sum \bar{b}_{15,n} \sin (6w - g - g_n) \\
 &+ \sum \bar{\gamma}_{6,n} \sin (2w - g + g_n) \quad + \sum \bar{\gamma}_{11,n} \sin (2w - 2g_n) \quad - 2\sum \bar{b}_{19,n} \sin (6w - 2g_n) \\
 &+ \mathcal{S}\bar{\gamma}_{7,m,n} \sin (2w + g_m - g_n) \quad + \mathcal{S}\bar{\gamma}_{12,m,n} \sin (2w - g_m - g_n) \quad - 2\mathcal{S}\bar{b}_{20,m,n} \sin (6w - g_m - g_n) \\
 &+ \mathcal{S}\bar{\gamma}_{8,m,n} \sin (2w - g_m + g_n) \\
 &- 2\sum \bar{b}_{21,n} \sin (2w + h - h_n) \quad + 2\bar{b}_{25} \sin (2w - 2h) \quad - 2\bar{b}_{23} \sin (6w - 2h) \\
 &- 2\sum \bar{b}_{22,n} \sin (2w - h + h_n) \quad + 2\sum \bar{b}_{26,n} \sin (2w - h - h_n) \quad - 2\sum \bar{b}_{34,n} \sin (6w - h - h_n) \\
 &- 2\mathcal{S}\bar{b}_{23,m,n} \sin (2w + h_m - h_n) \quad + 2\sum \bar{b}_{27,n} \sin (2w - 2h_n) \quad - 2\sum \bar{b}_{35,n} \sin (6w - 2h_n) \\
 &- 2\mathcal{S}\bar{b}_{24,m,n} \sin (2w - h_m + h_n) \quad + 2\mathcal{S}\bar{b}_{28,m,n} \sin (2w - h_m - h_n) \quad - 2\mathcal{S}\bar{b}_{36,m,n} \sin (6w - h_m - h_n).
 \end{aligned}$$

Hier ist:

$$\begin{aligned}
 (164) \quad \bar{\gamma}_{5,n} &= -[2\bar{b}_{5,n} - 5\bar{a}_{2,n} \kappa] & \bar{\gamma}_9 &= 2\bar{b}_9 - 5\bar{a}_1 \kappa \\
 \bar{\gamma}_{6,n} &= -[2\bar{b}_{6,n} - 5\bar{a}_1 \kappa_n] & \bar{\gamma}_{10,n} &= 2\bar{b}_{10,n} - 5(\bar{a}_1 \kappa_n + \bar{a}_{2,n} \kappa) \\
 \bar{\gamma}_{7,m,n} &= -[2\bar{b}_{7,m,n} - 5\bar{a}_{2,n} \kappa_m] & \bar{\gamma}_{11,n} &= 2\bar{b}_{11,n} - 5\bar{a}_{2,n} \kappa_n \\
 \bar{\gamma}_{8,m,n} &= -[2\bar{b}_{8,m,n} - 5\bar{a}_{2,m} \kappa_n] & \bar{\gamma}_{12,m,n} &= 2\bar{b}_{12,m,n} - 5(\bar{a}_{2,n} \kappa_m + \bar{a}_{2,m} \kappa_n).
 \end{aligned}$$

Um die Zusatzglieder in V zu berechnen, soweit sie durch die Differentialgleichungen aus solchen niederen Grades oder aus S und R entstehen, wollen wir setzen:

$$\frac{dV}{dv} = [S - 2R] + 6R_0[R_2] + (6[R_1] - 24R_0[R_1] + 6R_0[S_1])\eta \cos v.$$

Die eckigen Klammern zeigen an, dass in den betreffenden Funktionen hier nur die Zusatzglieder mitzunehmen sind. Ausserdem werden aus den C-Gliedern selbst noch neue Zusatzglieder entstehen, die mit Hülfe der bekannten Formeln zu rechnen sind aus

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\gamma_2}{\delta_1^2} \left[\frac{d\eta \cos \Pi}{dv} \cos (2w - v) - \frac{d\eta \sin \Pi}{dv} \sin (2w - v) \right] + \dots \\
 &+ \frac{[\gamma_{14}]}{4\delta_1^2} \left[\frac{d\eta^2 \cos 2\Pi}{dv} \cos (4w - 2v) - \frac{d\eta^2 \sin 2\Pi}{dv} \sin (4w - 2v) \right] + \dots \\
 &+ \frac{\gamma_{30}}{4\delta_1^2} \left[\frac{d \sin^2 j \cos 2\sigma}{dv} \cos (4w - 2v) - \frac{d \sin^2 j \sin 2\sigma}{dv} \sin (4w - 2v) \right] + \dots
 \end{aligned}$$

Rechnet man diese, sowie die vorige Gleichung durch, so wird man zu folgendem Resultate gelangen:

$$(165) \quad \text{pars } [V_1 + V_2] = \frac{\bar{\gamma}_1}{\delta_1} \sin(2w - g) + \sum \frac{\bar{\gamma}_{2..n}}{\delta_1} \sin(2w - g_n)^1 \\ + \bar{\gamma}_{13} \sin(4w - 2g) + \bar{\gamma}_{29} \sin(4w - 2h) \\ + \sum \bar{\gamma}_{14..n} \sin(4w - g - g_n) + \sum \bar{\gamma}_{30..n} \sin(4w - h - h_n) \\ + \sum \bar{\gamma}_{15..n} \sin(4w - 2g_n) + \sum \bar{\gamma}_{31..n} \sin(4w - 2h_n) \\ + \mathfrak{S} \bar{\gamma}_{16..m..n} \sin(4w - g_m - g_n) + \mathfrak{S} \bar{\gamma}_{32..m..n} \sin(4w - h_m - h_n)$$

Die Werthe der Koeffizienten sind:

$$(166) \quad \bar{\gamma}_1 = \frac{\mathfrak{S}}{\delta_1} [3\alpha_2 - \gamma_2 - \frac{3}{2}\beta_1\beta_4] \kappa \\ \bar{\gamma}_{2..n} = \frac{\mathfrak{S}_n}{\delta_1} [(3\alpha_2 - \gamma_2 - \frac{3}{2}\beta_1\beta_4) \kappa_n + (3\alpha_3 - \gamma_3 - \frac{3}{2}\beta_1\beta_5) \kappa'_n] \\ \bar{\gamma}_{13} = \frac{1}{2\delta_1} [-2\mathfrak{S} \kappa^2 \gamma'_{14} - 3\bar{a}_{13} + 3\beta_1(\bar{b}_9 + \bar{b}_{17}) + \frac{3}{2}\kappa(2\bar{b}_3 - 7\beta_1\bar{a}_1)] \\ \bar{\gamma}_{14..n} = \frac{1}{2\delta_1} \left[-2(\mathfrak{S} + \mathfrak{S}_n) \left(\gamma'_{14} \kappa_n + \gamma'_{15} \frac{\kappa'_n}{2} \right) \kappa - 3\bar{a}_{14..n} + \frac{3}{2}\kappa(2\bar{b}_{4..n} - 7\beta_1\bar{a}_{2..n}) + \frac{3}{2}\kappa_n(2\bar{b}_3 - 7\beta_1\bar{a}_1) + 3\beta_1(\bar{b}_{10..n} + \bar{b}_{18..n}) \right] \\ \bar{\gamma}_{15..n} = \frac{1}{2\delta_1} \left[-2\mathfrak{S}_n \left\{ \left(\gamma'_{14} \kappa_n + \frac{\gamma'_{15}}{2} \kappa'_n \right) \kappa_n + \left(\frac{\gamma'_{15}}{2} \kappa_n + \gamma'_{19} \kappa'_n \right) \kappa'_n \right\} - 3\bar{a}_{15..n} + \frac{3}{2}\kappa_n(2\bar{b}_{4..n} - 7\beta_1\bar{a}_{2..n}) + 3\beta_1(\bar{b}_{11..n} + \bar{b}_{19..n}) \right] \\ \bar{\gamma}_{16..m..n} = \frac{1}{2\delta_1} \left[-2(\mathfrak{S}_m + \mathfrak{S}_n) \left\{ \left(\gamma'_{14} \kappa + \frac{\gamma'_{15}}{2} \kappa'_n \right) \kappa_m + \left(\frac{\gamma'_{15}}{2} \kappa_n + \gamma'_{16} \kappa'_n \right) \kappa'_m \right\} - 3\bar{a}_{16..m..n} + \frac{3}{2}\kappa_m(2\bar{b}_{4..n} - 7\beta_1\bar{a}_{2..n}) \right. \\ \left. + \frac{3}{2}\kappa_n(2\bar{b}_{4..m} - 7\beta_1\bar{a}_{2..m}) + 3\beta_1(\bar{b}_{12..m..n} + \bar{b}_{20..m..n}) \right] \\ \bar{\gamma}_{19} = \frac{1}{2\delta_1} [2\tau \sin^2 \iota \gamma'_{30} - 3\bar{a}_{29} + 3\beta_1(\bar{b}_{25} + \bar{b}_{33})] \\ \bar{\gamma}_{10..n} = \frac{1}{2\delta_1} \left[2(\tau + \tau_n) \left(\gamma'_{30} \sin \iota_n + \frac{\gamma'_{31}}{2} \sin \iota'_n \right) \sin \iota - 3\bar{a}_{30..n} + 3\beta_1(\bar{b}_{26..n} + \bar{b}_{34..n}) \right] \\ \bar{\gamma}_{1..n} = \frac{1}{2\delta_1} \left[2\tau_n \left\{ \left(\gamma'_{30} \sin \iota_n + \frac{\gamma'_{31}}{2} \sin \iota'_n \right) \sin \iota_n + \left(\frac{\gamma'_{31}}{2} \sin \iota_n + \gamma'_{32} \sin \iota'_n \right) \sin \iota'_n \right\} - 3\bar{a}_{31..n} + 3\beta_1(\bar{b}_{27..n} + \bar{b}_{35..n}) \right] \\ \bar{\gamma}_{2..m..n} = \frac{1}{2\delta_1} \left[2(\tau_m + \tau_n) \left\{ \left(\gamma'_{30} \sin \iota_n + \frac{\gamma'_{31}}{2} \sin \iota'_n \right) \sin \iota_m + \left(\frac{\gamma'_{31}}{2} \sin \iota_n + \gamma'_{32} \sin \iota'_n \right) \sin \iota'_m \right\} - 3\bar{a}_{32..m..n} + 3\beta_1(\bar{b}_{28..m..n} + \bar{b}_{36..m..n}) \right]$$

1) Bei der numerischen Anwendung auf (108) Hecuba hatte es sich als notwendig erwiesen, in den C-Gliedern ersten Grades in W bei der Berechnung der Zusatzteile aus η, II insofern weiterzugehen, als dass auch der erste Differentialquotient als variabel betrachtet wird, dass man also die dritte Potenz der Masse hier noch berücksichtigen muss. Das Resultat ist:

$$(165a) \quad \text{pars } V = \frac{\bar{\gamma}_1}{\delta_1} \sin(2w - g) + \sum \frac{\bar{\gamma}_{2..n}}{\delta_1} \sin(2w - g_n)$$

$$(166a) \quad \bar{\gamma}_1 = \frac{\mathfrak{S}^2}{\delta_1^2} [\gamma_2 - 3\alpha_2] \kappa, \quad \bar{\gamma}_{2..n} = \frac{\mathfrak{S}_n^2}{\delta_1^2} [(\gamma_2 - 3\alpha_2) \kappa_n + (\gamma_3 - 3\alpha_3) \kappa'_n].$$

Ferner haben wir den bei der Bestimmung von γ erwähnten Zusatzteil noch zu ermitteln. Er geht ebenfalls aus der Differentialgleichung für $\frac{dV}{dv}$ hervor, und es ist sein Wert folgender:

$$(167) \quad \text{pars } \gamma = \bar{\xi}_1 \kappa^2 + \sum \bar{\xi}_{2..n} \kappa_n^2 + \sum \bar{\xi}_{3..n} \kappa_n \kappa'_n + \sum \bar{\xi}_{4..n} \kappa_n'^2.$$

Hier ist:

$$(168) \quad \begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= \frac{s}{\delta_1} \left[\alpha_2^2 \left(2 + \frac{3s}{\delta_1} \right) + \alpha_2 \left(\frac{21}{2} \beta_1 - 2\beta_2 \right) - \frac{3}{4} \beta_4^2 \left(1 - \frac{s}{2\delta_1} \right) \right] \\ \bar{\xi}_{2..n} &= \frac{s_n}{\delta_1} \left[\alpha_2^2 \left(2 + \frac{3s_n}{\delta_1} \right) + \alpha_2 \left(\frac{21}{2} \beta_1 - 2\beta_2 \right) - \frac{3}{4} \beta_4^2 \left(1 - \frac{s_n}{2\delta_1} \right) \right] \\ \bar{\xi}_{3..n} &= \frac{s_n}{\delta_1} \left[2\alpha_2 \alpha_3 \left(2 + \frac{3s_n}{\delta_1} \right) - 2\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \left(\frac{21}{2} \beta_1 - 2\beta_2 \right) - \frac{3}{2} \beta_4 \beta_5 \left(1 - \frac{s_n}{2\delta_1} \right) \right] \\ \bar{\xi}_{4..n} &= \frac{s_n}{\delta_1} \left[\alpha_3^2 \left(2 + \frac{3s_n}{\delta_1} \right) - 2\alpha_3 \beta_3 - \frac{3}{4} \beta_5^2 \left(1 - \frac{s_n}{2\delta_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Die Zusatzglieder sind in V v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^3}$, abgesehen von den exargumentalen Teilen, und es gilt hier ebenfalls das für die Reihe der exargumentalen Hauptglieder Gesagte, nur dass die Zusatzglieder mit $\frac{m'}{\delta_1}$ multipliziert sind.

12) Die Ermittlung der Zusatzglieder in der Funktion \mathfrak{B} geschieht in gleicher Weise wie beim Ausdruck R , nur treten hier einmal infolge der Gestalt der Differentialgleichung neue hinzu, sodann haben wir die aus der Veränderlichkeit von $\sin j, \sigma$ etc. bei den D-Gliedern entspringenden Zusatzteile zu ermitteln. Es geschieht dies nach den Formeln (96) und (99), die im § 1 dieses Kapitels gegeben sind. Insofern tritt hier eine Erleichterung ein, als die C-Glieder gar nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Ich will hier auf die mechanische und wenig interessante Herleitung dieser Glieder nicht weiter eingehen, sondern sogleich das Resultat anführen. Der Ermittlungsprozess ist genau derselbe wie bei R .

$$(169) \quad \begin{aligned} \text{pars } [\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2] &= \bar{c}_1 \sin(4w - h) && + \sum \bar{c}_{2..n} \sin(4w - h_n) \\ &+ \bar{c}_3 \sin(2w + h - g) && + \bar{c}_9 \sin(2w - h + g) \\ &+ \sum \bar{c}_{4..n} \sin(2w + h - g_n) && + \sum \bar{c}_{10..n} \sin(2w - h + g_n) \\ &+ \sum \bar{c}_{5..n} \sin(2w + h_n - g) && + \sum \bar{c}_{11..n} \sin(2w - h_n + g) \\ &+ \sum \bar{c}_{6..n} \sin(2w + h_n - g_n) && + \sum \bar{c}_{12..n} \sin(2w - h_n + g_n) \\ &+ \mathfrak{S} \bar{c}_{7..m..n} \sin(2w + h_m - g_n) && + \mathfrak{S} \bar{c}_{13..m..n} \sin(2w - h_m + g_n) \\ &+ \mathfrak{S} \bar{c}_{8..m..n} \sin(2w + h_n - g_m) && + \mathfrak{S} \bar{c}_{14..m..n} \sin(2w - h_n + g_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{c}_{15} \sin(2w - h - g) + \bar{c}_{21} \sin(6w - h - g) \\
& + \sum \bar{c}_{16..n} \sin(2w - h - g_n) + \sum \bar{c}_{22..n} \sin(6w - h - g_n) \\
& + \sum \bar{c}_{17..n} \sin(2w - h_n - g) + \sum \bar{c}_{23..n} \sin(6w - h_n - g) \\
& + \sum \bar{c}_{18..n} \sin(2w - h_n - g_n) + \sum \bar{c}_{24..n} \sin(6w - h_n - g_n) \\
& + \mathbf{S} \bar{c}_{19..m..n} \sin(2w - h_m - g_n) + \mathbf{S} \bar{c}_{25..m..n} \sin(6w - h_m - g_n) \\
& + \mathbf{S} \bar{c}_{20..m..n} \sin(2w - h_n - g_m) + \mathbf{S} \bar{c}_{26..m..n} \sin(6w - h_n - g_m).
\end{aligned}$$

Die Werte der Koeffizienten sind:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_1 &= \frac{\tau}{2\delta_1} \xi_1 \sin \iota & \bar{c}_{2..n} &= \frac{\tau_n}{2\delta_1} [\xi_1 \sin \iota_n + \xi_2 \sin \iota'_n] \\
&= -\frac{\tau + \mathcal{S}}{\delta_1} \xi_3 \kappa \sin \iota & \bar{c}_9 &= \frac{\tau + \mathcal{S}}{\delta_1} \xi_4 \kappa \sin \iota \\
&= -\frac{\tau + \mathcal{S}_n}{\delta_1} (\xi_3 \kappa_n + \xi_5 \kappa'_n) \sin \iota & \bar{c}_{10..n} &= \frac{\tau + \mathcal{S}_n}{\delta_1} (\xi_4 \kappa_n + \xi_6 \kappa'_n) \sin \iota \\
&= -\frac{\tau_n + \mathcal{S}}{\delta_1} (\xi_3 \sin \iota_n + \xi_7 \sin \iota'_n) \kappa & \bar{c}_{11..n} &= \frac{\tau_n + \mathcal{S}}{\delta_1} (\xi_4 \sin \iota_n + \xi_8 \sin \iota'_n) \kappa \\
&= -\frac{\tau_n + \mathcal{S}_n}{\delta_1} [(\xi_3 \kappa_n + \xi_5 \kappa'_n) \sin \iota_n + (\xi_7 \kappa_n + \xi_9 \kappa'_n) \sin \iota'_n] & \bar{c}_{12..n} &= \frac{\tau_n + \mathcal{S}_n}{\delta_1} [(\xi_4 \kappa_n + \xi_6 \kappa'_n) \sin \iota_n + (\xi_8 \kappa_n + \xi_{10} \kappa'_n) \sin \iota'_n] \\
&= -\frac{\tau_n + \mathcal{S}_n}{\delta_1} [(\xi_3 \kappa_n + \xi_5 \kappa'_n) \sin \iota_m + (\xi_7 \kappa_n + \xi_9 \kappa'_n) \sin \iota'_m] & \bar{c}_{13..m..n} &= \frac{\tau_n + \mathcal{S}_n}{\delta_1} [(\xi_4 \kappa_n + \xi_6 \kappa'_n) \sin \iota_m + (\xi_8 \kappa_n + \xi_{10} \kappa'_n) \sin \iota'_m] \\
&= -\frac{\tau_n + \mathcal{S}_m}{\delta_1} [(\xi_3 \sin \iota_n + \xi_7 \sin \iota'_n) \kappa_m + (\xi_5 \sin \iota_n + \xi_9 \sin \iota'_n) \kappa'_m] & \bar{c}_{14..m..n} &= \frac{\tau_n + \mathcal{S}_m}{\delta_1} [(\xi_4 \sin \iota_n + \xi_8 \sin \iota'_n) \kappa_m + (\xi_6 \sin \iota_n + \xi_{10} \sin \iota'_n) \kappa'_m] \\
&= \frac{\tau - \mathcal{S}}{\delta_1} \xi_{11} \kappa \sin \iota & \bar{c}_{21} &= \frac{\tau - \mathcal{S}}{3\delta_1} \xi_{15} \kappa \sin \iota \\
&= \frac{\tau - \mathcal{S}_n}{\delta_1} (\xi_{11} \kappa_n + \xi_{12} \kappa'_n) \sin \iota & \bar{c}_{22..n} &= \frac{\tau - \mathcal{S}_n}{3\delta_1} (\xi_{15} \kappa_n + \xi_{16} \kappa'_n) \sin \iota \\
&= \frac{\tau_n - \mathcal{S}}{\delta_1} (\xi_{11} \sin \iota_n + \xi_{13} \sin \iota'_n) \kappa & \bar{c}_{23..n} &= \frac{\tau_n - \mathcal{S}}{3\delta_1} (\xi_{15} \sin \iota_n + \xi_{17} \sin \iota'_n) \kappa \\
&= \frac{\tau_n - \mathcal{S}_n}{\delta_1} [(\xi_{11} \kappa_n + \xi_{12} \kappa'_n) \sin \iota_n + (\xi_{13} \kappa_n + \xi_{14} \kappa'_n) \sin \iota'_n] & \bar{c}_{24..n} &= \frac{\tau_n - \mathcal{S}_n}{3\delta_1} [(\xi_{15} \kappa_n + \xi_{16} \kappa'_n) \sin \iota_n + (\xi_{17} \kappa_n + \xi_{18} \kappa'_n) \sin \iota'_n] \\
&= \frac{\tau_n - \mathcal{S}_m}{\delta_1} [(\xi_{11} \kappa_n + \xi_{12} \kappa'_n) \sin \iota_m + (\xi_{13} \kappa_n + \xi_{14} \kappa'_n) \sin \iota'_m] & \bar{c}_{25..m..n} &= \frac{\tau_n - \mathcal{S}_m}{3\delta_1} [(\xi_{15} \kappa_n + \xi_{16} \kappa'_n) \sin \iota_m + (\xi_{17} \kappa_n + \xi_{18} \kappa'_n) \sin \iota'_m] \\
&= \frac{\tau_n - \mathcal{S}_m}{\delta_1} [(\xi_{11} \sin \iota_n + \xi_{13} \sin \iota'_n) \kappa_m + (\xi_{12} \sin \iota_n + \xi_{14} \sin \iota'_n) \kappa'_m] & \bar{c}_{26..m..n} &= \frac{\tau_n - \mathcal{S}_m}{3\delta_1} [(\xi_{15} \sin \iota_n + \xi_{17} \sin \iota'_n) \kappa_m + (\xi_{16} \sin \iota_n + \xi_{18} \sin \iota'_n) \kappa'_m]
\end{aligned}$$

Die Glieder sind hier wieder, abgesehen von den exargumentalen Teilen, von der Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$.

Hiermit haben wir die Funktionen S , R , (ϱ) , W , \mathfrak{B} und (\mathfrak{z}) mit der vorgeschriebenen Genauigkeit berechnet. Wir haben nicht nur die von der Neigung abhängigen Teile dieser Funktionen berechnet, sondern auch diejenigen Glieder, welche eine Folge des hier angewandten Integrationsverfahrens sind, d. h. die exargumentalen Glieder und die aus der Veränderlichkeit von η , Π etc. entspringenden Zusätze. Erstere gaben nur zu den Koeffizienten der trigonometrischen Funktionen Zusätze ab, letztere dagegen Glieder mit neuen Argumenten. Ferner haben wir die aus den Gliedern zweiten Grades entstehenden Teile der Glieder dritten Grades berechnet, soweit sie kleine Divisoren erhielten, sei es, dass sie durch die hier angewandte Integrationsmethode entstanden, sei es, dass sie durch die Gestalt der Differentialgleichung hervorgerufen wurden. Die aus der Entwicklung der Störungsfunktion entstehenden Glieder dritten Grades sind dagegen durchweg vernachlässigt worden, und es wird dies auch in den meisten Fällen der kritischen Planeten, in denen der charakteristischen wohl stets, ausreichen, so lange die Excentricitäten sich in mittleren Grenzen halten. Ihre Mitnahme hätte eine Weiterführung der Störungsfunktion bis zum vierten Grade bedingt. Ausserdem wird die Mitnahme dieser Glieder weit eher durch starke Excentricitäten erforderlich, als bei starker Kommensurabilität, und dies würde mehr einer Ergänzung zur Theorie der gewöhnlichen Planeten entsprechen, als es für kritische Planeten von Wichtigkeit wäre. Aus diesem Grunde ist bei unserem Specialfall des Hecuba-Typus von der Ermittlung der Glieder dritten Grades, soweit sie aus der Störungsfunktion kommen, Abstand genommen worden.

Hiermit wäre die eigentliche Entwicklung des Problems abgeschlossen, und wir wollen im Schlusskapitel nur noch verschiedene für die numerische Rechnung erforderliche Transformationen dieser Resultate geben.

Fünftes Kapitel.

Transformation der Koeffizienten der Störungsgleichungen in eine für die numerische Rechnung geeignete Form. — Ueber die Reduktion auf die Ekliptik und die Berechnung instantaner elliptischer Elemente.

§ 1. Transformation der Koeffizienten zur numerischen Rechnung.

1) Die Werte der Koeffizienten für die Störungsgleichungen, soweit sie elementare, charakteristische und koordinierte Glieder enthalten, hatten wir im dritten Kapitel gegeben, im vierten waren die hierzu tretenden exargumentalen Teile abgeleitet worden, sowie die Werte der konstanten und secularen Glieder. Des weiteren waren dort die aus der Veränderlichkeit der langperiodischen Funktionen entstehenden Glieder nebst den Werten ihrer Koeffizienten angeführt worden. Alle diese Grössen haben eine für die numerische Rechnung recht wenig geeignete Form, welche hauptsächlich deswegen nicht verändert worden ist, um die Art der Entstehung, sowie die Grösse der einzelnen Glieder in aller Deutlichkeit veranschaulichen zu können. Ich will jetzt die Grössen in eine für die numerische Rechnung mehr passende Form bringen und den wiederholt auftretenden Termen bestimmte Symbole beilegen.

Ausserdem muss hier auch von der Art der Bestimmung der β_k und ξ_k gehandelt werden, welche ja in allen Koeffizienten als Unbekannte gelassen worden sind und deren Kenntnis zuerst erforderlich ist. Mit griechischen Buchstaben wollen wir auch hier nach Möglichkeit solche Grössen bezeichnen, welche durch einen kleinen Divisor vergrössert werden. Durch \mathcal{A}_n wollen wir Verbindungen der δ_1 mit numerischen Grössen charakterisieren, k_n bezeichne derartige Relationen mit der Grösse $p_0^{(0)}$.

Für die Glieder nullten und ersten Grades rechnet man zuerst folgende Hilfsgrössen:

$$(171) \quad \begin{array}{llll} \mathcal{A}_1 = 1 + \delta_1 & \mathcal{A}_4 = 2 + \delta_1 & \mathcal{A}_7 = 1 - \delta_1 & \mathcal{A}_{10} = 4 + 8\delta_1 + 5\delta_1^2 \\ \mathcal{A}_2 = 1 + 2\delta_1 & \mathcal{A}_5 = 2 + 3\delta_1 & \mathcal{A}_8 = 1 - 2\delta_1 & \mathcal{A}_{11} = 4 + 12\delta_1 + 11\delta_1^2 \\ \mathcal{A}_3 = 1 + 3\delta_1 & \mathcal{A}_6 = 2 + 5\delta_1 & \mathcal{A}_9 = 2 - \delta_1 & \end{array}$$

$$(172) \quad \begin{array}{ll} k_1 = 1 + 2p_0^{(0)} & k_3 = 2(1 - \frac{1}{3}p_0^{(0)}) \\ k_2 = 1 + \frac{4}{3}p_0^{(0)} & k_4 = 2(1 + p_0^{(0)}) \end{array}$$

Dann die Koeffizienten:

$$(173) \quad \beta_1 = \frac{-\frac{2q_1^{(0)}}{\mathcal{A}_1} + p_1^{(0)}}{\delta_1 \mathcal{A}_4 + \frac{2q_1^{(0)}}{\mathcal{A}_1} - p_1^{(0)} + \frac{1}{2} r_1^{(0)}} \quad \text{pars } a_0 = \frac{2}{3} p_0^{(0)} + \frac{2}{3} (p_0^{(1)} - \frac{1}{2} q_1^{(0)}) \beta_1$$

$$\text{pars } b_0 = \frac{1}{2} a_0$$

$$\mathcal{A}_1 a_1 = q_1^{(0)} + q_1^{(1)} \beta_1.$$

Darauf ermittelt man:

$$(174) \quad l_1 = a_1 - p_1 \quad b_{2,0,0} = l_1 + a_1$$

$$(175) \quad \lambda_1 = 3\beta_1 - a_1 \quad \nu_1 = \frac{2\mu b_{2,0,0}}{\delta_1 \mathcal{A}_4}$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{2} \mu \beta_1^2.$$

Mit Hilfe dieser Grössen folgt:

$$(176) \quad \text{pars } \gamma = \frac{3}{2} \beta_1^2 \quad 2\mathcal{A}_1 W_{4,0,0} = \frac{r_1}{2\mathcal{A}_1} - 2R_{4,0,0} + 2\lambda_2$$

$$\mathcal{A}_1 \gamma_1 = a_1 - 2\beta_1.$$

$W_{4,0,0}$ wird mit einem Fehler v. d. Ord. $\frac{m^{1/2}}{\delta_1}$ in diese Gestalt gebracht. Damit sind die Koeffizienten nullten Grades, soweit sie charakteristischen Gliedern zugehören, erledigt, nämlich $a_0, a_1; b_0, \beta_1; \gamma_0; \gamma_1$ und $W_{4,0,0}$. Die Rechnung für die Glieder ersten Grades stellt sich folgendermassen dar:

$$(177) \quad (\gamma_1 \cdot 1) = -k_3 \quad (\gamma \cdot 2) = k_2 \frac{q_2^{(0)}}{\delta_1} - a_1 + \left(3 + \frac{q_2^{(1)}}{\delta_1} - \frac{q_4^{(0)}}{\mathcal{A}_2}\right) \beta_1$$

$$(\gamma_1 \cdot 2) = \frac{q_2^{(4)}}{\delta_1} + \lambda_1 \quad (\gamma \cdot 3) = k_2 \frac{q_3^{(0)}}{\delta_1} + \left(\frac{q_3^{(1)}}{\delta_1} - \frac{q_5^{(0)}}{\mathcal{A}_2}\right) \beta_1$$

$$(178) \quad B_1 = \frac{\mathcal{A}_5 \nu_1}{2} + \frac{2\mu a_1}{\mathcal{A}_2} \quad B_3 = \frac{3q_1^{(0)}}{\mathcal{A}_2} + l_1$$

$$B_2 = \frac{2q_1^{(2)}}{\mathcal{A}_2} - p_1^{(2)},$$

wo mit den B_n wiederholt auftretende Hilfsgrössen in R bezeichnet werden sollen.

$$(179) \quad (b_2 \cdot 1) = \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_7 + p_2^{(2)} \quad (b_4 \cdot 1) = B_2 + B_1 (\gamma_1 \cdot 1)$$

$$(b_3 \cdot 2) = p_0^{(1)} - \frac{1}{2} q_1^{(0)} - \frac{2q_2^{(4)}}{\delta_1} \quad (b_5 \cdot 2) = 4\delta_1 \mathcal{A}_1 - p_2^{(2)} + B_1 (\gamma_1 \cdot 2)$$

$$(b_1 \cdot 2) = k_4 \frac{q_2^{(0)}}{\delta_1} - p_2^{(0)} + \left[\frac{1}{2} q_1^{(1)} + \frac{2q_2^{(1)}}{\delta_1} - p_2^{(1)} + \frac{1}{2} q_4^{(0)}\right] \beta_1$$

$$(b_2 \cdot 3) = k_4 \frac{q_3^{(0)}}{\delta_1} - p_3^{(0)} + \left[\frac{1}{2} q_2^{(0)} + \frac{2q_3^{(1)}}{\delta_1} - p_3^{(1)} + \frac{1}{2} q_5^{(0)}\right] \beta_1$$

$$(179) \quad (b_1 \cdot 4) = p_4^{(0)} - \frac{2q_4^{(0)}}{\mathcal{A}_2} - \frac{1}{2}r_1 - B_1(\gamma \cdot 2) - B_3 \frac{q_2^{(0)}}{\delta_1} + \left[p_4^{(1)} - \frac{2q_4^{(1)}}{\mathcal{A}_2} + \frac{1}{2}q_2^{(0)} - \frac{1}{2}r_4^{(0)} \right] \beta_1$$

$$(b_2 \cdot 5) = p_5^{(0)} - \frac{2q_5^{(0)}}{\mathcal{A}_2} - B_1(\gamma \cdot 3) - B_3 \frac{q_3^{(0)}}{\delta_1} + \left[p_5^{(1)} - \frac{2q_5^{(1)}}{\mathcal{A}_2} + \frac{1}{2}q_3^{(0)} - \frac{1}{2}r_5^{(0)} \right] \beta_1.$$

Sind diese Koeffizienten gerechnet, so ergeben sich, wie man leicht einsieht, für die β_2 bis β_5 folgende vier Bedingungsgleichungen:

$$(b_2 \cdot 1)\beta_2 + (b_3 \cdot 2)\beta_4 = (b_1 \cdot 2) \quad (b_2 \cdot 1)\beta_3 + (b_3 \cdot 2)\beta_5 = (b_2 \cdot 3)$$

$$(b_4 \cdot 1)\beta_2 + (b_5 \cdot 2)\beta_4 = (b_1 \cdot 4) \quad (b_4 \cdot 1)\beta_3 + (b_5 \cdot 2)\beta_5 = (b_2 \cdot 5)$$

Hieraus folgen weiter die β_k , wenn man mit Hilfe von Determinanten auflöst und setzt:

$$D_1^0 = (b_2 \cdot 1)(b_5 \cdot 2) - (b_4 \cdot 1)(b_3 \cdot 2)$$

$$(180) \quad D_2 = (b_1 \cdot 2)(b_5 \cdot 2) - (b_1 \cdot 4)(b_3 \cdot 2) \quad D_3 = (b_2 \cdot 3)(b_5 \cdot 2) - (b_2 \cdot 5)(b_3 \cdot 2)$$

$$D_4 = (b_1 \cdot 4)(b_2 \cdot 1) - (b_1 \cdot 2)(b_4 \cdot 1) \quad D_5 = (b_2 \cdot 1)(b_2 \cdot 5) - (b_2 \cdot 3)(b_4 \cdot 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} D_1^0 \beta_2 = D_2 \\ D_1^0 \beta_3 = D_3 \\ D_1^0 \beta_4 = D_4 \\ D_1^0 \beta_5 = D_5 \end{array} \right\} (R_1).$$

Die Koeffizienten in S_1 werden dann:

$$(181) \quad \left. \begin{array}{l} \alpha_2 = k_1 \frac{q_2^{(0)}}{\delta_1} + \frac{q_2^{(1)}}{\delta_1} \beta_1 + \frac{q_2^{(4)}}{\delta_1} \beta_4 \quad a_1 = a_1 + A_1 \quad \mathcal{A}_2 a_4 = q_4 + A_1 \\ \alpha_3 = k_1 \frac{q_3^{(0)}}{\delta_1} + \frac{q_3^{(1)}}{\delta_1} \beta_1 + \frac{q_3^{(4)}}{\delta_1} \beta_5 \quad a_2 = a_2 + A_2 \quad \mathcal{A}_2 a_5 = q_5 + A_2 \end{array} \right\} (S_1).$$

Hier ist, ganz entsprechend den B_k in R , abkürzend gesetzt:

$$(182) \quad \begin{aligned} A_1 &= q_1^{(0)} \left(\frac{3}{2} \alpha_2 + \mu \gamma_2 \right) \\ A_2 &= q_1^{(0)} \left(\frac{3}{2} \alpha_3 + \mu \gamma_3 \right), \end{aligned}$$

mit einem Fehler v. d. Ord. m'^2 .

Des weiteren hat man:

$$(183) \quad \left. \begin{array}{l} \gamma_2 = (\gamma \cdot 2) + (\gamma_1 \cdot 1) \beta_2 + (\gamma_1 \cdot 2) \beta_4 \\ \gamma_3 = (\gamma \cdot 3) + (\gamma_1 \cdot 1) \beta_3 + (\gamma_1 \cdot 2) \beta_5 \end{array} \right\} (V_1).$$

Als Hilfsgrößen seien ferner bezeichnet:

$$(184) \quad \begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{\mu \gamma_2}{\delta_1} & \lambda_5 &= \alpha_2 + 6\beta_1 - \frac{3}{2}\beta_2 & \lambda_7 &= \mu \gamma_1 \gamma_2 & \lambda_9 &= \alpha_2 + 3\beta_1 - 3\beta_2 \\ \lambda_4 &= \frac{\mu \gamma_3}{\delta_1} & \lambda_6 &= \alpha_3 - \frac{3}{2}\beta_3 & \lambda_8 &= \mu \gamma_1 \gamma_3 & \lambda_{10} &= \alpha_3 - 3\beta_3. \end{aligned}$$

Dann folgt zur Berechnung von ς und der κ_n in (9):

$$(185) \quad \left. \begin{aligned} b_{0.1.0}^{+1} &= 2a_1 - p_1 + l_1 \alpha_2 + \frac{1}{2} (q_2^{(0)} + r_2^{(0)}) \beta_1 + \frac{1}{2} r_1^{(0)} \beta_4 \\ b_{0.0.1}^{+1} &= 2a_2 - p_2 + l_1 \alpha_3 + \frac{1}{2} (q_3^{(0)} + r_3^{(0)}) \beta_1 + \frac{1}{2} r_1^{(0)} \beta_5 \\ b_1 &= b_{0.1.0}^{+1} + \lambda_3 b_{2.0.0} & b_3 &= b_{0.1.0}^{+1} + \frac{\delta_1}{\mathcal{A}_4} \lambda_3 b_{2.0.0} \\ b_2 &= b_{0.0.1}^{+1} + \lambda_4 b_{2.0.0} & b_4 &= b_{0.0.1}^{+1} + \frac{\delta_1}{\mathcal{A}_4} \lambda_4 b_{2.0.0} \end{aligned} \right\} ((9)).$$

Zur Berechnung des kurzperiodischen Teiles von W hat man dann:

$$(186) \quad \left. \begin{aligned} \mathcal{A}_2 \gamma_4 &= a_4 - 2\beta_4 - \lambda_9 \beta_1 + 3R_{4.0.0} - S_{4.0.0} + \lambda_7 \\ \mathcal{A}_2 \gamma_5 &= a_5 - 2\beta_5 - \lambda_{10} \beta_1 + \lambda_8 \\ \mathcal{A}_4 \gamma_6 &= S_{2.1.0}^{+1} - 2R_{2.1.0}^{+1} + \lambda_1 + \lambda_2 \gamma_2 & W_{0.1.0}^{+1} &= a_1 + a_0 - \lambda_5 \beta_1 + \frac{1}{2} \beta_2 (\lambda_1 - a_1) + \lambda_7 \\ \mathcal{A}_4 W_{2.0.1}^{+1} &= S_{2.0.1}^{+1} - 2R_{2.0.1}^{+1} + \lambda_2 \gamma_3 & W_{0.0.1}^{+1} &= a_2 - \lambda_6 \beta_1 + \frac{1}{2} \beta_3 (\lambda_1 - a_1) + \lambda_8 \\ \mathcal{A}_5 W_{6.1.0}^{-1} &= S_{6.1.0}^{-1} - 2R_{6.1.0}^{-1} + 3\beta_1 \beta_4 + 3R_{6.0.0} - S_{6.0.0} + \lambda_2 \gamma_2 \\ \mathcal{A}_5 W_{6.0.1}^{-1} &= S_{6.0.1}^{-1} - 2R_{6.0.1}^{-1} + 3\beta_1 \beta_5 + \lambda_2 \gamma_3 \end{aligned} \right\} (K_1).$$

Die $S_{4.0.0}$, $R_{4.0.0}$ etc. gehören zu gewöhnlichen Gliedern und sind nach den Formeln in Br. Kap. 6 zu berechnen. Für den gestörten Sinus der Breite ist:

$$(187) \quad \begin{aligned} (c \cdot 1) &= 4\delta_1 \mathcal{A}_1 + z_1^{(1)} & (c_0 \cdot 1) &= \frac{1}{2} r_1 - z_1^{(0)} - z_1^I \beta_1 \\ & & (c_0 \cdot 2) &= -z_2^{(0)} - z_1^I \beta_1, \end{aligned}$$

und zwar folgt hier ohne weiteres:

$$(188) \quad \left. \begin{aligned} (c \cdot 1) \xi_1 &= (c_0 \cdot 1) & \delta_1 &= \delta_1^{(0)} + \delta_1^I \beta_1 + \delta_1^{(1)} \xi_1 \\ (c \cdot 1) \xi_2 &= (c_0 \cdot 2) & \delta_2 &= \delta_2^{(0)} + \delta_2^I \beta_1 + \delta_1^{(1)} \xi_2 \end{aligned} \right\} (\beta_1 + (\beta)).$$

Hierzu will ich noch bemerken, dass die $q_i^{(k)}$, $p_i^{(k)}$, $z_i^{(k)}$ im zweiten Kapitel gegeben sind und dass die zwischen verschiedenen derartigen Koeffizienten bestehenden Relationen bereits benutzt sind.

Die Berechnung der Zusatzglieder ersten Grades geschieht nach den Formeln (159), (161), (163), (164), (166), (166a) und (170), da eine weitere Transformation dieser Koeffizienten für die numerische Rechnung nicht angebracht ist.

2) Die Rechnung für die Koeffizienten der Glieder zweiten Grades gestaltet sich in folgender Weise, wenn wir einstweilen von den konstanten Teilen, den A-Gliedern und den Zusatzgliedern absehen:

$$(189) \quad \begin{aligned} A_3 &= \frac{3}{2} \alpha_2 + 2\mu \gamma_2 & A_5 &= \frac{3}{2} q_2 + \mu \gamma_2 \\ A_4 &= \frac{3}{2} \alpha_3 + 2\mu \gamma_3 & A_6 &= \frac{3}{2} q_3 + \mu \gamma_3. \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
 (190) \quad (\alpha_2 \cdot 0) &= q_1^{(4)} & (\alpha_2 \cdot 7) &= q_{7,1} + \frac{3}{2} q_1 \alpha_2 + q_4 A_3 & (\alpha_2 \cdot 14) &= \frac{1}{2\delta_1} [k_1 q_{14,1} + \alpha_2 A_5] \\
 (\alpha_2 \cdot 1) &= k_1 \frac{q_2^{(4)}}{2\delta_1} & (\alpha_2 \cdot 8) &= q_{8,1} + \frac{3}{2} q_1 \alpha_3 + q_5 A_3 & (\alpha_2 \cdot 15) &= \frac{1}{2\delta_1} [k_1 q_{15,1} + \alpha_2 A_6 + \alpha_3 A_5] \\
 & & (\alpha_2 \cdot 9) &= q_{9,1} + \frac{3}{2} q_2 \alpha_2 + q_4 A_4 & (\alpha_2 \cdot 16) &= \frac{1}{2\delta_1} [k_1 q_{16,1} + \alpha_3 A_6] \\
 & & (\alpha_2 \cdot 10) &= q_{10,1} + \frac{3}{2} q_2 \alpha_3 + q_5 A_4.
 \end{aligned}$$

Wir führen nun in W eine den A_k und B_k entsprechende abkürzende Bezeichnung G_k ein:

$$\begin{aligned}
 (191) \quad G_1 &= \frac{3}{2} \beta_1 \alpha_2 - \lambda_5 \beta_2 & (192) \quad A_7 &= \frac{3}{2} q_1 + \mu a_1 \\
 G_2 &= \frac{3}{2} \beta_1 \alpha_3 - \lambda_6 \beta_2 - \lambda_5 \beta_3 & A_8 &= 3\mu a_1 \beta_4 + \mu a_1 G_1 + A_7 (\alpha_2 \cdot 14) \\
 G_3 &= -\lambda_6 \beta_3 & A_9 &= 3\mu a_1 \beta_5 + \mu a_1 G_2 + A_7 (\alpha_2 \cdot 15) \\
 & & A_{10} &= \mu a_1 G_3 + A_7 (\alpha_2 \cdot 16).
 \end{aligned}$$

Unsere Aufgabe besteht jetzt darin, mit Hilfe der bisher abgeleiteten Formeln die a_k zu berechnen. In den a_{11}, a_{12}, a_{13} treten nun auf $\mu a_1 \gamma_{14}, \mu a_1 \gamma_{15}, \mu a_1 \gamma_{16}$, und diese sind ebenfalls unbekannt. Umgekehrt treten aber auch in den $\gamma_{14} \dots \gamma_{16}$ die $a_{11} \dots a_{13}$ wieder auf, und man wird demnach hier näherungsweise vorgehen. Wir nehmen zur Berechnung der $a_{11} \dots a_{13}$ nur die Teile aus den $\gamma_{14} \dots \gamma_{16}$ mit, welche v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ resp. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ sind. Ebenso verfahren wir bei der Ermittlung von $a_{17} \dots a_{19}$ und machen zur Berechnung dieser Grössen folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{14} &= [(\alpha_2 \cdot 14) + 3\beta_4 + G_1] + [3\beta_1 - (\alpha_2 \cdot 1)]\beta_{11} - 2\beta_{14} + [3\beta_1 + (\alpha_2 \cdot 1)]\beta_{17} \\
 \gamma_{15} &= [(\alpha_2 \cdot 15) + 3\beta_5 + G_2] + [3\beta_1 - (\alpha_2 \cdot 1)]\beta_{12} - 2\beta_{15} + [3\beta_1 + (\alpha_2 \cdot 1)]\beta_{18} \\
 \gamma_{16} &= [(\alpha_2 \cdot 16) + G_3] + [3\beta_1 - (\alpha_2 \cdot 1)]\beta_{13} - 2\beta_{16} + [3\beta_1 + (\alpha_2 \cdot 1)]\beta_{19}.
 \end{aligned}$$

Wir vernachlässigen hier $m', \frac{m'^2}{\delta_1}, \frac{m'^3}{\delta_1^2}$, und da $\gamma_{14} \dots \gamma_{16}$ in diesen a -Koeffizienten noch in m' multipliziert auftreten, so wird der Fehler in den $a_{11} \dots a_{13}, a_{17} \dots a_{19}$ gleich $m'^2, \frac{m'^3}{\delta_1}, \frac{m'^4}{\delta_1^2}$ d. h. diese Näherung reicht völlig aus. Jetzt lösen wir die a_k nach den β_k auf und erhalten für die Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 (193) \quad (\alpha_2 \cdot 2) &= 3\mu a_1 \beta_1 - A_7 (\alpha_2 \cdot 1) & (\alpha_2 \cdot 11) &= \frac{3}{2} q_1 \alpha_2 - q_{11,1} + A_8 \\
 (\alpha_2 \cdot 3) &= q_1^{(3)} - 2\mu a_1 & (\alpha_2 \cdot 12) &= \frac{3}{2} (q_1 \alpha_3 + q_2 \alpha_2) - q_{12,1} + A_9 \\
 (\alpha_2 \cdot 4) &= (\alpha_2 \cdot 0) + 3\mu a_1 \beta_1 + A_7 (\alpha_2 \cdot 1) & (\alpha_2 \cdot 13) &= \frac{3}{2} q_2 \alpha_3 - q_{13,1} + A_{10} \\
 (\alpha_2 \cdot 5) &= (\alpha_2 \cdot 0) + (\alpha_2 \cdot 2) & (\alpha_2 \cdot 17) &= q_{17,1} + q_4 A_3 + A_8 \\
 (\alpha_2 \cdot 6) &= (\alpha_2 \cdot 4) - (\alpha_2 \cdot 0) & (\alpha_2 \cdot 18) &= q_{18,1} + q_4 A_4 + q_5 A_3 + A_9 \\
 & & (\alpha_2 \cdot 19) &= q_{19,1} + q_5 A_4 + A_{10}.
 \end{aligned}$$

Jetzt ist man in der Lage, fast alle Hilfsgrößen für den zweiten Grad zu rechnen. Es sind dies:

$$(194) \quad \begin{aligned} l_2 &= \frac{3}{4} S_{4,0,0} - 3 R_{4,0,0} & b_{4,1,0}^{-1} &= 2a_4 - p_4 + \frac{1}{2} r_1 + \frac{1}{2} (r_4 - q_2) \beta_1 + l_1 \alpha_2 \\ l_3 &= a_1 - p_1 & b_{4,0,1}^{-1} &= 2a_5 - p_5 + \frac{1}{2} (r_5 - q_3) \beta_1 + l_1 \alpha_3 \\ l_4 &= a_2 - p_2 & k_5 &= 3 - 2p_0^{(0)} - a_1 \\ l_5 &= a_4 - p_4 & k_6 &= 1 - \frac{2}{3} p_0^{(0)} \\ l_6 &= a_5 - p_5 & k_7 &= 2(1 + \frac{1}{3} p_0^{(0)}) \\ v_2 &= \frac{\mu b_{4,1,0}^{-1}}{2\delta_1 \mathcal{A}_1} & v_3 &= \frac{\mu b_{4,0,1}^{-1}}{2\delta_1 \mathcal{A}_1} & v_4 &= \frac{\mu^2 b_{2,0,0}}{2\delta_1^2 \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_4 &= G_1 + k_5 \beta_4 + \frac{3}{2} \beta_1 (S_{6,1,0}^{-1} - 4R_{6,1,0}^{-1}) + \frac{3}{2} \beta_2 \alpha_1 - a_4 + l_2 \\ G_5 &= G_2 - a_2 \beta_4 + k_5 \beta_5 + \frac{3}{2} \beta_1 (S_{6,0,1}^{-1} - 4R_{6,0,1}^{-1}) + \frac{3}{2} \beta_3 \alpha_1 - a_5 \\ G_6 &= G_3 - a_2 \beta_5 \\ G_7 &= \lambda_1 - k_6 (\alpha_2 \cdot 1) \\ G_8 &= \lambda_1 + k_6 (\alpha_2 \cdot 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_4 &= v_2 \mathcal{A}_5 + v_4 \mathcal{A}_{10} \gamma_2 & B_{10} &= l_1 (\alpha_2 \cdot 1) + \frac{1}{2} \beta_1 q_2^{(4)} \\ B_5 &= v_3 \mathcal{A}_5 + v_4 \mathcal{A}_{10} \gamma_3 & B_{11} &= p_0^{(1)} - \frac{1}{2} q_1 - \frac{1}{2} \beta_1 q_1^{(4)} \\ B_6 &= \frac{1}{2} r_1 + 2 \frac{(a_2 \cdot 0)}{\mathcal{A}_1} & B_{12} &= v_2 \mathcal{A}_6 + v_4 \mathcal{A}_{11} \gamma_2 \\ B_7 &= \frac{1}{2} r_1 + l_5 & B_{13} &= v_3 \mathcal{A}_6 + v_4 \mathcal{A}_{11} \gamma_3 \\ B_8 &= q_1 - 2p_2 + a_2 & B_{14} &= l_1 (\alpha_2 \cdot 1) - \frac{1}{2} \beta_1 q_2^{(4)} \\ B_9 &= p_3 - \frac{1}{2} \alpha_3 \end{aligned}$$

Nachdem diese Hilfsgrößen bekannt sind, rechnet man folgende Werte:

$$(195) \quad \begin{aligned} (\gamma_2 \cdot 14) &= G_4 + k_6 (\alpha_2 \cdot 14) - \beta_1 [(a_2 \cdot 11) + (a_2 \cdot 17)] \\ (\gamma_2 \cdot 15) &= G_5 + k_6 (\alpha_2 \cdot 15) - \beta_1 [(a_2 \cdot 12) + (a_2 \cdot 18)] \\ (\gamma_2 \cdot 16) &= G_6 + k_6 (\alpha_2 \cdot 16) - \beta_1 [(a_2 \cdot 13) + (a_2 \cdot 19)] \\ (\gamma_2 \cdot 1) &= G_7 - \beta_1 [(a_2 \cdot 2) + (a_2 \cdot 5)] \\ (\gamma_2 \cdot 2) &= -k_3 - 2\beta_1 (a_2 \cdot 3) \\ (\gamma_2 \cdot 3) &= G_8 - \beta_1 [(a_2 \cdot 4) + (a_2 \cdot 6)]. \end{aligned}$$

$$(196) \quad \begin{aligned} (b_7 \cdot 1) &= p_1^{(1)} - \delta_1 \mathcal{A}_4 - B_6 \\ (b_8 \cdot 1) &= p_2^{(2)} - \delta_1 \mathcal{A}_4 + \frac{1}{2} \beta_1 q_2^{(4)} \\ (b_9 \cdot 2) &= p_1^{(4)} - B_6 - \frac{1}{2} \beta_1 q_2^{(4)} \end{aligned}$$

(196)

$$(b_{11} \cdot 1) = \delta_1 \mathcal{A}_9 - \frac{2(a_2 \cdot 2)}{\mathcal{A}_7} + p_2^{(2)} - v_1(\gamma_2 \cdot 1) + B_{10}$$

$$(b_{12} \cdot 2) = -\frac{2(a_2 \cdot 3)}{\mathcal{A}_7} + p_1^{(2)} - v_1(\gamma_2 \cdot 2)$$

$$(b_{13} \cdot 3) = -\frac{2(a_2 \cdot 4)}{\mathcal{A}_7} + p_1^{(4)} - \frac{1}{2} r_1 - v_1(\gamma_2 \cdot 3) - B_{10}$$

$$(b_{14} \cdot 1) = k_7(\alpha_2 \cdot 1) + B_{11}$$

$$(b_{15} \cdot 2) = \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_8 + p_2^{(2)} - \beta_1 q_1^{(2)}$$

$$(b_{16} \cdot 3) = -k_7(\alpha_2 \cdot 1) + B_{11}$$

$$(b_{17} \cdot 1) = \frac{2(a_2 \cdot 5)}{\mathcal{A}_3} - p_1^{(4)} + \frac{1}{2} r_1 + v_1 \mathcal{A}_2(\gamma_2 \cdot 1) - B_{14}$$

$$(b_{18} \cdot 2) = \frac{2(a_2 \cdot 3)}{\mathcal{A}_3} - p_1^{(2)} + v_1 \mathcal{A}_2(\gamma_2 \cdot 2)$$

$$(b_{19} \cdot 3) = \frac{2(a_2 \cdot 6)}{\mathcal{A}_3} - p_2^{(2)} + 3\delta_1 \mathcal{A}_5 + v_1 \mathcal{A}_2(\gamma_2 \cdot 3) + B_{14}$$

$$) = \frac{2(a_2 \cdot 7)}{\mathcal{A}_1} - p_{7 \cdot 1} - \frac{1}{2}(q_2 - r_2) + \frac{1}{2} \beta_1 A_{4 \cdot 2 \cdot 0} + \alpha_2(l_3 + B_7) + \frac{1}{2} \beta_4(q_2 + r_4) + B_4 \gamma_2$$

$$) = \frac{2(a_2 \cdot 8)}{\mathcal{A}_1} - p_{8 \cdot 1} - \frac{1}{2} q_3 + \frac{1}{2} \beta_1 [2b_{0 \cdot 0 \cdot 1}^{+1} - q_{4 \cdot 1} + A_{4 \cdot 1 \cdot 1}^{+1}] + \alpha_2 l_6 + \alpha_3 l_3 + \frac{1}{2} \beta_4 r_5 + \frac{1}{2} \beta_5 q_2 + B_5 \gamma_2$$

$$) = \frac{2(a_2 \cdot 9)}{\mathcal{A}_1} - p_{9 \cdot 1} + \frac{1}{2} r_3 + \frac{1}{2} \beta_1 [-2b_{0 \cdot 0 \cdot 1}^{+1} + q_{4 \cdot 1} + A_{4 \cdot 1 \cdot 1}^{-1}] + \alpha_2 l_4 + \alpha_3 B_7 + \frac{1}{2} \beta_4 q_3 + \frac{1}{2} \beta_5 r_4 + B_4 \gamma_3$$

$$) = \frac{2(a_2 \cdot 10)}{\mathcal{A}_1} - p_{10 \cdot 1} + \frac{1}{2} \beta_1 A_{4 \cdot 0 \cdot 2} + \alpha_3(l_4 + l_6) + \frac{1}{2} \beta_5(q_3 + r_5) + B_5 \gamma_3$$

$$) = \frac{2(a_2 \cdot 11)}{\mathcal{A}_7} - p_{11 \cdot 1} + \frac{1}{2} q_2 + \frac{1}{2} \beta_1 [q_{14 \cdot 1} - 2b_{0 \cdot 1 \cdot 0}^{+1}] + \alpha_2 l_3 + \frac{1}{2} \beta_4 r_2 + l_1(\alpha_2 \cdot 14) + v_1(\gamma_2 \cdot 14)$$

$$) = \frac{2(a_2 \cdot 12)}{\mathcal{A}_7} - p_{12 \cdot 1} + \frac{1}{2} q_3 + \frac{1}{2} \beta_1 [q_{15 \cdot 1} - 2b_{0 \cdot 0 \cdot 1}^{+1} + A_{0 \cdot 1 \cdot 1}^{+2}] + \alpha_2 l_4 + \alpha_3 l_3 + \frac{1}{2} \beta_4 r_3 + \frac{1}{2} \beta_5 r_2 + l_1(\alpha_2 \cdot 15) + v_1(\gamma_2 \cdot 15)$$

$$) = \frac{2(a_2 \cdot 13)}{\mathcal{A}_7} - p_{13 \cdot 1} + \frac{1}{2} \beta_1 q_{16 \cdot 1} + \alpha_3 l_4 + \frac{1}{2} \beta_5 r_3 + l_1(\alpha_2 \cdot 16) + v_1(\gamma_2 \cdot 16)$$

$$) = k_7(\alpha_2 \cdot 14) - p_{14 \cdot 1} + \frac{1}{2} q_4 + \frac{1}{2} \beta_1 [q_{11 \cdot 1} - q_{17 \cdot 1}] + \frac{1}{2} \alpha_2 B_8 + \frac{1}{2} \beta_4 q_1 - 6\mu q_2^{(0)} \gamma_2$$

$$) = k_7(\alpha_2 \cdot 15) - p_{15 \cdot 1} + \frac{1}{2} q_5 - \frac{1}{2} \beta_1 [q_{12 \cdot 1} - q_{18 \cdot 1}] - \alpha_2 B_9 + \frac{1}{2} \alpha_3 B_8 + \frac{1}{2} \beta_4 q_2 + \frac{1}{2} \beta_5 q_1 - 6\mu(q_2^{(0)} \gamma_3 + q_3^{(0)} \gamma_2)$$

$$) = k_7(\alpha_2 \cdot 16) - p_{16 \cdot 1} - \frac{1}{2} \beta_1 [q_{13 \cdot 1} - q_{19 \cdot 1}] - \alpha_3 B_9 + \frac{1}{2} \beta_5 q_2 - 6\mu q_3^{(0)} \gamma_3$$

$$) = p_{17 \cdot 1} - \frac{2(a_2 \cdot 17)}{\mathcal{A}_3} - l_1(\alpha_2 \cdot 14) - \frac{1}{2} r_4 + \frac{1}{2} \beta_1 [q_{14 \cdot 1} - A_{8 \cdot 2 \cdot 0}^{-2}] - \alpha_2 B_7 + \frac{1}{2} \beta_4 q_2 - B_{12} \gamma_2 - v_1 \mathcal{A}_2(\gamma_2 \cdot 14)$$

$$) = p_{18 \cdot 1} - \frac{2(a_2 \cdot 18)}{\mathcal{A}_3} - l_1(\alpha_2 \cdot 15) - \frac{1}{2} r_5 + \frac{1}{2} \beta_1 [q_{15 \cdot 1} - A_{8 \cdot 1 \cdot 1}^{-2}] - \alpha_2 l_6 - \alpha_3 B_7 + \frac{1}{2} \beta_4 q_3 + \frac{1}{2} \beta_5 q_2 - B_{13} \gamma_2 - B_{12} \gamma_3 - v_1 \mathcal{A}_2(\gamma_2 \cdot 15)$$

$$) = p_{19 \cdot 1} - \frac{2(a_2 \cdot 19)}{\mathcal{A}_3} - l_1(\alpha_2 \cdot 16) + \frac{1}{2} \beta_1 [q_{16 \cdot 1} - A_{8 \cdot 0 \cdot 2}^{-2}] - \alpha_3 l_6 + \frac{1}{2} \beta_5 q_3 - B_{13} \gamma_3 - v_1 \mathcal{A}_2(\gamma_2 \cdot 16).$$

Man erhält dann folgendes System linearer Gleichungen zur Bestimmung der β_k :

$$\begin{array}{l} (b_7 \cdot 1)\beta_7 = (b_1 \cdot 7); \quad (b_7 \cdot 1)\beta_{10} = (b_1 \cdot 10) \\ (b_8 \cdot 1)\beta_8 + (b_9 \cdot 2)\beta_9 = (b_1 \cdot 8) \\ (b_9 \cdot 2)\beta_8 + (b_8 \cdot 1)\beta_9 = (b_2 \cdot 9) \end{array} \left| \begin{array}{l} (b_{11} \cdot 1)\beta_{11} + (b_{12} \cdot 2)\beta_{14} + (b_{13} \cdot 3)\beta_{17} = (b_1 \cdot 11) \\ (b_{14} \cdot 1)\beta_{11} + (b_{15} \cdot 2)\beta_{14} + (b_{16} \cdot 3)\beta_{17} = (b_1 \cdot 14) \\ (b_{17} \cdot 1)\beta_{11} + (b_{18} \cdot 2)\beta_{14} + (b_{19} \cdot 3)\beta_{17} = (b_1 \cdot 17) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} (b_{11} \cdot 1)\beta_{12} + (b_{12} \cdot 2)\beta_{15} + (b_{13} \cdot 3)\beta_{18} = (b_2 \cdot 12) \\ (b_{14} \cdot 1)\beta_{12} + (b_{15} \cdot 2)\beta_{15} + (b_{16} \cdot 3)\beta_{18} = (b_2 \cdot 15) \\ (b_{17} \cdot 1)\beta_{12} + (b_{18} \cdot 2)\beta_{15} + (b_{19} \cdot 3)\beta_{18} = (b_2 \cdot 18) \end{array} \left| \begin{array}{l} (b_{11} \cdot 1)\beta_{13} + (b_{12} \cdot 2)\beta_{16} + (b_{13} \cdot 3)\beta_{19} = (b_3 \cdot 13) \\ (b_{14} \cdot 1)\beta_{13} + (b_{15} \cdot 2)\beta_{16} + (b_{16} \cdot 3)\beta_{19} = (b_3 \cdot 16) \\ (b_{17} \cdot 1)\beta_{13} + (b_{18} \cdot 2)\beta_{16} + (b_{19} \cdot 3)\beta_{19} = (b_3 \cdot 19). \end{array} \right.$$

Auf die Gleichheit der Koeffizienten der Unbekannten in diesen Gleichungen hat zuerst Herr Ludendorff¹⁾ aufmerksam gemacht, nur gilt dies bei ihm unter Vernachlässigung der Grössen ξ_n . Bei uns sind diese Koeffizienten völlig streng, da wir einmal Π und η anders definierten und dann in den Gliedern mit kleinem Divisor die Veränderlichkeit von η und Π berücksichtigten. Infolgedessen tritt bei uns die Grösse ξ im Divisor nicht auf. Bei den Neigungsteilen sind die Koeffizienten der Unbekannten genau dieselben wie hier, nur die rechten Seiten sind dort anders.

Löst man diese Gleichungen mit Determinanten auf, was bei der Beschaffenheit der Koeffizienten sehr vorteilhaft ist, und zerlegt man die Determinanten dritten Grades, welche für die numerische Rechnung wenig geeignet sind, in bekannter Weise in Subdeterminanten, so erhält man ohne grosse Mühe die Unbekannten. Zur Abkürzung soll gesetzt werden:

$$(197) \quad D_2^0 = (b_8 \cdot 1)^2 - (b_9 \cdot 2)^2, \quad D_3^0 = (b_{11} \cdot 1)D_{11} + (b_{14} \cdot 1)D_{14} + (b_{17} \cdot 1)D_{17}$$

$$D_8 = (b_1 \cdot 8)(b_8 \cdot 1) - (b_2 \cdot 9)(b_9 \cdot 2) \quad D_{11} = (b_{15} \cdot 2)(b_{19} \cdot 3) - (b_{16} \cdot 3)(b_{18} \cdot 2)$$

$$D_9 = (b_8 \cdot 1)(b_2 \cdot 9) - (b_1 \cdot 8)(b_9 \cdot 2) \quad D_{12} = (b_{16} \cdot 3)(b_{17} \cdot 1) - (b_{14} \cdot 1)(b_{19} \cdot 3)$$

$$D_{13} = (b_{14} \cdot 1)(b_{18} \cdot 2) - (b_{15} \cdot 2)(b_{17} \cdot 1)$$

$$D_{14} = (b_{13} \cdot 3)(b_{18} \cdot 2) - (b_{12} \cdot 2)(b_{19} \cdot 3) \quad D_{17} = (b_{12} \cdot 2)(b_{16} \cdot 3) - (b_{13} \cdot 3)(b_{15} \cdot 2)$$

$$D_{15} = (b_{11} \cdot 1)(b_{19} \cdot 3) - (b_{13} \cdot 3)(b_{17} \cdot 1) \quad D_{18} = (b_{13} \cdot 3)(b_{14} \cdot 1) - (b_{11} \cdot 1)(b_{16} \cdot 3)$$

$$D_{16} = (b_{12} \cdot 2)(b_{17} \cdot 1) - (b_{11} \cdot 1)(b_{18} \cdot 2) \quad D_{19} = (b_{11} \cdot 1)(b_{15} \cdot 2) - (b_{12} \cdot 2)(b_{14} \cdot 1)$$

Ist dies gerechnet, so erhält man ohne Mühe die β_k aus:

1) Ueber eine bemerkenswerte Eigenschaft gewisser Gleichungen in der Theorie der charakteristischen Planeten. Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. 1898 Heft 4.

$$\begin{array}{l}
 (198) \quad (b_7 \cdot 1) \beta_7 = (b_1 \cdot 7); \quad (b_7 \cdot 1) \beta_{10} = (b_1 \cdot 10) \quad \left. \begin{array}{l} D_3^0 \beta_{11} = (b_1 \cdot 11) D_{11} + (b_1 \cdot 14) D_{14} + (b_1 \cdot 17) D_{17} \\ D_3^0 \beta_{12} = (b_2 \cdot 12) D_{11} + (b_2 \cdot 15) D_{14} + (b_2 \cdot 18) D_{17} \\ D_3^0 \beta_{13} = (b_3 \cdot 13) D_{11} + (b_3 \cdot 16) D_{14} + (b_3 \cdot 19) D_{17} \end{array} \right\} (R_2). \\
 \quad \quad \quad D_2^0 \beta_8 = D_8 \quad \quad \quad D_3^0 \beta_{14} = (b_1 \cdot 11) D_{12} + (b_1 \cdot 14) D_{15} + (b_1 \cdot 17) D_{18} \quad D_3^0 \beta_{17} = (b_1 \cdot 11) D_{13} + (b_1 \cdot 14) D_{16} + (b_1 \cdot 17) D_{19} \\
 \quad \quad \quad D_2^0 \beta_9 = D_9 \quad \quad \quad D_3^0 \beta_{15} = (b_2 \cdot 12) D_{12} + (b_2 \cdot 15) D_{15} + (b_2 \cdot 18) D_{18} \quad D_3^0 \beta_{18} = (b_2 \cdot 12) D_{13} + (b_2 \cdot 15) D_{16} + (b_2 \cdot 18) D_{19} \\
 \quad \quad \quad D_3^0 \beta_{16} = (b_3 \cdot 13) D_{12} + (b_3 \cdot 16) D_{15} + (b_3 \cdot 19) D_{18} \quad D_3^0 \beta_{19} = (b_3 \cdot 13) D_{13} + (b_3 \cdot 16) D_{16} + (b_3 \cdot 19) D_{19}
 \end{array}$$

Die Koeffizienten für S_3 rechnet man dann durch folgende Formeln:

$$\begin{array}{l}
 (99) \quad \begin{array}{l} \mathcal{A}_1 a_7 = (a_2 \cdot 7) + (a_2 \cdot 0) \beta_7 \quad \alpha_{14} = (\alpha_2 \cdot 14) - (\alpha_2 \cdot 1) \beta_{11} + (\alpha_2 \cdot 1) \beta_{17} \\ \mathcal{A}_1 a_8 = (a_2 \cdot 8) + (a_2 \cdot 0) \beta_8 \quad \alpha_{15} = (\alpha_2 \cdot 15) - (\alpha_2 \cdot 1) \beta_{12} + (\alpha_2 \cdot 1) \beta_{18} \\ \mathcal{A}_1 a_9 = (a_2 \cdot 9) + (a_2 \cdot 0) \beta_9 \quad \alpha_{16} = (\alpha_2 \cdot 16) - (\alpha_2 \cdot 1) \beta_{13} + (\alpha_2 \cdot 1) \beta_{19} \\ \mathcal{A}_1 a_{10} = (a_2 \cdot 10) + (a_2 \cdot 0) \beta_{10} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} (S_2). \\
 \begin{array}{l} a_{11} = (a_2 \cdot 11) + (a_2 \cdot 2) \beta_{11} + (a_2 \cdot 3) \beta_{14} + (a_2 \cdot 4) \beta_{17} \\ a_{12} = (a_2 \cdot 12) + (a_2 \cdot 2) \beta_{12} + (a_2 \cdot 3) \beta_{15} + (a_2 \cdot 4) \beta_{18} \\ a_{13} = (a_2 \cdot 13) + (a_2 \cdot 2) \beta_{13} + (a_2 \cdot 3) \beta_{16} + (a_2 \cdot 4) \beta_{19} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{A}_3 a_{17} = (a_2 \cdot 17) + (a_2 \cdot 5) \beta_{11} + (a_2 \cdot 3) \beta_{14} + (a_2 \cdot 6) \beta_{17} \\ \mathcal{A}_3 a_{18} = (a_2 \cdot 18) + (a_2 \cdot 5) \beta_{12} + (a_2 \cdot 3) \beta_{15} + (a_2 \cdot 6) \beta_{18} \\ \mathcal{A}_3 a_{19} = (a_2 \cdot 19) + (a_2 \cdot 5) \beta_{13} + (a_2 \cdot 3) \beta_{16} + (a_2 \cdot 6) \beta_{19} \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Des weiteren ist:

$$(200) \quad \left. \begin{array}{l} \gamma_{14} = (\gamma_2 \cdot 14) + (\gamma_2 \cdot 1) \beta_{11} + (\gamma_2 \cdot 2) \beta_{14} + (\gamma_2 \cdot 3) \beta_{17} \\ \gamma_{15} = (\gamma_2 \cdot 15) + (\gamma_2 \cdot 1) \beta_{12} + (\gamma_2 \cdot 2) \beta_{15} + (\gamma_2 \cdot 3) \beta_{18} \\ \gamma_{16} = (\gamma_2 \cdot 16) + (\gamma_2 \cdot 1) \beta_{13} + (\gamma_2 \cdot 2) \beta_{16} + (\gamma_2 \cdot 3) \beta_{19} \end{array} \right\} (V_2).$$

Es sind dann noch folgende Hilfsgrößen zu ermitteln:

$$\begin{array}{l}
 (201) \quad \begin{array}{l} \lambda_{11} = 2\mu(\gamma_4 + \lambda_7) \quad G_9 = \beta_4 \left(\frac{3}{2} \beta_2 - \lambda_5 \right) + \gamma_2 \lambda_{11} \\ \lambda_{12} = 2\mu(\gamma_5 + \lambda_8) \quad G_{10} = \beta_5 \left(\frac{3}{2} \beta_2 - \lambda_5 \right) + \gamma_2 \lambda_{12} \\ \\ \lambda_{13} = \alpha_{14} - 3\beta_{14} \quad G_{11} = -\beta_4 \lambda_{10} + \gamma_3 \lambda_{11} \\ \lambda_{14} = \alpha_{15} - 3\beta_{15} \quad G_{12} = -\beta_5 \lambda_{10} + \gamma_3 \lambda_{12} \\ \lambda_{15} = \alpha_{16} - 3\beta_{16} \quad G_{13} = \mu \gamma_1 \gamma_{14} - \beta_1 \lambda_{13} \\ \\ \lambda_{16} = \frac{1}{2} \alpha_2 - 2\beta_2 \quad G_{14} = \mu \gamma_1 \gamma_{15} - \beta_1 \lambda_{14} \\ \lambda_{17} = \frac{1}{2} \alpha_3 - 2\beta_3 \quad G_{15} = \mu \gamma_1 \gamma_{16} - \beta_1 \lambda_{15} \end{array}
 \end{array}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(202) \quad \mathcal{A}_1 \gamma_7 &= a_7 - 2\beta_7 - \lambda_9 + G_9 + 3R_{2,1,0}^{+1} - S_{2,1,0}^{+1} & -\mathcal{A}_7 \gamma_{11} &= a_{11} - 2\beta_{11} - \lambda_9 - 6\beta_1 \beta_4 + \frac{3}{4}a_1 + G_{13} \\
\mathcal{A}_1 \gamma_8 &= a_8 - 2\beta_8 - \lambda_{10} + G_{10} & -\mathcal{A}_7 \gamma_{12} &= a_{12} - 2\beta_{12} - \lambda_{10} - 6\beta_1 \beta_5 + G_{14} \\
\mathcal{A}_1 \gamma_9 &= a_9 - 2\beta_9 + G_{11} + 3R_{2,0,1}^{+1} - S_{2,0,1}^{+1} & -\mathcal{A}_7 \gamma_{13} &= a_{13} - 2\beta_{13} + G_{15} \\
\mathcal{A}_1 \gamma_{10} &= a_{10} - 2\beta_{10} + G_{12} \\
\mathcal{A}_3 \gamma_{17} &= a_{17} - 2\beta_{17} + 3R_{6,1,0}^{-1} - S_{6,1,0}^{-1} + \frac{3}{4}S_{6,0,0} - 3R_{6,0,0} + G_9 + G_{13} \\
\mathcal{A}_3 \gamma_{18} &= a_{18} - 2\beta_{18} + 3R_{6,0,1}^{-1} - S_{6,0,1}^{-1} + G_{10} + G_{11} + G_{14} \\
\mathcal{A}_3 \gamma_{19} &= a_{19} - 2\beta_{19} + G_{12} + G_{15} \\
(3 + \delta_1) \gamma_{20} &= S_{2,2,0}^{+2} - 2R_{2,2,0}^{+2} + 3R_{2,1,0}^{+1} - S_{2,1,0}^{+1} + \frac{3}{4}S_{2,0,0} - 3\beta_1 \\
2\mathcal{A}_1 \gamma_{21} &= S_{4,2,0} - 2R_{4,2,0} + 3R_{4,1,0}^{+1} - S_{4,1,0}^{+1} - 3R_{4,0,0} + 3\beta_4 + 3\beta_1(\beta_7 + \lambda_{16}) - a_4 + \mu \gamma_2 \gamma_6 \\
2\mathcal{A}_1 \gamma_{22} &= S_{4,1,1}^{+1} - 2R_{4,1,1}^{+1} + 3\beta_5 + 3\beta_1(\beta_8 + \lambda_{17}) - a_5 + \mu \gamma_8 \gamma_6 \\
2\mathcal{A}_1 W_{4,1,1}^{-1} &= S_{4,1,1}^{-1} - 2R_{4,1,1}^{-1} + 3R_{4,0,1}^{+1} - S_{4,0,1}^{+1} + 3\beta_1 \beta_9 \\
2\mathcal{A}_1 W_{4,0,2} &= S_{4,0,2} - 2R_{4,0,2} + 3\beta_1 \beta_{10} \\
3\mathcal{A}_1 W_{6,2,0} &= S_{6,2,0} - 2R_{6,2,0} + 3R_{6,1,0}^{+1} + 3R_{6,1,0}^{-1} - S_{6,1,0}^{+1} - S_{6,1,0}^{-1} - 3R_{6,0,0} - 6\beta_1 \beta_4 \\
3\mathcal{A}_1 W_{6,1,1}^{+1} &= S_{6,1,1}^{+1} - 2R_{6,1,1}^{+1} + 3R_{6,0,1}^{-1} - S_{6,0,1}^{-1} - 6\beta_1 \beta_5 \\
2\mathcal{A}_2 W_{8,2,0}^{-2} &= S_{8,2,0}^{-2} - 2R_{8,2,0}^{-2} + 3R_{8,1,0}^{-1} - S_{8,1,0}^{-1} + \frac{3}{4}S_{8,0,0} - 3R_{8,0,0} + \frac{3}{2}\beta_4^2 + 3\beta_1 \beta_{17} + \lambda_2 \gamma_{14} \\
2\mathcal{A}_2 W_{8,1,1}^{-2} &= S_{8,1,1}^{-2} - 2R_{8,1,1}^{-2} + 3R_{8,0,1}^{-1} - S_{8,0,1}^{-1} + 3\beta_4 \beta_5 + 3\beta_1 \beta_{18} + \lambda_2 \gamma_{15} \\
2\mathcal{A}_2 W_{8,0,2}^{-2} &= S_{8,0,2}^{-2} - 2R_{8,0,2}^{-2} + \frac{3}{2}\beta_5^2 + 3\beta_1 \beta_{19} + \lambda_2 \gamma_{16}
\end{aligned} \tag{K_2}$$

3) Die Berechnung der von der Neigung abhängigen Glieder gestaltet sich insofern bedeutend einfacher, als einmal alle Koeffizienten der β_k in den Gleichungen für diese selbst, sowie in den a_k und γ_k dieselben sind, man also nur die von den β_k freien Glieder zu rechnen hat. Dann ist für den gestörten Sinus der Breite die Berechnung der ξ_k einfacher, da hier immer nur zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten auftreten.

Bei der Berechnung der $a_{27} \dots a_{29}$ und $a_{33} \dots a_{35}$ muss ebenfalls näherungsweise vorgegangen werden, weil in ihnen die $\gamma_{30} \dots \gamma_{32}$ auftreten, und in diesen wieder die a_k . Man setzt hinreichend genau mit demselben Fehler wie früher für die Berechnung der a_k diese $\gamma_{30} \dots \gamma_{32}$ folgendermassen an:

$$\begin{aligned}
\gamma_{30} &= (\alpha_2 \cdot 30) + [3\beta_1 - (\alpha_2 \cdot 1)]\beta_{27} - 2\beta_{30} + [3\beta_1 + (\alpha_2 \cdot 1)]\beta_{33} \\
\gamma_{31} &= (\alpha_2 \cdot 31) + [3\beta_1 - (\alpha_2 \cdot 1)]\beta_{28} - 2\beta_{31} + [3\beta_1 + (\alpha_2 \cdot 1)]\beta_{34} \\
\gamma_{32} &= (\alpha_2 \cdot 32) + [3\beta_1 - (\alpha_2 \cdot 1)]\beta_{29} - 2\beta_{32} + [3\beta_1 + (\alpha_2 \cdot 1)]\beta_{35}.
\end{aligned}$$

Hier sind bekannt und sofort zu rechnen:

$$(203) \quad \begin{aligned} (\alpha_2 \cdot 30) &= \frac{k_1 q_{30 \cdot 1}}{2 \delta_1} \\ (\alpha_2 \cdot 31) &= k_1 \frac{q_{31 \cdot 1}}{2 \delta_1} \\ (\alpha_2 \cdot 32) &= k_1 \frac{q_{32 \cdot 1}}{2 \delta_1} \end{aligned}$$

Benutzt man die vorhin gegebenen Ausdrücke, so kann man jetzt die $a_{27} \cdots a_{29}$, $a_{33} \cdots a_{35}$ nach den β_n auflösen. Die Koeffizienten werden:

$$(204) \quad \begin{aligned} (a_2 \cdot 27) &= A_7(\alpha_2 \cdot 30) - q_{27 \cdot 1} & (a_2 \cdot 33) &= A_7(\alpha_2 \cdot 30) + q_{33 \cdot 1} \\ (a_2 \cdot 28) &= A_7(\alpha_2 \cdot 31) - q_{28 \cdot 1} & (a_2 \cdot 34) &= A_7(\alpha_2 \cdot 31) + q_{34 \cdot 1} \\ (a_2 \cdot 29) &= A_7(\alpha_2 \cdot 32) - q_{29 \cdot 1} & (a_2 \cdot 35) &= A_7(\alpha_2 \cdot 32) + q_{35 \cdot 1}. \end{aligned}$$

$$(205) \quad \begin{aligned} (\gamma_2 \cdot 30) &= k_6(\alpha_2 \cdot 30) - \beta_1 [(a_2 \cdot 27) + (a_2 \cdot 33)] \\ (\gamma_2 \cdot 31) &= k_6(\alpha_2 \cdot 31) - \beta_1 [(a_2 \cdot 28) + (a_2 \cdot 34)] \\ (\gamma_2 \cdot 32) &= k_6(\alpha_2 \cdot 32) - \beta_1 [(a_2 \cdot 29) + (a_2 \cdot 35)]. \end{aligned}$$

Dann sind die rechten Seiten in den Bedingungsleichungen für die β_n noch zu rechnen:

$$(206) \quad \begin{aligned} (b_1 \cdot 23) &= \frac{2q_{23 \cdot 1}}{\mathcal{A}_1} - p_{23 \cdot 1} + \frac{1}{2} \beta_1 \bar{A}_{4 \cdot 2 \cdot 0} \\ (b_1 \cdot 24) &= \frac{2q_{24 \cdot 1}}{\mathcal{A}_1} - p_{24 \cdot 1} + \frac{1}{2} \beta_1 [\bar{A}_{4 \cdot 1 \cdot 1}^{+1} - q_{7 \cdot 1}] \\ (b_2 \cdot 25) &= \frac{2q_{25 \cdot 1}}{\mathcal{A}_1} - p_{25 \cdot 1} + \frac{1}{2} \beta_1 [\bar{A}_{4 \cdot 1 \cdot 1}^{-1} + q_{7 \cdot 1}] \\ (b_1 \cdot 26) &= \frac{2q_{26 \cdot 1}}{\mathcal{A}_1} - p_{26 \cdot 1} + \frac{1}{2} \beta_1 \bar{A}_{4 \cdot 0 \cdot 2} \\ (b_1 \cdot 27) &= \frac{2(a_2 \cdot 27)}{\mathcal{A}_7} - p_{27 \cdot 1} + \frac{1}{2} \beta_1 q_{30 \cdot 1} + l_1(\alpha_2 \cdot 30) + \nu_1(\gamma_2 \cdot 30) \\ (b_2 \cdot 28) &= \frac{2(a_2 \cdot 28)}{\mathcal{A}_7} - p_{28 \cdot 1} + \frac{1}{2} \beta_1 q_{31 \cdot 1} + l_1(\alpha_2 \cdot 31) + \nu_1(\gamma_2 \cdot 31) \\ (b_3 \cdot 29) &= \frac{2(a_2 \cdot 29)}{\mathcal{A}_7} - p_{29 \cdot 1} + \frac{1}{2} \beta_1 q_{32 \cdot 1} + l_1(\alpha_2 \cdot 32) + \nu_1(\gamma_2 \cdot 32) \\ (b_1 \cdot 30) &= k_7(\alpha_2 \cdot 30) - p_{30 \cdot 1} - \frac{1}{2} \beta_1 [q_{27 \cdot 1} - q_{33 \cdot 1}] \\ (b_2 \cdot 31) &= k_7(\alpha_2 \cdot 31) - p_{31 \cdot 1} - \frac{1}{2} \beta_1 [q_{28 \cdot 1} - q_{34 \cdot 1}] \\ (b_3 \cdot 32) &= k_7(\alpha_2 \cdot 32) - p_{31 \cdot 1} - \frac{1}{2} \beta_1 [q_{29 \cdot 1} - q_{35 \cdot 1}] \end{aligned}$$

$$(b_1.33) = p_{33.1} - \frac{2(a_2.33)}{\mathcal{A}_3} + \frac{1}{2}\beta_1[q_{30.1} - \overline{A}_{8.2.0}^{-2}] - l_1(\alpha_2.30) - v_1 \mathcal{A}_2(\gamma_2.30)$$

$$(b_2.34) = p_{34.1} - \frac{2(a_2.34)}{\mathcal{A}_3} + \frac{1}{2}\beta_1[q_{31.1} - \overline{A}_{8.1.1}^{-2}] - l_1(\alpha_2.31) - v_1 \mathcal{A}_2(\gamma_2.31)$$

$$(b_3.35) = p_{35.1} - \frac{2(a_2.35)}{\mathcal{A}_3} + \frac{1}{2}\beta_1[q_{32.1} - \overline{A}_{8.0.2}^{-2}] - l_1(\alpha_2.32) - v_1 \mathcal{A}_2(\gamma_2.32)$$

Man erhält dann für die β_k ein dem vorigen ganz ähnliches System linearer Gleichungen, nur dass hier die rechten Seiten andere Werte haben. Ich will dies System nicht erst hinschreiben, sondern gleich seine Auflösung mit Hilfe der Determinanten geben. Es werde abkürzend gesetzt:

$$(207) \quad D_{24} = (b_1.24)(b_3.1) - (b_2.25)(b_3.2) \quad D_{25} = (b_2.25)(b_3.1) - (b_1.24)(b_3.2)$$

Dann erhält man sofort mit Hilfe der früheren Subdeterminanten die Werte der Unbekannten:

$$(208) \quad \left. \begin{aligned} (b_7.1)\beta_{23} &= (b_1.23) & D_3^0\beta_{27} &= (b_1.27)D_{11} + (b_1.30)D_{14} + (b_1.33)D_{17} \\ (b_7.1)\beta_{26} &= (b_1.26) & D_3^0\beta_{28} &= (b_2.28)D_{11} + (b_2.31)D_{14} + (b_2.34)D_{17} \\ D_2^0\beta_{24} &= D_{24} & D_3^0\beta_{29} &= (b_3.29)D_{11} + (b_3.32)D_{14} + (b_3.35)D_{17} \\ D_2^0\beta_{25} &= D_{25} \end{aligned} \right\} (R_2)$$

$$\left. \begin{aligned} D_3^0\beta_{30} &= (b_1.27)D_{12} + (b_1.30)D_{15} + (b_1.33)D_{18} & D_3^0\beta_{33} &= (b_1.27)D_{13} + (b_1.30)D_{16} + (b_1.33)D_{19} \\ D_3^0\beta_{31} &= (b_2.28)D_{12} + (b_2.31)D_{15} + (b_2.34)D_{18} & D_3^0\beta_{34} &= (b_2.28)D_{13} + (b_2.31)D_{16} + (b_2.34)D_{19} \\ D_3^0\beta_{32} &= (b_3.29)D_{12} + (b_3.32)D_{15} + (b_3.35)D_{18} & D_3^0\beta_{35} &= (b_3.29)D_{13} + (b_3.32)D_{16} + (b_3.35)D_{19} \end{aligned} \right\} (R_2)$$

Jetzt ist man in der Lage, die Koeffizienten für S_2 und V_2 rechnen zu können.

$$(209) \quad \left. \begin{aligned} \mathcal{A}_1 a_{23} &= q_{23.1} + (a_2.0)\beta_{23} & \alpha_{30} &= (\alpha_2.30) - (\alpha_2.1)\beta_{27} + (\alpha_2.1)\beta_{33} \\ \mathcal{A}_1 a_{24} &= q_{24.1} + (a_2.0)\beta_{25} & \alpha_{31} &= (\alpha_2.31) - (\alpha_2.1)\beta_{28} + (\alpha_2.1)\beta_{34} \\ \mathcal{A}_1 a_{25} &= q_{25.1} + (a_2.0)\beta_{24} & \alpha_{32} &= (\alpha_2.32) - (\alpha_2.1)\beta_{29} + (\alpha_2.1)\beta_{35} \\ \mathcal{A}_1 a_{26} &= q_{26.1} + (a_2.0)\beta_{26} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}_7 a_{27} &= (a_2.27) + (a_2.2)\beta_{27} + (a_2.3)\beta_{30} + (a_2.4)\beta_{33} & \mathcal{A}_3 a_{33} &= (a_2.33) + (a_2.5)\beta_{27} + (a_2.3)\beta_{30} + (a_2.6)\beta_{33} \\ \mathcal{A}_7 a_{28} &= (a_2.28) + (a_2.2)\beta_{28} + (a_2.3)\beta_{31} + (a_2.4)\beta_{34} & \mathcal{A}_3 a_{34} &= (a_2.34) + (a_2.5)\beta_{28} + (a_2.3)\beta_{31} + (a_2.6)\beta_{34} \\ \mathcal{A}_7 a_{29} &= (a_2.29) + (a_2.2)\beta_{29} + (a_2.3)\beta_{32} + (a_2.4)\beta_{35} & \mathcal{A}_3 a_{35} &= (a_2.35) + (a_2.5)\beta_{29} + (a_2.3)\beta_{32} + (a_2.6)\beta_{35} \end{aligned} \right\}$$

$$(210) \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{30} &= (\gamma_2.30) + (\gamma_2.1)\beta_{27} + (\gamma_2.2)\beta_{30} + (\gamma_2.3)\beta_{33} \\ \gamma_{31} &= (\gamma_2.31) + (\gamma_2.1)\beta_{28} + (\gamma_2.2)\beta_{31} + (\gamma_2.3)\beta_{34} \\ \gamma_{32} &= (\gamma_2.32) + (\gamma_2.1)\beta_{29} + (\gamma_2.2)\beta_{32} + (\gamma_2.3)\beta_{35} \end{aligned} \right\} (V_2)$$

Des weiteren sind noch einige Hilfsgrößen zu rechnen:

$$(211) \quad \begin{aligned} \lambda_{18} &= \alpha_{30} - 3\beta_{30} & G_{16} &= \mu\gamma_1\gamma_{30} - \beta_1\lambda_{18} \\ \lambda_{19} &= \alpha_{31} - 3\beta_{31} & G_{17} &= \mu\gamma_1\gamma_{31} - \beta_1\lambda_{19} \\ \lambda_{20} &= \alpha_{32} - 3\beta_{32} & G_{18} &= \mu\gamma_1\gamma_{32} - \beta_1\lambda_{20}. \end{aligned}$$

Dann ergeben sich sofort die Werte der Koeffizienten in K_2 :

$$(212) \quad \left. \begin{aligned} \mathcal{A}_1\gamma_{23} &= a_{23} - 2\beta_{23} & -\mathcal{A}_7\gamma_{27} &= a_{27} - 2\beta_{27} + G_{16} & \mathcal{A}_3\gamma_{33} &= a_{33} - 2\beta_{33} + G_{16} \\ \mathcal{A}_1\gamma_{24} &= a_{24} - 2\beta_{24} & -\mathcal{A}_7\gamma_{28} &= a_{28} - 2\beta_{28} + G_{17} & \mathcal{A}_3\gamma_{34} &= a_{34} - 2\beta_{34} + G_{17} \\ \mathcal{A}_1\gamma_{25} &= a_{25} - 2\beta_{25} & -\mathcal{A}_7\gamma_{29} &= a_{29} - 2\beta_{29} + G_{18} & \mathcal{A}_3\gamma_{35} &= a_{35} - 2\beta_{35} + G_{18} \\ \mathcal{A}_1\gamma_{26} &= a_{26} - 2\beta_{26} & & & & \\ 2\mathcal{A}_1\bar{W}_{4.2.0} &= \bar{S}_{4.2.0} - 2\bar{R}_{4.2.0} + 3\beta_1\beta_{23} & 2\mathcal{A}_2\bar{W}_{8.2.0}^{-2} &= \bar{S}_{8.2.0}^{-2} - 2\bar{R}_{8.2.0}^{-2} + 3\beta_1\beta_{33} + \lambda_2\gamma_{30} \\ 2\mathcal{A}_1\bar{W}_{4.1.1}^{+1} &= \bar{S}_{4.1.1}^{+1} - 2\bar{R}_{4.1.1}^{+1} + 3\beta_1\beta_{24} & 2\mathcal{A}_2\bar{W}_{8.1.1}^{-2} &= \bar{S}_{8.1.1}^{-2} - 2\bar{R}_{8.1.1}^{-2} + 3\beta_1\beta_{34} + \lambda_2\gamma_{31} \\ 2\mathcal{A}_1\bar{W}_{4.1.1}^{-1} &= \bar{S}_{4.1.1}^{-1} - 2\bar{R}_{4.1.1}^{-1} + 3\beta_1\beta_{25} & 2\mathcal{A}_2\bar{W}_{8.0.2}^{-2} &= \bar{S}_{8.0.2}^{-2} - 2\bar{R}_{8.0.2}^{-2} + 3\beta_1\beta_{35} + \lambda_2\gamma_{32} \\ 2\mathcal{A}_1\bar{W}_{4.0.2} &= \bar{S}_{4.0.2} - 2\bar{R}_{4.0.2} + 3\beta_1\beta_{26} & & & & \end{aligned} \right\} (K_2).$$

Es hat nun noch die Berechnung der Breitenstörungen selbst zu erfolgen. Diese ist auch ohne grosse Schwierigkeiten zu erledigen. Man rechnet zuerst folgende Hilfsgrößen:

$$(213) \quad \begin{aligned} l_7 &= z_1 - \frac{1}{2}r_1 & C_1 &= \alpha_2\delta_1 & C_5 &= \frac{1}{2}q_2\xi_1 \\ v_5 &= \frac{\mu l_7}{2\delta_1\mathcal{A}_1} & C_2 &= \alpha_3\delta_1 & C_6 &= \frac{1}{2}q_3\xi_1 \\ v_6 &= \frac{\mu z_2}{2\delta_1\mathcal{A}_1} & C_3 &= \alpha_2\delta_2 & C_7 &= \frac{1}{2}q_2\xi_2 \\ & & C_4 &= \alpha_3\delta_2 & C_8 &= \frac{1}{2}q_3\xi_2. \end{aligned}$$

Damit rechnet man die Koeffizienten der ξ_k in den Bedingungsgleichungen:

$$(214) \quad \begin{aligned} (c \cdot 2) &= -\delta_1\mathcal{A}_4 - z_1^{(1)} & (c \cdot 3) &= z_{3.1} - \frac{1}{2}q_2 - \frac{1}{2}r_4\xi_1 + C_1 \\ (c \cdot 3) &= \frac{1}{2}r_1 - \delta_1^{(1)} & (c \cdot 4) &= z_{4.1} - \frac{1}{2}r_2 + \alpha_2 l_7 + C_5 + v_5\mathcal{A}_5\gamma_2 \\ (c \cdot 4) &= \delta_1\mathcal{A}_9 - z_1^{(1)} & (c \cdot 5) &= z_{5.1} - \frac{1}{2}q_3 - \frac{1}{2}r_5\xi_1 + C_2 \\ (c \cdot 5) &= -3\delta_1\mathcal{A}_5 - z_1^{(1)} & (c \cdot 6) &= z_{6.1} - \frac{1}{2}r_3 + \alpha_3 l_7 + C_6 + v_5\mathcal{A}_5\gamma_3 \\ (c \cdot 7) &= z_{7.1} - \frac{1}{2}r_4\xi_2 + C_3 & (c \cdot 11) &= z_{11.1} - \frac{1}{2}q_2 + \frac{1}{2}r_2\xi_1 - C_1 \\ (c \cdot 8) &= z_{8.1} + \alpha_2 z_2 + C_7 + v_6\mathcal{A}_5\gamma_2 & (c \cdot 12) &= z_{12.1} - \frac{1}{2}q_3 + \frac{1}{2}r_3\xi_1 - C_2 \\ (c \cdot 9) &= z_{9.1} - \frac{1}{2}r_5\xi_2 + C_4 & (c \cdot 13) &= z_{13.1} + \frac{1}{2}r_2\xi_2 - C_3 \\ (c \cdot 10) &= z_{10.1} + \alpha_3 z_2 + C_8 + v_6\mathcal{A}_5\gamma_3 & (c \cdot 14) &= z_{14.1} + \frac{1}{2}r_3\xi_2 - C_4 \end{aligned}$$

$$(c_0 \cdot 15) = z_{15.1} - \frac{1}{2} r_4 + \alpha_2 l_7 - C_5 + v_5 A_6 \gamma_2$$

$$(c_0 \cdot 16) = z_{16.1} - \frac{1}{2} r_5 + \alpha_3 l_7 - C_6 + v_5 A_6 \gamma_3$$

$$(c_0 \cdot 17) = z_{17.1} + \alpha_2 z_2 - C_7 + v_6 A_6 \gamma_2$$

$$(c_0 \cdot 18) = z_{18.1} + \alpha_3 z_2 - C_8 + v_6 A_6 \gamma_3.$$

Man erhält hiermit je zwei lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten zur Bestimmung der ξ_k , deren Aufführung ich mir hier ersparen will. Dieselben lassen sich leicht durch Determinanten lösen; ich will zur Abkürzung setzen:

$$(215) \quad D_4^0 = (c \cdot 2)^2 - (c \cdot 3)^2 \quad D_5^0 = (c \cdot 4)(c \cdot 5) - (c \cdot 3)^2.$$

Dann folgen die ξ_k ohne weiteres aus:

$$(216) \quad \left. \begin{array}{ll} D_4^0 \xi_3 = (c \cdot 2)(c_0 \cdot 3) - (c \cdot 3)(c_0 \cdot 4) & D_4^0 \xi_7 = (c \cdot 2)(c_0 \cdot 7) - (c \cdot 3)(c_0 \cdot 8) \\ D_4^0 \xi_4 = (c \cdot 2)(c_0 \cdot 4) - (c \cdot 3)(c_0 \cdot 3) & D_4^0 \xi_8 = (c \cdot 2)(c_0 \cdot 8) - (c \cdot 3)(c_0 \cdot 7) \\ D_4^0 \xi_5 = (c \cdot 2)(c_0 \cdot 5) - (c \cdot 3)(c_0 \cdot 6) & D_4^0 \xi_9 = (c \cdot 2)(c_0 \cdot 9) - (c \cdot 3)(c_0 \cdot 10) \\ D_4^0 \xi_6 = (c \cdot 2)(c_0 \cdot 6) - (c \cdot 3)(c_0 \cdot 5) & D_4^0 \xi_{10} = (c \cdot 2)(c_0 \cdot 10) - (c \cdot 3)(c_0 \cdot 9) \\ \\ D_5^0 \xi_{11} = (c \cdot 3)(c_0 \cdot 15) + (c \cdot 5)(c_0 \cdot 11) & D_5^0 \xi_{15} = (c \cdot 3)(c_0 \cdot 11) + (c \cdot 4)(c_0 \cdot 15) \\ D_5^0 \xi_{12} = (c \cdot 3)(c_0 \cdot 16) + (c \cdot 5)(c_0 \cdot 12) & D_5^0 \xi_{16} = (c \cdot 3)(c_0 \cdot 12) + (c \cdot 4)(c_0 \cdot 16) \\ D_5^0 \xi_{13} = (c \cdot 3)(c_0 \cdot 17) + (c \cdot 5)(c_0 \cdot 13) & D_5^0 \xi_{17} = (c \cdot 3)(c_0 \cdot 13) + (c \cdot 4)(c_0 \cdot 17) \\ D_5^0 \xi_{14} = (c \cdot 3)(c_0 \cdot 18) + (c \cdot 5)(c_0 \cdot 14) & D_5^0 \xi_{18} = (c \cdot 3)(c_0 \cdot 14) + (c \cdot 4)(c_0 \cdot 18) \end{array} \right\} (\beta_2).$$

Hiermit wären die Koeffizienten der Glieder ersten und zweiten Grades unter Einschluss der exargumentalen Teile transformiert. Ebenso hatten wir schon die konstanten Teile nullten Grades und die Zusatzglieder ersten Grades behandelt, und jetzt wollen wir die konstanten Glieder zweiten Grades nebst den A-Gliedern transformieren. Wir rechnen zuerst folgende Hilfsgrößen:

$$(217) \quad \left. \begin{array}{llll} k_8 = 2 + \frac{3s}{\delta_1} & \lambda_{21} = \frac{21}{2} \beta_1 - 2\beta_2 & l_8 = q_4 + a_4 & G_{19} = 2p_3 - q_1 - a_1 - p_0^{(0)} \\ k_{8.n} = 2 + \frac{3s_n}{\delta_1} & \lambda_{22} = \frac{\mu \gamma_2^2}{\delta_1} & l_9 = q_5 + a_5 & G_{20} = 2p_4 - q_2 - a_2 \\ k_9 = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{s}{2\delta_1} \right) & \lambda_{23} = \frac{\mu \gamma_2 \gamma_3}{\delta_1} & l_{10} = q_1 + a_1 & B_{15} = -2p_3 + q_1 + \alpha_2^2 \\ k_{9.n} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{s_n}{2\delta_1} \right) & \lambda_{24} = \frac{\mu \gamma_3^2}{\delta_1} & & B_{16} = -p_4 + \frac{1}{2} q_2 + \alpha_2 \alpha_3 \end{array} \right\} (\gamma_0)$$

$$C_9 = \delta_3 + \frac{1}{2} q_1 \quad C_{10} = \delta_4 + \frac{1}{2} q_2.$$

Damit rechnet man:

$$\gamma_0 = \lambda_{22} (\kappa^2 + \sum \kappa_n^2) + 2\lambda_{23} \sum \kappa_n \kappa_n' + \lambda_{24} \sum \kappa_n'^2$$

$$(218) \quad \left. \begin{aligned} \xi_1 &= -\alpha_2^2 + \frac{3}{2}\beta_4^2 + 3\beta_1\beta_7 + G_1 & \xi_4 &= 3\beta_1\beta_{23} \\ \xi_2 &= -2\alpha_2\alpha_3 + 3\beta_4\beta_5 + 3\beta_1(\beta_3 + \beta_9) + G_2 & \xi_5 &= 3\beta_1(\beta_{24} + \beta_{25}) \\ \xi_3 &= -\alpha_3^2 + \frac{3}{2}\beta_5^2 + 3\beta_1\beta_{10} + G_3 & \xi_6 &= 3\beta_1\beta_{26} \end{aligned} \right\}$$

Für den Zusatzteil von γ :

$$\bar{\xi}_1 = \frac{S}{\delta_1} [\alpha_2(\lambda_{21} + \alpha_2 k_3) - \beta_4^2 k_9]$$

$$\bar{\xi}_{2,n} = \frac{S_n}{\delta_1} [\alpha_2(\lambda_{21} + \alpha_2 k_{3,n}) - \beta_4^2 k_{9,n}]$$

$$\bar{\xi}_{3,n} = \frac{S_n}{\delta_1} [-\alpha_2(2\beta_3 - \alpha_3 k_{3,n}) + \alpha_3(\lambda_{21} + \alpha_2 k_{3,n}) - 2\beta_4\beta_5 k_{9,n}]$$

$$\bar{\xi}_{4,n} = \frac{S_n}{\delta_1} [-\alpha_3(2\beta_3 - \alpha_3 k_{3,n}) - \beta_5^2 k_{9,n}]$$

$$\gamma = \xi_1(\alpha^2 + \sum \alpha_n^2) + \xi_2 \sum \alpha_n \alpha_n' + \xi_3 \sum \alpha_n'^2 + \xi_4(\sin^2 \iota + \sum \sin^2 \iota_n) + \xi_5 \sum \sin \iota_n \sin \iota_n' + \xi_6 \sum \sin^2 \iota_n' + \bar{\xi}_1 \alpha^2 + \sum \bar{\xi}_{2,n} \alpha_n^2 + \sum \bar{\xi}_{3,n} \alpha_n \alpha_n' + \sum \bar{\xi}_{4,n} \alpha_n'^2 \quad (\gamma).$$

Für die übrigen Konstanten gilt dann:

$$(219) \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= \alpha_2(q_1 - 2p_2) + \beta_1(q_7 + a_7) + \beta_2(q_2 - \frac{3}{2}a_1) + \beta_4(l_3 - 2l_2) + \beta_7 l_{10} - G_{19} - 4\mu q_2^{(0)} \gamma_2 \\ x_2 &= -2\alpha_2 p_3 + \alpha_3(q_1 - 2p_2) + \beta_1(q_8 + q_9 + a_8 + a_9) + \beta_2 q_3 + \beta_3(q_2 - \frac{3}{2}a_1) + \beta_4 l_9 \\ &\quad + \beta_5(l_8 - 2l_2) + l_{10}(\beta_3 + \beta_9) - G_{20} - 4\mu(q_2^{(0)} \gamma_3 + q_3^{(0)} \gamma_2) \\ x_3 &= -2p_5 - 2\alpha_3 p_3 + \beta_1(q_{10} + a_{10}) + \beta_3 q_3 + \beta_5 l_9 + \beta_{10} l_{10} - 4\mu q_3^{(0)} \gamma_3 \\ x_4 &= -2p_6 + \beta_1(q_{23} + a_{23}) + \beta_{23} l_{10} \\ x_5 &= -2p_7 + \beta_1(q_{24} + q_{25} + a_{24} + a_{25}) + l_{10}(\beta_{24} + \beta_{25}) \\ x_6 &= -2p_8 + \beta_1(q_{26} + a_{26}) + \beta_{26} l_{10} \end{aligned} \right\} (a_0 \text{ und } b_0).$$

Dann ergeben sich die Koeffizienten der A-Glieder in folgender Weise:

$$(20) \quad \left. \begin{aligned} \bar{b}_{I,n} &= [B_{15} \alpha_n + B_{16} \alpha_n'] \alpha \\ \bar{b}_{II,m,n} &= [B_{15} \alpha_n + B_{16} \alpha_n'] \alpha_m + [B_{16} \alpha_n + (-2p_5 + \alpha_5^2) \alpha_n'] \alpha_m' \\ \bar{b}_{III,n} &= \left[-2p_6 \sin \iota_n + \left(-p_7 + \frac{2q_7}{\tau - \tau_n} \right) \sin \iota_n' \right] \sin \iota \\ \bar{b}_{IV,m,n} &= \left[-2p_6 \sin \iota_n + \left(-p_7 + \frac{2q_7}{\tau_m - \tau_n} \right) \sin \iota_n' \right] \sin \iota_m + \left[\left(-p_7 - \frac{2q_7}{\tau_m - \tau_n} \right) \sin \iota_n - 2p_5 \sin \iota_n' \right] \sin \iota_m' \end{aligned} \right\} (T_a R_2).$$

$$(221) \quad \left. \begin{aligned} \bar{w}_1 &= \xi_1 + G_{19} + \lambda_{22} & \bar{w}_4 &= \xi_4 + 2p_6 \\ \bar{w}_2 &= \xi_2 + G_{20} + 2\lambda_{23} & \bar{w}_5 &= \xi_5 + 2p_7 \\ \bar{w}_3 &= \xi_3 + 2p_6 + \lambda_{24} & \bar{w}_6 &= \xi_6 + 2p_8 \end{aligned} \right\} (T_a V_2)$$

$$\begin{aligned}
(221) \quad \bar{\xi}_{5..n} &= [2\bar{w}_1 \kappa_n + \bar{w}_2 \kappa'_n] \kappa \\
\bar{\xi}_{6..m..n} &= [2\bar{w}_1 \kappa_n + \bar{w}_2 \kappa'_n] \kappa_m + [\bar{w}_2 \kappa_n + 2\bar{w}_3 \kappa'_n] \kappa'_m \\
\bar{\xi}_{7..n} &= \left[2\bar{w}_4 \sin \iota_n + \left(\bar{w}_5 - \frac{3q_7}{\tau - \tau_n} \right) \sin \iota'_n \right] \sin \iota \\
\bar{\xi}_{8..m..n} &= \left[2\bar{w}_4 \sin \iota_n + \left(\bar{w}_5 - \frac{3q_7}{\tau_m - \tau_n} \right) \sin \iota'_n \right] \sin \iota_m + \left[\left(\bar{w}_5 + \frac{3q_7}{\tau_m - \tau_n} \right) \sin \iota_n + 2\bar{w}_6 \sin \iota'_n \right] \sin \iota'_m \\
\xi_{1..n} &= \bar{\xi}_{5..n} \cos(\Gamma - \Gamma_n) & \xi_{3..m..n} &= \bar{\xi}_{6..m..n} \cos(\Gamma_m - \Gamma_n) \\
\xi_{2..n} &= -\bar{\xi}_{5..n} \sin(\Gamma - \Gamma_n) & \xi_{4..m..n} &= -\bar{\xi}_{6..m..n} \sin(\Gamma_m - \Gamma_n) \\
\xi_{5..n} &= \bar{\xi}_{7..n} \cos(\Theta - \Theta_n) & \xi_{7..m..n} &= \bar{\xi}_{8..m..n} \cos(\Theta_m - \Theta_n) \\
\xi_{8..n} &= \bar{\xi}_{7..n} \sin(\Theta - \Theta_n) & \xi_{8..m..n} &= \bar{\xi}_{8..m..n} \sin(\Theta_m - \Theta_n) \\
\bar{\gamma}_0 &= \sum \xi_{1..n} + \xi_{5..n} + \mathbf{S} \xi_{3..m..n} + \xi_{7..m..n} \\
\bar{g} &= \frac{1}{2} \sum (s - s_n) \xi_{2..n} + (\tau - \tau_n) \xi_{6..n} + \frac{1}{2} \mathbf{S} (s_m - s_n) \xi_{4..m..n} + (\tau_m - \tau_n) \xi_{8..m..n} \\
\bar{g} &= -\frac{1}{6} \sum (s - s_n)^2 \xi_{1..n} + (\tau - \tau_n)^2 \xi_{5..n} - \frac{1}{6} \mathbf{S} (s_m - s_n)^2 \xi_{3..m..n} + (\tau_m - \tau_n)^2 \xi_{7..m..n}
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \bar{\xi}_{5..n} \\ \bar{\xi}_{6..m..n} \\ \bar{\xi}_{7..n} \\ \bar{\xi}_{8..m..n} \\ \xi_{1..n} \\ \xi_{2..n} \\ \xi_{5..n} \\ \xi_{8..n} \\ \bar{\gamma}_0 \\ \bar{g} \\ \bar{g} \end{aligned}} \right\} (T_\alpha V_2).$$

$$\begin{aligned}
(222) \quad (c^{(n)}.1) &= C_9 \kappa_n + C_{10} \kappa'_n & (c^{(n)}.3) &= \delta_5 \kappa_n + \delta_6 \kappa'_n \\
(c^{(n)}.2) &= C_9 \sin \iota_n + \delta_5 \sin \iota'_n & (c^{(n)}.4) &= C_{10} \sin \iota_n + \delta_6 \sin \iota'_n \\
\bar{c}_I &= -C_9 \kappa \sin \iota & \bar{c}_{IV..n} &= -(c^{(n)}.1) \sin \iota_n - (c^{(n)}.3) \sin \iota'_n \\
\bar{c}_{II..n} &= -(c^{(n)}.1) \sin \iota & \bar{c}_{V..m..n} &= -(c^{(n)}.1) \sin \iota_m - (c^{(n)}.3) \sin \iota'_m \\
\bar{c}_{III..n} &= -(c^{(n)}.2) \kappa & \bar{c}_{VI..m..n} &= -(c^{(n)}.2) \kappa_m - (c^{(n)}.4) \kappa'_m
\end{aligned}
\quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (c^{(n)}.1) \\ (c^{(n)}.2) \\ \bar{c}_I \\ \bar{c}_{II..n} \\ \bar{c}_{III..n} \end{aligned}} \right\} (T_\alpha \mathfrak{B}_2).$$

4) Wir wollen jetzt auch die exargumentalen Glieder dritten Grades in ihren Koeffizienten einer Umformung unterziehen, und für die hier besonders häufig wiederkehrenden Koeffizientenverbindungen eine abkürzende Bezeichnung einführen.

Zuerst wollen wir die von der Neigung unabhängigen Glieder behandeln und für die Berechnung des S_3 folgende Hilfsgrößen ansetzen:

$$\begin{aligned}
(223) \quad \lambda_{25} &= \frac{\mu^2 \gamma_2^2}{\delta_1^2} & \lambda_{28} &= \frac{\mu \gamma_{14}}{\delta_1} & \nu_7 &= \lambda_{25} + \lambda_{28} \\
\lambda_{26} &= \frac{\mu^2 \gamma_2 \gamma_3}{\delta_1^2} & \lambda_{29} &= \frac{\mu \gamma_{15}}{\delta_1} & \nu_8 &= \lambda_{26} + \lambda_{29} \\
\lambda_{27} &= \frac{\mu^2 \gamma_3^2}{\delta_1^2} & \lambda_{30} &= \frac{\mu \gamma_{16}}{\delta_1} & \nu_9 &= \lambda_{27} + \lambda_{30}.
\end{aligned}$$

Dann wird:

$$(224) \quad \left. \begin{aligned} \alpha_{40} &= \alpha_{14}\lambda_3 + \alpha_2(\lambda_{25} - \lambda_{28}) & 3\alpha_{56} &= \alpha_{14}\lambda_3 + \alpha_2\nu_7 \\ \alpha_{41} &= \alpha_{14}\lambda_4 + \alpha_2\lambda_{26} - \alpha_3\lambda_{28} & 3\alpha_{57} &= \alpha_{15}\lambda_3 + \alpha_{14}\lambda_4 + \alpha_2\nu_8 + \alpha_3\nu_7 \\ \alpha_{42} &= \alpha_{15}\lambda_3 + \alpha_2(\lambda_{26} - \lambda_{29}) + \alpha_3\lambda_{25} & 3\alpha_{58} &= \alpha_{16}\lambda_3 + \alpha_{15}\lambda_4 + \alpha_2\nu_9 + \alpha_3\nu_8^3 \\ \alpha_{43} &= \alpha_{15}\lambda_4 + \alpha_2\lambda_{27} + \alpha_3(\lambda_{26} - \lambda_{29}) & 3\alpha_{59} &= \alpha_{16}\lambda_4 + \alpha_3\nu_9 \\ \alpha_{44} &= \alpha_{16}\lambda_3 + \alpha_3\lambda_{26} - \alpha_2\lambda_{30} \\ \alpha_{45} &= \alpha_{16}\lambda_4 + \alpha_3(\lambda_{27} - \lambda_{30}) \end{aligned} \right\} (S_3).$$

Für die Berechnung der β_s sind folgende Hilfsgrößen nötig:

$$(225) \quad \begin{aligned} -b_{2,2,0} &= \delta_1 \mathcal{A}_4 \beta_7 + B_4 \gamma_2 & b_{2,2,0}^{-2} &= \delta_1 \mathcal{A}_9 \beta_{11} - \nu_1 \gamma_{14} & -b_{6,2,0}^{-2} &= 3\delta_1 \mathcal{A}_5 \beta_{17} + B_{12} \gamma_2 + \nu_1 \mathcal{A}_2 \gamma_{14} \\ -b_{2,1,1}^{+1} &= \delta_1 \mathcal{A}_4 \beta_8 + B_5 \gamma_2 & b_{2,1,1}^{-2} &= \delta_1 \mathcal{A}_9 \beta_{12} - \nu_1 \gamma_{15} & -b_{6,1,1}^{-2} &= 3\delta_1 \mathcal{A}_5 \beta_{18} + B_{12} \gamma_3 + B_{13} \gamma_2 + \nu_1 \mathcal{A}_2 \gamma_{15} \\ -b_{2,1,1}^{-1} &= \delta_1 \mathcal{A}_4 \beta_9 + B_4 \gamma_3 & b_{2,0,2}^{-2} &= \delta_1 \mathcal{A}_9 \beta_{13} - \nu_1 \gamma_{16} & -b_{6,0,2}^{-2} &= 3\delta_1 \mathcal{A}_5 \beta_{19} + B_{13} \gamma_3 + \nu_1 \mathcal{A}_2 \gamma_{16} \\ -b_{2,0,2} &= \delta_1 \mathcal{A}_4 \beta_{10} + B_5 \gamma_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_{10} &= \frac{\mu}{\delta_1} (b_{4,1,0}^{-1} + \lambda_3 b_{2,0,0}) & \nu_{13} &= \gamma_{14} + \lambda_{22} \\ \nu_{11} &= \frac{\mu}{\delta_1} (2b_{4,1,0}^{-1} + \lambda_3 b_{2,0,0}) & \nu_{14} &= \gamma_{15} + 2\lambda_{23} \\ \nu_{12} &= \frac{\mu}{\delta_1} (b_{4,0,1}^{-1} + \lambda_4 b_{2,0,0}) & \nu_{15} &= \gamma_{16} + \lambda_{24} \\ B_{17} &= b_{6,2,0}^{-2} + \lambda_{28} b_{2,0,0} & B_{20} &= b_{2,2,0}^{-2} + \lambda_{28} b_{2,0,0} \\ B_{18} &= b_{6,1,1}^{-2} + \lambda_{29} b_{2,0,0} & B_{21} &= b_{2,1,1}^{-2} + \lambda_{29} b_{2,0,0} \\ B_{19} &= b_{6,0,2}^{-2} + \lambda_{30} b_{2,0,0} & B_{22} &= b_{2,0,2}^{-2} + \lambda_{30} b_{2,0,0} \end{aligned}$$

Dann erhält man die β_s aus folgenden Gleichungen:

$$(226) \quad \left. \begin{aligned} -4\delta_1 \beta_{46} &= \lambda_3 (b_{2,2,0} + B_{17}) + 2\lambda_{22} \nu_{10} \\ -4\delta_1 \beta_{47} &= \lambda_3 b_{2,1,1}^{-1} + \lambda_4 B_{17} + 2\lambda_{23} \nu_{10} \\ -4\delta_1 \beta_{48} &= \lambda_3 (b_{2,1,1}^{+1} + B_{18}) + \lambda_4 b_{2,2,0} + 2\lambda_{22} \nu_{12} + \lambda_{23} \nu_{11} \\ -4\delta_1 \beta_{49} &= \lambda_3 b_{2,0,2} + \lambda_4 (b_{2,1,1}^{-1} + B_{18}) + 2\lambda_{23} \nu_{12} + \lambda_{24} \nu_{11} \\ -4\delta_1 \beta_{50} &= \lambda_4 b_{2,1,1}^{+1} + \lambda_3 B_{19} + 2\lambda_{23} \nu_{12} \\ -4\delta_1 \beta_{51} &= \lambda_4 (b_{2,0,2} + B_{19}) + 2\lambda_{24} \nu_{12} \end{aligned} \right\} (R_2).$$

$$\begin{aligned} 4\delta_1 \beta_{52} &= \lambda_3 B_{20} & -8\delta_1 \beta_{60} &= \lambda_3 B_{17} + \nu_{10} \nu_{13} \\ 4\delta_1 \beta_{53} &= \lambda_3 B_{21} + \lambda_4 B_{20} & -8\delta_1 \beta_{61} &= \lambda_4 B_{17} + \lambda_3 B_{18} + \nu_{12} \nu_{13} + \nu_{10} \nu_{14} \\ 4\delta_1 \beta_{54} &= \lambda_3 B_{22} + \lambda_4 B_{21} & -8\delta_1 \beta_{62} &= \lambda_4 B_{18} + \lambda_3 B_{19} + \nu_{12} \nu_{14} + \nu_{10} \nu_{15} \\ 4\delta_1 \beta_{55} &= \lambda_4 B_{22} & -8\delta_1 \beta_{63} &= \lambda_4 B_{19} + \nu_{12} \nu_{15} \end{aligned}$$

Die Berechnung von V_3 und K_3 gestaltet sich dann in folgender Weise:
Zuerst rechnet man die Hilfsgrößen:

$$(227) \quad \lambda_{31} = 2\beta_1 - \beta_2$$

$$G_{21} = \lambda_{13}\lambda_{31} - \frac{1}{2}\beta_1\alpha_{14} - \alpha_2\beta_{14} + \lambda_3\nu_{13} \quad G_{24} = -\beta_3\lambda_{14} - \alpha_3\beta_{15} + \lambda_4\nu_{14}$$

$$G_{22} = -\beta_3\lambda_{18} - \alpha_3\beta_{14} + \lambda_4\nu_{13} \quad G_{25} = \lambda_{15}\lambda_{31} - \frac{1}{2}\beta_1\alpha_{16} - \alpha_2\beta_{16} + \lambda_3\nu_{15}$$

$$G_{23} = \lambda_{14}\lambda_{31} - \frac{1}{2}\beta_1\alpha_{15} - \alpha_2\beta_{15} + \lambda_3\nu_{14} \quad G_{26} = -\beta_3\lambda_{15} - \alpha_3\beta_{16} + \lambda_4\nu_{15}$$

Dann ergeben sich die γ_k aus:

$$(228) \quad \delta_1\gamma_{40} = 3(\beta_{11} - \alpha_{40} + \beta_7) + 3\beta_4(\lambda_{16} + \beta_7 + \beta_{17}) + G_{21} \quad \delta_1\gamma_{43} = 3[(1 + \beta_4)\beta_{10} - \alpha_{43}] + 3\beta_5(\lambda_{17} + \beta_8 + \beta_{18}) + G_{24}$$

$$\delta_1\gamma_{41} = 3(\beta_9 - \alpha_{41} + \beta_5\beta_{17}) + 3\beta_4(\lambda_{17} + \beta_8) + G_{22} \quad \delta_1\gamma_{44} = 3(\beta_{13} - \alpha_{44} + \beta_5\beta_9 + \beta_2\beta_{19}) + G_{25}$$

$$\delta_1\gamma_{42} = 3(\beta_{12} - \alpha_{42} + \beta_8) + 3\beta_4(\beta_9 + \beta_{18}) + 3\beta_5(\lambda_{16} + \beta_7) + G_{23} \quad \delta_1\gamma_{45} = 3[-\alpha_{45} + \beta_5(\beta_{10} + \beta_{19})] + G_{26}$$

$$3\delta_1\gamma_{56} = 3(\beta_{17} - \alpha_{56}) + 3\beta_4(\lambda_{16} + \beta_{11}) + G_{21}$$

$$3\delta_1\gamma_{57} = 3(\beta_{18} - \alpha_{57}) + 3\beta_4(\lambda_{17} + \beta_{12}) + 3\beta_5(\lambda_{16} + \beta_{11}) + G_{22} + G_{23}$$

$$3\delta_1\gamma_{58} = 3(\beta_{19} - \alpha_{58} + \beta_4\beta_{13}) + 3\beta_5(\lambda_{17} + \beta_{12}) + G_{24} + G_{25}$$

$$3\delta_1\gamma_{59} = 3(-\alpha_{59} + \beta_5\beta_{13}) + G_{26}$$

$$(229) \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{46} &= -3(\beta_4 - \beta_{14} + \frac{2}{3}\beta_{46}) & \gamma_{52} &= 3(\beta_4 - \beta_{14} + \frac{2}{3}\beta_{52}) \\ \gamma_{48} &= -3(\beta_5 - \beta_{15} + \frac{2}{3}\beta_{48}) & \gamma_{53} &= 3(\beta_5 - \beta_{15} + \frac{2}{3}\beta_{53}) \\ \gamma_{50} &= 3\beta_{16} - 2\beta_{50} & \gamma_{54} &= -3\beta_{16} + 2\beta_{54} \end{aligned} \right\} (K_3).$$

Die Koeffizienten in K_3 sind also ungeändert geblieben.

Wir wollen jetzt die Koeffizienten der Glieder dritten Grades, soweit sie von der Neigung herrühren, oder in dem Ausdrucke für die Breitenstörung auftreten, einer ähnlichen Transformation unterziehen. Es folgt als Resultat für S_3 :

$$(230) \quad \lambda_{32} = \frac{\mu\gamma_{30}}{\delta_1} \quad \lambda_{33} = \frac{\mu\gamma_{31}}{\delta_1} \quad \lambda_{34} = \frac{\mu\gamma_{32}}{\delta_1},$$

und für die Koeffizienten α_k ergibt sich:

$$(231) \quad \left. \begin{aligned} \alpha_{64} &= \alpha_{30}\lambda_3 - \alpha_2\lambda_{32} & 3\alpha_{90} &= \alpha_{30}\lambda_3 + \alpha_2\lambda_{32} \\ \alpha_{65} &= \alpha_{30}\lambda_4 - \alpha_3\lambda_{32} & 3\alpha_{91} &= \alpha_{30}\lambda_4 + \alpha_3\lambda_{32} \\ \alpha_{66} &= \alpha_{31}\lambda_3 - \alpha_2\lambda_{33} & 3\alpha_{92} &= \alpha_{31}\lambda_3 + \alpha_2\lambda_{33} \\ \alpha_{67} &= \alpha_{31}\lambda_4 - \alpha_3\lambda_{33} & 3\alpha_{93} &= \alpha_{31}\lambda_4 + \alpha_3\lambda_{33} \\ \alpha_{68} &= \alpha_{32}\lambda_3 - \alpha_2\lambda_{34} & 3\alpha_{94} &= \alpha_{32}\lambda_3 + \alpha_2\lambda_{34} \\ \alpha_{69} &= \alpha_{32}\lambda_4 - \alpha_3\lambda_{34} & 3\alpha_{95} &= \alpha_{32}\lambda_4 + \alpha_3\lambda_{34} \end{aligned} \right\} (S_3).$$

Für R_3 sind folgende Grössen zu rechnen:

$$(232) \quad \begin{aligned} \bar{b}_{2.2.0}^{-2} &= \delta_1 \mathcal{A}_9 \beta_{27} - \nu_1 \gamma_{30} & -\bar{b}_{6.2.0}^{-2} &= 3 \delta_1 \mathcal{A}_5 \beta_{33} + \nu_1 \mathcal{A}_3 \gamma_{30} \\ \bar{b}_{2.1.1}^{-2} &= \delta_1 \mathcal{A}_9 \beta_{28} - \nu_1 \gamma_{31} & -\bar{b}_{6.1.1}^{-2} &= 3 \delta_1 \mathcal{A}_5 \beta_{34} + \nu_1 \mathcal{A}_2 \gamma_{31} \\ \bar{b}_{2.0.2}^{-2} &= \delta_1 \mathcal{A}_9 \beta_{29} - \nu_1 \gamma_{32} & -\bar{b}_{6.0.2}^{-2} &= 3 \delta_1 \mathcal{A}_5 \beta_{35} + \nu_1 \mathcal{A}_2 \gamma_{32} \\ B_{23} &= \bar{b}_{6.2.0}^{-2} + \lambda_{32} b_{2.0.0} & B_{26} &= \bar{b}_{2.2.0}^{-2} + \lambda_{32} b_{2.0.0} \\ B_{24} &= \bar{b}_{6.1.1}^{-2} + \lambda_{33} b_{2.0.0} & B_{27} &= \bar{b}_{2.1.1}^{-2} + \lambda_{33} b_{2.0.0} \\ B_{25} &= \bar{b}_{6.0.2}^{-2} + \lambda_{34} b_{2.0.0} & B_{28} &= \bar{b}_{2.0.2}^{-2} + \lambda_{34} b_{2.0.0} \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$(233) \quad \left. \begin{aligned} -4\delta_1 \beta_{70} &= \lambda_3 B_{23} & 4\delta_1 \beta_{76} &= \lambda_3 B_{26} & -8\delta_1 \beta_{96} &= \lambda_3 B_{23} + \nu_{10} \gamma_{30} \\ -4\delta_1 \beta_{71} &= \lambda_4 B_{23} & 4\delta_1 \beta_{77} &= \lambda_4 B_{26} & -8\delta_1 \beta_{97} &= \lambda_4 B_{23} + \nu_{12} \gamma_{30} \\ -4\delta_1 \beta_{72} &= \lambda_3 B_{24} & 4\delta_1 \beta_{78} &= \lambda_3 B_{27} & -8\delta_1 \beta_{98} &= \lambda_3 B_{24} + \nu_{10} \gamma_{31} \\ -4\delta_1 \beta_{73} &= \lambda_4 B_{24} & 4\delta_1 \beta_{79} &= \lambda_4 B_{27} & -8\delta_1 \beta_{99} &= \lambda_4 B_{24} + \nu_{12} \gamma_{31} \\ -4\delta_1 \beta_{74} &= \lambda_3 B_{25} & 4\delta_1 \beta_{80} &= \lambda_3 B_{28} & -8\delta_1 \beta_{100} &= \lambda_3 B_{25} + \nu_{10} \gamma_{32} \\ -4\delta_1 \beta_{75} &= \lambda_4 B_{25} & 4\delta_1 \beta_{81} &= \lambda_4 B_{28} & -8\delta_1 \beta_{101} &= \lambda_4 B_{25} + \nu_{12} \gamma_{32} \end{aligned} \right\} (R_3)$$

$$\begin{aligned} 4\beta_{82} &= \mathcal{A}_4 \lambda_3 \beta_{23} & 4\beta_{86} &= \mathcal{A}_4 \lambda_3 \beta_{25} \\ 4\beta_{83} &= \mathcal{A}_4 \lambda_4 \beta_{23} & 4\beta_{87} &= \mathcal{A}_4 \lambda_4 \beta_{25} \\ 4\beta_{84} &= \mathcal{A}_4 \lambda_3 \beta_{24} & 4\beta_{88} &= \mathcal{A}_4 \lambda_3 \beta_{26} \\ 4\beta_{85} &= \mathcal{A}_4 \lambda_4 \beta_{24} & 4\beta_{89} &= \mathcal{A}_4 \lambda_4 \beta_{26} \end{aligned}$$

Des weiteren erhält man für V_3 :

$$(234) \quad \begin{aligned} G_{27} &= \lambda_{18} \lambda_{31} - \frac{1}{2} \beta_1 \alpha_{30} - \alpha_2 \beta_{30} + \lambda_3 \gamma_{30} & G_{30} &= -\beta_3 \lambda_{19} - \alpha_3 \beta_{31} + \lambda_4 \gamma_{31} \\ G_{28} &= -\beta_3 \lambda_{18} - \alpha_3 \beta_{30} + \lambda_4 \gamma_{30} & G_{31} &= \lambda_{20} \lambda_{31} - \frac{1}{2} \beta_1 \alpha_{32} - \alpha_2 \beta_{32} + \lambda_3 \gamma_{32} \\ G_{29} &= \lambda_{19} \lambda_{31} - \frac{1}{2} \beta_1 \alpha_{31} - \alpha_2 \beta_{31} + \lambda_3 \gamma_{31} & G_{32} &= -\beta_3 \lambda_{20} - \alpha_3 \beta_{32} + \lambda_4 \gamma_{32} \end{aligned}$$

Worauf zu rechnen ist:

$$(235) \quad \left. \begin{aligned} \delta_1 \gamma_{64} &= 3(\beta_{27} - \alpha_{64} + \beta_4 \beta_{33}) + G_{27} & 3\delta_1 \gamma_{90} &= 3(\beta_{33} - \alpha_{90} + \beta_4 \beta_{27}) + G_{27} \\ \delta_1 \gamma_{65} &= 3(-\alpha_{65} + \beta_5 \beta_{33}) + G_{28} & 3\delta_1 \gamma_{91} &= 3(-\alpha_{91} + \beta_5 \beta_{27}) + G_{28} \\ \delta_1 \gamma_{66} &= 3(\beta_{28} - \alpha_{66} + \beta_4 \beta_{34}) + G_{29} & 3\delta_1 \gamma_{92} &= 3(\beta_{34} - \alpha_{92} + \beta_4 \beta_{28}) + G_{29} \\ \delta_1 \gamma_{67} &= 3(-\alpha_{67} + \beta_5 \beta_{34}) + G_{30} & 3\delta_1 \gamma_{93} &= 3(-\alpha_{93} + \beta_5 \beta_{28}) + G_{30} \\ \delta_1 \gamma_{68} &= 3(\beta_{29} - \alpha_{68} + \beta_4 \beta_{35}) + G_{31} & 3\delta_1 \gamma_{94} &= 3(\beta_{35} - \alpha_{94} + \beta_4 \beta_{29}) + G_{31} \\ \delta_1 \gamma_{69} &= 3(-\alpha_{69} + \beta_5 \beta_{35}) + G_{32} & 3\delta_1 \gamma_{95} &= 3(-\alpha_{95} + \beta_5 \beta_{29}) + G_{32} \end{aligned} \right\} (V_3)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 \gamma_{102} &= 3(1 + \beta_4) \beta_{23} & \delta_1 \gamma_{106} &= 3(\beta_{25} + \beta_4 \beta_{24}) \\ \delta_1 \gamma_{103} &= 3\beta_5 \beta_{23} & \delta_1 \gamma_{107} &= 3\beta_5 \beta_{24} \\ \delta_1 \gamma_{104} &= 3(\beta_{24} + \beta_4 \beta_{25}) & \delta_1 \gamma_{108} &= 3(1 + \beta_4) \beta_{26} \\ \delta_1 \gamma_{105} &= 3\beta_5 \beta_{25} & \delta_1 \gamma_{109} &= 3\beta_5 \beta_{26} \end{aligned} \right\} (V_3).$$

$$(236) \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{70} &= 3\beta_{30} - 2\beta_{70} & \gamma_{74} &= 3\beta_{32} - 2\beta_{74} & \gamma_{78} &= -3\beta_{31} + 2\beta_{78} \\ \gamma_{72} &= 3\beta_{31} - 2\beta_{72} & \gamma_{76} &= -3\beta_{30} + 2\beta_{76} & \gamma_{80} &= -3\beta_{32} + 2\beta_{80} \end{aligned} \right\} (K_3).$$

Jetzt sind noch die ξ_s für den dritten Grad zu rechnen. Hier setzt man zur Abkürzung:

$$(237) \quad \begin{aligned} -c_4 &= \delta_1 \mathcal{A}_4 \xi_4 + \nu_5 \mathcal{A}_5 \gamma_2 & -c_{15} &= 3\delta_1 \mathcal{A}_5 \xi_{15} + \nu_5 \mathcal{A}_6 \gamma_2 \\ -c_6 &= \delta_1 \mathcal{A}_4 \xi_6 + \nu_5 \mathcal{A}_5 \gamma_3 & -c_{16} &= 3\delta_1 \mathcal{A}_5 \xi_{16} + \nu_5 \mathcal{A}_6 \gamma_3 \\ -c_8 &= \delta_1 \mathcal{A}_4 \xi_8 + \nu_6 \mathcal{A}_5 \gamma_2 & -c_{17} &= 3\delta_1 \mathcal{A}_5 \xi_{17} + \nu_6 \mathcal{A}_6 \gamma_2 \\ -c_{10} &= \delta_1 \mathcal{A}_4 \xi_{10} + \nu_6 \mathcal{A}_5 \gamma_3 & -c_{18} &= 3\delta_1 \mathcal{A}_5 \xi_{18} + \nu_6 \mathcal{A}_6 \gamma_3. \end{aligned}$$

Dann folgt:

$$(238) \quad \left. \begin{aligned} -4\delta_1 \xi_{20} &= \lambda_3(c_4 + c_{15}) + 2l_7 \lambda_{25} & -4\delta_1 \xi_{24} &= \lambda_3(c_8 + c_{17}) + 2z_2 \lambda_{25} & -8\delta_1 \xi_{46} &= l_7 \lambda_{32} \\ -4\delta_1 \xi_{21} &= \lambda_4 c_4 + \lambda_3 c_{16} + 2l_7 \lambda_{26} & -4\delta_1 \xi_{25} &= \lambda_4 c_8 + \lambda_3 c_{18} + 2z_2 \lambda_{26} & -8\delta_1 \xi_{47} &= l_7 \lambda_{33} + z_2 \lambda_{32} \\ -4\delta_1 \xi_{22} &= \lambda_3 c_6 + \lambda_4 c_{15} + 2l_7 \lambda_{26} & -4\delta_1 \xi_{26} &= \lambda_3 c_{10} + \lambda_4 c_{17} + 2z_2 \lambda_{26} & -8\delta_1 \xi_{48} &= l_7 \lambda_{34} + z_2 \lambda_{33} \\ -4\delta_1 \xi_{23} &= \lambda_4(c_6 + c_{16}) + 2l_7 \lambda_{27} & -4\delta_1 \xi_{27} &= \lambda_4(c_{10} + c_{18}) + 2z_2 \lambda_{27} & -8\delta_1 \xi_{49} &= z_2 \lambda_{34} \\ 4\xi_{28} &= \mathcal{A}_4 \lambda_3 \xi_3 & 4\xi_{34} &= \mathcal{A}_9 \lambda_3 \xi_{11} & -8\delta_1 \xi_{40} &= \lambda_3 c_{15} + l_7 \nu_7 \\ 4\xi_{29} &= \mathcal{A}_4(\lambda_4 \xi_3 + \lambda_3 \xi_5) & 4\xi_{35} &= \mathcal{A}_9(\lambda_4 \xi_{11} + \lambda_3 \xi_{12}) & -8\delta_1 \xi_{41} &= \lambda_4 c_{15} + \lambda_3 c_{16} + l_7(\nu_8 + \lambda_{26}) \\ 4\xi_{30} &= \mathcal{A}_4 \lambda_4 \xi_5 & 4\xi_{36} &= \mathcal{A}_9 \lambda_4 \xi_{12} & -8\delta_1 \xi_{42} &= \lambda_4 c_{16} + l_7 \nu_9 \\ 4\xi_{31} &= \mathcal{A}_4 \lambda_3 \xi_7 & 4\xi_{37} &= \mathcal{A}_9 \lambda_3 \xi_{13} & -8\delta_1 \xi_{43} &= \lambda_3 c_{17} + z_2 \nu_7 \\ 4\xi_{32} &= \mathcal{A}_4(\lambda_4 \xi_7 + \lambda_3 \xi_9) & 4\xi_{38} &= \mathcal{A}_9(\lambda_4 \xi_{13} + \lambda_3 \xi_{14}) & -8\delta_1 \xi_{44} &= \lambda_4 c_{17} + \lambda_3 c_{18} + z_2(\nu_8 + \lambda_{26}) \\ 4\xi_{33} &= \mathcal{A}_4 \lambda_4 \xi_9 & 4\xi_{39} &= \mathcal{A}_9 \lambda_4 \xi_{14} & -8\delta_1 \xi_{45} &= \lambda_4 c_{18} + z_2 \nu_9 \end{aligned} \right\} (S_3).$$

Die Berechnung der Zusatzglieder zweiten Grades geschieht nach den Formeln (159), (161), (162), (163), (164), (166), (168) und (170), indem bei diesen Koeffizienten eine weitere Transformation für die numerische Rechnung nicht angebracht ist.

Damit wäre auch die Transformation der Koeffizienten der Glieder dritten Grades für die numerische Rechnung erledigt, und es ist hiermit zugleich eine Zusammenstellung der Koeffizienten gegeben, wie sie successive gerechnet werden müssen.

Selbstverständlich sind hier nur die Koeffizienten der charakteristischen

und elementaren Glieder behandelt, sowie einiger koordinierten in K , die Koeffizienten der gewöhnlichen Glieder müssen nach den in Br. Kap. 6 gegebenen Formeln ermittelt werden. Ebenso setzen die hier gegebenen Koeffizienten die Kenntnis der dort und in der vorliegenden Arbeit im ersten Kapitel gegebenen A -, B -, C -Koeffizienten voraus, sowie der für die charakteristischen Planeten notwendigen p -, q -, z -Koeffizienten, welche hier im zweiten Kapitel berechnet sind.

Um die Zusatzglieder rechnen zu können, sowie die konstanten Teile zweiten Grades, ist auch die Kenntnis der Elemente erforderlich. Andererseits ist die Kenntnis der Störungen wieder zur Elementenbestimmung nötig. Es wird wohl in den meisten Fällen ausreichen, für den Zweck der Konstantenbestimmung in den konstanten Teilen zweiten Grades die oskulierenden elliptischen Elemente anzunehmen und die Zusatzglieder ganz fortzulassen und sie erst mit den definitiven Elementen zu ermitteln und nur für die Rechnung der Störungen zu verwenden.

§ 2. Ueber die Reduktion auf die Ekliptik und die Berechnung instantaner elliptischer Elemente.

5) Wir hatten bisher die Störungsbeträge zu ermitteln gesucht, wie sie an den Radiusvektor, die Zeit, sowie den Sinus der Breite angebracht werden müssen, um die augenblicklichen wahren Werte zu erhalten. Da wir aber in der Praxis nicht diese Koordinaten gebrauchen können, sondern entweder die heliocentrischen Ekliptikalkoordinaten oder die augenblicklichen elliptischen Elemente verlangt werden, so sollen jetzt die Formeln zur Berechnung dieser Größen hergeleitet werden.

Es wird sich zeigen, dass hier zwei neue Störungsbeträge zu berechnen sind, der Differentialquotient des Sinus der Breite und die Reduktion auf die Ekliptik, ebenfalls eine auf \mathfrak{z} basierende Relation.

Nach Br. Kap. 3 wird mit i die Neigung der momentanen Bahnebene zur festen Ekliptik bezeichnet, in welcher auch die kurzperiodischen Störungen enthalten sind, im Gegensatz zu j , welches nur langperiodisch elementare Glieder enthält. Mit Σ wird die in der Bahn gezählte Knotenlänge bezeichnet, mit Ω dagegen die in der festen Ekliptik gezählte. Zu ihrer Berechnung dienen folgende Formeln:

$$(239) \quad \begin{aligned} \sin i \sin (v - \Sigma) &= (\mathfrak{z}) + \mathfrak{Z} \\ \sin i \cos (v - \Sigma) &= \frac{d(\mathfrak{z})}{dv} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dv}. \end{aligned}$$

Hier kann man im Falle kleiner Neigungen und charakteristischer Planeten für die Zwecke abgekürzter Tafeln setzen:

$$(240) \quad \sin i = \sin j \quad \Sigma = \sigma.$$

Mit derselben Genauigkeit ist dort auch statthafft

$$(241) \quad l = v - \frac{1}{4} \sin^2 j \sin 2v + H_1 + H_2$$

zu setzen, welche Formel a. a. O. abgeleitet ist und in Verbindung mit

$$(242) \quad \operatorname{tg}(l - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(v - \Sigma)$$

uns die Knotenlänge Ω giebt.

Doch ist es im Falle kritischer Planeten und grösserer Neigungen sehr unvorteilhaft, diese abgekürzten Formeln zu benutzen, da dort einmal \mathfrak{z} und $\frac{d\mathfrak{z}}{dv}$ nicht vernachlässigt werden darf und andererseits die Funktion H_2 im wesentlichen aus $\int (\mathfrak{z}) \mathfrak{z} dv$ besteht und dieses infolge zweimaliger Integration sehr stark vergrössert erscheint. Denn, wie man sich leicht überzeugt, giebt $(\mathfrak{z}) \mathfrak{z}$ zu C-Gliedern der Form $\frac{1}{2} \xi_1 \sin^2 j \sin(4v - 2v)$ Veranlassung, und diese werden dann im Integral v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1^2}$, also v. d. Ord. des Neigungsteiles in V_2 .

Um diesen Uebelstand zu vermeiden, wollen wir nicht die Reduktion auf die Ekliptik für die Länge des Planeten direkt geben, sondern die für seine Knotenlänge. Nach Br. Formel (99a) ist:

$$(243) \quad \frac{d(\Omega - \Sigma)}{dv} = \frac{1}{2} \mathfrak{z} \left[\frac{d^2 \mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} \right],$$

in welcher Formel nur Glieder vierten Grades vernachlässigt sind, entsprechend der hier erstrebten Genauigkeit. In der Klammer steht die Differentialgleichung für \mathfrak{z} , d. h. ein Ausdruck v. d. Ord. m' und es müssen dementsprechend die Koeffizienten der C-Glieder in (243) mindestens erster Ordnung sein.

Aus der Integration dieser Differentialgleichung erhalten wir die Reduktion auf die Ekliptik für die Knotenlänge, welche demnach zweiten Grades und nur v. d. Ord. $\frac{m'}{\delta_1}$ wird.

Es handelt sich jetzt um die Aufstellung der Ausdrücke für $\frac{d\mathfrak{z}}{dv}$ und $\Omega - \Sigma$. Wir hatten bisher für den elementaren Teil der Form B gefunden:

$$(\mathfrak{z}) = \sin j \sin(v - \sigma).$$

Daraus folgt sofort durch Differentiation unter Einschluss der aus der Veränderlichkeit von $\sin j$ und σ entspringenden Glieder:

$$\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = \left[\sin j \sin \sigma + \frac{d \sin j \cos \sigma}{dv} \right] \sin v + \left[\sin j \cos \sigma - \frac{d \sin j \sin \sigma}{dv} \right] \cos v.$$

Führt man die Differentiation aus, so folgt:

$$(244) \quad \frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = \sin j \cos v + \tau \sin i \cos h + \sum \tau_n \sin \iota_n \cos h_n.$$

Bei gewöhnlichen Planeten wird ferner $\frac{d\mathfrak{B}}{dv}$ direkt durch Differentiation des Ausdrucks für \mathfrak{B} gebildet, indem auf hierbei entstehende exargumentale Glieder und Zusatzglieder keine Rücksicht genommen wird; zu den früheren Koeffizienten treten also nur gewisse Faktoren $n, n \pm 1, n \pm 2$ hinzu, und wir brauchen uns hiermit nicht mehr zu beschäftigen.

Die Ermittlung von $\frac{d\mathfrak{B}}{dv}$ gestaltet sich bei kritischen Planeten nicht so einfach. Die C-Glieder können wir dann offenbar ganz fortlassen. Sie werden v. d. Ord. $m'\delta_1$ infolge der Differentiation. Dagegen werden wir aus den D-Gliedern ersten Grades noch einige exargumentale Glieder zweiten Grades mitnehmen müssen, welche v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ werden. Die durch die Differentiation entstehenden exargumentalen Glieder dritten Grades v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ lassen wir fort, da wir in \mathfrak{B}_3 nur die Ordnung $\frac{m'^2}{\delta_1^3}$ berücksichtigt haben. Ebenfalls brauchen wir bei der Differentiation die Veränderlichkeit von $\sin j, \sigma$ etc. nicht zu berücksichtigen, da diese Glieder v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ werden. Das Resultat der Differentiation wird dann für die D-Glieder:

$$(245) \quad \begin{aligned} \frac{d\mathfrak{B}}{dv} = & \mathcal{A}_2 \xi_1 \sin j \cos(4w - v) + \mathcal{A}_2 \xi_2 \sin j' \cos(4w - v_1) \\ & + \mathcal{A}_1 \xi_3 \eta \sin j \cos(2w + v - v) + \xi_4' \eta \sin j \cos(2w - v + v) \\ & + \mathcal{A}_1 \xi_5 \eta' \sin j \cos(2w + v - v_1) + \xi_6' \eta' \sin j \cos(2w - v + v_1) \\ & + \mathcal{A}_1 \xi_7 \eta \sin j' \cos(2w + v_1 - v) + \xi_8' \eta \sin j' \cos(2w - v_1 + v) \\ & + \mathcal{A}_1 \xi_9 \eta' \sin j' \cos(2w + v_1 - v_1) + \xi_{10}' \eta' \sin j' \cos(2w - v_1 + v_1) \\ & - \mathcal{A}_7 \xi_{11} \eta \sin j \cos(2w - v - v) + \xi_{15}' \eta \sin j \cos(6w - v - v) \\ & - \mathcal{A}_7 \xi_{12} \eta' \sin j \cos(2w - v - v_1) + \xi_{16}' \eta' \sin j \cos(6w - v - v_1) \\ & - \mathcal{A}_7 \xi_{13} \eta \sin j' \cos(2w - v_1 - v) + \xi_{17}' \eta \sin j' \cos(6w - v_1 - v) \\ & - \mathcal{A}_7 \xi_{14} \eta' \sin j' \cos(2w - v_1 - v_1) + \xi_{18}' \eta' \sin j' \cos(6w - v_1 - v_1). \end{aligned}$$

Hier ist:

$$(246) \quad \begin{aligned} \xi_4' &= \mathcal{A}_1 \xi_4 - 2\mu \xi_1 \gamma_2 & \xi_{15}' &= \mathcal{A}_3 \xi_{15} - 2\mu \xi_1 \gamma_2 \\ \xi_6' &= \mathcal{A}_1 \xi_6 - 2\mu \xi_1 \gamma_3 & \xi_{16}' &= \mathcal{A}_3 \xi_{16} - 2\mu \xi_1 \gamma_3 \\ \xi_8' &= \mathcal{A}_1 \xi_8 - 2\mu \xi_2 \gamma_2 & \xi_{17}' &= \mathcal{A}_3 \xi_{17} - 2\mu \xi_2 \gamma_2 \\ \xi_{10}' &= \mathcal{A}_1 \xi_{10} - 2\mu \xi_2 \gamma_3 & \xi_{18}' &= \mathcal{A}_3 \xi_{18} - 2\mu \xi_2 \gamma_3. \end{aligned}$$

Hierzu kommen noch die exargumentalen D-Glieder dritten Grades, nur soweit sie schon in \mathfrak{B} vorhanden sind und soweit sie direkt durch Differentiation unter Vernachlässigung des δ_1 im Faktor entstehen.

Wir müssen jetzt die Relation für $\Omega - \Sigma$, welche mindestens zweiten Grades ist, herstellen. Für gewöhnliche Planeten reicht es vollkommen aus, die Differentialgleichung folgendermassen anzusetzen:

$$\frac{d(\Omega - \Sigma)}{dv} = \frac{1}{2} \sin j \sin v \left[\frac{d^2 \lambda}{dv^2} + \lambda \right].$$

Integriert man mit Hilfe der linearen Divisoren:

$$(247) \quad \Omega - \Sigma = \sum d_{n,2,0} \sin^2 j \sin nw + \sum d_{n,1,1}^{+2} \sin j \sin j' \sin(nw + v + v_1) \\ + \sum d_{n,2,0}^{+2} \sin^2 j \sin(nw + 2v) + \sum d_{n,1,1}^{+1} \sin j \sin j' \sin(nw + v - v_1) \\ + \sum d_{n,2,0}^{-2} \sin^2 j \sin(nw - 2v) + \sum d_{n,1,1}^{-1} \sin j \sin j' \sin(nw - v + v_1) \\ + \sum d_{n,1,1}^{-2} \sin j \sin j' \sin(nw - v - v_1).$$

Diese Funktion ist, von den A-Gliedern abgesehen, rein erster Ordnung und zweiten Grades bei den gewöhnlichen Planeten und sie braucht dort nur bei grösseren Neigungen berücksichtigt zu werden. Der langperiodisch elementare Teil ist nullter Ordnung und zweiten Grades und stets zu berücksichtigen, er ergibt sich aus Formel (253). Die Werte der Koeffizienten sind:

$$(248) \quad d_{n,2,0} = \frac{c_{n,1,0}^{+1} - c_{n,1,0}^{-1}}{4n(1 - \mu_1)} \quad d_{n,1,1}^{+2} = \frac{-c_{n,0,1}^{+1}}{4[n(1 - \mu_1) + 2]} \\ d_{n,2,0}^{+2} = \frac{-c_{n,1,0}^{+1}}{4[n(1 - \mu_1) + 2]} \quad d_{n,1,1}^{+1} = \frac{-c_{n,0,1}^{-1}}{4n(1 - \mu_1)} \\ d_{n,2,0}^{-2} = \frac{c_{n,1,0}^{-1}}{4[n(1 - \mu_1) - 2]} \quad d_{n,1,1}^{-1} = \frac{c_{n,0,1}^{+1}}{4n(1 - \mu_1)} \\ d_{n,1,1}^{-2} = \frac{c_{n,0,1}^{-1}}{4[n(1 - \mu_1) - 2]}.$$

Bei kritischen Planeten wird man dagegen die C-Glieder, welche diesmal durch die Integration vergrössert werden, sowie die A-Glieder in den Koeffizienten bis auf Grössen v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1}$ genau in der Differentialgleichung rechnen. Wir machen den Ansatz:

$$(249) \quad \text{pars } \frac{d(\Omega - \Sigma)}{dv} = d_1 \sin^2 j + d_2 \sin j \sin j' \cos(v - v_1) + d_3 \sin^2 j' \\ + d_4 \sin^2 j \cos(4w - 2v) + d_5 \sin j \sin j' \cos(4w - v - v_1) + d_6 \sin^2 j' \cos(4w - 2v_1).$$

Die Koeffizienten sind:

$$(250) \quad d_1 = \frac{1}{4} [\delta_1 + \xi_1 c_{4,1,0}^{-1}] \quad d_4 = \frac{1}{4} [c_{4,1,0}^{-1} + \xi_1 \delta_1] \\ d_2 = \frac{1}{4} [\delta_2 + \xi_1 c_{4,0,1}^{-1} + \xi_2 c_{4,1,0}^{-1}] \quad d_5 = \frac{1}{4} [c_{4,0,1}^{-1} + \xi_1 \delta_2 + \xi_2 \delta_1] \\ d_3 = \frac{1}{4} \xi_2 c_{4,0,1}^{-1} \quad d_6 = \frac{1}{4} \xi_2 \delta_2.$$

Hier ist

$$(250a) \quad c_{4,1,0}^{-1} = z_1 - \frac{1}{2} r_1, \quad c_{4,0,1}^{-1} = z_2.$$

In den A-Gliedern sind hier die Terme rein zweiter Ordnung fortgelassen, also im Integral die rein erster Ordnung, und dies entspricht ganz der bisher eingehaltenen Genauigkeit.

Von den Zusatzgliedern werden wir bei der Integration nur die aus den C-Gliedern stammenden berücksichtigen, da nur sie v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ werden, sowie die aus den C-Gliedern resultierenden exargumentalen Teile dritten Grades, soweit sie v. d. Ord. $\frac{m'^2}{\delta_1^3}$ sind. Lassen wir zuerst die A-Glieder und Zusatzglieder fort, so lautet das Resultat:

$$(251) \quad \text{pars}(\Omega - \Sigma) = \vartheta_4 \sin^2 j \sin(4w - 2v) + \vartheta_5 \sin j \sin j' \sin(4w - v - v_1) \\ + \vartheta_6 \sin^2 j' \sin(4w - 2v_1) \\ + \vartheta_7 \eta \sin^2 j \sin(2w - 2v + v) \quad + \frac{1}{3} \vartheta_7 \eta \sin^2 j \sin(6w - 2v - v) \\ + \vartheta_8 \eta' \sin^2 j \sin(2w - 2v + v_1) \quad + \frac{1}{3} \vartheta_8 \eta' \sin^2 j \sin(6w - 2v - v_1) \\ + \vartheta_9 \eta \sin j \sin j' \sin(2w - v - v_1 + v) \quad + \frac{1}{3} \vartheta_9 \eta \sin j \sin j' \sin(6w - v - v_1 - v) \\ + \vartheta_{10} \eta' \sin j \sin j' \sin(2w - v - v_1 + v_1) \quad + \frac{1}{3} \vartheta_{10} \eta' \sin j \sin j' \sin(6w - v - v_1 - v_1) \\ + \vartheta_{11} \eta \sin^2 j' \sin(2w - 2v_1 + v) \quad + \frac{1}{3} \vartheta_{11} \eta \sin^2 j' \sin(6w - 2v_1 - v) \\ + \vartheta_{12} \eta' \sin^2 j' \sin(2w - 2v_1 + v_1) \quad + \frac{1}{3} \vartheta_{12} \eta' \sin^2 j' \sin(6w - 2v_1 - v_1).$$

Die Koeffizienten haben folgende Werte:

$$(252) \quad \vartheta_4 = \frac{d_4}{2\delta_1} \quad \vartheta_7 = 2\lambda_3 \vartheta_4 \quad \vartheta_{10} = 2\lambda_4 \vartheta_5 \quad \lambda_3 = \frac{\mu \gamma_2}{\delta_1} \\ \vartheta_5 = \frac{d_5}{2\delta_1} \quad \vartheta_8 = 2\lambda_4 \vartheta_4 \quad \vartheta_{11} = 2\lambda_3 \vartheta_6 \quad \lambda_4 = \frac{\mu \gamma_3}{\delta_1} \\ \vartheta_6 = \frac{d_6}{2\delta_1} \quad \vartheta_9 = 2\lambda_3 \vartheta_5 \quad \vartheta_{12} = 2\lambda_4 \vartheta_6.$$

Für die A-Glieder erhalten wir dann:

$$(253) \quad \text{pars}(\Omega - \Sigma) = [\vartheta_I + \sum \vartheta_{II,n}] v + \sum \vartheta_{III,n} \sin(\vartheta - \vartheta_n) + \mathbf{S} \vartheta_{IV,m,n} \sin(\vartheta_m - \vartheta_n).$$

Die Werte der Koeffizienten sind:

$$(254) \quad \vartheta_I = d_1 \sin^2 \iota \\ \vartheta_{II,n} = d_1 \sin^2 \iota_n + d_2 \sin \iota_n \sin \iota'_n + d_3 \sin^2 \iota'_n \\ \vartheta_{III,n} = -\frac{\sin \iota}{\tau - \tau_n} [2d_1 \sin \iota_n + d_2 \sin \iota'_n] \\ \vartheta_{IV,m,n} = -\frac{\sin \iota_m}{\tau_m - \tau_n} [2d_1 \sin \iota_n + d_2 \sin \iota'_n] - \frac{\sin \iota'_m}{\tau_m - \tau_n} [d_2 \sin \iota_n + 2d_3 \sin \iota'_n].$$

Die Zusatzglieder lassen sich in folgender Form schreiben:

$$(255) \quad \text{pars} (\Omega - \Sigma) = \bar{d}_1 \sin(4w - 2h) + \sum \bar{d}_{2,n} \sin(4w - h - h_n) \\ + \sum \bar{d}_{3,n} \sin(4w - 2h_n) + \mathbf{S} \bar{d}_{4,m,n} \sin(4w - h_m - h_n),$$

wo die Koeffizienten folgende Werte haben:

$$(256) \quad \bar{d}_1 = \frac{\tau}{\delta_1} \vartheta_4 \sin^2 \iota \quad \bar{d}_{2,n} = \frac{\tau + \tau_n}{\delta_1} \left(\vartheta_4 \sin \iota_n + \frac{\vartheta_5}{2} \sin \iota'_n \right) \sin \iota \\ \bar{d}_{3,n} = \frac{\tau_n}{\delta_1} \left[\left(\vartheta_4 \sin \iota_n + \frac{\vartheta_5}{2} \sin \iota'_n \right) \sin \iota_n + \left(\frac{\vartheta_5}{2} \sin \iota_n + \vartheta_6 \sin \iota'_n \right) \sin \iota'_n \right] \\ \bar{d}_{4,m,n} = \frac{\tau_m + \tau_n}{\delta_1} \left[\left(\vartheta_4 \sin \iota_n + \frac{\vartheta_5}{2} \sin \iota'_n \right) \sin \iota_m + \left(\frac{\vartheta_5}{2} \sin \iota_n + \vartheta_6 \sin \iota'_n \right) \sin \iota'_m \right].$$

Damit haben wir auch die Berechnung der Reduktion auf die Ekliptik in einer für kritische Planeten und grössere Neigungen geeigneten Form erledigt. Für charakteristische Planeten und mittlere Neigungen wird im allgemeinen Formel (241) ausreichen.

6) Wir sind nun in der Lage, den heliocentrischen Ort des Planeten in Bezug auf die Ekliptik zu ermitteln, oder auch die instantane Ellipse für den betreffenden Zeitmoment, die Rechnung wird sich folgendermassen gestalten. Nachdem $W = K + V$, R , \mathfrak{z} sowie $\frac{d\mathfrak{z}}{dv}$ und $\Omega - \Sigma$ ermittelt sind, rechnet man die mittlere Anomalie aus:

$$(257) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = L - \Pi - W \\ \varepsilon \text{ die excentrische Anomalie aus } \varepsilon - \eta \sin \varepsilon = M. \end{array} \right.$$

Dann folgt sofort:

$$(258) \quad \text{tg } \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \text{tg } \frac{\varepsilon}{2} \quad v = v + \Pi.$$

Ferner die B-Glieder in ϱ und \mathfrak{z} aus:

$$(259) \quad (\varrho) = \eta \cos v \quad (\mathfrak{z}) = \sin j \sin v \\ \frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = \sin j \cos v + \tau \sin \iota \cos h + \sum \tau_n \sin \iota_n \cos h_n.$$

Man kennt dann:

$$\varrho = (\varrho) + R \quad \mathfrak{z} = (\mathfrak{z}) + \mathfrak{B} \quad \frac{d\mathfrak{z}}{dv} = \frac{d(\mathfrak{z})}{dv} + \frac{d\mathfrak{B}}{dv}.$$

Des weiteren ist zu ermitteln:

$$(260) \quad \begin{aligned} \sin i \sin (v - \Sigma) &= \mathfrak{z} \\ \sin i \cos (v - \Sigma) &= \frac{d\mathfrak{z}}{dv}, \end{aligned}$$

d. h. i und Σ , die Neigung und die in der Bahn gezählte Knotenlänge, und da $\Omega - \Sigma$ bekannt ist, haben wir auch sofort die in der festen Ekliptik gezählte Knotenlänge Ω . Wir kennen also i und Ω , die Elemente der Bahnlage.

Die übrigen vier Elemente folgen aus:

$$(261) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{a}{1 + \nu}, & \text{wo } \nu &= \frac{R}{1 + (\varrho)} \text{ ist,} \\ e &= \eta, & \pi &= \Pi, & M_0 &= (L - \Pi - W)_0. \end{aligned}$$

a_0 ist die halbe grosse Axe der Bahn, e die Excentricität und π die Perihel-
länge, während M_0 die mittlere Anomalie zur Zeit der Epoche bezeichnet.
Zu bemerken ist nur noch, dass wir für die mittlere Bewegung die Bewegungs-
konstante n nehmen müssen und nicht denjenigen Wert, welcher a_0 entsprechen
würde.

Diese Elemente nennt Herr Brendel die instantanen elliptischen Elemente
und sie dürfen nicht mit den oskulierenden identifiziert werden. Durch sie wird
die instantane Ellipse festgelegt, welche für den Augenblick der Epoche die
wahren Koordinaten des Körpers giebt, ebenso wie die wahre Bahn. Aber sie
giebt nicht die wahren Derivierten dieser Koordinaten. In dieser Hinsicht unter-
scheidet sich die instantane Ellipse von der oskulierenden, welche nicht nur den
wahren Ort, sondern auch die wahre Geschwindigkeit, mit der sich dieser Ort
ändert, für den Moment der Oskulation ergiebt.

Die instantanen Elemente werden daher die Planetenbewegung nicht mit
gleicher Genauigkeit darstellen, wie die oskulierenden. Herr Brendel wendet sie
jedoch aus dem Grunde an, weil ihre Rechnung eine wesentlich einfachere ist
und die damit zu erlangende Genauigkeit für den Zweck abgekürzter Tafeln
ausreicht. Man ist dann sofort in der Lage, mit diesen Elementen eine Ephe-
meride rechnen zu können, innerhalb der gesteckten Genauigkeitsgrenze und für
nicht zu grosse Zeiträume

Nach längerer Zeit wird diese Ellipse mehr und mehr von der wahren Bahn
abweichen, wie dies im allgemeinen in nicht so starkem Masse auch bei der osku-
lierenden Ellipse der Fall ist, und dann werden auch die Unterschiede zwischen
Beobachtung und Rechnung grössere Beträge erreichen.

Will man dagegen für einen gewissen Zeitraum die heliocentrischen Ekli-
ptikalkoordinaten des gestörten Körpers haben, so muss man sich zuerst auch die
Kenntnis von ϱ , \mathfrak{z} , W , $\frac{d\mathfrak{z}}{dv}$ und $\Omega - \Sigma$ verschaffen. Dann rechnet man:

$$(262) \quad L - II - W = \varepsilon - \eta \sin \varepsilon$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \quad v = v + II.$$

Dann bekommt man sofort:

$$(263) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = v + (\Omega - \Sigma) - \frac{1}{2} \beta \frac{d\beta}{dv} \\ \sin b = \beta \\ r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+q} \end{array} \right.$$

Die Transformation auf geocentrische Ekliptikalkoordinaten und geocentrische Aequatorialkoordinaten geschieht dann in der gewöhnlichen Weise und kann hier übergangen werden, ebenso die Reduktion der instantanen Elemente auf den Aequator als Fundamentalebene.

Einige Vereinfachungen, welche die in der vorliegenden Arbeit gegebenen Entwicklungen für den Zweck abgekürzter Tafeln und charakteristischer Planeten zulassen, habe ich in meiner Dissertation in Verbindung mit einer numerischen Anwendung auf Planet (108) Hecuba gegeben.

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass die vollständigen Gleichungen für die Gylden'schen Koordinaten R , W , β sowie $\frac{d\beta}{dv}$ und $\Omega - \Sigma$ in folgenden Formeln gegeben sind:

Für R ; Formel 37, 119, 142, 160, 162.

Für W ; Formel 65, 68, 83, 85, 128, 130, 155, 163, 165, 167.

Für β ; Formel 41, 133, 156, 169.

Für $\frac{d\beta}{dv}$ und $\Omega - \Sigma$; Formel 244, 245, 251, 253, 255.

Die Koeffizienten in diesen Gleichungen sind nach den Formeln 171 bis 238 sowie nach Formel 246, 250, 250a, 252, 254, 256 zu rechnen und dürfte die Angabe der obigen Formeln ausreichen, um sich über die Zugehörigkeit dieser Koeffizienten zu den bezüglichen Argumenten zu orientieren.

Berlin, im März 1901.

Julius Kramer.

Tafel I.

Die charakteristischen Argumente für die Planeten vom Hecuba-Typus.

$$\mu = \frac{1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{1 - \delta_1}{2}.$$

Nullter und erster Grad.

Argument	Faktor von v	$n = 2$	$n = 4$	$n = 6$
nw	$\frac{1}{2}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v$	$\frac{1}{2}(n + n\delta_1) - 1$	δ_1	$1 + 2\delta_1$	—
$nw - v_1$	$\frac{1}{2}(n + n\delta_1) - 1$	δ_1	$1 + 2\delta_1$	—
$nw - v$	$\frac{1}{2}(n + n\delta_1) - 1$	δ_1	$1 + 2\delta_1$	—
$nw - v_1$	$\frac{1}{2}(n + n\delta_1) - 1$	δ_1	$1 + 2\delta_1$	—

Zweiter Grad.

Argument	Argument	Faktor von v	$n = 2$	$n = 4$	$n = 6$
$nw - 2v$	$nw - 2v$	$\frac{1}{2}(n + n\delta_1) - 2$	$-1 + \delta_1$	$2\delta_1$	$1 + 3\delta_1$
$nw + v - v_1$	$nw + v - v_1$	$\frac{1}{2}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v + v_1$	$nw - v + v_1$	$\frac{1}{2}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v - v_1$	$nw - v - v_1$	$\frac{1}{2}(n + n\delta_1) - 2$	$-1 + \delta_1$	$2\delta_1$	$1 + 3\delta_1$
$nw - 2v_1$	$nw - 2v_1$	$\frac{1}{2}(n + n\delta_1) - 2$	$-1 + \delta_1$	$2\delta_1$	$1 + 3\delta_1$
$nw + v - v$	$nw + v_1 - v$	$\frac{1}{2}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v + v$	$nw - v_1 + v$	$\frac{1}{2}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v - v$	$nw - v_1 - v$	$\frac{1}{2}(n + n\delta_1) - 2$	$-1 + \delta_1$	$2\delta_1$	$1 + 3\delta_1$
$nw + v - v_1$	$nw + v_1 - v_1$	$\frac{1}{2}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v + v_1$	$nw - v_1 + v_1$	$\frac{1}{2}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v - v_1$	$nw - v_1 - v_1$	$\frac{1}{2}(n + n\delta_1) - 2$	$-1 + \delta_1$	$2\delta_1$	$1 + 3\delta_1$

Tafel II.

Die charakteristischen Argumente für die Planeten vom Hilda-Typus.

$$\mu = \frac{2}{3}, \quad \mu_1 = \frac{2 - \delta_1}{3}.$$

Nullter und erster Grad.

Argument	Faktor von v	$n = 3$	$n = 6$	$n = 9$
nw	$\frac{1}{3}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v$	$\frac{1}{3}(n + n\delta_1) - 1$	δ_1	$1 + 2\delta_1$	—
$nw - v_1$	$\frac{1}{3}(n + n\delta_1) - 1$	δ_1	$1 + 2\delta_1$	—
$nw - v$	$\frac{1}{3}(n + n\delta_1) - 1$	δ_1	$1 + 2\delta_1$	—
$nw - v_1$	$\frac{1}{3}(n + n\delta_1) - 1$	δ_1	$1 + 2\delta_1$	—

Zweiter Grad.

Argument	Argument	Faktor von v	$n = 3$	$n = 6$	$n = 9$
$nw - 2v$	$nw - 2v$	$\frac{1}{3}(n + n\delta_1) - 2$	$-1 + \delta_1$	$2\delta_1$	$1 + 3\delta_1$
$nw + v - v_1$	$nw + v - v_1$	$\frac{1}{3}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v + v_1$	$nw - v + v_1$	$\frac{1}{3}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v - v_1$	$nw - v - v_1$	$\frac{1}{3}(n + n\delta_1) - 2$	$-1 + \delta_1$	$2\delta_1$	$1 + 3\delta_1$
$nw - 2v_1$	$nw - 2v_1$	$\frac{1}{3}(n + n\delta_1) - 2$	$-1 + \delta_1$	$2\delta_1$	$1 + 3\delta_1$
$nw + v - v$	$nw + v_1 - v$	$\frac{1}{3}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v + v$	$nw - v_1 + v$	$\frac{1}{3}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v - v$	$nw - v_1 - v$	$\frac{1}{3}(n + n\delta_1) - 2$	$-1 + \delta_1$	$2\delta_1$	$1 + 3\delta_1$
$nw + v - v_1$	$nw + v_1 - v_1$	$\frac{1}{3}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v + v_1$	$nw - v_1 + v_1$	$\frac{1}{3}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v - v_1$	$nw - v_1 - v_1$	$\frac{1}{3}(n + n\delta_1) - 2$	$-1 + \delta_1$	$2\delta_1$	$1 + 3\delta_1$

Tafel III.

Die charakteristischen Argumente für die Planeten vom Thule-Typus.

$$\mu = \frac{3}{4}, \quad \mu_1 = \frac{3 - \delta_1}{4}.$$

Nullter und erster Grad.

Argument	Faktor von v	$n = 4$	$n = 8$	$n = 12$
nw	$\frac{1}{4}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v$	$\frac{1}{4}(n + n\delta_1) - 1$	δ_1	$1 + 2\delta_1$	—
$nw - v_1$	$\frac{1}{4}(n + n\delta_1) - 1$	δ_1	$1 + 2\delta_1$	—
$nw - v$	$\frac{1}{4}(n + n\delta_1) - 1$	δ_1	$1 + 2\delta_1$	—
$nw - v_1$	$\frac{1}{4}(n + n\delta_1) - 1$	δ_1	$1 + 2\delta_1$	—

Zweiter Grad.

Argument	Argument	Faktor von v	$n = 4$	$n = 8$	$n = 12$
$nw - 2v$	$nw - 2v$	$\frac{1}{4}(n + n\delta_1) - 2$	$-1 + \delta_1$	$2\delta_1$	$1 + 3\delta_1$
$nw + v - v_1$	$nw + v - v_1$	$\frac{1}{4}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v + v_1$	$nw - v + v_1$	$\frac{1}{4}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v - v_1$	$nw - v - v_1$	$\frac{1}{4}(n + n\delta_1) - 2$	$-1 + \delta_1$	$2\delta_1$	$1 + 3\delta_1$
$nw - 2v_1$	$nw - 2v_1$	$\frac{1}{4}(n + n\delta_1) - 2$	$-1 + \delta_1$	$2\delta_1$	$1 + 3\delta_1$
$nw + v - v$	$nw + v_1 - v$	$\frac{1}{4}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v + v$	$nw - v_1 + v$	$\frac{1}{4}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v - v$	$nw - v_1 - v$	$\frac{1}{4}(n + n\delta_1) - 2$	$-1 + \delta_1$	$2\delta_1$	$1 + 3\delta_1$
$nw + v - v_1$	$nw + v_1 - v_1$	$\frac{1}{4}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v + v_1$	$nw - v_1 + v_1$	$\frac{1}{4}(n + n\delta_1)$	$1 + \delta_1$	—	—
$nw - v - v_1$	$nw - v_1 - v_1$	$\frac{1}{4}(n + n\delta_1) - 2$	$-1 + \delta_1$	$2\delta_1$	$1 + 3\delta_1$

Tafel IV.

Die charakteristischen Argumente der Planeten kommensurabel zur zweiten Klasse.

Hestia-Typus $\mu = \frac{1}{3}, \mu_1 = \frac{1-\delta_1}{3}$			$\frac{3}{5}$ -Typus $\mu = \frac{3}{5}, \mu_1 = \frac{3-\delta_1}{5}$		$\frac{5}{7}$ -Typus $\mu = \frac{5}{7}, \mu_1 = \frac{5-\delta_1}{7}$	
Argument	Faktor von v	$n=3$	Faktor von v	$n=5$	Faktor von v	$n=7$
nw	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)$	—
$nw-v$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$
$nw-v_1$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$
$nw-v$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$
$nw-v_1$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-1$	$1+\delta_1$
$nw-2v$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw \pm (v-v_1)$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)$	—
$nw-v-v_1$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw-2v_1$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw-2v$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw \pm (v-v_1)$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)$	—
$nw-v-v_1$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw-2v_1$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw \pm (v-v)$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)$	—
$nw-v-v$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw \pm (v-v_1)$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)$	—
$nw-v-v_1$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw \pm (v_1-v)$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)$	—
$nw-v_1-v$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1
$nw \pm (v_1-v_1)$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)$	—	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)$	—
$nw-v_1-v_1$	$\frac{1}{3}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{5}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1	$\frac{1}{7}(2n+n\delta_1)-2$	δ_1

Inhaltsverzeichnis.

Vorwort	Seite 3
-------------------	------------

Erstes Kapitel.

Die Differentialgleichungen der Gylden'schen Störungstheorie. — Ergänzungen zur Entwicklung der Störungsfunktion und ihrer Derivierten in der von Herrn Brendel gegebenen Form. — Transformation dieser Ausdrücke.

1) Die Differentialgleichungen des Problems. — Erklärung der Bezeichnungen. — Die Elemente	5
2) Entwicklung der Störungsfunktion und ihrer Derivierten, sowie verschiedener von Herrn Brendel nicht gegebenen Koeffizienten dieser Reihen	7
3) Einführung der Länge des gestörten Körpers an Stelle der des störenden in die Gleichungen für die Funktionen Q, P, Z	10
4) Einige für kritische Planeten wichtige Glieder in Q, P, Z , welche von Herrn Brendel nicht aufgeführt sind	11

Zweites Kapitel.

Definition der charakteristischen und kritischen Planeten. — Aufstellung der Differentialgleichungen für die Planeten des Hecuba-Typus unter Mitnahme der zweiten Potenz der störenden Masse in den charakteristischen Gliedern in Q, P, Z .

1) Definition der charakteristischen und kritischen Planeten. — Begründung der Einführung einer wahren mittleren Bewegung. — Die mittlere Bewegung in Länge	15
2) Aufsuchung der Glieder, welche kleine Divisoren erhalten	19
3) Das Brendel'sche Näherungsverfahren zur Berücksichtigung der zweiten Potenz der Masse in den charakteristischen Gliedern. — Bemerkungen über die anzustrebende Genauigkeit	21
4) Herleitung der kritischen Teile in Q, P, Z bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{m^{1/2}}{\delta_1}$ genau	25
5) Die Werte der Koeffizienten q_k, r_k, p_k, z_k in diesen Gliedern	31

Drittes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen für die Glieder nullten, ersten und zweiten Grades ohne Berücksichtigung der exargumentalen Glieder sowie der Veränderlichkeit von $\eta, II; \eta', II'$ und $\sin j, \sigma; \sin j', \sigma'$.

§ 1. Die Glieder nullten und ersten Grades.

1) Allgemeine Uebersicht über die bei der Integration der Differentialgleichungen des Problems einzuhaltende Genauigkeit. — Die Anordnung des Integrationsprozesses	Seite 41
2) Die Glieder nullten und ersten Grades in S	42
3) Die Glieder nullten und ersten Grades in R	44
4) Die kurzperiodischen elementaren Teile in S und (ρ)	46
5) Die Glieder nullten und ersten Grades in $W = K + V$	47
6) Die Glieder ersten Grades in \mathfrak{B} . — Berechnung von (\mathfrak{B})	49

§ 2. Die Glieder zweiten Grades.

7) Berechnung des charakteristischen Teiles in S_2 , sowie der A-Glieder in der Differentialgleichung für S_2	51
8) Der charakteristische Teil in R_2 . — Die A-Glieder in der Differentialgleichung	53
9) Der charakteristische und koordinierte Teil in K_2 und V_2 . — Die A-Glieder in der Differentialgleichung	57
10) Der charakteristische Teil in \mathfrak{B}_2 . — Die A-Glieder in der Differentialgleichung	61

Viertes Kapitel.

Berücksichtigung der exargumentalen Teile in den Gliedern ersten bis dritten Grades, sowie der Veränderlichkeit der langperiodischen Funktionen η, II etc. in den C- und D-Gliedern ersten und zweiten Grades, soweit diese kleine Divisoren erhalten.

§ 1. Die Gyldén'sche partielle Integration. — Ableitung mehrerer Hilfsformeln.

1) Vorbemerkungen. — Die Formeln für die Gyldén'sche partielle Integration	62
2) Die Ermittlung der Zusatzglieder aus η, II etc. mit Hilfe der gewöhnlichen partiellen Integration	66
3) Ableitung der Differentialformeln sowie der Integralformeln der langperiodisch elementaren Funktionen	70

§ 2. Die Reihe der exargumentalen Glieder bis zum dritten Grade inclusive.

4) Die Koeffizienten in S	74
5) Die Koeffizienten in R . — Ueber die Konvergenz der Reihe der exargumentalen Glieder in R	78

6) Die Reihe der exargumentalen Glieder in K und V . — Ihr Steigen in V bei kritischen Planeten	Seite 88
7) Die exargumentalen Teile in \mathfrak{B}	95
§ 3. Berechnung der konstanten und secularen Glieder, sowie der Zusatzglieder ersten und zweiten Grades.	
8) Die konstanten Teile zweiten Grades. — Die secularen Glieder in V_2 . — Die A-Glieder in R_2, V_2, \mathfrak{B}_2	97
9) Die aus der Veränderlichkeit von η, Π etc. resultierenden Zusatzglieder in S . — Die Reihenfolge der Berücksichtigung von exargumentalen und Zusatzgliedern	103
10) Die Zusatzglieder in R	107
11) Die Zusatzglieder in K und V . — Berücksichtigung der Funktion ξ	111
12) Die Zusatzglieder in \mathfrak{B}	114

Fünftes Kapitel.

Transformation der Koeffizienten der Störungsgleichungen in eine für die numerische Rechnung geeignete Form. — Ueber die Reduktion auf die Ekliptik und die Berechnung instantaner elliptischer Elemente.

§ 1. Transformation der Koeffizienten zur numerischen Rechnung.

1) Transformation der Koeffizienten nullten und ersten Grades	117
2) Die Koeffizienten der Glieder zweiten Grades mit Ausnahme der Konstanten, der A-Glieder, der Zusatzglieder und ohne Berücksichtigung der Neigung	120
3) Die Koeffizienten zweiten Grades, soweit sie von der Neigung herrühren. — Die Konstanten und A-Glieder zweiten Grades. — Die Koeffizienten in \mathfrak{B}	126
4) Die Koeffizienten der exargumentalen Glieder dritten Grades	132

§ 2. Ueber die Reduktion auf die Ekliptik und die Berechnung instantaner elliptischer Elemente.

5) Herleitung eines für kritische Planeten geeigneten Ausdruckes für die Reduktion auf die Ekliptik	137
6) Berechnung der instantanen elliptischen Elemente und der heliocentrischen Ekliptikalkoordinaten	142

Tafeln.

Tafel I: Die charakteristischen Argumente für die Planeten vom Hecuba-Typus	145
Tafel II: Die charakteristischen Argumente für die Planeten vom Hilda-Typus	146
Tafel III: Die charakteristischen Argumente für die Planeten vom Thule-Typus	147
Tafel IV: Die charakteristischen Argumente der Planeten kommensurabel zur zweiten Klasse	148
Tafel V: Verwandlungstabelle für die Koeffizientenbezeichnung Ludendorff (L) — Kramer (K)	149

Berichtigungen.

Seite 4	Zeile 7	von oben	lies C, D statt C, D	
" 4	" 10	" unten	" A " A	
" 17	" 10	" oben	" $\bar{g}v^2$ " $\bar{g}v^2$	
" 24	" 9	" "	ist (40) vor die Formeln zu setzen	
" 25	" 15	" "	lies $\delta_1 \geq \sqrt[3]{m'^2}$ statt $\delta_1 \leq \sqrt[3]{m'^2}$	
" 31	" 1	" "	ist 5) vor die Ueberschrift zu setzen	
" 34	" 3	" unten	lies $p_1^{(1)} = \dots$ statt $p_0^{(1)} = \dots$	
" 39	" 8	" oben	" $z_5^{(0)} = \dots$ " $z_5^{(5)} = \dots$	
" 41	" 16	" "	" $+ \alpha_{16} \eta'^2 \dots$ " $\alpha_{16} \eta'^2 \dots$	
" 47	" 7	" unten	" $-2R_1 S_0 + 6R_0 R_1 + (\dots$ " $-2R_1 S_0 + (\dots$	
" 48	" 1	" "	" $+ [\frac{2}{3} p_0^{(0)} - 2] \beta_3$ " $+ [\frac{2}{3} p_0^{(0)} - 2] \beta_3$	
" 49	" 7	" "	" $c_{4-1-0}^{-1} = \dots$ " $c_{4-0-0}^{-1} = \dots$	
" 59	" 2, 3, 4	" unten	" in $\nu_{27}, \nu_{28}, \nu_{29} \frac{-1}{1-\delta_1}$ " $\frac{-1}{1+\delta_1}$	
" 64	" 2	" "	" $\frac{m'}{\delta_1^3} \times \left(\frac{d\bar{V}}{dv}\right)^2$ " $\frac{m'}{\delta_1^3} \times \left(\frac{dV}{dv}\right)^2$	
" 70	" 5	" "	" Saturn " Neptun	
" 79	" 6	" "	" $\frac{d\bar{V}_1}{dv}$ " $\frac{d\bar{V}_1}{dy}$	
" 87	" 8	" "	" $\frac{m'}{\delta_1}$ " $\frac{m'^2}{\delta_1}$	
" 87	" 7	" "	" $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ " $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$	
" 88	" 14	" oben	" $\frac{m'^2}{\delta_1^2}$ " $\frac{m'^3}{\delta_1^2}$	
" 98	" 5	" "	" \bar{b}_{0-1-1}^{+1} " \bar{b}_{0-0-1}^{+1}	
" 99	" 8	" unten	" $\sum \kappa_n'^2$ " $\sum \kappa_n'$	
" 127	" 1	" "	" p_{32-1} " p_{3-1}	

3 JUN 1902



Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kästner), Göttingen.

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND II. Nro 3.

Über das Reciprocitätsgesetz

der

l^{ten} Potenzreste

in

algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade
Primzahl bedeutet.

Von

Ph. Furtwängler

in Potsdam.



Eine von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen
preisgekrönte Arbeit.

Berlin.

Weidmannsche Buchhandlung.

1902.

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND II. Nro 3.

Über das Reciprocitätsgesetz

der

l^{ten} Potenzreste

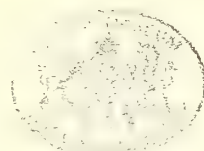
in

algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade
Primzahl bedeutet.

Von

Ph. Furtwängler

in Potsdam.



Eine von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen
preisgekrönte Arbeit.

Berlin.

Weidmannsche Buchhandlung.

1902.

Ueber das Reciprocitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet.

Von

Ph. Furtwängler in Potsdam.

Eine von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen
preisgekrönte Arbeit.

Vorgelegt von Herrn D. Hilbert in der Sitzung vom 8. Februar 1902.

Einleitung.

Die folgenden Entwicklungen beruhen auf den Methoden, die von D. Hilbert zum Teil in dem der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1897 erstatteten Bericht über „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper“¹⁾, zum Teil in der in den Math. Ann. Bd. 51, Seite 1 bis 127, 1898 erschienenen Abhandlung „Ueber die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers“²⁾ entwickelt worden sind. Der Gang der Beweisführung schliesst sich eng an denjenigen an, den D. Hilbert in der zweiten Abhandlung durchgeführt hat.

Auf einen Unterschied sei schon hier aufmerksam gemacht. Während für das quadratische Restsymbol nur die beiden Werte $+1$ und -1 existieren, hat das Restsymbol der l^{ten} Potenzreste ausser dem Wert 1 noch $l-1$ verschiedene Werte. Während sich also in der Theorie der quadratischen Reste die Gleichheit zweier Restsymbole, die den Nichtrestcharakter ausdrücken, auch dadurch nachweisen lässt, dass man zeigt, dass beide von $+1$ verschieden sind, versagt dieser Schluss in der Theorie der l^{ten} Potenzreste, wenn $l > 2$.

1) Citiert mit Hilbert A. Z.

1) Citiert mit Hilbert Rel. quadr. Z.

Diesem Umstande — oder der eigenen Ungeschicklichkeit — schreibt der Verfasser es zu, dass es ihm nicht gelungen ist, die Reciprocitätsgesetze der l^{ten} Potenzreste in gewissen algebraischen Zahlkörpern zu beweisen, ohne dieselben bereits für den Kreiskörper der l^{ten} Einheitswurzeln als bewiesen anzusehen; das sogenannte Eisenstein'sche Reciprocitätsgesetz bildet daher einen wesentlichen Bestandteil des Fundamentes der folgenden Entwicklungen.

I.

Definitionen und vorbereitende Sätze.

§ 1.

Das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ im Grundkörper k .

Es sei l eine ungrade Primzahl und $k(\xi)$ der durch eine l^{te} Einheitswurzel ξ definierte Kreiskörper. Der Körper, der den folgenden Betrachtungen zu Grunde liegt, ist dann ein beliebiger Oberkörper k des Kreiskörpers $k(\xi)$ vom Relativgrade m , also vom Grade $m(l-1)$.

Definition 1. Es sei \mathfrak{p} ein in dem Ideal $\mathfrak{I} = (1-\xi)$ nicht aufgehendes Primideal des Körpers k und α eine beliebige zu \mathfrak{p} prime ganze Zahl in k . Wir nennen dann α einen l^{ten} Potenzrest von \mathfrak{p} , wenn es eine ganze Zahl β in k giebt, die der Congruenz

$$\alpha \equiv \beta^l (\mathfrak{p}) \text{ genügt.}$$

Satz 1. (Hilfssatz). Wenn im Körper k eine Congruenz

$$\alpha \equiv \beta^l (\mathfrak{p})$$

besteht, wo α zu \mathfrak{p} prim ist, so giebt es auch eine ganze Zahl γ in k , die der Congruenz

$$\alpha \equiv \gamma^e (\mathfrak{p}^e)$$

genügt, wo e eine beliebige rationale positive ganze Zahl bedeutet.

Beweis: Es möge in k die Congruenz

$$\alpha \equiv \beta^l (\mathfrak{p}^f) \text{ gelten, aber}$$

$\alpha - \beta^l$ nicht durch \mathfrak{p}^{f+1} teilbar sein.

Wir weisen dann nach, dass man stets eine ganze Zahl γ in k bestimmen kann, die der Congruenz

$$\alpha \equiv \gamma^l (\mathfrak{p}^{f+1}) \text{ genügt.}$$

Bedeutet π eine ganze durch p , aber nicht durch p^2 teilbare Zahl in k und β_1 eine beliebige zu p prime Zahl in k , so gilt offenbar die Congruenz

$$(\beta + \beta_1 \pi^f)^l \equiv \beta^l + l\beta^{l-1} \beta_1 \pi^f \pmod{p^{2f}}.$$

Bestimmt man nun, was stets möglich ist, β_1 so, dass

$$\frac{\alpha - \beta^l}{\pi^f} \equiv l\beta^{l-1} \beta_1 \pmod{p},$$

so ist offenbar $\gamma = \beta + \beta_1 \pi^f$ eine Zahl, die der Congruenz

$$\alpha \equiv \gamma^l \pmod{p^{f+1}} \text{ genügt.}$$

Wir fügen hier gleich den entsprechenden Satz für ein in l aufgehendes Primideal I_1 an.

Satz 2. (Hilfssatz). Es sei I_1 ein in dem Ideal I genau zur l_1^{sten} Potenz aufgehendes Primideal. Sind dann α und β zwei zu I_1 prime ganze Zahlen, die der Congruenz

$$\alpha \equiv \beta^l \pmod{I_1^{l_1+1}}$$

genügen, so ist auch die Congruenz

$$\alpha \equiv x^l \pmod{I_1^{l_1+e}}$$

wo e eine rationale, positive, ganze Zahl grösser als 1 bedeutet, in k lösbar.

Beweis: Es sei λ_1 eine durch die erste Potenz von I_1 genau teilbare ganze Zahl in k . Es gilt dann die Congruenz:

$$(\beta + \beta_1 \lambda_1^{l_1+f})^l \equiv \beta^l + l\beta^{l-1} \beta_1 \lambda_1^{l_1+f} \pmod{I_1^{l_1+f+1}} \quad f > 0$$

da stets:

$$(l-1)l_1 + 2l_1 + 2f \geq ll_1 + f + 1$$

$$ll_1 + lf \geq ll_1 + f + 1.$$

Gilt nun bereits die Congruenz

$$\alpha \equiv \beta^l \pmod{I_1^{l_1+f}},$$

und bestimmen wir β_1 so, dass

$$\alpha - \beta^l \equiv l\beta^{l-1} \lambda_1^{l_1+f} \beta_1 \pmod{I_1^{l_1+f+1}},$$

so gilt offenbar, wenn wir

$$\gamma = \beta + \beta_1 \lambda_1^{l_1+f} \text{ setzen, auch}$$

$$\alpha \equiv \gamma^l \pmod{I_1^{l_1+f+1}}.$$

Um nun das Symbol $\left(\frac{\alpha}{p}\right)$ in k zu definieren, müssen wir vorerst noch einen Hilfssatz über die Normen der zu I primen Primideale in k ableiten. Dieser lautet:

Satz 3. (Hilfssatz). Ist p ein beliebiges zu I primes Primideal in k und bezeichnet $n(p)$ die Norm von p , so besteht die Congruenz

$$n(p) \equiv 1 \pmod{l}$$

Beweis: Es sei p die durch \mathfrak{p} teilbare rationale Primzahl und

$$p = \mathfrak{p}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{p}_e$$

die Zerlegung von p in $k(\xi)$. Ist dann p^f die Norm von \mathfrak{p} , wenn man \mathfrak{p} als Ideal des Kreiskörpers betrachtet, so ist

$$p^f \equiv 1 \quad (l).$$

Die Relativnorm von \mathfrak{p} , genommen in $k(\xi)$, die ich mit $n_{kr}(\mathfrak{p})$ bezeichne, ist nur durch $\mathfrak{p}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{p}_e$ teilbar. Es sei

$$n_{kr}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_1^{g_1} \mathfrak{p}_2^{g_2} \cdot \dots \cdot \mathfrak{p}_e^{g_e},$$

dann wird offenbar

$$n(\mathfrak{p}) = p^{f(g_1+g_2+\dots+g_e)} \equiv 1 \quad (l).$$

Aus dem bewiesenen Satze ergibt sich, dass, wenn \mathfrak{p} zu l prim ist, $\alpha^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l}}$ eine ganze Zahl in k ist und aus dem verallgemeinerten Fermat'schen Satze folgt dann, dass $\alpha^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l}}$ stets einer l^{ten} Einheitswurzel nach \mathfrak{p} congruent ist, wenn α zu \mathfrak{p} relativ prim ist. Wir können daher definieren:

Definition 2. Ist \mathfrak{p} ein zu l primes Primideal und α eine zu \mathfrak{p} prime ganze Zahl in k , ist ferner

$$\alpha^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l}} \equiv \zeta^a \quad (\mathfrak{p}),$$

wo a eine ganze rationale Zahl bedeutet, so soll

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = \zeta \quad \text{sein.}$$

Mit Rücksicht auf diese Definition können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz 4. Ist α eine zu \mathfrak{p} prime Zahl, so ist α stets dann und nur dann l^{ter} Potenzrest von \mathfrak{p} , wenn

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Der Beweis ergibt sich leicht, wenn man eine Primitivzahl nach \mathfrak{p} im Körper k heranzieht. (Vergl. A. Z. Satz 139 S. 366). Für das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ merken wir ferner noch folgende Formel an:

Satz 5. Sind α und β zwei zu \mathfrak{p} prime ganze Zahlen in k , so gilt:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) \left(\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha\beta}{\mathfrak{p}}\right).$$

Das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ werden wir den Potenzcharakter der Zahl α nach \mathfrak{p} nennen.

Ein vollständiges System von $n(p)-1$ zu p primen und nach p einander incongruenten Zahlen zerfällt offenbar in l Teilsysteme, so dass alle Zahlen eines Teilsystems denselben Potenzcharakter besitzen. Eins dieser Teilsysteme mit dem Potenzcharakter 1 enthält speciell $\frac{n(p)-1}{l}$ l^{te} Potenzreste nach p .

Endlich definieren wir noch:

Definition 3. Ist a ein beliebiges Ideal in k , so ist

$$\left(\frac{\alpha}{a}\right) = \left(\frac{\alpha}{p}\right) \left(\frac{\alpha}{q}\right) \left(\frac{\alpha}{r}\right) \dots$$

wenn $a = p \cdot q \cdot r \dots$

die Zerlegung von a in Primideale ist.

§ 2.

Der relativ-cyclische Körper K vom Primzahlrelativgrade l in bezug auf k . Seine Relativediscriminante und die Zerlegung der Primideale des Grundkörpers in ihm.

Ist μ eine beliebige ganze Zahl in k , die nicht die l^{te} Potenz einer Zahl in k ist, so entsteht durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\mu}$ zu den Zahlen des Körpers k ein neuer Körper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$, der relativ-cyclisch in Bezug auf k vom Relativgrade l ist. Ersetzt man in den Zahlen des Körpers K die Zahl $\sqrt[l]{\mu}$ durch $\zeta \sqrt[l]{\mu}$, so entsteht aus K ein zu K relativ conjugierter Körper. Wir bezeichnen die angegebene Substitution mit S . Die sämtlichen relativ conjugierten Körper gehen dann aus K hervor durch Anwendung der Substitutionen:

$$S, S^2, \dots, S^{l-1}.$$

Es ist nun zunächst unsere Aufgabe, die Primfaktoren der Relativediscriminante von K aufzusuchen und die Zerlegung der Primideale des Grundkörpers k im Oberkörper K aufzufinden. Wir trennen zu diesem Zweck die Primideale des Grundkörpers k in zwei Kategorien, nämlich in solche, die zu dem Ideal $\mathfrak{l} = (1 - \zeta)$ relativ prim sind und solche, die in \mathfrak{l} aufgehen. Bezüglich der ersteren gilt folgendes:

Satz 6. Es sei \mathfrak{p} ein zu \mathfrak{l} primes Primideal in k . Geht dann \mathfrak{p} genau zur a^{ten} Potenz in μ auf und ist erstens $a \not\equiv 0 (l)$, so geht \mathfrak{p} in der Relativediscriminante von K auf. Das Primideal \mathfrak{p} wird dann in K die l^{te} Potenz eines ambigen Primideals:

$$\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{P}^l.$$

Ist zweitens $a \equiv 0 (l)$, so geht \mathfrak{p} in der Relativediscriminante von K nicht auf. Wir können dann $a = 0$ annehmen, da wir, ohne den Körper K zu ändern, μ

durch eine geeignete Zahl μ^* ersetzen können, die zu p prim ist. Es zerfällt in diesem Falle p in das Produkt von l verschiedenen Primidealen in K oder bleibt auch in K Primideal, je nachdem

$$\left(\frac{\mu}{p}\right) = 1 \text{ oder } \left(\frac{\mu}{p}\right) \neq 1.$$

Die Beweise für diese Behauptungen beruhen auf ganz analogen Ueberlegungen, wie sie Hilbert in Rel. quadr. Z. § 4 und § 5 angestellt hat. Ich gehe deshalb nicht weiter darauf ein. Ausführlicher muss ich dagegen bei der zweiten Categorie von Primidealen, die in l aufgehen, verweilen. Für diese werden die in Betracht kommenden Verhältnisse durch die folgenden Sätze klargelegt.

Satz 7. Ist l_1 ein in l genau zur l_1^{sten} Potenz aufgehendes Primideal in k , das in μ genau zur a^{ten} Potenz aufgeht und ist $a \not\equiv 0 (l)$, so geht l_1 in der Relativdiscriminante von K auf und wird in K die l^{te} Potenz eines ambigen Primideals.

Die Ueberlegungen zum Beweise dieses Satzes unterscheiden sich nicht von denen, die für die zu l primen Primideale gelten.

Ist $a \equiv 0 (l)$, so kann man wieder $a = 0$ annehmen. Wir setzen daher im Folgenden voraus, dass μ zu l_1 relativ prim ist. Es gilt dann:

Satz 8. (Hülfsatz). Ist l_1 ein in l genau zur l_1^{sten} Potenz aufgehendes Primideal in k und μ zu l_1 relativ prim, so geht l_1 in der Relativdiscriminante nicht auf, wenn eine Congruenz

$$\mu \equiv \alpha^l \quad (l_1^{l_1})$$

erfüllt ist, wo α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Beweis: Es sei λ_1 eine durch l_1 , aber nicht durch l_1^2 teilbare ganze Zahl in k , ferner sei ϱ eine ganze Zahl in k , die durch $\frac{\lambda_1}{l_1}$ teilbar ist und zu l_1 relativ prim ist. Es ist dann, wenn wir

$$A = \left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^{l_1} (\alpha - \sqrt[l_1]{\mu})$$

setzen, A eine ganze Zahl in K , da die aus A und den zu A relativ conjugierten Zahlen gebildeten symmetrischen Funktionen ganze Zahlen in k sind, wenn die Congruenz

$$\alpha^l \equiv \mu \quad (l_1^{l_1})$$

gilt. Die Relativdiscriminante der Zahl A ist nun

$$\left[\left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^{l_1} \cdot \mu \cdot (1 - \xi)^l \right]^{(l-1)},$$

also zu l_1 prim. Folglich ist auch die Relativdiscriminante von K zu l_1 prim.

Satz 9. (Hilfssatz). Ist der grösste Exponent e , für den eine Congruenz

$$\mu \equiv \alpha^e \pmod{\mathfrak{I}_1^e}$$

besteht, kleiner als $l_1 l$ und incongruent Null nach l , so geht \mathfrak{I}_1 in der Relativdiscriminante von K auf.

Beweis: Ist

$$e = rl + s \quad r \leq l_1 - 1 \quad 0 < s < l$$

so kann die Zahl $\alpha - M$, wo M gleich $\sqrt[l]{\mu}$ ist, höchstens durch \mathfrak{I}_1^r teilbar sein. Daraus folgt, dass die Zahl:

$$B = (\alpha - M) \cdot \left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^r$$

eine ganze, nicht durch \mathfrak{I}_1 teilbare Zahl in K ist. Andererseits kann B nicht zu \mathfrak{I}_1 teilerfremd sein, da die Relativnorm von B durch \mathfrak{I}_1 teilbar ist. Es sei der grösste gemeinsame Idealteiler von \mathfrak{I}_1 und B gleich \mathfrak{Q}_1 , dann ist $\mathfrak{Q}_1 = S\mathfrak{Q}_1$, wie aus der folgenden Gleichung sich ergibt:

$$(\alpha - \xi M) \left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^r = (\alpha - M) \left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^r + (1 - \xi) \cdot \left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^r \cdot M.$$

Da r kleiner als l_1 ist, ist der zweite Bestandteil der rechten Seite dieser Gleichung eine durch \mathfrak{I}_1 teilbare ganze Zahl, also in der That $\mathfrak{Q}_1 = S\mathfrak{Q}_1$. Hieraus folgt, dass \mathfrak{Q}_1 ein ambiges Ideal in k ist, mithin $\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{Q}_1^l$ ein Faktor der Relativdiscriminante von K .

Wenn das Primideal \mathfrak{I}_1 in der Relativdiscriminante nicht aufgeht, so sind bezüglich des Verhaltens von \mathfrak{I}_1 in K noch 2 Fälle denkbar, entweder zerfällt \mathfrak{I}_1 in l von einander verschiedene Primfaktoren in K oder es bleibt auch in K Primideal. Um diese beiden Fälle zu trennen, beweisen wir die folgenden Sätze:

Satz 10. (Hilfssatz). Das Ideal \mathfrak{I}_1 zerfällt dann und nur dann in l verschiedene Primfaktoren in K , wenn eine Congruenz

$$\mu \equiv \alpha^l \pmod{(\mathfrak{I}_1^{l_1+1})}$$

besteht, wo α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Zum Beweise nehmen wir erstens an, es zerfalle \mathfrak{I}_1 in l verschiedene Primfaktoren in K

$$\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{Q}_1 \cdot S\mathfrak{Q}_1 \cdot S^2\mathfrak{Q}_1 \cdot \dots \cdot S^{l-1}\mathfrak{Q}_1$$

und weisen dann das Bestehen der angeführten Congruenz nach. Bezeichnet allgemein N die Norm in K , n die Norm in k , so folgt aus der Gleichung

$$N(\mathfrak{Q}_1^l) = n(\mathfrak{I}_1),$$

dass jede Zahl in K nach \mathfrak{Q}_1 einer Zahl in k congruent ist. Sei nun etwa

$$M \equiv \alpha_1 (\mathfrak{Q}_1), \text{ so ist}$$

$$\mu \equiv \alpha_1^l (\mathfrak{Q}_1), \text{ also auch}$$

$$\mu \equiv \alpha_1^l (I_1).$$

Da andererseits I_1 , wenn die angegebene Zerlegung stattfindet, nicht in der Relativdiscriminante von K aufgeht, so muss nach Satz 9 auch

$$\mu \equiv \alpha_1^l (I_1^l) \text{ sein.}$$

Haben dann λ_1 und ϱ die Bedeutung wie in Satz 8, so ist

$$(M - \alpha_1) \frac{\varrho}{\lambda_1}$$

eine ganze Zahl in K und als solche einer ganzen Zahl β in k nach \mathfrak{Q}_1 congruent:

$$(M - \alpha_1) \cdot \frac{\varrho}{\lambda_1} \equiv \beta (\mathfrak{Q}_1)$$

oder

$$(M - \alpha_1) \varrho \equiv \beta \lambda_1 (I_1 \mathfrak{Q}_1)$$

d. h. es gilt, wenn man α_2 geeignet bestimmt,

$$M - \alpha_2 \equiv 0 (I_1 \mathfrak{Q}_1).$$

Durch Uebergang zu den relativconjugierten Zahlen findet man:

$$\xi M - \alpha_2 \equiv 0 (I_1 S \mathfrak{Q}_1)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\xi^{l-1} M - \alpha_2 \equiv 0 (I_1 S^{l-1} \mathfrak{Q}_1).$$

Aus der Gesamtheit der Congruenzen folgt:

$$\mu \equiv \alpha_2^l (I_1^{l+1})$$

und deshalb wieder nach Satz 9

$$\mu \equiv \alpha_2^l (I_1^{2l}).$$

Dies Verfahren können wir fortsetzen. Sei etwa

$$\mu \equiv \alpha_e^l (I_1^e), \text{ wo } e \leq l_1.$$

Es ist dann

$$(M - \alpha_e) \cdot \left(\frac{\varrho}{\lambda_1} \right)^e \text{ eine ganze Zahl in } K.$$

Wir folgern daraus genau wie vorhin die Existenz einer ganzen Zahl α_{e+1} , sodass

$$\mu \equiv \alpha_{e+1}^l (I_1^{e+1}).$$

Aus dem Bewiesenen folgt dann offenbar, dass unter der gemachten Voraussetzung stets eine ganze Zahl α in k existieren muss, so dass

$$\mu \equiv \alpha^l \pmod{l_1^{l_1+1}}.$$

Setzen wir umgekehrt voraus, dass

$$\mu \equiv \alpha^l \pmod{l_1^{l_1+1}},$$

so sind die Zahlen

$$(\xi^i M - \alpha) \cdot \left[\frac{\varrho}{\lambda_1} \right]^{l_1} \quad i = 0, 1, 2 \dots l-1$$

ganze Zahlen in K , die nicht durch l_1 teilbar sind. Denn wäre eine von ihnen durch l_1 teilbar, so müssten alle durch l_1 teilbar sein und folglich auch die Differenz von irgend zweien unter ihnen, was gegen die Annahme ist, dass l höchstens durch die l_1^{ste} Potenz von l_1 teilbar ist. Andererseits muss sicher eine unter ihnen mit l_1 einen gemeinsamen Teiler haben, da das Produkt der genannten Zahlen durch l_1 teilbar ist. Hieraus ergibt sich dann sofort, dass l_1 in K das Produkt von l verschiedenen Primidealen wird.

Wir haben jetzt noch den Fall zu erledigen, dass l_1 im Körper K Primideal bleibt.

Zu diesem Zweck stellen wir die Zahlen des Körpers K in der Form

$$A = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 M + \alpha_2 M^2 + \dots + \alpha_{l-1} M^{l-1}}{\beta}$$

dar, wo die Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}, \beta$, ganze Zahlen des Körpers k bedeuten, von denen wir annehmen, dass sie nicht sämtlich einen gemeinsamen Teiler haben; β nennen wir kurz den Nenner der Zahl A . Es gilt dann der folgende Hilfssatz.

Satz 11. (Hilfssatz). Es sei l_1 unzerlegbar in K und es sei M ein Modul in K , der alle diejenigen Zahlen

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 M + \alpha_2 M^2 + \dots + \alpha_{l-1} M^{l-1}}{\beta}$$

umfasst, bei denen β durch keine höhere Potenz von l_1 als $l_1^{l_1-1}$ teilbar ist. Jede Zahl des Moduls M ist dann nach l_1 einer ganzen Zahl in k congruent.

Beweis: Es mögen die Zahlen

$$A_0, A_1, \dots, A_e$$

des Moduls M ein volles Restsystem nach l_1 incongruenter Zahlen für den Modul M bilden und es mag die höchste Potenz von l_1 , die bei der angegebenen Art der Darstellung in den Nennern der Zahlen A aufgeht, l_1^e sein, wo $0 \leq e \leq l_1 - 1$ ist. Ich behaupte dann, dass auch die Zahlen

$$A'_0, A'_1, \dots, A'_e$$

ein volles Restsystem nach l_1 , für den Modul M bilden, und dass die höchste Potenz von l_1 , die in den Nennern dieser Zahlen aufgeht $l_1^{e'}$ ist, wo

$$e' < e \text{ ist, wenn } e > 0 \text{ ist.}$$

Zu diesem Zweck weisen wir zunächst nach, dass die Zahlen A^i nach l_1 incongruent sind. Wäre nämlich

$$A_i^l \equiv A_k^l \pmod{l_1}$$

so müsste, da l_1 in K unzerlegbar ist,

$$A_i \equiv \zeta^a A_k \pmod{l_1} \text{ sein,}$$

wo a eine ganze rationale Zahl bedeutet.

Da nun

$$\zeta^a A_k \equiv A_k \pmod{l_1}, \text{ so würde folgen}$$

$$A_i \equiv A_k \pmod{l_1} \text{ gegen die Voraussetzung.}$$

Es sind daher die Zahlen A^i in der That nach l_1 incongruent und bilden infolgedessen ein volles Restsystem nach l_1 für den Modul M . Um zweitens einzusehen, dass $e' < e$ ist, wenn $e > 0$ ist, beachte man, dass, wenn

$$A_i = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 M + \alpha_2 M^2 + \dots + \alpha_{l-1} M^{l-1}}{\beta} \text{ ist,}$$

A_i^l sich in der Form darstellen lässt:

$$A_i^l = \frac{\alpha_0^l + \alpha_1^l \mu + \alpha_2^l \mu^2 + \dots + \alpha_{l-1}^l \mu^{l-1}}{\beta^l} + \frac{lB}{\beta^l} = \frac{\varrho}{\sigma} + \frac{lB}{\beta^l}$$

wo B eine ganze Zahl in K bedeutet, die ohne Nenner darstellbar ist. Ist nun β genau durch l_1^e teilbar, wo $e_1 \leq e$ ist und ist

$$e_1 l \leq l_1 (l-1),$$

so ist der Bruch $\frac{lB}{\beta^l}$ offenbar so darstellbar, dass im Nenner eine ganze Zahl aus k steht, die zu l_1 relativ prim ist. Dasselbe gilt von $\frac{\varrho}{\sigma}$ und folglich auch von A_i^l .

Ist aber

$$\begin{aligned} e_1 l &> l_1 (l-1), \text{ so ist doch} \\ e_1 l - l_1 (l-1) &< e_1 \leq e, \text{ weil} \\ l_1 - e_1 &< l (l_1 - e_1), \text{ wenn } l_1 > e_1, \end{aligned}$$

was nach Voraussetzung der Fall ist. Daraus folgt dann, dass $\frac{lB}{\beta^l}$ als Bruch darstellbar ist, dessen Nenner eine ganze Zahl aus k ist, die höchstens durch $l_1^{e'}$ teilbar ist, wo $e' < e$. Dasselbe gilt dann von A_i^l . Wenn wir das angewandte Verfahren nun mit dem neuen Restsystem

$$A_0^l, A_1^l, \dots, A_{l-1}^l$$

fortsetzen, indem wir wieder die l^{ten} Potenzen bilden, so gelangen wir schliesslich zu einem Restsystem

$$B_0, B_1, \dots B_r$$

dessen Zahlen mit zu l_1 primen Nennern, also auch ohne Nenner darstellbar sind. Bilden wir dann noch einmal die l^{ten} Potenzen

$$B_0^l, B_1^l, \dots B_r^l$$

so sind auch alle diese Zahlen wieder nach l_1 einander incongruent. Ist nun

$$B_i^l = (\beta_0 + \beta_1 M + \dots + \beta_{l-1} M^{l-1})^l,$$

so wird

$$B_i^l \equiv \beta_0^l + \beta_1^l \mu + \dots + \beta_{l-1}^l \mu^{l-1} \pmod{l_1}.$$

Daraus folgt dann aber, dass alle Zahlen B^l und somit alle Zahlen des Moduls M nach l_1 einer ganzen Zahl aus k congruent sind.

Unter Benutzung des letzten Hilfssatzes können wir jetzt den folgenden Satz ableiten:

Satz 12. (Hilfssatz). Ist l_1 ein in l zur l_1^{ten} Potenz aufgehendes Primideal in k und bleibt l_1 auch in K Primideal, so giebt es eine ganze Zahl α in k , die der Congruenz

$$\mu \equiv \alpha^l \pmod{l_1^{(l_1)}} \text{ genügt.}$$

Beweis: Die Zahl M gehört dem in Satz 11 betrachteten Modul M an, und ist deshalb einer ganzen Zahl α_1 in k nach l_1 congruent. Folglich haben wir die Congruenzen:

$$\begin{aligned} M - \alpha_1 &\equiv 0 \pmod{l_1} \\ SM - \alpha_1 &\equiv 0 \pmod{l_1} \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \\ S^{l-1}M - \alpha_1 &\equiv 0 \pmod{l_1}, \end{aligned}$$

aus denen folgt

$$\mu \equiv \alpha_1^l \pmod{l_1}.$$

Es möge nun die Congruenz

$$\mu \equiv \alpha_e^l \pmod{l_1^{(e)}} \text{ erfüllt sein,}$$

wo $e \leq l_1 - 1$.

Es giebt dann, wie wir zeigen wollen, eine Zahl α_{e+1} , die der Congruenz

$$\mu \equiv \alpha_{e+1}^l \pmod{l_1^{(e+1)}}$$

genügt. Haben \mathfrak{o} und λ_1 die bereits früher erklärte Bedeutung, so ist die Zahl

$$(M - \alpha_e) \cdot \left(\frac{\mathfrak{o}}{\lambda_1}\right)^e$$

eine ganze Zahl, die dem im vorigen Satze betrachteten Modul M angehört und ist als solche einer ganzen Zahl β_e aus k nach l_1 congruent:

$$(M - \alpha_e) \cdot \left(\frac{\varrho}{\lambda_1}\right)^e \equiv \beta_e \pmod{\mathfrak{l}_1}, \text{ folglich}$$

$$(M - \alpha_e) \cdot \varrho^e \equiv \beta_e \cdot \lambda_1^e \pmod{\mathfrak{l}_1^{(e+1)}}.$$

Es giebt daher eine ganze Zahl α_{e+1} in k ,

sodass
$$M - \alpha_{e+1} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{l}_1^{(e+1)}}.$$

Hieraus folgt dann wieder

$$\begin{aligned} SM - \alpha_{e+1} &\equiv 0 \pmod{\mathfrak{l}_1^{(e+1)}} \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \\ S^{e-1}M - \alpha_{e+1} &\equiv 0 \pmod{\mathfrak{l}_1^{(e+1)}} \end{aligned}$$

und somit besteht endlich die Congruenz

$$\mu \equiv \alpha_{e+1}^l \pmod{\mathfrak{l}_1^{(l(e+1))}}.$$

Durch genügende Fortsetzung des Verfahrens gelangen wir dann schliesslich zu dem Resultat, dass eine Congruenz

$$\mu \equiv \alpha^l \pmod{\mathfrak{l}_1^{(l^2)}}.$$

bestehen muss, wo α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Die in den letzten Sätzen abgeleiteten Resultate können wir in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 13. Ist die ganze Zahl μ in k zu \mathfrak{l}_1 relativ prim und \mathfrak{l}_1 ein Primideal in k , das in \mathfrak{l} genau zu l_1^{ten} Potenz aufgeht, so können bezüglich des höchsten Exponenten e , für den eine Congruenz

$$\mu \equiv \alpha^e \pmod{\mathfrak{l}_1^e}$$

erfüllt ist, wo α eine ganze Zahl in k ist, 3 Fälle eintreten

$$1) \ e < ll_1 \quad 2) \ e = ll_1 \quad 3) \ e > ll_1.$$

Im ersten Falle geht \mathfrak{l}_1 in der Relativediscriminante des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ auf und wird in K die l^{te} Potenz eines ambigen Ideals. Im zweiten und dritten Falle geht \mathfrak{l}_1 in der Relativediscriminante von K nicht auf und bleibt im zweiten Falle Primideal in K , während es im dritten Falle in l verschiedene Primfaktoren zerfällt.

§ 3.

Das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)$.

Definition 4. Sind ν und μ zwei beliebige ganze Zahlen in k und \mathfrak{p} ein zu \mathfrak{l} primes Primideal in k , das in μ zur a^{ten} und in ν zur b^{ten} Potenz auf-

geht, so bilde man den Bruch $\frac{v^a}{\mu^b}$ und bringe ihn in die Gestalt $\frac{\varrho}{\sigma}$, wo ϱ und σ zwei ganze nicht durch p teilbare Zahlen in k sind. Wir definieren dann

$$\left(\frac{v, \mu}{p}\right) = \left(\frac{\varrho}{p}\right) \cdot \left(\frac{\sigma}{p}\right)^{-1}.$$

Das Symbol $\left(\frac{v, \mu}{p}\right)$ ist durch diese Festsetzung eindeutig als eine l^{te} Einheitswurzel definiert. (Hilbert A. Z. § 131. S. 411). Es gelten für dasselbe die folgenden Formeln:

Satz 14. Bedeuten $\mu, v, \mu_1, \nu_1, \mu^*, \nu^*, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen in k und ist p ein zu l primes Primideal in k , so gilt

- 1) $\left(\frac{\mu, \mu}{p}\right) = 1$
- 2) $\left(\frac{v, \mu}{p}\right) \cdot \left(\frac{\mu, v}{p}\right) = 1$
- 3) $\left(\frac{v, \mu}{p}\right) \cdot \left(\frac{\nu_1, \mu}{p}\right) = \left(\frac{\nu \nu_1, \mu}{p}\right)$
 $\left(\frac{v, \mu}{p}\right) \cdot \left(\frac{v, \mu_1}{p}\right) = \left(\frac{v, \mu \mu_1}{p}\right)$
- 4) $\left(\frac{v, \mu}{p}\right) = \left(\frac{\nu^*, \mu^*}{p}\right)$, wenn $\frac{v}{\nu^*} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^l$, $\frac{\mu}{\mu^*} = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^l$.

Beweis: Die Gleichungen 1) und 2) folgen unmittelbar aus der Definition des Symbols. Um die erste Gleichung 3) zu beweisen, nehmen wir an, es gehe p in μ zur a^{ten} , in ν zur b^{ten} und in ν_1 zur b_1^{ten} Potenz auf. Es sei dann:

$$\frac{v^a}{\mu^b} = \frac{\varrho}{\sigma}, \quad \frac{\nu_1^{a_1}}{\mu^{b_1}} = \frac{\varrho_1}{\sigma_1}, \quad \frac{(v \nu_1)^a}{\mu^{b+b_1}} = \frac{\varrho \varrho_1}{\sigma \sigma_1}$$

wo $\varrho, \sigma, \varrho_1$ und σ_1 , also auch $\varrho \varrho_1$ und $\sigma \sigma_1$ zu p prim sind.

Es ist dann:

$$\left(\frac{v, \mu}{p}\right) \cdot \left(\frac{\nu_1, \mu}{p}\right) = \left(\frac{\varrho}{p}\right) \cdot \left(\frac{\sigma}{p}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\varrho_1}{p}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_1}{p}\right)^{-1} = \left(\frac{\varrho \varrho_1}{p}\right) \cdot \left(\frac{\sigma \sigma_1}{p}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{\nu \nu_1, \mu}{p}\right) = \left(\frac{\varrho \varrho_1}{p}\right) \cdot \left(\frac{\sigma \sigma_1}{p}\right)^{-1}.$$

Daraus folgt offenbar:

$$\left(\frac{v, \mu}{p}\right) \cdot \left(\frac{\nu_1, \mu}{p}\right) = \left(\frac{\nu \nu_1, \mu}{p}\right), \quad \text{also das Bestehen}$$

der ersten Gleichung 3). Die zweite Gleichung 3) ergibt sich dann mit Hülfe

von 2). Die Richtigkeit der Gleichung 4) endlich sieht man ein, wenn man beachtet, dass:

$$\left(\frac{\nu, \alpha'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)' = 1, \text{ also } \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\nu, \mu \alpha'}{\mathfrak{p}}\right)$$

Wir haben jetzt den von Hilbert eingeführten Begriff des Normenrestes (A. Z. § 129. S. 402) mit dem eben definierten Symbol in Verbindung zu bringen und beweisen zu diesem Zweck den folgenden fundamentalen Satz.

Satz 15. Sind ν und μ zwei beliebige ganze Zahlen in k und \mathfrak{p} ein zu \mathfrak{l} primes Primideal in k , so ist ν stets dann und nur dann Normenrest des Körpers $K(\sqrt[\mathfrak{l}]{\mu}, k)$ nach \mathfrak{p} , wenn

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Beweis: Beim Beweise dieses Satzes gehen wir schrittweise vor, indem wir 4 Fälle unterscheiden.

Vorher bemerken wir noch folgendes. Bezeichnet man mit N_k die Relativnorm einer Zahl aus K genommen in k , und gilt die Congruenz

$$\alpha \equiv N_k(A) \pmod{\mathfrak{p}},$$

wo α eine ganze zu \mathfrak{p} prime Zahl aus k , A eine solche aus K bezeichnet, so lässt sich leicht zeigen, dass man stets eine ganze Zahl B in K finden kann, so dass

$$\alpha \equiv N_k(B) \pmod{\mathfrak{p}^e},$$

wo e ein beliebiger positiver Exponent ist. Ist nämlich A_1 eine ganze Zahl aus K , die der Congruenz

$$A A_1 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}} \text{ genügt, so gilt}$$

$$\alpha N_k(A_1) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Dann giebt es aber nach Satz 1 eine ganze Zahl β in k , so dass

$$\alpha N_k(A_1) \equiv \beta' \pmod{\mathfrak{p}^e}, \text{ also}$$

$$\alpha \equiv N_k(A\beta) \pmod{\mathfrak{p}^e} \text{ wird.}$$

Nach dieser Vorbemerkung gehen wir zur Behandlung der 4 Fälle über.

Erster Fall. ν und μ sind zu \mathfrak{p} teilerfremd. Es ist dann stets $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = +1$. Wir haben also nachzuweisen, dass in diesem Falle ν Normenrest von K nach \mathfrak{p} ist. Der Beweis hierfür ist verschieden, je nachdem \mathfrak{p} in K zerlegbar oder unzerlegbar ist.

1) Es zerfalle \mathfrak{p} im Körper K in l verschiedene Primideale

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cdot S\mathfrak{P} \dots S^{l-1}\mathfrak{P}.$$

Wir lösen dann in K die Congruenzen:

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 M + A_3 M^2 + \dots + A_l M^{l-1} &\equiv \nu \\ A_1 + \zeta A_2 M + \zeta^2 A_3 M^2 + \dots + \zeta^{l-1} A_l M^{l-1} &\equiv 1 \\ \dots &\dots \\ A_1 + \zeta^{l-1} A_2 M + \dots + \zeta A_l M^{l-1} &\equiv 1 \end{aligned} \right\} (\mathfrak{P})$$

die durch folgende Werte der Unbekannten A_1, A_2, \dots, A_l befriedigt werden:

$$\left. \begin{aligned} l A_1 &\equiv \nu + l - 1 \\ l A_2 M &\equiv \nu - 1 \\ l A_3 M^2 &\equiv \nu - 1 \\ \dots &\dots \\ l A_l M^{l-1} &\equiv \nu - 1 \end{aligned} \right\} (\mathfrak{P}).$$

Da nun $N(\mathfrak{P}) = n(\mathfrak{p})$, so ist jede ganze Zahl aus K einer ganzen Zahl aus k nach \mathfrak{P} congruent.

Es sei

$$A_1 \equiv \alpha_1 \quad A_2 \equiv \alpha_2 \quad \dots \quad A_l \equiv \alpha_l \quad (\mathfrak{P}).$$

Dann wird

$$\nu \equiv N_k(\alpha_1 + \alpha_2 M + \dots + \alpha_l M^{l-1}) \quad (\mathfrak{P}).$$

Da die Congruenz dann auch nach \mathfrak{p} gilt, so folgt, wenn wir die zu Anfang des Satzes gemachte Bemerkung berücksichtigen, dass ν Normenrest von K nach \mathfrak{p} ist.

2) \mathfrak{p} sei in K unzerlegbar, also $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$.

Es sei dann

$$\alpha_1^l, \alpha_2^l, \dots, \alpha_r^l$$

ein volles System incongruenter zu \mathfrak{p} primer l^{ter} Potenzreste nach \mathfrak{p} in k . Dann lässt sich, da

$$1, \mu, \mu^2 \dots \mu^{l-1}$$

nach \mathfrak{p} einander incongruent sind, weil $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$, ein volles System incongruenter zu \mathfrak{p} primer Zahlen in k nach \mathfrak{p} so schreiben:

$$\begin{aligned} &\alpha_1^l, \alpha_2^l, \dots, \alpha_r^l \\ &\mu \alpha_1^l, \mu \alpha_2^l, \dots, \mu \alpha_r^l \\ &\dots \\ &\mu^{l-1} \alpha_1^l, \mu^{l-1} \alpha_2^l, \dots, \mu^{l-1} \alpha_r^l. \end{aligned}$$

Da nun

$$\mu^i \alpha_s^l = N_k(\alpha_s M^i),$$

so ist jede zu \mathfrak{p} prime Zahl in k , also auch ν , Normenrest von K nach \mathfrak{p} .

Zweiter Fall. μ sei genau durch p^a teilbar, ν zu p prim, wobei wir annehmen, dass $a \not\equiv 0 \pmod{l}$, da wir sonst, ohne K zu ändern, μ durch ein zu p teilerfremdes μ^* ersetzen könnten. Es ist in diesem Falle nach Definition:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{p}\right) = \left(\frac{\nu}{p}\right)^a.$$

Es ist also nachzuweisen:

1) Ist $\left(\frac{\nu}{p}\right) = +1$, so ist ν Normenrest von K nach p .

2) Ist ν Normenrest von K nach p , so ist $\left(\frac{\nu}{p}\right) = +1$.

1) Ist $\left(\frac{\nu}{p}\right) = +1$, so ist $\nu \equiv \alpha^l \pmod{p}$, also

$$\nu \equiv N_k(\alpha) \pmod{p}.$$

2) Ist $\nu \equiv N_k(A) \pmod{p}$,

wo A eine ganze Zahl in K bedeutet, so folgt, da in K

$$p = \mathfrak{P}^l \text{ wird,}$$

$$N(\mathfrak{P}) = n \pmod{p}. \quad \text{Es ist also}$$

$A \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{P}}$, wo α eine ganze Zahl in k bedeutet, folglich auch

$$\nu \equiv \alpha^l \pmod{\mathfrak{P}}, \text{ daher auch nach } \pmod{p}, \text{ d. h. } \left(\frac{\nu}{p}\right) = +1.$$

Dritter Fall. Es sei μ zu p prim, ν genau durch p^a teilbar, wo wir wieder $a \not\equiv 0 \pmod{l}$ annehmen. Es ist dann

$$\left(\frac{\nu, \mu}{p}\right) = \left(\frac{\mu}{p}\right)^{-a}. \quad \text{Wir haben daher zu zeigen}$$

1) Ist $\left(\frac{\mu}{p}\right) = 1$, so ist ν Normenrest von K nach p .

2) Ist ν Normenrest von K nach p , so ist $\left(\frac{\mu}{p}\right) = 1$.

1) Ist $\left(\frac{\mu}{p}\right) = +1$, so zerfällt p in K in l verschiedene Primfaktoren:

$$p = \mathfrak{P} \cdot S\mathfrak{P} \cdot S^2\mathfrak{P} \dots S^{l-1}\mathfrak{P}.$$

Ist nun A eine ganze Zahl aus K , die genau durch die erste Potenz von \mathfrak{P} teilbar ist, so ist $\alpha = N_k(A)$ eine ganze Zahl aus k , die genau durch die erste Potenz von p teilbar ist. Bedeutet ferner ϱ eine durch $\frac{\alpha}{p}$ teilbare, zu p prime Zahl, so ist

$$\frac{\nu}{\alpha^a} \cdot \varrho^{al}$$

eine ganze Zahl in k , die zu \mathfrak{p} prim ist. Es existiert dann nach Fall 1 eine ganze Zahl P in K , so dass

$$\frac{\nu \varrho^{i^a}}{\alpha^a} \equiv N_k(P) \pmod{\mathfrak{p}^e}.$$

Bestimmt man nun ϱ^* so, dass $\varrho \varrho^* \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^e}$, so folgt

$$\nu \equiv N_k(P A^a \varrho^{*a}) \pmod{\mathfrak{p}^e}$$

d. h. ν ist Normenrest von K nach \mathfrak{p} .

2) Ist $\nu \equiv N_k(P) \pmod{\mathfrak{p}^e}$, so wird

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}, P) (\mathfrak{p}, SP) \dots (\mathfrak{p}, S^{l-1}P)$$

und folglich ist, da \mathfrak{p} in der Relativdiscriminante von K nicht aufgeht, nach

Satz 6 $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = +1$.

Vierter Fall. Es sei μ durch \mathfrak{p}^a , ν durch \mathfrak{p}^b teilbar, wobei wir $a \not\equiv 0 \pmod{l}$ annehmen. Wir bestimmen dann zunächst c so, dass $b + ac = ld$ wird, wo c und d ganze rationale Zahlen bedeuten.

Ist nun $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = +1$, so ist auch $\left(\frac{\nu \mu^c, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$

(Satz 14, Formel 1 und 3).

Wenn wir daher π so wählen, dass es genau durch die erste Potenz von \mathfrak{p} teilbar ist und ϱ so, dass es durch $\frac{\pi}{\mathfrak{p}}$ teilbar ist und zu \mathfrak{p} prim, so ist $\nu \mu \cdot \left(\frac{\varrho}{\pi}\right)^{ld}$ eine ganze Zahl in k , die zu \mathfrak{p} prim ist, und da

$$\left(\frac{\nu \mu^c \cdot \left(\frac{\varrho}{\pi}\right)^{ld}, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1,$$

so ist $\nu \mu^c \cdot \left(\frac{\varrho}{\pi}\right)^{ld}$ und folglich auch ν selbst Normenrest von K nach \mathfrak{p} . Entsprechend wird der umgekehrte Schluss ausgeführt. Aus dem eben Bewiesenen und aus der Definition des Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)$ ergibt sich leicht der folgende Satz.

Satz 16. Ist \mathfrak{p} ein zu l primes Primideal in k , das nicht in der Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ aufgeht, so ist jede zu \mathfrak{p} prime Zahl in k Normenrest des Körpers K nach \mathfrak{p} .

Geht dagegen \mathfrak{p} in der Relativdiscriminante von K auf und ist e ein beliebiger positiver Exponent, so sind von allen nach \mathfrak{p}^e einander incongruenten zu \mathfrak{p} primen Zahlen genau der l^{te} Teil Normenreste des Körpers K nach \mathfrak{p} .

II.

Die ambigen Complexe des Körpers K .

Wir machen für die folgenden Entwicklungen die specielle Annahme, dass die Klassenzahl h des Körpers k nicht durch l teilbar ist.

§ 4.

Die relativen Grundeinheiten des Körpers K .

Indem ich wegen der Definition eines Systems relativer Grundeinheiten von K in bezug auf k und wegen des Beweises ihrer Existenz auf Hilbert A. Z. § 55 verweise, führe ich der Vollständigkeit halber hier noch 2 Hilfssätze über dieselben an, deren Beweis man bei Hilbert A. Z. § 146 nachlesen kann.

Satz 17. (Hilfssatz). Ist $H_1, \dots, H_{m'}$, ein System von relativen Grundeinheiten des Körpers K in bezug auf k , wo $m' = \frac{m(l-1)}{2}$, da der Körper k mit allen seinen conjugierten Körpern imaginär ist, dann gilt für eine beliebige Einheit E in K jedesmal eine Gleichung von der Gestalt

$$E^f = H_1^{F_1(S)} \dots H_{m'}^{F_{m'}(S)} \cdot [\varepsilon]$$

wo f ein ganzer rationaler, nicht durch l teilbarer Exponent ist, $F_1(S) \dots F_{m'}(S)$ ganze ganzzahlige Funktionen von S bezeichnen, und $[\varepsilon]$ eine Einheit in k oder die l^{te} Wurzel einer Einheit in k bedeutet, letzteres nur dann, wenn μ das Produkt aus einer Einheit und der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k ist.

Satz 18. (Hilfssatz). Ist

$$\eta_1 = N_k(H_1) \dots \eta_{m'} = N_k(H_{m'}),$$

dann lässt sich jede Einheit ε in k , welche Relativnorm einer Einheit E in K ist, in der Gestalt

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \dots \eta_{m'}^{u_{m'}} [\varepsilon]^l$$

darstellen, wo $u_1, \dots, u_{m'}$ ganzzahlige Exponenten sind und von $[\varepsilon]$ dasselbe gilt wie im vorigen Satze.

§ 5.

Die ambigen Complexe des Körpers K .

Fasst man den Begriff der ambigen Idealclassen und des ambigen Complexes wie bei Hilbert, Rel. quadr. Z. Definition 8 u. 9 S. 22 u. 23, so gilt auch in

unserem Falle, dass jeder Complex P , der eine ambige Classe A enthält, ein ambiger Complex ist, der, wie wir sagen wollen, aus A entspringt. Enthält speciell die ambige Classe ein ambiges Ideal \mathfrak{A} , so soll der Complex aus dem ambigen Ideal \mathfrak{A} entsprungen heissen. Mit der Anzahl der Complexe der letzteren Art haben wir uns zunächst zu beschäftigen, indem wir folgenden Satz beweisen:

Satz 19. Ist die Anzahl aller ambigen Ideale des Körpers K gleich l' und machen die sämtlichen Einheiten in k , die Relativnormen von Einheiten in K sind, l^{v^*} Einheitenverbände aus, so gilt, wenn wir die Anzahl aller ambigen Complexe, die aus ambigen Idealen entspringen, mit l^{a^*} bezeichnen, für a^* die Ungleichung:

$$a^* \leq t + v^* - m' - 1 \quad \left(m' = \frac{m(l-1)}{2} \right).$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass die Zahl μ , die den Körper K bestimmt, nicht das Produkt einer Einheit in k mit der l^{ten} Potenz einer Zahl in k ist.

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, liegt die im § 4 erwähnte Einheit $[\varepsilon]$ stets in k und jede Einheit ε in k , die Relativnorm einer Einheit in K ist, ist dann in der Form darstellbar

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \dots \eta_{m'}^{u_{m'}} \xi'$$

wo ξ eine Einheit aus k ist, $\eta_1 \dots \eta_{m'}$ die im § 4 angegebene Bedeutung haben und $u_1 \dots u_{m'}$ irgend welche Zahlen $0, 1, 2 \dots l-1$ sind.

Da nun zusammen l^{v^*} Einheitenverbände von Einheiten der bezeichneten Art existieren, so muss man unter den Einheiten $\eta_1 \dots \eta_{m'}$ v^* auswählen können, etwa $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{v^*}$, so dass jede Einheit ε in k , die Relativnorm einer Einheit in K ist, sich eindeutig in die Gestalt bringen lässt

$$\varepsilon = \eta_1^{u_1} \dots \eta_{v^*}^{u_{v^*}} \quad (u_1, u_2, \dots, u_{v^*} = 0, 1, \dots, l-1).$$

Wendet man dies auf die Einheiten η_i ($i = v^* + 1, \dots, m'$) an, so ergibt sich:

$$\eta_i = \eta_1^{u_1^{(i)}} \dots \eta_{v^*}^{u_{v^*}^{(i)}} (\xi^{(i)})^i,$$

wo $\xi^{(i)}$ eine Einheit aus k ist und die Exponenten bestimmte Werte $0, 1, \dots, l-1$ haben. Daraus folgt, dass die $m' - v^*$ Ausdrücke:

$$(1) \quad H_i = H_i H_1^{-u_1^{(i)}} \dots H_{v^*}^{-u_{v^*}^{(i)}} (\xi^{(i)})^{-i}$$

Einheiten in K mit der Relativnorm 1 sind und dass man deshalb nach Satz 90 in A. Z. S. 272

$$(2) \quad H_i = M_i^{(1-s)}$$

setzen kann, wo M_i eine ganze Zahl aus K bedeutet. Die Ideale (M_i) und $(M) = (\sqrt[l]{\mu})$ sind dann mit ihren relativ conjugierten Idealen identisch und

darum Produkte aus den ambigen Primidealen in K , die wir mit $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_t$ bezeichnen, und Idealen aus k :

$$(3) \quad \begin{aligned} (M) &= \mathfrak{D}_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{D}_t^{\alpha_t} \mathfrak{i} \\ (M_i) &= \mathfrak{D}_1^{\alpha_i^{(i)}} \cdot \dots \cdot \mathfrak{D}_t^{\alpha_t^{(i)}} \mathfrak{j}^{(i)} \\ (i &= v^* + 1, \dots, m'). \end{aligned}$$

Wir wollen nun nachweisen, dass diese Relationen von einander unabhängig sind, das heisst, dass keine Beziehung:

$$(4) \quad (M)^e (M_{v^*+1}^{e_{v^*+1}})^{e_{v^*+1}} \cdot \dots \cdot (M_{m'}^{e_{m'}})^{e_{m'}} = \mathfrak{j}^*$$

besteht, wo die Exponenten $e, e_{v^*+1} \cdot \dots \cdot e_{m'}$ irgendwelche Werte $0, 1, \dots, l-1$ haben und \mathfrak{j}^* ein Ideal aus k ist, ausser wenn $e = e_{v^*+1} = e_{m'} = 0$ und $\mathfrak{j}^* = 1$ ist. Zu diesem Zweck erheben wir (4) in die h^{te} Potenz und erhalten

$$(5) \quad M^{eh} M_{v^*+1}^{e_{v^*+1}h} \cdot \dots \cdot M_{m'}^{e_{m'}h} = i E,$$

wo i eine ganze Zahl aus k und E eine Einheit aus K ist. Indem wir (5) symbolisch mit $(1-S)$ potenzieren, erhalten wir:

$$(M^{(1-S)^{eh}} (M_{v^*+1}^{(1-S)^{eh}})^{e_{v^*+1}h} \cdot \dots \cdot (M_{m'}^{(1-S)^{eh}})^{e_{m'}h} = E^{(1-S)}$$

oder nach (2)

$$(6) \quad \xi^{-eh} (H_{v^*+1}^{e_{v^*+1}h})^{e_{v^*+1}h} \cdot \dots \cdot (H_{m'}^{e_{m'}h})^{e_{m'}h} = E^{(1-S)}.$$

Indem wir in (6) die Beziehungen (1) einführen und die Definition des Systems relativer Grundeinheiten beachten, erkennen wir, da auf der rechten Seite von (6) die symbolische $(1-S)^{\text{te}}$ Potenz einer Einheit steht, dass

$$e_{v^*+1} = \dots = e_{m'} = 0 \quad \text{sein muss.}$$

Es ist also jetzt noch zu zeigen, dass auch $e = 0$ sein muss. Aus (5) folgt

$$M^{eh} = iE, \quad \text{oder wenn man mit } l \text{ potenziert}$$

$$\mu^{eh} = i^l \cdot E^l.$$

Da nun E^l eine Einheit in k sein muss, so ergibt sich aus unserer speciellen Voraussetzung über μ , dass $e = 0$ sein muss. Es kann daher keine Relation von der Gestalt (4) bestehen. Dann folgt aber, dass man mit Hülfe der Gleichungen (3) $m' - v^* + 1$ Ideale \mathfrak{D} durch die übrigen ausdrücken kann.

Wenn nun zwischen den noch übrigen $t - m' + v^* - 1$ Idealen \mathfrak{D} keine Relation von der Art (3) mehr besteht, so wird offenbar

$$a^* = t + v^* - m' - 1.$$

In jedem Falle ist aber:

$$a^* \leq t + v^* - m' - 1.$$

In dem ausgenommenen Falle, dass μ das Produkt einer Einheit ε und der l^{ten} Potenz einer Zahl aus k ist, erhält man durch Vermittelung der Einheit $\sqrt[l]{\varepsilon}$ eine Relation von der Art (3). Es ergeben sich dann genau wie vorher $m' - v^* + 1$ unabhängige Relationen zwischen den Idealen \mathfrak{D} und für a^* demnach dieselbe Ungleichung.

Wir dehnen jetzt unser Resultat auf beliebige ambige Complexe des Körpers K aus durch Beweis des folgenden Satzes:

Satz 20. Ist die Anzahl aller ambigen Ideale des Körpers K gleich l^a und machen die Einheiten in k , welche Relativnormen von Einheiten oder gebrochenen Zahlen in K sind, zusammen l^v Einheitenverbände aus, so gilt, wenn wir die Anzahl aller ambigen Complexe in K mit l^a bezeichnen:

$$a \leq t + v - m' - 1 \quad \left(m' = \frac{m(l-1)}{2} \right).$$

Beweis: Behalten wir die Bezeichnungen des vorigen Satzes bei, so treten zu den v^* Einheiten $\eta_1, \dots, \eta_{v^*}$ noch $v - v^*$ Einheiten $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{v-v^*}$ hinzu, die Relativnormen von gebrochenen Zahlen in K sind:

$$\vartheta_1 = N_k(\Theta_1) \dots \vartheta_{v-v^*} = N_k(\Theta_{v-v^*}),$$

so dass jede Einheit ε in k , die Relativnorm einer ganzen oder gebrochenen Zahl in K ist, eindeutig in die Form

$$\varepsilon = \eta_1^{e_1} \dots \eta_{v^*}^{e_{v^*}} \cdot \vartheta_1^{f_1} \dots \vartheta_{v-v^*}^{f_{v-v^*}} \xi^l$$

gebracht werden kann, wo die Exponenten $e_1, \dots, e_{v^*}, f_1, \dots, f_{v-v^*}$ gewisse Werte $0, 1, \dots, l-1$ haben und ξ eine Einheit aus k bedeutet, wenn wir über μ zunächst dieselbe Voraussetzung wie im vorigen Satze machen. Wir setzen nun:

$$\Theta_i = \mathfrak{P}_{i_1}^{\alpha_{i_1}(S)} \cdot \mathfrak{P}_{i_2}^{\alpha_{i_2}(S)} \dots \mathfrak{P}_{i_n}^{\alpha_{i_n}(S)} \quad (i = 1, 2, \dots, v - v^*)$$

wo $\mathfrak{P}_{i_1} \dots \mathfrak{P}_{i_n}$ von einander verschiedene Primideale in K bedeuten, von denen ausserdem keine 2 zu einander relativ conjugiert sein sollen, und wo die Funktionen $G_{i_1}(S) \dots G_{i_n}(S)$ ganzzahlige Funktionen vom $(l-1^{\text{ten}})$ Grade in S sind.

Da die Relativnorm von Θ_i eine Einheit in k ist, so folgt, dass alle Funktionen $G(S)$ durch $(1-S)$ teilbar sein müssen.

Wir können dann setzen:

$$\Theta_i = \mathfrak{A}_i^{(1-S)}$$

wo \mathfrak{A}_i ein Ideal ist, dessen Wert leicht anzugeben ist. Dies Ideal bestimmt offenbar eine ambige Classe und somit auch einen ambigen Complex A_i . Wir wollen nun zeigen,

dass sich alle ambigen Complexe in K als Produkte der aus den Idealen $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_{v-v^*}, \mathfrak{D}_{m'-v^*+2}, \dots, \mathfrak{D}_t$, entspringenden ambigen Complexe darstellen lassen. Es sei zu diesem Zweck \mathfrak{A} ein beliebiges Ideal des ambigen Complexes A , dann folgt aus der Thatsache, dass ein ambiger Complex in K bei unserer Voraussetzung über den Körper k nur ambige Classen enthält (vergl. Hilbert, Rel. quadr. Z. Satz 21 S. 31), dass eine Gleichung

$$\mathfrak{A}^{(1-s)} = \Theta$$

besteht, wo Θ eine Zahl aus K ist. Da die Relativnorm von Θ dann eine Einheit ϑ wird, so können wir setzen

$$N_k(\Theta) = \vartheta = \eta_1^{e_1} \dots \eta_{v^*}^{e_{v^*}} \vartheta_1^{f_1} \dots \vartheta_{v-v^*}^{f_{v-v^*}} \xi^l,$$

wo die Exponenten gewisse Werte $0, 1, \dots, l-1$ haben und ξ eine Einheit aus k bedeutet. Bilden wir dann die Zahl:

$$(7) \quad \Theta' = \Theta H_1^{-e_1} \dots H_{v^*}^{-e_{v^*}} \Theta_1^{-f_1} \dots \Theta_{v-v^*}^{-f_{v-v^*}} \xi^{-1}$$

so können wir, da ihre Relativnorm 1 ist,

$$\Theta' = A^{(1-s)}$$

setzen, wo A eine ganze Zahl aus K bedeutet. Wenn wir nun in der Gleichung (7) für Θ' seinen Wert $A^{(1-s)}$ setzen und zu den Idealen zurück gehen, so wird:

$$(A)^{1-s} = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}_1^{-f_1} \dots \mathfrak{A}_{v-v^*}^{-f_{v-v^*}})^{1-s}.$$

Wenn wir daher

$$\mathfrak{A}^{t-1} \mathfrak{A}_1^{f_1} \dots \mathfrak{A}_{v-v^*}^{f_{v-v^*}} \cdot A = \mathfrak{D} \text{ setzen, so ist, da } \mathfrak{D} = S\mathfrak{D},$$

\mathfrak{D} ein Produkt eines ambigen Ideals in K in ein Ideal aus k und daher ein Produkt aus Potenzen der Ideale $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_t$ in ein Ideal aus k . Wenn wir daher beachten, dass sich die Ideale $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_{m'-v^*+1}$ durch $\mathfrak{D}_{m'-v^*+2}, \dots, \mathfrak{D}_t$ ausdrücken lassen, so folgt, dass jeder ambige Complex in K sich als ein Produkt aus den Complexen, die aus $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_{v-v^*}, \mathfrak{D}_{m'-v^*+2}, \dots, \mathfrak{D}_t$ entspringen, darstellen lässt. Sind nun die letzteren alle von einander unabhängig, so ist die Anzahl aller ambigen Complexe in K l^a , wo

$$a = t + v - m' - 1.$$

In jedem Falle ist aber:

$$a \leq t + v - m' - 1.$$

In dem ausgeschlossenen Falle, dass μ das Produkt einer Einheit in die l^{te} Potenz einer ganzen Zahl aus k ist, gilt dieselbe Ungleichung.

Das Charakterensystem eines Ideals enthält daher sicher immer einen Charakter.

Um eine obere Grenze für die Anzahl der Geschlechter in K zu finden, ziehen wir die ambigen Complexe heran und beweisen folgenden Satz:

Satz 22. Die Anzahl g der verschiedenen Geschlechter in K ist kleiner oder höchstens gleich der Anzahl A der ambigen Complexe.

Bezeichnet man mit f die Anzahl der Complexe des Hauptgeschlechts, so ist die Gesamtzahl der Komplexe in K , welche wir M nennen,

$$M = g \cdot f.$$

Für die Zahl M können wir noch einen zweiten Ausdruck finden, den wir auf folgende Weise ableiten.

Jede $(1-S)^{te}$ symbolische Potenz eines Complexes gehört dem Hauptgeschlecht an. Es seien nun

$$P_1, \dots, P_{f'}, \quad f' \leq f$$

diejenigen Complexe des Hauptgeschlechts, die symbolische $(1-S)^{te}$ Potenzen von Complexen sind. Wir setzen:

$$P_1 = G_1^{(1-S)} \dots P_{f'} = G_{f'}^{(1-S)}.$$

Ist dann P ein beliebiger Complex, so muss $P^{(1-S)}$ mit einem der hingeschriebenen f' Complexe identisch sein; es sei etwa

$$P^{(1-S)} = G_v^{(1-S)}, \quad \text{also} \quad (P G_v^{-1})^{(1-S)} = 1.$$

Der Complex $P G_v^{-1}$ hat daher die Eigenschaft, dass seine symbolische $(1-S)^{te}$ Potenz den Hauptcomplex ergibt und hieraus folgt, da h zu l relativ prim ist, dass $P G_v^{-1}$ ein ambiger Complex A ist (A. Z. S. 468). Es ist also

$$P = A \cdot G_v.$$

Der Ausdruck $A G_v$ stellt deshalb, wenn A alle ambigen Complexe und G_v alle Complexe $G_1, \dots, G_{f'}$ durchläuft, alle Complexe in K dar und jeden auch nur einmal. Wäre nämlich

$$A G_v = A' G_{v'}, \quad \text{und} \quad v \neq v', \quad \text{so wäre}$$

$$G_v = A A'^{-1} G_{v'}, \quad \text{folglich} \quad P_v = P_{v'}, \quad \text{was nicht möglich,}$$

wenn

$$v \neq v'.$$

Es besteht daher die Gleichung:

$$M = A \cdot f.$$

Da nun $f' \leq f$, muss $A \geq g$ sein.

Satz 23. Wenn die Anzahl der Charaktere, die ein Geschlecht in K bestimmen, gleich r ist, so ist die Anzahl aller Geschlechter g kleiner oder höchstens gleich l^{r-1} .

Beweis:

$$g \leq A \quad (\text{Satz 22})$$

$$\frac{A}{g} \leq \frac{l^{t+v-m'-1}}{l^{t+v-m'-1}} \quad (\text{Satz 20})$$

$$t + v - m' \leq r \quad (\text{Satz 21})$$

$$g \leq l^{r-1}.$$

III.

Die primären Ideale im Grundkörper k .

§ 7.

Definition des primären Ideals \mathfrak{a} und des Symbols $\left(\frac{j}{\mathfrak{a}}\right)$.

Definition 5. Ist das zu l prime Ideal \mathfrak{a} in k so beschaffen, dass für jede Einheit ε in k das Symbol $\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{a}}\right)$ den Wert 1 hat, so heisst \mathfrak{a} ein primäres Ideal. Alle Ideale, die diese Eigenschaft nicht haben, heissen nichtprimäre Ideale.

Definition 6. Ist \mathfrak{a} ein primäres und j ein beliebiges zu \mathfrak{a} primes Ideal in k , so bestimmen wir den Wert des Symbols $\left(\frac{j}{\mathfrak{a}}\right)$ in folgender Weise. Man bestimme eine Zahl h' so, dass $hh' \equiv 1 \pmod{l}$ wird und bilde $j^{hh'} = (i)$. Dann setze man

$$\left(\frac{j}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{i}{\mathfrak{a}}\right).$$

Auf diese Weise ist das Symbol eindeutig bestimmt und es gilt ausserdem: Sind j_1 und j_2 zwei beliebige zu \mathfrak{a} prime Ideale, so ist

$$\left(\frac{j_1 j_2}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{j_1}{\mathfrak{a}}\right) \cdot \left(\frac{j_2}{\mathfrak{a}}\right).$$

Ist \mathfrak{h} ein zu \mathfrak{a} primes Hauptideal in k und $\mathfrak{h} = (\eta)$, so ist

$$\left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\eta}{\mathfrak{a}}\right).$$

Die letzte Gleichung ergibt sich leicht mit Hilfe der Congruenz $hh' \equiv 1 \pmod{l}$.

§ 8.

Ein System von $\frac{m(l-1)}{2}$ nichtprimären Primidealen in k .

Es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m'-1}$ ein volles System von Grundeinheiten für den Körper k , wobei $m' = \frac{m(l-1)}{2}$. Ferner sei ε_m eine in k liegende Einheitswurzel, deren l^{te} Wurzel nicht in k liegt. Das System der Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ hat dann die Eigenschaft, dass sich jede Einheit ε in k eindeutig in der Form

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{e_1} \cdot \dots \cdot \varepsilon_m^{e_m} \xi^l$$

darstellen lässt, wo die Exponenten e_1, \dots, e_m bestimmte Werte $0, 1, \dots, l-1$ haben und ξ eine Einheit aus k bedeutet.

Die aus den Einheiten $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ hervorgehenden Verbände sind von einander unabhängig, so dass im ganzen $l^{m'}$ verschiedene Einheitenverbände in k existieren.

Wir wollen nun zwei Sätze beweisen, deren Gültigkeit wesentlich durch die Annahme bedingt ist, dass die Classenzahl h des Körpers k nicht durch l teilbar ist.

Satz 24. Die Relativediscriminante des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ ist von 1 verschieden.

Aus Satz 19 folgt, dass

$$t + v^* - m' \geq 1 \quad \text{ist.}$$

Da nun $v^* \leq m'$ ist, muss $t \geq 1$, d. h. es giebt mindestens ein in der Relativediscriminante von K aufgehendes Primideal.

Satz 25. Ist die Einheit ε in k der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach l' congruent, so ist ε die l^{te} Potenz einer Einheit in k .

Zum Beweise wende man auf den Körper $K(\sqrt[l]{\varepsilon}, k)$ den vorigen Satz an.

Um die Eigenschaften der primären Ideale zu erkennen, ist es wichtig, ein gewisses System von m' nichtprimären Primidealen mit vorgeschriebenen Potenzcharakteren zu betrachten, dessen Existenz aus dem folgenden Satze folgt:

Satz 26. (Hilfssatz). Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ irgend s ganze Zahlen des Körpers k , welche die Bedingung erfüllen, dass das Produkt

$$\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \alpha_s^{m_s},$$

wenn man jeden der Exponenten m_1, \dots, m_s die Werte $0, 1, \dots, l-1$ durch-

laufen lässt, jedoch das Wertsystem $m_1 = m_2 = \dots m_s = 0$ ausschliesst, niemals die l^{te} Potenz einer Zahl in k wird; es seien ferner $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_s$ nach Belieben vorgeschriebene l^{te} Einheitswurzeln: dann giebt es im Körper k stets unendlich viele Primideale \mathfrak{p} , für die jedesmal bei einem gewissen zu l primen Exponenten m :

$$\left(\frac{\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right)^m = \gamma_1 \quad \left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right)^m = \gamma_2 \cdot \dots \cdot \left(\frac{\alpha_s}{\mathfrak{p}}\right)^m = \gamma_s$$

wird.

Bezüglich des Beweises dieses Satzes verweise ich auf Hilbert, A. Z. Satz 152 S. 426, wo der analoge Satz für den Kreiskörper $k(\zeta)$ bewiesen ist. Da der Beweis indessen gar keine speciellen Eigenschaften des Körpers $k(\zeta)$ benutzt und die zwischen einem Kummer'schen Körper und dem Körper $k(\zeta)$ geltenden Beziehungen im ersten Teil dieser Entwicklungen für einen beliebigen Oberkörper k des Kreiskörpers $k(\zeta)$ und einen relativ-cyclischen Oberkörper des Körpers k vom Primzahlrelativgrade l als gültig nachgewiesen sind, so gilt der Beweis ohne weiteres auch in unserem Falle.

Mit Benutzung des vorstehenden Satzes können wir jetzt das erwähnte System von m' nichtprimären Primidealen definieren und folgenden Satz von ihm beweisen:

Satz 27. Ist $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_{m'}$ das definierte System von Einheiten in k und sind $\mathfrak{q}_1, \dots \mathfrak{q}_{m'}$ zu l prime Primideale in k , welche die Bedingungen befriedigen:

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right)^m = \xi \quad \left(\frac{\varepsilon_k}{\mathfrak{q}_i}\right) = 1 \quad (i \neq k);$$

$$(i, k = 1, 2 \dots m')$$

setzt man ferner:

$$\mathfrak{q}_i^{hh'} = (\varkappa_1), \dots \mathfrak{q}_{m'}^{hh'} = (\varkappa_{m'}),$$

wo $\varkappa_1, \dots \varkappa_{m'}$ ganze Zahlen in k bedeuten, so gilt für jede zu l prime Zahl ω in k eine Congruenz:

$$\omega \equiv \varepsilon_1^{u_1} \dots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \varkappa_1^{v_1} \dots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \alpha^l (l),$$

worin die Exponenten $u_1, \dots u_{m'}, v_1, \dots v_{m'}$ gewisse Werte $0, 1 \dots l-1$ haben und α eine geeignete ganze Zahl aus k ist.

Beweis. Wir weisen zunächst nach, dass eine Zahl

$$\mu = \varepsilon_1^{u_1} \dots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \varkappa_1^{v_1} \dots \varkappa_{m'}^{v_{m'}}$$

nie der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl aus k nach l^l congruent sein kann. Wäre dies nämlich der Fall, so würde der Körper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ eine zu l relativ prime

Relativdiscriminante besitzen, die nur durch diejenigen unter den Primidealen $q_1 \dots q_m$ teilbar wäre, für die der zugehörige Exponent v ungleich Null ist.

Es seien dies die Primideale q_1, q_2, \dots, q_t . Für jede Einheit ε in k , die Relativnorm einer Einheit in K ist, gilt nun

$$\left(\frac{\varepsilon, \mu}{q_i}\right) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, t).$$

Stellen wir dann ε in der Form dar:

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{e_1} \dots \varepsilon_m^{e_m} \cdot \xi^l,$$

so folgt aus den über die Primideale q gemachten Voraussetzungen:

$$\left(\frac{\varepsilon, \mu}{q_i}\right) = \left(\frac{\varepsilon_i}{q_i}\right)^{e_i v_i} \quad (i = 1, 2, \dots, t).$$

Hieraus folgt

$$e_1 = e_2 = \dots = e_t = 0, \quad \text{das heisst,}$$

ε muss das Produkt aus Potenzen von $m' - t$ Einheiten in die l^{te} Potenz einer Einheit in k sein. Sämtliche Einheiten in k , die Relativnormen von Einheiten in K sind, würden demnach höchstens $l^{m'-t}$ Einheitenverbände ausmachen. Es müsste demnach, wenn wir die früher angewandten Bezeichnungen beibehalten, $v^* \leq m' - t$ oder $t + v^* - m' \leq 0$ sein, was als unmöglich nachgewiesen ist. Deshalb kann die Zahl μ nicht der l^{ten} Potenz einer Zahl in k congruent sein.

Es sei nun $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f$ ein volles System von $\varphi(l)$ nach l incongruenten zu l primen Zahlen in k . Der Ausdruck:

$$(1) \quad \varepsilon_1^{u_1} \dots \varepsilon_m^{u_m} \kappa_1^{v_1} \dots \kappa_m^{v_m} \alpha_i^l$$

stellt dann, wenn die Zahlen $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$ alle Werte $0, 1 \dots l-1$ und i die Werte $1, 2, \dots, f$ durchläuft $l^{2m'}$ $\varphi(l)$ Zahlen dar, welche, wie wir zeigen wollen, nach l incongruent sind.

Wären zwei von ihnen einander congruent, etwa

$$\varepsilon_1^{u_1} \dots \varepsilon_m^{u_m} \kappa_1^{v_1} \dots \kappa_m^{v_m} \alpha_i^l \equiv \varepsilon_1^{u'_1} \dots \varepsilon_m^{u'_m} \kappa_1^{v'_1} \dots \kappa_m^{v'_m} \alpha_k^l \quad (l'),$$

so würde zunächst aus den zu Anfang dieses Beweises gemachten Ausführungen folgen, dass

$$u_1 = u'_1, \dots, u_m = u'_m, \quad v_1 = v'_1, \dots, v_m = v'_m$$

sein müsste, also auch

$$\alpha_i^l \equiv \alpha_k^l \quad (l').$$

Ist nun I_1 ein in l zur l_1^{ten} Potenz aufgehendes Primideal, so würde aus der letzten Congruenz folgen:

$$\prod_{(a)} (\alpha_i - \xi^a \alpha_k) \equiv 0 \pmod{l_1^l} \quad (a = 0, 1, 2, \dots, l-1).$$

Es muss dann sicher auch die Congruenz bestehen:

$$\begin{aligned} \alpha_i - \xi^a \alpha_k &\equiv 0 \pmod{l_1^1}. \quad \text{Da nun} \\ \alpha_i - \xi^a \alpha_k &\equiv \alpha_i - \alpha_k \pmod{l_1^1}, \quad \text{würde folgen} \\ \alpha_i &\equiv \alpha_k \pmod{l_1^1}. \end{aligned}$$

Da man diesen Schluss für jeden Primfaktor von l ausführen könnte, so müsste schliesslich:

$$\alpha_i \equiv \alpha_k \pmod{l}$$

sein, dies widerspricht aber unserer Annahme. Alle $l^{2m'}$ $\varphi(l)$ Zahlen des Systems (1) sind also nach l' einander incongruent. Weil nun

$$\varphi(l') = l^{2m'} \varphi(l) \text{ ist,}$$

so bildet das System (1) ein volles System nach l' incongruenter, zu l primer Zahlen in k , was mit unserer Behauptung identisch ist.

§ 9.

Die unendliche Reihe $\sum_{(w)} \sum_{(m)} \left(\frac{w}{a}\right)^m \cdot \frac{1}{n(w)^s}$.

Satz 28. Ist a ein bestimmtes primäres Ideal in k , so stellt die über sämtliche zu a primen Primideale w des Körpers k und über $m = 1, 2, \dots, l-1$ zu erstreckende unendliche Summe:

$$\sum_{(w)} \sum_{(m)} \left(\frac{w}{a}\right)^m \frac{1}{n(w)^s}$$

eine solche Funktion der reellen Veränderlichen s dar, die stets unterhalb einer positiven endlichen Grenze bleibt, wenn die reelle Veränderliche s sich der Grenze 1 nähert.

Beweis: Zu einem vollen System nach a incongruenter zu a primer Zahlen in k gehören $\varphi(a)$ Zahlen und unter diesen giebt es genau $\frac{\varphi(a)}{l}$ Zahlen β , für die das Symbol $\left(\frac{\beta}{a}\right)$ den gleichen Wert hat, wie man leicht erkennt, wenn man sich a in Primfaktoren zerlegt denkt. Es sei nun C eine beliebige Idealklasse in k und \mathfrak{b} ein zu a primes Ideal der Classe C^{-1} ; ferner sei $\varrho, \varrho', \varrho'' \dots$ ein System von $\frac{\varphi(a)}{l}$ nach a incongruenter Zahlen, die sämtlich durch \mathfrak{b} teilbar und zu a prim

sind und für die $\left(\frac{\mathfrak{a}^{(i)}}{\mathfrak{a}}\right)$ einen bestimmten Wert ξ^a hat. Wenn dann $x^{(1)}, \dots, x^{(r)}$ ein System von Basiszahlen für das Ideal \mathfrak{a} bilden und wenn u_1, \dots, u_r ganze rationale Zahlen bedeuten, so lässt sich offenbar jede durch \mathfrak{b} teilbare zu \mathfrak{a} prime ganze Zahl γ in k , für welche $\left(\frac{\gamma}{\mathfrak{a}}\right) = \xi^a$ ist, in einer der $\frac{\varphi(\mathfrak{a})}{l}$ Formen:

$$\begin{aligned} u_1 x^{(1)} + \dots + u_r x^{(r)} + \mathfrak{q} \\ u_1 x^{(1)} + \dots + u_r x^{(r)} + \mathfrak{q}' \\ u_1 x^{(1)} + \dots + u_r x^{(r)} + \mathfrak{q}'' \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad r = m(l-1)$$

darstellen.

Wenn man diese Thatsache benutzt und ausserdem bedenkt, dass \mathfrak{a} ein primäres Ideal sein soll, so lässt sich unter Benutzung des von Hilbert in Rel. quadr. Z. S. 53 angegebenen Satzes und auf demselben Wege, den Hilbert bei dem Beweise des analogen Satzes 31 in Rel. quadr. Z. S. 54 ff. eingeschlagen hat, nachweisen, dass für die Anzahl $F_a(t)$ aller durch \mathfrak{b} teilbaren zu \mathfrak{a} primen Hauptideale \mathfrak{h} in k , für welche

$$\left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{a}}\right) = \xi^a$$

und deren Normen die reelle positive Zahl t nicht überschreiten, die Gleichung gilt

$$(1) \quad F_a(t) = \frac{\varphi(\mathfrak{a})}{l} \cdot K \cdot t + M_a \cdot t^{1-\frac{1}{r}}, \quad (a = 0, 1, 2, \dots, l-1)$$

wo K eine gewisse von t unabhängige Constante bedeutet, während M_a eine von t abhängige Grösse bedeutet, die für unendlich wachsendes t stets zwischen endlichen Grenzen bleibt.

Bezeichnet man nun alle Hauptideale \mathfrak{h} , für die $\left(\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{a}}\right) = \xi^a$ ist, mit \mathfrak{h}_a und setzt $M_a t^{1-\frac{1}{r}} = \Phi_a(t)$, so folgt aus (1)

$$\sum_{(\mathfrak{h}_a)} \left(\frac{\mathfrak{h}_a}{\mathfrak{a}}\right) \cdot \frac{1}{n(\mathfrak{h}_a)^s} = \xi^a \sum_{(t)} \frac{\varphi(\mathfrak{a}) \cdot K}{l t^s} + \xi^a \sum_{(t)} \frac{\Phi_a(t) - \Phi_a(t-1)}{t^s} \quad (s > 1)$$

wo die Summen rechts über $t = 1, 2, 3 \dots \infty$ zu erstrecken sind.

Durch Umformung des zweiten Gliedes auf der rechten Seite folgt:

$$\sum_{(\mathfrak{h}_a)} \left(\frac{\mathfrak{h}_a}{\mathfrak{a}}\right) \cdot \frac{1}{n(\mathfrak{h}_a)^s} = \xi^a \sum_{(t)} \frac{\varphi(\mathfrak{a}) \cdot K}{l t^s} + \xi^a \sum_{(t)} M_a \frac{s \vartheta_a}{t^{s+\frac{1}{r}}}, \quad 0 < \vartheta_a < 1 \quad (s > 1).$$

Man erkennt hieraus, dass das zweite Glied der rechten Seite eine Funktion von s darstellt, die für $s = 1$ gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert. Bildet man nun die letzte Gleichung für $a = 0, 1, 2, \dots, l-1$ und addiert die entstehenden l Gleichungen, so geben die ersten Glieder rechter Hand die Summe 0, da $\sum_{(\alpha)} \zeta^{\alpha} = 0$ und es folgt daraus, dass

$$\sum_{(\mathfrak{h})} \left(\frac{\mathfrak{h}}{a}\right) \cdot \frac{1}{n(\mathfrak{h})^s} \quad \text{eine Funktion von } s \text{ ist, die}$$

für $s = 1$ gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert.

Setzen wir jetzt $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}j$, so ist j ein zu a primes Ideal der Classe C und es ergibt sich aus der Gleichung:

$$\left(\frac{\mathfrak{h}j}{a}\right) = \left(\frac{\mathfrak{h}}{a}\right) \cdot \left(\frac{j}{a}\right),$$

dass die über alle zu a primen Ideale j der Classe C erstreckte Summe

$$\sum_{(j)} \left(\frac{j}{a}\right) \cdot \frac{1}{n(j)^s} \quad (s > 1)$$

eine Funktion von s ist, die für $s = 1$ gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert. Dasselbe gilt dann auch, wie sofort ersichtlich, von der Summe:

$$\sum_{(j)} \sum_{(m)} \left(\frac{j}{a}\right)^m \cdot \frac{1}{n(j)^s} \quad (m = 1, 2, \dots, l-1) \quad (s > 1).$$

Bildet man die letzte Summe für alle h Idealclassen in k und addiert die h entstehenden Summen, so folgt, dass die über alle zu a primen Ideale j des Körpers k zu erstreckende Summe:

$$\sum_{(j)} \sum_{(m)} \left(\frac{j}{a}\right)^m \cdot \frac{1}{n(j)^s} \quad (s > 1) \quad (m = 1, 2, \dots, l-1)$$

für $s = 1$ gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert.

Da anderseits die Gleichung besteht:

$$\log \sum_{(j)} \sum_{(m)} \left(\frac{j}{a}\right)^m \cdot \frac{1}{n(j)^s} = \sum_{(\mathfrak{w})} \sum_{(m)} \left(\frac{\mathfrak{w}}{a}\right)^m \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s} + f(s), \quad (s > 1)$$

wo die Summe $\sum_{(\mathfrak{w})}$ über alle zu a primen Primideale in k zu erstrecken ist und $f(s)$ eine Funktion darstellt, die für $s = 1$ gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert, so muss

$$\sum_{(\mathfrak{w})} \sum_{(m)} \left(\frac{\mathfrak{w}}{a}\right)^m \cdot \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s} \quad (s > 1)$$

für $s = 1$ entweder gegen einen endlichen Grenzwert convergieren oder negativ über alle Grenzen wachsen.

§ 10.

Eine Eigenschaft der primären Primideale.

Mit Hilfe der Entwicklungen des letzten Paragraphen gelangen wir zu folgenden Sätzen:

Satz 29. Ist \mathfrak{p} ein primäres Primideal in k , so kann man stets in k eine ganze Zahl π finden, so dass $(\pi) = \mathfrak{p}^{hh'}$, und eine Congruenz von der Gestalt:

$$\pi \equiv \beta^l \quad (l')$$

besteht, wo β eine geeignete ganze Zahl in k bedeutet.

Beweis: Es sei q_1, q_2, \dots, q_m das in § 8 definierte System von nicht-primären Primidealen. Setzen wir dann:

$$\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi^*) \quad q_1^{hh'} = (\mathfrak{x}_1) \cdot \dots \cdot q_m^{hh'} = (\mathfrak{x}_m),$$

wo $\pi^*, \mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_m$ ganze Zahlen aus k bedeuten, so können wir aus Satz 27 die Gültigkeit einer Congruenz:

$$\pi^* \equiv \varepsilon \mathfrak{x}_1^{v_1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{x}_m^{v_m} \gamma^l \quad (l')$$

folgern, wo ε eine Einheit und γ eine ganze Zahl aus k bedeutet. Wären hier die Exponenten $v_1 \dots v_m$ sämtlich Null, so wäre bereits $\pi^* \varepsilon^{l-1}$ eine Zahl mit der verlangten Eigenschaft. Wir nehmen deshalb an, es seien eine Anzahl der Exponenten v , etwa e , von Null verschieden. Wir bilden jetzt die Zahl:

$$\mu = \pi^* (\varepsilon \mathfrak{x}_1^{v_1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{x}_m^{v_m})^{l-1}$$

und betrachten den Körper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$. Für diesen ist offenbar

$$t = e + 1, \quad r^* = e, \quad r = 1.$$

Es existiert also in K nur ein Geschlecht, das Hauptgeschlecht.

Bestimmen wir jetzt ein Primideal \mathfrak{r} in k so, dass $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}}\right) = 1$, so wird \mathfrak{r} in K zerlegbar und jeder Primfaktor von \mathfrak{r} muss zum Hauptgeschlecht gehören. Wenn wir deshalb $\mathfrak{r}^{hh'} = (\mathfrak{q})$ setzen und mit ξ eine geeignete Einheit aus k bezeichnen, so muss

$$\left(\frac{\xi \mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \quad \text{folglich} \quad \left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \text{ sein.}$$

Wir wählen jetzt ein zweites System von m' nichtprimären Primidealen $q'_1, q'_2, \dots, q'_{m'}$, das vom ersten verschieden ist und die Eigenschaft hat, dass

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{q'_i}\right) \neq 1 \quad \left(\frac{\varepsilon_i}{q'_i}\right) = 1 \quad (k \neq i).$$

Für dieses führen wir dieselben Entwicklungen durch wie im ersten Falle und gelangen so zu einer Congruenz für π^* , in der entweder sämtliche Exponenten verschwinden — in diesem Falle ist unser Satz bewiesen — oder eine Anzahl von Null verschieden ist. Wenn wir das letzte annehmen, so kommen wir dadurch zu einer Zahl

$$\mu' = \pi^* (\varepsilon'_1 x'_1 v'_1 \varepsilon'_2 x'_2 v'_2 \dots \varepsilon'_{m'} x'_{m'} v'_{m'})^{l-1}.$$

Betrachten wir dann den Körper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$, so schliessen wir wieder, dass, wenn für ein Primideal r in k das Symbol $\left(\frac{\mu'}{r}\right) = 1$ ist, auch $\left(\frac{r}{p}\right) = 1$ sein muss.

Bezeichnen wir jetzt alle Primideale, für die

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\mu}{r_\mu}\right) &= 1, \text{ mit } r_\mu \\ \left(\frac{\mu}{r_{\mu\mu'}}\right) \neq 1 \quad \left(\frac{\mu'}{r_{\mu\mu'}}\right) &= 1, \text{ mit } r_{\mu\mu'} \\ \left(\frac{r^{(+)}}{p}\right) &= 1, \text{ mit } r^{(+)} \\ \left(\frac{r^{(-)}}{p}\right) \neq 1, \text{ mit } r^{(-)}, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Die Existenz der Primideale } r_{\mu\mu'} \text{ ergibt sich aus Satz 26, wenn man bedenkt, dass } \mu^a \mu'^b \text{ nur dann } l^{\text{te}} \text{ Potenz einer ganzen Zahl aus } k \text{ wird, wenn } a \text{ und } b \text{ durch } l \text{ teilbar sind.} \end{array}$$

so ergibt sich aus der bei Hilbert A. Z. in Satz 152 abgeleiteten Gleichung (104) S. 428, dass

$$\sum_{(r_\mu)} \frac{1}{n(r_\mu)^s} = \frac{1}{l} \log \frac{1}{s-1} + f_\mu(s) \quad (s > 1)$$

$$\sum_{(r_{\mu\mu'})} \frac{1}{n(r_{\mu\mu'})^s} = \frac{l-1}{l^2} \log \frac{1}{s-1} + f_{\mu\mu'}(s) \quad (s > 1),$$

wo $f_\mu(s), f_{\mu\mu'}(s)$ Funktionen von s bedeuten, die stets zwischen endlichen Grenzen bleiben, wenn die reelle Veränderliche s sich der Grenze 1 nähert.

Hieraus folgt, da die Primideale r_μ sämtlich von den Primidealen $r_{\mu\mu'}$ verschieden sind und beide Arten zu den Primidealen $r^{(+)}$ gehören:

$$\sum_{(r^{(+)})} \frac{1}{n(r^{(+)})^s} \geq \sum_{(r_\mu)} \frac{1}{n(r_\mu)^s} + \sum_{(r_{\mu\mu'})} \frac{1}{n(r_{\mu\mu'})^s} \quad (s > 1)$$

$$\sum_{(\mathfrak{r}^+)} \frac{1}{n(\mathfrak{r}^+)^s} \geq \frac{2l-1}{l^2} \log \frac{1}{s-1} + f_\mu(s) + f_{\mu'}(s) \quad (s > 1).$$

Es gilt ferner die bekannte Gleichung:

$$\sum_{(\mathfrak{r}^+)} \frac{1}{n(\mathfrak{r}^+)^s} + \sum_{(\mathfrak{r}^-)} \frac{1}{n(\mathfrak{r}^-)^s} = \log \frac{1}{s-1} + f(s), \quad (s > 1)$$

wo $f(s)$ wieder eine Funktion bezeichnet, die zwischen endlichen Grenzen bleibt, wenn s sich der Grenze 1 nähert.

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$(l-1) \cdot \sum_{(\mathfrak{r}^+)} \frac{1}{n(\mathfrak{r}^+)^s} - \sum_{(\mathfrak{r}^-)} \frac{1}{n(\mathfrak{r}^-)^s} \geq \frac{l-1}{l} \log \frac{1}{s-1} + lf_\mu(s) + lf_{\mu'}(s) - f(s) \quad (s > 1).$$

Da nun die linke Seite dieser Ungleichung den Wert

$$\sum_{(\mathfrak{r})} \sum_{(m)} \left(\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}}\right)^m \cdot \frac{1}{n(\mathfrak{r})^s} \quad \text{hat, so steht dieselbe}$$

offenbar mit Satz 28 in Widerspruch. Unsere Annahmen über die Exponenten v und v' sind deshalb zu verwerfen und wir haben in der Zahl $\pi^* \varepsilon^{-1}$ eine Zahl der gewünschten Art.

Satz 30. Ist \mathfrak{p} ein Primideal aus k und kann man $\mathfrak{p}^{m'} = (\pi)$ setzen, sodass π der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl aus k nach l' congruent ist, so ist \mathfrak{p} ein primäres Ideal.

Beweis: Der Beweis ergibt sich durch Betrachtung des Körpers $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$. Für diesen ist $t = 1$, also $a^* \leq v^* - m'$.

Da a^* mindestens Null und v^* höchstens gleich m' ist, muss $a^* = 0$, $v^* = m'$ sein, womit unser Satz bewiesen ist.

§ 11.

Zwei specielle Fälle des Reciprocitätsgesetzes.

Definition 7. Ist μ eine ganze Zahl aus k , die der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl nach l' congruent ist, so soll μ eine primäre Zahl heissen. Ist \mathfrak{p} ein primäres Primideal aus k und π eine primäre Zahl, so dass $(\pi) = \mathfrak{p}^{m'}$, so soll π eine Primärzahl des Primideals \mathfrak{p} heissen. π ist bis auf die l^{te} Potenz einer Einheit bestimmt.

Satz 31. Sind \mathfrak{p} und \mathfrak{p}_1 zwei primäre Primideale mit den Primärzahlen π und π_1 , so folgt aus $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right) = 1$ immer $\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ und umgekehrt.

Beweis: Ist $\left(\frac{\pi}{p_1}\right) = 1$, so wird das Primideal p_1 im Körper $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$, der nur ein Geschlecht besitzt, zerlegbar. Ein Primfaktor desselben \mathfrak{P}_1 hat dann den Charakter

$$\left(\frac{\pi_1, \pi}{p}\right) = \left(\frac{\pi_1}{p}\right) = 1.$$

Entsprechendes gilt umgekehrt.

Satz 32. Ist p ein primäres Primideal in k mit der Primärzahl π und r ein beliebiges Primideal und $(\varrho) = r^{hh'}$, so ist

$$1) \text{ wenn } \left(\frac{\pi}{r}\right) = 1, \text{ auch } \left(\frac{\varrho}{p}\right) = 1$$

$$2) \text{ wenn } \left(\frac{\pi}{r}\right) \neq 1, \text{ auch } \left(\frac{\varrho}{p}\right) \neq 1.$$

Beweis: Der Beweis der ersten Behauptung ergibt sich in entsprechender Weise wie bei dem vorhergehenden Satz. Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, bestimme man ein primäres Primideal p_1 mit der Primärzahl π_1 derart, dass $\left(\frac{\varrho}{p_1}\right) \neq 1$ und $\left(\frac{\pi}{p_1}\right) \neq 1$. Dann folgt aus dem ersten Teil dieses Satzes, dass auch $\left(\frac{\pi_1}{r}\right) \neq 1$ und dass man infolgedessen einen Exponenten e bestimmen kann, so dass

$$\left(\frac{\pi \pi_1^e}{r}\right) = 1.$$

Wir betrachten den Körper $K(\sqrt[l]{\pi \pi_1^e}, k)$, für den $r = 2$. Es existieren also höchstens l Geschlechter und auch sicher l Geschlechter in K .

Denn p wird in K zerlegbar und ein Primfaktor \mathfrak{P} von p hat die Charaktere

$$\left(\frac{\pi, \pi \pi_1^e}{p}\right) = \left(\frac{\pi_1}{p}\right)^{-e} \quad \left(\frac{\pi, \pi \pi_1^e}{p_1}\right) = \left(\frac{\pi}{p_1}\right)^e,$$

die offenbar beide von 1 verschieden sind. \mathfrak{P} gehört deshalb nicht zum Hauptgeschlecht und die Ideale

$$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}^3, \dots, \mathfrak{P}^e$$

definieren deshalb l verschiedene Geschlechter in K . Bezeichnet nun n eine solche zu l prime Zahl, dass

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right)^{-1} \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right)^n = 1,$$

so gilt offenbar für jedes Geschlecht in K , wenn man die Charaktere in bezug auf \mathfrak{p} und \mathfrak{p}_1 mit c_1 und c_2 bezeichnet:

$$c_1 c_2^n = 1.$$

r wird ebenfalls in K zerlegbar und ein Primfaktor von r erhält die Charaktere:

$$\left(\frac{\varrho, \pi \pi_1^e}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) \quad \left(\frac{\varrho, \pi \pi_1^e}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right)^e.$$

Es gilt also:

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right)^{en} = 1.$$

Da nun $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right) \neq 1$ ist und der Exponent en zu l prim ist, so muss auch $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$ sein.

Wir können die in den beiden vorigen Sätzen bewiesenen Thatsachen in dem folgenden Satze zusammenfassen.

Satz 33. Ist \mathfrak{p} ein primäres Primideal in k mit der Primärzahl π und r ein beliebiges Primideal und ϱ eine solche ganze Zahl aus k , dass $(\varrho) = r^{h'}$, so gilt

$$\left(\frac{\pi}{r}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)^n,$$

wo n einen gewissen zu l primen Exponenten bedeutet.

Anmerkung. Es ist mir nicht gelungen, lediglich auf Grund der bisher entwickelten Hilfsmittel ohne Hinzuziehung der für den Körper $k(\xi)$ bewiesenen Reciprocitätsgesetze, also im Grunde genommen ohne Hinzuziehung des Eisenstein'schen Reciprocitätsgesetzes, nachzuweisen, dass in dem eben angeführten Satze n gleich 1 sein muss. Das genannte Gesetz ist vielmehr ein wesentliches, durch meine bisherigen und auch folgenden Entwicklungen noch nicht entbehrlich gemachtes Mittel, die verschiedenen Restsymbole, welche einen Nichtrestcharakter ausdrücken, von einander zu unterscheiden.

§ 12.

Das Reciprocitätsgesetz zwischen einem primären und einem beliebigen Primideal in gewissen relativ Galois'schen Körpern.

Wir nehmen in diesem Paragraphen an, dass der Grundkörper k

- 1) in bezug auf den Kreiskörper $k(\xi)$ ein relativ Galois'scher sei,
- 2) dass sein Relativgrad m zu l prim sei.

Ausserdem setzen wir voraus, dass die Klassenzahl des Körpers $k(\xi)$ ebenso wie die des Körpers k nicht durch l teilbar sei, dass also l eine reguläre Primzahl sei.

Um das Reciprocitätsgesetz zwischen einem primären und einem beliebigen Primideal in k zu beweisen, schicken wir zunächst einige Hilfssätze vorweg.

Satz 34. (Hilfssatz). Ist α eine ganze Zahl und \mathfrak{p} ein Primideal aus k , so ist für einen beliebigen positiven Exponenten e :

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}^e}\right) \equiv \alpha^{\frac{n(\mathfrak{p}^e)-1}{l}} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Beweis: Ist $n(\mathfrak{p}) = p^f$, wo $p^f \equiv 1 \pmod{l}$, so gilt

$$\frac{n(\mathfrak{p}^e)-1}{n(\mathfrak{p})-1} = \frac{p^{ef}-1}{p^f-1} = p^{(e-1)f} + p^{(e-2)f} + \dots + p^f + 1 \equiv e \pmod{l}.$$

Folglich kann man

$$\frac{n(\mathfrak{p}^e)-1}{n(\mathfrak{p})-1} = lx + e \quad \text{setzen,}$$

wo x eine positive ganze rationale Zahl bedeutet. Es ist deshalb:

$$\frac{n(\mathfrak{p}^e)-1}{l} = (lx + e) \cdot \frac{n(\mathfrak{p})-1}{l}.$$

Hieraus folgt:

$$\alpha^{\frac{n(\mathfrak{p}^e)-1}{l}} \equiv \left[\alpha^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l}} \right]^{lx+e} \equiv \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)^{lx+e} \equiv \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)^e \equiv \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}^e}\right) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Wir haben im Folgenden das Symbol $(-)$ sowohl in bezug auf den Körper k wie in bezug auf den Kreiskörper $k(\xi)$ zu bilden. Wir unterscheiden deshalb beide durch die Bezeichnung mit unterem Index:

$(-)_k$ Symbol in bezug auf den Körper k

$(-)_k$ Symbol in bezug auf den Kreiskörper $k(\xi)$.

Mit Anwendung dieser Bezeichnungsweise gilt der folgende Satz:

Satz 35. (Hilfssatz). Es sei \mathfrak{r} ein beliebiges Primideal des Körpers k und $\bar{\mathfrak{r}}$ seine Relativnorm in bezug auf $k(\xi)$. Ist ferner $\bar{\pi}$ eine beliebige ganze Zahl des Kreiskörpers $k(\xi)$, so gilt die Gleichung

$$\left(\frac{\bar{\pi}}{\bar{\mathfrak{r}}}\right)_{kr} = \left(\frac{\bar{\pi}}{\mathfrak{r}}\right)_k.$$

Beweis: Bezeichnet man die Norm von Idealen in k mit n_k , die Norm von Idealen in $k(\xi)$ mit n_{kr} , so ist, wenn

$$n_k(\mathfrak{r}) = r^f, \quad \text{auch} \quad n_{kr}(\overline{\mathfrak{r}}) = r^f.$$

Nun ist

$$\left(\frac{\overline{\pi}}{\mathfrak{r}}\right)_k \equiv \overline{\pi}^{\frac{r^f-1}{l}} \quad (\mathfrak{r}).$$

Ferner ergibt sich aus dem vorigen Hilfssatz, da $\overline{\mathfrak{r}}$ die Potenz eines Primideals in $k(\xi)$ ist, dass

$$\left(\frac{\overline{\pi}}{\mathfrak{r}}\right)_{kr} \equiv \overline{\pi}^{\frac{r^f-1}{l}}. \quad (\mathfrak{r}).$$

Es ist folglich:

$$\left(\frac{\overline{\pi}}{\mathfrak{r}}\right)_k \equiv \left(\frac{\overline{\pi}}{\mathfrak{r}}\right)_{kr} \quad (\mathfrak{r}),$$

also, da \mathfrak{r} zu l prim ist,

$$\left(\frac{\overline{\pi}}{\mathfrak{r}}\right)_k = \left(\frac{\overline{\pi}}{\mathfrak{r}}\right)_{kr}.$$

Benutzt man in dem vorstehenden Beweise statt des Körpers $k(\xi)$ einen beliebigen Unterkörper von k , so bleiben alle Schlüsse bestehen. Es gilt der angeführte Satz daher auch für einen beliebigen Unterkörper von k , natürlich vorausgesetzt, dass derselbe ebenfalls den Körper $k(\xi)$ enthält.

Satz 36. (Hilfssatz). Sind \mathfrak{p}_1 und \mathfrak{p}_2 zwei beliebige nicht relativ conjugierte Primideale des Körpers k und ist $\mathfrak{p}_1^{hh'} = \pi_1$, $\mathfrak{p}_2^{hh'} = \pi_2$, so giebt es stets ein primäres Primideal \mathfrak{r} in k mit der Primärzahl \mathfrak{q} , so dass:

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}_1}\right) \neq 1 \quad \left(\frac{\pi_2}{\mathfrak{r}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}_2}\right) \neq 1.$$

Beweis: Es seien $\mathfrak{p}_1^{(1)} = \mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_1^{(2)}, \dots, \mathfrak{p}_1^{(a_1)}$ und $\mathfrak{p}_2^{(1)} = \mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_2^{(2)}, \dots, \mathfrak{p}_2^{(a_2)}$ die zu \mathfrak{p}_1 und \mathfrak{p}_2 relativ conjugierten unter einander verschiedenen Primideale. Wir setzen dann

$$(\mathfrak{p}_1^{(1)})^{hh'} = (\pi_1^{(1)}) = (\pi_1), \quad (\mathfrak{p}_1^{(2)})^{hh'} = (\pi_1^{(2)}) \dots (\mathfrak{p}_1^{(a_1)})^{hh'} = (\pi_1^{(a_1)})$$

$$(\mathfrak{p}_2^{(1)})^{hh'} = (\pi_2^{(1)}) = (\pi_2), \quad (\mathfrak{p}_2^{(2)})^{hh'} = (\pi_2^{(2)}) \dots (\mathfrak{p}_2^{(a_2)})^{hh'} = (\pi_2^{(a_2)})$$

und bestimmen jetzt das Primideal \mathfrak{r} in k primär so, dass

$$(1) \quad \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right) = \xi \neq 1, \quad \left(\frac{\pi_1^{(i)}}{\mathfrak{r}}\right) = 1 \quad (i = 2, 3, \dots, a_1)$$

$$\left(\frac{\pi_2}{r}\right) = \zeta \neq 1, \quad \left(\frac{\pi_2^{(k)}}{r}\right) = 1 \quad (k = 2, 3, \dots a_2),$$

wo ζ irgend eine l^{te} Einheitswurzel bedeutet.

Wir behaupten dann, dass r die verlangte Eigenschaft hat.

Zum Beweise bezeichnen wir die Relativnormen von $p_1, p_2, r, \pi_1, \pi_2, \varrho$ in bezug auf $k(\xi)$ mit $\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{r}, \overline{\pi_1}, \overline{\pi_2}, \overline{\varrho}$ und finden dann aus (1) unter Benutzung von Hilfssatz 35:

$$\left(\frac{\overline{\pi_1}}{\overline{r}}\right)_k = \zeta^{e_1} = \left(\frac{\overline{\pi_1}}{\overline{r}}\right)_{kr}, \quad \left(\frac{\overline{\pi_2}}{\overline{r}}\right)_k = \zeta^{e_2} = \left(\frac{\overline{\pi_2}}{\overline{r}}\right)_{kr},$$

wo die Exponenten e_1 und e_2 notwendig zu l prim sind, da wir vorausgesetzt haben, dass der Relativgrad m von k in bezug auf $k(\xi)$ zu l prim sei.

Bedenkt man nun, dass $\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{r}$ Potenzen von Primidealen in $k(\xi)$ sind und dass \overline{r} ein primäres Ideal und $\overline{\varrho}$ eine primäre Zahl in $k(\xi)$, so folgt aus dem in $k(\xi)$ zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal gültigen Reciprocitätsgesetz, dass

$$\left(\frac{\overline{\varrho}}{\overline{p_1}}\right)_{kr} = \left(\frac{\overline{\pi_1}}{\overline{r}}\right)_{kr} = \zeta^{e_1}, \quad \left(\frac{\overline{\varrho}}{\overline{p_2}}\right)_{kr} = \left(\frac{\overline{\pi_2}}{\overline{r}}\right)_{kr} = \zeta^{e_2}.$$

Ferner folgt wieder aus Hilfssatz 35, dass auch

$$\left(\frac{\overline{\varrho}}{\overline{p_1}}\right)_k = \zeta^{e_1}, \quad \left(\frac{\overline{\varrho}}{\overline{p_2}}\right)_k = \zeta^{e_2}.$$

Berücksichtigt man jetzt die aus (1) mit Hilfe von Satz 33 folgenden Relationen und beachtet ausserdem, dass stets

$$\left(\frac{\pi^{(s)}}{r}\right)_k = \left(\frac{S\pi^{(s)}}{Sr}\right)_k$$

ist, wenn S eine beliebige Substitution bedeutet, die den Körper k in einen relativ conjugierten überführt, so folgt:

$$\left(\frac{\varrho}{p_1}\right)_k = \zeta, \quad \left(\frac{\varrho}{p_2}\right)_k = \zeta.$$

Damit ist die Richtigkeit unseres Satzes bewiesen.

Mit Benutzung des letzten Hilfssatzes ist es uns jetzt möglich, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 37. Ist p ein primäres Primideal in k mit der Primärzahl π und ist r ein beliebiges Primideal in k und $(\varrho) = r^{m\pi}$, so ist:

$$\left(\frac{\pi}{r}\right) = \left(\frac{\varrho}{p}\right).$$

Beweis: Ist $\left(\frac{\pi}{r}\right) = 1$, so gehen wir auf Satz 33 zurück. Wir setzen daher jetzt voraus, dass

$$\left(\frac{\pi}{r}\right) = \xi \neq 1$$

sei, wo ξ eine l^{te} Einheitswurzel bedeutet und bestimmen dann ein primäres Primideal \mathfrak{p}_1 mit der Primärzahl π_1 so, dass

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}_1}\right) \neq 1 \quad \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\pi_1}{r}\right) \neq 1,$$

was nach dem letzten Hilfssatz möglich ist, wenn \mathfrak{p}_1 und r nicht relativ conjugiert sind. Endlich wählen wir einen zu l primen Exponenten e so, dass

$$\left(\frac{\pi \pi_1^e}{r}\right) = 1$$

wird und betrachten den Körper $K(\sqrt[l]{\pi \pi_1^e}, k)$.

Dieser besitzt nach unseren Voraussetzungen über π und π_1 genau l verschiedene Geschlechter, und das Charakterenprodukt für jedes ist, da $\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}_1}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right)^{-1} = 1$, selbst gleich 1. Da r in K zerlegbar ist, so besitzt ein Primfaktor von r die Charaktere:

$$\left(\frac{\varrho, \pi \pi_1^e}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) \quad \left(\frac{\varrho, \pi \pi_1^e}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right)^e,$$

deren Produkt 1 sein muss. Es ist also:

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p} \mathfrak{p}_1^e}\right) = 1 = \left(\frac{\pi \pi_1^e}{r}\right)$$

und hieraus folgt

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\pi}{r}\right).$$

Der ausgeschlossene Fall, dass r und \mathfrak{p} relativ conjugiert sind, erledigt sich leicht mit Hilfe des Vorhergehenden.

Wir können den eben bewiesenen Satz auf beliebige Unterkörper k_1 von k ausdehnen, die ebenfalls den Körper $k(\xi)$ enthalten und eine nicht durch l teilbare Classenzahl h_1 besitzen. Wir brauchen dazu den folgenden Satz:

Ist \mathfrak{a} ein primäres Ideal in k und α eine primäre Zahl, so dass $\mathfrak{a}^{h_1} = (\alpha)$; ist ferner \mathfrak{b} ein beliebiges Ideal in k und $\mathfrak{b}^{h_1} = (\beta)$, so gilt

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{a}}\right).$$

Wir gehen auf den Beweis dieses Satzes, um Wiederholungen zu vermeiden, an dieser Stelle nicht ein, da er später für jeden Körper k , für den Satz 37 gilt, ausführlich bewiesen wird (vergl. § 16). Wir setzen ihn hier vielmehr als bewiesen voraus und benutzen ihn zum Beweise des folgenden Satzes:

Satz 38. Ist k_1 ein beliebiger Unterkörper des im vorigen Satze betrachteten relativ Galois'schen Körpers k , der ebenfalls den Kreiskörper $k(\zeta)$ enthält und dessen Klassenzahl h_1 zu l relativ prim ist, so gilt in ihm das Reciprocitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal.

Beweis: Es sei \mathfrak{P} ein primäres Primideal in k_1 mit der Primärzahl II und \mathfrak{R} ein beliebiges Primideal in k_1 , ferner

$$\mathfrak{R}^{h_1 h'_1} = (P), \quad \text{wo } h_1 h'_1 \equiv 1 \pmod{l}.$$

Da II auch in k eine primäre Zahl ist, so muss \mathfrak{P} ein primäres Ideal in k sein (vergl. Satz 45 in § 16). Es gilt folglich in k nach dem eben angeführten Satze:

$$(1) \quad \left(\frac{II}{\mathfrak{R}}\right)_k = \left(\frac{P}{\mathfrak{P}}\right)_k.$$

Es sei nun die Zerlegung von \mathfrak{P} und \mathfrak{R} in k die folgende:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{p}_e \\ \mathfrak{R} &= \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{r}_f \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_e, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_f$ gleiche oder verschiedene Primideale in k bedeuten. Die Relativnorm von \mathfrak{p}_1 in bezug auf k_1 ist dann $\mathfrak{P}^{e'}$, wo offenbar $e e' = m_1$, wenn m_1 den Relativgrad von k in bezug auf k_1 bezeichnet.

Wir können nun schliessen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{P}{\mathfrak{P}}\right)_k &= \left(\frac{P}{\mathfrak{p}_1}\right)_k^e \\ \left(\frac{P}{\mathfrak{p}_1}\right)_k &= \left(\frac{P}{\mathfrak{P}}\right)_{k_1}^{e'} \\ \hline (2) \quad \left(\frac{P}{\mathfrak{P}}\right)_k &= \left(\frac{P}{\mathfrak{P}}\right)_{k_1}^{ee'} = \left(\frac{P}{\mathfrak{P}}\right)_{k_1}^{m_1}. \end{aligned}$$

In gleicher Weise schliessen wir:

$$(3) \quad \left(\frac{II}{\mathfrak{R}}\right)_k = \left(\frac{II}{\mathfrak{R}}\right)_{k_1}^{m_1}.$$

Dann folgt offenbar aus (1) (2) (3), da $m_1 \not\equiv 0 \pmod{l}$

$$\left(\frac{II}{\mathfrak{R}}\right)_{k_1} = \left(\frac{P}{\mathfrak{P}}\right)_{k_1}.$$

§ 13.

Fortsetzung.

Den Fall, dass der im vorigen Paragraphen genannte relativ Galois'sche Körper k einen durch l teilbaren Relativgrad besitzt, werde ich nicht allgemein behandeln. Ich werde nur den Fall erledigen, dass der Relativgrad desselben genau gleich l sei. Ich mache jetzt also folgende Annahmen:

1) k_1 sei ein beliebiger Zahlkörper, für den das Reciprocitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal bewiesen ist. Seine zu l prime Klassenzahl sei h .

2) K_1 sei ein relativecyclischer Oberkörper über k_1 vom Primzahlrelativgrade l . Er möge definiert sein durch $\sqrt[l]{\mu}$, wo μ eine ganze Zahl aus k_1 bezeichnet, und möge ferner eine nicht durch l teilbare Klassenzahl H besitzen.

Es ist die Aufgabe dieses Paragraphen, das Reciprocitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal in K_1 abzuleiten. Zu diesem Zweck beweisen wir zunächst folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 39. Es sei Π eine beliebige ganze Zahl aus K_1 und π die Relativnorm von Π in bezug auf k_1 . Ferner sei \mathfrak{q} ein Primideal, das gleichzeitig in K_1 und k_1 liegt.

Es gilt dann:

$$\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{q}}\right)_{K_1} = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)_{k_1}.$$

Beweis: Es sei die Norm von \mathfrak{q} , als Ideal von k_1 aufgefasst, q' , dann ist die Norm von \mathfrak{q} , als Ideal von K_1 aufgefasst, q'' . Bezeichnet man die Relativgruppe von K_1 in bezug auf k_1 mit

$$S^1, S^2, \dots, S^{l-1}, S^l = 1,$$

so folgt aus

$$\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{q}}\right)_{K_1} = \left(\frac{S^i \Pi}{\mathfrak{q}}\right)_{K_1}$$

das Bestehen der Congruenz:

$$\Pi^{\frac{q^{lf}-1}{l}} \equiv (S^i \Pi)^{\frac{q^{lf}-1}{l}} \pmod{\mathfrak{q}}.$$

Man erkennt nun leicht, dass folgende Gleichung gilt:

$$\frac{q^{lf}-1}{l} = (q'-1)(1+la),$$

wo a eine ganze rationale Zahl bezeichnet. Es ist folglich auch $\frac{q^{f-1}}{l^2}$ eine ganze Zahl und demnach gilt:

$$\Pi \frac{q^{f-1}}{l^2} \equiv \xi(S\Pi) \frac{q^{f-1}}{l^2} \pmod{q},$$

wenn ξ eine l^{te} Einheitswurzel bedeutet. Daraus folgt dann:

$$\Pi \frac{q^{f-1}}{l^2} \equiv \xi^i (S^i \Pi) \frac{q^{f-1}}{l^2} \pmod{q}.$$

Bildet man die letzte Congruenz für $i = 0, 1, 2, \dots, l-1$ und multipliziert die so erhaltenen Congruenzen, so folgt:

$$\Pi \frac{q^{f-1}}{l} \equiv \pi \frac{q^{f-1}}{l^2} \pmod{q}.$$

Es ist also

$$\left(\frac{\Pi}{q}\right)_{K_1} \equiv \pi \frac{q^{f-1}}{l^2} \pmod{q};$$

andererseits ist

$$\left(\frac{\pi}{q}\right)_{K_1} \equiv \pi \frac{q^{f-1}}{l} \pmod{q}.$$

Wenn wir daher nachweisen können, dass

$$\pi \frac{q^{f-1}}{l^2} \equiv \pi \frac{q^{f-1}}{l} \pmod{q},$$

so ist unser Satz offenbar bewiesen.

Nun ist, wie oben angeführt:

$$\frac{q^{f-1}}{l^2} = \frac{q^{f-1}}{l} (1 + la).$$

Folglich ergibt sich:

$$\pi \frac{q^{f-1}}{l^2} = \pi \frac{q^{f-1}}{l} (1+la) = \pi \frac{q^{f-1}}{l} \cdot \pi^{(q^f-1)a} \equiv \pi \frac{q^{f-1}}{l} \pmod{q}.$$

Mit Hilfe des eben bewiesenen Satzes können wir jetzt die Richtigkeit des folgenden Satzes erkennen.

Satz 40: Ist \mathfrak{P} ein primäres Primideal in K_1 mit der Primärzahl Π , so dass $(\Pi) = \mathfrak{P}^{HH'kk'}$; ist ferner \mathfrak{R} ein beliebiges Primideal in K_1 und $\mathfrak{R}^{HH'kk'} = (P)$, so ist

$$\left(\frac{P}{\mathfrak{P}}\right) = \left(\frac{\Pi}{\mathfrak{R}}\right).$$

Beweis: Wir unterscheiden bei dem Beweise mehrere Fälle, je nachdem die Primideale \mathfrak{P} und \mathfrak{R} nur in K_1 oder gleichzeitig in K_1 und k_1 liegen. Wir denken uns dabei im folgenden das eine der betreffenden Primideale immer als primär und nehmen, ohne es ausdrücklich zu sagen, an, dass die dieses Primideal charakterisierende Körperzahl primär gewählt sei.

1) Beide Primideale $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{R} = \mathfrak{r}$ liegen auch in k_1 . Ist dann

$$\mathfrak{p}^{HH'hh'} = (\pi), \quad \mathfrak{r}^{HH'hh'} = (\varrho),$$

so ist offenbar nach Satz 35:

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_{k_1} = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_{k_1}^l = 1 \quad \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_{k_1} = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_{k_1}^l = 1.$$

2) Das eine Primideal $\mathfrak{R} = \mathfrak{r}$ liege auch in k_1 , das andere \mathfrak{P} nicht. Ist dann

$$\mathfrak{P}^{HH'hh'} = (\Pi), \quad \mathfrak{r}^{HH'hh'} = (\varrho)$$

und bezeichnet \mathfrak{p} , π die Relativnorm von \mathfrak{P} , Π in bezug auf k_1 , so gilt nach Satz 35 und nach Satz 39:

$$\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{r}}\right)_{k_1} = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_{k_1} = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_{k_1} = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{P}}\right)_{k_1}.$$

Für diesen Schluss ist es gleichgültig, ob das primäre oder das nichtprimäre Primideal gleichzeitig in K_1 und k_1 liegt.

3) Beide Primideale \mathfrak{P} und \mathfrak{R} liegen nicht in k_1 .

Zum Beweise zeigen wir, dass man stets ein primäres Primideal \mathfrak{P}_1 bestimmen kann, so dass, wenn $\mathfrak{P}_1^{HH'hh'} = (\Pi_1)$ gesetzt wird:

$$(1) \quad \left(\frac{\Pi_1}{\mathfrak{P}_1}\right)_{k_1} = \left(\frac{\Pi}{\mathfrak{P}_1}\right)_{k_1} \neq 1 \quad \left(\frac{\Pi_1}{\mathfrak{R}_1}\right)_{k_1} = \left(\frac{P}{\mathfrak{P}_1}\right)_{k_1} \neq 1,$$

und verfahren dann wie bei dem Beweise von Satz 37.

Um die Existenz eines Primideals \mathfrak{P}_1 nachzuweisen, wähle man ein primäres Primideal \mathfrak{p}_1 in k_1 so, dass

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}_1}\right) \neq 1 \quad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right) \neq 1 \quad \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right) \neq 1,$$

wo π und ϱ die Relativnormen von Π und P in bezug auf k_1 bedeuten.

Die hingeschriebenen Bedingungen widersprechen sich nicht und sind daher

stets zu erfüllen¹⁾. Aus $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}_1}\right) \neq 1$ folgt, dass \mathfrak{p}_1 auch Primideal in K_1 ist.

Wenn man dann $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{p}_1$ setzt, so folgt offenbar nach Fall 2, dass die Bedingungen (1) erfüllt sind. Wir haben nur noch zu zeigen, dass \mathfrak{p}_1 ein primäres Primideal in K_1 ist. Bezeichnet E eine beliebige Einheit aus K_1 und ist ε die Relativnorm von E genommen in k_1 , so ist nach Satz 39:

$$\left(\frac{E}{\mathfrak{p}_1}\right)_{K_1} = \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}_1}\right)_{k_1} = 1;$$

es ist also \mathfrak{p}_1 ein primäres Primideal in K_1 .

Wir haben damit den Beweis unseres Satzes vollständig erbracht.

Die jetzt folgenden Entwicklungen setzen für den Grundkörper k keine anderen Annahmen voraus, als die bereits in § 4 eingeführten. Wir machen deshalb von jetzt ab in betreff des Grundkörpers k folgende Annahme:

- 1) Die Klassenzahl von k ist nicht durch l teilbar.
- 2) Für den Körper k ist das Reciprocitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal bewiesen.

§ 14.

Die Anzahl der Geschlechter im relativ-cyclischen Körper K mit zu l primärer Relativdiscriminante.

Satz 41. Es sei die Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ zu l prim und r die Anzahl der Charaktere, die ein Geschlecht in K bestimmen. Sind dann c_1, c_2, \dots, c_r irgendwelche l^{te} Einheitswurzeln, deren Produkt 1 ist, so giebt es stets in K ein Geschlecht, dessen Charaktere mit c_1, c_2, \dots, c_r übereinstimmen. Die Anzahl aller verschiedenen Geschlechter ist also l^{r-1} .

Beweis: Es seien $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \dots, \mathfrak{d}_t$ die in der Relativdiscriminante von $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ aufgehenden Primideale und

$$\mathfrak{d}_1^{h_1'} = (\delta_1) \quad \mathfrak{d}_2^{h_2'} = (\delta_2) \quad \dots \quad \mathfrak{d}_t^{h_t'} = (\delta_t).$$

Man kann dann nach unserer Annahme über K setzen:

$$\mu = \varepsilon \delta_1^{c_1} \delta_2^{c_2} \dots \delta_t^{c_t} \alpha^l,$$

¹⁾ Man beachte, dass nach Hilbert, A. Z. Satz 94, S. 279 μ nicht das Produkt einer Einheit mit der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl aus k sein kann.

wo ε eine Einheit und α eine ganze Zahl aus k bedeutet und wo e_1, e_2, \dots, e_l gewisse Werte $1, 2, \dots, l-1$ haben. Unter den Primidealen $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \dots, \mathfrak{d}_l$ seien nun r , etwa $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \dots, \mathfrak{d}_r$ nach den für die Geschlechtsbestimmung geltenden Vorschriften ausgewählt. Wir bestimmen dann, was stets möglich ist, ein primäres Primideal \mathfrak{p} in k derart, dass

$$\left(\frac{\delta_1^{\varepsilon_1}}{\mathfrak{p}}\right)^n = c_1, \left(\frac{\delta_2^{\varepsilon_2}}{\mathfrak{p}}\right)^n = c_2, \dots, \left(\frac{\delta_r^{\varepsilon_r}}{\mathfrak{p}}\right)^n = c_r; \left(\frac{\delta_{r+1}}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \dots, \left(\frac{\delta_l}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \quad n \ncong 0 \ (l).$$

Dann ist

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{\delta_1^{\varepsilon_1}}{\mathfrak{p}}\right) \left(\frac{\delta_2^{\varepsilon_2}}{\mathfrak{p}}\right) \dots \left(\frac{\delta_r^{\varepsilon_r}}{\mathfrak{p}}\right) = 1;$$

folglich ist \mathfrak{p} in K zerlegbar. Ist \mathfrak{P} ein Primfaktor von \mathfrak{p} in K und π eine Primärzahl von \mathfrak{p} , so hat \mathfrak{P}^n die Charaktere

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_1}\right)^{\varepsilon_1 n} = c_1, \left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_2}\right)^{\varepsilon_2 n} = c_2 \dots \left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_r}\right)^{\varepsilon_r n} = c_r,$$

da

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_{r+1}}\right) = 1 \dots \left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_l}\right) = 1.$$

Damit ist gezeigt, dass ein Geschlecht mit dem Charakterensystem c_1, c_2, \dots, c_r wirklich existiert. Da nun einerseits die Grössen c_1, c_2, \dots, c_r auf l^{r-1} verschiedene Weisen bestimmt werden können, und da die Anzahl der Geschlechter andererseits nicht grösser als l^{r-1} sein kann, so folgt, dass genau l^{r-1} Geschlechter existieren, die die Eigenschaft haben, dass das Charakterenprodukt eines jeden 1 ist.

§ 15.

Das Produkt $\prod'_{(w)} \left(\frac{\nu, \mu}{w}\right)$.

Satz 42. Sind ν, μ zwei ganze zu 1 prime Zahlen in k und ist

$$\mu \equiv \nu^l \ (l),$$

wo ν eine ganze Zahl aus k bedeutet, so ist das über alle zu 1 primen Primideale w in k zu erstreckende Produkt

$$\prod'_{(w)} \left(\frac{\nu, \mu}{w}\right) = 1.$$

Beweis: Wir bemerken vorweg, dass die Relativediscriminante des Kör-

pers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ zu l prim ist und dass daher der im vorigen § bewiesene Satz für K gilt.

Wir unterscheiden nun beim Beweise drei Fälle, indem wir von vornherein annehmen, dass ν und μ keinen gemeinsamen Teiler haben, weil wir die entgegengesetzte Annahme leicht auf die angegebene zurückführen können:

1) ν ist die Primärzahl π eines primären Primideals in k .

Wir behalten die Bezeichnungen des vorigen § bei und setzen

$$\mu = \varepsilon \delta_1^{\varepsilon_1} \delta_2^{\varepsilon_2} \dots \delta_t^{\varepsilon_t} \alpha'.$$

Es ist dann:

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{\pi, \mu}{w} \right) = \prod_{(w)}' \left(\frac{\pi, \varepsilon}{w} \right) \cdot \prod_{(w)}' \left(\frac{\pi, \delta_1^{\varepsilon_1}}{w} \right) \dots \prod_{(w)}' \left(\frac{\pi, \delta_t^{\varepsilon_t}}{w} \right) \cdot \prod_{(w)}' \left(\frac{\pi, \alpha'}{w} \right).$$

Da nun alle Einzelprodukte rechts, wie man leicht erkennt, den Wert 1 haben ist auch:

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{\pi, \mu}{w} \right) = 1.$$

2) ν ist eine Einheit η aus k .

Man bestimme ein primäres Primideal \mathfrak{p} in k derart, dass

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}} \right) = 1$$

$$\left(\frac{\delta_{r+1}^{\varepsilon_{r+1}}}{\mathfrak{p}} \right)^n = \left(\frac{\eta^{\varepsilon_{r+1}}}{\mathfrak{d}_{r+1}} \right) \dots \left(\frac{\delta_t^{\varepsilon_t}}{\mathfrak{p}} \right)^n = \left(\frac{\eta^{\varepsilon_t}}{\mathfrak{d}_t} \right).$$

\mathfrak{p} ist in k zerlegbar. Ist π eine Primärzahl von \mathfrak{p} und \mathfrak{P} ein Primfaktor von \mathfrak{p} in K , so ist das Charakterenprodukt von $\mathfrak{P}^{n'}$ in K gleich 1, wo $n+n' \equiv 0 (l)$ sein soll.

Da nun:

$$\left(\frac{\eta \pi^{n'}, \mu}{\mathfrak{d}_i} \right) = \left(\frac{\eta \pi^{n'}}{\mathfrak{d}_i} \right)^{\varepsilon_i} = \left(\frac{\eta^{\varepsilon_i}}{\mathfrak{d}_i} \right) \cdot \left(\frac{\pi^{\varepsilon_i}}{\mathfrak{d}_i} \right)^{n'} = \left(\frac{\eta^{\varepsilon_i}}{\mathfrak{d}_i} \right) \left(\frac{\delta_i^{\varepsilon_i}}{\mathfrak{p}} \right)^{n'} = 1 \quad (i = r+1, r+2, \dots t)$$

ist, so muss

$$\left(\frac{\eta \pi^{n'}, \mu}{\mathfrak{d}_1} \right) \left(\frac{\eta \pi^{n'}, \mu}{\mathfrak{d}_2} \right) \dots \left(\frac{\eta \pi^{n'}, \mu}{\mathfrak{d}_r} \right) = 1 \quad \text{sein.}$$

Folglich ist:

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{\eta \pi^{n'}, \mu}{w} \right) = 1. \quad \text{Da anderseits nach Fall 1}$$

$$\prod_{(\mathfrak{w})}' \left(\frac{\pi^{n'}, \mu}{\mathfrak{w}} \right) = \prod_{(\mathfrak{w})}' \left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{w}} \right)^{n'} = 1$$

ist, so folgt

$$\prod_{(\mathfrak{w})}' \left(\frac{\eta, \mu}{\mathfrak{w}} \right) = 1.$$

3) Es sei $(\nu) = (\mathfrak{x}) = \mathfrak{q}^{h'}$, wo \mathfrak{q} ein nicht primäres Primideal in k ist.

a) Es sei
$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}} \right) = 1.$$

\mathfrak{q} ist dann in K zerlegbar und es folgt nach dem Satze des vorigen Paragraphen, wenn ξ eine geeignete Einheit bedeutet:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}' \left(\frac{\xi \mathfrak{x}, \mu}{\mathfrak{w}} \right) = 1.$$

Da aber

$$\prod_{(\mathfrak{w})}' \left(\frac{\xi, \mu}{\mathfrak{w}} \right) = 1$$

ist, muss auch

$$\prod_{(\mathfrak{w})}' \left(\frac{\mathfrak{x}, \mu}{\mathfrak{w}} \right) = 1 \quad \text{sein.}$$

b)
$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}} \right) = \zeta^a \quad a \not\equiv 0 \pmod{l}.$$

Man bestimme ein primäres Primideal \mathfrak{p} in k so, dass $\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{p}} \right)^n = \zeta^{-a}$ wird, dann ist auch, wenn π eine Primärzahl von \mathfrak{p} bedeutet, $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}} \right)^n = \zeta^{-a}$, und es gilt:

$$\left(\frac{\mu \pi^n}{\mathfrak{q}} \right) = 1.$$

Folglich ergibt sich nach 3a

$$\prod_{(\mathfrak{w})}' \left(\frac{\mathfrak{x}, \mu \pi^n}{\mathfrak{w}} \right) = 1.$$

Da aber

$$\prod_{(\mathfrak{w})}' \left(\frac{\mathfrak{x}, \pi^n}{\mathfrak{w}} \right) = \left\{ \left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{p}} \right) \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}} \right)^{-1} \right\}^n = 1$$

ist, so folgt

$$\prod_{(\mathfrak{w})}' \left(\frac{\mathfrak{x}, \mu}{\mathfrak{w}} \right) = 1.$$

Bedenkt man endlich, dass

$$\prod_{(\mathfrak{w})}' \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}} \right) = \prod_{(\mathfrak{w})}' \left(\frac{\nu^{h'}, \mu}{\mathfrak{w}} \right)$$

ist und dass sich $\nu^{hl'}$ immer als ein Produkt von solchen Zahlen darstellen lässt, wie sie in den 3 Fällen betrachtet worden sind, so erkennt man die allgemeine Gültigkeit des zu beweisenden Satzes.

Wir führen noch 2 Folgerungen des eben bewiesenen Satzes an:

Satz 43. Bedeuten ν, μ, ν^*, μ^* irgendwelche zu l prime ganze Zahl in k , die den Congruenzen

$$\nu\nu^* \equiv \alpha^l, \quad \mu\mu^* \equiv \beta^l \quad (l') \quad \text{genügen,}$$

wo α und β ganze Zahlen aus k sind, und ist ν zu μ, ν^* zu μ^* relativprim, so ist

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right) \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{-1} = \left(\frac{\nu^*}{\mu^*}\right) \left(\frac{\mu^*}{\nu^*}\right)^{-1}.$$

Bedeuten ν, μ zwei zu einander und zu l prime ganze Zahlen in k , von denen wenigstens eine der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach l' congruent ist, so ist

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right) \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{-1} = 1.$$

Beweis: Es ist

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{\nu\nu^*, \mu}{w}\right) = 1 = \prod_{(w)}' \left(\frac{\nu, \mu}{w}\right) \cdot \prod_{(w)}' \left(\frac{\nu^*, \mu}{w}\right)$$

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{\nu^*, \mu\mu^*}{w}\right) = 1 = \prod_{(w)}' \left(\frac{\nu^*, \mu}{w}\right) \cdot \prod_{(w)}' \left(\frac{\nu^*, \mu^*}{w}\right),$$

folglich

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{\nu, \mu}{w}\right) = \prod_{(w)}' \left(\frac{\nu^*, \mu^*}{w}\right), \quad \text{d. h.} \quad \left(\frac{\nu}{\mu}\right) \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{-1} = \left(\frac{\nu^*}{\mu^*}\right) \cdot \left(\frac{\mu^*}{\nu^*}\right)^{-1}.$$

Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus dem zu Anfang des Paragraphen aufgestellten Satz.

§ 16.

Das primäre Ideal.

Satz 44. Ist \mathfrak{a} ein primäres Ideal, so kann man stets in k eine ganze Zahl α finden, so dass $(\alpha) = \mathfrak{a}^{hl'}$ wird und überdies α der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach l' congruent wird. α ist bis auf die l^{te} Potenz einer Einheit bestimmt; wir nennen α eine Primärzahl von \mathfrak{a} .

Beweis: Es sei $(\alpha^*) = \mathfrak{a}^{hl'}$. Haben dann $q_1, q_2, \dots, q_m, \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m$, die früher angegebene Bedeutung, so können wir die Congruenz hinschreiben:

$$\alpha^* \equiv \varepsilon^* \kappa_1^{v_1} \dots \kappa_{m'}^{v_{m'}} \beta^l \quad (l'),$$

wo ε^* eine Einheit und β eine ganze Zahl aus k bedeutet und wo ferner $v_1, \dots, v_{m'}$ gewisse Werte $0, 1, \dots, l-1$ haben.

Es gilt dann für jede Einheit ξ in k

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{\xi, \alpha^{*l-1} \varepsilon^* \kappa_1^{v_1} \dots \kappa_{m'}^{v_{m'}}}{w} \right) = 1.$$

Wählen wir nun für ξ der Reihe nach $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m'}$, so folgt:

$$v_1 = v_2 = \dots = v_{m'} = 0. \quad \text{Es ist daher } \alpha^* \varepsilon^{*l-1}$$

eine Zahl der gewünschten Art.

Satz 45. Ist a ein Ideal in k und kann man $a^{hl'} = (\alpha)$ setzen, wo α der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach l' congruent ist, so ist a ein primäres Ideal.

Beweis: Man erhält den Beweis, indem man in Satz 42 μ gleich α setzt und für ν irgend eine Einheit aus k nimmt.

IV.

Das hyperprimäre Ideal.

§ 17.

Definition des hyperprimären Ideals und der hyperprimären Zahl in k .

Definition 8. Es seien $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_z$ die sämtlichen von einander verschiedenen in \mathfrak{I} aufgehenden Primideale und zwar möge \mathfrak{I}_1 genau zu l_1^{ten} , \mathfrak{I}_2 genau zur l_2^{ten} , \dots, \mathfrak{I}_z genau zur l_z^{ten} Potenz in \mathfrak{I} aufgehen, so dass

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1^{l_1} \mathfrak{I}_2^{l_2} \dots \mathfrak{I}_z^{l_z} \quad \text{wird.}$$

Es sei ferner:

$$\mathfrak{I}_1^{hl'} = (\lambda_1) \quad \mathfrak{I}_2^{hl'} = (\lambda_2) \dots \mathfrak{I}_z^{hl'} = (\lambda_z).$$

Wenn dann das zu \mathfrak{I} prime Ideal \mathfrak{p} in k primär ist und überdies die Bedingungen erfüllt:

$$\left(\frac{\lambda_i}{\mathfrak{p}} \right) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, z),$$

so soll \mathfrak{p} ein hyperprimäres Ideal heißen.

Definition 9. Eine ganze Zahl μ in k soll eine hyperprimäre Zahl heissen, wenn sie zu l prim ist und der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $l_1^{e_1+1} l_2^{e_2+1} \dots l_z^{e_z+1}$ congruent ist.

Ueber die hyperprimären Zahlen in k können wir folgenden Satz beweisen:

Satz 46. Ist μ eine hyperprimäre und ν eine beliebige Zahl in k , so ist das über alle zu l primen Primideale in k zu erstreckende Produkt

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{\nu, \mu}{w} \right) = 1.$$

Beweis: Es sei

$$\nu = n \cdot l_1^{e_1} l_2^{e_2} \dots l_z^{e_z},$$

wo n ein zu l primes Ideal und e_1, e_2, \dots, e_z ganze rationale Zahlen bedeuten.

Die Ideale l_1, l_2, \dots, l_z werden im Körper $K(\sqrt[y]{\mu}, k)$ sämtlich zerlegbar; es sei $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \dots, \mathfrak{Q}_z$ je ein Primfaktor von l_1, l_2, \dots, l_z in K . Es sei ferner A eine ganze Zahl aus K , so dass

$$\frac{A}{l_1^{e_1} \dots l_z^{e_z}}$$

ein zu l primes Ideal wird. Die Relativnorm α von A hat dann die Gestalt:

$$\alpha = a l_1^{e_1} l_2^{e_2} \dots l_z^{e_z}, \quad \text{wo } a \text{ ein zu } l$$

primes Ideal bedeutet, und es lässt sich deshalb $\frac{\nu}{\alpha}$ als ein Bruch $\frac{\varrho}{\sigma}$ darstellen, dessen Zähler und Nenner zu l prim ist.

Da nun:

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{\alpha, \mu}{w} \right) = 1 \quad \prod_{(w)}' \left(\frac{\varrho, \mu}{w} \right) = 1 \quad \prod_{(w)}' \left(\frac{\sigma, \mu}{w} \right) = 1,$$

so folgt

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{\nu, \mu}{w} \right) = \prod_{(w)}' \left(\frac{\nu\sigma, \mu}{w} \right) = \prod_{(w)}' \left(\frac{\alpha\varrho, \mu}{w} \right) = \prod_{(w)}' \left(\frac{\alpha, \mu}{w} \right) = 1.$$

§ 18.

Ein gewisses System von $m' + z$ zu l primen Primidealen in k .

Satz 47. Es mögen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m'}, q_1, q_2, \dots, q_{m'}, x_1, x_2, \dots, x_{m'}$ dieselbe Bedeutung wie in Satz 27 haben.

Wir bestimmen dann z primäre Primideale p_1, p_2, \dots, p_z mit den Primärzahlen $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_z$ so, dass

$$\left(\frac{\lambda_i}{\mathfrak{p}_i}\right) \neq 1 \quad \left(\frac{\lambda_k}{\mathfrak{p}_i}\right) = 1 \quad (i \neq k) \quad \text{wird}$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, z).$$

Wir behaupten dann, dass für jede zu l prime Zahl ω in k eine Congruenz von der Gestalt gilt:

$$\omega \equiv \varepsilon_1^{u_1} \dots \varepsilon_m^{u_m} \kappa_1^{v_1} \dots \kappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \dots \pi_z^{w_z} \cdot \alpha^l (l_1^{l_1+1} l_2^{l_2+1} \dots l_z^{l_z+1}),$$

wo die Exponenten $u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_z$ gewisse Werte $0, 1, \dots, l-1$ haben und α eine geeignete ganze Zahl aus k bedeutet.

Beweis: Wir zeigen, dass eine Zahl

$$\mu = \varepsilon_1^{u_1} \dots \varepsilon_m^{u_m} \kappa_1^{v_1} \dots \kappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \dots \pi_z^{w_z}$$

nicht der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach $l_1^{l_1+1} l_2^{l_2+1} \dots l_z^{l_z+1}$ congruent werden kann, wenn nicht sämtliche Exponenten, die wir kleiner als l annehmen, verschwinden.

Angenommen, es gäbe eine solche Zahl μ . Wir betrachten dann den Körper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$, der eine zu l prime Relativediscriminante hat, und schliessen nach dem Beweise zu Satz 27, dass $u_1 = \dots, u_m = v_1 = \dots, v_m = 0$ sein muss. In der Relativediscriminante von K können dann nur die Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_z$ vorkommen und zwar mögen

$$\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_t$$

in derselben aufgehen, wo $t > 0$ ist. Es giebt dann in K genau l^{t-1} Geschlechter, deren jedes das Charakterenprodukt 1 besitzt.

Das Primideal \mathfrak{p}_1 zerfällt in K und wir erhalten als Charaktere eines Primfaktors von ihm:

$$\left(\frac{\lambda_1 \mu}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_1}\right)^{w_1} \dots \left(\frac{\lambda_t \mu}{\mathfrak{p}_t}\right) = \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_t}\right)^{w_t}.$$

Es müsste also:

$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_1}\right)^{w_1} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_2}\right)^{w_2} \dots \left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}_t}\right)^{w_t} = 1$$

sein, was unmöglich ist, da $w_1 \neq 0$ sein sollte. Es kann also eine Zahl μ von der angegebenen Beschaffenheit nicht existieren, wenn nicht sämtliche Exponenten u, v, w verschwinden.

Wir setzen jetzt zur Abkürzung

$$N_1 = n (f_1)^t [n(f_1) - 1]$$

und verstehen unter

$$\alpha_1^{(1)} \dots \alpha_1^{(N_1)}$$

ein volles System von ganzen zu l_1 primen und nach l_1^{i+1} einander incongruenten Zahlen, die überdies sämtlich congruent 1 nach $l_2^{i+1} \dots l_z^{i+1}$ sein sollen.

Da offenbar

$$\alpha_1^{(a)} \not\equiv \xi^a \alpha_1^{(1)} \pmod{l_1^{i+1}} \quad (a = 1, 2, \dots, l-1),$$

so kann man aus der Reihe der Zahlen α zunächst $l-1$ Zahlen ausscheiden, die $\xi^a \alpha_1^{(1)}$ ($a = 1, 2, \dots, l-1$) congruent sind. Wenn man das Verfahren fortsetzt, so erhält man schliesslich ein System von $\frac{N_1}{l}$ Zahlen $\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_1^{(\frac{N_1}{l})}$, die die Eigenschaft haben, dass

$$\alpha_1^{(i)} \not\equiv \xi^a \alpha_1^{(k)} \quad \text{ist} \quad \left(i, k = 1, 2, \dots, \frac{N_1}{l} \right) \quad (a = 0, 1, 2, \dots, l-1).$$

In genau gleicher Weise verfähre ich in bezug auf l_2, \dots, l_z , indem ich die Zahlensysteme

$$\begin{array}{c} \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_2^{(\frac{N_2}{l})} \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_z^{(1)}, \dots, \alpha_z^{(\frac{N_z}{l})} \end{array}$$

aufstelle. Der Ausdruck:

$$(1) \quad \varepsilon^{u_1} \dots \varepsilon^{u_{m'}} \kappa_1^{v_1} \dots \kappa_{m'}^{v_{m'}} \pi_1^{w_1} \dots \pi_z^{w_z} (\alpha_1^{(i_1)})^l \dots (\alpha_z^{(i_z)})^l$$

$$u_1 \dots u_{m'}, v_1 \dots v_{m'}, w_1, \dots, w_z = 0, 1, \dots, l-1; \quad i = 1, 2 \dots \frac{N}{l}$$

stellt dann ein System von $l^{2m'} N_1 \cdot N_2 \dots N_z$ ganzen Zahlen in k dar. Diese sind sämtlich zu l prim und nach $l_1^{i_1+1} \dots l_z^{i_z+1}$ einander incongruent. Denn aus dem Bestehen einer Congruenz zwischen zweien von ihnen würde, wenn wir die Ausführungen zu Anfang dieses Satzes berücksichtigen, folgen, dass eine Congruenz

$$(2) \quad (\alpha_1^{(i_1)})^l \dots (\alpha_z^{(i_z)})^l \equiv (\alpha_1^{(i'_1)})^l \dots (\alpha_z^{(i'_z)})^l \pmod{l_1^{i_1+1} l_2^{i_2+1} \dots l_z^{i_z+1}}$$

besteht, wo die rechte und linke Seite von einander verschieden sind. Aus dieser Congruenz würde dann folgen:

Satz 49. Ist α eine hyperprimäre Zahl in k , so ist

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1 \dots \left(\frac{\varepsilon_m}{\alpha}\right) = 1$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\alpha}\right) = 1 \dots \left(\frac{\lambda_r}{\alpha}\right) = 1.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 46.

V.

Das allgemeine Reciprocitätsgesetz in k und der erste Ergänzungssatz zu demselben.

§. 20.

Definition des Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{I}_i}\right)$ für irgend welche zu l prime ganze Zahlen ν, μ .

Definition 10. Es sei:

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_i^l \mathfrak{Q},$$

wo \mathfrak{Q} zu \mathfrak{I}_i prim sein soll.

Wir definieren dann:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{I}_i}\right) = \prod'_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)^{-1},$$

indem wir μ^* aus den Congruenzen bestimmen:

$$\mu^* \equiv \mu \pmod{\mathfrak{I}_i^l}$$

$$\mu^* \equiv \alpha^l \pmod{\mathfrak{Q}},$$

wo α eine beliebige ganze Zahl aus k bedeutet, und das Produkt \prod' über alle zu \mathfrak{I} primen Primideale in k zu erstrecken ist.

Die vorstehende Definition ist eindeutig. Denn ist etwa:

$$\mu_0^* \equiv \mu \pmod{\mathfrak{I}_i^l}$$

$$\mu_0^* \equiv \alpha_0^l \pmod{\mathfrak{Q}},$$

so lässt sich eine ganze Zahl β aus k so bestimmen, dass

$$\mu^* \equiv \beta^l \mu_0^* \pmod{\mathfrak{I}} \quad \text{wird.}$$

Dann ist aber nach Satz 42

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{v, \mu^* \mu_0'^{-1}}{w} \right) = 1 \text{ oder } \prod_{(w)}' \left(\frac{v, \mu^*}{w} \right) = \prod_{(w)}' \left(\frac{v, \mu_0^*}{w} \right).$$

Aus der vorstehenden Definition folgen für das definierte Symbol die Rechenregeln:

$$\left(\frac{v v', \mu}{l_i} \right) = \left(\frac{v, \mu}{l_i} \right) \cdot \left(\frac{v', \mu}{l_i} \right)$$

$$\left(\frac{v, \mu \mu'}{l_i} \right) = \left(\frac{v, \mu}{l_i} \right) \cdot \left(\frac{v, \mu'}{l_i} \right).$$

§ 21.

Zwei Hilfssätze über die Normenreste des Körpers K nach l_i .

Satz 50. (Hilfssatz). Sind v, v', μ, μ' beliebige zu l prime ganze Zahlen aus k und ist

a) $v \equiv v' \alpha' (l_i^{l_i+1})$, wo α eine ganze Zahl aus k und l_i ein Primideal bedeutet, das in l genau zur l_i^{ten} Potenz aufgeht, so sind v und v' gleichzeitig Normenreste oder Normennichtreste des Körpers $K(\sqrt[l_i]{\mu}, k)$ nach l_i .

b) Ist $\mu \equiv \mu' \beta' (l_i^{l_i+1})$, wo β wieder eine ganze Zahl aus k bedeutet, so ist v gleichzeitig Normenrest oder Normennichtrest der Körper

$$K(\sqrt[l_i]{\mu}, k) \quad \text{und} \quad K(\sqrt[l_i]{\mu'}, k) \quad \text{nach } l_i.$$

Beweis:

a) Ist v Normenrest von $K(\sqrt[l_i]{\mu}, k)$ nach l_i , -also

$$v \equiv N_k(A) (l_i^{l_i+1}),$$

so ist

$$v' \equiv N_k(A\alpha') (l_i^{l_i+1}),$$

wenn

$$\alpha \alpha' \equiv 1 (l_i^{l_i+1})$$

ist.

Folglich ist auch v' Normenrest von $K(\sqrt[l_i]{\mu}, k)$ nach l_i .

Das Analoge gilt umgekehrt.

b) Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich keine der beiden Zahlen oder eine der beiden Zahlen μ und μ' die l_i^{te} Potenz einer ganzen Zahl in k ist. Der dritte noch denkbare Fall, dass beide Zahlen μ und μ' l_i^{te} Potenzen von ganzen Zahlen in k sind, erledigt sich offenbar sofort.

1) Keine der beiden Zahlen μ und μ' ist die l_i^{te} Potenz einer ganzen Zahl in k .

Soll ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach I_1 sein, so muss eine Congruenz:

$$(1) \quad \nu \equiv N_k \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \sqrt[l]{\mu} + \alpha_2 \sqrt[l]{\mu^2} + \dots + \alpha_{l-1} \sqrt[l]{\mu^{l-1}}}{\beta_0} \pmod{I_1^N}$$

bestehen, wo $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}, \beta_0$ ganze Zahl aus k und N eine ganze rationale Zahl, die grösser als $ll_1 + 1$ ist, bezeichnet. Es sei nun β_0 genau durch I_1^c teilbar. Wir bestimmen dann, was stets möglich ist, eine ganze Zahl β_N aus k , so dass

$$\mu \equiv \mu' \beta_N^l \pmod{I_1^{N+lc}},$$

und bilden die Zahl:

$$A^* = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \beta_N \sqrt[l]{\mu'} + \alpha_2 \beta_N^2 \sqrt[l]{\mu'^2} + \dots + \alpha_{l-1} \beta_N^{l-1} \sqrt[l]{\mu'^{l-1}}}{\beta_0} \cdot \delta,$$

wo δ zu I_1 prim und durch $\frac{\beta_0}{I_1^c}$ teilbar sein soll. A^* ist dann, wie leicht zu erkennen ist, eine ganze Zahl in $K(\sqrt[l]{\mu'}, k)$. Bestimmen wir nun δ' so, dass

$$\delta \delta' \equiv 1 \pmod{I_1^N}$$

wird, so ist

$$N_k(A^* \delta') \equiv \nu \pmod{I_1^N},$$

wie wir aus (1) schliessen, es ist also ν auch Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu'}, k)$ nach I_1 .

2) μ' ist die l^{te} Potenz einer ganzen Zahl in k ; es ist dann μ der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach $I_1^{l_1+1}$ congruent und es muss gezeigt werden, dass unter dieser Voraussetzung jede ganze zu I_1 prime Zahl ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach I_1 ist.

Zum Beweise bestimmen wir eine Zahl ganze μ^* , die nicht l^{te} Potenz einer Zahl aus k ist, derart, dass

$$\mu^* \equiv \mu \pmod{I_1^{l_1+1}}$$

$$\mu^* \equiv 1 \pmod{I_2^{l_2} \dots I_g^{l_g}}$$

wird.

Ferner bestimmen wir ein Primideal \mathfrak{p} derart, dass:

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{p}}\right)^n = \left(\frac{\varepsilon_1}{\mu^*}\right)^{-1} \dots \left(\frac{\varepsilon_{m'}}{\mathfrak{p}}\right)^n = \left(\frac{\varepsilon_{m'}}{\mu^*}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right)^n = \left(\frac{\lambda_1}{\mu^*}\right)^{-1} \dots \left(\frac{\lambda_g}{\mathfrak{p}}\right)^n = \left(\frac{\lambda_g}{\mu^*}\right)^{-1},$$

wo n einen durch l nicht teilbaren Exponenten bedeutet. Wir haben dann, wenn wir $\mathfrak{p}^n \mu^* = a$ setzen:

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{a}\right) = 1 \dots \left(\frac{\varepsilon_{m'}}{a}\right) = 1$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{a}\right) = 1 \dots \left(\frac{\lambda_z}{a}\right) = 1$$

d. h. a ist ein hyperprimäres Ideal, und wir können deshalb eine hyperprimäre Zahl α bestimmen, so dass

$$(\alpha) = a^{hh'} = (p^n \mu^*)^{hh'}.$$

Setzen wir dann

$$\pi = \frac{\alpha}{\mu^{*hh'}}, \quad \text{so ist offenbar} \quad (\pi) = p^{nhh'}.$$

Wir bestimmen nun weiter das Primideal q so, dass

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{q}\right)^{n'} = \left(\frac{\varepsilon_1}{\nu}\right)^{-1} \dots \left(\frac{\varepsilon_{m'}}{q}\right)^{n'} = \left(\frac{\varepsilon_{m'}}{\nu}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{q}\right)^{n'} = \left(\frac{\lambda_1}{\nu}\right)^{-1} \dots \left(\frac{\lambda_z}{q}\right)^{n'} = \left(\frac{\lambda_z}{\nu}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{\pi}{q}\right) = +1.$$

Setzen wir dann $q^{n'\nu} = \mathfrak{b}$, so ist offenbar \mathfrak{b} wieder ein hyperprimäres Ideal und wir können eine hyperprimäre Zahl β so bestimmen, dass

$$(\beta) = (q^{n'\nu})^{hh'}$$

wird.

Setzen wir nun $\kappa = \frac{\beta}{\nu^{hh'}}$, so wird

$$(\kappa) = q^{n'hh'},$$

wo n' einen nicht durch l teilbaren Exponenten bedeutet.

Da jetzt:

$$\pi \mu^* = \frac{\alpha}{\mu^{*hh'-1}} \quad \kappa \nu = \frac{\beta}{\nu^{hh'-1}},$$

so folgt, nach dem bereits Bewiesenen, wenn wir die Eigenschaften der Zahlen α und β berücksichtigen, dass ν dann Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$, also auch des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach \mathfrak{I}_1 wird, wenn κ Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$ nach \mathfrak{I}_1 wird.

Da π der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach \mathfrak{I}' congruent wird, so

kann die Relativediscriminante des Körpers $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$ nur den Primfaktor \mathfrak{p} enthalten. Es ist also $t = 1$ und daher nach Satz 19:

$$v^* > m' - 1.$$

Hieraus folgt $v^* = m'$, d. h. jede Einheit in k ist Relativnorm einer Einheit in $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$.

Da auch $v = m'$ sein muss, so ist die Anzahl aller ambigen Complexe in K gleich 1; der einzige ambige Complex in K ist also der Hauptcomplex.

Diese Thatsache benutzen wir zum Beweise dafür, dass die Classenzahl des Körpers $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$ nicht durch l teilbar ist. Wäre dies nämlich der Fall, so müsste es (vergl. Hilbert, A. Z. Satz 57) ein Ideal \mathfrak{S} in K geben, so dass

$$\mathfrak{S} \nmid 1, \quad \mathfrak{S}^l \sim 1$$

wäre.

Dieses Ideal könnte nicht dem Hauptcomplex angehören. Denn wäre $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{j}$, wo \mathfrak{j} ein Ideal aus k bedeutet, so müsste $\mathfrak{S}^l \sim \mathfrak{j}^l \sim 1$ sein und da $h \not\equiv 0 \pmod{l}$ ist, müsste $\mathfrak{S} \sim 1$ sein, was nicht möglich ist.

Es sei nun C die Idealclass in K , der \mathfrak{S} angehört, dann ist

$$C \nmid 1 \quad C^l \sim 1.$$

Wir setzen dann

$$C \sim C^{(1)} SC$$

und behaupten, dass

$$C^{(1)} = C^{(1-s)}$$

nicht dem Hauptcomplex angehören kann. Wenn nämlich $C^{(1-s)}$ dem Hauptcomplex angehörte, so müsste (vergl. Hilbert A. Z. S. 468) C eine ambige Klasse sein, also selbst dem Hauptcomplex angehören, was gegen unsere Annahme ist. Fahren wir jetzt fort und bilden:

$$\begin{aligned} C^{(2)} &= (C^{(1)})^{(1-s)} = C^{(1-s)^2} \\ C^{(3)} &= (C^{(2)})^{(1-s)} = (C^{(1)})^{(1-s)^2} = C^{(1-s)^3} \\ &\dots \dots \dots \\ C^{(l)} &= (C^{(l-1)})^{(1-s)} = (C^{(l-2)})^{(1-s)^2} = \dots C^{(1-s)^l}, \end{aligned}$$

so könnten alle diese Klassen $C^{(2)}, C^{(3)}, \dots, C^{(l)}$ nicht dem Hauptcomplex angehören, da C ihm nicht angehört. Andererseits ist aber sicher:

$$C^{(1-s)^l} \sim 1.$$

Unsere Annahme, dass die Classenzahl von K durch l teilbar sei, führt also zu einem Widerspruch und ist deshalb zu verwerfen.

Wegen $\left(\frac{\pi}{q}\right) = 1$, zerfällt q im Körper $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$.

Es sei \mathfrak{Q} ein Primfaktor von q in K . Wir können dann, wenn wir die Klassenzahl in K mit H bezeichnen und H' so bestimmen, dass

$$HH' \equiv 1 \pmod{l}$$

wird,

$$\mathfrak{Q}^{n^{hh'H'}} = (A)$$

setzen, wo A eine ganze Zahl aus K bedeutet. Dann ist aber $q^{n^{hh'H'}}$ gleich der Relativnorm des Hauptideals (A) , und wir haben folglich, wenn wir mit ε eine geeignete Einheit aus k bezeichnen:

$$\varepsilon \kappa^{nH'} = N_k(A).$$

Da nun, wie bereits bewiesen, ε die Relativnorm einer Einheit E in K ist, so folgt, wenn wir κ' als ganze Zahl in k so bestimmen, dass

$$\kappa \kappa' \equiv 1 \pmod{l_1^{l_1+1}}$$

ist, dass

$$\kappa \equiv N_k(AE^{-1} \cdot \kappa'^{\frac{nH'-1}{l_1}}) \pmod{l_1^{l_1+1}}.$$

Folglich ist κ Normenrest von $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$ nach l_1 und damit ist unser Satz bewiesen.

Satz 51. Sind ν und μ zwei zu l_1 prime ganze Zahlen in k und ist

$$\left(\frac{\nu, \mu}{l_1}\right) = 1,$$

so ist ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach l_1 .

Beweis: Wir setzen:

$$l = l_1^i \mathfrak{Q},$$

wo \mathfrak{Q} zu l_1 prim ist, und bestimmen eine Zahl μ^* derart, dass

$$\mu^* \equiv \mu \pmod{l_1^{l_1+1}}$$

$$\mu^* \equiv 1 \pmod{\mathfrak{Q}^i}.$$

Darauf bestimmen wir ein Primideal \mathfrak{p} in k derart, dass für einen geeigneten zu l primen Exponenten n :

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{p}^n \mu^*}\right) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m')$$

$$\left(\frac{\lambda_k}{\mathfrak{p}^n \mu^*}\right) = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, z).$$

$\mathfrak{p}^n \mu^*$ ist dann ein hyperprimäres Ideal und wir können daher eine hyperprimäre Zahl α so wählen, dass

$$(\alpha) = \mathfrak{p}^{nhh'} \cdot \mu^{*hh'}.$$

Wir setzen

$$\pi = \frac{\alpha}{\mu^{*hh'}} \quad \text{und haben dann} \quad (\pi) = \mathfrak{p}^{hh'n}.$$

In entsprechender Weise bestimmen wir jetzt das Primideal \mathfrak{q} derart, dass für einen geeigneten zu l primen Exponenten n' :

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}^{n'} \nu}\right) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m')$$

$$\left(\frac{\lambda_k}{\mathfrak{q}^{n'} \nu}\right) = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, z)$$

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) = 1.$$

$\mathfrak{q}^{n'} \nu$ ist wieder ein hyperprimäres Ideal und wir können deshalb die hyperprimäre Zahl β so bestimmen, dass

$$(\beta) = \mathfrak{q}^{n'hh'} \nu^{hh'}$$

ist. Setzen wir $\varkappa = \frac{\beta}{\nu^{hh'}}$, so wird $(\varkappa) = \mathfrak{q}^{n'hh'}$.

Nach Satz 46 ist dann:

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{\nu, \alpha}{w}\right) = 1 \quad \prod_{(w)}' \left(\frac{\beta, \pi}{w}\right) = \prod_{(w)}' \left(\frac{\varkappa, \beta}{w}\right) = 1.$$

Folglich ist:

$$\left(\frac{\nu, \alpha}{\mathfrak{I}_1}\right) = 1 \quad \left(\frac{\beta, \pi}{\mathfrak{I}_1}\right) = 1.$$

Daraus folgt weiter:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{I}_1}\right) = \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{I}_1}\right) = \left(\frac{\nu, \mu^{*hh'}}{\mathfrak{I}_1}\right) = \left(\frac{\nu, \pi}{\mathfrak{I}_1}\right)^{-1}$$

und

$$\left(\frac{\nu, \pi}{\mathfrak{I}_1}\right)^{-1} = \left(\frac{\nu^{hh'}, \pi}{\mathfrak{I}_1}\right)^{-1} = \left(\frac{\varkappa, \pi}{\mathfrak{I}_1}\right).$$

Es ergibt sich also

$$\left(\frac{\varkappa, \pi}{\mathfrak{I}_1}\right) = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)^{-1} = 1.$$

Folglich ist, da

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) = 1, \quad \text{auch} \quad \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Wir betrachten jetzt den Körper $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$ und wollen zeigen, dass \varkappa stets gleich der Relativnorm einer solchen Zahl dieses Körpers ist, deren Nenner zu \mathfrak{I}_1 prim ist. Wir unterscheiden bei dem Beweise 3 Fälle:

1) \mathfrak{p} ist primär und π eine primäre Zahl.

Die Relativdiscriminante von K enthält dann nur den Faktor \mathfrak{p} und wir zeigen genau wie im vorigen Satze die Richtigkeit unserer Behauptung.

2) \mathfrak{p} ist primär, aber π ist keine primäre Zahl, sondern es ist

$$\pi = \varepsilon \pi^*,$$

wo π^* eine primäre Zahl und ε eine Einheit aus k ist, die nicht l^{te} Potenz einer Einheit ist.

Die Relativdiscriminante von K enthält in diesem Falle die beiden Primfaktoren \mathfrak{p} und \mathfrak{I}_1 .

Nach Satz 20 ist dann:

$$a \leq 2 + v - m' - 1.$$

Da nun $v \leq m'$, so ist $a \leq 1$, d. h. die Anzahl A aller ambigen Complexe in K ist höchstens gleich l .

Es sei jetzt \mathfrak{S} ein Ideal aus K und $j = N_*(\mathfrak{S})$. Ferner sei $j^{h'} = (i)$. Ist dann $\left(\frac{i}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, so bezeichnen wir den Complex, zu dem \mathfrak{S} gehört, als zum Hauptgeschlecht gehörig.

Es lässt sich nachweisen, dass nicht sämtliche Complexe in K zum Hauptgeschlecht gehören. Es sei nämlich \mathfrak{r} ein Primideal der Art, dass

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = 1 \quad \left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{r}}\right) \neq 1.$$

\mathfrak{r} ist in K zerlegbar und \mathfrak{R} sei ein Primfaktor von \mathfrak{r} . Setzen wir dann:

$$\mathfrak{r}^{h'} = (\mathfrak{q}),$$

so wird

$$\left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{r}}\right) \neq 1.$$

Der durch \mathfrak{H} bestimmte Complex gehört also nicht zum Hauptgeschlecht. Es sei nun f die Anzahl aller Complexe des Hauptgeschlechtes in K und f' die Anzahl derjenigen Complexe in K , die symbolische $(1-S)^{t_0}$ Potenzen von Complexen sind. Wir erkennen dann genau wie früher die Richtigkeit der Gleichung

$$Af' = lf$$

(vergl. Satz 22).

Aus $A \leqq l$, folgt $f \leqq f'$. Andererseits ist $f' \leqq f$, da jede $(1-S)^{t_0}$ Potenz eines Complexes notwendig zum Hauptgeschlecht gehört; deshalb muss $f' = f$, $A = l$, $a = 1$, $v = m'$ sein, d. h. jeder Complex des Hauptgeschlechtes in K ist symbolische $(1-S)^{t_0}$ Potenz eines Complexes in K und jede Einheit in k ist Relativnorm einer Einheit oder gebrochenen Zahl in K .

Um nun zu zeigen, dass \varkappa gleich der Relativnorm einer Zahl in K ist, bemerken wir, dass q in K zerlegbar ist. Da $\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, gehört jeder Primfaktor \mathfrak{Q} von q zum Hauptgeschlecht, und da jeder Complex des Hauptgeschlechtes symbolische $(1-S)^{t_0}$ Potenz eines Complexes ist, können wir setzen:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{S}^{(1-s)} \cdot A \cdot \mathfrak{j}$$

wo \mathfrak{S} ein Ideal und A eine Zahl aus K und \mathfrak{j} ein Ideal aus k bedeutet.

Bilden wir die Relativnorm von \mathfrak{Q} und erheben in die $hh'n^{t_0}$ Potenz, so wird, wenn wir

$$i^{hh'} = (\mathcal{P})$$

setzen:

$$(\varkappa) = N_k (A\mathcal{P})^{n'}$$

folglich $\xi\varkappa = N_k (A\mathcal{P})^{n'}$, wenn ξ eine geeignete Einheit aus k ist. Da ξ die Relativnorm einer Zahl aus K ist, so folgt, dass auch \varkappa die Relativnorm einer Zahl aus K ist. Um einzusehen, dass der Nenner der letzteren zu l_1 prim gewählt werden kann, braucht man nur zu beachten, dass l_1 in K in l gleiche Faktoren zerfällt.

Damit ist der zweite Fall vollständig erledigt.

3) \mathfrak{p} ist nicht primär. Es sei dann ξ eine Einheit aus k , so dass $\left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$; ξ ist dann sicher nicht die Relativnorm einer ganzen oder gebrochenen Zahl aus K . Denn wäre

$$\xi = N_k \left(\frac{B}{B_1}\right)$$

wo B und B_1 ganze Zahlen aus K bezeichnen, so können wir diese als relativprim zu \mathfrak{p} annehmen.

Es wäre dann

$$\left(\frac{N_k(B), \pi}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \quad \text{also auch} \quad \left(\frac{\xi N_k(B_1), \pi}{\mathfrak{p}}\right) = 1,$$

folglich

$$\left(\frac{\xi, \pi}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

gegen unsere Annahme.

Es ist also ξ sicher nicht Relativnorm einer Zahl aus K und deshalb

$$v \leq m' - 1.$$

Da überdies t für den Körper K gleich 2 ist, so folgt aus Satz 20:

$$a \leq 0, \quad \text{also} \quad a = 0 \quad v = m' - 1.$$

Es bilden nun alle Einheiten η , für die $\left(\frac{\eta}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, zusammen $l^{m'-1}$ Einheitenverbände, diejenigen Einheiten η' , für welche $\left(\frac{\eta'}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$, $(l-1)l^{m'-1}$ Einheitenverbände. Die letzteren enthalten keine Einheiten aus k , welche Relativnormen von Zahlen aus K sind und daher sind alle Einheiten η , für die $\left(\frac{\eta}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, Relativnormen von Zahlen des Körpers K .

Aus der Gleichung $a = 0$ folgt, dass der einzige ambige Complex in K der Hauptcomplex ist. Wir schliessen dann wie früher, dass die Klassenzahl H von K nicht durch l teilbar ist und dass, wenn ε eine geeignete Einheit bezeichnet, $\varepsilon \kappa^{HH'}$ die Relativnorm einer Zahl aus K sein muss. Daraus folgt dann

$$\left(\frac{\varepsilon \kappa^{HH'}}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \quad \text{und wegen} \quad \left(\frac{\kappa}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \quad \text{auch} \quad \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right) = 1,$$

d. h. ε ist ebenfalls Relativnorm einer Zahl aus K und dasselbe gilt folglich von κ , wobei wir die Zahl, deren Relativnorm κ ist, offenbar wieder so annehmen können, dass ihr Nenner zu \mathfrak{l}_1 prim ist.

Wir haben also in allen 3 Fällen nachgewiesen, dass κ Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$ nach \mathfrak{l}_1 ist. Dann folgt aber aus Satz 50, dass auch ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach \mathfrak{l}_1 ist.

Satz 52. Sind ν und μ zwei zu \mathfrak{l} prime ganze Zahlen aus k und ist ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach \mathfrak{l}_1 , so ist stets:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1}\right) = 1.$$

Beweis: Wir bestimmen μ^* so, dass

$$\begin{aligned} \mu^* &\equiv \mu \quad (l_1^{l_1+1}) \\ \mu^* &\equiv 1 \quad (l_2^{l_2+1} \dots l_r^{l_r+1}). \end{aligned}$$

Dann ist nach Voraussetzung, resp. nach Satz 50:

$$\begin{aligned} \nu &\text{ Normenrest von } K(\sqrt[l_1]{\mu^*}, k) \quad \text{und} \quad K(\sqrt[l_1]{\mu}, k) \quad \text{nach } l_1 \\ \nu &\quad ,, \quad ,, \quad K(\sqrt[l_2]{\mu^*}, k) \quad \text{nach} \quad l_2, l_3, \dots, l_r. \end{aligned}$$

Folglich giebt es ganze Zahlen A_1, A_2, \dots, A_r im Körper $K(\sqrt[l_1]{\mu^*}, k)$, so dass:

$$\begin{aligned} \nu &\equiv N_k(A_1) \quad (l_1^{l_1}) \\ \nu &\equiv N_k(A_2) \quad (l_2^{l_2}) \\ &\dots \dots \dots \\ \nu &\equiv N_k(A_r) \quad (l_r^{l_r}). \end{aligned}$$

Bestimmen wir jetzt die ganze Zahl A in K so, dass

$$A \equiv A_1 \quad (l_1^{l_1}) \quad \dots \quad A \equiv A_r \quad (l_r^{l_r}),$$

so wird

$$\nu \equiv N_k(A) \quad (l_1^{l_1} l_2^{l_2} \dots l_r^{l_r}),$$

daher nach Satz 42:

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{\nu N_k(A)^{l-1} \mu^*}{w} \right) = 1$$

und folglich auch

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{\nu, \mu^*}{w} \right) = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\nu, \mu}{l_1} \right) = 1.$$

§ 22.

Das Produkt $\prod_{(w)}' \left(\frac{\nu, \mu}{w} \right)$ für beliebige zu l prime ganze Zahlen aus k .

Wir beweisen zunächst noch einen Satz über das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{l_1} \right)$.

Satz 53. Sind ν, μ zwei zu l prime ganze Zahlen aus k , so ist

$$\left(\frac{\nu, \mu}{l_1} \right) : \left(\frac{\mu, \nu}{l_1} \right) = 1.$$

Beweis: Beachtet man, dass nach Satz 52

$$\left(\frac{\alpha, \alpha}{I_1}\right) = 1$$

ist, wenn α irgend eine zu I prime ganze Zahl in k bedeutet, so folgt:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{I_1}\right) = \left(\frac{\nu\mu, \mu}{I_1}\right) \quad \left(\frac{\mu, \nu}{I_1}\right) = \left(\frac{\nu\mu, \nu}{I_1}\right).$$

Folglich ist

$$\left(\frac{\nu, \mu}{I_1}\right) \cdot \left(\frac{\mu, \nu}{I_1}\right) = \left(\frac{\nu\mu, \mu}{I_1}\right) \cdot \left(\frac{\nu\mu, \nu}{I_1}\right) = \left(\frac{\nu\mu, \nu\mu}{I_1}\right) = 1.$$

Wir können jetzt folgende Verallgemeinerung des Satzes 46 beweisen.

Satz 54. Wenn ν, μ zwei zu I prime ganze Zahlen aus k sind, so ist stets:

$$\prod_{(w)} \left(\frac{\nu, \mu}{w}\right) = 1,$$

wo das Produkt $\prod_{(w)}$ über sämtliche Primideale w in k zu erstrecken ist.

Beweis: Man bestimme s ganze Zahlen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ aus k , die den Congruenzen genügen:

$$\begin{aligned} \mu_1 &\equiv \mu & \mu_2 &\equiv 1 \cdots \mu_s &\equiv 1 & (I_1^{\mu_1}) \\ \mu_1 &\equiv 1 & \mu_2 &\equiv \mu \cdots \mu_s &\equiv 1 & (I_2^{\mu_2}) \\ \cdot &\cdot & \cdot &\cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_1 &\equiv 1 & \mu_2 &\equiv 1 \cdots \mu_s &\equiv \mu & (I_s^{\mu_s}). \end{aligned}$$

Dann ist:

$$\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_s \equiv \mu \quad (I).$$

Aus dieser Congruenz folgt:

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{\nu, \mu (\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_s)^{I-1}}{w}\right) = 1.$$

Ferner ist nach Definition:

$$\begin{aligned} \prod_{(w)} \left(\frac{\nu, \mu}{w}\right) &= \prod_{(w)}' \left(\frac{\nu, \mu}{w}\right) \cdot \left(\frac{\nu, \mu}{I_1}\right) \left(\frac{\nu, \mu}{I_2}\right) \cdots \left(\frac{\nu, \mu}{I_s}\right) \\ \left(\frac{\nu, \mu}{I_1}\right) &= \prod_{(w)}' \left(\frac{\nu, \mu_1}{w}\right)^{I-1} \cdots \left(\frac{\nu, \mu_s}{I_s}\right) = \prod_{(w)}' \left(\frac{\nu, \mu_s}{w}\right)^{I-1}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}} \right) = \prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}} \right) \cdot \prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu_1^{-1}}{\mathfrak{w}} \right) \cdot \dots \cdot \prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu_z^{-1}}{\mathfrak{w}} \right)$$

$$= \prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_z)^{-1}}{\mathfrak{w}} \right) = 1.$$

§ 23.

Das allgemeine Reciprocitätsgesetz und der erste Ergänzungssatz zu demselben.

Aus dem letzten Satze des vorigen Paragraphen leiten wir leicht die folgenden beiden Sätze ab:

Satz 55. Das allgemeine Reciprocitätsgesetz für l^{te} Potenzreste im Körper k .

Es seien $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_z$ die in $\mathfrak{I} = (1 - \zeta)$ aufgehenden Primideale des Körpers k ; ferner seien $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ zwei zu \mathfrak{I} prime Primideale in k und π, κ zwei ganze Zahlen in k , so dass

$$(\pi) = \mathfrak{p}^{hh'} \quad (\kappa) = \mathfrak{q}^{hh'};$$

dann gilt die Gleichung:

$$\left(\frac{\kappa}{\mathfrak{p}} \right) \cdot \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}} \right)^{-1} = \left(\frac{\pi, \kappa}{\mathfrak{I}_1} \right) \cdot \left(\frac{\pi, \kappa}{\mathfrak{I}_2} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{\pi, \kappa}{\mathfrak{I}_z} \right).$$

Satz 56. Der erste Ergänzungssatz zum allgemeinen Reciprocitätssatz.

Es seien $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_z$ die in \mathfrak{I} aufgehenden Primideale des Körpers k und ε eine beliebige Einheit aus k ; ferner sei \mathfrak{p} ein zu \mathfrak{I} primes Primideal in k und π eine ganze Zahl aus k , so dass $(\pi) = \mathfrak{p}^{hh'}$ wird; dann gilt die Gleichung:

$$\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}} \right)^{-1} = \left(\frac{\varepsilon, \pi}{\mathfrak{I}_1} \right) \left(\frac{\varepsilon, \pi}{\mathfrak{I}_2} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{\varepsilon, \pi}{\mathfrak{I}_z} \right).$$

VI.

Das Produkt $\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}} \right)$ für beliebige ganze Zahlen aus k .

§ 24.

Das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{I}_i} \right)$ für beliebige ganze Zahlen in k .

Definition 11. Es seien ν, μ zwei beliebige ganze Zahlen aus k und

\mathfrak{I}_1 sei ein Primideal, das in \mathfrak{I} genau zur l_1^{ten} und in μ genau zur α^{ten} Potenz aufgeht. Wir bestimmen dann die ganze Zahl μ^* aus k so, dass

$$\begin{aligned}\mu^* &\equiv \mu && (\mathfrak{I}_1^{l_1+1+\alpha}) \\ \mu^* &\equiv \alpha^l && (\mathfrak{I}_2^{l_2+1} \dots \mathfrak{I}_s^{l_s+1}),\end{aligned}$$

wo α eine zu $\mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3 \dots \mathfrak{I}_s$ prime ganze Zahl aus k bedeutet.

Wir setzen dann:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{I}_1}\right) = \prod_{(\mathfrak{I})} \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{I}}\right)^{-1},$$

wo das Produkt über alle zu \mathfrak{I} primen Primideale in k zu erstrecken ist.

Mit Benutzung des Satzes 46 folgt die Eindeutigkeit dieser Definition.

Es gelten auch jetzt die Formeln:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\nu_1 \nu_2, \mu}{\mathfrak{I}_1}\right) &= \left(\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{I}_1}\right) \cdot \left(\frac{\nu_2, \mu}{\mathfrak{I}_1}\right) \\ \left(\frac{\nu, \mu_1 \mu_2}{\mathfrak{I}_1}\right) &= \left(\frac{\nu, \mu_1}{\mathfrak{I}_1}\right) \cdot \left(\frac{\nu, \mu_2}{\mathfrak{I}_1}\right)\end{aligned}$$

in denen $\mu, \mu_1, \mu_2, \nu, \nu_1, \nu_2$ beliebige ganze Zahlen aus k bedeuten.

§ 25.

Die Fundamentalsätze für das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{I}_1}\right)$, wenn ν, μ beliebige ganze Zahlen aus k sind.

Mit denselben Hilfsmitteln, die wir beim Beweise des Satzes 50 verwandt haben, gelingt es, den folgenden verallgemeinerten Satz zu beweisen:

Satz 57. Hilfssatz. Es seien $\nu_1, \nu_2, \mu_1, \mu_2$ ganze Zahlen in k und es gehe \mathfrak{I}_1 in diesen Zahlen resp. zur $b_1, b_2, a_1, a_2^{\text{ten}}$ Potenz auf, wobei $b_2 \leq b_1, a_2 \leq a_1$ sei. Wenn es dann in k ganze Zahlen α, β giebt, so dass:

$$\begin{aligned}\nu_1 &\equiv \alpha^l \nu_2 && (\mathfrak{I}_1^{l_1+1+b_1}) \\ \mu_1 &\equiv \beta^l \mu_2 && (\mathfrak{I}_1^{l_1+1+a_1}),\end{aligned}$$

so ist, wenn ν_1 Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu_1}, k)$ nach \mathfrak{I}_1 ist, auch ν_2 Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu_2}, k)$ nach \mathfrak{I}_1 und umgekehrt.

Mit Hilfe des vorstehenden Satzes sind wir im Stande, die folgenden beiden fundamentalen Sätze zu beweisen.

Satz 58. Sind ν, μ zwei beliebige ganze Zahlen aus k und ist $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{I}_1}\right) = 1$, so ist ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach \mathfrak{I}_1 .

Beweis: Es sei ν durch die b^{te} und μ durch die a^{te} Potenz von \mathfrak{I}_1 teilbar. Wir haben dann 2 Fälle zu unterscheiden, je nachdem a durch l teilbar ist oder nicht.

1) $a \equiv 0 \pmod{l}$. Bedeutet dann $\bar{\lambda}_1$ eine durch $\mathfrak{I}_1^{\frac{a}{l}}$, aber durch keine höhere Potenz von \mathfrak{I}_1 teilbare ganze Zahl aus k , so bestimme man μ^* so, dass

$$(1) \quad \begin{aligned} \bar{\lambda}_1 \mu^* &\equiv \mu && (\mathfrak{I}_1^{l_1+1+a}) \\ \mu^* &\equiv 1 && (\mathfrak{I}_2^{l_2+1} \dots \mathfrak{I}_z^{l_z+1}). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{I}_1}\right) = \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{I}_1}\right),$$

folglich nach Voraussetzung

$$(2) \quad \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{I}_1}\right) = 1.$$

Es soll jetzt gezeigt werden, dass der Exponent b stets incongruent Null nach l ist, wenn \mathfrak{I}_1 im Körper $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$ unzerlegbar ist. Wir nehmen letzteres an und bestimmen das Primideal \mathfrak{p} so, dass für einen gewissen zu l primen Exponenten n :

$$(3) \quad \left(\frac{\varepsilon_1}{\mu^* \mathfrak{p}^n}\right) = 1 \dots \left(\frac{\varepsilon_{m'}}{\mu^* \mathfrak{p}^n}\right) = 1$$

$$(4) \quad \left(\frac{\lambda_1}{\mu^* \mathfrak{p}^n}\right) = 1 \dots \left(\frac{\lambda_z}{\mu^* \mathfrak{p}^n}\right) = 1.$$

Da \mathfrak{I}_1 in $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$ unzerlegbar ist, ist μ^* der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{I}_1^{l_1}$ congruent und deshalb wegen (1) auch nach dem Modul l^i . Dann ist aber $\left(\frac{\varepsilon_i}{\mu^*}\right) = 1$ ($i = 1, 2, \dots, m'$) und folglich \mathfrak{p} ein primäres Primideal.

Bedeutet π eine Primärzahl desselben, so folgt aus (3) und (4), dass $\mu^* \pi^n$ eine hyperprimäre Zahl ist. Folglich ergibt sich aus (1), dass π^n , also auch π , der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl nach $\mathfrak{I}_2^{l_2+1} \dots \mathfrak{I}_z^{l_z+1}$ congruent ist und nach Satz 13 sind deshalb alle Primideale $\mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_z$ im Körper $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$ zerlegbar. Da bereits früher gezeigt ist, dass alle Ideale eines Körpers $K(\sqrt[l]{\pi}, k)$ dem Hauptgeschlecht angehören, so gilt:

$$(5) \quad \left(\frac{\lambda_2}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \quad \left(\frac{\lambda_3}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \dots \left(\frac{\lambda_z}{\mathfrak{p}}\right) = 1,$$

wenn

$$I_1^{hh'} = (\lambda_1) \quad I_2^{hh'} = (\lambda_2) \cdots I_s^{hh'} = (\lambda_s)$$

gesetzt wird.

Wäre nun auch $\left(\frac{\lambda_1}{p}\right) = 1$, so müsste π und folglich auch μ^* eine hyperprimäre Zahl sein; dann zerfiel aber I_1 im Körper $K(\sqrt[b]{\mu^*}, k)$, was gegen unsere Annahme ist; folglich ist

$$\left(\frac{\lambda_1}{p}\right) \neq 1.$$

Wir setzen nun:

$$(v) = n \cdot I_1^{b_1} I_2^{b_2} \cdots I_s^{b_s},$$

wo n zu l prim sein soll und haben dann:

$$v^{hh'} = v^* \lambda_1^{b_1} \lambda_2^{b_2} \cdots \lambda_s^{b_s},$$

wo

$$n^{hh'} = (v^*).$$

Nach Satz 46 ist

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{v^{hh'}, \mu^* \pi^n}{w} \right) = 1,$$

daraus folgt

$$(6) \quad \prod_{(w)}' \left(\frac{v^{hh'}, \pi}{w} \right) = 1.$$

Nun ist nach Definition:

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{v^{hh'}, \pi}{w} \right) = \prod_{(w)}' \left(\frac{v^*, \pi}{w} \right) \cdot \prod_{(w)}' \left(\frac{\lambda_1, \pi}{w} \right)^{b_1} \cdot \prod_{(w)}' \left(\frac{\lambda_2, \pi}{w} \right)^{b_2} \cdots \prod_{(w)}' \left(\frac{\lambda_s, \pi}{w} \right)^{b_s}.$$

Daraus folgt leicht, da nach Satz 42

$$\prod_{(w)}' \left(\frac{v^*, \pi}{w} \right) = 1,$$

wenn wir (5) und (6) berücksichtigen, dass

$$\left(\frac{\lambda_1}{p}\right)^{b_1} = 1$$

sein muss.

Es sind daher nur die beiden Fälle denkbar: entweder ist l im Körper $K(\sqrt[b]{\mu^*}, k)$ zerlegbar oder es ist b durch l teilbar.

In beiden Fällen erkennt man leicht die Möglichkeit, eine Zahl A in K zu finden, so dass

$$\frac{\nu}{N_k(A)} \text{ gleich einem Bruch } \frac{\varrho}{\sigma} \text{ wird,}$$

dessen Zähler und Nenner ganze zu l prime Zahlen in k sind. Es folgt dann aus (2), dass

$$\left(\frac{N_k(A) \cdot \frac{\varrho}{\sigma}, \mu^*}{l_1} \right) = \left(\frac{\varrho \sigma^{l-1}, \mu^*}{l_1} \right) = 1.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass $\varrho \sigma^{l-1}$, und folglich auch ν , Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$ nach l_1 ist. Dasselbe gilt dann nach Satz 57 für den Körper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$.

$$2) \quad a \not\equiv 0 \pmod{l}.$$

Wir bestimmen μ^* zu l prim so, dass

$$\begin{aligned} \lambda_1^a \mu^* &\equiv \mu^{bh'} \pmod{l_1^{l_1+1+abh'}} \\ \lambda_1^a \mu^* &\equiv 1 \pmod{l_2^{l_2+1} \dots l_z^{l_z+1}} \end{aligned}$$

wird.

Es sei ferner \mathfrak{p} ein Primideal, so dass für einen gewissen zu l primen Exponenten n

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varepsilon_i}{\mu^* \mathfrak{p}^n} \right) &= 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m') \\ \left(\frac{\lambda_k}{\mu^* \mathfrak{p}^n} \right) &= 1 \quad (k = 1, 2, \dots, z). \end{aligned}$$

Dann kann man eine hyperprimäre Zahl $\mu^* \pi^{*n}$ bestimmen, so dass

$$(\pi^*) = \mathfrak{p}^{bh'}.$$

Ferner lässt sich im Körper $K(\sqrt[l]{\mu^* \lambda_1^a}, k)$ sicher eine ganze Zahl A finden, so dass $\frac{\nu}{N_k(A)}$ gleich einem Bruch $\frac{\varrho}{\sigma}$ wird, dessen Zähler und Nenner zu l prim sind.

Endlich bestimme man das Primideal \mathfrak{q} so, dass für einen gewissen zu l primen Exponenten n' :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varepsilon_i}{\varrho \sigma^{l-1} \mathfrak{q}^{n'}} \right) &= 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m') \\ \left(\frac{\lambda_k}{\varrho \sigma^{l-1} \mathfrak{q}^{n'}} \right) &= 1 \quad (k = 1, 2, \dots, z) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\lambda_1^a \pi^{*n}}{q}\right) = 1 \quad \bar{n} + n \equiv 0 (l).$$

Nach Satz 48 gibt es dann eine Zahl \varkappa , so dass $(\varkappa) = q^{\frac{h\varepsilon}{l}}$ und $q\sigma^{l-1}\varkappa^a$ eine hyperprimäre Zahl wird.

Nach Definition 11 ist nun:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{l_1}\right) = \prod'_{(w)} \left(\frac{\nu, \lambda_1^a \mu^*}{w}\right)^{-1}.$$

Ferner ist

$$\prod'_{(w)} \left(\frac{\nu, \lambda_1^a \mu^*}{w}\right) = \prod'_{(w)} \left(\frac{q\sigma^{l-1}, \lambda_1^a \mu^*}{w}\right)$$

und nach Satz 46:

$$\prod'_{(w)} \left(\frac{q\sigma^{l-1}, \lambda_1^a \mu^*}{w}\right) \cdot \prod'_{(w)} \left(\frac{\varkappa^{n'}, \lambda_1^a \mu^*}{w}\right) = 1$$

und nach Satz 42:

$$\prod'_{(w)} \left(\frac{\varkappa^{n'}, \lambda_1^a \mu^*}{w}\right) = \prod'_{(w)} \left(\frac{\varkappa^{n'}, \lambda_1^a \pi^{*n}}{w}\right).$$

Fasst man diese Beziehungen zusammen, so ergibt sich, da nach Voraussetzung

$$\left(\frac{\nu, \mu}{l_1}\right) = 1,$$

$$\prod'_{(w)} \left(\frac{\varkappa^{n'}, \lambda_1^a \pi^{*n}}{w}\right) = 1.$$

Da nun

$$\left(\frac{\lambda_1^a \pi^{*n}}{q}\right) = 1$$

ist, so muss deshalb auch

$$\left(\frac{\varkappa}{p}\right) = 1$$

sein.

Wir ziehen jetzt den Körper $K(\sqrt[l]{\lambda_1^a \pi^{*n}}, k)$ heran und zeigen genau wie im Beweise zum Satz 51, dass \varkappa stets Normenrest dieses Körpers nach l_1 ist. Beachten wir endlich, dass

$$q\sigma^{l-1}\varkappa^{n'} \quad \text{und} \quad \mu^* \pi^{*p}$$

hyperprimäre Zahlen sind und dass

$$\frac{\nu}{N_k(A)} = \frac{\varrho}{\sigma},$$

so ergibt sich, dass auch ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach l_1 ist.

Satz 59. Sind ν und μ zwei beliebige ganze Zahlen aus k und ist ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ nach l_1 , so ist:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{l_1} \right) = 1.$$

Beweis: Wir behalten die Bezeichnungen des vorigen Satzes bei und bestimmen μ^* so, dass:

$$\begin{aligned} \mu^* &\equiv \mu \quad (l_1^{l_1+1+a}) \\ \mu^* &\equiv 1 \quad (l_2^{l_2+1} \dots l_z^{l_z+1}) \end{aligned}$$

und dass μ^* keine l^{te} Potenz einer Zahl aus k wird.

Dann ist ν Normenrest des Körpers $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$ nach l_1, l_2, \dots, l_z . Es giebt daher ganze Zahlen A_1, \dots, A_z in $K(\sqrt[l]{\mu^*}, k)$, so dass

$$\begin{aligned} \nu &\equiv N_k(A_1) \quad (l_1^{l_1+1+b}) \\ \nu &\equiv N_k(A_2) \quad (l_2^{l_2+1+b_2}) \\ &\dots \dots \dots \\ \nu &\equiv N_k(A_z) \quad (l_z^{l_z+1+b_z}). \end{aligned}$$

Wir schliessen hieraus auf die Existenz einer ganzen Zahl A in K , so dass

$$\nu \equiv N_k(A) \quad (l_1^{l_1+1+b} \quad l_2^{l_2+1+b_2} \dots l_z^{l_z+1+b_z}).$$

Wir können nun $\frac{\nu}{N_k(A)}$ als einen Bruch $\frac{\varrho}{\sigma}$ darstellen, dessen Zähler und Nenner ganze zu l prime Zahlen aus k sind.

Es gilt dann die Congruenz:

$$\varrho \sigma^{l-1} \equiv \frac{\nu \sigma^l}{N_k(A)} \equiv \sigma^l \quad (l_1^{l_1+1} \quad l_2^{l_2+1} \dots l_z^{l_z+1})$$

und hieraus folgt nach Satz 46:

$$\prod_{(w)} \left(\frac{\varrho \sigma^{l-1}, \mu^*}{w} \right) = 1.$$

Folglich ist auch:

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{w}} \right)^{-1} = \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1} \right) = 1.$$

Aus dem Bewiesenen ergibt sich leicht die Richtigkeit der Formel:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1} \right) \cdot \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}_1} \right) = 1$$

für beliebige ganze Zahlen ν, μ . Es zeigt sich daher, dass alle Eigenschaften, die für das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_1} \right)$ gelten, wenn ν, μ zu \mathfrak{l} prime ganze Zahlen sind, auch dann ihre Gültigkeit behalten, wenn ν, μ beliebige ganze Zahlen aus k sind.

§ 26.

Das Produkt $\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}} \right)$ für beliebige ganze Zahlen ν, μ aus k und der zweite Ergänzungssatz zum Reciprocitätsgesetz.

Wir sind jetzt im Stande, folgenden allgemeinen Satz auszusprechen:

Satz 60. Sind ν, μ zwei beliebige ganze Zahlen aus k , so ist das über alle Primideale \mathfrak{w} von k zu erstreckende Produkt

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}} \right)$$

gleich 1.

Der Beweis dieses Satzes ist ganz analog dem für den Satz 54 geltenden; ich gehe deshalb darauf nicht weiter ein, sondern gebe nur noch einen Specialfall des angeführten Satzes, für $\nu = \lambda_1, \mu = \pi$ an, der als zweiter Ergänzungssatz zum allgemeinen Reciprocitätsgesetz zu bezeichnen ist.

Satz 61. Sind $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \dots, \mathfrak{l}_z$ die in \mathfrak{l} aufgehenden Primideale in k und ist

$$\mathfrak{l}_1^{h_1} = (\lambda_1),$$

so gilt, wenn \mathfrak{p} ein beliebiges zu \mathfrak{l} primes Primideal aus k bedeutet und

$$\mathfrak{p}^{h_2} = (\pi)$$

ist:

$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}} \right)^{-1} = \left(\frac{\lambda_1, \pi}{\mathfrak{l}_1} \right) \left(\frac{\lambda_1, \pi}{\mathfrak{l}_2} \right) \cdots \left(\frac{\lambda_1, \pi}{\mathfrak{l}_z} \right).$$

Zum Schluss füge ich noch hinzu, dass der dem Satze 16 entsprechende Satz über die Anzahl der Normenreste nach einem in \mathfrak{l} aufgehenden Primideale ebenfalls gilt und dass man für einen beliebigen Körper $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ eine Einteilung der Ideale in Geschlechter entwickeln kann. Es gilt dann wieder die fundamentale Thatsache, dass genau l^{-1} Geschlechter, von denen jedes das Charakterenprodukt 1 besitzt, in K existieren.

Auf die Beweise dieser Behauptungen gehe ich nicht mehr ein, da dieselben ganz analog den von Hilbert in Rel. quadr. Z. § 40–42 gegebenen sind, und da die geringfügigen Abänderungen, die an denselben anzubringen sind, sich zur Genüge aus den vorstehenden Entwicklungen ergeben.

§ 27.

Ein Beispiel.

Zur Illustration unserer Entwicklungen mögen die cubischen Reste im Körper $k(i, \varrho)$ herangezogen werden, wo ϱ eine von 1 verschiedene 3. Einheitswurzel bedeutet. Der Körper gehört zu denjenigen, für die die Resultate der vorstehenden Abhandlung gültig sind; er ist ein Galois'scher Körper vom 4. Grade und besitzt in bezug auf den Körper der dritten Einheitswurzeln den Relativgrad 2. Seine Discriminante ist 144 und die Klassenzahl $h = 1$. Als definierende Zahl für k kann $i + \varrho$ angenommen werden, wofür die Gleichungen:

$$x^2 - 2\varrho x - \varrho = 0$$

oder

$$x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1 = 0$$

gelten. Gleichzeitig ist $i + \varrho$ eine von einer dritten Einheitswurzel verschiedene Einheit, die nicht dritte Potenz einer Einheit in k ist. Es existieren in k 9 Einheitenverbände, welche durch:

$$\varrho^u(i + \varrho)^v \quad u, v = 1, 2, 3$$

dargestellt werden.

Es gelten in k folgende Zerlegungen in Primfaktoren:

$$2 = (1 + i)(1 - i)$$

$$3 = -(\varrho - \varrho^2)^2$$

$$5 = (2 + i)(2 - i)$$

$$7 = (3 + \varrho)(3 + \varrho^2)$$

$$11 = 11$$

$$13 = (2 + i + i\varrho) (2 - i - i\varrho) (2 + i + i\varrho^2) (2 - i - i\varrho^2)$$

$$19 = (5 + 2\varrho) (5 + 2\varrho^2)$$

$$53 = (7 + 2i) (7 - 2i)$$

$$71 = 71$$

$$181 = (1 - 3\varrho + 2i) (1 - 3\varrho - 2i) (1 - 3\varrho^2 + 2i) (1 - 3\varrho^2 - 2i)$$

Ferner seien noch die Werte folgender cubischer Restsymbole angeführt:

$$\left(\frac{\varrho}{1+i}\right) = \varrho \quad \left(\frac{i+\varrho}{1+i}\right) = \varrho^2 \quad \left(\frac{1-\varrho}{1+i}\right) = \varrho^2$$

$$\left(\frac{\varrho}{2+i}\right) = \varrho^2 \quad \left(\frac{i+\varrho}{2+i}\right) = 1 \quad \left(\frac{1-\varrho}{2+i}\right) = \varrho$$

$$\left(\frac{\varrho}{3+\varrho}\right) = \varrho \quad \left(\frac{i+\varrho}{3+\varrho}\right) = \varrho^2 \quad \left(\frac{1-\varrho}{3+\varrho}\right) = \varrho$$

$$\left(\frac{\varrho}{11}\right) = \varrho^2 \quad \left(\frac{i+\varrho}{11}\right) = \varrho \quad \left(\frac{1-\varrho}{11}\right) = \varrho$$

$$\left(\frac{\varrho}{2+i+i\varrho}\right) = \varrho \quad \left(\frac{i+\varrho}{2+i+i\varrho}\right) = 1 \quad \left(\frac{1-\varrho}{2+i+i\varrho}\right) = \varrho$$

$$\left(\frac{\varrho}{5+2\varrho}\right) = 1 \quad \left(\frac{i+\varrho}{5+2\varrho}\right) = 1 \quad \left(\frac{1-\varrho}{5+2\varrho}\right) = \varrho$$

$$\left(\frac{\varrho}{7+2i}\right) = 1 \quad \left(\frac{i+\varrho}{7+2i}\right) = 1 \quad \left(\frac{1-\varrho}{7+2i}\right) = 1$$

$$\left(\frac{\varrho}{71}\right) = 1 \quad \left(\frac{i+\varrho}{71}\right) = 1 \quad \left(\frac{1-\varrho}{71}\right) = 1$$

$$\left(\frac{\varrho}{1-3\varrho+2i}\right) = 1 \quad \left(\frac{i+\varrho}{1-3\varrho+2i}\right) = 1 \quad \left(\frac{1-\varrho}{1-3\varrho+2i}\right) = \varrho.$$

Aus dem vorstehenden Material schöpfen wir folgende Bestätigungen von früher bewiesenen Sätzen:

1) Satz 29 und 30. (Primäres Primideal).

Die Primideale $5 + 2\varrho$ und $1 - 3\varrho + 2i$ sind primär; dementsprechend gelten folgende Congruenzen:

$$5 + 2\varrho \equiv -\varrho^2(5 + 3\varrho) \equiv -8\varrho^2 \quad (3 - 3\varrho)$$

$$1 - 3\varrho + 2i \equiv (1 + i)^3 \quad (3 - 3\varrho).$$

Die Zahlen $5 + 3\varrho$ und $1 - 3\varrho + 2i$ sind also primär.

2) Satz 44 und 45 (Primäres Ideal).

Die Ideale $(2 + i)$ $(2 + i + \varrho)$ und $(1 + i)^2 (3 + \varrho)$ sind primär; dementsprechend gelten folgende Congruenzen:

$$(2 + i) (2 + i + i\varrho) \equiv (i - \varrho^2) (i - 1)^3 \quad (3 - 3\varrho)$$

$$(1 + i)^2 (3\varrho^2 + 1) \equiv (i - 1)^6 \quad (3 - 3\varrho).$$

Die Zahlen $\varrho(i + \varrho^2) (2 + i + i\varrho) (2 + i)$ und $(1 + i)^2 (3\varrho^2 + 1)$ sind folglich primär.

3) Satz 48 und 49 (Hyperprimäres Ideal).

Die Ideale $11(1 + i)$, $7 + 2i$ und 71 sind hyperprimär; dementsprechend gelten folgende Congruenzen;

$$11(1 + i) \equiv (i - 1)^8 \quad (9)$$

$$(7 + 2i) \equiv (i - 2)^8 \quad (9)$$

$$71 \equiv (-1)^8 \quad (9).$$

Die Zahlen $11(1 + i)$, $7 + 2i$, 71 sind also hyperprimär.

4) Satz 37.

Von den beiden Primidealen $1 + i$ und $7 + 2i$ ist das letzte primär; es muss demnach das Reciprocitätsgesetz zwischen einem beliebigen und einem primären Primideal gelten, also

$$\left(\frac{1 + i}{7 + 2i}\right) \left(\frac{7 + 2i}{1 + i}\right)^{-1} = 1$$

sein, da $7 + 2i$ eine primäre Zahl ist. In der That findet man:

$$\left(\frac{1 + i}{7 + 2i}\right) = 1 \quad \left(\frac{7 + 2i}{1 + i}\right) = 1.$$

5) Satz 43.

Da für $5 + 3\varrho$ die Congruenz

$$5 + 3\varrho \equiv 8 \quad ((1 - \varrho)^8)$$

gilt, muss

$$\left(\frac{1+3i}{5+3\varrho}\right) \left(\frac{5+3\varrho}{1+3i}\right)^{-1} = 1$$

sein.

In der That ist:

$$\left(\frac{1+3i}{5+3\varrho}\right) = \varrho \quad \left(\frac{5+3\varrho}{1+3i}\right) = \varrho.$$

Berichtigung.

S. 7, Zeile 3 v. u. lies $p = \mathfrak{P}'$ statt $p \equiv \mathfrak{P}'$.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	3
I. Definitionen und vorbereitende Sätze.	
§ 1. Das Symbol $\left(\frac{\alpha}{p}\right)$ im Grundkörper k	4
§ 2. Der relativ-cyclische Körper K vom Primzahlrelativgrade l in bezug auf k . Seine Relativediscriminante und die Zerlegung der Primideale des Grundkörpers in ihm	7
§ 3. Das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{p}\right)$	14
II. Die ambigen Complexe des Körpers K .	
§ 4. Die relativen Grundeinheiten des Körpers K	20
§ 5. Die ambigen Complexe des Körpers K	20
§ 6. Die Geschlechter im Körper K	25
III. Die primären Ideale im Grundkörper k .	
§ 7. Definition des primären Ideals \mathfrak{a} und des Symbols $\left(\frac{1}{\mathfrak{a}}\right)$	27
§ 8. Ein System von $\frac{m(l-1)}{2}$ nichtprimären Primidealen in k :	28
§ 9. Die unendliche Reihe $\sum_{(w)} \sum_{(m)} \left(\frac{w}{\mathfrak{a}}\right)^m \cdot \frac{1}{n(w)^s}$	31
§ 10. Eine Eigenschaft der primären Primideale.	34
§ 11. Zwei specielle Fälle des Reciprocitätsgesetzes.	36
§ 12. Das Reciprocitätsgesetz zwischen einem primären und einem beliebigen Prim- ideal in gewissen relativ Galois'schen Körpern	38
§ 13. Fortsetzung	44
§ 14. Die Anzahl der Geschlechter im relativ-cyclischen Körper K mit zu l primer Relativediscriminante	47

§ 15. Das Produkt $\prod_{(w)}' \left(\frac{\nu, \mu}{w} \right)$ 48

§ 16. Das primäre Ideal. 51

IV. Das hyperprimäre Ideal.

§ 17. Definition des hyperprimären Ideals und der hyperprimären Zahl in k 52

§ 18. Ein gewisses System von $m' + s$ zu l primen Primidealen in k 53

§ 19. Das hyperprimäre Ideal in k 56

V. Das allgemeine Reciprocitätsgesetz in k und der erste Ergänzungssatz zu demselben.

§ 20. Definition des Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{I_i} \right)$ für irgend welche zu l prime Zahlen ν, μ 57

§ 21. Zwei Hilfssätze über die Normenreste des Körpers K nach I_i 58

§ 22. Das Produkt $\prod_{(w)} \left(\frac{\nu, \mu}{w} \right)$ für beliebige zu l prime ganze Zahlen aus k 67

§ 23. Das allgemeine Reciprocitätsgesetz und der erste Ergänzungssatz zu demselben 69

VI. Das Produkt $\prod_{(w)} \left(\frac{\nu, \mu}{w} \right)$ für beliebige ganze Zahlen aus k .

§ 24. Das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{I_i} \right)$ für beliebige ganze Zahlen in k 69

§ 25. Die Fundamentalsätze für das Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{I_i} \right)$, wenn ν, μ beliebige ganze Zahlen aus k sind 70

§ 26. Das Produkt $\prod_{(w)} \left(\frac{\nu, \mu}{w} \right)$ für beliebige ganze Zahlen ν, μ aus k und der zweite Ergänzungssatz zum Reciprocitätsgesetz 76

§ 27. Ein Beispiel. 77

Inhalt 81

16 DEC. 1902



Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

12 JAN. 1904

ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH - PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND II. Nro. 4.

Constitution
of
Matter and Analytical Theories
of Heat.

An Essay in four Parts.

By

G. Prasad.



Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1903.

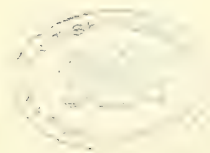
ABHANDLUNGEN
DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.
MATHEMATISCH - PHYSIKALISCHE KLASSE.
NEUE FOLGE BAND II. Nro. 4.

Constitution
of
Matter and Analytical Theories
of Heat.

An Essay in four Parts.

By

G. Prasad.



Berlin.
Weidmannsche Buchhandlung.
1903.

Constitution of Matter and Analytical Theories of Heat.

An Essay in four Parts.

By

Ganesh Prasad of Balia (India).

Communicated by F. Klein, July 11, 1903.

Preface.

„Mathematical analysis has no marks to express confused notions.“ J. Fourier.

The following essay was undertaken with the object of utilising the recent advances in mathematical analysis for working out analytical theories of heat, each theory being based on definite suppositions as to the constitution of matter.

In carrying on the investigation embodied in this essay I consulted a very large number of authorities. I am chiefly indebted to the writings of G. Cantor, Fourier, Du Bois Reymond, Lord Kelvin, Larmor, Maxwell, Poisson, Brodén, Karl Pearson, Poincaré and Weierstrass. To these I must add Dini-Lüroth's „Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse“, from which my knowledge of continuous analysis is chiefly derived. I am also indebted to Fitzgerald's scientific papers¹⁾ and Sommerfeld's dissertation²⁾. Finally, I must mention that in the early stage of this investigation I received great encouragement from the views of F. Klein as given in his Evanston Colloquium and „Gutachten der Göttinger philosophischen Facultät betreffend die Beneke-Preisaufrage für 1901“ (Göttinger Nachrichten 1901, Geschäftliche Mitteilungen; Math. Ann. Bd. 55).

The essay in its present form was completed in the year 1902, with the exception of certain purely verbal alterations and a few unimportant corrections.

1) „The Scientific Writings of George Francis Fitzgerald“, Dublin 1902.

2) „Die willkürlichen Functionen in der Mathematischen Physik“, Inaugural-Dissertation, Königsberg 1891.

Introduction.

(1)

The object of this essay is to show how the recent advances in mathematical analysis may be used for working out analytical theories of the linear conduction of heat in a homogeneous solid; each theory being based on definite suppositions as to the constitution of the solid. The essay is divided into four parts. In Part I. we give a theory which treats the solid as a continuum with the same properties in all its points. Part II. contains a carefully worked out theory which treats the solid as molecular in structure but takes no account of the constitution of the molecules; at the end of this part a criticism of Fourier's theory is given. In Part III. is worked out a theory which regards the solid as *improperly continuous*, i. e., as a continuum in which an everywhere dense but enumerable aggregate of points is marked out to distinguish the solid from all other solids; this part concludes with a discussion of the question of the „uniqueness of the solution.“ Part IV. contains a brief discussion of the theories expounded in the previous parts.

(2)

We restrict ourselves throughout this essay to the simple problem of linear conduction in an infinite slab bounded by two parallel planes impermeable to heat and at distance 2π from each other, the initial temperature being an even function of the distance from the central plane of the slab. The first step towards the solution of this problem is to define the conditions of the phenomenon. We take the fundamental condition to be the satisfaction of the principle of the conservation of energy; the other condition is that if with varying *time* any physical quantity passes from one value to another it assumes all the intermediate values. The next step is to transform the problem from a physical into an analytical one; and this is done by translating, with the help of suitable hypotheses, the above two conditions, and the supposition of the impermeability of the faces, into analytical language. We then find without difficulty an ex-

tensive class of solutions in terms of functions of the type

$$V(x, t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} a_m \cos mx e^{-m^2 t}, \quad t > 0,$$

where $a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x') \cos mx' dx'$, $f(x)$ being any integrable function; such functions $V(x, t)$ we call, for the sake of convenience, functions of *Fourier's type*.

(3)

In Part I. we first find the analytical representations of the conditions of the phenomenon. These are the conditions (A), (B) and (C) of Art. 4. In Art. 5 attention is drawn to the fact that there may be solutions of the problem other than functions of Fourier's type. Throughout the remainder of this part we discuss solutions of Fourier's type. We begin by expressing (A), (B) and (C) in terms of $V(x, t)$, $f(x)$ being the initial temperature. We thus obtain in Art. 10 the group of conditions which is necessary and sufficient in order that $V(x, t)$ be the solution of the problem. These conditions are the following:

i. For every value of x or, at least, for an everywhere dense aggregate of its values, there exists a finite constant P such that, for any value of t ,

$$\text{however small, } \left| \frac{\partial}{\partial x} V(x, t) \right| < P, \quad -\pi < x < \pi.$$

ii. $\lim_{t \rightarrow +0} V(x, t) = f(x)$ if the limit exists; or, the limit does not exist, and then $f(x)$ is contained in the aggregate of values assumed by $V(x, t)$ as t approaches zero.

In order to find the nature of the restrictions which these conditions impose on $f(x)$, we carefully investigate in Arts. 11—21 the behaviour of $V'(x, t)$ and $V(x, t)$ when t approaches zero. The final results of this investigation, in which we make use of Du Bois Reymond's Infinital Calculus (Infinitärrechenrechnung), are given in Arts. 19 and 21¹). Making use of these results, we give in Art. 22

1) It would be convenient to explain the notation which we use: If $A(y)$ and $B(y)$ be two functions of y such that $\frac{A(y)}{B(y)}$ is positive and monoton in the neighbourhood of y_0 ; then it is said that $A(y) \gtrsim B(y)$, as y approaches y_0 , according as $\frac{A(y)}{B(y)}$ has a limit which is infinite, finite or zero. This is Du Bois Reymond's notation. We have found it convenient to introduce four new symbols, viz., \gg , \ll , $\pm \gg$ and $\pm \ll$. By $L(y) \gtrsim M(y)$, we mean $L(y) \gtrsim M(y)N(y)$ where $N(y)$ is finite and positive (different from zero) but *not* necessarily monoton. For example, $\frac{1}{y^2} \gg l \left(\frac{1}{y} \right) \left(2 + \cos \frac{1}{y} \right)$ as y approaches zero. If, with the approach of y to y_0 , $C(y)$ makes an indefinitely large number of oscillations, from positive to negative values, with indefinitely increasing amplitude; then we say that $C(y) \pm \gg 1$ as y approaches y_0 . For example, $\frac{1}{y} \cos \left(\frac{1}{y} \right) \pm \gg 1$ as y approaches zero.

certain necessary and sufficient conditions for $f(x)$, which are of extensive applicability. These conditions at once indicate the classification of initial states as stable or unstable, non-oscillatory or oscillatory, admissible or inadmissible. This classification is discussed in Art. 23. We conclude this part with Art. 24 in which five examples¹⁾ of initial states are given; the solution of the problem corresponding to each of these being of Fourier's type. In the first the initial state is continuous, stable and non-oscillatory; in the second, discontinuous but stable and non-oscillatory; in the third, discontinuous, stable and oscillatory; in the fourth as well as in the fifth, discontinuous and unstable.

(4)

In Part II. we give a carefully worked out theory which treats the solid as molecular in structure but takes no account of the constitution of the molecule. The scheme of our exposition is as follows: —

In Art. 25 we begin by specifying clearly and in detail the molecular oscillations in the solid. The solid is thus supposed to contain rows of molecules parallel to the axis of x ; the molecular oscillations in each row being the same. Each row contains r assemblages, the number of molecules in each assemblage being s . Now, with each assemblage in a row is associated a quantity which is a function of time and which depends only on the molecular oscillations in the assemblage; this quantity we call the *temperature* of the assemblage. At the end of Art. 25 is given the following formulation of the problem: —

The initial temperatures, $T_1(0), T_2(0), \dots, T_r(0)$, of the assemblages A_1, A_2, \dots, A_r in any particular row being given, find their subsequent temperatures.

The investigation embodied in Arts. 26—31 requires very delicate considerations and is the most difficult portion of the exposition. In these Articles we show how, by means of the hypotheses $(\alpha_1), (\beta_1)$ and (γ_1) of Art. 27, approximate analytical representations of the actual conditions of the phenomenon can be obtained in terms of a continuous function $Y(x, t)$ which we call the *auxiliary function* of the problem; this function is such that $Y(x_{q,t}, t) = T_q(t)$ where $x_{q,t}$ is the x -coordinate of the centre, and $T_q(t)$ the temperature, of the assemblage A_q at time t . As the first step to this end, we find in Art. 28 an approximation to the quantity of heat which flows across a unit area, placed at right angles to the axis of x , in any interval $(t, t + \tau)$: the result is given in the equation (I). As the next step we obtain in Art. 29 an approximation to the quantity of heat absorbed by a cylinder, with its axis parallel to the axis of x and its faces, of unit area, $x = x_1, x = x_2$, in any interval: the result is given in the equation (II).

1) It is hardly necessary to mention that the functions $f(x)$ used in the examples (iii) and (iv) belong to a new type which was suggested to the present writer by the procedure in Arts. 110*—11* of Dini-Lüroth's „Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse.“ The investigation given there is, with evident modifications, applicable to these functions.

In Art. 30 we discuss these two results and attention is drawn to the fact that in order that approximations be at all possible it is necessary that the periphery of the unit area be of restricted size and shape. For example, when the area is a rectangle $\left(\frac{\lambda}{2} \times \frac{2}{\lambda}\right)$ no approximation is possible, λ being the length of the molecule. Making use of (I) and (II) we obtain in Art. 31 the approximate conditions of the phenomenon. These are (A_1) , (B_1) and (C_1) . (A_1) corresponds to the principle of energy; (B_1) , to the condition that as $T_q(t)$ passes from one value to another it assumes all the intermediate values; and (C_1) , to the supposition of the impermeability of the faces. The remaining portion of the exposition is much simpler; in it we find what conditions $f(x)$ must satisfy in order that the auxiliary function be of Fourier's type, where $f(x) = Y(x, 0)$ and $f(x)$, $f'(x)$ and $f''(x)$ are finite and continuous. We show in Art. 32 that, as (A_1) , (B_1) and (C_1) are in form the same as (A) , (B) and (C) , the only conditions to be satisfied are those which are necessary in order that (A_1) , (B_1) and (C_1) be approximations to the actual conditions. These necessary conditions are given in the end of the article.

The final result, regarding the condition to be satisfied by $f(x)$, may be thus stated:

If it be supposed that

$$\begin{aligned}\lambda_1 &< 10^{-2}, \\ \lambda_2 &\leq 10^{-2} \lambda_1, \\ \lambda_1 &\geq \frac{2}{s};\end{aligned}$$

then it is sufficient that

$$\frac{\lambda_1}{2\pi\bar{f}} \left\{ 43|f'(\pi)| + 67b + \frac{3}{5} \sum_1^{\infty} \frac{|b_m|}{m} \right\}$$

be negligible. This is the condition (\mathfrak{A}_1) given at the end of Art. 37. Here $2\lambda_1$ is the quantity which first appears on page 26 and may be called the radius of the sphere of influence of any assemblage, λ_2 is the greatest length that an

assemblage can have, $\bar{f} = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\pi} f(x') dx' \right|$, $b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f''(x') \cos mx' dx'$ and b is

the greatest value of $|b_m|$. In Art. 38 attention is drawn to the fact that, in a professedly inexact theory like the present one, the important thing is the *nature of the restriction* imposed on $f(x)$; and, as the quasi-necessary condition (\mathfrak{A}_1) clearly shows, this is purely arithmetical. We conclude the exposition of this theory with Art. 39 in which illustrative examples are given; in each example we start with *definite* suppositions as to the magnitudes of λ , λ_2 , λ_1 , and find out the corresponding superior limit of error. The table given in the fourth example draws attention to the fact that the error increases very rapidly as the change of initial temperature from assemblage to assemblage increases; in

the fifth example this change is so great that the theory fails to give any approximation to the solution.

In Arts. 40—43 we give a brief criticism of Fourier's theory. We begin by pointing out that Fourier's theory is a continuous one; we then find in Art. 41 the conditions which are necessary and sufficient in order that the conditions given by Fourier's theory may have any meaning and, further, follow from the conditions (A), (B) and (C) of our theory. In Art. 42 we consider the solutions of Fourier's type and prove the following result: —

In order that the conditions given by Fourier's theory viz.,

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t),$$

$T(x, t)$ is continuous in t , and $T'(\pi, t) = 0$, $T'(-\pi, t) = 0$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $0 \leq t$, may have meaning and necessarily follow from (A), (B) and (C), it is necessary that $f''(x)$ exist and be finite; and it is sufficient that $f''(x)$ be finite and continuous, and $f'(\pi)$, $f'(-\pi)$ be zero.

We conclude this part with Art. 43 which contains seven examples specially selected to illustrate the limited scope of Fourier's theory.

(5)

Part III. contains a theory which regards the solid as improperly continuous; to work out this theory we have to employ an *improperly continuous analysis*, i. e., an analysis in which one of the independent variables has for its domain an everywhere dense but enumerable aggregate. We begin by carefully specifying in Art. 44 the notation which we employ. In Art. 45 we formulate the following improperly continuous theory of solids:

With the slab is associated an enumerable aggregate G , of positive numbers, which is everywhere dense in the interval $(0, \pi)$ and contains π : we call G the *discriminating aggregate* of the slab. Also, two slabs differ only in this that they have different discriminating aggregates. Taking ξ for a variable with the aggregates $-G$ and G as its domain, we define the temperature $T(x, t)$ at any point x by the equations

$$T(x, t) = \frac{1}{2\mathfrak{l}} \int_{x-\mathfrak{l}}^{x+\mathfrak{l}} C(\xi, t) d\xi, \quad 0 \leq x \leq \pi - \mathfrak{l},$$

$$T(x, t) = \frac{1}{(\pi - x + \mathfrak{l})} \int_{x-\mathfrak{l}}^{\pi} C(\xi, t) d\xi, \quad \pi - \mathfrak{l} \leq x \leq \pi,$$

where \mathfrak{l} is dependent on G and is less than, say, 10^{-7} .

These are the equations (\mathfrak{A}_2) of page 50: $C(\xi, t)$ is called the *characteristic function* of the slab. At the end of Art. 45 the problem of linear conduction is thus formulated:

Given the initial characteristic function $C(\xi, 0)$, find the characteristic function at any subsequent time.

We then go on to obtain the analytical representations of the conditions of the phenomenon; these are the conditions (A_2) , (B_2) , (C_2) and (D_2) of Art. 47. In Art. 48 attention is drawn to the definition of temperature, as given by (\mathfrak{A}_2) , which indicates the classification of initial temperatures as possible or impossible. In Arts. 49—53 we discuss characteristic functions of Fourier's type. We begin by expressing (A_2) , (B_2) , (C_2) and (D_2) in terms of $V(x, t)$ and in the notation of continuous analysis; we thus obtain in Art. 51 the group of conditions which is necessary and sufficient in order that $C(\xi, t) = \chi(\xi, t)$, $C(\xi, 0)$ being $\varphi(\xi)$: here $\chi(\xi, t) = V(\xi, t)$ and $\varphi(\xi) = f(\xi)$.

These conditions are as follows:

- i. For every value of ξ , there exists a finite constant P such that, for any value of t , however small, $\left| \left\{ \frac{\partial}{\partial x} V(x, t) \right\}_{x=\xi} \right|$ is less than P , $-\pi < \xi < \pi$.
- ii. $\lim_{t \rightarrow +0} V(\xi, t) = \varphi(\xi)$ if the limit exists; or, the limit does not exist, and then $\varphi(\xi)$ is contained in the aggregate of values assumed by $V(\xi, t)$ as t approaches zero.

Making use of the results of Arts. 19 and 21 we find in Art. 52 necessary and sufficient conditions, for $\varphi(\xi)$, of an extensive applicability. These conditions at once indicate the classification of initial states as stable or unstable, oscillatory or non-oscillatory, admissible or inadmissible. This classification is discussed in Art. 53. In Arts. 54 and 55 we discuss approximations to impossible initial temperatures. We conclude the exposition of the theory with Art. 56 in which nine examples are given to illustrate the salient features of the theory.

This part ends with Arts. 57—59 in which we give a careful discussion of the question of „the uniqueness of the solution“, specially bearing in mind the fact that there *may* be solutions other than functions of Fourier's type.

(6)

In Part IV. we discuss briefly the theories, expounded in the previous parts, in so far as they illustrate the nature of the relation of mathematical analysis to physics.

Part I.

Continuous Theory ¹⁾.

Formulation of the Problem.

1. In the present part I propose to examine the phenomenon of the linear conduction of heat in a homogeneous solid from the point of view of the continuous theory of matter; I will, therefore, treat the slab as a *continuum with the same properties in all its points*.

Analytical representation of the conditions of the Phenomenon.

2. Take a straight line perpendicular to the faces of the solid as the axis of x . Let the faces be given by

$$x = -\pi, \quad x = +\pi.$$

Let t be another continuous variable; and, unless the contrary is mentioned, suppose that $0 \leq t, -\pi \leq x \leq \pi$.

Then the temperature of any point of the solid at time t is a function of x and t only. Let $T(x, t)$ be this function.

3. Let S be *any* closed surface in the solid. Then the principle of the conservation of energy requires the equality of the quantity of heat which flows into S in *any* interval $(t, t + \tau)$ and the quantity of heat absorbed by the enclosed solid in the same interval. It is evident that the principle is satisfied if the equality is proved for the case when S is *any* cylindrical surface with the axis of x as its axis.

1) In working out this theory I have received very great help from Fourier's „Théorie Analytique de la Chaleur“. I am also greatly indebted to Du Bois Reymond's „Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln“ (Abhandlungen der k. bayer. Akademie, Bd. XII).

The following *two hypotheses* suffice for an analytical representation of the principle of energy as stated above:

i. The quantity of heat which flows across unit area, placed at x at right angles to the axis of x , along this axis in any interval $(t, t + \tau)$ is equal to

$$-K \int_t^{t+\tau} T'(x, t') dt',$$

where $T'(x, t')$ stands for $\frac{\partial}{\partial x} T(x, t')$ and K is a constant called the thermal conductivity of the solid,

$$-\pi < x < \pi. \quad (\alpha)$$

ii. The quantity of heat which is absorbed by a cylinder, with the axis of x as its axis and its faces, of unit area, $x = x_1$, $x = x_2$, in any interval $(t, t + \tau)$ is equal to

$$c \int_{x_1}^{x_2} \{T(x', t + \tau) - T(x', t)\} dx',$$

where c is a constant called the thermal capacity of the solid. (\beta)

It would be convenient to consider the units so chosen that $\frac{K}{c} = 1$.

4. Thus the principle of the conservation of energy together with the supposition of the impermeability of the face, $x = -\pi$, of the solid finds expression in the equation

$$\int_{-\pi}^x \{T(x', t) - T(x', 0)\} dx' = \int_0^t T'(x, t') dt', \quad -\pi < x < \pi. \quad (\text{A})$$

This is the *first and the fundamental condition* of the phenomenon.

The *second condition* is the following:

$T(x, t)$ is continuous in t , or, if it has any discontinuities they are of the second kind; further, if t_ω is a point of discontinuity, $T(x, t_\omega)$ is contained in the aggregate of values assumed by $T(x, t)$ as t approaches t_ω . (\text{B})

This is merely the analytical representation of the supposition that when, with a given x , $T(x, t)$ passes from one value to another it assumes all the intermediate values.

The *third condition*,

$$\lim_{x = -\pi + 0} Q(x, t) = 0, \quad \lim_{x = \pi - 0} Q(x, t) = 0, \quad (\text{C})$$

expresses the impermeability of the faces, $Q(x, t)$ being the quantity of heat which flows across unit area, at x , in the interval $(0, t)$.

5. It should be noted that $T(x, t)$ need not satisfy any conditions other than those necessary to make the conditions (A), (B) and (C) intelligible and these conditions themselves. For example, $T'(x, t)$ need only be finite and integrable in t ; thus it may not be possible to obtain an interval of time, however small, in which there are not an infinite number of instants at which the rate of flow of heat does not exist. Also $T'(x, t)$ may be meaningless for an aggregate of values of t , of zero content; in particular $T'(x, 0)$ may not exist.

Solutions of Fourier's Type.

6. Let the initial temperature be $f(x)$, a finite, integrable, and even function of x . I will find the necessary and sufficient conditions, that $f(x)$ must satisfy, in order that the temperature at any subsequent time be given by $V(x, t)$, where

$$V(x, t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{m=\infty} a_m \cos mx e^{-m^2 t},$$

a_m being given by

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x') \cos mx' dx'.$$

It should be noted that $V(x, t)$ is defined *only* for $t > 0$.

7. Substitute in (A) and (B)

$$\begin{aligned} T(x, t) &= V(x, t), \\ T(x, 0) &= f(x). \end{aligned}$$

Then these conditions become

$$\int_{-\pi}^x \{V(x', t) - f(x')\} dx' = \int_0^t V'(x, t') dt', \quad -\pi < x < \pi; \quad (A')$$

$\lim_{t \rightarrow +0} V(x, t) = f(x)$ if the limit exists, or, the limit does not exist, and then $f(x)$ is contained in the aggregate of values assumed by $V(x, t)$ as t approaches zero. (B')

Consider (A'). The series for $V(x', t)$ is uniformly convergent in x' and is consequently integrable term by term; also it is easily seen that

$$\int_{-\pi}^x \{f(x') - \frac{1}{2} a_0\} dx' = \sum_1^{\infty} \frac{a_m}{m} \sin mx.$$

Therefore the left side of (A') is equal to

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_m}{m} \sin mx e^{-m^2 t} - \sum_1^{\infty} \frac{a_m}{m} \sin mx. \quad (1)$$

Now,

$$\int_0^t V'(x, t') dt' = \int_{t_0}^t + \int_0^{t_0} V'(x, t') dt'$$

where $t_0 > 0$ but arbitrarily small and fixed.

$$V'(x, t') = - \sum_1^{\infty} m a_m \sin mx e^{-m^2 t'};$$

and, since this series is uniformly convergent in t' for $t' > 0$, it is integrable term by term in the interval (t_0, t) .

Therefore the right side of (A') is equal to

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_m}{m} \sin mx e^{-m^2 t} - \sum_1^{\infty} \frac{a_m}{m} \sin mx e^{-m^2 t_0} + \int_0^{t_0} V'(x, t') dt'.$$

But it is well known that a_m becomes indefinitely small with $\frac{1}{m}$. Therefore

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_m}{m} \sin mx e^{-m^2 t_0} = \sum_1^{\infty} \frac{a_m}{m} \sin mx + \sigma_1(t_0)$$

where $\sigma_1(t_0)$ becomes indefinitely small with t_0 . Thus, if for any value of t' , however small, $|V'(x, t')|$ is less than a finite quantity $P(x)$, the right side of (A') is equal to

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_m}{m} \sin mx e^{-m^2 t} - \sum_1^{\infty} \frac{a_m}{m} \sin mx - \sigma_1(t_0) + \theta t_0 P(x)$$

where $0 \leq |\theta| < 1$. (2)

Therefore, by choosing t_0 sufficiently small, the difference between (1) and (2) can be made as small as we please. Therefore (A') is satisfied.

8. When $|V'(x, t')|$ does not remain less than a finite quantity $P(x)$, as t' approaches zero, then $\int_0^t V'(x, t') dt'$ is meaningless and, consequently, $Q(x, t)$, the quantity of heat which flows across unit area, at x , in the interval $(0, t)$, is indeterminate. I will, therefore, supplement the hypothesis (α) by the following hypothesis:

If the values of x , for which $P(x)$ exists and, consequently, according to (α), $Q(x, t)$ becomes indefinitely small with t , form an aggregate which is everywhere dense within the domain of x , i. e. the continuum $(-\pi, +\pi)$, then $Q(x, t)$ becomes indefinitely small with t for every value of x within the domain. (γ)

9. Consider the condition (C). It follows from the two preceding articles that, if the values of x , for which P exists, form an aggregate everywhere dense within the interval $(-\pi, \pi)$,

$$-\frac{1}{K} Q(x, t) = \sum_1^{\infty} \frac{a_m}{m} \sin mx e^{-m^2 t} - \sum_1^{\infty} \frac{a_m}{m} \sin mx, \quad -\pi < x < \pi.$$

Since both the series on the right side of the above equation are uniformly convergent in x ,

$$\lim_{x = \pi-0} Q(x, t) = 0,$$

$$\lim_{x = -\pi+0} Q(x, t) = 0.$$

10. Thus the group of conditions which is necessary and sufficient, in order that $V(x, t)$ be the solution of the problem, is the following:

i. For every value of x or, at least, for an everywhere dense aggregate of its values, there exists a finite constant P such that, for any value of t , however small, $|V'(x, t)| < P$, $-\pi < x < \pi$.

ii. $\lim_{t=+0} V(x, t) = f(x)$ if the limit exists, or, the limit does not exist, and then $f(x)$ is contained in the aggregate of values assumed by $V(x, t)$ as t approaches zero.

Behaviour of $V'(x, t)$ for t small.

11. As $V'(x, t)$ is an odd function of x and $V'(0, t) = 0$, it would be sufficient to consider the case $0 < x < \pi$.

Let $\Theta(y, t)$ stand for

$$1 + 2 \sum_1^{\infty} \cos my e^{-m^2 t}, \quad t > 0, \quad 0 \leq y \leq 2\pi.$$

Then

$$\Theta'(y, t) = -2 \sum_1^{\infty} m \sin my e^{-m^2 t}.$$

Now,

$$\begin{aligned} V'(x, t) &= - \sum_1^{\infty} m a_m \sin mx e^{-m^2 t} \\ &= - \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \int_0^{\pi} m \sin mx \cos mx' e^{-m^2 t} f(x') dx' \\ &= - \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \int_0^{\pi} m \sin m(x+x') e^{-m^2 t} f(x') dx' \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \int_0^{\pi} m \sin m(x'-x) e^{-m^2 t} f(x') dx'. \end{aligned}$$

Since the series $\sum_1^{\infty} m \sin my e^{-m^2 t}$ is uniformly convergent in y in the interval $(0, 2\pi)$, it follows that

$$\sum_1^{\infty} m \sin m(x'+x) e^{-m^2 t} \quad \text{and} \quad \sum_1^{\infty} m \sin m(x'-x) e^{-m^2 t}$$

are also uniformly convergent in x' in the interval $(0, \pi)$. Again $f(x')$ is finite and integrable.

Therefore

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \int_0^{\pi} m \sin m(x+x') e^{-m^2 t} f(x') dx' \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x') \left\{ \sum_1^{\infty} m \sin m(x+x') e^{-m^2 t} \right\} dx' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x') \Theta'(x+x') dx'. \end{aligned}$$

Similarly,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \int_0^{\pi} m \sin m(x'-x) e^{-m^2 t} f(x') dx' \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x') \Theta'(x'-x) dx'. \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} V'(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x') \Theta'(x'+x) dx' \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x') \Theta'(x'-x) dx'. \end{aligned}$$

12. It is well-known that

$$\Theta(y, t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \left\{ \sum_1^{\infty} e^{-\frac{(y-2n\pi)^2}{4t}} + \sum_1^{\infty} e^{-\frac{(y+2n\pi)^2}{4t}} \right\} + \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{y^2}{4t}}.$$

Therefore, when y differs from 0 and 2π by quantities which are numerically greater than a positive quantity d , $|\Theta'(y, t)| \ll^1 \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{d^2}{4t}}$ as t approaches zero.

Therefore

$$V'(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{x-\sigma}^{x+\sigma} f(x') \Theta'(x'-x) dx' + r(t),$$

where σ is an arbitrarily small but fixed quantity and

$$|r(t)| \ll \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\sigma^2}{4t}}.$$

1) $L \overset{\approx}{\ll} M$ stands for $L \overset{\approx}{\ll} MN$ where N is finite and positive (different from zero) but not necessarily monoton.

Therefore

$$V'(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\sigma \{f(x+x') - f(x-x')\} \Theta'(x') dx' + r(t).$$

Now

$$\Theta'(x') = -\frac{\sqrt{\pi} x'}{2t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x'^2}{4t}} + r_1(t)$$

where

$$|r_1(t)| \ll \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(2\pi-\sigma)^2}{4t}}.$$

Therefore

$$V'(x, t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t} \times t_0} \int_0^\sigma \left\{ \frac{f(x+x') - f(x-x')}{x'} \right\} x'^2 e^{-\frac{x'^2}{4t}} dx' + R(t)$$

where

$$|R(t)| \ll \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\sigma^2}{4t}}.$$

Let $D(x, x')$ stand for $\frac{f(x+x') - f(x-x')}{2x'}$. Then,

$$V'(x, t) \text{ behaves as } \frac{1}{2\sqrt{\pi t} \times t_0} \int_0^\sigma D(x, x') x'^2 e^{-\frac{x'^2}{4t}} dx' \quad (\text{I})$$

when t approaches zero.

13. If $|D(x, x')| < A$, a finite quantity, as x' approaches zero, then it follows from (I) that

$$|V'(x, t)| < \frac{A}{2\sqrt{\pi t} \times t_0} \int_0^\sigma x'^2 e^{-\frac{x'^2}{4t}} dx'$$

as t approaches zero. But $\frac{1}{2\sqrt{\pi t} \times t_0} \int_0^\sigma x'^2 e^{-\frac{x'^2}{4t}} dx'$ approaches 1 as t approaches zero. Therefore $|V'(x, t)| < A$ as t approaches zero.

If $D(x, x')$ becomes indefinitely large as x' approaches zero, then it is easily seen that $V'(x, t)$ becomes indefinitely large, as t approaches zero, and has the same sign as $D(x, x')$. In particular, when $D(x, x') \sim x'^{k-1}$ as x' approaches zero, $0 \leq k < 1$, $V'(x, t) \sim (\sqrt{t})^{k-1}$.

I proceed now to consider the case when $D(x, x')$ makes an indefinitely large number of fluctuations, with indefinitely increasing amplitude, as x' approaches zero. It would be sufficient for the purposes of this essay to investigate

the case when

$$D(x, x') \sim x'^{k-1} \cos \{ \psi(x') \},$$

where $\psi(x') > 1$; the investigation naturally divides itself under three heads:

$$1. \psi(x') < l\left(\frac{1}{x'}\right), \quad 2. \psi(x') \sim l\left(\frac{1}{x'}\right), \quad 3. \psi(x') > l\left(\frac{1}{x'}\right).$$

$$\underline{1. \psi(x') < l\left(\frac{1}{x'}\right).}$$

$$14. \text{ It follows from (I) that } t^{\frac{3}{2}} V'(x, t) \sim \int_0^\sigma x'^{1+k} \cos \{ \psi(x') \} e^{-\frac{x'^2}{4t}} dx'.$$

Let I, I_1, I_2 stand for $\int_0^\sigma, \int_0^{C \times 2\sqrt{t}}, \int_{C \times 2\sqrt{t}}^\sigma x'^{1+k} \cos \{ \psi(x') \} e^{-\frac{x'^2}{4t}} dx'$ respectively, C being an arbitrarily large but fixed quantity.

Consider I_1 .

$$\text{Put } x' = 2\sqrt{t} y.$$

Then

$$I_1 = (2\sqrt{t})^{2+k} \int_0^C y^{1+k} \cos \{ \psi(2\sqrt{t} y) \} e^{-y^2} dy.$$

Let $\psi(2\sqrt{t} y) = \psi(2\sqrt{t} \varepsilon) - v = u - v$, ε being an arbitrarily small but fixed quantity ¹⁾.

$$\text{Then } \int_0^C = \int_\varepsilon^C + \int_0^\varepsilon.$$

And

$$\int_\varepsilon^C = \cos u \int_\varepsilon^C y^{1+k} \cos v e^{-y^2} dy + \sin u \int_\varepsilon^C y^{1+k} \sin v e^{-y^2} dy.$$

Now

$$\psi(2\sqrt{t} y) - \psi(2\sqrt{t} \varepsilon) = 2(y - \varepsilon) \sqrt{t} \psi'(2\sqrt{t} y),$$

where

$$\varepsilon < \bar{y} < y.$$

Since $\psi(x') < l\left(\frac{1}{x'}\right)$ it follows that $-\psi'(x') < \frac{1}{x'}$. Therefore

$$-\sqrt{t} \psi'(2\sqrt{t} y) < 1$$

and, for every value of y in the interval (ε, C) , v approaches zero with t .

Therefore

$$\int_\varepsilon^C y^{1+k} \cos v e^{-y^2} dy \quad \text{and} \quad \int_\varepsilon^C y^{1+k} \sin v e^{-y^2} dy$$

approach $\int_\varepsilon^C y^{1+k} e^{-y^2} dy$ and 0, respectively, as t approaches zero.

¹⁾ This artifice was suggested to me by the procedure in Art. 4 of Du Bois Reymond's Memoir.

Therefore, since $\int_0^\varepsilon y^{1+k} \cos \{ \psi(2\sqrt{t}y) \} e^{-y^2} dy$ can be made as small as we please, by choosing ε sufficiently small, and $\{ \psi(2\varepsilon\sqrt{t}) - \psi(2\sqrt{t}) \} \ll 1$, it follows that

$$I_1 \sim (\sqrt{t})^{2+k} \cos \{ \psi(2\sqrt{t}) \}$$

for those values of t for which $\cos \{ \psi(2\sqrt{t}) \}$ is not zero.

15. Consider I_2 . Put $\psi(x') = \eta$. Then

$$I_2 = \int_{\psi(C \times 2\sqrt{t})}^{\psi(\sigma)} P(x') \cos \eta d\eta,$$

where $P(x')$ stands for $\frac{x'^{1+k} e^{-\frac{x'^2}{4t}}}{\psi'(x')}$.

Put $\frac{x'^{1+k}}{\psi'(x')} = X(x')$ and let d be the value of x' for which $-P(x')$ attains its maximum.

Then d is given by the equation

$$\frac{X'(d)}{X(d)} = \frac{d}{2t}.$$

Now,

$$\frac{1}{x'} > \{ -\psi'(x') \} > 1$$

since

$$l\left(\frac{1}{x'}\right) > \psi(x') > 1.$$

Therefore

$$x'^{2+k} < \{ -X(x') \} < x'^{1+k}.$$

Therefore $l\{-X(x')\} \sim l(x')$ and, consequently,

$$\frac{X'(x')}{X(x')} \sim \frac{1}{x'}.$$

Therefore $\frac{d}{2t} \sim \frac{1}{d}$ and, consequently, $d \sim \sqrt{t}$.

Let C be chosen to be sufficiently large; then,

$$d < C \times 2\sqrt{t}$$

and $-P(x')$ constantly decreases as x' increases from $C \times 2\sqrt{t}$ to σ .

Let $\psi(d) = \eta_1$; then it is evident that

$$\{ \eta_1 - \psi(C \times 2\sqrt{t}) \} \ll 1.$$

Now, putting $-P(x') = Q(\eta)$,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\psi(\sigma)}^{\psi(C \times 2\sqrt{t})} Q(\eta) \cos \eta d\eta \\ &= \int_{\eta_1 - \frac{\pi}{2}}^{\psi(C \times 2\sqrt{t})} + \int_{\eta_1 - \frac{3\pi}{2}}^{\eta_1 - \frac{\pi}{2}} + \int_{\eta_1 - \frac{5\pi}{2}}^{\eta_1 - \frac{3\pi}{2}} + \cdots + \int_{\psi(\sigma)}^{\eta_1 - \frac{2r-1}{2}\pi}, \end{aligned}$$

where $\eta_1 - \frac{2r+1}{2}\pi \leq \psi(\sigma) < \eta_1 - \frac{2r-1}{2}\pi$, r being integral.

Suppose $t = t_m$ so that $\eta_1 = m\pi$, where m is integral. Then $\int_{\eta_1 - \frac{\pi}{2}}^{\psi(C \times 2\sqrt{t})}$ is numerically greater than $(-1)^m \int_{\eta_1 - \frac{3\pi}{8}}^{\eta_1 - \frac{\pi}{8}}$ and therefore still greater than

$$\frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{8} Q\left(\eta_1 - \frac{3\pi}{8}\right);$$

and it has the sign $(-1)^m$.

$\int_{\eta_1 - \frac{3\pi}{2}}^{\eta_1 - \frac{\pi}{2}}$ is numerically less than $\pi Q\left(\eta_1 - \frac{\pi}{2}\right)$ and has the sign $(-1)^{m+1}$.

$$\begin{aligned} &\int_{\eta_1 - \frac{5\pi}{2}}^{\eta_1 - \frac{3\pi}{2}} + \int_{\eta_1 - \frac{7\pi}{2}}^{\eta_1 - \frac{5\pi}{2}} + \cdots + \int_{\psi(\sigma)}^{\eta_1 - \frac{2r-1}{2}\pi} \\ &= (-1)^m \times 2 \{ Q(\bar{\eta}_2) - Q(\bar{\eta}_3) + \cdots + (-1)^{r-1} Q(\bar{\eta}_{r-1}) + (-1)^r k_r Q(\bar{\eta}_r) \} \end{aligned}$$

where $\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3$, etc. lie within the intervals $\left(\eta_1 - \frac{3\pi}{2}, \eta_1 - \frac{5\pi}{2}\right)$, $\left(\eta_1 - \frac{5\pi}{2}, \eta_1 - \frac{7\pi}{2}\right)$, etc. respectively, and $0 < k_r \leq 1$.

Therefore $Q(\bar{\eta}_2), Q(\bar{\eta}_3)$, etc. form a decreasing series; and, consequently, I_2 has the sign $(-1)^m$ and is numerically greater than

$$\left\{ \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{8} Q\left(\eta_1 - \frac{3\pi}{8}\right) - \pi Q\left(\eta_1 - \frac{\pi}{2}\right) \right\},$$

provided that this expression is positive.

Now, let

$$\psi(\chi) = \eta_1 - \frac{3\pi}{8},$$

$$\psi(\chi + \theta) = \eta_1 - \frac{\pi}{2}.$$

Then

$$\psi(\chi + \theta) - \psi(\chi) = \theta \psi'(\bar{\chi}) = -\frac{\pi}{8},$$

where $\chi < \bar{\chi} < \chi + \theta$.

Therefore $\frac{\theta}{\chi} = -\frac{\pi}{8\chi\psi'(\bar{\chi})}$ is greater than $-\frac{\pi}{8\chi\psi'(\chi)}$ since evidently $-\psi'(x')$ decreases as x' increases. But $-x'\psi'(x') < 1$ since $\psi(x') < l\left(\frac{1}{x'}\right)$.

Therefore $\frac{\theta}{\chi} > 1$ as χ approaches zero. (1)

Now, it is easily seen that as t approaches zero

$$Q\left(\eta_1 - \frac{\pi}{2}\right) > Q\left(\eta_1 - \frac{3\pi}{8}\right) \quad \text{if} \quad \frac{(\chi + \theta)^2 - \chi^2}{t} > \frac{\theta^2}{\chi^2}.$$

But

$$\frac{(\chi + \theta)^2 - \chi^2}{t} = \frac{2\chi\theta + \theta^2}{t} \sim \frac{\theta^2}{d^2}$$

according to (1).

And $\chi > d$. Therefore $\frac{\theta^2}{d^2} > \frac{\theta^2}{\chi^2}$ and, consequently,

$$Q\left(\eta_1 - \frac{\pi}{2}\right) < Q\left(\eta_1 - \frac{3\pi}{8}\right).$$

Therefore $I_2(t_m)$ has the sign $(-1)^m$.

16. Since $\{\psi(2\sqrt{t_m}) - m\pi\}$ approaches zero as t_m approaches zero and, consequently, m approaches infinity, it follows from Art. 14 that

$I_1(t_m)$ has the sign $(-1)^m$.

Therefore $I(t_m) = I_1(t_m) + I_2(t_m)$ has the sign $(-1)^m$.

Therefore it is proved that, as t approaches zero, $V'(x, t)$ makes an indefinitely large number of fluctuations, from positive to negative values, with indefinitely increasing amplitude. For the sake of brevity I will, hereafter, express such behaviour by the symbolism

$$V'(x, t) \pm > 1.$$

$$\underline{2. \psi(x') \sim l\left(\frac{1}{x'}\right).}$$

$$\begin{aligned} 17. \quad I_1 &= \int_0^{C \times 2\sqrt{t}} x'^{1+k} \cos \left\{ l\left(\frac{1}{x'}\right) \right\} e^{-\frac{x'^2}{4t}} dx' \\ &= (2\sqrt{t})^{2+k} \int_0^C y^{1+k} \cos \left\{ l\left(\frac{1}{y}\right) + l\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) \right\} e^{-y^2} dy \\ &= (2\sqrt{t})^{2+k} R \cos \left\{ l\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) + \gamma \right\}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} R \cos \gamma &= \int_0^C y^{1+k} \cos \left\{ l \left(\frac{1}{y} \right) \right\} e^{-y^2} dy, \\ R \sin \gamma &= \int_0^C y^{1+k} \sin \left\{ l \left(\frac{1}{y} \right) \right\} e^{-y^2} dy. \end{aligned} \quad (1)$$

Consider $I_2 = \int_{l(1/C \times 2\sqrt{t})}^{l(1/\sigma)} P(x') \cos \eta d\eta$ where $P(x')$ and η are equal to $-x'^{2+k} e^{-\frac{x'^2}{4t}}$ and $l\left(\frac{1}{x'}\right)$ respectively.

The value of x' for which $-P(x')$ attains its maximum is

$$x' = d = \sqrt{2(2+k)t}.$$

Therefore, when C is sufficiently large, $-P(x')$ constantly decreases as x' increases from $C \times 2\sqrt{t}$ to σ .

Putting $l(1/C \times 2\sqrt{t}) = \eta_0$, let

$$\begin{aligned} (m + \frac{1}{2})\pi &\geq \eta_0 > (m - \frac{1}{2})\pi, \\ (m - r + \frac{1}{2})\pi &> l(1/\sigma) \geq (m - r - \frac{1}{2})\pi. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{l(1/\sigma)}^{\eta_0} Q(\eta) \cos \eta d\eta \\ &= \int_{(m-\frac{1}{2})\pi}^{\eta_0} + \int_{(m-\frac{3}{2})\pi}^{(m-\frac{1}{2})\pi} + \int_{(m-\frac{5}{2})\pi}^{(m-\frac{3}{2})\pi} + \dots + \int_{l(1/\sigma)}^{(m-r+\frac{1}{2})\pi} \\ &= (-1)^m \times 2 \{ k_0 Q(\bar{\eta}_0) - Q(\bar{\eta}_1) + Q(\bar{\eta}_2) - \dots + (-1)^{r-1} Q(\bar{\eta}_{r-1}) + (-1)^r k_r Q(\bar{\eta}_r) \} \end{aligned}$$

where $\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_1, \dots$ etc. lie within the limits of the first, second, etc. integrals respectively, and $0 < (k_0, k_r) \leq 1$.

Since the Q 's form a decreasing series it is easily seen that

$$I_2 = (-1)^m \times 2 \{ k_0 Q(\bar{\eta}_0) - \bar{k} Q(\bar{\eta}_1) \}$$

where $0 < \bar{k} < 1$. Therefore

$$|I_2| < 4Q(\bar{\eta}_0) < 4Q(\eta_0) \quad \text{i. e.} \quad -4P(C \times 2\sqrt{t}).$$

Thus

$$|I_2| < 4(C \times 2\sqrt{t})^{2+k} e^{-C^2}.$$

Therefore, by choosing C sufficiently large, I_2 can be made as small as we please, in comparison with I_1 , provided that I_1 is not zero.

Therefore, γ_0 being the value of γ when C is made infinite in (1),

$$V'(x, t) \approx (\sqrt{t})^{-1+k} \cos \left\{ l \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \right) + \gamma_0 \right\}$$

for those values of t for which the cosine is not zero.

Therefore $V'(x, t) \pm > 1$.

$$\underline{\mathbf{3.}} \quad \psi(x') > l \left(\frac{1}{x'} \right).$$

$$18. \quad I = \int_0^\sigma x'^{1+k} \cos \{ \psi(x') \} e^{-\frac{x'^2}{4t}} dx' = \int_d^\sigma + \int_0^d.$$

Proceeding as in the case of I_2 of the last article, it is easily seen that each of the integrals \int_d^σ and \int_0^d is numerically less than $4P(d)$.

Therefore $|I| < 8|P(d)|$ and, consequently, $|I| \ll |P(d)|$ as t approaches zero.

Case I: $\psi(x') > \frac{1}{x'}$.

As shown in the beginning of Art. 15, d is given by the equation

$$\frac{X'(d)}{X(d)} = \frac{d}{2t};$$

and since

$$\psi(x') > \frac{1}{x'}, \quad -\psi'(x') > \frac{1}{x'^2}.$$

Therefore $-X(x') < x'^{3+k}$ and, consequently, $l \{-X(x')\} \approx l(x')$.
Therefore

$$\frac{X'(x')}{X(x')} \approx \frac{1}{x'};$$

hence $\frac{d}{2t} \approx \frac{1}{d}$ and, consequently, $d \approx \sqrt{t}$.

Now,

$$P(d) = X(d) e^{-\frac{d^2}{4t}};$$

$$\text{hence } -P(d) < d^{3+k} e^{-\frac{d^2}{4t}}.$$

Since $|I| \ll -P(d)$, it follows that

$$|V'(x, t)| \ll t^{-\frac{3}{2}} d^{3+k} e^{-\frac{d^2}{4t}} \text{ and, consequently, } \ll 1.$$

Case II:

$$\frac{1}{x'} \gtrsim \psi(x') > l\left(\frac{1}{x'}\right).$$

Therefore $x'^{3+k} \lesssim \{-X(x')\} < x'^{2+k}$;

hence $l\{-X(x')\} \sim l(x')$.

Therefore $\frac{X'(x')}{X(x')} \sim \frac{1}{x'}$ and, consequently, $d \sim \sqrt{t}$.

Therefore

$$|V'(x, t)| \lesssim -t^{-\frac{3}{2}} X(\sqrt{t}), \quad \text{i. e.} \quad \frac{-(\sqrt{t})^{k-2}}{\psi'(\sqrt{t})}. \quad (1)$$

Thus, when $\psi(x') \gtrsim \frac{1}{x'^\nu}$, it follows from (1) that $|V'(x, t)| < 1$ if $k + \nu > 1$.

When $\psi(x') \sim \frac{1}{x'}$ or $k + \nu = 1$, $|V'(x, t)| \lesssim 1$. In all other cases (1) leaves it uncertain whether

$$|V'(x, t)| \begin{matrix} \gtrsim \\ \sim \\ \lesssim \end{matrix} 1.$$

Summary relating to the behaviour of $V'(x, t)$ for t small.

19. The results obtained in Arts. 11—18 may be summed up as follows:

i. $|V'(x, t)| \sim 1$ if $|D(x, x')| \sim 1$.

In particular $\{|V'(x, t)| - A\} < 1$ if $\{|D(x, x')| - A\} < 1$, A being a finite positive quantity.

ii. $|V'(x, t)| \gg 1$ if $|D(x, x')| \gg 1$.

iii. When $D(x, x') \sim x'^{-1+k} \cos\{\psi(x')\}$, $\psi(x')$ being > 1 and $0 \leq k < 1$,

$$V'(x, t) \begin{matrix} \pm \gg \\ \ll \end{matrix} 1, \quad |V'(x, t)| < 1, \quad \text{or} \quad |V'(x, t)| \begin{matrix} \gtrsim \\ \sim \\ \lesssim \end{matrix} \frac{-(\sqrt{t})^{k-2}}{\psi'(\sqrt{t})}$$

according as $\psi(x') \lesssim l\left(\frac{1}{x'}\right)$, $> \frac{1}{x'}$, or $> l\left(\frac{1}{x'}\right)$ but $\lesssim \frac{1}{x'}$.

Behaviour of $V(x, t)$ for t small.

20. As $V(x, t)$ is an even function of x it would be sufficient to consider the case $0 \leq x \leq \pi$.

Proceeding as in Art. 11, it is found without difficulty that

$$V(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x') \Theta(x' + x) dx' + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x') \Theta(x' - x) dx'.$$

It is easily found, by the method of Art. 12, that as t approaches zero

$$V(x, t) \text{ behaves as } \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\sigma M(x, x') e^{-\frac{x'^2}{4t}} dx' \quad (\text{II})$$

where

$$\begin{aligned} M(x, x') &= \frac{f(x+x') + f(x-x')}{2}, & x < \pi, \\ &= f(x-x'), & x = \pi. \end{aligned}$$

21. It follows from (II) that $\lim_{t \rightarrow +0} V(x, t) = \lim_{x' \rightarrow +0} M(x, x')$.

When $\lim_{x' \rightarrow +0} M(x, x')$ does not exist, i. e., when $M(x, x')$ has a discontinuity of the second kind at $x' = 0$, it would be sufficient for the purposes of this essay to consider the case, $M(x, x') \sim \cos \{\psi(x')\}$, where $\psi(x') > 1$.

Case I: $\psi(x') \lesssim l \left(\frac{1}{x'} \right)$.

Noting that $\frac{X'(x')}{X(x')} \sim \frac{1}{x'}$, where $X(x') = \frac{1}{\psi'(x')}$, it is easily found by the methods of Arts. 14—17 that $\lim_{t \rightarrow +0} V(x, t)$ does not exist.

Case II: $\psi(x') > l \left(\frac{1}{x'} \right)$.

It is easily found, by the method of Art. 18, that

$$|V(x, t)| \ll 1, \text{ or } \lesssim \left\{ -t^{-\frac{1}{2}} X(\sqrt{t}) \right\}, \text{ i. e. } \frac{-t^{-\frac{1}{2}}}{\psi'(\sqrt{t})}, \text{ according as } \psi(x') > \frac{1}{x'}, \text{ or } \gtrsim \frac{1}{x'}.$$

Since $-\psi'(x') > \frac{1}{x'^2}$, it follows that $|V(x, t)|$ is always $\ll 1$.

Necessary and sufficient conditions for $f(x)$.

22. The group of conditions, of Art. 10, which is necessary and sufficient in order that $V(x, t)$ be the solution of the problem leads, with the help of the results given in Arts. 19 and 21, to certain necessary and sufficient conditions, for $f(x)$, of an applicability sufficiently extensive for the purposes of this essay. I give the simplest and most important of these conditions below.

i. If $f(x)$ is continuous in the interval $(-\pi, \pi)$ then, in order that $V(x, t)$ be the solution of the problem, it is sufficient that there exist values of x , forming an aggregate everywhere dense within the interval $(-\pi, \pi)$, for which either $|D(x, x')| \sim 1$ or $\pm D(x, x') \sim x'^{-1+k} \cos \{\psi(x')\}$ where $\psi(x') > \frac{1}{x'^v}$, $k + v > 1$.

ii. If $f(x)$ is discontinuous in the interval $(-\pi, \pi)$ then the condition relating to $D(x, x')$, given in i., together with one of the following conditions is sufficient:

(a) If $\lim_{x' \rightarrow +0} M(x, x')$ exists, it is equal to $f(x)$.

(b) If $M(x, x') = M_1(x, x') + M_2(x, x')$ such that $\lim_{x' \rightarrow +0} M_1$ exists and $M_2 \sim \cos \{ \psi(x') \}$ where $\psi(x') \succ l\left(\frac{1}{x'}\right)$, then the condition is that $\lim_{x' \rightarrow +0} M_1 = f(x)$.

(c) $M(x, x') \sim \cos \{ \psi(x') \}$ where $\psi(x') \lesssim l\left(\frac{1}{x'}\right)$; further, $f(x) = 0$.

iii. $V(x, t)$ ceases to be the solution, if at any point $\lim_{x' \rightarrow +0} M(x, x')$ exists and is different from $f(x)$.

iv. $V(x, t)$ ceases to be the solution if, at every point within the interval $(-\pi, \pi)$, $\pm D(x, x')$ either $\succ 1$ or $\sim x'^{-1+k} \cos \{ \psi(x') \}$ where $\psi(x') \lesssim l\left(\frac{1}{x'}\right)$.

Stable, unstable, and inadmissible initial states.

23. I will call an initial state, $T(x, 0) = f(x)$, *stable* or *unstable* according as both the conditions of Art. 10 are satisfied or only the first. An initial state $f(x)$ is considered *inadmissible* if it is not known that the first condition is satisfied. A stable initial state is called *non-oscillatory* if $T(x, t)$ is continuous, i. e., $\lim_{t \rightarrow +0} V(x, t) = f(x)$; it is called *oscillatory* if there exists at least one point in the interval $(-\pi, \pi)$ where $V(x, t)$ makes, within any indefinitely small interval $(0, t_0)$, an infinite number of finite oscillations about $f(x)$, i. e., $T(x, t)$ has a discontinuity of the second kind at $t = 0$ and $f(x)$ is contained in the aggregate of values assumed by $V(x, t)$ as t approaches zero.

A continuous initial state, if admissible, is always stable and non-oscillatory. A discontinuous initial state, if admissible, may be stable or unstable, non-oscillatory or oscillatory: for example, if it satisfies ii. of the last article it is stable; but it is non-oscillatory or oscillatory according as it corresponds to one of the two (a), (b), or, for at least one value of x , to (c). If an admissible initial state corresponds to iii. it is unstable. Remembering the conditions involved in the integrability of $f(x)$, it is easily seen that an unstable initial state can be replaced by a stable one without changing $V(x, t)$.

An initial state is inadmissible if it corresponds to iv. For, $Q(x, t)$ is indeterminate and, consequently, it is not known whether the principle of the conservation of energy, as stated in Art. 3, is satisfied or not. It should be noted that this is a case of failure *not* of mathematical analysis but of our physical conceptions.

Illustrative Examples.

24. The following simple examples suffice to illustrate the salient features of the theory:

(i) Let $T(x, 0) = f(x) = \sum_1^{n=\infty} a^n \cos(b^n x)$, where a is a positive constant less than 1, b is an odd integer, and $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. This is Weierstrass's function.

Consider the aggregate $\left\{ \frac{M\pi}{b^m} \right\}$ where m and $|M|$ are positive integers and $|M|$ is prime to b and less than b^m . The aggregate is everywhere dense within the interval $(-\pi, \pi)$.

For any point $x_m = \frac{M\pi}{b^m}$ of this aggregate,

$$|D(x, x')| = \left| \sum_1^{n=m-1} \frac{a^n \sin(b^n x) \sin(b^n x')}{x'} \right| < \left| \frac{(ab)^m - ab}{ab - 1} \right|;$$

hence $|D(x_m, x')| \ll 1$, and consequently $|V'(x_m, t)| \ll 1$.

Also $f(x)$ is continuous. Therefore $V(x, t)$ is the solution of the problem and the initial state, $T(x, 0) = f(x)$, is stable and non-oscillatory.

(ii) Let $T(x, 0) = f(x) = \sum_1^{n=\infty} \frac{(nx)}{n^s}$, $s > 2$, $0 \leq x \leq \pi$, where (nx) represents zero, when nx is an integer or half an odd integer, and in all other cases, the positive or negative difference between nx and the whole number nearest to it.

At any rational point $\frac{\nu}{2\mu+1}$ with odd denominator,

$$\lim_{x'=+0} D(x, x') = \sum_1^{n=\infty} \frac{1}{n^{s-1}};$$

$$\text{hence } \lim_{t=+0} V'(x, t) = \sum_1^{n=\infty} \frac{1}{n^{s-1}},$$

and, consequently, $V'(x, t) \ll 1$.

Also $f(x)$ is continuous at any irrational point or rational point $\frac{\nu}{2\mu+1}$; at any rational point, $\frac{\nu}{2\mu}$, with even denominator, $f(x)$ has a discontinuity of the first kind but such that

$$f(x) = \frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\} = \lim_{x'=+0} M(x, x').$$

$$\text{Therefore } f(x) = \lim_{t=+0} V(x, t).$$

Therefore $V(x, t)$ is the solution of the problem and the initial state $f(x)$, though discontinuous, is stable and non-oscillatory.

(iii) Let $T(x, 0) = f(x) = \sum_1^{r=\infty} \frac{\Psi(x - \omega_{nr})}{n_r^{s+1}}$, $s > 1$, $0 \leq x \leq \pi$, where

$$\Psi(y) = \cos \left\{ l \left(\frac{1}{y^2} \right) \right\}, \quad |y| > 0,$$

$$\Psi(y) = 0, \quad y = 0;$$

further, $G_1 = \{\omega_{n_r}\}$, $G_2 = \{\omega_{n_\lambda}\}$ are everywhere dense subaggregates of $\overline{G} = \{\omega_n\}$, the aggregate of rational numbers, arranged according to *Cantor*, such that $\overline{G} = G_1 + G_2$ and the r th and λ th terms of G_1 and G_2 are the n_r th and n_λ th terms of \overline{G} , respectively.

At any point $x = \omega_{n_\lambda}$ of G_2 ,

$$\left| \lim_{t \rightarrow +0} V'(x, t) \right| = \left| \lim_{x' \rightarrow +0} D(x, x') \right| = \left| \sum_1^{r=\infty} \frac{\Psi'(x - \omega_{n_r})}{n_r^{s+1}} \right| < 2n_\lambda \sum_1^{r=\infty} \frac{1}{n_r^s}$$

$$< 2n_\lambda \sum_1^{r=\infty} \frac{1}{r^s};$$

hence $|V'(x, t)| \sim 1$.

Also $f(x)$ is continuous at any irrational point or any point belonging to G_2 ; at any point ω_{n_r} , of G_1 , $f(x)$ has a discontinuity of the second kind and behaves as $f_0(x) + \frac{\Psi(x - \omega_{n_r})}{n_r^{s+1}}$, where $f_0(x) = f(x) - \frac{\Psi(x - \omega_{n_r})}{n_r^{s+1}}$ and is continuous.

Therefore at any irrational point or any point of G_2

$$\lim_{t \rightarrow +0} V(x, t) = f(x);$$

at any point ω_{n_r} , of G_1 , $V(x, t)$ makes, within any indefinitely small interval $(0, t_0)$, an infinite number of oscillations, about $f(x)$, of finite amplitude not greater than $\frac{2}{n_r^{s+1}}$.

Therefore $V(x, t)$ is the solution of the problem and the initial state $f(x)$ is stable and oscillatory.

(iv) Let $T(x, 0) = f(x) = \sum_1^{r=\infty} \frac{\Psi_1(x - \omega_{n_r})}{n_r^{s+1}}$, $s > 1$, $0 \leq x \leq \pi$, where

$$\Psi_1(y) = \cos \left\{ l \left(\frac{1}{y^2} \right) \right\}, \quad |y| > 0,$$

$$\Psi_1(y) = 4, \quad y = 0.$$

$V(x, t)$ is the same as the $V(x, t)$ of (iii). Since $\Psi_1(0) > 2$, $f(\omega_{n_r})$ is not contained in the aggregate of values assumed by $V(\omega_{n_r}, t)$ as t approaches zero. Therefore the initial state is unstable, and, so to speak, runs down *instantaneously* to the initial state of (iii).

(v) Let $T(x, 0) = f(x)$ where $f(x)$ is equal to the $f(x)$ of (ii) at all the points in the interval $(-\pi, \pi)$ with the exception of an aggregate of points of zero content. Then $V(x, t)$ is the same as the $V(x, t)$ of (ii); and the initial state, being unstable, *instantaneously* goes into the initial state of (ii).

Part II.

Discontinuous Theory¹⁾.

Formulation of a discontinuous theory of solids.

25. In the present part I propose to examine the phenomenon from the point of view of *those theories which postulate the existence of molecules but take no account of their constitution*. With this end in view, I proceed to formulate a simple and typical *discontinuous theory*, of solids, in which, for the sake of clearness, certain unessential points are detailed.

Taking a centimetre as the unit of length, suppose that each molecule is a circular cylinder, with its axis parallel to the axis of x , of length λ and cross-section of diameter λ ; further, suppose that each molecule oscillates, parallel to the axis of x , about its mean position, the length covered by its axis in any oscillation being less than 2λ . Thus the slab consists of rows of molecules, parallel to the axis of x ; and the motion in each row is the same. Suppose that the rows are most closely packed; also suppose that the distance between two contiguous molecules in a row is never greater than 2λ .

Consider one of these rows. Suppose that it contains r assemblages,

$$A_1, A_2, \dots, A_r,$$

the number of molecules in each assemblage being s . Then with any assemblage A_q is associated a quantity $T_q(t)$ which depends only on the molecular motions in A_q at time t and which may be called the *temperature* of the assemblage at that time.

The *problem of the linear conduction of heat* may now be thus formulated:

1) In working out this theory I have received great help from the writings of Lord Kelvin, Larmor, Maxwell, and Poisson. And of these writings the following have been specially useful to me:

Lord Kelvin's „Popular Lectures and Addresses,“ Vol. I, The Size of Atoms.

Larmor's „A Dynamical Theory of the electric and luminiferous Medium,“ Part III. (Phil. Trans. Vol. 190) Arts. 11—12 and 48—51.

Poisson's „Théorie Mathématique de la Chaleur,“ Chapter IV.

Abhandlg. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-Phys. Kl. N. F. Band 2, 4.

The initial temperatures, $T_1(0), T_2(0), \dots, T_r(0)$, of the assemblages A_1, A_2, \dots, A_r , being given, find their subsequent temperatures.

Approximate analytical representation of the conditions of the phenomenon.

26. The conditions of the phenomenon are the same in the present theory as in the theory expounded in the previous part; but an exact analytical representation of these conditions, in terms of the temperatures of the assemblages, is impossible because the precise circumstances of the phenomenon are not known. For example, even if the exact law according to which the molecules oscillate were known, the fact of the conservation of the energy in the volume, initially occupied by a molecule, would still be incapable of exact analytical representation, as such a representation would involve considerations regarding the internal constitution of the molecule and the distribution of the energy inside it; and these considerations are essentially foreign to the theory. Thus it is an essential feature of the theory that an *exact solution of the problem is impossible*.

27. The following *three hypotheses* suffice for an approximate analytical representation of the principle of the conservation of energy; in formulating them I will detail, for the sake of clearness, certain unimportant points which are easily distinguishable:

i. The resultant effect of the molecular radiations, in $A_\varrho, A_{\varrho'}$, in any interval $(t, t+\tau)$ is the flow of a quantity of heat equal to

$$\int_t^{t+\tau} \{T_\varrho(t') - T_{\varrho'}(t')\} R_{\varrho, \varrho'} dt'$$

from A_ϱ to $A_{\varrho'}$ along the line which joins the centres of A_ϱ and $A_{\varrho'}$ at time $t + \frac{\tau}{2}$. Here $R_{\varrho, \varrho'}$ is a finite and positive function of the positions of the centres of A_ϱ and $A_{\varrho'}$, when the distance between them is less than a certain length $2\lambda_1$, and vanishes when the distance equals or exceeds $2\lambda_1$; further, the greatest values of

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_{\varrho, t}} (R_{\varrho, \varrho'}) \right| \quad \text{and} \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_{\varrho', t}} (R_{\varrho, \varrho'}) \right|$$

are less than $\frac{\lambda_1}{\lambda}$ whatever ϱ and ϱ' may be, $x_{\varrho, t}$ and $x_{\varrho', t}$ being the x -coordinates of the centres of A_ϱ and $A_{\varrho'}$, respectively, at time t . (α_1)

ii. Conduction is wholly due to molecular radiations. (β_1)

iii. The quantity of heat absorbed by A_ϱ in any interval $(t, t+\tau)$ is equal to

$$cO_\varrho \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \{T_\varrho(t+\tau) - T_\varrho(t)\},$$

where c is a constant called the thermal capacity of the solid and $O_q\left(t + \frac{\tau}{2}\right)$ is the volume occupied by A_q at time $t + \frac{\tau}{2}$. (71)

28. Let $Y(x, t)$ be a function of x and t such that $T_q(t)$ equals $Y(x_{q,t}, t)$. I will call $Y(x, t)$ the *auxiliary function*.

Let $\bar{R}_{q,q'}$ stand for the value of $R_{q,q'}$ when $\bar{x}_q, \bar{x}_{q'}$ are substituted for $x_{q,t}, x_{q',t}$, $\bar{x}_q, \bar{x}_{q'}$ being the values about which $x_{q,t}, x_{q',t}$ fluctuate.

Then, noting that $x_{q,t} - \bar{x}_q$ and $x_{q',t} - \bar{x}_{q'}$ are each numerically less than λ , it follows from the end of (α_1) that

$$R_{q,q'} = \bar{R}_{q,q'}(1 + 2\theta_1\lambda_1), \quad |\theta_1| < 1.$$

Also

$$T_q(t') - T_{q'}(t') = (x_{q,t} - x_{q',t})\{Y'(x_1, t') + \theta_2\lambda_1\Omega_2(x_1, t')\},$$

where x_1 lies on the left of $x_{q,t}$ and on the right of $x_{q',t}$,

$$x_{q,t} - x_{q',t} < 2\lambda_1, \quad |\theta_2| < 1,$$

and $\Omega_2(x_1, t')$ is the greatest value of $|Y''(x, t')|$ within the interval

$$(x_1 - 2\lambda_1, x_1 + 2\lambda_1).$$

Now

$$x_{q,t} - x_{q',t} = (\bar{x}_q - \bar{x}_{q'})\left(1 + \theta_3\frac{2}{s}\right), \quad |\theta_3| < 1.$$

Therefore it follows from symmetry and from (α_1), (β_1) that the quantity of heat which flows across a unit area L , placed parallel to the faces of the slab and distant x_1 from the origin, in the positive direction of the axis of x in any interval $(t, t + \tau)$ is equal to

$$\begin{aligned} & \left\{ -\int_t^{t+\tau} Y'(x_1, t') dt' + \int_t^{t+\tau} |Y'(x_1, t')| dt' \right\} \Sigma \bar{R}_{q_m, q_n} (\bar{x}_{q_m} - \bar{x}_{q_n}) \\ & - (1 + 2\theta_4\lambda_1) \left(1 + \theta_5\frac{2}{s}\right) \left\{ \int_t^{t+\tau} |Y'(x_1, t')| dt' + \theta_6\lambda_1 P_2(x_1, t, t + \tau) \right\} \Sigma \bar{R}_{q_m, q_n} (\bar{x}_{q_m} - \bar{x}_{q_n}), \quad (1) \\ & \quad |\theta_4|, |\theta_5|, |\theta_6| < 1, \end{aligned}$$

where $P_2(x_1, t, t + \tau)$ stands for $\int_t^{t+\tau} \Omega_2(x_1, t') dt'$ and the summation extends to every pair of assemblages A_{q_m}, A_{q_n} , situated on the right and on the left of x_1 , respectively, for which

$$x_{q_m,t} - x_{q_n,t} < 2\lambda_1$$

and the line joining whose centres crosses the area perpendicularly.

Now, suppose it to follow from the homogeneity of the slab that

$$\Sigma' \bar{R}_{q_m, q_n} (\bar{x}_{q_m} - \bar{x}_{q_n}) = kK \frac{\pi\lambda^2}{4},$$

where Σ' indicates summation with respect to a single row of the assemblages A_{q_m}, A_{q_n} , K is a constant called the thermal conductivity of the slab, and k stands for 1 or k_1 according as x_1 lies or does not lie in the interval

$$(-\pi + 2\lambda_1, \pi - 2\lambda_1), \quad 0 \leq k_1 \leq 1.$$

Then it is easily seen that

$$\Sigma \bar{R}_{q_m, q_n} (\bar{x}_{q_m} - \bar{x}_{q_n}) = kK\sigma_1$$

where σ_1 is the sum of the areas of the bases of the rows. Therefore the quantity of heat given by (1) is equal to

$$p(1 - d_1)kK \left\{ -\int_t^{t+\tau} Y'(x_1, t') dt' + \int_t^{t+\tau} |Y'(x_1, t')| dt' \right\} \\ - (1 + 2\theta_4 \lambda_1) \left(1 + \theta_5 \cdot \frac{2}{s} \right) p(1 - d_1)kK \left\{ \int_t^{t+\tau} |Y'(x_1, t')| dt' + \theta_6 \lambda_1 P_2(x_1, t, t + \tau) \right\}$$

where p is the greatest value that σ_1 can have when L is of a standard shape, say circular, and d_1 stands for $1 - \frac{\sigma_1}{p}$ and evidently depends on λ , the position of L in the plane containing it, and the size and shape of the periphery of L .

Let \bar{d}_1 be the greatest value that $|d_1|$ can have, whatever be the position of L in the plane containing it. Now let $P_1(x_1, t, t + \tau)$ stand for

$$\int_t^{t+\tau} |Y'(x_1, t')| dt';$$

further, suppose that $\lambda_1 \geq \frac{2}{s}$ and $\lambda_1 <$, say, 10^{-2} . Then, if $\bar{d}_1 < \frac{1}{4}$, — a condition which will be shown to hold when L is a circle, — it is easily seen that, neglecting

$$pE_1(x_1, t, t + \tau, \bar{d}_1) = pkK \{ 2\lambda_1 P_2(x_1, t, t + \tau) + (\bar{d}_1 + 4\lambda_1) P_1(x_1, t, t + \tau) \},$$

the quantity of heat which flows across the unit area is equal to

$$-pkK \int_t^{t+\tau} Y'(x_1, t') dt', \quad (\text{I})$$

whatever be its position in the plane containing it.

29. I proceed now to find the quantity of heat which is absorbed by a cylinder, with its axis parallel to the axis of x and its faces, of unit area, $x = x_1, x = x_2$, in any interval $(t, t + \tau)$.

Let H represent this quantity; also let L stand for one of the faces.

Now, there may exist assemblages, near the surface of the cylinder, each of which is sometimes partly or wholly inside the cylinder, none remaining wholly inside it throughout the interval; it is easily seen that the portion of

the cylindrical volume, occupied by such assemblages, is, at any time in the interval, less than, say,

$$2\frac{1}{4}\lambda_2 + \frac{\pi\lambda^2}{2}(\bar{x}_2 - x_1),$$

where λ_2 represents the greatest length that an assemblage can have.

Let H_1 represent the part of H absorbed by these assemblages.

Then

$$|H_1| < c \left\{ 2\frac{1}{4}\lambda_2 + \frac{\pi\lambda^2}{2}(x_2 - x_1) \right\} \Omega(t, t + \tau),$$

where $\Omega(t, t + \tau)$ stands for the greatest value of $|Y(x, t + \tau) - Y(x, t)|$. But evidently $3p\lambda_2 > 2\frac{1}{4}\lambda_2 + \pi^2\lambda^2$. Therefore

$$H_1 = 3p\lambda_2\theta_7 c \Omega(t, t + \tau), \quad |\theta_7| < 1.$$

Consider $H_2 = H - H_1$ the quantity of heat absorbed by those assemblages which remain wholly inside the cylinder throughout the interval.

Let $A_{m_1+1}, A_{m_1+2}, \dots, A_{m_1+r_1}, \dots, A_{m_1+n}$ be a row of these assemblages; further, let

$$\begin{aligned} x &= X_{r_1}, \\ x &= X'_{r_1}, \end{aligned}$$

be the faces of $A_{m_1+r_1}$ at time $t + \frac{\tau}{2}$, X'_{r_1} being greater than X_{r_1} . Then it follows from (γ_1) that

$$H_2 = c\sigma_2 \sum_{r_1=1}^{r_1=n} (X'_{r_1} - X_{r_1}) \{ T_{m_1+r_1}(t + \tau) - T_{m_1+r_1}(t) \}, \quad (1)$$

where σ_2 is the sum of the areas of the bases of the rows.

Consider

$$I = c \int_{x_1}^{x_2} \{ Y(x', t + \tau) - Y(x', t) \} dx'.$$

Now,

$$\begin{aligned} I/c &= 2\frac{1}{4}\lambda_2\theta_8\Omega(t, t + \tau) + \sum_{r_1=1}^{r_1=n} \left[\int_{X_{r_1}}^{X'_{r_1}} \{ Y(x', t + \tau) - Y(x', t) \} dx' \right] \\ &+ \sum_{r_1=1}^{r_1=n-1} \left[\int_{X'_{r_1}}^{X_{r_1+1}} \{ Y(x', t + \tau) - Y(x', t) \} dx' \right], \quad |\theta_8| < 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Let $\bar{\Omega}(x_1, x_2)$ stand for the greatest of the values of the fluctuation of $Y(x', t)$ in intervals, of length λ_2 , taken anywhere within the interval (x_1, x_2) ; further, let d_2 represent $1 - \frac{\sigma_2}{p}$ where d_2 evidently depends on λ , the position of L in the plane containing it, and the size and shape of the periphery of L . Then, noting that

$$X'_{r_1} - X_{r_1} \leq \lambda_2$$

and

$$X_{r_1+1} - X'_{r_1} \leq 2\lambda < \frac{2}{s} (X'_{r_1} - X_{r_1}),$$

it is easily seen from (1) and (2) that

$$\begin{aligned} H_2/c &= p(1-d_2) \left[\int_{x_1}^{x_2} \{Y(x', t+\tau) - Y(x', t)\} dx' - 2\frac{1}{4}\lambda_2\theta_s \Omega(t, t+\tau) \right] \\ &\quad + 2\theta_9(x_2 - x_1) \overline{\Omega}(x_1, x_2) \\ &\quad + \frac{2}{s} \theta_{10}(x_2 - x_1) \Omega(t, t+\tau), \quad |\theta_9|, |\theta_{10}| < 1. \end{aligned}$$

Let \bar{d}_2 be the greatest value that $|d_2|$ can have whatever be the position of L in the plane containing it. Then, neglecting

$pE_2(x_1, x_2, t, t+\tau, \bar{d}_2) = 6pc\lambda_2 \Omega(t, t+\tau) + pc(x_2 - x_1) \{(\bar{d}_2 + 2\lambda_1) \Omega(t, t+\tau) + 3\overline{\Omega}(x_1, x_2)\}$,
the quantity of heat H absorbed by the cylinder is equal to

$$pc \int_{x_1}^{x_2} \{Y(x', t+\tau) - Y(x', t)\} dx',$$

whatever be the position of L in the plane containing it. (II)

30. Let $E_1(\bar{d}_1)$, $E_2(\bar{d}_2)$ be the greatest values of

$$E_1(x_1, t, t+\tau, \bar{d}_1), \quad E_2(x_1, x_2, t, t+\tau, \bar{d}_2)$$

respectively, whatever $x_1, x_2, t, t+\tau$ may be; further, let $E(d)$ stand for the greater of the two quantities $E_1(\bar{d}_1)$, $E_2(\bar{d}_2)$, d being the greater of the two quantities \bar{d}_1, \bar{d}_2 . Also let Π_1, Π_2, W , and \overline{W} stand for the greatest values of $P_1(x_1, t, t+\tau)$, $P_2(x_1, t, t+\tau)$, $\Omega(t, t+\tau)$, and $\overline{\Omega}(x_1, x_2)$, respectively, whatever $x_1, x_2, t, t+\tau$ may be.

Now, it has been tacitly assumed in the last two articles that not only are $Y'(x, t)$ and $Y''(x, t)$ existent and, together with $Y(x, t)$, integrable in t but also Π_1, Π_2 are finite. These conditions are therefore necessary though not sufficient. For, it is evidently necessary that $E(d)$ be not only finite but also negligible; for the sake of clearness, I will call $E(d)$ negligible when $E(d)/g$ is less than, say, 10^{-2} , where g stands for

$$K \left| \int_{-\pi}^{\pi} Y(x', 0) dx' \right|.$$

Therefore, in order that a suitable approximation to the quantity of heat which flows across a unit area, or to the quantity of heat absorbed by any cylinder standing on a unit area, be at all possible, it is necessary that the periphery of the area be of such size and shape that

$$d < 10^{-2}.$$

For example, when the area is a rectangle $\left(\frac{\lambda}{2} \times \frac{2}{\lambda}\right)$, neither of the two quantities of heat can be approximated to, since d is unity.

It should be noted that $Y(x, t)$ need not satisfy any conditions other than those indicated above and the approximate conditions of the phenomenon, expressed in terms of $Y(x, t)$, which I will give in the next article. For example, $Y(x, t)$ need not be differentiable with respect to t .

31. The result as regards the *translation of the actual conditions of the phenomenon into approximate conditions*, expressed in terms of $Y(x, t)$, may be stated now.

The *first* of the three actual conditions of the phenomenon is that the principle of the conservation of energy be satisfied. In other words, the first condition is that the quantity of heat which flows into *any* closed surface S in any interval be equal to the quantity of heat absorbed by the enclosed solid in the same interval. Now this condition, in all its generality, cannot be approximated to. For example, when S is such that the greatest length, parallel to the axis of x , taken inside it is less than λ_2 , or, the greatest length, in even one direction perpendicular to the axis of x , is less than λ , then the fact of the conservation of the energy inside S cannot be approximated to; on the other hand, when S is not reentrant and is, further, such that the greatest length, in any direction, taken inside it exceeds, say, unity, then an approximation to the fact of the conservation of the energy inside S can be obtained, the degree of the approximation depending on the size and shape of S .

The fact of the conservation of the energy inside any circular cylinder O , with its axis parallel to the axis of x and its faces, of unit area, $x = x_1$, $x = x_1 + 1$, is expressed by the equation

$$\begin{aligned} & k' K \int_0^t Y'(x_1 + 1, t') dt' - k K \int_0^t Y'(x_1, t') dt' \\ &= c \int_{x_1}^{x_1 + 1} \{Y(x', t) - Y(x', 0)\} dx' + 3\theta_{11} E, \quad |\theta_{11}| < 1, \quad (1) \\ & \qquad \qquad \qquad -\pi < x_1 < \pi - 1, \end{aligned}$$

where E stands for $E(d)$, d being the value of d for a circle, and it follows, from Art. 28, that (k, k') equals 1 or (k_1, k'_1) according as $(x_1, x_1 + 1)$ lies or does not lie in the interval $(-\pi + 2\lambda_1, \pi - 2\lambda_1)$, $0 \leq (k_1, k'_1) \leq 1$.

Let ε stand for the greatest value of $K \left| \int_0^t Y'(x, t') dt' \right|$, t having any value and x lying outside the interval $(-\pi + 2\lambda_1, \pi - 2\lambda_1)$. Then, if $(x_1, x_1 + 1)$ does not lie in this interval, the left side of (1) equals

$$K \int_0^t \{Y'(x_1 + 1, t') - Y'(x_1, t')\} dt' + \theta_{12} \varepsilon, \quad |\theta_{12}| \leq 1.$$

Therefore (1) becomes

$$K \int_0^t \{ Y'(x_1+1, t') - Y'(x_1, t') \} dt' = c \int_{x_1}^{x_1+1} \{ Y(x', t) - Y(x', 0) \} dx' + \theta_{13} (3E + \varepsilon), \quad (2)$$

$$|\theta_{13}| < 1, \quad -\pi < x_1 < \pi - 1.$$

Therefore, supposing the units to be so chosen that $\frac{K}{c} = 1$, the equation

$$\int_0^t \{ Y'(x_1+1, t') - Y'(x_1, t') \} dt' = \int_{x_1}^{x_1+1} \{ Y(x', t) - Y(x', 0) \} dx', \quad (A_1)$$

$$-\pi < x_1 < \pi - 1,$$

is an approximation to the fact of the conservation of the energy inside any O , $\frac{1}{K} (3E + \varepsilon)$ being neglected.

Now, from the conservation of the energy inside *any* O of course follows the conservation of the energy inside any closed surface S ; but a little reflection shews that the possibility of an approximation to the former does not necessarily involve the possibility of an approximation to the latter. With this understanding (A₁) may be regarded as the *first approximate condition of the phenomenon*.

The *second* actual condition of the phenomenon is this. $T_\varrho(t)$ is continuous in t , or, if it has any discontinuities, they are of the second kind; further, if t_ω is a point of discontinuity, $T_\varrho(t_\omega)$ is contained in the aggregate of values assumed by $T_\varrho(t)$ as t approaches t_ω .

Now

$$T_\varrho(t) = Y(x_{\varrho, \varrho}, t) = Y(x_{\varrho, 0} + \theta_{14} \lambda, t), \quad |\theta_{14}| < 1.$$

Let e stand for the greatest of the values of the fluctuation of $Y(x, t)$ in the intervals $(x_{\varrho, 0} - \lambda, x_{\varrho, 0} + \lambda)$ whatever t may be. Then, if t_1, t_2 be any two values of t ,

$$T_\varrho(t_2) - T_\varrho(t_1) = Y(x_{\varrho, 0} + \theta_{15} \lambda, t_2) - Y(x_{\varrho, 0} + \theta_{15} \lambda, t_1) + \theta_{16} e, \\ |\theta_{15}| < 1, \quad |\theta_{16}| \leq 1.$$

Therefore, if $T_\varrho(t)$ be replaced by $Y(x, t)$ in the above statement of the actual condition, an approximation, (B₁), to it is obtained, e being neglected; here x_i stands for any x lying in the interval $(x_{\varrho, 0} - \lambda, x_{\varrho, 0} + \lambda)$.

The *third* actual condition of the phenomenon is the impermeability to heat of the faces of the slab. In other words, the third condition is that the quantity of heat which flows across *any* area σ , situated on any face of the slab, in any interval $(0, t)$ be nil. Therefore, making use of the fact of the conservation of the energy inside any closed surface, it is easily seen that the third condition is equivalent to

$$\begin{aligned} \lim_{x = -\pi+0} Q_1(\sigma, x, t) &= 0, \\ \lim_{x = \pi-0} Q_1(\sigma, x, t) &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

where $Q_1(\sigma, x, t)$ is the quantity of heat which flows across any area σ , placed parallel to the faces and distant x from the origin, in the interval $(0, t)$. Now, as has been already indicated in Art. 30, $Q_1(\sigma)$ cannot be approximated to for every area σ . Therefore the third condition, in all its generality, cannot be approximated to.

The equations

$$\begin{aligned} \lim_{x = -\pi+0} \left\{ \int_0^t Y'(x, t') dt' \right\} &= 0, \\ \lim_{x = \pi-0} \left\{ \int_0^t Y'(x, t') dt' \right\} &= 0, \end{aligned} \tag{C_1}$$

are equivalent to (3) when σ is restricted to be circular and of unit area, the quantity neglected being $\frac{1}{K} E$. Thus, (C₁) is an approximation to the fact that the quantity of heat which flows across any circle of unit area, situated anywhere on any face of the slab, is nil. Now from this fact, of course, follows the fact that the quantity of heat which flows across any area σ , situated on any face of the slab, is nil; but it is seen without difficulty that the possibility of an approximation to the former does not necessarily involve the possibility of an approximation to the latter. With this understanding, (C₁) may be regarded as the *third approximate condition of the phenomenon*.

Auxiliary¹⁾ Functions of Fourier's Type.

32. Let the initial auxiliary function $Y(x, 0)$ be $f(x)$, a finite, integrable, and even function of x ; further, let $f'(x)$, $f''(x)$ not only exist but also be finite and continuous. It will be sufficient for the purposes of this essay to consider only such functions $f(x)$ in the present theory. I proceed now to find what necessary and sufficient conditions $f(x)$ must satisfy in order that the auxiliary function at any subsequent time be given by $V(x, t)$ where, as in the last part, $V(x, t)$ stands for

1) It is scarcely necessary to mention that the function $Y(x, t)$ which *exactly* satisfies (A₁), (B₁), (C₁) is not the same as the real auxiliary function. The real auxiliary function satisfies (A₁), (B₁), (C₁) only approximately; thus the exact solution of these conditions can be only an approximation to the real auxiliary function, and may be called the pro-auxiliary function. However, in this and subsequent articles, I will use the briefer name „auxiliary function“ as there is no chance of its being confused with the real auxiliary function.

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} a_m \cos mx e^{-m^2 t},$$

a_m being given by

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) \cos m\alpha d\alpha.$$

Now the conditions (A₁), (B₁), (C₁) for $Y(x, t)$ are practically the same as the conditions (A), (B), (C), of the previous part, for $T(x, t)$. Therefore, since $f(x)$ is continuous and $f'(x)$ is finite, it is evident from the results of the previous part that (A₁), (B₁), (C₁) are satisfied by

$$\begin{aligned} Y(x, 0) &= f(x), \\ Y(x, t) &= V(x, t). \end{aligned}$$

There remains, therefore, only one condition to be satisfied; it is that $3E + \varepsilon$ and e be negligible. This condition is a necessary one; for, otherwise, (A₁), (B₁), (C₁) would cease to be approximations to the actual conditions of the phenomenon. For the sake of clearness I will call $(3E + \varepsilon)$ and e negligible when $\frac{3E + \varepsilon}{g}$ and $\frac{e}{g_1}$ are each less than 10^{-2} , where g has the same meaning as in Art. 30 and g_1 stands for the greatest value of $|Y(x, 0)|$.

Superior Limits of E , ε , and e .

33. Consider E .

Going back to the definitions of E_1 , E_2 , and E given in Art. 30, it is easily seen that, for a circular area,

$$E_1(\bar{d}_1) \leq K \{2\lambda_1 \Pi_2 + (d + 4\lambda_1) \Pi_1\}, \quad (1)$$

$$E_2(\bar{d}_2) = 6K\lambda_2 W + 2\pi K \{(d + 2\lambda_1) W + 3\bar{W}\}. \quad (2)$$

Let G be the greater of the two quantities, G_1 , G_2 , on the right in the above; then

$$E \leq G.$$

Now,

$$Y''(x, t) = V''(x, t) = -\sum_1^{\infty} m^2 a_m \cos mx e^{-m^2 t}.$$

Therefore

$$\Omega_2(x, t) \leq \sum_1^{\infty} m^2 |a_m| e^{-m^2 t};$$

$$\text{hence } \Pi_2 \leq \int_0^{\infty} \left\{ \sum_1^{\infty} m^2 |a_m| e^{-m^2 t'} \right\} dt', \quad \text{i. e., } \sum_1^{\infty} |a_m|.$$

But

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) \cos m\alpha d\alpha = \frac{2}{\pi m^2} \{(-1)^m f'(\pi) - \int_0^{\pi} f''(\alpha) \cos m\alpha d\alpha\}.$$

$$\text{Therefore } |a_m| \leq \frac{2}{\pi m^2} \left\{ |f'(\pi)| + \frac{\pi}{2} b \right\},$$

where b stands for the greatest value of $|b_m|$ whatever m may be, b_m being $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f''(\alpha) \cos m\alpha d\alpha$.

Thus

$$\Pi_2 < \left\{ \frac{2}{\pi} |f'(\pi)| + b \right\} \sum_1^\infty \frac{1}{m^2}, \quad \text{i. e.,} \quad \frac{\pi^2}{6} \left\{ \frac{2}{\pi} |f'(\pi)| + b \right\}. \quad (3)$$

$$Y'(x, t) = V'(x, t) = - \sum_1^\infty m a_m \sin mx e^{-m^2 t};$$

$$\text{hence } \int_t^{t+\tau} |Y'(x, t')| dt' < - \sum_1^\infty \frac{|a_m|}{m} \{ e^{-m^2(t+\tau)} - e^{-m^2 t} \}$$

$$\text{and, consequently, } P_1(x, t, t+\tau) < \sum_1^\infty \frac{|a_m|}{m}$$

whatever $x, t, t+\tau$ may be.

$$\text{Therefore } \Pi_1 < \sum_1^\infty \frac{|a_m|}{m} < \left\{ \frac{2}{\pi} |f'(\pi)| + b \right\} \sum_1^\infty \frac{1}{m^3} < \frac{4}{3} \left\{ \frac{2}{\pi} |f'(\pi)| + b \right\}. \quad (4)$$

$$Y(x, t+\tau) - Y(x, t) = V(x, t+\tau) - V(x, t) = \sum_1^\infty a_m \cos mx \{ e^{-m^2(t+\tau)} - e^{-m^2 t} \};$$

$$\text{hence } \Omega(t, t+\tau) \leq \sum_1^\infty |a_m|$$

whatever $t, t+\tau$ may be.

$$\text{Therefore } W \leq \sum_1^\infty |a_m| < \frac{\pi^2}{6} \left\{ \frac{2}{\pi} |f'(\pi)| + b \right\}. \quad (5)$$

$$\begin{aligned} Y'(x, t) &= - \sum_1^\infty m a_m \sin mx e^{-m^2 t} \\ &= - \frac{2}{\pi} f'(\pi) \sum_1^\infty (-1)^m \frac{\sin mx}{m} e^{-m^2 t} + \sum_1^\infty \frac{b_m}{m} \sin mx e^{-m^2 t}; \end{aligned}$$

$$\text{hence } |Y'(x, t)| < |f'(\pi)| + \sum_1^\infty \frac{|b_m|}{m}$$

whatever $x, t, t+\tau$ may be.

Now $\bar{\Omega}(x_1, x_2)$ is evidently less than or equal to the product of λ_2 and the greatest value of $|Y'(x, t)|$ within the interval (x_1, x_2) . Therefore

$$\bar{W} < \lambda_2 \left\{ |f'(\pi)| + \sum_1^\infty \frac{|b_m|}{m} \right\}. \quad (6)$$

Therefore it follows from the inequalities (3), (4), (5), and (6) that

$$G_1 < \frac{1}{3} K \left\{ \frac{2}{\pi} |f'(\pi)| + b \right\} \{ (\pi^2 + 16) \lambda_1 + 4\bar{d} \}, \quad (7)$$

$$G_2 < \frac{\pi^2 K}{3} \left\{ \frac{2}{\pi} |f'(\pi)| + b \right\} (3\lambda_2 + \pi d + 2\pi\lambda_1) + 6\pi K\lambda_2 \left\{ |f'(\pi)| + \sum_1^{\infty} \frac{|b_m|}{m} \right\}. \quad (8)$$

Therefore G is less than the right side in (8), for this is evidently greater than the right side of (7).

34. Consider d . Going back to Arts. 28 and 29 it is easily seen that σ_1 , p , σ_2 may be thus defined:

Consider circles of diameter λ to be most closely packed in a plane. Then, if a circle of unit area be placed in any position in the plane it will cover the centres of a certain number, N_1 , of these circles; and for the particular position

$$\sigma_1 = N_1 \times \frac{\pi\lambda^2}{4}.$$

Let N be the greatest possible value that N_1 can have; then

$$p = N \times \frac{\pi\lambda^2}{4}.$$

If a circle of unit area be placed in any position in the plane it will wholly cover a certain number, N_2 , of the circles of diameter λ : for the particular position

$$\sigma_2 = N_2 \times \frac{\pi\lambda^2}{4}.$$

It is easily seen from these definitions that $p d$, the greatest of the values that $p - \sigma_1$ and $p - \sigma_2$ can have, is less than $\lambda \times$ the circumference of the circle of unit area.

Thus,

$$p d < 2\lambda \sqrt{\pi}.$$

But $1 - p$ is evidently very nearly zero since λ is so.

Therefore

$$d < 3\lambda \sqrt{\pi}. \quad (1)$$

It need scarcely be mentioned that definitions, exactly similar to those given above, hold for the general case when L is of any shape; also it is evident that

$$p d < \lambda l,$$

where l is the periphery of L .

35. Suppose that $\lambda_2 \leq 10^{-2} \lambda_1$. Now it has already been supposed in Art. 28 that

$$\lambda_1 \geq \frac{2}{s} \quad \text{and} \quad < 10^{-2},$$

whence

$$\lambda < 2^{-1} \times 10^{-2} \lambda_2.$$

Therefore, using (1) of the last article, it follows from the end of Art. 33 that

$$G < K\lambda_1 \left\{ 13\frac{1}{2} |f'(\pi)| + 21b + \frac{1}{5} \sum_1^{\infty} \frac{|b_m|}{m} \right\}.$$

Thus

$$E < K\lambda_1 \left\{ 13\frac{1}{2} |f'(\pi)| + 21b + \frac{1}{5} \sum_1^{\infty} \frac{|b_m|}{m} \right\}. \quad (\text{III})$$

36. Consider ε .

$$J(x, t) = \int_0^t Y'(x, t') dt' = \sum_1^{\infty} \frac{a_m}{m} \sin mx \{e^{-m^2 t} - 1\};$$

$$\text{hence } J'(x, t) = \sum_1^{\infty} a_m \cos mx \{e^{-m^2 t} - 1\}$$

$$\text{and, consequently, } |J'(x, t)| \leq \sum_1^{\infty} |a_m|,$$

whatever x and t may be. Let J_1 stand for the greatest value that $|J'(x, t)|$ can have, whatever x and t may be.

Then

$$J_1 \leq \sum_1^{\infty} |a_m| < \frac{\pi^2}{6} \left\{ \frac{2}{\pi} |f'(\pi)| + b \right\}. \quad (1)$$

Now $K|J(x, t)|$ is evidently less than $2K\lambda_1 J_1$, if x does not lie in the interval $(-\pi + 2\lambda_1, \pi - 2\lambda_1)$.

Therefore

$$\varepsilon < \frac{K\pi^2}{3} \lambda_1 \left\{ \frac{2}{\pi} |f'(\pi)| + b \right\}. \quad (\text{IV})$$

It at once follows, from the procedure in the case of \bar{W} in Art. 33, that

$$e < 2\lambda \left\{ |f'(\pi)| + \sum_1^{\infty} \frac{|b_m|}{m} \right\}. \quad (\text{V})$$

Sufficient and quasi-necessary conditions for $f(x)$.

37. It follows from (III) and (IV) that

$$3E + \varepsilon < K\lambda_1 \left\{ 43 |f'(\pi)| + 67b + \frac{3}{5} \sum_1^{\infty} \frac{|b_m|}{m} \right\}. \quad (1)$$

Now, let \bar{f} stand for $\frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\pi} f(x') dx' \right|$. Then it is evident, from the definitions of g and g_1 , that

$$\begin{aligned} g &= 2K\pi\bar{f}, \\ g_1 &> \bar{f}. \end{aligned}$$

Therefore it follows from (1) and (V) that

$$\frac{3E + \varepsilon}{g} < \frac{\lambda_1}{2\pi f} \left\{ 43 |f'(\pi)| + 67b + \frac{3}{5} \sum_1^{\infty} \frac{|b_m|}{m} \right\}, \quad (2)$$

$$\frac{e}{g_1} < \frac{2\lambda}{f} \left\{ |f'(\pi)| + \sum_1^{\infty} \frac{|b_m|}{m} \right\}. \quad (3)$$

But it follows, from the suppositions in the beginning of Art. 35, that

$$\lambda < 2^{-1} 10^{-4} \lambda_1.$$

Therefore the right side of (2) is greater than the right side of (3).

Thus, in order that

$$\frac{3E + \varepsilon}{g} < 10^{-2},$$

$$\frac{e}{g_1} < 10^{-2},$$

it is sufficient that

$$\frac{\lambda_1}{2\pi f} \left\{ 43 |f'(\pi)| + 67b + \frac{3}{5} \sum_1^{\infty} \frac{|b_m|}{m} \right\} < 10^{-2}.$$

The final result, regarding the condition to be satisfied by $f(x)$, may now be thus stated:

If it be supposed that

$$\lambda_1 < 10^{-2},$$

$$\lambda_2 \leq 10^{-2} \lambda_1,$$

and

$$\lambda_1 \geq \frac{2}{s},$$

then, in order that the approximate conditions of the phenomenon be satisfied, it is sufficient that

$$\frac{\lambda_1}{2\pi f} \left\{ 43 |f'(\pi)| + 67b + \frac{3}{5} \sum_1^{\infty} \frac{|b_m|}{m} \right\} \text{ be negligible, i. e. } <, \text{ say, } 10^{-2}. \quad (\mathfrak{D}_1)$$

38. By a *quasi-necessary condition* I mean a sufficient condition which, though itself not necessary, is *similar* to the condition which is both sufficient and necessary. Thus the condition (\mathfrak{D}_1) is a quasi-necessary one.

If G_3 stand for the greater of the two quantities

$$\frac{3E + \varepsilon}{g} \text{ and } \frac{e}{g_1},$$

then

$$G_3 < 10^{-2}$$

may be regarded as the sufficient and necessary condition. In reality it is only a quasi-necessary condition but less restrictive than (\mathfrak{B}_1) . To see this point let us go back to Arts. 28 and 29. Now, making use of the result (1) of Art. 34, it is easily seen that (\mathbf{I}) holds even when the quantity neglected is smaller than $pE_1(x_1, t, t+\tau, \bar{d}_1)$. In fact $E_1(x_1, t, t+\tau, \bar{d}_1)$ may be replaced by, say,

$$kK\left\{\frac{3}{2}\lambda_1 P_2(x_1, t, t+\tau) + (\bar{d}_1 + 3\frac{1}{2}\lambda_1) P_1(x_1, t, t+\tau)\right\}.$$

Also, it is evident that, in Art. 29, $E_2(x_1, x_2, t, t+\tau, \bar{d}_2)$ may be replaced by a smaller quantity in which, for example, $c(x_2-x_1)\frac{2}{sp}\Omega_0(t, t+\tau)$ takes the place of $c(x_2-x_1)\times 2\lambda_1\Omega(t, t+\tau)$, Ω_0 being less than Ω .

It may be mentioned here that, in the light of these remarks, the sense in which the word „necessary“ is used in the beginning of Art. 30 and in Art. 32 is easily understood.

The really sufficient and necessary condition can be obtained in terms of λ_1 and $f(x)$ provided that definite suppositions be made relating to the expression of λ_2 , s , and λ in terms of λ_1 ; for example, it may be supposed that

$$\lambda_2 = 10^{-2}\lambda_1,$$

$$\frac{2}{s} = \lambda_1,$$

and

$$\lambda = 3^{-1}\times 10^{-2}\times \lambda_1^2.$$

But, in the face of the fact that the sufficient and necessary condition rests on suppositions which are of a purely tentative character and any change in which may at once degrade it into a quasi-necessary condition, it is evident that, for the purposes of this essay, a quasi-necessary condition is quite sufficient. In fact, in a professedly inexact theory like the present one, the important thing is the *nature of the restriction* imposed on $f(x)$. And, as (\mathfrak{B}_1) clearly shows, this is purely arithmetical.

Illustrative Examples.

39. The following simple examples suffice to illustrate the salient features of the theory:

(i) Suppose that $\lambda_2 = 10^{-2}\lambda_1$, $\frac{2}{s} \leq \lambda_1 < \frac{2}{s-1}$, and $\lambda = 3^{-1}\times 10^{-2}\times \lambda_1^2$.

Let $Y(x, 0) = f(x) = x^2$. Then the left side of (\mathfrak{B}_1) is equal to

$$\frac{\lambda_1}{2\pi f} \times 43 |f'(\pi)| = \frac{129}{\pi^2} \lambda_1 < 13\frac{1}{2}\lambda_1.$$

Now, if H stand for the total quantity of heat in any right circular cylinder with its bases of unit area, on the faces of the slab, it follows from

(II) that

$$\mathbf{H} = p(g + \theta_{17}\mathbf{E}), \quad |\theta_{17}| < 1,$$

the part of \mathbf{H} due to the temperature \bar{f} being assumed to be *exactly* pg.

Therefore it is easily seen that

$$\frac{p(3\mathbf{E} + \varepsilon)}{\mathbf{H}} < \frac{13\frac{1}{2}\lambda_1}{1 - 5\lambda_1}.$$

Therefore the ratio of $p(3\mathbf{E} + \varepsilon)$, the greatest quantity of heat, to be neglected, to \mathbf{H} as well as the ratio of e , the greatest difference of temperature, to be neglected, to g_1 is less than $4\frac{1}{2} \times 10^{-2}$ or $1\frac{1}{2} \times 10^{-2}$ according as λ is taken equal to $3^{-1} \times 10^{-7}$ or $3^{-1} \times 10^{-8}$, respectively. And, to this degree of approximation, the solution of the problem is furnished by the auxiliary function $V(x, t)$. In other words, the initial temperatures, $T_1(0), T_2(0), \dots, T_r(0)$, of the assemblages being given equal to $(x_{1,0})^2, (x_{2,0})^2, \dots, (x_{r,0})^2$, respectively, their subsequent temperatures, $T_1(t), T_2(t), \dots, T_r(t)$, are given by $V(x_{1,0}, t), V(x_{2,0}, t), \dots, V(x_{r,0}, t)$, respectively, to the degree of approximation indicated above.

(ii) Suppose that $\lambda_2 = 10^{-2}\lambda_1$, $\frac{2}{s} \leq \lambda_1 < \frac{2}{s-1}$, and $\lambda = 3^{-1} \times 10^{-2} \times \lambda_1^2$. Let

$$Y(x, 0) = f(x) = x^2 - \sum_1^{\infty} \frac{a^n \cos(c^n x)}{c^{2n}},$$

where a is a positive constant less than 1, c is an odd integer, and $ac > 1 + \frac{3\pi}{2}$; $f''(x)$ is Weierstrass's function. Then the left side of (A₁) is equal to

$$\begin{aligned} \frac{3\lambda_1}{2\pi^3} \left\{ 86\pi + 67a + \frac{3a}{5(c-a)} \right\} &< \frac{3\lambda_1}{2\pi^3} \left\{ 86\pi + 67a + \frac{2}{1\frac{2}{5}} \right\} \\ &< \frac{129}{\pi^2} \lambda_1 \left\{ 1 + \frac{67a + \frac{2}{1\frac{2}{5}}}{270} \right\} < 17\lambda_1. \end{aligned}$$

Therefore $\frac{p(3\mathbf{E} + \varepsilon)}{\mathbf{H}}$ as well as $\frac{e}{g_1}$ is less than 6×10^{-2} or 2×10^{-2} according as λ is taken equal to $3^{-1} \times 10^{-7}$ or $3^{-1} \times 10^{-8}$, respectively. And, to this degree of approximation, the solution of the problem is furnished by the auxiliary function $V(x, t)$.

(iii) Suppose that $\lambda_2 = 10^{-2}\lambda_1$, $\frac{2}{s} \leq \lambda_1 < \frac{2}{s-1}$, and $\lambda = 3^{-1} \times 10^{-2} \times \lambda_1^2$. Let r be even; and, further, let the x -coordinates, $x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{r,0}$, of the initial positions of the centres of the assemblages be given by the zeroes of $\cos(cx)$ where c stands for the odd number nearest to $\frac{\pi}{\mu}$, μ being equal to, say, $.75 \times 10^{-2} \times \lambda_1$. Thus

$$x_{\frac{r}{2}+1+q,0} = (q + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{c}, \quad q = -\frac{r}{2}, -\frac{r}{2} + 1, \dots, 0, 1, 2, \dots, \frac{r}{2} - 1.$$

Now, let $f_1(x)$ and $V_1(x, t)$ stand for the auxiliary functions $Y(x, 0)$ and $Y(x, t)$ of (i). Then, with the same initial temperatures as in (i), any function of the form

$$f_1(x) + d \sum_1^{n=\infty} \frac{a^n \cos(c^n x)}{e^{2n}}$$

may be taken as the initial auxiliary function, d being any constant whatever. And the solution of the problem is furnished by $V_1(x, t)$, whatever d may be, the degree of the approximation, however, depending on d . Thus, when $0 \leq |d| \leq 1$, $\frac{p(3E+\epsilon)}{H}$ as well as $\frac{e}{g_1}$ is less than 6×10^{-2} or 2×10^{-2} according as λ is taken equal to $3^{-1} \times 10^{-7}$ or $3^{-1} \times 10^{-8}$, respectively.

(iv) Suppose that $\lambda_2 = 10^{-2} \lambda_1$, $\frac{2}{s} \leq \lambda_1 < \frac{2}{s-1}$, and $\lambda = 3^{-1} \times 10^{-2} \times \lambda_1^2$. Let $Y(x, 0) = f(x) = x^{2n}$, $n \geq 1$. Then the left side of (D₁) is less than

$$\frac{\lambda_1}{2\pi f} \left\{ 43f'(x) + \frac{2}{\pi} f''(x) \left(67 + \frac{\pi^2}{10} \right) \right\} < \frac{2n(2n+1)\lambda_1}{\pi^4} \{ 145 + 136n \} < 3n(n+1)(2n+1)\lambda_1.$$

Therefore $\frac{p(3E+\epsilon)}{H}$ as well as $\frac{e}{g_1}$ is less than $\frac{3n(n+1)(2n+1)\lambda_1}{1-n(n+1)(2n+1)\lambda_1}$ as long as $\frac{1}{\lambda_1} > n(n+1)(2n+1)$.

The following table shows clearly how rapidly the error may increase as n increases, i. e., as the change of initial temperature from one assemblage to another increases:

n	Superior limit of error.	Superior limit of error.		
		$\lambda = 3^{-1} \times 10^{-7}$	$\lambda = 3^{-1} \times 10^{-8}$	$\lambda = 3^{-1} \times 10^{-10}$
1	$18\lambda_1/1 - 6\lambda_1$	6×10^{-2}	2×10^{-2}	2×10^{-3}
1.25	$30\lambda_1/1 - 10\lambda_1$	$10\frac{1}{2} \times 10^{-2}$	$3\frac{1}{2} \times 10^{-2}$	$3\frac{1}{2} \times 10^{-3}$
1.5	$45\lambda_1/1 - 15\lambda_1$	$15\frac{1}{2} \times 10^{-2}$	5×10^{-2}	5×10^{-3}
1.75	$66\lambda_1/1 - 22\lambda_1$	23×10^{-2}	7×10^{-2}	7×10^{-3}
2	$90\lambda_1/1 - 30\lambda_1$	$32\frac{1}{2} \times 10^{-2}$	$9\frac{1}{2} \times 10^{-2}$	$9\frac{1}{2} \times 10^{-3}$
3	$252\lambda_1/1 - 84\lambda_1$	greater than 1	28×10^{-2}	3×10^{-2}
4	$540\lambda_1/1 - 180\lambda_1$	66×10^{-2}	6×10^{-2}
5	$990\lambda_1/1 - 330\lambda_1$	greater than 1	$10\frac{1}{2} \times 10^{-2}$
11	$9108\lambda_1/1 - 3036\lambda_1$	greater than 1

(v) Suppose that $\lambda_2 = 10^{-2} \lambda_1$, $\frac{2}{s} = \lambda_1$, and $\lambda = 5^{-1} \times 10^{-2} \times \lambda_1^2$. Let r be odd; and, further, let the x -coordinates, $x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{r,0}$, of the initial positions of the centres of the assemblages be given by the zeroes of $\left(\frac{x\pi}{\mu}\right) + \tan\left(\frac{x\pi}{\mu}\right)$, where μ stands for the sub-multiple of π nearest to, say, $.75 \times 10^{-2} \times \lambda_1$. Thus

$$x_{\frac{r+1}{2},0} = 0,$$

$$x_{\frac{r+1}{2}+q,0} = \frac{\mu}{\pi} x^{(q)},$$

$$x_{\frac{r+1}{2}-q,0} = -\frac{\mu}{\pi} x^{(q)}, \quad q = 1, 2, \dots, \frac{r-1}{2},$$

$x^{(q)}$ standing for the q th positive root of $x + \tan x = 0$. Now, let the initial auxiliary function $Y(x, 0) = 1 + x \sin\left(\frac{x\pi}{\mu}\right)$. Then, the left side of (A₁) is greater than $\frac{21\pi^2 \lambda_1}{\mu(\pi + 2\mu)} > 8 \times 10^3$. Therefore, however small λ be, the theory fails to give any approximation to the solution of the problem, ever so crude.

Criticism of Fourier's Theory.

40. Comparing Fourier's theory with the theories expounded in the preceding pages, it is readily seen to be a continuous one. I will conclude this part with a *brief criticism of Fourier's theory pointing out its limited scope*.

Starting with the same conditions of the phenomenon as in the preceding part and with — essentially — the same hypotheses as (α) and (β), Fourier's theory¹⁾ gives the following analytical expressions of the conditions of the phenomenon:

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t), \quad (\bar{A})$$

$$T(x, t) \text{ is continuous in } t, \text{ and} \quad (\bar{B})$$

$$T'(\pi, t) = 0, \quad T'(-\pi, t) = 0. \quad (\bar{C})$$

It should be noted that these conditions are required by Fourier's theory to hold for $0 \leq t, -\pi \leq x \leq \pi$; also, in order that they have *any meaning*, it is necessary and sufficient that $\frac{\partial}{\partial t} T(x, t)$ and $\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t)$ exist and be finite. Therefore (\bar{B}) is involved in the statement of (\bar{A}).

1) „Théorie Analytique de la Chaleur“, Chapter II. See specially Arts. 117 and 120.

I proceed to investigate what further conditions $T(x, t)$ must satisfy in order that (\bar{A}) and (\bar{C}) follow from (A) and (C).

41. It follows from (A) that

$$\int_{x-x_1}^{x+x_1} \{T(x', t+\tau) - T(x', t)\} dx' = \int_t^{t+\tau} \{T'(x+x_1, t') - T'(x-x_1, t')\} dt', \quad (1)$$

$$-\pi \leq x+x_1 \leq \pi,$$

$$-\pi \leq x-x_1 \leq \pi,$$

$$t \geq 0, \tau > 0.$$

Now the first integrand in (1) is continuous in x' , and the second integrand is continuous in t' ; therefore (1) becomes

$$\frac{T(x+\theta x_1, t+\tau) - T(x+\theta x_1, t)}{\tau} = \frac{T'(x+x_1, t+\theta_1\tau) - T'(x-x_1, t+\theta_1\tau)}{2x_1}$$

i. e.,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t'} T(x+\theta x_1, t') \right\}_{t'=t+\theta_2\tau} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x'^2} T(x', t+\theta_1\tau) \right\}_{x'=x+\theta_3x_1}$$

where the θ 's are functions of x, x_1, t, τ such that $0 \leq (|\theta|, |\theta_3|) < 1, 0 < (\theta_1, \theta_2) < 1$.

Therefore, if $\frac{\partial}{\partial t} T(x, t)$ and $\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t)$ be continuous at (x, t) , (1) becomes

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t) + \Sigma,$$

where Σ can be made as small as we please by choosing x_1, τ sufficiently small.

Therefore (\bar{A}) follows from (A) if $\frac{\partial}{\partial t} T(x, t)$ and $\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t)$ be continuous at (x, t) .

It follows from (C) that

$$\lim_{x=\pi-0} \int_t^{t+\tau} T'(x, t') dt' = 0, \quad t \geq 0, \tau > 0,$$

and

$$\lim_{x=-\pi+0} \int_t^{t+\tau} T'(x, t') dt' = 0, \quad t \geq 0, \tau > 0. \quad (5)$$

Now $T'(x, t')$ is continuous in t' . Therefore (5) becomes

$$\lim_{x=\pi-0} T'(x, t+\theta_4\tau) = 0,$$

and

$$\lim_{x=-\pi+0} T'(x, t+\theta_4\tau) = 0, \quad (6)$$

θ_4 being a positive fraction dependent on x, t, τ . But $T'(x, t)$ is continuous at (x, t) . Therefore (\bar{C}) follows from (C).

42. Consider the solutions of Fourier's type, viz.,

$$\begin{aligned} T(x, t) &= V(x, t), \\ T(x, 0) &= f(x). \end{aligned}$$

When $t > 0$, it is evident that $\frac{\partial}{\partial t} V(x, t)$ and $V''(x, t)$ are continuous at (x, t) . The important case is that of $t = 0$; and it should be noted that, in order that $(\bar{A}), (\bar{B}), (\bar{C})$ have any meaning, it is necessary and sufficient that $\left\{ \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) \right\}_{t=0}$ and $f''(x)$ exist and be finite.

Now, proceeding as in Art. 20, it is easily seen that, if $f''(x)$ be continuous and $f'(\pi), f'(-\pi)$ be zero,

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) = \lim_{t \rightarrow +0} V''(x, t) = f''(x).$$

But, since $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial t} V(x, t)$ exists, it must equal $\left\{ \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) \right\}_{t=0}$. Therefore $\frac{\partial}{\partial t} V(x, t)$ and $V''(x, t)$ are continuous at (x, t) whether $t >$ or $= 0$.

Therefore, in order that $(\bar{A}), (\bar{B})$ and (\bar{C}) have meaning and necessarily follow from (A), (B) and (C), it is *necessary that $f''(x)$ exist and be finite*; and it is *sufficient that $f''(x)$ be finite and continuous, and $f'(\pi), f'(-\pi)$ be zero*.

Illustrative Examples.

43. The following simple examples suffice to illustrate the salient features of the criticism of Fourier's theory:

(i) Let $T(x, 0) = f(x) = x^{2n}, n > 1$. Then $f(x)$ as well as $f'(x)$ and $f''(x)$ are finite and continuous. But, as t approaches zero, $\frac{\partial}{\partial t} V(\pi, t)$ and $\frac{\partial}{\partial t} V(-\pi, t)$ behave as $-\frac{2n\pi^{2n-1}}{\sqrt{\pi t}}$. Therefore $\left\{ \frac{\partial}{\partial t} V(\pi, t) \right\}_{t=0}$ and $\left\{ \frac{\partial}{\partial t} V(-\pi, t) \right\}_{t=0}$ are infinite, and, consequently, (\bar{A}) is meaningless when $x = \pi$ or $-\pi$.

(ii) Let $T(x, 0) = f(x) = x, 0 \leq x \leq \pi$. Then $f''(x)$ does not exist at $x = 0$; also,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} V(0, t) \right\}_{t=0} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial t} V(0, t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = \infty.$$

Again

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} V(-\pi, t) \right\}_{t=0} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} V(\pi, t) \right\}_{t=0} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial t} V(\pi, t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-1}{\sqrt{\pi t}} = -\infty.$$

Therefore (A) is meaningless when $x = 0, \pi$ or $-\pi$.

(iii) Let $T(x, 0) = f(x) = \int_0^x f_2(x) dx, 0 \leq x \leq \pi, f_2(x)$ being the $f(x)$ in (ii) of Art. 24. Then $f(x)$ is finite and continuous. At any irrational point or rational point, $\frac{\nu}{2\mu+1}$, with odd denominator, $f_2(x) = f'(x)$ and is finite and continuous; further, at any rational point, $\frac{\nu}{2\mu+1}, f_2'(x)$ exists and is finite. At any rational point, $\frac{\nu}{2\mu}$, with even denominator

$$f'(x+0) - f'(x-0) = -\frac{D}{\mu^s}, \quad D \text{ standing for } \sum_1^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^s}.$$

Now, proceeding as in Art. 20, it is easily seen that, as t approaches zero, $\frac{\partial}{\partial t} V(x, t)$ behaves as

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\sigma M(x, x') \Theta''(x') dx', \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$\text{i. e., as } -\frac{1}{\pi} \int_0^\sigma M'(x, x'+0) \Theta'(x') dx'.$$

Now

$$M'\left(\frac{\nu}{2\mu}, x'+0\right) = \frac{1}{2} \left[f' \left\{ \left(\frac{\nu}{2\mu} + x' \right) + 0 \right\} - f' \left\{ \left(\frac{\nu}{2\mu} - x' \right) - 0 \right\} \right];$$

$$\text{hence } \lim_{x \rightarrow +0} M'\left(\frac{\nu}{2\mu}, x'+0\right) = \frac{1}{2} \left\{ f'\left(\frac{\nu}{2\mu} + 0\right) - f'\left(\frac{\nu}{2\mu} - 0\right) \right\} = -\frac{D}{2\mu^s}.$$

Therefore

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} V\left(\frac{\nu}{2\mu}, t\right) \right\}_{t=0} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial t} V\left(\frac{\nu}{2\mu}, t\right) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-D}{2\mu^s \sqrt{\pi t}} = -\infty.$$

Therefore (A) is meaningless, when x is any rational point, $\frac{\nu}{2\mu}$, not only because $f''(x)$ is non-existent but also because $\left\{ \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) \right\}_{t=0}$ is infinite.

(iv) Let $T(x, 0) = f(x) = \int_0^x dx \int_0^x \cos \left\{ l \left(\frac{1}{x^2} \right) \right\} dx$. Then $f(x)$ as well as $f'(x)$

is finite and continuous; $f''(x) = \cos \left\{ l \left(\frac{1}{x^2} \right) \right\}$, when x is different from zero, and is non-existent at $x = 0$.

Now it is easily seen that, as t approaches zero, $\frac{\partial}{\partial t} V(0, t)$ behaves as

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\sigma f''(x') e^{-\frac{x'^2}{4t}} dx'.$$

And, therefore, it follows, from Case I of Art. 21, that $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial t} V(0, t)$ does not exist.

Therefore, excepting π and $-\pi$, the only point where any discrepancy occurs is $x = 0$. Here not only is $f''(x)$ non-existent and discontinuous but also $\frac{\partial}{\partial t} V(0, t)$ makes an infinite number of finite oscillations as t approaches zero.

(v) Let $T(x, 0) = f(x) = \int_0^x dx \int_0^x f_s(x) dx$, $f_s(x)$ being the $f(x)$ in (iii) of Art. 24. Then $f(x)$ as well as $f'(x)$ is finite and continuous. At every point of the everywhere dense aggregate G_1 , $f''(x)$ is non-existent and has a discontinuity of the second kind; at all other points $f_s(x) = f''(x)$ and is finite and continuous.

Therefore at any point of G_1 , (\bar{A}) is meaningless. Here not only is $f''(x)$ non-existent and discontinuous but also $\frac{\partial}{\partial t} V(x, t)$ makes an infinite number of finite oscillations as t approaches zero.

(vi) Let $T(x, 0) = f(x) = \int_0^x \cos \left\{ l \left(\frac{1}{x^2} \right) \right\} dx$, $0 \leq x \leq \pi$. Then $f(x)$ is finite and continuous. At $x = 0$, $f'(x)$ is non-existent and has a discontinuity of the second kind; at all other points $f'(x)$ as well as $f''(x)$ exists and is finite and continuous.

Now, it is easily seen that, as t approaches zero, $\frac{\partial}{\partial t} V(0, t)$ behaves as

$$\frac{1}{2t \sqrt{\pi t}} \int_0^\sigma x' \cos \left\{ l \left(\frac{1}{x'^2} \right) \right\} e^{-\frac{x'^2}{4t}} dx'.$$

And, therefore, it follows from Art. 17 that $\left\{ \frac{\partial}{\partial t} V(0, t) \right\} \pm > 1$.

Therefore, excepting π and $-\pi$, the only point where any discrepancy occurs is $x = 0$. Here not only is $f''(x)$ non-existent but also $\frac{\partial}{\partial t} V(0, t) \pm > 1$.

(vii) Let $T(x, 0) = f(x) = \int_0^x f_3(x) dx$, $0 \leq x \leq \pi$. Then $f(x)$ is finite and continuous. At every point of G_1 , $f'(x)$ is non-existent and has a discontinuity of the second kind. At all other points $f_3(x) = f'(x)$ and is finite and continuous; further, $f_3'(x)$ exists and is finite at every point of G_2 .

Now it is easily seen that $\left\{ \frac{\partial}{\partial t} V(\omega_n, t) \right\}_{t=0}$ exists and is finite. Therefore at any point of G_1 , $f''(x)$ is non-existent but $\left\{ \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) \right\}_{t=0}$ exists and is finite.

Part III.

Improperly Continuous Theory¹⁾.

Notation of Improperly Continuous Analysis.

44. By an *improperly continuous analysis* I mean an analysis in which, at least, one independent variable has for its domain an everywhere dense but enumerable aggregate; it is thus distinguished from continuous analysis in which every independent variable has for its domain a continuum. I proceed to specify a system of notation which it will be convenient to adopt.

I will use the Greek letter ξ for a variable of which the domain is an everywhere dense but enumerable aggregate. The notation relating to limit, infinitesimal relations, derivation, or integration is precisely the same in improperly continuous as in continuous analysis.

Thus, $\varphi(\xi)$ being a function of ξ , and ξ_0 , a particular value of ξ , $\lim_{\xi = \xi_0 + 0} \varphi(\xi)$ means the limit to which $\varphi(\xi)$ approaches as ξ approaches ξ_0 from the right side; and $\lim_{\xi = \xi_0 - 0} \varphi(\xi)$ has a similar significance. Also, if $\xi_0 + \xi'$ be any value of ξ in the right neighbourhood of ξ_0 ,

$$\varphi'(\xi_0 + 0) = \lim_{\xi' = +0} \frac{\varphi(\xi_0 + \xi') - \varphi(\xi_0)}{\xi'}$$

1) In working out this theory I have received great help from

Brodén's „Functionentheoretische Bemerkungen und Sätze,“ Acta Univ. Lund, Bd. 8; and Karl Pearson's „Grammar of Science, 2nd edition,“ specially Chapter VII.

I am also considerably indebted to the following publications:

Larmor's „Address to the Mathematical and Physical Section of the British Association, 1900“ (Nature, Vol. 62), pp. 451—55.

Poincaré's „Relations entre la Physique Experimentale et la Physique Mathématique“ (Rapports présentés au Congrès International de Physique, Paris 1900).

Weierstrass's „Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen“ (Sitzungsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1885, pp. 633—39 and 789—805; Math. Werke, Bd. III, pp. 1—37).

the first derivative, on the right, of $\varphi(\xi)$ at ξ_0 ; and $\varphi'(\xi_0 - 0)$, the derivative on the left, is similarly defined. When $\varphi'(\xi_0 + 0)$ and $\varphi'(\xi_0 - 0)$ are equal, their common value, the first differential coefficient of $\varphi(\xi)$ at ξ_0 , is represented by

$$\varphi'(\xi_0) \text{ or } \left\{ \frac{d}{d\xi} \varphi(\xi) \right\}_{\xi = \xi_0}.$$

Let x be the continuous variable which has for its domain the continuum in which the domain of ξ lies; also let x_1, x_2 be any two values of x, x_2 being greater than x_1 . Then I will call $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(\xi) d\xi$ the integral of $\varphi(\xi)$ between the limits x_1 and x_2 . For the sake of clearness I proceed to state the exact meaning of this symbol.

Divide the interval (x_1, x_2) into n partial intervals $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s, \dots, \delta_n$. Let L_s and l_s be respectively the upper and lower limits of $\varphi(\xi)$ in the interval δ_s ; also let S_1 and S_2 stand for $\sum_1^n \delta_s l_s$ and $\sum_1^n \delta_s L_s$, respectively. Then, if S_1 and S_2 converge to one and the same limit when n approaches infinity and δ_s approaches zero, this limit is the quantity represented by $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(\xi) d\xi$; and $\varphi(\xi)$ is said to be integrable in the interval (x_1, x_2) .

It should be noted that, contrary to what holds true in continuous analysis, the continuity of $\varphi(\xi)$ at every point in the domain of ξ does not involve its uniform continuity in that domain. I will call $\varphi(\xi)$ a continuous function of ξ when it is uniformly continuous in the domain of ξ . Thus, when $\varphi(\xi)$ is a continuous function of ξ it is integrable. More generally, if there exists a function $f(x)$, integrable in x and, further, such that $f(\xi) = \varphi(\xi)$, then $\varphi(\xi)$ is integrable. For the sake of brevity I will call $f(x)$ an *associate function* to $\varphi(\xi)$. It should be noted that if $\{f'(x)\}_{x=\xi}$ exists it equals $\varphi'(\xi)$.

Formulation of an Improperly continuous theory of solids.

45. By an ether theory of matter is understood a theory which, while looking upon ether as a continuous medium endowed with perfect fluidity, regards matter as ether in motion¹⁾. If, therefore, an ether theory be *thorough-going*, i. e., if it does not stop short at certain finite bodies, called atoms or molecules, simply regarding them as ethereal structures whose internal constitution is inscrutable²⁾, but professes to know all about the internal constitution of any material body however small; then it is possible to *exactly* describe the

1) See the article „Matter as Non-Matter in Motion“ in Pearson's book, Chapter VII.

2) Cf. Larmor, l. c. p. 455. It should be noted that those ether theories of matter which are not thorough-going — for example, the vortex-atom theory of Lord Kelvin and the theories of H. A. Lorentz, Wiechert, and Larmor — belong to the type discussed in Part II.

phenomenon of the linear conduction of heat in the slab in terms of particular types of ethereal motion.

Postulating, as in the preceding parts, that the state of things is the same at points equidistant from the central plane of the slab, I propose to show, in the present part, how the phenomenon of the linear conduction of heat may be exactly described in terms of a certain function associated with the *points of an everywhere dense but enumerable aggregate*. I proceed, therefore, to formulate a theory of solids which admits of interpretation as an ether theory, and which may be regarded as thorough-going for the particular end in view: this theory I will call an *improperly continuous theory*.

Suppose that with the slab is associated an enumerable aggregate G , of positive numbers, which is everywhere dense in the interval $(0, \pi)$ and contains π : I will call G the *discriminating aggregate* of the slab. Also, suppose that two slabs, s_1 and s_2 , ordinarily said to be of different materials, say, copper and iron, really differ only in this, that their discriminating aggregates G_1 and G_2 are different. [These suppositions may be interpreted as follows: s_1 as well as s_2 is ether in motion; but, because of the difference, between the two states of motion, due *solely* to the difference between G_1 and G_2 , the group of sense-impressions, presented by s_1 and symbolised by K_1 and c_1 , its thermal conductivity and thermal capacity, differs so much from the group of sense-impressions, presented by s_2 and similarly symbolised by K_2 and c_2 , that the two slabs are ordinarily considered as distinct in kind. To use a crude but effective image, the difference between s_1 and s_2 may be likened to that between M_1 and M_2 , two musical instruments, say, open pipes or drums, with different arrangements of nodes but otherwise alike. Now, if M_1 and M_2 be sounded in the hearing, but out of sight, of a savage, it is certain that his impression will lead him to distinguish between M_1 and M_2 in very much the same way as we ordinarily distinguish between s_1 and s_2 : just as we find it hard to conceive that there is so much common between s_1 and s_2 as to make an interchange of thermal conductivities and thermal capacities between them possible, so the savage will find it hard to conceive how M_1 and M_2 may be made to interchange their musical properties.]

Let ξ be a variable with the aggregates $-G$ and G as its domain; also, as in the first part, let $T(x, t)$ stand for the temperature at time t at any point in the slab whose x -coordinate is x . Now, let $C(\xi, t)$ be a function of ξ and t , even in ξ and connected with $T(x, t)$ by the equations

$$T(x, t) = \frac{1}{2l} \int_{x-l}^{x+l} C(\xi, t) d\xi, \quad 0 \leq x \leq \pi - l, \quad (\mathfrak{A}_2)$$

$$T(x, t) = \frac{1}{\pi - x + l} \int_{x-l}^{\pi} C(\xi, t) d\xi, \quad \pi - l \leq x \leq \pi,$$

l being a constant dependent on G . I will call $C(\xi, t)$ the *characteristic function* of the slab: this is the function alluded to above. Also, taking a centimetre as the unit of length, I will suppose, for the sake of fixity of ideas, that $l < 10^{-7}$.

The *problem of the linear conduction of heat* may now be thus formulated:
Given the initial characteristic function $C(\xi, 0)$, *find the characteristic function at any subsequent time.*

Analytical representation of the conditions of the phenomenon.

46. The following *three hypotheses* suffice for an analytical representation of the conditions of the phenomenon:

i. The quantity of heat which flows across unit area, placed at ξ at right angles to the axis of x , along this axis in any interval $(t, t+\tau)$ is equal to

$$-K \int_t^{t+\tau} C'(\xi, t') dt',$$

where $C'(\xi, t')$ stands for $\frac{\partial}{\partial \xi} C(\xi, t')$ and K is a constant, dependent on G and called the thermal conductivity of the slab, $-\pi < \xi < \pi$. (α_2)

ii. The quantity of heat which is absorbed by a cylinder, with the axis of x as its axis and its faces, of unit area, $\xi = \xi_1$, $\xi = \xi_2$, in any interval $(t, t+\tau)$ is equal to

$$c \int_{\xi_1}^{\xi_2} \{C(\xi', t+\tau) - C(\xi', t)\} d\xi',$$

where c is a constant, dependent on G and called the thermal capacity of the slab. (β_2)

iii. Let s and Σ represent cylinders, with the axis of x as their common axis and their faces passing through x_1, x_2 and ξ_1, ξ_2 , respectively, x_1, x_2 and ξ_1, ξ_2 being any pairs of values of x and ξ . Then, in order that the energy in *any* s be conserved, it is sufficient that the energy in any Σ be conserved. (γ_2)

It would be convenient to consider the units so chosen that $\frac{K}{c} = 1$.

47. Thus the principle of the conservation of energy together with the supposition of the impermeability of the face, $\xi = -\pi$, of the slab finds expression in the equation

$$\int_{-\pi}^{\xi} \{C(\xi', t) - C(\xi', 0)\} d\xi' = \int_0^t C'(\xi, t') dt', \quad -\pi < \xi < \pi. \quad (A_2)$$

This is the *first and the fundamental condition* of the phenomenon.

The *second condition* is the following:

$T(x, t)$ is continuous in t , or, if it has any discontinuities they are of the second kind; further, if t_ω is a point of discontinuity, $T(x, t_\omega)$ is contained in the aggregate of values assumed by $T(x, t)$ as t approaches t_ω . (B_2)

This is merely the analytical representation of the supposition that when,

with a given x , $T(x, t)$ passes from one value to another it assumes all the intermediate values.

The *third condition*, (C_2) , is for $C(\xi, t)$ what (B_2) is for $T(x, t)$.

The *fourth condition*,

$$\lim_{\xi = -\pi+0} Q(\xi, t) = 0, \quad \lim_{\xi = \pi-0} Q(\xi, t) = 0, \quad (D_2)$$

expresses the impermeability of the faces, $Q(\xi, t)$ being the quantity of heat which flows across unit area, placed at ξ at right angles to the axis of x , along this axis in the interval $(0, t)$.

48. It should be noted that, in the present theory, of the four actual conditions of the phenomenon three, viz., those corresponding to (A_2) , (B_2) , and (D_2) are the same as the actual conditions in the preceding theories. The addition of a fourth condition has been deemed necessary because of the subordination of $T(x, t)$ to $C(\xi, t)$ which is thus the dominating factor in the theory; and it should be noted that neither of the conditions (B_2) , (C_2) need involve the other.

The definition of temperature, as given by (A_2) , constitutes the essential feature of the theory. And thus, in order that the problem may have meaning, it is necessary and sufficient that the initial temperature $T(x, 0)$ be not only an even and continuous function of x but also possess a characteristic function $C(\xi, 0)$.

It should be noted that $C(\xi, t)$ need not satisfy any conditions other than those necessary to make the conditions (A_2) , (B_2) , (C_2) and (D_2) intelligible and these conditions themselves. For example, $C'(\xi, t)$ need only be finite and integrable in t ; thus it may not be possible to obtain an interval of time, ever so small, in which there are not an infinite number of instants at which $C'(\xi, t)$ is discontinuous in t . Also $C'(\xi, t)$ may be meaningless for an aggregate of values of t , of zero content; in particular $C'(\xi, 0)$ may not exist.

Characteristic Functions of Fourier's Type.

49. Let the initial characteristic function $C(\xi, 0) = \varphi(\xi)$ possess an associate $f(x)$ which is a finite, integrable and even function of x ; I will find the necessary and sufficient conditions, that $\varphi(\xi)$ must satisfy, in order that the characteristic function at any subsequent time be given by $\chi(\xi, t)$, where

$$\chi(\xi, t) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_1^{\infty} \alpha_m \cos m\xi e^{-m^2 t},$$

α_m being given by

$$\alpha_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\xi') \cos m\xi' d\xi'.$$

It should be noted that $\chi(\xi, t)$ is defined *only* for $t > 0$.

50. As in the preceding parts, let $V(x, t)$ stand for

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty} a_m \cos mx e^{-m^2 t},$$

a_m being given by

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x') \cos mx' dx'.$$

Now, since $f(x)$ is an associate to $\varphi(\xi)$, it follows that $a_m = a_m$. Therefore $V(x, t)$ is an associate to $\chi(\xi, t)$; and, since $V'(x, t)$ exists, it follows that

$$\chi'(\xi, t) = \{V'(x, t)\}_{x=\xi}.$$

Therefore (A₂), (B₂), (C₂) and (D₂) may be expressed in terms of $V(x, t)$ and in the notation of continuous analysis. Thus (A₂) becomes

$$\int_{-\pi}^{\xi} \{V(x', t) - f(x')\} dx' = \int_0^t \{V'(x, t')\}_{x=\xi} dt';$$

and, consequently, it follows from Art. 7 that (A₂) is satisfied if for any value of t' , however small, $|\{V'(x, t')\}_{x=\xi}|$ is less than a finite quantity $P(\xi)$.

When $0 \leq x \leq \pi - l$,

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{2l} \int_{x-l}^{x+l} C(\xi', t) d\xi' = \frac{1}{2l} \int_{x-l}^{x+l} \chi(\xi', t) d\xi' = \frac{1}{2l} \int_{x-l}^{x+l} V(x', t) dx' \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} \frac{a_m}{m} \cos mx \frac{\sin ml}{l} e^{-m^2 t}. \end{aligned}$$

Now, since a_m becomes indefinitely small with $\frac{1}{m}$, this series is uniformly convergent in t in the interval $(0, +\infty)$. Therefore $T(x, t)$ is continuous in t when $0 \leq x \leq \pi - l$. Similarly it is proved that $T(x, t)$ is continuous in t when $\pi - l < x \leq \pi$. Therefore (B₂) is satisfied whatever $\varphi(\xi)$ may be.

(C₂) is equivalent to the following:

$\lim_{t \rightarrow +0} V(\xi, t) = \varphi(\xi)$ if the limit exists, or, the limit does not exist, and then $\varphi(\xi)$ is contained in the aggregate of values assumed by $V(\xi, t)$ as t approaches zero.

It is easily seen that, if the condition relating to $|\{V'(x, t)\}_{x=\xi}|$ be satisfied,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{K} Q(\xi, t) &= \int_0^t C'(\xi, t') dt' = \int_0^t \{V'(x, t')\}_{x=\xi} dt' = \sum_1^{\infty} \frac{a_m \sin m\xi}{m} (e^{-m^2 t} - 1), \\ &\quad -\pi < \xi < \pi. \end{aligned}$$

Now this series is uniformly convergent in ξ .

Therefore

$$\lim_{\xi = -\pi+0} Q(\xi, t) = 0, \quad \lim_{\xi = \pi-0} Q(\xi, t) = 0.$$

51. Thus the group of conditions which is necessary and sufficient, in order that $\chi(\xi, t)$ be the required characteristic function, is the following:

i. For every value of ξ , there exists a finite constant P such that, for any value of t however small,

$$|\{V'(x, t)\}_{x=\xi}| \text{ is less than } P, \quad -\pi < \xi < \pi.$$

ii. $\lim_{t=+0} V(\xi, t) = \varphi(\xi)$ if the limit exists, or, the limit does not exist, and then $\varphi(\xi)$ is contained in the aggregate of values assumed by $V(\xi, t)$ as t approaches zero.

Necessary and sufficient conditions for $\varphi(\xi)$.

52. The group of conditions, given in the last article, leads, with the help of the results given in Arts. 19 and 21, to certain necessary and sufficient conditions, for $\varphi(\xi)$, of an applicability sufficiently extensive for the purposes of this essay. I give the simplest and most important of these conditions below.

i. If $\varphi(\xi)$ is a continuous function of ξ — and, consequently, its *single* associate, which is continuous in the interval $(-\pi, \pi)$, is the *limital*¹⁾ function corresponding to it — then, in order that $\chi(\xi, t)$ be the characteristic function of the problem, it is sufficient that for every value of ξ within its domain, either $|D(\xi, x')| \sim 1$ or $\pm D(\xi, x') \sim x'^{-1+k} \cos \{\psi(x')\}$ where $\psi(x') > \frac{1}{x'^\nu}$, $k + \nu > 1$.

ii. If any associate $f(x)$ of $\varphi(\xi)$ is discontinuous in the interval $(-\pi, \pi)$ then the condition relating to $D(\xi, x')$, given in i, together with one of the following conditions is sufficient:

(a) If $\lim_{x'=+0} M(\xi, x')$ exists, it is equal to $\varphi(\xi)$.

(b) If $M(\xi, x') = M_1(\xi, x') + M_2(\xi, x')$ such that $\lim_{x'=+0} M_1$ exists and $M_2 \sim \cos \{\psi(x')\}$ where $\psi(x') > l\left(\frac{1}{x'}\right)$, then the condition is that $\lim_{x'=+0} M_1 = \varphi(\xi)$.

(c) $M(\xi, x') \sim \cos \psi(x')$ where $\psi(x') \lesssim l\left(\frac{1}{x'}\right)$; further, $\varphi(\xi) = 0$.

iii. $\chi(\xi, t)$ ceases to be the characteristic function, if at any point ξ , $\lim_{x'=+0} M(\xi, x')$ exists and is different from $\varphi(\xi)$.

iv. $\chi(\xi, t)$ ceases to be the characteristic function, if $\varphi(\xi)$ possesses an associate $f(x)$ which is such that, for every value of ξ within its domain, $\pm D(\xi, x')$ either $\gg 1$ or $\sim x'^{-1+k} \cos \{\psi(x')\}$ where $\psi(x') \lesssim l\left(\frac{1}{x'}\right)$.

1) This is Brodén's Limitäre Function.

Stable, unstable, and inadmissible initial states.

53. I will call an initial state, $C(\xi, 0) = \varphi(\xi)$, *stable* or *unstable* according as both the conditions of Art. 51 are satisfied or only the first. An initial state $\varphi(\xi)$ is considered *inadmissible* if it is not known that the first condition is satisfied. A stable initial state is called *non-oscillatory* if $C(\xi, t)$ is continuous, i. e., $\lim_{t \rightarrow +0} \chi(\xi, t) = \varphi(\xi)$; it is called *oscillatory* if there exists at least one value of ξ for which $\chi(\xi, t)$ makes, within any indefinitely small interval $(0, t_0)$, an infinite number of finite oscillations about $\varphi(\xi)$, i. e., $C(\xi, t)$ has a discontinuity of the second kind at $t = 0$ and $\varphi(\xi)$ is contained in the aggregate of values assumed by $\chi(\xi, t)$ as t approaches zero.

A continuous initial state, if admissible, is always stable and non-oscillatory. A discontinuous initial state, if admissible, may be stable or unstable, non-oscillatory or oscillatory: for example, if it satisfies ii. of the last article it is stable; but it is non-oscillatory or oscillatory according as it corresponds to one of the two (a), (b), or, for at least one value of ξ , to (c). If an admissible initial state corresponds to iii. it is unstable. Remembering the conditions involved in the supposition that $\varphi(\xi)$ possesses an associate, it is easily seen that an unstable initial state can be replaced by a stable one without changing $\chi(\xi, t)$.

An initial state is inadmissible if it corresponds to iv. For $Q(\xi, t)$ is indeterminate, and, consequently, it is not known whether the principle of the conservation of energy, as stated in Art. 3, is satisfied or not. It should be noted that this is a case of failure not of mathematical analysis but of the hypotheses we started with.

Approximations to impossible initial states.

54. Let $T_i(x)$ stand for an even function of x such that there does not exist any even function $C(\xi)$ which can be connected with $T_i(x)$ by the equations

$$T_i(x) = \frac{1}{2l} \int_{x-l}^{x+l} C(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq \pi - l,$$

$$T_i(x) = \frac{1}{\pi - x + l} \int_{x-l}^{\pi} C(\xi) d\xi, \quad \pi - l \leq x \leq \pi.$$

Then $T_i(x)$ cannot represent a temperature; and, therefore, an initial state in which the temperature is supposed to be $T_i(x)$ must be an *impossible* one. I proceed now to prove the following theorem:

If $T_i(x)$ is a continuous function of x and δ an arbitrarily small but fixed quantity, then it is always possible to find an admissible characteristic function $C(\xi, 0)$ such that, for all the points in the interval $(l, \pi - l)$, the difference between $T_i(x)$ and $T(x, 0)$ is numerically less than δ .

Consider x^{2m} where m is any positive integer; and let $C_m(\xi)$ stand for the continuous function given by

$$x^{2m} = \frac{1}{2!} \int_{x-1}^{x+1} C_m(\xi) d\xi, \quad 1 \leq x \leq \pi - 1.$$

Then it is easily seen that

$$C_m(\xi) = \sum_0^{r=m} b_r \xi^{2r},$$

where

$$b_r = 1, \quad r = m,$$

$$b_r = 2m(2m-1)\dots(2r+1) \mathfrak{l}^{2(m-r)} B_r, \quad r = m-1, m-2, \dots, 1, 0,$$

the B 's being given by the simultaneous equations

$$\frac{1}{(2m+1-2s)!} + \frac{B_{m-1}}{(2m-1-2s)!} + \dots + \frac{B_r}{(2r+1-2s)!} + \dots + \frac{B_s}{1!} = 0,$$

$$s = m-1, m-2, \dots, 1, 0.$$

Similarly, if

$$x^{2m+1} = \frac{1}{2!} \int_{x-1}^{x+1} \bar{C}_m(\xi) d\xi, \quad 1 \leq x \leq \pi - 1,$$

$$\bar{C}_m(\xi) = \sum_0^{r=m} \bar{b}_r \xi^{2r+1},$$

where

$$\bar{b}_r = 1, \quad r = m,$$

$$\bar{b}_r = (2m+1)2m\dots(2r+2) \mathfrak{l}^{2(m-r)} B_r, \quad r = m-1, m-2, \dots, 1, 0.$$

Now, according to a well-known theorem due to *Weierstrass*¹⁾, it is always possible, by taking n sufficiently large, to find a rational and integral polynomial $P_n(x)$, of degree n , such that

$$|T_r(x) - P_n(x)| < \delta, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Therefore, if

$$P_n(x) = \sum_0^{\frac{n}{2} \text{ or } \frac{n-1}{2}} A_m x^{2m} + \sum_0^{\frac{n}{2}-1 \text{ or } \frac{n-1}{2}} \bar{A}_m x^{2m+1},$$

the required admissible characteristic function is

$$C(\xi, 0) = \sum_0^{\frac{n}{2} \text{ or } \frac{n-1}{2}} A_m \left\{ \sum_0^{r=m} b_r \xi^{2r} \right\} + \sum_0^{\frac{n}{2}-1 \text{ or } \frac{n-1}{2}} \bar{A}_m \left\{ \sum_0^{r=m} \bar{b}_r \xi^{2r+1} \right\}.$$

1) See *Weierstrass's* Memoir, loc. cit. p. 796.

55. The following is a simple method of approximation which is applicable to an extensive class of continuous functions $T_i(x)$:

Let $\varphi_1(\xi)$ be the continuous function of ξ , to which $T_i(x)$ is the limital function. Then two cases arise: the initial characteristic function $C(\xi, 0) = \varphi_1(\xi)$ is either admissible or inadmissible.

i. When $C(\xi, 0)$ is admissible — and this is the case, for example, if $T'_i(x)$ exists and is finite —, an approximation may be furnished by $T(x, 0)$; and it is easily seen that

$$|T(x, 0) - T_i(x)| < \overline{\mathcal{Q}}, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$\overline{\mathcal{Q}}$ being the greatest of the values of the fluctuation of $T_i(x)$ in intervals, of length $2l$, taken anywhere in the interval $(-\pi, \pi)$. Let g_i stand for the greatest value of $|T_i(x)|$. Then the method may be said to fail when $\frac{\overline{\mathcal{Q}}}{g_i}$ is not negligible.

ii. Let $II_n(x)$ stand for $P_n(x)$ or $P_n(-x)$ according as x is positive or negative, respectively; also let $\varphi_2(\xi)$ be the continuous function of ξ to which $II_n(x)$ is the limital function. Then, when $C(\xi, 0) = \varphi_1(\xi)$ is inadmissible, the function $T(x, 0)$, defined by the admissible characteristic function $C(\xi, 0) = \varphi_2(\xi)$, may be taken as an approximation to $T_i(x)$; and it is easily seen that

$$|T(x, 0) - T_i(x)| < \delta + \overline{\mathcal{Q}'},$$

$\overline{\mathcal{Q}'}$ being the greatest of the values of the fluctuation of $II_n(x)$ in intervals, of length $2l$, taken anywhere in the interval $(-\pi, \pi)$. Since $\overline{\mathcal{Q}} - 2\delta < \overline{\mathcal{Q}'} < \overline{\mathcal{Q}} + 2\delta$, the method may be said to fail when $\frac{\overline{\mathcal{Q}}}{g_i}$ is not negligible.

Illustrative Examples.

56. The following simple examples suffice to illustrate the salient features of the theory:

(i). Suppose that the discriminating aggregate G of the slab is (π, R_0) , R_0 standing for the aggregate of all the rational numbers $\frac{\nu}{2\mu+1}$, with odd denominator, in the interval $(0, \pi)$.

Let

$$C(\xi, 0) = \varphi(\xi) = \sum_1^{n=\infty} \frac{(n\xi)}{n^s}, \quad s > 2, \quad \xi \geq 0;$$

then $\varphi(\xi)$ possesses an associate $f(x) = f_2(x)$, $f_2(x)$ standing for the $f(x)$ in (ii) of Art. 24.

At any point ξ , $D(\xi, x') \sim 1$ and, consequently, $\{V'(x, t)\}_{x=\xi} \sim 1$. Also

$f(x)$ is continuous at ξ . Therefore $\chi(\xi, t)$ is the characteristic function of the problem and the initial state, $C(\xi, 0) = \varphi(\xi)$, is stable and non-oscillatory.

(ii). Suppose that the discriminating aggregate G of the slab is (π, R_0) .

Let

$$C(\xi, 0) = \varphi(\xi) = \sum_1^{r=\infty} \frac{\Psi(\xi - \omega_{n_r})}{n_r^{s+1}}, \quad s > 1, \quad \xi \geq 0,$$

Ψ and ω_{n_r} having the same meanings as in (iii) of Art. 24 and G being taken to be identical with the sub-aggregate represented there by G_1 ; then $\varphi(\xi)$ possesses an associate $f(x) = f_3(x)$, $f_3(x)$ standing for the $f(x)$ in (iii) of Art. 24.

At any point ξ , $|V'(x, t)_{x=\xi}| \ll 1$; also $\chi(\xi, t)$ makes, within any indefinitely small interval $(0, t_0)$, an infinite number of oscillations, about $\varphi(\xi)$, of finite amplitude not greater than $\frac{2}{n_r^{s+1}}$.

Therefore $\chi(\xi, t)$ is the characteristic function of the problem and the initial state, $C(\xi, 0) = \varphi(\xi)$, is stable and oscillatory.

(iii) Suppose that the discriminating aggregate G of the slab is (π, R_0) .

Let

$$C(\xi, 0) = \varphi(\xi) = \sum_1^{r=\infty} \frac{\Psi_1(\xi - \omega_{n_r})}{n_r^{s+1}}, \quad s > 1, \quad \xi \geq 0,$$

Ψ_1 and ω_{n_r} having the same meanings as in (iv) of Art. 24 and G being taken to be identical with the sub-aggregate $G_1 = \{\omega_{n_r}\}$; then $\varphi(\xi)$ possesses an associate $f(x) = f_4(x)$, $f_4(x)$ standing for the $f(x)$ in (iv) of Art. 24.

$\chi(\xi, t)$ is the same as in (ii). Since $\Psi_1(0) > 2$, $\varphi(\xi)$ is not contained in the aggregate of values assumed by $\chi(\xi, t)$ as t approaches zero. Therefore the initial state is unstable and, so to speak, runs down *instantaneously* to the initial state of (ii).

(iv) Suppose that the discriminating aggregate G of the slab is (π, R_3) , R_3 standing for the aggregate of all the rational numbers $\frac{M}{3^m}$, with an integral power of 3 as denominator, in the interval $(0, \pi)$.

The initial states

$$C(\xi, 0) = \sum_1^{n=\infty} \frac{(n\xi)}{n^s}, \quad s > 2, \quad \xi \geq 0,$$

$$C(\xi, 0) = \sum_1^{r=\infty} \frac{\Psi(\xi - \omega_{n_r})}{n_r^{s+1}}, \quad s > 1, \quad \xi \geq 0,$$

$$C(\xi, 0) = \sum_1^{r=\infty} \frac{\Psi_1(\xi - \omega_{n_r})}{n_r^{s+1}}, \quad s > 1, \quad \xi \geq 0,$$

are, respectively, stable and non-oscillatory, stable and oscillatory, and unstable.

(v) Suppose that the discriminating aggregate G of the slab is (π, R_{49}) , R_{49} standing for the aggregate of all the rational numbers $\frac{M}{7^{2m}}$, with an integral power of 49 as denominator, in the interval $(0, \pi)$.

Let

$$C(\xi, 0) = \varphi(\xi) = \sum_1^{r=\infty} \frac{(\xi - \omega_{n_r})^{\frac{1}{2}}}{n_r^{s+1}}, \quad s > 2, \quad \xi \geq 0,$$

ω_{n_r} having the same meaning as in (iii) of Art. 24 and G being taken to be identical with the sub-aggregate represented there by G_2 .

The initial state $C(\xi, 0) = \varphi(\xi)$ is admissible, stable, and non-oscillatory. But, for any slab whose discriminating aggregate is (π, R_0) or (π, R_3) ,

$$C(\xi, 0) = \sum_1^{r=\infty} \frac{(\xi - \omega_{n_r})^{\frac{1}{2}}}{n_r^{s+1}}, \quad s > 2, \quad \xi \geq 0,$$

would be inadmissible.

(vi). Consider the function x^2 . There does not exist any even function $C(\xi)$ which can be connected with x^2 by the equations

$$x^2 = \frac{1}{2l} \int_{x-1}^{x+1} C(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq \pi - 1,$$

$$x^2 = \frac{1}{\pi - x + 1} \int_{x-1}^{\pi} C(\xi) d\xi, \quad \pi - 1 \leq x \leq \pi.$$

Therefore $x^2 = T_i(x)$ cannot represent a temperature; and, consequently, an initial state in which the temperature is supposed to be x^2 must be an impossible one. The initial state defined by $C(\xi, 0) = \xi^2$ is an approximation to $T_i(x)$; for,

$$T(x, 0) = \frac{1}{2l} \int_{x-1}^{x+1} \xi^2 d\xi = \frac{1}{2l} \int_{x-1}^{x+1} x^2 dx = x^2 + \frac{l^2}{3}, \quad 0 \leq x \leq \pi - 1,$$

$$T(x, 0) = \frac{1}{\pi - x + 1} \int_{x-1}^{\pi} \xi^2 d\xi = \frac{1}{\pi - x + 1} \int_{x-1}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2 + \pi(x-1) + (x-1)^2}{3},$$

$$\pi - 1 \leq x \leq \pi,$$

and, consequently,

$$\frac{|T(x, 0) - x^2|}{\pi^2} < \frac{1}{\pi} < \frac{10^{-7}}{\pi},$$

whatever x may be.

(vii) If n be not too large, an approximation to the impossible initial state, $T_i(x) = x^n$, $n \geq 1$, $0 \leq x \leq \pi$, is furnished by the temperature $T(x, 0)$ defined by the admissible characteristic function $C(\xi, 0) = \xi^n$; and

$$\frac{|T(x, 0) - x^n|}{\pi^n} < \frac{2nl}{\pi} < \frac{2n}{3} \times 10^{-7}$$

whatever x may be.

(viii) $C(\xi, 0) = \xi^3 - \frac{l^2}{3}$ gives a better approximation to the impossible initial state, $T_i(x) = x^2$, than $C(\xi, 0) = \xi^2$. For, the temperature $T(x, 0)$, defined by $C(\xi, 0) = \xi^2 - \frac{l^2}{3}$, equals x^2 as long as x is in the interval $(0, \pi - l)$.

Similar approximations to the impossible initial states x^4, x^6, x, x^3, x^5 , and x^7 are given by the admissible characteristic functions

$$C(\xi, 0) = \xi^4 - 2l^2\xi^2 + \frac{7}{15}l^4,$$

$$C(\xi, 0) = \xi^6 - 5l^2\xi^4 + 7l^4\xi^2 - \frac{31}{15}l^6,$$

$$C(\xi, 0) = \xi,$$

$$C(\xi, 0) = \xi^3 - l^2\xi,$$

$$C(\xi, 0) = \xi^5 - \frac{10}{3}l^2\xi^3 + \frac{7}{3}l^4\xi,$$

and

$$C(\xi, 0) = \xi^7 - 7l^2\xi^5 + \frac{49}{3}l^4\xi^3 - \frac{31}{3}l^6\xi,$$

respectively.

(ix) Consider the impossible initial state $T_i(x) = x \sin qx$, $|\sin ql| > 0$. However large q may be, the temperature $T(x, 0)$ defined by the admissible characteristic function,

$$C(\xi, 0) = \frac{ql}{\sin ql} \left\{ \xi \sin q\xi + l \left(\cot ql - \frac{1}{ql} \right) \cos q\xi \right\},$$

equals $x \sin qx$ as long as x lies in the interval $(0, \pi - l)$. When $\pi - l < x \leq \pi$,

$$\frac{1}{\pi} |T(x, 0) - x \sin qx| < \left(q + \frac{1}{\pi} \right) l < \left(q + \frac{1}{\pi} \right) \times 10^{-7}.$$

Now, if q be integral, putting $x = \pi - \eta + l$, $l \leq \eta < 2l$,

$$T(x, 0) = \frac{-l \cos q\pi}{\eta \sin ql} \{ \pi(1 - \cos q\eta) + \eta \cos q\eta - l \cot ql \sin q\eta \}.$$

Therefore, when $q\eta = (2n + 1)\pi$, n being integral,

$$\frac{1}{\pi} |T(x, 0)| > \frac{\pi - l}{\pi} \frac{1}{|\sin ql|}.$$

Thus, if $0 < |\sin ql| < \frac{1}{2}$, say, $\frac{1}{2}$, $T(x, 0)$ ceases to be an approximation, to $T_i(x)$, ever so crude, at any point in the interval $(\pi - l, \pi)$, where

$$x = \pi + l - \frac{2n + 1}{q} \pi.$$

For instance, if $l = 10^{-8}$ and $q = 10^{10}$,

$$\frac{1}{\pi} |T(x, 0)| > 2,$$

when $16 \leq n \leq 31$.

Uniqueness of the Solution.

57. Consider first the *continuous theory*. I proceed to prove the following theorem:

For a given initial temperature, the problem can admit of only one solution $v(x, t)$ which satisfies, — of course, *in addition* to (A), (B), and (C), — the following conditions:

1. $v(x, t)$ is continuous in t as well as in x and possesses a differential coefficient $v'(x, t)$.

ii. There exists an everywhere dense aggregate $g = \{t_v\}$ which is the *same* for all possible solutions v and which is, further, such that, for any arbitrarily small but fixed quantity σ , it is always possible to find a positive quantity τ_v , different from zero and dependent on v, v' and σ , for which

$$|v'(x, t_v + \tau) - v'(x, t_v)| < \sigma, \tau \leq \tau_v,$$

whatever x may be.

iii. There exists an everywhere dense aggregate $\bar{G} = \{\bar{\xi}\}$ which is the *same* for all possible solutions v and which is, further, such that $|\{v'(x, t)\}_{x=\bar{\xi}}| < p$ whatever $\bar{\xi}$ and t may be, p being a finite constant dependent on v .

It should be noted that $v(x, t)$ is defined *only* for $t > 0$.

58. If possible, let there be two solutions, $v_1(x, t)$ and $v_2(x, t)$, of the problem. Then their difference

$$v_1(x, t) - v_2(x, t) = w(x, t)$$

is also a solution of the problem, the initial temperature being zero. Therefore, it follows from (A) that

$$\int_{-\pi}^x \{\omega(x', t_v + \tau) - \omega(x', t_v)\} dx' = \int_{t_v}^{t_v + \tau} \omega'(x, t') dt'. \quad (1)$$

Now, going back to (ii) of the last article, let τ'_v and τ''_v be the values of τ_v for v_1 and v_2 , respectively. Then it is evident that

$$|\omega'(x, t_v + \tau) - \omega'(x, t_v)| < 2\sigma, \tau \leq \bar{\tau}_v, \quad (2)$$

$\bar{\tau}_v$ standing for the lesser of the two quantities τ'_v, τ''_v ; and, applying (2) to (1),

it is easily seen that $\omega'(x, t_\nu)$ is a continuous function of x , whatever ν may be.

Now, let $J(t)$ stand for $\int_{-\pi}^{\pi} \omega^2(x', t) dx'$. Then, representing by \bar{t}_ν a positive quantity such that $t_\nu + \bar{t}_\nu$ belongs to g ,

$$J(t_\nu + \bar{t}_\nu) - J(t_\nu) = \int_{-\pi}^{\pi} \{\omega^2(x', t_\nu + \bar{t}_\nu) - \omega^2(x', t_\nu)\} dx'. \quad (3)$$

Remembering that $\omega'(x', t_\nu + \bar{t}_\nu) + \omega'(x', t_\nu)$ is continuous in x' and, consequently, integrable, it follows that, if $q(x, t_\nu, \bar{t}_\nu)$ stands for

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^x \{\omega(x', t_\nu + \bar{t}_\nu) - \omega(x', t_\nu)\} dx', \\ J(t_\nu + \bar{t}_\nu) - J(t_\nu) &= [\{\omega(x', t_\nu + \bar{t}_\nu) + \omega(x', t_\nu)\} q(x', t_\nu, \bar{t}_\nu)]_{-\pi}^{\pi} \\ & - \int_{-\pi}^{\pi} \{\omega'(x', t_\nu + \bar{t}_\nu) + \omega'(x', t_\nu)\} q(x', t_\nu, \bar{t}_\nu) dx'. \end{aligned} \quad (4)$$

But it follows from the impermeability of the faces of the slab that the total quantity of heat in it remains unaltered. Therefore

$$q(\pi, t_\nu, \bar{t}_\nu) = 0;$$

and, consequently, (4) becomes

$$J(t_\nu + \bar{t}_\nu) - J(t_\nu) = - \int_{-\pi}^{\pi} \{\omega'(x', t_\nu + \bar{t}_\nu) + \omega'(x', t_\nu)\} q(x', t_\nu, \bar{t}_\nu) dx'. \quad (5)$$

Now take $\bar{t}_\nu < \tau_\nu$. Then, whatever \bar{x}' may be,

$$\begin{aligned} \omega'(x', t_\nu + \bar{t}_\nu) &= \omega'(x', t_\nu) + 2\theta\sigma, \\ q(x', t_\nu, \bar{t}_\nu) &= \int_{t_\nu}^{t_\nu + \bar{t}_\nu} \omega'(x', t') dt' = \bar{t}_\nu \{\omega'(x', t_\nu) + 2\theta_1\sigma\}, \quad |\theta|, |\theta_1| < 1. \end{aligned}$$

Therefore (5) becomes

$$J(t_\nu + \bar{t}_\nu) - J(t_\nu) = -2\bar{t}_\nu \int_{-\pi}^{\pi} \{\omega'(x', t_\nu)\}^2 dx' + 4\pi\bar{t}_\nu\theta_2\sigma(3\bar{\omega}_\nu + 2\sigma), \quad (6)$$

where $\bar{\omega}_\nu$ stands for the greatest value that $|\omega'(x', t_\nu)|$ can have and $|\theta_2| < 1$. Now, since $\bar{\omega}_\nu$ is finite, $4\pi\sigma(3\bar{\omega}_\nu + 2\sigma)$ can be made as small as we please by choosing σ and, consequently, \bar{t}_ν sufficiently small. Therefore it follows from (6) that

$$\lim_{t_v = +0} \frac{J(t_v + \bar{t}_v) - J(t_v)}{\bar{t}_v} = -2 \int_{-\pi}^{\pi} \{\omega'(x', t_v)\}^2 dx'.$$

Therefore $J(t_v)$ never increases as t_v increases.

Now consider $\lim_{t_v = +0} J(t_v)$. Using the notation of discontinuous analysis,

$$J(t_v) = \int_{-\pi}^{\pi} \omega^2(\bar{\xi}, t_v) d\bar{\xi} = [\omega(\bar{\xi}, t_v) I(\bar{\xi}, t_v)] - \int_{-\pi}^{\pi} \{\omega'(x, t_v)\} \frac{I(\bar{\xi}, t_v)}{x = \bar{\xi}} d\bar{\xi}, \quad (7)$$

where $I(\bar{\xi}, t_v)$ stands for $\int_{-\pi}^{\bar{\xi}} \omega(\bar{\xi}', t_v) d\bar{\xi}'$. But, since the initial temperature is zero, it follows from (A) that, for any arbitrarily small but fixed quantity δ , it is always possible to find a positive quantity t_0 such that

$$|I(\bar{\xi}, t_v)| < \delta, t_v \leq t_0$$

whatever $\bar{\xi}$ may be. Therefore, according to iii. of Art. 57, it follows from (7) that

$$J(t_v) < 4\pi \bar{p} \delta, t_v \leq t_0,$$

\bar{p} standing for the greater of the two quantities p', p'' which are the values of p for v_1, v_2 . Therefore $\lim_{t_v = +0} J(t_v) = 0$. Therefore $J(t_v)$ can never decrease with the increase of t_v , for it can never be negative. Therefore $J(t_v)$ remains equal to zero whatever t_v may be. But, according to i. of Art. 57, $J(t_v)$ is a continuous function of t_v ; and $J(t)$ is the limital function corresponding to it. Therefore $J(t)$ is zero whatever t may be. And, since according to i. of Art. 57, $\omega(x, t)$ is continuous in x , it follows that $\omega(x, t)$ is zero whatever x and t may be. Therefore $v_1(x, t) = v_2(x, t)$ for all values of x and t .

59. Consider the *improperly continuous theory*. I proceed to prove the following theorem:

For a given initial characteristic function which possesses an associate, the problem can admit of only one solution $C(\xi, t) = \mathbf{k}(\xi, t)$ which satisfies, — of course, *in addition* to (A₂), (B₂), (C₂), and (D₂), — the following conditions:

i. $\mathbf{k}(\xi, t)$ is a continuous function of ξ , and its single continuous associate, viz., the limital function $\mathbf{v}(x, t)$, is continuous in t and possesses a differential coefficient $\mathbf{v}'(x, t)$.

ii. There exists an everywhere dense aggregate $g_2 = \{t_v\}$ which is the *same* for all possible solutions \mathbf{k} and which is, further, such that, for any arbitrarily small but fixed quantity σ , it is always possible to find a positive quantity τ_v , different from zero and dependent on v, \mathbf{k} and σ , for which

$$| \mathbf{v}'(x, t_v + \tau) - \mathbf{v}'(x, t_v) | < \sigma, \tau \leq \tau_v,$$

whatever x may be; also, $\mathbf{v}'(x, t_v)$ is a continuous function of x .

iii. There exists an everywhere dense aggregate $\overline{G}_2 = \{ \overline{\xi} \}$ which is the same for all possible solutions \mathbf{k} and which is, further, such that $|\{ \mathbf{v}'(x, t) \}_{x = \overline{\xi}}| < p_2$ whatever $\overline{\xi}$ and t may be, p_2 being a finite constant dependent on \mathbf{k} .

It should be noted that $\mathbf{k}(\xi, t)$ and, consequently, $\mathbf{v}(x, t)$ are defined only for $t > 0$.

If possible, let there be two solutions $\mathbf{k}_1(\xi, t)$ and $\mathbf{k}_2(\xi, t)$; and let $\mathbf{v}_1(x, t)$ and $\mathbf{v}_2(x, t)$ be the corresponding limital functions. Then, expressing (A_2) , (C_2) , and (D_2) in terms of $\mathbf{v}(x, t)$ and in the notation of continuous analysis, it is easily seen, by a procedure similar to that of the last article, that $\mathbf{v}_1(x, t) = \mathbf{v}_2(x, t)$ for all values of x and t . Therefore $\mathbf{k}_1(\xi, t) = \mathbf{k}_2(\xi, t)$ for all values of ξ and t .

In the *discontinuous theory*, there can be no question as to the uniqueness of the solution because *the* solution is non-existent and, in fact, impossible.

Part IV.

Summary.

The Relation of Mathematical Analysis to Physics.

60. In the present part I propose to discuss briefly the theories expounded in the preceding pages. With this end in view, I proceed first to consider the nature of the relation of mathematical analysis to physics. Like grammar, mathematical analysis helps the physicist to express his thoughts with clearness and precision. Its chief characteristic is that it makes use of symbols which are not mere counters but represent operations involving complex processes of thought. Thus the language of mathematical analysis possesses the desired quality of conciseness which is necessary for the proper concentration of attention; but the mind fails to grasp its full meaning without considerable effort.

61. *The application of mathematical analysis to physics consists in describing the results of observation in analytical language; and, of course, in order that the description may have any meaning, it is necessary that it be consistent: this is the first requisite of the analytical description of a physical phenomenon. The second requisite is that the description should be true¹); and the third requisite is that the description should be so simple that it can be recognised as a true one with the least possible expenditure of thought.*

The object of the essay.

62. The object of this essay is to shew how, in the present state of mathematical analysis, it is fully possible to work out analytical theories of the linear conduction of heat in a homogeneous solid; each theory being based on definite suppositions as to the constitution of the solid, and the description furnished by it being, in all the cases that can possibly come under observation, not only consistent and the simplest possible but also true. I have thus worked out three analytical theories. Of these the first treats the solid as a continuum with the same properties in all its points, and is exact; the second postulates the existence of molecules but takes no account of their internal constitution,

1) The sense in which the word „true“ is used here is made fully clear by the example in Art. 63.

and is therefore essentially inexact; finally, the third is thorough-going and exact although it does not regard the solid as a continuum with the same properties in all its points.

The Continuous Theory.

63. The theory, worked out in Part I., is distinguished from Fourier's theory not only by its *wider scope* but also by its *greater simplicity*; for its description of the actual conditions of the phenomenon is recognised as a true one from the very form of the description: it is therefore the simplest possible continuous theory.

The essential feature of the theory is that, in any particular case, it can describe the phenomenon in an *infinite number of ways*, the initial temperature being assumed to be continuous or discontinuous, stable or unstable, non-oscillatory or oscillatory: and all these descriptions will be consistent and true. The precise import of this remark is made clear by the following example:

Suppose that the result of the observation of the initial temperature of the slab is embodied in the statement that

$$T(x, 0) = f(x) = x^2 + e\theta(x), \quad (1)$$

where e represents the greatest possible error of observation and $0 \leq |\theta(x)| \leq 1$. Now, let $T_1(x, t)$, $T_2(x, t)$, $T_3(x, t)$, $T_4(x, t)$ and $T_5(x, t)$ stand for the $T(x, t)$ in the first, second, third, fourth and fifth examples of Art. 24, respectively; also let T' be, numerically, the greatest value that any of the five T 's can have. Then, representing by $T_0(x, t)$ the $T(x, t)$ corresponding to $T(x, 0) = x^2$, the descriptions embodied in the equations,

$$T(x, t) = T_0(x, t),$$

$$T(x, t) = T_0(x, t) + \frac{e}{T'} T_1(x, t),$$

$$T(x, t) = T_0(x, t) + \frac{e}{T'} T_2(x, t),$$

$$T(x, t) = T_0(x, t) + \frac{e}{T'} T_3(x, t),$$

$$T(x, t) = T_0(x, t) + \frac{e}{T'} T_4(x, t),$$

and

$$T(x, t) = T_0(x, t) + \frac{e}{T'} T_5(x, t),$$

are all *consistent and true*. And, in each of the first two of these descriptions, the initial temperature is continuous, stable and non-oscillatory; in the third, discontinuous, but stable and non-oscillatory; in the fourth, discontinuous, stable and oscillatory; and in the fifth as well as in the sixth, discontinuous and unstable.

An important feature of the theory is the distinction between *admissible and inadmissible initial states*. For example, let $\theta(x) = \theta_i(x)$ where $T(x, 0) = \theta_i(x)$ is an inadmissible initial state; further, let $V_i(x, t)$ be the function $V(x, t)$ corresponding to $\theta_i(x)$. Also let V'_i be the greatest value that $|V_i(x, t)|$ can have. Then the description embodied in the equation

$$T(x, t) = V_0(x, t) + \frac{e}{V'_i} V_i(x, t), \quad t > 0,$$

is inconsistent and, consequently, untrue; although the result of the observation of the initial temperature is still truly described by the equation

$$T(x, 0) = x^2 + e\theta_i(x).$$

The Discontinuous Theory.

64. The importance of the theory, worked out in Part II., lies in the fact that, in all the cases that can possibly come under our observation, it consistently and truly describes the phenomenon by aid of an old and familiar mechanism: it may, therefore, be regarded as the simplest of the type of theories which, in their analysis of the constitution of the solid, stop short at certain finite entities, called atoms or molecules, simply regarding them as structures whose constitution is inscrutable. The essential feature of the theory is that its description of the phenomenon is professedly inexact.

The Improperly Continuous Theory.

65. The theory, worked out in Part III., consistently and truly describes the phenomenon in terms of the characteristic function. And in width of scope it is scarcely inferior to the continuous theory. Thus, in any particular case, it can describe the phenomenon in *an infinite number of ways*, the initial characteristic function being assumed to be continuous or discontinuous, stable or unstable, oscillatory or non-oscillatory.

The theory is marked out from the continuous and the discontinuous theories by two important features. One is that, although it does not regard the solid as a continuum with the same properties in all its points, its description of the phenomenon is not only consistent and true but also thorough-going and exact. The other feature is that the hypotheses on which it is based admit of an interpretation which is not in disagreement with our physical conceptions. This, of course, cannot be affirmed of the continuous theory; and even in the discontinuous theory the hypothesis that conduction is *wholly* due to molecular radiations is questioned by high authorities¹).

¹ See Larmor's Memoir (Phil. Trans. Vol. 190), Art. 11.

Contents.

	Page
Introduction	1
Part I. Continuous Theory.	
Art.	
1 Formulation of the problem	7
2—5 Analytical representation of the conditions of the phenomenon	7
6—10 Solutions of Fourier's type	9
11—18 Behaviour of $V(x, t)$ for t small	11
19 Summary relating to the behaviour of $V(x, t)$ for t small	20
20—21 Behaviour of $V(x, t)$ for t small	20
22 Necessary and sufficient conditions for $f(x)$	21
23 Stable, unstable, and inadmissible initial states	22
24 Illustrative examples	22
Part II. Discontinuous Theory.	
25 Formulation of a discontinuous theory of solids	25
26—31 Approximate analytical representation of the conditions of the phenomenon	26
32 Auxiliary functions of Fourier's type	33
33—36 Superior limits of E , ε , and e	34
37—38 Sufficient and quasi-necessary conditions for $f(x)$	37
39 Illustrative examples	39
40—42 Criticism of Fourier's theory	42
43 Illustrative examples	44
Part III. Improperly Continuous Theory.	
44 Notation of improperly continuous analysis	48
45 Formulation of an improperly continuous theory of solids	49
46—48 Analytical representation of the conditions of the phenomenon	51
49—51 Characteristic functions of Fourier's type	52
52 Necessary and sufficient conditions for $\varphi(\xi)$	54
53 Stable, unstable, and inadmissible initial states	55
54—55 Approximations to impossible initial states	55
56 Illustrative examples	57
57—59 Uniqueness of the solution	61
Part IV. Summary.	
60—61 The relation of mathematical analysis to physics	65
62 The object of the essay	65
63 The continuous theory	66
64 The discontinuous theory	67
65 The improperly continuous theory	67

12 JAN. 1904



ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.

PHILOLOG.-HIST. KL. NEUE FOLGE.

- I. Band, No. 1. **Kehr, P.**, *Ueber eine römische Papyrusurkunde im Staatsarchiv zu Marburg*. Mit drei Facsimile auf zwei Tafeln. 4. (28 S.) 1896. 3 M.
- I. Band, No. 2. **Meyer, Wilhelm** (aus Speyer), *Ueber Lauterbachs und Aurifabers Sammlungen der Tischreden Luthers*. 4. (43 S.) 1896. 3 M.
- I. Band, No. 3. **Bonwetsch, N.**, *Das slavische Henochbuch*. 4. (57 S.) 1896. 4 M.
- I. Band, No. 4. **Wellhausen, J.**, *Der arabische Josippus*. 4. (50 S.) 1897. 3 M. 50 Pf.
- I. Band, No. 5. **Hultsch, Fr.**, *Poseidonios über die Größe und Entfernung der Sonne*. 4. (48 S.) 1897. 3 M.
- I. Band, No. 6. **Meyer, Wilhelm** (aus Speyer), *Die Buchstabenverbindungen der sogenannten gothischen Schrift*. Mit 5 Tafeln. 4. (124 S.) 1897. 9 M. 50 Pf.
- I. Band, No. 7. **Leo, Fr.**, *Die plautinischen Cantica und die hellenistische Lyrik*. 4. (114 S.) 1897. 7 M. 50 Pf.
- I. Band, No. 8. **Asadi's neupersisches Wörterbuch Lughat-i Furs** nach der einzigen vatikanischen Handschrift herausgegeben von Paul Horn. 4. (37 u. 133 S.) 1897. 18 M.
- II. Band, No. 1. **Wellmann, M.**, *Krateuas*. Mit 2 Tafeln. 4. (32 S.) 1897. 3 M.
- II. Band, No. 2. *Das hebräische Fragment der Weisheit des Jesus Sirach* herausgegeben von **Rudolf Smend**. 4. (34 S.) 1897. 3 M. 50 Pf.
- II. Band, No. 3. **Schulten, Adolf**, *Die Lex Manciana*, eine afrikanische Domänenordnung. 4. (51 S.) 1897. 3 M. 50 Pf.
- II. Band, No. 4. **Kaibel, Georg**, *Die Prolegomena ΠΕΡΙ ΚΩΜΩΛΙΑΣ*. 4. (70 S.) 1898. 4 M. 50 Pf.
- II. Band, No. 5. **Bechtel, Fr.**, *Die einstämmigen männlichen Personennamen des Griechischen, die aus Spitznamen hervorgegangen sind*. 4. (85 S.) 1898. 5 M. 50 Pf.
- II. Band, No. 6. **Meyer, Wilhelm** (aus Speyer), *Die Spaltung des Patriarchats Aquileja*. 4. (37 S.) 1898. 2 M. 50 Pf.
- II. Band, No. 7. **Schulten, Adolf**, *Die römische Flurteilung und ihre Reste*. Mit 5 Figuren im Text und 7 Karten. 4. (88 S.) 1898. 5 M.
- II. Band, No. 8. **Roethe, Gustav**, *Die Reimreden des Sachsenspiegels*. 4. (110 S.) 1899. 8 M.
- III. Band, Nr. 1. *Die charakteristischen Unterschiede der Brüder van Eyck* von **Otto Seek**. 4. (77 S.) 1899. 5 M.
- III. Band, Nr. 2. **Marquardt, J.**, *Eränsahr nach der Geographie des Ps. Moses Xorenaci*. Mit historisch kritischem Kommentar und topographischen Excursen. 4. (358 S.) 1901. 30 M.
- III. Band, No. 3. **Achelis, H.**, *Die Martyrologien, ihre Geschichte und ihr Wert*. 4. (VIII u. 247 S.) 1900. 16 M.
- IV. Band, No. 1. **Tüselmann, Otto**, *Die Paraphrase des Eutokios zu Oppians Kynegitika*. 4. (43 S.) 1900. 4 M.
- IV. Band, No. 2. **Schulten, Adolf**, *Die Mosaikarte von Madaba und ihr Verhältnis zu den ältesten Karten und Beschreibungen des heiligen Landes*. Mit 3 Kartenbildern u. 1. Figurentafel. 4. (121 S.) 1900. 10 M.
- IV. Band, No. 3. **Wilamowitz-Moellendorf, U. v.**, *Die Textgeschichte der griechischen Lyriker*. 4. (121 S.) 1900. 8 M.
- IV. Band, No. 4. **Rahfs, Alfred**, *Die Berliner Handschrift des sahidischen Psalters*. Mit drei Lichtdrucktafeln. 4. (154 S.) 1901. 11 M.
- IV. Band, No. 5. **Meyer, Wilhelm** (aus Speyer), *Der Gelegenheitsdichter Venantius Fortunatus*. 4. (140 S.) 1901. 9 M.
- IV. Band, No. 6. **Lüders, Heinrich**, *Über die Grantharecension des Mahābhārata*. (Epiische Studien I). 4. (91 S.) 1901. 6 M.
- V. Band, No. 1. **Roethe, Gustav**, *Brentanos 'Ponce de Leon', eine Saecularstudie*. 4. (100 S.) 1901. 6 M. 50 Pf.
- V. Band, No. 2. **Wellhausen, J.**, *Die religiös-politischen Oppositionsparteien im alten Islam*. 4. (99 S.) 1901. 6 M. 50 Pf.
- V. Bd. No. 3. *Neuarabische Volkspoesie* gesammelt und übersetzt von **Enno Littmann**. 4. (159 S.) 1901. 12 M.
- V. Bd. No. 4. **Pischel, R.**, *Materialien zur Kenntnis des Apabhramśa*. Ein Nachtrag zur Grammatik der Prākrit-Sprachen. 4. (86 S.) 1902. 6 M.
- V. Bd. No. 5. **Schulze, Wilhelm**, *Zur Geschichte lateinischer Eigennamen*. Im Druck.
- VI. Bd. No. 1. **Kraus, Carl**, *Metrische Untersuchungen über Keimbots Georg*. Mit zwei Excursen. 4. (225 S.) 1902. 16 M.
- VI. Bd. No. 2. **Meyer, Wilhelm** (aus Speyer), *Heribicus Stephanus über die Regii Typi Graeci*. Mit 2 Tafeln. 4. (32 S.) 1902. 3 M.

- VI. Bd. No. 3. **Möller, Hermann**, *Ein hochdeutsches und zwei niederdeutsche Lieder von 1563—1565 aus dem siebenjährigen nordischen Kriege*. Mit einem Anhang: *Deutsche Lieder aus der Grafenfehde*. 4. (67 S.) 1902. 5 M.
- VI. Bd. No. 4. **Pietschmann, R.**, *Pietro Sarmiento's Geschichte des Inkareiches*. Im Druck.
- VII. Bd. No. 1. **Bonwetsch, N.**, *Die Theologie des Methodius von Olympos*. 12 M.
- VII. Bd. No. 2. **Wilmanns, W.**, *Der Untergang der Nibelunge in alter Sage und Dichtung*. 3 M.

MATH.-PHYSIKAL. KL. NEUE FOLGE.

- I. Band, No. 1. **Koenen, A. v.**, *Ueber Fossilien der Unteren Kreide am Ufer des Meer in Kamerun*. Mit 4 Tafeln. 4. (48 S.) 1897. 5 M.
- Nachtrag dazu. 4. (S. 49—65 mit Tafeln V—VII.) 1898. 3 M.
- I. Band, No. 2. **Brendel, Martin**, *Theorie der kleinen Planeten*. Erster Teil. 4. (171 S.) 1898. 16 M.
- I. Band, No. 3. **Schur, W.**, *Ableitung der Oerter des Mondes gegen die Sonne aus heliometrischen Messungen von Scherering ausgeführt auf der Sternwarte zu Göttingen während der partiellen Sonnenfinsternis von 1890 Juni 16/17* (Beobachter: Schur, Ambrohn und Hayn) und von 1891 Juni 16/17 (Beobachter: Schur). Mit 3 Plänen der Sternwarte nebst Verzeichniss der grossen Instrumente. 4. (26 S.) 1898. 3 M.
- I. Band, No. 4. **Schur, W.**, *Vermessung der beiden Sternhaufen η und α Persei mit dem sechszölligen Heliometer der Sternwarte zu Göttingen verbunden mit einer Uebersicht aller bis zum Jahre 1900 ausgeführten Instrumentaluntersuchungen*. Mit einer Sternkarte. 4. (88 S.) 1900. 9 M.
- II. Bd. No. 1. **Wiechert, E.**, *Theorie der aperiodischen Seismographen*. 4. (128 S.) 1900. 8 M.
- II. Bd. No. 2. **Kramer, Julius**, *Theorie der kleinen Planeten. Die Planeten vom Herkules Typus*. 4. (153 S.) 1902. 15 M.
- II. Bd. No. 3. **Furtwängler, Ph.**, *Ueber das Reciprocitätsgesetz der 10ten Potenzen der irrationellen Zahlenkörpern, wenn eine rationale Primzahl bedeutet*. 4. (32 S.) 1902. 3 M.

BRITISH MUSEUM CATALOGUE.

SECTION D.

OLD FOREIGN BOOKS.

PART VIII.

London:

PRINTED BY WILLIAM CLOWES AND SONS, LIMITED,
STAMFORD STREET AND CHARING CROSS.

1881.

