Abhandlungen

der

physikalischen Klasse

der

Königlich - Preuſsischen

Akademie der Wissenschaften

aus

den Jahren 1812 — 1813.

Berlin
in der Realschul - Buchhandlung
1816.

Inhalt.

Muthmaſsung
über
die Kristallisirung der primitiven Gebürge.

Von Herrn Gerhard *).

Wenn man die Steinarten, aus welchen die primitiven Gebürge, mit Ausschluſs der Uebergangsgebürge, bestehen, auch nur mit halber Aufmerksamkeit betrachtet, so wird man in solchen das ihnen ganz eigenthümliche kristalline Gewebe bald erkennen. An dem Granit, dem Gneuſs, dem Sienit, dem Gabro, dem Chlorit, den Urtrapparten, dem Glimmerschiefer, dem Urgips, dem Urkalk, dem noch etwas räthselhaften Weiſsstein des Herrn Werner, fällt diese Struktur gleich in die Augen; allein auch bei dem Porphyr, dem Serpentin, dem Thonschiefer fehlt sie nicht. Ich habe die Ehre gehabt, vor einiger Zeit der Königlichen Akademie Beweise vorzulegen, daſs der Hornstein, Pechstein, Thon- und Feldspath, Porphyr, zu ihrer Grundmasse einen mehr oder weniger dichten Feldspath, also einen kristallinen Körper haben, und die in diese Grundmasse eingesprengte Quarz, Feldspath, Glimmer, Hornblende-Theile offenbare Kristalle sind. An dem Serpentin läſst sich besonders durch ein bewaffnetes Auge in seiner Grundmasse, dem Speckstein, die kristalline Bauart nicht verkennen, und die häufig in ihm vorkommenden Granaten, Talk, Amianth und Glimmer sind wahre Kristallen. Der Thonschiefer entfernt sich am meisten von dem Kristallgewebe. Allein, nicht zu erwähnen, ob man den Thonschiefer überhaupt nicht

*) Vorgelesen den 3ten August 1812.

für einen in der Folge der Zeit aufgelösten Glimmerschiefer halten muſs, da Feldspath und Glimmer sich bekanntermaſsen so leicht in Thon verwandeln, so finden sich auch in dieser, besonders an der Grenze der primitiven Gebürge vorkommenden Steinart, häufig Glimmer, Quarz und Hornblende eingesprengt.

Auſserdem kommen in den Schichten der eigentlich primitiven Gebürge noch eine Menge anderer isolirter Kristalle vor, welche von den Steinarten dieser Schichten mehr oder weniger verschieden sind, wohin die verschiedenen Arten des Schörl, Turmalin, Granat, Tremolit, Corund, Epidot, Idocrase, und mehrere Arten der sonst sogenannten Edelsteine gehören. Man kann also mit Wahrheit behaupten, daſs alle primitive Gebürge, mit denen unsere Erdkugel bedeckt ist, eine ungeheure Kristallmasse darstellen. In einer der Königlichen Akademie in dem Jahre 1778 vorgelesenen und in der Folge besonders abgedruckten Abhandlung über Granit und Gneus und die daraus bestehenden Gebürge, stellte ich zuerst den Satz auf, daſs aller Granit, zu welchem man damals auch, ob mit Recht oder Unrecht, will ich hier nicht untersuchen, den Sienit, Gabro und Grünstein rechnete, durch Kristallisation entstanden sey, und ich hatte das Vergnügen, in dem ersten Theile der Alpenreise des Herrn von Saussure, welcher 1778 herauskam, zu sehen, daſs dieser berühmte und höchst scharfsinnige Geognost eben dies behauptet.

In der Folge der Zeit ist diese Meinung fast allgemein angenommen worden, und unsere berühmtesten neuern Geognosten, ein von Humboldt, von Buch, Hausmann, Heim, Jordan, Freisleben, Ebell sind derselben beigetreten. So ausgemacht also der Satz ist, daſs alle Steinarten der primitiven Gebürge Ausgeburten der Kristallisation sind, so schwer hält es, die Art und Weise wie diese Kristallisation erfolget ist, genau anzugeben, und die Meinungen der Naturforscher sind hierüber verschieden. Ehe ich mich indeſs in deren Zergliederung einlasse, wird es nöthig seyn, noch folgendes über diese Steinarten zu bemerken.

Die verschiedenen Massen, aus denen die primitiven Gebürge zusammengesetzt sind, bestehen jede derselben aus keiner einfachen Steinart, sondern sie sind ein Gemenge mehrerer Steinarten, welche, ohne ein bemerkbares Bindemittel, bald in einem körnigen, bald in einem blättrichschiefrigen Gefüge mit einander verbunden sind. Die Lagen von Urgips, Urkalk und von Dolomit und Quarz scheinen zwar hierin eine Ausnahme zu machen.

Allein man findet sie doch selten ganz rein, und es ist bekannt, daſs Glimmer, Epidot, Strahlstein, Schörl, Tremolit und andere dergleichen Steinarten in ihnen häufig vorkommen. Ausgebildete Kristalle der einfachen Steinarten, aus welchen diese Gemenge bestehen, kommen, Höhlungen ausgenommen, selten in ihnen vor. Sie gleichen daher den durch Kunst eingedickten Salzmassen, und lehren dadurch, daſs sie schnell und in einem concentrirten Zustande gebildet werden.

Die einfachen Steinarten, welche die obigen Gemenge bilden, sind Quarz, Feldspath, Glimmer, Hornblende, Chlorit, Smaragdit, Kalk, Speckstein und andere, von denen bald zwei, bald drei Arten das Gemenge dieser Gebürgsmassen ausmachen. Diese Steinarten selbst erscheinen in diesem Gemenge in Rücksicht ihrer Quantität auf verschiedene Art, einige sparsam, andere häufiger. Zu diesen letzten gehören Quarz, Feldspath und Glimmer, und wenn man bedenkt, daſs der Feldspath in dem Granit, in dem Sienit, in dem Porphyr die groſse Oberhand hat, so sollte man fast glauben, es sey diese Steinart am häufigsten in den primitiven Gebürgen verbreitet, falls sie nicht etwa von dem Glimmer, wegen der häufigen Glimmerschiefer und Gneuslagern, noch übertroffen wird.

Aeuſserst merkwürdig ist es, daſs diese Gemenge und die einfachen Steinarten, aus denen sie bestehen, in allen bisher beobachteten primitiven Gebürgen der Erdkugel in der Hauptsache einerlei Beschaffenheit haben, welches klar beweiset, daſs die Ursachen, denen sie ihr Daseyn zu danken haben, auf unserm ganzen Planeten verbreitet gewesen sind und auf Eine Art gewirkt haben.

Daher findet man auch, daſs die Lager von derselben Gebürgsart, selbst in sehr groſsen Ausdehnungen, in ihrem Gemenge und andern Eigenschaften wenig Abweichendes zeigen, auch daſs die Ordnung, in welcher sie erscheinen, oft zurückkehre, wovon die schönen von Herrn Ebell in der Schweiz, besonders am Gotthard und andern Orten, angestellten Beobachtungen den Beweis geben. Hiebei findet sich indeſs der merkwürdige Umstand, daſs wenn sich eines von diesen ausgedehnten Hauptlagern einem andern von anderm Gemenge nähert, ein mehr oder weniger deutlicher Uebergang des einen in das andere vorkommt. So wird der Granit meist aderich, wenn er sich dem Gneuſse nähert, und dieser ist in der Nachbarschaft des Granits körniger und grobschiefriger als in der weitern Fortsetzung, und wird immer dünnschiefriger, je mehr er sich dem Glimmerschiefer nähert, so wie dieser in der Nähe des Gneufses mehr Quarz bei sich führt, und in gröfserer Entfernung von dem Gneufse auch reicher an Glimmer wird. Ja was noch mehr, man findet mitten in den Lagern der einen Gebürgsart Nester einer andern, ohne alle Ablösung. Es ist nicht selten, dafs dergleichen Nester von Granit mitten im Gneufse und umgekehrt vorkommen.

Chemisten vom ersten Range, wie ein Klaproth, Vauquelin und andere haben die einfachen Steinarten dieser Gemenge mit Genauigkeit und Scharfsinn zerlegt, und aus diesen Zerlegungen wissen wir, dafs ohne auf die parasitischen Steine zu sehen, welche man bei ihnen findet, Kiesel, Alaun, Kalk und Bittererde, Eisen, Mangam, Kali und Natrum ihre Grundbestandtheile ausmachen. Unter den Elementarerden ist die Kieselerde unstreitig die häufigste. Die grofse Menge von Quarz, welche allein $97\frac{1}{2}$ p. C. davon enthält, und dessen häufiges Vorkommen, nicht allein in einzelnen beträchtlichen Lagern, sondern besonders auch in dem Granit, Gneufs und Glimmerschiefer, können davon zum Beweise dienen; besonders wird dies aber auch dadurch aufser Zweifel gesetzt, dafs, den Gips und Kalk ausgenommen, bei den übrigen einfachen Steinarten dieser Gemenge die Kieselerde vorwaltet. So enthält zum Beispiel blofs der Feldspath $66\frac{3}{7}$ p. C., der Glimmer 47 p. C., Hornblende 42 p. C. Kieselerde. Ja selbst die Kalk- und Dolomitlager sind nicht von Kieselerde frei. Auf die Kieselerde wird in der Menge wahrscheinlich die Kalkerde, auf diese die Alaunerde folgen, und die Bittererde ist unstreitig in der geringsten Menge vorhanden.

Unter den Metallen findet sich blofs Eisen und Mangam in diesen Gebürgsarten, indem die übrigen Metalle, welche in Lagern, auf Gängen, in Nestern in denselben vorkommen, wohl offenbar von späterer und nicht von gleichartiger Bildung mit den Lagern sind. Das Eisen erscheint schon in den ältesten Lagern, besonders im Glimmer, in welchem es 15 p. C. ausmacht; das Mangam aber ist in dem Feldspath und andern nur in äufserst geringer Menge verbreitet.

Einer der merkwürdigsten Bestandtheile der primitiven Gebürgslager ist unstreitig das Kali und das Natrum. Letzteres ist bisher nur in einem, in dem Gabro, bekannt geworden, indem der Seaussorit, welcher einen Gemengtheil desselben ausmacht, 5 p. C. davon enthält, wogegen in dem Glimmer und Feldspath, welche fast in allen primitiven Gebürgsarten sich befinden, respect. 13 oder 12 p. C. Kali gefunden werden. Wir sind diese höchst wichtige Entdeckung unserm würdigen Mitbruder Herrn Klaproth schuldig, und es ergiebt sich aus ihr überzeugend, daſs die unorganische Natur eben das hervorbringen kann, was man sonst nur als Wirkung der organischen ansahe. Diese Entdeckung wird in ihren Folgen gewiſs noch weiter sehr fruchtbringend seyn, vorzüglich wenn sich die metallische Natur dieser Salze ferner bestätiget. Man muſs in der That über die groſse Masse des Kali in den primitiven Gebürgen erstaunen. Ein Kubikfuſs Granit wiegt etwa 170 Pfund, und man kann im Durchschnitt annehmen, daſs von diesem Gewichte der Quarz $\frac{3}{10}$, der Feldspath $\frac{6}{10}$, und der Glimmer $\frac{1}{10}$ betragen. Rechnet man nach den neuesten und genauesten Zerlegungen dieser drei Steinarten ihre Bestandtheile, so enthält ein Kubikfuſs Granit

Kieselerde	120,70	Pfund.
Alaunerde	31,25	—
Kalkerde	1,27	—
Eisen	2,63	—
Kali	14,40	—

In einem Kubikfuſs Glimmerschiefer, welcher meist aus Glimmer besteht, und welcher 13 p. C. Kali enthält, muſs die Menge dieses Salzes noch gröſser seyn.

An brennbaren Substanzen scheint es, dem ersten Ansehn nach, den primitiven Steinlagern bei ihrer Entstehung ganz gefehlt zu haben, indem es noch nicht ausgemacht ist, ob die hin und wieder in ihnen befindliche und eben nicht sehr häufige Kohlenblende und Reiſsblei vielleicht nicht schon spätere Entstehungen sind.

Allein bei genauer Untersuchung läſst sich offenbar darthun, daſs bei ihrer ersten Bildung auch der Kohlenstoff nicht gefehlt habe. Einmal findet er sich in der Hornblende. Ich habe ferner in einer andern der Königlichen Akademie vorgelesenen Abhandlung erwiesen, daſs er in dem Glimmer anzutreffen sey, weil, wenn man ein ganzes Stück Glimmer mit Kali röstet, dieses seinen metallischen Glanz und seine Biegsamkeit verliert, beides aber wieder erhält, wenn es zwischen Kohlenpulver geglüht wird; und endlich, wenn kein Kohlenstoff in der Masse, aus der sich diese Steinlager formirt, befindlich gewesen wäre, wo könnte denn die groſse Menge Kohlensäure herkommen, welche man in den Urkalklagern antrifft, und welche beinahe die Hälfte ihres Gewichts beträgt? Diese Beobachtungen beweisen also klar, daſs es der ersten Masse auch nicht an diesem Stoff könne gefehlt haben, und es giebt uns dies einen zweiten Beweis ab, daſs die organische und unorganische Natur einerlei Produkte liefern können.

Dies ist eine kurze und gedrängte Uebersicht der primitiven Gebürgsarten, zu der sich noch viele und zum Theil nicht unwichtige Dinge hinzufügen lieſsen, wenn es Zeit und Ort erlaubten; ich habe aber nur diejenigen ausgehoben, welche zu Erläuterung und zu Beweisen des Hauptgegenstandes dieser Abhandlung dienen können. Denn nun entsteht die wichtige Frage: Wie hat sich diese ungeheure Kristallmasse gebildet? Die Naturforscher, ausgehend von dem Grundsatze, es könne sich keine Kristallisation ohne eine vorhergegangene Auflösung des zu kristallisirenden Körpers ereignen, verfielen auf zwei ganz entgegengesetzte Meinungen. Einige nahmen das Feuer, andere das Wasser zum Auflösungsmittel an, und so wie Moro, Leibnitz, Buffon und mehrere, besonders aus der englischen und italiänischen Schule, zu dem Feuer ihre Zuflucht nehmen, so suchen fast alle neuere, und besonders die deutschen und nordischen Geognosten diese groſse Erscheinung aus einer Auflösung im Wasser herzuleiten.

Betreffend das Feuer, so glaube ich in meiner oben angeführten Abhandlung über Granit und Gneuſs schon hinlänglich erwiesen zu haben, daſs diese groſse Kristallisation nicht auf Rechnung dieses mächtigen Elements geschoben werden könne, ein Umstand, welcher durch das Verhalten dieser Steinarten im künstlichen Feuer klar wird. Ein Stück Granit, ein Stück Gneuſs ins Schmelzfeuer gebracht, zeigt den Feldspath zu einem feinlöcherigen, milchweiſsen, halb durchsichtigen, den Glimmer zu einem schwarzen Glase verwandelt, und der Quarz bleibt völlig ungeschmolzen zurück, hat aber seine Härte, Durchsichtigkeit und Glanz verloren. Man kann kein Stück frischer, veralteter oder gar schon in Auflösung begriffener Lava vorzeigen, welches mit den Steinarten der primitiven Gebürge übereinkomme. Auch die höchst reguläre schichtenförmige Bauart dieser Gebürge verträgt sich nicht mit den vom Feuer gebildeten Gebürgen, und aus diesen und andern Gründen ist es wohl unbezweifelt, daſs man diese groſse allgemeine Kristallisation nicht dem Feuer beilegen kann.

Auch die Auflösung dieser Gebürgsmassen im Wasser und die daraus erfolgte Kristallisirung hat mit sehr groſsen und fast ganz unüberwindlichen Schwierigkeiten zu kämpfen. Zuvörderst erschrickt man über die unermeſsliche Menge Wasser, welche dazu erfordert wird. Diese Quantität Wasser ist schon enorm, wenn man bedenkt, daſs sie die höchsten Berge, unter denen ich nur den Mont-Blanc, der über 14,000 Fuſs über dem Meerspiegel erhaben ist, anführen will, weil die noch höheren Amerikanischen und Afrikanischen Berge ihre wahre Höhe vulkanischen Wirkungen vielleicht zum Theil verdanken, bedeckt haben soll. Allein diese schon ungeheure Wassermenge vermehrt sich noch sehr ansehnlich, wenn man erwägt, daſs die Gebürge bei ihrer ersten Entstehung viel höher als jetzt gewesen seyn müssen, welches die mit ihren Trümmern bedeckten Plänen, und der an ihren Füſsen und in ihren Thälern beſindliche Schutt hinlänglich beweisen.

Wollte man auch sagen, daſs die Gebürge erst nach erfolgter Kristallisation hervorgebracht wären, so wird eine andere Ansicht zeigen, daſs doch eine ganz ungeheure Menge Wasser zu deren Hervorbringung nöthig gewesen wäre. Es ist wahr, die Kiesel, Kalk, Alaun, Bittererde, das Eisen sind im Wasser auflösbar; allein welche Quantitäten werden dazu erfordert? Die Chemisten behaupten, daſs, um einen Theil Kieselerde im Wasser aufzulösen, 1000 Theile Wasser, eben soviel bei der Alaunerde, bei der Bittersalzerde noch mehr, und bei der Kalkerde 500 Theile erforderlich wären. Nimmt man nun bloſs die oben bemerkte Quantität dieser vier Erden in einem Kubikfuſs Granit an, so würde zu ihrer Auflösung ein Gewicht Wasser von 151500 Pfund nöthig seyn, ohne auf das Eisen und Kali zu rechnen. Um also die Bestandtheile eines Kubikfuſses Granit im Wasser aufzulösen, würden, den Kubikfuſs Wasser zu 66 Pfund gerechnet, 2296 Kubikfuſs Wasser gebraucht. Ja diese Quantität ist vielleicht noch viel zu geringe, wenn man bedenkt, daſs Herr Klaproth in 29000 Gran der siedenden Springquelle von Reikum nur 9 Gran Kieselerde, und Herr Black in eben dieser Quantität desselben Wassers nur $10\frac{4}{5}$ Gran Kieselerde gefunden hat. Wo ist nun diese ungeheure Quantität Wasser, welche unsern jetzigen irdischen Wasservorrath so sehr übersteigt, hergekommen? Dies ist ein unauflösbares Problem, und so sehr auch De la Methrie und andere ihren Witz und Scharfsinn aufgeboten haben, dieses Wasser zu vertilgen, so ist es doch, ohne Wunder auf Wunder anzunehmen, noch keinem möglich gewesen, diese Frage zu beantworten. Und doch muſste eine groſse Verminderung dieses Auflösungsmittels erfolgen, wenn die Kristallisation des Aufgelösten vor sich gehen sollte. Ja sie muſste sehr schnell erfolgen, weil diese Steinarten nur Kristalmassen, und selten ausgebildete Kristalle darstellen.

Es hat ferner noch keiner der Herren Neptunisten behauptet, dafs Quarz als Quarz, Feldspath als Feldspath, Glimmer als Glimmer in diesem sogenannten Urmeer aufgelöst gewesen sey, sondern dafs in dieser Auflösung sich nur die Bestandtheile dieser Steinarten befunden hätten, dafs sich diese mit einander vereinigt, sodann unauflösbar geworden und zu Boden gefallen wären. Allein diese Steinarten sind in ihrer eigentlichen Schwere verschieden, konnten also nicht ohne alle Ordnung der Lage sich mit einander vereinigen, wie wir doch in allen bemerken. Wir finden ferner in demselben Zuge von Gebürgen nicht blofs ein Granitlager, auf welchem Gneufs, nicht blofs ein Lager von diesem, auf welchem Glimmerschiefer, nicht blofs ein Glimmerschieferlager, auf welchem ein Thonschieferlager ruhet, sondern diese Lager kommen, und zwar öfters in einer bewundernswürdigen Ordnung wieder; ein Umstand, der sich aus einer solchen allgemeinen Wasserbedeckung und Auflösung gar nicht erklären läfst. Und so könnte ich, wenn es die Zeit erlaubte, noch mehrere grofse Schwierigkeiten anführen. Vielleicht entgeht man dieser Schwierigkeit, wenn auch nicht ganz, doch gröfstentheils, und tritt der Wahrheit näher, wenn man behauptet, dafs unser Planet bei seinem ersten Entstehen ein Gemenge von blofsen Gasarten, besonders von Sauer- Stick- Wasser- und Kohlenstoff verbunden mit Ether und elektrisch- magnetischer Materie gewesen ist, dafs diese Gasarten vielleicht durch grofse elektrische Wirkungen sich coagulirt, dafs aus ihnen die Elemente der Steinarten, welche wir in den primitiven Gebürgen finden, also Kiesel, Alaun, Kalk, Bittererde, Kali, Eisen, Kohle und Wasser sich gebildet, dafs in dieser breiartigen Masse sich nach den Gesetzen der Affinität und Homogeneïtät die Theilchen angezogen und so diese ungeheure Kristalmasse hervorgebracht haben.

Wenn man diesen Gedanken näher zergliedert, auch mit den Erscheinungen, welche uns die Natur darbietet, vergleicht, so hat er viel Wahrscheinlichkeit.

Einmal beweisen die Versuche und Beobachtungen von **Dalton**, dafs Gasarten, besonders obige, ihrer eigenthümlichen Schwere ungeachtet, sich mit einander mengen, ohne sich chemisch zu mischen. Es ist ferner bekannt, dafs Gasarten in einen concreten Zustand übergehen können. So bildet sich Wasser aus Sauer- und Wasserstoffgas. In den Körpern der Pflanzen gehen die Gasarten, von denen sie genährt werden, nach den herrlichen Vegetations-Versuchen des Herrn **Schrader**, in einfache Erden über, und erzeu-

erzeugen auch Eisen und Mangam, also eben die Metalle, welche wir in der Mischung der primitiven Steinarten antreffen. Am deutlichsten beweiset diesen Uebergang die äufserst merkwürdige Beobachtung von Breislack, welcher fand, dafs durch die Gasarten, welche aus der einige Fufs hoch in der Kirche zu Torre del Greco eingedrungenen Lava hervorbrachen, auf dem Gesimse derselben wahre Pyroxen Kristallen gebildet worden, welche nicht allein die Form der gewöhnlichen Pyroxen Kristalle, sondern auch ihre Bestandtheile hatten, dafs also Kiesel, Alaun, Kalk, Bittererde und Kali aus ihnen entstanden, und sich in einer ausgebildeten Kristallform wieder vereinigt hatten.

Es ist auch nicht durchaus nothwendig, bei den Kristallisationen immer einen gänzlich flüssigen Zustand anzunehmen; es ist schon hinlänglich, wenn sich die Rudimente der Kristalle nur in einer Masse befinden, deren Theile verschiebbar sind. Die Beweise davon liegen in der Natur klar vor Augen. In der dichten Masse der Porphyre zeigen sich reine und scharf ausgebildete Kristalle von Quarz und Feldspath. Mitten in der eben so dichten und festen Substanz des Basalt kommen dergleichen Kristalle von Augit und Magneteisenstein vor. In den Quarzkristallen sind Kristalle von Feldspath, Titan, Strahlstein, Glimmer, Amiant, Schörl nicht selten. De la Methrie hat überdem hinlänglich gegen Hauy erwiesen, dafs alle Kristalle aus triangulären, oder quadratischen, oder rhomboidalischen Blättern bestehen, welche durch ihre Verbindung alle Arten von Kristallen bilden, und er hätte seinen Gründen, welche auch der scharfsinnige Bertholet für richtig erkennt, noch beifügen müssen, dafs man dergleichen Blätter häufig auf grofsen und rein gestalteten Quarz- Feld- Kalk- Flufspath und auch Bleiglanz-Kristallen mit blofsen Augen erkennen kann. Wenn also bei dem Uebergange der Gasarten in Erden dergleichen Blätter entstanden, so konnten sich dieselben in einer Masse von verschiebbaren Theilen leicht mit einander vereinigen.

Endlich lassen sich auch aus dieser Theorie mehrere Erscheinungen, welche wir an den primitiven Gebürgsarten und sonst wahrnehmen, leichter erklären.

In diesen Gebürgsarten sind ausgebildete Kristalle derjenigen Steinarten, aus denen sie gemengt sind, selten, vielmehr stellen sie blofse Kristallmassen dar, den Kristallmassen ähnlich, wenn Salzlaugen stark eingedickt werden. Dies beweiset, dafs sie schnell entstanden sind, und wir beobachten bei dem Uebergang des Sauer- und Wasserstoffes in Wasser, dafs diese Veränderung auch augenblicklich erfolge.

Wenn wir annehmen, dafs diese Coagulirung der Gasarten nicht auf einmal über die ganze Kugel, sondern nach und nach erfolgt sey, vielleicht vom Centro angefangen, und sich von da Schichtenweise fortgepflanzt habe, so läfst sich die Bildung der Schichten weit leichter als aus einem Niederschlage aus Wasser erklären.

Ob sich gleich die Gasarten mengen, ohne sich zu mischen, so ist es doch auch möglich, dafs dieses Gemenge nicht überall gleichmäfsig gewesen ist. Es ist ferner wohl als ausgemacht anzunehmen, dafs die verschiedenen Elementar-Erden nicht einerlei Gasart zu ihrer Entstehung bedürfen, oder dafs doch wenigstens das quantitative Verhältnifs zweier Gasarten, welche eine solche Erde hervorbringen kann, verschieden sey. Aus diesen beiden Umständen zusammen wird man die Verschiedenheit der primitiven Schichten und das Wiederkommen derselben Steinart in mehreren Schichten beurtheilen können.

Herr von Humboldt hat,[1] in seiner scharfsinnigen Abhandlung über die Entbindung des Wärmestoffs, als geognostisches Phänomen betrachtend, bewiesen, dafs bei dieser Kristallisirung sehr viel Wärmestoff frei werden müsse, und daraus die Entstehung der natürlichen Erdwärme und die räthselhafte Erscheinung von Tropenpflanzen und Tropenthieren in den kalten Polargegenden hinlänglich erkläret. Allein diese Erscheinung mufs nothwendig bei der Absonderung aus Gasarten noch weit stärker werden, und der Grad der Erdwärme sich noch viel länger, als bei einer Kristallisirung aus Wasser erhalten können.

Auch vermeidet man bei dieser Theorie die unendliche Schwierigkeit des grofsen Wasservorraths und dessen Vertilgung von der Erde.

Es liefsen sich noch mehrere Umstände und Beobachtungen anführen, welche die vorgetragene Hypothese in ihrer Wahrscheinlichkeit bestätigen und erweisen können, dafs bei Bildung unsers Planeten der Chemismus viel stärker als der Neptunismus gewirkt habe. Allein ich würde der Zeit, welche noch zu andern Vorlesungen bestimmt ist, zu viel entziehen, und ich eile daher, nur noch eine heilige Pflicht, zu welcher der heutige Tag aufruft, mit gerührtem Herzen zu erfüllen.

Die Königl. Akademie feiert durch die heutige Versammlung den 43sten Geburtstag ihres allerdurchlauchtigsten Protectors. Gott hat uns diesen herrlichen König, diesen milden gerechten Beherrscher, diesen treuen Vater seines Volks, diesen Pfleger und Beschützer der Wissenschaften und Künste, bei so manchen schweren Widerwärtigkeiten glücklich erhalten, und läfst Ihn heute ein neues Lebensjahr in Gesundheit und Kraft anfangen. Dieses frohe, für den ganzen Staat, für die Akademie so erwünschte, so wichtige Ereignifs, giebt uns einen überzeugenden Beweis, dafs die mächtige und gnädige Vorsicht über unsern Staat auf eine ausgezeichnete Art wache, und flöfst uns frohe Hoffnungen für die Zukunft ein. Gott erhalte den König, er vereinige in Ihm und dem theuren Erben seines Thrones alle die reichen Segnungen, welche er Ihren grofsen Ahnherren, jenem unsterblichen Kurfürsten, jenem ewig unvergefslichen Könige, einzeln zutheilte. Das Haus der grauen Hohenzollern wachse immerdar, und herrsche grofs, mächtig und herrlich bis an das Ende der Tage!

Ueber

das Kalksteinlager zu Reichenstein.

Von Herrn Gerhard *).

Zu den merkwürdigen geologischen in den primitiven Gebürgen vorkommenden Erscheinungen gehören auch die Kalksteinlager, welche in den Gneuſs- und Glimmerschiefer-Schichten dieser Gebürge häufig und öfters in groſser Ausdehnung sich zeigen. Von Saussure und Ebell haben sie in den Alpen, Ramond in den Pyrenäen, Fichtel in den Carpathen, von Herrmann in dem Ural, Georgi im Altai, Charpentier im Erzgebürge, Andrada in Schweden, von Buch und Hausmann in Norwegen häufig beobachtet; auch in kleinen primitiven Gebürgszügen sind sie von mehreren Geologen angetroffen worden. Dieser seiner Lagerung wegen mit Recht benannte Urkalkstein unterscheidet sich von dem Uebergangs- und Flötzkalkstein vollkommen deutlich. Er ist gewöhnlich von einer schönen, gelblich-gräulich- grünlich- selten röthlich weiſsen Farbe, und überhaupt meist einförmig, inwendig glänzend, meist von Perlmutterglanz, hat blättrigen Bruch, welcher bei dem feinkörnigen sich etwas in das schlittrige ziehet, erscheint immer in gröber oder feiner abgesonderten körnigen Stücken, so daſs er das Ansehen einer eingedickten Salzmasse hat, und deshalb auch von einigen salinischer Kalkstein genannt wird, und ist allezeit mehr oder weniger, besonders an den Kanten durchscheinend.

Man hat ferner in diesem Kalkstein noch keine Spuren organischer Ueberreste bemerkt, welche in dem Uebergangskalkstein, besonders aber in

*) Vorgelesen den 7ten Januar 1813.

dem Flötzkalke so häufig erscheinen. Dagegen führt er mehrere andere einfache Steinarten, als Strahlstein, Asbest, Tremolith, Thallit, Granaten, Quarz, Turmalin, Scapolith, besonders aber Glimmerblätter und Speckstein in sich, ja diese beiden letzten Steinarten, und besonders der Glimmer, scheinen charakteristisch bei ihm zu seyn. Oefters sind diese Kalklager auch erzhaltig, und Andrada führt elf Arten von Erzen und 15 Arten von einfachen Steinen an, welche auf dem Kalklager bei Sala vorkommen. Sein eigenthümliches Gewicht ist etwas gröſser als bei dem gemeinen, und er hat noch die besondere Eigenschaft, daſs er im Finstern gerieben oder in Pulver auf ein heiſses Blech gestreuet, mit einem weiſsbläulichen Schein phosphorescirt. Dolomieu fand zuerst in einigen Arten von diesem Steine Talkerde, welche in der Folge auch von andern darin gefunden worden, und man hat deshalb eine besondere Untergattung von derselben gemacht, und ihr den Namen Dolomit gegeben. Ich habe Urkalksteine aus der Schweiz, aus Schweden, aus den Pyrenäen, aus den Carpathen und von mehreren Orten untersucht, und in denselben allezeit mehr oder weniger Kalk und Kieselerde gefunden. Die Beimischung dieser beiden Erden scheint mir also für den Urkalkstein wesentlich zu seyn, und daraus wird sich auch erklären lassen, woher die fast beständige Mengung desselben mit Speckstein entsteht, und warum der Urkalkstein, wenn er zu Kalk gebrannt wird, eine geringere Portion Sand verlangt, um eine recht bindende Mauerspeise zu geben. Von diesem jetzt kürzlich beschriebenen Urkalkstein kommen auch an mehreren Orten in dem Schlesischen Gebürge, und zwar sowohl in den eigentlichen Sudeten, als auch in dem Mährisch- schlesischen Gebürge an mehren Orten mehr oder minder mächtige und ausgedehnte Lager vor, von welchen unser würdiger Mitbruder, Herr von Buch, in seinen vortrefflichen geognostischen Bemerkungen bereits interessante Nachrichten mitgetheilt hat. Unter diesen Kalklagern sind die merkwürdigsten das bei Schmiedeberg und bei Rothzeche im Fürstenthum Jauer, und das bei Reichenstein im Fürstenthum Münsterberg, und dies wegen ihrer Ausdehnung und wegen der beträchtlichen Menge anderer Mineralien, welche in ihnen brechen. Die nähere Betrachtung des letztern, nehmlich des Reichensteiner, wird den Inhalt dieser Vorlesung ausmachen.

Das Reichensteiner Gebürge besteht aus dem in dem Schlesischen primitiven Gebürge so sehr vorherrschenden Glimmerschiefer, welcher sich von dem Schneeberg in der Grafschaft Glaz auf eine sehr groſse Fläche dieser Provinz verbreitet und über das Gebürge bei Landeck und über Reichenstein, bis in die Neifser Ebenen hinziehet, so dafs der östliche Abhang aller Gebürge von Freiwalde in der Grafschaft Glaz bis Reichenstein mit dieser Gebürgsart bedeckt ist.

Die Schichten dieses Glimmerschiefers streichen Nordost in Südwest, und haben ihr Fallen gegen Südost. Ein dunkelgrauer Glimmer, welcher am Tage oft russfarbig wird, macht den Hauptbestandtheil aus, mit welchem der Quarz in sehr kleinen Theilen verbunden ist. Daher schmelzt er für sich im Kohlentiegel zu einer porösen schwärzlich grauen glasigen Schlacke, welche äufserlich mit einer bunten Haut überzogen ist, in der aber der Quarz wie gewöhnlich ungeschmolzen bleibt. Die vielen Eisenkörner, welche diese Schlacke enthält, beweisen die häufige Gegenwart dieses Metalls in dieser Gebürgsart. Es ist merkwürdig, dafs die in dem Glazer Glimmerschiefer, und besonders am Schneeberge in selbigem so sehr häufig vorkommenden Granaten bei Reichenstein ungemein selten sind. Da wo sich der Schiefer dem Kalklager nähert, wird er gneufsartig, und führt dünne Schnüre und kleine Nester eines weifsgrauen sehr feinsplettrigen Quarz in sich. Ueber dem Vogelsberg bei Volmersdorf und auf dem Kapellenberge bei Moyfriedsdorf wird der Glimmerschiefer von einem Lager von Syenit bedeckt, welcher aus einem weifsgrauen Feldspath, worin zuweilen kleine unvollkommene Säulen vorkommen, und aus gemeiner Hornblende zusammengesetzt ist, zwischen welcher sich hin und wieder, doch aber nur sparsam, kleine Glimmerblätter entdecken lassen. Dieses Syenitlager hat mit dem Schiefer einerlei Streichen und Fallen.

In diesem jetzt beschriebenen Glimmerschiefer kommt nun das schon im 12ten Jahrhundert bebaute Urkalksteinlager vor, auf welchem noch gegenwärtig in dem nordwest von Reichenstein belegenen Kapsberge auf der Grube Reichentrost ein wichtiger und ergiebiger Bergbau umgeht. Dieses Lager hat mit dem Glimmerschiefer ein völlig paralleles Streichen und Fallen, und erstreckt sich vom letzten Abfall unter Reichenstein bis Vollmersdorf. Am Hutberge unterhalb Reichenstein, allwo sich die vordern städtischen und Domainen-Kalkbrüche befinden, ist das Kalklager von Glimmerschiefer entblöfst, sonst ist es überall mit demselben bedeckt. Diese Bedekkung ist von verschiedener Mächtigkeit, von 4 bis zu 15 Lachter und noch darüber, welcher letzte Fall besonders auf dem Reichentroste statt findet. Die Mächtigkeit dieses Lagers läfst sich noch nicht angeben; in den angelegten Kalkbrüchen ist man 14 Lachter oder 84 Fuſs niedergekommen, ohne etwas anders als Kalkstein zu finden; allein auf dem Reichentroste befindet man sich bereits in einer Tiefe von 50 Lachter oder 300 Fuſs, ohne den Kalkstein durchsunken zu haben, und es läſst sich also ganz und gar nicht angeben, auf was für einer Gebürgsart dies mächtige Kalklager aufgesetzt ist. Dieser Kalkstein erscheint in mehr oder weniger dünnen Schichten, in welchen auf ihren Ablösungen feine weiſse Talkblätter und viele dendritische Zeichnungen von Braunstein vorkommen. Er ist von schön-weiſser Farbe, welche sich nur dann in das grünliche oder graue zieht, wenn er dem Serpentin nahe kommt. Er hat ein feines glänzendes Korn, wie Marmor von Carrara, giebt hin und wieder mit dem Stahl Funken, und sein Pulver, auf ein heiſses Blech gestreut, phosphorescirt mit einem weiſs-bläulichen Lichte. Das eigenthümliche Gewicht ist 2,840, und kommt also mit dem von Saussure angegebenen Gewicht des Dolomit 2,850 sehr überein. Bei aller angewandten Mühe habe ich noch keine Glimmerblätter, welche doch sonst in diesen Urkalksteinen so häufig vorkommen, finden können. Er wird häufig zum Kalkbrennen angewendet, so daſs jährlich bloſs zu Reichenstein 5000 Scheffel Kalk producirt werden. Er verlangt wenig Sand, und um ein gutes Ciment zu erhalten, darf man noch nicht die Hälfte Sand zusetzen, wogegen der hiesige Rüdersdorfer, wenn er gehörig ausgebrannt ist, 2½ bis 3 Sande verträgt. Dagegen ist er in dem dortigen kalten thonigen Boden ein treffliches Düngungsmittel. Die eben angeführten Eigenschaften dieses Urkalks lassen auch vermuthen, daſs er kein reiner Kalkstein, sondern ein Dolomit sey, weshalb ich ihn ganz nach der von Herrn Klaproth bei Untersuchung des Dolomit vom Gotthard angewendeten Methode untersuchte, woraus sich ergab, daſs 100 Theile dieses Kalksteins bestehen aus

kohlensaurer Kalkerde	76
dergleichen Talkerde	10
Kieselerde	6
Magnesium oxyd	1,75
an talkigen unaufgelösten Resten .	6,25
	100

Es unterscheidet sich also dieser Dolomit von dem von Herrn Klaproth untersuchten, durch den mehrern Gehalt des Kalks, und durch die geringere Menge der Talkerde.

In diesem Kalklager kommen nun folgende Steinarten und Erze vor, welche theils wegen ihrer Natur, theils wegen der Art ihres Einbrechens merkwürdig sind.

1) In den Kalksteinbrüchen am Hutberge befindet sich eine Steinart, welche gangweise die Kalkschichten durchsetzt, und welche noch sehr problematisch ist. Ich beobachtete diesen Stein zuerst 1769, und es befindet sich über denselben eine Abhandlung von mir in dem ersten Stück des 1772 herausgegebenen Journal littéraire. Allein die Methode, die aus mehreren einfachen Erden gemischten Steine zu analysiren, war damals noch sehr roh, und daher ist diese Untersuchung sehr unvollständig, indem ich bei selbiger nichts weiter herausbrachte, als daſs in diesem Stein viel Kieselerde und etwas Eisen enthalten sey, und daſs er wegen seiner Leichtflüssigkeit und wegen der schönen weiſsen Emaille, die er im Feuer annimmt, in Vermengung mit einem reinen feuerfesten Thon, eine äuſserst haltbare, dem englischen Steingut völlig beikommende Fayance gebe, deren Haltbarkeit im Feuer so groſs ist, daſs ein kleines davon gemachtes Gefäſs, noch halbglühend in kaltes Wasser geworfen, nicht zerspringt. Auch jetzt muſs ich in Ermangelung eines Laboratorii mich begnügen, nur die äuſsern Kennzeichen und das Verhalten im Feuer von diesem Stein anzuführen.

Er bricht derb.

Die Farbe ist weiſsgelblich.

Er ist inwendig matt, und nur hin und wieder erscheinen kleine etwas glänzende Punkte, welche etwas blättriges zeigen.

Der Bruch ist uneben und kleinschlittrig.

Er hat unbestimmt eckige scharfkantige, zuweilen etwas scheibenförmige Bruchstücke.

Er ist undurchsichtig.

Hart, so daſs er mit dem Stahl Funken giebt, und schwer zersprengbar.

Hängt wenig an der Zunge.

Angehaucht giebt er Thongeruch.

Eigenthümliche Schwere 2,620.

Die Säuren greifen ihn nicht an, und Scheidewasser scheint nur etwas weniges von Eisentheilen aufzulösen. Er wirkt sehr schwach auf die Magnetnadel, wird aber von dem Magnet nicht angezogen.

Vor

Vor dem Löthrohr bläht er sich, giebt einen bläulichen Phosphorschein, und wird an der Oberfläche mit einer glänzendweifsen porcellanartigen Haut überzogen, mit welcher er sich auch zeigt, wenn Stücke von demselben in den Kalkofen kommen.

Im Gutfeuer der hiesigen Porcellanöfen giebt er im Thontiegel eine weifse grofsblasige Masse. Im Kohlentiegel schmelzt er mit einer hellgrauen Farbe, allein die Blasen sind noch gröfser und häufiger, oft finden sich hin und wieder weifse ungeschmolzene Flekken, und die sonst glatte Oberfläche ist mit schwärzlichen Punkten besetzt. Aufserdem findet man in demselben sparsam kleine Flecken von Glimmer, dessen sehr kleine Blätter von silberweifser Farbe sind.

Es entsteht die Frage, zu welcher etwa bekannten Gattung dieser Stein nach den vorbemerkten äufsern Kennzeichen und nach seinem Verhalten im Feuer zu zählen sey? Zuförderst scheint diese Steinart ein völlig einfacher und kein gemengter Stein zu seyn, weil die Menge des bei ihm befindlichen wenigen Glimmers viel zu gering ist, als dafs man ihn zu den gemengten rechnen sollte. Dem äufsern Ansehen nach hat er viel Aehnlichkeit mit dem Thonstein. Allein dieser wird im Feuer härter und ist unschmelzbar, auch der Bruch ist mehr erdigt. Mit dem Jade oder Saussurit kommt er in dem kleinsplittrigen Bruche, in der Zähigkeit, selbst in dem Verhalten im Feuer sehr überein, allein das eigenthümliche Gewicht des Saussurit ist viel gröfser, da selbiges 3,200 beträgt. Eben so wenig kann man ihn für eine in der Farbe erfolgte Abänderung des Lazulith halten, weil die eigenthümliche Schwere dieses letzten Steins 3,046 beträgt, weil er zwar ein splittriges, aber doch verstecktes blättriges Gewebe hat, und im Feuer eine grünliche blasige Schlacke giebt. Am meisten scheint er sich dem dichten Feldspath zu nähern, dessen eigenthümliches Gewicht Kirwan 2,609 fand, und welcher ebenfalls einen unebnen kleinsplittrigen Bruch hat, auch sonst in den übrigen äufsern Kennzeichen mit dem gegenwärtigen sehr übereinkommt. Allein die Feuerproducte machen noch immer einen bedeutenden Unterschied. Denn das Glas des Feldspaths hat zwar Blasen, die aber so klein sind, dafs man sie nur mit der Loupe erkennt, und zeigt auch mehr Durchsichtigkeit, ob es gleich möglich wäre, dafs in diesem Feldspath mehr glasartige Theile enthalten seyn könnten, welche die mehreren und gröfseren Blasen bewirkten. In der Voraussetzung, daſs es dichter Feldspath sey, und da sich Glimmer in ihm zeigt, könnte man auf die Vermuthung kommen, daſs es der Weiſsstein des Herrn Werner sey, welcher aus Feldspath, Glimmer und Granaten bestehen soll. Allein einmal hat dieser sogenannte Weiſsstein doch immer ein etwas, obwohl verstecktes blättriges Gewebe. Ferner verhält er sich im Feuer, sowohl im Kohlen- als im Thontiegel, ganz anders. In beiden flieſst der Weiſsstein auch, nur der Glimmer erscheint als ein schwarz geflosſnes Glas, der Feldspath als ein weiſses Glas, und zwischen beiden sieht man eine ungeschmolzene weiſse Substanz. Man kann also wohl schwerlich den gegenwärtigen Stein für einen Weiſsstein ausgeben, und eine ihm vorbehaltene chemische Analyse wird erst genau den Ort bestimmen, den man ihm im System gehörig anweisen muſs. Vor der Hand zähle ich ihn zu dem dichten Feldspath, wenn er nicht vielleicht gar eine neue Gattung ist *).

Eine zweite in diesem Kalklager sehr häufig einbrechende Steinart ist der von den dortigen Bergleuten sogenannte Horn. Dieser Stein ist ein Serpentin, oder wie man ihn eigentlich nennen sollte, ein Speckstein, indem es wohl Zeit wäre, den Namen Serpentin nicht mehr einer einfachen Steinart beizulegen. Denn was ist denn Serpentin anders als eine bloſs gemengte Steinart, welche Speckstein zu ihrer Grundmasse hat, in welcher sich Granaten, Asbest, Glimmer, Steinmark und andre Steinarten eingemengt befinden?

Der bei Reichenstein vorkommende Speckstein ist an Farbe, Härte und Gefüge sehr verschieden. In Absicht der Farbe findet man ihn schwarz, roth und grün. Der schwarze hat einen aus dem ebenen in dem kleinsplittrigen übergehenden Bruch, läſst sich mit dem Messer schaben und giebt ein weiſsgraues Pulver. Er hat wenig Glanz, nimmt keine sonderliche Politur an, und zeigt stumpfeckige Bruchstücke.

Der rothe ist kirschroth und hat etwas mehr Glanz. Der Bruch ziehet sich aus dem ebenen in das muschliche. Er läſst sich nicht so leicht wie der vorige mit dem Messer schaben, und giebt ein weiſsröthliches Pulver; er ist also härter und nimmt eine gute Politur an. Er kommt fast

*) In der Folge der Zeit hat die genaue von Herrn Klaproth gemachte Untersuchung bewiesen, daſs dieser Stein ein wahrer reiner Weiſsstein sey, und es ist bei demselben merkwürdig, daſs, da der Weiſsstein sonst gemeiniglich eine gemengte Gebürgsart ausmacht, dieser Reichensteiner Weiſsstein das dortige Kalklager gangweise durchsetzt.

in allem mit dem rothen Speckstein überein, den man in gröfsern und kleinern Flecken in dem Marmor Verde- Antico findet.

Der grüne Speckstein ist unter allen der weichste. Er läfst sich beinahe schneiden und giebt ein weifses Pulver, nimmt auch nur eine matte Politur an. Die Farbe wechselt von dem fast schwarzgrünen bis in das apfelgrüne; er ist sehr glänzend, an den Kanten halb durchsichtig, von grobsplittrigem in das Muschlige sich ziehenden Bruche, und verliert sich endlich in einen wahren Nierenstein. Dies ist der sogenannte edle Serpentin andrer Oryctognosten. Endlich findet man auch einen rothen Speckstein mit versteckt blättrigem Bruche, ziegelroth und von lebhaftem Wachsglanze.

Im Gutfeuer des hiesigen Porcellanofens verhalten sich diese Abänderungen, und zwar im Kohlentiegel, folgendergestalt:

a) Der schwarze giebt eine graue sehr blasige Schlacke mit vielen Eisenkörnern und kristallinisch- glänzenden Blättern, an Farbe und Glanz ganz dem auf dem Roheisen sich bildenden Graphit ähnlich.

b) Der rothe dichte ist ungeschmolzen äufserst verhärtet, äufserlich rostfarben, innerlich aber aschgrau, und zeigt auch Eisenkörner.

c) Der dunkelgrüne, soviel als möglich von äufserlich anklebendem Kalk befreit, wird im Feuer weifsgrau und sehr hart, zeigt aber an der Oberfläche hervorstehende rundliche verschlackte Knospen von weifsgrauer Farbe. Bei einer hellgrünen und weichern Abart war die weifsgraue deutlich geflossene Schlacke fast baumförmig. — Dunkelgrüner mit Kalkspath vermengter Speckstein bläht sich stark auf, wird äufserlich weifsgelb, zeigt inwendig viele und grofse Blasen, welche mit einer weifsen glänzenden Kristallhaut bedeckt sind, deren Gestalt ich aber nicht bestimmen kann.

d) Der rothe blättrige Speckstein endlich giebt eine dicke strengflüssige schwarzgraue Schlacke mit Eisenkörnern.

Wenn man diese Versuche mit den von Herrn Klaproth und mir sonst schon angestellten und in meinem Grundrifs eines neuen Mineral-Systems von Seite 45—47 aufgeführten Versuchen vergleicht, so wird man sich über die Schmelzbarkeit der meisten Reichensteiner Specksteinarten verwundern, besonders wenn man die grofse Feuerbeständigkeit des Bareuther Specksteins erwägt. Allein es ist zu bedenken, dafs bei Reichenstein alle Steinarten mit Kalk mehr oder weniger gemischt sind, und dafs, wie ich am angeführten Orte No. 86 und 89 bereits bemerkt, ein Speckstein aus Da-

nemora und aus **Bisberg** aus eben dieser Ursache schmolz. Auch die gegenwärtigen Versuche zeigen, dafs der dunkelgrüne, von sichtbaren Kalktheilen möglichst befreite grüne Speckstein nur an der Oberfläche geschmolzen war, und der dichte rothe, in welchem keine Spur von Kalk zu sehen, fast gar nicht. Dies wird noch durch folgende Beobachtung bestätigt: man findet zuweilen, dafs die Nester und kleinen Stockwerke von Speckstein zu Reichenstein an den über dem Kalkstein aufliegenden gneufsartigen Glimmerschiefer unmittelbar anstehen: und dieser Speckstein bleibt im Feuer beständig und wird nur sehr hart. Endlich wirken diese Arten von Speckstein ziemlich stark auf die Magnetnadel, und der grüne, besonders aber der schwarze, zeigen auch Polarität.

Nur erst vor kurzem hat man über dem Feldorte des tiefen Emanuel-Stollen, welcher auf dem Kalklager in das frische Feld getrieben wird, eine Specksteinart angehauen, welche, die ihr eigene aschgraue Farbe ausgenommen, in allen übrigen äufsern Kennzeichen mit dem bekannten Bareuther Speckstein ganz übereinkommt. Er ist eben so weich wie dieser, so dafs er sich leicht schneiden und drehen läfst, und in beiden Fällen eine glänzende Oberfläche annimmt. Er klebt wie dieser an der Zunge, giebt angehaucht einen thonigen Geruch, hat denselben ebenen ins kleinsplittrige sich ziehenden Bruch; man kann mit ihm, wie mit dem Bareuther, auf Glas schreiben, und wenn man die Charaktere auslöscht, und dann das Glas anhaucht, so kommen bei beiden dieselben deutlich wieder zum Vorschein. Beide nehmen eine matte Politur an, und der Reichensteiner nimmt so gut wie der Bareuther öhlige Theile aus wollenen Zeugen hinweg. Allein das Verhalten im Feuer ist aufserordentlich verschieden. Beide werden im mäfsigen bis zur Rothglühe gehenden Feuer härter. Allein im starken Feuergrade zeigen sie auffallende Verschiedenheiten. Der Bareuther erhärtet, ohne eine Spur von Schmelzen zu zeigen, in dem Gutfeuer der hiesigen Porcellan-Oefen so stark, dafs er mit dem Stahl Funken giebt. Der Reichensteiner fliefst in diesem Feuergrade vollständig und dergestalt, dafs sich unten am Boden des Tiegels eine hell-aschgraue glasige Masse befindet, welche einen versteckt blättrigen, in das flachmuschlige übergehenden Bruch hat. Ueber dieser Masse befindet sich eine schwarze glasartige Masse, welche aus nadelförmigen einige Linien langen Kristallen besteht, welche auch die mehr dichte unten aschgraue Masse durchsetzen. Man kann dieses mit blofsen Augen, noch besser mit der Loupe wahrnehmen, und wenn man kleine

Scheiben unter ein achromatisches Microscop bringt, so scheinen diese schwarzen Nadeln eine 6eckige Gestalt zu haben, und liegen meist strahlig, wie bei dem Strahlstein, werden auch parallel, zuweilen auch gebogen, und wenn sie die dichte aschgraue Masse durchsetzen, findet man, daſs sie selbige in oblonge 4ecke theilen. Hin und wieder zeigen sich auch zwischen den schwarzen Säulen kleine Kristalle, welche ganz wasserklar und auch durchsichtig sind, deren Gestalt ich aber durch eine achromatische Linse, welche 50mal im Diameter vergröſsert, nicht habe bestimmen können. Diese Erscheinung ist mir deſshalb sehr merkwürdig, weil sie die Bildung der Kristalle im Feuer so schön erläutert, und zeigt, daſs in einem geschmolzenen Stein sich durch Anziehung homogener Theile Kristalle bilden können, welche von der übrigen geschmolzenen Masse ganz verschieden sind, und daſs dies sogar bei Steinarten erfolgen kann, welche nach dem äuſsern Ansehen aus lauter homogenen Theilen bestehen; denn dieser Speckstein wird zwar von grünen Specksteinadern häufig durchsetzt: allein ich hatte zu dem Versuche Stücke mit einer Säge ausgeschnitten, in denen sich auch nicht das Geringste von grünem Speckstein befand.

Das merkwürdigste bei diesen Specksteinarten ist die Art und Weise, wie sie in dem Kalklager brechen. Dies geschieht nicht in Klüften oder Bändern, sondern in bloſsen kleinern oder gröſsern Nestern. Der Bergmann fährt oft mehre Lachter, sowohl im Streichen des Lagers als auch in der Tiefe auf, ohne etwas anders als diesen Speckstein zu erblicken, und ehe er es sich versieht, so ist derselbe verschwunden, und er befindet sich wieder in dem reinen Kalklager. Es ist auch kein Mittelkörper vorhanden, welcher diese beiden Steinarten von einander absonderte; vielmehr findet man, daſs eine in die andere verflöſst ist und wirklich übergeht. Man sieht dies am besten da, wo beide Steinarten einander berühren. Man entdeckt alsdann in dem Kalkstein eine Veränderung der Farbe, so daſs er anfängt gräulicht oder grau zu werden, und alsdann nach und nach in den reinen Speckstein völlig übergeht. Dies erstreckt sich so weit, daſs in den Nestern vom Rhomboidal, und besonders vom strahligen Kalkspath, welche zuweilen auf dem Lager vorkommen, der grüne weiche Speckstein einen Uebergang in den Kalkspath macht, und man findet zuweilen strahligen Kalkspath, von welchem einzelne Strahlen halb Kalkspath und halb Speckstein sind. In diesem Gemenge von Kalkspath und Speckstein kommt dieser auch in länglichen sechsseitigen Tafeln kristallisirt vor, die ich bereits in meinem 1786 herausgekommenen Grundrifs des Mineralreichs, Seite 97, angeführt habe. Dies kann einen Beweis gegen diejenigen führen, welche alle Specksteinkristalle als Afterkristalle betrachten wollen.

Uebrigens kommt der rothe Speckstein allezeit isolirt, und ohne dafs sich einer mit dem andern in Flecken oder Adern vermischen, vor, wogegen aber in dem schwarzen häufig Adern von dem grünen gefunden werden. Merkwürdig ist, dafs zuweilen sehr dünne, kaum $\frac{1}{4}$ Zoll betragende Schichten vom schwarzen und grünen Speckstein und Kalkspath abwechseln.

Eine dritte merkwürdige Steinart, welche bei Reichenstein häufig vorkommt, ist der Asbest. Man findet zwei Unterarten, den biegsamen und den holzartigen. Die erste ist die häufigste, die letztere aber sehr selten, und beide brechen bald in dickern, bald in dünnern Schnüren, in den Abänderungen des vorigen Specksteins. In dem rothen härtern Speckstein sind die Schnüre sehr dünn und einzeln, so dafs sie nicht dicker als nur höchstens eine Linie sind, gemeiniglich viel dünner, und erscheinen auch nur einzeln. In dem schwarzen Speckstein kommt der Asbest am häufigsten vor, und er macht mit demselben abwechselnde Lagen, welche bei einem Stücke von 12 Zoll Höhe zuweilen 10 und mehrmal abwechseln. Die Farbe des Holz-Asbest habe ich noch nicht anders als dunkelgrün gefunden. Der biegsame Asbest ist gelblichgrün, die Fasern haben höchstens eine Länge von einem Zoll, laufen parallel, meist gerade, oder doch nur wenig gekrümmt, und sind sehr elastisch. Im Kohlentiegel verhält sich dieser Stein verschiedentlich. Nimmt man langen, von jeder andern Steinart getrennten Asbest, so schmelzt er nicht. Die Fäden werden eisenschwarz, verlieren die Biegsamkeit und werden spröde. Ist aber der Asbest noch mit Speckstein verbunden, so schmelzt alles zu einer braunen compacten glasigen Schlacke. Man findet auch Asbestschnüre, wo die Asbestfasern mit Fasern von strahligem Kalkspath innig gemischt sind, so dafs an diesen Orten der Asbest mit Säuren brauset. Daher rührt auch wohl die Verschiedenheit in den angegebenen Bestandtheilen dieser Steinart, da einige, wie ich selbst, nur Kiesel, Talkerde und Eisen, andere aber aufserdem Kalkerde darin gefunden haben. Saussure und ich haben zu gleicher Zeit gefunden, dafs der Asbest von Tarantaise, welcher Kalkerde enthält, eine Kristallschlacke in kleinen Säulen giebt, und eben dies habe ich bei dem sogenannten Bergleder von Danemora und von Kongsberg gefunden, welches letztere auch in Kalk vorkommt.

Vergleicht man dies mit den kristallinischen Schlacken, welche nach obigen Versuchen die kalkartigen Specksteine geben, so möchte man fast auf die Vermuthung kommen, ob vielleicht die in den Laven vorkommenden Augit-Pyroxen- und Leuzit-Kristalle der Kalkerde ihr Daseyn zu danken haben, zumal da man bei dem Vesuv, dessen Laven so reich an jenen Kristallbildungen sind, unter den bloſs ausgeworfenen Sachen so viele findet, welche stellenweise mit Säuren brausen.

Ich bin bemüht gewesen, die Struktur des Asbest durch das Microscop genau zu erfahren, und habe äuſserst dünne einzelne Fäden, nicht allein vom Reichensteiner, sondern auch von biegsamen Asbesten andrer Orten, besonders von dem feinen seidenartigen Asbest von Tarantaise, unter ein zusammengesetztes achromatisches Microscop gebracht, dessen Linse im Durchmesser 100mal vergröſsert, allein, die mehrere oder wenigere Durchsichtigkeit ausgenommen, nichts kristallinisches darin entdecken können, sondern bloſs einfache Fäden beobachtet. Nach mehreren unter dem Reichensteiner Asbest in der Grube und an Stücken gemachten Bemerkungen ist es mir sehr wahrscheinlich, daſs derselbe aus einer weichen Specksteinerde, bei deren Austrocknung die Fasern sich gespalten haben, besteht. Einmal findet man zuweilen in dem schwarzen Speckstein Adern einer grünlichen fetten Erde, welche so weich ist, daſs sie sich mit den Fingern kneten und zerreiben läſst. Es sind ferner dergleichen weiche, obwohl mehr verhärtete Adern von dem grünen Speckstein in dem schwarzen sehr häufig, und durchsetzen ihn eben so wie die Asbestadern. Das beikommende Stück beweiset vollkommen deutlich, wie sich diese grünen dichten Adern spalten, und die Gestalt des Asbest annehmen. Endlich habe ich diese grünen Adern noch nie in Arsenikerz angetroffen, eben so wenig wie in dem Asbest selbst, indem überhaupt dies Erz in dem grünen Speckstein am seltensten vorkommt, wogegen die zwischen den Asbestschnüren befindlichen Lagen des schwarzen Specksteins ganz mit diesem Erz angefüllt sind.

Nach Bergmann und Chevenix führen die von beiden untersuchten Asbestarten aus Cania, Tarantaise, Swartwich, Corias und Sahlberg, auſser der Kiesel- und Bittererde, noch Thon und Kalkerde in sich, wogegen Herr Wiegleb in einem andern nur Kiesel- Bittererde und etwas Eisen gefunden haben will. Allein die vorangeführten Asbestarten schmelzen für sich im Feuer, welches der Reichensteiner nicht thut. Es ist also sehr wahrscheinlich, daſs ihm der Kalk fehlt, in welchem Falle er also auch in den Bestandtheilen mit dem echten Speckstein völlig übereinkommen würde.

3) Der Nierenstein kommt in Reichenstein nicht häufig vor. Er hat seine gewöhnliche grüne Farbe, ist von sehr grobsplittrigem, fast in das schiefrige sich ziehendem Bruch, ist stark glänzend und zeigt sich nur in dünnen Lagern auf dem schwarzen und grünen Speckstein. Er ist auch öfters mit Kalkspath gemengt, und giebt im Feuer ein graues mit Eisenkörnern gemischtes Glas.

4) Vom Talk finden sich zwei Abänderungen, verhärteter und strahliger, von denen der letzte nach Herrn Struve, so wie der Asbest, aufser der Kiesel- und Bittererde, noch Thon und Kalk enthält, nur mit dem Unterschiede gegen den Asbest, dafs bei diesem der Kalk mehr als die Thonerde, bei jenem aber die Thonerde mehr als die Kalkerde beträgt. An Farbe ist er weifsgelblich, hat starken Fettglanz, ist fettig anzufühlen, und giebt ein weifses Pulver. Er macht nur dünne Lagen, welche mit grünem Speckstein, besonders aber mit gemeinem Kalkspath öfters abwechseln. Im Feuer giebt er eine äufserlich hellbraune, inwendig aschgraue poröse mit Eisenkörnern vermengte Schlacke. Inwendig sind diese Poren mit einer Kristallhaut überzogen.

5) Zuweilen kommen in dem Speckstein, besonders in dem schwarzen, auch Nester von schwarzem Glimmer vor, in welchen auch Arsenikerz, besonders das sogenannte braune Erz, einbricht. Es gehört aber diese Steinart zu den seltenen Erscheinungen. Im Feuer geht er in eine weifsgraue, mit vielen Eisenkörnern besetzte Schlacke über, welche inwendig einen weifsen blättrigen Bruch zeigt.

6) Auch der Tremolith findet sich zu Reichenstein, und zwar der graue; ein neuer Beweis, wie unschicklich die Namen sind, welche von dem Geburtsort eines Fossils hergenommen werden. Man findet ihn theils weifs, theils aschgrau. Letzterer erscheint meist in Verbindung mit schwarzem Speckstein, so wie ersterer öfters in dem reinen Kalklager vorkommt. Beide schmelzen auch für sich, geben eine äufserlich glänzende, inwendig aber matte grobsplittrige Masse.

7) Von Kalkspath kommen drei verschiedene Abänderungen vor, der gemeine rautenförmige, der strahlige und der kristallisirte. Ersterer ist gemeiniglich ganz milchweifs, doch findet man auch röthlichen, wie der vom Andreasberge, durch Magnesium gefärbt, worüber man sich nicht wundern darf,

darf, da der Kalkstein des Lagers so häufig Dendrithen zeigt, welche die Gegenwart dieses Metalls beweisen. Dieser Kalkstein ist gemeiniglich mit Nestern von grünem Speckstein vermengt, so wie er auch in dünnen Lagen zuweilen mit dem schwarzen Speckstein abwechselt. Der fasrige oder strahlige Kalkspath befindet sich in schmalen Trümmern in dem grünen oder schwarzen Speckstein, und führt zuweilen Funken von dem bekannten feinspeisigen Bleiglanze und von gelber Blende in sich. Manchmal wechselt er in sehr dünnen Lagen mit rautenförmigem Kalkspath und mit Speckstein. Die Fasern sind äufserst fein, dicht in einander und von Seidenglanz. Wo diese abwechselnde kleine Lagen sicht nicht unmittelbar berühren, findet man kleine glänzende pyramidalische Quarzkristalle, welche traubenförmig angereiht in diese kleine Höhlungen herabhängen.

Von dem kristallisirten Kalkspath habe ich bisher nur drei Abänderungen bemerkt, die doppelte dreiseitige flache Pyramide, die 6seitige lange Pyramide, und die 6seitige Säule, an den Endflächen und den abwechselnden Seitenkanten zugeschärft, so dafs daraus ein Dodekaeder entstehet, von dem alle Seiten reguläre Fünfecke darstellen. Diese Kalkkristalle kommen gemeiniglich auf Quarzdrüsen vor.

8) Auch an dieser Steinart findet sich in dem Reichensteiner Lager kein Mangel. Es befinden sich nehmlich besser an der Grenze der Specksteinnester und des Kalksteins, kleine Klüfte, welche mit Pyramidalquarz ausgekleidet sind, an welche sich öfters die doppelt dreiseitige flache Pyramide des Kalkspaths angesetzt hat.

9) Ein isabellfarbener Strahlstein kommt auch auf diesem Lager vor, welcher aus sehr breiten langen Streifen zusammengesetzt ist.

Endlich 10) kommt noch eine besondere blättrige Steinart, obwohl selten, vor, welche noch etwas problematisch ist. Die Farbe ist bald grafs- bald dunkelgrün. Sie besteht aus schuppig blättrigen, unter dem Mikroscop halb durchsichtigen Theilen, welche locker zusammenhängen, hat Fettglanz, giebt angehaucht einen starken Thongeruch, ist zerreiblich und giebt, mit dem Messer geschabt, ein hellgrünes Pulver, ist undurchsichtig, ja sogar an den Kanten nicht einmal durchscheinend, leicht zersprengbar und zeigt schieferartige Bruchstücke. Die eigentliche Schwere ist 3,005. Sie ist mit derbem Granat und Eisenkies mehr oder weniger gemengt. Im Kohlentiegel schmelzt sie zu einer glasigen dunkelgrünen Schlacke, über der sich ein mit vielen Eisenkörnern gemengter Rohstein befindet, welcher einen blättrigen Bruch hat, und zerschlagen einen hepatischen Geruch giebt. Nach einer vorläufigen Untersuchung dieses besondern Rohsteins scheint derselbe bloſs aus Schwefel und Eisen zu bestehen, und der Centner desselben hält 3 Loth Silber. Nach den eben angeführten äuſsern Kennzeichen scheint dieser Stein ein Chlorit zu seyn, und zu dem gemeinen Chlorit zu gehören. Denn obgleich bei diesem das eigenthümliche Gewicht nur 2,832 beträgt, so kann die Beimengung des Eisenkieses in dem gegenwärtigen Falle eine Gewichtsvermehrung verursachen. In einem Stücke dieser Steinart habe ich sehr kleine smaragdgrüne Blätter bemerkt, welche Smaragdit zu seyn scheinen. Betreffend die Metalle, welche auf diesem Lager brechen, so bestehen selbige in Arsenik, Eisen, Blei, Magnesium, Zink und Gold.

Die Arsenikerze sind die häufigsten, und es werden gegenwärtig noch aus den beiden umgehenden Gruben, dem Reichentrost und dem goldnen Esel, jährlich 37,400 Centner an Poch- und Stufferzen zu Tage gebracht, welche 2486 Centner Arsenikmehl, oder 2220 Centner raffinirtes Arsenikglas, und 2882 Centner Eisen- und goldhaltige rothe Schliche geben. Man hat zwei Arten, das weiſse und das braune. Ersteres, das häufigste und gewöhnlichste, ist ein wahrer Miſspikel, welcher sich an Farbe und Korn von dem gewöhnlichen Miſspikel nicht unterscheidet. Man findet ihn gewöhnlich derb und eingesprengt, zuweilen in sehr feinen nadelförmigen vierseitigen Säulen, an beiden Enden abgestumpft, auch manchmal strahlig von einem Mittelpunkte nach der Peripherie laufend. Er besteht aus Arsenik und Eisen, welches in oxydirtem Zustande vorhanden ist, da er nur sehr schwach auf die Magnetnadel wirkt.

Das braune Erz hat die vollkommenste Aehnlichkeit mit dem magnetischen Eisenkiese, und wirkt daher sehr stark auf die Magnetnadel, doch besteht es nicht bloſs aus Eisen und Schwefel, sondern führt auch Arsenik in sich. Ich habe es noch nicht anders als derb gefunden, und es macht einen sehr geringen Theil der jährlichen Erzförderung aus. Ehedem wurde es ausgehalten, jetzt bedient man sich dssen bei Verfertigung des rothen Arsenik. Diese Arsenikerze sind in dem Kalkstein nicht häufig, sondern ihr eigentliches Muttergestein ist der Speckstein, besonders der schwarze und rothe, und es ist bemerkenswerth, daſs die vierseitigen Kristalle in dem harten rothen viel haufiger als in dem weichen schwarzen sich vorfinden, auch nicht auf Klüften desselben, sondern in der dichten festen Substanz liegen. In dem Amiant, dem Tremolith, dem Strahlstein, habe ich noch kein

Erz bemerkt, wohl aber in dem Glimmer. In den Kalkspathadern, welche, wie oben angeführt, öfters den Speckstein durchsetzen, findet man zuweilen einen silberhaltigen feinspeisigen Bleiglanz, dessen Blei aber keine Spur Gold enthält. Eben so trifft man in diesen Kalkspathadern auch Funken einer rothgelben Blende. Beide dieser Erze gehören indeſs zu den ungemein seltenen Anbrüchen.

Etwas häufiger zeigt sich ein wahrer magnetischer Eisenstein. Er ist von silberweiſser Farbe und blättrigem Gewebe, wird roh vom Magneten gezogen, und giebt bei der gewöhnlichen Eisenprobe 56 p. C. Ich habe ihn bisher bloſs im grünen Speckstein eingesprengt bemerkt.

Was endlich das Gold betrifft, so ist aus allen schlesischen Geschichtschreibern, einem Volkmann, Schwengfeld, Haenel, Schickfuſs, bekannt, daſs der Reichensteiner Bergbau auf Gold umgegangen ist, und man findet noch Dukaten von 1541, 1546, 1554, 1558, 1565, mit der Umschrift: *Moneta Aurea Reichsteinensis.* Es ist zu bedauern, daſs bei einem unglücklichen Brande die meisten Documente verloren worden; das älteste noch vorhandene ist eine Belehnung von 1345, woraus sich also ergiebt, daſs dieser Bergbau uralt ist, und wahrscheinlich im 12ten oder 13ten Jahrhundert angefangen habe. Die ungeheure und Bergen ähnliche Schlackenhalden zu Reichenstein beweisen noch, wie ausgedehnt der Hüttenbetrieb in diesen Zeiten gewesen seyn muſs. Nach der fast ungeheuren Gröſse der Schlackenabzüge zu urtheilen, muſs die Arbeit in hohen Oefen mit sehr groſsen Vor- oder vielleicht auch Brillheerden geschehen seyn, und diese Schlacken sind sehr rein ausgeschmolzen. Man hat sich zuerst der Silberberger, dann der Tarnowitzer, auch der Merzberger Bleierze als Zuschlag bedient und auf Rohstein gearbeitet, und es sind noch aus dem 16ten und 17ten Jahrhundert in den Archiven zu Reichenstein Schmelzzettel vorhanden, aus denen diese Beschickungen erhellen.

In der Folge der Zeit wurden die Bleigruben immer tiefer und kostspieliger, Holz und Kohlen besonders theurer. Man kam also bei der Schmelzarbeit nicht mehr auf die Kosten, und so blieb sie liegen, und die letzten beiden östreichischen Berghauptleute, Gebrüder von Scharfenberg, führten im Anfange des vorigen Jahrhunderts die Benutzung dieser Erze auf Arsenik ein, auf welchem Fuſs das Werk noch heute von der Commune Reichenstein, der es gehört, betrieben wird, so daſs jährlich

2000	Centner	weiſser
200	-	gelber
18	-	rother
2	-	regulinischer Arsenik

fabricirt werden, wovon der bei weitem gröſste Theil ins Ausland, besonders nach Holland geht. Es ist zu bedauern, daſs man von dem Ausbringen des Goldes keine bestimmte Nachricht hat, und das hat mehrere auf den Gedanken gebracht, daſs die Alten andere oder doch reichere Erze gehabt. Es ist dieses aber nicht wahrscheinlich. Denn einmal sind in neuern Zeiten, nachdem man das goldne Esel-Gebäude wieder aufgenommen hat, und in den Bau der Alten gekommen, wo dieselben ansehnliche Pfeiler von Erzen als Bergfesten stehen lassen, viele 1000 Centner Erz davon gewonnen worden, ohne einen reichern Goldgehalt in selbigem zu finden. Ferner sind vor einigen 20 Jahren zu Neustadt an der Dosse viele 1000 Centner sehr alte rothe Schliche mit dortigen bleiischen Schlacken mit Vortheil verschmolzen worden, und das hat gezeigt, daſs das Goldausbringen mit dem, was die alten Sehmelzzettel angeben, ziemlich übereinkomme, welches also deutlich beweiset, daſs die Alten keine andre Erze als die jetzigen gehabt haben. Der Goldgehalt ist immer sehr gering, indem 6000 Centner rothe Schliche zu Neustadt nicht mehr denn 24 Mark Gold gegeben haben. — Auch diese Arbeit hat jetzt aufgehört, weil theils ein besserer Stagerungsprozeſs eingeführt, und die halden Schlacken dadurch an Blei ärmer geworden, Kohlen und Fuhrlohn, besonders der 12 Meilen weite Landtransport von Reichenstein an die Oder, zu sehr gestiegen sind. Auch die Amalgamations-Versuche sind nicht vortheilhaft ausgefallen, doch dürften dieselben noch Wiederholung bedürfen, so wie es noch darauf ankommen wird, ob, nachdem der Chlodnitzer Canal zu Stande gekommen, es vortheilhaft seyn möchte, an der Oder ein Hüttenwerk anzulegen, und auf selbigem die rothe goldhaltige Schliche mit Bleierzen von Tarnowiz zu verarbeiten, zumal dieses durch Coacks geschehen kann.

Dieses jetzt beschriebene Kalklager, so wie überhaupt alle in primitiven Gebürgen befindliche dergleichen Lager, bieten dem philosophischen Geognosten vielen und wichtigen Stoff zum Nachdenken an. Wenn man erwägt, daſs diese Absetzungen mitten in Schichten, deren Steinart meist aus Kiesel- und Alaunerde, und aus nicht geringer Menge Kali bestehen, geschehen, und nur wenig Spuren von Kalkerde in ihnen vorkommen, so ist es unbegreiflich, wie auf einmal jene in dem sogenannten Urmeer mit der Kalkerde zugleich aufgelösten Bestandtheile verschwunden, und blofs die kalkartigen hervorgetreten sind. Wollte man auch glauben, die Kiesel- und Alaunerde, welche den Quarz, Feldspath und Glimmer bilden, wären schwerer auflösbar als die Kalkerde, und alle daraus gebildeten Kristalle würden eher wie die Kalkkristalle niedergefallen seyn, so müfste, ohne auf das ungemein auflösbare Kali in dem Feldspath und Glimmer zu sehen, der Kalkstein immer das oberste Lager bilden; allein er wird öfters vom Gneus oder Glimmerschiefer bedeckt. Ueberdies wechseln ja, nach den vortrefflichen Beobachtungen des Herrn Ebell über den Bau der Erde in den Alpen, Thl. I. S. 105, am Mont-Cenis, zu St. Maurice, in Unter-Wallis, durch das Autremontthal, über den grofsen Bernhard, durch das Aostathal bis Yvrea, im Hafslithale, am Gotthard, an der Nord- und Südseite aller dieser Gebürge, die Kalk- und Gneus- oder Glimmerschieferlager, mit einander ab, und letztere bedecken häufig die erstern. Eben dieses hat von Saussure der Vater an dem Joche des Marterhorn deutlich beobachtet. Eben dieser berühmte Geologe vermuthet zwar, dafs die höchste Spitze des Buet aus Kalk bestehe, weil er von demselben zwar, der dicken Schneedecke wegen, keinen Stein erhalten, aber dicht unter dieser Schneedecke eine kalkartige Steinart gefunden hat. Allein unter diesem Gestein fand er Schiefer, unter diesem aber wieder Kalk mit Quarz gemengt, unter diesem Quarz in festverwachsnen Körnern, §. 581 — 591. An dem Mont-Jovet fand er, in einer Breite von 3000 Toisen, 38 Schichten verschiedener Gebürgsarten, unter welchen sich mehrere kalkige befanden, §. 965 — 970. Alle diese Umstande sind nach dem Neptunischen System unerklärlich, ja unbegreiflich.

Weit eher lassen sich diese merkwürdigen Abwechselungen aus der Theorie erklären, von der ich in meiner Abhandlung über die Kristallisation der primitiven Gebürge die ersten Grundstriche gezeichnet habe, nach welcher unser Planet ein Gemenge von verschiedenen Gasarten ehedem gewesen ist, durch deren Coagulirung die Stein- und Erdarten, welche wir in seinem jetzigen Zustande auf und in demselben finden, sich gebildet haben. Denn einmal kann man wohl als ausgemacht annehmen, dafs die Kiesel-, Alaun-, Talk- und Kalkerde nicht aus einerlei Stoffen bestehen könne, und gesetzt, man wollte auch mit einigen neuen Chemisten annehmen, dafs auf einer Seite die Kiesel- und die Thonerde, und auf der andern die Talk- und Kalkerde nicht Gattungen, sondern nur Arten wären, so wird doch, bei der Verschiedenheit ihrer Eigenschaften, in dem quantitativen Verhältniſs ihrer Bestandtheile ein Unterschied statt haben. Wenn auch ferner die Kraft, welche die Gasarten coagulirt, immer dieselbe gewesen wäre, so wird doch in der Intensität derselben eine Verschiedenheit statt gefunden haben, und bald eine gröſsere oder kleinere Masse oder Geschwindigkeit zu Coagulirung der einen als der andern Gasart erforderlich gewesen seyn. Es muſste ferner gleich bei der ersten Coagulirung viel Wärme- und Luftstoff entbunden werden, deren Zutritt vielleicht nothwendig war, um in andern Gasarten diesen Effekt hervorzubringen, so wie wir sehen, daſs dies bei der Erzeugung des Wassers aus Oxygen und Hydrogen erfolgt. Endlich, so ist es wohl nicht denkbar, daſs diese Coagulirung in der ganzen Masse auf einmal erfolgt ist; sie muſs vielmehr successive und schichtenweise von dem Mittelpunkte nach der Peripherie, oder vielleicht auch umgekehrt, statt gefunden und sich also öfters wiederholt haben.

Nach diesen Prämissen läſst sich also wohl denken, daſs einmal in einer groſsen Gasschicht sich nur die Gasarten coagulirt haben, welche Kiesel, Alaunerde und Kali bilden können, und aus welchen Quarz, Feldspath und Glimmer hervorgegangen sind, deren Kristallisirung durch den Beitritt des bei einer solchen Coagulirung sich mitbildenden Wassers erfolgte. Dadurch muſste aber auch die Menge von Gasarten, welche zur Hervorbringung der Talk- und Kalkerde dienen, sich mehr und mehr an einander anhäufen, und auf die Art konnten diese Erden und die aus ihnen gebildeten Steinarten durch eine folgende Operation entstehen. Man kann nicht dagegen einwenden, daſs auf die Art nur Granit- und Kalklager in den primitiven Gebürgen anzutreffen seyn müsten, wovon die Erfahrung das Gegentheil beweiset. Denn einmal sind doch wirklich fast alle primitiven Gebürgslager aus Glimmer, Quarz und Feldspath, Talk und Kalk zusammengesetzt, und der Hauptunterschied läuft nur auf das quantitative Verhältniſs dieser Steinarten, und auf das mehr oder weniger rein ausgesprochene kristallene Korn derselben hinaus, welches bloſs durch die geringere oder gröſsere Menge Wasser, welche zugleich gebildet wurde, und auf dem verschiedenen Grade der entwickelten Wärme beruhen kann. Besonders aber muſs man auch nicht die Veränderungen auſser Acht lassen, welche die neugebildeten Steinlager in der Folge durch Auflösungen und daraus erfolgende neue Verbindungen erlitten haben, und durch welche neue Mischungen, neue Gestalten und Formen erfolgen müssen, weshalb ich mich auf die häufigen Auflösungen, die wir auf der Oberfläche unsrer Gebürge und in ihrem Innern wahrnehmen, und auf die so häufigen in die Augen fallenden Uebergänge einer Steinart in die andere ganz sicher berufen kann, und welche in dem frühesten Alter der Erde um so häufiger und beträchtlicher erfolgen mufsten, da die Lager, wegen des vielen bei sich führenden Wassers, weich und gleichsam breiartig waren. Wenn man diesen Gedanken prüft, so wird man mit wenigern Schwierigkeiten zu kämpfen haben, als wenn man ein alles bedeckendes Urmeer, das alles aufgelöst hielt und aus sich absetzte, annimmt.

Ein anderer eben so schwieriger Punkt bei den Kalklagern der primitiven Gebürge sind die in ihnen vorkommenden fremden Steinarten. Bei wirklichen Gängen, welche die Steinlager in verschiedenen Winkeln durchschneiden, hat man sich über diese Erscheinung nicht zu verwundern. Denn es ist fast zur Evidenz erwiesen, dafs die wahren Gänge ehedem hohle Risse der Gebürge waren, welche von aufgelösten Stein- und Erzarten, welche ihnen die Flöz-, besonders die Gangklüfte zuführten, nach und nach ausgefüllt wurden. So wie also die Steinarten, aus denen jene Klüfte entsprungen, verschieden waren, so wie die grofsen chemischen Operationen der Natur abwechselten, so mufsten auch immer mehrere Stein- und Erzarten sich bilden und in den Gängen absetzen. Allein mit den Steinlagern, wenn sie besonders unter sich parallel streichen und fallen, hat es eine ganz andere verschiedene Bewandnifs. Hier ist kein leerer Raum, sondern eine anhaltende Masse vorhanden, über welche sich zwar etwas anlegen, aber ohne sie aus ihrer Stelle zu drängen, nicht in sie eindringen kann. Hiezu kommt noch, dafs diese fremden Steinarten nicht etwa blofs auf der nach oben gekehrten Fläche oder in einer sonst bestimmten Ordnung einbrechen, sondern in Nestern von ganz unbestimmter Länge in ihnen vorkommen. So trifft man in dem Lager bei Reichenstein die Serpentinnester, sowohl im Streichen als im Absinken, auf mehreren ganz irregulär belegenen Punkten an.

Alle diese fremden Steinarten sind aus Kiesel, Talk, Kalk und Thonerde in verschiedenen Verhältnissen zusammengesetzt, und wir treffen die Ueberreste derselben in dem Kalkstein dieses Lagers an. Wir beobachten ferner, wie ich schon oben angezeigt, ungemein scharfe Uebergänge dieser Steinarten aus dem Kalkstein, und daher dünkt es mir sehr wahrscheinlich, dafs aus dem Gemenge der Kalk-, Talk-, Thon- und Kieselerde, welche bei

Entstehung dieses Lagers gemengt waren, und von welchen sich an einem Orte mehr oder weniger von jeder befinden konnte, in dem breiartigen Zustande desselben, sich nach den Gesetzen der Affinität die einzelnen Theile einander angezogen haben, und auf die Art neue Verbindungen erfolgt sind. Vielleicht kann noch ein, nach Formirung des Kalklagers in ihm sich ereignender Galvanismus, mit zu diesen Bildungen beigetragen haben. Diese Kraft zersetzt ja in der Voltaischen Säule die kalischen und erdigen Mittelsalze, und scheidet an den Polen ihre Bestandtheile. Nach Davys Versuchen wird sogar das Glas durch diese Kraft zerlegt, ja sie macht aus den zerlegten Bestandtheilen neue Verbindungen, wie wir an dem Ammonio sehen, welches sie aus dem Salpeter am negativen Pol mit dem Kali zugleich hervorbringt.

Aus allem bisher Angeführten geht deutlich hervor, wie wichtig eine genaue Kenntnifs der sogenannten Elementar-Erden für die Geologie seyn würde, und wie sehr es also zu wünschen wäre, dafs unsre berühmten Chemisten der Auflösung dieses Problems ihre Aufmerksamkeit widmen möchten.

Mine-

Mineralogische Bemerkungen.

Von Herrn Gerhard *).

I. Was ist oryctognostische Gattung?

In der ganzen Oryctognosie giebt es keine Aufgabe, deren Auflösung mehr Schwierigkeiten hat, als die Bestimmung des Gattungscharakters, und hierin liegt die gröfste Unvollkommenheit, welche in diesem Theile der Naturbeschreibung herrscht. Man durchlaufe alle Lehrbücher der Mineralogie, besonders die, deren Verfasser aus der Wernerschen Schule herkommen, man findet in ihnen eine sehr weitläuftige Charakteristik von Bergkristall, Ametist, Milchquarz, Prasem, Gelenkquarz, von gemeiner Hornblende, basaltischer Hornblende, Hornblendeschiefer; keiner aber sagt, was Quarz, was Hornblende ist. Es werden also nicht Gattungen, sondern Arten charakterisirt. Der Grund dieser Unvollkommenheit liegt theils, und zwar hauptsächlich, in der Natur der Mineralien, zum Theil aber gewifs auch an denen, welche die Klassificirung dieser Naturprodukte vorgenommen haben. Die Körper des Mineralreichs haben keine organische bestimmte Structur, sie pflanzen sich nicht selbst fort, sie entstehen nur durch Mischung und Anhäufung, ihre Vergröfserung erfolgt durch keine innere Kraft, sondern blofs durch Anziehung von aufsen, nach Gesetzen der Anziehung und Affinität. Es können daher auch völlig gleichartige Individuen, auch verschiedene und ungleichartige auf dieselbe Art entstehen. Verschiedenheit der Mischung und äufsern Gestalt können bis in das unendliche gehen. Dies sind alles Umstände, welche die Entwerfung von Gattungscharakteren aufserordentlich

*) Vorgelesen den 14ten Oktober 1813.

schwierig machen. Allein auch diejenigen, welche sich mit diesem Geschäft befaſsten, setzten sich Hindernisse in den Weg, indem sie die Regeln der Logik mit zu groſser Strenge anwenden, und ihre Gattungscharaktere nur aus einer einzigen Quelle schöpfen wollten, und also bald bloſs zu den Bestandtheilen, oder bloſs zu den äuſsern Kennzeichen ihre Zuflucht nahmen. Man muſs sich hierüber um so mehr wundern, da die Botanik, welche sich mit organischen Geschöpfen beschäftigt, dieser Annahme nicht folgt, und in den ersten elf Klassen die Merkmale derselben von der Anzahl der Staubfäden, in den folgenden aber von andern Verhältnissen der Staubfäden hernimmt, die Ordnungen in den ersten 13 Klassen nach der Anzahl der Griffel, in den folgenden nicht darnach bestimmt, die generischen Merkmale bald von Kelch und Krone, bald von Gestalt und Lage der Frucht, und dies in einer und derselben Klasse borgt, endlich die Arten nach jedem schicklichsten Theile einer Pflanze aufstellt. Dem Uebel nun, welches nothwendig entstehen muſste, wenn man bloſs den chemischen Bestandtheilen, oder bloſs den äuſsern Kennzeichen folgte, und welches hauptsächlich darin besteht, daſs bald allzugroſse Gattungen entstehen, und Mineralien, welche in sehr wesentlichen Umständen von einander abweichen, verbunden, oder umgekehrt, andre in diesen Dingen sehr ähnliche von einander getrennt werden, bewog andere Verfasser, die Charaktere der Gattungen aus chemischen und aus äuſsern Merkmalen zusammenzusetzen, und ihnen noch physische beizufügen.

Ich habe selbst in meinem 1786 herausgegebenen kurzen Mineralsystem einen Versuch gemacht, diese Methode zu befolgen, wie dies auch Hoffmann in seinem neusten Lehrbuche bei einigen Gattungen, aber lange nicht bei allen, versucht hat. Allein bei der zu der Zeit noch sehr zurückseyenden chemischen Analyse, bei den noch nicht deutlich genug entwickelten äuſsern Kennzeichen, und durch die neuern seit der Zeit entdeckten Mineralien, ist derselbe sehr unvollkommen ausgefallen.

Ein überaus scharfsinniger und mit allen Vorkenntnissen ausgerüsteter Mineraloge, Herr Haüy, hat einen andern Weg eingeschlagen, die Gattung in der Mineralogie zu bestimmen, indem er in seinem Lehrbuche Th. I. S. 227. sagt: sie sey ein Inbegriff von Körpern, deren integrirende Moleküls einander ähnlich, und aus denselben Grundstoffen, in demselben Verhältniſs mit einander verbunden, zusammengesetzt sind. In dem neulich von ihm herausgegebenen Tableau comparatif hat er dieselbe Bestimmung angenommen, nur dafs er an die Stelle der integrirenden Moleküls blofs die Grund- oder Kerngestalt setzt, und also behauptet, Identität der Kerngestalt, und qualitative und quantitative Identität der Bestandtheile machen das Wesen der mineralogischen Gattung. Da diese Meinung bei sehr vielen, auch deutschen Mineralogen, grofsen Beifall gefunden, so verdient selbige eine genaue Erwägung, nach welcher man, wie mir es scheint, finden wird, dafs dieser Begriff sehr schwankend ist. Bertholet und Bernhardi haben bereits sehr wichtige Einwendungen gegen diese Theorie gemacht, und die Antworten, welche Haüy in der Vorrede zum zweiten Theil seines Lehrbuchs der deutschen Ausgabe, und in der Einleitung zu dem Tableau comparatif gegeben hat, sind auf keine Art befriedigend, daher ich mich begnüge, blofs folgendes darüber hier anzuführen.

1) Wenn ein Merkmal allgemein seyn soll, so mufs es überall anzutreffen und sichtbar darzustellen seyn. Nun findet man aber eine grofse Menge Mineralien, welche noch nicht in Kristallform vorhanden, und bei diesen ist also diese Methode nicht anwendbar. Es fallen also bei denselben alle Mineralien aus, welche ein dichtes, schiefriges, fädenartiges Gewebe haben, und sie ist blofs bei denen, welche aus Blättern bestehen, zu brauchen.

2) Auch bei diesen ist Bestimmung der Kerne unsicher. Denn einmal läfst sich eine primitive Form nicht anders als aus solchen Mineralien darstellen, welche wenigstens einen doppelten Durchgang der Blätter haben, und bei denen, wo er einfach ist, mufs man zu hypothetischen Flächen seine Zuflucht nehmen, wie bei dem Borax, dem Cymophan, dem Meionit, dem Stilbit, dem Prehnit. Noch hypothetischer ist sie bei Kristallen, bei denen ein Durchgang der Blätter gar nicht statt hat, wie bei dem Schwefelkies. Viele Substanzen zeigen viel mehr Durchgänge der Blätter, als Haüy angenommen, und Haüy hat in seinem Conit und Tilesin selbst bewiesen, wie wenig man sich auf die Bestimmtheit der Grundgestalt verlassen könne. Das Hauptprincip, die Beständigkeit der mineralischen Gattung, ist also weder allgemein noch sicher.

3) Man findet nicht allein in derselben Ordnung, sondern sogar in verschiedenen Ordnungen, ja selbst in verschiedenen Klassen, Mineralien von einerlei Grundgestalt, Würfel, Octaëder u. s. w., zu deren Unterscheidung und Absonderung also andre Charaktere durchaus nothwendig sind.

Hiebei sucht Herr Haüy sich in einigen Fällen mit der Gleichheit oder Ungleichheit der Winkel zu helfen. Allein, ohne zu erwägen, dafs es schwer hält, bei so kleinen Körpern die Winkel auf einen Unterschied von $\frac{1}{2}$ bis 1 Grad richtig zu messen, wie denn La Methrie und Wolaston schon bemerkt, daſs sie öfters ganz andre Winkel beobachtet haben, so sind auch diese Winkel bei einigen, wie bei dem Würfel und bei dem Octaëder, ganz gleich, ja die Grundgestalt des Aximit hat mit dem kohlensauren Kalk denselben Winkel, nach der eigenen Angabe des Herrn Haüy.

4) In der ganzen Kristallisationslehre ist bloſs die Theorie der Decrescenzen das ganze, was Herrn Haüy eigen ist, indem was dieser von Kerngestalten sagt, bereits durch Bergmann und Romé de l'Isle behauptet, auch von diesen besonders die Gleichheit und Unwandelbarkeit der Winkel beobachtet worden. Allein diese Decrescenzen sind bloſs hypothetisch angenommen und nicht im geringsten erwiesen, und eben so wenig stimmt dies mit der Natur überein, was Haüy über das Wachsthum der Kristalle sagt. Er behauptet Th. I. seines Lehrbuchs S. 157. ganz bestimmt: ein Kristall sey in seinem ganzen Inhalt nur ein regelmäſsiger Haufen von gleichartigen Moleküls, er fange nicht von einem Kern an, der so groſs sey, als der, den man durch die mechanische Theilung erhält, und ein Kristall, welcher den aus dem Würfel entspringenden Rhomboïdal-Dodekaëder ähnlich wäre, sey schon vom ersten Augenblick an ein kleines Dodekaëder, welches einen kleinen kubischen Kern enthalte. Diese Behauptung ist nicht allein willkührlich, sondern sie wirft auch völlig das ganze System über den Haufen. Denn einmal sind dergleichen kleine ähnliche Kristalle noch nicht beobachtet. Ferner, warum kommen sie nicht zum Vorschein bei der Theilung der Grundgestalt in integrirende Moleküls, sondern warum zeigen sich hier ganz verschiedene? Man könnte behaupten, daſs Haüy durch die von ihm angegebene Art des Wachsthums der Kristalle beinahe sein ganzes System aufhebe. Bildet sich nehmlich die Grundgestalt nicht zuerst, legen sich die Theilchen nach den Decrescenzgesetzen nicht an dieselbe an, so müſsten ja in den Umhüllungen eben solche integrirende Theilchen wie in der Grundgestalt vorhanden seyn, und umgekehrt, welchem aber die Erfahrung widerspricht. Dieser Umstand macht die ganze Theorie der Grundgestalt überhaupt sehr unsicher, und daher mag es wohl kommen, daſs Haüy in seinem Tableau bei mehrern Steinarten andere Grundgestalten annimmt, als er in seinem System gethan hat, und unser berühmter Herr Professor Weiſs hat auch bei dem Feldspath eine ganz andere Grundgestalt, als Haüy angiebt, bemerkt. Läſst sich ferner gedenken, daſs reguläre Körper in einer

Auflösung schwimmen können, ohne sich zu Boden zu schlagen? Diese kleinen Polyëder müſsten ferner bei ihrer Absetzung, es sey auf den Flächen oder auf den Kanten, Zwischenräume unter sich lassen, und es könnten also die Flächen der secundären Formen unmöglich so glatt und glänzend seyn, als bei den Kernen, welches doch die Erfahrung offenbar beweiset, und so giebt es bei dieser Hypothese noch eine Menge anderer Schwierigkeiten, die ich der Kürze wegen übergehe. Umsonst beruft sich Haüy auf die kleinen fast microscopischen Kristalle, die man sogar häufig bei einer und derselben Varietät in der Natur findet, die doch auch ihren kleinen Kern haben müssen. Allein dies rührt von ganz andern Ursachen her, besonders von der schnellen Beraubung des Auflösungsmittels oder der Wärme, von der mehreren oder wenigern Menge der aufgelösten Körper, und wir sehen daher alle Tage bei den chemischen Kristallisirungen, daſs der erste Anschuſs gröſsere, die folgenden aber kleine Kristalle geben. Es ist daher weit einfacher und selbst den vorkommenden Beobachtungen in der Natur gemäſser, nach Bourguet und La Methrie, triangulär-quadratische und Rhomboïdal-Blätter anzunehmen, welche durch ihre Zusammenfügung die verschiedenen Kristallformen bilden. Ja vielleicht werden die triangulären Blätter allein hinreichend seyn, nach der verschiedenen Gröſse der Winkel und Seiten alle Kristallformen hervorzubringen. Nach dieser Verschiedenheit werden auch die Anziehungskräfte dieser kleinen Theilchen verschieden, also im Stande seyn, durch diese verschiedene Art der Anhäufung auch sehr verschiedene Formen hervorzubringen, woraus sich auch die Beständigkeit der Winkel leicht einsehen läſst. Diese Vorstellungsarten scheinen manche bei Kristallisationen vorkommende Beobachtungen zu bestätigen. Es ist nicht so selten, bei Quarzkristallisationen dreiseitige feine Blätter auf ihrer Oberfläche zu bemerken. Das königliche Kabinet besitzt ein Stück Quarz von Marienberg, in welchem sich 6seitige Blätter deutlich beobachten lassen, und welches ich in dem ersten Theile meiner mineralogischen Schriften abzeichnen lassen. Ein Grossular, den ich besitze, und welcher das Rhomboïdal-Dodekaëder regulär darstellt, zeigt auf einer Fläche ein deutliches Rhomboïdal-Blättchen. Bei der auf dem Harz so häufig vorkommenden 6seitigen abgestumpften Säule kann man ihre Bildung aus 6seitigen Tafeln und Blättern deutlich erkennen, ja man findet Kristalle dieser Art, bei denen aus der sechsseitigen Säule eine dreiseitige hervorkommt. Endlich

5) hat Herr Haüy diese Bestimmung der mineralischen Gattung, sowohl in seinem Lehrbuche, als auch in dem Tableau comparatif, häufig selbst vernachlässigt. Nach ihm gehört Identität der Kerne, der Figur und der Bestandtheile zur Erkennung der mineralischen Gattung, und doch verbindet er Pyrop, Granaten, Almadin, Grossular, bloſs wegen der Gleichheit der Kerngestalt, zu einer Gattung, unter dem Namen Granat. Wie sehr sind aber nicht die Bestandtheile nach den besten chemischen Untersuchungen dieser Steine verschieden, so daſs er selbst zugesteht, man müſste nach den Bestandtheilen drei Gattungen annehmen. Eben so ist es mit der Hornblende, mit dem Strahlstein, dem Tremolith und Baikalith beschaffen, welche Haüy jetzt unter die einzige Gattung Amphibel oder Hornblende, bloſs wegen der behaupteten Gleichheit der Kerngestalt bringt, obgleich groſse Verschiedenheit in den Bestandtheilen, in dem Bruche, in dem Verhalten im Feuer, in der eigenthümlichen Schwere, ja selbst in den physischen Eigenschaften unter ihnen obwaltet. Haüy sucht sich dadurch zu helfen, daſs er glaubt, die Verschiedenheit der Bestandtheile rühre von den Muttergesteinen der Kristalle, oder von bloſser Einmengung fremder Bestandtheile her, welche sich zwischen die Moleküls eingeschlichen hätten, und er will sogar die metallischen färbenden Theile nicht als gemischt, sondern bloſs als eingemengt erkennen. Wie seicht diese Behauptung sey, läſst sich leicht zeigen. Denn was besonders die metallischen färbenden Theile betrifft, so würde bei deren bloſser Einmengung keine Durchsichtigkeit statt finden, die man doch bei dem Topas, Saphyr, Spinell, Smaragd, Berill und andern äuſserst vollkommen bemerkt. Ferner muſs man doch wohl einem Vauquelin, Laugier, Klaproth zutrauen, daſs sie reine und von dem anhängenden Muttergestein freie Stücke zu ihren Untersuchungen genommen haben. Es finden sich auch die vorbemerkten Steinarten nicht in einer, sondern in mehreren Arten Muttergestein. So kommt der Granat im Glimmerschiefer, Granit, Kalkstein, Serpentin und Quarz zum Vorschein. Endlich, wenn die verschiedenen Grunderden, welche die Chemiker aus dem zerlegten Stein dargestellt, in ihnen nicht gemischt, sondern eingemengt waren, so würden die Säuren selbige, ohne vorhergegangener Röstung mit Kali, wodurch die Mischung der Kieselerde besonders aufgehoben wird, ausziehen.

Aus allem bisher angeführten erhellet also deutlich, daſs man die Haüysche Bestimmung der mineralischen Gattung nicht als richtig annehmen kann.

Wenn man die Mineralien genau betrachtet, und besonders erwägt, daſs sie unorganische, bloſs durch Mischung und Anhäufung gebildete Körper sind, so scheint mir die Gattung am sichersten bestimmbar durch Identität der Mischung der Bestandtheile, des Verhaltens im Feuer, des eigenthümlichen Gewichts, der Härte, der Structur und der physischen Eigenschaften, worunter ich besonders den Magnetismus, die Elektricität, die Phosphorescenz, die Strahlenbrechung rechne. So viel Einwendungen auch die Anhänger des Haüyschen und des Wernerschen Systems gegen die auf die chemischen Bestandtheile sich gründende Bestimmung der Mineralien gemacht haben, so widerlegen sie nicht allein dadurch diese Einwürfe, daſs sie selbst die Klassen und Ordnungen der Fossilien nach diesem Grundsatz einrichten, sondern es ist derselbe auch der Natur der Mineralien am angemessensten, weil bei einem bloſs gemischten Körper nichts beständiger und zuverlässiger seyn kann, als seine Bestandtheile. Es versteht sich von selbst, daſs es hierbei hauptsächlich auf das qualitative, und nicht so sehr auf das quantitative dieser Bestandtheile ankommt, obgleich bei letzterm ein überwiegender Bestandtheil bei sonst gleicher Qualität der übrigen einen groſsen Unterschied machen kann. Allein alsdann wird man immer finden, daſs ein oder mehrere der vorher angeführten Merkmale verändert sind. Die neulich von unserm verehrten Collegen Herrn Klaproth mitgetheilte Untersuchung über den Weiſstein giebt hiervon einen klaren Beweis. Sieht man bloſs auf das Quale der Bestandtheile des Weiſssteins und des Feldspaths, so kommen sie beide überein, in der Quantität zeigt sich ein beträchtlicher Unterschied.

Der Weiſstein besteht aus Kieselerde 80, Alaun 12, Eisen 1,50, Kali 5, Wasser 0,50.
Der Feldspath . . . . 64, — 19,75, — 1,75, — 11,50 — 0,75,

Allein der Weiſsstein ist härter und schwerer als der Feldspath; dieser zeigt eine deutliche, jener eine sehr versteckte blättrige Structur; dieser flieſst im Feuer leicht und vollkommen zu einem zwar sehr kleinblasigen, aber wirklichen Glase, jener giebt eine groſsblasige, sehr poröse undurchsichtige Masse, oder überzieht sich bloſs mit einem milchweiſsen Emaille, und man sieht also, daſs man mit, der Gattung nach, völlig verschiedenen Körpern zu thun habe.

Eben so ist das Verhalten im Feuer, und also auch vor dem Löthrohr, ein richtiges Merkmal, welches zum Beispiel darthut, daſs der Rubellit von dem Turmalin getrennt werden muſs, da alle Turmaline vor sich sehr leicht schwammig schmelzen, der Rubellit aber mit Verlust seiner Farbe und deren Veränderung ins milchweifse, im heftigsten Feuer beständig bleibt, ohne seines Natrumgehalts zu erwähnen. Es finden sich freilich, wie ich schon in meiner der königlichen Akademie vorgelesenen Abhandlung über das Verhalten der Erd- und Steinarten vor dem Löthrohr sagte, bei der Schmelz- oder Unschmelzbarkeit der Steinarten, Umstände, welche die Chemie noch nicht ganz aufgeklärt hat. Denn wir finden häufig, dafs wenn die einfachen Erden und die färbenden Metalle, welche die Chemie aus Steinen darstellt, in demselben Verhältnifs gemengt und ins Feuer gebracht werden, sie nicht fliefsen, und eben so bemerkt man, dafs manche Steine, welche in ihren Bestandtheilen vollkommen schmelzbar seyn sollten, es nicht sind, andre aber, bei denen man wegen ihrer Mischung keine Schmelzung vermuthen sollte, doch vor sich schmelzen. Eine Vergleichung des an Kali so reichen aber doch unschmelzbaren Leucit mit dem blofs erdigen und kieselreichen, doch leichtflüssigen Vesuvian, giebt hievon den Beweis. Man könnte zwar glauben, dafs bei einer Mengung von Bestandtheilen zerlegter schmelzbarer Steine und ihrer sich doch äufsernden Unschmelzbarkeit ein grofser Unterschied sich befinde, da hier nur eine Mengung, in dem Stein aber eine Mischung vorhanden sey. Es fällt indefs dieser Einwurf dadurch weg, dafs wenn die aus einem Stein geschiedenen Bestandtheile in einem andern Verhältnifs, als sie in dem zerlegten Stein hatten, gemengt und ins Feuer gebracht werden, doch die Schmelzung erfolgt, welches beweiset, dafs auch ganz einfache blofs gemengte Erden in gehörigem Verhältnifs vor sich schmelzen können. Ich habe daher schon an andern Orten die Vermuthung geäufsert, dafs bei den Steinen noch andere und unbekannte Modificationen vorkommen müssen, welche aufser den Bestandtheilen, die Schmelz- oder die Unschmelzbarkeit derselben bewirken. Wenn nun auch diese Modification die Chemie noch nicht dargestellt hat, so sieht man doch aus dem Erfolge, dafs dieselbe bei einem schmelzbaren Stein da sey, bei einem unschmelzbaren aber fehle. Folglich giebt dieses Verhalten im Feuer allezeit ein sehr unterscheidendes Merkmal ab. Eben so ist es mit der Härte beschaffen. Diese Eigenschaft hängt von den Cohäsionskräften der Körper ab, und da diese den Berührungspunkten gemäfs ist, diese sich aber auch sehr nach der Figur der kleinen Theile richten müssen, so ist es höchst wahrscheinlich, dafs in den hiebei verschiedenen

Mine-

Mineralien auch aus integrirenden Theilen bestehen, welche in ihrer Figur und Form von einander abweichen.

Auf ähnliche Art scheint es mit dem eigenthümlichen Gewichte der Mineralien beschaffen zu seyn. Denn diese Eigenschaft rührt doch von einer genauen Verbindung der integrirenden Theile her, wobei also Form und Figur dieser Theile auch eine Rolle zu spielen scheinen. Die Structur oder der Bruch der Mineralien ist unstreitig eins der vorzüglichsten äufsern Kennzeichen, da selbiges von der Art der Verbindung der gleichartigen Theile abhängt, aus welchen das Mineral zusammengesetzt ist, auch bei dem blättrigen, fasrigen, strahligen und platten- oder schieferförmigen auf die Entstehungsart führet.

Verbindet man nun mit allen diesen Kennzeichen noch die bei manchen Mineralien vorkommenden physischen Merkmale, so wird es nicht schwer fallen, die mineralogische Gattung daraus zu bestimmen, und die übrigen von Herrn Werner angegebenen äufsern Merkmale, so wie besonders auch die Arten des Bruchs, und die bei jedem vorkommenden Abänderungen in der Kristallform, werden die besten Merkmale für die Arten der Gattungen darbieten. Ich will gern zugeben, dafs hin und wieder doch Anomalien vorkommen. Allein finden sich diese nicht auch bei den organischen Körpern, und ist es also zu verwundern, wenn sie sich bei unorganischen zeigen?

Ich will nun auch einen kleinen Versuch machen, um zu zeigen, ob Herr Haüy Recht oder Unrecht habe, dafs er blofs wegen Aehnlichkeit der primitiven Form verschiedene Gattungen unter eine gebracht hat, und ob man diese Steine, nach den oben angegebenen Bestimmungen der mineralogischen Gattung, nicht nothwendig für verschiedene Gattungen annehmen müsse?

Haüy rechnet zu der Gattung Quarz nicht allein die von Werner unter dieser Gattung begriffenen Steine, sondern auch den Feuerstein, den Eisenkiesel, den Hyalith, Opal, Kalzedon, Carniol, Chrysopas, den Jaspis, Hornstein und Kieselsinter, und betrachtet sie als Abarten des Quarzes, weil er glaubt, aber nicht erweiset, dafs sie einerlei primitive Form haben möchten.

Es ist wahr, dafs alle diese Steingattungen in ihren Bestandtheilen sehr nahe verbunden sind, weil sie meist ganz aus Kieselerde bestehen. Allein einmal findet sich auch hierin einiger Unterschied. So besteht der Quarz, nach Thomson, aus bloſser Kieselerde, wogegen sich bei den übrigen eine Beimischung von Kalk- oder Alaunerde, oder von beiden befindet, wozu bei dem Opal noch der beträchtliche Wassergehalt zutritt. Die eigenthümliche Schwere beträgt bei dem Quarz 2,884, bei dem Feuerstein 2,617, bei dem Hyalith 2,476, bei dem Opal 2,073. Alle sind unschmelzbar, allein wie verschieden ist ihr Verhalten im Feuer! Der Quarz wird mürbe, rissig, und verliert seine Durchsichtigkeit nicht ganz; der Feuerstein wird undurchsichtig, und wird mit Verlust der Farbe ganz weiſs; der Hyalith glasirt sich an der Oberfläche; der Opal zerspringt mit Geräusch in kleine milchweiſse, völlig undurchsichtige Splitter; der Quarz endlich hat eine versteckt blättrige Structur mit mehrfachem Durchgange der Blätter. Bei dem Hyalith findet man ebenen, bei dem Feuerstein grobmuschligen, bei dem Opal kleinmuschligen Bruch. Ich übergehe, der Kürze wegen, die übrigen von Haüy zur Quarzgattung gerechneten Mineralien, da bei dieser Vergleichung der Unterschied noch auffallender ist.

Ich muſs hiebei noch eine Frage aufwerfen. Sind bei den Kristallen die secundären Formen als Varietäten oder als Arten anzusehen? Mir ist das letztere, und zwar in Rücksicht auf die Wernerschen Grundgestalten, sehr wahrscheinlich, gesetzt, daſs dieser Unterschied bloſs auf dem quantitativen Verhältnisse der Bestandtheile beruhte, und es wäre sehr zu wünschen, daſs unsere berühmten Chemisten hierüber recht genaue Versuche anstellten. Ich habe zwar in meinem 1793 erschienenen Grundriſs eines Mineralsystems (Seite 94.) Versuche angeführt, die ich mit verschiedenen Kalkkristallsorten vom Andreasberge am Harz angestellt, aus welchen hervorzugehen scheint, daſs der Gehalt an Kohlensäure und Wasser bei denselben verschieden sey. Allein die Werkzeuge zur Auffangung dergleichen flüchtiger feiner Bestandtheile und die dabei erforderlichen Manipulirungen waren zu der Zeit noch nicht so vollkommen, als sie jetzt sind, und daher will ich auf diese Versuche nicht rechnen.

Es giebt aber andre Gründe, welche wahrscheinlich machen, daſs in den Grundgestalten der verschiedenen Kristalle etwas liegt, welches uns nöthigt, bei derselben Gattung aus ihnen Arten zu machen. Zuvörderst muſs doch ein Grund seyn, warum die Elementartheile derselben Gattung bald einen Würfel, bald eine Säule, bald eine Pyramide, bald ein Octaëder und so weiter bilden. Wir sehen ferner aus der Erfahrung, daſs Salze, von eben den Bestandtheilen zusammengesetzt, verschiedene Formen annehmen, je nachdem die Base gegen die Säure in verschiedenem Verhältniſs vorhanden ist, und wovon der Alaun, mit Ueberschuſs oder mit Mängel der Thonerde, durch seine darnach verschiedene Kristallform den Beweis giebt. Noch mehr, die mehr oder weniger oxygenirten Säuren geben mit derselben alkalischen Base verschiedene Formen. Man hat noch weiter in mehreren Mineralien einen beträchtlichen Wassergehalt entdeckt, und Herr Klaproth hat in dem edlen Opal 10 p. C. desselben gefunden. Es läſst sich nicht denken, daſs so beträchtliche Quantitäten Wasser, als Wasser nur in den Zwischenräumen des Opals vorhanden seyn sollten, weil man sonst bei dem Zerreiben desselben Feuchtigkeit beobachten würde. Wie, wenn es nur nach seinen Bestandtheilen von Oxygen und Hydrogen in demselben vorhanden wäre? und sollte die mehrere oder wenigere Menge dieser Elemente keinen Einfluſs auf die Kristallform haben? Endlich ist es doch höchst merkwürdig, daſs, da so häufig auf derselben Druse Kristalle von verschiedenen Gattungen vorkommen, man selten verschiedene Formen derselben Gattung auf einer Druse finden wird, und noch mehr, daſs manche Formen derselben Gattung gewissen Orten fast eigenthümlich, andre aber selten sind. Auf dem Harz ist zum Beispiel die 6seitige Säule bei dem Kalkspath die gewöhnlichste und häufigste Form, welche, besonders die abgestumpfte, in den sächsischen und ungarschen Gebürgen selten vorkommt; und eben so ist die Pyramide, vorzüglich die 6seitige, der Gegend von Derbyshire besonders eigen, und die andern Formen fehlen fast ganz. Nach diesen Umständen sollte man fast die Wernerschen Grundgestalten, die Linse ausgenommen, welche eine Pyramide ist, für Arten halten, wogegen die mannigfaltigen Veränderungen, welche sich durch Abstumpfung, Zuschärfung, Zuspitzung, Durchtheilung der Flächen zeigen, als Varietäten zu betrachten seyn dürften.

II. Beiträge zur Geschichte des Grossular und der Granatgattung.

Das Mineral, von welchem hier die Rede ist, hat Herr Professor Lachsmann 1790 am Wiluiflufs, an der Mündung des in selbigen fallenden Baches Achtaragta, mit dem daselbst ebenfalls vorkommenden Idokras entdeckt. Beide Kristallisationen kommen theils in dem Lager eines daselbst befindlichen erdhaften, drusigen, porösen Gesteins, theils in einem darunter befindlichen eisenschüssigen Trapp vor. Am meisten soll sich der Grossular auf letzterm Gestein, dem eisenschüssigen Trapp, welcher auf den Kluftablösungen oft mit an einander sitzenden kleinen Kristallen dieser Art, oder mit einer Rinde einer ganz ähnlichen Materie wie übergossen ist, befinden. Pallas machte dieses Mineral in seinen neuen nordischen Beiträgen im Jahr 1793, Th. 5. S. 283., zuerst bekannt, rechnete diese Kristalle gleich zur Granatgattung, und bemerkte, dafs sie weicher als der dortige Idocras wären, dafs sich unter ihnen viele unregelmäfsige von 17, 18, und mehr ungleichen Seiten befänden, dafs kleinere mit dem Idocras öfters verwachsen wären, und dafs die gröfsten nur die Gröfse einer Nufs hätten. Unser Kollege, Herr Klaproth, untersuchte diesen Stein chemisch, und rechnete ihn, nach den gefundenen Bestandtheilen, zu der Gattung des Granat; allein Herr Werner liefs sich durch die grüne, den Stachelbeeren ähnliche Farbe verführen, und machte eine besondere Gattung, welche er Grossular nannte, worin ihm auch die Herren Hoffmann und Steffens gefolgt sind. Da ich durch Herrn Kriegesrath Eversmann bei seiner neulichen Durchreise einen Vorrath von diesem Mineral erhalten, so bin ich im Stande, einige nähere Nachrichten darüber zu geben.

Bisher ist dieser Stein blofs, und zwar um und um kristallisirt, beobachtet worden. Die Kristallformen sind dreifach, die achtseitige doppelte Pyramide, die Seitenflächen der einen Pyramide auf die der andern aufgesetzt, und auf den Endspitzen mit vier Flächen, die auf den abwechselnden Seitenkanten völlig rechtseitig aufgesetzt sind, flach zugespitzt. Ferner erscheint er in dem gewöhnlichen Granat-Dodekaëder, und endlich auch in 5seitiger Pyramide. Die erste Kristallform scheint auch die gewöhnlichste zu seyn; denn unter 30 Stück, welche ich besitze, gehören 28 zu derselben. Man findet diese mit der Leucit-Kristallisation völlig übereinstimmende Form nicht allein einfach, sondern auch in Zwillingskristallen. Nach Herrn Klaproths Untersuchung besteht er aus Kiesel 44, Alaun 8, Kalk 35,50, Eisen 12. Das eigenthümliche Gewicht habe ich 3,600 gefunden. Der Bruch ist versteckt blättrig, in das splittrige sich ziehend. Vor dem Löthrohr schmilzt er in gleicher Zeit wie der Granat zu einer braunen blasigen Perle, und eben dieses zeigt sich in dem Feuer der hiesigen Porcellanmanufaktur im Kohlentiegel mit eingemischten Eisenkörnern. Vergleicht man diese Merkmale mit denen des Wernerschen Granats, so wird man deutlich finden, dafs unser Stein eine blofse Abänderung des Granats sey, zumal auch die Bestandtheile beider sogar quantitative mit einander übereinkommen, dafs es also völlig unrecht sey, denselben wegen der blofsen smaragdgrünen Farbe zu einer besondern Gattung zu machen, und dafs Herr Klaproth sehr richtig geurtheilt hat, wenn er ihm den Namen grüner Siberischer Granat gegeben. Aufserdem habe ich an den erhaltenen Kristallen noch zwei bisher nicht beschriebene Erscheinungen beobachtet. Einmal haben einige Kristalle einen Kern des Muttergesteins in sich, um welchen sich die Granatmasse angelegt hat, und wenn man diesen Kern mit einem Vergröfserungsglase betrachtet, so wird man finden, dafs derselbe kleine Puncte von der Granatsubstanz enthält. Auch hierin, wie in der häufigsten Kristallgestalt dieser Abänderung von Granaten, findet sich grofse Aehnlichkeit zwischen ihm und dem Leucit. Man sieht indefs hieraus deutlich, dafs die Kristalle, als solche, nicht zugleich mit dem sie einhüllenden Muttergestein entstanden sind, sondern dafs die Granattheilchen in dem weichen Muttergestein mittelst ihrer anziehenden Kraft sich vereinigt und die Kristalle gebildet haben. Ferner findet sich, dafs unser Granat sich auflöset und in einer weifslichen Masse zerfällt, also auch hierin mit dem Leucit übereinkommt. Es ist aber hierbei merkwürdig, dafs diese Auflösung in dem Innern und nicht in dem Aeufsern des Muttergesteins erfolgt. Dieses Muttergestein ist von sehr hellgräulicher Farbe, es hat unebenen ins feinsplittrige ziehenden Bruch, erscheint unter dem Microscop sehr porös und von glasigem Ansehn, und ist schwer zersprengbar. Im Kohlentiegel und im Porcellanfeuer schmilzt es zu einer schwarzen, äufserlich glatten, inwendig grofsblasigen Kugel, eben so wie der Weifsstein von Reichenstein, und man kann daher dieses Muttergestein weder als Serpentin noch als Thonstein ansehen. Es bleibt daher unentschieden, ob man selbiges als einen Weifsstein, oder wegen seines sehr porösen glasigen Wesens für ein vulkanisches Produkt annehmen soll.

Ich kann nicht unterlassen, bei dieser Gelegenheit einige allgemeine Bemerkungen über die Gattung Granat und die mit ihm verwandten Gattungen beizubringen. Die neuste Wernersche Schule stellt vier Gattungen auf, Granat, Melanit, Grossular, Pyrop, und theilt ersteren in gemeinen und edlen, unter welchem letztern sie den Almandin begreift, so wie sie den Kolophonit zu dem Granat rechnet.

Andere ältere betrachteten den Almandin als eine besondere Gattung, und rechneten den Melanit, den Grossular und Allochroit zum Granat, und Herr Haüy begreift alle vorgenannte Steinarten, aufser dem Allochroit, wegen der prätendirten Gleichheit der primitiven Gestalt, unter den Granat, und sieht alle übrigen als Varietäten an. Um klar zu zeigen, ob und welche unter diesen Steinarten wahre Gattungen, und welche Arten nur blofse Abänderungen sind, habe ich beigehende Tabelle entworfen, aus welcher sich ergiebt, dafs man wirklich drei verschiedene Gattungen annehmen müsse, nehmlich den Almandin, den Pyrop und den Granat. Denn ersterer besteht blofs aus Kiesel, Alaunerde und Eisen. Er hat die meiste Härte, die gröfste eigenthümliche Schwere, ist der strengflüssigste, und giebt eine schwarze und stark glänzende Schlacke. Man hat ihn bisher blofs kristallisirt gefunden, und wenn man also die Verschiedenheit der Form nicht als Art ansehen will, so würde bei derselben keine Art statt finden. Der Pyrop hat Kiesel, Alaun, Kalk und Bittererde, wenig Eisen und mehr Braunstein. Sein eigenthümliches Gewicht ist geringer, er schmilzt vor dem Löthrohr bereits in zwei Minuten zu einer schwarzen schaumigen Schlacke. Bei dieser Gattung lassen sich drei Arten bestimmen, nämlich die derbe glasige aus Grönland, die derbe fettige oder mit Fettglanz, Kolophonit, und die in Körnern. Der Granat, wohin der Melanit und Grossular auch zu rechnen, besteht aus Kiesel, Alaun, vieler Kalkerde und Eisen. Vor dem Löthrohr schmilzt er in drei Minuten, und giebt eine poröse schwarzgraue oder bräunliche Perle, je nachdem der Eisengehalt in demselben stärker oder geringer ist, und in seinem eigenthümlichen Gewichte hält er das Mittel zwischen beiden vorhergehenden. Man findet ihn derb und kristallisirt, und wenn man also auch hier die Verschiedenheit der Kristallformen nicht achten will, so werden zwei Arten, nämlich der derbe und der kristallische, entstehen. Der Allochroit kann aber daher nicht als eine Granatart betrachtet, sondern muſs als eine besondere Gattung angenommen werden, weil er auſser der reinen Kalkerde noch 6 p. C. kohlensaure Kalkerde enthält, und im Feuer beständig bleibt. Es ist indeſs äuſserst merkwürdig, daſs, so verschieden auch die Bestandtheile des Almandin und des Granat sind, da dieser eine so groſse Menge Kalkerde in sich führt, welche ersterem fehlt, doch alle bei diesen Gattungen vorkommende Kristallformen, ja selbst nach Haüy die Grundgestalten derselben gleich sind, und man sieht hieraus, daſs bei der Kristallisation der aus mehreren einfachen Erdarten bestehenden Steinarten noch unbekannte Umstände vorkommen müssen, deren Entdeckung zur Erkenntniſs des Innern der Natur bei diesen Arten von Körpern höchst wünschenswerth wäre.

Namen.	Kiesel.	Thon.	Kalk.	Kohlensaurer Kalk.	Talkerde.	Eisen.	Mangan.	Eigenes Gewicht.	Verhalten im Feuer.
1) Almandin	35,75	27,25	—	—	—	36	0,25	4,345	Nach 4 Minuten eine dunkelschwarze dichte glänzende Schlacke.
2) Pyrop									
a) in Körnern	40,	28,56	3,80	—	10	16,50	—	3,718	Nach 2 Minuten eine schwarze schaumige Schlacke.
b) derber glasiger	43,	15,50	1,75	—	8,50	29,50	0,50	3,920	Verhält sich eben so.
c) derber harziger									
Kolophonit	35,	15,	29,	—	6,50	7,50	4,75	3,800	Ist noch etwas weniges gleichflüssiger, giebt dasselbe Produkt.
3) Granat	41,	8,50	33,50	—	—	12,	—	3,664	Nach 3 Minuten eine poröse dunkelgrüne Schlacke mit brauner Rinde.
Grossular	44,	8,	33,50	—	—	12,	—	3,572	Verhält sich eben so.
Melanit	34,	6,46	33,50	—	—	25,15	—	3,750	Verhält sich eben so, nur daſs die Farbe dunkler ist und fast ins Schwarze fällt.
4) Allochroit	35,	8,	30,	6	—	17,	3,5	3,540	Ist unschmelzbar und erhärtet.

Chemische Untersuchung des Marekanits.

Von Herrn Klaproth *).

Der Marekanit ist bereits von zwei Scheidekünstlern, Lowitz und Gmelin, untersucht worden, wovon erster als Bestandtheile desselben Kieselerde 74, Alaunerde 12, Kalkerde 7, Bittersalzerde 3, Eisenoxyd 1 **); letzter dagegen Kieselerde 80, Alaunerde 14,45, Bittererde 0,25, Eisenoxyd 2,75, Wasser 1 aufgeführt hat.

Nicht nur diese Verschiedenheit in den angegebenen Mischungstheilen schien eine wiederholte Analyse desselben zu fordern, sondern auch, um zu erfahren, ob nicht der Marekanit neben den erdigen Bestandtheilen auch eines oder das andere der beiden fixen Alkalien enthalte, indem jene Analysen zu einer Zeit aufgestellt worden, als man von dem Daseyn des Kali und Natrum in der Mischung der Naturprodukte im Steinreiche noch nicht Kenntnifs hatte.

Der Findort dieses Fossils ist nahe an der Mündung des Baches Marekanka, wo dieser, in einer Entfernung von 30 Werst von Ochotzk, in einer kleinen Bucht des Ochotzkeschen Meers seinen Ausflufs hat; von welchem Bache auch der Name des Fossils entlehnt ist.

Die erste Nachricht von diesem Fossil findet sich in Sewergin's *Exposition systematique des pierres de roches composées, qui se trouvent dans les différentes parties de la Russie*, vom Jahr 1796 ***), woselbst es als Glaszeolith des Vulkans von Marekan aufgeführt ist.

*) Vorgelesen den 5ten März 1812.

**) Neue Nord. Beiträge V. 299.

***) *Nova Acta Acad. Petropol. T. XII.* 1801. *Pag.* 327.

Der Marekanit kommt daselbst in zwei Arten oder Varietäten, in durchsichtigen und undurchsichtigen, vor. Er erscheint blofs in einzelnen abgesonderten Körnern, von verschiedener Gröfse, von der einer Nufs, bis zu der eines Hirsekorns.

Die Form derselben ist gewöhnlich gerundet, seltener länglich, allezeit aber durch verschiedene Eindrücke verunstaltet, auch etwas stumpfeckig. Aeufserlich erscheinen sie alle völlig glatt, glänzend, und gleichsam wie abgeschmolzen.

Die Farbe der durchsichtigen ist graulich-weifs oder rauchgrau, wodurch sie das Ansehen von gerollten Geschieben des rauchgrauen Bergkrystalls, oder des sogenannten Rauchtopases, wofür man sie auch anfänglich hielt, erhalten.

Die undurchsichtigen hingegen sind dunkelnelkenbraun, auch bläulichschwarz, meistens mit leberbraunen oder ziegelrothen Streifen und Flecken marmorirt; oft mit einem silberweifsen oder kupferrothen schillernden Schein auf der Oberfläche.

Sie sind hart und sehr spröde. In ganzen Stücken widerstehen sie jedoch wiederholentlichen ziemlich starken Hammerschlägen, ohne zu zerspringen; als welches nur durch einen sehr stark geführten Hammerschlag auf dem Ambos erfolgt, wobei sie dann zu den kleinsten Splittern zertrümmern. In diesem Verhalten haben sie einige Aehnlichkeit mit den bekannten, durch schnelles Abkühlen gehärteten Glastropfen, oder Springgläsern.

Der Bruch ist muschlig; die Bruchstücke sind unbestimmt eckig, sehr scharfkantig, und ritzen etwas das Glas.

Das eigenthümliche Gewicht der durchsichtigen ist = 2,365; das der undurchsichtigen ist etwas geringer, nämlich = 2,335.

Merkwürdig ist das Verhalten des Marekanits im Feuer. In der Rothglühhitze erleidet er keine Veränderung. Unterwirft man ihn aber im Platintiegel einer halbstündigen Weifsglühhitze, so löset sich die Oberfläche in eine schaumig blättrige, leichte, zerreibliche Glasrinde auf, die zum Theil in leichten glimmerähnlichen Schuppen abspringt, wobei der innere Kern unverändert durchsichtig und fest verbleibt. Bei den durchsichtigen

Steinen ist die Farbe dieses Glasschaums silberweifs; bei den dunkeln rothmarmorirten erscheint die Silberfarbe röthlich gemengt. Der dabei statt findende Gewichtsverlust beträgt nur gegen $\frac{1}{2}$ Procent.

Die Gebirgsmasse, in welcher der Marekanit vorkommt, bestehet im Perlstein. Den von Pallas, Allegretti und Laxmann dem Sohn hierüber in geognostischer Hinsicht mitgetheilten Nachrichten zufolge, bildet dieses Muttergestein des Marekanits, am Ausflusse des Marekanka, an beiden Seiten desselben, ziemlich steile, 15 bis 23 Faden senkrecht hohe Berge, aus welchen hin und wieder nakte Felsen, vom Ansehen gewundener Baumstämme, hervortreten. Die Bergart erscheint als eine, aus perlfarbenen, glasartig glänzenden, aufs mannigfaltigste durch einander gewellten und gewundenen dünnen Blättchen bestehende Masse, die sehr bröcklich und leicht zerplitternd ist; obgleich sie in zusammenhaltenden Stückchen das Glas ritzt, und daher bei Abstürzungen steiler Hügel zu lockerm Sand zerfällt. In diesem ihren Muttergesteine liegen die Marekaniten in einzelnen gröfsern und kleinern Körnern, mit den Blättchen desselben mannigfaltig umwunden und schalenartig eingeschlossen. Der am nördlichen Ufer des Bachs gelegene Theil des Gebirges enthält die durchsichtigen Marekanite; an der südlichen Seite erscheint die Masse des Perlsteins röthlich, und in dieser sind die undurchsichtigen Varietäten enthalten. Das Verhalten der Bergart im Feuer ist dem des Marekanits gleich; sie blähet sich eben so zu einer lockern, schaumigen, leicht zerreiblichen Masse auf, welches die an sich schon erkennbare nahe geognostische Verwandtschaft des Marekanits mit dem Perlstein um so mehr bestätigt.

Nach Stellers Bericht befinden sich am Fufse des Bergrückens, am Ausflusse des Marekans, mehrere Quellen oder Gruben, 1 bis $1\frac{1}{2}$ Faden tief, die mit einem dünnen weifsen Erdbrei angefüllt sind, der an Farbe, Consistenz und Geschmack einem mit Milch gekochten Mehlbrei ähnlich ist, welchen Erdbrei die Tungusen und Russen theils roh, theils mit Rennthiermilch geniefsen. Wahrscheinlich ist selbiges ein Produkt des aufgelösten Perlsteins.

Da die nachstehende Zergliederung des Marekanits hauptsächlich in der Absicht unternommen wurde, um ihn auf einen Gehalt von Kali oder Natrum zu prüfen, so wurde sie in folgender Art angestellt.

A.

a) 100 Gran des in der Feuersteinschale aufs feinste laevigirten Marekanits von der durchsichtigen Varietät, wurden mit 500 Gran des zuvor wohl ausgetrockneten salpetersauren Baryts gemischt, und im Porcellantiegel bis nach erfolgter völligen Zersetzung der Salpetersäure geglühet. Die gräulichweifse poröse Masse wurde zerrieben, mit reichlichem Wasser aufgeweicht, mit Salzsäure übersättigt und zur Trockne abgedampft. Die bei Wiederaufweichung der Salzmasse mit salzgesäuertem Wasser sich absetzende Kieselerde wog, nachdem sie zuvor ausgeglühet worden, $80\frac{1}{2}$ Gran. Um sich zu versichern, dafs derselben keine Baryterde anhange, wurde sie nochmals mit verdünnter Salzsäure übergossen und digerirt. Die durchs Filtrum wieder abgesonderte Flüssigkeit, mit Schwefelsäure geprüft, erlitt keine Trübung.

b) Zur Entfernung des Baryts aus der Auflösung des Fossils wurde selbige mit Schwefelsäure versetzt, und von dem in der Wärme sich abgesetzten schwefelsauren Baryt durchs Filtrum befreiet.

c) Sie wurde nunmehr durch Ammonium gefällt; der gesammelte Niederschlag wurde noch feucht in heifse Kalilauge getragen, worin er sich sogleich auflösete, mit Hinterlassung eines geringen braunen Niederschlags, der ausgeglühet 0,60 Gran wog, und in Eisenoxyd bestand.

d) Der von der Kalilauge aufgenommene Theil wurde daraus durch salzsaures Ammonium wieder hergestellt. Der Niederschlag, welcher das Ansehen der Alaunerde hatte, wog, nachdem er ausgewaschen, getrocknet und geglühet worden, 10 Gran. Durch Digestion in verdünnter Schwefelsäure aufgelöset, blieb noch Kieselerde zurück, die geglühet $\frac{1}{2}$ Gran betrug; wodurch sich das Verhältnifs der Alaunerde auf $9\frac{1}{2}$ Gran reducirt fand.

e) Die Flüssigkeit wurde zur Trockne abgedampft, und aus der rückständigen Salzmasse das schwefelsaure Ammonium durch gelindes Glühen im Platintiegel verflüchtiget. Es blieb eine geflossene Salzmasse zurück. Sie wurde aufgelöset, durchs Filtrum von einem geringen grauen Bodensatze, der vom Platintiegel herrührte, befreiet, und wiederum zum trocknen Salze eingedickt, welches $15\frac{3}{4}$ Gran wog. Die leichte Auflösbarkeit desselben in Wasser und der Geschmack führten zu der Vermuthung, dafs neben dem Kali auch Natrum in der Mischung des Fossils enthalten sey. Die Auflösung wurde in gelinder Wärme in die Enge gebracht; hierbei sonderte sich schwefelsaurer Kalk in zarten Nadeln ab, dessen gesammelte Menge $\frac{3}{4}$ Gran wog, und 0,33 Gran Kalkerde anzeigte.

f) Nach Entfernung des schwefelsauren Kalks schossen einige, jedoch undeutliche, Krystalle des schwefelsauren Natrum an. Nachdem solche in der übrigen Flüssigkeit wieder aufgelöset worden, wurde diese, zu einiger Bestimmung des Verhältnisses des Kali und Natrum, mit der Auflösung des Platins versetzt. Es bildete sich ein Niederschlag des dreifachen Platinsalzes, dessen gesammelte Menge in 12 Gran bestand. Bei einem angestellten Gegenversuche gaben 100 Theile schwefelsaures Kali, in Wasser aufgelöset und durch Platinauflösung zersetzt, 240 Theile desselben dreifachen Platinsalzes; jene 12 Gran Platinsalz sind also das Erzeugnifs von 5 Gran des schwefelsauren Kali. Nach Abzug desselben, und jener $\frac{3}{4}$ Gran der schwefelsauren Kalkerde von obigen $15\frac{3}{4}$ Gran, zeigen die übrigen 10 Gran das Verhältnifs des schwefelsauren Natrum an. Durch jene 5 Gran schwefelsaures Kali sind 2,70 Kali, und durch die 10 Gran schwefelsaures Natrum 4,50 Natrum, als Bestandtheile im Hundert des Marekanits angezeigt.

Die durch diese Zergliederung dargestellten Bestandtheile des durchsichtigen Marekanits sind demnach

Kieselerde	*a*)	80,50	81,
	d)	0,50	
Alaunerde	*d*)		9,50
Kalkerde	*e*)		0,33
Eisenoxyd	*c*)		0,60
Kali	*f*)		2,70
Natrum	*f*)		4,50
Wasser			0,50
			99,13

B.

Zu gleicher Zeit wurde auch der dunkle, röthlich marmorirte Marekanit der Zergliederung unterworfen.

a) 100 Gran desselben fein gerieben, und durch Glühen mit der fünffachen Menge salpetersauren Baryt vorbereitet, hierauf mit Salzsäure in gleicher Art, wie bei der vorstehenden Analyse mit mehrern erwähnt worden, behandelt, gaben 76 Gran Kieselerde.

b) Nachdem hierauf der Baryt aus der Auflösung durch Schwefelsäure, mit einigem Uebermaafse derselben, entfernt worden, wurde die Auflösung durch Ammonium gefällt; der erhaltene Niederschlag wurde noch feucht in ätzende Kalilauge getragen, worin er sich bei mäfsiger Erwärmung, unter Zurücklassung eines röthlich-braunen Rückstandes, auflösete. Nach Sonderung desselben von der alkalischen Auflösung, wurde aus dieser durch salzsaures Ammonium die Alaunerde gefällt, welche, nachdem sie ausgeglühet worden, 11 Gran wog; nach Wiederauflösung in Schwefelsäure aber ½ Gran Kieselerde zurückliefs.

c) Der von der Kalilauge zurückgelassene hell röthlich-braune Theil wurde ausgeglühet und mit Salpetersäure digerirt. Es lösete sich nur ein Theil davon auf; der übrige blieb in Gestalt eines weifsen Pulvers zurück. Aus der salpetersauren Auflösung fällete ätzendes Ammonium Eisenoxyd, welches geglühet 0,80 Gran wog.

d) Der von der Salpetersäure unaufgelöset hinterlassene Antheil wog, nachdem er ausgeglühet worden, wodurch die weifse Farbe in perlgrau überging, 2½ Gran. Um ihn zuvörderst auf Kieselerde zu prüfen, wurde er mit der vierfachen Menge kohlensauren Kali versetzt und geglühet. Bei Wiedererweichung der geschmolzenen Masse mit Wasser schied sich aber solcher als eine weifse schwere Erde wieder aus, ohne dafs das Kali etwas davon in sich aufgenommen hatte. Die Erde wurde nun mit Salzsäure versucht, worin sie sich nach einiger Erwärmung völlig auflösete, und daraus durch kohlensaures Kali sich als ein weifses körniges Pulver wieder herstellte. Das Verhalten dieses Körpers schien auf Titan zu deuten; als aber die salzsaure Auflösung desselben mit Galläpfeltinktur und zootinischen Kali versucht wurde, hatten keine das Titanoxyd bezeichnende Erscheinungen statt. Der noch übrige geringe Theil wurde mit Schwefelsäure versucht, welche aber keine Auflösung bewirkte, wodurch dann auch die Vermuthung, daſs diese Substanz in Yttererde bestehen mögte, sich widerlegte. Es bleibt demnach die Bestimmung der Natur dieses Bestandtheils in der undurchsichtigen Varietät des Marekanits bis zur Erlangung einer dazu erforderlichen gröſsern Menge ausgesetzt.

e) Die von Fällung der Auflösung durch Ammonium übrige Flüssigkeit wurde zum trocknen Salze abgedampft, und daraus das ammonische Neutralsalz durch Erhitzung verflüchtiget. Die zurückgebliebene Salzmasse kam sowohl quantitativ als qualitativ mit jener der vorhergehenden Analyse überein.

Das Resultat der Zergliederung dieser dunkeln Varietät des Marekanits hat demnach als Bestandtheile derselben dargelegt:

Kieselerde - - - - - - - - - -	76,50
Alaunerde - - - - - - - - - -	10,50
Kalkerde - - - - - - - - - -	0,50
Eisenoxyd - - - - - - - - - -	1,
Kali - - - - - - - - - - - -	2,70
Natrum - - - - - - - - - - -	4,50
noch unbestimmter Bestandtheil	2,50
Wasser - - - - - - - - - - -	0,50
	98,70.

Die nahe Uebereinstimmung in der äuſsern Charakteristik des Marekanits mit der des Obsidians, hat bereits mehreren Mineralogen ein hinlänglicher Grund geschienen, anstatt ihn als eigene Gattung der Kiesel-Ordnung aufzuführen, ihn dem Obsidian als Art unterzuordnen. Die vorstehenden Analysen gewähren dieser Bestimmung auch in chemischer Rücksicht Bestätigung, wie aus nachstehender Vergleichung mit den, von bewährten Chemikern dargelegten Analysen des Obsidians hervorgeht. So fand Vauquelin in dem Obsidian von Cerro de las Navajas bei Mexico: Kieselerde 78, Alaunerde 10, Kalkerde 1, Eisen 2, Mangan 1,6, Kali 6 *).

In einem andern mexicanischen Obsidian fand Collet-Descotils: Kieselerde 72, Alaunerde 12,5, Eisen- und Manganoxyd 2, Kali und Natrum 10 **).

Diesem nach zerfällt nun die Gattung des Obsidians oryctognostisch in 2 Arten, in

a) derben Obsidian, und

b) körnigen (edlen) Obsidian,

zu welchem letztern der Marekanit gehört.

Der derbe Obsidian, welcher zum Theil ganze Gebirgsmassen bildet, ist oft, wie auf Lipari, mit Bimsstein durchwachsen, oder begleitet; wogegen der körnige Obsidian ein Erzeugnifs des Perlsteins ist, und darin die Kerne der abgesonderten Stücke desselben ausmacht. Dieses ist nicht blofs bei dem marekaner Perlsteingebirge der Fall; sondern auch bei dem diesem ganz ähnlichen Perlsteingebirge bei Keressur und Tokay in Ungarn. Diese geognostische Verwandschaft des körnigen Obsidians mit seinem Muttergesteine, dem Perlstein, ist merkwürdiger noch durch die Uebereinstimmung der chemischen Bestandtheile beider Fossilien, welche wir bei Vergleichung der Analysen des Perlsteins mit denen des Obsidians gewahr werden.

So enthält der von mir untersuchte ungarische Perlstein: Kieselerde 75,25, Alaunerde 12, Eisenoxyd 1,60, Kalkerde 0,50, Kali 4,50, Wasser 4,50 ***); und in dem Perlstein von Cinapecuaro in Neu-Spanien fand Vauquelin: Kieselerde 77, Alaunerde 13, Eisen und Mangan 2, Kali 2, Natrum 0,70, Wasser 4 †).

Anlangend die Frage: ob der Obsidian, mithin auch der Perlstein, als Muttergestein des körnigen Obsidians, vulkanischen Ursprungs sey? so sind

*) Neues allgemeines Journal der Chemie, 5. B. S. 230.

**) Ebendaselbst S. 122.

***) Beiträge zur chemischen Kenntnifs der Mineralkörper B. 3. S. 331.

†) Neues allgemeines Journal der Chemie 5. B. S. 230.

sind hierüber die Meinungen noch getheilt. Vornämlich scheinen die französischen Naturforscher der Meinung derjenigen beizupflichten, welche den Obsidian als ein Feuerprodukt betrachten, und für verglasete Lava ansehen.

Nach Dolomieu's Classification der vulkanischen Produkte, welche auch Haüy in seinem Lehrbuche der Mineralogie befolgt, begreift die zweite Ordnung derselben die verglaseten Laven in folgender Abtheilung:

1) *Lave vitreuse obsidienne.*

a) Massive;

b) Granuliforme; zu welcher letzteren der Marekanit, so wie der körnige Obsidian des Tokayer Gebürges, sonst auch Luchs-Sapphir genannt, gehört:

2) *Lave vitreuse émaillée*;

3) *Lave vitreuse perlée*, oder der Perlstein;

4) *Lave vitreuse pumicée*, oder der Bimsstein;

5) *Lave vitreuse capillaire*; wie dergleichen haarförmige Fäden in den sandig zerfallenen Perlsteinen des Marekangebürges sich finden.

Es sind jedoch auch die Gründe derjenigen Naturforscher nicht unbeachtet zu lassen, welche sämmtlichen in dieser Ordnung aufgeführten Fossilien, selbst den Bimsstein nicht ausgenommen, den vulkanischen Ursprung absprechen.

Hierdurch wird jedoch das Vorkommen wirklicher Glaslaven nicht bestritten. Beispiele davon, die jedoch mehr glasig geflossenen Schlacken ähnlich sind, finden sich vielleicht bei allen Vulkanen, woselbst dann die Lokalität allein schon zu deren Erkennen hinreichend ist. Außerdem gewährt das verschiedene Verhalten im Feuer in zweifelhaften Fällen das sicherste Mittel, Obsidian und Glaslava zu unterscheiden. Der Obsidian blähet sich zu einer weißlich-grauen, schaumigen Masse auf, die nur schwer, bei anhaltender Weißglühhitze, zum dichten, durchscheinenden Glase, mit eingeschlossenen Luftbläschen, fließt, welches sich aber bei einer zweiten Umschmelzung nicht weiter aufblähet, sondern wiederum ein dichtes Glas giebt. Bei einer echt vulkanischen Verglasung hingegen hat kein dergleichen Aufschaumen statt, sondern die Masse gehet, bei dem dazu erforderlichen Grade der Hitze, gleich dem gemeinen Glase, unter Beibehaltung der glasig-glänzenden Oberfläche, in den schmelzenden Fluſs über. In gleicher Art würde sich nun auch der Obsidian im Feuer verhalten müssen, wäre er, nach der Meinung der Vulkanisten, das Erzeugniſs einer vulkanischen Glasschmelzung.

Beiträge
zur
Naturgeschichte des Biebers.

Von Herrn Walter Sohn *).

Der Bieber, Kastor, ist ein von Farbe mehrentheils graubraunes, mit Haaren versehenes, vierfüſsiges Thier, welches zwar im Wasser eine Zeit sich aufhält, gröſstentheils aber auf dem Lande wohnet; ein Thier also von ganz besonderer Art.

Er ist das einzige vierfüſsige Thier, welches einen glatten, eyförmigen, schuppigen Schwanz erhalten hat; dessen Hinterfüſse zwar fünf besondere Zehen haben, welche aber durch Schwimmhäutchen mit einander zusammenhängend sind, und dessen Vorderfüſse fünf mit etwas rundlichen Nägeln besetzte und ganz von einander abgesonderte Zehen besitzen.

Hierdurch ist der Bieber das einzige Thier, welches an den Vordertheilen einem Landthiere, mit den Hintertheilen aber einem Wasserthiere ähnlich ist. Linné rechnet es zu den *mammalibus*, und führt es unter diesen, in der fünften Klasse, auf. Die Alten kannten den Bieber recht gut; sie nannten ihn den parthischen Hund, und er wurde unter die unverletzlichen Thiere gezählt; denn nach den Religions-Grundsätzen der persischen Weisen war es verboten, einen Bieber zu tödten. Es ist daher auch kein Wunder, wenn über dieses Thier schon sehr viele Männer geschrieben haben; es finden sich aber in allen, mir bis jetzt über die Naturgeschichte des Bie-

*) Vorgelesen den 18ten November 1815.

bers bekannten Schriften beträchtliche Lücken, und dieses ist die Ursache, warum ich diesen Gegenstand zur Unterhaltung für die königliche Akademie der Wissenschaften gewählt habe. Da mir nur vorzüglich daran gelegen ist, theils ganz neue Dinge vorzulegen, theils die schon in manchen Schriften vorgetragenen Sachen zu verbessern, und die Theile des Biebers mit denen des Menschen zu vergleichen, so wende ich mich zur Beschreibung der einzelnen Theile dieses Thieres.

Den Menschen betrachte ich, in Absicht seiner thierischen Einrichtung, als das vollkommenste Geschöpf; ich lege ihn daher zum Grunde, und vergleiche auf solche Art die Theile des Biebers mit denen des Menschen. Was die Oekonomie des Biebers betrifft, so habe ich diese hier ganz unberührt gelassen, weil man in den Schriften des Grafen von Büffon, Daubenton und den Reisebeschreibungen mehrerer Männer, welche die Beobobachtung desselben zu einem besondern Gegenstand gewählt haben, hierüber die ausführlichsten Berichte aufgezeichnet findet.

Der Bieber, welchen ich zergliedert habe, war männlichen Geschlechts, sein Kopf aber war gänzlich zerschmettert; ich konnte daher weder seine Nase, noch sein Gehirn, noch seine Augen, noch Ohren, noch Mund untersuchen; dieses muſs ich für jetzt unberührt lassen. Mit desto gröſserer Genauigkeit aber habe ich die Höhle der Brust und des Bauchs untersucht. Ich spreizte zuerst die Blutgefäſse dieses Thieres mit meiner sehr feinen rothen Wachsmasse aus, und hierauf ging ich erst zur Betrachtung eines jeden Theils insbesondere über. Eine Vorkehrung, welche ich jedesmal bei Untersuchung der Thiere beobachtet habe; denn sind die Blutadern eines Thiers, welches man beschreiben will, vorher nicht mit einer gefärbten Masse ausgespreizt, so kann man höchstens nur die Figur und Lage der Theile beschreiben, den Bau aber keinesweges erkennen. Daher halte ich auch diejenigen Beschreibungen von Thieren, deren Adern nicht gefärbt sind, für nicht ganz vollkommene Beschreibungen, und ein Zootom, welcher die Kunst zu injiciren nicht versteht, ist höchstens nur ein halber Zootom; von denjenigen, welche thierische Theile, deren Adern andere injicirt oder wohl gar schon ausgearbeitet haben, beschreiben, rede ich gar nicht, denn diese finden schon fertige Arbeit, sie schmücken sich nur mit fremden Federn. Die Lungen des Biebers sind, im Verhältniſs ihrer Gröſse, seinem Körper angemessen. Sie unterscheiden sich aber von den menschlichen Lungen dadurch: einmal, daſs sie mehrere Einschnitte haben, zweitens besitzen die Theile derselben nicht dasselbe Verhältniſs gegen einander, wie die menschlichen, und drittens sind sie vorzüglich wegen ihrer innern Bauart von der menschlichen Lunge sehr verschieden. Der Magenschlund des Biebers ist äuſserst musculös, und hat übrigens seine gehörige Lage, und eine mit diesem Thiere verhältniſsmäſsige Länge und Breite. Seine inwendige Fläche weicht aber von der menschlichen besonders ab. Man findet nämlich, daſs ein äuſserst festes Oberhäutchen (*epidermis*) denselben inwendig überzieht. Sie ist gleichförmig fest an der ganzen innern Fläche des Magenschlundes, und verlängert sich durch die linke Magenöffnung nach der innern Fläche des Magens selbst, woselbst sie aber sehr verdünnt wird, und daher leicht abgenutzt werden kann. Sie ragt in Gestalt eines weiſsen Püschels durch den linken Magenmund in den Magen selbst hinein, also ein deutlicher Beweis, daſs sie nunmehr beim Eintritt in den Magen weit feiner geworden. Der Magen des Biebers ist mehr rund als länglich, überhaupt sehr stark und dick. Dieses rührt her von den starken Muskelfasern, welche die muskulöse Haut des Magens bilden. Es nähert sich also hierdurch der Bieber solchen Thieren, welche harte Nahrungsmittel, ohne sie vorher klein zu kauen, genieſsen, als z. E. Hühner, Gänse, Enten, alle Gattungen Habichte, das Eulengeschlecht, die Reiher, und so mehr dergleichen. Aeuſserlich am Magen, an derjenigen Stelle, an welcher der Magenschlund sich einsenkt, das heiſst, am linken Magenmunde, zum Theil auch am Grunde des Magens, wird man durch bloſses äuſserliches Gefühl einen ziemlich harten, festen Körper gewahr; dieses ist ein Theil von ganz besonderer Art, welchen der Mensch, und so viel ich weiſs, auch die übrigen Thiere, nicht haben. Es scheint dieser Körper beim ersten Anblick eine Drüse zu seyn, und dieses hat auch wohl die Herren Büffon und Daubenton verleitet, ihn dafür zu halten. Wenn man ihn aber mit Genauigkeit untersucht, so findet man, daſs es nichts anders als blinde Beutel sind, welche von einer überaus gefäſsreichen Membran gebildet werden, und sich, ein jeder für sich, an der innern Fläche des Magens, an seinem vorhin beschriebenen Anfange, eröffnen. Ich habe einige derselben ausgearbeitet, sie geöffnet, und in einige derselben Sonden gesteckt, um auf solche Weise mich von ihrer Eröffnung in den Magen überzeugen zu können. Die Anzahl dieser Oeffnungen habe ich zwar nicht genau bestimmen können, unterdessen kann man ganz bequem 60 bis 70 grofse zählen, deren einige 1 bis $1\frac{1}{2}$ Linien im Durchmesser haben, in welchen sich wiederum noch andere kleinere Oeffnungen vereinigen. Diese blinde Beutel, insgesammt genommen, werden mit einander verbunden durch ein sehr festes Zellgewebe; über ihnen setzen sich die Muskelfibern des Magens fort und überziehen sie; dergestalt bilden sie von aufsen, einen, dem Gefühle nach, harten Körper. Inwendig, wo alle diese Beutelchen oder Säckchen ihre Eröffnung in den Magen haben, überzieht sie das vom Magenschlunde durch die linke Magenöffnung nach dem Magen selbst fortgesetzte Oberhäutlein, (*epidermis*), welches als ein Ueberzug diese Theile sämmtlich bekleidet, und von welchem ich bei Gelegenheit des Magenschlundes vorhin schon etwas Erwähnung gethan habe. Dieser Ueberzug, vom Oberhäutlein gebildet, wurde von der Natur mit besonderer Vorsicht hier angelegt, nämlich deshalb, damit die harten Nahrungsmittel, welche durch den Magenschlund in den Magen kommen, die hier im Magen sich befindlichen Magennerven nicht reitzen sollten, und auf solche Art jede unangenehme Empfindung im Magen abgewendet würde. Aber auch zu gleicher Zeit sieht man deutlich ein, wie weislich die Natur für den Bieber gesorgt hat. Denn da er von sehr harten Nahrungsmitteln lebt, so werden dieselben, indem sie durch den Schlund in den Magen treten, sogleich durch diese vielen Oeffnungen mit einer grofsen Menge Schleim umgeben, gleichsam eingewässert, und zu leichterer Auflösung und Verdauung geschickt gemacht.

Untersucht man nun ferner das rechte Ende des Magens, so findet man gegen den Vorhof des Pförtners einen ähnlichen, dem Gefühl nach festen, wiewohl nicht so ganz dicken Körper. Dieser erstreckt sich bis ans Ende des Magens, und umgränzt seine rechte Oeffnung wie eine Wulst. Dieses sind nichts anders, als die sich hier stärker ansammelnden Muskelfibern des Magens, welche hier einen überaus starken Schlüfsmuskel bilden, wodurch dann die rechte Oeffnung des Magens sehr genau zugeschlossen wird. Diesen Schlüfsmuskel hat der Mensch zwar auch, aber bei weitem nicht so stark; die Natur legte ihn deswegen hier so stark an, damit die harten Nahrungsmittel aus dem Magen nicht sogleich nach ihrem Eintritt und eher herausgleiten könnten, als bis sie theils erweicht, theils zur Verdauung vorbereitet wären. Vergleicht man überhaupt die innere Fläche des Magens eines Biebers mit der innern Fläche des Magens eines Menschen, so findet man einen sehr merklichen Unterschied. Es finden sich zwar in dem menschlichen Magen hin und wieder ebenfalls einige Schleimhöhlen und Drüsen, welche aber bei weitem nicht so deutlich und ansehnlich sind. Keineswegges aber bemerkt man das vorher beschriebene am Magen des Biebers. Betrachtet man vorzüglich die innere Seite der rechten Oeffnung des Biebermagens, so wird man gewahr, dafs sich hier die Schleimhöhlen des Magens ganz besonders deutlich zeigen. Der Zwölffingerdarm, als der Uebergang des Magens in die dünne Gedärme, liegt nicht, wie beim Menschen in der Verdoppelung des Bauchfells, welche sich am mittleren Theile des Kolikdarms befestiget, sondern, gleich den andern Gedärmen, frei im Unterleibe. Seine äufsere Fläche erscheint daher auch ganz glatt, wie bei allen andern Gedärmen. Seine Krümme ist nicht so mannigfaltig wie im Menschen. Seine Länge ist aufserordentlich, und man kann mit Recht sagen, sie ist auffallend. An seinem Anfange, als an seiner Verbindung mit dem Magen, ist er weiter, in der Folge aber ist sein Durchmesser vollkommen gleich dem der übrigen dünnen Gedärme. Seine inwendige Fläche ist vorzüglich verschieden von der im menschlichen Zwölffingerdarm; anstatt dessen aber ist die innere Fläche äufserst zottig. Man kann überhaupt von dieser Fläche im allgemeinen sagen, dafs das Ansehen, welches die innere Fläche des Zwölffingerdarms darbietet, schwer mit Worten auszudrücken ist. Unterdessen hat sie dennoch die mehrste Aehnlichkeit mit der inwendigen Fläche der menschlichen Gallenblase. An einigen Stellen bemerkt man sogar mit blofsen Augen eine Menge von Schleimdrüsen. Gegen den Anfang des Zwölffingerdarms wird man eine Erhabenheit gewahr; dies ist die Stelle, an welcher sich, gleichwie im Menschen, der Gallengang und der Gang der grofsen Gekrösdrüse (*pancreas*) einsenken; nur mit dem Unterschiede, dafs diese Einsenkungsstelle beim Bieber näher dem Magen als wie im Menschen sich befindet. Der Leerdarm, dessen inwendige Fläche beim Menschen sehr viele Klappen besitzt, hat im Bieber, gleich dem Zwölffingerdarm, ebenfalls keine Klappen. Er hat inwendig mit dem Zwölffingerdarm fast einerlei Ansehen, ist jedoch etwas glätter. Er fühlt sich aber dicker als der Grimmdarm an. Er hat eine Menge von Drüsen erhalten, welche man sogar im aufgetrockneten Zustande haufenweise an ihm entdecken kann. Die Gefäfse, welche zwischen der Verdoppelung des Gekröses zu den Gedärmen laufen, machen hier nur eine Art von unordentlicher Krümme, worauf sie alsdann unmittelbar zu den Gedärmen sich hinbegeben. Ein wesentlicher und wohl zu beobachtender Unterschied von denen im Menschen, wo diese Gefäſse drei verschiedene Bogen bilden. Lymphatische Gefäſse habe ich nicht beobachten können, ungeachtet ich mit der gröſsten Aufmerksamkeit und Genauigkeit mit meinem Apparat die dünnen Gedärme durchsucht habe. Es muſs überhaupt, wie es mir sehr wahrscheinlich ist, eine ganz andere Art der Absonderung im Leer- und Krümmdarm eines Biebers, als im Menschen, geschehen. Es zeigte sich in den Gedärmen selbst ein weiſser klebriger Schleim, welcher vielleicht dazu dient, die harten Nahrungsmittel einzuwickeln. Der Eingang des Krümmdarms in den Blinddarm geschieht auf eben die Art wie beim Menschen, das heiſst, es bildet sich auch hier eine Falte, welche man die Falte des Kolikdarms nennt. Rechts neben der Einsenkungsstelle der dünnen Gedärme in die dicken, dicht am Eingange in den eigentlichen Blinddarm, befindet sich eine halbmondförmige Verdoppelung; übrigens ist die ganze innere Fläche des Blinddarms glatt. Es geht nämlich dieser Darm von der rechten zur linken Seite, in Form eines halben Cirkels sich krümmend, etwas von oben nach unten, und endigt sich in ein allmählig stumpfrund zugespitztes fingerförmiges Ende, welches sehr viel ähnliches mit dem wurmförmigen Fortsatz am Blinddarm eines Menschen hat. Es hat also der Blinddarm im Bieber, gleich dem in andern Thieren, gleichfalls keinen eigenthümlichen wurmförmigen Fortsatz, welchen Vorzug nur der Mensch hat. Ueberhaupt ist die Figur des Blinddarms im Bieber eine ihm eigenthümliche; dieser Darm hat, nach Verhältniſs der übrigen Gedärme, eine erstaunliche Weite. Auf diese Art unterscheidet er sich von der Gestalt in vielen andern Thieren, bei welchen er, wie zum Beispiel beim Schafe, einen stumpfen cylindrischen Beutel bildet. Hierauf mehr links fängt der Kolikdarm an; gerade am Anfange desselben befindet sich ebenfalls eine Klappe, welche aber gröſser ist als die, welche sich an dem Blinddarm befindet. Der Anfang des Kolikdarms ist sehr weit, und hat die Form eines kurzen und weiten Trichters. In der Folge aber wird er mehr gleichförmig weit, bis endlich, im weitern Fortgange, sein Durchmesser sich nach Verhältniſs der übrigen Gedärme sehr ansehnlich verkleinert. Seine Richtung ist erstlich von der rechten zur linken, hierauf bildet er einen sehr spitzen Winkel, geht alsdann ziemlich horizontal bis in die linke Seite fort, wo er alsdann wiederum einen eben solchen

spitzen

spitzen Winkel, gleich wie auf der rechten Seite, bildet. Klappen hat der Kolikdarm im Bieber gar nicht, und hierin ist er ebenfalls vom menschlichen und vom Kolikdarm einiger Thiere sehr verschieden. Aus den mannigfaltigen Windungen des Kolikdarms und dem besondern Bau des Blinddarms läfst sich nunmehr auch der Umstand erklären, warum, nach Angabe einiger Schriftsteller, der Bieber so oft sich krümmen und winden soll. Dieses entsteht durch nichts anders, als weil der Unrath nur mit der gröfsten Beschwerlichkeit und Langsamkeit aus den dicken Gedärmen fortgeschafft werden kann; hierdurch werden die Nerven geprefst, und folglich entstehen Schmerzen, das heifst, es wird ein Krümmen und Winden statt finden müssen.

Man sieht nämlich, dafs der ganze Vorrath der Nahrungsmittel, die ihre besten Theile in den dünnen Gedärmen zur Ernährung dieses Thieres verloren haben, auf einmal in den weiten Sack des Blind- und Kolikdarms einfällt, und hier, da sie nicht sogleich fortgeschafft werden können, eine lange Zeit sich aufhalten müssen, daher sie den Blind- und Kolikdarm gewaltig ausdehnen, und also die Unannehmlichkeiten für den Bieber entstehen, welche ich so eben angeführt habe. Der Mastdarm, als der letzte Theil der Gedärme, erscheint inwendig sehr runzlich und ungleich. Sein äufserstes Ende ist mit einem ziemlich dicken Oberhäutlein (*epidermis*) bedeckt, welches sich von auswärts durch den After, als die äufsere Oeffnung des Mastdarms, nach dessen innerer Fläche fortgesetzt hat. In Vergleich mit dem menschlichen ist das innere Ansehen sehr verschieden. Der menschliche hat nämlich weit mehr Ungleichheiten, weit mehr Vertiefungen, unter denen sich zum Theil verschiedene Schleimhölen befinden. Am Anfange des Afters befindet sich nach vorn eine Oeffnung, welche eine gemeinschaftliche Oeffnung von dreien ist, nämlich, die eine führt in die Harnröhre, und die beiden andern sind Oeffnungen von zweien Beuteln, in welchen das sogenannte Biebergeil enthalten ist. Neben diesen Oeffnungen rechter Seits befinden sich wiederum zwei andere, die eine nach vorn, die andere nach hinten; diese führen zu zweien kleinen Behältern, in welchen das sogenannte Fett des Biebers enthalten ist. Endlich, neben dem After entdeckt man wiederum zwei Oeffnungen, von welchen eine auf jeder Seite erscheint. Diese führen in zwei kleine Beutel. In dem Darmkanal des Biebers halten sich, eben so wie im menschlichen und aller andern Thiere, Würmer auf. Sie sind von Farbe weifs, und haben die Form von kleinen Bläschen. Ob der Bieber aufser diesen noch mehrere, und vorzüglich mannigfaltige Arten von Eingeweide-Würmern in sich hat, hierüber kann ich für jetzt nichts bestimmtes sagen, da ich zu diesem Behuf noch nicht Bieber genug zu untersuchen Gelegenheit gehabt habe. Ich breche für jetzt zwar in der Materie über den Bieber ab, ich werde aber die für jetzt ausgelassenen und übergangenen Theile, auf eben die Art im Vergleich mit denen des Menschen, ein andermal die Ehre haben vorzutragen.

Schliefslich will ich nur noch anführen, dafs die mühsamen, zu diesem Bieber gehörigen, von mir selbst mit vieler Kunst ausgespritzten und mühsam ausgearbeiteten Präparate, sich sämmtlich im königlichen anatomischen Museo befinden.

Ueber
die Gattung Papyrus.

Von C. L. Willdenow *).

Unter der Benennung **Papyrus** war in den frühesten Zeiten bei den Aegyptern ein schilf- oder binsenartiges Gewächs bekannt, dessen Rinde des Halms man gebrauchte, um daraus lange Blätter zu verfertigen, worauf man schreiben konnte, und die von dem Gewächse selbst Papier genannt wurden. Die Art, wie dieses Papier gemacht wurde, war ungefähr folgende: man lösete die Haut des Halms in schmale Streifen ab, und legte diese mit den Rändern übereinander, suchte die Streifen gleich frisch fest anzudrücken, die dann wegen des klebrigen Safts der Haut dicht zusammen leimten. Es bedurfte also zur Bereitung des Papiers weder eines klebrigen Gummis, noch eines harten Instruments, um es zu klopfen. Die Griechen und Römer lernten das Papier von den Aegyptern kennen, und durch sie wurde die Kunst der Anfertigung vervollkommnet. In neuern Zeiten hat der Cavaliere **Xaver Landolina** aufs Neue die Art entdeckt, wie aus der Papyrusstaude die Alten das Papier verfertigten, und im Jahre 1802, von dem damals regierenden König von Neapel, darüber ein Privilegium erhalten. Es ist aber auch bekannt, daſs die Chineser und Japaneser schon vor vielen Jahrhunderten aus mehreren Gewächsen, namentlich aus dem sogenannten Papiermaulbeerbaum (*Broussonetia papyrifera*) Papier anzufertigen wuſsten, und es mögte daher die Frage: ob die Kunst Papier zu machen den Aegyptern oder den Chinesen und Japanesen früher bekannt gewesen sey? sehr

*) Vorgelesen den 26sten Marz 1812.

schwer zu beantworten seyn. Eine Untersuchung der Art würde mich zu weit von dem mir vorgesteckten Ziele entfernen, da ich hier nur die genauere botanische Bestimmung dieses Gewächses beabsichtige. Wer überhaupt die technische Bereitung des Papiers bei den Alten will kennen lernen, mag die Werke des Theophrast und Plinius, so wie mehrere der neuern Schriftsteller, darüber zu Rathe ziehen.

Die schilf- und binsenartigen Gewächse wurden von den Botanikern, von dem funfzehnten bis gegen die Mitte des achtzehnten Jahrhunderts, ihrer Aehnlichkeit der äufsern Gestalt wegen, zu den Gräsern gezählt. Linné trennte mit Recht diese Gewächse davon, da ihr übriger Bau sehr abweicht. Zu den Zeiten, als Linné seine Gattungen von Gewächsen begründete, welches um die Mitte des achtzehnten Jahrhunderts war, hatte man noch keine so grofse Zahl von Vegetabilien entdeckt, als gegenwärtig bekannt sind. Die Zahl ist über das vierfache angewachsen, welche von den neuern Schriftstellern beschrieben sind. Die reichen Vorräthe, welche neuere Reisende mit nach Europa brachten, und die uns jetzt nach und nach durch genauere Beschreibungen bekannt werden, machen, dafs die Masse der entdeckten Gewächse fast täglich mehr und mehr anwächst. Bei der kleinern Zahl bekannt gewordener Vegetabilien war es zu Linné's Zeiten nothwendig, der bequemern Uebersicht wegen, die Gattungsmerkmale vielumfassend zu machen. Dahingegen ist es jetzo Bedürfnifs, bei der zahlreichen Menge von Arten, die zu einer begründeten Gattung gehören, um diese kennen zu lernen, sie wieder, wenn es möglich ist, in Gattungen zu zertheilen, und die Charaktere derselben enger und schärfer zu begrenzen. Herr Professor Richard zu Paris hat das besondere Verdienst, die schilf- und binsenartigen Gewächse genauer studirt und in bessere Gattungen abgetheilt zu haben. Ihm ist Vahl in seiner *Enumeratio* gefolgt. Herr Brown, in seinem vortrefflichen *Prodromus plantarum Novae Hollandiae* hat diesen Weg noch weiter verfolgt, und die von Richard und Vahl gemachten Gattungen noch mehr zertheilt. Wie mir es aber scheint, so hat er zu feine Charaktere für diese Familie von Gewächsen gewählt, und wenn ich schon eine von Richard aufgestellte Gattung *Fimbrostylis*, wie ich bereits an einem andern Orte bemerkt habe, nicht annehmen kann, da die gewählten Merkmale derselben schwankend sind, so ist es mir auch nicht möglich, unbedingt alle von Brown aufgestellte Gattungen als solche anzuerkennen.

Alle diese hier genannten Botaniker haben die Gattung *Cyperus*, zu welcher Linné die Papyrusstaude mit der Benennung *Cyperus Papyrus* rechnete, fast unverändert beibehalten, und sie trennten nur zwei Cyperusarten, unter der Benennung Abildgardia, von den übrigen als Gattung. Es ist zu verwundern, daſs die äuſsere Gestalt der Papyrusstaude, welche in einigen Stücken von den übrigen Cyperusarten abweicht, sie nicht anreitzte, die Blüthentheile genauer zu erforschen, wo sie ein deutliches generelles Merkmal würden entdeckt haben.

Herr *Aubert Du Petit Thouars*, der während eines zehnjährigen Aufenthalts in Madagaskar, Isle de France und Bourbon, eine groſse Anzahl neuer Gewächse entdeckte, mit denen er uns bekannter zu machen angefangen hat, sagte mir: daſs die von Vahl auf Madagaskar angegebene Abart des *Cyperus Papyrus* eine sehr ausgezeichnete Art sey, und auch auf Isle de France angetroffen würde. Er habe die Blüthentheile genauer untersucht, und unter jeder Kelchschuppe eine zweispelzige Blumenkrone entdeckt. Bei seiner Rückkunft nach Europa habe er den *Cyperus Papyrus* aus Aegypten beobachtet, und eben d n Blüthenbau gefunden. Nach der gegenwärtigen Ansicht sey daher eine Trennung nothwendig, und die Gattung der Papyrusstaude von den übrigen Cyperusarten zu trennen. Durch ihn erhielt ich auch ein Exemplar der madagaskarschen Papierstaude. Ich bat ihn, diese Beobachtung bekannt zu machen, und seine neue Gattung Papyrus zu nennen, was er auch versprach.

Die Bemerkung des *Du Petit Thouars* veranlaſste mich, bei der Untersuchung dieser Familie meiner Kräutersammlung, alle Arten Cyperus nach ihren Blüthentheilen zu prüfen, und ich fand, auſser den beiden genannten Arten, unter 136 Cyperusarten meiner Sammlung, die ich alle zergliederte, noch drei, welche zu dieser neuen Gattung gehören, nämlich den *Cyperus odoratus* des Linné, eine neue von Herrn von Humboldt entdeckte, und eine mir vom Doktor Klein aus Ostindien mitgetheilte Art, so daſs jetzt fünf Species vom Papyrus mir bekannt sind. Vielleicht gehören *Cyperus speciosus* und *giganteus*, welche Vahl beschrieben hat, noch hierher, weil der äuſsere Habitus ganz derselbe zu seyn scheint. Da ich aber beide Gewächse nicht selbst untersucht und gesehen habe, so kann ich es nur für wahrscheinlich halten, daſs sie dazu zu zählen sind.

Der natürliche Charakter der neuen Gattung Papyrus würde daher folgender seyn:

Papyrus.

Calyx Squamae ovatae carinatae distiche imbricatae.

Corolla bivalvis calycis squama triplo brevior, squamisque contraria, valvulis oblongis.

Stamina Filamenta tria brevissima capillacea. Antherae lineares erectae.

Pistillum Germen oblongum trigonum. Stylus filiformis. Stigmata tria pubescentia.

Pericarpium nullum.

Semen unicum triquetrum corolla persistenti cinctum nullisque setis circumdatum.

Der wesentliche Charakter würde seyn:

Squamae paleaceae carinatae distiche imbricatae. Corolla bivalvis, valvulis squamis calycinis contrariis. Semen unicum nudum.

Alle mir bis dahin bekannte Arten haben einen gemeinschaftlichen Habitus. Ihr Halm ist schlank, hoch, entweder nur unterhalb mit Scheiden ohne Blüthe besetzt, oder sie haben kurze Blätter an der Basis des Halms, die Blumen stehen in einer groſsen dichten hohen Dolde eng beisammen.

1. *Papyrus antiquorum.*

P. culmo nudo triquetro basi vaginato, involucris umbella brevioribus, involucellis triphyllis filiformibus longissimis.

Cyperus Papyrus: culmo triquetro nudo, umbella involucris longiore, involucellis triphyllis setaceis longioribus, spiculis ternis. Sp. pl. ed. W. 1. p. 288.

Diese Art ist bekannt genug, so daſs eine ausführliche botanische Beschreibung mir gänzlich überflüssig zu seyn scheint. Die beste Abbildung davon, obgleich nur von einem schwachen Halme, hat der Graf Henkel von Donnersmark in seinen *Adumbrationes plantarum* gegeben. Die Figur in der Reise von Bruce drückt mehr den äuſsern Habitus aus, hat aber nicht ganz das natürliche Ansehen. Die alte verkleinerte Abbildung in *Morison historia plantarum* kommt im Ganzen der Natur näher als die letztere. Das Vaterland dieses Gewächses ist Aegypten, besonders Oberägypten, an feuchten Orten oder in langsam flieſsendem Wasser, Syrien im Jordan, Kleinasien beim Zusammenflusse des Euphrats und Tigris, Abyssinien am See Tzana und Goderóo, Sicilien im kleinen Fluſs Anapus, Calabrien in Sümpfen, und nach Strabo's Bericht bei Perugia im Kirchenstaate. Folglich findet sich die Papyrusstaude in Europa, Asien und Afrika, vom 45sten Grad nördlicher Breite bis zum 1sten Grade.

Plinius sagt, daſs der Same der Papyrusstaude nicht keime. Ich erhielt im Jahre 1788 reifen Samen aus Neapel, der sehr gut aufging, und mir junge Pflanzen gab. Ich hatte damals nicht Gelegenheit, die Pflanzen den Winter hindurch zu erhalten, gab sie deshalb einem Gärtner, um sie im Gewächshause aufzubewahren, aber sie starben alle vor dem Anfange des Frühlings. Im Jahr 1804 sagte man mir in Padua, daſs nach vielen wiederholten Versuchen der Same dieses Gewächses niemals gekeimt sey; ich nahm mir eine groſse Quantität davon mit, der gut und vollkommen ausgebildet zu seyn schien, aber aller Mühe ungeachtet, wollte auch nicht ein Korn davon keimen. Meine Meinung war daher, daſs vielleicht in dem wärmern Klima von Neapel nur der Same seine gehörige Vollkommenheit erlangen könnte; ich beschloſs aber doch, sobald ich selbst lebende Pflanzen davon hatte, Versuche darüber anzustellen. Ich erhielt solche, und habe gefunden: daſs hier bei uns gereifter Same sehr gut keimt; wovon noch jetzt im botanischen Garten junge Pflanzen anzutreffen sind. Es wird nach diesen Erfahrungen wahrscheinlich, daſs nicht das Klima, sondern vielleicht die Behandlungsart des Gewächses auf die vollkommene Ausbildung des Samens den meisten Einfluſs hat. Unsere Pflanzen stehen in Töpfen, werden zwar sehr naſs gehalten, aber befinden sich nicht stets unter Wasser, und es ist wohl möglich, daſs selbst da, wo die Papyrusstaude einheimisch ist, der Same nur an solchen Pflanzen, die nicht im Wasser, sondern nur an feuchten Stellen stehen, seine vollkommene Ausbildung erhält. Wir haben bei hier wildwachsenden Pflanzen öfter den Fall, daſs durch einen andern Standort die Keimungsfähigkeit des Samens verloren geht.

Man benutzte in ältern Zeiten nicht bloſs den Halm der Papyrusstaude, um Papier daraus zu machen, sondern bediente sich auch der Wurzeln zu gröberem Papier und zur Verfertigung allerhand kleiner Hausgeräthe; auch wurde der süſse Saft des Halms ausgesogen. Der obere blüthentragende Büschel diente zu Kränzen und Verzierungen mancherlei Art, und auf eine sehr geschickte Weise verstand man, durch ein genaues Zusammenfügen des ganzen Gewächses, sogar leichte Kähne daraus zu verfertigen.

Es scheint, als hätte man dieses Gewächs in früheren Zeiten, seiner mannigfaltigen Benutzungsart wegen, häufig angebaut, und es wird wahrscheinlich, dafs eigentlich in Europa die Papyrusstaude nur durch die frühere Cultur, wegen der Milde des Klima's, verwildert und nicht ursprünglich einheimisch ist, und dafs man nur eigentlich vom 12ten bis 30sten Grad nördlicher Breite, in Asien und Afrika, dafs wahre Vaterland derselben festsetzen kann.

2. *Papyrus madagascariensis.*

P. culmo nudo triquetro basi vaginato, involucris umbella brevioribus, involucellis triphyllis linearibus brevissimis.

Culmi numerosi orgyales et altiores triquetri, inferne crassitie pollicis, nudi, basi versus vaginis tribus instructi.

Folia radicalia in planta adulta ut in praecedente nulla.

Umbella terminalis composita. Radii umbellae universalis numerosissimi sesquipedales triquetri. Umbella partialis tri-vel quadriradiata radiis semipollicaribus.

Ochreae pollicares fuscescentes truncatae.

Involucrum universale polyphyllum, foliolis sesquipollicaribus lineari-lanceolatis glabris.

Involucrum partiale triphyllum rarius pentaphyllum, foliolis linearibus duas tresve lineas longis.

Spicae subulatae teretes 16 ad 20 suboppositae confertae in quolibet radio umbellae partialis, septem-vel duodecimflorae.

Squamae lanceolatae alternae adpressae distichae fuscescentes margine membranaceae, canna virescenti.

Corolla bivalvis membranacea semine major, valvulis oblongis squamis contrariis.

Sie wächst auf der Insel Madagaskar, so wie auf Isle de France, an den Ufern des Flusses *des Calebasses*, linker Hand des Weges, ehe man zur berühmten Plantage *Pamplemouse* kommt. Auf der ersten Insel fand sie *Aubert Du Petit Thouars*, auf der letztern aufser ihm noch Willemet und *Bory de St. Vincent.*

Vahl hält diese Art, wie ich oben schon angemerkt habe, für eine Spielart der ägyptischen Papyrusstaude, von der sie aber, aufser dem höhern Wuchse, noch besonders durch die sehr kurzen Hüllen der besondern Blüthendolde auffallend verschieden ist.

3. *Pa-*

3. *Papyrus odorata.*

P. culmo triquetro basi folioso, involucris umbella longioribus, involucellis umbella partiali brevioribus.

Cyperus odoratus: culmo triquetro nudo, umbella decomposita simpliciter foliosa, pedicellis distiche spicatis Sp. pl. ed. IV. 1. p. 284.

Cyperus longus odoratus panicula sparsa, spicis strigosioribus viridibus Sloan. jam. 35. hist. 1. p. 116. t. 74. f. 1. et. t. 8. f. 1.

Culmi plures e radice orgyales et altiores, triquetri, glabri, basi foliis instructi.

Folia bi-seu tripedalia linearia carinata margine serrulato-hispida.

Umbella composita vel decomposita pedalis vel sesquipedalis.

Umbella universalis 12 vel 18 radiata; radiis triquetris tri-vel octopollicaribus; umbella partialis: plerumque octoradiata; radiis semi-vel tripollicaribus; umbella propria tri-vel quadriradiatae; radiis sesqui-vel bipollicaribus.

Involucrum universale polyphyllum, foliis linearibus carinatis margine serrulato hispidis, maximo bi-interdum fere tripedali, reliquis sensim minoribus.

Involucrum partiale penta-vel hexaphyllum, foliis angusto-linearibus bi-vel tripollicaribus.

Ochreae pollicares et longiores laxae oblique truncatae subfoliacene.

Spicae numerosae 30 ad 50 in radiis umbellae partialis et propriae oppositae alternaeve lineam longae, tereti-subulatae, plerumque sedecimflorae.

Sqamae alternae distichae lanceolatae acutae viride-flavescentes.

Corolla ut in praecedente.

Wächst in Jamaika, auf den Caraibischen Inseln, im spanischen Guiana bei Cumana, und zu Para in Brasilien.

Linné hat seinen *Cyperus odoratus* so kurz beschrieben, daſs sich daraus nicht mit Gewiſsheit angeben läſst, welche Art er gemeint habe; dazu kommt, daſs die Citate der Schriftsteller zu zwei ganz verschiedenen Arten gehören. Indessen wird es doch wahrscheinlich, daſs er eigentlich die hier beschriebene Art meint, da er die oben angezeigte Figur von Sloane mit anführt, welche unsere Pflanze sehr deutlich vorstellt.

4. *Papyrus latifolia.*

P. culmo triquetro basi folioso, involucris umbellae longissimis, involucellis umbella partiali duplo brevioribus, spicis imbricatis.

Culmi plures orgyales et altiores, acute triquetri, inferne pollice crassiores, angulis scabris, basi foliosi.

Folia tripedalia et longiora, pollicem lata, linearia acuminata, trinervia striata, plana, margine serrulato-hispida.

Umbella terminalis composita semipedalis.

Umbella universalis octo-vel decem-radiata, radiis inaequalibus semivel quadripollicaribus, complexato-semiteretibus glabris.

Umbella partialis subdecemradiata, radiis sesqui-vel bipollicaribus subaequalibus undique spicis imbricatis obtusis.

Involucrum subpentaphyllum, foliis tribus latitudine foliorum culmi, duobus multo angustioribus, longissimo bi-interdum fere tripedali, brevissimo quadripollicari. Involucra partialia subpentaphylla, foliis lineari-subulatis pollicaribus.

Ochreae pollicares oblique truncatae subfoliaceae.

Spicae numerosissimae semilineam longae arcte approximatae imbricatae tereti subulatae, subduodecimflorae.

Sqamae oblongae acutae arcte distiche imbricatae flavescentes. Reliqua generis.

Wächst in Ostindien bei Trankebar. Es wird dieses Gewächs an feuchten Oertern angetroffen, und in einigen Gegenden sehr hoch geschätzt, da man es zum Dach decken, Stricke machen, Körbe und andere kleine Hausgeräthe daraus zu flechten, benutzt.

5. *Papyrus comosa.*

P. culmo triquetro nudo, basi vaginato, involucris umbella brevioribus, involucellis polyphyllis longissimis.

Culmus sexpedalis et altior triqueter glaber, nudus.

Umbella terminalis composita, septem-vel duodecim-radiata; radiis quinque vel sexpollicaribus.

Umbella partialis sexradiata, radiis semipollicaribus.

Spicae unipelares sabulatae alternae spicam semipollicarem formantes.

Sqamae oblongae acutae fuscae, nervo medio viridi, margine albo, membranaceae.

Involucrum universale polyphyllum, foliis linearibus acutis, maximo quadripollicari.

Involucella hexa-vel octophylla quadripollicaria linearia acuta, margine retrorsum scabro.

Ochreae pollicares oblique-truncatae subbidentatae.

Ich habe, der Vollständigkeit wegen, obige Diagnose und Beschreibung, so wie sie sich in dem unter Presse befindlichen Werke des Herrn von Humboldt, welches die Beschreibung aller auf seiner Reise gefundenen Vegetabilien enthält, genommen.

Es wächst diese Art im südlichen Amerika bei Guayaquil an den Ufern der Flüsse.

Beschreibung der Gattung Tamarix.

Von C. L. Willdenow *).

Tamarix, Tamariscus und Myrica; unter dieser Benennung verstand Plinius einen Strauch, welchen wir jetzt zur Gattung Tamarix zählen, aber mit dem Namen Myrica ist von den neuern Botanikern eine Gattung belegt worden, die auch nicht entfernt damit verwandt ist. Es gehört die Gattung Tamarix zur dritten Ordnung der fünften Klasse des Linnéschen Systems, und nach Jussieu's natürlichem Systeme, zu der Ordnung *Portulaceae*. Der wesentliche Charakter derselben besteht in folgenden Merkmalen:

Calyx quinquepartitus. Petala quinque. Capsula unilocularis trivalvis polysperma. Semina coma instructa.

In Rücksicht der Zahl der Staubfäden finden sich bei den verschiedenen Arten folgende Abweichungen, nämlich 4, 5, 8 oder 10. Die äufsere Form ist bei allen ziemlich übereinstimmend. Die Blätter sind fein, klein und sehr gedrängt, die Blumen von rother oder röthlicher Farbe, und bilden Aehren. Ihr Stamm ist strauch- oder baumartig. Sie wachsen an den Ufern der Bäche, Flüsse und Teiche, und haben alle ein sehr zierliches Ansehen.

Linné kannte nur zwei Arten, die beide in Europa angetroffen werden. Forsköl entdeckte darauf eine neue in Aegypten; Desfontaines fand eine andere in der Barbarei; Sievers fand noch eine, welche in Sibirien einheimisch ist; Marschall von Bieberstein eine andere in der Krimm; Loureiro eine in China, und endlich der Missionarius Rottler

*) Vorgelesen den 26sten März 1812.

zwei in Ostindien, so dafs bis jetzt neun verschiedene Arten beschrieben sind. Zu diesen füge ich noch sieben, bis dahin nicht bestimmte Tamarixarten, von denen einige für Spielarten gehalten wurden, hinzu; so dafs sich die Zahl aller bekannten gegenwärtig auf sechszehn beläuft, die ich alle, eine einzige ausgenommen, in meiner Kräutersammlung besitze, und genau verglichen habe. Wahrscheinlich enthält der mittlere, uns in naturhistorischer Hinsicht fast ganz unbekannte Theil von Asien, besonders die gebirgigten Gegenden desselben, noch einige Arten.

1. *Tamarix gallica.*

T. floribus pentandris, bracteis pedicellis brevioribus, spicis lateralibus subpaniculatis, foliis lanceolato-petulatis subamplexicaulibus.

T. floribus pentandris, spicis lateralibus, foliis lanceolatis amplexicaulibus imbricatis Sp. ps. ed. IV. 1. p. 1498. exclusis varietatibus.

Frutex pyramidalis quindecimpedalis, ramis teretibus fuscis glabris.

Folia minutissima alterna lanceolato-subulata subamplexicaulia approximata, juniora adpressa, adulta patula.

Spicae laterales pedunculatae quandoque solitariae sparsae, interdum paniculatae.

Flores purpurei breve pedunculati.

Bracteae oblongae obtusae concavae pedicello florum duplo breviores.

Stamina quinque corolla longiora.

Stigmata tria oblonga sessilia.

Wächst in Spanien, im südlichen Frankreich, im südlichsten Theile von Deutschland, in der Türkei, im südlichen Rufsland an der Wolga und dem Tarak, so wie am Caucasus.

2. *Tamarix hispida.*

T. floribus pentandris, bracteis longitudine pedicellorum, spicis lateralibus paniculatis, foliis ovato-lanceolatis sessilibus, utrinque hispidis.

Tamarix pentandra varietas Pall. ross. 2. p. 72. t. 79.

Frutex orgyalis erectus ramis teretibus hispidis canescentibus.

Folia minutissima alterna ovato-lanceolata sessilia, juniora laxe imbricata, adulta patentia, utrinque pilis brevissimis copiosis undique hispida.

Spicae laterales paniculatae.

Flores purpurei perquam breve pedunculati.

Bracteae oblonga in floribus inferioribus longitudine pedicelli, in superioribus pedicello longiores.

Stamina quinque corolla longiora.

Stigmata tria oblonga sessilia.

Wächst an sehr salzigen und sandigen Stellen der Ufer des caspischen Meeres.

Die Form der Blätter, die zahlreichen kleinen borstenartigen Haare, womit diese, wie auch die Zweige, überzogen sind, die längern Nebenblätter und etwas kleineren Blumen, welche in längern und schlankern Aehren stehen, zeigen deutlich, daſs es eine besondere Art und keine Spielart der vorhergehenden ist.

3. *Tamarix africana.*

T. floribus pentandris, bracteis pedicellis duplo longioribus, spicis lateralibus solitariis, foliis ovato-lanceolatis apice membranaceis subamplexicaulibus.

T. foliis imbricatis minimis, floribus pentandris, spica tereti densissima, pedunculis squamosis, stylo trifido Desf. atl. 2. p. 269.

T. floribus pentandris confertissimis, spicis crassis brevibus Encycl. bot. 7. p. 564.

Frutex statura Tamaricis gallicae, ramis teretibus ~~atro~~-fuscis nitidis.

Folia minutissima ovato-lanceolata alterna subamplexicaulia, apice et margine membranacea diaphana, juniora arcte adpressa, adulta laxe imbricata.

Spicae laterales subsessiles crassae cylindricae solitariae.

Flores albi vel leviter incarnati brevissime pedunculati.

Bracteae oblongo-lanceolatae membranaceae calyce longiores.

Stamina quinque corolla parum longiora, in duobus praecedentibus vero duplo longiora.

Stigmata tria oblonga sessilia.

Wächst im nördlichen Afrika an den Ufern des Meeres bei Algier.

Aus der kurzen, von Poiret in seiner Reise nach der Barbarei gegebenen Beschreibung, in der kein einziges gutes Merkmal angeführt ist, wodurch sie von der *Tamarix gallica* sich unterscheiden läſst, schien mir vormals diese Pflanze eine Abart der letztgenannten zu seyn. An dem mir vom Herrn Desfontaines mitgetheilten Exemplare sehe ich aber, daſs es eine ganz verschiedene Art ist.

4. *Tamarix canariensis.*

T. floribus pentandris, bracteis pedicello longioribus, spicis lateralibus paniculatis, foliis lanceolato-subulatis sessilibus patentibus.

Frutex quindecimpedalis ramis divaricatis teretibus pallide-fuscis.

Folia minutissima lanceolato-subulata sessilia alterna, juniora laxe imbricata, adulta patentissima apice membranacea.

Spicae laterales pedunculatae paniculatae graciles sesquipollicares.

Flores albi aut leviter incarnati breve pedunculati.

Bracteae ovato-subulatae pedicello longiores.

Stamina quinque corolla parum longiora.

Stigmata tria clavata.

Wächst auf der Insel Teneriffa, wo diese Art Herr Broussonet entdeckte. Das ganze Ansehen dieses Strauches ohne Blüthen ist fast wie bei *Juniperus virginiana*, nur dafs die Blätter schmäler und weniger steif sind.

5. *Tamarix indica.*

T. floribus pentandris, bracteis pedicello longioribus, spicis terminalibus lateralibusve, foliis ovato-acuminatis amplexicaulibus.

T. floribus pentandris, spicis terminalibus, foliis ovatis acuminatis Willd. Nov. Act. Soc. Nat. Scrut. Berol. 4. *p.* 214.

Frutex ramis teretibus obscure fuscis.

Folia minutissima alterna ovata acuminata amplexicaulia, juniora adpressa, adulta apice patula.

Spicae terminales et laterales.

Flores breve pedunculati, color mihi ignotus, forte incarnatus.

Bracteae lanceolatae pedicello longiores.

Stamina quinque corolla parum longiora.

Stigmata tria oblonga sessilia.

Wächst in Ostindien bei Trankebar.

Flüchtig betrachtet hat diese Art mit *Tamarix articulata* einige Aehnlichkeit, aber die Blätter umfassen nur den Stengel und bilden durchaus keine Scheiden, auch ist die Form und Stellung der Aehren sehr verschieden.

6. *Tamarix chinensis.*

T. floribus pentandris, bracteis pedicello longioribus, spicis terminalibus lateralibusve, foliis ovato-lanceolatis sessilibus.

T. foliolis alternis, spicis terminalibus, petalis erectis Loureiro *cochin* 1. *p.* 228.

Frutex vel Arbor mediocris, ramis teretibus fuscis nutantibus.

Folia minutissima alterna ovato-lanceolata sessilia, juniora et adulta laxe imbricata.

Spicae terminales solitariae vel etiam cum lateralibus paniculatae.

Flores rubicundi breve pedicellati.

Bracteae ovato-subulatae pedicello longiores.

Stamina quinque corollam subaequantia vel parum longiora.

Stigmata tria oblonga.

Wächst bei Canton in China.

Die feinen dünnen Zweige, welche hängend sind, unterscheiden schon diese Art von allen. Man sieht sie sehr oft auch auf chinesichen Landschaften vorgestellt.

7. *Tamarix articulata.*

T. floribus pentandris sessilibus, spicis lateralibus, foliis brevissimis vaginatis. Sp. pl. ed. W. 1. *p.* 1498.

T. ramulis articulatis, articulis turbinatis mucronatis, spicis racemosis. Vahl 2. *p.* 48. *t.* 32.

Thuja aphylla strobilis quadrivalvibus, foliis turbinatis vaginantibus, hinc mucronatis, frondibus imbricatis. Sp. pl. 1422.

Tamarix orientalis. Forsk. *descr.* 206.

Arbor trigintipedalis crassitie et altitudine Quercus, ramulis teretibus flavo-fuscis.

Folia minutissima vaginam angustam uno latere breviter mucronatam formantia.

Spicae laterales solitariae graciles breve pedunculatae pollicares et longiores.

Flores rubicundi sessiles.

Bracteae ovatae acuminatae vaginatae calyce breviores.

Stamina quinque corollam subaequantia vel parum longiora:

Stigmata tria obtusa.

Wächst in Aegypten. Vahl giebt Arabien und Ostindien als Vaterland an. Was ich dafür bis jetzt aus Ostindien erhalten habe, war stets die oben beschriebene *Tamarix indica*, welche sehr davon verschieden ist, und daſs sie in Arabien gefunden sey, darüber giebt es keine Nachricht.

Al-

Alpinius sagt zwar: daſs die *Tamarix articulata* auf dem Delta in Aegypten die Gröſse und Stärke eines Eichbaums erlange, und daſs man daraus Kohlen schwele, die in Aegypten und Arabien gebraucht würden. Hieraus scheint mir ehe noch zu flieſsen, daſs auch in Arabien diese Art nicht einheimisch ist. Meine Exemplare erhielt ich vom Herrn Hauptmann Schwartz, der sie um Kairo sammelte, und vom Herrn Delile, der bei der letzten französischen Expedition in Aegypten als Botaniker war, wo er sie auch eingesammelt hat.

8. *Tamarix gracilis.*

T. floribus pentandris, spicis solitariis terminalibus, bracteis pedicellum aequantibus, foliis lanceolatis sessilibus.

Frutex ramis teretibus pallide fuscis.

Folia minutissima lanceolata sessilia, juniora laxe imbricata, adulta patula.

Spicae terminales solitariae pollicares vel sesquipollicares.

Flores rubicundi pedunculati, pedunculis longitudine florum.

Bracteae lanceolatae patentes pedunculi longitudine.

Stamina quinque corolla breviora.

Stigmata tria obtusa.

Wächst in Sibirien auf salzigen Steppen am Irtisfluſs.

Durch die einzelnen an der Spitze stehenden Aehren hat diese Art mit der *Tamarix germanica* die gröſste Aehnlichkeit, aber die Zahl der Staubfäden und ihre Form unterscheiden sie, auſser dem ganzen verschiedenen Habitus der Pflanze, hinreichend. Von *Tamarix gallica* ist sie durch die einzelnen an der Spitze der Zweige stehende Aehren, durch die längern Blumenstiele, durch die Staubfäden, die kürzer als die Blumenkrone sind, und durch die Narben verschieden. Auſserdem ist das ganze Ansehen der Pflanze sehr abweichend und die Blattform von anderer Art.

9. *Tamarix tetrandra.*

T. floribus tetrandris, spicis lateralibus confertis, bracteis pedicello longioribus, foliis lanceolatis amplexicaulibus, apice diaphanis.

Frutex pyramidalis, ramis teretibus nigro-fuscis.

Folia minutissima lanceolata amplexicaulia, juniora dense imbricata, adulta laxe imbricata apice membranaceo-diaphana.

Spicae laterales breve pedunculatae pollicares et longiores, numerosissimae confertae.

Flores albidi breve pedunculati.

Bracteae oblongo-lanceolatae margine diaphano membranaceo pedicello longiore.

Stamina quatuor corollae longitudine vel parum longiores.

Styli tres brevissimi; stigmata obtusa.

Wächst im südlichen Theile von Taurien an den Ufern des schwarzen Meeres.

Es ist dieselbe Pflanze, welche Pallas in dem Verzeichniſs der taurischen Flor *Tamarix tetandra*, und Hablizel *Tamarix gallica* genannt hat. Die *Tamarix tetrandra* in der caucasischen Flora des Herrn Marschall von Bieberstein kann hier nicht mit angeführt werden, da er unter dieser Benennung die hier beschriebene und die folgende Art zugleich mit gemeint hat, wie ich aus den von ihm mir mitgetheilten Exemplaren sehe.

10. *Tamarix laxa.*

T. floribus tetrandris, spicis lateralibus dissitis, bracteis pedicello brevioribus, foliis lanceolatis sessilibus.

Frutex ramis teretibus fuscis.

Folia minutissima alterna lanceolata sessilia, juniora arcte imbricata, adulta patula.

Spicae laterales semipollicares vel pollicares laxae pedunculatae.

Flores albidi pedunculati, pedunculo floris longitudine.

Bracteae oblongo-lanceolatae pedicello breviores.

Stamina quatuor longitudiae corollae.

Styli tres breves clavati. Stigmata obtusa.

Wächst an den Ufern der Wolga, von Sarepta an, bis an den Ausfluſs derselben in das kaspische Meer, besonders häufig in der Steppe zwischen Astrachan und Kislar.

Wenn gleich diese Art, wie die vorige, mit vier Staubfäden versehen ist, so kann sie doch nicht als Abart zu derselben gezogen werden, da sie in der Blattform, Gestalt der Aehren, Länge der Nebenblätter und Bau der Blume davon sehr verschieden ist.

11. *Tamarix songarica.*

T. floribus octandris decandrisve sessilibus, spicis lateralibus, bracteis florem aequantibus, foliis trigonis carnosis obtusis patentibus.

T. floribus octandris decandrisve axillaribus subspicatis, foliis carnosis obtusis triquetris. Sp. pl. ed. W. 1. p. 1499.

T. floribus octandris decandrisve, foliis filiformibus carnosis. Pallas Nov. Act. Acad. Petrop. 10. p. 374. t. 10. f. 4.

Frutex humilis sesquipedalis ramis teretibus cinereis saepe prostratis.

Folia alterna unguicularia carnosa trigona obtusa patentia.

Spicae laterales semipollicares

Bracteae forma et facie foliorum longitudine floris.

Flores sessiles bracteis tribus forma laciniarum calycis suffulti, albidi.

Stamina octo-vel decem basi dilatata et leviter cohaerentia corolla paulo longiora.

Styli brevissimi. Stigmata obtusa.

Wächst in Sibirien an salzigen Flecken auf der Songarischen Steppe, an der chinesischen Grenze bis zum See Nes Zai San.

Die ganze Pflanze hat, die Blumen und Früchte abgerechnet, ehe das Ansehen einer strauchartigen Salsola als einer Tamarixart, und ist daher von den übrigen sehr ausgezeichnet.

12. *Tamarix ericoides.*

T. floribus decandris, spicis terminalibus, bracteis pedicellum aequantibus, foliis oblongis amplexicaulibus.

T. floribus decandris, spicis terminalibus, foliis ovatis acutis. Nov. Act. Soc. Natur. Scrut. Berol. 4. p. 214. t. 4.

Wächst zu Trankebar in Ostindien.

Diese ist die einzige Art welche ich nicht besitze und auch nirgends gesehen habe; ich kann deshalb keine Beschreibung davon geben, und beziehe mich nur auf die kurze Beschreibung und Abbildung des Herrn Missionärs Rottler, die er am angeführten Orte gegeben hat. Sie ist besonders von der *Tamarix germanica* dadurch unterschieden, daſs ihre Staubfäden, welche auch zehn an der Zahl sind, gleich lang, pfriemförmig und mit einander verwachsen sind.

13. *Tamarix germanica.*

T. floribus decandris monadelphis, spicis terminalibus solitariis, bracteis pedicello longioribus, foliis lineari-lanceolatis sessilibus.

T. floribus decandris, spicis terminalibus, foliis sessilibus lineari-lanceolatis. Sp. pl. ed. W. 1. p. 1499.

Frutex quinque vel-sexpedalis, ramis teretibus flavescentibus.

Folia minutissima lineari-lanceolata sessilia, juniora laxe imbricata, adulta patula.

Spica terminalis solitaria tri-vel quinquepollicaris.

Flores rubicundi breve pedunculati.

Bracteae acutae acuminatae, basin versus margine membranaceae, floris longitudine.

Stamina decem monadelpha, filamentis alternis brevioribus, corolla breviora.

Stigmata tria obtusa sessilia.

Wächst im südlichen Deutschland an den Ufern des Rheins und der Donau, in der Schweiz, Savoyen, Tyrol und am Fuſse des Caucasus.

14. *Tamarix herbacea.*

T. floribus decandris monadelphis, spicis terminalibus solitariis, bracteis flore longioribus, foliis lineari-lanceolatis sessilibus, caule herbaceo.

Tamarix germanica subherbacea. Pall. *flor.* ross. 2. p. 75. t. 80. f. B.

Radix crassa lignosa.

Caules herbacei cubitales teretes glabri.

Folia minutissima lineari-lanceolata sessilia, juniora dense imbricata, adulta patula.

Spica terminalis solitaria tripollicaris.

Flores rubicundi brevissime pedunculati.

Bracteae ovatae acuminatae, margine basin versus membranaceae flore longiores.

Stamina decem monadelpha, filamentis alternis brevioribus, corolla breviora.

Stigmata tria obtusa sessilia.

Wächst an der persischen Seite der Ufer des kaspischen Meeres auf sandigen Plätzen.

Pallas hält diese für eine Spielart der vorhergehenden; aber der krautartige Stengel, welchen sie macht, da sie niemals holzig wird, ihre kleinere Blume, die nur halb so groſs ist, unterscheiden sie hinreichend als eine besondere Art. Der sandige Standort kann nicht die Ursache des krautartigen Stengels seyn, da die gewöhnliche *Tamarix germanica* stets an sandigen und steinigen Ufern gefunden wird, und auſserdem wächst sie in einem mildern Klima als die gewöhnliche *Tamarix germanica*, wo zuweilen krautartige Gewächse ihren Stengel erhalten. Alle diese Umstände sprechen deutlich für eine specifische Verschiedenheit.

15. *Tamarix longifolia.*

T. floribus decandris monadelphis, spicis terminalibus basi subcompositis, bracteis flore longioribus, foliis lineari-lanceolatis basi angustatis sessilibus patentibus.

Tamarix germanica. Pall. fl. ross. 2. p. 73. t. 80. f. A.

Frutex biorgyalis, ramis obtuse-angulatis striatis purpurascentibus.

Folia alterna sessilia tres lineas longa lineari-lanceolata acuta, basi angustata, patentia.

Spica terminalis quadri-vel quinquepollicaris basi plerumque spicis duabus bipollicaribus instructa.

Flores rubicundi longi pedunculati, pedunculis longitudine floris.

Bracteae ovato-oblongae acuminatae flore longiores.

Stamina decem monadelpha corolla breviora, filamentis alternis brevioribus.

Stigmata tria obtusa sessilia.

Wächst in Sibirien jenseits des Baical-Sees.

Von allen bekannten Arten zeichnet sich diese durch sehr lange abstehende Blätter aus. Für eine Spielart der *Tamarix germanica* kann ich sie, theils der vielen Verschiedenheiten der einzelnen Theile wegen nicht halten, theils deshalb nicht, weil sie in kalten Gegenden einen viel höhern Wuchs hat. Ich habe im südlichen Deutschland, und besonders in Tyrol, die *Tamarix germanica* sehr häufig wild angetroffen, aber sie nie über 5 Fuſs, also keine Höhe von zwei Klaftern erreichen sehen, und unter tausenden nie eine von solcher Blätterform und mit dergleichen Blüthenstaude angetroffen.

16. *Tamarix davurica.*

T. floribus decandris monadelphis, spicis lateralibus cylindricis obtusis, bracteis florem aequantibus, foliis oblongis sessilibus.

Frutex orgyalis, ramis teretibus striatis pallide fuscis.

Folia minutissima alterna oblonga obtusiuscula sessilia, juniora laxe imbricata, adulta patula.

Spicae pollicares cylindraceae obtusae pedunculatae laterales, pedunculis squamosis.

Flores rubicundi brevissime pedunculatae fere sessiles.

Bracteae oblongae obtusae, margine membranaceae longitudine florum.

Stamina decem monadelpha corollae breviora, filamentis alternis brevioribus.

Stigmata tria obtusa sessilia.

Wächst in Sibirien an den dauurischen Alpen.

Merkwürdig ist, daſs von der Gattung Tamarix Europa und Afrika jede drei eigenthümliche Arten, und Asien in seinen gemäſsigten und warmen Strichen zehn eigenthümliche, zugleich aber auch die beiden gemeinern europäischen Arten hervorbringt. Im ganzen Amerika ist noch keine Tamarix gefunden worden, und eben so findet sich keine in den Ländern jenseit des Aequators. Diese Form gehört also nur der alten Welt auf der nördlichen Hemisphäre.

Ueber

die Gesetze der Natur, welche der Landwirth bei der Veredlung seiner Hausthiere und Hervorbringung neuer Rafsen beobachtet hat und befolgen mufs.

Von Herrn Thaer *).

Schon Drelingcourt zählte 262 verschiedene Hypothesen über die Erzeugung auf, die er sämmtlich für falsch erklärte. Nichts sey gewisser, sagt Blumenbach, als dafs er dann die 263ste falsche hinzugefügt habe. Wie viele nun seitdem in unsern hypothesenreichen Zeiten noch hinzugekommen sind, würde sich kaum ausmitteln lassen, wenn auch jemand diese Mühe übernehmen wollte.

Diese mannigfaltigen Theorien theilen sich in drei Hauptklassen:

1) In solche, welche den Keim blofs für männlichen Ursprungs halten, und das weibliche Organ nur als den Auffangungs- und Ernährungsort betrachten. Unter den Theorien dieser Classe haben die Leuwenhoekschen Samenthierchen zu ihrer Zeit die meiste Aufmerksamkeit erregt.

2) In solche, die den Keim im weiblichen Organe suchen, und die männliche Einwirkung nur in der Belebung desselben setzen; unter welchen die Bonnetsche Theorie von den seit Erschaffung der Welt präformirten Keimen, in Ansehung des Beifalls, den sie eine Zeitlang erhielt, an der Spitze steht.

3) In solche, welche dem männlichen und weiblichen einen gleichen oder fast gleichen Einflufs bei der ersten Bildung des Keims zugeste-

*) Vorgelesen den 11ten Juni 1812.

hen. Unter diesen ist ohne Zweifel die, welche die Bildung des Keims einer Krystallisation gleichsetzt, die aus der Verbindung zweier verschiedener Stoffe entsteht, wenigstens die einleuchtendste und analogisch begreiflichste.

Wenn wir diese Theorien an die Erfahrung oder an die Erscheinungen halten, die uns, insbesondere dem Landwirthe, täglich vorkommen, so bleibt kein Zweifel übrig, daſs nur die dritte Classe der Wahrheit am nächsten komme. Der gleiche oder fast gleiche Antheil, welchen der Vater und die Mutter an dem jungen Thiere haben, ist um so unverkennbarer und in die Augen springender, je heterogener das männliche und weibliche Thier war, was man zusammenbrachte

Es fallen hierbei aber Verschiedenheiten vor, deren Gesetze noch nicht genugsam ergründet sind, und die man daher bis jetzt bloſs dem Zufalle zuzuschreiben geneigt ist. Zuweilen scheint es, daſs sich der Einfluſs beim Zeugungsakte so gleichmäſsig und so innig getheilt habe, daſs der väterliche und mütterliche Charakter in der ganzen Gestalt und Bildung aller Theile vermischt sey. Man kann nicht sagen, daſs in diesem oder jenem Theile des Körpers das Väterliche und das Mütterliche vorherrsche, — es scheint zuweilen so, als ob man den Vater hier erblicke, wenn man das Thier von einer Seite betrachtet; dagegen aber fällt an demselbigen Punkte wieder das Mütterliche auf, wenn man eine andere Ansicht wählt. Jedermann wird dasselbe auch bei den menschlichen Physionomien bemerkt haben, und wie verschieden die Urtheile sind, wenn von der Aehnlichkeit einer gegenwärtigen Person mit dem Vater oder der Mutter, oder mit den Groſsältern, in einer Gesellschaft gesprochen wird. Zuweilen aber ist der gröſsere Antheil des Vaters oder der Mutter, an diesem oder an jenem Theile, oder auch am ganzen Charakter des Thiers, unverkennbar. Manche, die sich insbesondere mit der Viehzucht beschäftigten, glaubten bemerkt zu haben, daſs bei einer bestimmten Thierart dieser oder jener Theil des Körpers — die äuſsere Form oder die innere Organisation, das Temperament, gewisse nutzbare Eigenschaften — sich mehr vom Vater, andere mehr von der Mutter vererbten. Eine weitere Umsicht aber, und schon der Widerspruch und die Verschiedenheit der Beobachtungen, welche diese und jene Praktiker für das Eine oder für das Andere anführen, zeigt, daſs hierin nichts Beständiges zu finden sey. Zuweilen ist aber auch bei einem jungen Thiere der einseitige Einfluſs des Vaters oder der Mutter in der ganzen Bildung unververkennbar, so daſs es durchaus in allen Theilen und Eigenschaften mehr jenem als dieser, oder umgekehrt, gleicht. Es giebt einige Gründe, diesen Erfolg nicht bloſs dem Zufalle, sondern der gröſsern Energie, welche der eine oder der andere Theil im Zeugungsakte äuſserte, beizumessen. Gewiſs ist es, daſs man bei dem Züchten der meisten Hausthierarten bemerkt hat, daſs ein Hengst, ein Stier, ein Widder vor dem andern die Eigenschaft besitze, seine Aehnlichkeit prädominirend zu vererben. Bei den kostbaren Hengsten der englischen sogenannten Blutpferde wird der Werth und das Sprunggeld eines solchen erstaunlich erhöhet, wenn er in den Ruf kommt, daſs er vorzüglich gut vererbe, und dieser Werth steht dann im Verhältniſs gegen den eines andern von übrigens bessern Qualitäten so hoch, daſs man es sich, ohne diesen Umstand zu kennen, nicht erklären kann. Dagegen giebt es aber auch weibliche Thiere, deren Progenitur ihnen so ähnlich bleibt, daſs man die Einwirkung des männlichen kaum bemerkt. Manchmal aber bemerkt man auch, daſs wenn dieselben Thiere eine Reihe von Jahren hindurch gepaart werden, das Junge zuweilen sehr auffallend nur dem Vater, zuweilen nur der Mutter gleiche; eine Bemerkung, die auch bei dem Menschengeschlecht in den Ehen sehr häufig gemacht wird. In jenem Falle kann man also wohl eine durchaus überwiegende Kraft, im letzteren nur eine, in dem besonderen Zeugungsakte mehr oder minder angespannte, annehmen. Bei Hengsten, Stieren und Widdern, die überhaupt, und vorzüglich wenn sie zum Zeugungsakte gelassen werden sollen, ein vorzügliches Feuer äuſsern, erwartet man die Vererbung der väterlichen Eigenschaften am meisten, und macht es sich daher zur Regel, ein solches feuriges Thier zum Stammvater des Viehstapels auszuwählen, wenn man zugleich seine übrigen Qualitäten fortzupflanzen wünscht. Indessen hat man auch Beispiele, wo dieser Anschein und diese Erwartung sehr trog.

Eine sehr auffallende aber zuverlässige Bemerkung ist die, daſs wenn ein Thier der ersten Generation auch seinem Vater oder seiner Mutter durchaus nicht gleicht, in seiner Progenitur oder in der dritten Generation dennoch das ganz verwischte Bild jenes Groſsvaters oder Groſsmutter wieder hervorkomme; selbst dann, wenn die Paarung der zweiten Generation zwischen zwei Individuen geschehen ist, die aus derselben Paarung entstanden, und die beide mit ihrem Vater oder Mutter nichts Aehnliches hatten. Man bemerkt das Wiedererscheinen der groſsväterlichen oder groſsmütterlichen Physionomie auch bei den Menschen sehr häufig, wenn sie beim Vater oder bei der Mutter gar nicht bemerkbar war. Unter den Thieren hat man es am häufigten bei den Schafen beobachtet. Bei der Paarung unserer Landschafe mit Merinoböcken fallen nicht selten Lämmer schon in der ersten Generation, die den Merinos beinahe gleich kommen. Verbindet man aber diese sogenannten Mestizen auch mit strengster Auswahl der am meisten veredelten zusammen, so kommen wieder Thiere hervor, die ganz auf die Grofsmutter oder das Landschaf zurückschlagen, und ein solcher Schlag bleibt dann auch mehrere Generationen hindurch — d. h. wenn keine neue Zumischung von der reinen Rafse hinzukommt — lange inconstant; pflegt sich aber doch am Ende in eine Mittelgattung festzusetzen.

Veredlung nennt der Landwirth, nach der Begriffssphäre seines Gewerbes, wenn er eine Thierrafse so verändert, dafs sie dem Zwecke oder der Benutzung, die er damit beabsichtigt, näher komme oder ihn besser erfülle. Damit stimmt auch sein Begriff von der Schönheit eines Thiers überein, und er behält den alten empirischen Begriff: Uebereinstimmung aller Theile, zum Zwecke des Ganzen — bei, und setzt seinen Zweck vielleicht an die Stelle des Naturzwecks. Um den ästhetischen Schönheitsbegriff bekümmert er sich nicht; und sollte es auch in der Regel nicht um konventionelle Schönheit, welche wie die Mode wechselt, thun. Er fordert daher ganz andere Formen und Eigenschaften bei einem schönen Reitpferde, als bei einem schönen Zug- oder Arbeitspferde, andere bei einem zum Fettmachen, zum Zuge oder zum Melken bestimmten Rinde, andere bei einem zum Wollertrage gehaltenen, als zu einem schnell schlachtbar werdenden Schafe. Der vorsichtige und nachdenkende Viehzüchter hat allemal einen bestimmten Zweck vor Augen, den er nach dem gröfsesten Vortheil, welchen er bei seinen Verhältnissen erreichen kann, festsetzt, insbesondere, wenn ihn die Erfahrung gelehrt hat, dafs mehrere dieser Zwecke nicht zugleich erreichbar sind, wie z. B. feine Wolle und schnelle Ausbildung des Körpers beim Schafe, oder vorzügliche Mastfähigkeit, Milchergiebigkeit und Muskelkraft im Zuge beim Rinde. Freilich verfährt der gröfsere Theil der Landwirthe hierbei oft zwecklos, aber er sollte es nicht thun, und die vorzüglichsten Viehzüchter, die es in einer Gattung zu einer hohen Vollkommenheit brachten, hatten sich nur ein einziges Ziel, ein Ideal, vorgesteckt.

Diese Veredlung bewirkt der Landwirth hauptsächlich auf zwei Wegen. Der eine ist: die Veredlung einer constanten Thierrafse in sich selbst; der andere: mittelst Durchkreuzung zweier verschiedenen Rafsen.

Der erste oder die Veredlung in sich selbst — von den Engländern, die immer in dieser Angelegenheit unsre Meister bleiben müssen, *breeding in and in* genannt. — Wie die mehr oder minder auffallenden Verschiedenheiten derselben Thierarten, die wir Rafsen nennen, entstanden seyn mögen, liegt noch im Dunkeln. Erschuf die Natur nur ein gleichartiges Paar von Hunden, von dem Geschlechte des Rindviehs und von Schafen? und sind alle die Verschiedenheiten zwischen dem spitzohrigen Schäferhund, dem Dachshund, dem Windspiel und Pudel, dem Auer- Büffel- und Hausochsen — die sich miteinander nachhaltig fruchtbar begatten — dem grobwolligen dickschwänzigen, wallachischen, russischen, und dem feinwolligen Merino- oder leichtem gazellenartigen schottländischen Schafe, nur durch die Einwirkung des Klima, der verschiedenen Lebensart und Nahrung entstanden? — Es läfst sich nicht bestimmen, welchen Einflufs diese Umstände in der unabsehbaren Folge der Generationen in einem unendlichen Zeitraume gehabt haben können; aber bemerkbar ist der Einflufs dieser Umstände auf die Abänderung des Wesentlichen einer Rafse nicht. Zwar erleiden diese Thiere eine anscheinende Abänderung, wenn sie, auch ohne Einmischung fremden Bluts, in ein anderes Klima versetzt werden, oder eine andere Verpflegung und Nahrung erhalten. Aber die in den neueren Zeiten mehr darauf gerichtete strengere Beobachtung hat gezeigt, dafs diese Abänderung nicht constant sey. Englische und schottische Thierarten, welche man in wärmern Ländern, in die heifseste Zone brachte, zeigten in ihrer Deszendenz eine merkliche Abänderung. Insbesondere bekam das Schaf eine gröbere, mehr haarigte und dünnere Wolle. Man brachte diese Thiere aber wieder nach England zurück; schon dieselben Individuen zeigten nach einem Jahre einiges Zurückschlagen, ihre Deszendenz aber eine vollständige Rückkehr zu ihrer ursprünglichen Beschaffenheit. Das an reiche Fettweiden gewohnte Niederungs- oder grofse Schweizervieh verkümmert bald auf mageren Weiden, und in seiner Deszendenz erkennt man kaum mehr seinen Stamm. Aber wenn er zurückgeführt wird auf reiche Weiden, oder kräftig genährt wird im Stalle, so kommt seine Progenitur allmählig wieder zu der ursprünglichen Stärke und Gestalt seiner Voreltern.

Indessen giebt es unter den Individuen desselben Stammes oder derselben Rafse einige, die sich in diesem oder jenem Stücke, in der Form oder in gewissen Qualitäten, besonders auszeichnen, und diese anfangs individuelle Verschiedenheit erbt fort, insbesondere wenn ein männliches und weibliches Thier, welche sich auf eine gleiche Weise auszeichnen, gepaart werden, und diese Paarung dann in derselben Familie, wiederum mit Auswahl derjenigen Individuen, die den ausgezeichneten Charakter besitzen, konsequent fortgesetzt wird. Vorzüge und Fehler erben hier fort, und wenn man von der Begattung in derselben Familie Nachtheil verspürt hat, so war es nur in dem Falle, dafs sie einige schlechte Qualitäten hatte, die sich dann immer verstärkten. Im Gegentheil vererbte man dadurch und vervollkommnete gute Qualitäten, und das vormals gefürchtete und vermiedene Paaren in der nächsten Verwandtschaft ist in den neueren Zeiten von den glücklichsten Viehzüchtern mit besonderer Aufmerksamkeit angewandt worden, wenn sie eine gute Eigenschaft vererben und eine Rafse bilden wollten, die sich dadurch auszeichnete. Die Erfahrung lehrt, dafs eine eminente Gröfse des Körpers, eine vorzügliche Ausdauer des Athems beim Pferde, eine ungewöhnliche Milchergiebigkeit, ausgezeichnete Feinheit und Vollheit der Wolle, auch besondere Eigenthümlichkeiten in den Verhältnissen des Gerippes, sich bei Individuen eines Stammes finden, und wenn diese ausgewählt zusammengebracht werden, sich in ihrer Deszendenz fortpflanzen. Ja, es scheint als ob die durch äufsere, sogar mechanische Einwirkungen verursachten Gestaltungen, sich vererbten. Ich habe in den Zeiten, wie schon mehrere Generationen hindurch unter den vornehmeren Ständen die Füfse der Frauen, zuweilen auch der Männer, durch sehr enge Schuhe und hohe Hacken von Kindheit auf verunstaltet wurden, sehr bestimmt bemerkt, dafs fast alle Kinder in diesen vornehmeren Ständen mit herab- und seitwärts, nach dem grofsen Zehen zu, gebogenen kleinen Zehen, und mit widernatürlich herausgebogenem Tarsus geboren wurden, so dafs ich mich daran ein Damenkind von einem Weiberkinde zu unterscheiden vermafs! Ich habe nachher irgendwo eine ähnliche Bemerkung gelesen. Unter mehreren Beispielen von Thieren führe ich eins an, welches mir genau bekannt ist: einer jungen Kuh schwor im dritten Jahre ihr linkes Horn ab; wodurch? ist nicht bekannt. Sie hatte nachmals drei Kälber, die auf derselben Seite nur lose an der Haut sitzende kleine Kolben, keine Hörner bekamen. Ist vielleicht die Rafse von kolbigtem, hörnerlosem Rindvieh, welche sich an mehreren Orten, besonders in Schottland findet, auf diese Weise entstanden?

Diese Veredlung einer Thierrafse, durch sorgfältige Auswahl und Paarung der Individuen in derselben Familie, durch fernere Auswahl fortgesetzt, ist es also, was man das Züchten in sich selbst nennt. Dies war die Methode des gröfsten Viehzüchters in der Welt, Bakewell zu Dishley in Leicestershire, welcher sie mit Pferden, Rindern, Schweinen, vorzüglich aber mit Schafen betrieb. Er brachte eine besondere Schafrafse hervor, welche sich durch folgende Eigenschaften auszeichnete und empfahl: sie brachte im ersten Jahre ihres Lebens in der Regel zwei auch wohl drei Lämmer, säugte selbige auf, ward dann noch in demselben Jahre mit sehr mäfsigem Futter oder Weide gemästet, und kam zu einem reinen Fleischgewichte von 80 bis 100 Pfund. Knochen und alle Abfallstheile waren äufserst fein, damit sich die nährenden Theile nur zu Fleisch und Fett absetzen mögten. Sie hatte zugleich ein sehr ruhiges phlegmatisches Temperament, was für die Mastfähigkeit so wesentlich ist. Wolle gab sie reichlich, aber nur Kämmwolle, keine kräuselnde, und auch jene nicht von ausgezeichneter Feinheit; denn Bakewell vemogte es darin nicht auf den Grad zu bringen, den er wünschte, ohne andere Eigenschaften dieses Thiers aufzuopfern. Er änderte diese Rafse mannigfaltig ab, nach dem Wunsche seiner Kunden, und bildete verschiedene sich auszeichnende Unterrafsen. So hatte er es z. B. dahin gebracht, dafs die Beine so kurz wurden, dafs die Thiere nur mit Mühe von einer Koppel zur andern gebracht werden konnten. Manchem war doch dies nicht passend, weil die Schafe dadurch zu weiten Wegen und zum Einbringen in die Horden unfähig gemacht wurden. Er stellte also bei einem Theile sehr bald längere Beine wieder her. — Alle Engländer, selbst die Gegner seiner Rafsen, bezeugen einstimmig diese Kunst und diese Gewalt über die Bildung des thierischen Körpers. Lord Sommerville, der kompetenteste Richter und sonst ein Gegner der Bakewellschen Rafse, sagt von ihm: es sey als ob er sich ein Schaf nach seinem Ideale habe zusammensetzen und demselben dann das Leben geben können. Ein Theil seiner Böcke ward auf eine Springzeit bei den öffentlichen meistbietenden Vermiethungen mit 400 Guineen, einzeln noch ungleich höher bezahlt von solchen, welche sich diese für die englischen Verhältnisse so vortheilhafte Rafse anziehen wollten. Es ist indessen wahrscheinlich, dafs er den ersten Stamm dieser neuen Rafse durch Kreuzung verschiedener Arten zuerst hervorgebracht habe, woraus er aber ein Geheimnifs machte. Nachmals paarte er aber nur in der nächsten Verwandtschaft, je mehr eine Familie seinem Zwecke entsprach.

Der zweite Veredlungsweg ist die sogenannte **Durchkreuzung**, und diese unterscheidet sich wiederum in zwei Methoden.

a) Man will durch eine fortgesetzte Zubringung der männlichen Thiere eines edleren Stammes die mütterlichen Eigenschaften ganz verlöschen und sie den väterlichen völlig gleich machen. Diesen Zweck kann man unfehlbar erreichen, wie die Veredlung durch spanische Böcke bei uns augenscheinlich gezeigt hat. Man kann die Grade der fortgepflanzten Veredlung *a priori* berechnen, und dies trifft, an die Erfahrung gehalten, mehrentheils zu. Wenn zwei Thiere von verschiedenen Rafsen, das männliche A und das weibliche B, gepaart werden, so bringen sie ein Junges C, welches in der Regel gleich viel von der Natur des Vaters und der Mutter hat. Wird dieses weibliche Thier wieder mit einem männlichen von der Rafse A besprungen, so erfolgt ein junges Thier D, welches zwei Theile von A und einen von B hat. Wird dieses wiederum mit A gepaart, so entsteht E, welches drei Theile von A und einen von B hat. Aus der Paarung von E mit A erfolgt F mit vier Theilen von A und einem von B u. s. f. Einige nehmen die Progression noch schneller an und sagen, dafs die erste Generation nur die Hälfte von B, die zweite nur $\frac{1}{4}$, die dritte nur $\frac{1}{8}$, die vierte nur $\frac{1}{16}$, die fünfte nur $\frac{1}{32}$ u. s. f. behielte, folglich in der sechsten und siebenten Generation die Natur der Stammmutter bis auf ein unmerkliches verloschen sey, und das Thier als ein völlig reines des väterlichen Stammes angesehen werden könne. Dies ist zwar oft der Fall, und es kommen in der vierten und fünften Generation veredelte Merinos vor, die von der völlig reinen durchaus nicht zu unterscheiden sind, andre aber, bei denen sich die urmütterliche Natur noch deutlich wahrnehmen läfst. Die aufmerksameren Schafzüchter sorgen daher dafür, keinen Widder, wenn er auch in der Gestalt und Wolle dem besten Merino gleichkommt, zuzulassen, falls sie nicht seiner reinen Abkunft aus der Merinorafse, auch mütterlicher Seits, überzeugt sind, weil man gefunden hat, dafs sonst die mütterliche Natur wenigstens bei Individuen wieder zum Vorschein komme, und überhaupt die ganze Rafse leicht zurückschlagen könne. Deshalb werden die Widder aus solchen Schäfereien, von deren reinem Urstamme man überzeugt ist, so sehr gesucht und andern vorgezogen, welche sie manchmal in der Feinheit und Stärke der Wolle überwiegen, deren Ursprung aber unsicher ist. Noch sorgfältiger sind die Engländer, so wie auch die Araber, in Ansehung der Hengste ihrer hohen Rafse, deren Stammtafel zweifellos und beschworen seyn mufs. Man übersieht bei ihnen Fehler, wenn nur die Reinheit der Rafse zuverlässig ist. In welcher Generation eine durch beständige Kreuzung mit Vätern von reinem Stamme entstandene Familie völlig vollbürtig geworden, d. h. ganz und unveränderlich in die Natur des Vaters übergegangen sey, läfst sich noch nicht bestimmen. Es kommt dabei allerdings auf die Auswahl der Individuen an, indem man nämlich bei den Zuchtschafen auch kein mütterliches Haar an irgend einem Theile passiren läfst, ohne sie auszumerzen. Einige glauben, dafs die 12te, andere dafs die 16te Generation als völlig edel anzusehen sey, und dafs man nun Widder oder Hengste davon gebrauchen könne, ohne Inconstanz und Zurückschlagen zu besorgen.

b) Die zweite Absicht bei der Kreuzung ist eine Mittelgattung zwischen zwei zusammengebrachten, und manchmal noch mittelst einer dritten zugemischten, Rafsen zu bilden, und so gewisse Qualitäten der verschiedenen Rafsen in einem Punkte zu vereinigen.

Kommen daraus Individuen hervor, bei denen man die gewünschte Vereinigung in dem gewünschten Grade antrifft, so paart man nur diese Individuen männlichen und weiblichen Geschlechts zusammen, und mufs deshalb hier in der nächsten Verwandtschaft, aber mit strenger Auswahl, bleiben. Anfangs werden immer einzelne hervorkommen, die wieder auf den urväterlichen oder urmütterlichen Stamm disproportionirt zurückschlagen. Diese müssen ausgemerzt und nicht zu fernerer Zucht gebraucht werden, wenn man seinen Zweck erreichen will. Beobachtet man dies, so wird der Mittelschlag endlich ganz constant. Einige haben diese Bildung constanter Rafsen leugnen wollen, unter andern der als Hundefreund bekannte Maler Tischbein. Er hatte Hunde sehr heterogener Art gepaart, die Descendenz wieder mit einander verbunden, und es kamen in der 10ten bis 12ten Generation nur Hunde von der ersten väterlichen oder mütterlichen Art wieder hervor, die anscheinende Mittelgattung erhielt sich aber nicht; allein er hatte es ohne Zweifel hier an der gehörigen Auswahl der Individuen bei der Bildung dieses Mittelschlages fehlen lassen. Dafs ein solcher Mittelschlag sonst wirklich erfolge und constant bleibe, erweisen manche auf diese Weise gebildete Viehrafsen, insbesondere aber der Schlag der englischen Wettrenner, die Pferde von hohem Blut *(high-blood)* genannt werden. Dieser Schlag entstand, wie historisch erwiesen ist, aus barbischen und arabischen Hengsten, mit einem besonderen Schlage einheimischer Pferde vermischt. Nachdem er lange geschwankt hatte, gelang es einigen, einen Schlag zu erhalten, der in mehreren schätzbaren Eigenschaften die reinen Araber übertraf und gänzlich constant wurde. Diese Raſse würden die Besitzer um keinen Preis mit den edelsten Arabern weiter verbinden lassen, indem sie einen weit höheren Werth auf jene Mittelgattung als auf diese setzen. Und wenn noch arabische Hengste zu Zeiten von den Engländern eingeführt werden, so geschiehet es nicht, wie einige vermeint haben, um jenen Schlag zu erfrischen, sondern um mit Stuten minder edler Art eine andre Familie zu bilden. Hierauf beziehen sich auch diejenigen englischen Schafzüchter vornämlich, welche zwar die Einführung der Merinos billigen — denn alle thun das nicht — aber der Meinung sind, daſs man durch eine bis auf einen gewissen Punkt getriebene, aber nicht bis zur völligen Einartung fortgesetzte Kreuzung einen Schlag hervorbringen würde, der die Merinos in der Summe der guten Eigenschaften überwöge, gröſsere Stärke und bessere, zum Fleischansatz mehr geeignete Form des Körpers mit der Feinheit der Wolle verbände — ja, sie behaupten, zum Theil diesen Schlag schon wirklich erlangt zu haben, und trachten nur darnach, ihn in sich selbst durch Auswahl der Individuen zu veredeln und constant zu machen, ohne fremdes Blut weiter einzumischen.

Diese Kreuzung erfordert aber, wenn sie gelingen soll, groſse Sorgfalt, Ueberlegung und Ausdauer. Manchmal begünstigt es zwar der Zufall, daſs aus einer aufs Gerathewohl unternommenen Kreuzung preiswürdige Thiere hervorgehen, aber häufiger kommen verunstaltete und wenig nutzbare Thiere hervor, zumal wenn man gar zu heterogene Raſsen zusammenbrachte. Will man auf die Veredlung nach einer Seite hinarbeiten, so kann dennoch z. B. eine solche ungestaltete Stute zur ferneren Zucht Vorzüge vor einer besseren haben, welche — wie man sich auszudrücken pflegt — noch kein Blut jener Raſse in sich hat, indem sie ein Füllen bringt, was dem Vater mehrentheils ähnlicher seyn wird; und wenn man dann fortgeht, wird man die höchste Aehnlichkeit früher erreichen, als wenn man jenes ungestaltete Thier der ersten Generation ganz verworfen und von vorn angefangen hätte. Will man aber einen Mittelschlag bilden, so muſs man nur wohlgestaltete, d. h. zweckmäſsige Thiere bei der ersten Generation zu

erhal-

erhalten suchen und auswählen. Vor allem ist diese Sorgfalt und Einsicht bei den Gestüten und bei der Veredlung der Landpferde durch Landgestüte von höchster Wichtigkeit. Man darf hier nicht bloſs auf die endliche Einführung und Bildung einer edlen Raſse Rücksicht nehmen, weil der Verlust zu groſs seyn würde, wenn die in den ersten Generationen entstehenden Mulatten fehlerhaft und werthlos wären. Mangel dieser Einsicht und Ueberlegung hat hier schon oft groſsen Nachtheil gestiftet, und bei den Unterthanen einen groſsen Widerwillen gegen die ihnen aufgedrungenen Beschäler edlerer Raſse erweckt. Es muſs hier Rücksicht auf die besondere Natur der in einer Gegend einheimischen Raſse, so wie auf ihre Weide und Verpflegung im Stalle genommen werden, wenn man einen angemessenen Hengst für sie auswählen will. Es wird hierzu eine seltene Erfahrung und Umsicht erfordert, die ich noch bei keinem Pferdekundigen in dem Grade angetroffen habe, wie bei meinem verstorbenen Freunde, dem vormaligen hannöverschen Landstallmeister **Koch**, welcher zuletzt als Universitätsstallmeister zu **Erlangen** angestellt war. Er wählte für die Stuten jeder Gegend, ein hohes Ziel vor Augen habend, manchmal Hengste aus, die ihren nicht zu heterogen und gerade deshalb nicht von einer zu sehr veredelten Raſse waren, worüber manche Unverständige ihn tadelten. Erst ihrer Descendenz gab er Hengste von sogenanntem höheren Blute. Hierdurch bewirkte er, daſs sich die Raſse **allmählig** veredelte, und zwar nach dem besonderen Ideale, welches er nach den örtlichen Verhältnissen jedes Distrikts für das zweckmäſsigste hielt, ohne daſs in den Mittelgenerationen unförmliche und wenig brauchbare Thiere erschienen. Er hatte sich hierdurch ein so groſses Zutrauen bei den Bauern erworben, daſs sie sich ihm ganz überlieſsen, und nie eine Unzufriedenheit mit den mehr oder minder schönen Hengsten äuſserten, die er ihnen von einem Jahre zum andern zuschickte, und manchmal besonders für die Stuten erster, zweiter und dritter Generation bestimmte. Die Pferdezucht ward dadurch in kurzer Zeit in denen Distrikten, die das Landgestüt mit Hengsten versorgte, auf eine unglaubliche Weise gehoben, und es kamen schon die Saugfüllen in einen hohen Preis.

Man hat sehr häufig die Bemerkung gemacht, daſs Thiere von sehr heterogener Raſse keine Neigung sich zu begatten haben, und daſs diese Begattung, wenn sie dennoch bewirkt wird, oft unfruchtbar bleibe. Ist sie aber fruchtbar, so kommt, wie ich oben schon erwähnt habe, oft ein verunstaltetes Geschöpf heraus. Insbesondere hat man letzteres bemerkt, wenn man, um die Gröſse zu erzwingen, groſse männliche Thiere mit kleinen weiblichen paart. Das Bespringen selbst kann schon nachtheilige Folgen haben, wegen der groſsen Schwere des Hengstes oder Stiers auf einer schwachen Stute oder Kuh. Da es indessen männliche Thiere von besonderer Stärke im Kreuze giebt, die sich beim Bespringen auf den Hinterbeinen halten, ohne das weibliche Thier stark zu drücken, so geht es doch oft gut und ohne Störung des *coitus* ab. Allein der durch die Einwirkung des Vaters zu vorzüglicher Gröſse disponirte Keim findet bei seiner Entwickelung in der Mutter nicht die angemessene Nahrung, seine Ausbildung wird folglich mangelhaft und seine Gestalt unproportionirt. — So erkläre ich mir wenigstens die Sache. — Es giebt dann zuvörderst eine schwere Geburt, worüber ich selbst eine empfindliche Belehrung erlitten habe. Auf meinen Vorschlag lieſs die vormalige hannöversche, zu solchen Zwecken reichlich dotirte Landwirthschaftsgesellschaft ostfriesische Zuchtstiere kommen, und vertheilte sie unter einige Dorfgemeinden, die bisher kleine Haidkühe, aber sehr gute Weiden für bessere Raſsen hatten. Sie nahmen solche mit Dank an, aber bei der ersten Kalbezeit kam die Klage, daſs die Kühe äuſserst schwer gekalbt hätten und viele in der Geburt gestorben wären, mit der Bitte, ihnen jene Stiere sogleich wieder abzunehmen. Die ungeschickte und gewaltthätige Behandlung bei der Geburt war freilich zum Theil an dem Tode dieser Thiere Schuld, aber es waren doch hinlängliche Gründe vorhanden, ihnen diese groſsen Stiere zu nehmen, und sie mit neuen Kosten durch kleinere zu ersetzen. Geht die Geburt aber auch gut, so entsteht aus einem unverhältniſsmäſsig groſsen männlichen Thiere sehr häufig ein ungestaltetes junges. Dagegen findet man, insbesondere bei den Pferden, daſs ein gegen die Stute verhältniſsmäſsig kleinerer Hengst ein wohlgebildetes Füllen hervorbringe. Vorgedachte theoretische Erklärung mag richtig seyn oder nicht: es wird von allen erfahrenen und aufmerksamen Viehzüchtern als ein ausgemachter Erfahrungssatz angenommen, daſs das männliche Thier keine unverhältniſsmäſsige Gröſse gegen das weibliche haben müsse, von Unverständigen aber wird sehr häufig wegen der Sucht, den Viehschlag nur zu vergröſsern, dagegen gefehlt. Sie wählen nur zu häufig Stiere und Widder nach der Gröſse und Schwere aus, und suchen sie durch starke Nahrung im ersten Jahre zu der möglichsten Gröſse zu treiben.

Ueberhaupt ist es bei uns noch etwas seltenes, dafs die durch Erfahrung schon ausgemittelten Regeln bei der Viehzucht richtig angewandt werden. Es ist noch nicht lange, dafs man sie überhaupt hier erst kennen lernte. Unter den Engländern ist ihre Kenntnifs mehr verbreitet, aber doch auch bei weitem noch nicht allgemein.

Ich habe geglaubt, dafs diese aus meinem Fache hergenommenen praktischen Bemerkungen von einigem Interesse für den Naturforscher, insbesondere für den Zoologen, seyn könnten, und empfehle sie, in dem Falle, der Erwägung, besonders unserer hochverehrten Herren Collegen, **Rudolphi**, **Illiger** und **Lichtenstein**.

Ueber

die sich fortpflanzenden Abartungen der kultivirten Pflanzen.

Von Herrn THAER *).

In meiner vorigen Vorlesung erlaubte ich mir, der Akademie einige Bemerkungen über die Abarten der Hausthiere, und die vom Landwirthe beobachteten Naturgesetze bei der Erzeugung und Fortpflanzung der seinen Zwekken besonders entsprechenden Rafsen, vorzulegen. Jetzt werde ich etwas von den Arten und Abarten derjenigen Pflanzen sagen, die dem Menschen gleich jenen Thieren fast in alle Klimate gefolgt sind, und dadurch sowohl, als durch den künstlichen Anbau, wahrscheinlich eine so beträchtliche Abänderung von ihrem natürlichen Zustande erlitten haben, dafs es mir noch zweifelhaft scheint, ob wir sie irgendwo in ihrem ursprunglichen Zustande als einheimische Pflanzen auffinden können.

Es ist gewifs, dafs einige dieser Pflanzen noch immer und schnell genug, um es mit eigenen Augen bemerken zu können, Abänderungen annehmen, welche sich, wenn wir die Individuen auswählen, fortpflanzen, und nach einiger Zeit constant werden.

Daher ist bei diesen Pflanzengattungen die Schwierigkeit grofs, und nach der Regel der Botaniker kaum zu lösen, was wir als Art (*species*), und was als Abart (*varietas*) ansehen sollen. Botaniker, die hierüber entscheidend haben absprechen wollen, Linné an ihrer Spitze, sind in offenbare Irrthümer verfallen; und die Geringschätzung, womit dieser von den Hortulanen und Floristen, die ihre Aufmerksamkeit auf Varietäten richteten, sprach, hat zuerst die allgemeine Pflanzenkunde zurückgehalten, indem sie sich auf seine Schüler vererbte. Dennoch sind die Erscheinungen, die wir

*) Vorgelesen den 1sten April 1813.

bei der Abartung der Pflanzen wahrnehmen, gewiſs nicht unwichtig für die Pflanzen-Physiologie; für Landwirthschaft und Gärtnerei aber vom höchsten Interesse. Wenn der Pflanzenkenner jedem Cryptogam aus entfernten Ländern seine Aufmerksamkeit schenkt und mit Recht schenken mag, so verdenke er es doch auch demjenigen nicht, der die Pflanzen, die uns so nahe stehen und uns ernähren, mit gröſserer Aufmerksamkeit betrachtet, und leihe ihm dazu sein, auf feinere Merkmale mehr geschärftes, Auge.

Es kommen hier vor allem die Cerealien in Betracht — diese durch die Gröſse und Nahrungsfähigkeit ihrer Saamen so wichtig gewordene, und durch die Kultur so allgemein verbreitete Gräser. Unter ihnen steht der Weizen in ökonomischer Hinsicht oben an, wegen seines Reichthums an nährender und dem thierischen Körper besonders homogener Substanz.

Unsern gewöhnlichen Weizen haben Linné und nach ihm die meisten Botaniker in zwei Species, *Triticum aestivum* und *hybernum*, unterschieden; haben sich hierin aber wohl mehr von der gemeinen Meinung, als von genauerer Beobachtung — deren sie eine so gemeine Pflanze nicht würdigten — leiten lassen. Beide sind entschieden nur als Abarten, und zwar als leicht in einander übergehende Abarten, zu betrachten. Man säe Sommerweizen vor Winter; ist der Winter gelinde oder giebt er der Saat eine anhaltende Schneedecke, so wird der gröſste Theil der Pflanzen durchkommen; sie werden dann aber um 14 Tage früher blühen und reifen, als der zugleich gesäete Winterweizen. In einem herberen, jedoch nicht allzustrengen Winter, wird zwar ein groſser Theil der Pflanzen ausgehen, ein anderer Theil aber wird bleiben. Nimmt man von diesem den Samen, und säet ihn wieder vor Winter aus, so wird er schon besser durchwintern, und dann in seiner Blüthe und Reifungszeit dem Winterweizen weniger voreilen. In der dritten und vierten Generation unterscheidet er sich in keinem Stücke von dem Winterweizen, und hat mit selbigem gleiche Härte, gleiche Vegetationsperiode und gleiche Stärke der Körner. Dieselbe Umwandlung kann man beim Winterweizen bewirken, wenn man ihn zum erstenmale recht früh im Frühjahre, und dann immer später säet. Die erste Saat wird erst im Herbst und zum Theil gar nicht reif; aber mit jeder Generation reift sie früher, bis dieser Weizen völlig die Natur und die kürzere Vegetationsperiode des Sommerweizens erhält. Säet man ihn zum erstenmale nicht sehr früh im März, sondern erst gegen Ende Aprils, so wird er freilich in dem Jahre nicht in Halme schieſsen, oder doch nur einen einzelnen in die Höhe treiben, der selten seine Vollkommenheit erhält. Ich nicht nur, sondern viele andere, haben diese Versuche mehreremale gemacht, und immer gleiche Resultate erhalten. Besonders haben manche sehr gepriesene Sommerweizen-Abarten aus wärmern Klimaten, die bei uns nur unvollkommen reiften, auf diese Weise in Winterweizen umgewandelt.

Allein Linné und seine Nachfolger haben dem Winter- und Sommerweizen einen andern charakteristisch seyn sollenden Unterschied zugeschrieben: jener soll begrannet, dieser unbegrannet seyn. Wären diese Grannen beständig, so wäre allerdings ein, die spezifische Absonderung hinlänglich begründendes Merkmal vorhanden. Aber Haller hat schon bemerkt, daſs die Grannen bei den Weizenarten nicht beständig seyen, und daſs dieselbe Weizenart Grannen bekomme und sie wieder verliere, wenn sie von kaltem auf warmen, von bergigtem auf ebenen Boden verpflanzt wird. Ein Sommerweizen, den ich bei einem Freunde durchaus begrannet gesehen hatte, verlor bei mir schon im ersten Jahre die Grannen zum Theil, und wenn ich nicht sehr irre, kamen aus demselben Stamm begrannete und unbegrannete Aehren. In der dritten Generation fanden sich kaum noch Spuren von Grannen. Es war auf keine Weise wahrscheinlich, daſs dies von fremder Befruchtung herrühren konnte; denn weit und breit umher stand kein anderer Sommerweizen, und der Winterweizen, der doch auch nicht in der Nachbarschaft stand, hatte verblühet, wie mein Sommerweizen die Spelzen zu öffnen anfing. Und dann ist es ganz unrichtig, daſs der Sommerweizen immer Grannen, der Winterweizen keine habe; wir haben beide mit und ohne Grannen.

Botanisch ist also der Unterschied zwischen *T. hybernum* und *aestivum* völlig unbegründet, und es ist richtiger, beide Abarten unter einem Specialnahmen (*T. cereale*) zu begreifen.

Die Abarten aber sind mannigfaltig verschieden, und es giebt einige, die nach den Regeln der Unveränderlichkeit, bei der Fortpflanzung durch Samen, mit gröſserem Rechte als besondere Species betrachtet werden können, wie der Winter- und Sommerweizen.

In Ländern, wo der Weizenbau mit besonderer Sorgfalt betrieben wird, und wo man deshalb dieses Getreide auch auf Boden bringt, der ihm nicht sehr angemessen ist, hat man unzählige Abarten. In den englischen landwirthschaftlichen Schriftstellern habe ich über 150 verschiedene Namen für Weizenarten gezählt. Aber bis die Landwirthschaftskunde mehr wissenschaftlich betrieben wird, bleibt es hier, wie in so manchen Fällen, zweifelhaft, was man unter den Provinzialnamen zu verstehen habe.

Der Landwirth unterscheidet die Weizenarten hauptsächlich nach der Farbe der reifen Körner und des reifenden Strohes. Man hat braunrothen, gelben und weifsen Weizen in verschiedenen Nüancen. Mit der Farbe der Körner stimmt die Farbe des Strohes zuweilen, aber nicht immer, überein. Die Engländer unterscheiden braunen und gelben Weizen mit weifslichem Stroh, und weifsen Weizen mit bräunlichem Stroh, als besondere Abarten. Der Botaniker beachtet die Farbe als ein bloſses Naturspiel vielleicht zu wenig. Aber sie deutet doch eine verschiedene Natur der Pflanze an, und bei genauer Beobachtung findet man doch oft, dafs bei verschiedener Farbe auch ein verschiedenes Verhältnifs der Theile in der Form da ist. Ob die Verschiedenheit der Farbe ausdauernd sey, auch wenn die Saat auf verschiedenem Boden oder in ein anderes Klima verpflanzt wird, scheint noch zweifelhaft. Aber schnell, d. h. in den ersten Generationen, verändert sie sich nicht; wenn gleich der braunrothe Weizen, der nur dem thonigen weichen Boden angemessen ist, auf leichteren gebracht, im übrigen höchst kümmerlich wird.

Aber ein botanisch- und ökonomisch-wichtiger, obwohl noch wenig beachteter Unterschied des Weizens ist der, dafs einige Arten eine glatte Spelze (*valvula laevis, nuda*), andere eine sammtartige filzige (*valvula lanuginosa, tomentosa*) haben. Eine von den Engländern besonders auf Höheboden sehr gerühmte und auch zu uns gekommene Weizenart, hat dieses *tomentum* am auffallendsten, und wird daher von ihnen *White velwet*, weifser Sammtweizen, genannt. Ob dieser Filz so beständig sey, dafs er botanisch einen specifischen Unterschied bestimmen kann, wage ich noch nicht zu bestimmen; aber für die Landwirthschaft ist er sehr wichtig. Er ist ohne Zweifel ein sehr thätiges Einsaugungsorgan, die Feuchtigkeit hängt daran, und solcher Weizen bleibt nach Regen und Thau weit länger nafs als der glattspelzige. Daher pafst er sich so sehr für hohe trockene Gegenden; taugt aber durchaus nicht für feuchte neblige Niederungen. Vor zwei Jahren (1811) sahe ich im Oderbruche ein Weizenfeld, was durchaus Staubbrand hatte, und bei genauerer Untersuchung fand ich, dafs es dieser Sammtweizen sey, den der Besitzer aus Dessau hatte kommen lassen. Die übermäfsige Feuchtigkeit der Aehre erzeugte ohne Zweifel diese, mit dem Kornbrande nicht zu verwechselnde, Krankheit.

Man hat diese Art von Weizen mit dem auch von den Botanikern unterschiedenen *T. turgidum* verwechselt, der aufgeschwollene bauchige Spelze hat. Aber unrichtig; denn jene Weizenart hat diese nicht, und dieses *T. turgidum* hat zwar auch etwas haariges an den Spelzen, aber diese sind nicht so gleichmäſsig damit überzogen. Vermuthlich hat man letztern deshalb englischen Weizen genannt, ich finde seiner aber bei den englischen landwirthschaftlichen Schriftstellern nirgends erwähnt.

Der Wunderweizen (*T. compositum*) ist anerkannt eine luxurirende Spielart, indem er sehr schnell zurückschlägt zum gewöhnlichen, wenn er nicht auf reichem Boden geräumig ausgesteckt wird.

Daſs der Spelz (*T. spelta*), das Einkorn (*T. Monococcon*) und der Gommer (*T. polonicum*) entschieden verschiedene Species sind, die nie zu gewöhnlichem Weizen übergehen werden, brauche ich nicht zu sagen. Aber man hat ebenfalls manche Abarten davon, die ich aber nicht genug kenne.

Vom Roggen giebt es anerkannt nur eine Species, aber mehrere ihrer Natur nach abweichende Varietäten, die sich auch durch ein verschiedenes Verhältniſs ihrer Theile auszeichnen, welches bei sinnlicher Vergleichung zwar in die Augen fällt, aber sich durch Worte kaum aussprechen läſst, da es nur auf ein Mehr oder Weniger ankommt.

Der gewöhnliche Winter- und Sommerroggen geht eben so wie der Weizen in einander über, wenn man seine Saatzeit allmählig verändert. Der Sommerroggen ist in allen seinen Theilen schwächer, weil seine kürzere Vegetationsperiode die Verstärkung der Pflanze nicht wie beim Winterroggen gestattet. Ein anderes Unterscheidungsmerkmal läſst sich nicht auffinden.

Aber eine constantere Art ist derjenige Roggen, den man Staudenroggen nennt. Er unterscheidet sith vornehmlich durch eine längere Vegetationsperiode und eine dadurch bewirkte vollkommene Ausbildung aller Theile. Er ist entschieden eine zweijährige Pflanze, und ich halte es nicht für möglich, ihn in einem Sommer zur Reife zu bringen, und ihn so in Sommerroggen umzuwandeln. Auch im März gesäet, bleibt er dennoch in der Erde, ohne Halme in die Höhe zu schieſsen. Wenn er mit dem gewöhnlichen Roggen gleichzeitig reifen soll, so erfordert er eine sehr frühe Saat, sonst kommt er später zur Reife und geräth schlecht. Früh gesäet breitet sich die Pflanze sehr aus, wenn sie anders Raum und Nahrung hat, macht unzählige Sprossen, die dann im künftigen Sommer in Halme und Aehren übergehen. Wir haben im vorigen Jahre 112 Aehren von einer

Pflanze.

Pflanze, die sehr räumlich stand, gezählet. Deshalb kann er, sehr weitläuftig aber früh auf kräftigen Boden gesäet, ein sehr dichtes Erntefeld bilden.

Eigenthümlich ist diesem Roggen eine stärkere Ausdehnung in die Länge gegen den gewöhnlichen. Sein Halm ist oberhalb des zweiten Knotens dünner im Verhältnifs seiner Länge; die Aehre ist bei einer gleichen Anzahl von Körnern länger, weil die Spelzen entfernter stehen, das Korn selbst hat eine gröfsere Länge im Verhältnifs seiner Dicke. Dann habe ich ihn daran unterscheiden gelernt, dafs der Halm zwischen dem zweiten und dritten Knoten ein Knie macht, was natürlich von seiner starken Bestaudung herrührt, welche den Halm anfangs seitwärts treibt. Aber diese ist auch die einzige constante Abart, die ich vom Roggen habe entdecken können. Was man unter dem Namen von norwegischen, archangelschen und amerikanischen u. a. Roggen gepriesen hat, war immer dieser selbige Staudenroggen, so wie auch der, den man Johannisroggen nannte. — Eben so gut könnte man Ostern- und Pfingstroggen daraus machen, wenn man ihn um die Zeit säete.

Wenn gleich einige Gegenden wegen eines sehr guten Saatroggens in Ruf stehen, so dafs man diesen daher kommen läfst und ihn danach benennt, so rührt dies doch nur von einem dem Roggen sehr angemessenen Boden, guter Kultur und Behandlung des Saatgetreides her, und der Vorzug dieses Saatkorns verliert sich in den folgenden Generationen bald.

In Ansehung der kultivirten Gerstenarten mufs ich von den Botanikern am meisten abweichen. Sie nehmen nur das *Hordeum vulgare, H. distichon* und *H. hexastichon* als Species an, und halten *H. coeleste* und andere für Abarten des *vulgare* und *distichon* Aber diese unterscheiden sich so wesentlich in ihren Fructificationstheilen in der Gestalt des Korns, (auch in den näheren Bestandtheilen desselben), dafs man sie für besondere Species halten mufs, wogegen ich mehr geneigt bin, das *H. vulgare* und das *H. hexastichon* für blofse Abarten zu halten. Linné ward ohne Zweifel dadurch verleitet, dafs selbst Ackerbauer einen Uebergang der nackten Gerste in die andere zu bemerken glauben. Es ist aber ein Irrthum, in welchen ich ohne genauere Untersuchung selbst verfallen wäre. Wenn einige Körner des *H. coeleste* nicht völlig reifen, so behalten sie ihre innere Spelze, und trocknen damit, wie das *vulgare*, zusammen, bekommen folglich beinahe eben die Gestalt. Man braucht aber nur die Hülse abzulösen, so zeigt sich die eigenthümliche Form des *H. coeleste*.

Wahrscheinlicher ist mir der Uebergang zwischen *H. vulgare* und *hexastichon.* Gewöhnlich wird jenes fast in der Mitte des Sommers gesäet, und hat dann unter allen Getreidearten, nebst dem kleinen Mais, die kürzeste Vegetationsperiode. So behandelt nimmt es eine sehr weichliche Natur an, und wenn man es früh säet und nun noch Nachtfröste eintreten, so wird es dadurch zerstört. Aber man hat, wahrscheinlich durch allmählige Abhärtung hervorgebracht, eine Abart, die früh gesäet werden kann, deshalb Märzgerste heiſst, dem Froste wiederstehet und eine längere Vegetationsperiode hat. Man findet sie im Oderbruche und in anderen Niederungsgegenden. Eigentlich ist es *H. vulgare;* aber ich habe, wo sie üppig wuchs, Aehren darunter angetroffen, die durchaus von *H. hexastichon,* welches fast nur als Wintergetreide gebauet wird, nicht zu unterscheiden waren.

Daſs *H. zeocriton* eine besondere Species sey, versteht sich von selbst.

Man hat eine besondere Stauden- oder Blattgerste unter mancherlei ausländischen Namen gerühmt. Die, welche ich aber zweimal als solche erhalten habe, zeichnete sich von der zweizeiligen Gerste auf keine Weise aus, wenn man auch diese in vollständigen Samen und nicht gedrängt aussäete. Man machte es nämlich bei dieser Staudengerste zur Bedingung, daſs sie sehr dünn auf kräftigen Boden ausgesäet werden müsse; da war es denn natürlich, daſs sie sich besser bestaudete und vollkommener ward, als die andere Gerste, die man mehrentheils zu dicht säet.

Ueberhaupt muſs ich bei dieser Gelegenheit bemerken, daſs die Vorzüge der aus entfernten Gegenden sich herstammenden, angeblich von den unsrigen verschiedenen Getreidearten, nach meinen schon vor 20 Jahren mit den meisten gemachten Versuchen, lediglich der sorgfältigen Behandlung, die man ihnen angedeihen läſst, beizumessen seyn, aber wegfallen, sobald man damit ins freie Feld und zur gewöhnlichen Kultur übergehet. Mit mir haben sich jetzt viele andere, die sonst sehr davon eingenommen waren, überzeugt, daſs davon kein Gewinn für den Ackerbau zu hoffen sey.

Ich werde diese Bemerkungen über die Abartungen verschiedener Pflanzengeschlechter durch die Kultur von ihrem wahrscheinlichen natürlichen Zustande fortsetzen. Vor allem bietet das Geschlecht der *Brassica* auffallende Erscheinungen dar; bei keinem ist auch der Einfluſs fremder Befruchtung so merklich, und man kann es darin mit dem Hundegeschlecht unter den Thieren vergleichen. Vermuthlich weil auch dieses Geschlecht seit undenklichen Zeiten unter der Hand des Menschen gestanden hat.

Versuche und Beobachtungen über den Instinkt der Pflanzen.

Von Herrn S. F. Hermbstaedt *)

Instinkt in der allgemeinen Bedeutung, nenne ich das aus innerem eigenen Triebe entwickelte Streben organischer Geschöpfe, nach Ausübung bestimmter Thätigkeiten.

Man hat einen solchen Instinkt nur allein den Thieren zuerkannt, und als Resultate seiner Aeuſserungen gewisse angeborne Kunstfertigkeiten derselben, ihren Trieb nach Erhaltung, so wie ihren Trieb nach der Auswahl eigenthümlicher Nahrungsmittel, betrachtet.

Daſs man den Pflanzen jemals einen ähnlichen Instinkt zuerkannt habe, ist mir nicht bekannt.

Durch mehrjährige Beobachtungen, so wie durch einige darauf gegründete directe Versuche geleitet, glaube ich indessen berechtigt zu seyn, auch den Pflanzen einen Instinkt zuerkennen zu müssen, wenn gleich ihnen gemeiniglich nur ein weit niederer Grad der organischen Vollendung als den Thieren zuerkannt wird.

Einige besondre und fast allgemein bekannte Phänomene, welche die Pflanzen, durch ihre Wechselwirkung mit äuſsern Potenzen veranlaſst, darbieten, können hier nicht in Betracht kommen, weil sie mit demjenigen, was ich Instinkt der Pflanzen nenne, in keiner Beziehung stehen.

Zu jenen nicht instinktartigen Thätigkeiten der Pflanzen rechne ich: 1) die scheinbare Muskularbewegung, welche an den Blättern der *Mimosa sensitiva*, des *Hedysarum gyrans* und einigen andern Vegetabilien wahrge-

*) Vorgelesen den 25sten Junius 1812.

nommen werden, wenn man sie durch die Einwirkung äufserer mechanischer Potenzen reizt; 2) das Verspritzen des Samenstaubes der Blumen von der *Centaurea Cyanus* und einigen andern Blumen, wenn die Staubwege derselben mechanisch gereizt werden; 3) das Hinneigen der Blumen der *Passiflora*, des *Helianthus annuus* und vieler andern, nach der Gegend wo das Sonnenlicht herströmt, so wie die oft an einem und eben demselben Tage veränderte Richtung jener Blumen nach Osten, Süden und Westen; 4) das Verschliefsen vieler Blumen des Nachts, und ihre von selbst veranlafste Wiedereröffnung am Tage: denn jenes sind Phänomene, die mit dem Instinkt der Pflanzen entweder in gar keiner, oder doch nur in äufserst geringer Beziehung stehen.

Eben so wenig kann hierher gerechnet werden: 1) das Vermögen mehrerer lebenden Pflanzen oder ihrer Blüthen, im Dunkeln zu leuchten oder phosphorische Blitze auszustofsen, wie die Blüthen vom *Tropaeolum majus* und die Kartoffeln; oder 2) das Vermögen, einen hohen Grad von Temperatur in lebendem Zustande aus sich selbst zu erregen, wie der Fruchtboden des *Arum maculatum* zur Zeit der Blüthe, desgleichen mehrerer Knollen-, Beeten- und Rübenarten: denn alle jene Erscheinungen, so merkwürdig sie auch immer seyn mögen, sind dennoch durchaus unabhängig von dem, was man Instinkt der Pflanzen nennen kann; mögen sie indessen immer als Aeufserungen einer organischen Thätigkeit angesehen werden, deren veranlassende Ursachen einer weitern Verfolgung und Erforschung des Physikers werth sind.

Was ich bei den Pflanzen Instinkt nenne, mufs mit denjenigen Aeufserungen verwandt seyn, welche bei den Thieren Instinkt genannt werden.

Instinkt bei den Thieren heifst aber ihr aus eigenem innern Willen hervorgehender Trieb, ihrer individuellen Existenz gemäfs, die zu ihrer physischen Erhaltung und vollendeten organischen Ausbildung erforderlichen specifiken Nahrungsmittel unter vielen allein anszuwählen, um solche zu der durch ihre Assimilationskraft veranlafsten Erzeugung der eigenthümlichen Gemengtheile, die ihre einzelnen Organe, so wie sich darin bewegende Säfte bilden, zu verwenden.

Wie grofs der Einflufs der specifiken Beschaffenheit solcher Nahrungsmittel, nicht nur auf den Habitus, sondern auch auf die eigenthümlichen Aeufserungen der Lebensthätigkeiten der Thiere ist, vom Insekt bis zum

Quadrupeden hinauf, liegt klar vor Augen, und bedarf wohl keiner weitern Erörterung.

Aber auch die todte Masse der Thiere, so wie die natürlichen festen und liquiden Se- und Excretiones derselben, sind nach der specifiken Natur der von ihnen genossenen Nahrungsmittel, aufserordentlich von einander abweichend; und doch scheint alles dieses, durch den Instinkt der Thiere, die ihrer Natur angemessenen besondern Nahrungsmittel, ja oft selbst die ihrem Körper zuträglichen Heilmittel aus vielen auszuwählen, allein begründet zu seyn.

Mufs aber zugegeben werden, dafs jene besondern Fähigkeiten der Thiere durch einen eigenen Instinkt derselben bedingt werden: so giebt dieses uns auch ein Recht, den Pflanzen einen gleichen Instinkt zuzuerkennen, weil solche unsern Beobachtungen eine gleiche oder doch ähnliche Thätigkeit zu Tage legen; nämlich eigene nährende Stoffe unter vielen auszuwählen, ihrer individuellen Natur gemäfs; und solche durch ihren Organismus, ihre Lebensthätigkeit, und die als Resultat von Beiden hervorgehende Assimilationskraft getrieben, zu ihren nähern Bestandtheilen zu verarbeiten und umzuformen.

Herr von Saussure d. J. hat es durch seine Erfahrungen sehr wahrscheinlich gemacht, dafs die Grunderden des Bodens, in welchem die Pflanzen wachsen, auf die Erzeugung derjenigen erdartigen Elemente, welche bei ihrer chemischen Zergliederung als entfernte Bestandtheile in ihnen gefunden werden, gar keinen Einflufs besitzen; wenn man nicht eine mögliche Metamorphose der einen Erde in eine andere zugeben will, welches doch Niemanden einfallen kann und wird, der die Wirkungen der Natur vorurtheilsfrei beobachtet, und sich mit den Resultaten derselben vertraut zu machen strebt.

Herr von Saussure sahe, dafs Pflanzen, die bei ihrer Zergliederung nur Kieselerde als erdige Basis lieferten, diese Erden auch dann nur produciren, wenn sie im reinen Kalkboden kultivirt worden waren; und so sahe derselbe auch umgekehrt diejenigen Pflanzen, welche bei ihrer Zergliederung Kalk liefern, diesen auch dann allein produciren, wenn sie im reinen Kiesel gewachsen waren.

Eben so hat auch der talentvolle Chemiker Herr Schrader, dem deshalb ein Preis von der königlichen Akademie zuerkannt wurde, beobachtet, dafs der Samen der Getreidearten, wenn sie auch im reinsten Wasser gewachsen und zu Pflanzen ausgebildet sind, dieselben Erden und Metalloxyde, welche diesen Samen vor der Vegetation enthielten, auch in den daraus hervorgegangenen Pflanzen, aber immer etwa um $\frac{2}{3}$ vermehrt, wieder darbieten: welche Massenvermehrung, wenn man nicht die Elemente dazu im reinen Wasser, oder in der zur Vegetation nothwendig mitwirkenden Luft suchen will, einer in dem Organismus und der Lebensthätigkeit der Pflanzen begründeten eignen produktiven Kraft, allein zugeschrieben werden muſs.

Die Richtigkeit der von den Herren von Saussure und Schrader gemachten Bemerkungen kann, bei mir wenigstens, keinem Zweifel unterworfen seyn, weil ich dieselben auf mehreren, selbst entgegengesetzten Wegen bestätigt gefunden habe: sie scheinen mir vielmehr zu beweisen, daſs die ernährenden Gefäſse der Pflanzen keinesweges dazu geeignet sind, gröbe materielle Theile aus dem Boden, der die Pflanzen gebohren hat, einzusaugen, und sie in die zum Prozeſs der Assimilation bestimmten Gefäſse derselben überzuführen; sondern daſs vielmehr die Pflanzen von einem eigenen Instinkt belebt sind, durch den sie das Vermögen besitzen, die uns zur Zeit noch unbekannten, isolirt nicht darstellbaren Elemente zu jenen Produktionen, aus den sie umgebenden gröbern Substanzen zu entwickeln, und solche zur Bildung neuer Gemische zu verbinden, die uns nun in den Pflanzen selbst, als nähere oder entferntere Bestandtheile, dargeboten werden.

Jenes aus eignem innern Triebe der Pflanzen hervorgehende Produktionsvermögen, das so nahe an die Kraft des Wollens grenzt, ist es, dem ich das Prädikat eines Instinkts der Pflanzen beilege: ein Gedanke, auf den ich zufällig durch die Erscheinungen geleitet wurde, die mir mehrere Versuche mit Pflanzen angestellt darboten, welche einen ganz andern Zweck beabsichtigten; die aber die Grundlage zu einer neuen Reihe von Versuchen wurden, deren Resultate den hauptsächlichsten Gegenstand meiner Abhandlung ausmachen.

Es sind bereits mehr als 10 Jahre verflossen, daſs ich mit Versuchen beschäftigt war, die Quantität des wirklichen Kali zu bestimmen, welches aus verschiedenen Pflanzen, nach deren Einäscherung, gezogen werden kann. Ich bediente mich dabei der sehr einfachen Methode solche zu trocknen, das trockne Kraut an dem Lichte zu verbrennen, und vorläufig, aus dem mehr oder minder scharfen alkalischen Geschmack des erhaltenen Asche, auf die gröſsere oder geringere Masse ihres Kaligehaltes einen Schluſs zu ziehen.

Hierbei entdeckte ich zufällig, daſs manche der gedachten Vegetabilien ganz ruhig verbrannten, andre verbrannten mit einem knisternden, und noch andre mit einem zischenden Geräusche, wenn gleich sie sämmtlich auf einem und eben demselben Boden gewachsen waren.

Diese, wie es mir schien, merkwürdige, und durch öftere Wiederholung der Versuche bestätigte Beobachtung, führte mich zur genauern Untersuchung derselben Pflanzen auf einem andern Wege, deren Resultat war, daſs die ruhig verbrennenden Pflanzen ihr Kali an vegetabilischen Säuren, die mit Knistern brennenden an Salzsäure, und die mit zischendem Geräusche brennenden an Salpetersäure, wenigstens zum Theil, gebunden hielten. Erfahrungen, die mir um so auffallender seyn muſsten, weil, so weit unsre Erfahrungen darüber reichen, die bildenden Elemente der genannten Säuren einander so sehr entgegengesetzt sind.

Da ich voraussehen durfte, daſs die genannten Säuren im neutralen Zustande an Alkali gebunden, in jenen Pflanzen enthalten seyn muſsten, so leitete mich dieses zu neuen Versuchen, die während dem Zeitraum von sechs Jahren mehrmals wiederholt worden sind, und deren Resultate mir eine Bestätigung darboten, daſs nach der specifisch verschiedenen Beschaffenheit der individuellen Pflanzen, solche auch eine eben so invidued verschiedene Anzahl von Stoffen in sich produciren können, deren Produktion einen eigenen Instinkt der Pflanzen voraussetzt.

Mein Augenmerk war dabei ganz besonders auf eine durch die Vegetation bewirkte Generation des Salpeters gerichtet, und ich beobachtete, daſs von den in dieser Hinsicht untersuchten Vegetabilien, von den Wurzelgewächsen besonders die Beetenarten, von den Staudengewächsen hingegen die Bläiter vom *Anethum graveolens*, von *Borrago officinalis*, von *Achillea Millefolium*, so wie die Stengel und Blätter von *Helianthus annuus* und *Datura Stramonium*, Salpeter unter ihren Bestandtheilen darboten, während mehrere andere auf demselben Boden mit jenen gewachsenen Vegetabilien, auch keine Spur von jenem Salze unter ihren Bestandtheilen erkennen lieſsen.

Es schien mir möglich zu seyn, daſs die gedachten Pflanzen einen im Erdreiche vorhanden liegenden schon fertigen Salpeter, vielleicht durch besondre Adhäsionskräfte, daraus aufnehmen könnten, weil sie jenes Salz anzuziehen bestimmt seyen: es konnte aber auch möglich seyn, daſs die gedachten Pflanzen nur die zur Erzeugung des Salpeters oder der Salpetersäure erforderlichen primitiven Elemente aus dem Erdreich aufnehmen, die Produktion des Salpeters oder auch nur seiner Säure selbst, und eben so die der anderweitigen Salze, nur ein Werk des Organismus und der Lebensthätigkeit der Pflanzen sey.

Um hierüber einigermaſsen zur Entscheidung zu gelangen, wurden seit einer Reihe von Jahren vielfältige Versuche angestellt, von denen ich bloſs diejenigen hier erörtere, die zu einem wenigstens scheinbar bestimmten Resultate hindeuten.

Ich lieſs Pflanzen, die mir bei der Untersuchung keine Spur von Salpeter zu erkennen gaben, in einem Erdreich aus ihren Samen hervorkommen, das aus 3 Theilen weiſsem reinen Porzellanthon, 2 Theilen reinem mit Wasser ausgekochten Flugsand, einem Theil mit Wasser ausgesüſster Kreide, und einem Theil aus verweseten Eichenholzspänen gebildeten Humus zusammengesetzt worden war. Das Ganze wurde mit reinem destillirten Wasser bis zur ballenden Substanz angeknetet.

Dieses in mehrere Gefäſse vertheilte Erdgemenge wurde impregnirt; 1) mit einer durch Wasser geschwächten Salpetersäure; 2) mit in destillirtem Wasser gelöstem salpetersaurem Kali; 3) mit gelöstem salpetersauren Kalk;) mit salpetersaurer Talkerde; 5) mit gelöstem salpetersaurem Ammonium.

Zu den Pflanzensamen wurden solche gewählt, deren Pflanzen mir bei der Zergliederung keinen Gehalt an Salpeter zu erkennen gegeben hatten; namentlich *Rumex Acetosa*, *Leontodon Taraxacum*, *Lactuca sativa*, *Artemisia Absinthium* und *Atriplex hortensis*. Die daraus gezogenen Pflanzen zeigten aber bei der damit angestellten Zergliederung keine Spur von Salpeter, sondern nur weinsteinsaures, salzsaures und schwefelsaures Kali. Die Untersuchung derselben wurde auf dreierlei Wegen angestelst, einmal durch das Verbrennen des trocknen Krautes, zweitens durch die Zergliederung auf dem ersten Wege und die Prüfung mit Nergration, drittens durch die allmählig erzielte Verwesung der frischen Vegetabilien, die Aussüſsung des daraus gebildeten Humus, und die Abdunstung der Flüssigkeit zur Kristallisation.

Wurden hingegen in demselben Erdgemenge Pflanzen aus ihrem Samen gezogen, die nach vorausgegangener Prüfung Salpeter zu produciren pflegen, so enthielten sie nicht nur diesen, sondern auch in gröſserer Masse, als die in unzubereitetem Erdreich gewachsenen.

Gelei-

Geleitet durch jene Beobachtungen liefs ich nun im Garten besondre 2 Fufs tiefe und 3 Fufs im Quadrat haltende kleine Beete abstechen, die mit gewöhnlicher mit Wasser gut ausgelaugter Felderde angefüllt wurden, welche in einem sandigen Lehm bestand.

Jedes einzelne Beet wurde hierauf mit nachfolgenden Düngungsmitteln gedünget: 1) mit Humus aus verweseten Sägespänen von **Eichenholz**; 2) mit Humus aus verwesetem **Roggenstroh**; 3) mit frischem **Kuhmist**; 4) mit frischem **Pferdemist**; 5) mit **Schafmist**; 6) mit **Taubenmist**; 7) mit **Hünermist**; 8) mit gefaultem **Blut**; 9) mit verweseten **Hornspänen**; 10) mit **Menschenharn**.

In diesen vorbereiteten Erdgemengen wurden nun folgende, vorher auf einem Mistbeete aus ihren Samen gezogene Gewächse, nämlich: 1) *Helianthus annuus*; 2) *Beta altissima*; 3) *Anethum graveolens*; 4) *Borrago officinalis*; 5 *Achillea Millefolium*; 6) *Datura Stramonium*; 7) *Rumex acetosa*; 8) *Artemisia Absinthium*; 9) *Lactuca sativa*; 10) *Leontodon Taraxacum* dergestalt ausgepflanzt, dafs jedes einzelne der zehn Stück einzelner Beete zehn Stück, nämlich von jeder der genannten zehn verschiedenen Pflanzen ein Stück, enthielt.

Die darin gezogenen Pflanzen wurden, nach dem Maafse dafs sie ihre Vollendung erreichten, mit den Wurzeln herausgenommen, im noch frischen Zustande für sich verkleinert, und hierauf die verkleinerte Masse in hundert einzelnen nicht durchlöcherten Blumentöpfen der von selbst erfolgenden Verwesung unterworfen, bis alles in Humus übergegangen war, welches einen Zeitraum von neunzehn vollen Monaten erforderte.

Der aus jeder einzelnen Pflanze gewonnene Humus wurde hierauf mit Wasser ausgesüfst, und die Flüssigkeit anfangs über dem Feuer, späterhin aber blofs an der Luft abgedunstet, da sich dann folgende Resultate darboten.

In den abgedunsteten Flüssigkeiten von Numero 1 bis 6 hatten sich mehr oder weniger bedeutende Kristalle von Salpeter gebildet, die sich durch eine braune Farbe auszeichneten, die aber ein völlig reines Salz darstellten, wenn sie aufs neue in reinem Wasser gelöst, die Lösung mit gepulverter Kohle gekocht, filtrirt, und wieder kristallisirt wurde.

In den Humuslaugen von Numero 7, 8, 9 und 10 hatten sich dagegen in No. 8 und 10 einzelne kleine Kristalle gebildet, die sich wie ein Gemenge von **salzsaurem Kali** und **schwefelsaurem Kali** verhielten.

In den Laugen von No. 7 und 9 waren gar keine Salzkristalle wahrzunehmen, sondern blofs eine schmierige reich mit Schimmel bedeckte Substanz von brauner Farbe.

Hier waren also immer verschieden geartete Pflanzen in einerlei Erdreich kultivirt worden, und dennoch zeigten sie eine sehr verschieden geartete Grundmischung. Immer hatte sich salpetersaures Kali in denjenigen generirt, die solches immer zu enthalten pflegen, in welchem Erdreich sie auch gewachsen seyn mögen; da hingegen diejenigen, welche jenes Salz sonst nicht zu produciren pflegen, solches auch hier nicht producirt hatten.

Wenden wir einen Blick auf die gebrauchten Düngungsmittel, so sind solche, mit Ausnahme des Humus von Sägespänen und vom Roggenstroh, sämmtlich von der Art, dafs die Gegenwart des Stickstoffes in ihnen vorwaltend enthalten ist. Da dieser aber auch zugleich das Substrat der Salpetersäure ausmacht, so müssen die oben genannten Salpeter-producirenden Pflanzen, ihrem eigenen Instinkt gemäfs, hier die Kraft ausgeübt haben, den Stickstoff insbesondere aus den ihn enthaltenden Düngungsmitteln zu entwickeln und zur Bildung der Salpetersaure zu verwenden, wozu ihnen der erforderliche Sauerstoff aus der Luft in hinreichender Menge dargeboten wurde.

Merkwürdig war mir übrigens auch diese Produktion des Salpeters, durch den Humus von Eichenholzspänen und vom Roggenstroh, da hier der Stickstoff wohl am wenigsten reichlich vorausgesetzt werden kann: wer vermag aber zu beurtheilen, was Instinkt, Organismus und Lebensthätigkeit, im Conflict ihrer Thätigkeit, zu leisten geschickt sind?

Nicht weniger merkwürdig ist hierbei auch die stattgefundene Produktion des Kali, welches zur Bildung des hier vorgekommenen fertigen Salpeters erfordert wurde, das schlechterdings erzeugt seyn mufste, weil sich aus keinem Grunde erweisen läfst, dafs solches in den gebrauchten Düngerarten, wenigstens nicht in allen, fertig gebildet vorhanden lag.

Möchten Arbeiten dieser Art weniger Zeit-, Geduld- und Kostenraubend seyn, sie würden uns über das Produktionsvermögen, welches aus der vereinigten Wirkung des Organismus und der Lebensthätigkeit hervorgehet, noch manchen wichtigen Aufschlufs geben, und tiefere Blicke in die

Physiologie der Pflanzen gewähren, als hier uns bis jetzt zu thun erlaubt sind.

Schon ist eine Reihe ähnlicher Versuche beendigt, welche die Instinktsfähigkeit der Pflanzen in der Erzeugung des Pflanzenklebers (der *Colla*) bei den Getreidearten aufser Zweifel setzen; ich werde die Resultate gelegentlich zusammenstellen, und solche der königlichen Akademie vorlegen.

Versuche und Bemerkungen

über

das Keimen der Pflanzensamen.

Von Herrn S. F. Hermbstaedt *).

Das Keimen der Pflanzensamen, d. i. die Entwickelung eines Pflanzen-Embryo aus seinem Ei, und die Ausbildung dieses Embryo zur Pflanze von bestimmtem Geschlecht, ist ein so mächtiger Prozeſs der Natur, daſs die Physiker von jeher ihr Augenmerk darauf gerichtet haben.

Alle diejenigen, welche den Gegenstand einer empirischen Untersuchung unterworfen, und die Resultate der darüber angestellten Versuche mit vorurtheilsfreien Beobachtungen verfolgt haben, kommen darin überein, daſs die Samen der Pflanzen mit den Eiern der Thiere eine überaus groſse Aehnlichkeit besitzen; daſs also beim Samenkorn der Pflanze, wie beim Ei des Vogels, der Keim zum künftigen Geschöpf fertig gebildet vorhanden liegt, und nur der zu seiner Lebensthätigkeit und davon abhängenden Entwickelung nöthigen Reizmittel bedarf, um belebt, entwickelt und organisirt zu werden.

Welches sind aber die Reizmittel, die hier die Lebenthätigkeit erwecken? welche Veränderungen entstehen durch ihre Einwirkung in der Grundmischung, und dadurch in der Substanz des Pflanzensamens? welches sind die Erscheinungen, die sich dadurch deduciren lassen? Ueber die Beantwortung dieser Fragen ist man wenigstens noch nicht allgemein einverstanden.

*) Vorgelesen den 15ten Februar 1813.

Eines der ersten und hauptsächlichsten Reizmittel zur Belebung des Pflanzenkeims und seiner Entwickelung zum Embryo scheint im Wasser gegründet zu seyn: denn auch die gesundesten Pflanzensamen beharren an einem trockenen Orte im Zustande des Schlafs, ohne dafs eine Entwikkelung ihres Keims wahrgenommen wird.

Aber das Wasser ist nicht allein die Keim-entwickelnde Potenz, denn der dadurch entwickelte Keim stirbt sogleich ab, wenn solcher nicht mit der atmosphärischen Luft in Contact gesetzt wird; folglich mufs auch die atmosphärische Luft zu jenen nothwendigen Reizmitteln gezählet werden.

Beobachtungen über das nothwendige Daseyn der atmosphärischen Luft, zur fernern Ausbildung des einmal entwickelten Pflanzenkeims, haben bereits mehrere ältere Physiker geliefert, wie z. B. die Herren Ray, Homberg, Boyle, Musschenbroek und Boerhave: denn sie haben bewiesen, dafs weder im Torricellischen noch im Gerickeschen Raume eine Keimausbildung möglich war, welche jedoch sehr bald erfolgte, wenn Luft hinzu gelassen wurde.

Andre Physiker der neuern Zeit, wie die Herren Scheele, Achard, Gough, Cruischanck und v. Humboldt, haben es aufser Zweifel gesetzt, dafs nicht die ganze atmosphärische Luft, sondern nur ihr Sauerstoffgas dabei in Thätigkeit ist, folglich das Substrat des letzten, der Sauerstoff, als Erregungsmittel der Entwickelung angesehen werden mufs.

Wasser und Luft sind indessen nicht allein die Potenzen, welche ihre Thätigkeit dabei ausüben; zu ihnen gehört auch noch die Wärme: denn wenn auch die früher gedachten Bedingungen obwalten, so erfolgt doch keine Keimentwickelung und Ausbildung, wenn die Temperatur nicht die des Gefrierpunktes, wenigstens um einige Grade, übersteigt: wenn gleich eine Temperatur von 10 bis 12 Graden unter dem Gefrierpunkte den trocknen lebenden Keim im Samenkorn nicht zu tödten vermag.

Weniger deutlich ist bisher die Nothwendigkeit des Lichtes zur Entwickelung des Samenkorns aufser Zweifel gesetzt worden Herr Bertholon behauptet, dafs die, unter den sonst zur Keimentwickelung erforderlichen Bedingungen, dem Sonnenlichte ausgesetzten Pflanzensamen, früher keimen, als die im dunkeln Raume; welcher Erfahrung jedoch die Herren Ingenhoufs und Sennebier, durch ihre eigenen Beobachtungen geleitet, widersprechen.

Jenes sind die Ansichten über den genannten Gegenstand, welche aus den bis jetzt darüber angestellten Versuchen und den daraus hervorgegangenen Resultaten, über die Entwickelung und Ausbildung des Pflanzenkeims, gezogen worden sind.

Der ganze Gegenstand schien mir zu wenig erschöpft zu seyn, als dafs er nicht neue Untersuchungen hätte verdienen sollen; deshalb hielt ich es der Mühe werth, dieselben zu veranstalten, und lege nun der königlichen Akademie die Resultate meiner Beobachtung mit dem Bemerken hier vor, dafs nur allein diejenigen Versuche hier aufgestellt worden sind, die bei einer dreimaligen Wiederholung immer dieselben Resultate dargeboten haben.

Erste Abtheilung.

Versuche, welche angestellt worden sind, um die Wirkung des Wassers auf die Pflanzensamen zu erforschen.

Erster Versuch.

Tausend Gran vollkommen gesunde ausgesuchte Körner von Gerste, wurden in einer gläsernen Schale mit destillirtem Wasser übergossen, und bei einer Temperatur von 12° Reaumür zehn Stunden hindurch sich selbst überlassen. Anfangs entwickelte sich die atmosphärische Luft, welche die Zwischenräume der übereinander liegenden Körner ausgefüllt hatte; während dem Zwischenraume von zehn Stunden entwickelte sich ein anderes gasförmiges Fluidum, in zarten auf einander folgenden Strömen, das, bei der nähern Prüfung, sich wie Kohlenstoffsauergas verhielt.

Nach dem Zeitraum von zehn Stunden wurden die Körner aus dem Wasser genommen, und nachdem sie vollkommen abgetröpfelt waren, gewogen; ihr Gewicht betrug jetzt 1150 Gran; es waren also 0,15 Wasser eingesaugt worden.

Das Quellwasser besafs eine gelbliche Farbe, so wie einen bittern und säuerlichen Geschmack.

Die einmal gequellten Körner wurden nun zum zweitenmale mit neuem destillirten Wasser eingeweicht. Als sie abermals nach zehn Stunden herausgenommen und im abgetropften Zustande gewogen wurden, betrug ihr Gewicht 1270 Gran; sie hatten also abermals 0,12 Wasser eingesaugt.

Sie wurden zum drittenmal zehn Stunden lang eingeweicht, und wogen nun im abgetropften Zustande 1380 Gran, hatten also abermals 0,11 am Gewicht zugenommen.

Die abgetropften Körner wurden zum viertenmal zehn Stunden lang eingeweicht, und zeigten jetzt nach dem abermaligen Austropfen ein Gewicht von 1470 Gran, also eine abermalige Gewichtszunahme von 00,9.

Als dieselben Körner zum fünftenmale zehn Stunden lang eingeweicht worden waren, wogen sie nach dem Austropfen 1475 Gran, hatten also nur noch ein halbes Procent am Gewicht zugenommen.

Als Resultat dieser Versuche gehet hervor, dafs die Körner durch ein fünfmal hintereinander wiederholtes Einweichen überhaupt eine Gewichtszunahme von 47,5 angenommen, also eben so viel Wasser eingesaugt haben, und in diesem Zustande scheint das Maximum der absorbirten Feuchtigkeit zu existiren, die Körner scheinen darin in einem neutralen Zustande der Cohäsion mit dem Wasser zu stehen.

Jene tausend Gran der zum Versuch angewendeten Gerstenkörner, fülleten vor dem Einquellen einen Raum aus, der dem Volum von 750 Gran Wasser gleich war. Nach dem fünfmaligen Einquellen hingegen, und nachdem sie vollkommen ausgetropft waren, fülleten sie einen Raum von 875 Theilen Wasser aus; sie hatten also eine Volumerweiterung von 12,5 angenommen.

Die Hülse lösete sich in diesem Zustande sehr leicht vom innern Kern, der in einer weichen mehlartigen Substanz von mildem süfslichtem Geschmack bestand. Die Farbe der Hülse war viel blässer als die des trocknen Korns.

Die hier entwickelte Kohlenstoffsäure betrug im Ganzen nur sehr wenig, ihr Volum so wenig als ihr Gewicht konnten genau bestimmt werden. Sie scheint aus der Einwirkung von einem Theil Sauerstoff aus dem Wasser, mit einem Theil Kohlenstoff aus dem mehligen Korn, erzeugt worden zu seyn.

Das gelbe Wasser, welches durch die Einquellung der Gerstenkörner sich gebildet hatte, wurde bei der gelindesten Wärme zur völligen Trockne abgedunstet. Der trockne braune Rückstand wog 10 Gran. Er schmeckte säuerlich-bitter und zerflofs leicht an der feuchten Luft. Seine mit Wasser gemachte Lösung fällete das Kalkwasser. Die sehr geringe Menge des Niederschlags flofs in einem silbernen Löffel vor der Flamme des Blaserohrs zu einer weifsen Perle. Die Säure scheint also Phosphorsäure zu seyn. Der übrige gröfsre Theil schien in einem bittern Extraktivstoff zu bestehen.

Zweiter Versuch.

Nachdem eine neue Portion Gerstenkörner 50 Stunden lang mit destillirtem Wasser eingequellet worden war, wurden dieselben in drei Theile getheilt, und jeder einzelne Theil von 1475 Gran, welcher also 1000 Gran trockne Körner enthielt, wurde hierauf einer besondern Untersuchung unterworfen.

a) Wurde in einem Glascylinder mit destillirtem Wasser übergossen, so dafs alle Körner damit bedeckt waren, und nun, bei einer Temperatur von 15° Reaumür, 14 Tage lang sich selbst überlassen. Die Körner fingen an sich in eine übelriechende Jauche aufzulösen, ohne dafs eine Keimentwickelung bemerkt werden konnte.

b) Wurde in ein Stück Leinwand gebunden, am Boden eines gläsernen Cylinders sehr fest gespannet, und mit sehr reinem Quecksilber übergossen, bei der gleichen Temperatur von 15° Reaumür, 1 Tage lang sich selbst überlassen. Die Körner waren säuerlich und übelriechend geworden, ohne Keime entwickelt zu haben.

c) Wurde in einen, 55 Zoll langen und anderthalb Zoll weiten, am obern Ende zugeschmolzenen Glascylinder gebracht, dieser mit gekochtem Quecksilber vollgefüllet, die untere Oeffnung mit einem Stöpsel verschlossen, und nun das Rohr umgekehrt, wobei die Körner sich in den obern Theil des Cylinders erhoben. Das Rohr wurde nun in einem Becken mit Quecksilber geöffnet, da dann das Quecksilber im Cylinder bis auf eine Höhe von circa 27′ herabsank, also ein torricellischer Raum von 8 Zoll gebildet wurde, in dem sich nun die Körner befanden. Nach dem Zeitraum von 14 Tagen war das Quecksilber bis auf 27 Zoll herabgesunken, während das in einem daneben aufgehängten torricellischen Barometer 28″ 5‴ stand; an den Körnern

nern war aber keine Vegetation wahrzunehmen. Ob das Herabsinken des Quecksilbers durch Wasserdunst oder durch erzeugtes kohlenstoffsaures Gas veranlafst worden war, konnte nicht bestimmt werden. Die Körner verhielten sich, nachdem sie aus dem Cylinder herausgenommen worden waren, denen, welche unter Quecksilber eingeschlossen gelegen hatten, ziemlich gleich.

Die Resultate jener Versuche bestätigen also die Richtigkeit der früher gemachten Beobachtungen, dafs blofses Wasser, ohne Mitwirkung der atmosphärischen Luft, nicht hinreichend ist, eine Keimausbildung in den Samenkörnern zu veranlassen. Einzelne Körner von dem Versuch *b* und *c* zeigten zwar beim Durchschneiden der Länge nach einen Ansatz zur Keimentwickelung, aber weder die Wurzelfasern, noch der Halmkeim hatten sich ausbilden können.

Bei einem andern Versuch solcher Art habe ich die blofs mit Wasser bedeckten, vorher 50 Stunden lang eingequelleten Körner, vom dritten Tage an einzeln untersucht, da dann allerdings gegen den fünften Tag, die meisten Körner, wenn sie der Länge nach auseinander geschnitten wurden, einen Keimansatz wahrnehmen liefsen, der aber späterhin wieder verschwand, und sich in Jauche auflösete.

Eben so wie die Gerstenkörner verhielten sich auch die Samenkörner von Weizen, von Roggen, von Mais, so wie Erbsen und Schminkbohnen. Sie setzten, unter Wasser eingetaucht, gröfstentheils einen Anfang des Keims an, nie aber konnte derselbe zum Uebergang in eine Pflanze gebracht werden.

Zweite Abtheilung.

Versuche, welche angestellt wurden, um die gemeinschaftliche Wirkung des Wassers und der Luft auf die Pflanzensamen zu erforschen.

Erster Versuch.

Nachdem aufs neue 1475 Gran 50 Stunden lang eingequelleter Gerstenkörner, die also 1000 Gran trockne Körner enthielten, auf einer porcellanenen

Schale, bei einer Temperatur der Dunstkreises zwischen 14 und 15° Reaumür, der Einwirkung der atmosphärischen Luft ausgesetzt worden waren, wobei, um den unmittelbaren Einfluſs der Luft abzuhalten, das Ganze mit doppeltem Flanell überdeckt wurde, zeigte sich schon nach dem Zeitraum von 24 Stunden eine merkwürdige Veränderung in den Körnern. Sie fingen an, einen eigenthümlichen angenehmen obstartigen Geruch auszudünsten, und ein in die Körner getauchter Thermometer, zeigte eine Temperatur von 20° Reaumür, während die der äuſsern Luft nicht volle 15° betrug. Nach dem Zeitraum von 96 Stunden zeigte das in die Körner getauchte Thermometer eine Temperatur von 25° Reaumür, während die der atmosphärischen Luft bei 15° beharrte.

In diesem Zustande erschienen die Körner unter ihrer Bedeckung wie mit Schweiſs beschlagen, und gaben an der einen Spitze des Kerns Wurzelfasern zu erkennen; sie waren also in wirklicher Vegetation begriffen. Die Wurzelfasern verlängerten sich nach und nach, und nach einem Zeitraum von 118 Stunden kamen an der entgegengesetzten Spitze der Körner gelbliche Blattkeime zum Vorschein, die bald darauf, so wie sie mit der Luft in Berührung standen, eine grüne Farbe annahmen, und nun ging die Vegetation so rasch von statten, daſs sehr bald die Wurzelfasern sich in einander verflochten.

Wenn man während der Zeit, wo die Körner auf der Oberfläche naſs erscheinen und den stärksten Obstgeruch exhaliren, einen brennenden Wachsstock ganz nahe darüber hält, so bemerkt man schwache Flämmchen, also eine vorgehende Entzündung. Schiebt man in diesem Zustande die mit den Körnern gefüllte Schale unter eine gläserne Glocke, so entwickeln sich eine Portion Luftblasen, und liefern ein Gas, das aus einem Gemenge von kohlenstoffsaurem Gas und von atmosphärischer Luft besteht, an welchem keine Entzündbarkeit wahrgenommen wird; selbst dann nicht, wenn man das kohlenstoffsaure Gas durch Kalkwasser daraus hinweggenommen hat. Dieses scheint offenbar zu beweisen, daſs die vorhergedachten Flämmchen aus entzündbaren Dünsten bestehen, welche ohnstreitig von einem durch den Prozeſs des Keimes erzeugten und sich dunstförmig entwickelnden Alkohol abgeleitet werden müssen, der auch den obstähnlichen Geruch erzeugt.

Schneidet man von dem Zeitpunkte der ersten Temperaturerhöhung an, bis zum Erfolg des Schwitzens, von Zeit zu Zeit ein einzelnes Korn auseinander, und zwar der Länge nach, so sieht man in der Mitte des Kerns den belebten Keim sich in zwei Theile theilen: der eine Theil verlängert sich, nach der einen Spitze zu, zur Bildung der Wurzelfasern; der zweite, nach der entgegengesetzten Spitze zu, zur Bildung des künftigen Blattes.

Endlich erzeugt sich an dem einen Ende eines jeden Korns eine schwache Erhöhung, die sich aber bald darauf in drei kleine Wurzelfasern zertheilt, welche nun mit Schnelligkeit hervorwachsen.

Späterhin kommt nun auch der Halmkeim an dem dem Wurzelkeim entgegengesetzten Ende zum Vorschein, und bildet sich zum Halm aus.

Zweiter Versuch.

Es wurden aufs neue 1475 Gran durchs Einquellen vorbereitete Körner von Gerste mit Leinölfirnifs angerieben, um ihre Oberfläche vollkommen damit zu überziehen, und solche vor der Berührung mit der Luft zu schützen.

So zubereitet, wurden sie nun, in einer Schale ausgesetzt, sich selbst überlassen, ohne dafs nach dem Zeitraum von vier Tagen, und auch später nicht, eine Auswachsung erfolgt wäre.

Bei der nachherigen Untersuchung der einzelnen Körner hatte sich im Innern eine anfangende Keimentwickelung gebildet, der Keim war aber abgestorben, und der mehligte Theil der Körner hatte eine saure Beschaffenheit angenommen. Eine merkliche Temperaturerhöhung war dabei nicht zu bemerken.

Dritter Versuch.

Eine gleiche Portion der vorbereiteten Gerstenkörner wurde unter eine mit reinem Stickstoffgas gefüllte und mit Quecksilber gesperrte Glocke gebracht, und sich bei 14° Reaumür selbst überlassen. Auch hier war nach dem Zeitraum von acht Tagen keine Keimentwicklung wahrzunehmen: doch hatten sich im Innern der Körner Keime gebildet, die aber abgestorben waren. Das Stickstoffgas war durch die Verbrennung des Phosphorus in der atmosphärischen Luft bereitet, und durch das Waschen mit Kalkwasser gereiniget.

Vierter Versuch.

Eine gleiche Portion zubereiteter Gerstenkörner wurde hierauf, auf eine porzellanene Schale ausgebreitet, unter einer mit atmosphärischer Luft gefüllten Glocke durch Queksilber gesperrt. Nach dem Zeitraum von acht Tagen hatten sich nicht nur Wurzelfasern, sondern auch Blattkeime ausgebildet, die zu Stengeln emporschossen.

Dis Glocke enthielt genau 184 pariser Kubikzoll, das berliner Quart zu 59 Kubikzoll gerechnet. Die Luft zeigte bei der Prüfung mit dem Voltaischen Eudiometer genau 0,21 Sauerstoffgas und 0.79 Stickstoffgas; also waren die dem Versuch unterworfenen 184 pariser Kubikzoll atmosphärische Luft zusammengesetzt aus 8,64 Sauerstoffgas und 155,36 Stickstoffgas.

Nach dem Zeitraum von 12 Tagen war keine Veränderung in der Luftmasse zu bemerken; nach 15 Tagen eben so wenig, aber die Vegetation liefs jetzt nach, die Blattstengel fingen an zu welken, und ich sahe nun das Experiment als beendigt an.

Mittelst Niederdrücken der Glocke in einer mit destillirtem Wasser gefüllten Wanne, trieb ich das darin enthaltene Gas in eine über derselben mit einem Hahn versehene luftleere Blase, und aus dieser ward nun genau 100 pariser Kubikzoll gedachter Luftart in einen mit Quecksilber gefüllten Cylinder geleitet, dessen obere Oeffnung gleichfalls durch einen, mit einem Gasentbindungsrohr versehenen Hahn, verschlossen war.

Jene 100 Kubikzoll Luft blieben mit Quecksilber gesperrt, und mittelst einer heberförmigen Spritze wurde hierauf Kalkwasser, durch das Quecksilber hindurch, in den Cylinder geleitet, da dann sehr bald eine ansehnliche Verminderung im Volum der Luft erfolgte, welche 0,18 betrug; es waren also in jenen 100 Kubikzoll Luft 0,18 Kohlenstoffsauergas enthalten, welches für die Totalmasse von 184 Kubikzoll 33,12 Kubikzoll beträgt.

Setzen wir nun mit Berthollet fest, dafs 100 pariser Kubikzoll kohlenstoffsaures Gas zusammengesetzt sind, aus 43 Gran Sauerstoff, 16 Gran Kohlenstoff und 10 Gran Wasser, so betragen die Bestandtheile in den gedachten 33,12 Kubikzoll des erzeugten Kohlenstoffsauergases 14,24 Sauerstoff, 5,30 Kohlenstoff und 3,22 Wasser.

Es sind also der angewandten atmosphärischen Luft 5,30 Kohlenstoff und 14,24 Gran Sauerstoffgas entzogen worden, um 33,12 Kubikzoll kohlenstoffsaures Gas zu erzeugen.

Das rückständige von der Kohlenstoffsäure befreite Gas zeigte, durch die eudiometrische Prüfung, ein Verhältnifs von 10,10 Sauerstoffgas und 0,90 Stickstoffgas.

Die Resultate dieses letzten Versuchs stimmen also, mit Ausnahme der quantitativen Verhältnisse des erzeugten Kohlenstoffsaurengases, so wie des rückständig gebliebenen Sauerstoffgases und des Stickstoffgases, ziemlich mit denjenigen überein, welche Herr von Saussure der Jüngere bei ähnlichen Versuchen beobachtet hat: und es folgt daraus, daſs bei der Einwirkung der atmosphärischen Luft auf die Entwickelung der Pflanzen aus dem Samen, zwar keine Verminderung der Luftmasse im Volum statt findet, daſs aber das Sauerstoffgas der atmosphärischen Luft zerlegt, und der Sauerstoff an die keimenden Samen abgesetzt wird, der nun, indem er ihnen einen Theil Kohlenstoff entziehet, damit das kohlenstoffsaure Gas generirt.

Folgerungen aus den Resultaten der beschriebenen Versuche.

Wenn wir die Resultate der ersten und der zweiten Abtheilung der hier beschriebenen Versuche in Erwägung ziehen, so folgt daraus: daſs das Wasser zwar vermögend ist, den schlafenden Keim in den Pflanzensamen in eine belebte Thätigkeit zu setzen, und ihn zur Entwickelung vorzubereiten, daſs solches also als das erste Reizmittel bei der Vegetation angesehen werden muſs.

Die erfolgende Entwickelung einer kleinen Portion Kohlenstoffsäure beim Einquellen der Samenkörner beweiset hinreichend, daſs solche auf Kosten des Sauerstoffes aus dem Wasser gebildet wird: daſs also der Sauerstoff allein, keinesweges das ganze Wasser, als das belebende Reizmittel betrachtet werden muſs.

Ist aber der Keim einmal belebt, so kann solcher, ohne Mitwirkung des Sauerstoffs aus der atmosphärischen Luft, nicht fortwachsen; er stirbt vielmehr ab, und geht in Säure, wie in Fäulniſs, über.

Daraus scheint also zu folgen, daſs, sobald nur der Keim eine anfangende Entwickelung erhalten hat, derselbe jezt einen Prozeſs der Respiration beginnet, daſs nun Sauerstoff eingesauget und Kohlenstoffsauergas ausgehauchet wird: also vollkommen ähnlich dem Respirationsprozeſs bei den Thieren.

Meine Versuche haben sich hierbei freilich nur allein auf die Keimentwickelung bei den Gerstenkörnern bezogen, aber Doctor Woodhouse, der ähnliche Versuche mit den Samenkörnern von *Zea mays*, von *Apium petroselinum*, *Cucurbita Citrulla*, *Sisymbrium sativum*, *Lactuca sativa* etc. angestellt hat, sahe gleichfalls bei allen Sauerstoffgas absorbiren und Kohlenstoffsauergas sich entwickeln; wir dürfen daher vielleicht analogisch schliefsen, dafs solches bei allen Erdpflanzen derselbe Fall ist.

Sumpf- und Wasserpflanzen, deren Samen auch unter dem Wasser, abgeschnitten vom Zutritt der atmosphärischen Luft, keimen und zu Pflanzen ausgebildet werden, machen freilich in dieser Hinsicht eine bedeutende Ausnahme; sie werden also einer besondern Untersuchung bedürfen, um den hinreichenden Grund davon zu entwickeln.

Dritte Abtheilung.

Versuche zur Bestimmung der Veränderungen, welche die Pflanzensamen durch die Keimentwickelung erleiden.

Erster Versuch.

Zehntausend Gran gesunde Gerstenkörner wurden 50 Stunden lang eingequellt, und sodann bis zur eben erfolgenden Entwickelung des Halmkeims dem Auswachsen überlassen. Sie wurden hierauf so schnell wie möglich an der innern Luft getrocknet und in diesem Zustande nun gewogen; sie wogen nur noch neuntausend Gran, hatten also einen Gewichtsverlus von 0,1 erlitten.

Die getrockneten Körner wurden mit den Händen gerieben, um die Wurzelfasern abzusondern; das Gewicht derselben betrug 5,5. Nun wurde das Einquellwasser zur Trockne abgedunstet, der trockne Rückstand wog 1,5; folglich findet noch ein Verlust von 00,3 statt, welcher im Kohlenstoff bestehen muſs, der hier während dem Einweichen, so wie dem Auswachsen, den Körnern entzogen worden ist.

Zweiter Versuch.

Die von den Wurzelfasern befreieten Körner zeigten jetzt einen süſsen zuckerartigen Geschmack. Sie wurden zerstampft und das Pulver in Leinwand gebunden, zu wiederholtenmalen mit kaltem Wasser ausgebreitet, bis dieses nichts mehr daraus auflösen wollte. Der Rückstand in der Leinwand bestand bloſs aus Hülsen, in denen kaum eine Spur von Klebertheilen wahrgenommen werden konnte.

In der ausgewaschenen Flüssigkeit setzte sich nur eine äuſserst geringe Menge mehlartiges Wesen ab, das kaum den zehnten Theil so viel betrug, als man sonst gewöhnlich aus der nicht gekeimten Gerste gewinnt.

Das von dem mehlartigen Theil befreiete Fluidum wurde zum Kochen erhitzt, da sich dann eine geringe Portion firniſsartige Materie daraus absonderte. Das übrige Fluidum wurde filtrirt und ganz gelinde zur Trockne abgedunstet; es stellte eine süſse gummiartige Masse dar.

Dieselbe wurde, mit mäſsig starkem Weingeist übergossen, in Digestion gesetzt. Dieser extrahirte eine gelbbraune Tinktur, und lieſs eine gummiähnliche, nicht mehr süſsschmeckende, Materie zurück.

Die geistige Tinktur gab, nach dem Abdunsten, eine süſse, dem Schleimzucker ähnliche Materie, welcher letztere Stoff die gröſste Quantität ausmachte.

Die Wurzelfasern zeigten sich gröſstentheils unauflöslich im Wasser. Trocken destillirt gaben sie Wasser, Ammonium und stinkendes Oel. Die rückständige Kohle brannte sich im offenen Feuer weiſs, und schien phosphorsaurer Kalk zu seyn.

Es scheint also wohl daraus zu folgen, daſs der Sauerstoff, welchen das Wasser beim Einquellen an die Gerstenkörner abgegeben hat, allein verwendet worden ist, um den Wurzelkeim zu beleben, und daſs mit diesem der kleberartige Gemengtheil des Getreides ausgesondert worden ist.

Der mehlartige Theil des Getreides scheint hingegen, durch die Einwirkung des Sauerstoffes aus dem Dunstkreise, bis auf eine geringe

Menge, welche ungestört blieb, theils in Gummi, theils in Zucker, umgewandelt zu seyn.

Diese Beobachtungen geben uns einen Beweis, wie wichtig die Rolle ist, welche der Sauerstoff beim Keimen der Getreidekörner spielt. Man begreift sehr wohl, daſs, um zu einem vollständigen Resultat zu gelangen, dieselben Versuche auch mit andern Pflanzensamen, auſser den Getreidearten, fortgesetzt werden müssen; welches auch mein Vorsatz ist, und wovon ich die Resultate zu einer andern Zeit der Akademie vorlegen werde.

Von

den geognostischen Verhältnissen des Trapp-Porphyrs.

Von Herrn Leopold von Buch *).

Seitdem man Vulcane hat brennen sehen, hat man nach der Ursache eines so wunderbaren Phänomens geforscht. Seitdem man die Natur über ähnliche Gegenstände genauer und sorgfältiger zu befragen gewohnt ist, hat man die Vulcane nie aus der Acht gelassen. Wie hätte man können Erdbeben vergessen, welche ganze Länder erschüttern? oder die Flammen, welche aus den Gipfeln der höchsten Berge hervorbrechen, und Steine und Staub und Verwüstung weit um ihren Fuſs her verbreiten? Aber noch bis jetzt ist alles Forschen vergebens gewesen. Noch beruht alles, was man von dem unaufhörlich fortwirkenden Quell dieser Erscheinungen weiſs, auf bloſsen Vermuthungen, welche nicht darauf hingehen, die Thatsachen der Vulcane selbst in Causalzusammenhang zu setzen, sondern vielmehr durch entfernte Analogien mit anderen Erscheinungen begründet werden. Zwar glaubte man in jeder neuen physikalischen Entdeckung, welche nur von fern anwendbar zu seyn schien, die Ursache der Vulcane gefunden zu haben; aber eben in dieser Leichtigkeit der Anwendung lag ein sicherer Beweis, wie weit wir von ihrer Kenntniſs entfernt waren. Ein im Innern des Erdballs zurückgebliebenes Centralfeuer, eine verschiedene elektrische Spannung, eine Art von Athmungsprozeſs durch Einsaugung und Zersetzung respirabler Luft, Steinkohlenentzündung, eine durch Erdschichten gebaute voltaische Säule, endlich die Zersetzung der im Innern nicht oxydirt vorausgesetzten Metalle der Alca-

*) Vorgelesen den 25sten März 1813.

lien und der Erden, haben sich hintereinander verdrängt, um als Lösung des Räthsels zu dienen. Aber wie weit sich die Thatsachen aus diesen Ursachen herleiten liefsen, blieb uns unbekannt; und darüber darf man sich nicht wundern: denn noch bis jetzt sind Vulcane und vulcanische Produkte wenig oder fast gar nicht untersucht worden. Selbst Sammlungen, welche zur Erläuterung der vulcanischen Produkte dienen können, giebt es fast gar nicht. Denn was als Sammlungen dieser Art bisher aus Italien und von den Inseln gekommen ist, und in gröfseren Cabinettern gezeigt wird, verdient die Aufmerksamkeit der Naturforscher nicht. Es sind Seltenheiten, Zufälligkeiten, an welchen sich durchaus keine, der Vulcantheorie wichtige, Schlufsfolgen anreihen lassen. Nur Dolomieu's Sammlungen würden hierinnen eine Ausnahme machen, wenn er in der Reihung seiner Stücke mehr einer systematischen geognostischen Ansicht, als mineralogischen Verhältnissen gefolgt wäre, durch welche jetzt die Stücke weit zerstreut und der Aufsuchung geognostischer Analogien entzogen sind.

Diese Unbekanntschaft mit den geognostischen Verhältnissen der Vulcane hat mich zu glauben verleitet, dafs es nützlich seyn mogte, alles zu sammeln, was uns bisher über solche Verhältnisse bekannt geworden ist; wodurch eine Uebersicht des ganzen Phänomens nothwendig erleichtert, manche grundlose Meinungen sogleich zurückgewiesen, andere widersprechend scheinende vielleicht vereinigt werden können.

Drei Dinge sind es, durch welche, wie ich glaube, die Theorie der Vulcane seit Dolomieu's Zeiten, und zum Theil durch ihn, einen nicht geringen Fortschritt gethan hat.

Die Entdeckung des Trapp-Porphyrs; die Ueberzeugung, dafs die vulcanischen Wirkungen nicht aus oberen Schichten der Erdfläche, sondern unter dem ältesten Gestein, unter dem Granit, hervorgehen; endlich die Beobachtung der grofsen Rolle, welche der Eisenglanz in den vulcanischen Phänomenen spielt.

Ungeachtet jeder Vulcan für sich allein steht und isolirt zu wirken scheint, so können wir die vulcanischen Ursachen so isolirt nicht mehr ansehen, seitdem wir im Trapp-Porphyr eine, allen Vulcanen gemeinschaftliche Gebürgsart finden, aus welcher hervor diese Wirkungen sich äufsern. Gröfser, bedeutender werden diese Erscheinungen, seitdem wir überzeugt sind, dafs sie zu einer uns durchaus unbekannten Welt gehören, unter der uns bekannten Oberfläche der Erde; und was diese verborgenen

Ursachen auf äußere Gebürgsarten der Oberfläche vermögen, das lehren uns die Veränderungen, welche in ihnen der aus dem Innern entbundene Eisenglanz zu bewirken im Stande ist.

Vom Trapp-Porphyr.

Die Entdeckung eines Fossils, und noch weit mehr einer Gebürgsart, kann mit Recht nur dem zugeschrieben werden, der beide in ihrer wahren Natur erkennt, und ihre Unterschiede mit allem Aehnlichen genau bestimmt hat. Wenn daher der Trapp-Porphyr von vielen auch mag beschrieben worden seyn, wenn ihn auch manche mögen Porphyr genannt haben, so darf man für den Entdecker dieser neuen Gebürgsart doch nur den halten, der seine Verbindung mit den Vulcanen klar eingesehen und sich überzeugt hat, daſs er zu vulcanischen Formationen wesentlich gehöre. Und in dieser Hinsicht gebührt die Entdeckung ohne Zweifel, wie ich glaube, dem Herrn von Humboldt. In Quito wurde es ihm klar, nachdem er den Puracé bei Popayan, den Vulcan von Pasto und den Tunguragua untersucht hatte, daſs der Porphyr dieser Berge eine ganz besondere und den Vulcanen eigenthümliche Gebürgsart sey, und das hat er oft in seinen Briefen aus Amerika geäuſsert. Alle Vulcane in den Anden liegen in Porphyr, sagt er ganz bestimmt in einem Briefe an Fourcroy. Nach solcher unerwarteten Aeuſserung muſste man wohl aufgeregt werden, zu untersuchen, ob etwas ähnliches sich auch wohl in Europa auffinden lieſse. Dazu bedurfte es keiner weitläuftigen Untersuchungen. Eine Menge Beobachtungen, in vielen Schriften zerstreut, konnten darüber Aufschlüsse geben; denn das ist der Vortheil der Geognosie, daſs es erlaubt ist, gut und genau aufgezeichnete geognostische Beschreibungen wie die Natur selbst zu befragen, und oft besser. Denn eine Beschreibung und eine Sammlung rücken die Thatsachen zusammen, welche in der Natur selbst durch viele fremde Phänomene, Form der Gebürge, Schwierigkeiten der Beobachtung, getrennt sind. Dagegen die genaue Beschreibung, die Sammlung, welche uns die Gebürgsarten der Gegend deutlich vor Augen bringt, uns Ruhe und Ueberlegung verstattet, die aufgezeichneten Thatsachen nach und nach unter allen, durch die Lage der Wissenschaft eben vorgeführten Gesichtspunkten zu fassen.

Wir wollen jedoch nicht verkennen, was wir für die Bestimmung des Trapp-Porphyrs dem Herrn Nose verdanken. Die Gebürgsart der Berge des Siebengebürges bei Bonn hat er zuerst schon 1790 nicht allein als Porphyr beschrieben, sondern auch stets auf ihre geognostische Verwandtschaft mit den Basalten hingewiesen, und beiden ein Alter gegeben, welches kaum das der neuesten Flözgebürgsarten erreichen könne. (Niederrh. Reise u. s. w. II. 428.) Hätte er diesen Porphyr in Desmarest Granit *chauffé en place*, in dem Gestein so vieler Berge in Auvergne, des Montd'or und des Cantal wieder erkannt, so würden diese Bestimmungen mehr Aufsehen erregt haben, weniger isolirt und verkannt geblieben seyn.

Solche Zusammenstellungen aber waren nicht möglich, denn dazu waren die geognostischen Beschreibungen der französischen Vulcane nicht genau und nicht zusammenhängend genug.

So viele treffliche französische Geognosten hatten das Langweilige der Beschreibung gefürchtet, und statt eines getreuen Bildes der Natur nur die Resultate ihrer Beobachtungen und Vermuthungen über Entstehung der Berge dieser Gegenden geliefert.

Anderen deutschen Mineralogen ist der Trapp-Porphyr bis zur Zeit der Humboldtschen Nachrichten entweder unbekannt geblieben, oder er ist von ihnen mit den Porphyren anderer Formationen verwechselt worden.

Doch unterscheidet sich der Trapp-Porphyr gewöhnlich gar leicht von dem primitiven Porphyr. In diesem ist, wie bekannt, die Hauptmasse gewöhnlich roth, und überdies von sehr dunkeln rothen Farben. Selten erscheint aber der vulcanische Porphyr anders als hellgrau, oder auch wohl gar weifs. Nur in einzelnen Lagern kann sich diese Farbe bis zur röthlichbraunen, ja auch wohl bis zur schwarzen verändern. Das verschwindet jedoch, wenn man ganze Berge, oder wohl Flächen von mehreren Meilen Erstreckung, nur mit aschgrauer, blofs bläulich oder rauchgrauer Farbe dieser Grundmasse sieht.

Es würde vergebens seyn zu fragen, was denn eigentlich diese Grundmasse für ein Fossil sey. Es ist, wie der Basalt, wie Serpentin, ein feinkörniges Gemenge mehrerer Substanzen, unmittelbar durch das Auge selten oder gar nicht mehr von einander zu trennen. Daher müssen die äufsern Kennzeichen solcher einfach scheinenden Masse bis ins Unendliche sich verändern, je nachdem der eine oder der andere von Gemengtheilen darinnen in gröfserer Menge sich findet. Die Hauptmasse des primitiven Porphyrs hat man lange als Hornstein beschrieben, dann später gröſstentheils dichten Feldspath genannt; weil sehr sichtlich Feldspathblättchen sich in der festen Masse des Porphyrs verlaufen, und wohl nicht geläugnet werden kann, daſs dieses Fossil häufig eines der Hauptgemengtheile der Masse ausmache. Deswegen ist es doch die ganze Masse noch nicht, sondern ebenfalls ein Gemenge mehrerer Fossilien, das unter einen gemeinschaftlichen Namen nur schwer gebracht werden kann.

Aber die Hauptsubstanz des Trapp-Porphyrs ist dichter Feldspath wohl nicht, auch ist er darinnen nicht einmal zu vermuthen. Man bemerkt nirgends ein Verlaufen von Feldspathblättchen; die inliegenden Feldspathkristalle sind im Gegentheil fast immer scharf von der Masse gesondert. Eben so wenig möchte man versucht seyn, sie Thonstein zu nennen, wie wohl einigemal geschehen ist; denn wie könnte man sich überwinden, eine Substanz nach einer Erde zu benennen, welche darinnen wahrscheinlich überall nur in sehr geringer Menge vorkommt, dagegen Kieselerde bis zu 92 p. C., wie Herrn Vauquelins Analyse des Porphyr vom Sarcony erwiesen hat.

Laſst sich daher auch diese Grundmasse unmittelbar nicht benennen, so lassen sich doch einige gemeinschaftliche Kennzeichen angeben, welche sich an ihr wenig und nur in einem bestimmten Umkreise verändern. Dahin gehört der fast immer fehlende Glanz, das völlige Mattseyn, der grobsplittrige oder unebne Bruch von kleinem Korn, die völlige Undurchsichtigkeit, die nicht beträchtliche Härte. Der Quarz wird sie jederzeit anzugreifen im Stande seyn, und oft wird sie mit dem Stahl keine Funken geben. Mit der Zunahme der Intensität der Farbe vermindern sich freilich diese Kennzeichen. Der splittrige Bruch wird ausgezeichneter, die Härte gröſser, die Schwere bedeutender, und auch wohl der Glanz bis zum Schimmernden, fast bis zum Wenig-glänzenden erhöht.

Gemengtheile des Trapp-Porphyrs.

Wenig Gebürgsarten sind ausgezeichneter und beständiger in ihren Gemengtheilen, wenige durch sie leichter zu unterscheiden. Feldspath von diesen Kennzeichen liegt in andern Porphyren nicht; und in diesem dagegen nie anderes. Herr Werner hat sich bewogen gefunden, ihn als eigene Art in seinem Systeme aufzuführen; und in der That, oft könnte man versucht werden, an der Feldspathnatur dieses Fossils zu zweifeln, wären nicht seine Krystalle oft so schön, so ausgezeichnet und so durchaus gar nicht zu verkennen. Nach diesem glasigen Feldspath sollte die ganze Gebürgsart benannt seyn, wäre ihr der Name des Trapp-Porphyrs nicht gegeben; denn weder an Menge, noch an Bestimmtheit, ist ihm irgend einer der anderen Gemengtheile gleichzusetzen. Es ist der lebhafte Glasglanz, die Durchsichtigkeit, der muschlige Querbruch, und die grofse Menge paralleler Risse nach der Länge der Krystalle, welche diesem Fossil so eigenthümlich sind. Nie eine Spur des Perlmutterglanzes oder des Milchig-trüben, welche dem Feldspath im Granit eigen zu seyn pflegen.

Nur in zwei Fällen vermindert sich die Menge dieser Krystalle in der Hauptmasse; ja sie verschwinden endlich auch wohl ganz. Wenn die Farbe der Hauptmasse sich fast bis zum schwarzen verändert, ohne dabei an innerm Glanz bedeutend zu gewinnen, und dann wieder, wenn der Grund sich in schalig abgesonderten Stücken zu theilen scheint, wie man es häufig in den mittleren Theilen von Lavenströmen sieht, da wo die Porosität der Lava nicht mehr auffällt. Gewöhnlich fehlen auch dann die meisten der anderen bestimmten Gemengtheile des Porphyr. Sie scheinen in beiden Fällen durch vulcanische Wirkungen zerstört.

Glimmer, schwarzglänzend in deutlich krystallisirten Blättchen, nie messinggelb oder silberweifs; Farben, die der Glimmer nur durch Verminderung seiner Substanz annimmt, durch Verwitterung oder Austrocknung, und

Hornblende, auch schwarz, kaum schwärzlichgrün, in bestimmten Krystallen, von sehr sichtlich blättrigem Bruch von zweifachem Durchgange. Beide fehlen dem Trapp-Porphyr fast nie; und vorzüglich ist die Hornblende häufig und ganz auszeichnend für die Gebürgsart; denn nur selten, und dann nur sparsam und klein, sieht man sie in primitiven Porphyren.

Die Abwesenheit des Quarzes mögte man ebenfalls als etwas bestimmendes für den Trapp-Porphyr ansehen, weil man in der That ganze Berge aus dieser Gebürgsart durchsuchen kann, ohne nur ein einziges Quarzkorn zu finden; um so mehr, da Quarzdodecaëder in dem Gemenge anderer Porphyre nie fehlen. Doch bestätigt sich dieser Mangel nicht überall. Herr Esmarck hat in dem Porphyr von Schemnitz Quarzkrystalle gesehen, doch nur selten *). Herr Weifs fand Porphyrlager mit Quarz am Cantal vom

*) Reise durch Ungarn p. 10.

Col de caboe herab in das Thal von *Le Garde.* Dagegen erwähnt Herr von Humboldt des Quarzes nie in seiner Beschreibung des amerikanischen Trapp-Porphyrs; und in den Stücken, welche er von dort gebracht hat, sieht man ihn nicht. Daher kann Quarz nur als zufälliger, nie als wesentlicher Gemengtheil dieses Porphyrs betrachtet werden.

Sollte man unter solchen zufälligen Gemengtheilen auch Olivin aufführen dürfen? Ich glaube es kaum. Herr Weiſs hat ihn auf diese Art niemals gefunden; und doch hat niemand genauer, sorgfältiger und mit gröſserer Kenntniſs die Verhältnisse der Trapp-Formation in Frankreich untersucht. Auch Herr Esmarck erwähnt des Olivins in ungrischen Porphyren niemals. Auch in Italien, auch am Siebengebürge sah man ihn nicht; und eben so wenig in den Humboldtschen Sammlungen von den Anden. Aber wohl erscheint der Olivin sogleich, wenn die Hauptmasse sich zu Basalt verändert, und wenn der glasige Feldspath verschwindet.

Mit mehrerem Rechte läſst sich Augith zu diesen Gemengtheilen rechnen. Er ist im Porphyr des Chimborasso ganz deutlich, und oft mögte man ihn auch in den Porphyren des Puracé bei Popayan, des Tunguragua, des Vulcans von Pasto, zu sehen glauben. Nur in Europäischen Porphyren sah man bisher den Augith wenig oder nicht; denn wenn auch Herr Weiſs zwischen Muret und Thiezac über Aurillac am Cantal ein Lager aufgefunden hat, in welchem Augithkrystalle in Menge mit der deutlichsten Krystallisation über der Grundmasse hervorstehen, so ist diese letztere doch schon so dunkel, daſs der Fuſs dem Basalt ganz ähnlich ist; auch fehlt hier der glasige Feldspath ganz, und sobald er wieder erscheint, sieht man nichts mehr vom Augith. Dieses Lager findet sich überdies ganz in den geognostischen Verhältnissen des Basalts am Cantal.

Weit bestimmter und wohl auch weit sonderbarer, gehören unter diese zufälligen Gemengtheile die Gattungen des Titans, Sphen und Titanit. Man würde sie wahrscheinlich überall, oder doch an den meisten Orten des Vorkommens dieses Porphyrs, darinnen finden, hätte man sie näher betrachtet. Aber am *Puy de la chopine,* einem Porphyrkegel auf dem Gebürge über Clermont, entgeht dem Beobachter seine Gegenwart nicht so leicht; denn hier kann man kein Stück aufheben, welches nicht einen dieser Krystalle enthielte. Ihre gelbe Farbe, ihr lebhafter Diamantglanz, ihre deutliche Krystallisation, macht sie leicht bemerklich. Sphen, weniger häufig, sah ich von vorzüglicher Schönheit, dem von Arendal ähnlich, zwischen glasigem Feldspath und Hornblende, in Dolomieu's Sammlung, in Stücken die auf Procida gesammelt waren. Ueberhaupt scheinen wohl diese Krystalle, wie auch in primitiven Gebürgsarten, dort häufiger zu seyn, wo Hornblende in dem Gemenge liegt; weniger, wo nur Glimmer erscheint.

Wo der Trapp-Porphyr in Klüfte zersprengt ist, wo Risse, wenn auch nur wie feine Linien, die Stücke durchziehen, da suche man Krystalle von Eisenglanz. Selten wird man sie vermissen. Sind sie ganz klein, so scheint es nur ein schwarzer Ueberzug in der Kluft; aber im Sonnenlicht erkennt man den Glanz der einzelnen Krystalle. Häufen sich die durchziehenden Klüfte, und mit ihnen der schwarze Ueberzug darinnen, so färbt sich durch sie die ganze Masse des Porphyrs dunkler, bis sie gänzlich schwarz geworden, vollkommen mit der Substanz der gewöhnlichsten Laven bei Clermont und am Vesuv übereinkommend; und mit dieser Schwärze verschwinden die gewöhnlichsten Gemengtheile, Feldspath und Hornblende, und es erscheinen ganz neue, Olivin und Augith. Das ist eine Erfahrung, die überall sich bestätigt, wo Porphyr, Lavenströme oder basaltische Massen sich einander berühren. Eine Erscheinung, die um so wichtiger ist, da wir nur durch Auffindung ähnlicher Dinge hoffen dürfen, die Theorie der vulcanischen Wirkungen entwickelt zu sehen.

Sehr ausgezeichnet sind die untergeordneten Lagen des Trapp-Porphyrs. Ihm gehören ein groſser Theil der Pechsteinporphyre, und ganz die Obsidian- und die Perlsteinporphyre, welche man bisher noch immer als Abtheilungen des primitiven Porphyrs aufgeführt hat. Selbst das Pechsteingebürge von Meiſsen, dessen Verbindung mit den Trapp-Porphyren noch nicht erwiesen ist, wird doch von Herrn von Raumer für eine sehr neue, und sehr vom primitiven Porphyr unterschiedene Formation gehalten. (Geogn. Fragm.). Die Pechsteine am Cantal im Thale *la Chaze* und *le Garde*, oberhalb Aurillac, liegen durchaus im Trapp-Porphyr, wie Herr Weiſs schon beobachtet hat; an ersterem Orte mit sehr vielem glasigen Feldspath darinnen, denen im Porphyr ganz gleich. So ist es auch mit dem Obsidian. Nur mit diesem, wie mit älterem Porphyr, sah man ihn in Verbindung. So auf Volcano der liparischen Inseln; so fand ihn Herr von Humboldt am Puracé und Polara und in Mexico, und in eben der Lagerung beschreibt ihn Herr Esmarck zwischen Keresztur und Tokay (Reise durch Ungarn p. 160 seq.). Der Perlstein aber, so häufig er auch in den Hügeln von Tokay und Telkebanya vorkommen

men mag, scheint überall in geognostischer Abhängigkeit vom Obsidian. Beide wechseln in kleinen Lagern, beide sind durch unmerkliche Uebergänge verbunden, beide enthalten glasige Feldspathe auf gleiche Art. Und darf man Beobachtungen in den liparischen Inseln auf so ausgedehnte Gebürge übertragen, als die ungrischen sind, so scheint auch der Perlstein wirklich nur eine Veränderung, eine Entglasung des Obsidians. Die festen Bestandtheile in beiden sind gleich; nur fehlt dem Perlstein der flüchtig aufblähende Bestandtheil des Obsidians.

Die unmittelbare Verbindung, in welcher der Trapp-Porphyr mit den Basalten steht, ist keinem Naturforscher entgangen, welcher diese Gebürgsart untersucht hat. Auf sie muſs man auch vorzüglich zurückgehen, wenn man sich über die Lagerung dieses Porphyrs bestimmen will; denn auf geradem Wege, durch Untersuchung des Aufliegens auf andere Gebürgsarten, und der Art des Aufliegens, gelingt es nicht. Denn an den meisten Orten wird uns darüber nicht einmal zu Vermuthungen Gelegenheit gegeben. Wenn aber bewiesen ist, daſs Porphyr und Basalt zu einer gleichen Formation gehören, so ist freilich dadurch auch zugleich die Lagerung des ersteren völlig bestimmt.

Aber wie kann das anders seyn, wenn man die Art des Vorkommens beider Gebürgsarten etwas genauer betrachtet? Von den Alpen steigt man auf primitiven Gebürgsarten zu ungeheuren secundären Kalkketten herab, und erreicht durch sie hin die venetianischen Ebenen. Da erhebt sich plötzlich ein zusammenhängendes Kegelgebürge: die Euganeen, zwischen Padua und Rovigo. Am Fuſse der Berge, von Vicenza her, sah man auſser einzelnen Basaltlagern nur dichten Flözkalk, mit Ammoniten, mit Numismalen und Madreporen darinnen. Aber die drei Berge um die heiſsen Bäder von Abano, der Monte Pradio, der Monte Ortone und der Monte Rosso, bestehen aus Porphyr, der in allen drei Bergen sonderbar ähnlich ist, und vorzüglich auffällt, wenn man eben aus den Alpen hervor, die primitiven Porphyrfelsen von Botzen und Trient verlassen hat. Der gänzliche Mangel des Quarzes ist bei der flüchtigsten Ansicht bemerklich; dann die groſse Menge schöner, länglicher, sechsseitiger Glimmertafeln, welche in jenem Porphyr nie so deutlich vorkommen; endlich der gelblichweiſse, fast glasige Feldspath; das alles in einer bläulichgrauen, thonartigen Hauptmasse, in Bruche uneben oder sehr grobsplittrig. Am Monte Rosso werden die Feldspathkrystalle noch gröſser, und durch viele Hohlungen ziehen sich fadenförmige, ganz kurze Krystalle. An allen drei Bergen ist das Gestein in senkrechten Tafeln zerspalten, welche im Profil Säulen ganz ähnlich sind *). Aus diesem Gestein kommen die heifsen Quellen hervor. An der Südseite des Monte Ortone sieht man unmittelbar das heifse Wasser den Porphyrritzen entströmen, und nur wenig entfernt, ganz in der Fläche, steigt der heifse Bach von Abano (fast 36 Gr. R.) herauf. Das Wasser dringt mit solcher Macht und Gewalt aus den Oeffnungen, dafs ein Drittheil der Menge schon am Ursprunge eine Mühle treibt. Es läuft von der Spitze eines zwanzig Fufs hohen Kegels von Kalksinter, den sich das Wasser selbst erhob; denn noch jetzt ist alles, was die Quelle berührt, mit dickem Sinterüberzuge bedeckt; alle Rinnen, alles Holzwerk der Mühle, selbst das Rad scheint nicht mehr von Holz, sondern von Stein, und grofse Tropfen hängen an den Seiten herunter. Dafs solches Wasser aus Porphyr hervorspringt, und aus einer Gebürgsart, welche in dieser Gegend so isolirt, so fremd und so unerwartet vorkommt, ist wohl eine sehr bemerkenswerthe Thatsache.

Der Monte Ortone erhebt sich etwa 300 Fufs über die Fläche; der Monte Rosso vielleicht über 400 Fufs. Sie sind von den übrigen Kegeln der Euganeen noch durch eine kleine Ebene getrennt. Aber nicht fern, nicht über eine halbe Meile weit, steht in der Mitte dieses Gebürges der Monte Venda, der höchste des Ganzen, 1512 Fufs über das Meer **). Nicht mehr Porphyr, sondern Basalt, und ringsum von Basaltbergen umgeben, und so wenig durch das Aeufsere vom Porphyr geschieden, dafs viele den letztern mit dem Basalt verwechselt, ihn auch wohl sogar Lava genannt haben. Und freilich bleibt uns kaum eine andere Meinung übrig, als diese zwei Gebürgsarten mit einander zu einer eigenen Formation zu verbinden, wenn wir bedenken, wie sie im Aeufsern so gleich vorkommen, und so sehr von allen übrigen Gebürgsarten getrennt und aus den Formationsreihen gerissen sind. Ob jedoch im Innern der Euganeen irgendwo bestimmt sich Basalt über Porphyr lagere, ob irgendwo der umgebende Kalkstein unter dem Porphyr weggehe oder darauf liege, das wissen wir nicht; denn, wenn auch gleich diese Berge im Jahr 1796 und 1797 einen höchst lebhaften Streit über ihre Entstehung, zwischen dem Abbé Fortis und den paduani-

*) Strange hat sie zu bestimmt zeichnen lassen. *Phil. Transact. Vol. LXV.*

**) Nach Toaldo bei Strange. *Phil. Trans. LXV.*

schen Gutsbesitzern Grafen Dondi-Orologio und Niccolo da Rio, mit dem P. Terzi veranlafst haben, so ist es doch nur ein unfruchtbarer Streit der Meinungen gewesen, und aus allen gewechselten Streitschriften lassen sich kaum einige sichere Angaben, welche diese merkwürdigen Berge betreffen, herausziehen, noch viel weniger also eine nur einigermafsen genügende Beschreibung der Euganeen.

Wie schwer es jedoch sey, diese geognostischen Verhältnisse bestimmt und genau aufzufassen, das erweist das Siebengebürge. Basaltkegel und Hügel in grofser Zahl umgeben den Porphyr des Drachenfels, der Wolkenburg, und alle sind genau und vollständig von Herrn Nose beschrieben. Ihm fehlte es auch nicht an Lust und Trieb, die Scheidungen der Gebürgsarten aufzusuchen, um durch Beobachtung der Auflagerungen ferneren geognostischen Schlüssen eine sichere Grundlage zu geben. Doch ist in seinen Werken nicht eine einzige Bestimmung zu finden, welche diese Auflagerung aufser Zweifel setzte. Nicht einmal, ob der Porphyr dieser Kegel auf dem umgebenden Thonschiefer und der Grauwakke ruhe. Herr Weifs hat seitdem, im Sommer 1812, ebenfalls diese Berge untersucht. Allein er ist nicht glücklicher gewesen, und seine Mühe, deutliche Auflagerungspunkte zu finden, ist nicht mit Erfolg belohnt worden. Doch würde auch hier die Einschränkung des Porphyrs nur auf die, von den Basaltkegeln besetzte Gegend, die gleiche Art des Vorkommens in so grofser Nähe, dann ein oft nicht zu verkennender Uebergang aus der Porphyrmasse bis in den Basalt, die Vermuthung, dafs beide zu einer Formation gehören, fast zur Gewifsheit gebracht haben.

Was diese kleinern Kegelberge nicht lehren, das entwickelt sich leichter am höheren und ausgedehnteren Porphyrgebürge, am Montd'or. Man kann im tiefen Thale Montd'or die Schichten des Berges bis im Innern beobachten; denn sie liegen vom Gipfel herab aufgedeckt, wie ein Profil. Mannigfaltig sind die verschiedenen Abänderungen durch Gröfse und Menge der glasigen Feldspathe, und durch die dunklere oder hellere Farbe der Grundmasse. Aber Basaltlager hat man im Innern nicht gesehen. Nur erst weit hinaus, gegen den äufseren Umfang des Berges, erscheint ein wahres Basaltlager, mit Olivin darinnen, ohne Feldspath, der Basalt schwarz und schwer, mitten zwischen den Schichten des Porphyrs. Wenig weiter, wo der Porphyr ganz aufhört, ist er von Basaltkegeln bedeckt, welche in der Höhe am Abhang endlich zu einer wahren Basaltbedeckung werden, die ringsum den Montd'or wie einen Mantel bedeckt *). Hier sind also beide Gesteine nicht allein unmittelbar zu einer Formation verbunden, sondern es ist auch völlig bestimmt, dafs der Basalt den oberen Platz einnehme, der Porphyr die Grundlage bilde. Da nun der Basalt am Montd'or, am Puy de Corent nach Brogniart, an dem Berge von Gergovia und der Cote de Clermont nach le Coq, sogar auf Kalkstein der Süfswasserformation ruht, so mufs man glauben, dafs auch die Formationszeit des ganzen Trapp-Porphyrs später sey, als die Zeit dieses Kalksteins. Aber unmittelbare Erfahrungen über diese Lagerung des Porphyrs giebt es auch hier nicht. Ich zweifle, dafs man ihn selbst irgendwo unmittelbar auf Granit hat aufliegen sehen. Mir selbst ist die Aufsuchung solcher Punkte nicht gelungen; aber man würde sie doch endlich im Thale der Dordogne unter Muret auffinden müssen. Eine Erfahrung, die sogleich entscheiden würde, ob die Erhebung des Porphyrs unter dem Granit hervor möglich ist; denn natürlich verträgt sich diese Erhebung durchaus nicht mit dem Aufliegen des Porphyrs auf dem Granit.

Der Cantal, dem Montd'or in vielen Dingen so ähnlich, ist es ihm auch in Hinsicht der äufseren Basaltbekleidung über dem Porphyr. Herr Weifs hat an der Nordseite des Berges, auf den Höhen über das Thal von Chailades, nur Basalte gesehen; selbst der höchste Gipfel des Berges, der Plomb de Cantal, besteht aus Basalt, und von dort zieht sich diese Gebürgsart am Abhang herunter bis zum Fufse, und weit über den Fufs des Gebürges hinaus bis jenseit Aurillac. Im Innern des Porphyrs, das auch am Cantal durch viele tiefe Thäler eröffnet ist, erscheint der Basalt nirgends. Wenn auch die Grundmasse dunkle Farben annimmt, so erhält sie doch nie die Schwärze, die Zähigkeit, die Schwere, welche dem Basalt zukommen; es sind keine Olivine darinnen, und Augithe nur an einer Stelle bei Muret, die schon dem äufseren Umfange des Berges nahe liegt. Dagegen fehlen die glasigen Feldspathe nie, welche im Basalt fast niemals oder doch nur höchst selten erscheinen. Den ganzen äufseren Abhang des Cantal, wo nicht Basalt sichtbar ist, bedeckt ein mächtiges Conglomerat, dafs aus fast nichts anderem als Porphyrgeschieben, selten aus Basaltstücken, besteht. Herr Weifs beobachtete es in sonderbar geformten, senkrechten Felsen, ausgedehnt herab, zwischen Thiezac und Vic; der Glimmerschiefer, welcher bei Vic, und noch bestimmter unter Aurillac

*) Das Nähere darüber in meinen Briefen aus Auvergne p. 298.

hervorkommt, und ebenfalls unter St. Sigismond, verbirgt sich unmittelbar unter diesem Gestein. Nach Marmagnac, nach Tournemire über Mauriac und im Thal von Fontanges, ist es überall anstehend, und eben so mächtig an der Nordseite der Berge im Thale von Chailades über le Clos. Also noch eine Gebürgsart über dem Porphyr; und da sie Basaltstücke eingeschlossen enthält, so würde man sie für die neueste dieser Gebürgsformation zu halten geneigt seyn, hätte nicht Herr Weifs ganz bestimmt bei Aurillac über dem Flözkalk dies Conglomerat, dann den Basalt liegen sehen; und sehr häufig auf dem Wege von Aurillac über Marmagnac nach Tournemire hat er diese Beobachtung vom Aufliegen des Basaltes auf dem Conglomerate wiederholt. Dies Gestein liegt daher zwischen dem Basalt und dem Porphyr. Daher hat seine Lagerung am Abhang des Berges etwas sehr sonderbares; es findet sich nicht über die Mitte der Höhe dieses Abhanges herauf. Auf den Gipfeln sind davon nur wenige und schwache Spuren. Der Basalt hingegen erstreckt sich von der größten Höhe nicht blofs bis zum Fufs, sondern noch auf allen Seiten weit über diesen Fufs hinaus, bis völlig in die Region des primitiven Geburges; er geht also in der Höhe und am Fufse unter dem Conglomerat übergreifend hervor. Das Brecciengestein ist schön geschichtet, wie ein Sandstein, und enthält bei la Bastide im Thal von Fontanges in diesen Schichten Holzstämme, sogar einen Baum in senkrechter Richtung *). Bei dieser Ausdehnung, dei dieser Bestimmtheit der Lagerung und bis zu einer gewissen Höhe bei dieser Zusammensetzung scheint es nicht gut möglich, eine solche Gebürgsart mit Auswurfsschichten am Abhang der Vulcane zu vergleichen, sondern sie stehen den groben Sandsteinen weit näher, wie die ungefähr, welche die Steinkohlen umgeben. Doch ist es bemerkenswerth, dafs Herr Weifs unter den Geschieben dieser Schichten keine von Glimmerschiefer oder Gneufs bemerkt hat, wie sie doch, wenig entfernt, der erstere im Thale des Cher unter Vic und bei St. Sigismond, der letztere unter Mauriac entstehen. Auch von dichtem Kalkstein nicht. Dagegen fand er ein ansehnliches Stück von braunem dichten Kalkstein mitten im Porphyr, zwischen Muret und Thielle, welches auf mehrere Formationen von dichtem Kalkstein in dieser Gegend hindeutet.

*) Alles nach den schönen Beobachtungen des Herrn Weifs, durch deren Bekanntmachung die Kenntnifs dieser Gebürgsarten und ihrer Lagerung mehr gewinnen würde, als durch alle bisher darüber erschienene Schriften.

Dieses sehr merkwürdige Conglomerat habe ich am Montd'or nicht bemerkt, auch nicht erfahren, dafs es irgendwo an diesem Berge sich fände, ungeachtet doch sonst beide Berge fast in allen ihren Verhaltnissen Kopien von einander zu seyn scheinen. Nur in den Engen unter den Bädern Mont-d'or erscheint mitten zwischen dem festen Porphyr eine Conglomeratschicht eckiger Porphyrstücke, mit Granit und Hornblendstücken dazwischen. (Miner. Briefe a. Auvergne p. 295.) Das ist aber nur eine Schicht, und in der Lagerung ist sie durchaus vom Conglomerat des Cantal verschieden; denn es folgen noch mehrere Porphyrschichten darauf, und am äufseren Umfang des Berges ist sie nicht zu bemerken, noch weniger als eine mächtige Gebürgsart, welche vom Basalt bedeckt würde.

Ich will hier nicht wiederhohlen, welche Gründe zu glauben verleiten können, dafs der Porphyr des Puys bei Clermont, des Puy de Dome, des grofsen und kleinen Cliersou, des Sarcouy, des Puy de la Chopine und des Puy de la Nugere, durch vulcanische Kräfte aus dem Innern des Granits hervorgehoben sind; wie die sonderbare Abwechslung des Granits und des Porphyrs senkrecht herab durch den Puy de la Chopine, und der allmählige Uebergang der einen Gebürgsart in die andere, es wahrscheinlich mache, wie der Porphyr aus dem Granit durch Wirkung elastischer Dämpfe entstehe, welche den Quarz bis zur Unkenntlichkeit zersprengen, dem Feldspath seinen Perlmutterglanz und seinen blättrigen Bruch rauben, seine Krystalle in die Länge zerreifsen und sie durchsichtiger machen, Glimmer und Hornblende aber nicht angreifen; wie endlich am Puy de la Nugere zur physikalischen Gewifsheit erhoben ist, dafs die Lava von Volvic in Flufs gebrachter, und durch eine ungeheure Menge Eisenglanzblättchen schwarz gefärbter Trapp-Porphyr sey.

Aber das ist zu wiederholen nothwendig, dafs, wen die wunderbaren Phänomene bei Clermont von der Wahrscheinlichkeit dieser Resultate überzeugt hat, nie sehr entfernt seyn kann zu glauben, dafs auch der Mont-d'or, dafs auch der Cantal erhoben sind, dafs ihr Porphyr einst Granit war, oder etwas dem ähnliches, und daher nur eine locale, keine allgemeine Formation sey, die aber durch Gleichheit der wirkenden Ursache überall auf der Erdfläche sich ähnlich ist; und dafs der obere bedeckende Basalt der Lava gleich, aus dem Porphyr oder vielleicht gar aus dem Granit, durch Zutritt des sublimirten Eisenglanzes gebildet; dafs ältere Substanzen, z. B. Feldspath, Hornblende und Glimmer, zerstört, neue darinnen erzeugt, und alles im Fluſs über den Abhang des erhobenen Berges sich gegen die Ebene herabgesenkt habe.

Viele, auch selbst noch ganz neuerlich Breislack, finden die Erhebung, Aufquellung so groſser Massen unglaublich; sie fürchten die wenige Unterstützung und den entstandenen leeren Raum im Grunde, und sehen nicht ein, wie eine solche Masse sich erhalten könne, ohne sogleich wieder zusammenzustürzen. Aber solche Erhebungen haben wir jetzt mehrere vor unseren Augen gesehen. Die Ebene des Malpays unter dem Vulcan von Torullo ist von Meilenumfang, ist auf einmal 530 Fuſs in die Höhe gebracht; der Vulcan selbst, der ebenfalls, ungeachtet des Craters, aus fester Gebürgsart, nicht von Schlacken und Stücken aufgeführt scheint, ist 1540 Fuſs erhoben worden. Und die vielleicht 5000 Fuſs hohe Insel bei Unalaschka, die Herr Langsdorf beschrieben hat, ist ebenfalls eine zusammenhängend emporgehobene, keine nach und nach ausgeworfene Masse, wie etwa die neue im Jahr 1811 entstandene Azorische Insel Sabrina. Selbst die kleine Kameni bei Santorin ist im Grunde nichts anders; nur ist sie in einzelnen Felsen hervorgetreten, nicht in der Kuppel- und Kegelform der Puy's. Doch scheint dies Phänomen in Griechenland nicht ganz selten gewesen zu seyn. Dem Pythagoras wird die Beschreibung der Erhebung eines solchen Berges zugeschrieben, die so deutlich und schön ist, als sähe man die prächtige Porphyrkuppel des Sarcouy bei Clermont vor seinen Augen aufsteigen. Die Beschreibung steht in *Ovid. Metamorph. Lib. IX.*; und sie verdient wohl, ihrer Merkwürdigkeit wegen, näher ausgezeichnet zu werden:

Est prope Pythaeam tumulus Troezena, sine ullis
Arduus arboribus; quondam planissima campi
Area, nunc tumulus; nam (res horrenda relatu)
Vis fera ventorum coecis inclusa cavernis
Expirare aliquo cupiens, luctataque frustra
Liberiore frui coelo, quum carcere rima
Nulla foret toto, nec pervia flatibus esset,
Extentam tumefecit humum, ceu spiritus oris
Tendere vesicam solet, aut direpta bicornis
Terga capri. Tumor ille loci permansit, et alti
Collis habet speciem; longoque induruit aevo. —

Hätten wir doch eine neue Beschreibung dieses troezenischen Hügels! Ist er wirklich aus Trapp-Porphyr gebildet, wie man doch nothwendig glauben mufs? Aus Schlacken gewifs nicht. Denn Schlacken, unzusammenhängende Stücke, wie die, welche den Monte Nuovo bei Neapel bilden, hätten sich nicht wie eine Blase über den Boden erheben können, und es wäre ein Crater auf dem Gipfel des Hügels entstanden. Geognosten haben das Innere von Griechenland kaum betreten. Es steht auch ihnen noch eine reiche Ernte in dem classischen Lande bevor.

Sonst giebt es vielleicht keine Gegend auf der Erdfläche, in welcher alle wunderbaren Phänomene der Vulcane so mannigfaltig, so zusammenhängend, und deshalb so lehrreich zusammengedrängt sind, als im mittleren Frankreich. Ist man geneigt, an der Existenz erloschener Vulcane überhaupt zu zweifeln, so wird man es nicht mehr, wenn man bei Clermont die Schlackenberge sieht, die Crater darinnen, und Lavenströme vom Fufse weg, Wasserfällen gleich, in die tiefen Thäler hinein, und meilenweit fort, so schön wie nirgends am Aetna oder am Vesuv. Sucht man etwa die Ursache der Vulcane im Trapp-Porphyr selbst, als in einer nicht vulcanisch, einer allgemeinen Formation unterworfenen Gebürgsart, und widerstreitet das Hervorbrechen der Lava aus dem Innern des Granits? Auch das widerlegen sogleich die mit Auswurfskegeln abwechselnden kleinen Porphyrblasen und Kuppeln von Clermont. In ihnen ist für die hervorgebrochene Masse der Lava nicht Raum, viel weniger also noch für die unbekannte Ursache dieser Feuererscheinungen. Und die Schlackenhügel, an deren Fufse die Laven erscheinen, stehen sichtlich nicht auf Porphyr, sondern auf Granit. Keiner der brennenden Vulcane, weder in Italien, noch in Amerika, oder auf Bourbon und Island, würde so überzeugend die Existenz der vulcanischen Ursache unter dem Granit dargethan haben; denn überall ist dort durch die Gröfse der Wirkung, und durch die Menge der ausgeworfenen Massen, das Grundgestein, aus dem sie hervorbrechen, verdeckt; und auch alle Zwischenglieder, welche dies Gestein mit den obern veränderten Produkten verbinden. Der Montd'or, das grofse isolirte Porphyrgebürge in derselben Richtung mit der Kette der Puy's, scheint unmittelbar aufzufordern, auf dieser, dem Porphyr der Puy's ganz gleichen Gebürgsart überzutragen, was man über seine Verhältnisse bei Clermont gelernt hat. Und noch weniger kann man an diesem Gebürge die Vulcane vergessen, da noch unmittelbar aus seinen Schichten hervor sich bei Macrol

ein

ein Auswurfskegel mit Schlacken erhebt, ein Crater darinnen, und ein prächtiger Lavenstrom vom Fuſse weg fast meilenlang im engen Thale fort bis Champeix und Nechers.

Dieselbe Gebürgsart erscheint am Cantal, dieselbe Basaltbedeckung darauf; die ganze Masse auch noch in derselben Richtung als der Montd'or und die Puy's, und auch noch in demselben isolirten Lager. Aber die Vulcane, die Auswurfskegel, die Lavenströme, sind an diesem Berge gänzlich verschwunden. Statt dessen bedeckt das mächtige Conglomerat einen groſsen Theil des Abhanges. Wäre man nicht über die Puys und den Montd'or zum Cantal gekommen, und hätte nicht ihre immer fortgehende geognostische Verwandtschaft betrachtet, man hätte hier leicht geneigt werden können, an vulcanischen Wirkungen zu zweifeln, und den Porphyr und den Basalt für ganz etwas anderes anzusehen, als sie wirklich zu seyn scheinen. Aber zu den vorigen Ideen führt dann unmittelbar der Mont Mezin und das nahe liegende Vivarais und Velay zurück. Denn diese hochliegende Gegend belehrt, daſs es nicht immer des Zwischenmittels, des Trapp-Porphyrs, bedarf, um aus Granit Basalt zu bilden. Sie zeigt, wie Basalt und basaltische Schlacken aus dem Innern des Granits hervorsteigen können. Herr Weiſs hat den berühmten Schlackenfels, die Roche Rouge, unter Serassac bei der Stadt Puy, genau untersucht, und mit Erstaunen gesehen, wie diese isolirte 150 Fuſs hoch sichtbare Masse noch jetzt mitten im Granit steht; nur der Gipfel steigt daraus empor. Granitstücke in groſser Zahl liegen in den Schlacken, am Rande noch deutlich, gegen die Mitte wie in unseren Oefen geschmolzen, der Feldspath zu weiſsem Email, und ganz im Innern verläuft sich der geschmolzene Granit völlig in die Masse der Schlacken selbst. Endlich am südlichen Fuſse des Mont Mezin werden wir überzeugt, und so sehr, als es je in diesen Dingen Gewiſsheit geben mag, daſs wahrer Basalt mit allen Kennzeichen und Gemengtheilen deutscher Basalte, und in der prächtigsten Säulenform, ganz wie die Lavenströme von Clermont, die Thäler herabflieſsen könne. Fast alle Schwierigkeiten gegen die Theorie der localen Entstehung und Lagerung der Trapp-Gebürgsarten finden ihre Lösung in diesem Theil Frankreichs; in ihm liegt der Schlüssel zur wahren Kenntniſs des Zusammenhanges aller so sehr verwickelten und geheimniſsvollen vulcanischen Erscheinungen.

Ohne Auvergne und Vivarais zu kennen, wer würde es wohl wagen, mit einigem Schein von Gründlichkeit die reichsten Erzgebürge von

Europa, die Gebürge von Schemnitz und von Kremnitz in Ungarn, wenn auch nicht Vulcane, doch vulcanische Gebürgsarten zu nennen? Doch finden wir hier, wie aus den Sammlungen und aus Herrn Esmarcks trefflichen Beschreibungen sehr klar ist, nicht allein durchaus alle Gesteine des Cantal wieder, sondern auch ganz in derselben Lagerung; nur nicht in der isolirten Kegelform. Sollte es daher auch nicht gelingen, durch alle Verhältnisse die Entstehung der ungarischen Porphyre durch vulcanische Einwirkung zu erweisen, so ist die Gleichheit so vieler doch hinreichend, den vulcanischen Ideen über diese Gebürgsarten mehr Eingang zu verschaffen, als denen, welche ihre Verbreitung allgemeinen Formationen zuschreiben.

Der Porphyr von Schemnitz, sagt Esmarck *), ist ein feinkörniger Feldspath, und geht in Thonstein über und in verhärteten Thon. Eben so hat man, wenn auch nicht ganz richtig, die Grundmasse der Porphyre bei Abano und in Auvergne genannt; auch ist sie in allen diesen Gesteinen wenig verschieden. In dieser Hauptmasse liegen Hornblendkrystalle in deutlichen achtseitigen Säulen, mit vier Flächen zugespitzt, und in anderen ähnlichen der Hornblende zukommenden Formen; dann dunkelschwärzlichbrauner Glimmer in deutlichen Krystallen, und selten Quarzkrystalle; aber diese letztern fehlen auch gar oft gänzlich. Gerade wie es der Trapp-Porphyr verlangt, Hornblende und Glimmer in Menge, Quarz fast nicht. Im Gestein des höchsten Berges der Gegend, des Zithna auf dem Wege nach Hodritsch, erscheint auch Feldspath in der asch- und bläulich-grauen Hauptmasse, und der Porphyr ist vertical in groſse Säulen zerspalten, wie der Basalt.

Basalt selbst liegt darauf auf dem Calvarienberge, wie am Plomb de Cantal, wie an der Croix Morand und über dem Thal Prentigarde am Montd'or. Er ist gräulichschwarz, uneben, von feinem und grobem Korn, und enthält in einigen Schichten eine so groſse Menge von Feldspathkrystallen, daſs man zwischen ihnen kaum die Hauptmasse erkennt. In anderen hingegen, was sonderbar ist, findet sich mit dem Feldspath Olivin in kleinen und sehr kleinen eingewachsenen Körnern. Die Feldspathe verrathen die nahe Verwandtschaft des Basalts zum Porphyr. Im letzteren selbst hat man mit dem Josephistollen im Granthale über Hodritsch ein Lager von Pechsteinporphyr überfahren, grünlichschwarz, dem sächsischen Pechstein ganz ähnlich, Feldspath und Glimmerkrystalle darin-

*) Reise durch Ungarn p. 10. seq.

nen, und selbst auch Quarz; auch wieder wie am Cantal, und eine treffliche Beobachtung, um die Natur des Pechsteinporphyrs, nicht als selbstständige Gebürgsart, sondern als untergeordnetes Lager des Trapp-Porphyrs außer allem Zweifel zu setzen. Bei Prattendorf und bei Krumback findet sich der Porphyr dunkelschwarz, inwendig wenig glänzend, kleinmuschlig, und eine große Menge Feldspathkrystalle darinnen, auch viele hochseitige Glimmertafeln und wenig Quarz; ein Gestein wie das von der neuen Kameni bei Santorin.

Die Gebürgsart, in welcher die Gänge von Kremnitz aufsetzen, nennt Herr Esmarck sogar Basalt, grünlichschwarz, mit einer Menge eingewachsener Feldspathkrystalle, der auch hier auf dem Porphyr liegt, den man häufig auf dem Wege nach Neusohl, mit Hornblendkrystallen darinnen, hervorkommen sieht.

Sowohl von den Abhängen des Zithna, als gegen Neusohl, sah Herr Esmarck über dem Porphyr ein mächtiges Conglomerat, gerade wie es Herr Weifs am Cantal beobachtet hat. Porphyrstücke bilden die größere Masse der zusammengeführten Geschiebe, Stämme von versteinertem und bituminösem Holz finden sich darinnen, und selbst auch kleine Steinkohlen und Schieferthonflöze. Stücke von anderen Gebürgsarten scheinen aber wenig darinnen zu liegen, dagegen die Porphyrgeschiebe im Granthale bei Neusohl bis zu mehreren Centnern schwer. Dafs diese Zerstörung nur den Porphyr, nicht die, doch wenig entfernte Glimmerschiefer-, Gneufs- und Granitfelsen bei Löwenobanya betroffen habe, ist eine sehr anmerkenswerthe Thatsache. Die Geschiebe selbst aber beweisen, dafs dies Conglomerat auf dem Porphyr gelagert seyn müsse. Wie er aber in Hinsicht der Lagerung sich gegen die primitiven Gebürgsarten verhalte, das zu beobachten hat auch hier Herr Esmarck nicht vermogt. Er sagt ausdrücklich (p. 44.), dafs er nur vermuthe, der Glimmerschiefer bei Glashütte zwischen Schemnitz rnd Kremnitz liege unten, und er werde vom Syenit-Porphyr (Trapp-Porphyr) bedeckt.

Weiter von den höheren Gebürgen und von primitiven Gebürgsarten entfernt, fast in der Mitte der Ebene von Ungarn, liegt das ganz isolirte kleine Trapp-Porphyr-Gebürge von Telckebanya und von Tokay. Freilich ist dieser Porphyr in Hinsicht der Grundmasse, und mehr noch der Gemengtheile, von dem Porphyr von Schemnitz etwas verschieden. Deswegen hat sie aber doch beide auch Herr Esmarck zu einer Formation gerechnet; — bei Tokay liegt Feldspath in der Masse, allein wenig Hornblende und wenig Glimmer, die hingegen bei Schemnitz viel häufiger sind. Gegen Keresztur wechselt dann der Porphyr mit Schichten von aschgrauem, wenig glänzendem, muschligem Perlstein, welcher Obsidiankörner enthält und glasige Feldspathkrystalle; in der Lagerung wie auf Volcano der liparischen Inseln. Aber eben auf Volcano ist es so deutlich, wie der Perlstein in der festen Masse des Obsidians durch Entglasung entsteht, durch die Operation, welche Fleurieu de Bellevue in den Glashütten, Sir James Hall in mühsam und scharfsinnig angestellten Versuchen, so genau untersucht haben. Und daſs der Obsidian auf Volcano ein Produkt der Schmelzung sey, das erweisen die Hölungen parallel in einer Richtung fort, und Porphyrstücke in den Blasen, fast schwebend, und mit der Hölung voraus, hinten in der Breite des Stücks, vorn zugespitzt, wie ein von ihnen ausgehender Schweif *). Der so mächtig aufblähende flüchtige Stoff des Obsidians kann jetzt nicht mehr als Beweis der Unmöglichkeit seiner vulcanischen Entstehung angeführt werden, seitdem man weiſs, daſs solche gasförmige Stoffe, selbst Kohlensäure, durch Druck, wie er bei solchen Massen gar leicht denkbar ist, zurückgehalten werden können. Ob die Lagerung sich dem Flieſsen des Obsidians bei Tokay durchaus entgegenstelle, ob man sich seine Entstehung, seine Entglasung zu so ausgedehnten Hügeln, als die Perlsteinberge von Keresztur auf eine etwas andere Art, als bei Volcano vorstellen müsse, das ist aus Herrn Esmarcks Beschreibung nicht deutlich. Immer aber sieht man sehr klar, daſs man an diesen Orten mit denselben Gebürgsarten zu thun habe, und daſs sie ziemlich überall die gleichen Erscheinungen zeigen.

Wirklich darf man den Gesteinen nicht immer ein Flieſsen absprechen, wenn sie auch in der Form ganz von unsern Schmelzungsprodukten abweichen. Fast nur die Lagerung, kaum die innere Zusammensetzung kann die Unmöglichkeit des Flieſsens darthun. Was sieht wohl einer geschmolzenen Masse weniger ähnlich, als ein Trapp-Porphyr von hellaschgrauer Hauptmasse, der in Menge groſse und schöne Feldspathkrystalle und Hornblende umschlieſst? wem können wohl, bei der Ansicht des Drachenfelser Gesteins, Schlacken oder flieſsende Ströme einfallen? Eben so ist doch der Lavenstrom der Solfatara von Pozzuol, der, wenn man ihn auch nicht

*) Magazin der Gesellschaft der Naturfreunde, wo die Gründe solcher Behauptungen entwikkelt sind.

hat fliefsen sehen, doch mit allen Verhältnissen vesuvischer Lavenströme vorkommt. Fast so, nur dunkler in der Hauptmasse, und eben so sehr mit Feldspathkrystallen erfüllt, ist der Strom, der 1302 auf Ischia aus dem Epomeo hervor die Hauptstadt zerstörte; und von den mannigfaltigen Trapp-Porphyrarten, welche das Ufer der Insel in steilen Felsen umgeben, bis zur Masse dieses Lavenstroms, läfst sich in Stücken ein vollkommener und nicht unterbrochener Uebergang zusammenlegen, in dem es nicht mehr möglich seyn würde, aus den Stücken noch anzugeben, was fliefsend gewesen seyn könne, was nicht. Wie viele Lavenströme des Aetna, deren Ausbruch man kennt, gleichen nicht so manchen Lagern am Montd'or und selbst in Ungarn! Und stets, selbst die neuesten Ströme des Aetna, unter welchen Städte eingehüllt liegen, sind durch die grofse Menge von deutlichen, schönen glasigen Feldspathkrystallen charakterisirt, welche sie einschliefsen *). Ja noch mehr; nach unsern bisherigen Erfahrungen scheinen diese glasigen Feldspathkrystalle in allen Theilen der Erdfläche den Laven so wesentlich, dafs man es nur als Ausnahme und als weitere Verarbeitung der vulcanischen Kräfte betrachten kann, wenn sie irgendwo sich nicht finden. Die Laven von Teneriffa enthalten sie jederzeit, wie Cordier und Humboldt bestimmt gesehen haben; die von Bourbon nicht weniger, was man aus der Sammlung erkennt, welche von dort Herr Berth, Ingenieur-Officier, gebracht, und im Museum des *Conseil des mines* in Paris niedergelegt hat. Und in Laven des Hekla, die in festen, nicht schlackigen Stücken so wenig zu uns gebracht werden, sah ich diese Feldspathe in dem Cabinet des Herrn von Drée in Paris. Sie sind überall, sobald sie glasig geworden und den blättrigen Bruch verloren haben, nicht mehr so leichtflüssig, als im Granit oder im Gneufs; ungeachtet sie doch keinen wesentlichen Gemengtheil verloren zu haben scheinen; denn Herr Klaproth fand im Drachenfelser glasigem Feldspath selbst noch eben die Menge Kali, als in gemeinen Feldspathen. Gewifs scheint es, nach Herrn von Drées Erfahrungen, dafs in ihnen stets viel schwerer der Zusammenhang gelöst wird, als in der umgebenden Grundmasse, vorzüglich, wenn man bei der Feuerwirkung durch Druck die Entweichung der gasförmigen Stoffe verhindert. Er fand sogar in seinen höchst merkwürdigen Versuchen, dafs die Feldspath-

*) *Francesco Ferrari (storia generale del Etna, Catania* 1793. *p.* 191.) beschreibt ihre verschiedene Zusammensetzung ganz gut und genau, und besser als es in irgend einem anderen Werke über den Aetna geschehen ist.

krystalle eines Porphyrstücks, ohne weder in ihrer Natur, noch in ihrer Form, wesentlich verändert worden zu seyn, alle den untern Theil des Stücks verlassen und sich in der Höhe versammelt hatten. Sie waren durch die, gar nicht zu einer Schlacke oder glasigem Produkt gewordene, sondern fast unveränderte Hauptmasse heraufgestiegen, welche daher zum wenigsten in einem Zustande der Verschiebbarkeit gewesen seyn mufs *). In der That möchte man oft glauben, dafs so etwas mancher Porphyrschicht der Trapp-Porphyrgebürge begegnet seyn könne, dafs wenn sie auch nicht wie ein Lavenstrom geflossen haben mag, sie doch in einem Zustande der Lösung des Zusammenhanges der Grundmasse, und irgend einer inneren fortrückenden Bewegung des Ganzen gewesen seyn möge. Denn nicht selten sieht man die langen Feldspathkrystalle parallel hintereinander fortliegen, welches auch in kleinen Handstücken recht auffallend ist, als hätte die Bewegung der Masse die widerstehenden Feldspathe sämmtlich nach der Seite ihres geringsten Widerstandes umgedreht. Solche Schichten sah Herr Weifs S. S. West vom Cantal im Thale des Cer. Die Feldspathe lagen nicht allein unter sich, sondern auch mit den länglichen Poren der Grundmasse, parallel, was noch mehr auf ein Bewegen hindeutet. Solche Schichten sah auch ich am Montd'or und am Puy de la Nugere. Von allen sind Stücke mit diesem Phänomen in der hiesigen öffentlichen Mineralsammlung niedergelegt worden.

Nicht gern wagt man dann die Entscheidung, ob die schönen Porphyrsäulen von Panaria der liparischen Inseln, oder die auf der gröfseren Ponza-Insel, aus dem Meere gehobene Felsen seyn mögen, oder Lavenströme, wie an der Solfatara von Pozzuol. Der Porphyr gleicht in Grundmasse und Gemengtheilen dem vom Monte Ortone bei Abano; wie überhaupt, meint Herr Léman in Paris, der einige Zeit auf Ponza gewohnt hat, dafs diese Inseln und die Euganeen gegenseitig als wahre Copien von einander anzusehen sind. Auch auf Ponza ist der Porphyr, dem Basalt gleich, in schönen, fünfseitigen Säulen zerspalten, deren Köpfe in einer Ebene fort, wie ein Mosaikpflaster, liegen.

In Deutschland erscheint der Trapp-Porphyr fast nur am Niederrhein; einige wenige Spuren davon bei Hohencrayen und am Kaiserstuhl bei Breisach etwa ausgenommen. Das ganze, an Trappgebürgsarten doch sonst so reiche Böhmen enthält diesen Porphyr nicht; auch sah man ihn nicht im basaltischen Rhöngebürge, oder in Sachsen und

*) *De Drée sur un nouveau genre de liquefaction ignée. Journal des Mines. XXIV. p. 51.*

Schlesien. Und wahrscheinlich wird man ihn auch in diesen Ländern nicht finden; denn der Basalt in der Nähe des Porphyrs enthält fast jederzeit hin und wieder einige Reste von glasigem Feldspath, an welchen man seine Entstehung aus dem Porphyr erkennt. Aber in den Basalten jener Gegenden ist Feldspath höchst selten, und glasiger Feldspath, wie im Porphyr, ist, so viel ich weiſs, darinnen noch nie angemerkt worden. Wie in Vivarais entsteigt hier der Basalt unmittelbar dem Granit, ohne erst durch die Formänderung in Porphyr vorbereitet zu werden.

Wie ungeheuer mächtig der Trapp-Porphyr in Amerika sey, hat Herr von Humboldt dargethan, bis 2000 Toisen hoch, von seinem ersten Erscheinen am Fuſse der Anden bis zu den Gipfeln der Vulcane. Nicht allein brechen durchaus alle Vulcane nicht aus Bergen von Schlacken und Lavenströmen, wie Vesuv und Aetna, sondern aus Porphyrbergen hervor, gleich dem Cantal und dem Montd'or; sondern auch, was eine recht merkwürdige Thatsache ist, dieser Porphyr findet sich kaum anderswo, als in der Gegend der Vulcane. In den Gebürgen von Caraccas, wo es keine Vulcane giebt, sah ihn Humboldt nicht. Aber auf den Anden erscheint er auch nur in der Höhe, kaum an dem Fuſs des Gebürges. Von Sta. Fe di Bogota, gegen Quito, findet er sich zuerst bei Quindiu schon 1600 Toisen hoch. Da schienen alle thurmähnliche Nevadenspitzen des hohen Gebürgszuges zwischen dem Magdalenenfluſs und dem Cauca daraus gebildet; denn alle Bäche von oben führten nur solche Porphyrstücke herunter. Sie waren dem des Drachenfels im Siebengebürge ganz ähnlich, enthielten viel kleinkörnigen, krystallisirten Feldspath, der durch die starke Zersprengung mehr fasrig als blättrig schien; dann wenig krystallisirten Quarz, auch sehr wenige schwarze Glimmertafeln, allein dagegen sehr viel Krystalle von grünlichschwarzer Hornblende. Das ist also ganz wider das Schemnitzer Erzgestein. Die Hauptmasse scheint thonartig, und ist bald röthlich und graulichweiſs, bald gelblich und röthlichgrau. Auf dem Wege von Quindiu her liegt auf dem Granit des Grundes Glimmerschiefer, und dieser enthält an der Quebrada de Azufral Schwefel in Gangklüften, und Dämpfe daraus hervor treiben das Thermometer bis auf 38 Gr. R. Das ist eine Wirkung von innen heraus, welche wohl zu näherer Untersuchung auffordert, ob wohl wirklich der Trapp-Porphyr den Glimmerschiefer bedecken oder aus ihm hervorsteigen mag. Humboldt sah das erstere freilich selbst einigemal ganz ausdrücklich in seinem *Nivellement barométrique*; — doch weifs ich, dafs diese Angaben nur auf Vermuthungen beruhen, und dafs er auch die Möglichkeit des Gegentheils zugiebt. Ja, er hat dies auch selbst bekannt gemacht. Denn wenn er meint, der ganze gebürgige Theil von Quito, ein Plateau von 400 Quadratmeilen und von 8—9000 Fufs Höhe, sey gleichsam nur als ein einziger Vulcan zu betrachten, mit vielen einzelnen Oeffnungen, die man mit besonderen Namen von Tungurahua, Cotopaxi oder Dilhinchas belegt (Klaproth's Beiträge IV. 289. seq.); so geht daraus hervor, dafs er alle Gebürgsarten am Fufse dieser Oeffnungen, den Glimmerschiefer und Talkschiefer am Tungurahua, nur für angelehnt, nicht für darunter weggehend halte; zum wenigsten, dafs er die vulcanische Ursache noch tief unter dem Glimmerschiefer in den Granit der Anden hineinsetze. Auch läfst sich das wohl anders nicht glauben, wenn man sieht, dafs die Wirkungen entfernter Vulcane mit der Kette in offenbarem Zusammenhange stehen, wie der Vulcan von Pasto, der aufhört Flammen zu werfen, wenn bei Quito sich der Erdboden spaltet; und wenn man weifs, dafs diese Spalten, aus welchen vulcanische Produkte hervorbrechen, nicht an den Vulcanen, sondern oft in der Ebene des Thales entstehen.

Wenn man Humboldts schöne Zeichnung des Chimborasso betrachtet, wem möchte nicht wieder der Sarcouy und Ovids Beschreibung der Entstehung des troezenischen Hügels einfallen! Beide sind nur in der Gröfse verschieden. Der Chimborasso ist ein Vulcan; es ist eine geschlossene Kuppel ohne Crater, aus dessen Seiten bisher noch keine Ausbrüche hervorgekommen sind. Wie eine ungeheure, aufgequollene Blase über dem Boden. Der Porphyr, der ihn bildet am letzten Felsen, den Humboldt erreichte, ist von einer röthlichgrauen, im Bruche grobsplittrigen, halbharten Hauptmasse, ohne Poren und Blasen. Eine unendliche Menge glasiger Feldspathkrystalle liegen darinnen, und fast eben so viel kleinere, aber sehr deutliche schwärzlichgrüne Krystalle von Augith, die im Bruch nicht blättrig sind, sondern muschlig. Nicht selten sind mehrere kleine Krystalle zu einer Gruppe vereinigt. Hornblende und Glimmer sieht man in diesen Stükken nicht. Darinnen unterscheidet sich also, wenn er sich durch die ganze Masse des Berges gleich bleibt, der Porphyr des Chimborasso von denen anderer Berge, selbst auch in den Anden.

Mit Recht bemerkt Humboldt, dafs Lavenströme hier fast durchaus fehlen, weil sie in diesen Colossen vom Grunde herauf höher hätten müssen gehoben werden, als es ihre Schwere erlaubt haben würde. Ist es vielleicht

aus

aus ähnlicher Ursache, warum die Basalte auf den Höhen des Gebürges, und da in der Tiefe keine Porphyre vorkommen, überhaupt im südlichen Amerika so selten sind? Nur in der Tiefe des Caucathals, am Caucaufer, unter dem Vulcan von Puracé bei Popayan, hat Humboldt wahre Basalte gesehen, in 5 und 7seitigen Säulen, von 18 Fufs Länge. Sie stehen dort in 911 Toisen Höhe. In der Provinz Pasto kommt aber schon kein Basalt mehr vor, und in der Ebene von Quito, 1500 Toisen hoch, ist so wenig Basalt, als irgend eine andere primitive Gebürgsart, das wenige ausgenommen (Glimmerschiefer) an den Abhängen des Tunguraghua.

Wie der Chimborasso sind auch alle übrige Vulcane, der Cotopaxi, der Pichincha, nicht Schlackenkegel, sondern isolirte Porphyrkuppeln, die aufgebrochen sind, und nun durch ungeheure Crater die verdampfbaren Substanzen entlassen. Nur scheint doch die Hornblende wieder häufiger in der Masse aufserhalb des Thales von Quito. Das Gestein des Vulcans von Puracé bei Popayan war Humboldt eine Zeitlang geneigt, sogar Syenit-Porphyr, wegen Menge der Hornblendkrystalle, zu nennen.

Die Lagerung des Trapp-Porphyrs in diesem Theile der Anden scheint also noch immer der im Europäischen ähnlich, und es hindert nichts, auf ihn anzuwenden, was bei Clermont die kleinen Porphyrberge über Entstehung dieser Gebürgsart zu lehren scheinen. Auch auf dem Plateau von Mexico hat Humboldt noch immer ähnliche Versuche beobachtet. Der Mandelstein, welcher die Hügel und die ganze Gegend bildet, die Mexico umgiebt, scheint sogar, wie in Frankreich der Basalt, über dem Porphyr zu liegen. Der Obsidian und der Perlstein von Himapecuaro und vom Cerro de los Navachos bilden Lager darinnen, wie in Ungarn und auf Volcano; der Basalt in trefflichen articulirten Säulen bei der Hacienda de Regla unweit Mexico liegt wiederum deutlich darauf *). Und die erhobenen Laven des Vulcans von Jorullo enthalten glasige Feldspathe genug, um auch sie aus dem Porphyr entstanden zu glauben. In beiden Welttheilen scheint alles in schöner Uebereinstimmung. Aber wie soll man damit die Verhältnisse des Erzgebürges von Guanaxuoto vereinigen? In hohen Felsen steigt der Porphyr auf, an der Ostseite des Thales von Marsil; seine Hauptmasse scheint dichter Feldspath; die oberen Schichten enthalten glasige Feldspathkrystalle, aber Hornblende und Glimmerschiefer sehr selten. In diesem Porphyr setzt der mächtigste und reichste Goldgang von

*) Humboldts *Nivellement barométrique p.* 41.

Guanaxuato auf, die Veta Madre. Er setzt durch den Porphyr, und darunter weit in Thonschiefer hinein, in den er dann noch bis zu ansehnlicher Tiefe bebaut wird *). Hier ist also das Aufliegen des Porphyrs nicht zu bezweifeln. Und das ist doch durchaus unmöglich, wenn man ihn für eine durch vulcanische Einwirkung veränderte Gebürgsart ansehen will; es sey denn, daſs man sich ihn vorstellen könnte, als wäre er über die darunter liegende Gebürgsart geflossen, was von so mächtigen Porphyren wohl schwer ist. Oder soll man glauben, daſs dieser Porphyr einer anderen Formation angehöre? Oder soll dies vorbereiten, ähnliche Fälle in Ungarn wiederzufinden? Dann freilich würde die Meinung seiner localen Formation durch vulcanische Einwirkung kaum noch haltbar seyn können.

Immer aber scheint sich aus der Untersuchung dessen, was von dieser Gebürgsart bekannt ist, zu ergeben, daſs der Trapp-Porphyr zu den neuesten Gesteinen gehöre; fast stets zu Formationen, welche mit den Basalten in geognostischer Verbindung stehen; daſs die Obsidian-Perlsteine und Pechstein-Porphyre nicht selbstständige Gebürgsarten, sondern ihm untergeordnet sind; daſs gröſstentheils aus ihm die vulcanischen Erscheinungen hervorgehen, und fast unzubezweifelnd, wenn die Vulcane mehr als 1000 Toisen Höhe erreichen; endlich, daſs, wo der Trapp-Porphyr mit Basalten vorkommt, er die Grundlage bilde, und vom Basalt als oberste Schicht bedeckt werde.

*) *Humboldt Tableau phys. du Mexique III. 520. Nivellement barom. p. 45.*

Versuch einer Zurückführung der mannigfaltigen Erscheinungen elektrischer Reizung auf einen einfachen chemisch-physischen Grundsatz.

Von Herrn P. Erman *).

Der chemische Gegensatz, der den elektrischen begleitet, hat sich nunmehr mit einer so durchgängigen Konstanz ergeben, daſs bereits die Frage entsteht, welchem von diesen Prozessen in der Kausalreihe die Priorität zukommt, oder ob beide vielleicht identisch zusammenfallen, als zwei Ausdrücke und Modifikazionen derselben Grundkraft. Aber schon in einer sehr frühen Periode, wo man kaum im Besitz einiger unvollkommenen Wahrnehmungen über das Gesetz der chemischen Wirkungen, die den Galvanismus begleiten, war, versuchten bereits einige, die Phänomene der gereizten Muskelfaser dem Prinzip dieses chemischen Grundsatzes unterzuordnen; und dieser plausible Ausweg, der sich unvermuthet eröffnete, trug wohl am meisten dazu bei, daſs man so früh und willig abging von der Vorstellung eines durch sogenannten Metallreiz erregten spezifischen Agens der Lebensthätigkeiten.

Diese Ansicht des Muskularreiz als bedingt durch denjenigen Gegensatz, den man durch die zwei Stoffe Sauerstoff und Wasserstoff bezeichnete, weil diese bis jetzt in den individuellen Fällen am sichersten nachzuweisen waren, hatte jedoch in dieser früheren Periode zweierlei gegen sich. Einerseits war es damals bei weitem nicht erwiesen genug, daſs dieser che-

*) Vorgelesen den 20sten Mai 1813.

mische Gegensatz durchaus und in allen Fällen die Störung des elektrischen Gegensatzes begleitet, wenn nur irgend Substanzen betroffen sind, die der chemischen Zerlegung fähig sind. Viel weniger wuſste man, wie urplötzlich und unwiderstehlich dieses Zerfallen in chemisch entgegengesetzte Qualitäten durch den elektrischen Gegensatz bedingt wird; und endlich war das Gesetz, nach welchem, hinsichtlich auf die Dimension des betroffenen Körpers, beide Polaritäten, sowohl die elektrische als die chemische, sich darthun, noch keinesweges faktisch erwiesen. Andererseits erblickte man in den Reizversuchen, vorzüglich am Froschpräparat, eine so groſse Mannigfaltigkeit von Erscheinungen, so viele scheinbar von einander abweichende Resultate, so gehäufte und so qualifizirte Anomalien, daſs man die Einheit des Prinzips eines gestörten chemischen Gleichgewichts zwischen Muskel und Nerve, oder zwischen relativ verschiedenen Strecken des Nerves, wohl schwerlich mit der Ueberzeugung zu durchschauen vermogte, wie es in dem einfachen Fall der Linear-Dimension eines Gas-Apparats geschehen kann.

So kam es dann, daſs das Interesse für Reizversuche fast erlosch: man verlieſs den Gegenstand, ehe man ihn verfolgt hatte, so weit es sich gehörte; einige, weil sie die Muskelreizungen als ein zu verwickeltes, und wegen des Eingreifens der Lebensthätigkeit als ein unbestimmtes Problem ansahen; andere, weil sie es bequemer fanden, die ganze Reihe der verwickelten Bedingungen für die mannigfaltigen Fälle zu überspringen, um sich mit der sehr verworrenen Vorstellung eines polarischen Gegensatzes überhaupt zu begnügen, der aber weder nach chemischen Qualitäten, noch nach räumlichen Dimensionen bestimmt war, so daſs man ihm für jedem gegebenen Fall jede willkührliche Art der Thätigkeit andichten konnte. Die etwas wilde und ungeregelte Behandlung der Gegenstände der Physiologie und Pathologie in dieser Manier, hat unstreitig vieles beigetragen, eine groſse Mehrheit von der besonnenen empirisch wissenschaftlichen Nachforschung der Reizversuche abzuwenden.

Die beispiellos raschen Fortschritte des letzten Jahrzehends in diesem Theile der Naturlehre, haben unsern Standpunkt hinsichtlich auf elektrisch-chemische Thätigkeit gesichert; das Zusammenfallen beider kann nicht mehr bezweifelt werden, und hiermit fällt die erste der eben erwähnten Einwendungen durchaus weg. Um so auffallender ist es, daſs während die Chemie mit so unbefangener Bereitwilligkeit den Elektrizismus in ihr Gebiet aufnahm, oder wohl gar (vielleicht mit einiger Uebereilung), sich ihm unterwarf, um von seinem Standpunkt aus ihre wesentlichste Disjunktion zu entwerfen und zu begrenzen; die empirisch forschende Physiologie, welche früher mit ihm so innige Berührungen durch den Galvanismus gewonnen hatte, kalt und gleichgültig in dieses Treiben schaut, ohne einen neuen Anlauf zu wagen, um die vertagte Sache der elektrischen Reizungen nach den jetzt bestehenden Prämissen von neuem wieder aufzunehmen. Höchst ungegründet wäre freilich die Hoffnung, auf diesem Wege zur Erkenntniſs des Wesens der Vitalkräfte zu gelangen; eine Sache, die wohl überall nie gelingen wird, noch gelingen kann; aber unendlich viel wäre doch gewonnen, wenn einige allgemeine Bedingungen und Gesetze der Lebensthätigkeit faktisch erforscht würden, welche mit denen, die das Leblose beherrschen, vergleichbar oder gar identisch wären; und wer darf bestimmen, wie weit solche, gleichsam Keplersche Analogien, durch fernere Kombination mit den faktischen Entdeckungen unserer Nachfolger, am Ende noch das menschliche Wissen, diese Asymptote der Wahrheit, zu führen vermögen.

Um diese Klasse von Untersuchungen neu zu beleben, muſs wohl vor allen Dingen der Versuch gemacht werden, eine Uebersicht des bereits vorhandenen zu vermitteln, so daſs, sey es auch nur durch provisorische Anordnung, und gleichsam als Nomenklatur der Thatsachen, das Chaotische und Anomale der Reizversuche sich füge, und als ein umgrenzter Gegenstand denkbar werde; denn wir sahen, daſs die Forschung dadurch zum Theil in Stocken gerieth, daſs es fast den Anschein hatte, als entfernte man sich je mehr vom Ziele einer selbst nur interimistischen Einheit, je mehr Mannigfaltiges die verschiedenen Kombinationen des Experiments zur Sprache brachten.

Folgende Fälle scheinen mir die wesentlichsten Modifikazionen, die da vorkommen, zu enthalten, und ich glaube einzusehen, daſs eine Theorie, welche diese umfaſst, geeignet sey, allen übrigen das Prädikat von Anomalien zu benehmen.

1. (Fig. 1.) Die Reizung ist stärker, wenn der positive Erreger am Nerven, der negative am Muskel angelegt wird.

2. (Fig. 1.) Wenn der positive Erreger am Nerven, der negative am Muskel liegt, so ist die Trennungs-Kontrakzion viel schwächer als die Schlieſsungs-Kontrakzion; und wenn umgekehrt der negative am Nerven, der positive am Muskel liegt, ist die Trennungs-Kontrakzion stärker als die Schlieſsung-Kontrakzion war.

3. Im Durchschnitt genommen ist die Trennungs-Kontrakzion, absolut betrachtet, immer schwächer als die Schliefsungs-Kontrakzion.

4. (Fig. 2. 3.) Es sey der Nerve mit dem positiven, der Muskel mit dem negativen Erreger belegt, so ist die Reizung stärker, wenn vom Muskel zum Erreger, als wenn vom Erreger zum Muskel geschlossen wird.

5. (Fig. 4. 5.) Während die Kette geschlossen, entstehen neue Kontrakzionen, wenn der Nerve so gegen sich selbst zurückgebogen wird, dafs er sich in neue Punkte seiner kontinuirlichen Strecke berührt.

6. Sind zwei Präparate so vorgerichtet, dafs die Nerven des einen an dem positiven Erreger, die des andern am negativen liegen, die Muskeln aber in kontinuirlicher Leitung die Kette schliefsen, so bringt ein positiver Ableiter an dem positiv armirten Nerven eine Schliefsungs-Kontrakzion, eine negative Ableitung hingegen an dem negativ armirten Nerven eine Trennungs-Kontrakzion. (Fig. 6.)

7. Sind zwei Präparate so vorgerichtet, dafs die Erreger an den Nerven liegen, die Muskeln hingegen durch ihre kontinuirliche Berührung die Kette schliefsen, dann fällt die Schliefsungs-Kontrakzion auf den Schenkel, dessen Nerven positiv, und die Trennungs-Kontrakzion auf den des negativ armirten Nervens (7). Ist hingegen die Zusammenstellung so, dafs die Muskeln unmittelbar von den Erregern berührt werden, die Nerven hingegen die Ketten schliefsen, dann ist alles umgekehrt, und die Schliefsungs-Kontrakzion fällt auf den negativ armirten Muskel. (Fig. 7. 8.)

8 Wenn von zwei Präparaten der Nerve des einen positiv, der Muskel des andern negativ armirt sind, und die Kette wird geschlossen durch die Berührung des respektiv entgegengesetzten Muskels und Nerven, dann erhalten beide Muskeln Schliefsungs-Kontrakzion. (Fig. 9.)

(Fig. 10.) Ist hingegen die Zusammenstellung so, dafs der Muskel des einen positiv, der Nerve des andern negativ armirt ist, und die Schliefsung der Kette geschieht ebenfalls durch Berührung der respektiv entgegengesetzten Muskeln und Nerven, dann haben beide Trennungs-Kontrakzion.

9. (Fig. 11.) Sind zwei Präparate so zusammengestellt, dafs vom Nerven des einen zum Nerven des andern das leitende Verbindungsglied (z. B. ein feuchter Leiter), welches den Kreis schliefst, unterhalb der heterogenen Erreger sich befindet, und oberhalb der Muskeln, so folgt, wie in den gewöhnlichen Fällen, die Schliefsungs-Kontrakzion an dem Nerven,

der mit dem positiven Erreger belegt ist, gerade als wäre die leitende Verbindung von Muskel zu Muskel angebracht, nur ist alles etwas schwächer. Liegen hingegen die beiden Erreger an den Nerven unterhalb des Leiters, der von einem Nerven zum andern die Kette schliefst, dann ist alles umgekehrt, indem die stärkere Schliefsungs-Kontrakzion auf die Seite des negativ armirten Nerven fällt. (Fig. 12.)

Die Theorie, die es wagt, diese Mannigfaltigkeiten der Erscheinung vorläufig unter ein einziges Gesetz zu subsumiren, geht aus von dem Satze, dafs jeder Leiter zweiter Klasse, oder wenn man den Ausdruck nach einer nunmehr fast erwiesenen und vollständigen Analogie wählen will, jeder Leiter, wo das Wasser das bedingende der elektrischen Leitung ist, nie in den galvanischen Kreis tritt ohne seiner Längen-Dimension nach in zwei entgegengesetzte E Zustände zu treten. Die Strecke, die dem + Erreger zu nächst liegt, zeigt + E, die entgegengesetzte hat — E. Zwischen beiden liegt daher ein Indiffirenzpunkt mit o E. Dieses physische Gesetz hat meines Wissens, seitdem ich es wahrnahm, in den vielen Prüfungen, denen es unterworfen wurde, keine andere Ausnahme erlitten, als die, nicht hierher gehörige, chemisch bedingte der unipolaren Leiter. Auch ist die Benennung einer Bipolarität, als Karakter der Leiter zweiter Klasse, welche ich damals vorschlug, ziemlich allgemein genehmigt worden.

Parallel mit dieser physischen Bipolarität läuft mit gleicher Konstanz, und aller Wahrscheinlichkeit nach mit innigem wesentlichen Verkehr, der zweite Hauptzweig aller galvanischen Thätigkeiten, den man wegen der bündigen Kürze des Ausdrucks und des faktisch bewährten Zusammenhanges beider Klassen von Erscheinungen die chemische Bipolarität nennen kann, bis eine höhere Ansicht beide Haupterscheinungen in einen noch allgemeineren Ausdruck zusammenfafst. Die chemische Bipolarität besteht bekanntlich darin, dafs überall, wo das Wasser in den Kreis tritt, seine Konstitution als Hydrogen-Oxid aufgehoben wird: der chemisch frei werdende Sauerstoff wird nach dem positiven, der Wasserstoff nach dem negativen Hauptpunkt der beiden entgegengesetzten Zonen beschieden. Alle Substanzen folgen hierin der Analogie des sie durchdringenden oder sie nur berührenden Wassers, die kräftigsten Bande der Affinität werden gelöst, und es erscheinen an den E Polen, nicht blofs chemisch diskret, sondern auch physisch durch den Raum getrennt, die mit Sauerstoff verwandten Stoffe einerseits, und die Basen andrerseits. Nichts ist mit gröſserer faktischen Bestimmtheit gegeben als dieser Satz. Wie die chemisch-dirimirende Thätigkeit, mit einer nach verschiedenen Richtungen der physischen Bipolarität untergeordneten Bewegung, in die Erscheinung trete, ist nach dem jetzigen Zustande unseres Wissens noch nicht klar, kann sich aber wahrscheinlich nicht lange mehr der empirischen Forschung entziehen. Auf jeden Fall ergeht aus der Thatsache, daſs der feuchte Leiter einen höheren Oxygenations-Zustand annimmt in der Strecke, die dem + Erreger zunächst liegt; einen geringeren aber, oder einen entgegengesetzten, sogenannten basischen oder hydrogenen Zustand in seiner negativen Strecke.

Zwar scheint in den letzten Zeiten die Bedeutung des elektrisch-chemischen Gegensatzes sich dahin ändern zu wollen, daſs die wägbare Substanz, die wir Sauerstoff nennen, nicht ausschlieſslich das eine Glied der chemisch-elektrischen Disjunktion, im Gegensatz zu den Basen, ausmacht, sondern daſs auch noch andere Stoffe in gegebenen Fällen den Werth der Oxygen-Polarität zu äuſsern vermögen; und eben hierdurch wird der jetzige revolutionäre Zustand der Chemie bedingt. Man umgeht aber diese Schwierigkeit, wenn man vor der Hand die Bedeutung der Worte dieser noch bestehenden Ungewiſsheit anpaſst, und sich nur den allgemeinen Gegensatz denkt, wie er sich zwischen Base und nicht Base theils ergeben hat, theils noch mit einigen anderweitigen Modifikazionen ergeben möchte.

Der dritte und letzte Satz, von dem die Theorie ausgeht, sollte demnach in derselben schwankenden Allgemeinheit ausgedrückt werden; und statt zu sagen, wie früher: der Sauerstoff ist eine reizende Potenz für die irritablen Fasern, wird vielleicht in der Zukunft, wenn die Erfahrung es heischt, der Satz so zu fassen seyn: alles was im elektrisch-chemischen Gegensatz am positiven Pol hervortritt, wirkt erregend auf die Irritabilität. Vor der Hand scheint es jedoch rathsamer zu seyn, bei dem Typus der Wasserzersetzung stehen zu bleiben. Was ein Reiz sey, wissen wir nicht; noch weniger wissen wir, was an der Hand der Erfahrung aus dem Begriffe Oxygen-Polarität in der Elektro-Chemie werden wird; demungeachtet scheint doch aus vielen Analogien hervorzugehen, daſs man die Fähigkeit, den Reiz zu bedingen, wirklich demjenigen Stoffe beilegen müsse, den uns

die

die Wasserzersetzung als Gegensatz zu den Basen giebt, und von dem wir bereits viele anderweitige Beziehungen genau kennen. Es wird genügen, beiläufig nur an einige der Gründe zu erinnern, welche dieser Hypothese günstig sind. Die Nothwendigkeit der Respiration, welche, so unbekannt auch vieles Detail dieses Prozesses noch immer seyn mag, doch bestimmt ein Zuführen von Oxygen bedingt; der Umstand, daſs da, wo die Reizungen im Minimo seyn dürfen oder müssen, wie beim Fötus und den Winterschläfern, auch die oxidirende Funkzion im Minimo erscheint; und auch daſs das Blut unmittelbar vor seinem Eintritt in das encephalische Organ, als Wurzel der Sensibilität, den oxidirenden Prozeſs in seiner Fülle erfahren müsse; die Abstufungen der Reizbarkeit der Thierarten, welche parallel laufen mit den Abstufungen der Intensität des oxidirenden Respirationsprozesses; die pathologischen Erscheinungen der Asphyxie, die alle auf Mangel der nöthigen Reizung hindeuten, und viele andere Erscheinungen, welche mehr oder weniger dieselbe Analogie anerkennen, scheinen den Satz im allgemeinen zu begründen. Daſs aber der Sauerstoff das ausschlieſsend einzige Prinzip der Reizung sey, wie Girtanner ehedem behauptete: daſs alle krankhaften Zustände sich einer einzigen Dichotomie von Sauerstoffung und Wasserstoffung unterwerfen, wie Beddoes wollte, der nur zwei Formen anerkannte, Consumption, als den übermäſsigen Oxygenations-Zustand, und Scurvy, als die übermäſsige Wasserstoffung; — diese Einseitigkeiten sind ziemlich allgemein als Uebertreibungen von etwas Wahrem anerkannt, und hie und da mit andern eben so einseitigen Uebertreibungen längst vertauscht worden.

In so fern es nun erlaubt ist, jede Veränderung des Oxygenations-Zustandes eines Nerven als eine reizende Potenz anzusehen, erhellt, wie jeder Nerve, der in Kontinuität mit seinem Muskel in den geschlossenen elektrischen Kreis tritt, im allgemeinen einen erhöheten oder verminderten Reizungs-Zustand erfahren muſs: denn als Leiter der zweiten Klasse erleidet dieses System eine durch das Elektrometer nachzuweisende physische Bipolarität, und gleichzeitig mit dieser eben so bestimmt eine Störung seines chemischen Gleichgewichts, welche in relativer Anhäufung und Entziehung der reizenden Potenz besteht.

Wenden wir diese Ansicht auf die früher erzählten, mit unter sehr paradox und anomal klingenden Fälle, so finden wir, daſs sie sich ungezwungen unter die allgemeine Ansicht dieser Theorie subsumiren lassen.

1. Fall. (Fig. 1.) Die Reizung ist stärker, wenn der positive Erreger am Nerven, der negative am Muskel angelegt werden. Nerv und Muskel zusammen bilden hier den bipolar gewordenen Leiter. Da aber in der gegebenen Zusammenstellung der gröſste Theil des Nerven in die positive Zone fällt, wo Anhäufung des Sauerstoffs, ja nach Davy's unwidersprechlichen Thatsachen, mechanisches Zuströmen desselben das Vorwaltende ist, so wird beim Schlieſsen der Kette eine starke Reizung erfolgen. Für den entgegengesetzten Fall ist die Reizung beim Schlieſsen viel geringer, denn die groſse Mehrheit des Nerven liegt in der negativen Zone, von wo der Sauerstoff abflieſst; nur eine ganz geringe Strecke des Stammes, nebst den feinen Verästelungen im Muskel, treten in den Zustand erhöhter Oxygenation.

2. Fall. (Fig. 1.) Wenn der positive Erreger am Nerven, der negative am Muskel liegt, so ist die Trennungs-Kontrakzion viel schwächer als die Schlieſsungs-Kontrakzion; und wenn umgekehrt der negative Erreger am Nerven, der positive am Muskel liegt, ist die Trennungs-Kontrakzion viel stärker als die Schlieſsungs-Kontrakzion war.

Das Räthsel der Trennungs-Kontrakzionen löst sich in unserer Theorie auf in die bloſse Rückkehr des vorigen normalen chemischen Gleichgewichts, welche eine Reizung bedingt, weil diese Rückkehr nicht statt finden kann, ohne daſs das früher ab- oder Zugeflossene nunmehr umgekehrt nach entgegengesetzter Richtung zu- oder abflieſse. Man erlaube uns diesen bildlichen Ausdruck, der höchst wahrscheinlich Realität hat, wenn man nur statt des Flieſsens ein minder materielles Strahlen oder Hauchen, oder ein noch zarteres, wohl der Sprache, nicht aber der Natur abgehendes Durchwandern eines Raumes sich denkt. War bei positiver Armirung des Nerven durch die Schlieſsung eine urplötzliche Kondensation des reizenden Stoffs in die groſse Mehrheit des Nervenstamms die Ursache einer starken und raschen Schlieſsungs-Kontrakzion geworden, so wird bei der Trennung die Rückkehr des Reizenden in die viel kürzere Strecke des Nerven, welche negativ geworden war und einen Mangel erlitten hatte, für diesen Theil des Nerven eine Reizung bedungen. Es erhellt aber, daſs diese sekundäre Richtung, durch Rückkehr zum Gleichgewicht, in diesem

Falle viel geringer an Intensität seyn mufs, als die oxydirende Störung, welche die grofse Mehrheit des Nerven betraf.

War hingegen durch Anlegung des negativen Erregers an den Nerven, dieser, seiner fast durchgängigen Länge nach, in den Zustand der Sauerstoffentziehung versetzt, so wird bei der Trennung die Rückkehr des reizenden Agens in diese verhältnifsmäfsig viel gröfsere Strecke auch eine viel stärkere Reizung bedingen, als die war, welche früher bei der Schliefsung einen Oxygen-Zustand bedingte, für die nur kurze Strecke, welche unmittelbar am und im positiv gewordenen Muskel ebenfalls positiv geworden war.

3. Fall. Dafs, im Durchschnitt genommen, die Trennungs-Kontrakzion immer relativ schwächer sey, als die korrespondirende Schliefsungs-Kontrakzion, folgt daraus, dafs die Schliefsungs-Kontrakzion durch Einwirkung einer mächtigen äufseren Kraft urplötzlich bedingt wird, während die Wiederherstellung des chemischen Gleichgewichts nur aus den normalen Verwandschaften der Stoffe unter sich und mit der Substanz des Nerven erfolgt. Wenn nun aber der ganze chemisch-physiologische Reizversuch darauf beruht, dafs die entmischende Thätigkeit der Elektrizität ein ausgezeichnetes Uebergewicht hat, über die Affinitäten der Zusammensetzung, wie sie durch das Leben bedingt werden, so wird auch die Zersetzung stets kräftiger und plötzlicher eintreten müssen, als dieses nachherige sich Wiederergreifen der Stoffe durch blofse chemische oder vitale Affinitäten.

Wie bestimmt aber dieser Gegensatz der Schliefsungs- und Trennungs-Kontrakzionen sey, ist bekannt, da nach diesem wahrgenommenen Unterschiede in der Wirkungsart der Erreger, deren Stelle in der Spannungsreihe noch unbekannt ist, ihr positiver oder negativer Werth gegen einander bestimmt werden kann, und zwar fast mit derselben Sicherheit, als durch Anwendung der kondensirenden Electrometer.

4. Fall. (Fig. 2 und 3.) Es sey der Nerv mit dem positiven, der Muskel mit dem negativen Erreger belegt, so ist die

Reizung **stärker**, wenn vom Muskel- zum Nerven-Erreger, als wenn vom Nerven-Erreger zum Muskel geschlossen wird.

(Fig. 2.) Im ersten Falle tritt die chemische Affinität und das Einströmen des überschüssigen reizenden Agens urplötzlich an den Nerven in dem untheilbaren Moment der Schliefsung; im zweiten hingegen ist schon durch die Berührung der heterogenen Erreger unter sich, ihr elektrisches Gleichgewicht gehoben, und eine korrespondirende anfangende Störung des chemisch normalen Zustandes des Nerven eingeleitet, ehe noch die Kette geschlossen wird. Diese ist zwar in den meisten Fällen nicht stark genug, um eine Kontrakzion zu bedingen; offenbar aber verringert sich die Wirkung, indem sie dieselbe in zwei Momenten, und nicht in einem untheilbaren giebt. Den Beweis zu dieser Ansicht geben die unipolaren Kontrakzionen, die an der Säule statt finden; aber auch bei der einfachen Kette finden dergleichen statt, in den sehr seltenen Fällen höchst erregter Reizbarkeit. So sah Humboldt eine Kontrakzion ohne Schliefsung der Kette, wenn der Nerv am Zink lag, und das Zink mit Silber berührt ward. Das positiv gewordene Zink stört also schon den elektrischen und chemischen Zustand des Nerven durch Entlockung von Oxygen an der berührenden Stelle des Nerven; und wenn gleich in den gewöhnlichen Fällen keine Reizung wahrgenommen wird, so ist doch offenbar der Prozefs in allen Fällen dadurch eingeleitet, und der Hauptkarakter der Schliefsung der Kette, das heifst, das urplötzliche der Wirkung, bedeutend vermindert.

5. Fall. (Fig. 4 und 5.) **Während die Kette geschlossen ist, entstehen neue Kontrakzionen, wenn der Nerv so gegen sich selbst zurückgebogen wird, dafs er sich in neuen Punkten seiner Strecke berührt.**

Die zwei in der Strecke des Nerven genommenen Punkte, die nun in Berührung kommen, waren früher durch Schliefsung der Kette in zwei verschiedene elektrische Zustände versetzt worden, als Theile eines bipolaren Leiters; sie bedingen daher eine Excitation, ähnlich der zweier elektrisch-heterogenen; oder nach einem andern fast gleich geltenden Ausdruck kann man sagen, dafs der Punkt 3 (Fig. 5.), welcher früher, wegen gröſserer Entfernung von der Berührung mit dem Erreger, einen geringeren Grad von Oxygenation erhalten hatte, nunmehr einen gröſseren erhält, wenn er durch Bildung der Schlinge dem Berührungspunkte mit dem Erreger näher tritt, und folglich die chemische Wirkung eine korrespondirende Zunahme von Intensität erhalten hat. Man sieht ein, daſs dieses eintreffen muſs, welches auch die Vertheilung der E längs dem Nerven seyn mag, da es nicht zwei Punkte an ihm giebt, die in demselben Zustande sowohl der physischen als chemischen Bipolarität sich befinden. Alles, was nach einer und derselben Seite des Nullpunkts liegt, hat unter sich verschiedene Quantitäten derselben Qualität; alles, was relativ diesseits und jenseits desselben liegt, hat relativ verschiedene Qualität, und jeder, sowohl diesseitige als jenseitige Punkt differirt vom Nullpunkt selbst. Es kann daher ein so elektrisch-chemisch differenzirter Nerv sich nie in zwei verschiedenen Punkten seiner Länge berühren, ohne seinen elektrisch-chemischen Zustand zu ändern, das heiſst: ohne eine Kontrakzion zu bedingen.

6. Fall. (Fig. 6.) S i n d z w e i P r ä p a r a t e s o v o r g e r i c h t e t, d a ſ s d e r N e r v d e s e i n e n a m p o s i t i v e n E r r e g e r, d e r N e r v d e s a n d e r n a m n e g a t i v e n l i e g e, d i e M u s k e l n h i n g e g e n i n k o n t i n u i r l i c h e r L e i t u n g d i e K e t t e s c h l i e ſ s e n, s o b r i n g t e i n p o s i t i v e r A b l e i t e r a n d e m p o s i t i v a r m i r t e n N e r v e n e i n e S c h l i e ſ s u n g s - K o n t r a k z i o n, e i n e n e g a t i v e A b l e i t u n g h i n g e g e n a n d e m n e g a t i v a r m i r t e n e i n e T r e n n u n g s - K o n t r a k z i o n.

Der Nerv a b ist $+ E =$ oxygenirt, aber seiner Länge nach in verschiedenen Graden; am stärksten im Berührungspunkt mit dem positiven Erreger, und so abnehmend gegen den Muskel zu. Die Ableitung durch den vollkommenen, aber mit dem Erreger homogenen Leiter, bringt den erhöhten oxygenirten Reizungszustand tiefer an einen vorher minder differenten Punkt, daher eine neue Excitation.

An der negativen Seite gilt dasselbe, nur ist die Wirkung entoxydirend, das heiſst: in unserer Hypothese d e p r i m i r e n d; daraus folgt auch an dem Nerven c d die Excitation nur, wenn der Nerv aus diesem deprimirten Zustande wieder in einen höheren Reizungszustand tritt, im Moment der Rückkehr des Oxygens nach der Trennung, also Trennungs-Kontrakzion.

7. Fall. (Fig. 7 und 8.) Sind zwei Präparate so vorgerichtet, daſs die Erreger an den Nerven liegen, die Muskeln hingegen durch ihre kontinuirliche Berührung die Kette schlieſsen, dann fällt die Schlieſsungs-Kontrakzion auf den Schenkel, dessen Nerv positiv armirt ist, und die Trennungs-Kontrakzion auf den des negativ armirten Nerven. Ist hingegen die Zusammenstellung so, daſs die Muskeln unmittelbar von den Erregern berührt werden, die Nerven hingegen die Ketten nach unten schlieſsen, dann ist alles umgekehrt, und die Schlieſsungs-Kontrakzion fällt auf den negativ armirten Muskel.

(Fig. 7.) Es ist Schlieſsungs-Kontrakzion am Zink, weil die Schlieſsung in dem positiv gewordenen Nerven a b eine Anhäufung des reizend wirkenden Sauerstoffs bedingt. (Fig. 8.) Liegen hingegen die Muskeln an den Erregern, so fällt die gröſste Strecke von a b gegen den Nullpunkt; der Effekt der Schlieſsung ist also, daſs der Nerv einen Antheil seines Sauerstoffs abgiebt, an seinen Muskel, der am Punkt der gröſsten Oxygen-Anhäufung liegt. Bei Trennung der Kette flieſst dieses abgegebene wieder in den Nerven zurück, und bedingt daher die Trennungs-Kontrakzion. Eben so tritt bei der Schlieſsung c d (Fig. 8.) in einen höheren Oxydations-Zustand gegen seinem Muskel, erhält also die Schlieſsungs-Kontrakzion; die Trennung der Kette hat hingegen bloſs die Wiederherstellung des Gleichgewichts durch vitale Kräfte zur Folge.

8. Fall. (Fig. 9 und 10.) Wenn von zwei Präparaten der Nerv des einen positiv, der Muskel des andern negativ armirt sind; und die Kette wird geschlossen durch die Berührung des respektiv entgegengesetzten Muskels und Nerven; dann erhalten beide Muskeln Schlieſsungs-Kontrakzion. Ist hingegen die Zusammenstellung so, daſs der Muskel des einen positiv, der Nerv des andern negativ armirt ist, und die Schlieſsung der Kette geschieht ebenfalls durch Berührung der respektiv entgegengesetzten Muskeln und Nerven, dann haben beide Trennungs-Kontrakzion.

Dieser Fall ist eine sehr kräftige Bestätigung des so eben gesagten, um so mehr, da der Fall an und für sich sehr paradox ist; und sich in der vorgetragenen Theorie sehr ungezwungen erklärt, ohne dafs man so leicht einen andern Erklärungsgrund auffinden könnte.

(Fig. 9.) Dafs in dem ersten Fall der Nerv a b bei der Schliefsung gereizt werden müsse, ist klar wegen der Anhäufung des Oxygens, dessen Maximum im Berührungspunkte des Nerven mit dem positiven Erreger ist. Der Nerv d c hingegen, dessen Muskel am negativen Erreger liegt, und im Maximum entoxygenirt wird, während der Nerv selbst weniger entoxydirt bleibt, und an seinem Endpunkte, der mit dem Nullpunkt fast zusammenfällt, auch fast in seinem natürlichen Zustande beharrt, und also gegen seinen negativ gewordenen Muskel in einen relativ viel höheren Oxydations-Zustand tritt, mufs auch die Erscheinungen einer relativ höheren Oxydirung geben, das ist Schliefsungs-Kontrakzion.

In der umgekehrten Zusammenstellung treten an beiden Individuen Trennungs-Kontrakzionen ein, weil in beiden alsdann Reizung statt findet; in a b wegen des zurückkehrenden Oxygens aus dem positiv gewesenen Muskel, in den theils minder positiv, theils different gewesenen Nerven; in c d wegen der Rückkehr des Oxygens in den im Maximo negativ gewesenen Nerven.

Ich könnte leicht mehrere Thatsachen anführen, die sich ebenfalls durch diese Theorie, und, so viel ich weifs, durch keine andere erklären lassen; ich begnüge mich den folgenden zu erwähnen, den Ritter hat, und der mir lange als ein *Casus difficilis* viel Bedenken machte. Die Thatsache fand ich übrigens in den meisten Wiederholungen bewährt.

9. Fall. (Fig. 11 und 12.) Sind zwei Präparate so zusammengestellt, dafs vom Nerven des einen zum Nerven des andern das leitende Verbindungsglied (z. B. ein feuchter Leiter), welches den Kreis schliefst, unterhalb der heterogenen Erreger sich befindet, und oberhalb der Muskeln, so folgt, wie in den gewöhnlichen Fällen, die Schliefsungs-Kontrakzion an dem

Nerven, der mit dem positiven Erreger belegt ist, gerade als wäre die leitende Verbindung von Muskel zu Muskel angebracht; nur ist alles etwas schwächer. Liegen hingegen die beiden Erreger an den Nerven unterhalb des Leiters, der von einem Nerven zum andern die Kette schliefst, dann ist alles umgekehrt, die stärkere Schliefsungs-Kontrakzion fällt auf die Seite des negativ armirten Nerven. (Fig. 12.)

In dem ersten Falle erfolgt alles wie in den ganz gewöhnlichen Fällen, gerade als wäre die leitende Verbindung von Muskel zu Muskel angebracht; nur ist alles etwas schwächer. Der Grund hiervon läfst sich dadurch einsehen, dafs die galvanische Reizung keine Isolation erfordert, und es ist beinahe derselbe Fall, als wenn beide Präparate auf einem feuchten Tische lägen, welcher die Schliefsung des Kreises bedingte.

Liegen hingegen die beiden Erreger an den Nerven unterhalb des Leiters, der von einer Nerven-Extremität zur andern den Kreis schliefst, dann ist alles umgekehrt, und die stärkere Schliefsungs-Kontrakzion fällt auf die Seite des negativ armirten Nerven. Um diese Inversion des Erfolgs zu begreifen, bedenke man, dafs das Maximum des erregten positiven und negativen (Oxygen und Hydrogen) ganz bestimmt in die Punkte a d fällt; dafs durch die Art der Schliefsung des Kreises nach oben zu, auch die physischen und chemischen Wirkungen nach oben zu in a b c d fallen, so dafs der o Punkt zwischen b und c fällt, und dafs folglich auf die Nervenstrecken a e und d f nach den Muskeln zu nicht unmittelbar gewirkt wird. Aber eine Wirkung kann und mufs statt finden. Das in a angehäufte und fixirte + E mufs ein korrespondirendes — E in der unterhalb von a liegenden Strecke des Nerven hervorbringen. Der am Zink liegende Nerv a e wird also gegen seinen Muskel negativ, das heifst: er tritt in einen gegen den normalen geringeren Oxygenations-Zustand, und giebt folglich Trennungs-Kontrakzion. Die Gegenwart der Erreger in den Punkten a d wirkt gewissermassen als eine trennende Unterbindung, zwischen den oberhalb und unterhalb liegenden Strecken; und wäre das nothwendige Spiel der elektrischen Atmosphären nicht, so würde gar keine Kontrakzion statt finden. Da aber diejenige, welche statt findet, nur durch das Hervorrufen der entgegengengesetzten Elektrizitäten bedingt wird, so ist auch einleuchtend, dafs der Effekt eine Umkehrung des gewöhnlichen Erfolgs darbieten mufs, das heifst: es mufs die Schliefsungs-Kontrakzion am negativen Erreger statt finden.

Ich schliefse diesen Aetiologischen Versuch mit der Bemerkung: dafs, wenn man das chemisch-physiologische Postulat nicht zugeben wollte, Oxygen, oder dasjenige überhaupt, was mit ihm gleichen elektrischen Werth hat, wirke reizend durch seine Anhäufung in den Nerven, und relativ deprimirend durch seine Entziehung, so bliebe deshalb die Theorie im wesentlichen unangetastet, nur müfste man alsdann den Satz zugeben, die positive E wirke an und für sich reizend, die negative hingegen nicht reizend, oder sogar relativ deprimirend; alsdann hätte man sich lediglich an die physische Bipolarität zu halten, welche faktisch erwiesen ist, mit Uebersehung der zwar ebenfalls faktisch erwiesenen Oxygen- und Hydrogen-Polarität, deren Einflufs auf Reizung man aber nicht zugeben würde. An Einfachheit würde dadurch allerdings gewonnen seyn; doch haben wir meines Erachtens zur Zeit noch wenig logischen Grund, den physiologisch-spezifischen Unterschied beider Elektrizitäten anzunehmen, blofs um diese Erscheinungen zu erklären, da hingegen viele anderweitige Analogien uns gebieten, den Sauerstoff unter die reizenden Potenzen aufzunehmen. So lange jedoch über Punkte dieser Wichtigkeit noch eine Willkührlichkeit der Annahme statt findet, ist wohl offenbar der Zeitpunkt noch nicht gekommen, an andere als blofs provisorische Anordnungen der elektrisch-physiologischen Thatsachen zu denken. Hierzu kommt noch vollends, dafs die Thatsachen selbst, die ich aufstellte, zwar als das Normale zu betrachten sind, weil sie in einer grofsen Mehrheit von Fällen im mittleren Durchschnitt so erscheinen. Die mannigfaltigen Ausnahmen, die jedoch häufig vorkommen, vorzüglich bei Trennungs- und Schliefsungs-Kontrakzionen, und die man auf einen, durch Alter der Subjekte, Jahreszeit, Begattungstrieb und andere Zufälligkeiten modificirten Grad der Rezeptivität, willkührlich genug zu beziehen pflegt, warnen uns, kein unbedingtes Zutrauen Theorien zu schenken, welche so weit entfernt sind, die Nothwendigkeit der Ausnahme mit derselben Klarheit darzustellen, wie die des Eintreffens der vermeintlichen Regel; aber eben dieses macht es dem Physiologen zur

Pflicht, die neu belebte Untersuchung von vorn an wieder aufzunehmen, um die von der Physik und Chemie im letzten Dezennium gewonnene Prämissen auch seinerseits zu einer besonnenen, ächt empirisch-wissenschaftlichen, von jeder Schwärmerei entfernten Forschung des Gegenstandes anzuwenden; aller Wahrscheinlichkeit nach wird dieser Bemühung der herrlichste Lohn nicht entgehen.

Uebersicht
der bisher bei den Wirbelthieren gefundenen Steine.

Von Herrn D. K. A. Rudolphi *).

Die vergleichende Anatomie hat in kurzer Zeit so bedeutende Fortschritte gemacht, als sich deren nur irgend eine Disciplin rühmen kann, und wenn man bedenkt, was sie noch zu Hallers Zeit war und was sie jetzt ist, so muſs man von Freude durchdrungen werden und der Physiologie Glück wünschen, daſs sie sich einer solchen Hülfe erfreuen konnte.

Wie es aber häufig der Fall ist, daſs, indem ein Fach mit groſser Liebe behandelt wird, andere, selbst nahe verwandte Fächer, vernachlässigt werden; wie man gewöhnlich sogar ein Fach nur auf eine Weise bearbeitet; so ging es auch hier. Nur sehr wenige fühlten zugleich das Bedürfniſs, die vergleichende Pathologie zu studiren, und doch lag dies so nahe, doch hätten die unendlich vielen Thiersektionen der letzten zwanzig bis dreiſsig Jahre so vielen Gewinn für sie bringen können und müssen; und bei einigem Nachdenken muſste jeder sie als das dringendste Bedürfniſs sowohl für die Physiologie als für die Pathologie erkennen.

Die wenigen allgemeinen Schriften, welche wir bisher über die vergleichende Pathologie erhalten haben, sind unbedeutende Bruchstücke mit einem mehr versprechenden Titel.

Das mehrste und auch das beste, das wir besitzen, sind einzelne Aufsätze und Bemerkungen, die aber in tausend Werken zerstreut vorkommen; theils in den Schriften der Thierärzte und Oekonomen, theils in den

*) Vorgelesen den 11ten November 1812.

Sammlungen der Aerzte und Naturforscher, theils in den Reisebeschreibungen älterer und neuerer Zeit.

Die Thierärzte kannten gewöhnlich den menschlichen Körper zu wenig, hatten überhaupt mehrentheils zu wenig allgemeine Bildung, gingen daher ihren empirischen Weg ruhig fort, und beschäftigten sich bloſs mit dem Pferde oder zugleich mit einigen andern Hausthieren. Die Thierarzneischulen haben in der Folge etwas mehr zu leisten angefangen, und ich nenne die Namen eines Abilgaard, Bojanus, Bourgelat, Brugnone, Chabert, Florman, la Fosse, Girard, Havemann, Huzard, Pessina, Sick, Tögl, Viborg, Wolstein, mit vieler Achtung, da wir ihnen so manche wichtige Aufschlüsse verdanken. Wir würden ihnen ohne Frage noch mehr zu verdanken haben, wenn sie nicht gröſstentheils zu isolirt gestanden hätten, und zugleich mit Arbeiten überhäuft gewesen wären. Ihnen, denen recht viele Muſse nothwendig war, ward oft gar keine gestattet, und sie konnten daher keine sehr umfassende Arbeit unternehmen.

Die Aerzte hatten selten Gelegenheit, den Körperbau und die Krankheiten der Thiere hinlänglich kennen zu lernen. Zwar verlangte der Staat von seinen polizeilichen Aerzten, die vorzugsweise Physici genannt werden, daſs sie bei vorkommenden Epidemieen Rath schaffen sollten, allein die Mittel gab er ihnen nicht, um die dazu nöthigen Kenntnisse zu erlangen. Nur wenige, wie ein Camper und Kausch, wuſsten die Schwierigkeit zu überwinden: im Ganzen haben die Aerzte noch wenig für die vergleichende Pathologie gethan, doch hat die für die Menschheit so wichtige Entdekkung der Kuhpocken zu so manchen interessanten Untersuchungen geführt, und Sacco's Werk über jene Krankheit verdient besonders eine ehrenvolle Erwähnung.

Bei den Naturforschern, so wie bei den Oeconomen, Jägern u. s. w. findet man gröſstentheils nur einzelne Bemerkungen, selten ausführlichere und genügende Darstellungen einer Krankheit; weil aber bei ihnen häufig von solchen Thieren die Rede ist, welche die Aerzte und Thierärzte nicht beachten, so sind ihre Beobachtungen von desto mehr Werth. Aus eben dem Grunde sind mir die gelegentlich eingestreuten Bemerkungen der Reisebeschreiber über Krankheiten ausländischer Thiere so wichtig, und ohne ein ausgebreitetes Studium der Reisebeschreibungen wird selbst die Geschichte der gewöhnlichen Seuchen unbefriedigend ausfallen.

Aus allem, was vorhanden ist, das Bessere mit Kritik zusammenzulesen, kann nur das Werk vieler Jahre seyn, und wird nur dem gelingen, der eigene Erfahrung in diesem Fach besitzt. Ist diese Arbeit aber wirklich gethan, so haben wir dadurch doch nur ein Fachwerk für die künftigen Untersuchungen gewonnen, eine unentbehrliche Vorarbeit für die vergleichende Pathologie, allein noch nicht diese selbst.

Wie bald könnten wir aber in derselben die gröfsten Fortschritte machen, wenn die Thierarzneischulen sämmtlich dazu mitwirken wollten!

Während die gewöhnlichen Schüler dieser Institute auf eine ihrer Bildung angemessene Weise beschäftigt und unterrichtet, auch zu ihrem Behuf die gewöhnlichen Krankenställe unterhalten werden, müfsten zugleich besondere Ställe für verschiedene Arten von Thieren zu Versuchen und Beobachtungen, zum Besten der Wissenschaft, eingerichtet werden. Hier könnten auch die weitergediehenen Schüler, von wissenschaftlichem Sinn (eine Pflanzschule für künftige Lehrer des Fachs), Belehrung und Arbeit finden, indem man ihnen einzelne Bemühungen zugleich übertrüge: die Beobachtungen und Versuche selbst aber müfsten von den Lehrern sorgfältig geleitet werden; und um alle Einseitigkeit zu vermeiden, könnten noch andere Aerzte und Naturforscher dazu mitwirken, wie dies auch in der Thierarzneischule zu K o p e n h a g e n geschehen ist, die sich stets sehr rühmlich ausgezeichnet hat.

Die Resultate und der ganze Gang der Untersuchungen müfsten jährlich öffentlich bekannt gemacht werden, um sie dadurch einer allgemeinen Prüfung zu unterwerfen.

Wie viel auf diesem Wege in kurzer Zeit geleistet werden müfste, bedarf keiner Erörterung. Bei den Thieren steht es uns frei, sie ihrer Krankheit ganz zu überlassen, um den ungestörten Gang derselben zu beobachten; sie aber auch in jeder Periode der Krankheit zu tödten, um in jeder ihre Wirkung und Fortschritte zu erforschen, so weit das anatomische Messer und die chemische Analyse führt; wir können alle beliebige Mittel an ihnen im gesunden und kranken Zustande versuchen, um ihre Wirkung auf den Organismus durch alle Theile desselben kennen zu lernen; wir können die Krankheiten einer Thierart, oder Gattung, oder Ordnung und Klasse, auf andere überzutragen suchen, um das Eigenthümliche einer Jeden in deren Infection überhaupt, oder in dem Gang derselben zu verfolgen, und so fort.

Möchten diese Wünsche bald in Erfüllung gehen, möchten die Thierarzneischulen für diesen edeln Zweck wetteifern, und namentlich auch die unsrige so ihren schönen Beruf erfüllen.

Bis dies geschieht, werde inzwischen, was bisher gethan ist, sorgfältig gesammelt, und auch hierzu wünsche ich die vereinigte Arbeit recht vieler. Ich hoffe meines Theils auch mehrere Beiträge dazu liefern zu können. Für diesmal werde ich

eine Uebersicht der bisher bei den Wirbelthieren gefundenen Steine

liefern. So unfruchtbar dieser Gegenstand auch auf den ersten Blick scheinen mag, so viele interessante Seiten bietet er dennoch bei näherer Untersuchung dar, und die Zeit gereut mich keineswegs, die ich darauf verwandt habe. Es ist leicht möglich, daſs mir hier und da noch einiges entschlüpft ist, doch hoffe ich, daſs es nicht von Bedeutung seyn wird, da ich seit langer Zeit dafür gesammelt habe.

Es scheint mir am passendsten, zuerst die Steine nach den einzelnen Theilen des Thierkörpers, worin sie gefunden sind, durchzugehen, und hierauf eine Uebersicht der Thiere, bei welchen bis jetzt Steine gefunden sind, folgen zu lassen, und sie mit allgemeinen Bemerkungen zu begleiten. Ich hoffe hierbei den Wiederholungen am wenigsten ausgesetzt zu seyn.

Erster Abschnitt.

Aufzählung der Steine nach den Orten, wo sie vorkommen.

1) Hirnsteine.

Aeltere Schriftsteller sprechen häufig von Steinen, die im Kopf, und namentlich auch im Gehirn, gefunden worden wären; allein da man ehemals auf diese Thierconcretionen einen so hohen Werth setzte, und sie aus einer Hand in die andere gingen, so suchte jeder natürlich so viel damit zu gewinnen als möglich, und so wie man ihnen alle denkbaren Heilkräfte zuschrieb, so machte man ihren Ursprung ebenfalls wunderbarer, und leitete sie aus dem Kopf und Hirn her. Rumph [1]) führt auf diese Weise von mancherlei Thieren, als vom Tiger, vom wilden Schwein u. s. w., Steine aus dem Kopf an. Vorzüglich glaubte man ehemals, daſs die Affenbezoare, welche ganz besonders geschätzt wurden, im Kopf der Affen gefunden würden; allein Bontius [2]) sagte schon, daſs sie Magensteine wären, und Kämpfer [3]) hat dies völlig erwiesen. Der berüchtigte Schlangenstein aber, von dem Redi [4]) zeigte, daſs er keineswegs die Kraft besitze, die man ehemals so sehr pries, ist weder aus dem Kopf, noch aus irgend einem andern Theil der Schlangen entnommen, sondern der Pater Torrubia [5]) hat als Augenzeuge ausführlich beschrieben, wie er von den Mönchen auf den philippinischen Inseln verfertigt wird; späterhin hat auch Barrow [6]) angegeben, wie er aus jedem beliebigen festen Knochen gemacht werden könne.

Das versteinerte Gehirn, welches man öfters bei Ochsen gefunden haben will, verdient auch den Namen keineswegs, und ist nichts als ein Knochenauswuchs des Hirnschädels. Merkwürdig ist es allerdings, daſs man so viele Beispiele davon hat [7]), allein da diese Thiere mit den Hörnern ziehen, so wird bei der Befestigung des Stricks um dieselben, bei der Anlegung des Stirnbretts u. s. w., gewiſs leicht der Schädel verletzt werden;

1) D'Amboinsche Rariteitkamer. Ed. 2. Amsterdam 1741. p. 294. seq.

2) *Hist. Nat. et Medicae Indiae Orientalis, a Pisone editae p.* 48.

3) *Amoenitat. Exoticar. fasc. II. p.* 404. Seba (*Thesauri T. II. p.* 131.) sagt auch schon, daſs man sich wenig auf die Angaben von dem Fundort solcher Steine verlassen könne, verläſst sich aber doch selbst zu viel darauf.

4) *Esperienze intorno a diverse cose naturali e particolarmente a quelle, che ci son portate dall' Indie. Florenz* 1686. 4 *p.* 3. *seq.*

5) Vorbereitung zur Naturgeschichte von Spanien. A. d. Span. Halle 1773. 4. S. 45.

6) Reisen in das Innere von Südafrika. A. d. Engl. Leipzig 1801. 8. S. 175.

7) *a. Thomae Bartholini Historiarum anatomicarum Centuriae VI. hist. XCI. Cerebrum bovis lapidescens.* Das Thier war krank. — *b.* Duverney d. J. in den *Mém. de l'Acad. des sciences à Paris* 1803. Das Thier soll gesund und munter gewesen seyn, wogegen Vallisneri, der die Abbildungen von Duverney wieder mittheilt, gegründete Einwürfe macht. — *c. Considerazioni ed Esperienze intorno al creduto Cervello di bue impietrito. Opere di Ant. Vallisneri. T.* 1. *Venezia* 1733. *fol. p.* 93—112, mit vielen Abbildungen. Die beste Abhandlung über diesen Gegenstand, und von den nachstehenden Schriftstellern keineswegs benutzt. — *d. An enquiry how far the vital and animal actions of the more perfect animals can be accounted for independent of the brain. By Thomas Simson. Edinb.* 1752. 8. *p.* 259—270. *An account of the ossified brain of a cow*, mit Kupf. Das Thier war krank. — *e.* Fr. Lebegott Pitschel's anatomische und chirurgische Anmerkungen. Dresd. 1784. 8. Von einem versteinerten Ochsengehirn, S. 58—65. mit Abbild. Das Thier soll gesund gewesen seyn.

auch stoſsen sich diese Thiere sehr oft mit den Köpfen, so daſs die Gelegenheitsursache zu Knochenauswüchsen und Winddorn häufig vorkommt. Aus ähnlichen Ursachen findet man oft Knochenauswüchse an den Kiefern der Pferde. Ich habe aber auch ähnliche Auswüchse an andern Knochen des Rindes bemerkt, und einen sehr groſsen, jetzt im Museum befindlichen, geschenkt bekommen, der die Beckenknochen einnimmt.

Der Stein hingegen, von welchem Menzel [8]) angiebt, daſs er im Gehirn eines Damhirsches gefunden worden, scheint wirklich hierher zu gehören. Er war ungefähr von der Gestalt, Länge und Dicke einer Saubohne, weiſs und gypsartig.

Sonderbar ist es, daſs Sömmerring [9]) auch in der Zirbeldrüse eines Damhirsches den Hirnsand antraf, welchen sonst Niemand bei irgend einem Thier gefunden hat, da er hingegen bei dem Menschen so häufig vorkommt, daſs man ihn sogar als zum regelmäſsigen Bau des Gehirns gehörig betrachtet hat.

So wie Wenzel [10]) nie den Hirnsand bei Kindern vor dem siebenten Jahr gefunden hat, so habe ich ihn auch nur bei Personen gefunden, die jenes Alter überstiegen. Im Jünglingsalter ist auch gewöhnlich wenig Hirnsand vorhanden; er fehlt ferner, nach meinen Beobachtungen, auch späterhin nicht so selten, als neuere Schriftsteller angeben; dazu kommt, daſs durchaus nichts bestimmtes über seine Form und Menge anzugeben ist, so wie er auch, obgleich minder häufig, auſserhalb der Zirbeldrüse (besonders vor ihr) erscheint. Ich halte ihn daher für etwas krankhaftes, das aber eine gewöhnliche Folge der Thätigkeit dieses Theils in einem gewissen Alter ist, wie Fasern steif werden, wie sich Weinstein an die Zähne setzt, wie die Lunge mit dem Rippenfell verwächst, und so ferner.

Auf eine eigene Secretion in der Zirbeldrüse scheint der in ihr oder

8) *Misc. Ac. Nat. Curios. Dec. 2. Ann. I. 1682. p. 76. fig. 16.*

9) S. Th. Sömmerring vom Hirn und Rückenmark. Mainz 1792. 8. S. 94. „Im Dammhirsch fand ich den Zirbelkörper hohl, und einmal, so viel sich nach dem Ansehen urtheilen laſst, den menschlichen völlig gleiche Steinchen." Sonderbar ist es, daſs Sömmerring in seinen spätern Schriften diese Beobachtung ganz übergeht. — Meckel (Vorlesungen über die vergleichende Anatomie von Cuvier, 2. Th. S. 164. dritte Anm.) sagt, daſs Sömmerring bei einigen Wiederkäuern Sand in der Zirbel gefunden habe; das ist aber falsch.

10) *De penitiori structura cerebri hominis et brutorum. Tubing. 1812. fol. p. 155.*

oder um sie vorkommende Sand kaum hinzudeuten, da bei Thieren, deren Zirbeldrüse zum Theil sehr groſs ist, kein Sand vorkommt.

Vielleicht aber hängt dies mit der geringern Menge Blut zusammen, die zu den Thiergehirnen geht, und so wie nach meinen Beobachtungen bei den Menschen die (aus phosphorsaurem Kalk bestehenden) Verknöcherungen der Hirnpulsadern, besonders der Carotis, wo sie aus ihrem Kanal emporsteigt, äuſserst haufig vorkommen [11]), so findet sich auch dieselbe phosphorsaure Kalkerde als Hirnsand in der Zirbeldrüse und um dieselbe, da hier ein groſser Zusammenfluſs von Gefäſsen ist. Bei Thieren kenne ich auch nicht Verknöcherungen in den Hirnpulsadern, obgleich ich sie in der Aorta bei ihnen häufig gefunden habe. Es wäre indessen interessant, Thiere allerlei Art möglichst alt werden zu lassen, um ihren Zustand alsdann genauer, als bisher geschehen, anatomisch zu untersuchen. Vielleicht daſs sich dann solche Concretionen finden lieſsen.

Im Adergeflecht der Gehirnhölen (*Plexus choroideus*) kommen bei dem Menschen hin und wieder Concretionen vor; ich habe eine solche von der Gröſse einer kleinen Erbse und weiſs von Farbe auf dem hiesigen anatomischen Theater gefunden [12]), und hebe das Präparat im Museum auf; dies besitzt auch schon ein ähnliches zehn Gran schweres Concrement aus dem Aderngeflecht eines blödsinnigen Mädchens von neun Jahren [13]); und Sömmerring sagt in seinen Anmerkungen zu Baillie [14]), daſs er erdige Concremente an eben dem Ort gefunden habe.

Solche kommen auch bei dem Pferde vor. Ich sah in der groſsen Sammlung der Thierarzneischule zu Alfort, erstlich zwei rundliche weiſsliche mit vielen Spitzen besetzte Steinchen, von etwa drei Linien im Durchmesser, aus dem Adergeflecht eines Pferdes, und zweitens aus einem rotzigen Pferde von eben der Stelle zwei längliche, fünf bis sechs Linien lange, zwei bis drei Linien breite, höckerige Steinchen, wovon der eine von Farbe bläulich, der andere graulich war.

11) Von dem Einfluſs dieser oft schon früh vorkommenden Verknöcherungen, der gewiſs nicht gering ist, werde ich anderweitig handeln.

12) Ich kann unter meinen Papieren die dazu gehörigen Bemerkungen nicht finden; so viel ich mich aus dem Gedächtniſs erinnere, war es von einer epileptischen Person.

13) *Museum Anatomicum Berolinense ed. Joh. Gottl. Walter. Berol.* 1805. 4. *n.* 2153. *p.* 420.

14) M. Baillie Anatomie des krankhaften Baues. Berlin 1794. 8. S. 268. n. XII.

Der Stein, welchen Harder von einem Freunde bekommen hatte, und der im Gehirn eines Huhns gefunden seyn sollte, scheint mir zweifelhaft. Der Ort wird gar nicht weiter angegeben, und vom Stein selbst wird nur gesagt, daſs er groſs (*haud parvus*), von der Gestalt und Härte eines Kiesels gewesen sey [15]). Das letztere paſst wenigstens nicht auf ein gewöhnliches Concrement aus dem Gehirn.

II. Concremente im Auge.

Von den Verknöcherungen, dergleichen im Auge allerdings, namentlich in der *Choroidea* vorkommen [16]), unterscheide ich die Knochenconcremente, welche sich in ausgelaufenen und zusammengefallenen Augen zeigen, und welche die Schriftsteller (z. B. Morgagni, Haller und die meisten neueren Pathologen) fälschlich bald für die verknöcherte Linse, bald für die verknöcherte Netzhaut gehalten haben; sie sind offenbar, wie Zinn [17]) allein richtig angiebt, keine Verknöcherungen dieses oder jenes Theils, sondern nachdem das Auge eine groſse Zerstörung erlitten hat, und zusammengefallen ist, so wird die Knochenmaterie daselbst von den Gefäſsen der Choroidea abgesetzt.

Ich habe zweimal im menschlichen Auge [18]) solche Concremente gefunden; das eine mal sah es beinahe wie ein Krebsstein aus, war vorn geschlossen und rundlich, hinten offen; das andre mal war es konisch, hinten sehr eng, vorn weit offen; auch die Schriftsteller sahen es sehr verschieden gestaltet, welches meine Meinung noch mehr bekräftigt.

In Alfort war ein Präparat von einem Pferde befindlich, wo die Linsenkapsel kleine Verknöcherungen zeigte, bis jetzt das einzige Beispiel, das ich von einem Thier kenne [19]).

III. Concremente des Gehörgangs.

Bei dem Menschen kommen bekanntlich häufig Verhärtungen des Ohrenschmalzes, und selbst zuweilen erdige Concremente im Gehörgang vor;

15) *Paeonis et Pythagorae Exercitationes anatomicae. Basil.* 1682. 8. *p.* 146.

16) *Museum anatomicum Berol. p.* 82. *n.* 649, 652, vergl. auch n. 648 und 650.

17) Hamburger Magazin XIX B. S. 443.

18) Einmal auf dem anat. Theater in Greifswald, das zweitemal auf dem hiesigen; das letztere Präparat ist auf dem anat. Museum befindlich.

19) Meine Reisebemerkungen Th. 2. S. 59. n. 3. b.

bei Thieren kenne ich nichts ähnliches. Auf der hiesigen Thierarzneischule wird zwar ein Präparat aufgehoben, das als ein Concrement des Gehörgangs dahin geliefert ist. Es ist Knochenmasse, jedoch von elfenbeinartiger Härte, und ich halte es für eine bloſse Exostose.

IV. Speichelsteine, Weinstein.

Speichelsteine, dergleichen bei den Menschen eben nicht selten sind, habe ich vom Pferde und Rinde, und zwar in der Thierarzneischule zu Alfort, gesehen.

Erstlich aus dem Speichelgang eines Pferdes, von dem nichts weiter angegeben war, zwei runde und ziemlich glatte Steinchen, wovon der eine graulich und etwas kleiner, der andere glänzend weiſs und etwas gröſser als eine Erbse war. Zweitens aus dem Speichelgang eines dämpfigen Pferdes mehrere dadurch entstandene Steinchen, daſs Haferkörner in den Stensonschen Kanal gerathen waren; ein Paar Körner waren nur mit einer erdigen Rinde überzogen, andre in einer gröſseren Menge erdiger Materie eingehüllt. Eine solche Entstehungsart, daſs nämlich fremde Körper in die Speichelgänge kommen und incrustirt werden, ist, so viel ich weiſs, bei dem Menschen nicht beobachtet, sondern sie bilden sich bei ihm bloſs aus dem Ueberschuſs der phosphorsauren Kalkerde des Speichels.

Aus dem Rinde waren in Alfort ein Paar Speichelsteine, die zusammen gehörten; der eine war fast anderthalb Zoll lang, und beinahe einen halben dick; der andere fast eben so, allein in zwei Schenkel gekrümmt.

Der Weinstein kommt bei einigen Hausthieren ebenfalls vor. Am häufigsten und stärksten habe ich ihn bei Hunden gesehen, und sogar einigemale wie eine weiſsgraue, dicke, erdige Masse, gerade wie er bei dem Menschen erscheint, wenn diese Ablagerung sehr stark ist.

Bei dem Pferde, bei dem Rinde und dem Schafe kommt er häufig, aber nur als ein dünner Ueberzug von bräunlicher oder schwärzlicher Farbe vor: beides ist dem Menschen auch nichts ungewöhnliches. Bei den wiederkäuenden Thieren hat er aber auch zuweilen einen metallischen Glanz, so daſs die Zähne wie bronzirt aussehen. Wodurch dieses bewirkt wird, ist uns unbekannt; allein auch die Harnsteine einiger Hausthiere haben zuweilen einen goldfarbnen Ueberzug, wovon weiterhin; und bei Fischen erscheinen nicht bloſs Theile im Auge von einer Silberfarbe, sondern auch in der Schwimmblase und in andern Theilen derselben bemerkt man zuweilen einen Silberglanz; den Perlmutterglanz, welchen Fische in manchen Theilen zeigen, habe ich auch einmal an der Haut einer Geschwulst im menschlichen Gehirn [20]) beobachtet.

V. Concremente der Lungen.

Peter Camper [21]) sagt: man finde bisweilen in den Lungen der Pferde tausend kleine Steinchen, woran sie endlich, wie die Menschen, sterben. Ich habe bis jetzt nie in den Lungen der Pferde dergleichen gefunden, und es wäre interessant, die Bestandtheile derselben zu kennen. Man glaubte sonst häufig, die Concremente in den Lungen wären durch das Einathmen von Sand und dergleichen herbeigeführt, woran wohl selten zu denken ist.

VI. Concremente des Herzens.

Theodor von Marwitz [22]) erzählt, daſs er in dem Herzen eines Rehs, welches er auf der Jagd gefangen und ausgeweidet, einen Stein gefunden habe, von dem er eine rohe Abbildung ohne alle Beschreibung beifügt. Man möchte beinahe glauben, es sey nur eine Verknöcherung gewesen, wenigstens spricht die Abbildung dafür, nach welcher der angebliche Stein eine geringe Dicke gehabt zu haben scheint.

Der Fall, welchen Bartholin [23]) hat, scheint hingegen allerdings hierher zu gehören. Er spricht nämlich von einem, im Herzen eines Hirsches gefundenen, kugelförmigen, ziemlich groſsen und schweren Steine; wegen der Schwere vermuthet er, daſs eine Bleikugel darin stecke, womit der Hirsch in das Herz geschossen sey, und um welche sich die erdige Materie abgelagert habe. Schade, daſs Bartholin den Stein nicht durchgesägt hat.

So häufig die Verknöcherungen des Herzens, besonders an den Klappen der Aorta bei Thieren [24]), vorzüglich aber bei Menschen vorkommen,

20) *A. B. Hertel Diff. de cerebri et meningum tumoribus. Berol.* 1814. 8. *p.* 12.

21) A. G. Campers Abhandlung von den Krankheiten, die sowohl den Menschen als Thieren eigen sind. Lingen 1787. 8. S. 30.

22) *Misc. Ac. Nat. Curios. Dec. II. Ann. I. p.* 336. *obs.* 133.

23) *Hist. anatomicarum Centur. sextae hist.* 93. *p.* 364. Der Ort im Herzen, wo der Stein gefunden worden, ist nicht angegeben.

24) Es versteht sich, daſs ich hier nicht die Herzknochen beim Hirschgeschlecht, beim Rinde u. s. w. meine: denn diese gehören zum natürlichen Bau, so daſs sie auch schon beim jungen Thier als Knorpel vorgezeichnet sind.

so selten sind hingegen wirkliche Steine, und unser Museum besitzt auch nur einen Fall, wo ein Stein sich am Herzbeutel eines Menschen befindet [25]). Mir ist nie etwas der Art vorgekommen.

VII. Concremente im Magen.

Keine Concremente sind bei den Menschen seltner und bei den Säugethieren häufiger, als diese. Die Vergleichung zeigt aber bald, daſs nur solche Thiere damit beschwert sind, die entweder Vegetabilien genieſsen, von welchen leicht etwas im Magen längere Zeit zurückbleiben kann, oder die durch Lecken ihre oder fremde Haare in den Magen bringen, oder die andre unverdauliche Dinge verschlucken, welche bei ihnen zurückbleiben müssen, weil diese Thiere sich nicht brechen.

1) Die einfachste hieher gehörige Art von Concrementen ist die, wo fremde Körper, die in den Magen kommen, mit einer dünnen erdigen Rinde überzogen werden, und sonst ganz unverändert bleiben. Man könnte sie mit den folgenden zusammenbringen und als den Anfang derselben betrachten wollen: allein da sie nicht selten vorkommen, und die Concretionen überhaupt so gut erklären, so scheint es besser, sie besonders in das Auge zu fassen, und dies um so mehr, als es sich frägt, ob sie nicht für immer in dem nämlichen Zustande bleiben würden.

Einen der sonderbarsten Fälle der Art sah ich in Alfort, nämlich ein sehr groſses Stück eines Florschleiers, das ein Hengst niedergeschluckt hatte, und das ganz und gar mit einer zarten grauen erdigen Rinde incrustirt war. Aus dem Magen eines andern Pferdes ward ebendaselbst ein Nagel aufbewahrt, der auf die nämliche Weise überzogen war.

Noch merkwürdiger unstreitig war ein im Pansen einer Kuh gefundener, mit eben solcher Rinde incrustirter, groſser Salamander [26]). Der Fall beweiset besonders die geringe Verdauungskraft des ersten Magens bei den wiederkäuenden Thieren.

Bei den Vögeln, und zwar vorzüglich bei dem Strauſs und bei den hünerartigen Vögeln, findet man sehr oft fremde Körper im Magen, jedoch ohne mit einer solchen Rinde überzogen zu seyn, woran ohne Frage das

25) *Museum Anat. Berol. p. 87. n. 670.*

26) Auch in der herrlichen Sammlung der Thierarzneischule zu Alfort, von welcher ich im zweiten Theil meiner Reisebemerkungen S. 14—80 ausführlich gehandelt habe.

gröſsere Reiben und Abnützen, was dort statt findet, Schuld ist; denn man weiſs ja, daſs die härtesten Körper im Magen der körnerfressenden Vögel abgeschliffen und verkleinert werden: ein Ueberzug kann sich also nicht ansetzen, dazu gehört Ruhe.

Von Menschen sind oft in Anfällen von Wahnsinn groſse Körper verschluckt worden; diese bahnten sich gewöhnlich einen Weg aus dem Magen, und konnten dann jenen Ueberzug nicht bekommen, oder wenigstens nicht behalten. Derselbe Fall hatte in Alfort bei einer Kuh statt gefunden, die eine Scheere verschluckt hatte; diese hatte sich einen Weg durch den Magen gebahnt, und man zog sie endlich heraus, nachdem man die Rippe, welche sie umfaſste, absägte.

Wie in andern Fällen, wo dergleichen Körper länger im menschlichen Magen aufbewahrt gelegen hatten, ihre Oberfläche beschaffen war, ist nicht angegeben, da man über das Merkwürdige der Sache selbst die Nebenumstände übersah [27]).

2) Die zweite Classe von Concrementen ist die, wo in den Magen gebrachte fremde Körper durch die Bewegungen desselben zusammengeballt werden, und entweder so bleiben, oder mit einem erdigen Ueberzug versehen werden.

Haller sah bei diesen Concrementen zu sehr auf das Reiben des Magens, und behauptete daher, daſs die Magensteine immer rund wären, und glaubte, daſs der Magen auch bei den kleinsten Ballen der Art sich so sehr zusammenziehen müsse, um ihnen die Form zu geben [28]), wovon das Gegentheil in die Augen leuchtet. Am häufigsten ist freilich die runde Form, daher auch der Name *Pila*, Gemsenkugeln; allein sehr oft haben sie eine andere, z. B. längliche Gestalt, sind ganz flach, oder halbconvex u. s. w. Wie wenig auch das Reiben der Wände des Magens in Anschlag zu bringen ist, zeigen die jenen so äuſserst ähnlichen *Pilae marinae* oder Meerbälle, aus den Wurzelfasern der Zostera, womit ich den Strand von Marseille bedeckt sah, und die bald kugelrund, bald oval, bald flach und nur an den Rändern abgerundet waren; das zeigen auch die Kiesel von allen Formen, die

27) Auf der hiesigen königl. Kunstkammer ward sonst ein Knochen aufbewahrt, der jetzt in dem anatomischen Museum befindlich ist. Die dabei liegende Etiquette lautet folgendermaſsen:

28) *Elem. Physiol. T. VI. p. 264.*

durch die Fluthen geglättet werden; wie hier der Wellenschlag wirkt, so wirkt im Magen das Hin- und Hertreiben der darin enthaltenen Theile bei der wurmförmigen Bewegung; allein dies ist kein Formen, wie es sich Haller dachte.

Gewöhnlich sind diese Art von Concrementen aus vegetabilischen Fasern oder aus Thierhaaren zusammengeballt; allein ich sah sie auch aus andern Materien, und mit diesen, die die Sache in das hellste Licht setzen, fange ich an.

a) Ich sah drei aus Erde und Muscheln zusammengeballte Concremente in Alfort. Das erste aus dem grofsen Magen eines Rindes war eine Kugel von drei und einem halben Zoll im Durchmesser, und bestand aus Lehm und Sand, worin Muscheln (eine Patelle, viele Cardien) und Steinchen sichtbar waren. Das zweite eben der Art, aber etwas kleiner, nämlich von zwei und einem halben Zoll im Durchmesser, und mehr geglättet, so dafs die Patellen u. s. w. weniger hervorstanden; auch waren viele Löcher darin. Das dritte Concrement war aus dem Labmagen eines Rindes, und zeigte nur weniges von Muscheln. Man begreift leicht die Entstehungsart solcher Steine: die fremdartigen Dinge nämlich waren durch Schleim und andere Feuchtigkeiten des Magens zusammengekittet, und durch seine Bewegungen abgerundet worden.

b) Die zweite Abtheilung begreift die Haarbälle.

Diese sind wieder von doppelter Art, nämlich entweder aus vegetabilischen Fasern oder aus Haaren der Thiere zusammengesetzt.

Man findet bei Velsch [29]) eine sehr weitläuftige und gelehrte Untersuchung, welcherlei Art vegetabilischer Fasern diese Bälle oder Gemsenkugeln bilden; allein dies mufs natürlich an jedem verschiedenen Ort verschieden seyn, und die mehrsten harten und unverdaulichen Fasern müssen sich dazu eignen. Auf dieselbe Weise verhält es sich auch mit den eigentlichen Haarbällen: sie können bei einem Thier aus dessen eignen Haaren bestehen, die es niedergeschluckt hat; sie können aber auch aus Haaren anderer Thiere zusammengeballt seyn. So erzählt z. B. Pallas [30]), dafs die Gemsenkugeln der kirgisischen und kalmuckischen Schafe, welche denselben

29) *Ge. Hieron. Velschii Diss. de Aegagropilis. Aug. Vind.* 1660. 4. *Diss. secunda de Aegagropilis. ib.* 1668. 4. Der Zeit gemäfs ist diesen Schriften gar viel überflüssiges und nicht hierher gehöriges eingewebt.

30) *Spicilegia Zoologica. Fascic. XI. p.* 77. Sehr interessante Nachrichten.

vor allen ausgesetzt sind, bald aus den trockensten Fasern der Stengel, bald aus der eignen Wolle, bald aber, und zwar am häufigsten, aus der zarten Wolle der Kameele gebildet sind: denn die Schafe lecken die mit einem salzigen Schweiſs bedeckten Kameele eben dieser Ursache wegen sehr gerne.

Man kann die Haarbälle oder Gemsenkugeln auch noch in andrer Hinsicht unterscheiden, je nachdem sie nämlich mit einer Rinde versehen sind oder nicht. Die aus Wurzel- oder Stengelfasern gebildeten sind in der gröſsten Regel ohne dieselbe, die aus Haaren bestehenden aber haben häufig eine bald hellere, bald dunklere, häufig polirte, und so viel ich immer gesehen habe, sehr dünne Rinde. Diese ist aus thierischen Stoffen gebildet, und offenbar dem Weinstein analog, der sich an die Zähne dieser Thiere setzt.

Ihre Gröſse ist sehr verschieden, und man hat sie so klein wie eine Nuſs, und so groſs wie eine Faust und darüber. Von ihrer Form habe ich schon gesprochen.

Die Haarbälle kommen vorzüglich in wiederkäuenden Thieren vor. Ihr deutscher Name Gemsenkugeln zeigt schon, daſs man sie bei den Gemsen früh und oft beobachtet hat; allein sie sind auch sehr häufig bei dem Rind und Schaf; man kennt sie ferner vom Büffel, von der Antilope Saiga, vom Hirsch, vom Damhirsch. Auch bei anderen, von Vegetabilien lebenden, obgleich nicht wiederkäuenden Thieren, hat man sie gefunden; z. B. bei dem Beutelthier, dem Stachelschwein, dem Biber, dem Pferde und Schwein. Sonderbar ist es, daſs man sie auch ein paarmal bei Seehunden angetroffen hat. Pallas *) gedenkt sogar eines Balls von Pferdehaaren, der im Vormagen eines Puters gefunden ist.

Bei den wiederkäuenden Thieren kommen sie gewöhnlich im Pansen, seltner in der Haube, doch zuweilen im vierten oder Labmagen vor. Durch diesen Umstand rettete Chabert einmal einen Schäfer, der ohne ihn vielleicht auf die Galeeren gekommen wäre, weil man bei seinen Schafen so viele Haarbälle im Labmagen gefunden hatte: Chabert zeigte nämlich, daſs der Schäfer nichts in den Labmagen bringen könnte; (wenigstens nicht geradezu, möchte ich hinzusetzen).

3) Die

31) *Spicil. XI. p. 77.* Anm.

3) Die dritte Abtheilung der Magenconcremente umfafst diejenigen, wo sich um einen fremden, oft sehr kleinen Körper, eine grofse Menge thierischer Stoffe angehäuft hat.

Die mehrsten dieser Concremente sind steinartig; man findet aber auch welche, wo die Masse um den fremden Körper weicher ist, und gleichsam aus einem feinen dicht zusammengedrängten Filz besteht. Ein solches höchst merkwürdiges und sehr grofses Concrement aus dem Magen eines Schweins befindet sich in der Sammlung der hiesigen Thierarzneischule. Fourcroy und Vauquelin [32]) hegten die sonderbare und gewifs falsche Meinung, dafs diese Concremente aus Feuerschwamm (*amadou*) gebildet waren. Erstlich sieht man nicht ab, wie die Thiere zu so vielem präparirten Feuerschwamm kommen sollten; zweitens aber mufs blofs deswegen jene Idee wegfallen, weil sonst das ganze Concrement, oder wenigstens der Stock oder Kern daraus bestehen würde, hier aber das Gegentheil statt findet: ein fremder Körper ist in der Mitte, und um diesen ist die thierische Materie schichtweise gelagert, gerade wie bei andern Concrementen die thierischen Stoffe den fremden Körper einhüllen. Diese feuerschwammartige Masse ist auch der dünnen Rinde um fremde Körper, deren ich oben gedachte, sehr analog, nur in gröfserer Menge abgesetzt [32])[b].

Die steinartigen, gewöhnlich aus bald dünneren, bald dickeren, concentrischen, harten und sehr zerbrechlichen Lagen gebildeten Concremente, von grauer, brauner, schwarzer, grüner oder gemischter Farbe, sind es, welche unter dem Namen Bezoare ehemals als Heilmittel sehr berühmt waren, jetzt aber, in Europa wenigstens, mehr den Naturforscher als den Arzt interessiren.

Ursprünglich freilich sind Bezoare nur die in einigen Thieren Asiens gefundenen Magensteine, die harzähnliche Bestandtheile haben, sich gewöhnlich durch Glanz und Farben, und einen eigenthümlichen moschusartigen

32) *Annales du Muséum d'Histoire naturelle. T. 4. p. 335. Bézoards fongueux. „Nous avons trouvé des bézoards intestinaux formés de débris de boletus igniarius ou d'amadouvier, disposés par couches, brulant à la manière de l'amadou, du manifestement à cette espèce de bolet avalé par les animaux et agglutiné dans leurs intestins par un suc animal. Ces bézoards quelquefois recouverts d'une croûte de phosphate ammoniaco-magnésien, sont toujours très-légers.*

32) b. Daher ist auch selbst Havemanns sonst Vorzug verdienende Meinung, dafs diese korkartigen Steine aus Wolle bestehen, mir zweifelhaft. Vergleiche meine Reisebemerkungen Th. 1. S. 81.

Geruch auszeichnen. Es giebt aber so viele Abweichungen und Uebergänge, daſs man sämmtliche Magensteine zusammenfassen muſs.

Ihre Beschreibung ist so oft gegeben, jedes Kabinet, und auch unser Museum, enthält Bezoare zur Genüge, so daſs ich einer ausführlichen Schilderung derselben überhoben seyn kann, und nur der Thiere kürzlich erwähnen will, bei denen sie gefunden werden.

Die am mehrsten geschätzten Bezoare kamen von ein Paar asiatischen Affen, welche nach Buffon [33]) der Bartaffe, *Simia Silenus*, und der Douc, *Simia Nemaeus* sind, womit auch Schreber [34]) übereinstimmt. Ehemals, wie ich oben bemerkt habe, glaubte man, daſs sie im Gehirn der Affen gefunden würden, welches Kämpfer und andere widerlegt haben. Mir scheinen sie zweifelhaft, wovon im folgenden Abschnitt.

Ihnen zunächst an Werth kamen die übrigen orientalischen Bezoare, von denen unzählige Schriftsteller geschrieben haben. Sie kommen, wie Pallas [35]) dargethan hat, von der wilden Ziege, *Aegagrus*, her, die in vielen Gegenden Asiens sehr häufig ist. Vorzüglich enthalten diese Thiere in Golconda die Bezoare, wie Tavernier [36]) aus eigner Erfahrung umständlich beschrieben hat. Ehemals schrieb man sie den Gazellen zu, doch erzeugen auch mehrere derselben solche Steine, z. B. die Gemse [37]) und der Springbock, *Antilope Pygargus* [38]).

Der occidentalische Bezoar kommt vorzüglich von den amerikanischen Kameelen, nämlich dem Llama, Paca, Guanoco und Vicugna, und es ist sonderbar, daſs Fourcroy und Vauquelin [39]) sagen konnten, man wisse nicht, von welchen Thieren er herkomme, da doch alle Nachrichten darin übereinstimmen.

33) Allgemeine Historie der Natur. VII. B. 2. Th. S. 181.

34) Die Säugthiere. Erster Theil. S. 112.

35) *Spicil. Zool. XI. p.* 44.

36) *Les six voyages de Jean Baptiste Tavernier. Paris* 1678. 12. *T.* 2. *p.* 407.

37) Daniel Fischer *Eph. Nat. Cur. Cent. IX. obs. LXXXI. p.* 185. „*Ex his lapidibus quosdam contudi et vidi eos congeries esse plurimarum lamellarum; intus colorem cineritium habebant, extus vero ex atro virentem, nihil autem de pilis vel muco cacochylico ex herbis reperi.*"

38) Barrow's Reisen in das Innere von Südafrika. Berlin u. Hamb. 1802. 8. S. 230. In der Leipziger Uebersetzung finde ich die Stelle nicht.

39) *Annales du Muséum d'Histoire naturelle T. II, p.* 205.

Außerdem kennt man noch Bezoare vom Hirsch, vom Damhirsch, vom *Cervus Pygargus*, vom Rinde, vom Pferde, in dem sie zuweilen von ungeheurer Größe vorkommen [40]), vom Nilpferd, vom Schwein, vom Babirussa, vom Elefanten und Nashorn. Im Magen des Tapirs scheinen sich auch Bezoare zu erzeugen, doch drückt sich Dobritzhofer [41]) so darüber aus, daß man auch auf einen andern Theil schließen könnte, in dem diese Steine sich fänden. Seba's Bezoar aus dem Magen des Armadills scheint noch zweifelhaft.

Im Magen der körnerfressenden Vögel trifft man bekanntlich beinahe immer Steine an, dies sind aber keine im Körper erzeugte, sondern kleine Kiesel und andere Steine, die sie zum leichteren Zermalmen der Körner absichtlich verschlucken. Die von Plinius gerühmten *lapides alectorii* und *chelidonii* [42]) sind also keine thierische Concremente, und gehören nicht hieher [43]); ich glaube auch, daß der von Chardin erwähnte Bezoar aus der Gans [44]), und die Steine, welche Rumph [45]) von verschiedenen Vögeln anführt, hier keine Stelle verdienen. Dasselbe gilt auch wohl von dem *lapis corvinus*, den Jungius [45]b, jedoch selbst zweifelhaft, aufführt.

Von den Magensteinen der Krokodile und anderer Amphibien werde

40) S. im anatomischen Museum und in der Sammlung der hiesigen Thierarzneischule.

41) *Historiae de Abiponibus T. I. p. 295. „Alcium stomacho, escae receptaculo adjacet marsupium, in quo lapilli Bezoardici complures, avellana nuce vix majores, figura polygoni, cinerei vel plumbei coloris frequentissime reperiuntur.“* — Azara hingegen (*Essais sur l'histoire naturelle des quadrupèdes du Paraguay. T. I. Paris* 1801. 8. p. 4.) spricht ganz allgemein: *„On assure, que quelques individus ont des pierres de bézoard et qu'elles produisent les mêmes effets que celles d'Orient.“*

42) *Lib. XI. c. 37. „In ventre hirundinum pullis lapilli candido aut rubenti colore qui chelidonii vocantur, magicis narrati artibus reperiuntur.“ — Lib. XXXVII. c. X. „Alectorias vocant in ventriculis gallinaceorum inventas, crystallina specie, magnitudine fabae: quibus Milonem Crotoniensem usum in certaminibus, invictum fuisse videri volunt.“*

43) Das wußte schon Peyer (*Exerc. Paeonis et Pythagorae p. 157.*) *„extraneos esse, neque in ventriculo genitos.“*

44) Ihm war erzählt, daß in Golconda und andern Provinzen Indiens Bezoarsteine auch im Körper der Gänse gefunden würden. S. die Ausgabe von Chardins Reisen in 10. B. Paris 1811. 8. T. 3. p. 316.

45) D'Amboinsche Rariteit-Kamer p. 309—11. Sehr unglaubliche Erzählungen.

45) b. *Miscell. Acad. Nat. Curios. Dec. 1. Ann. IV. obs. 107. p. 109.* Nach der Beschreibung scheint der große, hier auch abgebildete, im Magen eines Raben gefundene Stein, von diesem Vogel verschluckt worden zu seyn.

ich im folgenden Abschnitt handeln, wenn ich die Thiere durchgehe, bei denen Steine gefunden sind; sie scheinen allerdings ächte Bezoare.

VIII. Darmsteine.

Bei dem Menschen gehören die eigentlich so zu nennenden Darmsteine [46]), wenigstens in unsern Gegenden, zu den gröſsten Seltenheiten, und ich habe nie dergleichen gesehen, dahingegen die Monro's in Edinburg mehrere beobachtet haben, so daſs Monro der Enkel dadurch in den Stand gesetzt ward, sehr ausführlich davon zu handeln [47]).

Auſserdem kennt man sie mit Sicherheit nur aus einigen wenigen Säugthieren, die einen groſsen Blinddarm besitzen.

Vom Pferde habe ich in Alfort eine Menge Darmsteine gesehen [48]), die von sehr verschiedener Art waren; einige wie die, welche Monro vom Menschen beschreibt und abbildet, weich, wie aus Vegetabilien oder Koththeilen zusammengesetzt, bröcklig, schmutzig gelbgrau oder schwärzlich; einer, der einen Strohhalm, so wie ein anderer, der ein Stückchen Holz zum Kern hatte, war in seiner Substanz dem Wallrath ähnlich; endlich viele grobstralige, aus Schalen bestehende, harte, kleinere und gröſsere Steine, die zum Theil mit den Magenbezoaren der Pferde ganz übereinkommen. Bei den mehrsten war angegeben, daſs sie im Grimmdarm gefunden worden; einige waren bloſs Darmsteine genannt.

Vom Rinde war in Alfort ein einziger kugelförmiger, zwei und einen halben Zoll im Durchschnitt haltender, weiſser, gypsartiger, grobstraliger Darmstein vorhanden.

Eben so waren daselbst sechs kleine eckige Steine aus dem Blinddarm eines Schafs, die zum Theil aus dem Futter gebildet waren, und ähnliche mit Futter vermischte Steinchen aus dem Darm, deren Kern aus Kiessand bestand.

Die Steine aus der Cloaca der Vögel und Amphibien gehören nicht hieher, sondern sind Harnsteine, von denen ich weiterhin in diesem Abschnitt besonders reden werde.

46) Das heiſst: die im Darm erzeugt sind; nicht Gallensteine, die durch den gemeinschaftlichen Gallengang in den Darm gerathen.

47) *The morbid anatomy of the human gullet, stomach and intestines. Edinburgh* 1811. 8. *Alvine concretions p.* 25—73. *Tab.* 1—4.

48) Meine Reisebemerkungen Th. 2. S. 73. n. 25—43.

IX. Gallensteine.

Die Gallensteine sind bei dem Menschen sehr viel häufiger als bei den Thieren, und namentlich hier in Berlin treffe ich jene in aufserordentlich vielen Leichen; besonders freilich die, welche aus dem eigenthümlichen Gallenstoff bestehen: denn die, welche aus Adipocire gebildet sind, zeigen sich nur sparsam.

Sie scheinen hauptsächlich oder nur allein bei grasfressenden Thieren [48]b vorzukommen,

Vom Rinde besitzt unser Museum einen grofsen Gallenstein aus der Leber, welchen Walter beschrieben und abgebildet hat [49]). Fourcroy und Vauquelin [50]) sagen auch, dafs sich in der Gallenblase und in den Därmen des Rindes nicht selten Gallensteine fänden, deren sich die Maler zu einer Pomeranzenfarbe bedienten. Bei den Menschen wenigstens gehen öfters Gallensteine durch den Stuhlgang ab; es ist also wohl möglich, dafs ein Theil der Darmsteine des Rinds auch aus der Gallenblase komme, denn im Darm werden sich gewifs nie Gallensteine bilden.

Bei den Schweinen müssen sie sich aus Localursachen zu Zeiten häufig zeigen, denn Brückmann [50]) erzählt, dafs im Anfang des achtzehnten Jahrhunderts ungefähr funfzig Schweine in Marienthal im Braunschweigischen geschlachtet wurden, die sämmtlich in der Gallenblase gelbe oder dunkelgrüne Steine hatten, von denen einige beinahe die Gröfse eines Hünereies erreichten.

Im Stachelschwein [51]) kommt ein ehemals aufserordentlich geschätzter, selbst den Bezoaren vorgezogener Gallenstein, jedoch sehr selten, vor. Man fafste ihn in Gold, hing ihn an goldnen Kettchen auf, und ver-

48)b. Zwar hat Seba (*Thesauri Anat. T. II. p.* 142.) einen Gallenstein vom Tiger, allein das Zeugnifs dafür scheint mir nicht sicher. Der S. 143 erwähnte Gallenstein des Elefanten aber mufs gewifs wegfallen, obgleich Seba erzählt, dafs er in Zeilon einem Elefanten aus der Gallenblase genommen sey: denn bekanntlich hat der Elefant gar keine Gallenblase.

49) Anatomisches Museum, gesammelt von J. G. Walter, beschrieben von Fr Aug. Walter, 1. Th. Berlin 1796. 4 S. 130. n. 261. Tab. V. *Museum Anatomicum* p. 415. n. 2139. — In dem deutschen Verzeichnifs ebendaselbst ist auch ein Gallenstein des Schweins genannt, der aber im lateinischen Verzeichnifs fehlt, und auch in der Sammlung nicht befindlich ist.

50) *Epist. Itinerar.* 28. *Centuriae primae p.* 5.

51) Kämpfer *Amoenitatum Exoticarum fasc. II. p.* 393; vorzüglich aber Brückmann's eben citirter 28ster Brief. *Lapis porcinus, hystricinus, malaccensis, Pedra del Porco.*

wahrte ihn als eine Panacee: so viel kann das Vorurtheil bewirken! Daſs es übrigens wirklich ein Gallenstein ist, kann wohl nicht in Zweifel gezogen werden. Die Zeugnisse sehr geachteter Schriftsteller [52]) beweisen es zwar nicht gradezu, da keiner sagt, daſs er selbst den Stein in der Gallenblase des Stachelschweins gefunden habe; allein die Bitterkeit des Steins, seine Auflöslichkeit im Wasser, seine geringe Gröſse und seine Farbe [53]) sprechen dafür. Seine Krystallisation finde ich nirgends angegeben; allein wir wissen, daſs die der menschlichen Gallensteine äuſserst abweicht, so daſs also darauf wenig ankommt [54]); nur müſste freilich nie der Kern ein fremder Körper seyn, da ein solcher in der Gallenblase nicht statt finden kann. Da man ehemals die seltneren Steine aus dem Kopf der Thiere herleitete, so geschah es auch mit diesem: das macht aber natürlich für unsere Untersuchung jetzt nichts aus, da der Ungrund davon zu einleuchtend ist.

Auch bei den Vögeln hat man Concremente in der Gallenblase beobachtet. So erzählt Perrault [55]), daſs er bei einem ägyptischen Ibis, der viele Monate in Versailles gelebt, den Gallenblasengang verstopft, die Häute der Gallenblase auſserordentlich dick und hornartig, und in derselben einen fremden Körper gefunden habe, der sie ganz ausfüllte. Es war eine harte Masse, die gleichsam aus vielen Häuten, eine über die andere, bestand, wie man

52) Z. B. Bontius bei Piso *de India utraque* S. 48. Garcias ab Orto (*Clusii Exoticor. Libro VII. p.* 217.) und Kämpfer a. a. O. — Wolf (Reise nach Zeilan S. 122.) sagt, daſs man unter hundert groſsen Stachelschweinen kaum bei einem diesen Stein finde, giebt aber dessen Stelle nicht weiter an.

53) Ueber die Farbe vergl. vorzüglich Brückmann. Ob der Stein, wenn er weiſser ist, wie menschliche Gallensteine, mehr Adipocire enthält? Der auf unserm Museum befindliche, von Walter für ächt angegebene Stein, ist fast ganz weiſs, und scheint mir zweifelhaft.

54) So reich unser Museum an Gallensteinen aller Art ist, so habe ich doch kürzlich einen von einem hiesigen trefflichen Arzt, dem D. Merzdorf erhalten, dergleichen ich nie vorher sah. Er ist aus der Gallenblase eines Frauenzimmers, ziemlich rundlich, von Farbe weiſs und grünlich, und zeigt auf den Oberflachen lauter schmale scharf aufstehende abgerundete Blattchen. Ohne Frage besteht er groſsentheils aus Adipocire, allein sonst sind die Blattchen, die freilich bekanntlich die eigentliche Krystallform des Adipocire ausmachen, nie sichtbar, sondern die daraus bestehenden Steine sind maulbeerförmig, als aus rundlichen Körnern zusammengesetzt.

55) Perrault, Charras und Dodart's Abhandlungen zur Naturgeschichte. Leipz. 1757. 4. 2. B. S. 247.

an einer Zwiebel sieht. Tiedemann [56]) fand auch einigemal harte Körper in der Gallenblase von Hühnern und Gänsen. An einer andern Stelle (S. 553.) fügt Tiedemann hinzu, daſs in Vögeln, die eingesperrt sind, leicht Gallenblasensteine entstehen. Dies muſs ich bezweifeln, so viel Gewicht ich auch sonst auf die Angaben meines Freundes lege: denn ich habe eine wirklich sehr groſse Menge solcher Vögel untersucht, und oft die Leber krank und angeschwollen und verhärtet, oft die Gallenblase von mistfarbener Galle strotzend, aber nie Gallensteine darin gefunden; falls hier also nicht Localursachen wirksam sind, so kann man die Gallensteine der Vögel gewiſs nicht häufig nennen.

Aus der Gallenblase einer Landschildkröte ist endlich von Geoffroy [57]) ein Stein angegeben.

Von Fischen weiſs ich gar kein Beispiel der Art, und wirklich, wenn man die Galle schon bei den Vögeln, aber noch mehr bei den Amphibien und Fischen gegen die der Säugthiere an Consistenz so beträchtlich abnehmen sieht, so begreift man, warum hier die Gallensteine nicht mehr so leicht entstehen können.

X. Nierensteine.

Die Nierensteine sind bei den Säugthieren, wie es scheint, viel seltener als bei den Menschen, und man kennt sie nur bei wenigen Geschlechtern von jenen.

Am häufigsten scheinen sie bei dem Pferde vorzukommen, wenigstens habe ich von diesem öfters Nierensteine gesehen, vorzüglich in Alfort [58]), und auch unser Museum besitzt dergleichen. Einen Nierenstein vom Rinde hat Daubenton, so wie ich auch einen solchen in Alfort sah.

56) Zoologie, II. Band, Landshut 1810. S. 511. Waren dies wirklich krystallisirte Gallensteine? Perrault spricht zwar nicht von einem Stein, doch sprechen die Schichten dafür.

57) *Claude Jos. Geoffroy Observation sur un bézoard, trouvé dans la vésicule de fiel d'une tortue terrestre. Mémoires de l'Academie des sciences à Paris 1729. Histoire p. 12. „C'est une pierre irrégulièrement ronde, de 3 pouces 3 lignes dans sa plus grande longueur, et 2½ pouces dans la plus petite, et qui cependant ne pèse pas 5 onces: elle est d'un jaune verdâtre. On l'a trouvée dans la vésicule du fiel d'une tortue de terre de l'isle de Bourbon. M. de Jussieu en a une de même espèce, plus platte, d'un pouce d'épaisseur et grande comme la paume de la main. Elles sont toutes deux formées par couches.“*

58) Meine Reisebemerkungen Th. 2. S. 74. n. 44—51. Die letzte Nummer ist von einem Maulesel.

Vom Schaf besitzt unser Museum einen Nierenstein, und einen vom Hunde erwähnt Severinus [59]); das sind alle Beispiele, die ich aufgefunden habe.

Bei den Vögeln kenne ich gar kein Beispiel eines Nierensteins, doch kann der Fall hier angeführt werden, wo Muralto [60]) in dem Harnleiter einer Nachteule eine grofse Menge Gries fand. Bei Amphibien sind auch nie Nierensteine bemerkt, dagegen scheinen sie bei einigen grofsen Fischen nicht selten.

Vorzüglich gilt dies von dem Hausengeschlecht. Der Hausen nämlich (*Accipenser Huso*) und der Stör (*Accipenser Sturio*) pflegen, wenn sie sehr grofs (sehr alt) sind, mit Nierensteinen behaftet zu seyn, welche die Russen (von dem Namen des Hausen, russisch *Beluga*), Belugensteine nennen, und als Arznei anwenden [61]). Ich habe durch des verewigten Pallas Güte sowohl vom Hausen als vom Stör einen solchen Stein erhalten, die jetzt auf dem Museum befindlich sind. Unser trefflicher Klaproth [62]) hat von dem Stein des Hausen eine Analyse gegeben; der vom Stör scheint, wenigstens dem Aeufsern nach, gar nicht verschieden. Das sagt auch Oseretskowsky [63]), der den vom Stör beschreibt, und hinzufügt, dafs er in verschiedenen Arten der Gattung *Accipenser* gefunden werde, so wie er auch angiebt, dafs die sehr grofsen Karpfen des kaspischen Meers ebenfalls daran leiden. Pallas nennt statt ihrer die grofsen Barben, in denen Steine, jedoch von andrer Art, vorkämen [64]).

XI. Harn-

59) *Zootomia Democritaea p.* 163.

60) *Miscell. Acad. Nat. Curios. Dec. II. Ann. I. p.* 134. „*Noctuae, quam primo Februarii anni 1679 secuimus, in sinistro uretere haerebat calx et arena e renibus delata, quae cum ob crassitiem transire non posset, ureterem tantopere dilatavit, ut vesicam aemularetur.*" Wie wenig Werth man sonst auf pathologische Beobachtungen der Art legte, zeigt sich auch dadurch, dafs Valentini in seinem *Amphitheatrum Zootomicum* (*Vol. II. p.* 75.) Muralto's Anatomie der Nachteule mittheilt, aber jene Bemerkung wegläfst.

61) Pallas Reise durch verschiedene Provinzen des Russ. Reichs I. Th. S. 436; vorzüglich aber II. Th. S. 343.

62) Der Belugastein besteht nach seiner Analyse aus Eiweifsstoff 2, Wasser 23, phosphorsauren Kalk $71\frac{1}{2}$, schwefelsauren Kalk $\frac{1}{2}$ Theilen Eine Abbildung hat Collinson gegeben: *Philos Transact.* 1747. *n.* 483. *p.* 451. *Tab.* 2. *fig.* 2—7. und Oseretskowsky in den *Act. Petropolitanis ad ann.* 1782. *p.* 1. *Tab.* 4. Die frühere Analyse von Georgi (*Act. Petrop. ad ann.* 1782. *P.* 1. *p.* 225—234.) ist zu übergehen.

63) *l. c. p.* 235—246.

64) a. a. O. Th. 1. S. 436. Sollte vielleicht Oseretskowsky die Barben für Karpfen gehalten haben?

XI. Harnblasensteine.

Diese scheinen bei den Säugthieren häufiger vorzukommen als die Nierensteine, wovon wenigstens hier das Gegentheil bei den Menschen stattfindet. In den fünf Jahren, daſs ich hier Lehrer der Anatomie bin, und worin weit über tausend Körper auf dem anatomischen Theater zergliedert sind, haben wir einmal (bei einer alten Frau) Harnblasensteine (einen groſsen und zwei kleine) gefunden, da hingegen in den Nieren jährlich einigemale Steine vorkommen [65]).

Von Steinen bei Hunden kommen mehrere Beispiele bei den Schriftstellern vor; in der Thierarzneischule zu Alfort und in der zu Hannover habe ich dergleichen gesehen, und unser Museum besitzt drei solcher Harnblasensteine, wovon ich zwei sehr schöne (aus einem Pudel und aus einem Mops) demselben einzuverleiben Gelegenheit gehabt habe. Gewöhnlich füllen diese groſsen und mehrentheils auf der Oberfläche mit spitzen oder stumpfen Hervorragungen dicht besäeten Steine die ganze Harnblase aus, und erregen den Thieren ungeheure Schmerzen; in Hannover hingegen sah ich bei dem wackern Havemann mehrere dreieckige Steine aus der Harnblase eines Hundes, die alle mit ihren Flächenseiten durch Schleim an einander verbunden gewesen waren.

In den Harnblasen der Ratzen scheinen die Steine in manchen Gegenden sehr häufig zu seyn, besonders in Paris nach Daubenton's [66]) Bemerkung; allein auch in Holland fand öfters Ruysch [67]) dergleichen.

Ueberdies kommen Harnblasensteine auch bei dem Rinde, bei dem Pferde und bei dem Schweine vor, und von allen sind welche auf unserm Museum. So wie man früher schon von dem Rinde Steine bemerkt hatte, die einen goldfarbnen Ueberzug hatten [68]), so hat auch unser verdienter College Hermbstädt mir dergleichen von einem Schwein mitgetheilt, die von der Gröſse eines Stecknadelknopfs sind. Sie sind offenbar dem Gries der Menschen analog, unterscheiden sich aber sehr durch die Farbe, und verdienten wohl eine Analyse.

65) Mein innig geliebter Kollege, Knape, der so viele Jahre durch zergliedert, hat auch nur ein paarmal Harnblasensteine gefunden.

66) Allgem. Historie der Natur VII. 2. S. 239.

67) *Thesaurus Anat. III. n. 59. IV. n. 71.*

68) *Rosinus Lentilius de lapidibus aureolis e vesicis boum. Misc. Nat. Cur. Dec. III. ann. 7. p. 121. obs. 77.* Das gröſste Steinchen war auch nur wie ein Hanfkorn, die kleinsten wie Hirsekörner.

Man hat oft von Nabelsteinen der Schweine gesprochen, und ein solcher war auch im Verzeichniſs des Museums angegeben; dies sind aber nichts als Harnblasensteine, und man übersah nur, daſs die Oeffnung der Vorhaut bei diesen, wie bei so vielen Thieren, nahe bei dem Nabel befindlich ist.

In der Harnblase der Schildkröten sind mehreremale Steine gefunden. Ob die Steine, welche Seba [69]) aus Schildkröten anführt, hieher gehören, ist nicht zu bestimmen, da er gar nicht angiebt, in welchem Theil derselben sie gefunden sind; Salvator Gilii [70]) hat dergleichen auch nicht selbst beobachtet, sondern erzählt nur: man sagt, es gäbe in der Blase einiger Schildkröten einen kleinen runden Stein. Parra [71]) hingegen sah aus der Harnblase einer Schildkröte einen Stein herausnehmen, der drei Pfund, eilf und eine halbe Unze wog, eiförmig von Gestalt, und mit einer schleimigen, schwarzen und stinkenden Feuchtigkeit bedeckt war; seine Länge betrug acht Zoll, sein Umfang funfzehn Zoll, und die Oberfläche war sehr rauh.

Vauquelin [72]) hat auch in einem von Vicq-d'Azyr in der Harnblase einer Schildkröte gefundenen Stein Harnsäure gefunden.

Nimmt man noch hinzu, daſs auch im Harn der Schildkröten und Eidechsen Harnsäure beobachtet worden [73]), so glaube ich, daſs es erwiesen ist, daſs die Harnblase der Amphibien wirklich diesen Namen verdient, wenn auch einige Neuere dies läugnen wollen. So glaubt Townson [74]), diese Blase sauge bei Fröschen ein, erhalte aber keinen Harn von den Nieren; mein Freund, der als Arzt und Naturforscher gleich geschätzte J. H. C. Meyer, hat mir oft seine Zweifel in dieser Hinsicht nicht bloſs über die Frösche, sondern auch über die Schildkröten geäuſsert, und kürzlich schrieb mir der berühmte Direktor des Naturalienkabinets in Wien, Karl von Schreibers, indem er mir ein Paar lebende Landschildkröten (*Testudo graeca*) übersandte, er glaube nicht, daſs die sogenannte Harnblase

69) *Thes. II. p.* 141.

70) Nachrichten vom Lande Guiana. A. d. Ital. Hamburg 1785. 8. S. 192.

71) *Descripzion de diferentes piezas de historia natural. En la Havana* 1787. 4. *p.* 182. *Tab.* 65. *fig.* 4.

72) *Annales du Muséum d'Hist. Nat. T. XVII. p.* 310.

73) J. Fr. John Chemische Tabellen des Thierreichs. Berlin 1814. Fol. S. 115.

74) *Rob. Townson Observationes de Amphibiis P.* 2. *Gott.* 1795. 4. *p.* 36. *sq.*

der Schildkröten mit dem Namen zu belegen sey. Mir scheint aber, die Harnsäure in der Flussigkeit dieser Blase und die Harnsteine beweisen das Gegentheil hinlänglich; wir sehen ja auch bei den einer Harnblase beraubten Amphibien die Harnsäure ebenfalls in der Cloaca. Es müfste bei diesen Thieren die Excretion beinahe aufhören, wenn wir die Harnaussonderung so gering achten wollten. Ihre Lungenthätigkeit nämlich kommt wenig in Betrachtung; auch die Reinigung durch die Galle, falls wir eine solche annehmen wollen, ist häufig aufhörend; die durch die Haut fehlt ganz oder gröfstentheils; da kann wohl nicht die Excretion durch die Nieren gering seyn, und die Gröfse der Harnblase ist nicht mehr auffallend.

XII. Steine der Cloaca.

In Vögeln hat noch kein Schriftsteller bisher Harnsteine bemerkt, ich halte daher den, welchen mein Freund und Gehülfe D. Rosenthal in der Cloaca eines Habichts (*Falco Palumbarius*) gefunden hat, für eine der gröfsten Seltenheiten unsers Museums. Der Stein ist beinahe kreisrund und hat fast einen Zoll im Durchmesser; auf der einen Seite ist er flach, auf der andern schwach convex, in der Mitte etwas über eine Linie dick, von Gewicht fünf und dreifsig Gran, weifs von Farbe, und sehr locker und porös. Da ich nur den einen Stein der Art vor mir hatte, so konnte ich dem geschickten Chemiker John, der ihn zu untersuchen wünschte, nur sehr wenig davon geben, und er fand hierin Harnsäure mit einer Spur von Ammonium und Kalk, so wie etwas thierische Materie.

Perrault [75]), der einen lebenden Chamäleon zu Paris beobachtete, führt von demselben an, dafs er oftmals Steine von sich gegeben, die er nicht verschluckt hatte, und die von der Gröfse einer Erbse waren. Die Steine waren so leicht, dafs sie sich von dem Boden der Gefäfse mit destillirtem Weinessig, worin man sie gelegt, erhoben, wenn man das Gefäfs bewegte. Sie zergingen auch darin, und einer, welcher sich spaltete, hatte in der Mitte einen Fliegenkopf eingeschlossen, um welchen sich die erdige Materie angehäuft hatte.

Diese Steine sind jetzt durch des Herrn von Schreibers [76]) höchst interessante Beobachtungen erklärt. Er fand nämlich bei verschiedenen Land-

75) A. a. O. 1. Th. S. 70.

76) Wiener Medicinische Jahrbücher. II. Jahrg. 2. Heft, ausgezogen in der Salzburger Med. Chirurg. Zeitung 1815. n. 22.

eidechsen, daſs sie immer vor dem eigenthümlichen Koth kreideartige kugelförmige Excremente abgehen lassen, die nach der von Scholz angestellten Analyse aus 94 Theilen Harnsäure, 2 Theilen Ammonium, 5,33 phosphorsaurem Kalk, und 0,67 (wahrscheinlich mechanisch beigemischter) Kieselerde bestehen. Der Harn geht also hier für sich in fester Form als Concrement fort, während er bei den Vögeln sich mit dem Koth verbindet.

XIII. Steine aus den Geschlechtstheilen.

Hiervon kenne ich nur folgende zwei Beispiele von Thieren; bei dem Menschen sind sie weniger selten.

Daubenton [77]) erzählt, daſs er in den Höhlungen der weiblichen Ruthe einer Eselin sehr kleine Steinchen gefunden hat, die sich in Scheidewasser auflöseten; und der Abbé Dicquemare [78]) fand in dem Grunde der Gebährmutter eines drei Fuſs langen Meerschweins (*Delphinus Phocaena*) drei Steine; sie waren glatt, der Farbe und Gestalt nach wie Gyps, und bestanden aus unordentlichen, excentrischen Schichten, ohne einen Kern zu haben. Der eine wog eine halbe Drachme und drei Gran, der andere fünf und ein halb, der dritte drei und ein halb Gran.

Ob der von Mery [79]) in einer kleinen Schildkröte gefundene Stein hieher gehört oder nicht, wage ich nicht zu bestimmen.

XIV. Steine in Strauſseneiern.

Zu den sonderbarsten thierischen Concretionen gehören ohne Frage die Steine, welche in den Strauſseneiern gefunden werden. Rumph [80]) erwähnt ihrer zuerst, allein da er so viele fabelhafte Steine anführt, würde seine Autorität hier nicht genügen: es giebt aber andere Zeugnisse dafür.

77) Historie der Natur 2. B. 2. Th. S. 222.

78) Rozier Observations T. 26. p. 294. mit Abbildungen.

79) *Histoire de l'Académie des sciences T. 2. à Paris 1733. 4. p. 25.* „*La pierre étoit enfermée dans une poche auprès de la vessie; elle pesoit une once six gros moins vingt grains. M. Mery l'a fait scier, et elle s'est trouvée creuse en dedans comme un oeuf, et remplie d'une matière un peu dure, qui pouvoit être le jaune de cet oeuf, dont la coque seule avoit été pétrifiée.*“ Dies ist sehr unwahrscheinlich.

80) D'Amboinsche Rariteitkamer S. 311. „*Aan de Kap heeft men in het doir van een ei eenes Vogelstruis gevonden een Steen, in de Groote van een duive-ei, wit en in de gedaante van een Calappus-Steen, een weinig met blauwe adertjes doorregen; maar de gedaante van een schynende zon had hy veel Klaarder dan een Calappus-Steen. Hy is te zien by den Heer Qualbergen.*“

Thunberg [81]) sagt: er habe von den Landleuten am Kap gehört, daſs man zuweilen in den Strauſseneiern einen oder zwei Steine finde, welche hart, weiſs, so groſs wie eine kleine Bohne, etwas plattgedrückt und glatt wären; man schliffe sie und faſste sie ein zu Knöpfen: er selbst habe sie nie gefunden. Lichtenstein [82]) erwähnt ihrer ebenfalls in seiner Reisebeschreibung, hat sie aber auch nicht selbst gesehen.

Barrow [83]) hingegen spricht von ihnen aus eigner Erfahrung, so daſs ich seine Worte mittheilen werde: „In den Strauſseneiern entdeckt man öfters eine Anzahl kleiner ovalförmiger Kiesel, die ungefähr so groſs sind, wie eine groſse englische Erbse, blaſsgelb aussehen und auſserordentlich hart sind. In einem Ei fanden wir einstmal neun, in einem andern zwölf solcher Steine."

Eine Analyse davon wäre sehr zu wünschen, da diese Steine wahrscheinlich von den übrigen Concrementen in ihrer Mischung sehr abweichen.

Zweiter Abschnitt.

Uebersicht der Thiere, bei denen bisher Steine gefunden sind.

Ehe ich die Thiere in dieser Hinsicht zusammenstelle, möge es mir erlaubt seyn, einige allgemeine Bemerkungen voranzuschicken.

Erstlich können wir es natürlich als ausgemacht ansehen, daſs unter übrigens gleichen Umständen die Thiere, welche wir am genauesten kennen, uns überhaupt die mehrsten Krankheiten, und so auch am öftersten Steinbeschwerden zeigen werden. Daher kommt es, daſs ich vom Pferde, welches unter unsern nutzbaren Hausthieren, in Rücksicht seiner Krankheiten, am sorgfältigsten untersucht ist, in so auſserordentlich vielen Theilen Steine angeben konnte, während wir von einer groſsen Menge Thiere gar keine kennen. Die Häufigkeit oder Seltenheit der Steine bei diesen oder jenen Thieren kann also nur scheinbar, und unserer gröſseren oder geringeren

81) *Resa uti Europa, Africa, Asia. Andra delen. Upsala* 1789. 8. *p.* 159.

82) Reisen im südlichen Africa, zweiter Theil. S. 41.

83) Barrow's oben angeführte Reise S. 111; vergl. auch S. 231.

oder geringeren Kenntnifs von denselben zugeschrieben seyn: ich habe aber stets auf diesen Umstand gesehen, und hoffe daher in dieser Abhandlung dadurch nicht getäuscht worden zu seyn.

Zweitens mufs sich uns bei den Thieren, wie bei den Menschen, die Beobachtung aufdrängen, dafs gewisse Gegenden die Erzeugung solcher Concremente besonders begünstigen.

Wir wissen z. B. dafs die Menschen in Holland, England, Frankreich und Italien den Harnsteinen viel mehr ausgesetzt sind, als in Deutschland, Schweden und andern nordischen Ländern. Auch die Gallensteine sind nicht überall gleich häufig.

Von mehreren Thieren können wir ganz dasselbe sagen. Die Ratzen sind in Frankreich sehr häufig mit dem Harnblasenstein behaftet, so dafs nach Morand die Hälfte der alten Ratzen in Paris mit Steinen oder andern Harnbeschwerden befallen ist. Ruysch, der in Amsterdam lebte, erzählt auch, dafs er mehrmals Harnsteine bei Ratzen gefunden habe. In Deutschland hingegen weifs ich kein einziges Beispiel davon. Ich habe eine sehr grofse Menge Ratzen, besonders der Eingeweidewürmer wegen, geöffnet, allein nie einen Stein bei ihnen gefunden; dasselbe ist allen meinen Bekannten begegnet, und Goeze, der auch der Würmer wegen äufserst viele secirt hat, führt nie einen Stein von ihnen an; etwas, das er, wenn er dergleichen gefunden, gewifs gethan hätte, da er auf alles sehr aufmerksam war. Zwar führt Bechstein in seiner Naturgeschichte der Thiere Deutschlands an, dafs die Ratzen häufig an Steinen leiden, allein ohne Frage hat er dies aus Daubenton genommen, so dafs es nur auf Frankreich pafst, da er immer seine Zergliederungen und die darauf sich beziehende Angaben von Krankheiten aus andern Schriftstellern entlehnte; etwas, das ich hier nur in Beziehung auf meinen Satz anführen mufs, und das nicht im entferntesten als Vorwurf gegen diesen um unsere Fauna so rühmlich verdienten Mann gelten soll.

Oseretskowsky sagt ausdrücklich, indem er von den Steinen spricht, die bei den Hausen und Stören gefunden werden, dafs dergleichen auch bei andern Fischen im kaspischen Meer, und bei den Schweinen, die im Schilf an dessen Ufern leben, vorkommen.

Barrow bemerkt, dafs fast alle ältere Bewohner der Schneeberge am Kap Steinbeschwerden unterworfen sind. Diese Krankheit schränke sich dort auch nicht auf den Menschen ein, sondern beinahe bei allen, sowohl zahmen als wilden Thieren, treffe man mehr oder weniger Steine und Sandstücke, die sich im Magen oder in der Blase gebildet haben. Grofse eiförmige Steine finde man dort sehr häufig in dem Magen der Springböcke, und eine Menge kleiner in den Straufseneiern.

Diese Beobachtungen sind sehr wichtig. Man sieht daraus, dafs die Steine nicht blofs wegen gewisser Diätsünden in einem Lande häufig sind, denn daran würden die wilden Thiere nicht Theil nehmen, und wenn man also vom Thee, vom Cider, von sauren Weinen die Häufigkeit der Steine in gewissen Gegenden herleitet, so mag der Mifsbrauch jener Getränke wohl dazu mit beitragen; allein die Hauptursache liegt tiefer, da derselbe Diätfehler nicht überall jene Folge hervorbringt.

Vorzüglich liegt die Ursache der Steinerzeugung wohl im Wasser. So bemerkt Wrisberg [84]), dafs die kalkhaltigen Wasser davon frei erhalten, und ältere Schriftsteller sahen auch schon darauf. Piso [85]) lobt in der Hinsicht ganz aufserordentlich die Wässer von Brasilien, und sagt, dafs sie vor Stein und Gicht schützen. Prosper Alpinus ist im Lobe des Nilwassers ganz unerschöpflich, und sagt, dafs er selbst dadurch vom Nierenstein befreit worden sey [86]). Und im Gegentheil leitet Oseretskowsky die Steine der Thiere im kaspischen Meer von dessen schlechtem Wasser her, und so auch Barrow die häufigen Steine der Menschen und Thiere an den Schneebergen; in der einen Jahrszeit, sagt er, ist das Wasser stark mit Salz geschwängert, in der andern aber besteht es aus einer Mischung von Schnee und Erde. Die Menschen könnten also vielleicht durch Reinigung ihres Trinkwassers viel dazu beitragen, sich vor Steinen zu sichern.

Eine dritte allgemeine Bemerkung glaube ich ebenfalls nicht übergehen zu dürfen. Sie betrifft den Gegensatz zwischen dem Menschen und den Thieren, den man häufig bei Krankheiten zu stark anschlägt. Betrachtet man den Menschen von der intellectuellen Seite, so steht er unermefslich weit vom Thier, nämlich von allen Thieren, und es ist vergebens, wenn man einen Uebergang suchen will. Nimmt man aber den Menschen von

84) Alb. v. Haller *Primae lineae Physiologiae ed. Wrisberg. Gotting.* 1780. 8. *p.* 412 *nota* 175. *Aquae ex montibus calcareis scaturientes, quales Gottingenses sunt, rarius calculos generant, ut iis potius medeantur.*

85) *De India utraque p.* 17.

86) *De Medicina Aegyptiorum. Venet.* 1591. 4. *fol.* 21, und *Historiae Aegypti Naturalis Pars I. L. B.* 1735. 4. *p.* 13.

der blofs thierischen oder körperlichen Seite, das heifst, von der, auf welche die geistige Ausbildung keinen oder einen geringen Einflufs hat, so steht der Mensch vielen Thieren in diesen, andern in jenen Organen näher; hier gilt nicht mehr, wie bei dem Geistigen, der Gegensatz: Thier, sondern wir müssen die Thiere unterscheiden und den Organen gemäfs vergleichen. Der Fall trifft namentlich hier ein.

Betrachten wir nun die einzelnen Familien der Thiere, so werden wir vieles sehr erklärlich finden, obgleich manches uns auch noch räthselhaft bleibt, weil uns die nöthigen Data zur Erklärung fehlen.

A. Säugthiere.

Bei den Affen kennen wir bis jetzt nur die Bezoare, und zwar sehr unzulänglich. Sie sollen nur bei ein Paar asiatischen Arten vorkommen, und zum Kern Baumknospen haben [87]). Dies letztere würde voraussetzen, dafs die Affen, trotz ihres einfachen und nicht grofsen Magens, Dinge verschluckten, die in diesem zurückblieben, ohne ausgebrochen zu werden. Ich zweifle auch, ob sie Baumknospen fressen, woferne es nicht aus Noth geschähe. Kurz, sie würden bei jener Annahme wirklich sehr weit von dem Menschen zurückgesetzt. Eher könnte man jene Bezoare für Darmsteine halten, da sie im Koth der Affen gefunden werden sollen, obgleich ich darauf wenig Werth lege, da alle Erzählungen von den Bezoaren mit Lügen durchwebt sind. Am leichtesten wäre die Sache zu erklären, wenn es Gallensteine wären; die könnten auch recht gut mit dem Koth abgehen; und so wie sie bei dem Menschen häufig sind, wäre der Analogie nach vielleicht zu erwarten, dafs auch die Affen nicht frei von Gallensteinen wären. Allein mit Gewifsheit läfst sich zur Zeit nichts darüber sagen, und es versteht sich, dafs alle die, welche fremde Körper in sich schliefsen, keine Gallensteine seyn können.

Bei dem virginischen Beutelthier fand Tyson [88]) in dem sonst leeren Magen einen Haarball, von der Gestalt desselben, (beinahe halbmondförmig), und mit einer schleimigen geschmacklosen Materie überzogen, Da diese

87) Allgem. Hist. der Natur, B. VII. Th. 2. S. 181. Anm. Vergl. Seba *Thesaur. II. p.* 131; vorzüglich aber p. 133. in der Erklarung der Figuren 16 – 18, wo er sagt, dafs die Kerne der Affenbezoare aus Stroh, kleinen Kieseln, allerlei Kernen und Samen u. s. w. beständen.

88) *Philos. Transact. n.* 239. *p.* 105. mit Abbildung des Haarballs.

diese Thiere von Vögeln und andern Thieren, und nur im Nothfall von Früchten leben, sollte man keine Concretionen bei ihnen erwarten: allein da sie sich unter einander viel lecken, so ist die Entstehung der Haarbälle leicht erklärlich.

Von den Harnblasensteinen der Ratzen habe ich im Anfang dieses Abschnitts ausführlich gesprochen.

Vom Biber führt Seba [89]) an, daſs er viele Haarbälle aus dem Magen desselben erhalten habe; sie waren kugelig und von der Gröſse eines mittelmäſsigen Apfels, sehr rauh, mit hervorstechenden schwärzlichen Haaren; wie ein Zobel, sehr leicht, jedoch inwendig hart und kalkartig (*materia calcarea repletae*). Da ich aber bei keinem Schriftsteller sonst etwas darüber finde, und Seba so viele (*plurimas*) erhielt, so fragt sich noch, ob es wirklich Haarbälle des Bibers waren.

Aus dem Stachelschwein haben wir erstlich den Gallenblasenstein, oder die *pedra del porco*, wovon ich im vorigen Abschnitt ausführlich gehandelt habe, und zweitens Haarbälle, dergleichen ich bei dem trefflichen Brugmanns in Leiden gesehen habe, und Camper erzählt [90]), daſs Sömmerring zwei Haarbälle von besonderer Gröſse in dem Magen eines Stachelschweins gefunden hat.

Vom Elefanten nennt Daubenton [91]) einen Bezoar, der acht Pfund, funfzehn Unzen und sechs Drachmen wiegt, eirund ist, und im groſsen Durchmesser über sieben, im kleinen über fünf Zoll beträgt, aus Schichten besteht, und auf der Oberfläche theils grau oder gelblich, theils röthlich und schwärzlich ist.

Derselbe Schriftsteller [92]) beschreibt einen Bezoar aus dem Rhinoceros, welcher aus Indien an den Schach von Persien gesandt ward, und unterwegs 1699 starb. Die Gestalt ist pyramidalisch, seine Höhe beträgt drittehalb Zoll, seine Winkel sind gerundet, seine Oberfläche polirt und von gelblicher mit schwarz gemengter Farbe, sein Gewicht zwölf Unzen und viertehalb Drachmen.

89) *Thesauri T. II. p.* 146. *Tab.* 114. *n.* 10.

90) Abhandlung von den Krankheiten, die sowohl den Menschen als den Thieren eigen sind. Lingen 1787 8. S. 29. Anm. 31.

91) Historie der Natur VI. B. 1. Th. S. 97.

92) Ebendas S. 118. Einen ähnlichen, allein von ungewissem Ursprung, beschreibt Daubenton B. 7. Th. 2. S. 242.

Der Stein, den Piso [93]) aus dem Kopf des Nashorns anführt, ist bestimmt andern Ursprungs.

Vom Nilpferde führt Seba [94]) zwei Steine an, wovon der eine vier, der andere sechs Pfund wog; der letztere war für 600, und früherhin sogar für 1000 Gulden verkauft worden. Jener war grauweifs, bestand aus Schichten, und hatte einen kleinen Kern wie ein Pfefferkorn.

Ueber die Bezoare des Tapirs habe ich schon im ersten Abschnitt gesprochen.

Vom Schwein kennen wir nicht blofs, wie von den vorigen Vielhufern, Magenconcretionen [95]), sondern auch Gallensteine und Harnsteine, von denen aber schon geredet ist; allein die andern kennen wir auch weniger. Bei den zahmen Elefanten würde es gewifs nicht daran fehlen, wenn sie nur gehörig untersucht wären.

Vom Babirussa führt Marsden [96]) blofs an, dafs eine Art desselben Bezoare enthalte.

Unter allen Säugthieren, den Menschen ausgenommen, kennen wir vom Pferde die mehrsten Steine, allein kein Thier wird so sehr gemifshandelt, selbst wenn es im Glanz zu leben scheint, und ist so vielen Krankheitsursachen ausgesetzt. Fast überall in dem vorigen Abschnitt, wo ich eine Concretion durchging, konnte ich auch das Pferd als daran leidend angeben, und ich kann mich darauf beziehen. Ich will nur eine Bemerkung hinzufügen. Das Pferd gewöhnt sich, wie andere Hausthiere, in dem Zustande des Zwangs und der Sklaverei, wo es gefesselt steht, leicht (man möchte sagen aus Langerweile) an mancherlei Unarten. Das Rind verschluckt mancherlei fremde Körper, als Knöpfe, Geld, selbst gröfsere Sachen, wie Scheeren u. s. w.; das kann das Pferd nicht leicht: aber dagegen nagt es seine wollenen Decken ab und verzehrt sie endlich ganz, nagt die Krippen

93) In einer Anmerkung zum Bontius S. 52.

94) *Thesauri T. II. p. 134. Tab. 112. fig. 1. 2.*

95) Haarballen, aus Schweineborsten bestehend, habe ich öfters gesehen, und auch unser Museum besitzt einen solchen. Dann kommen korkartige Steine bei den Schweinen vor. — Die drei Bezoare, deren Daubenton (a. a. O. B. VII. Th. 2. S. 234.) erwähnt, scheinen mir sämmtlich Harnsteine zu seyn. Von den ersteren vermuthet er es selbst, aber der dritte, den er als Bezoar gelten lafst, beweiset durch seine nadelförmige Krystalle das Gegentheil zur Genüge.

96) Wilhelm Marsden's Beschreibung der Insel Sumatra. A. d. Engl. Leipzig 1785. 8. S. 129.

auf u. s. w.; dabei erbricht es sich nicht, und ist also den Magen- und Darmsteinen leicht ausgesetzt. Ich glaube aber nicht, wie ich schon oben gesagt habe, daſs die fremden Körper die Steine bilden, und wenn Müllerpferde oft Steine haben, so ist die Ursache klar; aber die Magensteine bestehen nicht aus dem verschluckten Sand, sondern aus thierischen, um den fremden Körper abgelagerten Stoffen.

Von dem weniger untersuchten Esel kennt man auch wenigere Steine; Chardin [97]) führt groſse Bezoare von ihnen an, und der in der Clitoris einer Eselin gefundenen Steinchen habe ich schon im vorigen Abschnitt erwähnt.

Wiederkäuende Thiere. Vom Kameel habe ich bei Brugmanns einen Haarballen, und in Alfort zwei Bezoare, einen aus dem Labmagen, den andern aus dem Pansen gesehen; der letztere Stein bestand aus Schichten, war anderthalb Zoll lang, kaum einen halben dick, und sollte in der Mitte ein Haar statt des Kerns enthalten haben.

Bei den Kameelen der neuen Welt, dem Llama, Vicugna, Guanoco und Paco [98]) kommen im Magen die occidentalischen Bezoare vor, doch hat man die letztern auch wohl aus andern wiederkäuenden Thieren in Amerika genommen. Gewöhnlich sind sie viel kleiner als die orientalischen; doch erzählt Marcgrav [99]) von einem solchen Stein, der zwei und dreiſsig Unzen wog.

Von den Hirschen, nämlich sowohl dem gewöhnlichen, als dem amerikanischen [100]), von dem Damhirsch und Reh, kennt man Bezoare und Haarballen; von einigen andern Concretionen habe ich im vorigen Abschnitt bei den Hirnsteinen und Herzsteinen gesprochen. Der Haarbälle und Bezoare bei Antilopen, Ziegen und Schafen habe ich auch schon umständlich erwähnt, so wie von den letztern, vorzüglich aber vom Rinde, die aber auch beide mehr untersucht sind, noch andere, wie z. B. Gallensteine und Harnsteine bekannt sind. Vom Bison führt Daubenton [101])

97) *Voy. T 3. p.* 316.

98) Vergl. Dobritzhofer *de Abiponibus I. p.* 298, 99. Schneiders Anmerkungen zum Ulloa I. Th. S. 221. Hist. der Natur VII. B. 1. T. S. 19.

99) *De Chili regione et indigenis apud Pisonem p.* 37.

100) Vom amerikanischen Hirsch nennt Piso einen Bezoar p. 98. Vom Bezoar unsers Hirsches siehe Daubenton a. a. O. III. 2. S. 80. und VII. 2. S. 237.

101) a. a. O. VII. B. 2. Th. S. 241.

auch einen Haarballen an, und wahrscheinlich werden dergleichen bei allen wiederkäuenden Thieren vorkommen.

Aus dem Armadill beschreibt Seba [102]) einen Magenstein, der sehr sonderbar aussieht, und mir ein Artefactum scheint: denn die Gestalt, worüber ich Seba's eigene Worte anführe, abgerechnet, so kenne ich keinen Magenstein, der inwendig Glanz hätte; den findet man wohl bei Gallen- und Harnsteinen, alsdann sieht man aber auch in ihnen ein krystallisches Gefüge, dessen Seba nicht erwähnt. Sonst könnten freilich die Gürtelthiere wohl Magenbezoare bekommen, da sie von Früchten und Wurzeln leben.

Unter den Raubthieren kennen wir bis jetzt nur Harnsteine vom Hunde, deren oben ausführlich gedacht ist.

Zwar hat Seba [103]) einen Gallenstein, den er einem Tiger zuschreibt, allein Seba mufs von seinen Correspondenten bei dem Ankauf seiner Naturalien sehr oft betrogen seyn, da er das Vaterland so vieler Thiere unrichtig angiebt, und so manche andere Irrthümer hat, wie er denn auch einen Gallenblasenstein vom Elefanten beschreibt und abbildet, obgleich der Elefant gar keine Gallenblase besitzt: ich bin daher auch gegen diese Notiz misstrauisch. Wir kennen wenigstens keinen Gallenstein aus einem Raubthier, so viele Hunde und Katzen auch secirt sind, und es scheint hauptsächlich die Galle der von Vegetabilien lebenden Geschöpfe dieser Ausartung ausgesetzt zu seyn. Es fragt sich, ob nicht selbst bei dem Menschen die Galle derer, welche von Vegetabilien leben, mehr Gallensteine erzeugt, als derjenigen, welche hauptsächlich Fleisch essen.

Die Seehunde müssen sich wahrscheinlich viel lecken, da die Haarbälle bei ihnen nicht so sehr selten scheinen. Fourcroy und Vauquelin erzählen [104]), dafs Péron von seiner Reise mehrere aus der *Phoca*

102) *Thesauri T. II. p.* 141. *Tab.* 113. *Fig. G.* Das Thier, wovon der Bezoar genommen seyn sollte, war angeblich sehr grofs und wog funfzig Pfund. „*Racemum veluti uvarum immaturarum, inter se concretarum refert lapis hic, e pluribus conflatus calculis, magnitudinis inaequalis, dilute cinereis, admodum duris, intus splendentibus, instar lapidis Iudaici. Accepimus hoc concrementum nomine genuini lapidis, qui e ventriculo Armadilli, in ora, quae vocatur Baye de Campeche, depromtus est.*“

103) *l. c. p.* 142. *Tab.* 113. *litt. m.* „*Est lapis noster saturate spadiceus, plurimis inaequalis tuberculis, veluti verrucis majoribus, quae alias rursum minusculas ex se promunt, duritie praeditus vere lapidea, sapore amaro.*“

104) *Annales du Muséum d'hist. nat. T. IV. p.* 336. *Egagropiles à poils jaunes ou fauves feutrées.*

pusilla mitgebracht hat. Auf unserm Museum [105]) ist auch ein Haarball aus dem Seehunde befindlich — Ich selbst habe mehrere Seehunde geöffnet, aber nie dergleichen gesehen.

Von Walfischen kenne ich mit Sicherheit nur die Steine aus dem Delphin, deren oben bei den Geschlechtstheilen gedacht ist. Zwar könnte hier noch des grauen Amber's erwähnt werden, allein so gewiſs es ist, daſs man denselben zuweilen bei dem Pottfisch gefunden hat, so ist es dennoch nicht auſser allem Zweifel gesetzt, daſs er nicht von demselben verschluckt sey. Allein wenn dies auch nicht der Fall wäre, so ist der Amber doch keine Concretion, die mit den Bezoaren der andern Thiere zusammenzustellen wäre, und man müſste es für eine Kothverhärtung halten, wie auch Blumenbach thut [106]). Sollten aber die ungeheuer groſsen Stücke, die an den Küsten gefunden werden, und dergleichen besonders Rumph erwähnt, aus dem Darm eines Walfisches ausgeschieden werden können?

B. Vögel.

Die wenigen Gallen- und Harn-Concretionen aus ihnen habe ich im vorigen Abschnitt umständlich aufgeführt.

C. Amphibien.

Aus der Schildkröte habe ich Gallen- und Harnsteine beschrieben, und bei den Geschlechtstheilen eines zweifelhaften Steins erwähnt. Ferner habe ich vom Chamäleon und andern Eidechsen der sonderbaren Concretionen der Cloaca gedacht.

Es bleibt mir also nur übrig von den Bezoaren zu reden, die man bei Krokodilen und verschiedenen Eidechsen gefunden hat.

Ueber die Steine der Krokodile reden die Schriftsteller verschieden. Marcgrav (S. 242.) sagt, Ximenes erzähle, daſs der Krokodil, wenn er keine andere Nahrung habe, Steine verschlucke, die man auch daher oft in

105) *Museum Anatomicum p. 325. n. 1883. Pila in ventriculo phocae reperta.*

106) Blumenbach (Naturgesch. neunte Auflage S. 137.) „Die köstliche, wohlriechende graue Ambra ist eine Stercoralverhärtung, die sich zumal im dicken Darm mancher davon erkrankender Caschelotte findet.“ Sehr ausführlich handelt davon *Denys-Montfort* (*Histoire naturelle des Mollusques. T. I. Paris an X. 8. p. 323—379*), und hat alles zusammengestellt, um zu beweisen, daſs der Amber im Darm der Walfische gebildet werde.

dessen Magen finde. Dobritzhofer [107]) sagt auch, dafs die Steine, welche man im Magen des Krokodils antreffe, den gemeinen Kieseln ähnlich seyen. Dies könnte machen, dafs man sie für verschluckt hielte, allein wenn es wirkliche Kiesel wären, so würde man sie wohl nicht so leicht zu Pulver reiben, und doch führen Ximenes und Dobritzhofer an, dafs man die Steine zu Pulver reibe und gegen den Nierenstein anwende.

Die Steine, welche Seba [108]) beschreibt und abbildet, sind offenbar Bezoare, sind aus dünnen Schichten zusammengesetzt, sehr zerreiblich u. s. w. Ob sie wirklich aus Krokodilen sind, ist zwar nicht mit voller Gewifsheit zu beweisen; doch ist es sehr wahrscheinlich, da so viele Schriftsteller solcher Steine erwähnen, sie also nicht selten seyn können. Seba sagt, dafs er viele Exemplare davon besitze, gröfsere und kleinere; er hatte sie aus Amboina und Ceylon. Sie waren graugelb marmorirt, und auf der Oberfläche sehr uneben und mit kleinen harten Körnern besetzt, von der Gröfse eines Enteneies, aber auch kleiner und mehr länglich.

Auch kommen dergleichen nicht blofs bei Krokodilen vor. Marcgrav sah selbst 1641 einen Stein aus dem Magen eines Leguans nehmen [109]). Dieser Bezoar war von der Gröfse eines mittelmäfsigen Hühnereies, auch fast so gestaltet, nur mehr zusammengedrückt; äufserlich glatt, weifslich; aus Schichten zusammengesetzt, und inwendig weifslich oder grau, und seine Substanz von der Härte der gewöhnlichen Bezoare. Seba [110]) gedenkt dieses Steins auch, und sagt, er sey von der Gröfse eines Taubeneies, graugelb mit dunklerem Braun schattirt. Ueberdies hat er aber auch noch aus zwei andern Eidechsen Bezoare, nämlich aus dem *Tupinambis, Lacerta monitor* [111]), von der Gröfse eines Taubeneies, hellgrau mit Schwarz gefleckt, sonst wie die Bezoare des Krokodils gestaltet; und aus

107) *T. I. p.* 328. *Lapilli silici vulgari similes in Crocodili stomacho reperti.* — Ximenes sagt a. a. O. die Steine im Magen des Krokodils seyen *Semicocti.*

108) *Lapis Caimanus se Crocodilinus. Thes. II. p.* 139. *Tab.* 113. *fig. a. b.*

109) *Hist. quadrup. et serp. libr. VI. p.* 237.

110) *l. c. p.* 140. *tab.* 113. *litt. d. Lapis Guanos sive Iguanae.* — Lacépède (Naturgeschichte der Amphibien, a. d. Franz. von Bechstein, 1. B. Weimar 1800. 8. S. 495.) erzählt auch, dafs Dombey aus Südamerika einen Leguan-Bezoar für das königliche Kabinet mitgebracht hat, und beschreibt ihn ausführlich. Lacépède's Behauptung aber ungeachtet scheint es nur ein Stück von einem Bezoar zu seyn.

111) *l. c. litt. e. Lapis Lacertae marinae, saurus dictae, alias Sauvegarde appellatae.*

einer zeylanischen Eidechse [112]), von der Farbe des vorigen Bezoars, aber glatt und nicht gekörnt.

Es scheint mir sehr sonderbar, daſs sich bei diesen Thieren so leicht Bezoare im Magen erzeugen, da sie von animalischer Nahrung leben und so stark verdauen. Man sollte glauben, daſs noch besondere uns unbekannte Bedingungen zu jener Erzeugung beitragen müſsten.

D. Fische.

Der Nierensteine, der einzigen Steine aus Fischen, die bisher bekannt sind, ist oben hinlänglich gedacht worden.

Breislak's [113]) wunderliche Meinung, daſs die Seebälle (*pilae marinae*) nicht durch die Fluthen, sondern in den Magen der Fische gebildet, und von diesen ausgebrochen würden, verdient wohl keine nähere Beleuchtung, da der Ungrund davon zu klar ist. Die wenigsten Fische könnten solche groſse Bälle ausbrechen, allein nie ist ein solcher in einem Fisch gefunden, und so wie ich an dem Ufer der Ost- und Nordsee keine solche Bälle fand, so traf ich hingegen am mittelländischen Meer dieselben in einer ganz ungeheuren Menge. Das wäre doch sonderbar, daſs nur bei den Fischen im mittelländischen Meer dergleichen gebildet, aber auch nie in ihrem Körper angetroffen würden, während die Haarbälle anderer Thiere in diesen seit undenklichen Zeiten gefunden sind.

Zum Schluſs bemerke ich noch, daſs ich diese vor ein Paar Jahren gehaltene Vorlesung gegenwärtig (1815 im September) zum Druck mit vielen Zusätzen vermehrt habe; man darf sich also nicht wundern, darin Bücher der letzten Jahre citirt zu finden.

112) *ib. litt. f. Bezoar lacertae zeylanicae*, der Eidechse, welche Seba sonst auch *Caudiverbera* nennt.

113) *Voyages physiques et lithologiques dans la Campanie. Tome II. Paris* 1801. 8. *p.* 35. Eine leere Behauptung ohne alle Beweise.

Ueber

die sensible Atmosphäre der Nerven.

Von Herrn D. K. A. Rudolphi *).

Schon sehr oft ist die Frage aufgestellt worden, wie es zugehe, daſs unsere Haut überall empfindlich sey, da doch nicht in jedem Punkt derselben Nerven anzunehmen sind. Man hat bald diese, bald jene Erklärung gegeben; in den neuern Zeiten hat aber keine so vielen Beifall gefunden, als die von einem sensiblen Wirkungskreis, oder von einer sensiblen Atmosphäre der Nerven. Man wendet sie jetzt vielfältig an, um mancherlei Phänomene zu erklären, und ihre Prüfung scheint mir daher um so wichtiger.

Die Idee kommt schon früher vor **); da aber Reil diese Hypothese ausführlich vorgetragen hat, und Humboldt dieselbe als erwiesene Wahrheit dargestellt zu haben glaubt, so werde ich ihre Ansichten und Gründe zuerst ausführlich mittheilen, und sodann dieselben unbefangen prüfen.

Reil ***) glaubt, daſs wir nicht an allen Orten, wo wir ein Gefühl und einen Reiz zu willkührlicher Bewegung beobachten, den Nerven selbst oder sein Mark als materiell vorhanden annehmen können. Es scheint ihm vielmehr, daſs die Wirksamkeit der Nerven sich über ihre Materie hinaus erstreckt, und daſs ihre Endspitzen gleichsam von einem sensiblen Wirkungskreis umgeben sind.

Die

*) Vorgelesen den 22sten Julius 1813.

**) John Brown's System der Heilkunde. A. d. Engl. von C. H. Pfaff. 2te Aufl. Kopenh. 1798. 8. S. 154. Note n.

***) J. Chr. Reil *Exercitationum Anatomicarum Fasc. I. de structura nervorum. Hal.* 1796. *fol. p.* 28, 29.

Die Nerven vertheilen sich nach ihm zwar in den Muskeln auf das feinste, aber nicht so fein als die Muskelfasern. Ja, es scheint ihm der Nerve wegen seines zusammengesetzten und röhrigen Baues nicht einer so feinen Zertheilung fähig, als die aus gleichartiger Materie gebildeten Muskelfasern.

Die letzten, durch Corrosion entblöfsten und dem Gesicht noch unterscheidbaren Nervenenden sind ziemlich dick, so dafs man kaum glauben kann, dafs sie von dieser Dicke plötzlich in unsichtbare Fäden übergehen. Nie ist ein gleichförmiges Verhältnifs zwischen dem Umfang eines Muskels und der Nerven, die zu ihm gehen. Der Nerve dringt mehrentheils von der Seite in die Mitte des Muskels, und indem er sich in Aeste theilt, durchschneidet er wenigstens beim Eintreten die Muskelfibern in die Queere; welches kaum geschehen könnte, wenn jede Muskelfaser einen Nerven bekommen müfste. Der vom Nerven zur Zusammenziehung gereizte Muskel zieht sich in allen Punkten zusammen, obgleich kaum überall ein Nerve seyn kann, wo Zusammenziehung ist: denn wo wäre dann das Muskelfleisch? Reil hat auch nie einen Uebergang der Nerven in die Muskelfasern wahrgenommen, sondern ihn stets, nachdem das Zellgewebe zerstört worden, frei zwischen dan Muskelfasern gefunden. Ein jeder, beinahe mathematische, Punkt der Haut mit der Spitze der feinsten Nadel berührt, empfindet. Die Haut müfste aber eine ununterbrochene Mark-Ausbreitung seyn, wenn an jedem empfindenden Punkt Nerven da seyn müfsten; wir finden diese auch weder durch das Messer, noch durch die Corrosion.

Wir können ziemlich starke Nervenäste nach Reil abschneiden, ohne dafs die Empfindung oder Bewegung verloren geht. Wenn man bei Hunden den zurücklaufenden Nerven abschneidet, so verlieren sie gleich die Stimme, bekommen dieselbe aber nach einiger Zeit wieder. Wie bekommen diese Theile ihre Nervenkraft zurück? Entweder wird der Nerve reproducirt oder der reizbare Wirkungskreis desselben erweitert.

Die Fibern der übrigen Muskeln stehen eben so wenig in unmittelbarer Verbindung mit den Nerven, als die des Herzens. Dafs die Nerven mit den Gefäfsen ins Herz treten, wird keiner läugnen.

Ein Theil, der im gesunden Zustande unempfindlich ist, bekommt nicht selten Empfindlichkeit, indem in einer Krankheit seine thierische Materie aufgelockert wird. Es scheint ein Gesetz des thierischen Körpers zu seyn, dafs die Theile desselben in dem Verhältnifs, wie sie aus einem dichtern in einen mehr lockeren Zustand treten, eine gröfsere Empfänglichkeit für die Nervenwirkung bekommen. Die sonst unempfindliche Hornhaut zeigt nach ausgezogenem Staar geschwollene und empfindliche Hornränder.

Wie vermag aber der Nerve einen reizbaren Wirkungskreis um sich hervorzubringen? Es scheinen sowohl die Nerven als die Gefäfse sich in dem in den Muskeln und zwischen andern Theilen befindlichen Zellgewebe frei zu endigen. Das Zellgewebe scheint gleichsam ein Behälter zu seyn, worin die Gefäfse ihren Stoff ergiefsen, der auf die Muskelfaser wirkt und ihre Mischung verändert. In Hinsicht der Empfindung aber ist es schwieriger zu erklären, wie der Nerve in die Entfernung (*in distans*) wirken könne. Entweder sind die Theile, welche nicht Nerven sind, empfindlich, oder pflanzen ihre Veränderungen zu dem nächsten Nerven fort, worauf die Seele mit Hülfe ihrer Beurtheilungskraft den empfangenen Eindruck auf den Ort bezieht, welchen der Reiz traf.

Um nichts auszulassen, habe ich das ganze hieher gehörige Kapitel aus Reil's trefflichem Werk über den Nervenbau wörtlich übersetzt geliefert. Ich mufs aber noch hinzufügen, was derselbe Schriftsteller an einem andern Ort darüber sagt.

Im dritten Band seines reichhaltigen Archivs für die Physiologie *) erklärt er sich dahin, dafs er unter dem reizbaren Wirkungskreis der Nerven nicht etwa ein elastisches Fluidum verstehe, das gleich einem Heiligenschein den Umfang der Nerven umschwebt, sondern er denke sich darunter ein Vermögen, den an sie angrenzenden Theilen, die nicht Nerven sind, in einem verschiedenen Maafs, nach ihrer verschiedenen Capacität, Reizbarkeit und Empfindsamkeit mitzutheilen. Wie sie diese bewerkstelligen mögen, lasse er völlig unentschieden. Wenn die Haut überall empfinde, und nicht überall Nerven habe, so bleibe keine andere Erklärung übrig, als entweder anzunehmen, dafs der nervenleere Punkt auch Gefühl habe, oder dafs der Reiz sich von demselben zum benachbarten Nerven fortpflanze, und das erstere sey seine Ansicht. Die Fortpflanzung eines mechanischen Drucks könne nicht anders als mechanisch durch Druck zur Seite und unterwärts geschehen. Allein der Druck einer spitzen Nadel und der Druck eines weichen thierischen Theils erregen so verschiedene Gefühle, dafs wir sie leicht unterscheiden. Wir fühlen aber immer eine spitze Nadel, nie einmal diese und viermal einen stumpfen Druck. Die Empfindlichkeit des frischen Callus, in allen Punkten desselben, an entblöfsten oder gebrochenen Knochen,

*) S. 200, 201.

rühre wohl schwerlich von Nerven her, die überall in demselben gegenwärtig seyen. Sollte wohl die Säure des unreifen Obstes beim Stumpfwerden der Zähne durch die ganze Substanz des oft gesunden Zahns dringen? sollte sie die Empfindung des Stumpfseyns dadurch hervorbringen, daſs sie die Reizbarkeit des Zahnnerven erhöhe? Er könne wenigstens dieser Meinung nicht beipflichten, sondern glaube vielmehr, daſs durch die Säure die Oberflache des Zahns aufgelockert und empfindlich werde, und daſs diese zunächst die specifike Empfindung des Stumpfseyns errege. Oft seyen die Zahnnerven z. B. beim Zahnweh äuſserst empfindlich, die Zähne schmerzen, aber seyen (dann) nicht stumpf. Die kleine ungeschwängerte Gebährmutter sey am Ende der Schwangerschaft vielleicht um einige hundert male an Masse vermehrt: wahrscheinlich nicht durch Zunahme der Nervensubstanz, und doch sey sie bei und nach der Geburt, wo nicht mehr, doch eben so empfindlich, als im ungeschwängerten Zustande. — Bis dahin Reil.

Humboldt in seinem schätzbaren Werk über die gereizte Muskel- und Nervenfaser *), führt unter jenen, ohne diese Hypothese angeblich schwer zu erklärenden Phänomenen, noch das auf, daſs die Zungenwärzchen so weit auseinander stehen, daſs ohne solche Zuleitung der durch so wenige sensible Punkte erregte Geschmack sehr schwach seyn müsse. Vorzüglich aber will er die sensible Atmosphäre durch seine galvanischen Versuche in Gewiſsheit gesetzt haben. Wenn nämlich der ischiadische Nerve eines Froschmuskels durchschnitten war, und die Enden $\frac{5}{4}$ Linien aus einander lagen, so konnte doch der Schenkel durch das abgeschnittene Nervenstück beim Galvanisiren in Bewegung gesetzt werden, wenn die Theile noch sehr reizbar waren **); so als die Reizempfanglichkeit aber geringer ward, muſsten auch die Nervenenden näher an einander gebracht werden, bis endlich bei sinkender Reizbarkeit der Versuch gar nicht mehr gelang. Die Nervenenden brauchten auch nicht gerade gegenüber, sondern konnten selbst einander zur Seite gelegt werden. Auch konnte Muskelfleisch in Bewegung gebracht werden, wenn der mit anderm Muskelfleisch umwickelte eine Arm der silbernen Pincette noch $\frac{3}{4}$ Linien von ihr entfernt war, während der andere auf der Zinkplatte stand, worauf der ischiadische Nerve lag ***).

*) I. B. Posen und Berlin 1799. 8. S. 163—171, und S. 211—234.

**) Fig. 62.

***) Fig. 65.

Humboldt folgert daher, dafs man sich um jeden Nerven, wie um einen magnetischen Stab, eine punktirte Linie denken kann, welche den sensiblen und reizenden Wirkungskreis desselben bezeichnet *), also geradezu einen Heiligenschein, den **Reil** nicht will, worin sie abweichen; doch ist dies wohl eine Nebensache.

Mir scheint diese Meinung nicht annehmbar, so vielen Beifall sie auch bei Physiologen und Magnetiseurs gefunden hat. Hier meine Gründe.

Erstlich: wenn man in jedem noch so kleinen Theil der Haut Gefühl voraussetzt, ohne dafs überall Nerven vorhanden seyn können, so fragt sich wohl billig, welchen Maafsstab wir für das Kleine haben. Wenn ich eine Milbe mit der feinsten Nadelspitze berühre, so bedecke ich dadurch eine Menge Muskeln, Nerven und Gefäfse; sind nicht eine Menge Thiere selbst kleiner als eine solche noch immer sichtbare Nadelspitze? Auf jedem Punkt meiner Haut, wohin ich steche, quillt Blut hervor, überall kann etwas eingesogen werden, und dies sollte wohl schon die überall mögliche Empfindung erklären: denn es zeigt offenbar, dafs das Gewebe der Haut nur sehr feine Theile aufnimmt, und der ein Punkt scheinende Theil Blutgefäfse, Lymphgefäfse, Nerven und den umhüllenden Zellstoff enthält. Die ausgespritzte Haut nämlich sieht ganz roth aus, und man erblickt darin Netze von mikroskopisch feinen Gefäfsen. Die Hautnetze der Lymphgefäfse sind eben so fein. Es steht also wohl nichts im Wege, eben so feine Verästelungen der Nerven anzunehmen, nur dafs wir dies nicht so darstellen können.

Reil's Hypothese, dafs die Nerven sich im Zellgewebe frei und ziemlich stark endigen, ist durchaus nicht zu billigen, und seinen Corrosionen traue ich hier durchaus nichts zu. Ich habe eine Menge feiner Theile unter dem Mikroskop untersucht, allein nie war ich im Stande, ihr letztes Ende zu erblicken, sie entzogen sich immer in der übrigen Materie meinen Augen. In den Zwiebeln des Schnurrhaare des Seehundes sind bedeutende Nervenzweige vom fünften Paar; man sollte glauben, hier könnten sie sich nicht verbergen, und doch verlieren sie sich hier eben so gut im gefäfsreichen Zellstoff vor Messer und Loupe, wie anderwärts in den Muskeln und in den Häuten der Gefäfse. Bedenkt man überdies, dafs es eine Menge Würmer (im Linnéischen Sinn) giebt, in denen keine Spur von Nervenfasern zu entdecken ist, wo sich aber das Daseyn des Nervenstoffs durch Empfindungen

*) Fig. 64.

und Bewegungen dieser Thiere auf das deutlichste verräth, so ist man wohl gezwungen anzunehmen, daſs der Nervenstoff ihrer übrigen Masse einverleibt und gleichsam mit ihr verschmolzen ist; und mit hoher Wahrscheinlichkeit kann man eine ähnliche Endigung in fast allen Theilen der gröſsern Thierkörper vermuthen.

Man darf sogar annehmen, daſs das Nichterscheinen freier Nervenenden unter dem Mikroskop ein Beweis gegen sie ist. Ich sehe wenigstens nicht gut ein, wie diese freien Enden sich jedem Blick entziehen können. Verschmelzen aber die feinsten Nervenenden mit der Muskelfiber oder mit der Haut, so müssen sie undarstellbar seyn.

Uebrigens darf man die Sache auch nicht übertreiben: es ist nicht der Fall, daſs jede noch so leise und feine Berührung überall auf der Haut empfunden wird. Ich habe hierüber öfters Versuche angestellt. Berühre ich mit der Spitze eines feinen Haars (z. B. eines menschlichen Kopfhaars) leise die innere Fläche meiner Hand, oder eine solche Stelle des Rückens meiner Finger, wo keine Haare sind, so empfinde ich nichts; indem ich eben solche haarlose Stellen der Wange vor einem Hohlspiegel aufsuche und mit dem feinen Haar sehr leise berühre, so empfinde ich auch gewöhnlich nichts, obgleich hier die Menge der Hautnerven bekanntlich äuſserst groſs und die Oberhaut zart ist; treffe ich hingegen, sey es im Gesicht, sey es auf der Hand, ein Haar, so ist schnell ein Kitzeln da, und man sieht deutlich, wie das Haar bewegt wird, wodurch die Nerven in der Zwiebel des Haars afficirt werden müssen *). Man kann auch selbst mit der schiefgehaltenen Nadelspitze die Haut so leise berühren, daſs es nicht empfunden wird. Es wird also, um auf der Haut ein Gefühl zu erregen, entweder irgend eine Berührung eines Haars, oder die nicht allzuleise Berührung der Haut selbst erfordert.

Für jenes Verschmelzen der Nervenmasse spricht auch sehr der Umstand, daſs wir nie aus dem Gefühl der Berührung allein den berührten Ort erkennen, sondern dazu muſs entweder eins der Sinnorgane mitwirken, oder wir finden den Ort durch Nachdenken: doch dann selten so genau. Wenn ich die Hände auf dem Rücken halte, und eine Nadel mit der einen Hand

*) Das Haar selbst ist bekanntlich nervenlos und gefaſslos, obgleich einige ältere Anatomen, durch einen falschen Schein getäuscht, dem Haar Gefäſse, auch wohl Nerven zuschrieben. In der Zwiebel aber, worin das Ende des Haars steckt, sind viele Nerven und Gefäſse. Siehe meine *Diss. de pilorum structura. Gryphisw.* 1806. 4.

erst einigemal hin und her drehe, dann aber auf einen Finger der andern Hand setze, so weifs ich gewöhnlich im ersten Augenblick nicht, wohin ich getroffen habe. Daher betasten oder besehen wir auch den schmerzhaften äufsern Theil unsers Körpers, daher täuscht man sich so oft über den Sitz der Schmerzen; doch darf ich diesen Punkt hier nicht weiter ausführen, der eine eigne Abhandlung leicht ausfüllen würde.

Man würde also dem Obigen zur Folge, um die Empfindungen auf der Oberflache unsers Körpers zu erklären, keinesweges nöthig haben, zu einer sensiblen Atmosphäre der Nerven seine Zuflucht zu nehmen.

Eben so wenig hat man dies zweitens nöthig, wenn man die Empfindlichkeit anderer Theile im gesunden Zustande untersucht. Wie man von der menschlichen Zunge sagen kann, dafs ihre Geschmackwärzchen weit auseinander stehen, das begreife ich nicht. Spräche man von der Zunge vieler Thiere, so hatte man Recht; bei ihnen steht es aber auch dann mit dem Geschmack immer mifslich. Bei dem Menschen hingegen sind die Zungenwärzchen nahe bei einander; wenn sie aber auch viel weiter abständen, so liefse sich der Geschmack doch sehr füglich ohne eine solche Atmosphäre denken, da die schmeckbaren Körper im Speichel aufgelöst werden, mithin etwas Flüssiges, das sich leicht über mehrere Wärzchen ausbreitet, dargeboten wird. Wenigstens ist es mir ganz undenkbar, wie etwas im Speichel aufgelöstes blofs einen Zwischenraum zwischen Nervenwärzchen treffen könnte, ohne diese selbst zu berühren.

Wenn der Muskel überall oscilliren und sich zusammenziehen kann, so ist das ohne jene Hypothese leicht erklärlich. Wir sehen nämlich, dafs nächst den Sinnesorganen kein Theil so viele Nerven erhalt, als die Muskeln, und so unwahrscheinlich es Reil vorkommt, dafs die Muskeln- und Nervenfasern verschmelzen, so möchte man doch kaum etwas anderes annehmen können, wenn man kleine und höchst nervenreiche Muskeln, wie z. B. die des Auges, untersucht, bei denen man die nach ihm freien Nervenenden doch finden müfste. Allein davon gänzlich abgesehen, so ist es ja doch nicht anders denkbar, als dafs bei der Einwirkung des Nerven auf den Muskel, wenigstens auf jedes Faserbündel (*lacertus*) desselben afficirt gewirkt wird, da keins ohne Nerven ist; jede kleine mikroskopische Faser braucht also keinen Nerven zu haben, da der Bündel (*lacertus*) im Ganzen bestimmt wird, nie die einzelne Faser.

Einige andere Erscheinungen kann ich leichter berühren, wenn ich drittens von der krankhaften Empfindlichkeit der Theile geredet habe.

Ich nehme es als einen ausgemachten Erfahrungssatz an, dafs kein Theil, der gänzlich nervenlos ist, jemals empfindlich wird. Dahin gehört aber auch unter allen festen Theilen ganz allein die Oberhaut mit den Haaren und Nägeln. In ihnen sind weder Gefäfse noch Nerven, denn es versteht sich, dafs ich die Haarzwiebeln nicht hieher rechne, die sowohl an Nerven als Gefäfsen sehr reich sind, allein eigne Theile in der Haut ausmachen. Die Oberhaut, das Haar, der Nagel, können so aufgelockert seyn, wie es nur möglich ist, dennoch bleiben sie immer unempfindlich.

Andere Theile wiederum haben einige wenige Gefäfse, allein keine eigne Nerven, sondern nur blofs solche, die jenen angehören. Sie sind daher auch im gesunden Zustande beinahe ganz oder völlig unempfindlich, wenn man nicht auf die Gefäfse trifft; im Krankenzustande wächst ihre Empfindlichkeit; indem ihre Masse nämlich erweicht wird, mufs die Fortpflanzung jedes Eindrucks zu den Nerven der Gefäfse leichter werden, die selbst in einem krankhaft empfindlichen Zustand sind, und also die geringste Affection mit Schmerz büfsen.

Bei den übrigen sehr nervenreichen Theilen ist die krankhaft vermehrte Empfindlichkeit noch mehr in die Augen fallend, allein auch ohne Hypothese noch leichter zu begreifen.

Die schwangere Gebährmutter ist in keinem kranken, aber höchst gereizten Zustande, so dafs auch hier die leichte Fortpflanzung jedes Eindrucks und die vermehrte Empfindlichkeit von selbst erklärt wird.

Die Zähne sind die einzigen Knochen, welche frei stehen, und nur durch eine harte Rinde, den Schmelz, vor der schädlichen Einwirkung der Luft gesichert werden. Da aber dieser Schmelz, aufser wenig Talkerde und Natrum, aus Kalkerde besteht, die vorzüglich mit Phosphorsäure, zum Theil aber auch mit Kohlensäure und Flufsspathsäure verbunden ist, so kann es wohl nicht anders seyn, als dafs an den Zahn gebrachte Säuren, je nachdem sie stärker oder schwächer sind, in demselben eine Veränderung bewirken; starke Säuren zerfressen die Zähne schnell, besonders den Schmelz, oder sie färben diesen bläulich; schwächere wirken weniger; alle aber, indem sie durch diese und die ähnliche Knochensubstanz auf den Nerven wirken, erregen sie zuerst des Gefühl des Stumpfseyns, allein wenn sie sehr stark waren, geht dies bis zu heftigem Schmerz. Dafs dies die rechte Erklärung, und dafs die Knochensubstanz des Zahns nicht empfindlich ist, sieht man leicht aus Folgendem: Man kann einen gesunden Zahn bis an seine Höle abfeilen, ohne dafs es schmerzt; man kann Alkohol und andere starke Reizmittel auf den Zahn bringen, sie werden nicht empfunden. Der Nerve kann aber auch durch Zurückwirkung des Gehirns bei hohen unreinen Tönen so gereizt werden, dafs die Zähne das Gefühl des Stumpfseyns bekommen; ja dies entsteht bekanntlich sogar durch Vorstellungen, wenn man z. B. daran denkt, dafs mit einem Messer auf Glas oder Porcellan gestrichen, oder dafs Kork geschnitten wird. Hierbei kann man wohl unmöglich auf die empfindliche Knochensubstanz des Zahns rechnen.

Der Callus der Knochen besteht aus einem gefäfsreichen Zellstoff, seine Gefäfse hängen mit den übrigen Gefäfsen des Knochens zusammen, und können unmöglich für nervenlos gehalten werden; die Berührung mufs also darin eine Empfindung hervorbringen.

Wollte man es bezweifeln, ob hier Nerven wären, so könnte man doch den Zusammenhang mit den übrigen stets nervenreichen Gefäfsen nicht läugnen; allein da die Erzeugung neuer Nervensubstanz oder die Reproduction der Nerven durch Fontana's, Meyer's und Haighton's Versuche aufser allen Zweifel gesetzt ist, so wird man sie auch wohl hier gelten lassen können.

Wenn Reil gelegentlich oben anführte, dafs ein Nerve, ohne Empfindung zu erregen, durchschnitten werden kann, so bezweifle ich das durchaus, falls der Nerve noch gesund war: denn von einem gelähmten kann nicht die Rede seyn. Alle Erfahrungen sprechen von den heftigen aber blitzschnell vorübergehenden Schmerzen bei Zerschneidung des Nerven; z. B. des Sehnerven bei Exstirpation des Auges.

Was viertens Humboldt's Versuche betrifft, so glaube ich, dafs sie durchaus nichts beweisen. In allen seinen angezogenen Fällen kann von nichts anderm, als von einem Ueberströmen der galvanischen oder elektrischen Flüssigkeit die Rede seyn. Getrennte Nervenstücke lassen diese übergehen; so lange sie gut leiten, in gröfserer, sobald sie minder gut leiten, in geringerer Entfernung; endlich gar nicht mehr. Wie wenig hier von einer Wirkung der Nervenkraft als Folge des Lebens die Rede seyn kann, sieht man daraus, dafs auch die Seiten des Nerven, also die aus Zellstoff gebildeten Nervenscheiden, die Leitung besorgen; noch mehr aber dadurch, dafs sogar Stücke von allerlei Thieren und Pilze zwischen die Nerven gebracht wer-

werden können, und die Wirkung bleibt, endlich sogar wenn Nervenstücke von verschiedenen Thieren an einander gebracht werden. Was hat dies mit dem lebenden Nerven zu thun?

Dafs die Imponderabilien leicht fortströmen, ist Jedem bekannt, es bedarf also keiner Nervenatmosphäre, um sie aufzufangen. Eine starke Electrisirmaschine giebt schon einen Schlag in ziemlicher Entfernung; das Feuer, das Licht *) wirken in grofser Ferne auf uns. Wollen wir das durch einen Wirkungskreis der Nerven erklären? Er müfste dann ins Unendliche gehen.

Ich würde diesen gleich annehmen, wenn man mir einen einzigen kleinen Versuch, so wie ich es wünschte, zeigen wollte. Statt nämlich Wärme, Electricität und dergleichen einwirken zu lassen, steche man dicht neben den gröfsten Nerven, welchen man will, ohne einen thierischen Theil zu treffen, also in die Luft. Statt dafs Humboldt eine Atmosphäre von $\frac{5}{4}$ Linien annimmt, bin ich zufrieden, wenn der blofsliegende Nerve den Stich in der Entfernung von $\frac{1}{10}$ Linie empfindet. Und wenn man die Versuche an Thieren für trüglich hält, so kann man sie ja besonders jetzt sehr leicht an Menschen machen, wo Amputationen nicht selten sind. Wir bedürfen aber wohl solche Versuche nicht mehr, da sie nach unsern bisherigen vielen Erfahrungen negativ ausfallen müssen. Man hat am Stumpf bei Menschen den Knochen, die Sehnen vergebens berührt, gezwickt; in der Nähe der Nerven ist nie Empfindung hervorgebracht, nur in Theilen, die mit Nerven versehen sind, oder in diesen selbst. Dafs chemische Reize hier nicht passen, sieht jeder ein, denn sie sind zu diffusibel, wie Haller mit Recht gegen Laghi einwandte, sie geben nur unreine Versuche, fliefsen leicht zu Nerven hin.

Humboldt **) macht sich selbst diesen Einwurf, löset ihn aber nicht; denn wenn er sagt, dafs mechanische Reize heftiger seyn müssen, um Zuckungen zu erregen, so ist dies falsch. Ich habe Zuckungen auf leichte mechanische Reize in Theilen erfolgen sehen, die dem schwachen

*) Beiläufig gesagt, hätte ich grofse Lust, die Wirkung der Gerüche auf unser Geruchsorgan, wie die des Schalls auf unser Ohr und des Lichts auf unser Auge zu erklären. Ein Ueberströmen so unendlich vieler Theile in so grofse Weiten, ohne bemerkbaren Gewichtsverlust, scheint mir nämlich weniger annehmlich, als eine Einwirkung der riechbaren Körper auf die Luft, bestehe sie in einer Zersetzung derselben oder in einer Schwingung eigner Art.

**) A. a. O. S. 230.

chen galvanischen Reiz nicht gehorchten, und bei Froschherzen und vielen andern thierischen Theilen sehen wir mechanische Reize lange wirksam. Eben so falsch ist es, wenn er sagt, dafs über Empfindungen, als etwas subjectives, kein genauer Versuch anzustellen seyn möchte, weil Verwundungen immer ein gleichzeitiges verworrenes Gemisch schmerhafter Sensationen erregen: gesetzte Gemüther werden, wenn sie der Menschlichkeit den ersten Zoll abgetragen haben, immer im Stande seyn, über so etwas Rede und Antwort zu geben. Ich habe Männer genug gesehen, mit denen der Versuch gewifs geglückt wäre, wenn er glücken könnte *).

Fünftens: Nachdem ich, wie ich glaube, die Gründe für einen solchen sensiblen Wirkungskreis der Nerven hinreichend erwogen habe, sey es mir erlaubt, noch einiges dagegen anzuführen.

Es hat für mich nämlich etwas zurückstofsendes, dafs ich einerseits in den Nerven einen ganz eigenthümlichen Bau, der nirgends weiter vorkommt, finde, und dennoch auf der andern Seite glauben soll, dafs auch alle andere Theile wie Nerven wirken können. Ich weifs zwar, dafs es gläubige Seelen giebt, die nicht bezweifeln, dafs ein Frauenzimmer die auf ihren Unterleib gelegten wohl couvertirten und versiegelten Briefe lesen könne; allein so viel ich auch dem weiblichen Geschlecht zutraue, dies scheint mir doch über seine Macht zu gehen. Ein Magnetiseur wollte mir die Sache erklären, indem er sagte, die Damen läsen einen solchen Brief nicht, sondern sie bekämen nur davon Notiz. Ich verstehe aber nicht, wie man von einem solchen Brief Notiz bekommen kann, ohne ihn zu lesen oder lesen zu hören, und ich glaube, ich werde es nie verstehen. Könnten doch unsere kunsterfahrnen Magnetiseurs den wirklich Blinden diese Kunst mittheilen, denn den Damen hilft sie am Ende nicht viel **).

*) Wäre endlich Humboldts Ansicht richtig, so müfsten bei durchschnittenen Nerven eines Theils beim lebenden Thier oder Menschen die durchschnittenen Enden in einander wirken, und nicht gleich Lähmung erfolgen, die nur durch eine in der Folge statthabende Reproduction überwunden werden kann. So als das Rückenmark aber durchschnitten wird, sind alle Theile unter dem Schnitt gelähmt. Warum wirkt hier nicht die Atmosphäre, da doch die Nervenfasern keine ½ Linie von einander stehen. Die galvanische Flüssigkeit würden sie überströmen lassen, wie in Humboldt's Versuchen: das hilft aber nicht aus.

**) Wenn die Magnetiseurs annehmen, dafs ihre Schlafredner bei offenen Augen und Ohren nicht sehen noch hören, so haben sie den einzigen schlechten Grund dazu, dafs die Kranken nach dem Erwachen nicht wissen, dafs sie in jenem Zustande sahen und hörten. Ob die Magnetiseurs auch glauben, dafs Berauschte nicht sehen und hören, da diese auch

Unsere Pathologen sind grofsentheils eben so freigebig. Mit Erstaunen lieset man im Reilschen Archiv *) die von Martin in Lyon erzählte und von Harles übersetzte Geschichte von einem keuschen Kaufmann, dem nach langer Enthaltung der Same endlich in den Händen abgesondert ward; und viele glauben, dafs die Galle und der Urin auf der ganzen Haut abgesondert werden könne. Um dies annehmen zu können, mufs man alle anatomische Kenntnifs mit Fleifs zurücksetzen.

So wenig die Hand sehen kann, sondern nur das Auge, das dazu besonders eingerichtet ist, eben so wenig ist die Hand fähig Samen abzusondern, da sie zu andern Zwecken bestimmt ist. Nur die Hoden sondern Samen ab, wie die Castraten zur Genüge beweisen, denn nie hat man bei einem der Tausende von diesen den Samen in andern Theilen getroffen, als die zu den Hoden gehören. Wenn die Leber keine Galle erzeugt, so entsteht auch keine Gelbsucht, weil nämlich die Galle nur dort ihren Ursprung nimmt; wird aber die Galle in der Leber gebildet, ohne dafs sie aus den Gallengängen wegen deren Krampf u. s. w. abfliefsen kann: dann wird sie eingesogen, ins Blut gebracht, und so nach allen Theilen geführt, wodurch Gelbsucht entsteht. Jenes so gerühmte Vicariat der Theile also, vermöge dessen einer die Geschäfte der andern versehen soll, findet nirgends statt, wo das Geschäft einen eigenthümlichen Bau verlangt.

Wozu hätte auch die Natur die Organe so kunstreich gebildet, und denselben Bau eines jeden in Modificationen bei allen Thieren durchgeführt, wenn ein Theil wie der andere wirken könnte. So wie ein Theil krankhaft verknöchert, hört auch seine ehemalige Function, wenigstens in den verknöcherten Stellen, auf; man sollte also glauben, dafs wenn ein Gefäfs u. s. w. zum Nerven würde, es Nerve bleiben müsse. Hier sollen beliebig alle Theile Knochen, Knorpel u. s. w. dies bleiben, und doch wie Nerven wirken; sie sollen es auch nur nach dem Gefallen der Nerven thun.

Die Hypothese gehört daher gewifs zu den verderblichsten, da sie die Form und Mischung, also das Allerwesentlichste, für einerlei hält; denn das thut sie doch, indem sie annimmt, dafs ein Klumpen Fett, und jeder andere

häufig nachher von ihrem Zustand im Rausch nichts mehr wissen. Möchten die Herren ihre Gaukelspiele doch etwas versteckter treiben, oder wenn sie die Kraft haben, jene Wunder zu bewirken, wirklich Blinde und Taube durch das Sonnengeflecht sehen und hören zu lassen. Das würde der bündigste Beweis für das Vicariat seyn.

*) B. 4. S. 201.

noch so wenig organisirte Theil, wie durch den Schlag einer Zauberruthe ohne weiteres als Nerve wirken kann.

Und wenn dies ist, wozu die so grofse Menge Nerven? Humboldt nimmt an, dafs die sensible Atmosphäre der Nerven bei dem Frosch $\frac{5}{4}$ Linien beträgt: allein es ist gewifs bei diesem ganzen Thier keine Stelle von dem Umfang einer halben Linie, wo kein Nerve wäre.

Wie viel einfacher ist es, jedem Theil seine eigenthümliche Function zuzuschreiben, die aber nach den Umständen erhöht oder vermindert *) werden kann, so dafs derselbe Nerve bald höchst empfindlich, bald sehr abgestumpft ist; derselbe Muskel bald gelähmt ist, bald mit ungeheurer Kraft wirkt.

So als ich die Nerven eines Theils unterbinde, ist er ohne Gefühl und Bewegung, und es strömt nichts von der Atmosphäre anderer Nerven oder von seiner eignen über. So als ich das Band wegnehme, ist die Thätigkeit wieder da, und bei verstärktem Antrieb wird die Empfindung zu Wollust oder Schmerz, und die leiseste Berührung eines Theils erschüttert den ganzen Körper. Beim durchschnittenen Nerven ist alles todt.

Das alles ist ohne Nerven-Atmosphäre begreiflicher, und ich halte es daher für überflüssig, die eben so falschen Anwendungen dieser Hypothese, z. B. auf die Bewegung der Iris durch die Einwirkung des Sehnerven auf den Ciliarknoten u. s. w., hier durchzugehen.

*) Also an Energie, oder intensiv, ohne dafs gerade extensiv etwas verändert werden darf. Die gröfsere räumliche Ausdehnung ist häufig sogar im Organismus ein Moment, das die Energie schwächt.

Tabellarische Uebersicht der Vertheilung der Vögel über die Erde.

Von Herrn Illiger *).

Vorwort.

Die folgende Abhandlung von der Vertheilung der Vögel über die Erde enthält das Ganze, dessen Anfang über die beiden ersten Ordnungen der Vögel ich das letztemal die Ehre hatte, der Akademie vorzulegen. Damals waren die vielen zu dieser Arbeit nöthigen Untersuchungen noch nicht beendigt, und eine Menge für dieselben wichtiger Thatsachen, die ein erwarteter reicher Zuwachs des Zoologischen Museums verhiefs, noch abzuwarten. Die ins Einzelne gehenden Bemerkungen jenes Aufsatzes sind nicht fortgesetzt, sondern diesmal nur die allgemeinen und zur Erläuterung der Tabellen unentbehrlichen Uebersichten geliefert, so dafs nur einige einzelne Bemerkungen wiederholt werden durften.

Bei der Klasse der Vögel hat man bisher noch gar keinen Versuch gemacht, sie nach ihren geographischen Verhältnissen zu betrachten; um so eher darf das erste Unternehmen dieser Art auf Nachsicht rechnen, und man wird es ihm zu Gute halten, dafs viele Seiten, die es zur Ausführung darbietet, noch nicht benutzt sind.

*) Vorgelesen den 19ten November 1812.

Ueber das Nützliche eines solchen Unternehmens in wissenschaftlicher Hinsicht führe ich nur an, dafs, abgesehen von der dadurch gegebenen Beantwortung der so natürlichen Frage, wo die uns bekannten Thiere leben, der Naturforscher durch ähnliche Uebersichten aller organischen Erzeugnisse jedes Theils der Erde in den Stand gesetzt wird, aus der Beschaffenheit der Einen auf die Andern zu schliefsen, und den wechselseitigen Zusammenhang dieser Naturprodukte in einem Lande oder Klima nachzuweisen, und zu erforschen, wie Eine Klasse die andere bedingt und bestimmt; diese Schlüsse auch auf die unorganische Natur auszudehnen, und vielleicht selbst die Gesetze der in jeder Sphäre möglicher Bildungen aufzuspüren, — dafs der Naturbeschreiber durch dieselben oft deutliche Winke erhält, um eine abweichende Form gehörig zu klassificiren oder eine unvollständige Beschreibung richtig zu deuten: ein Vortheil, den selbst der Alterthumsforscher und Geograph daraus ziehen kann, — und dafs auf diesem Wege die vom Klima oder andern Einflüssen abhangenden Abänderungen der Arten, worüber wir noch ganz im Dunkeln sind, aufgeklärt werden können.

Die hier gelieferte Uebersicht in Tabellen gründet sich auf ein Verzeichnifs der Vögelarten, das schon seit einigen Jahren aus allen mir zugänglichen ornithologischen Werken und Sammlungen zusammengetragen, und nach eigenen und Anderer Untersuchungen und Erfahrungen berichtigt ist. Es enthält gegenwärtig 3779 Arten von Vögeln überhaupt: also 1200 Arten mehr, als Gmelin's Ausgabe des Linnéischen Natursystems. Aufser den von Gmelin ausgezogenen und grofsentheils von neuem verglichenen Büchern sind viele neuere Werke zu dieser bedeutenden Vermehrung benutzt, die in einer Anmerkung *) namentlich angegeben sind, um daraus

*) Latham's Uebersicht, übersetzt und mit Zusätzen vermehrt von Bechstein.
Latham second Supplement to the Synopsis of birds. Lond. 1802.
Bechstein's Naturgeschichte Deutschlands, 2te Ausgabe.
Desselben ornithologisches Taschenbuch, 2 Bände.
Wolf und Meyer Taschenbuch der deutschen Vögelkunde, 2 Theile.
Encyclopédie méthodique. Oiseaux.
Le Vaillant Oiseaux d'Afrique bis zum Anfange des 5ten Bandes.
Le Vaillant Perroquets, 2 Volum.
Temminck Catalogue systématique du Cabinet d'Ornithologie 1807.

abnehmen zu lassen, welche neuere Bücher noch nicht haben verglichen werden können. Die Menge von Bereicherungen, welche die Ornithologie in den letzten Jahrzehenden gewonnen hat, und wovon mehrere, wie die Früchte der von den Franzosen unternommenen Expedizionen nach Aegypten und Neuholland, noch nicht ins Publikum gekommen sind, läſst uns schlieſsen, wie weit wir noch von Vollständigkeit entfernt sind. Werden doch sesbst noch in Europa einzelne Entdeckungen gemacht. Soll uns dies abhalten, die Vögel unter allgemeine Gesichtspunkte zu ordnen, die für den Naturforscher doch so groſses Interesse haben, so ist nicht abzusehen, wann es Zeit seyn wird, dies zu unternehmen. Seit Gmelin's System ist denn doch eine sehr bedeutende Lücke in der allgemeinen Kette ausgefüllt, indem ein ganzer zu jener Zeit fast unbekannter Welttheil schon so weit aufgeschlossen ist, daſs die Zahl der in Australien entdeckten Vögel, die sich damals auf ein Paar Arten belief, die am vollständigsten bekannte ornithologische Fauna von Europa, welche man fast als geschlossen ansehen kann, schon um 110 Arten übersteigt *).

Es ist ausgemacht, daſs Latham und Gmelin, der jenem hauptsächlich gefolgt ist, nicht wenige Arten in das System aufgenommen haben, welche die spätere Erfahrung und sorgfältige Prüfung als bloſse Verschiedenheiten des Alters oder besonderer Einflüsse, oder auch als bloſse, auf unrichtige Beschreibung gegründete Wiederholung anderer Arten nachweisen kann, die also eingezogen, dagegen andere, die nur als Abänderungen von einer Art aufgeführt sind, zu selbsständigen Arten erhoben werden muſsten. Die durch Pallas, Azara's, Levaillant's, Bechstein's u. a. Bemerkungen schon bedeutend gewordene Zahl dieser Berichtigungen ist durch die Untersuchung der Sammlung des Zoologischen Museums und durch die Benutzung einiger vorzüglicher Manuscripte der königlichen Bibliothek an-

Daudin Ornithologie, 2 *Volum.*
White und *Phillip Voyages to New-Southwales.*
Azara Oiseaux du Paraguay par Sonnini.
Pallas Fauna Rossica, 1 *Volum.*
Forster Descriptiones Animalium in itinere. Manuscript.
Thesaurus Animalium Brasiliae. Aves. Abbildungen in Manuscript.
Abbildungen von Brasilianischen Thieren, vom Prinzen Moriz von Nassau, in Manuscript.

*) Freilich kennen wir von Australien ganze bedeutende Länder noch gar nicht. Unter 65 Arten von Vögeln, welche das Zoologische Museum erst kürzlich aus Neuholland über London erhielt, waren einige 20 noch nicht in Latham's letztem Werke von 1802, das besonders die Neuholländischen Entdeckungen nachträgt, enthalten.

sehnlich vermehrt. Nicht wenige Arten, die man nur aus unvollkommenen Beschreibungen kannte, haben selbst ihre Stelle im Systeme ändern müssen. Eine Aufzählung dieser Veränderungen würde allein mehrere Blätter anfüllen, auch wenn wir uns dabei auf die von andern Schriftstellern gemachten Bemerkungen dieser Art nicht einlassen wollten. Ich begnüge mich hier Eine Gattung des Linnéischen Systems nach Gmelin's Ausgabe zum Beweise des Gesagten durchzugehen, und verspare die besonders in Hinsicht auf die brasilianischen Vögel oft unerwartet ausfallenden Berichtigungen auf eine andere Gelegenheit. *Cuculus serratus* (*Gmel. Lin. S. N. I.* 412. 26.) ist der männliche *Cuculus melanoleucus* (416. 35); und zugleich der *Cuculus ater* (415. 34); *Cuculus Senegalensis* (412, 6), *Bengalensis* (23), *Aegyptius* (420, 43), *Tolu* (422, 45), sind *Centropus;* die Varietät β und γ von *Aegyptius* ist aber eine eigene Art, die ich *Centropus rufipennis* nenne. Die Varietät β von *Cuculus naevius* (415, 9) ist eine standhaft verschiedene, von Azara (*Oiseaux du Paraguay II.* 53. 266) unter dem Namen *Chochi* beschriebene Art, die im Museum *Cuculus galeritus* heifst. Der *Cuculus piger* (415, 12), den Latham als Abänderung zu *orientalis* zählt, weshalb Gmelin ihn auch dahin ziehen möchte, ist eine selbsständige Art. Zu *Cuculus Cayanus* (417, 1.) gehört *Cuculus cornutus* (422, 21); dagegen müssen die Varietäten β und γ als eine sehr verschiedene Art, *Cuculus rutilus* des Museums, abgesondert werden. Den *Cuculus tranquillus* und *C. tenebrosus* (417, 38 und 39) rechne ich zu der Gattung *Bucco*; auch ist jener (409, 17) dort unter dem Namen *Bucco cinereus* wirklich schon beschrieben, aber zugleich als *Corvus australis* (377, 45) noch einmal aufgeführt. *Cuculus Persa* (419, 17), worunter zwei verschiedene Arten begriffen werden, bildet die Gattung *Corythaïx*. *Cuculus paradiseus* (422, 22) ist nach Levaillant's Untersuchung des Originals, von dem die Beschreibung genommen ist, gar kein *Cuculus*, sondern eine *Muscicapa*. (*Drongo à raquettes. Le Vaill. Ois. d'Afrique. IV.* 73. *pl.* 175.)

Der Berichtigungen der Gattungen *Ardea*, *Tringa*, *Scolopax*, *Anas* u. a. m. ist eine grofse Zahl. Aber eben diese Menge von Berichtigungen, welche eine doch immer nur noch beschränkte Vergleichung der Natur schon gewährte, läfst erwarten, dafs noch viele Irrthümer dieser Art in den ornithologischen Werken vorhanden sind, die erst die Folge aufklären wird. Schon jetzt sind unter den 3779 Arten unsers Verzeichnisses 170 Arten als zweifelhaft aufgeführt, und in den Tabellen durch ein vorgesetztes + oder ein

ein nachgesetztes ? kenntlich gemacht. Manche dieser Arten sind zwar nur in so fern dem Zweifel unterworfen, ob sie auch zu der Gattung gehören, worunter sie aufgezählt sind; bei den einzelnen Welttheilen drückt der Zweifel oft nur die Ungewifsheit aus, ob die Art auch wirklich darin vorkomme. Dies alles in den Tabellen zu unterscheiden, war nicht wohl thunlich. *Merops congener*, *Corvus Eremita* sind seit Konrad Gesner's Zeit nicht wieder gesehen, und daher ist ihre Existenz zweifelhaft. Mehrere von Azara nicht hinlänglich beschriebene Vögel sind als selbsständige Arten keinem Bedenken unterworfen, aber in Ansehung der ihnen im Systeme anzuweisenden Stelle ungewifs. Dafs *Ara tricolor* von Le Vaillant eine eigene Art von *Psittacus* aus der Familie der *Aras* ist, ist sicher; dafs er aber in Südamerika zu Hause sey, ist eine nur auf Analogie gegründete Vermuthung.

Besondere Prüfung verdienen diejenigen Arten, welche man in entlegenen Welttheilen als zugleich vorhanden angiebt. Aus mehreren in meine Untersuchung gekommenen Fällen ging hervor, dafs man verschiedene Arten für einerlei gehalten hatte. Doch kann man nicht mit völliger Sicherheit auf alle Falle den Schlufs machen, da ich auch einzelne Erfahrungen habe, wo die Einerleiheit der Art die schärfste Prüfung bestand. Einige Beispiele mögen dies erläutern. *Certhia familiaris* und *Lanius Excubitor* sind im Museum aus Europa und aus Georgien in Nordamerika vorhanden; eine solche Erstreckung über Länder, die unter ähnlicher nördlicher Breite liegen, ist auch nicht sehr auffallend. Der *Ampelis* (*Corvus*) *Garrulus* dagegen aus Nordmerika, ist eine vom europäischen Seidenschwanz sehr abweichende Art. Den *Strepsilas Interpres* hat das nördliche Europa und das tropische Südamerika geliefert. Von *Motacilla* (*Parus*) *Regulus* heifst es (*Gmel.* 995, 48) *habitat per omnem orbem cognitum.* Dieser Ausdruck ist schon an sich unrichtig, weil mehrere Welttheile keinen Anspruch an dieses Vögelchen machen; aber er leidet noch sehr grofse Einschränkungen. Der nordamerikanische und der südamerikanische für *Regulus* gehaltene Vogel, sind beide, selbst im Schnabelbau, sehr abweichend, und mit diesen beiden ist noch ein dritter, die *Motacilla Calendula Lin.*, verwechselt. *Plotus Melanogaster* soll in Amerika, in Afrika und in Südasien vorkommen; ich merke hier an, dafs der amerikanische *Plotus melanogaster* (*Gmel.* 580, 2. *var.* β *et* γ) nur eine Altersverschiedenheit von *Plotus Anhinga* ist, welches die im Museum vorhandene Uebergänge beweisen; der ostindische *Pl.*

melanogaster (*Gmel. var.* α, mit Ausschlufs des zu *var.* β und γ gehörigen Citats aus Buffon), welchen das Museum unserm verewigten Willdenow verdankt, unterscheidet sich in mehreren wesentlichen Punkten von dem Amerikanischen, und dasselbe behauptet Temminck von dem am Senegal lebenden (*Plotus rufus. Temminck. Gmel. l. c.* 581, *var.* δ), so dafs also jeder Welttheil seine besondere Art besitzt. Für die Betrachtung der in jedem Welttheile vorkommenden Bildungen ist freilich diese Verbindung verschiedener Arten in Eine gleichgültig, indem so viel daraus hervorgeht, dafs wenigstens eine höchst ähnliche Gestalt in allen diesen Gegenden gefunden werde; doch möchte dieser Schlufs nicht allemal mit Sicherheit zu ziehen seyn, indem die Nachrichten von dem Vorkommen eines Thiers sich oft auf das Urtheil ungeübter Reisender gründen. Es ist z. B. sehr wahrscheinlich, dafs manches, was für *Corvus Corax* gilt, gar nicht einmal zu derselben Gattung mit ihm gehöre.

Die ersten 4 Tabellen sind so eingerichtet, dafs man mit einem Blicke übersehen kann, wie viel Arten von einer jeden Ordnung, Familie und Gattung von Vögeln in einem jeden der fünf Welttheile vorkommen. Es ist dabei das System aus meinem *Prodromus systematis Mammalium et Avium* zum Grunde gelegt *). Eine Kolumne vorn zeigt die ganze Anzahl der Arten jeder Ordnung, Familie oder Gattung an; die Kolumnen der einzelnen Welttheile zerfallen jede in drei andere: die erste giebt die Zahl der Arten der Ordnung, Familie oder Gattung in diesem Welttheile überhaupt, die zweite die Zahl der ihm angehörigen Arten, die dritte derjenigen an, die er mit andern Welttheilen gemeinschaftlich besitzt. Zwischen Australien und Amerika ist eine besondere Kolumne eingeschoben, welche der Angabe gewidmet ist, wie viel Arten der alten Welt eigenthümlich, wie viel ihr mit Amerika gemein sind Die letzte Kolumne ist für diejenigen Arten, deren Vaterland noch unbestimmt geblieben ist.

Die hier folgenden Bemerkungen über jeden einzelnen Welttheil be-

*) Folgende Abweichungen von demselben kommen in den Tabellen vor: die Gattung *Myiothera* ist eingezogen und zu *Turdus* gerechnet; eben so ist die Gattung *Tringa* als Familie mit *Charadrius* verbunden, wovon sich *Tringa* nur durch die unvollkommene Hinterzehe unterscheidet, der erledigte Gattungsname *Tringa* ist an *Actitis* gekommen. Zwischen *Todus* und *Pipra* ist eine Neuholländische neue Gattung, *Spizites*, eingeschaltet.

schränken sich auf das geographische Vorkommen der Vögel in denselben, und auf wenige nothwendige Erinnerungen über einzelne Gattungen.

I. Europa

mit Ausschlufs von Island, westlich bis an den Ural, die Wolga und das Asowische Meer, besitzt nur etwa den achten Theil der bekannten Vögel, ob es gleich nach allen Richtungen durchforscht ist, so dafs nur noch aus der pyrenäischen Halbinsel, Unteritalien und Griechenland einiger Zuwachs erwartet werden kann. Von seinen 451 Arten sind ihm nur 150 eigenthümlich, und von diesen nahe an 30 zweifelhaft. Unter seinen 74 Gattungen (welches etwa die Hälfte der bekannten Gattungen ausmacht) ist keine ihm ausschliefslich eigen, man müfste denn *Corrira* annehmen wollen, einen Sumpfvogel, den Aldrovandi unter den italiänischen Vögeln aufzählt, den aber seit dem 16ten Jahrhundert niemand wieder gesehen hat: daher Bechstein auch vermuthet, dafs dieser berühmte Naturforscher durch ein Kunstprodukt hintergangen sey.

Als Abstreiflinge von der Bildung der Vögel der südlichen Erde sind *Ortygis*, *Tachydromus*, *Phoenicopterus* anzusehen.

Verhältnifsmäfsig am zahlreichsten, in Vergleichung zu andern Erdtheilen, sind die Ordnungen der Sumpf- und Wasservögel, am ärmsten in Art- und Gattungsverschiedenheit die Klettervögel, die überhaupt vorzüglich den tropischen Ländern zukommen. Die meisten Vögel von Europa, die sich von Insekten und Gewürmen nähren, oder ihren Unterhalt im Wasser suchen, ziehen im Winter in südliche Gegenden; doch bleiben sie wahrscheinlich alle diesseits des nördlichen Wendekreises, die meisten diesseits des mittelländischen Meers. So gehen diese Vögel in Nordasien und Nordamerika ebenfalls nach Süden zu, in den kalten und gemäfsigten Ländern von Südamerika und Australien nach Norden.

II. Afrika

ist nur nach seinem Rande, und auch darin noch sehr unvollständig, bekannt; die portugiesischen Besitzungen der westlichen und östlichen Küste, so wie Madagaskar, kennen wir nur sehr unvollkommen. Die Uebersicht der afrikanischen Vögel kann daher kein so genaues Resultat gewähren, wie die Uebersicht der Fauna von Europa. Will man den ornithologischen Reichthum dieses Welttheils richtig würdigen, so mufs man ihn darin mit

Südasien, Südamerika und Australien vergleichen; dann steht Afrika hinter Südamerika bedeutend zurück, hält Asien fast die Wage, und übertrifft Australien, nur mit Ausnahme der Schwimmvögel, deren in dem weiten südlichen Ozean leicht mehr seyn können. Die Flüsse und Seen von Afrika kann man in ornithologischer Hinsicht noch eben so unerforscht annehmen, wie die Flüsse und Seen Neuhollands und Neuseelands; daher die geringe Anzahl der Sumpf- und Wasservögel, worin Afrika selbst von dem viermal kleinern Europa übertroffen wird.

Afrika enthält beinahe den sechsten Theil der bekannten Vögel, 642 Arten, und unter diesen fast 500 ihm eigenthümliche; von seinen 87 Gattungen sind 6, vielleicht 8, ihm eigengehörig: *Corythaix, Musophaga, Buphaga, Numida, Didus, Scopus,* wahrscheinlich auch *Gypogeranus,* indem Sonnerat's Angabe, daſs dieser sonderbare Raubvogel auch auf den Philippinen vorkomme, in Zweifel gezogen werden kann; und *Pogonias,* wovon der etwas abweichende *Bucco niger* (*Gmel.* 407, 8) auch in Südasien lebt. Die Gattung *Didus* sollte man zwar nicht zu den noch vorhandenen rechnen, weil die einzige aus ältern Beschreibungen und Gemälden und aus Bruchstücken mit Sicherheit anzunehmende Art, der *Didus ineptus,* in ihrem Wohnplatze, den maskarenischen Inseln, völlig ausgerottet ist; indeſs bleibt doch noch die Hoffnung, daſs dieser Vogel, der wahrscheinlich nicht auf so kleine Inseln beschränkt war, auf Madagaskar, oder selbst auf der gegenüberliegenden Küste von Afrika, einst werde wieder aufgefunden werden. *Corythaix* läſst sich mit *Crotophaga, Musophaga* und *Pogonias* mit *Pteroglossus* und *Ramphastos, Buphaga* mit *Cassicus* in Vergleichung bringen; *Numida* ersetzt diesem Welttheile die *Phasianus* und *Gallus* von Asien, die *Meleagris* und *Penelope* von Amerika; *Didus* ist von einer eigenthümlichen Bildung, die zwischen einem plumpen Hühnervogel und dem Kasoar steht; *Scopus* steht *Cancroma* gegenüber; *Gypogeranus* grenzt auf der einen Seite an die hochbeinigen Falken von Südamerika, auf der andern Seite an *Dicholophus* und *Palamedea* eben dieses Erdtheils.

Unter den afrikanischen Vögeln werden eine *Psophia undulata,* nach einer Abbildung und kurzen Beschreibung von Jacquin, und ein *Opisthocomus Africanus* (*Phasianus Africanus* Latham) aufgezählt, der in seinem Schnabel genau mit *Opisthocomus cristatus* aus dem tropischen Amerika übereinstimmen soll. Beide Vögel aber verdienen noch eine genauere Untersuchung, selbst in Hinsicht auf die Angabe ihres Vaterlandes.

So wie überhaupt in den warmen Ländern, so haben auch in Afrika die von Insekten und Früchten lebenden Vögel das Uebergewicht, indem der Boden das ganze Jahr hindurch die Entwickelung der Insekten, und das Klima die unausgesetzte Vegetation begünstigt. Auffallend ist aber die geringe Anzahl der Arten von *Psittacus*, deren jeder andere südliche Erdtheil beträchtlich mehr besitzt.

Von den allgemeiner verbreiteten Formen fehlen in Afrika *Sitta, Todus, Haematopus, Strepsilas, Phalaropus, Recurvirostra.*

III. Asien

zählt in seiner weiten Erstreckung von Norden nach Süden, von Westen nach Osten, mehr als ein Viertheil der bekannten Vögel, 985 Arten, in 95 bis 99 Gattungen, unter denen 5 ihm ausschließlich eigen sind. Vier derselben: *Pavo, Phasianus, Gallus* (diese drei einander nahe verwandt), *Syrrhaptes*, gehören zu den Hühnervögeln; *Anastomus* zeichnet sich unter den Reihern eben so aus, wie *Cancroma* und *Scopus* in ihrer Heimath. Man findet in den Systemen zwar auch *Phasianus*-Arten aus Afrika und Südamerika angegeben, aber sie gehören nicht zu dieser Gattung, sondern zu *Opisthocomus* und *Penelope*, dagegen die ostindische *Meleagris Satyra* am natürlichsten mit *Phasianus* verbunden wird, so daſs diese Gattung sich wirklich auf Südasien beschränkt, nur daſs der *Phasianus Colchicus* sich bis zu der Steppe im Norden des schwarzen und kaspischen Meers erstreckt. Das älteste, am weitesten verbreitete Hausgeflügel, das Huhn, haben wir Südasien zu verdanken. *Syrrhaptes* ist ein noch nicht genug bekannter, mit *Tetrao* verwandter Vogel der südlichen Tartarei, der mit dem südamerikanischen *Crypturus* verglichen werden kann.

Mit Afrika zusammengehalten, besitzt Südasien wenig Arten mehr als dieses; aber ein starkes Drittheil weniger als Südamerika. Syrien und Arabien nehmen Theil an der afrikanischen, die sundaischen und molukkischen Inseln an der australischen, Nordasien an der europäischen Fauna. Der hohe Mittelrücken Asiens ist noch gar nicht bekannt.

IV. Australien,

das man als den südlichsten Theil von Asien ansehen kann, hat 541 Arten in 74 Gattungen, also von der Gesammtzahl der bekannten Arten den siebenten Theil, und von der Gattungszahl die Hälfte. Von diesen Gattungen sind 9 bis 10 als diesem Welttheile eigengehörig zu betrachten: *Pezoporus, Scythrops, Sparactes?, Spizites, Menura, Burhinus, Cereopsis* in Neuholland, *Glaucopis* und *Haladroma* in Neuseeland, *Paradisea* in Neuguinea und Neuholland. Der *Pezoporus* ist durch den deutschen Namen Erdpapagey hinlänglich charakterisirt; man findet schon bei einigen neuholländischen *Psittacus* eine Anlage zu dem ihm eigenen Bau seiner Füſse; *Scythrops* kann man mit *Pteroglossus, Menura* mit *Phasianus* und *Penelope, Sparactes* mit *Lanius Cayanus* und einigen ähnlichen dickschnäbligen *Lanius* aus Südamerika — *Cereopsis* mit *Psophia* und *Palamedea* vergleichen. — *Spizites,* aus *Pipra punctata Latham* und einer noch unbeschriebenen Art gebildet, liefert das zwischen *Pipra* und *Todus* fehlende und kaum geahnete Bindeglied; *Glaucopis* vereint mit dem Schnabel von *Colius* zwei am Unterkiefer hangende Fleischlappen; *Burhinus* ist ein *Charadrius* mit breitem flachen Schnabel; *Haladroma* grenzt an *Procellaria.* — Wenn wir die Vögel von Neuholland und Neuguinea erst genauer kennen werden, als es jetzt aus den unvollkommenen Nachrichten der Fall ist, werden sich wahrscheinlich noch mehr eigene Formen ergeben. Eine solche in sich fast abgeschlossene Eigenthümlichkeit der Bildungen, wie in seinen Säugethieren, scheint aber doch Neuholland in der Klasse der Vögel nicht zu haben: zum Theil wohl mit aus dem Grunde, weil überhaupt diese Thierklasse nicht so mannigfaltig in ihren Gestalten und Kombinationen ist. Viele neuholländische Vögel aus der Ordnung der *Ambulatores* haben eine Hinneigung zu der *Merops*form, die in *Gracula, Corvus, Turdus, Motacilla, Nectarinia* übergeht. Eine in einen Pinsel ausgehende Zunge haben, auſser mehreren Gangvögeln, sogar mehrere Arten von *Psittacus,* deren Zunge sonst so fleischig und stumpf ist, und die fasanenähnliche *Menura* *).

Wenn unter den neuholländischen Säugthieren groſse Thiere vermiſst werden, so ist dies bei den Vögeln nicht der Fall. Der *Casuarius Novae Hollandiae,* die *Ciconia australis* (*Mycteria australis Latham*) und *Grus antarctica* (*Ardea Antigone var. B. Latham*) stehen den gigantischen Vögeln der andern südlichen Erdtheile nicht nach, und keiner besitzt so groſse Arten von *Psittacus, Lanius, Caprimulgus, Alcedo,* wie dieses Land.

*) *Ducrotay de Blainville Dissertation sur la place que la famille des Ornithorhynques et des Echidnés doit occuper dans les séries naturelles. Paris 1812. p. 5. note.*

Von allgemein verbreiteten Formen der südlichen Erdtheile fehlen in Neuholland (denn Neuguinea kennen wir nicht) und auf den australischen Inseln *Trogon, Bucco, Picus* (wovon Neuseeland zwei Arten besitzt), *Sturnus, Cypselus* (wenn *Hirundo caudacuta Latham* nicht dazu gehört), *Emberiza, Gypaëtus, Cathartes, Tetrao, Ibis, Strepsilas, Parra, Fulica, Platalea, Phoenicopterus, Plotus.*

V. Amerika.

Nach der Erstreckung dieses Welttheils durch alle Erdgürtel, und aus der weiten Absonderung desselben von allen übrigen, laſst sich schon erwarten, daſs er in seinen ornithologischen Erzeugnissen in Mannigfaltigkeit und Menge alle übrigen Welttheile übertreffen werde; die Zahl seiner Arten von 1733 umfaſst beinahe die Hälfte der bekannten Arten; der Gattungen sind 112, und darunter 24 bis 27 ihm eigene. Man kann also Amerika, als das Land der untern Halbkugel, der alten Welt, oder der obern Hemisphäre, füglich gegenüberstellen, in der nur 351 Arten und 8 Gattungen mehr vorkommen. Amerika überhaupt hat mit der alten Welt nicht 200, Südamerika allein genommen nur 67 Arten gemein.

Die für beide Amerika eigenthümlichen Gattungen sind *Trochilus, Cassicus, Meleagris, Rhynchops,* vielleicht auch *Cathartes,* indem es noch untersucht werden muſs, ob der *Vultur Percnopterus* zu dieser Gattung gehört; und fast auch *Tanagra,* da die aus andern Welttheilen angezogenen Arten dieser Gattung zu andern Gattungen schon gewiesen sind *), oder wahrscheinlich dahin kommen; doch erkenne ich in Latham's neuholländischer *Loxia cyanoptera,* woraus Temminck eine besondere Gattung unter dem Namen *Angroyan* zu machen geneigt ist, eine wahre *Tanagra.* — Alle in andern Welttheilen gefundenen Vögel, die man für Kolibri's ausgegeben, gehören nicht zu der ausgezeichneten Gattung *Trochilus,* sondern zu *Nectarinia. Rhynchops* vereint mit der Gestalt einer *Sterna* einen äuſserst merkwürdigen und nicht wieder vorkommenden Schnabelbau.

*) Die *Tanagra atrata* (*Gmel.* 892. 9) rechnet Daudin zu *Sturnus; T. amboinensis* (896. 35) ist wohl sicher eine *Fringilla. T. Sinensis* (897. 37) ist die *Fringilla Sinica* (910. 20); *T. melanictera* (898. 41) ist nach Pallas ein *Oriolus; Tanagra Sibirica* ist die *Alauda Tatarica* (795. 19) und zugleich *Alauda mutabilis* (796. 20). Da Sparrman eine Lerche zu dieser Gattung rechnen konnte, so mag das Gattungsrecht seiner *Tanagra Capensis* (*Gmel.* 900. 46) mit Fug in Zweifel gezogen werden.

In Südamerika sind folgende Gattungen ausschliefslich einheimisch: *Rhamphastos, Pteroglossus, Crotophaga, Galbula, Dendrocolaptes, Xenops, Prionites, Cephalopterus, Ampelis, Procnias, Penelope, Crax, Crypturus, Rhea* unter den Landvögeln, *Dicholophus, Palamedea, Chauna, Eurypyga, Cancroma, Ereunetes* und *Podoa* unter den Sumpfvögeln. Man kann vielleicht *Pipra, Opisthocomus* und *Psophia* dazu zählen; von den letzten beiden ist bei Afrika die Rede gewesen; von *Pipra* werden eine neuholländische und eine afrikanische Art angegeben; dafs die *Pipra punctata* aus Neuholland eine neue Gattung begründe, ist schon oben angemerkt; die übrigen Arten aus Australien und Afrika habe ich noch nicht untersuchen können; doch könnte Neuholland, so wie bei *Tanagra*, so auch bei *Pipra*, in Besitz der sonst südamerikanischen Form seyn, da eben daselbst auch in der Bürstenzunge mehrerer Vögel eine Annäherung an die nur bei den südamerikanischen *Ramphastos, Pteroglossus* und *Prionites* vorkommende Federzunge sich zu zeigen scheint.

Wegen der hier aufgezählten eigenthümlichen Gattungen können wir uns grofsentheils auf das Vorhergegangene beziehen. *Galbula* ist mit *Alcedo tridactyla* und *A. Dea*; *Dendrocolaptes* und *Xenops* mit *Certhia* und *Sitta* — *Prionites* mit den kleinern *Buceros* und mit *Coracias* — *Cephalopterus* und *Ampelis* mit *Paradisea* — *Rhea* mit *Struthio* und *Casuarius* — *Dicholophus* und *Psophia* mit *Grus Virgo* und *pavonina* — *Ereunetes* mit *Scopolax* und *Tringa* in Parallele zu stellen; *Procnias, Palamedea, Chauna, Eurypyga* und *Podoa* sind eigenthümliche Bildungen.

Von allgemein verbreiteten Gattungsformen der alten Welt fehlen *Centropus, Colius, Buceros, Vultur, Ortygis;* vielleicht auch *Otis* und *Glareola.* Man hat zwar aus Molina's Naturgeschichte von Chili die *Otis Chilensis* ins System aufgenommen, aber blofs auf seine so sehr unsichere Autorität; sie zeigt schon durch ihre grofse Hinterzehe, dafs sie keine Trappe seyn könne, und vorläufig scheint sie schicklicher bei *Psophia* untergebracht werden zu können; der Kapitain King will in Nootkasund eine Trappe gesehen haben; eine solche Angabe aber bedarf noch der Bestätigung, und daher kann *Otis* nur fragweise unter die amerikanischen Gattungen gestellt werden. Eine *Glareola* vermuthe ich nur in dem *Chorlito à demi collier blanc* von *Azara Ois. du Parag. n.* 405; der Besitz dieser Gattung für Amerika ist daher noch zweifelhaft.

Südamerika zählt mehr Gattungen und Arten als irgend einer der

süd-

südlichen Erdtheile; in manchen Gattungen, besonders Insekten-fressender Vögel besitzt es ein aufserordentliches Uebergewicht; z. B. in *Caprimulgus*, *Muscicapa*, *Lanius*, *Todus* u. a., so wie die aus Sümpfen und Gewässern ihren Unterhalt nehmenden Vögel sehr zahlreich und mannigfaltig sind. Aber auch Nordamerika ist Europa und Nordasien beträchtlich überlegen.

Zu der Uebersicht der Arten eines jeden Welttheils liefert die Vte Tabelle einen Ueberblick der Gattungszahl nach den Ordnungen und Familien.

Die Betrachtung der organischen Körper in Hinsicht auf ihre geographische Verbreitung läfst sich noch aus folgenden Gesichtspunkten mit Belehrung anstellen.

1) Europa, Nordasien bis zu dem hohen Mittelrücken Mittelasiens, und Nordamerika bis zum 30sten Grade der nördlichen Breite, lassen sich in Rücksicht auf ihre lebende Erzeugnisse eben so schicklich zusammen verbinden, wie Afrika, Südasien, Australien und Südamerika mit einander; jene nenne ich nordliche, diese südliche Erdtheile. Man wird sehen, wie gering die Zahl der Arten ist, die sie mit einander gemein haben. Da wo beide zusammengrenzen, ist freilich keine scharfe Trennung zu erwarten; z. B. die Nordküste von Afrika und Südeuropa, Mexiko und das übrige Nordamerika. Die Bildungen der Thiere in den südlichen Ländern weichen sehr von denen in den nordlichen ab, und dies würde wahrscheinlich noch auffallender seyn, wenn das Land so weit südwärts reichte, wie es nordlich geht.

Hierauf beziehen sich die Tabellen VI. und VII., welche die ausführliche Angabe der Artenzahl der in jeder Hemisphäre vorkommenden Gattungen enthalten, wobei eine jedem Erdtheile beigefügte Rubrik diejenigen Arten angiebt, die er mit seinem südlichen oder nordlichen Nachbar gemein hat.

Die VIIIte Tabelle gewährt die Uebersicht der jeder Hemisphäre eigenthümlich und der ihnen gemeinschaftlich zukommenden Gattungen, mit hinzugefügter Anzahl der jeder Hemisphäre eigengehörigen und der beiden gemeinschaftlichen Arten. Aus dieser Tafel geht zugleich hervor, wie viel mannigfaltiger und zahlreicher die Vögel der südlichen Erdtheile sind, obgleich die Ausdehnung des Landes nicht in dem Verhältnisse ungleich, und die nordliche Erde weit vollständiger durchforscht ist, als die südliche.

2) Einen sehr bedeutenden Einflufs auf die Verschiedenheit der organischen Bildungen hat die Entfernung der Meridiane, wenn nicht ein unmittelbarer Zusammenhang durch Land dazwischen statt findet, wie in den nordlichen Erdtheilen. In dieser Hinsicht kann man das Land in drei Hauptgruppen abtheilen, wovon Europa mit Afrika die eine, Asien mit Australien die zweite, Nordamerika mit Südamerika die dritte bildet. Da es hier nur auf die Vergleichung der Gestalten der Vögel einer jeden dieser Abtheilungen ankommt, so liefert die neunte Tabelle eine danach geordnete Uebersicht der Gattungen. Die unterstrichenen Gattungen gehören ihrer Gruppe ausschliefslich, die unterpunktirten beinahe ganz an.

In einer auch über die Arten selbst sich genau erstreckenden Angabe würde es interessant seyn, nachzuweisen, ob nicht die hohen, von Norden nach Süden laufenden Gebürgszüge bedeutende Abschnitte in den Bildungen der Thiere bewirkten.

3) Der Gegensatz der obern und untern Hemisphäre, oder der alten und der neuen Welt, bedurfte keiner besondern Tafel, da er sich aus der IXten leicht ergiebt.

4) Die Beschränkung mancher Gattung und Art auf enge Bezirke, und die Ausdehnung anderer auf weitere Strecken und verschiedene Klimate. Hier einige allgemeine Bemerkungen darüber:

Zu den verbreitetsten Bildungen, oft mit einer bis in die feinsten Züge gehenden Wiederholung der Zeichnung und Farbe, gehören: *Cuculus, Picus, Alcedo, Sitta, Turdus, Motacilla, Muscicapa, Lanius, Parus, Alauda, Fringilla, Corvus, Hirundo, Caprimulgus, Strix, Falco, Perdix, Columba, Charadrius, Himantopus, Haematopus, Grus, Ciconia, Ardea, Numenius, Scolopax, Tringa, Rallus, Crex, Sterna, Larus, Lestris, Procellaria, Anas, Anser, Pelecanus, Halieus, Dysporus.* Diese findet man in allen fünf Welttheilen. Die Gattungen *Merops, Upupa, Oriolus, Coracias, Gypaëtus* haben zwar auch in allen Welttheilen Arten, allein es ist bei mehreren derselben noch nicht aufser allen Zweifel gesetzt, ob sie wirklich zu der Gattung gehören, wohin man sie gestellt hat, oder sie sind nur, wie z. B. *Parus pendulinus Lin.* von *Oriolus*, als ein sehr abweichendes Glied der Gattungsbildung anzusehen.

Von einer über vier Welttheile reichenden Erstreckung sind *Psitta-*

cus, Nectarinia, Sturnus, Cypselus, Vultur, Tetrao, Ortygis, Otis, Ibis, Strepsilas, Fulica, Phalaropus, Recurvirostra, Platalea, Phoenicopterus, Diomedea, Phaëthon. Vielleicht gehören dazu noch *Emberiza, Tanagra, Gracula, Cathartes.* Von *Tanagra* und *Cathartes* ist schon früher die Rede gewesen; die Gattung *Gracula* bedarf noch einer genauen Untersuchung; die mir zu Gesicht gekommenen Arten von *Emberiza* aus südlichen Ländern (z. B. *Ciris, paradisea*), gehörten zu *Fringilla* (wozu auch *Emberiza erythrophthalma* und *oryzivora* gezählt werden müssen).

Auf die tropischen Länder, diese Benennung auf den Erdgürtel von 30 Graden zu jeder Seite des Aequators nordlich und südlich ausgedehnt, sind ausschliefslich angewiesen: *Ramphastos, Pteroglossus, Pogonias, Corythaïx, Trogon, Musophaga, Crotophaga, Bucco, Galbula, Dendrocolaptes, Xenops, Buphaga, Phytotoma, Prionites, Buceros, Cephalopterus, Ampelis, Paradisea, Procnias, Gypogeranus, Numida, Crax, Opisthocomus, Pavo, Gallus, Didus, Struthio, Dicholophus, Palamedea, Psophia, Eurypyga, Scopus, Cancroma, Anastomus, Ereunetes, Parra, Podoa.*

Fast nur tropisch sind die Gattungen *Psittacus* (wovon *smaragdinus* bis zur magellanischen Meerenge unter d. 53. Gr. südl. Breite, einige neuseeländische Arten bis zum 46. Gr. s. Br., die grofsen neuseeländischen Kakatu's bis 44 Gr. s. Br., *Ps. carolinensis* bis zum 39. Gr. n. Br. reicht), *Centropus, Trochilus, Nectarinia, Pipra, Colius, Penelope, Phasianus, Crypturus, Casuarius, Phaëthon, Plotus.*

In der Nordhemisphäre hat man auf Grönland einige Arten von *Falco, Strix, Anas, Anser, Mergus, Alca, Mormon, Procellaria, Halieus, Dysporus, Uria, Eudytes, Larus, Lestris, Sterna, Scolopax, Tringa, Strepsilas, Phalaropus, Charadrius, Fringilla,* die *Emberiza nivalis, Parus bicolor* und *griseus* (die *Motacilla Calendula Lin.*), *Motacilla Oenanthe, Tetrao Lagopus* gefunden (s. *O. Fabricii Fauna Groenlandica. p. 53. seqq.*).

Die Südhemisphäre besitzt kein solches in den Polarkreis reichendes Land; das südlichste Sandwichland und Thule liegen unter dem 60. Gr. s. Br. Hier und auf Kerguelen-land und Neusüdgeorgien sind nur einige Wasservögel aus den Gattungen *Aptenodytes, Procellaria, Pachyptila, Diomedea, Lestris, Larus, Sterna, Chionis* vorgefunden; auf der Südspitze von Amerika aufser diesen ebengenannten noch Arten von *Anser, Anas, Larus, Halieus Haematopus,* ein *Falco, Strix, Psittacus, Picus, Fringilla, Tetrao, Motacilla ma-*

gellanica und *spinicauda;* doch sind die magellanischen Länder noch wenig durchforscht.

In Ansehung der klimatischen Verschiedenheit der von ihnen bewohnten Gegenden sind folgende Gattungen die am meisten verbreiteten: *Picus, Alcedo, Turdus, Sitta, Sturnus, Motacilla, Parus, Alauda, Fringilla, Corvus, Strix, Falco, Perdix, Charadrius, Scolopax, Numenius, Strepsilas, Tringa, Ardea, Crex, Fulica, Sterna, Larus, Procellaria, Anas, Anser, Halieus, Dysporus.* Manche Gattung ist zwar in allen oder mehreren Welttheilen und Klimaten anzutreffen, aber die Arten eines jeden Landes oder Klimas oder einiger zusammen, bilden besondere Familienformen, z. B. bei *Psittacus, Corvus, Turdus.*

Die genaue Nachweisung der Erstreckungen der einzelnen Arten, wie Zimmermann sie bei den Säugthieren aufgesucht hat, läſst sich ohne die speciellste Ausführlichkeit und ohne Karte nicht darstellen. Für die Nordhemisphäre liefern Pennant und Pallas viele dazu dienende Angaben; über die Vögel der südlichen Erdtheile hat man aber noch wenig Genaues in dieser Hinsicht.

5) Die Aufsuchung der Verwandschaft, worin die Gattungen der Vögel mit einander stehen, in Beziehung auf ihren Wohnsitz. Eine besondere Verwandtschaftstafel der Gattungen habe ich um so weniger nöthig gefunden, da die IXte Tabelle eine vorläufige, und wie es mir schien, am natürlichsten geordnete, Uebersicht gewährt, und die dazu erforderlichen, ins Einzelne gehenden Nachweisungen die Schranken dieser Abhandlung überschreiten würden. Der seit des trefflichen Herrmanns *Tabulae affinitatum animalium* nicht wieder von neuem durchgeführte Verwandtschaftszusammenhang der Thiere, der durch die vielen neuen Entdeckungen theils sehr erweitert, theils geändert, auch wohl durch die genauere Kenntniſs der von Herrmann schon verglichenen Thiere schwieriger gemacht ist, verdient ganz von neuem aufgesucht und dem gegenwärtigen Zustande der Zoologie angepaſst zu werden.

Wahrscheinlich wird uns Australien die Vermittelungsbildungen zwischen den dem Süden der alten und der neuen Welt eigenthümlichen Gattungen liefern, wenn es uns genauer bekannt geworden seyn wird, als bis jetzt.

I. Uebersicht der gesammten Vögel nach ihrer Vertheilung über die Erde.

Ordnung.	Zahl der			Europa			Afrika			Asien			Australien			Alte Welt		Amerika			Unbekanntes Vaterland
	Familien	Gattungen	Arten	überhaupt	ausschliefslich	mit andern Welttheilen	überhaupt	ausschliefslich	mit andern Welttheilen	überhaupt	ausschliefslich	mit andern Welttheilen	überhaupt	ausschliefslich	mit andern Welttheilen	ausschliefslich	mit Amerika	überhaupt	ausschliefslich	mit andern Welttheilen	
in VII. Ordnungen.	41	145 †1?	3609 †170	414 †37	116 †34	297 †4	615 †27	471 †23	136 †12	952 †33	599 †24	552 †10	526 †15	456 †13	70 †2	1897 †87	187 †9	1635 †98	1447 †89	187 †9	60 †2
																2084, †96					

II. Uebersicht der einzelnen Ordnungen.

	Ordnung	Familien	Gattungen	Arten	Europa überhaupt	Europa ausschliefslich	Europa mit andern Welttheilen	Afrika überhaupt	Afrika ausschliefslich	Afrika mit andern Welttheilen	Asien überhaupt	Asien ausschliefslich	Asien mit andern Welttheilen	Australien überhaupt	Australien ausschliefslich	Australien mit andern Welttheilen	Alte Welt ausschliefslich	Alte Welt mit Amerika	Amerika überhaupt	Amerika ausschliefslich	Amerika mit andern Welttheilen	Unbekanntes Vaterland
I	*Scansores*	5	16	445 †14	14	5	9	55 †1	49 †1	6	119 †2	103 †2	16	61	66	5	236 †1	2 †1	200 †13	198 †12	2 †1	9
II	*Ambulatores*	11	45	1945 †74	161 †2	65 †2	96	353 †12	297 †10	52 †6	453 †15	522 †12	130 †4	263 †9	255 †8	8 †1	1069 †25	32 †4	818 †61	784 †58	32 †4	46
III	*Raptatores*	3	6	280 †11	52 †11	12 †10	40 †1	47	30	16 †1	72 †1	33	59 †1	23	19	4	121 †10	21 †1	158 †1	137	21 †1	1
IV	*Rasores*	5	16	237 †11	20 †2	4	15 †3	45 †3	36 †3	8 †1	79 †2	62 †1	17 †1	32	30	2	146 †6	5 †1	90 †4	84 †3	5 †1	2 †2
V	*Cursores*	3	10	75 †3	17 †1	3 †1	14	22	17	5	30	13	17	17 †1	12 †1	5	55 †2	8	20 †1	12 †1	8	—
VI	*Grallatores*	8	30 †1?	321 †36	66 †11	18 †11	48	43 †4	25 †4	17 †1	95 †6	43 †3	52 †3	39 †2	30 †2	9	139 †21	36 †1	179 †16	143 †15	36 †1	2
VII	*Natatores*	6	22	304 †21	84 †10	9 †10	75	50 †7	18 †5	31 †3	104 †7	23 †6	81 †1	91 †3	54 †2	37 †1	131 †22	83 †1	170 †2	86 †2	83 †1	—

III. Uebersicht der Familien.

Ordnung.	Familie.	Zahl der Gattungen.	Zahl der Arten.	Europa überhaupt	Europa ausschliefslich	Europa mit andern Welttheilen	Afrika überhaupt	Afrika ausschliefslich	Afrika mit andern Welttheilen	Asien überhaupt	Asien ausschliefslich	Asien mit andern Welttheilen	Australien überhaupt	Australien ausschliefslich	Australien mit andern Welttheilen	Alte Welt ausschliefslich	Alte Welt mit Amerika	Amerika überhaupt	Amerika ausschliefslich	Amerika mit andern Welttheilen	Unbekanntes Vaterland
I	*Scansores*																				
	1. *Psittacini*	2	217	—	—	—	16	12	4	61 †2	55 †2	6	45	40	5	120	—	84 †5	84 †5	—	8
	2. *Serrati*	6	37 †6	—	—	—	8	7	1	5	4	1	—	—	—	12	—	29 †2	29 †2	—	—
	3. *Amphiboli*	5	101 †2	4	3	1	21	20	1	31	29	2	14	14	—	68	—	33	33	—	1
	4. *Sagittilingues*	2	83 †6	10	2	8	10 †1	10 †1	—	22	15	7	2	2	—	56 †1	2 †1	47 †6	45 †5	2 †1	—
	5. *Syndactyli*	1	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	7	—	—
II	*Ambulatores*																				
	6. *Angulirostres*	2	102	2 †1	— †1	2	24	18	6	29	22	7	31	30	1	78	—	20 †1	20 †1	—	3
	7. *Suspensi*	1	76	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	66	66	—	10
	8. *Tenuirostres*	3	131 †1	2	—	2	36 †1	33 †1	3	30 †1	25 †1	5	36	35	1	101 †1	—	24 †1	24 †1	—	5
	9. *Pygarrhacha*	[illegible]	9	1	—	1	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	1	9	8	1	—
	10. *Gregarii*	6	80	3	—	3	7	6	1	12	9	3	1	1	—	18	1	60 †2	59 †2	1	—
	11. *Canori*	10	826 †35	77	41	36	134 †1	138 †1	16	180 †2	133 †2	47	120 †2	116 †2	4	493 †3	11	328	317	11	14
	12. *Passerini*	9	467 †22	55 †1	25 †1	32	92 †8	75 †6	15 †6	124 †7	82 †4	41 †4	20 †2	20 †2	—	227 †11	9 †4	214 †19	204 †16	9 †4	10
	13. *Dentirostres*	2	25	—	—	—	4	3	1	14 †2	12 †2	2	3	2	1	23	—	2	2	—	—
	14. *Coraces*	5	130 †[illegible]	14	—	14	24 †1	17 †1	7	42 †2	27 †2	15	43 †5	43 †4	— †1	96 †8	5	29 †3	24 †3	5	3
	15. *Sericati*	2	[illegible]	—	—	—	— †1	— †1	—	—	—	—	—	—	—	— †1	—	15 †3	15 †3	—	1
	16. *Hiantes*	5	83 †3	7	1	6	12	7	5	21 †1	12 †1	9	8 †1	7 †1	1	33 †2	5	50 †1	46 †1	5	—

Ordnung.	Familie.	Zahl der Gattungen	Zahl der Arten	Europa überhaupt	Europa ausschliefslich	Europa mit andern Welttheilen	Afrika überhaupt	Afrika ausschliefslich	Afrika mit andern Welttheilen	Asien überhaupt	Asien ausschliefslich	Asien mit andern Welttheilen	Australien überhaupt	Australien ausschliefslich	Australien mit andern Welttheilen	Alte Welt ausschliefslich	Alte Welt mit Amerika	Amerika überhaupt	Amerika ausschliefslich	Amerika mit andern Welttheilen	Unbekanntes Vaterland
III	*Raptatores* 17. *Nocturni*	1	57 †4	16 †4	4 †4	12	7	2	5	17	6	11	6	5	1	21 †4	8	35	27	8	1
	18. *Accipitrini*	3	201 †6	31 †6	6 †5	25 †1	36	27	8 †1	47 †1	21	26 †1	16	13	3	86 †5	13 †1	115 †1	102	13 †1	—
	19. *Vulturini*	2	22 †1	5 †1	2 †1	3	4	1	3	8	6	2	1	1	—	14 †1	—	8	8	—	—
IV	*Rasores* 20. *Gallinacei*	11	101 †8	15 †2	3	11 †3	22 †1	15 †1	6 †1	39 †2	29 †1	10 †1	4	4	—	61 †4	4	40 †2	36 †2	4	— †2
	21. *Epollicati*	2	10	2	—	2	6	4	2	3	3	—	2	2	—	10	—	—	—	—	—
	22. *Columbini*	1	113	4	1	3	16	15	1	37	30	7	26	24	2	74	1 †1	36 †1	35	1 †1	2
	23. *Crypturi*	1	14 †1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	14 †1	14 †1	—	—
	24. *Inepti*	1	1 †2	—	—	—	1 †2	1 †2	—	—	—	—	—	—	—	1 †2	—	—	—	—	—
V	*Cursores* 25. *Proceri*	3	4	—	—	—	1	—	1	2	1	1	1	1	—	3	—	1	1	—	—
	26. *Campestres*	1	12 †1	2	—	2	6	5	1	6	3	3	1	1	—	12	—	— †1	— †1	—	—
	27. *Littorales*	6	59 †2	15 †1	3 †1	12	15	11	4	22	9	13	15 †1	10 †1	5	40 †2	8	19	11	8	—
VI	*Grallatores* 28. *Vaginati*	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	—	1	1	—	1	—
	29. *Alectorides*	6	10 †3	1	—	1	1 †1	1 †1	—	4	3	1	1	1	—	6 †1	—	4 †2	4 †2	—	—
	30. *Herodii*	7	101 †10	13 †4	1 †4	12	13 †2	7 †2	6	31 †1	17 †1	14	13	10	3	45 †7	5	56 †3	51 †3	5	—
	31. *Falcati*	2	22 †3	1	—	1	6 †1	5 †1	1	4 †1	2 †1	2	1	—	1	9 †2	—	13 †1	13 †1	—	—

Ordnung.	Familie.	Zahl der Gattungen	Zahl der Arten	Europa überhaupt	Europa ausschliefslich	Europa mit andern Welttheilen	Afrika überhaupt	Afrika ausschliefslich	Afrika mit andern Welttheilen	Asien überhaupt	Asien ausschliefslich	Asien mit andern Welttheilen	Australien überhaupt	Australien ausschliefslich	Australien mit andern Welttheilen	Alte Welt ausschliefslich	Alte Welt mit Amerika	Amerika überhaupt	Amerika ausschliefslich	Amerika mit andern Welttheilen	Unbekanntes Vaterland
(VI)	32. *Limicolae*	5	91 †11	[illegible]9 †2	17 †2	22	8	4	4	24 †1	5	19 †1	8 †2	6 2	2	33 †5	22	58 †6	36 †6	22	—
	33. *Macrodactyli*	3	77 †4	6 †4	— †4	6	12	8	3 †1	22 †2	15	7 †2	13	12	1	40 †4	2 †1	35 †1	33	2 †1	1
	34. *Lobipedes*	3	9 †2	3	—	3	1	—	1	6	—	6	1	1	—	2	5	7 †2	2 †2	5	—
	35. *Hygrobatae*	3 †1?	10 †3	3 †1?	— †1?	5	2	—	2	4 †1	1 †1	3	1	—	1	4 †2	1	5 †1	4 †1	1	1
VII	*Natatores* 36. *Longipennes*	4	56 †2	19 †1	3 †1	16	11	2	9	18 †1	4 †1	14	21 †1	12 †1	9	29 †2	14	27	13	14	—
	37. *Tubinares*	4	51	4	1	3	8	—	8	6	—	6	26	17	9	20	10	11	1	10	—
	38. *Lamelloso-dentati*	3	126 †16	38 †8	2 †8	36	16 †6	8 †4	7 †3	45 †4	10 †3	35 †1	18 †2	15 †1	3 †1	48 †16	26 †1	77 †1	50 1	26 †1	—
	39. *Steganopodes*	5	42 †2	8	—	8	13 †1	7 †1	6	16	6	10	18	6	12	22 †1	11	20 †1	9 †1	11	—
	40. *Pygopodes*	5	37 †1	15 †1	3 †1	12	1	—	1	19 †2	3 †2	16	1	1	—	8 †3	18	27	9	18	—
	41. *Impennes*	1	12	—	—	—	1	1	—	—	—	—	7	3	4	4	4	8	4	4	—

IV. Ueberblick der Gattungen und Arten.

Ordnung.	Familie.	Gattung.	Zahl der Arten.	Europa überhaupt	Europa ausschliefslich	Europa mit andern Welttheilen	Afrika überhaupt	Afrika ausschliefslich	Afrika mit andern Welttheilen	Asien überhaupt	Asien ausschliefslich	Asien mit andern Welttheilen	Australien überhaupt	Australien ausschliefslich	Australien mit andern Welttheilen	Alte Welt ausschliefslich	Alte Welt mit Amerika	Amerika überhaupt	Amerika ausschliefslich	Amerika mit andern Welttheilen	Unbekanntes Vaterland
I	—	*Scansores*																			
	1.	1. *Psittacus*	216	—	—	—	16	12	4	61 †2?	55 †2?	6	44	39	5	119 †8?	—	84 †5?	84 †5?	—	8
		2. *Pezoporus*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	1	—	—	—	—	—
	2.	3. *Ramphastos*	10 †4?	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	13 †1?	13 †1?	—	—
		4. *Pteroglossus*	7 †1?	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7 †1?	7 †1?	—	—
		5. *Pogonias*	3 †1	—	—	—	4	3	1	1	—	1	—	—	—	4	—	—	—	—	—
		6. *Corythaix*	2	—	—	—	2	2	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—	—
		7. *Trogon*	14	—	—	—	1	1	—	4	4	—	—	—	—	5	—	9	9	—	—
		8. *Musophaga*	1	—	—	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—
	3.	9. *Crotophaga*	2 †1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	—	1
		10. *Scythrops*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	1	—	—	—	—	—
		11. *Bucco*	24 †1	—	—	—	2	2	—	8	8	—	—	—	—	10	—	14	14	—	—
		12. *Cuculus*	67	4	3	1	16	15	1	20	18	2	12	12	—	50	—	17	17	—	—
		13. *Centropus*	7	—	—	—	3	3	—	3	3	—	1	1	—	7	—	—	—	—	—
	4.	14. *Jynx*	2	1	—	1	—	—	—	1	—	1	—	—	—	1	—	1	1	—	—
		15. *Picus*	81 †6	9	2	7	10 †1	10 †1	—	21	15	6	2	2	—	35 †1	2 †1	46 †6	44 †5	2 †1	—
	5.	16. *Galbula*	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	7	—	—

Ordnung.	Familie.	Gattung.	Zahl der Arten.	Europa überhaupt	Europa ausschliesslich	Europa mit andern Welttheilen	Afrika überhaupt	Afrika ausschliesslich	Afrika mit andern Welttheilen	Asien überhaupt	Asien ausschliesslich	Asien mit andern Welttheilen	Australien überhaupt	Australien ausschliesslich	Australien mit andern Welttheilen	Alte Welt ausschliesslich	Alte Welt mit Amerika	Amerika überhaupt	Amerika ausschliesslich	Amerika mit andern Welttheilen	Unbekanntes Vaterland
II	—	*Ambulatores*																			
	6.	17. *Alcedo*	49	1	—	1	13	9	4	21	16	5	7	6	1	36	—	13	13	—	—
		18. *Merops*	5 †1	1 †1?	— †1?	1	11	9	2	8	6	2	24	24	—	42	—	7 †1	7 †1	—	3
	7.	19. *Trochilus*	76	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	66 †10	66 †10	—	10
	8.	20. *Nectarinia*	118	—	—	—	51 †1	50 †1	1	25	25	2	33	32	1	90	—	22 †1	22 †1	—	5
		21. *Tichodroma*	1 †1	1	—	1	—	—	—	1 †1	— †1	1	—	—	—	1 †1	—	—	—	—	—
		22. *Upupa*	12	1	—	1	5	3	2	4	2	2	3	3	—	10	—	2	2	—	—
	9.	23. *Certhia*	1	1	—	1	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	1	1	—	1	—
		24. *Dendrocolaptes*	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	8	8	—	—
	10.	25. *Xenops*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—
		26. *Sitta*	13	1	—	1	2	2	—	2	1	1	1	1	—	5	—	8	8	—	—
		27. *Buphaga*	1	—	—	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—
		28. *Oriolus*	46	1	—	1	3	3	—	5	4	1	—	—	—	8	—	36 †2	36 †2	—	—
		29. *Cassicus*	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9	9	—	—
		30. *Sturnus*	10	1	—	1	1	—	1	5	4	1	—	—	—	4	1	6	5	1	—
	11.	31. *Turdus* (et 36. *Myiothera*)	218 †5	14	7	7	43	38	5	62	52	10	40	40	—	146	1	69 †2	68 †2	1	1?
		32. *Cinclus*	1	1	—	1	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	1	1	—	1	—

Ordnung.	Familie.	Gattung.	Zahl der Arten.	Europa: überhaupt	Europa: ausschliefslich	Europa: mit andern Welttheilen	Afrika: überhaupt	Afrika: ausschliefslich	Afrika: mit andern Welttheilen	Asien: überhaupt	Asien: ausschliefslich	Asien: mit andern Welttheilen	Australien: überhaupt	Australien: ausschliefslich	Australien: mit andern Welttheilen	Alte Welt: ausschliefslich	Alte Welt: mit Amerika	Amerika: überhaupt	Amerika: ausschliefslich	Amerika: mit andern Welttheilen	Unbekanntes Vaterland
(II)	(11)	33. *Accentor*	1	1	—	1	—	—	—	1	—	1	—	—	—	1	—	—	—	—	—
		34. *Motacilla*	279 †14	52	30	22	54	49	5	59	35	24	26	26	—	164	7	115 †14	108 †14	7	—
		35. *Muscicapa*	186 †9	5	3	2	37	35	2	36	30	6	30 †2	29 †2	1	110 †1	1	72 †8	71 †8	1	4
		37. *Lanius*	86 †2	4	1	3	19	16	3	20 †1	15 †1	5	12	10	2	48	1	35 †2	34 †2	1	3
		38. *Sparactes*	4 †1	—	—	—	1	—	1	— †1	— †1	—	4	3	1	4 †1	—	—	—	—	—
		39. *Todus*	16 †1	—	—	—	—	—	—	1	1	—	2	2	—	3	—	10 †1	10 †1	—	3
		39. b. *Spizites* (36)	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	—	2	—	—	—	—	—
		40. *Pipra*	34 †5	—	—	—	— †1	— †1	—	—	—	—	4	4	—	4 †1	—	26 †4	26 †4	—	4
	12	41. *Parus*	34 †4	10	4	6	5	4	1	14 †2	8 †2	6	2 †2	2 †2	—	24 †4	1	10	9	1	—
		42. *Alauda*	28	9	3	6	7	7	—	11	5	6	3	3	—	22	2	6	4	2	—
		43. *Emberiza*	54	10	5	5	6	4	2	22	17	5	—	—	—	30	2	21	19	2	3
		44. *Tanagra*	72 †14	—	—	—	— †2	— †2	—	— †2	— †2	—	2	2	—	2 †4	—	66 †10	66 †10	—	4
		45. *Fringilla*	262 †3	24 †1	10 †1	14	67 †5	53 †3	10 †6	73 †3	49	23 †4	11	11	—	144 †2	4 †4	108 †9	103 †6	4 †4	3
		46. *Loxia*	3	2	1	1	—	—	—	1	—	1	—	—	—	2	—	1	1	—	—
		47. *Colius*	10 †1	—	—	—	6 †1	6 †1	—	3	3	—	1	1	—	10 †1	—	—	—	—	—
		48. *Glaucopis*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	1	—	—	—	—	—
		49. *Phytotoma*	3	—	—	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	2	2	—	—

Ordnung.	Familie.	Gattung.	Zahl der Arten.	Europa			Afrika			Asien			Australien			Alte Welt		Amerika			Unbekanntes Vaterland
				überhaupt	ausschliefslich	mit andern Welttheilen	überhaupt	ausschliefslich	mit andern Welttheilen	überhaupt	ausschliefslich	mit andern Welttheilen	überhaupt	ausschliefslich	mit andern Welttheilen	ausschliefslich	mit Amerika	überhaupt	ausschliefslich	mit andern Welttheilen	
(II)	13	50. *Trionites*	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	—	—
		51. *Buceros*	23	—	—	—	4	3	1	14 †2	12 †2	2	3	2	1	23	—	—	—	—	—
	14	52. *Corvus*	59 †3	12	—	12	9	6	3	21 †1	10 †1	11	16 †1	16	— †1	37 †3	5	22	17	5	—
		53. *Coracias*	33 †4	2	—	2	13 †1	9 †1	4	15	11	4	6 †2	6 †2	—	29 †4	—	1 †2	1 †2?	—	3
		54. *Paradisea*	16 †1	—	—	—	—	—	—	— †1	— †1	—	15 †2	15 †2	—	16 †1	—	—	—	—	—
		55. *Cephalopterus*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—
		56. *Gracula*	19 †1	—	—	—	2	2	—	6	6	—	6	6	—	14	—	5 †1	5 †1	—	—
	15	57. *Ampelis*	13 †4	—	—	—	— †1	— †1	—	—	—	—	—	—	—	— †1	—	12 †3	12 †3	—	1
		58. *Procnias*	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	3	—	—
	16	59. *Hirundo*	44	4	1	3	7	5	2	14	9	5	3	2	1	21	3	23	20	3	—
		60. *Cypselus*	5 †3	2	—	2	1	—	1	4 †1	2 †1	2	— †1	— †1	—	3 †2	1	2 †1	1 †1	1	—
		61. *Caprimulgus*	34	1	—	1	4	2	2	3	1	2	5	5	—	9	1	25	24	1	—
III	—	*Raptatores*																			
	17	62. *Strix*	57 †4	16 †4	4 †4	12	7	2	5	17	6	11	6	5	1	21 †4	8	35	27	8	1
	18	63. *Falco*	195 †5	30 †5	6 †4	24 †1	33	26	6 †1	45 †1	21	24 †1	16	13	3	83 †4	13 †1	112 †1	99	13 †1	—
		64. *Gypogeranus*	1	—	—	—	1	—	1	1?	—	1?	—	—	—	1	—	—	—	—	—
		65. *Gypaetus*	5 †1	1 †1	— †1?	1	2	1	1	1	—	1	—	—	—	2 †1	—	3	3	—	—
	19	66. *Vultur*	12 †1	4 †1	2 †1	2	3	1	2	7	5	2	1	1	—	12 †1	—	—	—	—	—

Ordnung.	Familie.	Gattung.	Zahl der Arten.	Europa überhaupt	Europa ausschliesslich	Europa mit andern Welttheilen	Afrika überhaupt	Afrika ausschliesslich	Afrika mit andern Welttheilen	Asien überhaupt	Asien ausschliesslich	Asien mit andern Welttheilen	Australien überhaupt	Australien ausschliesslich	Australien mit andern Welttheilen	Alte Welt ausschliesslich	Alte Welt mit Amerika	Amerika überhaupt	Amerika ausschliesslich	Amerika mit andern Welttheilen	Unbekanntes Vaterland
(III)	(19)	67. *Cathartes*	10	1	—	1	1	—	1	1	1	—	—	—	—	2	—	8	8	—	—
IV	—	*Rasores*																			
	20	68. *Numida*	3	—	—	—	3	3	—	—	—	—	—	—	—	3	—	—	—	—	—
		69. *Meleagris*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—
		70. *Penelope*	15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15	15	—	—
			†1															†1	†1		
		71. *Crax*	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	—	—
		72. *Opisthocomus*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—
			†1				†1	†1								†1					
		73. *Pavo*	3	—	—	—	—	—	—	3	3	—	—	—	—	3	—	—	—	—	—
			†1							†1	†1					†1					
		74. *Phasianus*	8	—	—	—	—	—	—	8	8	—	—	—	—	8	—	—	—	—	—
		75. *Gallus*	2	—	—	—	—	—	—	2	2	—	—	—	—	2	—	—	—	—	—
		76. *Menura*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	1	—	—	—	—	—
		77. *Tetrao*	21	10	3	7	5	4	1	7	2	5	—	—	—	13	3	8	5	3	—
			†2																		†2
		78. *Perdix*	44	5	—	4	14	8	5	19	14	5	3	3	—	31	1	13	12	1	—
			†3	†2		†3			†1	†1		†1				†2		†1	†1		
	21	79. *Ortygis*	10	2	—	2	6	4	2	2	2	—	2	2	—	10	—	—	—	—	—
		80. *Syrrhaptes*	1	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—
	22	81. *Columba*	114	4	1	3	16	15	1	37	30	7	26	24	2	74	2	37	35	2	2
																	†1	†1		†1	
	23	82. *Crypturus*	14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	14	14	—	—
			†1															†1	†1		
	24	83. *Didus*	1	—	—	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—
			†2				†2	†2								†2					

Ordnung.	Familie.	Gattung.	Zahl der Arten.	Europa: überhaupt	Europa: ausschliefslich	Europa: mit andern Welttheilen	Afrika: überhaupt	Afrika: ausschliefslich	Afrika: mit andern Welttheilen	Asien: überhaupt	Asien: ausschliefslich	Asien: mit andern Welttheilen	Australien: überhaupt	Australien: ausschliefslich	Australien: mit andern Welttheilen	Alte Welt: ausschliefslich	Alte Welt: mit Amerika	Amerika: überhaupt	Amerika: ausschliefslich	Amerika: mit andern Welttheilen	Unbekanntes Vaterland
V	—	*Cursores*																			
	25	84. *Casuarius*	2	—	—	—	—	—	—	1	1	—	1	1	—	2	—	—	—	—	—
		85. *Struthio*	1	—	—	—	1	—	1	1	—	1	—	—	—	1	—	—	—	—	—
		86. *Rhea*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—
	26	87. *Otis*	12 †1	2	—	2	6	5	1	6	3	3	1	1	—	12	—	— †1	— †1	—	—
	27	88. *Charadrius*	50 †1	11 †1	2 †1	9	13	10	3	17	8	9	12	9	3	35 †1	4	15	11	4	—
		89. *Calidris*	1	1	—	1	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	1	1	—	1	—
		90. *Himantopus*	2 †1	1	—	1	1	—	1	2	—	2	— †1	— †1	—	— †1	2	2	—	2	—
		91. *Haematopus*	2	1	—	1	—	—	—	1	—	1	2	—	2	1	1	1	—	1	—
		92. *Tachydromus*	3	1	1	—	1	1	—	1	1	—	—	—	—	3	—	—	—	—	—
		93. *Burhinus*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	1	—	—	—	—	—
VI	—	*Grallatores*																			
	28	94. *Chionis*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	—	1	1	—	1	—
	29	95. *Glareola*	5 †1	1	—	1	1	1	—	4	3	1	—	—	—	5	—	— †1	— †1	—	—
		96. *Cereopsis*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	1	—	—	—	—	—
		97. *Dicholophus*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—
		98. *Palamedea*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—
		99. *Chauna*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—

Ordnung.	Familie	Gattung.	Zahl der Arten.	Europa überhaupt	Europa ausschliefslich	Europa mit andern Welttheilen	Afrika überhaupt	Afrika ausschliefslich	Afrika mit andern Welttheilen	Asien überhaupt	Asien ausschliefslich	Asien mit andern Welttheilen	Australien überhaupt	Australien ausschliefslich	Australien mit andern Welttheilen	Alte Welt ausschliefslich	Alte Welt mit Amerika	Amerika überhaupt	Amerika ausschliefslich	Amerika mit andern Welttheilen	Unbekanntes Vaterland
(VI)	(2[illegible])	100. *Psophia*	1 † 2	—	—	—	— † 1	— † 1	—	—	—	—	—	—	—	— † 1	—	— † 1	— † 1	—	—
	30	101. *Grus*	11 † 1	1	—	1	4 † 1	2 † 1	2	6	4	2	1	1	—	9 † 1	—	2	2	—	—
		102. *Ciconia*	10 † 1	2	—	2	4	2	2	5 † 1	2 † 1	3	1	1	—	8 † 1	—	2	2	—	—
		103. *Ardea*	74 † 8	10 † 4	1 † 4	9	4 † 1	2 † 1	2	17	8	9	11	8	3	24 † 5	5	50 † 5	45 † 3	5	—
		104. *Eurypyga*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—
		105. *Scopus*	1	—	—	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—
		106. *Cancroma*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—
		107. *Anastomus*	3	—	—	—	—	—	—	3	3	—	—	—	—	3	—	—	—	—	—
	31	108. *Tantalus*	2 † 3	—	—	—	— † 1	— † 1	—	1 † 1	— † 1	1	1	—	1	1 † 2	—	1 † 1	1 † 1	—	—
		109. *Ibis*	20	1	—	1	6	5	1	3	2	1	—	—	—	8	—	12	12	—	—
	32	110. *Numenius*	15 † 3	5 † 1	— † 1	5	4	4	—	5	1	4	3	2	1	9 † 1	3	6 † 2	3 † 2	3	—
		111. *Scolopax*	12 † 7	5	4	1	3	—	3	7 † 1	2	5 † 1	2 † 2	1 † [illegible]	1	5 † 3	4	7 † 4	3 † 4	4	—
		112. *Ereunetes*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—
		113. *Tringa* (*Actitis*)	62	28	13	15	1	—	1	11	2	9	3	3	—	19	14	43	29	14	—
		114. *Strepsilas*	1 † 1	1 † 1	— † 1	1	—	—	—	1	—	1	—	—	—	— † 1	1	1	—	1	—
		115. *Tringa* (vide *Charadrius*)																			
	33	116. *Parra*	9	—	—	—	1	1	—	4	4	—	—	—	—	5	—	4	4	—	—

Ordnung.	Familie.	Gattung.	Zahl der Arten.	Europa überhaupt	Europa ausschliefslich	Europa mit andern Welttheilen	Afrika überhaupt	Afrika ausschliefslich	Afrika mit andern Welttheilen	Asien überhaupt	Asien ausschliefslich	Asien mit andern Welttheilen	Australien überhaupt	Australien ausschliefslich	Australien mit andern Welttheilen	Alte Welt ausschliefslich	Alte Welt mit Amerika	Amerika überhaupt	Amerika ausschliefslich	Amerika mit andern Welttheilen	Unbekanntes Vaterland
(VI)	(35)	117. *Rallus*	30 †1	1 †1	— †1	1	5	4	— †1	7 †1	6	1 †1	9	9	—	20 †1	—	9	9	—	1
		118. *Crex*	38 †3	5 †3	— †3	5	6	3	3	11 †1	5	6 †1	4	3	1	16 †3	2 †1	22 †1	20	2 †1	—
	34	119. *Fulica*	3 †1	1	—	1	1	—	1	2	—	2	—	—	—	1	1	2 †1	1 †1	1	—
		120. *Podoa*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—
		121. *Phalaropus*	5 †1	2	—	2	—	—	—	4	—	4	1	1	—	1	4	4 †1	— †1	4	—
	35	122. *Corrira?*	1?	1?	1?	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1?	—	—	—	—	—
		123. *Recurvirostra*	3 †1	1	—	1	—	—	—	1 †1	— †1	1	1	—	1	1 †1	1	2	1	1	—
		124. *Platalea*	3 †1	1	—	1	1	—	1	2	1	1	—	—	—	2	—	1 †1	1 †1	—	—
		125. *Phoenicopterus*	4	1	—	1	1	—	1	1	—	1	—	—	—	1	—	2	2	—	1
VII	—	*Natatores*																			
	36	126. *Rhynchops*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—
		127. *Sterna*	56 †2	6 †1	2 †1	4	7	2	5	9 †1	3 †1	6	14 †1	9 †1	5	20 †2	6	16	10	6	—
		128. *Larus*	15	10	1	9	2	—	2	8	1	7	6	3	3	8	6	7	1	6	—
		129. *Lestris*	4	3	—	3	2	—	2	1	—	1	1	—	1	1	2	3	1	2	—
	37	130. *Procellaria*	22	4	1	3	6	—	6	5	—	5	17	11	6	13	8	9	1	8	—
		131. *Haladroma*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	1	—	—	—	—	—
		132. *Pachyptila*	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	3	1	3	1	1	—	1	—

Ordnung.	Familie.	Gattung.	Zahl der Arten.	Europa überhaupt	Europa ausschliesslich	Europa mit andern Welttheilen	Afrika überhaupt	Afrika ausschliesslich	Afrika mit andern Welttheilen	Asien überhaupt	Asien ausschliesslich	Asien mit andern Welttheilen	Australien überhaupt	Australien ausschliesslich	Australien mit andern Welttheilen	Alte Welt ausschliesslich	Alte Welt mit Amerika	Amerika überhaupt	Amerika ausschliesslich	Amerika mit andern Welttheilen	Unbekanntes Vaterland
(VII)	(37)	133. *Diomedea*	4	—	—	—	2	—	2	1	—	1	4	2	2	3	1	1	—	1	—
	38	134. *Anas*	93 †13	28 †7	2 †7	26	10 †6	5 †4	5 †2	35 †2	9 †2	26	12	10	2	36 †13	17 †1	57	40	17 †1	—
		135. *Anser*	27 †3	7	—	7	6	3	2 †1	7 †2	1 †1	6 †1	6 †2	5 †1	1 †1	12 †2	6	14 †1	8 †1	6	—
		136. *Mergus*	6 †1	3 †1	— †1	3	—	—	—	3	—	3	—	—	—	— †1	3	6	3	3	—
	39	137. *Pelecanus*	8 †1	1	—	1	2	1	1	3	2	1	1	1	—	5	—	3 †1	3 †1	—	—
		138. *Halieus*	19	5	—	5	6	3	3	7	3	4	9	4	5	11	6	8	2	6	—
		139. *Dysporus*	7	2	—	2	1	1	—	4	—	4	5	—	5	1	4	6	2	4	—
		140. *Phaethon*	4 †1	—	—	—	2 †1	— †1	2	1	—	1	3	1	2	2 †1	1	2	1	1	—
		141. *Plotus*	4	—	—	—	2	2	—	1	1	—	—	—	—	3	—	1	1	—	—
	40	142. *Colymbus*	14	6	3	3	1	—	1	4	1	3	1	1	—	6	2	8	6	2	—
		143. *Eudytes*	5 †1	3 †1	— †1	3	—	—	—	4	1	3	—	—	—	1 †1	3	4	1	3	—
		144. *Uria*	4	2	—	2	—	—	—	4	1	3	—	—	—	1	3	3	—	3	—
		145. *Mormon*	3	1	—	1	—	—	—	2	—	2	—	—	—	—	2	3	1	2	—
		146. *Alca*	11	3	—	3	—	—	—	5 †2	— †2	5	—	—	—	— †2	8	9	1	8	—
	41	147. *Aptenodytes*	12	—	—	—	1	1	—	—	—	—	7	3	4	4	4	8	4	4	—

V. Uebersicht der jedem Welttheile zukommenden Zahl der Gattungen.

		Ordnung und Familie.	Anzahl der Gattungen überhaupt	Europa			Afrika			Asien			Australien			Alte Welt		Amerika		
				über-haupt	aus-schliefslich	mit andern Welt-theilen	über-haupt	aus-schliefslich	mit andern Welt-theilen	über-haupt	aus-schliefslich	mit andern Welt-theilen	über-haupt	aus-schliefslich	mit andern Welt-theilen	aus-schliefslich	mit Amerika	über-haupt	aus-schliefslich	mit andern Welt-theilen
I	—	*Scansores*	16	3	—	3	9	2	7	8	—	8	6	2	4	6	6	10	4	6
	1	*Psittacini*	2	—	—	—	1	—	1	1	—	1	2	1	1	1	1	1	—	1
	2	*Serrati*	6	—	—	—	4	2	2	2	—	2	—	—	—	3	1	3	2	1
	3	*Amphiboli*	5	1	—	1	3	—	3	3	—	3	3	1	2	2	2	3	1	2
	4	*Sagittilingues*	2	2	—	2	1	—	1	2	—	2	1	—	1	—	2	2	—	2
	5	*Syndactyli*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—
II	—	*Ambulatores*	45	24	—	24	26†3?	1	25†3?	29†3?	—	29†3?	27	2†1?	24	9	28†1?	36	7†1?	28†1?
	6	*Angulirostres*	2	2	—	2	2	—	2	2	—	2	2	—	2	—	2	2	—	2
	7	*Suspensi*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—
	8	*Tenuirostres*	3	2	—	2	2	—	2	3	—	3	2	—	2	1	2	2	—	2
	9	*Pygarrhichi*	2	1	—	1	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	1	2	1	1
	10	*Gregarii*	6	3	—	3	4	1	3	3	—	3	1	—	1	1	3	5	2	3
	11	*Canori*	10	6	—	6	5†1?	—	5†1?	7†1?	—	7†1?	8	1	7	3	7	7	—	7
	12	*Passerini*	9	5	—	5	6†1?	—	6†1?	6†1?	—	6†1?	6	1	5	2	7	7	—	7
	13	*Dentirostres*	2	—	—	—	1	—	1	1	—	1	1	—	1	1	—	1	1	—
	14	*Coraces*	5	2	—	2	3	—	3	3†1?	—	3†1?	4	1?	3	1	3	4	1	3
	15	*Sericati*	2	—	—	—	1?	—	1?	—	—	—	—	—	—	—	1?	2	1†1?	1?
	16	*Hiantes*	3	3	—	3	3	—	3	3	—	3	3	—	3	—	3	3	—	3
III	—	*Raptatores*	6	5	—	5	6	1?	5†1?	5†1?	—	5†1?	3	—	3	2	4	4	—	4
	17	*Nocturni*	1	1	—	1	1	—	1	1	—	1	1	—	1	—	1	1	—	1
	18	*Accipitrini*	3	2	—	2	3	1?	2†1?	2†1?	—	2†1	1	—	1	1	2	2	—	2
	19	*Vulturini*	2	2	—	2	2	—	2	2	—	2	1	—	1	—	2	2	—	2
IV	—	*Rasores*	16	4	—	4	6†1	2	4†1	8	4	4	4	1	3	8	3†1	8	4†1	3†1?
	20	*Gallinacei*	11	2	—	2	3†1	1	2†1	5	3	2	2	1	1	5	2†1	6	3†1?	2†1?
	21	*Epollicati*	2	1	—	1	1	—	1	2	1	1	1	—	1	2	—	—	—	—
	22	*Columbini*	1	1	—	1	1	—	1	1	—	1	1	—	1	—	1	1	—	1

		Ordnung und Familie.	Anzahl der Gattungen überhaupt	Europa			Afrika			Asien			Australien			Alte Welt		Amerika		
				überhaupt	ausschliefslich	mit andern Welttheilen	überhaupt	ausschliefslich	mit andern Welttheilen	überhaupt	ausschliefslich	mit andern Welttheilen	überhaupt	ausschliefslich	mit andern Welttheilen	ausschliefslich	mit Amerika	überhaupt	ausschliefslich	mit andern Welttheilen
(IV)	23	*Crypturi*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—
	24	*Inepti*	1	—	—	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—
V	—	*Cursores*	10	6	—	6	5	—	5	8	—	8	5†1?	1	4†1?	4†1?	4†1?	5†1?	1	4†1?
	25	*Proceri*	3	—	—	—	1	—	1	2	—	2	1	—	1	2	—	1	1	—
	26	*Campestres*	1	1	—	1	1	—	1	1	—	1	1	—	1	1?	1?	1?	—	1?
	27	*Littorales*	6	5	—	5	3	—	3	5	—	5	3†1?	1	2†1?	2	4	4	—	4
VI	—	*Grallatores*	30†1?	16†1?	1?	16	15†2?	1	14†2?	19	1	18	13	1	12	3†2?	18†2?	26†1?	7†1?	18†2?
	28	*Vaginati*	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	—	1	1	—	1
	29	*Alectorides*	6	1	—	1	1†1?	—	1†1?	1	—	1	1	1	—	1†1?	2?	4†1?	3†1?	2?
	30	*Herodii*	7	3	—	3	4	1	3	4	1	3	3	—	3	2	3	5	2	3
	31	*Falcati*	2	1	—	1	1†1?	—	1†1?	2	—	2	1	—	1	—	2	2	—	2
	32	*Limicolae*	5	4	—	4	3	—	3	4	—	4	3	—	3	—	4	5	1	4
	33	*Macrodactyli*	3	2	—	2	3	—	3	3	—	3	2	—	2	—	3	3	—	3
	34	*Lobipedes*	3	2	—	2	1	—	1	2	—	2	1	—	1	—	2	3	1	2
	35	*Hygrobatae*	3†1?	3†1?	1?	3	2	—	2	3	—	3	1	—	1	1?	3	3	—	3
VII	—	*Natatores*	22	15	—	15	14	—	14	18	—	18	15	1	14	1	20	21	1	20
	36	*Longipennes*	4	3	—	3	3	—	3	3	—	3	3	—	3	—	3	4	1	3
	37	*Tubinares*	4	1	—	1	2	—	2	2	—	2	4	1	3	1	3	3	—	3
	38	*Lamellosodentati*	3	3	—	3	2	—	2	3	—	3	2	—	2	—	3	3	—	3
	39	*Steganopodes*	5	3	—	3	5	—	5	5	—	5	4	—	4	—	5	5	—	5
	40	*Pygopodes*	5	5	—	5	1	—	1	5	—	5	1	—	1	—	5	5	—	5
	41	*Impennes*	1	—	—	—	1	—	1	—	—	—	1	—	1	—	1	1	—	1

VI. Uebersicht der Vögelarten in den Nordlichen Erdtheilen.

Ordnung und Familie.	Gattung.	Anzahl der Arten		Europa			Nordasien			Nordamerika		
		der Gattung überhaupt	im Norden	ausschliefslich	mit andern Welttheilen	mit Afrika	ausschliefslich	mit Südasien	mit andern Welttheilen	ausschliefslich	mit Südamerika	mit andern Welttheilen
I. Scansores												
1. *Psittacini*	1. *Psittacus*	216	2	—	—	—	—	—	—	—	2	—
3. *Amphiboli*	12. *Cuculus*	67	8	3	1	—	—	1	(1)	1	3	—
4. *Sagittilingues*	14. *Jynx*	2	1	—	1	—	—	1	(*)	—	—	—
	15. *Picus*	81†6	25†1	2	7	—	—	1	5 (1)	14	1	1†1
II. Ambulatores												
6. *Angulirostres*	17. *Alcedo*	49	2	—	1	—	—	1	(1)	—	1	—
	18. *Merops*	52†1	2†1	1?	1	(1)	—	2	(1)	—	—	—
7. *Suspensi*	19. *Trochilus*	76	2†1	—	—	—	—	—	—	2	1?	—
8. *Tenuirostres*	20. *Nectarinia*	118	2	—	—	—	—	—	—	2	—	—
	21. *Tichodroma*	1†1	1	—	1	—	—	1	(1)	—	—	—
	22. *Upupa*	12	1	—	1	(1)	—	1	(1)	—	—	—
9. *Pygarrhichi*	23. *Certhia*	1	1	—	1	—	—	1	(1)	—	—	1
10. *Gregarii*	26. *Sitta*	13	5	—	1	—	—	1	(1)	3	1	—
	28. *Oriolus*	46	10†1	—	1	—	1	—	1	5†1	3	—
	29. *Cassicus*	9	2†1	—	—	—	—	—	—	2	1?	—
	30. *Sturnus*	10	2	—	1	(1)	—	—	1	1	—	1
11. *Canori*	31. *Turdus*	218†3	26†1	7	7	(2)	7	4	2 (4)	12†1	2	1
	32. *Cinclus*	1	1	—	1	—	—	—	1	—	—	1
	33. *Accentor*	1	1	—	1	—	—	—	1	—	—	—
	34. *Motacilla*	279†14	113	30	22	(3)	9	11	13 (9)	33	11	6 (1)
	35. *Muscicapa*	186†9	23	3	2	—	1	—	3	14	4	(1)

VI. 2.

Ordnung und Familie.	Gattung.	Anzahl der Arten: der Gattung überhaupt	Anzahl der Arten: im Norden	Europa: ausschliefslich	Europa: mit andern Welttheilen	Europa: mit Afrika	Nordasien: ausschliefslich	Nordasien: mit Südasien	Nordasien: mit andern Welttheilen	Nordamerika: ausschliefslich	Nordamerika: mit Südamerika	Nordamerika: mit andern Welttheilen
(*II. Ambulatores*												
11. *Canori*)	37. *Lanius*	86†2	13	1	3	(2)	2	—	2	5	2	1
	39. *Todus*	16†1	1	—	—	—	—	—	—	1	—	—
12. *Passerini*	41. *Parus*	34†4	21†1	4	6	(1)	4†1	—	6	7	—	1
	42. *Alauda*	28	12	3	6	—	3	2	3 (2)	—	—	2
	43. *Emberiza*	54	24	5	5	(1)	9	—	5	10	—	1
	44. *Tanagra*	72†14	4	—	—	—	—	—	—	3	1	—
	45. *Fringilla*	262†3	70†1	10†1	14	(3)	4	3	12 (3)	38	6	4†2?
	46. *Loxia*	3	3	1	1	—	—	—	1	1	—	—
14. *Coraces*	52. *Corvus*	59†3	18	—	12	(3)	1	8	4 (7)	3	1	5
	53. *Coracias*	35†4	2	—	2	(2)	—	1	1 (1)	—	—	—
	56. *Gracula*	19†1	3	—	—	—	—	—	—	1	2	—
16. *Hiantes*	59. *Hirundo*	44	12	1	3	(2)	2	—	4	5	2	1 (1)
	60. *Cypselus*	5†3	4	—	2	(1)	2	—	1	—	—	1
	61. *Caprimulgus*	34	4	—	1	(1)	—	1	(1)	3	—	1
III. Raptatores												
17. *Nocturni*	62. *Strix*	57†4	24†4	4†4	12	(5)	1	2	9 (2)	7	4	4 (3)
18. *Accipitrini*	63. *Falco*	195†5	51†5	6†4	24†1	(5)	—	5	19 (5)	18	5	11 (2)
	65. *Gypaëtus*	5†1	1†1	1?	1	(1)	—	1	(1)	—	—	—
19. *Vulturini*	66. *Vultur*	12†1	4†1	2†1	2	(1)	—	1	(1)	—	—	—
	67. *Cathartes*	10	2	—	1	(1)	—	—	—	1	—	—

Ordnung und Familie.	Gattung.	Anzahl der Arten.		Europa			Nordasien			Nordamerika		
		der Gattung überhaupt	im Norden	ausschliefslich	mit andern Welttheilen	mit Afrika	ausschliefslich	mit Südasien	mit andern Welttheilen	ausschliefslich	mit Südamerika	mit andern Welttheilen
IV. Rasores												
20. *Gallinacei*	69. *Meleagris*	1	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—
	74. *Phasianus*	8	1	—	—	—	—	1	—	—	—	—
	77. *Tetrao*	21†2	15	3	7	(1)	1	1	4 (1)	4	—	2
	78. *Perdix*	44†3	9†2	—	4†3	(4†1)	1?	2	1 (1)	3	1	1
20. *Epollicati*	79 *Ortygis*	10	2	—	2	(2)	—	—	—	—	—	—
	80 *Syrrhaptes*	1	1	—	—	—	1	—	—	—	—	—
22. *Columbini*	81. *Columba*	114	12	1	3	—	4	1	2 (1)	1	3	—
V. Cursores												
26. *Campestres*	87. *Otis*	12†1?	2†1?	—	2	—	—	1	1 (1)	1?	—	—
27. *Littorales*	88. *Charadrius* (et 115. *Tringa*)	50†1	20†1	2†1	9	(3)	3	2	5 (2)	2	5	1 (2)
	89. *Calidris*	1	1	—	1	—	—	—	1	—	—	1
	90. *Himantopus*	2†1	1	—	1	(1)	—	—	1	—	1	(1)
	91. *Haematopus*	2	2	—	1	—	—	—	1	—	1	(1)
	92. *Tachydromus*	3	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—
VI. Grallatores												
29. *Alectorides*	95 *Glareola*	5†1	1	—	1	—	—	—	1	—	—	—
30. *Herodii*	101. *Grus*	11†1	6	—	1	(1)	—	4	(2)	1	1	—
	102. *Ciconia*	10†1	2	—	2	(1)	—	2	(2)	—	—	—
	103. *Ardea*	74†8	24†4	1†4	9	(2)	—	6	3 (6)	9	8	1 (4)
31. *Falcati*	108. *Tantalus*	2†3	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—
	109. *Ibis*	20	4	—	1	(1)	—	—	1	1	2	—

Ordnung und Familie.	Gattung.	Anzahl der Arten: der Gattung überhaupt	Anzahl der Arten: im Norden	Europa: ausschliefslich	Europa: mit andern Welttheilen	Europa: mit Afrika	Nordasien: ausschliefslich	Nordasien: mit Südasien	Nordasien: mit andern Welttheilen	Nordamerika: ausschliefslich	Nordamerika: mit Südamerika	Nordamerika: mit andern Welttheilen
(VI. Grallatores)												
32. *Limicolae*	110. *Numenius*	15†3	8†1	1?	5	—	—	—	4	2	1	3
	111. *Scolopax*	12†7	6	4	4	(3)	—	3	1 (3)	1	1	2 (1)
	113. *Tringa (Actitis)*	62	49	13	15	(1)	1	2	8 (1)	19	4	10 (3)
	114. *Strepsilas*	1†1?	1†1?	1?	1	—	—	—	1	—	1	(1)
33. *Macrodactyli*	117. *Rallus*	30†1	3†1?	1?	1	—	—	—	1	2	—	—
	118. *Crex*	38†3	9†3	3?	5	(2)	—	2	3 (2)	3	2	(1)
34. *Lobipedes*	119. *Fulica*	3†1	1	—	1	—	—	1	(1)	—	1	(1)
	121. *Phalaropus*	5†1	4	—	2	—	—	—	4	—	—	4
35. *Hygrobatae*	122. *Corrira?*	1?	1?	1?	—	—	—	—	—	—	—	—
	123. *Recurvirostra*	3†1	3†1	—	1	—	1?	—	1	1	—	1
	124. *Platalea*	3†1	2	—	1	(1)	—	—	1	—	1	—
	125. *Phoenicopterus*	4	2	—	1	(1)	—	1	(1)	—	1	—
VII. Natatores												
36. *Longipennes*	126. *Rhynchops*	1	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—
	127. *Sterna*	35†2	9†1	2†1	4	—	1	1	3 (1)	1	1	3 (1)
	128. *Larus*	15	10	1	9	(2)	—	1	6 (1)	—	4	2 (4)
	129 *Lestris*	4	4	—	3	(2)	—	—	1	1	1	1 (1)
37. *Tubinares*	130. *Procellaria*	22	7	1	3	(2)	—	—	4	1	1	4 (1)
	132. *Pachyptila*	4	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1

Ordnung und Familie.	Gattung.	Anzahl der Arten		Europa			Nordasien			Nordamerika		
		der Gattung überhaupt	im Norden	ausschliefslich	mit andern Welttheilen	mit Afrika	ausschliefslich	mit Südasien	mit andern Welttheilen	ausschliefslich	mit Südamerika	mit andern Welttheilen
(*VII. Natatores*												
37. *Tubinares*)	133. *Diomedea*	4	1	—	—	—	—	1	(1)	—	1	(1)
38. *Lamellosodentati*	134. *Anas*	93†13	42†7	2†7	26	(5†1)	2	10	16 (9)	6	7	16 (2)
	135. *Anser*	27†2	11†1	—	7	(1)	1?	2	4 (2)	2†1?	1	4 (1)
	136. *Mergus*	6†1	6†1	1?	3	—	—	—	3	3	—	3
39. *Steganopodes*	137. *Pelecanus*	8†1	4	—	1	(1)	—	1	(1)	1	2	—
	138. *Halieus*	19	6	—	4	(2)	2	2	(2)	—	—	3
	139. *Dysporus*	7	4	—	2	—	—	1	2 (1)	—	2	1 (1)
	140. *Phaëthon*	4†1	1	—	—	—	—	—	—	1	—	—
	141. *Plotus*	4	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—
40. *Pygopodes*	142. *Colymbus*	14	7	3	3	(1)	—	—	3	1	1	1 (1)
	143. *Eudytes*	5†1	4†1?	1?	3	—	—	—	3	1	—	3
	144. *Uria*	4	4	—	2	—	1	—	3	—	—	3
	145. *Mormon*	3	3	—	1	—	—	—	2	1	—	2
	146. *Alca*	11	11	—	3	—	2	—	5	2	—	6
41. *Impennes*	147. *Aptenodytes*	12	1?	—	—	—	—	—	—	—	1?	(1?)

VII. Uebersicht der Vögel in den Südlichen Erdtheilen.

Ordnung und Familie.	Gattung.	Anzahl der Arten: der Gattung überhaupt	Anzahl der Arten: im Norden	Afrika: ausschliefslich	Afrika: mit Europa	Afrika: mit andern Welttheilen	Südasien: ausschliefslich	Südasien: mit Nord-Asien	Südasien: mit andern Welttheilen	Australien: ausschliefslich	Australien: mit andern Welttheilen	Südamerika: ausschliefslich	Südamerika: mit Nord-Amerika	Südamerika: mit andern Welttheilen
I. Scansores														
1. *Psittacini*	1. *Psittacus*	216	206†8	12	—	4	55†12	—	6	39	5	83†5	1†1	—
	2. *Pezoporus*	1	1	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—
2. *Serrati*	3. *Ramphastos*	10†4	10†4	—	—	—	—	—	—	—	—	13†2	—	—
	4. *Pteroglossus*	7†1	7†1	—	—	—	—	—	—	—	—	7†1	—	—
	5. *Pogonias*	3†1	3†1	3	—	1?	—	—	1?	—	—	—	—	—
	6. *Corythaix*	2	2	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	7. *Trogon*	14	14	1	—	—	4	—	—	—	—	9	—	—
	8. *Musophaga*	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3. *Amphiboli*	9. *Crotophaga*	2†1?	2†1?	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—
	10. *Scythrops*	1	1	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—
	11. *Bucco*	24†1	22	2	—	—	8	—	—	—	—	14	—	—
	12. *Cuculus*	67	62	15	—	1	18	1	1(1)	12	—	13	3	—
	13. *Centropus*	7	7	3	—	—	3	—	—	1	—	—	—	—
4. *Sagittilingues*	14. *Jynx*	2	2	—	—	—	—	1	(1)	—	—	1	—	—
	15. *Picus*	81†6	59†2	10†1	—	—	15	1	(1)	2	—	[illegible]9†5	1	1
5. *Syndactyli*	16. *Galbula*	7	7	—	—	—	—	—	—	—	—	7	—	—
II. Ambulatores														
6. *Angulirostres*	17. *Alcedo*	49	49	9	1	3(1)	16	1	5(1)	6	1	12	1	—
	18. *Merops*	52†1	49	9	1	1(1)	5	2	1(1)	24	—	7†1	—	—
7. *Suspensi*	19. *Trochilus*	76	64†10	—	—	—	—	—	—	—	—	63†10?	1?	—
8. *Tenuirostres*	20. *Nectarinia*	118	111	30†1	—	1	23	—	2	32	1	20†1	—	—
	21. *Tichodroma*	1†1	1†1	—	—	—	1?	1	(1)	—	—	—	—	—
	22. *Upupa*	12	12	3	1	1(1)	2	2	1(1)	3	—	2	—	—
9. *Pygarrhichi*	23. *Certhia*	1	1	—	—	—	—	1	(1)	—	—	—	—	—
	24. *Dendrocolaptes*	8	8	—	—	—	—	—	—	—	—	8	—	—
10. *Gregarii*	25. *Xenops*	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
	26. *Sitta*	13	10	2	—	—	1	1	(1)	1	—	4	1	—
	27. *Buphaga*	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	28. *Oriolus*	46	38	3	—	—	3	—	—	—	—	28†1	3	—
	29. *Cassicus*	9	7	—	—	—	—	—	—	—	—	6	1?	—

Ordnung und Familie.	Gattung.	Anzahl der Arten. der Gattung überhaupt	Anzahl der Arten. im Norden	Afrika ausschliefslich	Afrika mit Europa	Afrika mit andern Welttheilen	Südasien ausschliefslich	Südasien mit Nord-Asien	Südasien mit andern Welttheilen	Australien ausschliefslich	Australien mit andern Welttheilen	Südamerika ausschliefslich	Südamerika mit Nord-Amerika	Südamerika mit andern Welttheilen
(*II. Ambulatores*														
10. *Gregarii*)	30. *Sturnus*	10	9	—	1	(1)	4	—	—	—	—	4	—	—
11. *Canori*	31. *Turdus* (et 36. *Myiothera*)	218†3	197†1	38	2	3(2)	45	4	4(4)	40	—	54†1	2	—
	34. *Motacilla*	279†14	183†14	49	3	2(3)	24	11	2(9)	26	—	60†14	11	(1)
	35. *Muscicapa*	186†9	156†9	35	—	2	29	—	3	29†2	1	54†8	4	(1)
	37. *Lanius*	86†2	74†2	16	2	1(2)	13†1	—	3	10	2	27†2	2	—
	38. *Sparactes*	4†1	4†1	—	—	1	1?	—	—	3	1	—	—	—
	39. *Todus*	16†1	12†1	—	—	—	1	—	—	2	—	9†1	—	—
	39. b. *Spizites*	2	2	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—
	40. *Pipra*	34†5	30†5	1?	—	—	—	—	—	4	—	26†4	—	—
12. *Passerini*	41. *Parus*	34†4	13†3	4	1	(1)	4†1	—	—	2†2	—	2	—	—
	42. *Alauda*	28	19	7	—	—	2	2	1(2)	3	—	4	—	—
	43. *Emberiza*	54	23	4	1	1(1)	8	—	—	—	—	9	—	1
	44. *Tanagra*	72†14	65†14	2?	—	—	2?	—	—	2	—	62†10	1	—
	45. *Fringilla*	262†3	194†3	53†3	3	7†6(3)	45	3	8†4(3)	11	—	59†6	6	2?
	47. *Colius*	10†1	10†1	6†1	—	—	3	—	—	1	—	—	—	—
	48. *Glaucopis*	1	1	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—
	49. *Phytotoma*	3	3	1	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—
13. *Dentirostres*	50. *Prionites*	2	2	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—
	51. *Buceros*	23	23	3	—	1	12†2	—	2	2	1	—	—	—
14. *Coraces*	52. *Corvus*	59†3	53†1	6	3	(3)	8†1	8	(7)	16	1?	13	1	—
	53. *Coracias*	35†4	33†2	9†1	2	2(2)	11	1	2(1)	6†2	—	1†2	—	—
	54. *Paradisea*	16†1	16†1	—	—	—	1?	—	—	15†2	—	—	—	—
	55. *Cephalopterus*	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
	56. *Gracula*	19†1	18†1	2	—	—	6	—	—	6	—	2†1	2	—
15. *Sericati*	57. *Ampelis*	13†4	12†4	—	—	—	1?	—	—	—	—	12†3	—	—
	58. *Procnias*	3	3	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	—
16. *Hiantes*	59. *Hirundo*	44	33	5	2	(2)	7	—	1	2	1	14	2	1?
	60. *Cypselus*	5†3	4†2	—	1	(1)	1?	—	1	1?	—	1†1	—	—
	61. *Caprimulgus*	34	31	2	1	1(1)	1	1	(1)	5	—	21	—	—

Ordnung und Familie.	Gattung.	Anzahl der Arten: der Gattung überhaupt	Anzahl der Arten: im Norden	Afrika: ausschliefslich	Afrika: mit Europa	Afrika: mit andern Welttheilen	Südasien: ausschliefslich	Südasien: mit Nord-Asien	Südasien: mit andern Welttheilen	Australien: ausschliefslich	Australien: mit andern Welttheilen	Südamerika: ausschliefslich	Südamerika: mit Nord-Amerika	Südamerika: mit andern Welttheilen
III. Raptatores														
17. *Nocturni*	62. *Strix*	57†4	38	2	5	(5)	5	2	(2)	5	1	19	4	1(3)
18. *Accipitrini*	63. *Falco*	195†5	153	26	5	1(5)	21	5	1?(5)	13	3	78	5	1 ( )
	64. *Gypogeranus*	1	1	—	—	1	—	—	1?	—	—	—	—	—
	65. *Gypaëtus*	5†1	5	1?	1	(1)	—	1	(1)	—	—	3	—	—
19. *Vulturini*	66. *Vultur*	12†1	10	1	1	1(1)	5	1	1(1)	1	—	—	—	—
	67. *Cathartes*	10	9	—	1	(1)	1	—	—	—	—	7	—	—
IV. Rasores														
20. *Gallinacei*	68. *Numida*	3	3	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	69. *Meleagris*	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—
	70. *Penelope*	15†1	15†1	—	—	—	—	—	—	—	—	15†1	—	—
	71. *Crax*	2	2	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—
	72. *Opisthocomus*	1†1?	1†1?	1?	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
	73. *Pavo*	3†1?	3†1?	—	—	—	3†1?	—	—	—	—	—	—	—
	74. *Phasianus*	8	8	—	—	—	7	1	—	—	—	—	—	—
	75. *Gallus*	2	2	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—
	76. *Menura*	1	1	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—
	77. *Tetrao*	21†2	8	4	1	(1)	1	1	(1)	—	—	1	—	—
	78. *Perdix*	44†3	40†2	8	4†1	1(4†1)	12	2	2†1(1)	3	—	8†1	1	—
21. *Epollicati*	79. *Ortygis*	10	10	4	2	(2)	2	—	—	2	—	—	—	—
22. *Columbini*	81. *Columba*	114	104	15	—	1	26	1	4(1)	24	2	31	3	2†1
23. *Crypturi*	82. *Crypturus*	14†1	14†1	—	—	—	—	—	—	—	—	14†1	—	—
24. *Inepti*	83. *Didus*	1†2	1†2	1†2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
V. Cursores														
25. *Proceri*	84. *Casuarius*	2	2	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—
	85. *Struthio*	1	1	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—	—
	86. *Rhea*	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
26. *Campestres*	87. *Otis*	12†1	11	5	—	1	3	1	1(1)	1	—	—	—	—
27. *Littorales*	88. *Charadrius* (et *Tringa* 115.)	50†1	40	10	3	(3)	5	2	2(2)	9	3	6	5	1(2)
	90. *Himantopus*	2†1	2†1	—	1	(1)	1	—	—	1?	—	—	1	1(1)
	91. *Haematopus*	2	2	—	—	—	—	—	—	—	2	—	1	1(1)
	92. *Tachydromus*	3	2	1	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—
	93. *Burhinus*	1	1	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—

Ordnung und Familie.	Gattung.	Anzahl der Arten: der Gattung überhaupt	Anzahl der Arten: im Süden	Afrika: ausschliefslich	Afrika: mit Europa	Afrika: mit andern Welttheilen	Südasien: ausschliefslich	Südasien: mit Nord-Asien	Südasien: mit andern Welttheilen	Australien: ausschliefslich	Australien: mit andern Welttheilen	Südamerika: ausschliefslich	Südamerika: mit Nord-Amerika	Südamerika: mit andern Welttheilen
VI. Grallatores														
28. *Vaginati*	94. *Chionis*	1	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1
29. *Alectorides*	95. *Glareola*	5†1?	4†1?	1	—	—	3	—	—	—	—	1?	—	—
	96. *Cereopsis*	1	1	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—
	97. *Dicholophus*	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
	98. *Palamedea*	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
	99. *Chauna*	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
	100. *Psophia*	1†2	1†2	1?	—	—	—	—	—	—	—	1†1	—	—
30. *Herodii*	101. *Grus*	11†1	10†1	2†1	1	1(1)	2	4	(2)	1	—	—	1	—
	102. *Ciconia*	10†1	10†1	2	1	1(1)	2†1	2	1(2)	1	—	2	—	—
	103. *Ardea*	74†8	62†4	2†1	2	(2)	9	6	(6)	8	3	32†3	8	(4)
	104. *Eurypyga*	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
	105. *Scopus*	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	106. *Cancroma*	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
	107. *Anastomus*	3	3	—	—	—	3	—	—	—	—	—	—	—
31. *Falcati*	108. *Tantalus*	3†1	2†3	1?	—	—	—	—	1	—	1	1?	1	—
	109. *Ibis*	20	19	5	1	(1)	2	—	—	—	—	9	2	—
32. *Limicolae*	110. *Numenius*	15†3	8†2	4	—	—	1	—	—	2	1	2?	1	—
	111. *Scolopax*	12†7	11†6	—	3	(3)	2	3	1†1(3)	1†2	1	2†4	1	1(1).
	112. *Ereunetes*	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
	113. *Tringa* (*Actitis*)	62	19	—	1	(1)	—	2	(1)	3	—	10	4	(5)
	114. *Strepsilas*	1†1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	(1)
33. *Macrodactyli*	116. *Parra*	9	9	1	—	—	4	—	—	—	—	4	—	—
	117. *Rallus*	30†1	27	4	—	1?	6	—	1?	9	—	7	—	—
	118. *Crex*	38†3	33	3	2	1(2)	5	2	1†1(2)	3	1	16	2	1†1(1)
34. *Lobipedes*	119. *Fulica*	3†1	3†1	—	—	1	—	1	1(1)	—	—	1†1	1	(1)
	120. *Podoa*	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—
	121. *Phalaropus*	5†1	1†1?	—	—	—	—	—	—	1	—	1?	—	—
35. *Hygrobatae*	123. *Recurvirostra*	3†1	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—
	124. *Platalea*	3†1	3†1	—	1	(1)	1	—	—	—	—	1?	1	—

Ordnung und Familie.	Gattung.	Anzahl der Arten: der Gattung überhaupt	Anzahl der Arten: im Süden	Afrika: ausschliefslich	Afrika: mit Europa	Afrika: mit andern Welttheilen	Südasien: ausschliefslich	Südasien: mit Nord-Asien	Südasien: mit andern Welttheilen	Australien: ausschliefslich	Australien: mit andern Welttheilen	Südamerika: ausschliefslich	Südamerika: mit Nord-Amerika	Südamerika: mit andern Welttheilen
(*VI. Grallatores* 35. *Hygrobatae*)	125. *Phoenicopterus*	4	3	—	1	(1)	—	1	(1)	—	—	1	1	—
VII. Natatores 36. *Longipennes*	126. *Rhynchops*	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—
	127 *Sterna*	36†2	29†1	2	—	5	2†1	1	2(1)	9†1	5	9	1	2(1)
	128. *Larus*	15	10	—	2	(2)	1	1	(1)	3	3	1	4	(4)
	129. *Lestris*	4	2	—	2	(2)	—	—	—	—	1	—	1	(1)
37. *Tubinares*	130. *Procellaria*	22	19	—	2	4(2)	—	—	1	11	6	—	1	3(1)
	131. *Haladroma*	1	1	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—
	132. *Pachyptila*	4	4	—	—	—	—	—	—	3	1	—	—	—
	133. *Diomedea*	4	4	—	—	2	—	1	(1)	2	2	—	1	(1)
38. *Lamellosodentati*	134. *Anas*	93†13	69†6	5†4	5†1	1?(5†1)	6†2	10	1(9)	10	2	28	7	(2)
	135. *Anser*	27†2	19	3	1	1†1(1)	1	2	1?(2)	5†1	1	6	1	1(1)
39. *Steganopodes*	137. *Pelecanus*	8†1	7†1	1	1	(1)	2	1	(1)	1	—	1?	2	—
	138. *Halieus*	19	16	3	2	1(2)	1	2	2(2)	4	5	2	—	3
	139. *Dysporus*	7	7	1	—	—	—	1	1(1)	—	5	1	2	2(1)
	140. *Phaëthon*	4†1	3†1	1?	—	2	—	—	1	1	2	—	—	1
	141. *Plotus*	4	4	2	—	—	1	—	—	—	—	—	1	—
40. *Pygopodes*	142. *Colymbus*	14	8	—	1	(1)	1	—	—	1	—	5	1	(1)
	143. *Eudytes*	5†1	1	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—
41. *Impennes*	147. *Aptenodytes*	12	12	1	—	—	—	—	—	3	4	4	1?	3(1?)

VIII. Uebersicht der den Nordlichen und den Südlichen Erdtheilen eigenthümlichen und der ihnen gemeinschaftlichen Gattungen der Vögel.

Ordnung.	Familie.	dem Norden eigenthümlich	beiden gemeinschaftlich	dem Süden eigenthümlich
I. Scansores	1. *Psittacini* 1—2. Gattung.	—— (2 Arten)	1. *Psittacus* (2 Arten)	(214 Arten)
		——	——	2. *Pezoporus*
	2. *Serrati* 3—8. G.	——	——	3. *Ramphastos*
		——	——	4. *Pteroglossus*
		——	——	5. *Pogonias*
		——	——	6. *Corythaïx*
		——	——	7. *Trogon*
		——	——	8. *Musophaga*
	3. *Amphiboli* 9—13. G.	——	——	9. *Crotophaga*
		——	——	10 *Scythrops*
		——	——	11. *Bucco*
		(4 A.)	12. *Cuculus* (4 A.)	(58 A.)
		——	——	13. *Centropus*
	4. *Sagittilingues* 14–15. G.	(— A.)	14. *Jynx* (1 A.)	(1 A.)
		(25 A.)	15 *Picus* (1 A.)	(60. A.)
	5. *Syndactyli* 16. G.	——	——	16. *Galbula*
II. Ambulatores	6. *Angulirostres* G. 17—18	(— A.)	17. *Alcedo* (2 A.)	(47 A.)
		(1 A ?)	18. *Merops* (2 A.)	(50 A.)
	7. *Suspensi* G. 19.	(2 A.)	19. *Trochilus* (1 A.?)	(73 A.)

Ordnung.	Familie.	dem Norden eigenthümlich	beiden gemeinschaftlich	dem Süden eigenthümlich
(*II. Ambulatores*)	8. *Tenuirostres*	(2 A.)	20. *Nectarinia*	(116 A.)
	G. 20—22.	(— A.)	21. *Tichodroma* (1 A.)	(1 A.?)
		(— A.)	22. *Upupa* (1 A.)	(11 A.)
	9. *Pygarrhichi*	23. *Certhia*	———	———
	G. 23—24.	———	———	24. *Dendrocolaptes*
	10. *Gregarii*	———	———	25. *Xenops*
	G. 25—30.	(4 A.)	26. *Sitta* (1 A.)	(7. A.)
		———	———	27. *Buphaga*
		(8 A.)	28. *Oriolus* (3 A.)	(36 A.)
		(2 A.)	29. *Cassicus* (1 A.?)	(7 A.)
		(1 A.)	30. *Sturnus*	(8 A.)
	11. *Canori* G. 31—40.	(21. A.)	31. *Turdus* (6 A.)	(194 A.)
		32. *Cinclus*	———	———
		33. *Accentor*	———	———
		(91 A.)	34. *Motacilla* (22 A.)	(175 A.)
		(19 A.)	35. *Muscicapa* (4 A.)	(141 A.)
		(9 A.)	37. *Lanius* (4 A.)	(63 A.)
		———	———	38. *Sparactes*
		(1 A.)	39. *Todus*	(13 A.)
		———	———	39. *b. Spizites*
		———	———	40. *Pipra*
	12. *Passerini*	(21 A.)	41. *Parus* (1 A.)	(15 A.)
	G. 41—49.	(12 A.)	42. *Alauda* (2 A.)	(17 A.)

Ordnung.	Familie.	dem Norden eigenthümlich	beiden gemeinschaftlich	dem Süden eigenthümlich
(*II. Ambulatores*)	(12. *Passerini*	(23 A.)	43. *Emberiza* (1 A.)	(22 A.)
	G. 41—49.)	(3 A.)	44. *Tanagra* (1 A.)	(75 A.)
		(62 A.)	45. *Fringilla* (9 A.)	(188 A.)
		46. *Loxia*	———	———
		———	———	47. *Colius*
		———	———	48. *Glaucopis*
		———	———	49. *Phytotoma*
	13. *Dentirostres*	———	———	50. *Prionites*
	G. 50—51.	———	———	51. *Buceros*
	14. *Coraces*	(8 A.)	52. *Corvus* (10 A.)	(44 A.)
	G. 52—56.	(— A.)	53. *Coracias* (2 A.)	(33 A.)
		———	———	54. *Paradisea*
		———	———	55 *Cephalopterus*
		(1 A.)	56. *Gracula* (2 A.)	(17 A.)
	15. *Sericati*	———	———	57. *Ampelis*
	G. 57—58.	———	———	58. *Procnias*
	16. *Hiantes*	(8 A.)	59. *Hirundo* (4 A.)	(29 A.)
	G. 59—61.	(2 A.)	60. *Cypselus* (2 A.)	(5 A.)
		(3 A.)	61. *Caprimulgus* (1 A.)	(30 A.)
III. Raptatores	17. *Nocturni* G. 62.	(22 A.)	62 *Strix* (6 A.)	(32 A.)
	18. *Accipitrini*	(43 A.)	63. *Falco* (13 A.)	(140 A.)
	G. 63—65.	———	———	64. *Gypogeranus*
		(1 A.?)	65. *Gypaëtus* (1 A.)	(4 A.)

VIII. 4.

Ordnung.	Familie.	dem Norden eigenthümlich	beiden gemeinschaftlich	dem Süden eigenthümlich
(III. *Raptatores*)	19. *Vulturini*	(3 A.)	66. *Vultur* (2 A.)	(8 A.)
	G. 66—67.	(1 A.)	67. *Cathartes* (1 A.)	(8 A.)
IV. *Rasores*	20. *Gallinacei*	———	———	68. *Numida*
	G. 68 – 78.	(— A.)	69. *Meleagris* (1 A.)	(— A.)
		———	———	70. *Penelope*
		———	———	71. *Crax*
		———	———	72. *Opisthocomus*
		———	———	73. *Pavo*
		(— A.)	74. *Phasianus* (1 A.)	(7 A.)
		———	———	75. *Gallus*
		———	———	76. *Menura*
		(13 A.)	77. *Tetrao* (2 A.)	(6 A.)
		(3 A.)	78. *Perdix* (8 A.)	(34 A.)
	21. *Epollicati*	(— A.)	79. *Ortygis* (2 A.)	(8 A.)
	G. 79—80.	80. *Syrrhaptes*	———	———
	22. *Columbini* G. 81.	(11 A.)	81. *Columba* (1 A.)	(103 A.)
	23. *Crypturi* G. 82.	———	———	82. *Crypturus*
	24. *Inepti* G. 83.	———	———	83. *Didus*
V. *Cursores*.	25. *Proceri*	———	———	84. *Casuarius*
	G. 84—86.	———	———	85. *Struthio*
		———	———	86. *Rhea*
	26. *Campestres* G. 87.	(2 A.?)	87. *Otis* (1 A.)	(10 A.)

Ordnung.	Familie.	dem **Norden** eigenthümlich	beiden gemeinschaftlich	dem **Süden** eigenthümlich
(*V. Cursores*)	27. *Littorales*	(14 A.)	88. *Charadrius* (7 A.)	(33 A.)
	G. 88—93.	89. *Calidris*	—	—
		(— A.)	90. *Himantopus* (1 A.)	(2 A.)
		(— A.)	91. *Haematopus* (2 A.)	(— A.)
		(1 A.)	92. *Tachydromus*	(2 A.)
		—	—	93. *Burhinus*
VI. Grallatores	28. *Vaginati* G. 94.	—	—	94. *Chionis*
	29. *Alectorides*	(1 A.)	95. *Glareola*	(5 A.)
	G. 95—100.	—	—	96. *Cereopsis*
		—	—	97. *Dicholophus*
		—	—	98. *Palamedea*
		—	—	99. *Chauna*
		—	—	100. *Psophia*
	30. *Herodii*	(1 A.)	101. *Grus* (5 A.)	(6 A.)
	G. 101—107.	(— A.)	102. *Ciconia* (2 A.)	(9 A.)
		(21 A.)	103. *Ardea* (7 A.)	(59 A.)
		—	—	104. *Eurypyga*
		—	—	105. *Scopus*
		—	—	106. *Cancroma*
		—	—	107. *Anastomus*
	31. *Falcati*	(— A.)	108. *Tantalus* (1 A.)	(4 A.)
	G. 108—109.	(1 A.)	109. *Ibis* (3 A.)	(16 A.)
	32. *Limicolae*	(7 A.)	110. *Numenius* (2 A.)	(8 A.)
	G. 110—114.	(2 A.)	111. *Scolopax* (4 A.)	(13 A.)

Ordnung.	Familie.	dem Norden eigenthümlich	beiden gemeinschaftlich	dem Süden eigenthümlich
(*VI. Grallatores*)	(32. *Limicolae*	—	—	112. *Ereunetes*
	G. 110—114.)	(42 A.)	113. *Tringa* (*Actitis*) (7 A.)	(12 A.)
		(1 A.?)	114. *Strepsilas* (1 A.)	(— A.)
	33. *Macrodactyli*	—	—	116. *Parra*
	G. 116—118.	(4 A.)	117. *Rallus*	(27 A.)
		(8 A.)	118. *Crex* (4 A.)	(29 A.)
	34. *Lobipedes*	(— A.)	119. *Fulica* (1 A.)	(3 A.)
	G. 119—121.	—	—	120. *Podoa*
		(4 A.)	121. *Phalaropus*	(2 A.)
	35. *Hygrobatae*	122. *Corrira?*		
	G. 122—125.	(3 A.)	123. *Recurvirostra* (1 A.)	(— A.)
		(— A.)	124. *Platalea* (2 A.)	(2 A.?)
		(— A.)	125. *Phoenicopterus* (1 A.)	(1 A.)
VII. Natatores	36. *Longipennes*	(— A.)	126. *Rhynchops* (1 A.)	(— A.)
	G. 126—129.	(8 A.)	127. *Sterna* (2 A.)	(28 A.)
		(6 A.)	128. *Larus* (4 A.)	(5 A.)
		(2 A.)	129. *Lestris* (2 A.)	(— A.)
	37. *Tubinares*	(3 A.)	130. *Procellaria* (4 A.)	(15 A.)
	G. 130—133.	—	—	131. *Haladroma*
		(— A.)	132. *Pachyptila* (1 A.)	(3 A.)
		(— A.)	133. *Diomedea* (1 A.)	(3 A.)
	38. *Lamellosodentati* G. 134—136	(26 A.)	134. *Anas* (23 A.)	(52 A.)
		(10 A.)	135. *Anser* (2 A.)	(17 A.)
		136. *Mergus*	—	—

Ordnung.	Familie.	dem Norden eigenthümlich	beiden gemeinschaftlich	dem Süden eigenthümlich
(*VII. Natatores*)	39. *Steganopodes* G. 137—141.	(1 A.)	137. *Pelecanus* (3 A.)	(5 A.)
		(3 A.)	138. *Halieus* (3 A.)	(13 A.)
		(— A.)	139. *Dysporus* (4 A.)	(3 A.)
		(1 A.?)	140. *Phaëthon*	(4 A.?)
		(— A.)	141. *Plotus* (1 A.)	(3 A.)
	40. *Pygopodes* G. 142—146.	(6 A.)	142. *Colymbus* (1 A.)	(7 A.)
		(6 A.)	143. *Eudytes*	(1 A.)
		144. *Uria*	—	—
		145. *Mormon*	—	—
		146. *Alca*	—	—
	41. *Impennes* G. 147.	(— A.)	147. *Aptenodytes* (1 A.?)	(11 A.)

IX. Uebersicht der Vögelgattungen nach ihrer Vertheilung über die Erde von Westen nach Osten.

Ordnung.	Familie.	Europa mit Afrika	Asien mit Australien	Nordamerika mit Südamerika
I. *Scansores* Gatt. 1—16.	1. *Psittacini* 1—2	1. *Psittacus*	1. *Psittacus* 2. *Pezoporus*	1. *Psittacus*
	2. *Serrati* 3—8.	5. *Pogonias* 6. *Corythaïx* 7. *Trogon* 8. *Musophaga*	5. *Pogonias?* 7. *Trogon*	3. *Ramphastos* 4. *Pteroglossus* 7. *Trogon*
	3. *Amphiboli* 9—13.	11. *Bucco* 12. *Cuculus* 13. *Centropus*	10. *Scythrops.* 12. *Cuculus* 13. *Centropus*	9. *Crotophaga* 11. *Bucco* 12. *Cuculus*
	4. *Sagittilingues* 14—15.	14. *Jynx* 15. *Picus*	14. *Jynx* 15. *Picus*	14. *Jynx* 15. *Picus*
	5. *Syndactyli*			16. *Galbula*
II. *Ambulatores* Gatt. 17—61.	6. *Angulirostres* 17—18.	17. *Alcedo* 18. *Merops*	17. *Alcedo* 18. *Merops*	17. *Alcedo* 18. *Merops*
	7. *Suspensi* 19.			19. *Trochilus*
	8. *Tenuirostres* 20—22.	20. *Nectarinia* 21. *Tichodroma* 22. *Upupa*	20. *Nectarinia* 21. *Tichodroma* 22. *Upupa*	20. *Nectarinia* 22. *Upupa*

Ordnung.	Familie.	Europa mit Afrika	Asien mit Australien	Nordamerika mit Südamerika
(*II. Ambulatores*)	9. *Pygarrhichi* 23—24.	23. *Certhia*	23. *Certhia*	23. *Certhia*
				24. *Dendrocolaptes*
	10. *Gregarii* 25—30.			25. *Xenops*
		26. *Sitta*	26. *Sitta*	26. *Sitta*
		27. *Buphaga*		
		28. *Oriolus*	28. *Oriolus*	28. *Oriolus*
				29. *Cassicus*
		30. *Sturnus*	30. *Sturnus*	30. *Sturnus*
	11. *Canori* 31—40.	31. *Turdus*	31. *Turdus*	31. *Turdus* (et 36 *Myiothera*)
		32. *Cinclus*	32. *Cinclus*	32. *Cinclus*
		33. *Accentor*	33. *Accentor*	
		34. *Motacilla*	34. *Motacilla*	34. *Motacilla*
		35. *Muscicapa*	35. *Muscicapa*	35. *Muscicapa*
		37. *Lanius*	37. *Lanius*	37. *Lanius*
		38. *Sparactes*	38. *Sparactes*	
			39. *Todus*	39. *Todus*
			39. *b. Spizites*	
			40. *Pipra*	40. *Pipra*
	12. *Passerini* 41—49.	41. *Parus*	41. *Parus*	41. *Parus*
		42. *Alauda*	42. *Alauda*	42. *Alauda*
		43. *Emberiza*	43. *Emberiza*	43. *Emberiza*
			44. *Tanagra*	44. *Tanagra*
		45. *Fringilla*	45. *Fringilla*	45. *Fringilla*
		46. *Loxia*	46. *Loxia*	46. *Loxia*

Ordnung.	Familie.	Europa mit Afrika	Asien mit Australien	Nordamerika mit Südamerika
(*II. Ambulatores*)	(12. *Passerini*)	47. *Colius* 49. *Phytotoma*	47. *Colius* 48. *Glaucopis*	 49. *Phytotoma*
	13. *Dentirostres* 50—51.	50. *Buceros*	50. *Buceros*	 51. *Prionites*
	14. *Coraces* 52—56.	52. *Corvus* 53. *Coracias* 56. *Gracula*	52. *Corvus* 53. *Coracias* 54. *Paradisea* 56. *Gracula*	52. *Corvus* 53. *Coracias* 55. *Cephalopterus* 56. *Gracula*
	15. *Sericati* 57—58.	57. *Ampelis?*		57. *Ampelis* 58. *Procnias*
	16. *Hiantes* 59—61.	59. *Hirundo* 60. *Cypselus* 61. *Caprimulgus*	59. *Hirundo* 60. *Cypselus* 61. *Caprimulgus*	59. *Hirundo* 60. *Cypselus* 61. *Caprimulgus*
III. Raptatores Gatt. 62—67.	17. *Nocturni* 62.	62. *Strix*	62. *Strix*	62. *Strix*
	18. *Accipitrini* 63—65.	63. *Falco* 64. *Gypogeranus* 65. *Gypaëtus*	63. *Falco* 64. *Gypogeranus?* 65. *Gypaëtus*	63. *Falco* 65. *Gypaëtus*
	19. *Vulturini* 66—67.	66. *Vultur* 67. *Cathartes?*	66. *Vultur* 67. *Cathartes?*	 67. *Cathartes*

Ordnung.	Familie.	Europa mit Afrika	Asien mit Australien	Nordamerika mit Südamerika
IV. *Rasores* Gatt. 68—88.	20. *Gallinacei* 68—78.	68. *Numida*		
				69. *Meleagris*
				70. *Penelope*
				71. *Crax*
		72. *Opisthocomus?*		72. *Opisthocomus*
			73. *Pavo*	
			74. *Phasianus*	
			75. *Gallus*	
			76. *Menura*	
		77. *Tetrao*	77. *Tetrao*	77. *Tetrao*
		78. *Perdix*	78. *Perdix*	78. *Perdix*
	21. *Epollicati* 79—80.	79. *Ortygis*	79. *Ortygis*	
			80. *Syrrhaptes*	
	22. *Columbini* 81.	81. *Columba*	81. *Columba*	81. *Columba*
	23. *Crypturi* 82.			82. *Crypturus*
	24. *Inepti* 83.	83. *Didus*		
V. *Cursores* G. 84—93.	25. *Proceri* 84—86.	84. *Struthio*	84. *Struthio*	
			85. *Casuarius*	
				86. *Rhea*
	26. *Campestres* 87.	87. *Otis*	87. *Otis*	87. *Otis?*
	27. *Littorales* 88—93.	88. *Charadrius*	88. *Charadrius*	88. *Charadrius*
		89. *Calidris*	89. *Calidris*	89. *Calidris*

Ordnung.	Familie.	Europa mit Afrika	Asien mit Australien	Nordamerika mit Südamerika
(*V. Cursores*)	(27. *Littorales*)	90. *Himantopus*	90. *Himantopus*	90. *Himantopus*
		91. *Haematopus*	91. *Haematopus*	91. *Haematopus*
		92. *Tachydromus*	92. *Tachydromus*	
			93. *Burhinus*	
VI. Grallatores	28. *Vaginati* 94.		94 *Chionis*	94. *Chionis*
Gatt. 94—125.	29. *Alectorides*	95. *Glareola*	95. *Glareola*	95. *Glareola?*
	95—100.		96. *Cereopsis*	
				97. *Dicholophus*
				98. *Palamedea*
				99. *Chauna*
		100. *Psophia?*		100. *Psophia*
	30. *Herodii*	101. *Grus*	101. *Grus*	101. *Grus*
	101—107.	102. *Ciconia*	102. *Ciconia*	102. *Ciconia*
		103. *Ardea*	103. *Ardea*	103. *Ardea*
				104. *Eurygyga*
		105. *Scopus*		
				106. *Cancroma*
			107. *Anastomus*	
	31. *Falcati*	108. *Tantalus?*	108. *Tantalus*	108. *Tantalus*
	108—109.	109. *Ibis*	109. *Ibis*	109 *Ibis*
	32. *Limicolae*	110. *Numenius*	110. *Numenius*	110. *Numenius*
	110—114.	111. *Scolopax*	111. *Scolopax*	111. *Scolopax*
				112. *Ereunetes*

Ordnung.	Familie.	Europa mit Afrika	Asien mit Australien	Nordamerika mit Südamerika
(*VI. Grallatores*)	(32. *Limicolae*)	113. *Tringa* (*Actitis*) 114. *Strepsilas*	113. *Tringa* 114. *Strepsilas*	113 *Tringa* 114 *Strepsilas*
	33. *Macrodactyli* 116—118.	116. *Parra* 117. *Rallus* 118. *Crex*	116. *Parra* 117. *Rallus* 118. *Crex*	116. *Parra* 117. *Rallus* 118. *Crex*
	34. *Lobipedes* 119—121.	119. *Fulica* 121. *Phalaropus*	119. *Fulica* 121. *Phalaropus*	119. *Fulica* 120. *Podoa* 121. *Phalaropus*
	35. *Hygrobatae* 122—125.	122. *Corrira?* 123. *Recurvirostra* 124. *Platalea* 125. *Phoenicopterus*	 123. *Recurvirostra* 124. *Platalea* 125. *Phoenicopterus*	 123. *Recurvirostra* 124. *Platalea* 125 *Phoenicopterus*
VII. Natatores Gatt. 126—147.	36. *Longipennes* 126—129.	 127. *Sterna* 128. *Larus* 129. *Lestris*	 127. *Sterna* 128. *Larus* 129 *Lestris*	126. *Rhynchops* 127. *Sterna* 128. *Larus* 129. *Lestris*
	37. *Tubinares* 130—133.	130. *Procellaria* 133. *Diomedea*	130. *Procellaria* 131. *Haladroma* 132. *Pachyptila* 133. *Diomedea*	130. *Procellaria* 132. *Pachyptila* 133. *Diomedea*
	38. *Lamellosodentati* 134—136.	134. *Anas* 135 *Anser* 136. *Mergus*	134. *Anas* 135. *Anser* 136. *Mergus*	134. *Anas* 135. *Anser* 136. *Mergus*

Ordnung.	Familie.	Europa mit Afrika	Asien mit Australien	Nordamerika mit Südamerika
(*VII. Natatores*)	39. *Steganopodes* 137 — 141.	137. *Pelecanus* 138. *Halieus* 139. *Dysporus* 140. *Phaëthon* 141. *Plotus*	137. *Pelecanus* 138. *Halieus* 139. *Dysporus* 140. *Phaëthon* 141. *Plotus*	137. *Pelecanus* 138. *Halieus* 139. *Dysporus* 140. *Phaëthon* 141. *Plotus*
	40. *Pygopodes* 142 — 146.	142. *Colymbus* 143. *Eudytes* 144. *Uria* 145. *Mormon* 146. *Alca*	142. *Colymbus* 143. *Eudytes* 144. *Uria* 145. *Mormon* 146. *Alca*	142. *Colymbus* 143. *Eudytes* 144. *Uria* 145. *Mormon* 146. *Alca*
	41. *Impennes*	147. *Aptenodytes?*	147. *Aptenodytes*	147. *Aptenodytes*

Tentamen
Systematis naturalis Avium.

Auctore B. Merrem,
Regiae Scientiarum Academiae per epistolas socius *).

Non sine haesitatione naturae scrutatoribus hoc tentamen trado, quod, quam sit imperfectum, me ipso nemo sane magis sentire potest. Plus quidem quinque lustris pressum et ex meis aliorumque observationibus mutatum, auctum, emendatum est; sed locus et aetas sperare non sinunt, me illud unquam ad optatam perfectionem perducturum. Tot aves, quot describere et secare, tot tantasque in illarum partes et vitas disquisitiones instituere, tot tantique pretii libros evolvere, quam tale requirit opus, occasio et opes et tempus defuerunt mihi, cui matheseos tam purae quam applicatae, physices experimentalis, universae historiae naturalis, reique rusticae, urbicae et politicae tradendae munus incumbebat et ex parte adhuc incumbit. Non inutilia tamen haec fragmenta iis futura puto, quibus pro indaganda volatilium natura saltus, agri, aquae, musea et bibliothecae magis quam mihi patent. Hisce viam, quam solam ad Naturae sacrarium ducere longa me docuit experientia, monstrant, et ex eorum emendationibus atque supplementis tandem systema avium vere naturale prodibit.

Genera plerumque secundum Linneum allegavi, non quod optima, sed quod notissima sunt. Buceroti, Haematopodi, Meropi, Glareolae et Palamedeae loca sua assignare nondum audeo.

Ordo valde arbitrarius est. Saepe illum immutaui; nunquam diu placuit. Propositus quoque displicet. Dispositionem itaque Lecturis pro cuiusuis ingenio relinquo.

*) Vorgelesen den 10ten December 1812.

I. Aves carinatae.

Pennarum radii uncinulis plus minus, Remigum radii arctissime cohaerent.

Sternum cristatum.

Furcula et **Claviculae** alarum ossa distendunt.

Vertebrae lumbales non ultra 15.

Ossa ilium plus minus divergentia, vel ex parte in eodem plano sita, inde pelvis, imprimis pone acetabulum, dilatata.

Ossa ischii saltem versus finem, ossibus ilium iuncta.

Ossa carpi duo.

Os metacarpi interius eiusdem cum exteriori longitudinis.

Digiti duo cum **pollice.**

1. Aves aëreae.

Nares aut totae apertae, aut cute tenui planiuscula partim clausae, aut margine prominulo cinctae.

Caput grande.

Collum breve.

Pennae magnae, radiis saepius laxis.

Alae planae.

Pedes aequilibres.

Digiti 4/0, 3/1, 2/2, 2/1, modo omnes liberi, modo basi, nunquam toti membrana iuncti, modo connati; subtus tuberculis scabris.

Sternum longum, latum, crista alta, processibus lateralibus mediis nullis.

Cubitus humero longior.

Pelvis lata, plana.

Crura sesquialtera femorum longitudine.

Larynx inferior musculis propriis instructus.

Oesophagus amplus, saepe in ingluviei speciem dilatabilis, nunquam autem vera ingluvie praeditus.

Habitant in montibus, sylvis, campis, ripis.

Incessus saltatorius, quibusdam insuper ambulatorius.

Volant pedibus ad corpus adductis.

A. Rapaces.

Rostrum corneum, basi cera tectum, compressum; mandibula superiore multum altiore et longiore quam inferior, atque adunca.

Oris rictus amplus.

(I. 1. A.) Nares a fronte paulisper remotae.

Caput maximum, lateribus rostrum versus convergentibus.

Alae remigibus primi ordinis 10, secundi 12-14. Alae nothae 4.

Crura plumosa.

Pedes cute crassa, qua parte nudi, cornea tecti, digitis 3/1, fissis.

Mandibula superior non articulata.

Costae non articulatae anteriores 1, verae 7, rarius 6, spuriae o. s. 1.

Sternum longitudine duarum circiter tertiarum partium trunci, apice brevissimo aut nullo, processibus lateralibus anterioribus brevibus, posterioribus aut brevibus, apice cum sterni margine posteriore concretis, aut quatuor prominentibus, apice soluto. Crista modice alta, sterno brevior, apice rotundato. Costarum appendices sterni lateribus ad mediam usque eorum longitudinem adhaerent.

Furcula hemelliptica vel parabolica cruribus, plus minus convexis; processu sternali nullo.

Claviculae latae, modice longae.

Scapulae longitudine dorsi *), subincurvae, acutae.

Humerus dorso longior.

Cubitus humero longior.

Manus cum digito cubito brevior.

Pelvis longitudine dorsi. Acetabulum pone medium.

Lingua carnosa, antice cartilaginea, canaliculata, rostri fere longitudine. Ossis hyoidei cornua duo ad aures circiter pertingunt.

Oesophagus amplus.

Echinus magnus, a ventriculo non separatus.

Ventriculus magnus membranaceus.

Intestina coeca 2.

Victus animalia, cadavera.

Pullis cibum pedibus arreptum afferunt.

a. Accipitres.

Cera rostrum tertia parte et ultra tegit.

Oculi magni.

Pennarum inprimis autem remigum rectricumque radii duri.

Ossa cranii firma, solida. Vertex planus.

*) Dorsum voco longitudinem a prima vertebra dorsi ad ossa ilii usque.

(I. 1. A. *a.*) Ossa lacrymalia processu superciliari eiusque appendice insignibus praedita.

Sterni processus laterales postici fine suo cum margine posteriore sterni, qui omnino integer est, concreti foramen relinquunt, periosteo clausum.

Furcula fortis, brevis, hemelliptica, cruribus valde convexis.

Oesophagus in ingluviei speciem dilatabilis.

Ventriculus laxissimus.

Intestina triplae quadruplaeve corporis longitudinis, coeca 2 minima adeo ut saepe deficere videantur.

Volatus directus.

Vultur, Falco, Sagittarius.

b. Strix.

Cera minima.

Oculi maximi.

Pennarum, ipsarumque remigum et rectricum radii molles.

Ossa cranii tenuia, cavernosa. Vertex in tubera elatus.

Ossium lacrymalium processus superciliaris minimus, appendice caret.

Sterni processus laterales postici a margine eius posteriore separati sunt, qui aut in utroque latere sinubus duobus, aut binis aliis processibus magis intermediis instructus est.

Furcula debilis, sternum fere attingens, parabolica, cruribus rectiusculis.

Oesophagus aequalis fere ubique amplitudinis.

Ventriculi tunica musculosa crassior.

Intestina longitudine dupla corporis; coeca 2, magna.

Volatus obliquus.

B. Hymenopodes.

Furcula parabolica, cruribus fere parallelis, tenuibus, subconvexis, appendice sternali minimo, deorsum verso.

Claviculae longae, tenues.

Scapulae longitudine dorsi, subincurvae, acutae.

Humerus dorso circiter par.

Cubitus humero longior.

(I. 1. B.) Manus cum digito cubito circiter aequalis.

Pelvis vix dorsi longitudine. Acetabulum fere in medio.

Lingua apice vel tota membranacea, longitudine fere rostri; ossis hyoidei cornubus duobus ad aures circiter pertingentibus.

Oesophagus amplus.

Echinus mediocris, a ventriculo sulco distinctus.

Ventriculus mediocris musculosus.

Intestina coeca 2, parva.

Victus insecta, grana, baccae, quibusdam etiam carnes.

Pullis cibum rostro afferunt.

a. Chelidones.

Rostrum depressum, triangulare, minimum; oris rictu amplissimo.

Nares marginatae.

Alae acutissimae, longissimae.

Pedes minimi, plumulosi.

Mandibula superior ossibus tenuissimis et quam maxime elasticis valde mobilis.

Sterni apex vix ullus; cristae acrimonium acutum.

Ventriculus ex musculis validissimis.

Victus solummodo insecta.

Ova 2-6, oblonga.

Volatus celerrimus.

Incessus vix ullus.

α. Chelidones nocturnae.

Oculi maximi.

Remiges rectae, radiis mollibus.

Unguis digiti medii pectinatus.

Ossa cranii in tubera duo elata, tenuissima, inania.

Cornua maxillae inferioris medio articulata.

Vitae ratio solitaria, nocturna.

Caprimulgus.

β. Chelidones diurnae.

Oculi mediocres.

Remiges incurvae, radiis firmis.

Unguis digiti medii margine integro.

Ossa cranii solida, vertice plano.

(I. 1. B. a. β.) Cornua maxillae inferioris integra.

Vitae ratio socialis, diurna.

Hirundo.

b. Oscines.

Rostrum conoideum, oris rictu mediocri.

Nares membrana tenui semiclausae.

Alae obtusiusculae, latiores, modice longae.

Pedes mediocres, nudi, antice scutati, postice glabri.

Maxilla superior parum mobilis.

Sterni apex bifurcus; cristae acrimonium rotundatum.

Ventriculus musculosus, musculis non distinguendis.

Victus insecta, baccae, grana, quibusdam etiam carnes.

Ova plurima, ovalia.

Volatus modice celer.

Incessus saliens, quibusdam etiam cum saliente ambulatorius.

α. Oscines conirostres.

Rostrum crassum, conicum, perdurum.

Lingua basi carnosa, crassa, apice membranacea, acuta.

Oesophagus in ingluviei speciem dilatabilis.

Ventriculi tunica musculosa crassa.

Victus imprimis semina decorticanda.

Loxia, Fringilla, Emberiza, Tangara.

β. Oscines tenuirostres.

Rostrum conoideum, elongatum, aliis compressum, depressum aliis, pluribus cultriforme seu subulatum, minus durum.

Lingua membranacea, canaliculata, apice bifida aut lacera.

Oesophagus eiusdem ubique amplitudinis.

Ventriculus minus musculosus.

Victus imprimis insecta, vermes.

Alauda, Motacilla, Muscicapa, Todus, Lanius, Ampelis, Turdus, Paradisea, Buphaga, Sturnus, Oriolus, Gracula, Coracias, Corvus, Pipra? Parus, Sitta, Certhiae quaedam.

C. Mellisugae.

Rostrum coriaceum, basi nudum, teretiusculum, vaginans, filiforme, mandibulis altitudine et longitudine fere aequalibus; oris rictu parvo.

Nares in rostri basi.

(I. 1. C.) Caput mediocre, lateribus fere parallelis.

Alarum remiges primariae 8, secundariae 4-6, alae nothae 3.

Crura plumosa.

Pedes cute molliuscula vestiti, digitis 3/1, anticis basi subcoalitis.

Mandibula superior non articulata.

Costae non articulatae anteriores 1, verae 6, spuriae 2.

Sternum longitudine trunci, apice bifido, processibus lateralibus anterioribus magnis, posterioribus vix ullis, latissimis, apice sterni margini iunctis. Crista longitudine sterni, altissima, apice acuto, prominulo.

Furcula semicircularis, cruribus modice fortibus.

Claviculae breves, latissimae, fortissimae.

Scapulae dorso longiores, incurvae.

Humerus dimidia dorsi longitudine, ideoque brevissimus.

Cubitus humero fere duplo longior.

Manus cum digito humero longior.

Pelvis dorso brevior. Acetabulum pone medium.

Lingua ex filis duobus, extensilis, ossis hyoidei cornubus quatuor, quorum bina intermedia ad rostrum usque pertingunt.

Oesophagus in ingluviei modum dilatabilis.

Echinus parvus, a ventriculo non distinctus.

Ventriculus mediocris, musculosus.

Intestina coeca nulla.

Victus nectar florum, insecta.

Pullis cibum rostro afferunt.

Trochilus, Certhiae et Upupae plurimae.

D. Dendrocolaptae.

Rostrum corneum, durissimum, rectissimum, absque cera, mandibulis et longitudine et altitudine fere aequalibus. Oris rictus mediocris.

Nares in rostri basi.

Caput mediocre, lateribus parallelis.

Alae remigibus tam primi quam secundi ordinis 10, pollicis 3.

Crura plumosa.

Pedes cute crassa tecti, digitis 2/2, vel 2/1.

Mandibula superior non articulata.

Costae non articulatae anteriores 1, verae 5, spuria 1.

(I. 1. D.) **Sternum** est ad truncum in ratione 2 : 3. Apex eius minimus, bifidus; processus laterales anteriores magni, quibuscum costae omnes articulantur: processus posteriores quatuor. Crista minus alta, sterni longitudine, apice rotundato.

Furcula parabolica, cruribus debilibus, convexis; processus sternalis nullus.

Claviculae fortes, latae.

Scapulae dorso breviores, rectae, apice instar litui incurvo, rotundato.

Humerus dorso longior.

Cubitus humero paulo longior.

Manus cum digito cubito fere aequalis.

Pelvis dorso paulo longior. **Acetabulum** ante medium.

Lingua carnosa, apice cornea, teres, longissima, **ossis hyoidei** cornubus 2, ad frontem, imo interdum ad rostri apicem pertingentibus.

Oesophagus in ingluviei speciem aliquo modo dilatabilis.

Echinus ventriculo duplo maior, nec ab illo distinctus.

Ventriculus parvus, musculosus.

Intestina coeca nulla.

Victus insecta, rarius baccae.

Pullis cibum rostro afferunt.

Picus, Yunx.

E. **Brevilingues.**

Rostrum corneum, cera destitutum, pyramidale, elongatum, mandibulis altitudine paribus, superioris apice prominulo, solido. **Oris rictus** mediocris vel amplus.

Nares in rostri basi.

Caput magnum, lateribus parallelis.

Alae remigibus primoribus 10, secundariis 9 - 12, alae nothae 3.

Crura parte inferiore nuda.

Pedes cute modice crassa tecti, digitis 3/1 vel 2/2, anticis modo conglutinatis, modo fere fissis.

Mandibula superior non articulata.

Costae non articulatae anteriores 1, verae 5, spuriae 1.

Sternum ad truncum est in ratione 2 : 3; apex eius integer; processus laterales anteriores magni, iisque costarum appendices adhaerent; posteriores quatuor. Crista minus alta, longitudine sterni.

(I. 1. E.) Furcula parabolica, cruribus subparallelis, fortibus, convexis; processu sternali nullo.

Claviculae longae, tenues.

Scapulae longitudine dorsi, incurvae, acutissimae.

Humerus longitudine dorsi.

Cubitus humero paulo longior.

Manus cum digito cubito multo brevior.

Pelvis dorso paulo brevior. Acetabulum ante medium.

Lingua duriuscula, brevissima, triquetra, ossis hyoidei cornubus 2, ad aures usque pertingentibus.

Oesophagus eiusdem ubique amplitudinis.

Echinus parvus.

Ventriculus magnus, membranaceus vel parum musculosus.

Intestina coeca nulla.

Victus insecta, quibusdam etiam pisces.

Pullis escam rostro adportant.

a. Upupa.

Rostrum incurvum, subtriquetrum, subulatum, oris rictu mediocri.

Digiti 3/1, fere toti fissi.

Sterni margo posterior processibus binis intermediis cartilagineis; cristae apex rotundatus.

Furcula medio margini anteriori cristae sterni alligatur; crura eius minus fortia sunt.

Clavioulae latae.

Ventriculus submusculosus.

Intestina dupla corporis longitudine.

Victus insecta.

Plerumque in terra degit, celeriter currens.

b. Ispidae.

Rostrum rectissimum, pyramidale, oris rictu magno.

Digiti 3/1, vel 2/2, vel 2/1, anteriores duo fere toti cohaerent.

Sterni margo posterior processibus binis intermediis osseis; cristae apex acutus.

Furcula apici cristae sterni alligata, cruribusque praedita fortissimis.

Claviculae longae, tenues.

(I. 1. E. *b*.) **Ventriculus** membranaceus.

Intestina tripla corporis longitudine.

Victus pisces, insecta.

Raro descendit in terram.

Alcedo.

F. **Levirostres** *).

Rostrum corneum, basi modo cera tectum, modo nudum, semicirculare vel conicum, mandibulae utriusque altitudine fere aequali. **Oris rictus** minimus.

Nares fronti proximae.

Caput magnum, lateribus parallelis.

Alae remigibus primariis 10, secundariis 10-14, pollicis 4.

Crura plumosa.

Pedes cute coriacea crassa tecti, digitis vel 3/1, anticis basi connatis, vel 2/2, posticorum exteriore versatili.

Mandibula superior cum ossibus frontis ginglymo articulata.

Costae non articulatae anteriores 2, verae 6, spuriae 1.

Sterni ad truncum ratio = 2 : 3, apex crassus; processus laterales anteriores parvi, unde costarum appendices cum ipsis sterni lateribus articulantur; processus posteriores breves, apicibus sterni margini posteriori cohaerent. Crista alta, longitudine sterni, apice rotundato.

Furcula parabolica, cruribus debilibus, anteriora versus concavis; appendice sternali sursum verso.

Claviculae longae fortes.

Scapulae longitudine dorsi, subincurvae, acutae.

Humerus dorso vix longior.

Cubitus humero longior.

Manus cum digito cubito paulo brevior.

Pelvis dorso longior. **Acetabulum** pone medium.

Lingua cartilaginea, rostri fere longitudine; **ossis hyoidei** cornubus 2, ad aures circiter pertingentibus.

Oesophagus ingluviei in modum dilatabilis.

Echinus a ventriculo, cui magnitudine par est, distinctus.

Ventriculus parvus, musculosus.

*) Characteres anatomici, si caput excipias, ex solis psittacis petiti sunt.

Intestina coeca nulla.

Victus poma, grana, rarius praeterea insecta, carnes.

Pulli cibo, rostro allato, nutriuntur.

a. **Ramphastos.**

Rostrum capite longius, conicum, apice incurvum, basi nudum, mandibulis aequalibus.

Pedes scutati.

Unguiculi subtus canaliculati.

Rectrices 10.

Os occipitale verticale.

Lingua tenuis, pennacea.

Ramphastos, Scythrops *Lath.*?

b. **Psittacus.**

Rostrum capite brevius, semicirculare, basi cera tectum, maxilla superiore longiore, adunca.

Pedes loricati.

Unguiculi non marginati.

Rectrices 12.

Os occipitale inclinatum et fere in inferiore cranii parte situm.

Lingua crassa, margine integro.

G. **Coccyges** *).

Rostrum coriaceo-corneum, basi nudum, compressum; mandibula superiore longiore altioreque quam inferior, apice deflexa. **Oris rictus** amplus.

Nares in rostri basi.

Caput mediocre, lateribus parallelis.

Alarum remiges primores 10, secundariae 9, pollicis 4.

Crura plumosa.

Pedes cute modice crassa tecti, digitis 2/2, posticorum exteriore versatili.

Mandibula superior non articulata.

Costae non articulatae anteriores 2, verae 4, spuriae 1.

Sternum est ad truncum in ratione 2 : 5; apex eius brevis, compressus, subbifidus; processus laterales anteriores magni adeo ut omnes

*) Anatomica ex solo Cuculo canoro.

(I.1.G.) costarum articulationes recipiant; processus posteriores breves, a sterni margine remotae, crista longitudine sterni, alta, apice prominulo, acuto.

Furcula parabolica, cruribus fere parallelis, convexiusculis; processu sternali deorsum verso.

Claviculae longae, fortes.

Scapulae longitudine dorsi, apice valde incurvae, acutae.

Humerus dorso longior.

Cubitus humero longior.

Manus cum digito cubito longior.

Pelvis dorso paulo brevior. Acetabulum pone medium.

Lingua carnosa, apice cartilagineo-membranacea, rostri fere longitudine; ossis hyoidei cornubus 2, ad ossis occipitalis suturam usque circiter pertingentibus.

Oesophagus primo amplissimus, dein angustior, nusquam ingluviem mentiens.

Echinus parvus, a ventriculo sulco lato separatus.

Ventriculus magnus, fere membranaceus.

Intestina coeca 2, mediocria, et insuper tertium, ab ano remotius.

Victus insecta, baccae, poma, mel.

Pullis cibum rostro afferunt.

Cuculus, Trogon, Bucco, Crotophaga.

2. Aves terrestres.

Nares cute crassa, molli, fornicata obtectae.

Caput parvum.

Collum mediocre.

Pennae mediocres radiis arcte cohaerentibus.

Alae subfornicatae.

Pedes aequilibres.

Digiti 3/1, 3/0, fissi, basi membrana coniuncti, subtus tuberculis minus scabris.

Sternum longissimum, angustum, crista alta et processibus lateralibus mediis praeditum.

Cubitus humeri longitudine aut illo paulo longior.

Pelvis lata, plana.

Crura femoribus non multum longiora.

La-

(I. 2.) **Laryngi inferiori** musculi proprii nulli.

Oesophagus angustus, at vera ingluvie instructus.

Habitant in montibus, sylvis, campis siccis.

Incessus ambulatorius, celer.

Volant pedibus corpori attractis.

A. **Columba.**

Rostri mandibula superior non multum longior inferiore, apicem versus incrassata.

Collum mediocre.

Remiges primariae et secundariae 10.

Digiti fere liberi.

Sternum minus angustum magisque fornicatum quam gallinis. Processus laterales anteriores parvi, triquetri, acuti; posteriores breves, apice cum margine posteriore sterni concreti. Sterni apex parvus, crassus. Cristae apex rotundatus.

Furculae crura fere parallela, processus sternalis parvus, teres.

Scapulae acutae.

Cubitus humero.

Manus cum digito cubito longior.

Coeca minima.

Victus mere vegetabilis, imprimis ex seminibus.

Volatus celer.

Venus monogama.

Nidus in arboribus, rupiumque cavernis.

Ova duo, quibus mas et femina vicissim incubant.

Pulli a parentibus cibo in ingluvie macerato nutriuntur. Pulverisant et lavant.

B. **Gallinae.**

Rostrum cultriforme, mandibula superiore fornicata altioreque quam inferior.

Collum longum.

Remiges primores 10, secundariae 14-18.

Digitorum anticorum articuli primi membrana iuncti.

Sterni corpus angustissimum, longissimum, planum. Processus laterales antici perlongi, latiusculi, truncati; postici ex medio sterno orti, lon-

(I. 2. B.) gissimi, angusti, a sterno penitus separati. Sterni apicem constituit lamella lata, truncata. Cristae apex acutiusculus.

Furculae crura in angulum fere acutum convergentia, hyperbolam referunt; processus sternalis magnus, laminae triquetrae forma.

Scapulae obtusae.

Cubitus humerusque longitudine fere aequales.

Manus cum digito illis brevior.

Coeca longissima.

Victus potissimum quidem semina, terram radendo lecta, aliaeque vegetabilium partes; non minus tamen avide insectis inhiant, maxime pulli.

Volatus tardus, gravis, brevis.

Venus polygama vel vaga.

Nidus in terra aut prope terram.

Ova plurima a femina sola incubanda.

Pulli ad cibum a matre sola educuntur.

Pulverisant nec lavant.

3. Aves aquaticae.

Nares apertae aut intra tubulum.

Caput mediocre.

Collum longum aut mediocre.

Pennae parvae, oleosae, fornicatae, pleraeque radiis arcte cohaerentibus.

Alae fornicatae.

Pedes pone aequilibrium, inde incessus valgus aut corpore erecto.

Digiti 4/0, 3/1, 3/0, fissi, modo cum pollice, modo sine illo ad apicem usque membrana coniuncti aut lobati, subtus plani.

Sternum breve, latissimum, crista humili, processibus lateralibus mediis nullis.

Cubitus humero plerumque brevior, raro longior.

Pelvis angusta, antice culmo seu angulo acuto longitudinali medio a spinis vertebrarum lumbalium et inclinatione partis anticae ossium ilii orto, insignis.

Crura femoribus fere duplo longiora.

Laryngi inferiori musculi proprii nulli.

Oesophagus ubique aequalis amplitudinis.

Habitant in mari, lacubus, fluviis.

Incessus ambulatorius.

Volant pedibus extensis.

(I. 3.) A. **Odontorhynchi.**

Rostrum corio molli tectum, dentatum; **oris rictu** parvo.

Nares oblongae, a fronte remotae.

Collum longum, basi conicum.

Truncus ovatus, depressus.

Alae modice longae.

Pedes quicquam pone aequilibrium positi, **tibiarum** parte inferiore nuda, **tarsis** subcompressis, **digitis** tribus anticis palmatis, postico soluto.

Occiput verticale.

Sterni processus laterales postici lati, cum margine posteriore sterni coaliti; crista humillima, sterno brevior.

Furcula semicircularis, cruribus fortissimis, processu sternali nullo, neque sternum attingens, sed ligamentis illi iuncta.

Cubitus humero brevior.

Pelvis antice culmine acuto, postice plana. **Ossa pubis** longissima, incurva.

Lingua ex carne dura, apice cartilaginea, fere cornea, longitudine fere rostri.

Echinus mediocris, a ventriculo distinctus.

Ventriculus musculosus.

Victus animalia, vegetabilia.

Ova numerosa, a femina sola incubanda.

Pulli pastum educuntur.

Volatus altus, gravis.

Incessus ambulatorius, valgus seu corpore erecto.

a. **Boscades.**

Rostrum latum, lamelloso-dentatum, mandibula superiore convexa, fornicata, inferiorem planam fere totam recipiente.

Nares apertae.

Pedes breves.

Costae 8-12.

Lingua cartilagineo-carnosa, lata, obtusa, margine ciliata.

Ventriculus ex musculis validissimis.

Coeca 2, longa.

Incessus pronus, valgus.

Anas.

(I. 3. A.) *b.* **Mergus.**

Rostrum angustum, margine denticulatum, maxilla superiore convexa, inferiore plana.

Nares apertae.

Pedes breves.

Costae 8.

Lingua carnosa, duriuscula, apice fere cornea, angusta, acuta, canaliculata, ciliis nullis.

Ventriculus minus musculosus,

Coeca 2 mediocria, vel nulla.

Incessus pronus, valgus.

c. Phoenicopterus.

Rostrum latum, margine dentatum, mandibula superiore infracta, antice plana; inferiore altissima, convexa.

Nares valvula clausiles.

Pedes longissimi.

Costae 7.

Lingua ex carne firma, apice cartilaginea, lata, acuta, marginibus ciliatis.

Ventriculus musculosus, musculis tamen non distinctis.

Coeca - - - - - -

Incessus erectus.

B. Platyrhynchi *).

Rostrum subcorneum, oris rictu amplissimo, gula saccata.

Nares minimae in rostri basi.

Collum longum, basi conicum.

Truncus ovatus, depressus.

Alae modice longae.

Pedes fere aequilibres, tibiis plumosis, tarsis teretibus, digitis quatuor, omnibus anticis palmatisque.

Occiput verticale.

Sterni processus laterales postici ..... crista humillima, sterno brevior.

Furcula hemelliptica, cruribus fortissimis, cum sterni crista immediate coniuncta.

Cubitus humero brevior.

Pelvis antice et postice culmine prominula, caeterum postice plana. Ossa pubis longissima, incurva.

*) Anatomica a Coitero, Perralto, Schwenkfeldio, Stenone mutuata.

(I.3.B.) Lingua minima, cartilaginea.

Echinus maximus, a ventriculo non distinctus.

Ventriculi tunica musculosa minus crassa.

Victus animalia.

Ova pauca, a femina incubanda.

Pullis escam adferunt.

Volatus altus, celer.

Incessus valgus, pronus.

Pelicanus, Phaëton, Plotus.

C. Aptenodytes.

Rostrum subcorneum, integrum.

Nares a fronte remotae in sulco rostri.

Collum breviusculum, crassum.

Truncus obovatus, depressus, ventricosus.

Alae brevissimae, impennes.

Pedes compedes, tibiis parte inferiore nudis, tarsis depressis, latis, digitis omnibus anticis, tribus palmatis, pollice libero.

Occiput - - - -

Sternum - - - -

Furcula - - - -

Cubitus - - - -

Pelvis - - - -

Lingua - - - -

Echinus a ventriculo non distinctus (*Tiedemann*).

Ventriculus membranaceus (*Tiedem.*).

Victus animalia aquatica.

Ova pauca.

Volatus nullus.

Incedunt talis erecti.

D. Urinatrices.

Rostrum corneum, integerrimum, oris rictu parvo.

Nares perviae, lineares.

Collum mediocre, conicum.

Truncus quadratus, depressus.

Alae brevissimae, remigibus brevissimis, numerosissimis.

Pedes compedes, tibiis totis aut fere totis plumosis, tarsis compressis, digitis tribus anticis aut palmatis aut lobatis, postico libero aut nullo.

(I. 3. D) Occiput convexiusculum.

Sterni processus laterales postici lati, a sterni margine separati; crista humilis, longitudine sterni.

Furcula parabolica, cruribus debilibus, processu sternali parvo, sternoque ligamentis adhaerens.

Cubitus humero brevior.

Pelvis angustissima, deltoides, culmine totam sterni longitudinem occupante, totius ossis ilii lateribus inclinatis, concavis. Ossa pubis ossibus ischii non longiora, illisque apice conglutinata.

Lingua angusta, carnosa, longitudine rostri.

Echinus magnus, a ventriculo distinctus.

Ventriculus musculosus.

Victus tam animalis quam vegetabilis.

Ova pauca, incubatione alterna excludenda.

Pullos ad cibum educunt.

Volatus difficillimus vel nullus.

Incessus aeque difficilis, erectus.

a. Cepphi.

Rostri mandibula inferior ante basin gibba.

Nares in basi rostri.

Digiti antici palmati, posticus liber vel nullus.

Unguiculi subincurvi, convexi, acuti.

Cauda rectricum 12-20.

Ventriculus parum musculosus.

Coeca 2, minima.

Ova 1 s. 2.

Alca, Colymbi pedibus palmatis.

b. Podiceps.

Rostrum subulatum.

Nares in medio fere rostro.

Digiti lobati.

Ungues plani, obtusi, lati.

Cauda obsoleta.

Ventriculus ex musculis validis.

Coeca 2, mediocria.

Ova 3-5.

Colymbi pedibus lobatis.

(I. 3.) E. **Stenorhynchi.**

Rostrum subcorneum, integerrimum, **oris rictu** mediocri.

Nares a fronte remotae.

Collum mediocre, cylindricum, crassum.

Truncus ovatus, teres.

Alae longissimae.

Pedes fere aequilibres, **tibiis** parte inferiore nudis, **tarsis** teretiusculis, **digitis** tribus anterioribus palmatis, postico libero.

Occiput convexum.

Sterno processus postici quatuor, seu, si mavis, sterni margo posterior in quinque apices excurrit. Crista altior quam reliquis avibus aquaticis, longitudine sterni ad finem usque medii apicis.

Furcula parabolica, cruribus tenuibus, appendice sternali compressa.

Cubitus humero longior.

Pelvis plana, latiuscula, angulis lateralibus acutis. **Ossa pubis** ischii ossibus vix sunt longiora.

Lingua carnosa, angusta, modice longa.

Echinus magnus, sulco a ventriculo distinctus.

Ventriculus musculosus.

Victus ex animalibus aquaticis.

Ova 2-4, a parentibus vicissim incubanda.

Pullis cibum afferunt.

Volatus celer.

Incessus gressorius.

Procellaria, Diomedea, Larus, Sterna, Rhynchops.

4. **Aves palustres.**

Nares apertae, vel membrana tenui plana ex parte clausae.

Caput parvum.

Collum longum.

Pennae mediocres, rudes, interdum elongatae, planae, plurimarum radiis arcte cohaerentibus.

Alae subfornicatae.

Pedes aequilibres.

Digiti 3/1 vel 3/0, fissi, aliis palmati, aliis lobati aut pinnati, aliis liberi et nudi, subtus vix tuberculati, interdum omnino plani.

Sternum mediocre, angustum; crista altissima, processibus lateralibus mediis nullis.

(I. 4.) Cubitus humero longior.

Pelvis antice culmo praedita, pone acetabulum superne plana.

Crura femoribus multo longiora.

Laryngi inferiori musculi proprii nulli.

Oesophagus ubique aequalis amplitudinis.

Habitant in campis, ripis, paludibus.

Incessus gressorius.

Volant pedibus extensis aut pendulis.

A. Rusticolae.

Rostrum coriaceum, oris rictu parvo.

Nares a fronte remotae, oblongae, perviae.

Collum longiusculum, conico-elongatum, pennis anterioribus non longioribus quam reliquae.

Pedes compressi, digitis 3/1 vel 3/0.

Rectrices 12.

Os occipitis valde convexum; foramen occipitale in inferiore cranii parte.

Sternum dorso longius, angustum, planiusculum, processibus lateralibus anterioribus minimis et vix ullis; posticis circa sterni medium ortis, angulo acuto a sterni corpore separatis. Apex sterni parvus.

Furcula parabolica, cruribus fere parallelis, absque processu sternali, ligamentis sterno adhaeret.

Scapulae longitudine dorsi, subincurvae, acutae.

Lingua corneae fere substantiae, longitudine circiter rostri.

Habitant in locis paludosis, pratis humidis, ripis.

Volatus humilis, celer.

Currunt celerrime.

Femina sola ovis incubat.

Pullos ad cibum ducunt,

a. Phalarides.

Rostrum conicum, compressum, in frontem excurrens.

Pedes omp essi.

Truncus valde compressus.

Costae 9.

Sterni apex acutus.

Cubitus humero brevior.

Oc-

(I.4.A.*a.*) Oesophagus amplus.

Coeca 2, magna.

Ova plurima.

Volatus ineptus, pedibus pendulis.

Rallus, Fulica, Parra.

b. Limosugae.

Rostrum subulatum.

Nares in sulco rostri, non longe a fronte remotae.

Truncus teretiusculus.

Pedes teretiusculi.

Costae 8.

Sterni apex bifidus.

Cubitus humero longior.

Oesophagus angustus.

Coeca 2, brevia.

Ova 3-4.

Volatus celer, pedibus extensis.

Numenius, Scolopax, Tringa, Charadrius, Recurvirostra.

B. Grallae.

Rostrum cute membranacea vestitum; oris rictu magno.

Nares a fronte remotae, lineares, perviae.

Collum longissimum, cylindricum, pennis anterioribus maximis.

Pedes compressi, digitis 3/1.

Rectrices 12.

Os occipitis et foramen occipitale verticalia.

Sternum dorsi longitudine, valde convexum, modice latum, processibus lateralibus anticis magnis, posticis sinu obtuso a sterno separatis. Apex sterni nullus.

Furcula semicircularis, sterno coalita.

Scapulae longitudine dorsi, subincurvae, acutae.

Lingua carnosa, rostro brevior.

Habitant in locis paludosis, ripis.

Volatus altus, celer.

Incessus ambulatorius.

Parentes vicissim ovis incubant.

Pullos cibo allato nutriunt.

(I. 4. B.) *a.* **Erodii.**

Rostrum sulcatum; saccus gulae nullus.

Nares squamà longissima tectae, lineares, in sulco rostri.

Thorax compressus.

Digitis extimus medio membrana iungitur ad primum usque articulum, nec non, sed minori membrana, intimus.

Ungues compressi, medius latere interiore pectinatus.

Costae 7.

Lingua mediocris, tenuis.

Oesophagus amplus.

Ventriculus submembranaceus.

Coecum unum.

Victus animalia.

Ardeae ungue intermedio serrato, Cancroma.

b. **Pelargi.**

Rostrum glabrum vel obsolete sulcatum, gula saccata.

Nares lineari-oblongae, nudae.

Thorax teretiusculus.

Digiti anteriores membrana ad primum usque articulum iuncti.

Ungues planiusculi, lati.

Costae 7.

Lingua minima, triquetra.

Oesophagus amplus.

Ventriculus musculosus.

Intestina coeca 2, parva.

Victus animalia.

Ciconia, Mycteria, Tantali quidam. Scopus, Platalea.

c. **Gerani.**

Rostrum vix sulcatum, subfornicatum, sacco gulari nullo.

Nares squama longissima superne tectae, lineari-oblongae.

Thorax teretiusculus.

Digitus extimus medio basi membrana iunctus, intimus solutus.

Ungues convexi, incurvi, acuti; medius latere interiore marginatus.

Costae 10.

Lingua parva, lata.

Oesophagus angustus.

(I. 4. B. *c*.) Ventriculus musculosus.

Coeca 2, modice longa.

Victus animalia, grana, aliaeque vegetabilium partes.

Ardeae cristatae, Grues, Psophia.

C. Otis.

Rostrum corneum, oris rictu magno.

Nares in rostri basi, ovatae, septo discretae.

Collum longum, cylindricum, pennis anterioribus non longioribus quam reliquae.

Pedes teretes, crassi, digitis 3/o.

Rectrices 18.

Os occipitis fere verticale; foramen occipitale inclinatum.

Sternum - - - -

Furcula brevis, sterno ligamentis iuncta.

Scapulae fere rectae, dorso breviores, truncatae.

Lingua ex carne cartilaginea, rostro paulo brevior.

Habitant in campis.

Volatus gravis.

Cursus celer.

Femina sola ovis incubat.

Pullos ad cibum ducunt.

II. Aves ratitae.

Caput minimum.

Pennarum imo ipsarum remigum radii omnino non cohaerent.

Sternum sine crista.

Furcula et

Clavicula nullae vel spuriae; earum locum scapulae dilatatio imperfecte supplet.

Vertebrae lumbales 20.

Ossa ilium fere parallela, verticalia inde pelvis compressa.

Ossa carpi tria.

Os metacarpi interius brevissimum.

Digitus unus, unguiculatus.

Pollicis vestigium.

Struthio.

Druckfehler.

S. 182. Anm. 27. ist hinter den Worten: lautet folgendermaſsen zu lesen:
„Dieser Knochen ist im Wanst eines Hirsches auf der Rüdersdorfschen Heide gefunden wor-
„den, welcher mit seinem dicksten Ende bei zwei Queerfinger breit durch den Ma-
„gen hervorgeraget. Berlin 1708.“ — Es ist, wie man ganz bestimmt erkennt, der gröſste Theil einer Hirschrippe, welche bei einer Verletzung abgebrochen und dem Thier in den Magen gestoſsen ist.

S. 239 etc. ist im Kolumnentitel Tentamen für Tentamem zu lesen.

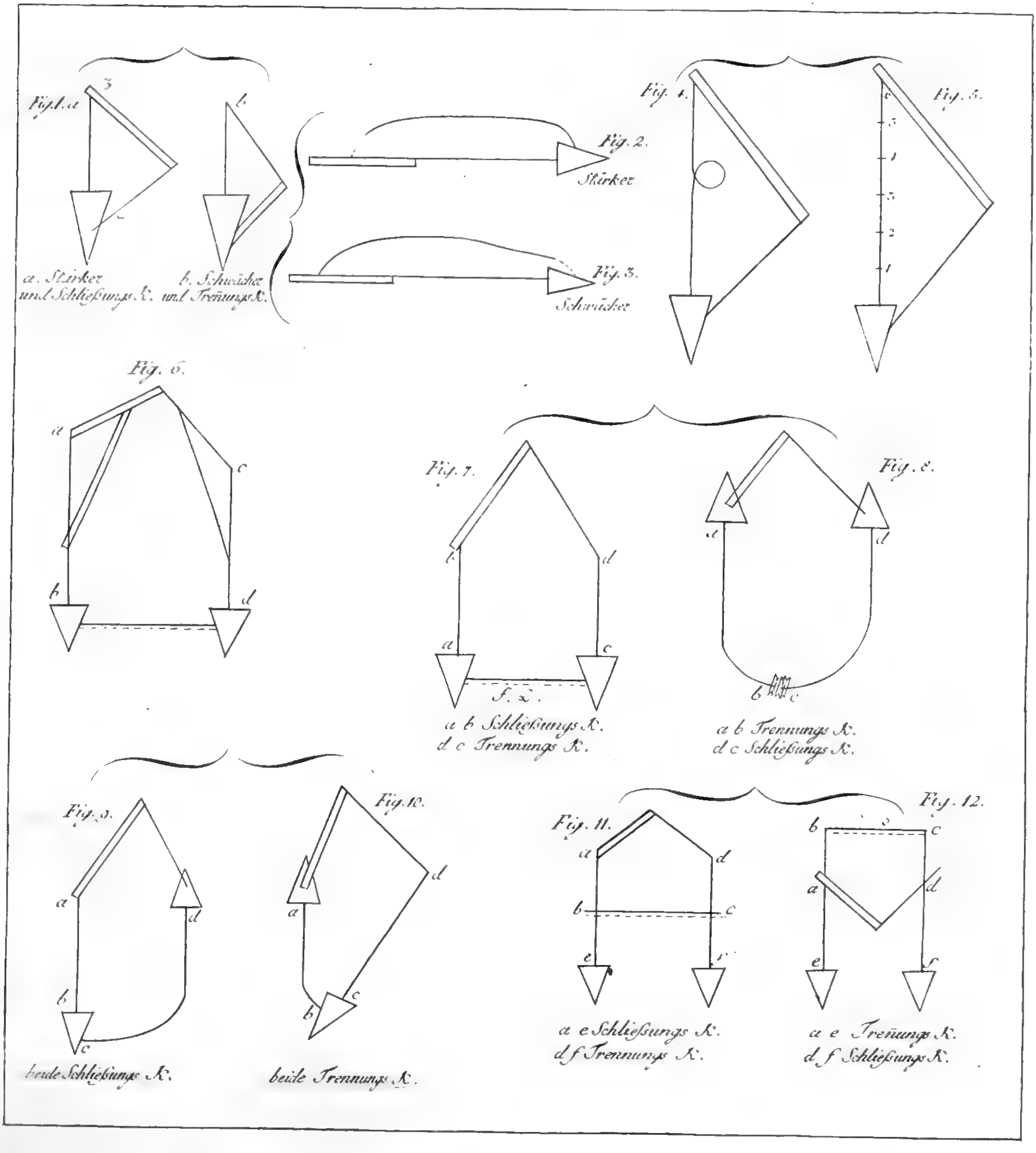


Fig. 1. a
a. Stärker
und Schließungs K.
b. Schwächer
und Trennungs K.
Fig. 2.
Stärker
Fig. 3.
Schwächer
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
a b Schließungs K.
d c Trennungs K.
Fig. 8.
a b Trennungs K.
d c Schließungs K.
Fig. 9.
beide Schließungs K.
Fig. 10.
beide Trennungs K.
Fig. 11.
a e Schließungs K.
d f Trennungs K.
Fig. 12.
a e Trennungs K.
d f Schließungs K.

Abhandlungen

der

mathematischen Klasse

der

Königlich - Preussischen

Akademie der Wissenschaften

aus

den Jahren 1812—1813.

Berlin
in der Realschul - Buchhandlung
1816.

I n h a l t.

Ueber

die bei Wittwenkassen vorfallenden Wahrscheinlichkeitsrechnungen.

Von Herrn Gruson *).

§. 1.

1. Aufg. Wenn von jetzt lebenden N Ehepaaren, gleichen Alters, eine gewisse Anzahl M gestorben ist, welches wird, die noch wahrscheinliche Anzahl von bestehenden Ehen E seyn?

NB Es wird beim männlichen und weiblichen Geschlecht gleiche Sterblichkeit angenommen.

Aufl. I. Stirbt eine Person, so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs es ein Mann oder eine Frau sey $= \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$.

In beiden Fällen bleiben nur noch $N - 1$ Ehen.

II. Sterben zwei Personen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs es zwei Männer oder zwei Frauen seyn werden

$$= \frac{N.\ \overline{N-1}.}{2N.\ \overline{2N-1}.} = \frac{N-1}{2(2N-1)}$$

und in beiden Fällen bleiben $N - 2$ Ehen; die Wahrscheinlichkeit, daſs es ein Mann oder eine Frau in einer bestimmten Ordnung sey, ist $= \frac{N^2}{2N.\ \overline{2N-1}.}$, welche Wahrscheinlichkeit man noch mit der Anzahl der Combinationen

*) Vorgelesen den 30 April 1812.

von zwei Dingen, je eins zu eins genommen, d. h. mit 2 multipliziren muſs; dieses giebt $\frac{2N^2}{2N.\,2N-1.} = \frac{N}{2N-1}$; wenn aber in diesem Falle ein Mann todt ist, so sind hier $N-1$ Fälle, in welchen die Frau, die sterben wird, nicht seine Frau ist, und es bleiben $N-2$ Ehen, und 1 Fall daſs es seine Frau ist, und dann bleiben $N-1$ Ehen; die Anzahl Ehen in diesem Falle wird also seyn

$$\frac{N-1.\,N-2. + N-1.}{N} = \frac{(N-1)^2}{N}.$$

Die Anzahl der bleibenden Ehen ist demnach

$$= \frac{N.\,N-1.}{2N.\,2N-1.}(N-2) + \frac{N.\,N-1.}{2N.\,2N-1.}(N-2) + \frac{2N^2}{2N.\,2N-1.} \cdot \frac{(N-1)^2}{N}$$

$$= \frac{2N-2.\,2N-3.}{2(2N-1)}.$$

III. Sterben drei Personen, so wird die Wahrscheinlichkeit, daſs dieses drei Männer oder drei Frauen seyn werden

$$= \frac{N.\,N.-1.\,N-2.}{2N.\,2N-1.\,2N-2.},$$

und in beiden Fällen ist die Anzahl der Ehen $N-3$; die Wahrscheinlichkeit, daſs dieses zwei Männer und eine Frau, oder zwei Frauen und ein Mann seyen, ist für jeden Fall

$$= \frac{3N.\,N-1.\,N}{2N.\,2N-1.\,2N-2}.$$

Wenn bei diesen Annahmen zwei Männer todt sind, so giebt es $N-2$ Fälle, in welchen die sterbende Frau nicht ihre Frau seyn wird, welches $N-3$ Ehen giebt, und 2 Fälle, in welchen es ihre Frau seyn kann; dieses giebt $N-2$ Ehen; man hat also in diesem Fall

$$\frac{N-2.\,N-3. + 2(N-2)}{N} = \frac{N-2.\,N-1.}{N} \text{ Ehen.}$$

Die übrig bleibenden Ehen sind also =

$$\frac{1}{2N.\,2N-1,\,2N-2} \cdot [N.\,N-1.\,N-2.\,N-3. + 3N.(N-1)^2.\,N-2.$$

$$+ 3N.(N-1)^2.\,N-2. + N.\,N-1.\,N-2.\,N-3.] = \frac{2N-3.\,2N-4.}{2(2N-1.)}$$

IV. Sterben vier Personen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs es vier Männer oder vier Frauen seyen

$$= \frac{N.\ \overline{N-1}.\ \overline{N-2}.\ \overline{N-3}.}{2N.\ \overline{2N-1}.\ \overline{2N-2}.\ \overline{2N-3}.},$$

und in beiden Fällen ist die Anzahl Ehen $= N-4$; die Wahrscheinlichkeit, daſs es drei Männer und eine Frau, oder drei Frauen und ein Mann seyen, ist

$$= \frac{4N.\ \overline{N-1}.\ \overline{N-2}.\ N}{2N.\ \overline{2N-1}.\ \overline{2N-2}.\ \overline{2N-3}.}$$

Sind bei dieser Voraussetzung drei Männer todt, so giebt es $N-3$ Fälle, in welchen die Frau, die sterben wird, ihnen nicht gehört, und dieses giebt $N-4$ Ehen, und drei Fälle, in welchen sie ihnen gehört, und dieses giebt $N-3$ Ehen; man hat also

$$\frac{\overline{N-3}.\ \overline{N-4}. + (N-3)}{N} = \frac{\overline{N-3}.\ \overline{N-1}.}{N} \text{ Ehen.}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daſs es zwei Männer und zwei Frauen seyn werden, ist

$$= \frac{6N.\ \overline{N-1}.\ N.\ \overline{N-1}.}{2N.\ \overline{2N-1}.\ \overline{2N-2}.\ \overline{2N-3}}.$$

Sind bei dieser Annahme zwei Männer todt, so muſs man für die beiden Frauen, die zum sterben bleiben, bedenken, daſs die hier möglichen Fälle gleich der Combination von N Dingen zu zwei und zwei genommen sind, d. h. $= \frac{N.\ \overline{N-1}.}{1.\ 2}$. Von diesen Fällen giebt einer $N-2$ Ehen, $2(N-2)$ Fälle geben $N-3$ Ehen, und $\frac{\overline{N-2}.\ \overline{N-3}.}{1.\ 2}$ Fälle geben $N-4$ Ehen, man hat also

$$\frac{1.(N-2) + 2(N-2)\ (N-3) + \frac{(N-2)\ (N-3)\ (N-4)}{2}}{\frac{N.\ \overline{N-1}.}{2}} = \frac{(N-2)^2}{N} \text{ Ehen.}$$

Die übrig bleibenden Ehen sind also

$$= \frac{1}{2N.\, 2N-1.\, 2N-2.\, 2N-3.} [N.\, N-1.\, N-2.\, N-3.\, N-4 + 4N(N-1)^2.\, N-2.\, N-3. + 6N.\, (N-1)^2.\, (N-2)^2 + 4N.\, (N-1)^2.\, N-2.\, N-3. + N.\, N-1.\, N-2.\, N-3.\, N-4]$$

$$= \frac{2N-4.\, 2N-5.}{2\,(2N-1)}.$$

V. Sterben 5 Personen: die Wahrscheinlichkeit, daſs es 5 Männer oder 5 Frauen, ist $= \frac{N.\, N-1.\, N-2.\, N-3.\, N-4.}{2N.\, 2N-1.\, 2N-2.\, 2N-3.\, 2N-4.}$, welches $N-5$ Ehen giebt; die Wahrscheinlichkeit, daſs es 4 Männer und 1 Frau, oder 4 Frauen und 1 Mann, ist $= \frac{5N.\, N-1.\, N-2.\, N-3.\, N}{2N.\, 2N-1.\, 2N-2.\, 2N-3.\, 2N-4.}$.

Setzt man, daſs bei diesen Annahmen die 4 Männer todt sind, so giebt es $N-4$ Fälle für die Behauptung, daſs die Frau ihnen nicht gehöre, und daher $N-5$ Ehen, und 4 Fälle, daſs sie ihnen gehöre, welches $N-4$ Ehen giebt; man hat also

$$\frac{N-4.\, N-5. + 4.\, (N-4)}{N} = \frac{N-4.\, N-1.}{N};$$

die Wahrscheinlichkeit, daſs es drei Männer und zwei Frauen, oder 3 Frauen und 2 Männer seyen, ist

$$= \frac{10N.\, N-1.\, N-2.\, N.\, N-1.}{2N.\, 2N-1.\, 2N-2.\, 2N-3.\, 2N-4.}.$$

Es seyen bei dieser Voraussetzung 3 Männer todt, so sind für die bleibenden zwei Frauen die möglichen Fälle $\frac{N.\, N-1.}{1.\, 2}$; drei von diesen Fällen geben $N-3$ Ehen; $3(N-3)$ Fälle geben $N-4$ Ehen, und $\frac{N-3.\, N-4.}{2}$ Fälle $N-5$ Ehen. Man hat also

$$\frac{3(N-3) + 3(N-3)(N-4) + \frac{N-3.\, N-4.}{2}(N-5)}{\frac{N.\, N-1.}{2}} = \frac{N-3.\, N-2.\, N-1.}{N.\, N-1.}$$

$$= \frac{N-3.\, N-2.}{N}.$$

Die Anzahl der bleibenden Ehen wird also seyn =

$$\frac{1}{2N.\,2N-1.\,2N-2.\,2N-3.\,2N-4.}\,[N.\,N-1.\,N-2.\,N-3.\,N-4.\,N-5.$$
$$+\,5N.\,(N-1)^2.\,N-2.\,N-3.\,N-4.$$
$$+\,10N.\,(N-1)^2.\,(N-2)^2.\,N-3.$$
$$+\,5N.\,(N-1)^2.\,N-2.\,N-3.\,N-4.$$
$$+\,N.\,N-1.\,N-2.\,N-3.\,N-4.\,N-5.]$$
$$=\frac{2N-5.\,2N-6.}{2\,(2N-1)}.$$

VI. Die Analogie ist jetzt einleuchtend, und man siehet, daſs wenn M Personen sterben, die Anzahl der bleibenden Ehen =

$$\frac{2N-M.\,2N-M-1.}{2\,(2N-1)}.$$

Wenn N und $2N-M$ unendlich groſs, so hat man $\frac{(2N-M)^2}{4N}$.

VII. Allgemein, wenn a Männer und b Frauen gestorben sind, so hat man für die Anzahl der möglichen Fälle $\frac{N.\,N-1.\,\ldots\,(N-b+1)}{1.\,2.\,3.\,\ldots\,b}$.

Von diesen Fällen geben $\frac{a.\,a-1.\,\ldots\,(a-b+1)}{1.\,2.\,\ldots\,b}$ Fälle $N-a$ Ehen,

$\frac{a.\,a-1.\,\ldots\,(a-b+2)}{1-2.\,\ldots\,(b-1).}.\,(N-a)$ Fälle geben $N-a-1$ Ehen,

$\frac{a.\,a-1.\,\ldots\,(a-b+3)}{1.\,2.\,\ldots\,(b-2)}.\,\frac{N-a.\,(N-a-1)}{1.\,2}$ Fälle geben $N-a-2$ Ehen,

$\frac{a.\,a-1.\,\ldots\,(a-b+4)}{1.\,2.\,\ldots\,(b-3)}.\,\frac{(N-a)\,(N-a-1)\,(N-a-2)}{1.\,2.\,3}$ Fälle geben $N-a-3$ Ehen,

und so weiter; endlich $\frac{(N-a)\,(N-a-1)\,\ldots\,(N-a-b+1)}{1.\,2.\,\ldots\,b}$ geben $N-a-b$ Ehen. Nun ist

$$\frac{a.\,a-1.\ldots(a-b+1)}{1.\,2.\ldots b}\,(N-a)+\frac{a.\,a-1.\ldots(a-b+2)}{1.\,2.\ldots(b-1)}.\frac{(N-a)\,(N-a-1)}{1}$$
$$+\,\frac{a.\,a-1.\,\ldots\,(a-b+3)}{1.\,2.\,\ldots\,(b-2)}.\,\frac{(N-a)\,(N-a-1)\,(N-a-2)}{1.\,2}$$

$$+ \frac{a.\ a-1 \ldots\ldots (a-b+4)}{1.\ 2.\ \ldots\ldots (b-3)} \cdot \frac{(N-a)(N-a-1)(N-a-2)(N-a-3)}{1.\ 2.\ 3} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(N-a)\ (N-a-1)\ \ldots\ldots\ (N-a-b+1)}{1.\ 2.\ \ldots\ldots\ b} (N-a-b)$$

$$= \frac{N-1.\ N-2.\ \ldots\ldots (N-b)}{1.\ 2.\ \ldots\ b} (N-a).$$

Dividirt man also mit der Anzahl der möglichen Fälle, so erhält man die Anzahl der Ehen $= \frac{N-b.\ N-a.}{N}$.

§. 2.

2. Aufg. Man verlangt die Wahrscheinlichkeit zu wissen, daſs nachdem irgend eine Anzahl von Personen (c) gestorben ist, jeder Tod eine Ehe getrennt habe.

Aufl. In der vorhergehenden Rechnung summire man alle Glieder, die durch die geringste Anzahl der gebliebenen Ehen multiplizirt sind; hiernach hat man

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{für 1 Todten} & 1 \\
\text{für 2 Todte} & \dfrac{2^2.\ N.\ N-1.}{2N.\ 2N-1.}, \\
\text{für 3 Todte} & \dfrac{2^3.\ N.\ N-1.\ N-2.}{2N.\ 2N-1.\ 2N-2.}, \\
\text{für 4 Todte} & \dfrac{2^4.\ N.\ N-1.\ N-2.\ N-3.}{2N.\ 2N-1.\ 2N-2.\ 2N-3.}, \\
\vdots & \vdots \\
\text{für c Todte} & \dfrac{2^c.\ N.\ N-1.\ N-2.\ \ldots\ldots (N-c+1)}{2N.\ 2N-1.\ 2N-2.\ \ldots\ldots (2N-c+1)}.
\end{array}\right| \text{getrennte Ehen.}$$

Nimmt man an, die Hälfte der verheiratheten Personen seyen gestorben, so setzt man $c = N$, und erhält

$$\frac{2^N.\ N.\ N-1.\ N-2.\ \ldots\ldots 1}{2N.\ 2N-1.\ 2N-2.\ \ldots\ldots (N+1)}$$

für die Wahrscheinlichkeit, daſs alle Ehen getrennt sind.

Uebrigens wird es einleuchten, dafs, so lange $c < N$, nicht alle Ehen getrennt seyn können, und unsere Formeln geben, wie schon gesagt, nur die Wahrscheinlichkeit, dafs jeder Sterbefall eine Ehe trennt. Wenn $c > N$, so ist es unmöglich, dafs jeder Sterbefall eine Ehe trennt; auch geben unsere Formeln diese Wahrscheinlichkeit $= 0$.

Bew. Für 1 Todten ist es einleuchtend.

Für 2 Todte haben wir (§. 1. II.) gesehen, dafs $\frac{N.\ N-1.}{2N.\ 2N-1.}$ die Wahrscheinlichkeit ist, dafs es 2 Männer oder 2 Frauen sind, und dafs $\frac{2N^2}{2N.\ 2N-1.}$ die Wahrscheinlichkeit ist, dafs es ein Mann und eine Frau sey, und dafs in diesem Falle $\frac{N-1}{N}$ die Wahrscheinlichkeit sey, dafs die Frau, die stirbt, nicht die Frau des gestorbenen Mannes ist.

Man hat also für die Wahrscheinlichkeit, dafs 2 Ehen getrennt sind,

$$\frac{N.\ N-1.}{2N.\ 2N-1.} + \frac{2N.\ N-1.}{2N.\ 2N-1.} + \frac{N.\ N-1.}{2N.\ 2N-1.} = \frac{2^2.\ N.\ N-1.}{2N.\ 2N-1}.$$

Sterben 3 Personen, so ist nach (§. 1. III.) die Wahrscheinlichkeit, dafs es 3 Männer oder 3 Frauen sind,

$$= \frac{N.\ N-1.\ N-2.}{2N.\ 2N-1.\ 2N-2.},$$

die Wahrscheinlichkeit, dafs es 2 Männer und 1 Frau, oder 2 Frauen und 1 Mann sey,

$$= \frac{3N.\ N-1.\ N.}{2N.\ 2N-1.\ 2N-2.},$$

und dafs im letztern Falle $\frac{N-2}{N}$ die Wahrscheinlichkeit giebt, dafs nicht Mann und Frau zugleich gestorben sind.

Für die Wahrscheinlichkeit, dafs 3 Ehen getrennt sind, hat man also

$$\frac{1}{2N.\ 2N-1.\ 2N-2} [N.\ N-1.\ N-2. + 3N.\ N-1.\ N-2.$$

$$+ 3N.\ N-1.\ N-2. + N.\ N-1.\ N-2.]$$

$$= \frac{2^3.\ N.\ N-1.\ N-2.}{2N.\ 2N-1.\ 2N-2}.$$

Sterben 4 Personen, so ist nach (§. 1. IV.) die Wahrscheinlichkeit, dafs dieses 4 Männer oder 4 Frauen sind,

$$= \frac{N.\ N-1.\ N-2.\ N-3.}{2N.\ 2N-1.\ 2N-2.\ 2N-3.},$$

die Wahrscheinlichkeit, dafs es 3 Männer und 1 Frau, oder 3 Frauen und 1 Mann seyen,

$$= \frac{4N.\ N-1.\ N-2.\ N}{2N.\ 2N-1.\ 2N-2.\ 2N-3.},$$

und im letztern Falle $\frac{N-3}{N}$ die Wahrscheinlichkeit angiebt, dafs Mann und Frau nicht zugleich gestorben sind.

Die Wahrscheinlichkeit, dafs es zwei Männer und zwei Frauen seyn werden, war

$$= \frac{6N.\ N-1.\ N.\ N-1.}{2N.\ 2N-1.\ 2N-2.\ 2N-3.},$$

und in diesem Falle $\frac{\frac{1}{2}\,(N-2.\ N-3.)}{\frac{1}{2}N.\ N-1.} = \frac{N-2.\ N-3.}{N.\ N-1.}$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dafs Mann und Frau nicht zugleich gestorben sind.

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, dafs 4 Ehen getrennt sind =

$$\frac{1}{2N.2N-1.N-2.2N-3.}\,[N.N-1.N-2.N-3. + 4N.N-1.N-2.N-3.$$
$$+ 6N.N-1.N-2.N-3. + 4N.N-1.N-2.N-3.$$
$$+ N.N-1.N-2.N-3.]$$

$$= \frac{2^4.\ N.\ N-1.\ N-2.\ N-3.}{2N.\ 2N-1.\ 2N-2.\ 2N-3.}.$$

Allgemein: Sterben c Personen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs c Ehen getrennt sind,

$$= \frac{2^c.\ N.\ N-1.\ N-2.\ \ldots\ (N-c-1)}{2N.\ 2N-1.\ 2N-2.\ \ldots\ (2N-c+1)}.$$

§. 3.

Nimmt man an, dafs beständig eine gleiche Anzahl Männer und Frauen sterben, so mufs man aus den vorhergehenden Formeln nur diejenigen wählen, welche die Wahrscheinlichkeit ausdrücken, dafs in diesem Falle jeder Todesfall eine Ehe trennt; so giebt §. 2. an, dafs für zwei Sterbefälle

fälle $\frac{N-1}{N}$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daſs Mann und Frau nicht zugleich gestorben sind, und daſs für 4 Todesfälle diese Wahrscheinlichkeit $= \frac{N-2.\ N-3.}{N.\ N-1}$ ist.

Eben so findet man für 6 Todesfälle diese Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{N-3.\ N-4.\ N-5.}{N.\ N-1.\ N-2.},$$

und allgemein, für 2a Todesfälle, ist diese Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{(N-a)\ (N-a-1)\ \ldots\ 1}{N.\ N-1.\ \ldots\ldots\ (N-a+1)}.$$

Sind die Hälfte gestorben, so setzt man $2a = N$; und $N = 2m$ so erhält man

$$\frac{m.\ m-1.\ m-2\ \ldots\ 1}{2m.\ 2m-1.\ 2m-2\ \ldots\ (m+1)}.$$

§. 4.

In den drei vorhergehenden §en haben wir bei dem männlichen und weiblichen Geschlechte gleiche Sterblichkeit vorausgesetzt; dieses ist aber zu eingeschränkt.

Nimmt man also jetzt an, daſs die Sterblichkeit bei beiden Geschlechtern nicht gleich ist, so daſs das Verhältniſs der Sterblichkeit des männlichen zum weiblichen Geschlecht $= m : w$, so kann man eben so wie vorher verfahren; die Formeln werden aber so zusammengesetzt, daſs sie in der Ausübung von geringem Gebrauch seyn werden. Die folgenden geben darüber Belehrung.

§. 5.

Stirbt nur eine Person, so ist die Anzahl der bleibenden Ehen immer $= N-1$,

weil

$$\frac{m.\ N}{(m+w)\ N}.\ (N-1) + \frac{w.\ N}{(m+w)\ N}.\ (N-1) = N-1.$$

Sterben zwei, so sind es zwei Männer oder zwei Frauen, oder ein Mann und eine Frau.

Die Wahrscheinlichkeit, daſs zuerst ein Mann stirbt, ist $= \frac{m.\ N}{(m+w).\ N}$, die Wahrscheinlichkeit, daſs noch einer stirbt, findet sich wie folget.

Es sey M die Wahrscheinlichkeit daſs ein Mann stirbt,
und F - - - eine Frau stirbt;
da nun (N—1) Männer und N Frauen bleiben, so hat man

$$M : F \begin{Bmatrix} m : w \\ N-1 : N \end{Bmatrix}$$

Mithin

$$M : M+F, \text{ oder } M : 1 = m\ (N-1) : (m+w)\ N-m.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daſs zwei Männer sterben werden, ist also $\frac{m.\ N.\ m\ (N-1)}{(m+w)\ N\ [(m+w)\ N+w]}$, dieser Fall giebt N—2 Ehen; für den Fall, daſs zwei Frauen sterben, hat man, indem man m und w gegen einander vertauscht,

$$\frac{w.\ N.\ w.\ (N-1)}{(m+w)\ [(m+w)\ N-w]}.$$

Dieser Fall giebt auch N—2 Ehen.

Stirbt zuerst ein Mann, und nachher eine Frau, so hat man für die Wahrscheinlichkeit der ersten Begebenheit

$$\frac{m.\ N}{(m+w).\ N},$$

und für die zweite

$$F : M = \begin{Bmatrix} w : m \\ N : N-1 \end{Bmatrix}, \text{ mithin } F = \frac{w.\ N}{(m+w).\ N-m}.$$

Man hat also für diesen Fall

$$\frac{m.\ N.\ w.\ N}{[(m+w)\ N-m.]\ (m+w).\ N}.$$

Stirbt eine Frau, und dann ein Mann, so hat man für die erste Begebenheit

$$\frac{w.\ N}{(m+w)\ N},$$

und für die zweite

$$M : F = \begin{Bmatrix} m : w \\ N : N-1 \end{Bmatrix},$$

daher $M = \frac{m.\ N}{(m+w).\ N-w}$.

Man hat also für diesen Fall

$$\frac{m.\ N.\ w.\ N}{(m+w).\ N.\ [(m+w).\ N-w]}.$$

Beide Fälle geben $\frac{(N-1)^2}{N}$, wie es bereits im Vorhergehenden bewiesen war.

Die Vereinigung dieser Glieder giebt demnach

$$\frac{mN.\ m\,(N-1)}{(m+w)\ N.\ [(m+w)\ N-m]}.\ (N-2)$$

$$+\ \frac{mN.\ wN}{(m+w)\ N.\ [(m+w)\ N-m]}.\ \frac{(N-1)^2}{N}$$

$$+\ \frac{wN.\ mN}{(m+w)\ N.\ [(m+w)\ N-w]}.\ \frac{(N-1)^2}{N}$$

$$+\ \frac{wN.\ w\,(N-1)}{(m+w)\ N.\ [(m+w)\ N-w]}.\ (N-2)$$

$$+\ \frac{mN.\ (N-1)\ [(m+N-2)\ +\ w\,(N-1)]}{(m+w)\ N.\ [(m+w)\ N-m]}.$$

$$=\ \frac{wN\ (N-1)\ [m\ (N-1)\ +\ w\ (N-2)]}{(m+w)\ N\ [(m+w)\ N-w)}.$$

$$=\ \frac{[(m+w)^2\ N\ (N-2)\ +\ 3\,m\,w]\ (N-1)}{[(m+w)\ N-m]\ [(m+w)\ N-w]}.$$

§. 6.

Sterben drei Personen, so wären das 1° drei Männer, ein Fall, dessen Wahrscheinlichkeit

$$=\frac{mN}{(m+w)\ N}.\ \frac{m\,(N-1)}{(m+w)\ N-m}.\ \frac{m\ (N-2)}{(m+w)\ N-2m},$$

oder 2° drei Frauen, ein Fall, dessen Wahrscheinlichkeit

$$=\frac{wN}{(m+w)\ N}.\ \frac{w\,(N-1)}{(m+w)\ N-w}.\ \frac{w\ (N-2)}{(m+w)\ N-2w},$$

oder 3° zwei Männer und eine Frau, welches drei Fälle giebt.

I. 1 Mann, 1 Mann, 1 Frau;

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{mN}{(m+w)\,N} \cdot \frac{m(N-1)}{(m+w)\,N-m} \cdot \frac{wN}{(m+w)\,N-m-w}.$$

II. 1 Mann, 1 Frau, 1 Mann;

$$\text{Wahrscheinlichkeit} \; \frac{mN}{(m+w)\,N} \cdot \frac{mN}{(m+w)\,N-m} \cdot \frac{m(N-1)}{(m+w)\,N-m-w}.$$

III. 1 Frau, 1 Mann, 1 Mann;

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{wN}{(m+w)\,N} \cdot \frac{mN}{(m+w)\,N-w} \cdot \frac{m(N-1)}{(m+w)\,N-m-w}.$$

oder 4° zwei Frauen und ein Mann, welches drei Fälle giebt.

I. 1 Mann, 1 Frau, 1 Frau;

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{mN}{(m+w)\,N} \cdot \frac{wN}{(m+w)\,N-m} \cdot \frac{w(N-1)}{(m+w)\,N-m-w}.$$

II. 1 Frau, 1 Mann, 1 Frau;

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{wN}{(m+w)\,N} \cdot \frac{mN}{(m+w)\,N-w} \cdot \frac{w(N-1)}{(m+w)\,N-m-w}.$$

III. 1 Frau, 1 Frau, 1 Mann;

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{wN}{(m+w)\,N} \cdot \frac{m(N-1)}{(m+w)\,N-w} \cdot \frac{mN}{(m+w)\,N-2w}.$$

Die beiden ersten Fälle geben $N-3$ Ehen,

der 3te und 4te Fall geben $\frac{(N-2)\,(N-1)}{N}$ Ehen.

Vereinigt man alle diese Glieder, so hat man

$$\frac{mN.\ m(N-1).\ m(N-2).\ (N-3) + mN.\ m(N-1).\ w(N-1)\ (N-2)}{(m+w)\ N\ [(m+w)\ N-m]\ [(m+w)\ N-2m]}$$

$$+ \frac{mN\,wm\ (N-1)\ (N-1)\ (N-2) + mN\,w.\ w(N-1)\ (N-1)\ (N-2)}{(m+w)\ N\ [(m+w)\ N-m]\ [(m+w)\ N-m-w]}$$

$$+ \frac{wN.\ m.\ m(N-1)\ (N-1)\ (N-2) + wN.\ mw\ (N-1)\ (N-1)\ (N-2)}{(m+w)\ N\ [(m+w)\ N-w]\ [(m+w)\ N-m-w]}$$

$$+ \frac{wN.\ w(N-1)\ w(N-2)\ (N-3) + wN.\ w(N-1)\ m(N-1)\ (N-2)}{(m+w)\ N\ [(m+w)\ N-w]\ [(m+w)\ N-2w]}$$

$$= \frac{m^3\,N\ (N-1)\ (N-2)\ (N-3)}{(m+w)\ N\ [(m+w)\ N-m]\ [(m+w)\,N-2m]}$$

$$+ m^2\,wN\ (N-1)^2\ (N-2)\ \left\{\frac{1}{(m+w)\,N\,[(m+w)\,N-m]\ [(m+w)\,N-2m]} + \frac{1}{(m+w)\,N\,[(m+w)\,N-m]\ [(m+w)\,N-m-w]} + \frac{1}{(m+w)\,N\,[(m+w)\,N-w]\ [(m+w)\,N-m-w]}\right\}$$

$$+ mw^2\,N\,(N-1)^2\ (N-2).\ \left\{\frac{1}{(m+w)\,N\,[(m+w)\,N-m]\ [(m+w)N-m-w]} + \frac{1}{(m+w)\,N\,[(m+w)\,N-w]\ [(m+w)\,N-m-w]} + \frac{1}{(m+w)\,N\,[(m+w)\,N+w]\ [(m+w)\,N-m-w]}\right\}$$

$$+ \frac{w^3\,N\ (N-1)\ (N-2)\ (N-3)}{(m+w)\ N\ [(m+w)\ N-w]\ [(m+w)\ N-2w]}$$

$$= \frac{(m+w)^6\ N^2\ (N-1)\ (N-2)\ (N-3) + 11\ mw\ (m+w)^4\ N\ (N-1)\ (N-2) - 12\ m^2\ w^2\ (m+w)^2\ (N-1)\ (N-2)}{(m+w)^6\ N^2\ (N-1)\ (N-2) + mw\ (m+w)^4\ N\ (5N-6) + 4\ m^2\ w^2\ (m+w)^2}$$

Im Fall von zwei Todten kann die Formel unter folgende Gestalt gebracht werden:

$$\frac{(m+w)^3\ N^2\ (N-1)\ N-2) + 3mw\ (m+w)\ N\ (N-1)}{(m+w)^3\ N^2\ (N-1) + mw\ (m+w)\ N}.$$

Auf diesem Wege kann man so weit fortfahren, als man will, auch die Formen der allgemeinen Ausdrücke finden, die jedoch zum Gebrauch viel zu verwickelt werden.

Eine folgende Abhandlung soll die Uebereinstimmung meiner Rechnungen mit den besten bekannten Methoden zeigen.

Ueber

die Theilung des ganzen Kreisumfanges und eines jeden beliebigen Kreisbogens in gleiche Theile, insbesondere über die Theilung des Kreisumfanges in 17 gleiche Theile.

Von Herrn Gruson *).

Als ich bei einer mündlichen Unterhaltung mit dem Herrn General von Stamfort, über verschiedene mathematische Gegenstände, erfuhr, dafs Herr Gaufs die wichtige Erfindung gemacht haben sollte, ein jedes reguläre Polygon nach Elementarlehren der ebenen Geometrie zu verzeichnen, so konnte ich dem Herrn General meine Zweifel an dieser Erfindung nicht bergen, und es war leicht, ihm auf der Stelle aus unwiderleglichen Gründen zu beweisen, dafs z. B. die Theilung des Kreisumfanges in 7, 9 und 11 gleiche Theile auf Gleichungen beruhe, die sich schlechterdings nicht in einfache quadratische Gleichungen auflösen lassen, welches doch zu einer elementarischen geometrischen Construction durchaus erforderlich wäre.

Die von mir beigebrachten Gründe bewogen den Herrn von Stamfort, mir blofs noch zu sagen, dafs er freilich nicht die allgemeine Auflösung gesehen hätte, aber doch die Formel für das reguläre 17seit, und für dieses wäre es ganz gewifs streng erwiesen.

*) Vorgelesen den 9ten Juli 1812.

Dieses veranlaſste mich zur nähern Untersuchung der Gleichung für die Theilung des Kreisumfanges in 17 gleiche Theile; ich war bald so glücklich, diese Gleichung vom 8ten Grade in 4 quadratische Gleichungen zu zerlegen, deren Wurzeln selbst nur quadratische Irrationalitäten enthalten, wodurch also für das reguläre 17seit die Aussage des Herrn von Stamfort bewiesen war, und als ich ihm meine Auflösung zeigte, so berichtigte er auch seine frühere Aussage dahin, daſs er und Herrn Gauſs's Freunde anfänglich die Sache miſsverstanden hätten. Herr Gauſs hätte nur bewiesen, daſs mehrere reguläre Polygone, worunter das 17seit gehörte, sich ganz nach Lehren der Elementar-Geometrie auflösen lieſsen. Auf dem von mir betretenen Wege überzeugte ich mich durch Induction, daſs da $17 = 2^4 + 1$, sich nur dann Theilungen des ganzen Kreisumfanges in gleiche Theile durch die Elementar-Geometrie ausführen lassen, wenn $2^n + 1$ eine Primzahl ist.

Späterhin habe ich in Herrn Gauſs *Disquisitiones Arithmeticae, Lipsiae* 1801, seine äuſserst feine, auf der unbestimmten Analysis beruhende Theorie von Zerlegung der Gleichungen gelesen, und daselbst den vollständigen Beweis des folgenden sehr schönen und sehr allgemeinen Lehrsatzes gefunden.

„Wenn n eine Primzahl ist, und $n - 1$ aus den Primfactoren $2^\alpha . 3^\beta .$
„5^γ entspringt, so kann die Theilung des Kreisumfangs in n gleiche Theile
„immer zurückgebracht werden, auf die Auflösung von

α Gleichungen des 2ten Grades,
β - des 3ten -
γ - des 4ten -

„u. s. w."

Da mein betretener Weg von Herrn Gauſs's Verfahren ganz verschieden ist, und ich dabei von einer Formel Gebrauch mache, die in der Analysis zu den paradoxen gehört, so schien es mir nicht unwichtig, die von mir gefundene Auflösung meinen hochzuverehrenden Herren Kollegen vorzulegen.

Es sey r der Halbmesser eines Kreises, x irgend eine Sehne, und u der ihr zugehörige Kreisbogen: so hat man

$$du = \frac{2r.\,dx}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$

die-

Dieses setze ich unter der Form

$$du. \sqrt{-1} = \frac{2r.\ dx}{\sqrt{x^2 - 4r^2}}$$

folglich das Integral

$$u\sqrt{-1} = 2r.\ l.\ [x.\ \sqrt{-1} + \sqrt{4r^2 - x^2}\,] + C \quad (I)$$

Da nun die Sehne x und der Bogen u zu gleicher Zeit verschwinden, so bestimmt sich dadurch

$$C = 2r.\ l\,2r.$$

Um die Rechnung einfacher zu machen, setze man den Durchmesser $2r = 1$; so ist $C = l\ 1 = 0$; und die Gleichung (I) ist nun folgende:

$$u\sqrt{-1} = l\,[x.\ \sqrt{-1} + \sqrt{1 - x^2}]$$

also

$$u = \frac{l.\ [x\sqrt{-1} + \sqrt{1 - x^2}\,]}{\sqrt{-1}}. \quad (II)$$

Für u gleich der halben Peripherie $= \frac{\Pi}{2}$ ist $x = 1$, die Formel (II) giebt dafür

$$\frac{\Pi}{2} = \frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$$

folglich der ganze Kreisumfang

$$\Pi = \frac{2\,l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{l - 1}{\sqrt{-1}}.$$

So unbegreiflich dieser Ausdruck auch seyn mag, so ist doch gewiſs, daſs jeder der Kreisperipherie gleiche Bogen durch $\frac{l - 1}{\sqrt{-1}}$ richtig vorgestellt wird. Wie groſs oder klein der Kreisbogen u nun auch seyn mag, so giebt es immer eine gewisse ganze oder gebrochene Zahl n, so daſs n. u gleich der ganzen Peripherie ist. Man hat also

$$n.\,u = \frac{l - 1}{\sqrt{-1}}.$$

Hierin den Werth von u aus (II) gesetzt, giebt

$$\frac{n.\, l\, [x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}]}{\sqrt{-1}} = \frac{1-1}{\sqrt{-1}}$$

also

$$[x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}]^n = 1$$

oder

$$(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2})^n + 1 = 0.$$

Nimmt man überdies an, n sey eine ganze Zahl, so stellt x die Seite eines regulären n-seits vor, und da in diesem Falle die Formel

$$(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2})^n$$

sich in eine endliche Function verwandelt, so hat man eine endliche Gleichung, welche die Gröſse einer Polygonseite, der Anzahl der Seiten gemäſs, geben wird. Da überdies diese Gleichung aus zwei Theilen besteht, der eine reel und der andere imaginär, so kann die linke Seite der Gleichung nur Null seyn, in so fern die gedachten zwei Theile, jeder für sich Null ist. Für jeden Werth von n hat man also zwei gleichzeitige Gleichungen, deren gemeinschaftliche Wurzeln die einzigen sind, die der Aufgabe Genüge leisten, weil nur sie allein beide Theile zu gleicher Zeit $= 0$ machen werden.

Dieses ist also die Gleichung und zugleich die allgemeine Methode, im Kreise Polygone zu zeichnen.

Beispiele.

$$n=1 \text{ giebt } \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ \text{und} \\ \sqrt{1-x^2} + 1 \end{array}\right\} \text{woraus } x = 0$$

$$n=2 \text{ giebt } \left\{\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \\ \text{und} \\ 1\sqrt{1-x^2} = 0 \end{array}\right\} \text{woraus } x = \pm 1$$

$$n=3 \text{ giebt } \left\{\begin{array}{l} 4x^3 - 3x = 0 \\ \text{und} \\ ((4x^2-1)\sqrt{1-x^2}) - 1 = 0 \end{array}\right\} \text{woraus } x = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$n=4 \text{ giebt } \left\{\begin{array}{l} 4x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \\ \text{und} \\ 4x^3 - 2x = 0 \end{array}\right\} \text{woraus } x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$n=5 \text{ giebt} \left\{\begin{array}{l} 16x^5 - 20x^3 + 5x = 0 \\ \text{und} \\ (16x^4 - 12x^2 + 1)\sqrt{1-x^2} + 1 = 0 \end{array}\right\} \text{woraus } x = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}}}$$

$$n=6 \text{ giebt} \left\{\begin{array}{l} (16x^5 - 16x^3 + 3x)\sqrt{1-x^2} = 0 \\ 8x^6 - 14x^4 + 7x^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \text{woraus } x = \left\{\begin{array}{l} \pm 1 \\ \pm \tfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$n=7 \text{ giebt} \left\{\begin{array}{l} 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x = 0 \\ (64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1)\sqrt{1-x^2} - 1 = 0 \end{array}\right.$$

etc.

Um die verschiedenen Werthe zu erkennen, welche die verschiedenen Wurzeln für einerlei n geben, so dürfen wir nur bemerken, dafs, da $-1 = (-1)^1 = (-1)^3 = (-1)^5 = (-1)^7$ etc., so hat man allgemein

$$(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2})^n = (-1)^{2m+1}$$

wo $2m+1$ nicht gröfser als n genommen zu werden braucht; denn in diesem Falle ist $u = \frac{2m+1}{n}$ von der Kreisperipherie gröfser als die ganze Peripherie. Die Sehne eines solchen Bogens ist aber völlig gleich der Sehne des Bogens, der übrig bleibt, wenn man die ganze Peripherie so vielmal von u weggenommen hat, als es anging; dieser Fall fällt also immer in den Fall zurück, in welchem $2m+1 <$ oder $= n$ ist. Es mufs sich also die Auflösung auf alle mögliche Annahmen von $2m+1 < n$ erstrecken.

Z. B. wenn $n = 5$, so kann $2m+1 = 1$, oder $= 3$, oder $= 5$ seyn.

Der Werth von $2m+1 = 1$ bezieht sich auf den in Frage stehenden wahren Fall, nämlich:

$2m+1 = 1$ giebt die Seite des regulären 5seit,

$2m+1 = 3$ giebt die Länge einer Sehne für den Fall, wo der gesuchte Bogen, 5mal genommen, gleich 3mal der ganzen Peripherie seyn sollte, welches die Diagonale des regulären 5seits ist, und zu einem Bogen gehört, der $= \frac{3}{5}$ des Umfangs ist, der also 5mal genommen $= 5 \cdot \frac{3}{5} = 3$mal der ganzen Peripherie.

Was den Fall $2m+1 = 5$ anbetrifft, so fällt es in die Augen, dafs er sich auf die ganze Peripherie bezieht, weil $5 \cdot u = 5 \cdot \Pi$, also $u = \Pi$. Es ist also $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}}$ die Seite des regulären 5seits, und $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$ die Sehne vom Bogen $\frac{3}{5}\Pi$ oder $\frac{2}{5}\Pi$.

Ist aber n gerade, z. B. $=6$, so kann die Gleichung nur die Polygonseite $x=\frac{1}{2}$ und den Durchmesser $=1$ enthalten, weil weder der Bogen $\frac{2}{6}\Pi$, noch der Bogen $\frac{4}{6}\Pi$, 6mal genommen, gleich einem ungeraden Vielfachen der Peripherie seyn kann.

Eben so, wenn $n=8$, hat man 2 Wurzeln, eine für die Seite des regulären 8seits, und die andere für die Sehne des 3fachen Bogens $=\frac{3}{8}\Pi$, oder seines Complements zur ganzen Peripherie $=\frac{5}{8}\Pi$.

Allgemein: es mag n gerade oder ungerade seyn, es werden immer so viel Paare von Wurzeln seyn, als verschiedene Sehnen sind, deren Bogen der n^{te} Theil eines ungeraden Vielfachen der Peripherie, d. h., wenn n ungerade, $\frac{n-1}{2}$ Paare, wo man von der Wurzel $x=0$ abstrahirt, die alsdann immer für den Fall, daſs $2m+1=n$ wieder erscheint; und wenn n gerade ist, so giebt $\frac{n}{4}$ oder $\frac{n+2}{4}$ Paare, je nachdem n durch 4 oder nur durch 2 theilbar ist.

Da im strengsten Sinne nur die ungeraden Theilungen der Peripherie die einzig nothwendigen sind, so fällt es bei einiger Aufmerksamkeit dem Analysten nicht schwer, zu bemerken, daſs die dazu gehörigen Gleichungen gerade Potenzen von $2x$ enthalten, und man ihnen also eine viel einfachere Form geben kann, wenn man

$$4x^2=y+p$$

macht, und diese Vereinfachung wird von der Wahl von p abhängen. Wenn z. B. $p=2$, so erhält man folgende Gleichungen:

Wenn $n=3$	$y-1=0$
- $n=5$	$y^2-y-1=0$
- $n=7$	$y^3-y^2-2y+1=0$
- $n=9$	$y^4-y^3-3y^2+2y+1=0$
- $n=11$	$y^5-y^4-4y^3+3y^2+3y-1=0$
- $n=13$	$y^6-y^5-5y^4+4y^3+6y^2-3y-1=0$
- $n=15$	$y^7-y^6-6y^5+5y^4+10y^3-6y^2-4y+1=0$
- $n=17$	$y^8-y^7-7y^6+6y^5+15y^4-10y^3-10y^2+4y+1=0$
- $n=19$	$y^9-y^8-8y^7+7y^6+21y^5-15y^4-20y^3+10y^2+5y-1=0$

Für das reguläre 17seit haben wir also folgende Gleichung

$$P = y^8 - y^7 - 7y^6 + 6y^5 + 15y^4 - 10y^3 - 10y^2 + 4y + 1 = 0$$

aufzulösen.

Ich finde durch mir eigene Kunstgriffe

$$P = [y^4 - \tfrac{1}{2}y^3 - \tfrac{3}{2}y^2 - 2y - 1]^2 - 17\,[\tfrac{1}{2}y^3 - \tfrac{1}{2}y^2 - y]^2 = 0$$

folglich $y^4 - \frac{1}{2}y^3 - \frac{3}{2}y^2 - 2y - 1 = (\frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}y^2 - y)\sqrt{17}$

Daraus

$$P' = y^4 - \frac{1+\sqrt{17}}{2}\cdot y^3 - \frac{3-\sqrt{17}}{2}\cdot y^2 - (2-\sqrt{17})\,y - 1 = 0$$

und $$P'' = y^4 - \frac{1-\sqrt{17}}{2}\cdot y^3 + \frac{3+\sqrt{17}}{2}\cdot y^2 - (2+\sqrt{17})\,y - 1 = 0$$

Diese zwei Gleichungen vom 4ten Grade versuche ich nach meiner Methode wieder in zwei quadratische Factoren zu zerlegen; dieses gelingt, und ich erhalte für P'' folgende zwei Factoren:

$$P''' = y^2 - \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{37-2\sqrt{17}}}{4}\,y - \frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4} = 0$$

und $$P^{IV} = y^2 - \frac{1-\sqrt{17}-\sqrt{37-2\sqrt{17}}}{4}\,y - \frac{1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4} = 0$$

Zerlegt man auf dieselbe Art die Gleichung P', so erhält man

$$P^{V} = y^2 - \frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}\,y - \frac{1-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4} = 0$$

und $$P^{VI} = y^2 - \frac{1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}\cdot y - \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4} = 0$$

Wir haben also die Gleichung für das 17seit in 4 quadratische Factoren P''', P^{IV}, P^{V}, P^{VI} zerlegt, und die Verzeichnung des 17seits gehöret also in der Elementar-Geometrie.

Eine weitere Entwickelung ist zwar der Einsicht wegen nicht nöthig, doch mag sie die Neuheit der Sache entschuldigen.

Ich finde aus P''', 1) $y =$

$$\underline{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{\left[68+12\sqrt{17}+4\sqrt{34-2\sqrt{17}}+8\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right]}}$$

aus P^{IV}, 2) $y = \frac{1}{8}\left\{1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \pm \sqrt{\left[68 + 12\sqrt{17} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 8\sqrt{3.+2\sqrt{17}}\right]}\right\}$

aus P^{V}, 3) $y = \frac{1}{8}\left\{1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \pm \sqrt{\left[68 - 12\sqrt{17} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 8\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right]}\right\}$

aus P^{VI}, 4) $y = \frac{1}{8}\left\{1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \pm \sqrt{\left[68 - 12\sqrt{17} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 8\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right]}\right\}$

Da nun $4x^2 = y + 2$, so ist $x = \frac{1}{2}\sqrt{y + 2}$

Aus diesen Untersuchungen ergiebt sich, daſs bei Eintheilung des Kreises in 4, 8, 16, 32 etc. gleiche Theile die Sehnen dieser Bogen von der $\sqrt{2}$ abhangen; die Theilung der Peripherie in 3 gleiche Theile hängt von $\sqrt{3}$, ferner in 5 gleiche Theile von $\sqrt{5}$; in 10 von $\sqrt{10}$; in 15 von $\sqrt{15}$, in 7 von $\sqrt{7}$, in 11 von $\sqrt{11}$, in 13 von $\sqrt{13}$, in 17 gleiche Theile von $\sqrt{17}$ ab. Es berechtiget dieses zu der Vermuthung, daſs alle übrigen Theilungen nach einer Primzahl von der Quadratwurzel aus dieser Zahl abhangen werden; doch habe ich bis jetzt keinen allgemeinen Beweis dafür finden können.

Ueber

Reihen und vollständige Integration einer linearischen partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit beständigen Coefficienten.

Von Herrn Gruson *).

Euler hat in seinen *Institutiones calculi differentialis* eine sehr elegante Methode gegeben, um folgendes Problem zu lösen:

Wenn man eine Reihe hat

$$S = a + bx + cx^2 + fx^3 + \ldots\ldots$$

deren Summe S bekannt ist, und man jedes ihrer Glieder respective mit denen einer andern Reihe A, B, C, F, G etc. multiplicirt, und diese Zahlen durch successive Differenzen zu Nulldifferenzen führt, d. h. wenn sie so beschaffen sind, daſs

$$\Delta^m A = 0;$$

so hat man auch die Summe von der Reihe

$$Z = Aa + Bbx + Ccx^2 + \ldots.$$

Diese Summe ist nämlich

$$Z = AS + \frac{\Delta Ax.\, dS}{dx} + \frac{\Delta^2 Ax^2.\, d^2S}{dx^2} + \ldots\ldots$$

deren Gesetz vor Augen liegt. Man hat also unter einer endlichen Form die Summen aller der Reihen, welche diese Eigenschaft haben.

*) Vorgelesen den 4ten März 1813.

Euler hat in dem angeführten Werke verschiedene Wege versucht, um zu der Summe von andern auf ähnliche Art entstandenen Reihen zu gelangen, deren Glieder A, B, C . . aber nicht jene Eigenschaft hatten, und seine Bemühungen scheinen nicht denselben Erfolg gehabt zu haben.

Hier gebe ich ein Mittel an, die Summation der auf solche Weise entstandenen Reihen von der Integration durch bestimmte Integrale (*intégrale définie*) einer endlichen Function mit einer veränderlichen Gröſse abhangen zu lassen.

Hat man also zwei Reihen

$$A + Bf + Cf + Ff^3 + \cdots = T$$

$$a + b.\frac{1}{f} + c.\frac{1}{f^2} + f.\frac{1}{f^3} + \cdots = T'$$

deren zwei respective Summen T, T′ man ebenfalls hat, so wird man auch die Summe von der Reihe

$$Aa + Bb + Cc + Ff + \cdots = V$$

haben, wenn man folgende Operation macht:

Man multiplicire die beiden Functionen T, T′ mit einander, und setze in der neuen Function T. T′, statt der veränderlichen f,

$$\cos. u + \sqrt{-1}.\ \sin u.$$

Dieses giebt eine Function, die ich V′ nenne; in dieser Function setze man eben so $\cos. u - \sqrt{-1}.\ \sin. u$

statt f, woraus eine neue Function V″ entstehet. Ich behaupte, daſs alsdann

$$V = \frac{1}{u}.\int \frac{V' + V''}{2}.\, du \text{ ist,}$$

wenn u nach der Integration $= 180°$ gemacht wird.

Den Beweis dieses Lehrsatzes darf ich übergehen, da er für sich einleuchtet, wenn man nur beide Reihen mit Aufmerksamkeit betrachtet, und sich erinnert, daſs

$$(\cos u \pm \sqrt{-1}.\ \sin. u)^m = \cos. m u \pm \sqrt{-1}.\ \sin m. u \text{ ist.}$$

Ich begnüge mich, ein sehr einfaches Beispiel zur Bestätigung beizubringen.

Wie man weiſs, ist

$$1 + xf + x^2 f^2 + x^3 f^3 + \cdots = \frac{1}{1 - xf}$$

1 +

$$1 + x\,\frac{1}{f} + x^2\,\frac{1}{f^2} + x^3\,\frac{1}{f^3} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{x}{f}}.$$

Man verlangt die Summe von der Reihe

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots\ldots$$

die, wie man weiſs, $\frac{1}{1-x^2}$ ist; ich habe

$$V = \frac{1}{(1-xf)\,(1-\frac{x}{f})}$$

ich mache

$$f = \cos.\ u + \sqrt{-1}.\ \sin.\ u;$$

so habe ich

$$V'' = \frac{1}{1 + x^2 - 2x.\cos.u}.$$

Nun mache ich $f = \cos u - \sqrt{-1}.\ \sin.u$

so habe ich $V'' = \dfrac{1}{1+x^2-2x.\cos u}$

Ich habe also

$$\frac{V' + V''}{2} = \frac{1}{1 + x^2 - 2x.\ \cos.u};$$

mithin

$$\frac{V' + V''}{2} = \frac{1}{1+x^2}.\ \frac{1}{1 - \frac{2x}{1+x^2}\cos.u}.$$

Jetzt mache ich $-\dfrac{2x}{1+x^2} = n$

und habe nun folgende Formel zu integriren

$$\frac{du}{1 + n.\ \cos.\ u}.$$

Nach **Eulers** Integralrechnung ist

$$\int \frac{du}{1+n.\cos.u} = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}.\ \text{arc. cos.}\ \left(\frac{n + \cos.\ u.}{1 + n.\ \cos.\ u}\right).$$

Macht man $u = 180^\circ$, so hat man alsdann

$$\int \frac{du}{1+n.\ \cos.u} = \frac{180}{\sqrt{1-n^2}}.$$

Da nun

$$n^2 = \frac{4x^2}{(1+x^2)^2},$$

so ist

$$\int \frac{V' + V''}{2} \cdot du = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{180}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}$$

$$= \frac{180^\circ}{1 - x^2}$$

folglich $\frac{1}{u} \int \frac{V' + V''}{2} \cdot du = \frac{1}{1 - x^2}.$

Es ist zu bemerken, daſs diese Methode gewöhnlich in den Ausdrükken von V', V'' imaginaire Gröſsen einführt, die sich aufheben müssen. Man kann dazu durch besondere Rechnungskunstgriffe gelangen, die verdienen gekannt zu werden. Für jetzt begnüge ich mich, eine sehr einfache Anwendung davon zu machen, auf die Summation einer Reihe, von welcher das vollständige Integral der Gleichung

$$\frac{d^2u}{ds.\,ds'} + m.\frac{du}{ds} + n.\frac{du}{ds'} + lu = 0$$

abhängt, wo l, m, n, beständig sind.

Herr **La Place** hat in den Memoiren der Pariser Akademie vom Jahre 1773 bewiesen, daſs das Integral von dieser Gleichung nicht anders auf eine endliche Art ausgedrückt werden könne, als wenn man

$$l - mn = 0$$

hätte, in welchem Falle der Werth von u in diesem Integrale, in Bezug auf eine von ihren willkührlichen Functionen, nur ein einziges Glied enthielte. Aber, für die anderen Fälle hat derselbe Geometer, in den Pariser Memoiren für das Jahr 1779, eine sehr sinnreiche Methode gegeben, um das Integral von dieser Gleichung auf ein bestimmtes Integral (*intégrale définie*) zu bringen, in Bezug einer neuen veränderlichen Gröſse, welche er in den Calcul einführt. Ohne in das Detail dieser Methode mich einzulassen, reicht es hin, zu zeigen, daſs, wenn man

$$P = e^{-ms'-ns}\Big[1 + (mn-l).\,s^{I}\,(s-z) + \frac{(mn-l)^2\,(s^{I})^2\,(s-z)^2}{1.\,2.\;1.\,2} + \frac{(mn-l)^3.(s^{I})^3.(s-z)^3}{1.\,2.\,3.\;1.\,2.\,3} + \ldots\Big]$$

$$P' = e^{-ms'-ns}\Big[1 + (mn-l)\,s\,(s^{I}-z) + \frac{(mn-l)^2\,s^2\,(s^{I}-z)^2}{1.\,2.\;1.\,2} + \frac{(mn-l)^3.\,s^3.\,(s^{I}-z)^3}{1.\,2.\,3.\;1.\,2.\,3} + \ldots\Big]$$

macht, man zum vollständigen Integral der vorgegebenen Gleichung haben wird

$$n = \int P\,\varphi\,(z)\,dz + \int P^{I}\,\psi\,(z)\,dz$$

wo φ, ψ zwei willkührliche Functionen sind, und wo das erste Integral von $z = o$ bis $z = s$, und das zweite von $z = o$ bis zu $z = s^{I}$ genommen wird.

Macht man nun

$$s^{I}\,(s-z) = \delta$$

und

$$1 + \frac{(mn-l)\,\delta}{1.\,2} + \frac{(mn-l)^2.\,\delta^2}{1.\,2.\;1.\,2} \ldots \text{etc.} \ldots = y$$

so hat man

$$P = e^{-ms^{I}-ns}.\;y.$$

Herr La Place bemerkt, daſs dieser Werth von P ein particulaires Integral des vorgegebenen seyn muſs; er macht die Substitution, und bekommt, um y zu bestimmen, folgende Gleichung:

$$o = (ct - mn)\,y + \frac{dy}{d\delta} + \delta\,\frac{d^2y}{d\delta^2}.$$

Da nun diese Gleichung eine Lineargleichung der zweiten Ordnung ist, so muſs der Werth von y in seinem Integrale zwei willkührliche beständige Gröſsen enthalten; er bestimmt sie so: daſs man $y = 1$ und $\frac{dy}{d\delta} = mn - l$ hat, wenn $\delta = o$, und erhält alsdann die Summe von der ersten Reihe. Aber die vorhergehende Gleichung in (y) war bisher durch die bekannten Methoden nicht auflösbar; auch begnügt sich dieser Geometer diesen Werth von y anzuzeigen, indem er die Gleichung, wodurch sie bestimmt ist, vollständig integrirt voraussezt.

Nach der von mir vorgetragenen Methode komme ich directe zu der Summation dieser Reihen. Wir wollen mit der ersten anfangen. Macht man

$$mn - 1 = \mu \text{ und } s^{I}\,(s - z) = \delta$$

und macht

$$\mu\,\delta = \zeta$$

so wird man folgende Reihe zu summiren haben:

$$1 + \frac{\zeta}{1.1} + \frac{\zeta^2}{1.2.\,1.2} + \frac{\zeta^3}{1.2.3.\,1.2.3} - - - -$$

die ich V nenne. Dieserwegen betrachte ich jede von den folgenden Reihen

$$1 + \frac{\zeta^{\frac{1}{2}}\,f}{1} + \frac{\zeta f^2}{1.2} + \frac{\zeta^{\frac{3}{2}}\,f^3}{1.2.3} + - - - = e^{f\sqrt{\zeta}}$$

$$1 + \frac{\zeta^{\frac{1}{2}}\frac{1}{f}}{1} + \frac{\zeta\frac{1}{f^2}}{1.2} + \frac{\zeta^{\frac{3}{2}}\frac{1}{f^3}}{1.2.3} + - - = e^{\frac{1}{f}\sqrt{\zeta}}$$

Dieses sind nun zwei Reihen, deren Summe man weiſs. Man wird also, nach der vorher gezeigten Methode, die Summe von derjenigen Reihe haben, die entstehet, indem man jedes der Glieder von der einen mit ihren correspondirenden Gliedern der andern multiplizirt; d. h. man wird die Summe von folgender Reihe haben:

$$1 + \frac{\zeta}{1.1} + \frac{\zeta^2}{1.2.\,1.2} + \frac{\zeta^3}{1.2.3.\,1.2.3} + - - -$$

welches die gesuchte ist; ich bemerke aber, daſs die vorhergehenden Reihen einerlei sind, und nur sich darin unterscheiden, daſs in der erstern die veränderliche Gröſse f, und in der zweiten $\frac{1}{f}$ ist. Dieses giebt mir folgendes Vereinfachungsmittel:

Ich multiplizire die Summe von einer jeden dieser Reihen mit einander, und erhalte zum Producte:

$$e^{(f + \frac{1}{f})\sqrt{\zeta}}$$

Jetzt mache ich

$$f = \cos.\,\sigma. \pm \sqrt{-1}.\ \sin.\,\sigma$$

und das Product wird

$$e^{2\sqrt{\zeta}.\ \cos.\,\sigma};$$

ich habe also für die Summe die Reihe welche ich suche,

$$\frac{\int e^{2\sqrt{\zeta}.\cos.\sigma} d\sigma}{\sigma}$$

wo σ nach der Integration $= 180^\circ$ gemacht wird. Man wird also haben

$$P = \tfrac{1}{\sigma} \int e^{2\sqrt{\zeta}.\cos\sigma}.\, d\sigma.$$

Macht man nun

$$\delta^1 = (s^1 - s). \text{ und } \zeta = \mu\delta^1$$

so hat man

$$P^1 = \tfrac{1}{\sigma}. \int e^{2\sqrt{\zeta^1}.\cos.\sigma} d\sigma.$$

Substituirt man diese Werthe von P, P^1 in dem von **La Place** gefundenen Integrale, und setzt für ζ, ζ^1 ihre respectiven Werthe

$$\mu.\ s^1.\ (s - z);\quad \mu.\ s.\ (s^1 - z)$$

so wird man endlich haben

$$u = \frac{e^{-ms^1 - ns}}{\sigma}. \begin{cases} \iint e^{2\sqrt{[\mu s^1.(s-z)]}.\cos.\sigma}.\ d\sigma \times \varphi(z)\, dz \\ + \iint e^{2\sqrt{[\mu.s\,(s^1-z)]}.\cos\sigma}.\ d\sigma \times \psi(z)\, dz. \end{cases}$$

Dieses ist das vollständige Integral der vorgegebenen Gleichung, welches wir vermittelst eines doppelt bestimmten Integrals, in Bezug auf zwei neue, von einander unabhängige, veränderliche Gröfsen erhalten haben.

Macht man in diesem Integrale $\mu = 0$, so hat man

$$u = e^{-ms^1 - ns}. \begin{cases} \varphi\ (s) \\ + \psi\ (s^1) \end{cases}$$

welches mit dem Resultat, das die Theorie dieser Gleichungen in diesem Falle giebt, übereinstimmt.

Macht man u zur Ordinate einer Saite, deren Abcisse x, t die Zeit, a und b zwei beständige Gröfsen, abhängig, die eine von der Gröfse der Spannung der Saite, die andere von dem Widerstande, so wird man, um die Gleichung, welche die Curve mit der Saite macht, zu bestimmen,

$$a^2.\ \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^2 u}{dt^2} + b.\frac{du}{dt}.$$

Es sey jetzt nun

$$at + x = s;\quad at - x = s^1$$

so wird die vorhergehende Gleichung

$$\frac{d^2 u}{ds.\, ds^1} + \frac{b}{4a}\left(\frac{du}{ds} + \frac{du}{ds^1}\right) = 0$$

und man wird in diesem Falle haben

$$\mu = \frac{b2}{16\, a^2}\,; \quad m = \frac{b}{4a}\,; \quad n = \frac{b}{4a}.$$

Diese Werthe in unsere Formel substituirt, so erhält man das vollständige Integral der vorgegebenen Gleichung

$$u = e^{-\frac{b}{4a}(s+s')} V \left\{ \begin{array}{l} \iint e^{2V\left[\frac{b^2}{16a^2}.\, s^1 (s-z)\right].\cos\sigma} .\, d\sigma.\, \varphi(z)\, dz \\ + \iint e^{2V\left[\frac{b^2}{16a^2}.\, s (s^1-z)\right].\cos.\sigma} .\, d\sigma.\, \psi(z).\, dz \end{array} \right.$$

indem man beobachtet, in denjenigen Integralen, die jede der willkührlichen Functionen multiplizirt, nach der Integration $\sigma = 180^\circ$ zu machen, und die beiden andern Integrale, jedes so genommen worden sind, als es Herr La Place angegeben hat. Die Geometer werden vielleicht mit Interesse gesehen haben, wie die vorgegebene Gleichung und das ihr folgende Beispiel, vollständig vermittelst eines doppelt bestimmten Integrals, in Bezug auf zwei neue, in dem Calcul eingeführte Functionen, hat integrirt werden können.

Allgemeine Methode
mittelst bestimmter Integralien die durch den Lagrangeschen Lehrsatz gegebene Reihe zu summiren.

Von Herrn Gruson *).

Der Lagrangesche Lehrsatz läſst sich auf folgendes zurückführen: Hat man eine Gleichung wie die folgende

$$\alpha - x + \varphi(x) = 0$$

wo $\varphi(x)$ eine beliebige Function von x seyn kann, und ist nun p einer von den Werthen, welcher der Gleichung Genüge leistet, so hat man

$$p = \alpha + \varphi(\alpha) + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d\varphi(\alpha)^2}{d\alpha} + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^2\varphi(\alpha)^3}{d\alpha^3} + \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{d^3\varphi(\alpha)^4}{d\alpha^4}$$

wo, wie man siehet, α anstatt x in $\varphi(x)$ gesetzt wird.

Ich will nun diese Reihe mittelst bestimmter Integralien summiren; zu diesem Ende betrachte ich die folgende Reihe, wo u und s zwei neue veränderliche Gröſsen sind:

$$V = \varphi(\alpha) + u.\frac{1}{s} \cdot \varphi(\alpha)^2 + u^2 \frac{1}{s^2} \cdot \varphi(\alpha)^3 + u^3 \frac{1}{s^3} \cdot \varphi(\alpha)^4 + \text{- - - -}$$

$$+ s.\frac{dV}{d\alpha} = s.\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} + u.\frac{d\varphi(\alpha)^2}{d\alpha} + u^2.\frac{1}{s}\frac{d\varphi(\alpha)^3}{d\alpha} + u^3.\frac{1}{s^2}\frac{d\varphi(\alpha)^4}{d\alpha} + \text{- -}$$

*) Vorgelesen den 16ten December 1813.

$$+\frac{s^2}{1.2}\cdot\frac{d^2V}{d\alpha^2}=\frac{s^2}{1.2}\cdot\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}+\frac{us}{1.2}\cdot\frac{d^2\varphi(\alpha)^2}{d\alpha^2}+\frac{u^2}{1.2}\cdot\frac{d^2\varphi(\alpha)^3}{d\alpha^2}+\frac{u^3}{1.2.3}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{d^2\varphi(\alpha)^4}{d\alpha^2}+\cdots$$

$$+\frac{s^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3V}{d\alpha^3}=\frac{s^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3\varphi(\alpha)}{d\alpha^3}+\frac{us^2}{1.2.3}\cdot\frac{d^3\varphi(\alpha)^2}{d\alpha^3}+\frac{u^2s}{1.2.3}\cdot\frac{d^3\varphi(\alpha)^3}{d\alpha^3}$$

$$+\frac{u^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3\varphi(\alpha)^4}{d\alpha^3}+\cdots$$

$+$ etc.

Bei der bloſsen Ansicht dieser Reihe mit doppelten Eingängen erkennt man leicht, daſs eine Reihe in der Diagonale existirt, deren Glieder alle von der veränderlichen Gröſse s gänzlich befreiet sind. Diese Reihe ist

$$\varphi(\alpha)+u.\frac{d\varphi(\alpha)^2}{d\alpha}+\frac{u^2}{1.2}\cdot\frac{d^2\varphi(\alpha)^3}{d\alpha^3}+\frac{u^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3\varphi(\alpha)^4}{d\alpha^4}+\cdots$$

Integrirt man nun diese Reihe mit doppelten Eingängen in Beziehung auf u, und macht nach der Integration u gleich 1, so ist es einleuchtend, daſs die vorstehende von s befreite Reihe folgende wird:

$$\varphi(\alpha)+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{d\varphi(\alpha)^2}{d\alpha}+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{d^2\varphi(\alpha)^3}{d\alpha^3}+\frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^3\varphi(\alpha)^4}{d\alpha^4}+\cdots$$

welches keine andere als die Lagrangesche Reihe ist.

Wenn ich also meine vorhergehende Reihe mit doppelten Eingängen summire, und sie in Bezug auf u integrire, und ich ein Mittel finde, nur denjenigen Theil von dieser Reihe zu erhalten, der durchaus unabhängig von den mit s und $\frac{1}{s}$ behafteten Gliedern ist, so ist es einleuchtend, daſs ich alsdann die Lagrangesche Reihe summirt habe. Man hat aber

$$V=\frac{\varphi(\alpha)}{1-\frac{u}{s}\varphi(\alpha)}$$

$$V+s.\frac{dV}{d\alpha}+\frac{s^2}{1.2}\cdot\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{s^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3V}{d\alpha^3}+\cdots=\frac{\varphi(\alpha+s)}{1-\frac{u}{s}\varphi(\alpha+s)}=T$$

und

$$\int\frac{\varphi(\alpha+s)}{1-\frac{u}{s}\varphi(\alpha+s)}\cdot du=-s.\,L\left[1-\frac{u}{s}\varphi(\alpha+s)\right].$$

Setzt

Setzt man nun $u = 1$, so habe ich

$$\int T\,du = -s.\ L\left[1 - \frac{1}{s}\varphi(\alpha + s)\right]$$

Hier ist also eine sehr einfache Function, welche die merkwürdige Eigenschaft hat, daſs, wenn sie nach der gewöhnlichen Methode entwickelt wird, die Reihe der Glieder, die ohne s und $\frac{1}{s}$ sind, genau die Lagrangesche Reihe geben.

Von der Wahrheit dieses Resultats kann man sich auch noch a posteriori überzeugen; denn macht man

$$\frac{1}{s}\varphi(\alpha + s) = \mu$$

so hat man

$$L(1-\mu) = -\mu - \tfrac{1}{2}\mu^2 - \tfrac{1}{3}\mu^3 - \ldots$$

Entwickelt man, so kommt

$$\mu = \frac{1}{s}\left[\varphi(\alpha) + s\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} + \frac{s^2}{1.2}.\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2} + \ldots\right]$$

Mithin

$$\mu = \frac{1}{s}\left[\varphi(\alpha) + s.\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} + \frac{s^2}{1.2}.\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2} + \ldots\right]$$

$$\mu^2 = \frac{1}{s^2}\left\{\begin{array}{l} \varphi(\alpha)^2 \\ + s.\ 2\dfrac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\varphi(\alpha) \\ + s^2\left[\left(\dfrac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right)^2 + 2\varphi(\alpha)\dfrac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}\right] \end{array}\right.$$
$$+ \text{etc.}$$

$$\mu^3 = \frac{1}{s^2}\left\{\begin{array}{l} \varphi(\alpha)^3 \\ + s.\ 3\varphi(\alpha)^2.\dfrac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} \\ + s^2\left[\dfrac{3}{1.2}\varphi(\alpha)^2.\dfrac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}\right. \\ \qquad\left. + 3\varphi(\alpha)\left(\dfrac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right)^2\right] \end{array}\right.$$
$$+ \text{etc.}$$

Man hat also für die in der Function $-$ s. L. $[1 - \frac{1}{s}\varphi(\alpha + s)]$, von $\frac{1}{s}$ und von s befreieten Reihe

$$\varphi(\alpha) + \frac{1}{1.2}. \; 2\varphi(\alpha)\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} + \frac{1}{1.2.3}. \left[2.3\left(\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right)^2\varphi(\alpha) + 3\,\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}\varphi(\alpha)^2\right] + \dots$$

oder

$$\varphi(\alpha) + \frac{1}{1.2}.\frac{d\varphi(\alpha^2)^2}{d\alpha} + \frac{1}{1.2.3}.\frac{d^2\varphi(\alpha)^3}{d\alpha^2} + \dots\dots$$

Dieses angenommen, so ist es sehr einleuchtend, daſs man den von s unabhängigen Werth von dieser Reihe erhalten wird, wenn man $s = \cos. v + \sqrt{-1}.\ \sin. v$ macht, hiervon den reellen Theil nimmt, den man in Bezug auf v integrirt; nachgehends nach der Integration $v = 180^\circ$ nimmt: denn dieser reelle Theil ist von der Form

$$M + M'\ \cos. v + M''.\ \cos. 2v + M'''.\ \cos. 3v,$$

welches nach der Integration, und nachdem $v = 180^\circ$ gemacht und mit 180° dividirt worden, den Werth von M giebt, welcher die verlangte Reihe ist.

Mache ich also in dem Ausdrucke

$$-\ s.\ L\left[1 - \frac{1}{s}\varphi(\alpha + s)\right]$$

nach und nach

$$s = \cos. s + \sqrt{-1}.\ \sin v \quad \text{und} \quad s = \cos. v - \sqrt{-1}.\ \sin. v$$

und addire beide daraus entstehende Ausdrücke, so vernichten sich die beiden imaginären Gröſsen, und es bleibt nur die Hälfte von der Summe dieser Ausdrücke, in Bezug auf v, von $v = 0$ bis $v = 180^\circ$ zu integriren. So erhalte ich also, indem ich $180^\circ = \Pi$ setze,

$$\varphi(\alpha) + \frac{1}{1.2}.\frac{d\varphi(\alpha)^2}{d\alpha} + \frac{1}{1.2.3}.\frac{d^2\varphi(\alpha)^3}{d\alpha^2} + \frac{1}{1.2.3.4}.\frac{d^3\varphi(\alpha)^4}{d\alpha^4}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}.\int\left\{\begin{array}{l}(\cos. v + \sqrt{-1}.\ \sin. v)\\ L[1 - \cos. v - \sqrt{-1}\sin. v).\varphi(\alpha + \cos. v + \sqrt{-1}\sin v)]\\ +\ (\cos v - \sqrt{1-}\ \sin v).\ L\ [\cos v + \sqrt{1-}\ \sin v).\\ \qquad\qquad \varphi(\alpha) + \cos v - \sqrt{-1}\ \sin v)\end{array}\right\} dv$$

wo v nach der Integration $= \Pi$ gesetzt ist.

Dieser Ausdruck findet allgemein statt für eine Function $\varphi(\alpha)$, deren Natur man nicht bestimmt; aber in dem Fall, in welchem man sie bestimmt, kann man denselben Ausdruck haben, ohne imaginäre Gröſsen unter den Integrationszeichen zu lassen: denn

$$\frac{1}{s}\varphi(\alpha+s)=\frac{1}{s}\varphi(\alpha)+\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}+\frac{s}{1.2}\cdot\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}+\frac{s^2}{1.2.3}\cdot\frac{d^3\varphi(\alpha)}{d\alpha^3}+\ldots$$

folglich

$$L\left[1-\frac{1}{s}\varphi(\alpha+s)\right]=L\left[1-\frac{1}{s}\varphi(\alpha)-\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}-\frac{s}{1.2}\cdot\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}\right.$$
$$\left.-\frac{s^2}{1.2.3}\cdot\frac{d^3\varphi(\alpha)}{d\alpha^3}-\ldots\right.$$

Macht man

$$s=\cos v+\sqrt{-1}.\sin v$$

so hat man

$$L\left[1-\frac{1}{s}\varphi(\alpha+s)\right]=L\left[1-\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}-\varphi(\alpha).(\cos v-\sqrt{-1}\sin v)\right.$$
$$-\frac{1}{1.2}\cdot\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^3}(\cos v+\sqrt{-1}\sin v)-\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3\varphi(\alpha)}{d\alpha^3}(\cos 2v+\sqrt{-1}\sin 2v)$$
$$\left.-\frac{1}{1.2.3.4}\frac{d^4\varphi(\alpha)}{d\alpha^4}(\cos 3v+\sqrt{-1}\sin 3v)-\ldots\right]$$

macht man also

$$A=1-\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}-\left[\varphi(\alpha)+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}\right]\cos.v-\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{d^3\varphi(\alpha)}{d\alpha^3}\cdot\cos 2v$$
$$-\frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4\varphi(\alpha)}{d\alpha^4}\cdot\cos 3v-\text{etc.}$$

$$B=\varphi(\alpha).\sin v-\frac{1}{1.2}\cdot\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\varphi^2}\cdot\sin v-\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{d^3\varphi(\alpha)}{d\alpha^3}\cdot\sin 2v$$
$$-\frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4\varphi(\alpha)}{d\alpha^4}\cdot\sin 3v-\text{etc.}$$

so verwandelt sich der Ausdruck

$$-sL\left[1-\frac{1}{s}\varphi(\alpha+s)\right]\text{ in }-sL(A+B\sqrt{-1}).$$

Es sey nun

$$L(A+B\sqrt{-1}) = m + n\sqrt{-1}$$

so hat man

$$A + B\sqrt{-1} = e^{m+n\sqrt{-1}}$$

wo e die Basis der hyperbolischen Logarithmen ist; folglich

$$A + B\sqrt{-1} = e^m(\cos. n + \sqrt{-1}. \sin n)$$

daher $A = e^m. \cos n$; $B = e^m. \sin n$,

also $\frac{B}{A} = \operatorname{tg} n$, folglich $n = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{B}{A}$.

Anderseits hat man

$$A^2 + B^2 = e^{2m}; \text{ also } m = \tfrac{1}{2}L(A^2 + B^2)$$

demnach

$$-sL\left[1 - \frac{1}{s}\varphi(\alpha + s)\right] = -s\left[\tfrac{1}{2}L(A^2+B^2) + \sqrt{-1}. \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{B}{A}\right].$$

Macht man ferner

$$s = \cos v + \sqrt{-1}. \sin v$$

so wird man haben

$$-sL\left[1 - \frac{1}{s}\varphi(\alpha+s)\right]$$

$$= -(\cos v + \sqrt{-1}. \sin v)\left[\tfrac{1}{2}L(A^2+B^2) + \sqrt{-1}. \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{B}{A}\right]$$

$$= -\left\{\left[\frac{\cos v}{2}. L(A^2+B^2) + \sin v. \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{B}{A}\right] + \sqrt{-1}\left[\tfrac{1}{2}\sin v. L(A^2+B^2) + \cos v. \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{B}{A}\right]\right\}.$$

Endlich hat man

$$\varphi(\alpha) + \frac{1}{1.2}. \frac{d\varphi(\alpha)^2}{d\alpha} + \frac{1}{1.2.3}. \frac{d^2\varphi(\alpha)^3}{d\alpha^2} + \ldots = -\frac{1}{\pi}\int\left[\frac{\cos v}{2}. L(A^2+B^2) - \sin v. \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{B}{A}\right]dv$$

das Integral genommen von $v = 0$ bis zu $v = \pi$.

Es ist zu bemerken, daſs in den algebraischen Gleichungen die Werthe von A und B immer unter einer endlichen Form gegeben sind, weil alsdann die sie vorstellenden Reihen von selbst abbrechen.

Beispiel.

Es soll nach dieser Methode eine von den Wurzeln der Gleichung der zweiten Ordnung

$$\alpha - x + \beta\, x^2 \qquad o$$

gefunden werden; macht man $\alpha + p$, eine von den Wurzeln der Gleichung, und $v = e^{v\sqrt{-1}}$, $= \cos v + \sqrt{-1}\cdot \sin. v$, so hat man

$$p = - \int d\, v\, s\ L \left[1 - \frac{\beta\, (\alpha + s)^2}{s} \right]$$

folglich

$$p = - \int dv \ \cos v + \sqrt{-1}.\ \sin v).\ L \left[1 - \frac{\beta \alpha^2}{s} (\cos. v - \sqrt{-1}.\ \sin v) \right.$$
$$\left. - 2 \beta \alpha - \beta\ (\cos v + \sqrt{-1}\ \sin\ v \right]$$
$$= - \int d v (\cos v + \sqrt{-1}.\ \sin v)\ L \left[1 - 2\, \beta \alpha - \beta\, (1 + \alpha^2)\ \cos.\ v \right.$$
$$\left. - \sqrt{-1}.\ (\beta \alpha^2 - \beta).\ \sin v \right]$$

In diesem Falle hat man also

$$A = 1 - 2 \beta \alpha - \beta\, (1 + \alpha^2)\ \cos v$$
$$B = \beta\, (\alpha^2 - 1).\ \sin v$$

daher

$$A^2 + B^2 = (1 - 2\, \beta \alpha)^2 + \beta^2 (1 - \alpha)^2 - 2\, (1 - 2\, \beta \alpha)\, \beta\, (1 + \alpha^2).\ \cos v$$
$$+\ 4\, \alpha^2\, \beta^2.\ \cos^2. v.\ \frac{B}{A} + \frac{\beta\ (\alpha^2 - 1) \sin v}{1 - 2 \beta \alpha - \beta (1 + \alpha^2) \cos v}$$

endlich

$$p = - \frac{1}{\pi} \int d\ v\ \left[\frac{\cos v}{2}\cdot\ L\ \ (A^2 + B^2) - \sin v.\ \operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A} \right]$$

$$= - \frac{1}{\pi} \int \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos v}{2} \cdot L \left[(1 - 2\, \beta \alpha) + \beta^2 \, (1 - \alpha^2)^2 - 2\, (1 - 2\, \beta \alpha)\, \beta\ (1 + \alpha^2) \cos v \right. \\ \qquad \left. + 4 \alpha^2\, \beta^2. \cos^2. v \right] - \sin v\ \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\beta\ (\alpha^2 - 1)\ \sin v}{1 - 2\, \beta \alpha - \beta (1 + \alpha^2) \cos v} \\ \text{wo das Integral von } v = o \text{ bis } v = \pi \text{ genommen ist.} \end{array} \right\} d\, v$$

Hieraus ist ersichtlich, wie sehr nützlich es wäre, diese Differentialfunction, die unter dem Zeichen $\int$ stehet, vollständig integriren zu können: man würde hierdurch eine von den Wurzeln der aufzulösenden Gleichung haben, von welchem Grade sie auch seyn mag, und diese Wurzel würde diejenige seyn, die durch die durch den Lagrangeschen Lehrsatz gegebene Reihe ausgedrückt wird. Man kann im Allgemeinen nur dann dazu gelangen, wenn man a priori die Wurzeln dieser Gleichung kennt. Ob nun gleich diese Untersuchung nicht directe die verlangte Wurzel zu finden lehret, (weil per Hypothesin sie als bekannt gedacht wird), so kann sie dazu führen, über die Natur dieser Wurzel im Allgemeinen Aufklärung zu geben.

Ich komme wieder auf meine Formel zurück.

$$-\int d v s L \left[1-\frac{1}{s}\varphi(\alpha+s)\right]$$

ich mache $\alpha+s=\mu$, und substituire statt dv seinen aus $s=e^{v\sqrt{-1}}$ gezogenen Werth

$$dv=-\sqrt{-1}.\frac{ds}{s}$$

folglich

$$-\int d v s L\left[1-\frac{1}{s}\varphi(\alpha+s)\right]=\sqrt{-1}\cdot\int ds L\left[1-\frac{1}{s}\varphi(\alpha+s)\right]$$

$$=\sqrt{-1}.\int d\mu\left\{L\left[\mu-\alpha-\varphi(\mu)\right]-L(\mu-\alpha)\right\}.$$

Zu bemerken ist, daſs die unter dem logarithmischen Zeichen stehende Gröſse gerade die aufzulösende Gleichung ist, indem man statt der veränderlichen x die veränderliche μ setzt. Ich nehme also an, man hätte

$$\mu-\alpha-\varphi(\mu)=p-q\mu)\,(p'-q'\mu)\,(p''-q''\mu) \text{ etc.}$$

wo $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}$ etc. die verschiedenen Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind, so muſs man die Function

$d\mu\left[L(p-q\mu)+L(p'-q'\mu)+(p''-q''\mu)+\cdots\right]$ integriren.

Nun ist

$$\int d\mu L(p-q\mu)=-\frac{1}{q}(p-q\mu)\left[L(p-q\mu)-1\right]$$

also erhält man

$$\sqrt{-1}.\int d\mu\int d\mu\left\{L\left[\mu-\alpha-\varphi(\mu)-L(\mu-\alpha)\right]\right\}$$

$$=\sqrt{-1}-\frac{1}{q}(p-q\mu)\left[L(p-q\mu)-1\right]-(\mu-\alpha)\left[L(\mu-\alpha)+\mu\right]$$

$$-\frac{1}{q'}(p'-q'\mu)\left[d(p'-q')-1\right]-\frac{1}{q''}(p''-q''\mu)\left[L(p'-q''\mu)-1\right] \text{ etc.}$$

Setzt man $\alpha+s$ anstatt μ, so hat man

$$\sqrt{-1}\int d\,s\,L\left[1-\frac{1}{s}\varphi(\alpha+s)\right]$$

$$=\sqrt{-1}-\frac{1}{q}\left[p-q(\alpha+s)\right]\left\{L\left[p-q(\alpha+s)\right]-1\right\}-s\,L\,s\quad s\,\alpha$$

$$-\frac{1}{q}\left[p'-q'(\alpha+s)\right]\left\{L\left[p'-q'(\alpha+s)\right]-1\right\}$$

$$-\frac{1}{q''}\left[p''-q''(\alpha+s)\left[p''-q''(\alpha+s)\right]-1\right\}-\text{etc.}$$

Nun muſs man in diesem Ausdruck $\cos v+\sqrt{-1}\sin v$ anstatt s setzen und den reellen Theil nehmen. Zu diesem Behuf wollen wir den Theil dieses Integrals nehmen, der nur aus der Wurzel $\frac{p}{q}$ herkommt; so wird man haben

$$\sqrt{-1}.\left[-\frac{1}{q}\left[p-q(\alpha+s)\right]\left\{L\left[p-q(\alpha+s)\right]-1\right]\right\}$$

$$=\sqrt{-1}.\left[\alpha+\cos v+\sqrt{-1}.\sin v-\frac{p}{q}\right]\times$$

$$\left\{L\left[p-q\,\alpha-q\,(\cos v+\sqrt{-1}.\sin v)\right]-1\right\}$$

Es ist aber

$$L(p-q\,\alpha-q.\cos v-\sqrt{-1}.q.\sin v)=\tfrac{1}{2}L\left[(p-q\alpha)^2-2(p-q\alpha)q.\cos v+q^2\right]$$

$$+\sqrt{-1}.\text{arc tg.}\frac{-q.\sin v}{p-q\,\alpha-q\cos v}.$$

$$=\tfrac{1}{2}L\left[(p-q\,\alpha)^2-2(p-q\alpha)\,p.\cos v+q^2\right]+\sqrt{-1}.\text{arc tg.}\frac{\sin v}{\alpha-\frac{p}{q}+\cos v}.$$

Diesen Ausdruck multiplicirt mit

$$\alpha-\frac{p}{q}+\cos v+\sqrt{-1}.\sin v.$$

so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\left(-\frac{p}{q}+\cos v\right) L\left[(p-q\alpha)^2-2(p-q\alpha)q.\cos v+q^2\right]-\sin v.\ \mathrm{arc\,tg.}\frac{\sin v}{\alpha-\frac{p}{q}+\cos v}$$

$$+\sqrt{-1}\left\{\frac{\sin v}{2} L\left[(p-q\alpha)^2-2(p-q\alpha)q.\cos v+q^2\right]+\left[\alpha-\frac{p}{q}+\cos v\right].\ \mathrm{arc\,tg}\frac{\sin v}{\alpha-\frac{p}{q}+\cos v}\right\}$$

daher der reelle Theil von

$$\sqrt{-1}\cdot\left(-\frac{1}{q}\left[p-q(\alpha+s)\right] L\left[p-q(\alpha+s)\right]\right)$$

ist

$$-\frac{\sin v}{2} L\left[(p-q\alpha)^2-2(p-q\alpha)q.\cos v+q^2\right]-\left(\alpha-\frac{p}{q}+\cos v\right).\ \mathrm{arc\,tg}\frac{\sin v}{\alpha-\frac{p}{q}+\cos v}$$

Endlich von

$$\sqrt{-1}\int ds\, L\left[1-\frac{1}{s}\varphi(\alpha+s)\right]$$

ist der reelle Theil

$$=-\frac{\sin v}{2}.\ L\left[(p-q\alpha)^2-2(p-q\alpha)q\cos v+q^2\right]-\left(\alpha-\frac{p}{q}+\cos v\right).\ \mathrm{arc\,tg.}\frac{\sin v}{\alpha-\frac{p}{q}+\cos v}$$

$$-\frac{\sin v}{2}.\ L\left[(p'-q'\alpha)^2-2(p'-q'\alpha)q'\cos v+q'^2\right]-\left(\alpha-\frac{p'}{q'}+\cos v\right).\ \mathrm{arc\,tg.}\frac{\sin v}{\alpha-\frac{p'}{q'}+\cos v}$$

— sin

$$-\frac{\sin v}{2}\cdot L\left[(p''-q''\alpha)^2-2(p''-q''\alpha)q''\cos v+q''^2\right]-\left(\alpha-\frac{p''}{q''}+\cos v\right)$$

$$\text{arc tg}\,\frac{\sin v}{\alpha-\frac{p''}{q''}+\cos v}$$

$$-\text{ etc.}$$

$$+\ v.\cos v+\sin v$$
$$+\sin v$$
$$+\text{ etc.}$$

Macht man in diesem Ausdrucke $v=180°$, und $\alpha-\frac{p}{q}$ kleiner als die Einheit, so wird alsdann der Ausdruck

$$\text{arc tg}\,\frac{\sin v}{\alpha-\frac{p}{q}+\cos v}$$

ausgedrückt durch

$$\alpha-\frac{p}{q}+\cos v+p.\sin v+p'\sin 2v+\ldots$$

wo p, p′ Functionen von α enthalten, wie solches La Grange in den Berliner Memoiren erwiesen hat. Man wird also alsdann für den reellen Theil von

$$\sqrt{-1}.\int ds\,L\left[1-\frac{1}{s}\varphi(\alpha+s)\right]$$

haben

$$\left(\frac{p}{q}-\alpha-1+1\right).180°=\left(\frac{p}{q}-\alpha\right).180°$$

ein Ausdruck welcher die Lagrangensche Reihe giebt. Die andern Ausdrücke

$$\text{arc tg}\,\frac{\sin v}{\alpha-\frac{p'}{q'}+\cos v}\text{ etc.}$$

würden nur Entwickelungen von $\sin v$ geben, wenn man $\alpha-\frac{p'}{q'}$ nicht kleiner als die Einheit hat.

Ich will jetzt diese Formel auf das Kepplersche Problem anwenden. Man hat, wie bekannt,

$$t = \psi + n.\ \sin\psi$$

wo ψ der Winkel der excentrischen Anomalie, und t der Winkel von der mittlern Anomalie ist.

Ich nehme meine Formel wieder

$$-\,s\,L\left[1 - \frac{1}{s}\varphi(\psi + s)\right]$$

und habe alsdann

$$\varphi\ (\psi+s) = n.\ \sin\ (\psi+s) = n\,(\sin\psi.\ \cos s + \cos\psi.\ \sin s).$$

Es sey

$$s = \cos v + \sqrt{-1}.\ \sin v$$

so hat man

$$n.\sin(\psi+s) = n\,[\sin\psi.\ \cos v(\cos v + \sqrt{-1}.\sin v) + \cos\psi.\ \sin\ (\cos v + \sqrt{-1}.\ \sin v)]$$

$$= n.\ \sin\psi\,[\cos(\cos v).\cos.\sqrt{-1}.\ \sin v) - \sin(\cos v).\ \sin\ (\sqrt{-1}.\ \sin v)]$$
$$+\ n.\cos\psi\,[\sin(\cos v).\ \cos\sqrt{-1}.\ \sin v + \cos.\ (\cos v).\ \sin\sqrt{-1}.\ \sin v)]$$

$$= n.\ \sin\psi\left[\cos.(\cos v)\left(\frac{e^{\sin v} - e^{-\sin v}}{2}\right) - \sin\ (\cos v)\left(\frac{e^{\sin v} - e^{-\sin v}}{2\sqrt{-1}}\right)\right]$$

$$+\ n.\cos\psi\left[\sin(\cos v)\left(\frac{e^{\sin v} + e^{-\sin v}}{2}\right) + \cos\ (\cos v)\ \left(\frac{e^{\sin v} - e^{-\sin v}}{2\sqrt{-1}}\right)\right]$$

$$= n.\sin\psi\left[\cos(\cos s)\left(\frac{e^{\sin v} + e^{-\sin v}}{2}\right) + \sqrt{-1}.\ \sin\ (\cos v)\ \left(\frac{e^{\sin v} - e^{-\sin v}}{2}\right)\right]$$

$$+\ n.\cos\psi\left[\sin\ (\cos v)\ \left(\frac{e^{\sin v} + e^{-\sin v}}{2}\right) - \sqrt{-1}.\cos\ (\cos v)\left(\frac{e^{\sin v} - e^{-\sin v}}{2}\right)\right]$$

Mithin

$$n\ \sin\ (\psi+s) = n\ \left[\left(\frac{e^{\sin v} + e^{-\sin v}}{2}\right).\ \sin(\psi + \cos v) - \sqrt{-1}\left(\frac{e^{+\sin v} - e^{-\sin v}}{2}\right)\right.$$
$$\left.\cos\ (\psi + \cos v)\right]$$

Multiplizirt man diesen Ausdruck mit

$$\frac{1}{s} = \cos v - \sqrt{-1}.\ \sin v$$

so erhält man

$$\frac{n}{s}.\sin(\psi+s)=n\left(\frac{e^{\sin v}+e^{-\sin v}}{2}\right)\cos v.\sin(\psi+\cos v)-\left(\frac{e^{\sin v}-e^{-\sin v}}{2}\right)$$
$$\sin v.\ \cos(\psi+\cos v)$$
$$-\sqrt{-1}.\left[\left(\frac{e^{\sin v}+e^{-\sin v}}{2}\right)\sin v.\sin(\psi+\cos v)+\left(\frac{e^{\sin v}-e^{-\sin v}}{2}\right)\right.$$
$$\left.\cos v.\ \cos(\psi+\cos v)\right]$$

Daher

$$\frac{n}{s}\sin(\psi+s)=n\left[\frac{e^{\sin v}}{2}\sin(\psi-v+\cos v)+\frac{e^{-\sin v}}{2}\sin(\psi+v+\cos v)\right]$$
$$-\sqrt{-1}\left[\frac{e^{\sin v}}{2}\cos(\psi-v+\cos v)+\frac{e^{-\sin v}}{2}.\cos.\ (\psi+v+\cos v)\right]$$

Mithin

$$A=1-n\left[\frac{e^{\sin v}}{2}\sin(\psi-v+\cos v)+\frac{e^{-\sin v}}{2}\sin(\psi+v+\cos. v)\right]$$
$$B=-n\left[\frac{e^{\sin v}}{2}\cos(\psi-v+\cos v)+\frac{e^{-\sin v}}{2}.\cos(\psi+v+\cos v)\right]$$

Die verlangte Reihe hat man also durch folgenden Ausdruck:

$$-\frac{1}{\pi}\int\left[\frac{\cos v}{2}L(A^2+B^2)-\sin v.\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{B}{A}\right).\ dv$$

wo das Integral von $v=0$ bis $v=180^\circ$ genommen wird.

Zweites Beispiel.

Jetzt werde ich die transcendente Gleichung

$$t=x+a\,e^{mt}$$

auflösen, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen.

Man hat

$$\varphi\ (t+s)^{m\,(t+s)}=a\,e^{mt}.e^{ms}.$$

Es sey

$$s=\cos v+\sqrt{-1}.\ \sin v$$

so hat man

$$\varphi(t+s)=a\,e^{mt}\ e^{m(\cos v+\sqrt{-1}\sin v)}$$
$$=a\,e^{m\,(t+\cos v)}\left[\cos(m.\sin v)+\sqrt{-1}.\ \sin\ (m.\sin v)\right]$$

mithin

$$\frac{1}{s}\, a e^{m\,(t+s)} = (\cos v - \sqrt{-1}.\sin v)\, a e^{m\,(t+\cos v)} \left[\cos.(m.\sin v) + \sqrt{-1}.\sin(m.\sin v)\right]$$

$$= a e^{m\,(t+s)} \Big[\cos v.\cos(m.\sin v) + \sin v.\sin(m.\sin v) + \sqrt{-1}.\,[\cos v.\sin(m.\sin v) - \sin v.\cos(m.\sin v)]\Big]$$

$$= a e^{m\,(t+s)}\, [\cos(v - m\sin v) + \sqrt{-1}.\sin(m.\sin v - v)]$$

Daher

$$A = 1 - a e^{m\,(t+\cos v)}.\cos(v + m.\sin v)$$

$$B = a e^{m\,(t+\cos v)}.\sin(m.\sin v - v)$$

folglich

$$x = t - \frac{1}{\pi}\int \left\{\frac{\cos.v}{2}.\ L\,(A^2+B^2) - \sin v.\,\mathrm{arc\,tg.}\frac{B}{A}\right\} d\,v.$$

Zu Herrn Fischer's Theorie der Glasspiegel.

Fig: 1.

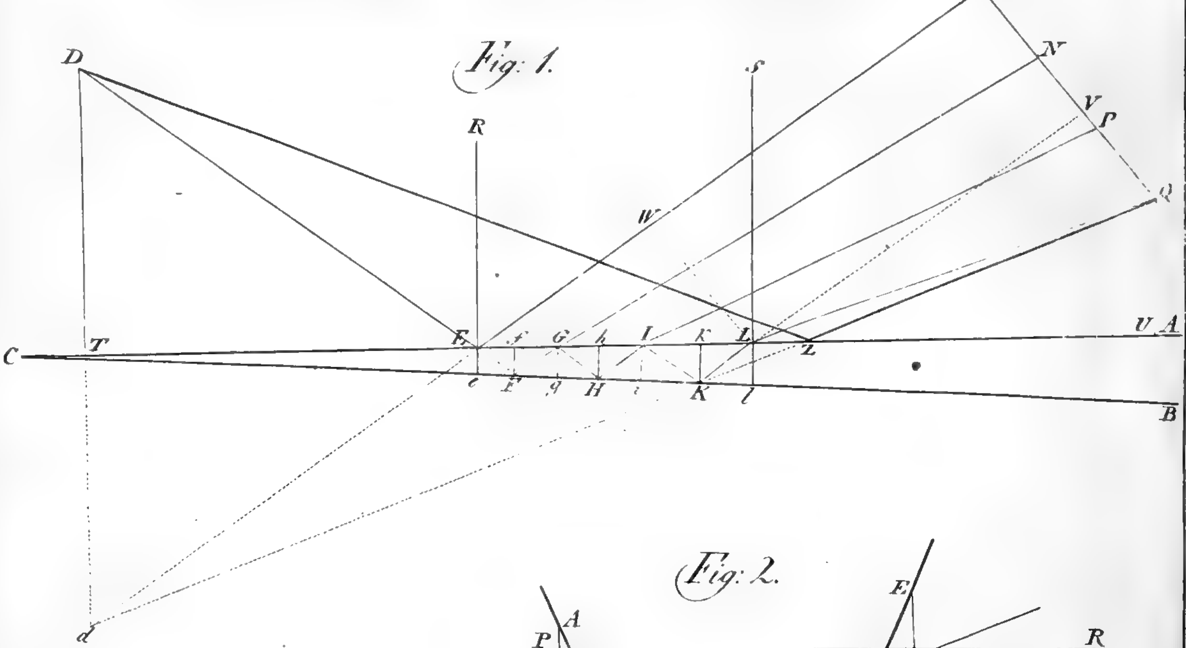
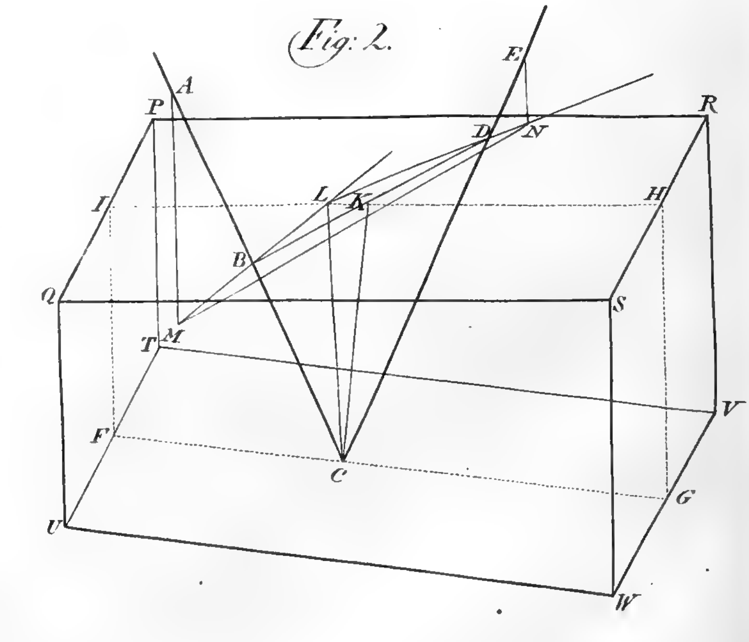


Fig: 2.



Theorie der Nebenbilder, welche ebene Glasspiegel zeigen, ihre Flächen mögen vollkommen parallel seyn oder nicht.

Von Herrn Fischer *).

Vorerinnerung.

So unstreitig eine gründliche wissenschaftliche Theorie, auch ohne alle Beziehung auf Anwendbarkeit, ihren Werth in sich selbst trägt, indem sie Befriedigung eines geistigen, also höheren Bedürfnisses, des Strebens nach Wahrheit, ist, eben so gewiſs ist es auch, daſs jede Theorie, wenn sie nur richtig und in einem gewissen Grad vollständig ist, allezeit befördernd in das Praktische eingreife, und daſs sich alle mechanische Künste, ohne Wissenschaft, nur zu einem beschränkten Punkt der Vollkommenheit würden erheben können. Ich hoffe durch die gegenwärtige Abhandlung einen kleinen Beweis für diese Wahrheit zu liefern.

Es ist bekannt, daſs man bei Spiegelsextanten und andern feinern Winkelinstrumenten die Glasspiegel den Metallspiegeln vorziehe. Es hat aber die Verfertigung solcher Glasspiegel eigene Schwierigkeiten. Gemeine Glasspiegel sind dazu gänzlich untauglich: denn man findet in der reichsten Niederlage gewöhnlicher Glasspiegel keine zwei Quadratzoll, die man an einem Winkelinstrument brauchen könnte.

Schon aus diesem Grunde verdient die Theorie der Glasspiegel eine Untersuchung. Es kommt aber hierzu noch der Umstand, daſs der Gebrauch von Glasspiegeln an den genauesten Winkelinstrumenten auf den ersten Blick

*) Vorgelesen den 16ten Juli 1812.

etwas befremdliches hat; denn es kann nicht anders als auffallend seyn, daſs man an einem Spiegelsextanten ein völlig scharfes Bild in dem kleinern Spiegel erblickt, ungeachtet das Licht von zwei Glasspiegeln unter schiefen Winkeln, die am gröſseren Spiegel oft von sehr beträchtlicher Gröſse sind, reflectirt wird, und das Bild im kleineren Spiegel noch durch ein vergröſserndes Fernrohr betrachtet wird. Dieses muſs ohne genauere Untersuchung um so auffallender seyn, da die Erfahrung lehrt, daſs bei andern optischen Werkzeugen, wo gar nicht von der Genauigkeit eines Winkelinstruments die Rede seyn kann, namentlich bei der *Camera obscura*, vermittelst des besten Glasspiegels keine recht scharfe Bilder zu erhalten sind.

Zu diesen Betrachtungen kam vor einiger Zeit noch eine zufällige Veranlassung, die Theorie der Glasspiegel, über welche ich mich nicht erinnere, irgendwo etwas vollständiges und für den Zweck genügendes gefunden zu haben, einer eigenen genauen Untersuchung zu unterwerfen. Ein auswärtiger Freund gab mir den Auftrag, ihm den gröſseren verloren gegangenen Spiegel eines Sextanten, wo möglich, wieder herstellen zu lassen.

Mir war damals nicht bekannt, daſs in Berlin schon die Verfertigung guter Parallelspiegel gelungen wäre. Aber ich war überzeugt, daſs die Schwiekeiten der Arbeit überwindlich seyn müſsten, daſs man sie aber nur an der Hand einer gründlichen und vollständigen Theorie würde beseitigen können. Es kam nämlich hierbei nicht sowohl darauf an, die eben gedachten befremdlichen Erscheinungen genau gearbeiteter Glasspiegel aufzuklären, welches sich durch ziemlich einfache geometrische Betrachtungen leisten läſst: sondern es kam vielmehr auf eine recht genaue Theorie solcher Spiegel an, deren Flächen nicht genau parallel sind, damit der Theoretiker dem Künstler ganz bestimmte und zuverlässige Kennzeichen angeben könnte, wonach sich das Gelingen oder Miſslingen der Arbeit, und mit einem Wort, jeder Fehler des Spiegels und die bestimmte Art des Fehlers, auf der Stelle leicht und sicher erkennen lieſse.

Ich habe meinen Zweck völlig erreicht. Ein junger Künstler, Herr Duve, der die optischen Arbeiten mit Liebe und Besonnenheit treibt, und ein ausgezeichneter Künstler werden kann, wenn er die verdiente Unterstützung findet, hat nach meiner Anleitung mehrere Spiegel verfertigt, welche nichts zu wünschen übrig lassen, wovon sich jeder, der seine Arbeit prüfen will, überzeugen kann.

Ich halte daher die Vorlegung der Theorie, die ich entworfen habe, und der Folgerungen, welche sich daraus für die Technik ergeben, nicht für unwichtig, wenn auch der Gegenstand an sich in wissenschaftlicher Rücksicht nur geringfügig scheinen sollte. Doch erhält die Untersuchung ein gewisses wissenschaftliches Interesse durch die Schwierigkeiten, welche sich dem Untersuchenden, bei einem sehr einfach scheinenden Problem, unerwartet entgegenstellen. Auch hoffe ich auf meine Untersuchung die Bemerkung anwenden zu dürfen, die ich in den ersten Worten dieser Vorerinnerung ausgesprochen habe, indem gewiſs bei jeder Erscheinung, die sich uns in dem Universum darbietet, die Zurückführung auf völlig deutliche Begriffe und Gesetze, Befriedigung eines höheren geistigen Bedürfnisses ist.

Allgemeine Lehrsätze über die Zerspaltungen, welche ein einzelner Lichtstral erleidet, wenn er auf eine Glasplatte fällt, deren Flächen eben, aber nicht parallel sind.

---

§. 1. (Fig. 1.) Es sey A C B Fig. 1. der Durchschnitt einer solchen Glasplatte, deren Ebenen gehörig erweitert sich in C schneiden. Die Fläche der Zeichnung sey winkelrecht auf der Durchschnittslinie der Ebenen, so ist A C B der Neigungswinkel derselben, und die Fläche der Zeichnung ist daher auf beiden Ebenen winkelrecht: woraus folgt, daſs ein Stral, der einmal in der Fläche der Zeichnung liegt, auch nach noch so vielen Brechungen und Zurückstralungen in dieser Fläche bleibe.

In dieser Fläche befinde sich ein stralender Punkt D, von welchem ein Stral D E in schiefer Richtung auf die Glasplatte fällt.

Der Stral leidet in dem Punkt E die erste Spaltung. Ein Theil desselben E M wird nach dem Grundgesetz der Katoptrik reflectirt, und wir werden diesen Stral den **Hauptstral** nennen. Ein anderer Theil E F geht nach dem Grundgesetz der Dioptrik ins Glas, und trifft die untere Fläche in dem Punkte F.

Ist die untere Fläche unbelegt, so leidet der Stral hier eine neue Spaltung, indem ein Theil in die Luft gebrochen, ein anderer innerhalb des Glases reflectirt wird. Da aber unsere Untersuchung zunächst auf belegte Spiegel gerichtet ist, so nehmen wir an, daſs der ganze Stral E F innerhalb des Glases nach dem Punkte G reflectirt werde.

In G erleidet der Stral eine zweite Spaltung. Ein Theil G N, den wir den ersten Nebenstral nennen, wird in die Luft gebrochen. Ein anderer Theil geht im Glase von G nach H, und wird von der unteren Fläche nach I reflectirt.

In I geht der zweite Nebenstral I P in die Luft, der übrige Theil des Strals geht von I nach K, und von da durch Reflection nach L, wo der dritte Nebenstral L Q in die Luft übergeht, u. s. f.

Was die Anzahl der Nebenstralen betrifft, so sieht man leicht ein, daſs sie wenigstens in dem Fall, den die Zeichnung darstellt, endlich seyn müsse, weil die Stralen im Glas die obere Fläche in immer schieferer Richtung treffen, wodurch bekanntlich bei einer gewissen Gröſse des Winkels im Glase die Brechung unmöglich wird. Indessen kann in manchen Fällen, wenn man die Sache bloſs geometrisch betrachtet, doch die Anzahl der Nebenstralen ziemlich groſs werden. Erwägt man aber, daſs jeder folgende Nebenstral um vieles schwächer seyn müsse, als der vorhergehende, so begreift man leicht, daſs dem Auge immer nur wenige Nebenstralen bemerkbar seyn können. Wie viele? dieses hängt von äuſsern Umständen ab; doch giebt es einige seltene Fälle, wo sieben bis acht sichtbar werden können. Wenn wir daher im Folgenden von einem letzten Nebenstrale reden, so ist dieses nicht absolut, sondern nur von dem letzten zu verstehen, den man in Betrachtung zu ziehen für gut findet.

Ueber die Benennung Haupt- und Nebenstral müssen wir noch bemerken, daſs derjenige, den wir den ersten Nebenstral nennen, bei einem belegten Glasspiegel eigentlich der lebhafteste, und in dieser Rücksicht der Hauptstral ist. Bei einer unbelegten Glasplatte hingegen ist unser Hauptstral der lebhafteste, und die obige Benennung für unsern theoretischen Zweck die bequemste.

§. 2. Man errichte in den Punkten E, F, G, H, I, K, L, Einfallslothe, zwischen den beiden Glasflächen: nämlich Ee, Gg, Ii, Ll, winkelrecht auf A C, und Ff, Hh, Kk winkelrecht auf B C; Ee und Ll aber verlängere man über der obern Fläche unbestimmt nach R und S.

Nennt

Nennt man nun die Winkel, welche jeder Theil des Strals mit seinem Einfallslothe macht, je nachdem er in der Luft oder im Glase liegt, nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch **Winkel in der Luft** und **im Glase**, und betrachtet man in dem oben angenommenen Sinn L Q als den letzten Nebenstral, so kann man D E R **den ersten** und S L Q **den letzten Winkel in der Luft**, desgleichen e E F **den ersten** und K L l **den letzten Winkel im Glase** nennen.

Wir müssen nun analytische Ausdrücke für folgende drei Gegenstände suchen:

a) Für das Verhältnifs des ersten und letzten Winkels im Glase.

b) Für das Verhältnifs des ersten und letzten Winkels in der Luft.

c) Für den Abstand des ersten und letzten Einfallspunktes E und L.

§. 3. **Lehrsatz.** Die Winkel e E F, E F f = f F G, F G g = g G H etc., welche die Theile der Stralen E F, F G, G H etc. mit den zugehörigen Einfallslothen E e, F f, G g etc. in den Punkten E F G etc. bilden, nehmen von E gegen L hin gleichförmig zu, und zwar von jedem Punkt zum nächsten, um eine Gröfse, welche dem Winkel der Glasfläche A C B gleich ist.

Beweis. *a*) Man denke sich die beiden Lothe E e, F f unterwärts verlängert bis sie sich schneiden, so bilden sie nebst der Linie E F ein Dreieck, in welchem der Gegenwinkel von E F aus bekannten geometrischen Gründen = A C B ist. In diesem Dreieck ist daher der Aufsenwinkel E F f = e E F + A C B.

b) Denkt man sich ferner die Lothe F f und G g oberwärts verlängert, so werden sich auch diese unter einem Winkel = A C B schneiden, und in dem Dreieck, welches sie mit der Linie F G bilden, ist der Aufsenwinkel F G g = g G H = f F G + A C B, oder vermöge *a*) = e E F + 2 A C B.

Es ist klar, dafs diese Schlüsse Schritt vor Schritt fortgesetzt werden können, so weit man will.

§. 4. Setzt man also den ersten Winkel im Glase e E F = ψ, und den Winkel der Glasflächen A C B = ζ, so hat man

$$
\begin{array}{lllll}
eEF & = & & & \psi \\
EFf & = & fFG & = & \psi + \zeta \\
FGg & = & gGH & = & \psi + 2\zeta \\
GHh & = & hHI & = & \psi + 3\zeta \\
HIi & = & iIK & = & \psi + 4\zeta \\
IKk & = & kKL & = & \psi + 5\zeta \\
KLl & = & \text{etc.} & = & \psi + 6\zeta \text{ u. s. f.}
\end{array}
$$

§. 5. Betrachtet man blofs die Punkte in der oberen Fläche E, G, I, L, so nehmen also hier die Winkel im Glase, von einem zum andern, um 2ζ zu. Nimmt man nun an, dafs der ausfahrende Stral L Q unbestimmt der r te Nebenstral sey, so macht der dazu gehörige Winkel im Glase mit dem Einfallsloth L l einen Winkel

$$KLl = \psi + 2r\zeta.$$

Dieses ist die erste der drei §. 2. verlangten Gleichungen, zwischen dem ersten und letzten Winkel im Glase. Sie bleibt, so wie überhaupt §. 3. und 4, streng richtig, wie grofs auch der Neigungswinkel beider Flächen sey.

§. 6. Aufgabe. Eine Gleichung zwischen dem ersten Winkel in der Luft D E R, und dem letzten S L Q zu construiren.

Auflösung. Das Brechungsverhältnifs aus Luft in Glas sey $n : 1$, und der Winkel $DER = \varphi$, so ist sin e E F oder $\sin\psi = \frac{\sin\varphi}{n}$; also

$$\cos\psi + \surd\left(1 - \frac{\sin\varphi^2}{n^2}\right) = \frac{\surd(n^2 - \sin\varphi^2)}{n}.$$

Auf der andern Seite wollen wir den Winkel S L Q, da er gröfser als φ ist, $\varphi + Z$ nennen. Nun ist

$$\sin SLQ = n \sin KLl; \text{ d. i.}$$
$$\sin(\varphi + Z) = n \sin(\psi + 2r\zeta); \ (\zeta\, 5), \text{ oder}$$
$$\sin(\varphi + Z) = n \sin\psi \cos 2r\zeta + n \cos\psi . \sin 2r\zeta.$$

und wenn man die kurz vorher gefundenen Werthe von $\sin\psi$ und $\cos\psi$ substituirt

$$\sin(\varphi + Z) = \sin\varphi . \cos 2r\zeta + \sin 2r\zeta \sqrt{n^2 - \sin\varphi^2}.$$

welches die zweite §. 2. geforderte Gleichung zwischen dem ersten Winkel in der Luft D E R und dem letzten S L Q ist.

Auch diese Gleichung ist für jede Gröfse des Neigungswinkels beider Flächen gültig.

Ist aber der Neigungswinkel ζ so klein, dafs man ihn nach Art eines Differentials behandeln darf, so läfst sich für Z, d. i. für den Unterschied des letzten und ersten Winkels in der Luft (S L Q — D E R), ein bequemer Ausdruck finden, wodurch man ferner einen Ausdruck für $\varphi + Z$ oder S L Q selbst finden kann.

Zuerst ist klar, dafs, sofern man ζ und $2r\zeta$ als Differentiale behandelt, man auch Z als eine Differentialgröfse betrachten müsse, weil

φ und $\varphi + Z$, als Winkel in der Luft, zu
ψ und $\psi + 2r\zeta$ als Winkel im Glase
gehören. Denn wenn ψ um eine Differentialgröſse $2r\zeta$ zunimmt, so wird auch der Zusatz Z, den φ dadurch erhält, eine solche Gröſse seyn. Unter diesen Voraussetzungen dürfen wir also setzen

$$\sin Z = Z; \quad \text{und} \cos Z = 1$$
$$\sin 2r\zeta = 2r\zeta; \text{ und } \cos 2r\zeta = 1$$

Hieraus folgt aber

$$\sin(\varphi + Z) = \sin\varphi + Z\cos\varphi,$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichung §. 6. bringt, so erhält man, wie leicht zu übersehen,

$$Z = \frac{2v\sqrt{(n^2 - \sin\varphi^2)}}{\cos\varphi}\zeta$$

oder wenn man im Zähler statt $\sqrt{(n^2 - \sin\varphi^2)}$ aus §. 6. seinen Werth $n\cos\psi$ setzt

$$Z = \frac{2rn\cos\psi}{\cos\varphi}\zeta.$$

§. 8. Der zum rten Nebenstral gehörige Winkel in der Luft selbst war $SLQ = \varphi + Z$, und dieser läſst sich nun, auf eine für kleine Werthe von ζ gültige Art, folgendergestalt ausdrücken:

$$SLQ = \varphi + \frac{2r\sqrt{(n^2 - \sin\varphi^2)}}{\cos\varphi}\zeta,$$

oder auch

$$SLQ = \varphi + \frac{2rn\cos\psi}{\cos\varphi}\zeta.$$

Wir kommen nunmehr zu der §. 2. geforderten Entwickelung eines Ausdrucks für die Entfernung EL, wozu wir zuerst folgenden Satz erweisen müssen.

§. 9. Lehrsatz. Die Entfernungen der Punkte E und L von dem Durchschnitt der Ebenen C verhalten sich gegen einander, umgekehrt wie die Cosinus der Winkel im Glase, die zu den Punkten E und L gehören; oder es verhält sich

$$CE : CL = \cos KLl : \cos eEF.$$

Beweis. In den Dreiecken CEF, CFG, CGH etc. hat man nach der Reihe folgende Proportionen:

$$CE : CF = \sin CFE : \sin CEF$$
$$CF : CG = \sin CGF : \sin CFG$$
$$CG : CH = \sin CHG : \sin CGH$$
$$CH : CI = \sin CIH : \sin CHI$$
$$CI : CK = \sin CKI : \sin CIK$$
$$CK : CL = \sin CLK : \sin CKL$$

Setzt man diese Proportionen zusammen, so fällt in die Augen, was sich in den ersten Verhältnissen hebt. In den zweiten Verhältnissen aber ist jedes Vorderglied dem nächsten Hintergliede gleich, z. B. $\sin CFE = \sin CFG$, weil die Winkel (CFE und CFG), zu welchen diese Sinus gehören, einander zu zwei rechten ergänzen.

Man erhält also durch Zusammensetzung

$$CE : CL = \sin CLK : \sin CEF.$$

Es ist aber $CLK = 90° - KLl$, also $\sin CLK = \cos KLl$. Ferner ist $CEF = 90° + eEF$, also auch $\sin CEF = \cos eEF$, also wie erwiesen werden sollte.

$$CE : CL = \cos KLl : \cos eEF.$$

§. 10. Aus der eben erwiesenen Proportion ergiebt sich nun leicht ein Ausdruck für EL; denn es folgt aus derselben

$$\cos eEF : \cos eEF - \cos KLl = CL : EL.$$

$$\text{also } EL = \left(1 - \frac{\cos KLl}{\cos eEF}\right) CL.$$

Statt CL kann man aber bequemer die Dicke des Glases bei dem Punkt L, nämlich Ll, in Rechnung bringen; denn es ist

$$CL = \frac{Ll}{\text{tang } ACB}; \text{ also}$$

$$EL = \left(1 - \frac{\cos KLl}{\cos eEF}\right) \frac{Ll}{\text{tang } ACB}$$

Nun ist $KLl = \psi + 2r\zeta$ (§. 5.), und $eEF = \psi$ (§. 4.), $ACB = \zeta$ (§. 4.); setzt man also noch $Ll = \delta$, so hat man

$$EL = \left(1 - \frac{\cos(\psi + 2r\zeta)}{\cos\psi}\right) \frac{\delta}{\text{tang } \zeta}$$

welcher Ausdruck für jeden Neigungswinkel der Flächen gültig ist.

§. 11. Behandelt man aber ζ als unendlich klein, so hat man $\cos(\psi + 2r\zeta) = \cos\psi - 2r\zeta \sin\psi$, und $\text{tang } \zeta = \zeta$;

wodurch sich die Formel für E L, wie leicht zu übersehen, in folgende sehr einfache verwandelt:

$$EL = 2r\delta \text{ tang } \psi.$$

Es ist aber leicht einzusehen, dafs δ in dieser Formel für unendlich klein zu nehmen sey, wenn ζ als ein Differential behandelt wird; denn die Gleichung zwischen δ und ζ ist $\delta = CL. \text{ tang } \zeta.$

§. 12. Zu bequemerem Gebrauch stellen wir hier die drei gefundenen Grundformeln noch einmal zusammen.

Wenn φ den ersten Winkel in der Luft (D E R), ψ den ersten im Glase (e E F), ζ den Neigungswinkel der Glasfläche (A C B), r die Stellenzahl der Nebenstralen, δ die Dicke des Glases bei dem Punkte L, wo der letzte in Betrachtung gezogene Stral austritt (also die Linie L l), vorstellt: so ist

A) der letzte Winkel im Glase, ζ sey grofs oder klein (§. 5.),

$$KLl = \psi + 2r\zeta.$$

B) Für den letzten Winkel in der Luft hat man allgemein (§. 6.)

$$\sin SLQ = \sin(\varphi + Z) = \sin\varphi. \cos 2r\zeta + \sin 2r\zeta. \sqrt{n^2 - \sin\varphi^2}.$$

Ist aber ζ sehr klein, so hat man (§. 7.)

$$Z = \frac{2r\sqrt{(n^2 - \sin\varphi^2)}}{\cos\varphi}\zeta = \frac{2rn \cos\psi}{\cos\varphi}\zeta$$

also

$$SLQ = \varphi + Z = \varphi + \frac{2r\sqrt{(n^2 - \sin\varphi^2)}}{\cos\varphi}\zeta = \varphi + \frac{2rn \cos\psi}{\cos\varphi}\zeta$$

C) Für den Abstand E L des ersten und letzten Einfallspunktes hat man allgemein (§. 10.)

$$EL = \left(1 - \frac{\cos(\psi + 2r\zeta)}{\cos\psi}\right)\frac{\delta}{\text{tang}\,\zeta}.$$

und wenn ζ sehr klein ist (§. 11.)

$$EL = 2r\delta \text{ tang } \psi.$$

Nähere Erörterung der zu beantwortenden Fragen und des Zusammenhanges derselben mit der vorgetragenen Theorie.

---

§. 13. Da jeder Stral, der auf einen Glasspiegel fällt, auf so mannigfaltige Art gespalten und zerstreut wird, so ist im Allgemeinen klar, dafs wir nicht in allen, doch in den meisten Fällen aufser dem Bilde, welches unmittelbar durch Spiegelung auf der obern Fläche entsteht, und welches wir zu Folge des bisher beobachteten Sprachgebrauchs das Hauptbild nennen wollen, eine gewisse Anzahl von Nebenbildern entstehen werden. Doch läfst es sich denken, dafs wohl in gewissen Fällen alle Nebenstralen eine solche Lage haben könnten, als ob sie sämmtlich vom Hauptbilde herkämen. Wir werden sehen, dafs bei unparallelen Spiegeln in jedem Fall Nebenbilder entstehen, mit Ausnahme eines einzigen so bestimmten Falles, dafs davon gar kein Gebrauch gemacht werden kann. Bei Parallelspiegeln hingegen, wo $\zeta = 0$ ist, tritt unter näher zu bestimmenden Umständen der Fall wirklich ein, dafs alle Stralen mit dem Hauptstrale von einem und demselben Bilde herkommen.

Man sieht übrigens leicht ein, dafs es bei näherer Untersuchung aller Fälle hinreichend sey, einen einzigen stralenden Punkt D in Betrachtung zu ziehen: denn was man von diesem deutlich einsieht, wird man leicht auf jeden andern, also auch auf einen ganzen Gegenstand anwenden. Ja es ist sogar hinreichend, die Betrachtung auf einen einzigen einfallenden Stral DE zu beschränken, weil der Schlufs von diesem auf andere, die von demselben Punkt D kommen, keine Schwierigkeit machen kann.

Was die ausfahrenden Stralen betrifft, so sind es nur zwei, die man genau zu betrachten hat, der Hauptstral EM, und der letzte Nebenstral LQ, den wir unbestimmt den $r$ten nennen: denn giebt man dem Buchstaben r einen bestimmten Werth 1, 2, 3 etc., so wird man die Erscheinungen, die von einem bestimmten Nebenstral herrühren, ganz richtig nach unsern Formeln beurtheilen können.

§. 14. Wir müssen aber die sämmtlichen bei Spiegeln eintretenden Erscheinungen in zwei Klassen theilen, welche in der theoretischen Betrachtung, so wie in den Resultaten, beträchtlich von einander abweichen.

In die erste Klasse gehören alle Falle, wo das vom Spiegel reflectirte

Licht auf eine Fläche geworfen wird, das Auge aber nicht gegen den Spiegel, sondern gegen diese Fläche gerichtet ist.

In die zweite Klasse gehören alle Fälle, wo das Auge selbst gegen die Spiegel gerichtet ist, und die von ihnen reflectirten Stralen empfängt.

Die erste Art von Erscheinungen sind von der theoretischen Seite die einfachen, und sollen daher zuerst untersucht werden.

Erste Klasse der Erscheinungen, wie das vom Spiegel reflectirte Licht durch eine Fläche aufgefangen wird.

§. 15. Um es anschaulich zu machen, daſs man bei der Untersuchung jedes einzelnen Falles allezeit mit der näheren Betrachtung eines einzigen Strals ausreiche, wollen wir ein Paar Fälle dieser Klasse genauer durchgehen.

Das erste Beispiel sey die *Camera obscura.* In dem Punkte D (Fig. 1.) sey ein Sammelglas winkelrecht auf DE so aufgestellt, daſs DE in der Achse desselben liege. Die Brennweite dieses Glases sey so groſs, als DE und EM zusammen. In M sey winkelrecht auf EM eine Ebene MQ aufgestellt, welche das vom Spiegel reflectirte Licht empfängt, so hat man das Wesentliche von der Einrichtung einer *Camera obscura.* Unter den angegebenen Voraussetzungen wird sich ein sichtbarer Punkt, der in gehöriger Entfernung von dem Glase in der Achse desselben liegt, in M abbilden, und aus der Theorie des einfachen Spiegels ist klar, daſs dieses Bild in M zwar nur von schwachem Lichte, aber doch völlig scharf seyn werde. Man sieht aber leicht ein, daſs, wenigstens im Fall unserer Figur, in N ein zweites, in P ein drittes, und in Q ein viertes Bild eben des Punktes entstehen werde. Denn jeder Stral des aus dem Sammelglas kommenden Lichtkegels, in dessen Mitte DE liegt, wird offenbar eben so, wie DE selbst, in einen Hauptstral und in Nebenstralen gespalten, und die sämmtlichen ersten Nebenstralen werden sich ziemlich genau in den Punkt N, die zweiten in P, und die dritten in Q vereinigen; nur werden die Stralen sich nicht so scharf als in M vereinigen, auch werden diese Bilder nicht von der Undeutlichkeit der Farbenzerstreuung frei seyn. Sollte es nun möglich seyn, vermittelst eines Glasspiegels ein einziges Bild zu erhalten, so ist klar, daſs dieses nur unter der Bedingung möglich seyn würde, wenn alle Nebenstralen auch in den Punkt M zusammenträfen. Ob dieses unter irgend einer Lage der Umstände möglich sey, wird sich ganz allgemein entscheiden lassen, wenn wir vermittelst der vorgetragenen Theorie einen analytischen Ausdruck für die Entfernung M Q suchen, aus dessen näherer Betrachtung sich ergeben muſs, ob und unter was für Umständen dieses statt haben könne.

Ein zweites Beispiel der ersten Klasse kommt bei den Newtonischen Farbenversuchen im verfinsterten Zimmer vor. Bei D sey die kleine Oeffnung, durch welche das Sonnenlicht in der Richtung D E in das Zimmer geleitet wird. Aus den ersten Sätzen der Optik ist bekannt, daſs sich dieses Licht im Zimmer kegelförmig unter einem Winkel ausbreitet, der dem scheinbaren Durchmesser der Sonne gleich ist. Ist kein Spiegel da, und man fängt dieses Licht in einiger Entfernung mit einer Ebene winkelrecht auf, so zeigt sich auf derselben ein kreisförmiger Lichtschein, den man als ein einfaches Sonnenbild betrachten kann, dem es nur an Schärfe fehlt, weil jeder Punkt der Sonnenscheibe in demselben abgebildet ist, nicht durch einen Licht-Punkt, sondern durch einen Licht-Fleck von der Gestalt und Gröſse der Oeffnung, durch welche das Licht kommt. Dieses Sonnenbild soll nun vermittelst des Spiegels A C B auf die Ebene M Q, welche wie vorher winkelrecht auf E M steht, geworfen werden, und es entsteht nun die Frage, ob es Umstände gebe, unter denen man vermittelst eines Glasspiegels ein eben so einfaches Sonnenbild, als vermittelst eines Metallspiegels, in M erhalten könne. Man stelle sich unter D E einen vom Mittelpunkt der Sonnenscheibe kommenden Stral vor, so müſste sich in M der Mittelpunkt der Sonnenscheibe abbilden. Da alle Stralen, die vom Mittelpunkt der Sonnenscheibe kommen, als völlig parallel zu betrachten sind, so ist klar, daſs das gesammte, vom Mittelpunkt der Sonnenscheibe kommende und durch die Oeffnung bei D eindringende Licht, einen prismatischen Raum füllen werde, dessen Gestalt durch die Gestalt der Oeffnung bei D bestimmt ist, dergestalt, daſs wenn diese Oeffnung dreieckig wäre, das gedachte Licht ein dreiseitiges Prisma bilden würde, welches aus lauter mit D E parallelen Stralen bestände. Da nun parallele Stralen auch von einer Spiegelfläche parallel reflectirt werden, so sieht man leicht ein, daſs sich der Mittelpunkt der Sonne als ein kleines Dreieck, von der Gestalt und Gröſse der Oeffnung bei D, durch die sämmtlichen reflectirten Hauptstralen bei M abbilden werde. Aber es ist auch klar, daſs wenigstens im Fall unserer Figur bei N, P und Q, durch

durch die reflectirten Nebenstralen ähnliche, nur noch undeutlichere Nebenbilder entstehen werden. Fallen die Punkte M, N, P, Q, weit genug aus einander, welches immer der Fall seyn wird, wenn man das Licht in beträchtlicher Entfernung vom Spiegel auffängt, so begreift man, daſs mehrere gänzlich getrennte Sonnenbilder entstehen können. Sollte es indessen Umstände geben, unter denen ein Glasspiegel auch hier nur ein Sonnenbild gäbe, so würde dieses nur möglich seyn, wenn in bestimmten Fällen die Punkte M, N, P, Q, völlig oder beinahe zusammenfielen. Es wird also hier, wie vorher, auf eine analytische Formel für MQ ankommen, und es würde sich für jedes andere Beispiel durch ähnliche Schlüsse eben die Folgerung ergeben.

§. 16. Es ist schon im vorigen § bemerkt, daſs MQ winkelrecht auf EM angenommen sey. Man ziehe LW parallel mit MQ, und LV parallel mit EM, so sind die Winkel SLV, WLE, WER, RED, EDT gleich, also sämmtlich $= \varphi$ (§. 12). Daher ist $WL = MV = EL. \cos\varphi$ also für einen kleinen Neigungswinkel ζ

$$MV = 2r\delta.\ \text{tang}\,\psi.\ \cos\varphi \quad (\S.\ 12).$$

Ferner ist (§. 12.) $SLQ = \varphi + Z$; da nun $SLV = \varphi$, so ist $VLQ = Z$. Nun setze man den Abstand der Ebene MQ vom Spiegel, oder genauer vom Punkte L, also $LV = b$; so ist

$$VQ = b.\ \text{tang}\,VLQ = bZ;$$

folglich

$$MQ = MV + VQ = 2r\delta\ \text{tang}\,\psi.\ \cos\varphi + bZ,$$

oder wenn man für Z seinen Werth durch ζ aus §. 12. substituirt,

$$(A)\ MQ = 2r\ \text{tang}\,\psi.\ \cos\varphi.\ \delta + \frac{2rbn\cos\psi}{\cos\varphi}\,\zeta.$$

Da φ und ψ als Winkel in der Luft und im Glase zusammengehören, so kann der eine für gegeben gelten, wenn der andere gegeben ist. Will man indessen bloſs φ in der Formel haben, so ist

$$\text{tang}\,\psi = \frac{\sin\psi}{\sqrt{(1-\sin\psi^2)}} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{(n^2-\sin\varphi^2)}},\ \text{und}\ \cos\psi = \frac{1}{n}\sqrt{(n^2-\sin\varphi^2)};$$

$$\text{also (B)}\ MQ = \frac{2r\sin\varphi.\ \cos\varphi}{\sqrt{(n^2-\sin\varphi^2)}}\,\delta + \frac{2rb\sqrt{(n^2-\sin\varphi^2)}}{\cos\varphi}\,\zeta.$$

§. 17. Es ist also MQ eine veränderliche Function von φ, und es ist nöthig, zuerst den Einfluſs, welchen φ auf jedes Glied der Formel hat, näher zu erwägen.

Dafs in dem ersten Gliede $\frac{\sin\varphi.\ \cos\varphi}{\sqrt{(n^2 - \sin\varphi^2)}}$ in jedem Falle kleiner als 1 sey, übersieht man sehr leicht aus der Form (A), wo statt dieses Ausdrucks tang ψ. cos φ steht. Es ist aus den ersten Gründen der Dioptrik klar, dafs ψ, bei dem Uebergang des Lichts aus Luft in Glas nie die Gröfse von 45° erreichen könne; also ist offenbar tang ψ, und noch vielmehr tang ψ. cos $\varphi \prec 1$. Will man indessen den gröfsten Werth dieser Function genau haben, so mufs man ihn aus der ersten Gestalt derselben, nach der Methode vom Gröfsten und Kleinsten suchen. Man findet, dafs sie ihr Maximum erreiche, wenn $\sin\varphi = \sqrt{[n^2 - n\sqrt{(n^2 - 1)}]}$; welches für $n = \frac{3}{2}$, $\varphi = 49^\circ.\ 12'$, und tang ψ. cos $\varphi = 0{,}382\ldots$ giebt. Man hat also in jedem Fall tang ψ. cos $\varphi \prec 0{,}4$, oder kleiner als $\frac{2}{5}$. Folglich ist in jedem Fall das ganze erste Glied

$$2\,r\ \text{tang}\ \psi.\ \cos\varphi\ \delta \prec \tfrac{4}{5}\, r\,\delta.$$

Der Quotient $\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}$ im zweiten Theil der Formel (A) ist in jedem Fall gröfser als 1, weil $\psi \prec \varphi$. Diese Function hat kein Maximum. Sie ist $= n$, wenn $\varphi = 0$, und wird unendlich, wenn $\varphi = 90^\circ$: so dafs sie eine sehr beträchtliche Gröfse erhalten kann, wenn das Licht nur etwas schief einfällt. Der Coefficient von ζ ist daher in jedem Fall gröfser, als $2\,r\,b\,n$, und bei schiefem Lichte sehr beträchtlich.

Wir bemerken noch den Werth beider Functionen für $\varphi = 45^\circ$. Dann ist tang ψ. cos $\varphi = \frac{1}{\sqrt{(4n^2 - 2)}} = 0{,}37798 \text{--}$ oder ungefähr $\frac{3}{8}$ (für $n = \frac{3}{2}$). Ferner $\frac{\cos\psi}{\cos\varphi} = \sqrt{(2n^2 - 1)} = 1{,}8708 \text{--}$ oder ungefähr $1\frac{7}{8}$. Für diesen Werth von φ kann man also setzen:

$$M\,Q = \tfrac{3}{4}\, r\,\delta + \tfrac{15}{4}\, r\,b\,\zeta,$$

wonach sich die Wirkung eines Glasspiegels bei der *Camera obscura* genau beurtheilen läfst.

§. 18. Es ist ferner über die allgemeinen Formeln für M Q (§. 16.) folgendes zu bemerken:

Der erste Theil stellt, wie aus der Entwickelung der Formel hervorgeht, die Linie M V, der zweite die Linie V Q vor. Jene erscheint in der Figur viel gröfser als diese; aber aus den im vorigen §. angestellten Betrachtungen ist klar, daſs es sich in der Wirklichkeit fast in jedem Fall umgekehrt verhalten werde. Bei Entwerfung der Figur muſste mehr die Deutlichkeit, als die Annäherung an die gewöhnlichsten Fälle, berücksichtigt werden.

Denkt man sich die Lage des Spiegels umgekehrt, nämlich den Winkel C auf der Seite der Tafel M Q, so wird ζ und mit ihm der ganze zweite Theil der Formel negativ, während der erste positiv bleibt. Hierdurch entsteht, wie oben (§. 15.) vorläufig bemerkt wurde, allerdings die Möglichkeit, daſs M Q $=$ o werde. Indessen ist hiervon bei der *Camera obscura* oder andern Anwendungen kein Gebrauch zu machen, besonders weil b oder der Abstand der auffangenden Tafel vom Spiegel ungemein klein genommen werden müſste, wenn der zweite Theil dem ersten gleich werden sollte.

§. 19. Aus dem vorigen §. ist klar, daſs bei der geringsten Abweichung der Spiegelfläche vom Parallelismus, jederzeit eine beträchtliche Undeutlichkeit durch Nebenbilder entstehen müsse.

Sind hingegen die Spiegelflächen vollkommen parallel, so ist $\zeta = 0$, und es fällt also der ganze zweite Theil der Formel weg. Dann hat man allgemein

$$MQ = 2r \tan\psi \cdot \cos\varphi \cdot \delta = \frac{2r \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\sqrt{(n^2 - \sin\varphi^2)}}\,\delta,$$

und wir haben gesehen §. 17., daſs dieser Werth in jedem Fall kleiner seyn werde, als $\frac{4}{5} r\delta$. Für $\varphi = 45°$ aber hat man ungefähr M Q $= \frac{3}{4} r\delta$.

Bei einer *Camera obscura* wird also das erste Nebenbild, welches hier eigentlich das lebhaftere ist, vom Hauptbilde beinahe um $\frac{3}{4}$ der Glasdicke abstehen. Dieses ist in jedem Fall eine bemerkbare Gröſse, auch wenn nur ein einziges Nebenbild hervorträte, und so ist es streng erwiesen, daſs der beste Parallelspiegel kein recht deutliches Bild in der *Camera obscura* geben könne.

Auch bei den Farbenversuchen im verfinsterten Zimmer ist der beste Parallelspiegel zu genauen Versuchen unbrauchbar: denn da das Auge sich hier in einem weiten dunkeln Raume befindet, und nur eine kleine mäſsig stark erleuchtete Fläche betrachtet, so befindet es sich in dem Zustand der höchsten Empfänglichkeit für Lichteindrücke, und es dürfte daher wohl das Licht von mehr als einem Nebenbilde nicht ganz unbemerkbar bleiben. Träten indessen auch nur die beiden ersten Bilder bemerkbar hervor, so würden sie doch nicht leicht viel näher als $\frac{4}{5} r\delta$ beisammen stehen, weil man immer das Licht unter einem sehr schiefen Winkel auffangen mufs. Man würde also bei Versuchen, wo grofse Genauigkeit erfordert würde, auch hier nothwendig einen Metallspiegel brauchen müssen.

§. 20. Das allgemeine Resultat dieser Untersuchungen ist also, dafs man in allen Fällen, wo das Licht eines Spiegels von einer Ebene aufgefangen und auf dieser betrachtet wird, durchaus nur Metallspiegel brauchen könne, wenn man einfache und reine Bilder haben will.

Zweite Klasse von Erscheinungen, wenn das Auge das vom Spiegel reflectirte Licht unmittelbar erhält.

---

§. 21. Wir schicken zuerst folgende allgemeine Betrachtung über diese Klasse von Erscheinungen voraus. Wenn man in Fig. 1. aus D die Linie D d winkelrecht durch die obere Spiegelfläche A D zieht, und T d = T D macht, so ist aus der Theorie des einfachen Spiegels bekannt, dafs alle aus D auf den Spiegel fallende Stralen von der Oberfläche A C unmittelbar so reflectirt werden, als kämen sie aus d. Nun haben wir diejenigen Stralen, die wie E M unmittelbar von der Oberfläche zurückgeworfen werden, Hauptstralen genannt. Wir werden also sagen können: wenn sich ein Auge irgendwo über dem Spiegel befindet, wo es dergleichen Hauptstralen empfangen kann, so wird es eine zwar schwache, aber doch scharfe Abbildung von D in d erblicken. Dieses Bild nennen wir das Hauptbild, ob es gleich bei einem belegten Spiegel an Lebhaftigkeit dem ersten Nebenbilde nachsteht. Da aber jeder einzelne Stral, eben so wie D E, Nebenstralen abgiebt, so werden alle ersten Nebenstralen, von welcher Art G N ist, von dem ersten Nebenbilde, die zweiten Nebenstralen, wie I P, von einem zweiten Nebenbilde u. s. f. zu kommen scheinen. Steht also das Auge an einer Stelle, wo es Haupt- und Nebenstralen jeder Art empfangen kann, so wird es aufser dem Hauptbilde eine Reihe von Nebenbildern sehen, wofern nicht etwa diese Bilder unter gewissen Umständen für das Auge in ein einziges zusammenfallen.

Man sieht aber leicht, dafs wir hier nicht mehr, wie bei der ersten Klasse von Erscheinungen, mit der Betrachtung eines einzigen einfallenden

Strals D E ausreichen werden. Denn wo auch das Auge stehen mag, so ist klar, daſs es von allen den Stralen, in welchen sich D E spaltet, entweder nur einen, oder gar keinen erhalten wird. Steht also das Auge an einer Stelle, wo es mehrere Nebenbilder wahrnehmen kann, so werden die Stralen, vermittelst deren es irgend ein Bild sieht, zu andern einfallenden Stralen gehören, als die, vermittelst deren es irgend ein anderes Bild sieht.

Dieser Umstand ist es eigentlich, welcher es nöthig macht, beide Klassen von Erscheinungen von einander zu trennen. Wir werden uns aber bei der jetzt vorhabenden Untersuchung auf die Betrachtung zweier Stralen beschränken können: nämlich 1) desjenigen Strals, durch welchen ein Auge das Hauptbild, und 2) desjenigen, durch welchen es das rte Nebenbild sieht. Läſst sich eine allgemeine Formel für den Winkel finden, den diese beiden Stralen am Auge machen, so ist klar, daſs man alle hierher gehörige Erscheinungen richtig wird beurtheilen können.

§. 22. Es befinde sich das Auge in Q, und erblicke vermittelst des Strales Q L das rte Nebenbild, so läſst sich sehr leicht die Richtung desjenigen Strals finden, vermittelst dessen es zugleich das Hauptbild sieht. Denn da dieses unveränderlich in d liegt, so darf man nur Q d ziehen, welche das Spiegels Oberfläche in Z schneidet. Zieht man also D Z, so ist klar, daſs dieser einfallende Stral es ist, der von Z aus in das Auge reflectirt wird; und der Winkel L Q Z ist die Gröſse, für welche wir einen analytischen Ausdruck suchen müssen.

§. 23. Wenn man Q U winkelrecht auf A C zieht, so sind die Winkel T D Z = Z Q U den Winkeln gleich, welche die beiden Stralen D Z und Z Q mit einem in Z errichteten Lothe machen würden. Nun haben wir oben (§. 12.) $SLQ = LQU = \varphi + Z$ gesetzt. Setzen wir also den gesuchten Winkel

$$LQZ = \xi,$$

so haben wir

$$ZQU = ZDT = \varphi + Z - \xi;$$

und es wird nun darauf ankommen, irgend eine Gleichung zu finden, in welcher ξ mit den übrigen Gröſsen, die hier in Betrachtung zu ziehen sind, verbunden sey, um es aus derselben entwickeln zu können, wobei wir uns aber auf den Fall einschränken, wo ζ und δ, und daher auch Z und ξ klein genug sind, um als Differentialgröſsen behandelt zu werden.

Zur Erfindung dieser Gleichung dient die Linie T U, für welche sich zwei verschiedene Ausdrücke finden lassen; einer aus der Betrachtung des Strals D Z Q, der andere vermittelst des Strals D E F G H I K L Q.

§. 24. Wir wollen den letzten Ausdruck zuerst suchen.

In dem Dreieck D E T war der Winkel T D E $= \varphi$; setzt man nun D E (den Abstand des stralenden Punktes vom Punkt E) $=$ a, so hat man T E $= a \sin \varphi$.

In dem Dreieck L Q U haben wir den Winkel L Q U $= \varphi + Z$. Setzen wir nun L Q (den Abstand des Auges vom Punkt E) $=$ b, so haben wir L U $= b \sin(\varphi + Z) = b \sin \varphi + bZ \cos \varphi$.

Ferner ist nach §. 12. E L $= 2r \operatorname{tang} \psi. \delta$, und daher

$$TU = TE + UL + EL = (a + b) \sin \varphi + bZ \cos \varphi + 2r \operatorname{tang} \psi. \delta.$$

welches der eine Ausdruck für T U ist.

§. 25. Um ferner aus Betrachtung des Strals D Z Q den andern Ausdruck zu finden, haben wir zunächst in dem Dreieck D T E die Linie D T $= a \cos \varphi$, also im Dreieck D T Z die Linie T Z $=$ D T. tang T D Z $= a \cos \varphi. \operatorname{tang}(\varphi + Z - \xi)$, oder wenn $Z - \xi$ als unendlich klein behandelt wird,

$$TZ = a \cos \varphi \left(\operatorname{tang} \varphi + \frac{Z - \xi}{\cos \varphi^2}\right), \text{ oder}$$

$$TZ = a \sin \varphi + \frac{Z - \xi}{\cos \varphi}.$$

Im Dreieck L Q U aber ist Q U $= b \cos(\varphi + Z) = b \cos \varphi - bZ \sin \varphi$; also im Dreieck Z Q U die Linie Z U $=$ Q U. tang Z Q U $= (b \cos \varphi - bZ \sin \varphi) \operatorname{tang}(\varphi + Z - \xi)$; oder

$$ZU = (b \cos \varphi - bZ \sin \varphi) \left(\operatorname{tang} \varphi + \frac{Z - \xi}{\cos \varphi^2}\right), \text{ oder}$$

$$ZU = b \sin \varphi + \frac{b(Z - \xi)}{\cos \varphi} - \frac{bZ \sin \varphi^2}{\cos \varphi};$$

indem man nämlich das Produkt der beiden letzten Glieder in der Klammer, als ob es ein Differential der zweiten Ordnung wäre, weglassen kann.

Hieraus ergiebt sich nun

$$TU = TZ + ZU = (a + b) \sin \varphi + \frac{(a + b)(Z - \xi)}{\cos \varphi} - \frac{bZ \sin \varphi^2}{\cos \varphi},$$

welches der zweite Ausdruck für T U ist.

§. 26. Verbindet man nun beide §. 24 und 25 gefundene Ausdrücke, so ergiebt sich mit Weglassung dessen, was auf beiden Seiten gleich ist,

$$\frac{(a+b)(Z-\xi)}{\cos\varphi} - \frac{bZ\sin\varphi^2}{\cos\varphi} = \frac{bZ\cos\varphi^2}{\cos\varphi} + 2r\delta\tang\psi,$$

oder $$\frac{(a+b)(Z-\xi)}{\cos\varphi} = \frac{bZ}{\cos\varphi} + 2r\delta.\tang\psi,$$

oder $$\frac{(a+b)\xi}{\cos\varphi} = \frac{aZ}{\cos\varphi} - 2r\delta\tang\psi,$$

also endlich

$$\xi = \frac{a}{a+b}Z - \frac{2r\cos\varphi.\tang\psi}{a+b}\delta,$$

oder, wenn man aus §. 12. statt Z seinen durch ζ ausgedrückten Werth setzt,

$$\xi = \frac{2rna\cos\psi}{(a+b)\cos\varphi}\zeta - \frac{2r\cos\varphi.\tang\psi}{a+b}\delta.$$

§. 27. Ueber diese Formel, welche in Beziehung auf die Erscheinungen der zweiten Klasse, als das Hauptresultat unserer Untersuchung zu betrachten ist, sind verschiedene Bemerkungen zu machen.

Erstlich: Die bestimmte Bedeutung, welche die Buchstaben φ, ψ, a, b, δ in dieser Formel haben, war für die Entwickelung der Formeln bequem. Für die Anwendung hingegen ist eine kleine Abänderung dieser Bedeutungen zweckmäfsig, wobei jedoch die Formel ihre volle Gültigkeit behält. Da es nämlich ein unstreitiger Grundsatz der Differentialrechnung ist, dafs man statt jeder Gröfse a eine andere b setzen dürfe, wofern beide nur um eine Differentialgröfse verschieden sind, so wird man auch hier berechtigt seyn, die eben genannten Buchstaben solche Gröfsen bedeuten zu lassen, welche von denen, die wir bis jetzt darunter verstanden, nur um Gröfsen verschieden sind, denen man mit ζ und δ gleichen Rang in Ansehung der Dimension beilegen mufs.

Unter φ, welcher bisher der Einfallswinkel des Strals D E war, darf man auch den Einfallswinkel des Strals D Z (nämlich F D Z) verstehen, der sich auf das Hauptbild in d bezieht, wodurch ψ der zu diesem Winkel vermöge des Brechungsgesetzes gehörige Winkel im Glase wird.

Unter a, dem Abstand des stralenden Punktes D von dem Punkte E, kann D Z als der Abstand von Z verstanden werden. Eben so darf man unter b, welches der Abstand des Auges von L war, den Abstand desselben von Z, also Q Z verstehen. Hierdurch wird a + b = Q d, d. h. der Entfernung des Hauptbildes vom Auge gleich, wofür bei grofsen Entfernungen der Abstand des Gegenstandes selbst vom Auge genommen werden kann.

Unter δ endlich darf man sich die Dicke des Spiegels in jedem Punkte denken.

Es versteht sich von selbst, daſs man zu allen diesen Vertauschungen der Bedeutungen unserer Buchstaben nur unter der Voraussetzung berechtigt ist, daſs ζ und δ klein genug sind, um sie als Differentialgröſsen zu behandeln. Unter dieser Voraussetzung läſst sich die Berechtigung zu jeder dieser Vertauschungen aus den Formeln §. 12. streng erweisen.

§. 28. Zweitens: In Ansehung der Gröſse beider Glieder ist zu bemerken, daſs das zweite fast ohne Ausnahme bedeutend kleiner als das erste ist, so daſs man sogar dasselbe in den meisten Fällen ganz weglaseen kann. Dieses erhellet theils daraus, weil wir oben §. 17. gezeigt haben, daſs $\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}$ jederzeit gröſser als 1, $\tang\psi.\cos\varphi$ hingegen immer kleiner als $\frac{2}{5}$ sey; theils und besonders daraus, weil das erste Glied durch das im Zähler enthaltene a ein sehr bedeutendes Uebergewicht über das zweite Glied erhält. Es ist klar, daſs wenn man die Bilder entfernter irdischer Gegenstände, oder gar Gestirne, im Spiegel betrachtet, das zweite Glied als verschwindend gegen das erste zu betrachten sey.

§. 29. Drittens: Ueber den Sinn der Zeichen bemerke man folgendes: Wenn die Formel einen positiven Werth von ξ giebt, so folgt, daſs die Bilder so liegen wie in unserer Figur, d. h. das Auge in Q erblickt das Nebenbild über dem Hauptbild. Ein negativer Werth wird also die umgekehrte Lage der Bilder anzeigen.

Bei der in der Figur angenommenen Lage des Spiegels kann indessen, wie aus dem vorigen §. klar ist, dieser Fall nicht leicht eintreten. Es müſste nicht nur ζ, a und b, sondern auch φ sehr klein seyn, also das Licht fast winkelrecht einfallen. In diesem Fall kann ξ sogar $= 0$ werden, wird aber auf alle Fälle wegen der entgegengesetzten Zeichen beider Glieder sehr klein seyn. Hierin liegt der Grund, warum man bei dem schlechtesten Spiegel wenig oder nichts von Nebenbildern gewahr wird, wenn man sein eigenes Bild nahe vor dem Spiegel betrachtet. Wir können übrigens diesen besondern Fall im folgenden ganz aus der Acht lassen, weil es uns eigentlich um die Erscheinungen zu thun ist, welche sich bei sehr schief einfallendem Lichte zeigen.

Giebt man aber dem Spiegel eine entgegengesetzte Lage, d. h. denkt man sich die Spitze C auf der Seite, wo das Auge steht, so wird ζ, und mit

mit ihm die ganze Formel, negativ; dann erscheinen also ohne Ausnahme die Nebenbilder **unter** dem Hauptbilde.

Sobald also nur das Licht nicht in einer der winkelrechten sehr nahen Richtung einfällt, sö gilt allezeit die Regel, daſs die Nebenbilder auf derjegen Seite des Hauptbildes stehen, nach welcher die Spiegelflächen zusammenlaufen.

§. 30. Die Formel für ξ ist völlig hinreichend, die Wirkung eines vollkommenen Parallelspiegels zu beurtheilen. Für diesen ist $\zeta = 0$, also fällt der ganze erste Theil der Formel weg, und wir behalten bloſs

$$\xi = -\frac{2r \operatorname{tang} \psi . \cos \varphi}{a + b} \delta.$$

Die Vorzeichnung beweist, daſs die Nebenbilder in jedem Fall **unter** dem Hauptbilde erscheinen müssen. Der Werth der Formel ist aber, wofern nicht Object und Auge ganz nahe bei dem Spiegel sind, jederzeit sehr klein. Ja wenn der stralende Punkt nur 10 Fuſs entfernt ist, so wird ξ schon so klein, daſs kaum das schärfste Auge Spuren der Nebenbilder wahrnehmen wird. Und ist der Gegenstand 100 oder mehr Fuſs entfernt, so kann man sein Bild im Spiegel schon durch ein vergröſserndes Fernrohr, selbst bei noch so schief einfallendem Lichte betrachten, und man wird nicht leicht Spuren eines Nebenbildes entdecken. Da man aber beim Winkelmessen gewöhnlich nach viel entfernteren Gegenständen sieht, so wird es begreiflich, daſs man selbst nach schiefen Reflectionen von zwei Spiegeln, dennoch vollkommen scharfe Bilder erblicke.

§. 31. Ich betrachte diese Anwendung auf den Parallelspiegel nur als ein Porisma der vorgetragenen Theorie: denn ginge der Zweck der Untersuchung bloſs hierauf, so hätte sich eben dies Resultat auf einem viel kürzeren Wege finden lassen. Aber der Endzweck der ganzen Untersuchung forderte eigentlich die genaue Kenntniſs aller Erscheinungen eines nicht parallelen Spiegels, um bei einem vorliegenden Spiegel auf der Stelle beurtheilen zu können, ob er fehlerhaft sey, an welcher Stelle, und in welcher Art. Um dieses auf eine hinreichende Art leisten zu können, ist aber noch ein Zusatz zu der vorgetragenen Theorie nöthig. Wir haben nämlich bisher lediglich solche Stralen betrachtet, welche in einer Ebene des Neigungswinkels liegen. Es sind jetzt noch einige Betrachtungen über Stralen, die eine andere Lage haben, anzustellen.

§. 52. (Fig. 2.) Es sey in der 2ten Figur PQRS die obere, TUVW die untere Fläche eines nichtparallelen Spiegels. Die Linie PQ liege der Durchschnittslinie der Flächen parallel, und die Linien PR und QS sollen winkelrecht gegen dieselbe liegen. Die sämmtlichen Seitenflächen PQUT, PRVT, QSWU und RSWV stelle man sich winkelrecht auf der oberen Spiegelfläche vor, so kann man PRVT und QSWU, und jede andere mit ihm parallele, als Ebenen des Neigungswinkels betrachten.

In der unteren Spiegelfläche nehme man beliebig den Punkt C, und lege durch diesen eine Ebene des Neigungswinkels FGHI, die also auf beiden Spiegelflächen winkelrecht steht. In dieser Ebene errichte man CK winkelrecht auf FG, so steht CK und jede durch sie gelegte Ebene auf der unteren Spiegelfläche winkelrecht. In eben der Ebene ziehe man CL winkelrecht auf IH, so steht CL und jede durch sie gelegte Ebene auf der oberen Spiegelfläche winkelrecht.

Nun nehme man an, dafs ein in das Glas durch Brechung übergegangener Lichtstral BC in beliebiger Richtung den Punkt C treffe, so ist KC das Einfallsloth für den Punkt C. Zieht man also durch B und K eine Linie, so ist klar, dafs der bei C reflectirte Stral in der erweiterten Ebene des Dreiecks BCK bleiben müsse. Macht man also den Winkel KCD = KCB, so ist KD der reflectirte Stral.

Man ziehe ferner durch B und L eine Linie, so ist die Ebene des Dreiecks BCL auf der oberen Spiegelfläche winkelrecht; also lag der einfallende Stral in der Luft, wovon BC der gebrochene ist, in der erweiterten Ebene dieses Dreiecks. Dieser Stral sey AB, und A der stralende Punkt; er stehe winkelrecht über dem Punkt M, der in der verlängerten LB liegt.

Eben so zieht man durch L und D eine Linie, so wird der Stral CD bei seinem Uebergang in die Luft in der erweiterten Ebene des Dreiecks LCD bleiben. Dieser Stral in der Luft sey DE, und E die Stelle des Auges, das diesen Stral empfängt. Es stehe winkelrecht über dem in der verlängerten LD liegenden Punkt N.

Unter diesen Voraussetzungen wird das Auge das erste Nebenbild des stralenden Punktes A in der Verlängerung von ED erblicken.

Um die Stelle näher zu bestimmen, wo eben das Auge das Hauptbild von A sehen wird, ziehe man MN, so ist klar, dafs eine durch AM und EN gelegte Ebene auf der oberen Spiegelfläche winkelrecht stehe. Daher wird der Beobachter in E, das Hauptbild von A in der Linie MN, oder vielmehr in der gedachten winkelrechten Ebene sehen. Man würde die Stelle des Hauptbildes sehr leicht finden können, wenn man A M unterwärts verlängerte, und die Verlängerung gleich M A machte. Der Endpunkt dieser Verlängerung würde das Hauptbild seyn, und eine von da nach E gezogene Linie würde die Richtung bezeichnen, in welchen das Hauptbild gesehen wird, und in der Linie M N den Punkt, welchen diese Richtung schneidet. In der Figur ist aber, um Ueberladung zu vermeiden, diese Zeichnung weggelassen, weil es für unsern Zweck hinreichend ist, zu wissen, dafs die Richtung, in welcher das Hauptbild erscheint, eine Linie sey, die von E durch einen mittleren Punkt der Linie M N gezogen wird.

Wir wollen aber, um uns kurz auszudrücken, die Ebene A M N E die Ebene des Hauptbildes, so wie die Ebene der beiden Dreiecke E N D, D C L, die Ebene des Nebenbildes nennen.

§. 33. Aus der erklärten Construction geht deutlich hervor, dafs die eben genannten Ebenen nicht zusammenfallen können, wofern nicht der Punkt B in der Linie I H angenommen wird. Das Nebenbild wird also neben der Ebene des Hauptbildes erscheinen, und aus der Lage der C K und C L ist klar, dafs das Nebenbild von der Ebene des Hauptbildes auf derjenigen Seite abweiche, wohin die Spiegelflächen convergiren.

Verwechselt man die Stelle des Auges und des stralenden Punktes, so ergiebt sich das nämliche Resultat; woraus als ein ganz allgemein richtiger Satz folgt: dafs, wenn der stralende Punkt und das Auge sich nicht in einer Ebene des Neigungswinkels befinden, das Nebenbild allezeit nach derjenigen Seite, wohin die Spiegelflächen convergiren, von der Ebene des Hauptbildes abweiche; welches ein Hauptsatz für die richtige Beurtheilung der Erscheinungen eines unparallelen Spiegels ist. Wir haben schon oben §. 29. gesehen, dafs selbst in einer Ebene des Neigungswinkels die Nebenbilder immer auf eben der Seite liegen.

§. 35. Es ist indessen diese Abweichung von der Ebene des Hauptbildes bei einer geringen Abweichung der Spiegelfläche so klein, dafs man sie als ein Differential der zweiten Ordnung betrachten mufs, wenn man den Neigungswinkel der Fläche ζ, und die Dicke des Glases L C $=$ d, als Differentiale der ersten Ordnung behandelt. Denn in dem Dreieck C L K ist der Winkel L C K dem Neigungswinkel der Spiegelfläche gleich, also $= \zeta$. Daher ist L K $= \delta\,\zeta$, ein Produkt zweier als unendlich klein betrachteter

Gröſsen. Daher werden auch die Winkel L B D, L D B, und ihre Summe X L D, als Differentiale der zweiten Ordnung anzusehen seyn. Hieraus folgt aber, daſs auch der Winkel L N M, den die beiden Ebenen des Hauptbildes und des Nebenbildes einschlieſsen, von demselben Range sey. Denn dieser Winkel ist veränderlich, und wächst, wenn der stralende Punkt A sich in der Linie B A vom Spiegel entfernt. Denkt man sich A unendlich entfernt, so hat der Winkel die Grenze seines Wachsthums erreicht. Die Linie N M liegt aber dann parallel mit L B, folglich ist dann L N M = X L N, der, wie wir gezeigt haben, als Differential der zweiten Ordnung betrachtet werden muſs.

§. 35. Man erweitere nun die Ebene des Hauptbildes A M N E über und unter der obern Spiegelfläche, und stelle sich vor, daſs die Punkte B, L, K, D, nebst allen Linien, die von ihnen nach C, A und E laufen, auf die Fläche A M N E orthographisch projicirt werden, so folgt aus dem vorigen §., daſs die Gröſsen aller Linien und Winkel in der Projection von der wahren Gröſse derselben nur um einige Kleinigkeiten abweichen, die man unter den gemachten Voraussetzungen als unendlich klein betrachten muſs.

Hieraus folgt aber, daſs wenn es auf Bestimmung der Gröſse dieser Winkel oder Linien ankommt, man berechtigt sey, die Stralen A B, B C, C D, D E so zu betrachten, als ob sie sämmtlich in der Ebene des Hauptbildes lägen. Hierdurch wird aber die Vergleichung aller hierbei vorkommenden Gröſsen auf die oben für eine Ebene des Neigungswinkels vorgetragene Theorie zurückgeführt, und wir werden namentlich die oben §. 26. entwickelte Formel für den Abstand der Nebenbilder vom Hauptbilde auch auf den gegenwärtigen Fall anwenden können.

Diese Formel war

$$\xi = \frac{2\,r\,n\,a\,\cos\psi}{(a+b)\cos\varphi}\,\zeta - \frac{2\,r\,\tang\psi.\,\cos\varphi}{a+b}\,\delta.$$

Die Bedeutung aller Buchstaben bleibt völlig so, wie sie §. 27. bestimmt worden. Nur der Buchstabe ζ erhält eine veränderte Bedeutung. Erweitert man nämlich die Ebene A M N E bis zur unteren Spiegelfläche, so wird sie diese in einer nicht gezeichneten aber leicht vorzustellenden Linie schneiden. Diese Linie, nebst N M, würde hinreichend verlängert in der Durchschnittslinie der Spiegelfläche zusammentreffen, und der Winkel, den sie hier bilden würden, ist diejenige Gröſse, die man für unsern Fall statt ζ setzen muſs.

Es ist nicht schwer, die Abhängigkeit, in welcher dieser Winkel vom Neigungswinkel und von der Lage der Linie N M steht, bestimmt anzugeben. Setzt man den Winkel I Y M, den N M mit I H bildet, $= \chi$, so ist der statt ζ zu setzende Winkel gleich $\zeta . \cos \chi$, woraus man seine Gröfse für jeden bestimmten Werth von χ genau angeben kann.

Es ist indessen schon eine sehr einfache geometrische Betrachtung hinreichend, deutlich einzusehen, wie dieser Winkel nach Verschiedenheit der Lage von A M N E seine Gröfse ändert. Denkt man sich in Y eine winkelrechte Linie, legt durch sie eine Ebene, welche beide Spiegelflächen durchschneidet, und drehet diese um jene Linie, wie um eine Achse, so ist klar, dafs die Durchschnittslinien dieser Ebene mit den Spiegelflächen den gröfsten Winkel einschliefsen, wenn die Ebene gegen die Durchschnittslinie der Spiegelfläche winkelrecht steht, also eine Ebene des Neigungswinkels ist. Dreht man sie aus dieser Lage, so nimmt der Winkel der Durchschnittslinien ab, und wird $= 0$, wenn die Ebene der Durchschnittslinie der Spiegelflächen parallel wird.

Anwendung der vorgetragenen Theorie auf die Beurtheilung der Fehler eines vorliegenden Spiegels.

§. 36. Die vorgetragene Theorie ist im Grunde so vollständig für Spiegel mit kleinen Neigungswinkeln, dafs man für jeden völlig bestimmten Fall die Resultate der Brechung und Zurückwerfung der Stralen vermittelst unserer Formeln ganz bestimmt würde angeben können. Wir würden uns aber in eine ermüdende Weitläuftigkeit von Entwickelungen einlassen müssen, wenn wir die Erscheinungen der Nebenbilder nach allen dabei vorkommenden Abänderungen durchgehen wollten. Wir begnügen uns daher, den aufmerksamen Leser in den Stand gesetzt zu haben, dafs er unter allen Umständen die Erscheinungen, welche ein unparalleler Spiegel zeigen mufs, bestimmt angeben könne, beschränken uns übrigens lediglich auf eine nähere Erörterung derjenigen Klasse von Erscheinungen, nach welchen man sehr leicht über die Güte oder Fehlerhaftigkeit eines Glasspiegels im Ganzen, und an jeder einzelnen Stelle, bestimmt urtheilen kann.

§. 37. Man wähle einen Gegenstand, der wegen eines lebhaften Abstichs seines Lichtes gegen den Hintergrund dem Auge recht deutlich und scharf begränzt erscheint, z. B. den Giebel eines Hauses, der den Himmel zum Hintergrund hat. Er sey so weit entfernt, daſs man das zweite Glied der Formel für ξ ganz aus der Acht lassen kann. Daſs hierzu eine Entfernung von zweihundert Fuſs völlig hinreiche, läſst sich leicht zeigen. Denn setzt man z. B. die Dicke des Spiegels $\delta = 0,2$ Zoll, $a + b = 2400$ Zoll, $r = 1$, da man unter den hier zu betrachtenden Umständen nicht leicht mehr als ein Nebenbild wahrnehmen kann; ferner tang $\psi . \cos \varphi < 0,4$, so ist das ganze zweite Glied $< 0,000266$ — d. i. kleiner als $55''$, eine Kleinigkeit, welche das bloſse Auge unter den angenommenen Umständen nicht mehr unterscheiden kann. Der Gegenstand kann sogar beträchtlich näher liegen, indem wir die gedachte Entfernung bloſs wählen, um die theoretische Betrachtung einfacher zu machen. Eine geringere Entfernung ändert nur ein wenig die Gröſse, nicht die Art der Erscheinungen ab. Wir setzen also

$$\xi = \frac{2\, n\, a \cos \psi}{(a + b) \cos \varphi}\, \zeta,$$

indem wir auch in diesem Gliede $r = 1$ setzen können. Will man sich zu mehrerer Anschaulichkeit die Formel auf bestimmte Zahlen bringen, so setze man $n = \frac{3}{2}$, $\varphi = 75^0$, so wird $\frac{\cos \psi}{\cos \varphi}$ ziemlich genau $= 3$. Setzt man ferner $a = 2400$ Zoll, so kann man $\frac{a}{a + b} = 1$ setzen, weil das Auge nahe bei dem Spiegel ist. Für diesem Werthe wird die Entfernung des ersten Nebenbildes vom Hauptbilde $\xi = 9 \zeta$; oder wenn man $\zeta \cos \chi$ statt ζ setzt,

$$\xi = 9 \zeta . \cos \chi,$$

wo χ der Winkel ist, den die Ebene des Neigungswinkels mit der Ebene des Hauptbildes macht.

Man denke sich nun einen unparallelen Spiegel auf einer ungefähr horizontalen Fläche so vor sich hingelegt, daſs das Licht des Gegenstandes ungefähr unter einem Winkel von 15^0 auf den Spiegel falle, also das Hauptbild im Spiegel eben so tief unter dem Spiegel erscheine. Eine durch das Auge und den betrachteten Gegenstand winkelrecht auf dem Spiegel gefüllte Ebene, ist nun die Ebene des Hauptbildes, die wir uns als unveränderlich denken.

Der Spiegel liege nun zunächst so, daſs diese Ebene die Durchschnittslinie der Spiegelfläche winkelrecht schneide, so fällt sie mit einer Ebene des Neigungswinkels zusammen. Die Seite, wo die Spiegelflächen zusammenlaufen, sey dem Gegenstand zugekehrt, so ist $\chi = o$, $\cos \chi = 1$ und $\xi = + 9\, \zeta$; d. h. das erste Nebenbild des Gegenstandes wird in der neunfachen Gröſse des Neigungswinkels über dem Hauptbilde, also auf der Seite des Gegenstandes, erscheinen.

Man gebe nun dem Spiegel auf seiner Unterlage eine Wendung nach der linken Seite (oder in der Richtung, in welcher sich die Planeten bewegen), von ungefähr 45°, so ist cos χ ungefähr 0,7, also $\zeta = + 6,3\, \zeta$. Folglich ist das Nebenbild nun näher an das Hauptbild gerückt, wird aber nicht mehr in der Ebene des Hauptbildes, sondern auf der linken Seite neben derselben erscheinen.

Man gebe dem Spiegel noch eine Wendung von 45°, so wird die Durchschnittslinie seiner Fläche der Ebene des Hauptbildes parallel liegen, und zwar linker Hand. Jetzt ist $\chi = 90°$, also $\cos \chi = o$, und daher auch $\xi = o$; d. h. das Nebenbild wird in der Ebene des Hauptbildes gar keine Entfernung von diesem haben, sondern es wird neben demselben in einer kleinen Entfernung auf der Seite liegen, wo die Spiegelflächen zusammenlaufen, also linker Hand.

Man gebe dem Spiegel noch eine Wendung von 45°, so ist $\chi = 135°$, also cos χ ungefähr $= - 0,7$; folglich $\xi = - 6,3\, \zeta$. Das Zeichen Minus deutet an, daſs nun das Nebenbild unter dem Hauptbilde, also auf der Seite des Auges stehe, aber noch immer linker Hand.

Eine neue Wendung von 45° macht $\chi = 180°$, also $\cos \chi = - 1$, und $\xi = - 9\, \zeta$. Das Nebenbild wird also nun gerade unter dem Hauptbilde auf der Seite des Auges in seiner gröſsten Entfernung stehen.

Man übersieht ohne Schwierigkeit, daſs, wenn man mit den Wendungen des Spiegels in derselben Ordnung fortfährt, das Nebenbild nunmehr auf der rechten Seite sich rückwärts fortbewegen werde, so wie es sich vorher links vorwärts bewegt hat. Es wird also eine Art von eliptischer Bewegung um das Hauptbild machen.

Beobachtet man hierbei die Regel, daſs man das Hauptbild immer auf derselben Stelle des Spiegels betrachtet, so darf man den Cyclus dieser

Erscheinungen nur ein einziges mal durchlaufen, um ein richtiges Urtheil über die Lage der Spiegelfläche an dieser Stelle zu fällen. Denn da das Nebenbild immer auf der Seite bleibt, wohin die Spiegelflächen zusammenlaufen, so erhält man schon bei dem ersten Blick eine ungefähre Vorstellung von ihrer Lage. Macht man aber den Cyclus durch, und bemerkt genauer die Stelle, wo das Nebenbild gerade über oder unter dem Hauptbilde steht, welches immer mit seiner gröſsten Entfernung zusammentreffen muſs, so kann man sehr bestimmt die Richtung angeben, nach welcher die Flächen an dieser Stelle convergiren.

Wäre der beobachtete Gegenstand beträchtlich näher, so daſs man das zweite Glied der Formel nicht aus der Acht lassen dürfte, so ändert dieses nichts weiter in den Erscheinungen, als daſs die gröſsten Entfernungen über und unter dem Hauptbilde ungleich werden, und zwar wird die erste die kleinere seyn.

§. 38. Durch Beobachtungen dieser Art kann man aber nicht nur über die Abweichung des Spiegels vom Parallelismus zuverlässig urtheilen, sondern, was besonders zu merken, auch über die vollkommene Ebenheit seiner Flächen. Denn an einer Stelle, wo eine oder beide Flächen uneben wären, fällt begreiflich auch der Parallelismus weg; indem selbst concentrische Kugelflächen nur in solchen Punkten, die in einem gemeinschaftlichen Halbmesser liegen, nicht aber in andern Richtungen, als parallel betrachtet werden können. Daher hat es seine unstreitige Richtigkeit, daſs zwei Flächen, die überall völlig parallel sind, auch überall völlig eben seyn müssen.

Es ist also sichtbar, daſs es einem Künstler, der diese Prüfungsart begriffen hat, und dem es nur sonst nicht an Gewandheit der Hand und an Besonnenheit bei der Arbeit fehlt, nicht fehlschlagen könne, einen höchst vollkommenen Parallelspiegel zu verfertigen, da er jeden Fehler wahrnehmen kann, sobald er seinem Spiegel nur eine halbe Politur gegeben hat.

§. 39. So wie es nunmehr leicht ist, jeden Fehler eines Spiegels während der Arbeit zu entdecken, eben so leicht ist es, den Grad der Vollkommenheit eines fertigen Spiegels zu erkennen.

Sind nämlich die Flächen eines belegten Glasspiegels vollkommen eben und parallel, so ist aus der vorgetragenen Theorie erweislich, daſs das

Bild

Bild eines Gegenstandes, der nur mehrere hundert Fuſs entfernt ist, z. B. das Zifferblatt einer etwas entfernten Uhr, vollkommen scharf und ohne alle Spuren eines Nebenbildes erscheinen müsse, wenn man es in allen Stellen des Spiegels vermittelst eines stark vergröſsernden Fernrohrs betrachtet.

Auch mit einer unbelegten Platte kann diese Prüfung vorgenommen werden, wobei man sie zur Verstärkung des von der unteren Fläche reflectirten Lichtes allenfalls auf Quecksilber legen kann.

Die Gläser, welche mir Herr Duve geliefert hat, halten vollkommen diese scharfe Probe aus.

§. 40. Ich habe oben geäuſsert, daſs ein vollkommen paralleler Glasspiegel bei Winkelinstrumenten den Vorzug vor dem Metallspiegel verdiene. Der Grund dieser Behauptungen ist schon im Vorhergehenden dargelegt. Eine sehr geringe Abweichung von der vollkommenen Ebenheit bei einer einzigen Spiegelfläche ist ungemein schwer wahrzunehmen, kann aber doch bei genauen Winkelinstrumenten beträchtliche Fehler verursachen. Dagegen bietet die doppelte Spiegelung der Glasflächen, wie wir gesehen haben, ein sicheres Mittel dar, jede Abweichung von der vollkommenen Ebenheit wahrzunehmen.

§. 41. In Rücksicht des Technischen bei Verfertigung von Parallelspiegeln muſs ich noch ein Paar Bemerkungen hinzufügen.

Alles was man als Handgriffe der englischen Künstler bei dieser Arbeit anzuführen pflegt, z. B. mehrere Spiegel auf einmal zu schleifen, und ihnen von Zeit zu Zeit eine veränderte Lage gegeneinander zu geben, oder einen etwas groſsen Spiegel zu schleifen, und diesen in Stücke zu zerschneiden, und dergleichen mehr, hat wenigstens Herr Duve bei seinen Versuchen nicht zweckmäſsig gefunden. Er schleift seine Spiegel gerade in der Gröſse, die sie erhalten sollen, aus freier Hand, und hat sich dabei nur mit guter Ueberlegung gewisse einfache Vorrichtungen und Handgriffe erdacht, die ihn zum Zweck führen.

Der Zufall hat bei seinen Versuchen noch zu einer nicht unwichtigen Beobachtung Veranlassung gegeben. Er hatte ein sehr vollkommenes Parallelglas von mehr als vier Quadratzollen verfertigt. Durch einen Zufall brach ein Stück davon ab, und die Schärfe der Bilder war verloren.

Es läſst sich von dieser Erscheinung schwerlich ein anderer Grund denken, als daſs bei dem Zerbrechen eine veränderte Spannung in dem Innern der Masse entstanden, und dadurch die vollkommene Ebenheit der Flächen verloren gegangen sey. Es folgt aber daraus, daſs man bei dem Zerschneiden eines Glasspiegels sich nicht auf eine unveränderliche Beschaffenheit der Flächen würde verlassen können.

Ueber

die wahre Epoche der grofsen von Herodot erwähnten Sonnenfinsternifs am Flusse Halys.

Von Herrn Jabbo Oltmanns,
Correspondenten der Akademie *).

Der berühmte französische Sprachforscher, Herr Larcher, hat vor einigen Jahren eine Uebersetzung des Herodot veranstaltet, und sie mit schätzbaren Noten und Commentarien begleitet. Er hat es sich vorzüglich angelegen seyn lassen, die Zeitrechnung der alten Assyrer, Meder und Lydier zu verbessern, und die Begebenheiten jener weitentfernten Zeit in ihrer natürlichen Folge und Ordnung darzustellen. Je gröfser sein Ansehen bei den Franzosen ist, desto mehr mufste es sie befremden, Herrn Volney in einer besondern Schrift **) auftreten zu sehen, um das von Larcher mühsam entworfene chronologische System des Herodot zu verbessern, und dadurch die Alterthumsforscher auf das Schwankende und Ungewisse aufmerksam zu machen, das in einigen Punkten unserer Zeitrechnung noch statt finden mag.

Herodot, der Vater der Geschichte, gedenkt nämlich einer Schlacht, die ungefähr 600 Jahr vor Christi Geburt zwischen den Lydern und Medern vorgefallen ist, während welcher sich der Tag in Nacht verwandelt haben soll.

Diese merkwürdige Stelle wird nun von Volney zur Grundlage seines ganzen neuen Systems angenommen, in der gewifs richtigen Voraussetzung, dafs jene Tagesverdunkelung durch den Vortritt des Mondes vor der

*) Vorgelesen den 26ten November 1812.

**) *Supplément à l'Hérodote de Mr. Larcher, par C. F. V. (Volney). Paris* 1808. 8.

Sonne bewirkt worden sey. Thales von Milet hatte den Ioniern das Jahr und den Tag, an welchem sie sich zutragen sollte, vorausgesagt; daher auch diese Finsternifs unter dem Namen der Thalesschen in der Geschichte eben so bekannt geworden, als sie durch ihre Folgen ewig denkwürdig geblieben ist: denn die streitenden Völker legten, durch die plötzliche Verschwindung des Taggestirns erschreckt, die Waffen nieder, und ihre Fürsten schlossen ein Freundschaftsbündnifs, das durch die Heirath ihrer Kinder noch mehr befestigt werden sollte. Von dieser Epoche datirt sich das Geburtsjahr des Welteroberers Cyrus, und mit ihm die Epoche der Gründung seiner grofsen persischen Monarchie.

Eine Menge von Gelehrten, von Cicero's bis auf unsere Zeit, hat sich daher bemüht, das Datum der merkwürdigen Finsternifs zu bestimmen. Cicero und Plinius setzen sie in das Jahr 584; Newton, Riccioli, Dodwell und andere pflichten dieser Meinung bei; Usher versetzt sie in 601, Calvisius in 608; Costard und Stuckeley, die eigene Rechnungen darüber anstellten, glaubten, das Jahr 604 dafür annehmen zu müssen. Herr Larcher folgt aber Petavius, Marsham's und mehrerer anderer Meinung, und setzt die von Thales vorherverkündete Finsternifs in das Jahr — 597, während sein Gegner, Herr Volney, fest behaupten will, dafs sie sich 28 Jahr früher, im Jahre — 625, begeben haben müsse. Letzterer befragt nämlich die von Pingré entworfenen Finsternifstafeln, und findet auf diese Weise, indem er die Zeit der denkwürdigen Schlacht auf zwei Jahre genau zu kennen glaubt, die Epoche, deren Grund und Zuverlässigkeit jetzt in der Abhandlung näher beleuchtet werden soll, welche ich einer hochverehrten königlichen Akademie der Wissenschaften zur Prüfung vorzulegen die Ehre habe.

Der grofse Unterschied von beinahe drei Decennien, bei einer so wichtigen Begebenheit, mufste die Gelehrten allerdings befremden, und es schien der Mühe wirklich werth zu seyn, durch neue Untersuchungen darzulegen, welche von beiden Meinungen, Larcher's oder Volney's, der Wahrheit sich am meisten nähern mögte. Die Zeitrechnung durch die Sternkunde zn verbessern, wurde von jeher für das sicherste Mittel gehalten, und wenn, astronomischen Tafeln zu Folge, 625 vor Christi Geburt eine totale, für den Horizont des Schlachtfeldes sichtbare, Sonnenfinsternifs vorgefallen seyn könnte, so würde das von Volney aufgestellte veränderte System des Herodot das Gepräge der Zuverlässigkeit unverkennbar an sich tragen: vorausgesetzt, dafs, so wenig in den nächstvorhergehenden als in den nächstfolgenden Jahren, ähnliche Phänomene für den Horizont des Schlachtfeldes statt gefunden haben.

Vor 4 Jahren, als ich zur Hauptstadt des französischen Königreichs reisete, um dort die Bearbeitung von Humboldt's wichtigen astronomischen Arbeiten zu vollenden, wurde der Streit über das wahre Datum der denkwürdigen Schlacht von den beiden Gelehrten, Larcher und Volney, mit neuen Waffen und verdoppeltem Eifer fortgesetzt. Pariser Astronomen hatten sich, aber nur vorläufig, mit der Berechnung jener Finsternifs beschäftigt. Delambre, Secretair des französischen National-Instituts, der mich mit seiner Freundschaft beehrte, ersuchte mich deswegen, die Finsternifs vom 3ten Februar — 625 nach den neuesten Elementen zu berechnen, um zu sehen, ob sie, wie Volney behauptete, auf dem Schlachtfelde sichtbar gewesen seyn könne. Ich habe Delambre's Schreiben beigefügt, damit es zum Beweise dienen möge, wie sehr man sich damals für einen, den Chronologen allerdings wichtigen Gegenstand interessirte.

Es schien mir gleich bei flüchtiger erster Ansicht der Sache, als wenn Volney's Meinung nur auf schwachen Gründen beruhe: denn nach Pingré's, seines Gewährsmannes, Rechnung, fiel die Zeit der Zusammenkunft so nahe an den Sonnenaufgang, dafs nicht mehr als eine halbe Stunde zwischen diesen beiden Momenten verfliefsen konnte. Wir wissen aber, dafs für unsere schiefe Halbkugel die scheinbare Conjunction gewöhnlich der wahren vorangeht. Die Fehler der älteren noch unvollkommenen Mondstafeln konnten daher leicht eine Sonnenfinsternifs anzeigen, die für die Zeit so wenig als für den Ort des merkwürdigen Treffens sichtbar gewesen ist.

Partielle Finsternisse, selbst von beträchtlicher Gröfse, können das Datum jenes folgenreichen Tages nicht bestimmen, weil sie weder selten sind, noch irgend eine Lichtabnahme bewirken, daher auch der streitenden Menge in der Hitze des Kampfes den panischen Schrecken wohl nicht eingeflöfset haben würden. Blofs gänzliche, einige Zeit währende, Verfinsterungen des Taggestirns scheinen zur Festsetzung jener Epoche geeignet zu seyn.

In der That sind, nach dem einstimmigen Zeugnisse aller Beobachter, die Umstände, welche totale Verfinsterungen der Sonne begleiten, auch nur von der Art, dafs sie die Menschheit, zumal den wilden Krieger, mit Schauder und Schrecken erfüllen. Die Finsternifs scheint gleichsam gröfser als bei Nacht zu seyn; die ganze plötzlich verödete Natur ist in schrecken-dem Dunkel gehüllt; ein Gefühl, wie von ängstenden Ahndungen, ergreift das Gemüth; alle irdischen Gegenstände sind in einer zitternden Bewegung. — So beschreiben Ulloa, Halley, Clavius, la Hire und de Witt das furchtbar-majestätische Schauspiel der ganz verfinsterten Sonne.

Angenommen also, daſs nur solche Erscheinungen (oder doch wenigstens sehr groſse Sonnenfinsternisse *)) die nächtliche Kampfscheu der am Halys streitenden Völker bewirken konnten, kam es nun darauf an, zu sehen, ob die von Volney dazu vorgeschlagene Finsterniſs diese Eigenschaften an sich haben konnte.

Herr Volney setzt das Schlachtfeld in 38° östl. Länge von Paris, und unter 39° nördl. Breite, zwischen Erzerum und Diarbekir. Hiefür finde ich, nach den neuesten Sonnen-, und meinen vor 5 Jahren bekannt gemachten Mondstafeln, folgende Elemente, wobei, auf Delambre's Ersuchen, Bouvard's Aenderung der 100jährigen Mondknoten-Bewegung berücksichtigt wurde, die aber einen nur geringen Einfluſs auf die Conjunctionszeit der Gestirne äuſsert.

— 625 den 3ten Februar $4^U\,26'\,18''$ Morgens Mittl. Zeit $= 4^U\,8'\,49''$ W. Zeit zu Paris, die wahre Conjunction ☽ et ☉ in $10^Z\,7°\,46'\,17''$.

Nördl. ☽ Breite $0°\,40'\,33'',8$, horizontale aequat. Parallaxe ☽ $55'\,54'',9$, Halbmesser des ☽ $15'\,15'',8$, stündliche Bewegung ☽ $31'\,46'',3$, für die folgende Stunde — $0'',73$, stündliche Abnahme der ☽ Breite $2'\,55'',2$.

Halbmesser der ☉ $16'\,7'',8$, horizontale Parallaxe ☉ $8'',81$, stündliche Bewegung der ☉ $2'\,29'',66$.

Deswegen kann die ☉ Finsterniſs nirgends total gewesen seyn, weil der ☽ Durchmesser $1'\,43''$ kleiner als der ☉ Durchmesser war.

Es kann dort keine Finsterniſs statt gefunden haben: denn als die Sonne um $7^U\,4'\,41''$ über das Schlachtfeld aufging, standen die Ränder beider Gestirne schon $14'$ auseinander, und entfernten sich noch mehr, so wie die Sonne stieg. Soll ferner, auf dem von Volney bezeichneten Schlachtfelde, nur eine Ränderberührung bei ☉ Aufgang statt gefunden haben, so geben

*) Am 23sten September 1699 war zu Greifswalde nur noch der 180ste Theil der Sonne unverfinstert ($11''$ im Bogen) Dessenungeachtet war die Dunkelheit daselbst so groſs, daſs man weder zum lesen noch zum schreiben sehen konnte. Aber bei der Verfinsterung von 11 Zoll unterschied man alle irdischen Gegenstände noch eben so deutlich, als am schönsten Tage. (*Mém. de l'Académie pour* 1700 *et* 1706.)

die Tafeln die Mondslänge schon um 14 Minuten zu grofs an; ich sage: bei ⊙ Aufgang, denn die Fehler erscheinen desto gröfser, je höher wir die ⊙ über dem Horizont annehmen.

Soll dort, bei ⊙ Aufgang, eine centrale ringförmige Finsternifs sichtbar gewesen seyn, so müssen wir entweder die aus den Tafeln berechnete ☽ Länge um 41 bis 42 Minuten verkleinern, oder die Secularbewegung dieses Gestirns um 1′ 42″ vergröfsern. Ueberhaupt, je weiter wir das Schlachtfeld (von 38° Länge und 39° n. Breite an gerechnet) nach Westen rücken, desto gröfser werden die Fehler unserer ☽ Tafeln werden.

Sollen endlich die Ionier, in ihrem Vaterlande, das Ende der von Thales vorherverkündeten ⊙ Finsternifs nur auf einen Augenblick haben sehen können, so mufs die berechnete ☽ Länge um 34′ falsch seyn. Der Fehler würde auf fünfviertel Grade anwachsen, wenn die Sonne dort ringförmig verdunkelt aufgegangen wäre. Die Finsternifs ist für die Tibetaner und West-Asiaten im Abnehmen.

Wir haben bisher mit Volney, und ihm zu Gunsten, den Ort des denkwürdigen Treffens zwischen Erzerum und Diarbekir angenommen. Ein aufmerksames Lesen des Herodot dürfte uns aber geneigt finden lassen, jenen Ort etwas weiter nach Nord-Westen an den Halys hinaufzurükken. Ich stellte also den parallactischen Calcul für 36° östl. Länge und 40° n. Breite an, und fand, dafs, wie die ⊙ dort um $7^{U} 4' 1''$ W Zeit aufgegangen, die Finsternifs bereits seit einer halben Stunde vorüber war, weil die Ränder der Gestirne schon 14′ weit auseinander standen.

Endlich suchte ich noch die Grenze zu bestimmen, wo man bei Aufgang der ⊙ noch die augenblickliche letzte Berührung der Ränder sehen konnte, und fand für die verschiedenen Parallelen folgende ihnen entsprechende Längen, welche auf die meiner Abhandlung beigefügte Charte eingetragen worden sind.

Parallel.	östl. Länge v. Paris.
37° nördlich.	42° 44′
38°	42° 56′
39°	43° 8′
40°	43° 21′
41°	43° 32′

Vorausgesetzt, daſs die berechneten Monds- und Sonnen-Oerter von den Tafeln richtig angegeben worden: so ist die Sonne allen östlich von dieser Grenze liegenden Ländern in ihrer ganzen Klarheit aufgegangen, und die Verfinsterung unter ihrem Horizonte beendigt. Nach Herodot's Bericht wird es aber sehr wahrscheinlich (nach Volney ist es gar gewiſs), daſs das Treffen 5 bis 7 Längen-Grade westlich von jener Grenze, nämlich am Halys oder Euphrat, geliefert worden sey; eine Annahme, welche folgende Betrachtungen allerdings zu rechtfertigen scheinen.

Herodot sagt ausdrücklich, daſs die Finsterniſs, welche die Meder und Lydier schreckte, diejenige gewesen, welche Thales den Ioniern vorherverkündet hatte. Sollte der Philosoph ihnen eine in Ionien unsichtbare Verdunkelung des Taggestirns vorausgesagt haben? und dürfte sein dadurch erlangter Ruf nicht dafür bürgen, daſs sie in seinem Vaterlande beobachtet worden? Deswegen muſs die Sonne am Halys und in Ionien zugleich verfinstert gewesen seyn.

Herodot sagt ferner, daſs während der Schlacht der Tag sich in Nacht verwandelt habe. Deswegen können weder breite — ringförmige, noch kleine partielle Verfinsterungen das Datum jener merkwürdigen Schlacht geradezu bestimmen, da wir oben gesehen, daſs selbst bei 11zölligen Finsternissen das Tageslicht noch ungeschwächt bleibt. Rücken die Tafeln daher die Grenze auch etwas zu weit nach Osten, so wird sie doch immer noch viel zu weit vom Halys entfernt bleiben. — Aber auch aus Herodot's eigenem Texte scheint hervorzugehen, daſs die folgenreiche Schlacht weit nach Westen von der auf unserer Charte bezeichneten Grenze geliefert worden sey. Denn Phraortes, Cyaxares Vorgänger auf dem Throne, hatte bereits Cappadocien und alle Länder bis an den Halys erobert. Cyaxares war eben so glücklich, sie zu behaupten, und noch zu Crösus Zeiten machte der Halys die Grenze zwischen dem Gebiete der Meder und Lydier. Herodot räumt ferner ein, daſs beide streitenden Völker in diesem Kriege bis zu jener nächtlichen Schlacht gleich glücklich gewesen. Wie sollte nun der Krieg durch eine weit östlich von Cappadocien gelieferte Schlacht beendigt worden seyn, und Alyattes, der doch zu Sardes residirte, bis dahin haben vordringen können? Auch glaubt man aus Herodot's Erzählung schlieſsen zu dürfen, daſs Cyaxares sich nach der entscheidenden Schlacht auf Ninus — gen Osten — zurückgezogen habe.

Es

Es scheint mir daher erwiesen zu seyn, dafs jene, am 5ten Februar — 625 vorgefallene Sonnenfinsternifs nicht die von Thales verkündete gewesen; ferner, dafs das von Volney aufgestellte chronologische System des Vaters der Geschichte, wenigstens durch die Sternkunde, nicht bestätigt wird. Eben so unhaltbar ist aber auch die von Larcher unternommene Verbesserung dieses Systems, welche sich auf die Meinung stützt, dafs die Finsternifs sich 597 Jahr vor Christi Geburt zugetragen habe. Denn in diesem Jahre fielen, wie wir bald sehen werden, keine am Halys sichtbare Verfinsterungen der Sonne vor.

Da nun weder das Jahr — 625 noch — 597 Sonnenfinsternisse von der erforderlichen Beschaffenheit darbieten, so hielt ich es für doppelt interessant, und mein verehrungswürdiger Freund, von Humboldt, forderte mich dazu auf, die benachbarten und zwischenliegenden Jahre, in Hinsicht auf die Finsternisse, einzeln zu untersuchen, ob sich nicht eine darbieten würde, die von den erwünschten Umständen völliger Dunkelheit und Sichtbarkeit für das Grundgebiet der streitenden Völker begleitet gewesen wäre.

Die Resultate dieser langwierigen Rechnungen sind in der Tabelle enthalten, die meine Arbeit begleitet. Ich habe darin die Grenzen von 584 bis 630 gewählt, weil drei Chronologen der neueren Zeit, Volney, Larcher und Fortia d'Urban, noch um 41 Jahre in ihren Meinungen über das Datum der Thalesschen Finsternifs von einander abweichen.

Der Bibliothekar der Pariser Genovevischen Sammlung, Herr Pingré, hat freilich die in den ersten Jahrhunderten vor Christi Geburt vorgefallenen Sonnenfinsternisse lange vor mir berechnet; doch ist dies nur nach alten Tafeln, und selbst mit Vernachlässigung der Secular-Gleichungen geschehen. Die bewundernswürdige Vollkommenheit unserer jetzigen Planeten-Tafeln schien für den gegenwärtigen Endzweck eine Prüfung des Pingréschen Prognosticons zu rechtfertigen, und ich darf glauben, dafs sie uns jene Thalessche Finsternifs genau genug darstellen können, wenn wir gleich darum dritthalbtausend Jahre in die Vergangenheit zurückgehen müssen.

Nach dieser Darstellung werde ich nun zuvörderst die verschiedenen Meinungen meiner Vorgänger näher zu beleuchten wagen, und dann die von mir gefundene Epoche der Tagsverdunkelung mit Gründen und Rechnungen zu befestigen suchen, die einzig und allein aus der Sternkunde hergenommen worden sind.

Sonnenfinsternifs von — 584.

Fortia d'Urban's Meinung *).

Newton setzt in seiner Chronologie die von Thales verkündete ⊙Finsternifs in das Jahr — 584. Costard und Stuckeley, zwei Britten, haben sich zwar schon gegen die Meinung ihres grofsen Landsmannes erklärt; um so mehr glaubte ich aber auch die ihrige etwas näher beleuchten zu müssen. Ich fand nach den neuesten Sonnen- und meinen eigenen Mondtafeln folgende Resultate, welchen ich, zu besserer Uebersicht, die von Stuckeley herausgebrachten beifügen will.

Elemente.	Nach meiner Rechnung.	Nach Costard und Stuckeley.	
Zeit der wahren Conjunction	$28^{Mai}\ 2^{U}\ 48'\ 48''$ m. Z.	$28^{Mai}\ 4^{U}\ 44'\ 36''$ w. Z.	Pariser Uhr.
Länge der Gestirne	$1^{Z}\ 29^{\circ}\ 41'\ 26'',1$	$1^{Z}\ 29^{\circ}\ 0'\ 44''$	
Nördliche Mondsbreite	$0^{\circ}\ 12'\ 35'',5$	$0^{\circ}\ 20'\ 54''$	
Parallaxe des Mondes	$1^{\circ}\ 1'\ 12'',2$	$1^{\circ}\ 1'\ 4''$	

Ferner: Stündliche Bewegung des ☽ $37'\ 51'',6$; für die folgende Stunde $+\ 0'',23$. Stündliche Bewegung in der Breite $3'\ 29'',93$ zunehmend. Stündliche Bewegung der ⊙ $2'\ 22'',99$. Halbmesser der Sonne $15'\ 45'',50$. Halbmesser des ☽ $16'\ 42'',53$. Hiermit finden wir für 36° östl. Länge und 40° nördl. Breite:

Elemente der Rechnungen	Mittlere Zeit. $6^{U}\ 40'\ 0''$	Auf dem Schlachtfelde. $6^{U}\ 43'\ 0''$.
Unterschied der Längenparallaxen	$53'\ 53''$	$53'\ 17''\frac{1}{2}$
Scheinbarer Breitenunterschied	$11'\ 33''$ südl.	$11'\ 36''\frac{1}{2}$ südl.
Scheinbarer ☽ Halbmesser	$16'\ 43'',9$	$16'\ 43'',9$

Scheinbare Conjunction der Gestirne $6^{U}\ 42'\ 25''$ M. Zeit, eine halbe Stunde vor ⊙Untergang. Gröfse der Verdunkelung 7 Zoll $\frac{55}{100}$.

*) *Tableau historique et géographique Vol. II. Paris* 1811.

Der Schatten geht überhaupt, weit südlich vom Halys, im unbekannten Nordafrika und Aegypten (bei Suez) über der Erde hinweg.

Sonnenfinsterniſs von — 597.

Larcher's Meinung *).

In diesem Jahre begaben sich 4 Verfinsterungen an der Sonne, wovon aber nur zwei auf der nördlichen Halbkugel sichtbar waren.

Der zweite ecliptische Neumond fiel nämlich auf den 23sten Februar, 7 Uhr Abends, da die nördliche ☽ Breite 1° 14′ war. Die kleine Sonnenfinsterniſs kam also nur in Labrador und dem unbekannten nördlichen Amerika zu Gesichte.

Der dritte ecliptische Neumond traf am 21sten Juli zwischen 8 und 9 Uhr Abends ein, bei 1° 20′ nördl. ☽ Breite, und brachte eine kleine ☉ Finsterniſs, die nur im nordöstlichen Sibirien, in Grönland und Island zu sehen war.

Sonnenfinsterniſs von — 602.

Costard und Stuckeley's Meinung **).

Costard und Stuckeley glaubten, die Thalessche Finsterniſs in das Jahr — 602 versetzen zu müssen, weil, ihrer Rechnung nach, der Schatten Antiochetta, Erzerum und die Gegend von Kars berührte. Halley's alte und meine neuen Tafeln geben folgende Resultate:

Elemente der Rechnung.	Nach meinen Tafeln.	Costard und Stuckeley	
Zeit der wahren Conjunction	$17^{\text{Mai}}\,19^{U}\,15'\,59''$ m.Z.	$17^{\text{Mai}}\,20^{U}\,51'\,41''$ w.Z.	Pariser Uhr.
Ort des Mondes und der ☉	1^{Z} $19°\,13'\,59''$	1^{Z} $19°\,12'\,0''$	
Wahre nördliche ☽ Breite	$0°\,17'\,1'',4$	$0°\,25'\,17''$	
Aeq. Parallaxe des ☽	$1°\,1'\,15'',9$	$1°\,1'\,0''$	
Halbmesser des Mondes	$16'\,43'',4$	$16'\,45''$	
Halbmesser der Sonne	$15'\,46'',4$	$15'\,49''$	

*) In seiner Uebersetzung des Herodot.

**) *Philosophical Transactions for the year* 1753. *p.* 17 *et* 221.

Ferner:

Stündliche Bewegung ☽ 37′ 54″,9, stündliche Zunahme der Breite 3′ 30″,0. Stündliche Bewegung der Sonne 2′ 23″,40, Aeq. Parallaxe der ☉ 8″,81; folglich: für 36° östl. Länge und 40° nördl. Breite (nach unsern Elementen).

— 602. am Halys den 17. Mai, 21^U 0′0″ M. Zeit.

Unterschied der Längenparallaxen	23′ 8″,6
Unterschied der scheinbaren Breiten	20′ 2″,5 südl.
Unterschied der scheinbaren Längen	0′ 7″,7 ☽ west.
Scheinbarer ☽ Halbmesser	16′ 56″,6
Scheinbare Conjunction ☽ et ☉	21^U 0′ 14″ M. Zei
Gröſse der Finsterniſs	4 Zoll $\frac{8}{10}$

In Ionien 25° öst. Länge 38° 30′ n. Breite.
17. Mai 20^U 5′ 0″ M. Zeit.

Unterschied der Längenparallaxen	30′ 23″,0
Unterschied der scheinbaren Breiten	23′ 51″,2 südl.
Unterschied der scheinbaren Längen	0′ 11″,9 ☽ östl.
Scheinbarer ☽ Halbmesser	16′ 54″,2
Zeit der scheinbaren ☌ ☽ et ☉	20^U 4′ 40″, M. Z.
Gröſse der Verfinsterung	3 Zoll $\frac{36}{100}$

Die Finsterniſs erschien in Afrika, Arabien und an der persischen Grenze total.

Unter allen Sonnenfinsternissen, die wir bisher für den Zwischenraum der Jahre — 630 und — 585 untersucht haben, scheint keine gröſseren Anspruch auf die Tagesverdunkelung zu haben, als die, welche am 30sten September 609 Jahr vor Christi Geburt vorgefallen ist. Denn diese war am Halysflusse total, und dort vom Anfang bis zu Ende zu beobachten. Wir berechneten, um dieses behaupten zu dürfen, nach unseren neuesten Sonnen- und Monds-Tafeln folgende geocentrische Stücke:

Sonnenfinsterniſs vom 30sten September — 609.

Die Mittl. Zeit der wahren Conjunction ☽ und ☉ 29. Sept. 20^U 24′ 27″ 7 oder 20^U 31′ 21′,2 wahre Zeit Pariser Meridians.

Wahrer Ort ☽ und ⊙ $6^z\ 0^\circ\ 1'\ 7'',6$.

Nördliche ☽ Breite $30'\ 9'',8$, in der folgenden Stunde + $3'\ 26'',5$, in der vorhergehenden — $3'\ 26'',6$; horizontale Aequatorealparallaxe $60'\ 48'',1$; Halbmesser ☽ $16'\ 35'',7$; stündliche Bewegung des ☽ $37'\ 24'',19$, in der folgenden Stunde + $0'',17$; Halbmesser der ⊙ $16'\ 10'',2$ und stündliche Bewegung $2'\ 30'',56$; hor. Parallaxe der ⊙ $8'',88$.

Hiermit finden wir, für den wahrscheinlichen Ort des Schlachtfeldes, 36° östl. Länge und 40° n. Breite, folgende Resultate:

Rechnungs-Elemente.	Mittl. Zeit $21^U\ 41'\ 6''$.	Mittl. Zeit $21^U\ 42'\ 6''$.
Wahre Länge der Sonne	$5^z\ 29^\circ\ 58'\ 18'',4$	$5^z\ 29^\circ\ 58'\ 20'',9$
Wahre Länge des Mondes	$5.\ 29^\circ\ 19'\ 6'',8$	$5.\ 29^\circ\ 19'\ 44'',2$
Wahre Breite des ☽ (nördl.)	$26'\ 17'',5$	$26'\ 20'',9$
Unterschied der Längenparallaxen	$+\ 38'\ 49'',9$	$+\ 38'\ 41'',3$
Unterschied der scheinbaren Breiten	$1'\ 1'',5$	$1'\ 1'',4$
Scheinbarer ☽ Halbmesser	$16'\ 47'',1$	$16'\ 47'',1$
Abstand von der scheinbaren ☌	☽ west. $21'',7$	☽ östl. $4'',6$

Scheinbare Zusammenkunft des ☽ und der ⊙ $21^U\ 41'\ 50''$ M. Z. des Schlachtfeldes.

Kürzester Abstand des Mittelpunkts $1'\ 1'',4$; lichter Theil der Sonnenscheibe $24'',5 = \frac{1}{79}$ Theil der ⊙. Setzen wir aber, mit Volney, das Schlachtfeld in die Gegend von Erzerum, 38° östl. von Paris und unter den 40° n. Breite, so finden wir, dafs die Sonne dort eine Zeitlang völlig ihres Lichtes beraubt worden ist.

Es war nämlich:

$21^U\ 52'\ 54''$ M. Z. = $21^U\ 59'\ 48''$ W. Zeit.

Wahre Länge der Sonne	$5^z\ 29^\circ\ 58'\ 28'',2$
Wahre Länge des Mondes	$5^z\ 29^\circ\ 21'\ 30'',2$
Wahre nördliche Mondsbreite	$26'\ 29'',3$
Unterschied der scheinb. Längenparall.	$36'\ 58'',2$
Unterschied der scheinbaren Breiten	nördl. $0'\ 23'',8$
Scheinbarer Mondshalbmesser	$16'\ 47'',5$
Unterschied der scheinbaren Längen	östl. $0'\ 0'',2$

Scheinbare ☌ ☽ und ☉ um $21^U\ 52'\ 54''$ auf dem Schlachtfelde.

Unterschied der scheinbaren Halbmesser $37'',3$ (☽ gröſser als ☉).

Unterschied der scheinbaren Breiten $25'',8$ = Entfernung der Mittelpunkte. Folglich fand am 30sten Sept. $9^U\ 52'\ 54''$ Morgens am Halysflusse eine gänzliche, einige Minuten währende, Verfinsterung der Sonne statt *).

Es kommt nun noch darauf an, zu zeigen, daſs diese Finsterniſs in Ionien sichtbar gewesen, weil die Worte Herodot's: „Thales hätte sie den Ioniern vorherverkündet," die Sichtbarkeit daselbst nothwendig zu machen scheinen.

Wir finden für Thales Vaterland folgende Resultate:

Rechnungs-Elemente.	25° Lg. $38^\circ\ 30'$ Br.	25° Lg. $39^\circ\ 0'$ n. Br.
Mittlere Zeit in Ionien	$20^U\ 44'\ 6''$	$20^U\ 44'\ 6''$
Wahre Länge der Sonne	$5^Z\ 29^\circ\ 57'\ 46'',0$	$5^Z\ 29^\circ\ 57'\ 46'',0$
Wahre Länge des ☽	5. 29. 11. 1, 9	$5.\ 29.\ 11'\ 1'',9$
Wahre nördl. Breite des ☽	$25'\ 33'',0$	$25'\ 33'',0$
Unterschied d. scheinb. Läng. Paral.	$47'\ 5'',5$	$47'\ 2'',0$
Unterschied der scheinb. nördl. Br.	$5'\ 18'',7$	$4'\ 49'',6$
Scheinbarer ☽ Halbmesser	$16'\ 45'',2$	$16'\ 45'',2$
Gröſse der Verdunkelung	10 Zoll $\frac{25}{100}$	10 Zoll $\frac{42}{100}$

Bevor ich schlieſse, muſs ich noch einem Einwurf begegnen, den man mir vielleicht machen dürfte: es können, mehrere Jahre früher oder später, ähnliche, gänzliche Verdunkelungen der Sonne für die Gegend am Halys statt gefunden haben, und es läſst sich daher noch nicht bestimmt behaupten, daſs die von — 609 die streitenden Lyder und Meder erschreckte. Wenn aber, wie in unserem Falle, die Zeitrechnung durch die Astronomie befestigt werden soll, so muſs erstere die Grenzen auszumitteln suchen, innerhalb welchen ein Phänomen sich ereignet haben mag. Dann erst hängt es von der Sternkunde ab, das schwankende Datum dieser Begebenheit näher zu bestimmen. Dieser Meinung bin ich bei meiner Arbeit gefolgt. Die

*) Triesneckers Tafeln, welche, wegen einiger Abweichung in den Secular-Bewegungen des ☽, seine nördl. Breite ungefähr $48''$ kleiner machen, würden ebenfalls, aber bei südl ☽ Breite, eine totale ☉ Finsterniſs geben, und auch da, wo Volney das Schlachtfeld hinsetzt, würde die Sonne ganz verfinstert.

Grenzen schienen von — 625 bis 584 ungewifs zu seyn. Meine Rechnung und die in den Tafeln enthaltenen Resultate zeigen, dafs zwischen diesen Jahren die Sonne zu keiner andern Zeit, als am 30sten Sept. 609, am Halys und in Ionien zugleich, dort total und hier beinahe ganz verfinstert erschienen. Deswegen wird man keinen Anstand nehmen, ihr vor allen andern zwischen diesen Jahren vorgefallenen Finsternissen zuzugestehen, den Tag in Nacht verwandelt, und dadurch das Friedensbündnifs zwischen den kämpfenden Völkern geschlossen zu haben.

Der Gegenstand schien mir einer näheren Untersuchung werth zu seyn. Epochen, wie jene, verdienen der Nachwelt aufbewahrt zu werden. Begebenheiten, wie die Welt sie selten erlebte, drängen sich mit reifsender Schnelle unseren Blicken vorüber. Ehrwürdige Reiche vergehen; auf ihren Trümmern erheben sich neue. Wenn einst die Kunde der Völker verhallt, wer kann es ahnden, ob dann die Zeit der Schlacht von Abukir und die Epoche von Nelson's Heldentod nicht eben so die Nachwelt beschäftigen werden, als die denkwürdige Schlacht an den Ufern des Halys unseren Chronologen Stoff zu weiteren Forschungen gegeben hat.

Uebersicht der in den Jahren — 630 bis — 584 vorgefallenen Sonnenfinsternisse, mit besonderer Rücksicht auf den Meridian und Parallel von Medien und Lydien.

Jahre vor Christi Geburt. Neumonde.	Gröſse der Verfinsterung.	Sichtbarkeit der gröſsten Phase.
[Mittl. Zeit zu Paris.]		
630 27. Mai	total	in den Südländern.
22. Octbr.	partial	im südlichen Eismeere.
21. Novbr.	partial	in den Nord-Polarländern.
629 17. April	total	im unbekannten Nordamerika.
11. Oct.	annular	in den Südländern, ☽ Breite 49′ südl.
628 6. April 7½ U. Morg.	annular	in Mittelafrika, Ostindien, südl. China, ☽ Breite 9′ nördl.
29. Septbr.	annular	in Westindien, Südafrika.
627 26. März	annular	in den Südländern, ☽ Breite 54′ südl.
19. Sept. 6 U. 23′ Ab.	total	im stillen Meere, nördl. Amerika, nördl. Ozean, ☽ Breite 34′ nördl. ☽ 16′ 31″; ☉ 16′ 8″.
626 16. März	partial	in den Süd-Polarländern.
10. August	partial	im südl. Eismeer.
9. Sept.	partial	in den nördlichen Polarländern.
625 3. Febr. 4 U. 26′ Morg.	annular	östlich vom caspischen Meere, in der Tartarei und China, ☽ Br. 40′ n. ☽ 15′ 16″, ☉ 15′ 7″.
31. Julius	annular	in den südlichen Ländern ☽ Breite 40′ südl.
624 23. Febr.	annular	an der Küste von Brasilien, Südafrika, Ostindien, ☾ 15′ 48″, ☉ 16′ 10″.
18. Julius	annular	im stillen Ocean, Westindien und dem Südmeer, ☽ Breite 2′ nördl.
623 12. Januar	total	in den Südländern ☽ Br. 34′ südl. ☽ 16′ 42″, ☉ 16′ 12″.
8. Julius	annular	im Nordmeer westlich von Island, Sibirien, östl. von Japan.
2. Decbr.	partial	an den Küsten von Norwegen, Sibirien.

622

Jahre vor Christi Geburt. Neumonde.		Gröfse der Verfinsterung.	Sichtbarkeit der gröfsten Phase.
622	2. Januar	partial	im südl. Eismeer, ☽ Breite 1° 24′ südl.
	29. Mai	partial	in den südl. Polarländern.
	27. Juni	partial	in den nördl. Polargegenden, ☽ Breite 1° 28′ nördl.
	22. Novbr. 7½ U. Ab.	annular	im stillen Meer, Nordamerika, Nordostküste von Amerika, ☽ Breite 44′ nördl.
621	18. Mai 4 U. Morg.	total	an der Nordküste von Neuholland, im indischen Ozean, Neuseeland, ☽ Breite 23′ südl. ☽ 16′ 28″, ⊙ 15′ 46″.
	11. Novbr.	annular	in den Tropenländern, ☽ Br. 5′ südl.
620	6. Mai 11 U. 49′ Ab.	total	im stillen Ozean, auf den ostind. Inseln, in Nord-Amerika, ☽ Br. 23′ nördl.
	31. Octbr. 9½ U. Ab.	annular	im südl. Eismeer, südl. von Neuholland, in Süd-Amerika, ☽ Br. 36′ südl.
619	28. März	partial	in den Südpolarländern, ☽ Br. 1° 27′ nördl.
	20. Sept.	partial	in den Nordpolarländern, ☽ Br. 1° 12′ nördl.
618	17. März	annular	in den Südländern, ☽ Br. 49′ südl.
	10. Sept. 11¾ U. Ab.	total	in der chinesischen Tatarei und im stillen Ozean.
617	6. März	annular	in den Südländern.
	30. Aug. 6 U. Ab.	total	an der Küste von Neuspanien, Westindien, bis an Afrika, ☽ Br. 4′ nördl.
616	24. Febr. 2 U. Mg.	annular	in der chinesischen Tatarei und im stillen Ozean, ☽ Br. 38′ nördl.
	19. August 8¾ U. Mg.	total	im Südmeer und indischem Ozean, ☽ Br. 40′ südl.
615	13. Januar	partial	im südl. Eismeer, ☽ Br. 1° 25′ südl.
	12. Febr.	partial	in den nördl. Polargegenden, ☽ Br. 1° 18′ nördl.
	9. Juli	partial	in den nördl. Polargegenden, ☽ Br. 1° 19′ nördl.

Jahre vor Christi Geburt. Neumonde.	Gröſse der Verfinsterung.	Sichtbarkeit der gröſsten Phase.
614 3. Januar 3 U. Mg.	total	im südl. Eismeer, ☽ Br. 45′ südl.
29. Juni Mittags	annular	im nördl. Amerika, nördl. Europa, Sibirien, Kalmückei, ☽ Br. 34′ nördl. ☽ 14′ 43″, ⊙ 15′ 48″.
23. Decbr. 10 U. Ab.	total	in den Tropenländern.
613 18. Juli Mittern.	annular	in den Tropenländern, Südamerika, Afrika, indischem Ozean, ☽ Br. 6½′ südl.
13. Decbr. 5 U. 17′ Mg.	annular	in Georgien, Tibet, China, Japan, ☽ Br. 40′ nördl. ☽ 15′ 33″, ⊙ 16′ 17″.
612 6. Juni Mittags	total	in den Südpolargegenden, ☽ Br. 52′ südl.
2. Decbr.	partial	im nördl. Eismeer, ☽ Br. 1° 17′ nördl.
611 28. April Mittern.	total	im unbekannten Nordamerika, Grönland, Sibirien, ☽ Br. 58′ nördl.
21. Oct.	annular	in den Südpolargegenden, ☽ Br. 47′ südl.
610 17. April 3 U. 17′ Nachmittag	total	im stillen Meere, Westindien, Nordmeer, nordwestl. Europa, ☽ Br. 10′ nördl.
10. Oct. 7 U. Ab.	total	in den Südländern, ☽ Br. 11′ südl.
609 7. April Mittern.	annular	im Südmeer, ☽ Br. 33′ nördl.
30. Sept. 8 U. 24′ Mg	total	in Europa, Kleinasien, ☽ Br. 50′ nördl.
608 26. März	partial	in den Südpolargegenden, ☽ Br. 1° 23′ südl.
20. August	partial	in den Südpolargegenden, ☽ Br. 1° 27′ südl.
19. Sept.	partial	in den Nordpolargegenden, ☽ Br. 1° 15′ nördl.
607 13. Febr. 9 U. Mg.	annular	in Island, Schweden, Norwegen, europ. Ruſsland, Sibirien, ☽ Br. 47′ nördl. ☽ 15′ 20″, ⊙ 16′ 4″.
10. Aug.	annular	in den Südpolarländern, ☽ Br. 44′ südl.

Jahre vor Christi Geburt. Neumonde.		Größe der Verfinsterung.	Sichtbarkeit der größten Phase.
606	3. Febr. $8\frac{1}{2}$ U. Ab.	total	im stillen Meere und Westindien, ☽ Br. 4′ nördl.
	30. Juli	annular	in den Südländern, ☽ Br. 1′ südl.
605	23. Januar Mittag	total	in den südlichen Polarländern, ☽ Br. 39′ südl.
	19. Juli	annular	in Norwegen, europ. Rußland, Sibirien, nördl. Tibet, China, ☽ Br. 4[illegible]′ nördl. ☽ 1[illegible]′ 44″, ⊙ 15′ 51″.
	14. Decbr.	partial	in den nördl. Polarländern, ☽ Br. 1° 24′ nördl.
604	13. Januar	partial	in den Südpolarländern, ☽ Br. 1° 21′ südl.
	8. Juni	partial	in den Südpolarländern, ☽ Br. 1° 13′ südl.
	7. Juli	partial	in den Nordpolarländern, ☽ Br. 1° 23′ nördl.
	3. Decbr. 1 U. Mg.	annular	in der chinesischen Tatarei und im stillen Ozean, ☽ Br. 45′ nördl.
603	28. Mai 2 U. N. Mittag	total	auf dem stillen Ozean, in Südamerika, Südafrika, ☽ Br. 28′ südl.
	22. Novbr. $2\frac{1}{2}$ U. N. M.	annular	in Westindien, Brasilien, Südafrika.
602	18. Mai	total	in Afrika, Arabien, an der persischen Grenze.
	11. Novbr.	annular	in den Südpolarländern, ☽ Br. 35′ südl.
601	8. April	partial	im südl. Eismeer.
	7. Mai	partial	in den Südpolargegenden.
	31. Octbr.	partial	im südl. Eismeer.
600	27. März	annular	in den Südpolargegenden, ☽ Br. 48′ südl.
	20. Septbr. 3 U. Mg.	total	im stillen Südmeer, Canada, Westeuropa, West-Afrika, ☽ Br. 52′ nördl.
599	16. März $9\frac{1}{2}$ U. Ab.	annular	auf den kleinen Inseln des stillen Meeres, Westindien, Terra Firma, ☽ Br. 8′ südl. ☽ 14′ 42″, ⊙ 15′ 56″.
	10. Sept. 1 U. Mg.	total	an der Ostküste von China, im stillen Ozean, ☽ Br. 7′ nördl. ☽ 16′ 34″, ⊙ 16′ 5″.

Jahre vor Christi Geburt. Neumonde.	Größe der Verfinsterung.	Sichtbarkeit der größten Phase.
598 6. März Mittern.	annular	an der Ostküste von China, in der Tatarei, im stillen Ozean, nördl. Amerika, ☽ Br. 35′ nördl. ☽ 15′ 4″, ⊙ 15′ 58″.
30. Aug. 2 U. Nachm.	total	im stillen Ozean, an der Westküste von Amerika, im Südmeere.
597 24. Januar 8 U. Ab.	partial	im südl. Eismeere, ☽ Br. 1° 24′ südl.
23. Febr. 7 U. Ab.	partial	in Labrador und im unbekannten Nordamerika, ☽ Br. 1° 14′ nördl.
21. Juli 8½ U. Ab.	partial	im nordöstlichen Sibirien, Grönland, Island, ☽ Br. 1° 20′ nördl.
19. August 5½ U. Morg.	partial	im südl. Eismeer, an der Südspitze Amerika's, ☽ Br. 1° 15′ südl.
596 14. Juni Mittag	total	westl. vom Feuerlande, im Südmeer und indischen Ozean, ☽ Br. 43′ nördl. ☽ 16′ 44″, ⊙ 16′ 12″.
9. Juli 5¼ U. Morg.	annular	bei Island, Norwegen, Schweden, Sibirien, nördl. China, im stillen Ozean.
595 3. Januar 3 U. Morg.	total	im indischen Meer, Neuholland bis zu den Sandwichinseln, ☽ Br. 2′ südl. ☽ 16′ 24″, ⊙ 16′ 14″.
28. Juni 11 U. Vorm.	annular	zwischen Afrika und Westindien, Wüste Zaara, im indischen Ozean, ☽ Br. 5′ südlich, ☽ 15′ 31″, ⊙ 15′ 48″.
23. Decbr. 1¾ U. Nachm.	annular	in den amerikanischen Freistaaten, Nordmeer, Westeuropa bis Ungarn, nördl. europ. Türkei, ☽ Br. 39′ nördl. ☽ 15′ 31″, ⊙ 16′ 16″.
594 17. Juni 9¼ U. Ab	total	in Neuholland und südl. von den Gesellschaftsinseln, im stillen Ozean, ☽ Br. 47′ südl. ☽ 16′ 22″, ⊙ 15′ 46″.
12. Decbr. 4 U. Nachm.	partial	in nördl Polar-Amerika, Hudsonsbay, Canada und Grönland, ☽ Br. 1° 14′ südl.

Jahre vor Christi Geburt.	Neumonde.	Gröſse der Verfinsterung	Sichtbarkeit der gröſsten Phase.
593	9. Mai 9 U. Ab.	total	an Labrador, nördl. von Nova Zembla, Sibirien, Eismeer, ☽Br. 55′ nördl. ☽16′ 23″, ⊙ 15′ 50″.
	8. Juni 2 U. Nachm.	partial	im südl. Eismeer, ☽Br. 1° 31′ südl.
	2. Novbr.	annular	im stillen Ozean und Eismeer, ☽Br. 51′ südl.
592	27. April 10 U. Ab.	annular	im stillen Ozean, bei den Ladronen, Sandwich-Inseln, im nördl. Amerika, ☽Br. 15′ nördl. ☽ 15′ 27″, ⊙ 15′ 47″.
	21. Octbr. 3 U. Morg.	annular	östlich von Neuholland, im stillen Meer, Süd- und südöstl. Amerika, ☽Br. 12′ südl. ☽ 15′ 55″. ⊙ 16′ 14″.
591	17. April 7 U. Morg.	annular	südöstl. amerikan. Küste, im indischen Ozean, in Neuholland, ☽ Br. 28′ südl. ☽ 15′ 8″, ⊙ 15′ 49″.
	10. Oct. 5 U. Ab.	total	N. W. Küste Amerika's, Westindien, N. W. Afrika, ☽ Br. 31′ südl. ☽ 16′ 57″, ⊙ 16′ 15″.
590	6 April 9 U. Morg.	partial	östl. vom Feuerlande, im indischen Ozean, südl. Eismeer, ☽ Br. 1° 10′ südl.
	1. Sept. Mittern.	partial	im südlichen Eismeer unter Neuseeland, ☽ Breite 1° 27″ südl.
	30. Sept. 10 U. Ab	partial	im N. O. Sibirien, im unbekannten Nordamerika, Labrador, Grönland.
589	24. Febr. Mittern.	annular	auf dem stillen Ozean und im nordwestl. Amerika, ☽Br. 46′ nördl. ☽ 15′ 21″, ⊙ 16′ 1″.
	21. August 7 U. Morg.	annular	im indischen Ozean, Neuholland, Neuseeland, ☽ Br. 47′ südl.
588	14. Febr. 5 U. Nachmittag	total	in den südl. Ländern, ☽ Br. 9½, nördl.
	9. August 4¾ U. Nachm.	annular	in den Süd-Tropenländern, ☽ Br. 5′ südl.

Jahre vor Christi Geburt. Neumonde.		Gröſse der Verfinsterung	Sichtbarkeit der gröſsten Phase.
587	2. Febr. 7½ U. Nachm.	total	in hohen südl. Breiten, ☽ Br. 55′ südl.
	29. Juli 5½ U. Nachm.	annular	im unbekannten Nordamerika, südwestl. Europa, ☽ Br. 58′ nördl.
	25. Decbr 1 U. Morg.	partial	in den Nordpolargegenden, ☽ Br. 1° 25′ nördl.
586	25. Januar	partial	im südl. Eismeer, ☽ Br. 1° 19′ südl.
	19. Juni Vormittag	partial	im südl. Eismeer, ☽ Br. 1° 16′ südl.
	18. Juli 7 U. Ab	partial	in Sibirien, im unbekannten Nordamerika, europäischen Ruſsland und Norwegen.
585	8. Juni 9½ U Ab.	annular	im stillen Ozean und an der peruanischen Küste, ☽ Br. 32′ südl.
	3. Decbr. 9¾ U. Morg.	annular	zwischen Brasilien und Guinea im Südmeer, Mittelafrika und im indischen Ozean.
584	28. Mai 2 U. 49′ Nachm.	total	im unbekannten Nordafrika, Aegypten, Mittel-Arabien.
	22. Novbr.	annular	in den Südländern.

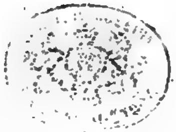


Fig. 1.

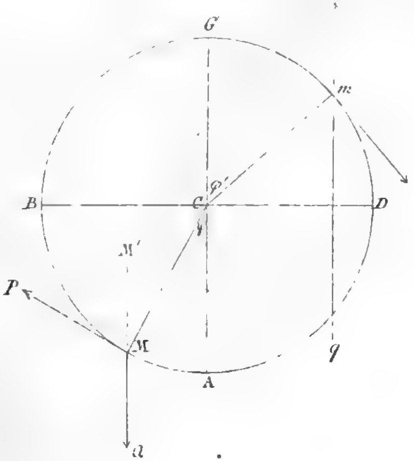


Fig. 2.

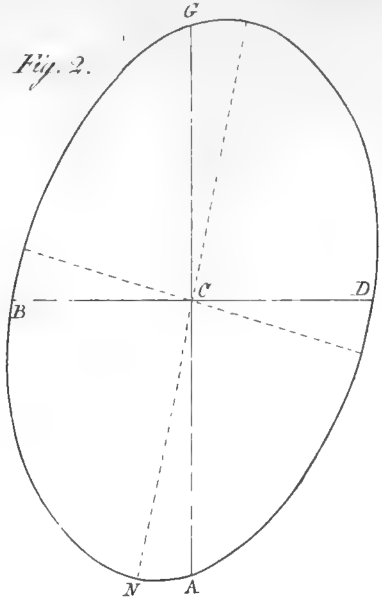


Fig 4.

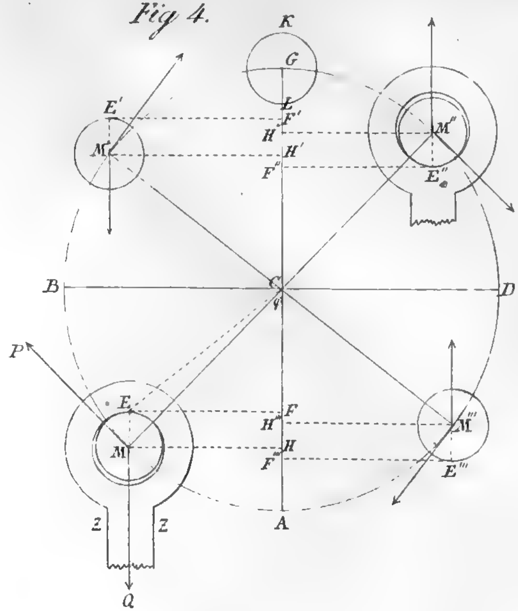
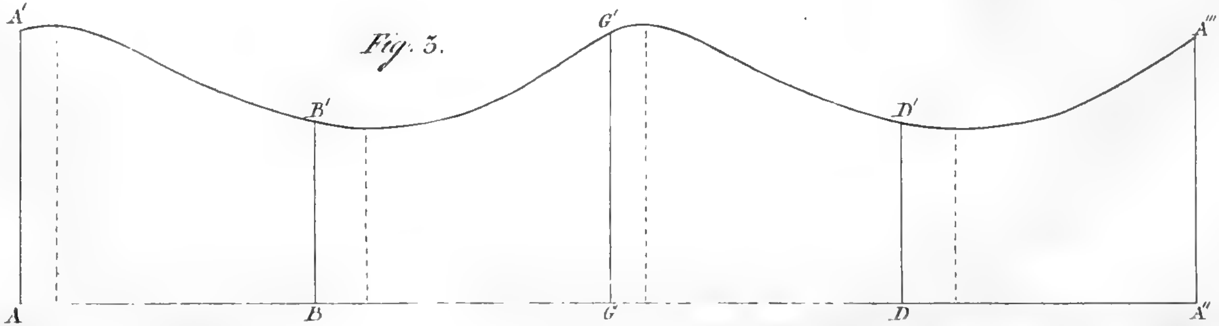


Fig. 3.



Zur Abhandlung über die Theorie des Krummzapfens.

Ueber

die Theorie des Krummzapfens.

Von Herrn EYTELWEIN *).

Es ist eine ganz gewöhnliche Erscheinung, dafs gewisse Maschinen schon sehr lange im Gebrauche sind, ohne dafs man über die vortheilhafteste Anordnung derselben einig wäre, weil ihre Beurtheilung gewöhnlich nicht nur verschiedene Gesichtspunkte verstattet, welche auf verschiedene Resultate führen, sondern weil es auch in sehr vielen Fällen nicht leicht ist, aus dem Gebiete der reinen Mechanik die zweckmäfsige Anwendung auf den vorkommenden Fall auszuheben und weiter zu entwickeln. So gemeinnützig die Anwendung des Krummzapfens bei vielen unserer vorzüglichsten Maschinen ist, so hat man doch eine vollständige Theorie desselben, mit Rücksicht auf die zu bewegende Masse, mehrmals vergeblich versucht, und da auch die neuesten hierher gehörigen Untersuchungen, nach meiner Einsicht, nicht zureichen, so schien es mir wichtig genug, die Theorie des Krummzapfens einer besonderen Bearbeitung zu unterwerfen.

Es ist bekannt, dafs sich die Kurbel von dem Krummzapfen dadurch unterscheidet, dafs erstere gewöhnlich mit der Hand umgedreht wird, letzterer aber eine Lenkstange, welche sich an seinem äufsersten Ende befindet, hin und her bewegt, indem er seine Umdrehung durch irgend eine Vorrichtung erhalten kann.

Es sey C Figur 1. der Mittelpunkt des Krummzapfens, $CM = r$ sein Halbmesser oder der Bug desselben, und am Ende in M sey die Lenkstange nach der Richtung QM angebracht, dergestalt, dafs für alle Lagen des Halb-

*) Vorgelesen den 18ten Februar 1808.

messers C M, die Richtung der Lenkstange mit Q M parallel ist. Die Kraft, durch welche der Krummzapfen umgedreht wird, sey auf den Punkt M, nach einer auf M C senkrechten Richtung M P reduzirt, und eben dies sey in Absicht derjenigen Massen geschehen, welche sich auf die Kraft und die Umdrehung des Krummzapfens beziehen; so, daſs P die nach M P angebrachte Kraft, und P′ die auf den Punkt M reduzirte Masse bezeichne. Der gesammte Widerstand, oder die Last, mit welcher die Lenkstange nach der Richtung M Q widersteht, sey $= Q$, und die auf die Lenkstange reduzirte Masse, welche so anzusehen ist, als wenn sie mit dieser Stange bewegt werden müſste, $= Q'$. Ferner die veränderliche Geschwindigkeit der Kraft $= v$, der Last $= w$. Aus C mit dem Halbmesser C M beschreibe man einen Kreis, so ist solcher der Weg, welchen der Punkt M, der hier die Warze heiſsen kann, während einer Umdrehung des Krummzapfens durchläuft. Man ziehe den Halbmesser C A mit der Richtung der Lenkstange M Q parallel, und setze voraus, daſs sich der Krummzapfen in Bewegung befinde, und daſs die Lage des Punkts M durch den Winkel $ACM = \varphi$ bestimmt werde. Bezeichnet nun φ zugleich denjenigen Bogen, welcher für den Halbmesser $= 1$ dem Winkel A C M entspricht, so erhält man, wenn t die Zeit bezeichnet, in welcher der Punkt M den Bogen A M durchlaufen hat, die Geschwindigkeit der Kraft oder $v = \frac{r\,d\varphi}{dt}$.

Für die Geschwindigkeit der Last erhält man

$$w = \frac{r\,d\sin\ \mathrm{vers}\,\varphi}{dt} = \frac{r\,\sin\varphi\,d\varphi}{dt}$$

und aus der Vergleichung zwischen v und w

$$w = v\sin\varphi;\ \text{daher}\ dw = \sin\varphi\,dv + v\,d\sin\varphi\ \text{oder}$$

$$w\,dw = \sin\varphi^2\,v\,dv + v^2\,\sin\varphi\,d\sin\varphi.$$

Die Masse Q′ mit der Geschwindigkeit w nach der Richtung Q M oder nach der verlängerten Richtung M M′ zu bewegen, erfordert eine Kraft

$$= \frac{2\,w\,dw}{4\,g\,r\sin\varphi\,d\varphi}\,Q' = \frac{2\sin\varphi\,v\,dv + 2\,v^2\,d\,\sin\varphi}{4\,g\,r\,d\varphi}\,Q',$$

oder wenn man diese Kraft nach M C und M P in zwei Seitenkräfte zerlegt, so wird die erste derselben durch den festen Punkt C aufgehoben, und man findet die nach der Richtung M P erforderliche bewegende Kraft

$$= \frac{2\sin\varphi^2\,v\,dv + 2\,v^2\,\sin\varphi\,d\,\sin\varphi}{4\,g\,r\,d\varphi}\,Q'.$$

Zur

Zur Bewegung der auf den Punkt M reducirten Masse P′, nach der Richtung M P, mit der Geschwindigkeit v, wird ebenfalls eine Kraft $= \frac{2\,v\,dv}{4\,g\,r\,d\varphi}\,P'$ erfordert; daher ist zur Bewegung beider Massen P′ und Q′ mit den zugehörigen Geschwindigkeiten, nach der Richtung M P eine bewegende Kraft erforderlich

$$= \frac{2\,v\,d\,v}{4\,g\,r\,d\,\varphi}\,P' + \frac{2\sin\varphi^2\;v\,d\,v + 2\,v^2\;\sin\varphi\;d\sin\varphi}{4\,g\,r\,d\,\varphi}\,Q'.$$

Der Kraft P widerstehet die Kraft Q nach der Richtung P M mit einer Gewalt $= Q\,\sin\varphi$; es bleibt daher zur Bewegung der Massen P′, Q′, nur noch ein Ueberschufs oder eine Ueberwucht $P - Q\,\sin\varphi$ nach der Richtung M P übrig, und man erhält zur Bestimmung der Bewegung, welche durch diese Ueberwucht bewirkt wird, die Differentialgleichung

$$P - Q\;\sin\varphi = \frac{2\,v\,d\,v}{4\,g\,r\,d\,\varphi}\,P' + \frac{2\sin\varphi^2\,v\,d\,v + 2\,v^2\,\sin\varphi\;d\;\sin\varphi}{4\,g\,r\,d\,\varphi}\,Q' \text{ oder}$$

$$4\,g\,r\,(P - Q\,\sin\varphi)\,d\,\varphi = 2\,v\,d\,v\,P' + (2\,\sin\varphi^2\,v\,d\,v + 2\,v^2\,\sin\varphi\,d\,\sin\varphi)\,Q'.$$

Das Integral hiervon ist

$$4\,g\,r\,(P\,\varphi + Q\,\cos\varphi) = v^2\,P' + v^2\,\sin\varphi^2\,Q' + \text{const.}$$

Für $\varphi = 0$ oder für den Anfangspunkt A werde die Geschwindigkeit $v = \alpha$, so ist $\cos\varphi = 1$ und $\sin\varphi = 0$; also

$$\text{Const} = 4\,g\,r\,Q - \alpha^2\,P'; \text{ daher}$$

$$\text{(I)}\qquad 4\,g\,r\,(P\,\varphi + Q\,\cos\varphi - Q) = v^2\,(P' + Q'\,\sin\varphi^2) - \alpha^2\,P'$$

Dieser allgemeine Ausdruck für die Bewegung des Punkts M gilt offenbar für alle Werthe von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \Pi$ *), oder für die beiden ersten Quadranten A B und B G, weil von A durch B bis G die Richtung der Kraft P unverändert senkrecht auf M C bleibt, und die Last Q der Bewegung eben so widersteht, als wenn fortwährend eine Kraft Q nach der Richtung M Q mit A C parallel wirkt. Nicht so verhält es sich in den beiden letzten Quadranten G D und D A. Denn man setze, dafs der Punkt M nach m kommt, so bleibt zwar die Richtung der Kraft P gegen den Halbmesser C M ungeändert, und die Richtung der Last Q bleibt noch mit A C parallel; aber anstatt dafs vorher die Last Q der Bewegung so widerstand, als wenn solche nach M Q angebracht wäre, so mufs man solche jetzt nach entgegengesetzter Richtung Q M, oder für den Punkt m nach q m angebracht an-

*) Wo $\Pi = 3{,}14159\ldots$ ist.

nehmen, weil für die beiden ersten Quadranten A B, B G, die Last Q herbeigezogen, für die beiden letzten G D, D A aber, zurückgedrückt wird.

§. 2. Die Bewegung im dritten und vierten Quadranten fängt bei G an und endet bei A. Man setze daher, daſs der Punkt M von G bis m gelangt sey, so daſs der Winkel G C m nebst dem zugehörigen Bogen für den Halbmesser 1 durch φ' ausgedrückt werde. Ferner soll vom Anfange der Bewegung an gerechnet, die Geschwindigkeit in $A = \alpha$, in $B = \beta$, in $G = \gamma$, in $D = \delta$, und am Ende einer Umdrehung in $A = \alpha'$ seyn, so läſst sich leicht einsehen, wenn man die Geschwindigkeit der Kraft P im Punkte m durch v bezeichnet, und bis auf den Winkel φ' die Bezeichnung im vorigen §. beibehält, daſs alsdann eben dieselbe Differentialgleichung wie im vorigen § erhalten wird, wenn man nur φ' statt φ in dieser Gleichung einführt. Das Integral ist alsdann

$$4\,gr\,(P\varphi' + Q\cos\varphi') = v^2\,(P' + Q'\sin\varphi'^2) + \text{const.}$$

Für $\varphi' = 0$ wird $v = \gamma$, also $\text{const} = 4\,gr\,Q - \gamma^2\,P'$; daher findet man die allgemeine Gleichung für die Bewegung des Punkts M in den beiden letzten Quadranten

$$\text{(II)} \quad 4\,gr\,(P\varphi' + Q\cos\varphi' - Q) = v^2\,(P' + Q'\sin\varphi'^2) - \gamma^2\,P'.$$

Mittelst dieser und der Gleichung (I) lassen sich nun leicht die Geschwindigkeiten am Ende eines jeden Quadranten entwickeln. Man setze $\varphi = \frac{1}{2}\Pi$, so wird $v = \beta$, $\sin\varphi = 1$, $\cos\varphi = 0$; daher aus (I)

$$\text{(III)} \quad 4\,gr\,(\tfrac{1}{2}\Pi P - Q) = \beta^2\,(P' + Q') - \alpha^2\,P'.$$

Für $\varphi = \Pi$ ist $v = \gamma$, $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = -1$; also

$$\text{(IV)} \quad 4\,gr\,(\Pi P - 2\,Q) = \gamma^2\,P' - \alpha^2\,P'.$$

Nach (II) ist für $\varphi' = \frac{1}{2}\Pi$ die Geschwindigkeit $v = \delta$; daher

$$\text{(V)} \quad 4\,gr\,(\tfrac{1}{2}\Pi\,P - Q) = \delta^2\,(P' + Q') - \gamma^2\,P';$$

und für $\varphi' = \Pi$ wird $v = \alpha'$; daher

$$\text{(VI)} \quad 4\,gr\,(\Pi P - 2\,Q) = \alpha'^2\,P' - \gamma^2\,P'.$$

Verbindet man die Gleichung (IV) mit (VI), so wird

$$(\alpha'^2 - \alpha^2)\,P' = 8\,gr\,(\Pi P - 2\,Q);$$

woraus der sehr merkwürdige Satz folgt, daſs die Geschwindigkeit des Punkts M, welche derselbe am Ende eines jeden Umlaufs erreicht, genau eben so groſs als seine Geschwindigkeit α ist, mit welcher er die Bewegung angefangen hat, wenn $\Pi P = 2\,Q$, oder wenn die Kraft $P = \frac{2}{\Pi}Q =$

0,63661977 Q ist. Wäre P gröſser oder kleiner als $\frac{2}{\Pi}$ Q, so müſste die Bewegung des Punkts M bei einer jeden Umdrehung eine gröſsere Geschwindigkeit erhalten, oder zuletzt gänzlich aufhören, weshalb bei den folgenden Untersuchungen $P = \frac{2}{\Pi} Q$ gesetzt wird.

Aus (IV) folgt

$$(\gamma^2 - \alpha^2) P' = 4 g r (\Pi P - 2 Q) = 0; \text{ also } \gamma^2 = \alpha^2.$$

Wird (III) von (IV) abgezogen, so erhält man

$$4 g r (\tfrac{1}{2} \Pi P - Q) = \gamma^2 P' - \beta^2 (P' + Q');$$

und wenn hierzu (V) addirt wird,

$$(\beta^2 - \delta^2)(P' + Q') = 4 g r (\Pi P - 2 Q) = 0, \text{ also } \beta^2 = \delta^2;$$

und aus (III) erhält man noch

$$\beta^2 = \frac{P'}{P' + Q'} \alpha^2 \text{ oder } \alpha^2 = (1 + \frac{Q'}{P'}) \beta^2$$

Hieraus folgt, daſs bei der fortwährenden Bewegung des Punkts M, die Geschwindigkeiten α, γ am Ende des zweiten und vierten Quadranten, und die Geschwindigkeiten β, δ, am Ende des ersten und dritten Quadranten einander gleich sind, daſs aber die Geschwindigkeit α, welche der Punkt M im Anfang des ersten Quadranten hat, allemal gröſser als β am Ende dieses Quadranten ist, es sey denn, daſs die Masse $Q' = 0$ wird.

§. 3. Nach den vorhergehenden Bestimmungen verwandelt sich die allgemeine Gleichung, welche die Bewegung des Punkts M angiebt, in

$$4 g r (\frac{2}{\Pi} \varphi + \cos \varphi - 1) Q = v^2 (P' + Q' \sin \varphi^2) - \alpha^2 P';$$

und man kann solche sowohl auf die beiden ersten als auf die beiden letzten Quadranten anwenden, wenn man nur im ersten Falle den Bogen φ vom Anfange des ersten Quadranten, und im zweiten Falle, vom Anfange des dritten Quadranten zu zählen anfängt. Hieraus folgt überhaupt, daſs die Geschwindigkeiten in den beiden Endpunkten eines jeden Durchmessers, welcher im Kreise A B D gezogen werden kann, einander gleich sind.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit v erhält man

$$\text{(VII)} \quad v^2 = \frac{\alpha^2 P' + (\frac{2}{\Pi} \varphi + \cos \varphi - 1) 4 g r Q}{P' + Q' \sin \varphi^2}$$

und es läfst sich leicht einsehen, dafs, wenn die Bewegung fortdauern soll, die ganze Anordnung der Maschine so bestimmt werden mufs, dafs v weder $= 0$ noch negativ wird. Weil die Gröfsen g, r, Q, P′, Q′ und $\sin \varphi^2$, positiv sind, so kann nur der Faktor $(\frac{2}{\Pi} \varphi + \cos \varphi - 1)$ einen negativen Werth für v bewirken, wenn derselbe negativ und α^2 P′ kleiner als $(\frac{2}{\Pi} \varphi + \cos \varphi - 1)$ 4 g r Q ist. Für den ersten Quadranten ist aber $\frac{2}{\Pi} \varphi + \cos \varphi - 1$ jederzeit positiv, wie man sich leicht überzeugen kann; daher, weil $\cos \varphi$ für den zweiten Quadranten negativ wird, so müssen, wenn negative Werthe für v möglich sind, solche in den zweiten Quadranten fallen. Es ist daher wichtig für $\frac{2}{\Pi} \varphi + \cos \varphi - 1$ den gröfsten negativen Werth zu kennen, weil sich alsdann leicht die Bedingungen festsetzen lassen, unter welchen die Fortbewegung des Punkts M möglich ist. Man setze $Z = \frac{2}{\Pi} \varphi + \cos \varphi - 1$, so ist zur Bestimmung der Maxima und Minima $\frac{dZ}{d\varphi} = \frac{2}{\Pi} - \sin \varphi = 0$, und hieraus

$$\sin \varphi = \frac{2}{\Pi} = 0{,}6366198 = \begin{cases} \sin\ 39^\circ\ 32'\ 25'' \\ \sin\ 140^\circ\ 27'\ 35''. \end{cases}$$

Ferner ist $\frac{d^2 Z}{d\varphi^2} = -\cos \varphi$.

Daher erhält man im ersten Quadranten für Z bei 39 Grad 32′ 25″ ein Maximum, und im zweiten Quadranten bei 140 Grad 27′ 35″ ein Minimum, oder wenn ein negativer Werth vorhanden ist, den gröfsten negativen Werth. Diesen letzten Winkel $= \varphi$ gesetzt, so erhält man den Bogen

$$\varphi = 2{,}4514846,$$
$$\cos \varphi = -0{,}7711775 \text{ und}$$
$$\sin \varphi^2 = 0{,}4052847.$$

Durch die Einführung dieser Werthe in die Gleichung (VII) erhält man

$$v^2 = \frac{\alpha^2\ P' - 0{,}210514 \cdot 4\,g\,r\,Q.}{P' + 0{,}405285\ Q'}$$

so dafs nun in die Gleichung, welche die Geschwindigkeit v ausdrückt, die gröfstmögliche negative Gröfse eingeführt ist. Soll nun v weder negativ noch $=0$ werden, so mufs α^2 P' gröfser als $0{,}210514 \cdot 4\,g\,r\,Q$, oder

$$\alpha^2 \text{ gröfser als } 0{,}842056 \cdot g\,r\,\frac{Q}{P'} \text{ seyn.}$$

Hieraus folgt für die Anordnung aller derjenigen Maschinen, welche mittelst eines Krummzapfens in Bewegung erhalten werden sollen, die sehr wichtige Regel, dafs man die Geschwindigkeit α des Krummzapfens im tiefsten Punkte bei A nicht zu klein annehmen darf, und dafs solche in dem Verhältnifs gröfser werden mufs, wie die Last Q und der Halbmesser der Kurbel wächst. Weil für rheinländisches Fufsmaafs $g = 15\frac{5}{8}$ ist, so erhält man $0{,}842056 \cdot g = 13{,}157125$, daher wenn die Bewegung nicht unterbrochen werden soll, so mufs α^2 gröfser als $13{,}157125 \frac{r\,Q}{P'}$ seyn.

§. 4. Diejenigen Punkte im Umfange des Kreises A B D, wo $\frac{2}{\Pi}\varphi + \cos\varphi - 1$ ein Maximum oder Minimum wird, sind auch zugleich diejenigen Stellen, bei welchen das statische Moment der Last dem statischen Momente der Kraft gleich ist, wogegen in allen übrigen Punkten eins dieser Momente jederzeit gröfser als das andere ist. Denn sofern das Moment der Kraft oder r P, dem Momente der Last $r\,Q \sin\varphi$ gleich seyn soll, so erhält man $P = Q \sin\varphi$; aber (§. 2.) $P = \frac{2}{\Pi} Q$, daher $\sin\varphi = \frac{2}{\Pi} = 0{,}6366197$, oder der Bogen φ entspricht einem Winkel von 39 Grad 32 Minuten 25 Sekunden, oder von 140 Grad 27 Minuten 35 Sekunden. Von A an, oder von 0 Grad bis 39 Grad 32 Minuten 25 Sekunden, wird daher das statische Moment der Last vom Momente der Kraft übertroffen, wogegen von diesem letzten Punkte bis zu 140 Grad 27 Minuten 35 Sekunden das statische Moment der Last gröfser als das Moment der Kraft bleibt. Von hier bis 219 Grad 32 Minuten 25 Sekunden wird wieder das Moment der Kraft, und bis 320 Grad 27 Minuten 35 Sekunden das Moment der Last gröfser, welches aber von hier bis 360 Grad oder bis zum Punkte A wieder kleiner als das Moment der Kraft wird. Hieraus läfst sich beurtheilen, dafs bei jeder Umdrehung die Geschwindigkeit v zweimal ein Maximum und zweimal ein Minimum werden mufs, und dafs sowohl die Maxima als die Minima unter sich gleich seyn müssen (§. 3.). Zur Bestimmung dieser Werthe erhält man:

$$\frac{dv^2}{d\varphi} = \frac{4grQ\left(\frac{2}{\Pi} - \sin\varphi\right)(P' + Q'\sin\varphi^2) - 2Q'\left[\alpha^2 P' + \left(\frac{2}{\Pi}\varphi + \cos\varphi - 1\right) 4gr\varphi\right]\sin\varphi\cos\varphi}{(P' + Q'\sin\varphi^2)^2}$$

also $o = 4grQ\left(\frac{2}{\Pi} - \sin\varphi\right)(P' + Q'\sin\varphi^2) - 2Q'\left[\alpha^2 P' + \left(\frac{2}{\Pi}\varphi + \cos\varphi - 1\right) 4grQ\right]\sin\varphi\cos\varphi,$

woraus der Werth von φ für das Maximum oder Minimum entwickelt werden muſs. Weil dies aber nicht auf eine allgemeine Art, sondern nur für Zahlenwerthe durch Näherung geschehen kann, so wird es zweckmäſsig seyn, aus der Gleichung $v^2 = \frac{\alpha^2 P' + \left(\frac{2}{\Pi}\varphi + \cos\varphi - 1\right) 4grQ}{P' + Q'\sin\varphi^2}$ für verschiedene Werthe von φ die Ausdrücke für v^2 zusammenzustellen. Setzt man den entsprechenden Winkel für den Bogen

$\varphi =$ o Grad, so ist $v^2 = \frac{\alpha^2 P' + o.\ 4grQ}{P' + o.\ Q'}$

$\varphi = 30$ - - - $v^2 = \frac{\alpha^2 P' + 0{,}1993588.\ 4grQ}{P' + \frac{1}{4} Q'}$

$\varphi = 39^\circ\ 32'\ 25''$ - $v^2 = \frac{\alpha^2 P' + 0{,}2105139.\ 4grQ}{P' + 0{,}4052847.\ Q'}$

$\varphi = 45$ Grad, - - $v^2 = \frac{\alpha^2 P' + 0{,}2071068.\ 4grQ}{P' + \frac{1}{2} Q'}$

$\varphi = 60$ - - - $v^2 = \frac{\alpha^2 P' + 0{,}1666666.\ 4grQ}{P' + \frac{3}{4} Q'}$

$\varphi = 90$ - - - $v^2 = \frac{\alpha^2 P' + o.\ Q}{P' + Q'}$

$\varphi = 120$ - - - $v^2 = \frac{\alpha^2 P' - 0{,}1666666.\ 4grQ}{P' + \frac{3}{4} Q'}$

$\varphi = 135$ - - - $v^2 = \frac{\alpha^2 P' - 0{,}2071068.\ 4grQ}{P' + \frac{1}{2} Q'}$

$\varphi = 140^\circ\ 27'\ 35''$ - $v^2 = \frac{\alpha^2 P' - 0{,}2105139.\ 4grQ}{P' + 0{,}4052847.\ Q'}$

$\varphi = 150$ Grad, - $v^2 = \frac{\alpha^2 P' - 0{,}1993688.\ 4grQ}{P' + \frac{1}{4} Q'}$

$\varphi = 180$ Grad, so ist $v^2 = \dfrac{\alpha^2\ P' - o.\ 4\, g\, r\, Q}{P' + o.\ Q'}$

Hieraus folgt, dafs das Maximum im ersten Quadranten zwischen o Grad und 59 Grad 32 Minuten 25 Sekunden, und das Minimum in dem zweiten Quadranten zwischen 90 Grad und 140 Grad 27 Minuten 35 Sekunden fallen mufs. Soll daher in einem besondern Falle bei der Anordnung einer Maschine mit einem Krummzapfen die Bewegung möglichst gleichförmig seyn, so mufs man derselben eine solche Einrichtung geben, dafs zwischen dem gröfsten und kleinsten Werthe der Geschwindigkeit v der Unterschied möglichst klein werde. Das Maximum für den dritten und Minimum für den vierten bestimmt sich alsdann aus den bekannten Werthen der beiden ersten Quadranten.

§. 5. Soll der Unterschied zwischen der Geschwindigkeit α beim Anfange des ersten, und zwischen β beim Anfange des zweiten Quadranten möglichst klein werden, so mufs

$$\alpha^2 - \beta^2 = \alpha^2 \left(1 - \frac{P'}{P' + Q'}\right) = \alpha^2 \frac{Q'}{P' + Q'}$$

so klein, als solches die übrigen Umstände zulassen, angenommen werden; oder man mufs die Geschwindigkeit α und die Masse Q' so klein, und P' so grofs wie möglich annehmen. Hierbei ist aber wohl zu bemerken, dafs nach §. 3. α^2 gröfser als $13{,}157125\ \dfrac{r\,Q}{P'}$ seyn mufs, weil sonst die Bewegung unterbrochen wird. Nur für $Q' = o$ wird $\alpha = \beta$, wie schon erinnert ist.

§. 6. Zur besseren Uebersicht, wie die Geschwindigkeiten während einer Umdrehung abwechseln, läfst sich eine Kurve construiren, bei welcher die Abscissen die Winkel φ, und die zugehörigen Ordinaten die diesen Winkeln entsprechenden Geschwindigkeiten v angeben. Setzt man für einen besondern Fall $\alpha^2\ P' = 100$, $4\, g\, r\, Q = 100$, $P' = 10$ und $Q' = 12$, so findet man mit Hülfe der allgemeinen Gleichung nachstehende Werthe für φ und v:

φ	φ	v^2	v
0°	180°	10,000	3,163
5°	185°	10,422	3,229
10°	190°	10,577	3,252
15°	195°	10,483	3,238
30°	210°	9,226	3,038
39° 32′ 25″	219° 32′ 25″	8,144	2,854
45°	225°	7,544	2,747
60°	240°	6,140	2,478
90°	270°	4,545	2,132
95°	275°	4,420	2,103
100°	280°	4,332	2,081
105°	285°	4,283	2,070
110°	290°	4,313	2,077
120°	300°	4,386	2,094
135°	315°	4,955	2,226
140° 27′ 35″	320° 27′ 35″	5,312	2,305
150°	330°	6,159	2,482
160°	340°	7,349	2,711
170°	350°	8,725	2,954
180°	360°	10,000	3,163

Wird nun C Figur 2. als Mittelpunkt angenommen, und von der Linie CA an sämmtliche Winkel abgemessen, so ist CN die Geschwindigkeit v, welche dem Winkel $ACN = \varphi$ entspricht. Für $\varphi = 0$ oder $= 90$ Grad sind die zugehörigen Geschwindigkeiten CA oder CB u. s. w., so daſs die krumme Linie ABGDA durch die Endpunkte sämmtlicher Geschwindigkeiten geht. Will man durch die gerade Linie AA″ Figur 3. den Raum bezeichnen, welchen die Warze während einer Umdrehung durchläuft, so geben BB′, GG′ die Geschwindigkeiten an, welche den durchlaufenen Räumen AB, AG entsprechen.

§. 7. Bei der Voraussetzung, daſs Q den gesammten Widerstand bezeichne, mit welchem die Lenkstange nach der Richtung MQ Figur 1. der

Be-

Bewegung widersteht, kann man auch annehmen, daſs die verschiedenen Reibungen als Widerstände in der Gröſse Q begriffen sind, sofern man diese Reibungen als beständige Gröſsen ansieht, oder, wenn solche veränderlich sind, dafür einen Mittelwerth in Rechnung stellt. Die Reibung am Halse des Krummzapfens, wo die Lenkstange mit demselben in Verbindung gesetzt ist, bleibt zwar eine beständige Gröſse, wenn Q unveränderlich bleibt; weil aber ihr Moment bald gröſser, bald kleiner wird, so ist die Kraft, welche am Halbmesser des Krummzapfens zur Ueberwältigung dieser Reibung erfordert wird, veränderlich. Es sey M Figur 4. der Mittelpunkt von dem Halse des Krummzapfens oder von der Warze, und mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung, CM der Halbmesser des Krummzapfens, MP die Richtung der Kraft P, MQ die Richtung des Widerstandes Q, welcher an der Lenkstange ZZ angebracht ist, und $ME = \varrho$ der Halbmesser des Halses, so entsteht von dem Widerstande an der Lenkstange nach der rückwärts verlängerten Richtung MQ, am Umfange des Halses bei E ein Druck Q, dessen Reibung μQ ist, wenn μ den Reibungscoëfficienten bezeichnet. Die Richtung dieses Widerstandes nach EF ist senkrecht auf EQ oder CA, und es entsteht die Frage, wie groſs in M eine Kraft p nach der auf MC senkrechten Richtung MP seyn muſs, welche der Reibung μQ nach der Richtung EF das Gleichgewicht hält. Man kann den Widerstand μQ in zwei Seitenkräfte, nach EC und nach einer darauf senkrechten Richtung zerlegen, wovon die eine durch den festen Punkt C aufgehoben wird, die andere aber so angesehen werden kann, als wenn solche, am Halbmesser CE senkrecht angebracht, der Bewegung widersteht. Kürzer erhält man das gesuchte Resultat, wenn die Richtung CF bis an den Halbmesser CA verlängert wird; alsdann erfordert das Gleichgewicht, daſs $CM. \, p = CF. \, \mu Q$ sey. Nun ist, wenn MH senkrecht auf CA gezogen wird, $CF = CH - FH = r \cos \varphi - \varrho$, daher $rp = \mu Q \, (r \cos \varphi - \varrho)$, folglich die Kraft, welche in M nach MP zur Ueberwältigung der Reibung erfordert wird, oder

$$p = \mu Q \, (\cos \varphi - \frac{\varrho}{r}).$$

Fällt der Punkt E in den Halbmesser BC, welcher zum Anfange des zweiten Quadranten gehört, so verschwindet das Moment der Reibung, oder es wird $r \cos \varphi = \varrho$. Kommt M nach M', also E nach E', so erhält der Abstand des Widerstandes μQ oder CF' eine entgegengesetzte Lage, weshalb der Ausdruck für $CF' = r \cos \varphi - \varrho$ negativ wird. Weil aber mit

Bezug auf die Kraft p, welche zur Ueberwältigung der Reibung erforderlich ist, der Abstand C F′ eben so wie C F positiv in Rechnung kommt, so erhält man, wenn φ bis 180 Grad gezählt wird, innerhalb der Grenzen $\varphi = 0$ und $\cos\varphi = \frac{\varrho}{r}$ die Kraft $p = \mu Q\,(\cos\varphi - \frac{\varrho}{r})$, und zwischen $\cos\varphi = \frac{\varrho}{r}$ und $\varphi = 180$ Grad, die Kraft $p = -\mu Q\,(\cos\varphi - \frac{\varrho}{r})$, oder $p = \mu Q\,(\frac{\varrho}{r} - \cos\varphi)$. Ganz allgemein kann man daher für die beiden ersten Quadranten

$$p = \pm\,\mu Q\,(\cos\varphi - \frac{\varrho}{r})$$

setzen, wo das obere Zeichen zwischen $\varphi = 0$ und $\cos\varphi = \frac{\varrho}{r}$, und das untere von da bis $\varphi = 180$ Grad gilt.

Für $\varphi = 180$ Grad wird der Ort verändert, an welchem sich die Reibung äufsert, weil daselbst der Widerstand Q eine entgegengesetzte Richtung erhält, weshalb nun die Reibung am entgegengesetzten Ende vom Durchmesser des Halses der Bewegung widersteht. Man kann aber zur Bestimmung der Kraft p für die beiden letzten Quadranten, eben so wie in Absicht der Geschwindigkeit v, §. 3., folgern, dafs für die beiden Endpunkte eines Durchmessers im Kreise A B G D, die zur Ueberwältigung der Reibung erforderlichen Kräfte einander gleich sind, wovon man sich auch leicht aus Betrachtung der vierten Figur überzeugen kann. Es läfst sich daher unter den angegebenen Einschränkungen die für p gefundene Formel auch auf die beiden letzten Quadranten anwenden, wenn man für dieselben von §. 2. die Winkel vom Anfange G des dritten Quadranten zu zählen anfängt, und solche statt φ durch φ' bezeichnet.

Im Anfangspunkte G des dritten Quadranten erhält die Kraft p einen doppelten Werth, weil während der Bewegung von B bis G, wenn der Punkt M in G anlangt, die Reibung sich am Punkte K in einem Abstande vom Mittelpunkte $C = r + \varrho$ äufsert; dagegen im Augenblick, wo die Bewegung von G nach M″ weiter geht, wenn der Spielraum zwischen dem Halse des Krummzapfens und der Oeffnung in der Lenkstange äufserst gering angenommen wird, die Reibung sich bei L, also nur in einem Abstande $r = \varrho$

äuſsern kann. Beide Resultate erhält man auch aus der allgemeinen Formel für p, und es lassen sich ähnliche Betrachtungen in Absicht des Anfangspunkts A anstellen.

§. 8. Mit Rücksicht auf die veränderliche Kraft p erhält man nun den Ueberschuſs an bewegender Kraft oder die Ueberwucht, durch welche die Bewegung des Krummzapfens beschleunigt wird, $= P - Q \sin \varphi \mp \mu Q (\cos \varphi - \frac{\varrho}{r})$, also auf eine ähnliche Art, wie §. 1. die Differentialgleichung

$$4\,g\,r\,(P \pm \frac{\mu \varrho}{r} Q - Q \sin \varphi \mp \mu Q \cos \varphi)\, d\varphi = 2\,v\,d\,v\,p' + (2 \sin \varphi^2\, v\,d\,v + 2\,v^2 \sin \varphi\, d \sin \varphi)\, Q',$$

und hiervon findet man das Integral

$$4\,g\,r\,(P\varphi \pm \frac{\mu \varrho}{r} Q \varphi + Q \cos \varphi \mp \mu Q \sin \varphi) = v^2\,(P' + Q' \sin \varphi^2) + \text{const.}$$

Für $\varphi = 0$ ist $v = \alpha$, $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$, also

$$\text{(I)}\quad 4\,g\,r\,(P\varphi \pm \frac{\mu \varrho}{r} Q \varphi + Q \cos \varphi \mp \mu Q \sin \varphi - Q) = v^2\,(P' + Q' \sin \varphi^2) - \alpha^2\, P'.$$

Eben so erhält man für die beiden letzten Quadranten

$$\text{(II)}\quad 4\,g\,r\,(P\varphi' \pm \frac{\mu \varrho}{r} Q \varphi' + Q \cos \varphi' \mp \mu Q \sin \varphi' - Q) = v^2\,(P' + Q' \sin \varphi'^2) - \gamma^2\, P'.$$

Wird $\varphi = \Pi$, so ist $v = \gamma$, $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = -1$; daher nach (I)

$$\text{(III)}\quad 4\,g\,r\,(\Pi P - \frac{\Pi \mu \varrho}{r} Q - 2\,Q) = (\gamma^2 - \alpha^2)\, P',$$

und wenn $\varphi' = \Pi$ gesetzt wird, so ist $v = \alpha'$; daher nach (II)

$$\text{(IV)}\quad 4\,g\,r\,(\Pi P - \frac{\Pi \mu \varrho}{r} Q - 2\,Q) = (\alpha'^2 - \gamma^2)\, P'.$$

Aus der Verbindung der Gleichung (III) und (IV) erhält man

$$(\alpha'^2 - \alpha^2)\, P' = 8\,g\,r\,(\Pi P - \frac{\Pi \mu \varrho}{r} Q - 2\,Q).$$

Soll daher am Ende einer jeden Umdrehung die Geschwindigkeit α' im Punkte A eben so groſs seyn, als die Geschwindigkeit α, mit welcher die Bewegung angefangen hat, so muſs $\alpha' = \alpha$ werden, dies giebt $\Pi P - \frac{\Pi \mu \varrho}{r} Q - 2Q = o$ oder die Kraft

$$P = \left(\frac{2}{\Pi} + \frac{\mu \varrho}{r}\right) Q.$$

Diesen Werth in die Gleichung (I) gesetzt, so erhält man die allgemeine Gleichung für die Geschwindigkeit des Punkts M oder

$$v^2 = \frac{\alpha^2 P' + 4 g r \left[\frac{2}{\Pi} \varphi + (1 \pm 1) \frac{\mu \varrho}{r} \varphi + \cos \varphi \mp \mu \sin \varphi - 1\right] Q}{P' + Q' \sin \varphi^2}$$

wobei zu bemerken ist, daſs φ nicht weiter als bis 180 Grad gezählt werden darf.

Für $\varphi = \frac{1}{2} \Pi$ wird $v = \beta$, daher $\beta^2 = \frac{\alpha^2 P' + 4 g r \mu Q}{P' + Q'}$.

Wenn nun die Geschwindigkeit α beim Anfange des ersten Quadranten von β beim Anfange des zweiten Quadranten so wenig wie möglich verschieden oder ihr gleich seyn soll, so wird erfordert, daſs

$$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{\alpha^2 Q' - 4 g r \mu Q}{P' + Q'}$$

so klein wie möglich oder $= o$ angenommen werde. Hierauf ist bei den Anordnungen der Maschinen mit Krummzapfen besonders Rücksicht zu nehmen, damit man für dieselben einen möglichst gleichförmigen Gang erhält. Soll $\alpha = \beta$ werden, so muſs $\alpha^2 Q' = 4 g r \mu Q$ seyn.

Noch folgt aus der näheren Betrachtung des Ausdrucks $p = \pm \mu Q \left(\cos \varphi - \frac{\varrho}{r}\right)$, daſs die zur Ueberwältigung der Reibung erforderliche Kraft, beim Anfange des ersten und dritten Quadranten ihren gröſsten, und in der Nähe des Anfangs vom zweiten und vierten Quadranten ihren kleinsten Werth erhält. Ohne Rücksicht auf Reibung fand man die gröſsten und kleinsten Geschwindigkeiten beinahe in umgekehrter Ordnung, daher wird durch die Reibung am Halse des Krummzapfens die ungleichförmige Bewegung desselben der gleichförmigen näher gebracht, und man kann aus dem Verlust an Kraft wegen der Reibung den Vortheil ziehen, daſs die Bewegung der Maschine gleichförmiger wird.

Ueber

die Bestimmung der Kraft, welche erfordert wird, den Widerstand der Getreidekörner bei Getreidemühlen zu überwältigen.

Von Herrn Eytelwein *).

Nach den bedeutenden Fortschritten, welche die mechanischen Wissenschaften in den neueren Zeiten gemacht haben, war es zu erwarten, daſs man die Anordnung der Maschinen nicht mehr vom Zufall abhängen lieſs. Es entstand daher im Gebiete der angewandten Mathematik ein eigener Zweig, unter dem Namen der Maschinenlehre. Allein so groſs auch die Fortschritte der höheren Analysis und reinen Mechanik sind, so reichen doch diese wesentlichen Grundlagen der Maschinenlehre noch nicht hin, das Gebäude dieser noch unvollkommenen Wissenschaft zu begründen, wie dies bei andern Zweigen der angewandten Mathematik geschehen ist. Die gröſsten Hindernisse liegen theils in dem Mangel zulänglicher Beobachtungen und Erfahrungen, theils in den mannigfaltigen Ansichten und Voraussetzungen, welchen man nicht entgehen kann, wenn es auf die Bestimmung der Kraft oder des Widerstandes einer Maschine ankommt. Den ersten Versuch, die Maschinenlehre wissenschaftlich zu begründen, verdankt man Parent, welcher in den Denkschriften der Pariser Akademie vom Jahre 1704 eine Abhandlung über die Vervollkommnung derjenigen Maschinen, bei welchen strömendes Wasser als bewegende Kraft wirkt, bekannt machte. Denn wenn gleich de la Hire in seinem *Traité de Mécanique* vom Jahr 1695 schon

*) Vorgelesen den 20ten Julius 1809.

mathematische Betrachtungen über einige Maschinen anstellte, so hatte doch Parent zuerst die Bahn gebrochen, und gezeigt, wie durch Anwendung der höheren Analysis allgemeine Gesetze zur Bestimmung der vortheilhaftesten Anordnung der Maschinen entwickelt werden können. Späterhin fehlte es auch nicht an wichtigen Beiträgen, durch welche die Maschinenlehre ihre jetzige Gestalt erhielt, und es würde den Zweck dieser Abhandlung überschreiten, hierbei noch länger zu verweilen. Aber aller bisherigen Bemühungen ungeachtet, bestehen die gröſsten Lücken in der Maschinenlehre noch jetzt in der mangelhaften Ausmessung und Bestimmung der Kräfte, durch welche Maschinen bewegt werden, und in der unvollkommenen Angabe der Gröſse des Widerstandes, welchen eine Maschine zu überwältigen hat. Es fehlt zwar nicht an einer Menge zuverlässiger Beobachtungen über die Wirkung mehrerer Maschinen; aber da sich nur dann die Gröſse des Widerstandes durch Erfahrung ausmitteln und bestimmt angeben läſst, wenn die angewandte Kraft hinlänglich genau bekannt ist, und umgekehrt, so konnten deſshalb die bisherigen Ausmittelungen nur gröſstentheils unbefriedigende Resultate liefern, weil weder die Gröſse der Kraft, noch des Widerstandes, so zureichend bekannt waren, um eins aus dem andern mit Sicherheit abzuleiten. Unstreitig gehört Belidor zu denjenigen, welche vorzüglich bemüht waren, die Gröſse der verschiedenen Kräfte und Widerstände bei den gebräuchlichsten Maschinen auszumitteln, und wenn man gleich in neueren Zeiten manche seiner Angaben unzureichend fand, so wird dennoch die hydraulische Architektur von Belidor noch lange zu den vorzüglichsten Schriften dieser Art gezählt werden.

Bei der Ausmittelung des Widerstandes einer Maschine kommt es nicht allein darauf an, die Gröſse der Kraft zu kennen, welche auf den Widerstand verwandt werden muſs, sondern noch besonders darauf, bestimmt anzugeben, welche einzelne Umstände auf die Vermehrung oder Verminderung des Widerstandes Einfluſs haben, und auf welche Weise diese Widerstände in Rechnung zu bringen sind. Eben hierin liegt der Grund, daſs man bis jetzt noch nicht im Stande ist, mit Zuverlässigkeit die Kraft zu bestimmen, welche zur Ueberwältigung des Widerstandes bei Getreidemühlen erfordert wird, weil die bisher angenommenen Bestimmungen desselben aus Voraussetzungen bestehen, welche nothwendig zu unrichtigen Resultaten führen muſsten.

Es ist bekannt, daſs das Mahlen des Getreides zwischen zwei Mühlensteinen von gleichen Durchmessern verrichtet wird, wovon der untere oder Bodenstein unbeweglich liegt, und der obere oder Läufer sich um seine Axe dreht. Zwischen der obersten Fläche des Bodensteins und der untersten des Läufers befindet sich das Getreide, welches gemahlen wird, so daſs der Läufer unmittelbar auf dem Getreide ruhete, wenn er nicht durch eine eiserne Stange, welche das Mühleisen genannt wird, am tiefer Sinken verhindert würde. Dieses Mühleisen steht auf einem Queerholze, dem Steg, welcher höher oder niedriger gestellt werden kann, nachdem man die reibenden Flächen der Mühlensteine mehr oder weniger von einander entfernen will. Nach der näheren Bekanntschaft mit diesen wesentlichen Theilen einer Getreidemühle wird das folgende hinlänglich verständlich seyn.

Den Widerstand, welchen das Getreide der Umdrehung des Läufers entgegensetzt, suchte Belidor im zweiten Buche des ersten Theils seiner hydraulischen Architektur zu bestimmen, indem er aus angestellten Beobachtungen bei der Mühle zu la Fère folgerte, daſs dieser Widerstand so groſs sey, als wenn an einem Hebelarme, welcher zwei Drittheil vom Halbmesser des Läufers beträgt, eine Kraft der Bewegung entgegenwirke, welche dem fünf und dreiſsigsten Theile vom Gewichte des Läufers gleich wäre. Diesen zuerst als Regel von Belidor aufgestellten Satz hat man bisher bei den Berechnungen und Anordnungen der Getreidemühlen als Grundlage angenommen, und wenn auch hier und da Zweifel gegen die Richtigkeit desselben entstanden sind, so hat man doch am wenigsten die gewagte Hypothese in Zweifel gezogen, daſs der Widerstand eine Function vom Gewichte des Läufers sey. Selbst unser verehrter Lambert behielt diese Hypothese bei, nur daſs er nach seinen Untersuchungen, welche in den Abhandlungen der königlichen Akademie vom Jahre 1775 abgedruckt sind, den Widerstand auf den vier und zwanzigsten Theil vom Gewichte des Läufers setzte, wodurch derselbe bedeutend gröſser wird, als der von Belidor angegebene. Später hat Fabre in seinem Versuche über Getreidemühlen (§. 390.) diesen Widerstand dem drei und zwanzigsten Theile vom Gewichte des Läufers gleich gefunden, welches von der Lambertschen Angabe wenig abweicht. Allein es ist nun überhaupt zu untersuchen, ob man berechtigt ist, den Widerstand des Getreides vom Gewichte des Läufers abhängig zu machen, und ob die bekannten Gesetze der Reibung, nach welchen der Widerstand mit dem Gewichte des reibenden Körpers wächst, auch hier ihre Anwendung finden. Hierbei muſs sogleich ein wesentlicher Unterschied zwischen diesen beiden Widerständen auffallen, indem bei der gewöhnlichen Reibung der reibende Körper mit seinem ganzen Gewichte auf dem untern ruht, wogegen der Läufer auf dem Mühleisen, und dieses auf dem Stege steht, so daſs ein gröſseres Gewicht des Läufers zwar den Druck auf den Steg und die in der Pfanne des Mühleisens entstehende unbedeutende Reibung vermehren, aber keinen gröſseren Druck auf das Getreide verursachen kann. Hiervon wird man sich bald überzeugen können, wenn die Beschaffenheit des Stegs näher untersucht wird. Dieser Steg besteht gewöhnlich bei unsern Mühlen aus einem balkenförmig bearbeiteten wagerechten Stück Holz, dessen Querschnitt ein Quadrat von 10 bis 12 Zoll Seitenlänge bildet, und dessen Länge zwischen beiden Unterlagen 8 bis 12 Fuſs beträgt. Bei den hiesigen Mühlen, wo der Steg gewöhnlich aus Eichenholz verfertigt wird, beträgt jede Seite des Querschnitts 10 Zoll, und die Länge des Stegs 9 Fuſs. Diese Angaben sind zureichend, um zu übersehen, daſs ein vermehrtes Gewicht des Läufers keine Vermehrung des Widerstandes der Getreidekörner bewirken kann, weil der Steg hinlänglich stark ist, das Gewicht des Läufers für sich zu tragen. Wenn aber auch ein Steg, wie bei der von Belidor beschriebenen Mühle, nur 6 Zoll breit, 5 Zoll dick und dabei 9 Fuſs lang ist, so ist es doch nicht abzusehen, wie der Läufer auſser der wagerechten Umdrehung noch eine auf- und abwärts gehende Bewegung erhält, welche nach Belidor von der Elasticität des Stegs entstehen soll. Denn wenn auch eine geringe Biegung des Stegs angenommen wird, so kann doch, wenn die Maschine in den Beharrungsstand gekommen, und das Gewicht des Läufers mit der Elasticität des Stegs im Gleichgewichte ist, keine auf- und abwärts gehende Bewegung des Läufers erfolgen, weil wegen des unveränderlichen Gewichts dieses Mühlensteins und wegen des unveränderlichen Widerstandes des Getreides eine solche Bewegung nicht gerechtfertigt werden kann. Sofern also Belidor der elastischen Kraft des Stegs die Ursache einer vertikalen Bewegung zuschreibt, so scheint dabei nicht erwogen zu seyn, daſs, wenn einmal die Kraft, mit welcher der Steg dem Biegen widersteht, mit der Last des Läufers im Gleichgewichte ist, alsdann keine fernere Biegung erfolgen kann. Eben so wenig darf man die zitternde Bewegung, welche bei einer jeden Mühle verspürt wird, mit der von Belidor angenommenen verwechseln, weil alle von mir über die vertikale Bewegung des Stegs angestellten Beobachtungen dieser Voraussetzung durchaus widersprechen, indem auſser der zitternden Bewegung,

gung, welche man an mehreren Theilen der Mühle auf gleiche Art verspürt, keine eigenthümliche Vertikal-Bewegung des Stegs von mir bemerkt worden ist. Es würde von einigem Gewichte seyn, wenn dasjenige, was Belidor zur Begründung seiner Behauptung anführt, durch die Erfahrung bestätigt werden könnte. Nach seiner Meinung sollen nämlich alle Müller darin übereinkommen, daſs ein Mühlenstein von doppelt so viel Gewicht, unter übrigens gleichen Umständen, auch doppelt so viel Mehl liefere. Allein eben dies habe ich noch von keinem erfahrenen Müller bestätigt erhalten, vielmehr versicherten mich dieselben jederzeit, daſs unter übrigens gleichen Umständen ein zwei Fuſs hoher Läufer nicht mehr Mehl liefere, als ein halb so hoher, welches auch nach der vorstehenden Auseinandersetzung ohne diese Erfahrungen einleuchtet. Allerdings giebt es Fälle, wo ein Läufer zu leicht werden kann, weil er nothwendig beim Mahlen des Getreides einen bestimmten Abstand vom Bodenstein behalten muſs. So lange aber sein Gewicht noch so groſs ist, daſs er, ungeachtet des zwischen beiden Steinen befindlichen Getreides, noch mit einem gewissen Uebergewichte auf den Steg drückt, so ist es einerlei, wie viel dies Uebergewicht beträgt, weil dasselbe vom Steg getragen wird, und weil das zureichende Gewicht des Läufers nichts weiter bewirkt, als daſs solcher den erforderlichen Abstand vom Bodenstein behält, und durch die Getreidekörner nicht in die Höhe gehoben werden kann. Die Mühlensteine, welche als Läufer auf den hiesigen Mühlen dienen, sind zwei Fuſs hoch, wenn sie neu aufgebracht werden, und sobald sie bis auf einen Fuſs abgenutzt sind, werden sie als zu leicht weggenommen, weil sie sonst die Kraft verlieren, im erforderlichen Abstande vom Bodenstein zu bleiben; übrigens bleibt unter sonst gleichen Umständen die Menge des Mehls ungeändert, der Läufer mag 12, 18 oder 24 Zoll hoch seyn. Untersucht man ferner die Kleie oder die vom Mehle abgesonderten Hülsen des Getreides, so findet man, wenn die Steine, den Forderungen der Müller gemäſs, gut mahlen, daſs diese Hülsen so aussehen, als wenn sie von den Getreidekörnern abgehobelt wären, welches bei einer vertikalen Bewegung des Steins nicht der Fall seyn könnte, weil alsdann die Körner zerquetscht und breitgedrückt werden müſsten, und die Steine, bei dem kleinsten Versehen in der Stellung, sich sogleich stumpf mahlen würden. Es ist daher bei der Bestimmung des Widerstandes, welchen die Getreidekörner der Umdrehung des Läufers entgegensetzen, durchaus nicht anzunehmen, daſs dieser Widerstand von dem Gewichte des Läufers abhängt, und man wird das bisher übliche Verfahren zur Bestimmung dieses Widerstandes gänzlich verlassen müssen, wenn man bei der Anordnung der Getreidemühlen nach sichern Grundsätzen verfahren will.

Es gehört nicht hierher, zu bestimmen, wie der Widerstand von den verschiedenen Getreidearten oder von den verschiedenen Abständen der Mühlensteine von einander abhängt, weil dies lediglich nur durch Versuche ausgemittelt werden kann; vielmehr wird sich diese Untersuchung nur darauf erstrecken, die Art und Weise zu bestimmen, wie die verschiedenen Gröſsen, welche auf den Widerstand Einfluſs haben, in Rechnung gebracht werden müssen, weil man nur dadurch in den Stand gesetzt wird, theils die bereits angestellten Versuche richtig zu beurtheilen, theils neue Versuche anzustellen, und daraus die erforderlichen Resultate zu ziehen. Auch läſst sich leicht einsehen, daſs nur dann Versuche zweckmäſsig angestellt werden können, wenn es bekannt ist, welche Gröſsen auf das Resultat Einfluſs haben. Eben so wird man bei dieser allgemeinen Untersuchung auf die verschiedene Art der Bearbeitung der reibenden Flächen der Mühlensteine nicht Rüksicht nehmen; denn wenn gleich, nach **Belidor's** Versicherung, diese Flächen dergestalt kegelförmig bearbeitet werden, daſs die oberste Fläche des Bodensteins erhaben und die unterste Fläche des Läufers ausgehöhlt ist, so findet dies doch bei unseren Mühlen nicht statt, weil beide Flächen nach wagerechten Ebenen bearbeitet werden.

Nach den bisherigen Ausmittelungen ist der Widerstand des Getreides unabhängig vom Gewichte des Läufers, und es kann daher nur diejenige Kraft in Rechnung kommen, mit welcher die Getreidekörner der Umdrehung des Läufers, an jeder einzelnen Stelle seiner Grundfläche, entgegenwirken. Um irgend einen Quadratfuſs von der Grundfläche das Läufers über das darunter befindliche Getreide, und in einem gegebenen Abstande von der unteren Fläche, worauf das Getreide liegt, nach wagerechter Richtung fortzubewegen, werde an diesem Quadratfuſs eine Kraft von k Pfund erfordert, so läſst sich einsehen, daſs die Kraft mit der Vergröſserung der Fläche wachsen muſs, und daſs in eben dem Verhältniſs mehr Widerstand entsteht, wie sich die Fläche unter übrigens gleichen Umständen vergröſsert. Man setze den Halbmesser des Läufers $= r$, den Halbmesser der Oeffnung in demselben oder des Läuferauges $= \varrho$, und nehme an, daſs die zur Ueberwältigung des Widerstandes wirkende Kraft am Umfange des Läufers, oder senkrecht am Halbmesser r nach wagerechter Richtung angebracht wäre, so mufs das Moment derselben den einzelnen Momenten des Widerstandes gleich seyn. Für irgend einen Halbmesser x sey der Widerstand auf das Ende des Halbmessers r reduzirt $= R'$, so ist $r R'$ das Moment desselben. Wächst x um dx, so wächst das Moment um $2 \Pi x^2 dx . k$ (wo Π die Zahl 3,14159 . . . bezeichnet), und man erhält das Moment

$$r R' = \int 2 \Pi k x^2 \, dx = \tfrac{2}{3} \Pi k x^3 + \text{const.}$$

Für $x = \varrho$ verschwindet die reibende Fläche, also auch das Moment derselben, daher ist const $= - \frac{2}{3} \Pi k \varrho^3$, und für $x = r$ wird das Integral vollständig, daher, wenn R die Kraft bezeichnet, welche am Umfange des Läufers zur Ueberwältigung des gesammsen Widerstandes erfordert wird, so erhält man

$$R = \tfrac{2}{3} \Pi k \frac{r^3 - \varrho^3}{r}.$$

In diesem Ausdruck ist k sofern eine veränderliche Gröfse, als solche von der Art des Getreides, von der Schärfe und dem Abstande der Mühlensteine von einander und von der Menge des Getreides abhängt, welche in gleichen Zeiten aus dem Rumpf in das Läuferauge fällt. Dieses Einfallen der Getreidekörner aus dem Rumpfe wird durch eine Erschütterung desselben mittelst des Rührnagels bewirkt, welcher bei der jedesmaligen Umdrehung des Läufers den Rumpf einigemal erschüttert, daher man auch annehmen kann, dafs unter übrigens gleichen Umständen, bei jeder Umdrehung des Läufers, gleich viel Getreide verschüttet wird. Hiernach hängt die Menge des in gleichen Zeiten zufallenden Getreides von der Anzahl der Umdrehungen des Läufers in jeder Minute ab; setzt man die Anzahl der Umläufe $= n$, so ist R zugleich eine Function von n, und man erhält die Kraft

$$R = \tfrac{2}{3} \Pi k n \frac{r^3 - \varrho^3}{r}.$$

Will man R nicht von der Anzahl der Umläufe des Läufers, sondern von seiner Geschwindigkeit abhängen lassen, so sey w die Geschwindigkeit, mit welcher sich jeder Punkt im Umfange des Läufers herumdreht; alsdann ist

$2 \Pi r n = 60 . w$, also die Zahl der Umläufe oder

$n = \dfrac{60 w}{2 \Pi r}$, folglich die Kraft

$$R = 20\,k\,w\,\frac{r^3 - \varrho^3}{r^2},$$

woraus folgt, daſs der Widerstand wächst, wenn die Geschwindigkeit des Läufers gröſser wird.

Sind nun aus zureichenden Versuchen die Werthe R, w, r und ϱ bekannt, so kann daraus leicht der Coëfficient

$$k = \frac{r^2\,R}{20\,w\,(r^3 - \varrho^3)}$$

für jede Getreideart bestimmt werden.

Zur besseren Vergleichung der bisher gefundenen Resultate mit den bisher bekannten Angaben zur Bestimmung des Widerstandes, welchen das Getreide der Umdrehung des Läufers entgegensetzt, kann nachstehende Zusammenstellung dienen.

Nach der hier angenommenen Bezeichnung ist, wenn Q das Gewicht des Läufers bezeichnet,

nach Belidor, $R = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{35}\,Q = \frac{2}{105}\,Q$,
nach Lambert, $R = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{24}\,Q = \frac{1}{36} \cdot Q$.

Das Unzureichende dieser Bestimmungen veranlaſste schon Herrn Langsdorf in seinem Lehrbuche der Hydraulik (S. 599.) zwei andere Werthe für den Widerstand R aufzustellen, nämlich

$$R = \frac{8}{3}\,\frac{Q}{n} \text{ oder } = \frac{4}{339}\,r\,Q,$$

und später in seiner Maschinenlehre (S. 304.)

$$R = \frac{16}{7}\,\frac{Q}{n} \text{ oder } = \frac{4}{393}\,r\,Q.$$

Allein hier ist der Widerstand ebenfalls von dem Gewichte des Läufers abhängig, und wenn gleich auf die Anzahl der Umdrehungen des Läufers Rücksicht genommen worden, so ist doch dabei vorausgesetzt, daſs sich der Widerstand vermindert, wenn die Anzahl der Umläufe gröſser wird, welches nicht wahrscheinlich ist.

Aus dem allgemeinen Ausdruck für den Widerstand, welcher auf den Umfang des Läufers reducirt ist, erhält man das mechanische Moment desselben, oder

$$w\,R = \frac{2\,\Pi\,n\,r}{60} \cdot \frac{2}{3}\,\Pi\,n\,k\,\frac{r^3 - \varrho^3}{r} = \frac{\Pi^2\,n^2\,k}{45}\,(r^3 - \varrho^3).$$

Wollte man nun mittelst solcher Versuche, welche bei unterschlächtigen Wassermühlen angestellt sind, den Werth des Coëfficienten k bestimmen, so sey

c die Geschwindigkeit, mit welcher sich das Wasser gegen die Schaufeln des unterschlächtigen Rades bewegt;

v die mittlere Geschwindigkeit von der eingetauchten Schaufelfläche;

M die Wassermenge, welche in jeder Sekunde gegen die im geschlossenen Gerinne befindliche Schaufel stöfst;

h die Höhe des wasserhaltenden Bogens unter der Schaufel, welche den Stofs erhält, oder diejenige vertikale Höhe, welche sich bei einem gebogenen oder Kropfgerinne, zwischen der Mitte der Schaufel, welche den Stofs erhält und der Mitte derjenigen befindet, welche den tiefsten Stand einnimmt;

g die Höhe, von welcher ein Körper in der ersten Sekunde frei fällt $= 15\frac{5}{8}$ rheinländische Fufs, und

γ das Gewicht von einem rheinländischen Kubikfufs Wasser $= 66$ berliner Pfund;

alsdann findet man, aus bekannten hydraulischen Gründen, das mechanische Moment der Kraft

$$= \frac{\gamma}{2g} (cv - v^2 + 2gh) M.$$

Von der Kraft am Wasserrade wird ein Theil auf den Widerstand des Getreides, und der übrige auf die Reibung verwandt, welcher in jedem besondern Falle entweder durch Versuche oder durch Berechnung hinlänglich genau bestimmt werden kann. Diese auf die Reibung verwandte Kraft werde dadurch ausgedrückt, dafs man die gesammte Kraft mit der Zahl μ multiplizirt, so ist das mechanische Moment derjenigen Kraft, welche dem Widerstande des Getreides das Gleichgewicht hält,

$$= (1 - \mu) \frac{\gamma}{2g} (cv - v^2 + 2gh) M.$$

Dieses mufs dem mechanischen Momente des Widerstandes gleich seyn, also

$$\frac{\Pi^2 n^2 k}{45} (r^5 - \varrho^5) = \frac{\gamma}{2g} (1 - \mu) (cv - v^2 + 2gh) M;$$

und hieraus erhält man, nach gehöriger Entwickelung, den Coëfficienten

$$k = \frac{45 \cdot \gamma}{2\,g\,\Pi^2}(1-\mu)\frac{c\,v - v^2 + 2\,g\,h}{n^2(r^3 - \varrho^3)}\,M,$$

oder wenn sämmtliche Längen in rheinländischem Fuſsmaſse und die Gewichte in berliner Pfunden ausgedrückt werden,

$$k = 9{,}6296\,(1-\mu)\,\frac{c\,v - v^2 + 31{,}25\,h}{n^2(r^3 - \varrho^3)}\,M.$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke habe ich, nach einigen bei verschsedenen Mühlen von mir angestellten Beobachtungen, die Werthe von k bestimmt, deren Berechnung ich aber wegen ihrer nur ermüdenden Weitläuftigkeit hier übergehe. Als Mittelresultat fand ich bei Läufern von abweichenden Abmessungen, wenn Roggen auf die gewöhnliche Art gemahlen wird, $k = 0{,}0976$. Dieser Werth, in die für den Widerstand gefundenen Ausdrücke gesetzt, giebt

$$R = 0{,}2044 \cdot n\,\frac{r^3 - \varrho^3}{r} = 1{,}952 \cdot w\,\frac{r^3 - \varrho^3}{r^2}.$$

Untersuchungen
über
die Bahn des Olbersschen Kometen.

Von Herrn Bessel.

1.

Der höchst merkwürdige Himmelskörper, der der Gegenstand dieser Abhandlung ist, wurde am 6. März 1815 von Olbers entdeckt. Seine Helligkeit nahm bis in den Mai, wo man ihn bei einiger Aufmerksamkeit mit unbewaffneten Augen sehen konnte, zu. Ihre Wiederabnahme entzog ihn um die Mitte des Julius den Blicken der meisten Astronomen; allein es gelang Gaufs, ihn noch bis zum 25. August mit seinem 10füfsigen Herschelschen Reflector zu beobachten.

Der Kern des Kometen war zwar nicht scharf begrenzt; allein der Durchmesser seines helleren Theils war nicht so grofs, dafs er eine sehr merkliche Unsicherheit in den Beobachtungen hätte veranlassen können. Die zahlreichen bekannt gewordenen Beobachtungsreihen bestimmen daher seine scheinbare Bahn am Himmel mit gröfserer Genauigkeit, als man im Allgemeinen bei einem Kometen mit nicht scheibenartig erscheinendem Kerne erwarten kann.

Die bis jetzt bekannt gewordenen und zu der Berechnung der Bahn benutzten Beobachtungen findet man unten nach der Zeitfolge geordnet. Olbers gab die seinigen im astronomischen Jahrbuche für 1818, mit den zu einer neuen Berechnung erforderlichen Umständen; die meinigen werden, ganz im Originale, in der zweiten Abtheilung der Beobachtungen auf der Königsberger Sternwarte bekannt werden; die von Oriani empfing ich in derselben Form. Von den übrigen Beobachtungen würde eine Bekanntmachung auf ähnliche Weise unseren Nachkommen ohne Zweifel sehr schätzbar seyn.

2.

Bald nach den ersten Beobachtungen dieses Kometen berechneten mehrere Astronomen seine Bahn in der parabolischen Hypothese. Ich selbst fand am 1. April folgende Elemente:

Durchgangszeit durch das Perihelium	Apr. 24,75325 (Paris).
Aufsteigender Knoten	82° 41′ 50″
Neigung	44 59 54
Abstand des Perihels vom Knoten . .	63 41 37
Log. des kürzesten Abstandes . . .	0,094654
Bewegung	direct.

Als diese Elemente sich so stark vom Himmel entfernten, daſs eine bedeutende Verbesserung zu erwarten war, wurden auf die Beobachtungen vom 11. März, 11. April und 20. Mai neue gegründet, nämlich:

Durchgangszeit durch das Perihelium	Apr. 25,11267 (Paris).
Aufsteigender Knoten	82° 45′ 21″,2
Neigung	44 52 10,3
Abstand des Perihels vom Knoten . .	64 18 16,7
Log. des kürzesten Abstandes . . .	0,092156.

So wie die ersten die ihnen zum Grunde liegenden Beobachtungen fast vollständig darstellen, so war dieses noch mehr bei den anderen der Fall. Dennoch wichen sie von den zwischenliegenden Beobachtungen, vorzüglich von den geraden Aufsteiguugen, bedeutend ab: zwischen dem 11. März und 11. April gaben sie die geraden Aufsteigungen merklich zu klein; zwischen dem 11. April und 20. Mai bis auf 4′ zu groſs, und schon am 26. Mai wieder fast 4′ zu klein. Das Fortschreiten dieser Fehler war zu regelmäſsig, um es auf Rechnung der Beobachtungen schreiben zu können: es ging also die bedeutende Abweichung der Bahn von einer Parabel daraus hervor; allein die Uebereinstimmung der Parabel mit drei vollständigen Beobachtungen zeigte, daſs hier einer von den Fällen vorhanden war, wo eine Bahn durch drei Beobachtungen fast unbestimmt bleibt.

3. Bei

5.

Bei der Gröſse und schnellen Aenderung der Fehler konnte keine der angeführten Parabeln benutzt werden, um eine Anzahl einzelner Beobachtungen zu einigen der genaueren Untersuchung zum Grunde zu legenden mittleren Oerter zu vereinigen. Als daher eine neue Bahnbestimmung gesucht wurde, die diesem Zwecke entsprechen sollte, wurden andere Beobachtungen, vom 1. und 26. April und 20. Mai, zum Grunde gelegt; allein die Unbestimmtheit blieb so groſs, daſs die sich an diese Beobachtungen genau anschlieſsende Bahn eine Hyperbel war, die sich der geraden Linie weit mehr näherte, als der Parabel. Auch durch sie wurde der Zweck keinesweges erreicht.

In den letzten Tagen des Mai's entschloſs ich mich daher, einzelne Beobachtungen zu benutzen, und eine Bahn zu suchen, die die Beobachtungen vom 11. März und 20. Mai genau, und drei zwischenliegende so gut als möglich, darstellen sollte. Die Elemente, die dieses leisteten, waren die folgenden:

Durchgangszeit durch das Perihelium	Apr. 26,01057 (Paris).
Aufsteigender Knoten	83° 27′ 36″,6
Neigung	44 29 8,1
Entfernung des Perihels vom Knoten .	65 34 48,2
Log. der kürzesten Entfernung . . .	0,0837829
Excentricität	0,9305693
Halbe groſse Axe	17,4675
Umlaufszeit	75,0039 Jahre.

Da mir Olbers seine Beobachtungen bis zum 5. Mai mitgetheilt hatte, so konnten diese Elemente schon mit einer ziemlich zahlreichen Reihe von Ortsbestimmungen verglichen werden. Sie gewährten allenthalben eine so befriedigende Uebereinstimmung, statt der groſsen Fehler der Parabeln, daſs keineswegs mehr an der bedeutenden Verschiedenheit der Bahn von einer Parabel gezweifelt werden konnte. Vergleichungsweise mit den vorigen Fehlern war diese Uebereinstimmung so groſs, und blieb es auch später im Juni, daſs man sogar die sehr nahe Richtigkeit der herausgebrachten Umlaufszeit schon jetzt annehmen konnte. Als ich in der Mitte des Juli die von Gauſs auf fünf Beobachtungen, deren äuſsere vom 6. März und 12. Juni waren, gegründete Bahn erhielt, war daher die Uebereinstimmung der Umlaufszeit, bis auf vier Jahre, nicht mehr unerwartet.

4

Indessen häufte sich, bei meiner letzten Beobachtung vom 13. Juli, der Fehler der elliptischen Elemente bis zu fast einer Minute an. Da überdies **Olbers**, **von Lindenau**, **Gaufs** und **Struve** mir ihre Beobachtungen mitgetheilt hatten, so war dadurch eine so zahlreiche Reihe vorhanden, dafs ich mit Grunde hoffen durfte, durch eine neue Bestimmung einen bedeutend höheren Grad von Zuverlässigkeit erreichen zu können. Mittelst der ersten Elemente wurden daher fünf mittlere Oerter bestimmt, deren äufsere 108 Tage von einander entfernt waren. An diese schliefsen sich die folgenden zweiten Elemente so genau als möglich an:

Durchgangszeit durch das Perihel . .	Apr. 26,00364 (Paris).
Aufsteigender Knoten	83° 28′ 46″,18
Neigung	44 29 53, 71
Entfernung des Perihels vom Knoten .	65 33 4[illegible], 95
Log. des kürzesten Abstandes	0,08367950
Excentricität	0,93112771
Halbe grofse Axe	17,60964
Umlaufszeit	73, 89682 Jahre.

(Der Knoten ist als siderisch ruhend betrachtet, und auf die Nachtgleiche des 1. Januar 1815 bezogen.)

Diese Elemente stimmen so nahe, wie es sich erwarten liefs, mit den von **Nicolai** aus den Beobachtungen bis zum Ende des Junius berechneten; noch näher aber mit denen, die dieser geschickte Rechner nach dem Schlusse aller Beobachtungen herausbrachte. — Indessen erhielt ich durch die Güte des Professors **Bode** die sehr schöne und zahlreiche Beobachtungsreihe von **Triesnecker**; durch die Güte des Oberstlieutenants **von Lindenau** eine Reihe von 11 im Juli in Mailand gemachten, und später noch einige Verbesserungen seiner eigenen sehr schönen Beobachtungen. Auch theilte **Gaufs** mir seine späteren Beobachtungen mit. — Dadurch war die Anzahl der beobachteten Oerter auf nahe an 200 gewachsen, und die Zeit, die sie umfassen, um 43 Tage vermehrt, so dafs ich nun glaubte, die **endliche Bestimmung der Bahn** unternehmen zu dürfen.

6.

Da der Komet, wegen der Kürze seiner Umlaufszeit, so merkwürdig ist, so glaube ich, die ferneren Untersuchungen mit allen zu der Beurtheilung ihrer Genauigkeit nöthigen Einzelnheiten angeben zu müssen.

Alle mir bekannt gewordenen Beobachtungen wurden mit den zweiten Elementen verglichen, wovon folgendes die Resultate sind:

1815		Beobachter	M. Z. in Paris	Beobachtetete AR.	Beobachtetete Decl.	Fehler AR.	Fehler Decl.
März	6	Olbers . . .	10ᵁ 31′ 0″	49° 6′ 33″	32° 7′ 7″	+ 30″,2	— 31″,6
—	9	—	9 51 57	49 59 14	33 36 4	+ 22,3	— 15,5
—	10	—	7 18 51	50 16 1	34 3 6	+ 31,6	— 26,1
—	11	—	7 31 9	50 36 12	34 33 6	+ 5,4	— 7,8
—	16	—	8 31 36	52 25 33	37 4 53,5	— 1,8	+ 3,9
—	18	—	9 46 36	53 14 37	38 6 46	+ 33,5	+ 14,2
—	19	—	8 0 16	53 38 29	38 35 34	+ 8,3	— 29,7
—	20	—	8 2 59	54 4 39	—	+ 4,2	—
—	-	Gaufs . . .	10 2 43	54 7 1	39 7 47	— 5,9	+ 8,9
—	21	Triesnecker	6 45 17	54 29 53	39 34 11	+ 12,0	— 3,5
—	-	—	7 4 37	54 30 14	39 34 4	+ 12,8	+ 27,7
—	-	—	7 8 17	54 30 13	39 34 36	+ 18,0	+ 0,3
—	-	—	7 50 19	54 31 24	39 35 50	— 5,8	— 21,1
—	-	Olbers . . .	8 37 26	54 32 10	39 36 9	+ 1,6	+ 19,4
—	-	Gaufs . . .	9 41 14	54 33 21	39 36 57	+ 3,0	+ 51,2
—	25	Triesnecker	6 50 2	56 25 17	41 36 41	+ 8,3	— 65,3
—	-	Gaufs . . .	9 16 15	56 28 50	41 38 5	— 19,1	+ 34,3
—	29	Triesnecker	7 11 32	58 35 10,5	43 36 59,5	— 0,2	+ 22,7
—	-	Olbers . . .	8 51 43	58 36 53	—	+ 40,0	—
—	-	Bessel . . .	9 20 36	58 38 56,1	43 40 14,5	— 40,0	— 12,2
—	-	Olbers . . .	10 21 48	58 39 22	43 41 32	+ 19,7	— 12,8
—	-	Lindenau .	11 32 51	58 41 26	43 42 37	+ 0,7	+ 10,3
—	30	—	7 42 24	59 10 51	—	— 14,0	—
—	-	Triesnecker	7 56 21	59 10 45	44 7 55	+ 12,2	+ 38,9
—	-	Olbers . . .	8 19 2	59 11 48	44 9 27	— 17,5	— 24,4
—	-	Gaufs . . .	9 20 34	59 13 3	44 10 27	— 2,0	— 7,7
—	-	Struve . . .	9 24 59	59 13 0	—	+ 7,6	—
—	-	Bessel . . .	12 10 14	59 17 6,1	44 13 26,2	+ 8,2	+ 24,8
—	31	Triesnecker	7 9 18	59 45 13	44 38 6,5	+ 17,1	— 16,9
—	-	Lindenau .	7 54 42	59 46 18	44 39 46	+ 20,4	— 59,5
—	-	Struve . . .	8 8 41	59 46 49	44 36 51	+ 10,4	—

1815		Beobachter	M. Z. in Paris	Beobachtete AR.	Beobachtete Decl.	Fehler AR.	Fehler Decl.
April	1	Triesnecker	7ᵘ 7′ 52″	60° 21′ 49″	45° 7′ 42″	+ 22″,5	+ 18″,1
—	-	Bessel . . .	8 0 30	60 23 27,5	45 8 58	+ 5,3	+ 27,5
—	-	Olbers . . .	9 2 9	60 24 57	45 10 31	+ 11,9	— 8,3
—	-	Lindenau .	9 42 45	60 26 1	45 10 55	+ 11,1	+ 18,2
—	-	Struve . . .	10 47 5	60 28 1	45 11 54	— 8,8	+ 39,5
—	2	Triesnecker	8 30 58	61 2 8	45 39 48	+ 3,7	+ 5,0
—	-	Gauſs . . .	8 41 32	61 2 27	45 39 57	+ 1,6	+ 9,4
—	-	Lindenau .	10 8 56	61 4 46	45 41 30	+ 2,5	+ 25,1
—	3	Triesnecker	8 24 48	61 40 51	46 10 24	+ 8,3	— 21,9
—	4	Struve . . .	8 43 59	62 21 24	46 40 41	+ 15,1	— 24,6
—	6	Triesnecker	7 19 38	63 43 29	47 37 6	— 37,3	+ 76,1
—	-	Olbers . . .	9 37 51	63 48 41:	47 41 23	—	— 10,5
—	7	Triesnecker	7 31 38	64 27 7	48 8 8	— 13,5	+ 14,8
—	-	Olbers . . .	8 17 49	64 28 41	—	— 22,3	—
—	-	—	8 55 48	64 30 8	—	— 39,1	—
—	-	Struve . . .	9 15 53	64 29 53	—	+ 13,2	—
—	8	Triesnecker	7 25 31	65 11 41	48 38 33	— 1,7	— 38,1
—	-	Olbers . . .	8 57 2	65 14 45	48 39 38	— 11,7	+ 8,9
—	9	Triesnecker	7 49 26	65 59 34	49 7 28	+ 9,1	+ 28,0
—	-	Struve . . .	8 16 5	65 59 42,6	49 8 39,1	— 7,4	— 11,2
—	-	—	12 38 11	66 8 18,2	49 13 32,9	— 2,1	+ 14,1
—	10	Bessel . . .	7 36 15	66 46 5,1	49 36 46,4	— 8,1	+ 17,1
—	-	Olbers . . .	8 41 24	66 48 8	49 38 14,3	+ 0,3	+ 8,7
—	-	Lindenau .	9 7 22	66 49 9	49 38 35	— 8,2	+ 19,1
—	11	Olbers . . .	8 36 12	67 37 19,7	50 6 37,9	— 13,3	+ 52,4
—	-	Lindenau .	9 35 22	67 39 6	50 8 21	+ 3,7	+ 20,4
—	-	Bessel . . .	14 0 56	67 47 52,8	50 14 14,2	+ 37,0	— 13,2
—	13	Struve . . .	8 39 53	69 20 5	51 5 37	— 6,3	— 8,2
—	-	Olbers . . .	10 44 2	69 24 54	51 8 3	— 21,6	— 6,0
—	14	—	8 27 21	70 13 21	51 34 27	— 10,0	— 33,1
—	-	Struve . . .	9 0 41	70 13 0	51 33 32	+ 87,1	+ 60,6
—	15	Olbers . . .	10 11 53	71 12 2	52 4 17	+ 31,3	+ 5,5
—	16	Triesnecker	7 48 21	72 3 35	52 29 50	+ 16,3	— 6,6

1815		Beobachter	M. Z. in Paris	Beobachtete AR.	Beobachtete Decl.	Fehler AR.	Fehler Decl.
April	17	Triesnecker	7ᵁ38′ 1″	73° 3′ 9″	52°57′22″	— 66″,0	+ 2″,9
—	-	Struve . . .	7 41 23	73 2 8	52 56 59	+ 3, 3	+ 29, 1
—	-	Bessel . . .	8 18 40	73 3 31,7	52 58 0,0	+ 12, 0	+ 10, 5
—	-	Olbers . . .	9 23 37	73 6 21	52 59 45	+ 4, 2	— 19, 3
—	18	Triesnecker	7 17 33	74 1 28	53 24 17	+ 5, 6	+ 19, 9
—	19	—	8 9 0	75 6 0	53 52 41	— 0, 9	+ 8, 5
—	24	Lindenau .	9 22 16	80 50 34	56 4 4	— 20, 0	+ 5, 3
—	-	Struve . . .	10 0 59	80 52 50	56 4 10	— 16, 6	+ 37, 7
—	-	Olbers . . .	10 6 59	80 52 37	56 4 28	— 6, 9	+ 27, 0
—	-	—	10 25 50	80 53 40	—	— 11, 2	—
—	25	—	9 7 42	82 4 26	56 28 21	— 30, 2	+ 9, 0
—	-	Lindenau .	9 16 24	82 4 31	56 28 30	— 7, 8	+ 4, 5
—	-	Struve . . .	9 40 59	82 5 46	56 28 45	— 4, 7	+ 15, 2
—	26	Bessel . . .	9 53 45	83 21 55,1	56 52 24,2	+ 24, 4	+ 21, 5
—	-	Struve . . .	10 6 59	83 23 42	56 53 19	+ 5, 8	+ 0, 4
—	27	Olbers . . .	9 35 52	84 40 51	—	+ 11, 4	—
—	30	Lindenau .	9 47 42	88 51 54	58 21 55	+ 36, 4	+ 4, 0
Mai	1	Olbers . . .	8 57 30	90 17 53	58 41 30	— 10, 0	+ 7, 2
—	-	Triesnecker	9 14 24	90 18 58	58 41 23	— 12, 0	+ 27, 8
—	-	Lindenau .	9 29 29	90 19 17	58 42 3	+ 25, 4	+ 0, 3
—	2	Triesnecker	7 58 47	91 44 18	59 0 39	+ 19, 6	— 18, 9
—	-	Lindenau .	9 29 51	91 50 15	59 1 23	+ 11, 1	+ 8, 3
—	-	Bessel . . .	10 19 25	91 54 24,1	59 2 19,2	— 47, 5	— 9, 9
—	-	Olbers . . .	10 32 29	91 54 16	59 2 3	+ 10, 4	+ 17, 0
—	3	Triesnecker	7 59 47	93 17 36	59 18 35	+ 1, 9	+ 21, 0
—	-	Lindenau .	9 48 24	93 24 58	59 19 57	— 13, 5	+ 20, 1
—	4	Triesnecker	8 14 13	94 53 48	59 36 59	+ 8, 7	— 14, 9
—	5	—	8 31 5	96 33 3	59 53 53	— 14, 2	— 23, 6
—	-	—	8 35 53	96 33 9	59 54 11	+ 1, 0	— 38, 2
—	-	Olbers . . .	10 47 43	96 41 55	59 53 45:	+ 19, 5	—
—	6	Triesnecker	8 5 8	98 10 56	60 8 27	+ 0, 4	+ 16, 0
—	7	—	8 14 30	99 53 51	60 23 5	+ 16, 9	+ 4, 1
—	8	—	8 20 36	101 39 19	60 35 33	— 7, 9	+ 48, 0

1815		Beobachter	M. Z. in Paris	Beobachtete AR.	Beobachtete Decl.	Fehler AR.	Fehler Decl.
Mai	8	Struve . . .	9h 21′ 53″	101 43′ 3″	60° 35′ 46″	+ 38,3	+ 65″,3
—	9	Triesnecker	8 8 35	103 25 19	60 47 30	— 17,5	+ 38,8
—	10	Lindenau .	9 19 8	105 20 4	60 59 18	— 53,1	— 6,4
—	11	Triesnecker	8 20 15	107 5 26	61 7 48	— 1,7	+ 12,3
—	-	Lindenau .	9 57 7	107 13 8	61 8 38	— 13,0	— 4,8
—	-	Olbers . . .	10 52 52	107 16 50:	61 8 15	—	+ 36,8
—	12	Triesnecker	8 27 15	108 58 37	61 15 29	— 7,7	+ 19,8
—	-	Olbers . . .	10 5 15	109 5 51:	—	—	—
—	13	Triesnecker	8 18 24	110 51 37	61 21 44	+ 20,2	+ 23,3
—	-	Olbers . . .	10 25 26	111 1 41	61 22 17	+ 24,7	+ 15,7
—	14	—	10 20 26	112 57 11	61 27 16	+ 16,5	— 4,9
—	15	—	10 32 4	114 55 29	61 30 12	— 2,2	+ 5,7
—	16	Triesnecker	9 7 55	116 46 39	61 31 46	+ 1,2	— 1,7
—	-	Lindenau .	9 26 50	116 48 32	61 31 34	— 18,4	+ 10,9
—	-	Olbers . . .	10 38 26	116 53 57	61 31 45	+ 11,1	+ 1,0
—	20	Triesnecker	8 23 29	124 41 39	61 22 8	+ 16,9	— 35,6
—	-	Bessel . . .	9 46 19	124 48 39,3	61 20 28	+ 11,3	+ 42,3
—	-	Lindenau .	9 56 4	124 49 37	61 21 21	+ 2,7	— 12,6
—	25	Triesnecker	10 23 28	134 49 14	60 28 11	— 44,5	+ 48,2
—	26	Bessel . . .	10 9 20	136 42 44,5	60 12 55,9	+ 73,0	+ 34,4
—	-	Lindenau .	10 33 45	136 45 57	60 13 12	— 1,6	+ 2,3
—	-	Olbers . . .	10 38 11	136 46 9	60 12 17	+ 8,0	+ 58,6
—	27	—	10 48 21	138 43 59:	59 55 42	—	+ 12,2
—	28	—	10 38 39	140 35 57	—	— 10,2	—
—	-	—	11 4 48	140 38 18	—	— 28,3	—
—	29	Triesnecker	8 48 44	142 19 42	59 18 23	— 3,2	— 5,1
—	-	Olbers . . .	10 33 5	142 27 52	59 16 44	— 8,5	+ 0,6
—	30	Triesnecker	8 41 13	144 9 59	58 57 1	— 9,0	— 32,2
—	-	Lindenau .	10 0 18	144 15 36	58 55 10	+ 15,3	+ 3,0
—	-	Olbers . . .	10 40 21	144 18 18	58 53 51	+ 36,3	+ 43,6
—	31	Triesnecker	8 32 48	145 58 2	58 32 39	+ 5,0	+ 30,9
—	-	Bessel . . .	9 10 51	146 1 5,9	—	— 8,5	—
Juni	1	Triesnecker	8 53 2	147 46 26	58 8 7	+ 6,2	— 15,1

1815		Beobachter	M. Z. in Paris	Beobachtete AR.	Beobachtete Decl.	Fehler AR.	Fehler Decl.
Juni	1	Olbers . . .	11ᵘ 8′ 13″	147° 56′ 28″	—	— 0,8	—
—	-	Bessel . . .	11 18 51	147 57 47,2	—	— 34,5	—
—	-	Olbers . . .	11 28 23	147 58 5	—	— 9,0	—
—	4	Lindenau .	10 18 41	153 0 24	56 42 40	+ 12,3	+ 7,6
—	-	Bessel . . .	10 52 7	153 2 47,6	—	+ 6,9	—
—	5	Lindenau .	9 55 23	154 37 13	56 13 15	— 1,9	— 24,3
—	-	Olbers . . .	11 25 8	154 43 20,5	56 10 5	— 2,8	+ 48,5
—	6	Triesnecker	9 7 45	156 10 18	55 42 30	— 10,6	— 13,6
—	7	—	8 53 25	157 43 6	55 10 4	— 3,9	— 13,6
—	8	—	8 54 10	159 14 46	54 35 30	— 4,6	+ 28,0
—	9	—	9 2 46	160 44 23	54 1 2	+ 11,3	— 10,6
—	-	Olbers . . .	11 12 54	160 52 1	53 56 39	+ 30,6	+ 59,1
—	11	Triesnecker	9 31 47	163 37 58	52 48 0	+ 20,3	— 35,2
—	12	—	8 56 7	164 59 3	52 10 40	— 2,5	+ 0,9
—	-	Bessel . . .	9 56 12	165 1 51,0	52 9 15,3	+ 33,7	— 9,9
—	-	Gauſs	10 23 8	165 3 3	52 8 25	+ 52,8	— 3,0
—	15	Triesnecker	9 43 5	168 56 45	50 11 43	+ 28,2	+ 3,5
—	-	—	10 26 48	168 59 8	50 10 41	+ 22,2	— 8,4
—	16	—	9 14 35	170 9 56	49 31 6	+ 17,0	+ 55,2
—	-	—	9 30 38	170 10 44	49 30 46	+ 18,1	+ 47,7
—	18	—	8 50 57	172 31 59	48 10 6	+ 24,4	— 12,1
—	19	—	9 34 47	173 43 1	47 26 8	+ 21,4	+ 19,2
—	24	—	8 50 53	179 0 23	43 50 54	+ 16,1	+ 33,5
—	-	—	9 11 42	179 1 7	43 51 46	+ 24,0	— 56,7
—	25	—	8 56 25	180 0 16	43 6 50	— 9,7	+ 23,3
—	-	Bessel . . .	10 55 9	180 5 4,9	43 2 47,3	— 10,1	+ 46,2
—	26	Triesnecker	9 12 6	180 57 51	42 22 50	+ 41,4	— 20,6
—	-	—	9 12 51	180 57 56	42 22 54	+ 38,2	— 25,9
—	27	—	8 53 46	181 54 16	41 39 7	+ 0,3	— 26,3
—	-	Olbers . . .	10 23 1	181 57 19	41 35 47	+ 24,2	+ 7,8
—	-	Bessel . . .	11 11 12	181 59 49,8	41 35 2,5	— 14,9	— 37,7
—	29	Oriani . . .	9 5 52	183 43 26,6	40 9 7,2	+ 18,4	+ 10,6
—	-	Bessel . . .	10 25 53	183 46 24,9	40 6 11,1	+ 16,5	+ 36,9

1815		Beobachter	M. Z. in Paris	Beobachtete A R.	Beobachtete Decl.	Fehler A R.	Fehler Decl.
Juni	29	Olbers . . .	10ᵁ 39′ 39″	183° 47′ 4″	40° 6′ 36″	+ 8″,3	— 15″,1
—	30	Gauſs	10 18 49	184 39 24	39 22 5	— 21,8	+ 22,9
—	-	Olbers . . .	10 58 5	184 40 40	39 21 20	— 12,9	— 5,4
Juli	1	Triesnecker	9 7 25	185 27 49	38 40 20	+ 8,6	— 12,4
—	-	Oriani . . .	9 22 45	185 27 52,9	38 39 23,4	+ 37,4	+ 15,9
—	2	—	9 1 37	186 17 53,3	37 55 41,6	+ 15,7	+ 5,7
—	-	Triesnecker	9 7 49	186 18 18	37 56 3	+ 3,6	— 27,3
—	3	Olbers . . .	11 3 4	187 11 9	37 7 50	+ 25,0	— 15,3
—	4	Bessel . . .	10 19 58	187 58 19,7	—	+ 2,0	—
—	7	Oriani . . .	9 0 9	190 14 41,4	34 14 54,6	+ 11,0	— 7,5
—	10	—	9 22 12	192 27 3,8	32 3 18,8	— 13,4	+ 17,3
—	12	—	8 51 59	193 48 45,3	30 38 44,9	+ 51,3	— 0,2
—	13	—	9 20 7	194 30 53,3	29 55 28,5	+ 15,2	— 1,9
—	-	Gauſs	10 26 57	194 32 52	29 53 54,0	+ 8,7	— 25,7
—	-	Bessel . . .	10 37 40	194 33 5,0	29 53 19,5	+ 13,6	— 10,3
—	-	Olbers . . .	10 44 37	194 33 16	29 53 6	+ 14,5	— 8,9
—	14	Oriani . . .	9 18 48	195 10 41,5	29 13 16,5	+ 28,2	+ 2,8
—	15	—	9 6 52	195 49 55,0	28 31 44,6	+ 19,2	+ 6,0
—	17	—	9 7 46	197 6 25,8	27 9 15,4	+ 47,7	— 4,3
—	25	—	9 14 1	201 53 29,5	21 53 19,2	— 2,5	— 14,5
—	27	Gauſs	9 34 56	203 0 56,0	—	— 5,3	—
—	29	—	9 43 35	204 6 5,0	19 24 13	+ 21,4	— 18,6
August	4	—	9 43 44	207 14 8,0	15 53 49	+ 8,5	— 5,1
—	25	—	8 31 21	217 1 31	5 33 36	+ 14,8	— 18,3

In dieser Vergleichung sind die von den Beobachtern selbst als zweifelhaft angegebenen Oerter nicht mit aufgenommen. Doch habe ich die von Olbers am 5. Juni beobachtete Declination nicht ausgeschlossen, indem der Grund, der sie als zweifelhaft erscheinen liefs, später durch die Aenderung der von Lindenauschen Declination verschwand. Von den Treisneckerschen Beobachtungen habe ich aber, aufser den zweifelhaften, noch folgende vier ausgeschlossen:

April

April 10	$7^U 24' 32''$	$66^\circ 46' 34''$	$49^\circ 37' 30''$	$-60'',4$	$-40'',7$
- 11	7 29 31	67 36 28	50 7 1	$-99,8$	$-51,6$
- 13	7 45 34	69 15 34	51 3 45	$+144,8$	$+39,9$
- 14	7 31 56	70 8 28	51 30 14	$+161,1$	$+154,4$

Die beiden ersten, weil sie ohne Zweifel auf einer unrichtig angenommenen Position No. 235 Persei Bode beruhen, dessen Ort ich durch eigene Beobachtungen, für 1815,

$$AR = 67^\circ 19' 59'',1. \text{ Decl.} = 49^\circ 36' 25'',7$$

ſinde; die beiden andern, weil ihnen offenbar der unrichtige Ort eines andern Sterns zum Grunde liegt.

Von den Struveschen Beobachtungen muſste die Declination am 31. März, die einen Fehler von $+132'',2$ giebt, wegen eines Zweifels in der Declination des verglichenen Sterns, ausgeschlossen werden. Ferner, zwei vom 11. und 12. April, die über 20′ von den Elementen abweichen, und aus einem gleichen Grunde fehlerhaft sind. Die beiden Beobachtungen vom 9. April wurden aber beibehalten, obgleich sie auf No. 235 Persei Bode beruhen, indem der Beobachter mich in den Stand setzte, sie nach der oben angegebenen Bestimmung des Sterns neu zu reduciren. Die Olbersschen Beobachtungen vom 10. und 11. April wurden ebenfalls durch diese richtigere Sternbestimmung verbessert.

Die Beobachtungen von Oriani theilte mir, wie oben erwähnt wurde, von Lindenau im Originale mit; sie wurden daher nach den Sternbestimmungen in Piazzi's neuestem Verzeichnisse, die ich, wo es geschehen konnte, durch eine Vergleichung mit dem Bradleyschen Verzeichnisse für 1755 auf die Beobachtungszeit brachte, mit gehöriger Rücksicht auf die Strahlenbrechung reducirt. Sie beruhen auf dem bekannten Aequatorealsector der Mayländer Sternwarte, und können nach folgenden Angaben neu reducirt werden:

	Vergl. Sterne		M. Z. in Mayland	Beob. Unterschied A.R.	Beob. Unterschied Decl.	Strahlenbr. A.R.	Strahlenbr. Decl.
Juni 29	6 Can.	Ven. Fl.	9ᵘ 33′ 18″	− 27′ 16″,6	+ 0° 6′ 8″,0	0″,0	+ 0″,1
Juli 1	—	—	9 50 11	+ 1° 17 9,2	− 1 23 34	+ 0,5	− 1,7
- 2	—	—	9 29 3	+ 2 7 9,3	− 2 7 15	+ 0,8	− 2,5
- 7	H. XII.	No. 244.	9 27 35	− 2 39 0,4	+ 1 27 57	− 0,2	+ 1,9
- 10	H. XII.	No. 268.	9 49 38	− 1 53 0,3	+ 2 1 44	+ 0,2	+ 3,0
- 12	H. XII.	No. 244.	9 19 25	+ 0 55 3,2	− 2 8 8	+ 0,1	− 2,8
- 13	—	—	9 47 33	+ 1 37 10,8	− 2 51 23	+ 0,5	− 4,2
- 14	H. XII.	No. 268.	9 46 14	+ 0 50 37,7	− 0 48 14	− 0,1	− 1,3
- 15	—	—	9 34 18	+ 1 29 51,3	− 1 29 45	− 0,2	− 2,2
- 17	—	—	9 35 12	+ 2 46 20,0	− 2 52 14	− 0,1	− 4,4
- 25	H. XIII.	No. 36.	9 41 27	+ 5 0 0,8	+ 1 7 20	+ 0,4	+ 2,4

6.

Alle verglichene Beobachtungen wurden nun zur Herleitung von 10 mittleren Oertern des Kometen benutzt, deren jeder sich auf die innerhalb 16 auf einander folgenden Tagen gemachten gründet, mit Ausnahme des letzten, für welchen eine längere Zwischenzeit genommen werden mufste. Wegen der fast vollkommenen Uebereinstimmung der verglichenen Elemente mit den Beobachtungen, konnten die Fehler, in der kurzen Zwischenzeit von 16 Tagen, als der Zeit proportional, und daher die mittleren Oerter als unmittelbar beobachtete, angesehen werden. Die so herausgebrachten mittleren Fehler der verglichenen Ephemeride des Kometen sind folgende:

von	März	6	bis	März	21.	incl.	+ 11″,29.	− 0″,70.	15	und	14	Beobb.
-	März	25	—	April	7	—	0,77	4,02.	31	—	25	-
-	April	8	—	April	19	—	+ 2,29	+ 7,30.	23	—	23	-
-	April	24	—	Mai	9	—	+ 0,47	+ 11,18.	29	—	26	-
-	Mai	10	—	Mai	25	—	− 2,40	+ 9,38.	15	—	16	-
-	Mai	26	—	Juni	9	—	+ 2,60	+ 11,28.	25	—	19	-
-	Juni	11	—	Juni	26	—	+ 20,98	+ 3,59.	16	—	16	-
-	Juni	27	—	Juli	12	—	+ 9,37	− 1,76.	17	—	16	-
-	Juli	13	—	Juli	27	—	+ 15,48	− 7,10.	9	—	8	-
-	Juli	29	—	Aug.	25	—	+ 14,90	− 14,00.	3	—	3	-

Diese Fehler, mit verkehrtem Zeichen an die aus der Ephemeride genommenen Oerter, für die Tage, auf welche das Mittel der Beobachtungszeiten fällt, angebracht, geben folgende scheinbare, jedoch von der Parallaxe befreiete, Oerter des Kometen:

	M. Z. in Paris	A. R.	Decl.	Anzahl derBeobb.
März 17	$9^U 14' 46'',5$	$52° 49' 56'',71$	$37° 36' 9'',50$	15 und 14
- 31	9 14 50	59 48 44,13	44 40 25,98	31 — 25
April 13	9 14 45	69 21 19,21	51 6 7,00	23 — 23
Mai 1	9 14 30,5	90 18 53,63	58 41 42,72	29 — 26
- 15	9 14 19,5	114 49 16,80	61 30 3,92	15 — 16
Juni 2	9 14 19,5	149 33 0,70	57 40 54,12	25 — 19
- 17	9 14 44	171 22 33,32	48 50 50,81	16 — 16
Juli 2	9 15 37	186 18 32,53	37 55 25,36	17 — 16
- 16	9 16 55	196 29 4,02	27 50 13,20	9 — 8
Aug. 9	9 19 57,5	209 42 11,50	13 10 47,00	3 — 3

Diese Oerter wurden auf die Zeit, wo das Licht von dem Kometen ausging, und auf die mittlere Ebene des Aequators und das mittlere Aequinoctium des 1. Januar 1815 reducirt; jedoch ohne Rücksicht auf die Solarnutation, indem die Beobachter sie bei der Berechnung der Oerter der Sterne zu vernachlässigen pflegen. So ergaben sich folgende zur Grundlage der ferneren Untersuchung angenommene Oerter des Kometen:

	M. Z. in Paris	A. R.	Decl.	Anzahl derBeobb.
März 17	$9^U 3' 2''$	$52° 50' 4'',92$	$37° 36' 11'',95$	15 und 14
- 31	9 3 2	59 48 50,68	44 40 27,72	31 — 25
April 13	9 3 2	69 21 24,07	51 6 8,14	23 — 23
Mai 1	9 3 2	90 18 55,66	58 41 43,29	29 — 26
- 15	9 3 2	114 49 15,20	61 30 4,47	15 — 16
Juni 2	9 3 2	149 32 57,45	57 40 55,39	25 — 19
- 17	9 3 2	171 22 28,65	48 50 52,89	16 — 16
Juli 2	9 3 2	186 18 26,41	37 55 28,19	17 — 16
- 16	9 3 2	196 28 56,34	27 50 16,63	9 — 8
Aug. 9	9 3 2	209 42 0,75	13 10 51,25	3 — 3

7.

Die Sonnenlängen, vom mittleren Aequinoctio an gezählt, die Breiten und die Logarithmen der Entfernungen, findet man für die Zeitpunkte dieser Beobachtungen aus Carlinis Tafeln:

	Länge	Breite	Log. R.
März 17	$11^z 26^\circ 25' 37'',1$	$-0'',46$	9,9982033
- 31	0 10 16 45,8	$-0,15$	9,9999401
April 13	0 23 3 2,6	$-0,51$	0,0015618
Mai 1	1 10 34 27,8	$-0,70$	0,0036244
- 15	1 24 6 12,0	$+0,22$	0,0049967
Juni 2	2 11 22 42,7	$-0,83$	0,0063411
- 17	2 25 42 54,1	$+0,43$	0,0069911
Juli 2	3 10 0 55,9	$-0,51$	0,0072329
- 16	3 23 22 7,8	$+0,39$	0,0070060
Aug. 9	4 16 19 31,7	$+0,82$	0,0057754

Um indessen die Untersuchung von den Fehlern der Sonnentafeln zu befreien, wurden diese durch die, zwischen dem 8. März und 29. August, auf der Königsberger Sternwarte gemachten Beobachtungen bestimmt. Die Tagebücher der Sternwarte enthalten in dieser Zwischenzeit 76 Beobachtungen, die folgende Resultate angeben:

1815	Beobachtete A R.	Beobachtete Länge	Fehler der Taf.
März 8	$348^\circ 4' 7'',2$	$11^z 17^\circ 1' 41'',4$	$+1'',2$
- 9	348 59 33,45	11 18 1 40,8	$-2,5$
- 19	358 9 4,35	11 27 59 4,9	$-3,1$
- 20	359 3 40,2	11 28 58 35,6	$-1,8$
- 22	0 52 51,15	0 0 57 36,9	$-6,7$
- 30	8 8 37,5	0 8 51 59,7	$-7,9$
- 31	9 3 7,95	0 9 51 10,0	$-8,8$
April 1	9 57 39,9	0 10 50 18,6	$-9,8$
- 2	10 52 9,6	0 11 49 21,1	$-6,5$
- 8	16 20 13,65	0 17 43 15,6	$-2,4$
- 9	17 15 4,85	0 18 42 7,8	$-1,2$

1815	Beobachtete AR.	Beobachtete Länge	Fehler der Taf.
April 10	18° 9′ 58″,95	0ᶻ 19° 40′ 57″,3	+ 0″,5
- 11	19 5 1,35	0 20 39 49,4	— 2,2
- 12	20 0 1,65	0 21 38 32,9	+ 1,3
- 13	20 55 8,7	0 22 37 16,9	+ 1,9
- 14	21 50 24,15	0 23 36 2,9	— 1,4
- 18	25 32 7,65	0 27 30 37,0	— 7,5
- 23	30 11 11,25	1 2 22 47,7	— 2,4
- 24	31 7 19,95	1 3 21 8,6	— 2,1
- 26	33 0 3,9	1 5 17 50,5	— 6,8
- 27	33 56 31,05	1 6 16 2,8	— 2,9
- 30	36 46 52,8	1 9 10 44,4	— 4,9
Mai 2	38 41 6,0	1 11 7 2,9	— 4,3
- 3	39 38 28,65	1 12 5 13,6	— 7,4
- 9	45 25 21,75	1 17 53 24,4	— 2,5
- 10	46 23 43,65	1 18 51 23,8	— 4,4
- 11	47 22 14,85	1 19 49 22,3	— 7,2
- 12	48 20 51,3	1 20 47 15,9	— 6,6
- 17	53 16 3,15	1 25 36 22,0	— 8,5
- 18	54 15 23,85	1 26 33 59,9	— 2,5
- 20	56 14 39,15	1 28 29 20,0	— 0,0
- 23	59 14 43,05	2 1 22 19,5	— 6,2
- 24	60 14 58,95	2 2 19 55,6	— 7,3
- 25	61 15 22,05	2 3 17 29,8	— 7,4
- 26	62 15 48,3	2 4 14 58,6	— 3,1
- 29	65 18 4,8	2 7 7 31,5	— 2,1
- 30	66 19 9,9	2 8 5 5,5	— 6,3
- 31	67 20 17,85	2 9 2 34,8	— 6,6
Juni 1	68 21 33,0	2 10 0 3,9	— 6,3
- 6	73 29 13,8	2 14 47 11,6	— 2,8
- 12	79 41 15,45	2 20 31 26,8	— 4,8
- 13	80 43 25,05	2 21 28 43,9	— 2,9
- 14	81 45 40,95	2 22 26 3,5	— 4,3
- 15	82 47 59,55	2 23 23 22,9	— 6,4

1815		Beobachtete AR.	Beobachtete Länge	Fehler der Taf.
Juni	17	84° 52′ 34″,95	2ᶻ 25° 17′ 52″,9	— 4″,6
-	18	85 54 52,95	2 26 15 5,3	— 2,3
-	20	87 59 33,45	2 28 9 30,5	0,0
-	21	89 2 1,5	2 29 6 49,1	— 5,7
-	22	90 4 21,6	3 0 4 0,0	— 4,0
-	23	91 6 45,6	3 1 1 14,5	— 6,4
-	25	93 11 23,7	3 2 55 35,9	— 4,0
-	26	94 13 39,6	3 3 52 45,3	— 1,7
-	28	96 18 18,0	3 5 47 14,6	— 6,8
-	30	98 22 38,55	3 7 41 36,2	— 3,0
Juli	1	99 24 43,65	3 8 38 46,3	— 0,4
-	10	108 40 50,4	3 17 13 52,7	— 2,4
-	11	109 42 14,4	3 18 11 11,0	— 6,5
-	12	110 43 24,75	3 19 8 22,8	— 4,1
-	14	112 45 28,95	3 21 2 50,9	— 3,6
-	17	115 47 38,25	3 23 54 32,9	— 2,7
-	18	116 48 3,9	3 24 51 45,5	— 0,7
-	29	127 44 3,6	4 5 22 10,2	— 5,0
Aug.	5	134 32 17,2	4 12 4 15,5	+ 1,8
-	6	135 30 3,3	4 13 1 48,5	+ 0,5
-	7	136 27 41,1	4 13 59 23,6	— 1,8
-	8	137 25 4,5	4 14 56 54,4	+ 1,1
-	9	138 22 20,1	4 15 54 29,1	+ 1,0
-	10	139 19 29,85	4 16 52 4,1	+ 1,5
-	11	140 16 30,75	4 17 49 41,9	+ 0,1
-	22	150 34 11,85	4 28 24 28,4	+ 0,7
-	23	151 29 40,5	4 29 22 23,7	— 4,2
-	25	153 20 10,35	5 1 18 10,5	— 5,0
-	26	154 15 13,5	5 2 16 3,8	— 2,6
-	27	155 10 13,8	5 3 14 2,0	— 3,1
-	28	156 5 5,4	5 4 11 58,7	— 0,1
-	29	156 59 53,4	5 5 9 59,2	+ 1,0

Theilt man auch diese Beobachtungen, so wie die des Kometen, von 16 zu 16 Tagen ab, so erhält man für jeden Kometenort die Bestimmung des Fehlers der Sonnentafeln

von	März	8	bis März	22	. . .	— 2″,58	. 5 Beobb.
-	März	30	— April	2	. . .	— 8,25	. 4 -
-	April	8	— April	23	. . .	— 1,48	. 9 -
-	April	24	— Mai	9	. . .	— 4,41	. 7 -
-	Mai	10	— Mai	25	. . .	— 5,57	. 9 -
-	Mai	26	— Juni	6	. . .	— 4,53	. 6 -
-	Juni	12	— Juni	26	. . .	— 3,93	. 12 -
-	Juni	28	— Juli	12	. . .	— 3,87	. 6 -
-	Juli	14	— Juli	29	. . .	— 3,00	. 4 -
-	Aug.	5	— Aug.	29	. . .	— 0,65	. 14 -

Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, daſs **Burckhardts** neue Elemente der Sonnenbewegung (*Conn. des Tems p.* 1816.) meistentheils weit kleinere Fehler geben. Reducirt man endlich die Längen der Sonne auf das Aequinoctium des 1. Jan. 1815, und die Breiten auf die Ekliptik des 1. Jan. 1815, so hat man, nach der Verbesserung der Tafelfehler:

	Länge	Breite	Log. R.
März 17	$11^z\,26°\,25'\,29'',18$	— 0″,47	9,9982033
- 31	0 10 16 41,63	— 0,19	9,9999401
April 13	0 23 2 49,87	— 0,58	0,0015618
Mai 1	1 10 34 15,53	— 0,82	0,0036244
- 15	1 24 5 58,97	+ 0,06	0,0049967
Juni 2	2 11 22 26,15	— 1,03	0,0063411
- 17	2 25 42 34,89	+ 0,20	0,0069911
Juli 2	3 10 0 34,57	— 0,74	0,0072329
- 16	3 23 21 43,68	+ 0,16	0,0070060
Aug. 9	4 16 19 1,95	+ 0,55	0,0057754

woraus die Coordinaten, nach den Formeln

$$X = R \cos \odot$$
$$Y = R \sin \odot \cos \varepsilon - R.B \sin \varepsilon$$
$$Z = R \sin \odot \sin \varepsilon + R.B \cos \varepsilon$$

berechnet wurden. Für ε, die mittlere Schiefe der Ekliptik am 1. Januar 1815, wurde, nach den Königsberger Beobachtungen dreier Sonnenwenden, 23° 27′ 47″,2 angenommen.

	X	Y	Z
März 17	+ 0,9939334	— 0,0569657	— 0,0247283
- 31	+ 0,9838174	+ 0,1636530	+ 0,0710322
April 15	+ 0,9254979	+ 0,5604142	+ 0,1564337
Mai 1	+ 0,7659665	+ 0,6016146	+ 0,2611248
- 15	+ 0,5931618	+ 0,7516604	+ 0,3262564
Juni 2	+ 0,3240881	+ 0,8820557	+ 0,3828491
- 17	+ 0,0760241	+ 0,9295900	+ 0,4034869
Juli 2	— 0,1767327	+ 0,9185259	+ 0,3986796
- 16	— 0,4029901	+ 0,8558068	+ 0,3714613
Aug. 9	— 0,7328559	+ 0,6420391	+ 0,2786782

8.

Um alle Genauigkeit, die die Umstände zulassen, in der Bestimmung der Bahn zu erreichen, wurden nun die Veränderungen berechnet, die die Elemente, während der Dauer der Sichtbarkeit des Kometen, durch die Anziehung der Planeten erlitten. Die hierzu nöthigen Formeln wurden aus meinem Werkchen über den Kometen von 1807 entlehnt, und auf 25 Tage von einander entfernte Zeiten angewandt. Alle ältere Planeten, aufser Mercur und Uranus, deren Wirkung ganz unmerklich ist, wurden dabei berücksichtigt. Die störenden Kräfte, nämlich A′ parallel mit dem Radius Vector des Kometen, B′ senkrecht auf den Radius Vector und parallel mit der Ebene der Bahn, C′ senkrecht auf die Ebene der Bahn, fanden sich in Einheiten der 8ten Decimale, wie folgt:

A′.

	März 7.	Apr. 1.	Apr. 26.	Mai 21.	Juni 15.	Juli 10.	Aug. 4.
Venus	+ 267	+ 447	+ 560	+ 561	+ 598	+ 690	+ 451
Erde	+ 221	+ 170	+ 167	+ 201	+ 216	+ 187	+ 117
Mars	— 10	— 8	— 5	0	+ 2	+ 2	0
Jupiter	+ 799	+ 703	+ 321	— 178	— 458	— 409	— 78
Saturn	— 46	— 44	— 24	+ 5	+ 31	+ 46	+ 62
Summe	+ 1231	+ 1298	+ 1019	+ 589	+ 389	+ 416	+ 552

B′

B'.

	März 7.	Apr. 1.	Apr. 26.	Mai 21.	Juni 15.	Juli 10.	Aug. 4.
Venus	− 327	− 247	− 173	− 118	− 7	+ 130	+ 285
Erde	+ 123	+ 140	+ 153	+ 166	+ 168	+ 193	+ 208
Mars	+ 7	+ 10	+ 12	+ 13	+ 13	+ 13	+ 12
Jupiter	+ 104	− 400	− 614	− 526	− 81	+ 463	+ 885
Saturn	− 17	+ 10	+ 32	+ 38	+ 26	+ 6	− 16
Summe	− 110	− 487	− 590	− 427	+ 119	+ 805	+ 1374

C'.

Venus	+ 200	+ 61	− 66	− 160	− 184	− 129	+ 21
Erde	− 137	− 132	− 97	− 52	0	+ 61	+ 129
Mars	− 3	0	+ 2	+ 4	+ 7	+ 9	+ 12
Jupiter	− 95	+ 313	+ 791	+ 1278	+ 1675	+ 1936	+ 1978
Saturn	+ 39	+ 37	+ 32	+ 24	+ 15	+ 3	− 9
Summe	+ 4	+ 279	+ 662	+ 1094	+ 1513	+ 1880	+ 2131

Hieraus folgen die Differentialquotienten der Elemente, einen Tag als Zeiteinheit angenommen; (die Zahlen der beiden letzten Columnen sind Einheiten der 10ten Decimale).

	$\left(\frac{dT}{dt}\right)$	$\left(\frac{dn}{dt}\right)$	$\left(\frac{di}{dt}\right)$	$\left(\frac{dw}{dt}\right)$	$\left(\frac{dh}{dt}\right)$	$\left(\frac{de}{dt}\right)$
März 7	−0,00000468	−0″,00005	−0″,00012	+0″,04276	+ 0269	+ 2827
April 1	−0,00001027	−0,00764	−0,00623	+0,05572	+ 1064	+ 5878
- 26	−0,00001690	−0,02418	−0,00770	+0,07667	+ 1231	+ 3106
Mai 21	−0,00001326	−0,04594	+0,00024	+0,08436	+ 1174	+ 2042
Juni 15	+0,00000038	−0,06620	+0,01829	+0,05497	− 0290	− 1461
Juli 10	+0,00002289	−0,08045	+0,04368	−0,00186	− 2263	− 4020
Aug. 4	+0,00004443	−0,08480	+0,07119	−0,07008	− 4438	− 5833

Die Integration dieser Differentialgleichungen, vom Augenblicke des Durchganges durch das Perihel, bis zu den Zeiten, für welche oben die mittleren Oerter des Kometen bestimmt wurden, giebt folgende Veränderung der Elemente:

	T.	n.	i.	w.	h.	π.	e.
März 17	+ 0,0004643	+ 0″,44	+ 0″,26	− 2″,40	− 0,00000427	+ 0,00000227	− 0,00001438
- 31	+ 0,0003449	+ 0,39	+ 0,19	− 1,70	− 0,00000307	+ 0,00000089	− 0,00000917
April 13	+ 0,0001907	+ 0,24	+ 0,10	− 0,90	− 0,00000159	+ 0,00000015	− 0,00000425
Mai 1	− 0,0000875	− 0,14	− 0,05	+ 0,43	+ 0,00000063	− 0,00000003	+ 0,00000163
- 15	− 0,0003073	− 0,63	− 0,10	+ 1,59	+ 0,00000242	+ 0,00000041	+ 0,00000545
Juni 2	− 0,0005181	− 1,50	− 0,06	+ 3,05	+ 0,00000421	+ 0,00000151	+ 0,00000826
- 17	− 0,0005657	− 2,37	+ 0,13	+ 3,94	+ 0,00000435	+ 0,00000225	+ 0,00000739
Juli 2	− 0,0003846	− 3,53	+ 0,57	+ 4,52	+ 0,00000277	+ 0,00000228	+ 0,00000337
- 16	− 0,0001195	− 4,65	+ 1,17	+ 4,51	− 0,00000033	+ 0,00000084	− 0,00000217
Aug. 9	+ 0,0008137	− 6,68	+ 2,68	+ 3,27	− 0,00000874	− 0,00000453	− 0,00001516

Diese Störungen der Elemente haben einen nur sehr geringen Einfluſs auf die Bewegung des Kometen, indem sie sich gröſstentheils gegenseitig vernichten. Um diese Uebersicht und die nachherige Anwendung der Störungen zu erleichtern, gebe ich hier die durch sie erzeugten Verbesserungen der geocentrischen, aus den Elementen für den 26. April berechneten Oerter:

	AR.	Decl.
März 17	− 0″,24	− 0″,09
- 31	− 0,07	− 0,17
April 13	− 0,02	− 0,04
Mai 1	− 0,01	0,00
- 15	+ 0,07	0,00
Juni 2	+ 0,37	− 0,22
- 17	+ 0,27	− 0,62
Juli 2	+ 0,11	− 1,12
- 16	− 0,36	− 1,53
Aug. 9	− 1,05	− 1,64

9.

Nach diesen Vorbereitungen konnten nun die 10 mittleren Oerter des Kometen im 6ten Art. auf das schärfste mit den zweiten Elementen verglichen werden, woraus sich folgende Resultate ergaben:

	Berechnete		Fehler in	
	AR.	Decl.	AR.	Decl.
März 17	52° 50′ 16″,69	37° 36′ 10″,36	+ 11″,77	— 1″,59
- 31	59 48 55,60	44 40 29,73	+ 4,92	+ 2,01
April 13	69 21 27,66	51 6 13,89	+ 3,59	+ 5,75
Mai 1	90 18 59,42	58 41 51,25	+ 3,76	+ 7,94
- 15	114 49 18,52	61 30 9,70	+ 3,32	+ 5,23
Juni 2	149 33 1,06	57 41 1,65	+ 3,61	+ 6,26
- 17	171 22 49,83	48 50 52,09	+ 21,18	— 0,80
Juli 2	186 18 35,06	37 55 21,33	+ 8,63	— 6,86
- 16	196 29 10,90	27 50 3,98	+ 14,56	— 12,65
Aug. 9	209 42 15,09	13 10 33,49	+ 14,34	— 17,76

Daſs diese Vergleichung nicht genau mit den unmittelbar gefundenen Fehlern der verglichenen Ephemeride (Art. 6.) übereinstimmt, liegt theils in den verschiedenen Sonnenörtern, theils in den Störungen, theils aber auch in einer kleinen Verschiedenheit der Elemente, wonach die Ephemeride berechnet wurde, die hier aber keinen weiteren Einfluſs hat.

Der Einfluſs der Veränderungen der Elemente wurde nun unmittelbar in Beziehung auf die gerade Aufsteigung und Abweichung berechnet, indem sich nur so den Bedingungsgleichungen ihr richtiger Stimmwerth geben läſst, worauf ich unten zurückkommen werde. Die Formeln, die diese Differentiale der geraden Aufsteigung und Abweichung angaben, sind folgende:

$$d\alpha = \frac{-\sin\alpha}{\triangle\cos\delta}\,dx + \frac{\cos\alpha}{\triangle\cos\delta}\,dy.$$

$$d\delta = \frac{-\cos\alpha\sin\delta}{\triangle}\,dx - \frac{\sin\alpha\sin\delta}{\triangle}\,dy + \frac{\cos\delta}{\triangle}\,dz.$$

Man findet aber aus den bekannten Ausdrücken der Veränderungen des Arguments der Breite und des Radius Vectors, die durch Veränderungen von T, π, e und w erzeugt werden, aus den Formeln

$$\frac{dx}{du} = x\,\text{cotg}\,(A+u)\,;\quad \frac{dy}{du} = y\,\text{cotg}\,(B+u)\,;\quad \frac{dz}{du} = z\,\text{cotg}\,(C+u)$$

$$\frac{dx}{dr} = \frac{x}{r}\quad;\quad \frac{dy}{dr} = \frac{y}{r}\quad;\quad \frac{dz}{dr} = \frac{z}{r}$$

leicht die diesen Elementen zugehörigen dx, dy, dz; für Knoten und Neigung hat man die äufserst einfachen Formeln

$$\frac{dx}{dn} = -y\cos\varepsilon - z\sin\varepsilon$$

$$\frac{dy}{dn} = x\cos\varepsilon$$

$$\frac{dz}{dn} = x\sin\varepsilon$$

$$\frac{dx}{di} = r\sin u.\ \cos a$$

$$\frac{dy}{di} = r\sin u.\ \cos b$$

$$\frac{dz}{di} = r\sin u.\ \cos c$$

Unter der Annahme von

$$\begin{aligned} 0{,}005\ p &= \triangle T \\ 10\ q &= \triangle n \\ 10\ r &= \triangle i \\ 10\ s &= \triangle w \\ 0{,}0001\ t &= \triangle \pi \\ 0{,}0001\ u &= \triangle e \end{aligned}$$

werden nun, aus den 10 verglichenen Oertern, folgende 20 Bedingungsgleichungen abgeleitet:

Gerade Aufsteigungen.

$$\begin{aligned}
0 &= +11'',77 - 0{,}5527.p + 7{,}1895.q - 4{,}0888.r + 2{,}0958.s + 11{,}9769.t + 10195.u \\
0 &= +\ 4{,}92 + 0{,}5538.p + 6{,}6213.q - 6{,}2746.r + 1{,}9653.s + 13{,}1530.t + 0{,}5552.u \\
0 &= +\ 3{,}59 + 3{,}0062.p + 6{,}3517.q - 8{,}4797.r + 2{,}5612.s + 14{,}9434.t - 0{,}0778.u \\
0 &= +\ 3{,}76 + 11{,}4445.p + 6{,}7373.q - 11{,}0008.r + 5{,}7367.s + 16{,}5155.t + 0.3444.u \\
0 &= +\ 3{,}32 + 21{,}7897.p + 7{,}9709.q - 9{,}1373.r + 10{,}3304.s + 11{,}7154.t + 2{,}5210.u \\
0 &= +\ 3{,}61 + 25{,}9823.p + 9{,}2162.q - 0{,}8040.r + 13{,}1405.s - 2{,}6033.t + 5{,}7309.u \\
0 &= +21{,}18 + 20{,}0359.p + 8{,}9705.q + 3{,}5115.r + 11{,}0928.s - 9{,}0511.t + 6{,}0410.u \\
0 &= +\ 8{,}65 + 14{,}2295.p + 8{,}4094.q + 4{,}6752.r + 8{,}7736.s - 10{,}5840.t + 5{,}5219.u \\
0 &= +14{,}56 + 10{,}4585.p + 7{,}9759.q + 4{,}6039.r + 7{,}2091.s - 10{,}3967.t + 4{,}5136.u \\
0 &= +14{,}34 + 7{,}2531.p + 7{,}5294.q + 3{,}8516.r + 5{,}6467.s - 9{,}4052.t + 3{,}2540.u
\end{aligned}$$

Abweichungen.

$$0 = -1'',59 + 11,0564.p + 3,4737.q + 1,7244.r + 8,2374.s + 15,1022.t - 1,5690.u$$
$$0 = +2,01 + 11,7064.p + 3,6427.q + 2,3613.r + 7,5804.s + 12,1219.t - 1,2882.u$$
$$0 = +5,75 + 12,1457.p + 3,3549.q + 3,1496.r + 7,0595.s + 8,7755.t - 0,0393.u$$
$$0 = +7,94 + 11,6621.p + 3,1640.q + 5,2007.r + 6,1897.s + 3,0229.t + 0,5286.u$$
$$0 = +5,23 + 8,6338.p + 2,8664.q + 7,5839.r + 4,6762.s - 1,3509.t + 0,3840.u$$
$$0 = +6,26 + 1,3105.p + 2,0902.q + 9,4559.r + 1,0030.s - 1,9918.t + 0,1632.u$$
$$0 = -0,80 - 3,4775.p + 1,2797.q + 8,9999.r - 2,0090.s + 1,9077.t - 1,0059.u$$
$$0 = -6,86 - 5,7499.p + 0,4698.q + 7,6179.r - 4,2635.s + 6,5989.t - 1,5960.u$$
$$0 = -12,65 - 6,2005.p - 0,2137.q + 6,1453.r - 5,6027.s + 9,8458.t - 1,6912.u$$
$$0 = -17,76 - 5,3204.p - 0,0434.q + 4,0284.r - 6,5918.s + 12,2259.t - 0,7616.u$$

10.

Der Erfolg der Bestimmung der endlichen Elemente aus diesen Bedingungsgleichungen, noch mehr aber die Schätzung ihrer wahrscheinlichen, aus den Beobachtungsfehlern entstehenden Unsicherheit, hängt hauptsächlich von der richtigen Würdigung der Bedingungsgleichungen ab. Es war daher nothwendig, über diesen Gegenstand eine eigene Untersuchung anzustellen, deren Resultat ich bereits seit einigen Jahren mit Vortheil benutzt habe.

Nach der von Gaufs gegebenen Theorie der kleinsten Quadrate ist die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler Δ zu begehen,

$$\varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\Delta\Delta}$$

(*Theoria mot. corp. coel. P.* 212.), wo h von der Genauigkeit der Beobachtungen abhängt. Mittelst dieses Ausdrucks kann man leicht aus einer vorhandenen Reihe von Beobachtungen den wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen bestimmen, unter der Voraussetzung, dafs die wirklich vorkommenden Fehler von allen beständigen Einwirkungen frei, und nur durch die Unvollkommenheiten der Instrumente und Sinne erzeugt sind. Man hat nämlich, desto näher, je gröfser die Anzahl der Beobachtungen ist, das arithmetische Mittel aus allen Fehlern, sämmtlich mit gleichem Zeichen genommen, welches wir ε nennen wollen,

$$= 2\int \varphi\Delta.\, \Delta\, d\Delta \begin{Bmatrix} \text{von } \Delta = 0 \\ \text{bis } \Delta = \infty \end{Bmatrix} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}};$$

und auch die Quadratwurzel aus dem arithmetischen Mittel der Quadrate der Fehler, welche wir durch ε' bezeichnen wollen, aus der Gleichung

$$\varepsilon'\varepsilon' = 2\int \varphi\Delta.\ \Delta\Delta\, d\Delta \begin{Bmatrix}\text{von } \Delta = 0 \\ \text{bis } \Delta = \infty\end{Bmatrix} = \frac{1}{2hh}.$$

Je zahlreicher nämlich eine vorhandene Beobachtungsreihe ist, mit desto mehr Rechte wird man annehmen können, dafs die Fehler darin so vorkommen, wie es die Gaufssche Theorie erfordert; das aus der Vergleichung einer sehr zahlreichen Reihe mit einer ihr so gut als möglich entsprechenden Theorie folgende ε oder ε', wird nun den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung, den ich durch ε'' bezeichnen werde, geben. Ich verstehe unter dieser Benennung die Grenze, die eine Anzahl kleinerer Fehler von einer gleichen Anzahl gröfserer trennt, so dafs es wahrscheinlicher ist, eine Beobachtung innerhalb jeder weiteren Grenze von der Wahrheit abirren zu sehen, als aufserhalb derselben.

Durch die Auflösung der Gleichung

$$\int e^{-tt} dt \begin{Bmatrix}\text{von } t = 0 \\ \text{bis } t = x\end{Bmatrix} = \int e^{-tt} dt \begin{Bmatrix}\text{von } t = x \\ \text{bis } t = \infty\end{Bmatrix}$$

findet man $x = 0{,}4769364 = h\,\varepsilon''$, so dafs man hat

$$\varepsilon'' = 0{,}8453\ \varepsilon' = 0{,}6745\ \varepsilon.$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers, kleiner als $\alpha\,\varepsilon''$, verhält sich zu der eines gröfsern, wie der Werth des Integrals $\int e^{-tt} dt$ von $t = 0$ bis $t = \alpha.\ 0{,}4769364$, zu dem Werthe desselben Integrals von $t = \alpha.\ 0{,}4769364$ bis $t = \infty$ genommen. Für einige Werthe von α findet man, aus den bekannten Tafeln dieses Integrals:

$\alpha = 1$ . . . . . . 1 : 1

$\alpha = 1{,}25$ . . . 1 : 1,505

$\alpha = 1{,}5$ . . . . 1 : 2,209

$\alpha = 1{,}75$ . . . 1 : 3,204

$\alpha = 2$ . . . . . . 1 : 4,638

$\alpha = 3$ . . . . . . 1 : 30,51

$\alpha = 4$ . . . . . . 1 : 142,36

11.

Den Werth einer bei der Declination δ beobachteten Rectascension nehme ich $= \cos\delta$, wodurch also der Werth einer im Aequator selbst beobachteten als Einheit zum Grunde gelegt wird; die Declinationen betrachte ich in allen Entfernungen vom Aequator als gleich gut. Das Verhältniſs des absoluten Werths einer Declination, zu dem als Einheit angenommenen, hängt aber von der Beobachtungsmethode ab; man weiſs z. B., sowohl aus der Erfahrung, als aus der Natur des Kreismikrometers, daſs die durch dieses Hülfsmittel beobachteten Declinationen im Allgemeinen einen geringeren Werth haben, als die Rectascensionen. In aller Schärfe genommen, hat jede einzelne Ortsbestimmung eines Kometen einen verschiedenen, von den Umständen der Beobachtung selbst abhängenden Werth; allein man wird dennoch unter einer sehr groſsen Anzahl von Beobachtungen annehmen können, daſs die Fehler dem allgemeinen Gesetze der Wahrscheinlichkeit folgen, indem diese Umstände selbst keiner Regel unterworfen sind; — bei unserem Kometen war eine Berücksichtigung des speciellen Werths jeder einzelnen Bestimmung unthunlich, indem die Beobachtungen nicht auf eine diese Berücksichtigung möglich machende Weise angegeben sind. Da auch unter den verglichenen Beobachtungsreihen keine vorhanden ist, die auffallend gröſsere oder geringere Unregelmäſsigkeiten als die übrigen gezeigt hätte, so nehme ich diese Beobachtungen sämmtlich als gleich gut, oder vielmehr so an, als wären sie sämmtlich mit gleicher Sorgfalt und mit gleichen Hülfsmitteln angestellt.

Demzufolge multiplicirte ich die bei der Vergleichung gefundenen Fehler der AR. mit den Cosinussen der Declination, und zog den mittleren, gleichfalls mit dem Cosinus der Declination multiplicirten Fehler, fur jede der 10 Bestimmungen, davon ab, wodurch sich das arithmetische Mittel der übrig bleibenden Fehler, oder

$$\varepsilon \cos \delta = 9'',1792$$

angab. Aus den Fehlern der Declination fand sich, auf ähnliche Art,

$$(\varepsilon) = 19'',685;$$

so daſs das Verhältniſs der Güte einer im Aequator beobachteten geraden Aufsteigung und einer Abweichung

$$19'',685 : 9'',1792 = 1 : 0,47717$$

ist. Dieses Verfahren hat in der That nicht die gröſste Schärfe, indem man statt der Fundamentalörter, die doch ohne Zweifel noch mit kleinen Beobachtungsfehlern behaftet sind, die wahren, aus der endlichen Bahnbestimmung entlehnten, hätte nehmen sollen; man überzeugt sich aber leicht, daſs der hieraus entstehende Irrthum nicht groſs seyn kann, zumal da es hier nur auf das Verhältniſs der Güte der geraden Aufsteigungen und Abweigen ankömmt. Dieses Verhältniſs stimmt übrigens nahe mit dem überein, welches man nach der Beobachtungsart am Kreismikrometer zu finden erwarten konnte.

Da nun der Werth eines als das arithmetische Mittel aus μ einzelnen Bestimmungen anzusehenden Resultats $= \sqrt{\mu}$ ist, den einer einzelnen $= 1$ gesetzt, so wurden die Bedingungsgleichungen der geraden Aufsteigung mit $\sqrt{\mu} \cdot \cos\delta$ und der Abweichung mit $\sqrt{\mu} \cdot 0{,}47717$ multiplicirt, ehe sie nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt wurden. Diese Werthe und ihre Logarithmen führe ich hier an:

	AR.		Declination.	
	Werth	Log.	Werth	Log.
März 17	3,0684	0,48692	1,7854	0,25174
- 31	3,9592	0,59761	2,3858	0,37764
April 13	3,0114	0,47877	2,2884	0,35954
Mai 1	2,7979	0,44683	2,4331	0,38615
- 15	1,8479	0,26667	1,9087	0,28073
Juni 2	2,6729	0,42699	2,0151	0,30431
- 17	2,6323	0,42033	1,9087	0,28073
Juli 2	3,2525	0,51222	1,9087	0,28073
- 16	2,6529	0,42372	1,3497	0,15022
Aug. 5	1,6864	0,22697	0,8265	9,91723

12.

Die zu der Bildung der Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate erforderlichen Summen der Quadrate und Produkte der Glieder der Bedingungsgleichungen ergaben sich, nach der Bezeichnung im XXIV. B. der monatl. Correspondenz S. 461:

(nn) = + 9535,72	(ad) . . + 9331,97	(cd) . . — 6,68
(an) . . + 8494,15	(ae) . . + 533,70	(ed) — 5109,44
(bn) . . + 5634,59	(af) . . + 3292,78	(fd) + 298,57
(cn) . . + 246,11	(bb) . . + 4920,94	(dd) + 5423,23
(dn) . . + 5476,46	(bc) . . — 893,20	(de) + 735,52
(en) . . — 480,49	(bd) . . + 4473,88	(df) + 1893,58
(fn) . . + 2412,60	(be) . . + 2471,03	(ee) + 13959,36
(aa) . . + 16682,15	(bf) . . + 1703,22	(ef) — 1361,98
(ab) . . + 7232,79	(cc) . . + 4583,96	(ff) + 1034,56
(ac) . . + 239,31		

woraus

woraus, nach dem von Gaufs a. a. O. gegebenen Eliminationsverfahren, folgende Gleichungen entstanden:

$$0 = -19'',742 + 21,466\,u$$
$$0 = -2022,08 - 1425,00.u + 7417,15.t$$
$$0 = +227,36 - 24,33.u - 5,25.t + 98,09\,s$$
$$0 = +1214,34 + 405,27.u - 3866,27.t + 98,48\,s + 4023,73.r$$
$$0 = +1951,84 + 275,61.u + 2239,64.t + 427,97.s - 996,95.r + 1785,08.q$$
$$0 = +8494,15 + 8292,78.u + 533,70.t + 9331,97.s + 239,31.r + 7232,79.q + 16682,15.p.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt:

$$\begin{aligned} p &= +0,99310; & \Delta T &= +0,004966 \text{ Tag.}\\ q &= -1,25456; & \Delta n &= -12'',55\\ r &= +0,08786; & \Delta i &= +0'',88\\ s &= -2,06567; & \Delta w &= -20'',66\\ t &= +0,44931; & \Delta\pi &= +0,00004495\\ u &= +0,91968; & \Delta e &= +0,00009197 \end{aligned}$$

Die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ist, nach dem Eliminationsverfahren selbst $= 1615,3$; womit der zur Controle der Rechnung angewandte Ausdruck dieser Summe

$$(nn) + (an)p + (bn)q + (cn)r + \ldots.$$

vollkommen übereinstimmt. Fügt man die eben gefundenen Aenderungen den 2ten Elementen (Art. 4.) hinzu, so hat man folgende

Wahrscheinlichste Elemente der Bahn.

Durchgangszeit durch das Perihel . .	Apr. 25,998674 (Paris).
Aufsteigender Knoten	83° 28′ 33″,63
Neigung	44 29 54,59
Entfernung des Perihels vom Knoten .	65 33 22,29
Log. des kürzesten Abstandes . . .	0,0838109
Excentricität	0,93121968
Halbe grofse Axe	17,63383
Umlaufszeit	74,04913 Jahre.

(Diese Elemente gelten für den 26. April 1815. Der Knoten ist vom Nachtgleichepunkte des 1. Jan. 1815 an gezählt; die Neigung bezieht sich auf die Ebene der Ekliptik für dieselbe Zeit.)

Die Uebereinstimmung dieser Elemente mit den zum Grunde gelegten 10 Oertern ist so befriedigend, als man erwarten kann. Eine scharfe Vergleichung gab nämlich die Fehler:

		AR.	Decl.
März	17.	+ 3″,84	— 6″,64
-	31.	— 1,12	— 1,89
April	13.	— 1,12	+ 2,48
Mai	1.	+ 1,47	+ 4,83
-	15.	+ 0,29	+ 1,45
Juni	2.	— 5,12	+ 2,99
-	17.	+ 8,68	— 1,00
Juli	2.	— 5,27	— 2,56
-	16.	— 0,02	— 4,14
Aug.	9.	— 1,26	— 3,06

Die Summe der Quadrate der Producte dieser Fehler in die im 11. Art. angegebenen Werthe, ist so nahe der aus der Auflösung der Bedingungsgleichungen gefolgerten gleich, dafs man die Uebereinstimmung als die vollgültigste Controle aller Theile der Rechnung ansehen kann.

Die Constanten zur Berechnung der wahren Anomalie, nach der Methode, die Gaufs (*Theoria mot. c. c. P.* 37.) gegeben hat, sind, nach diesen Elementen

$$\log \alpha = 9{,}8205354$$
$$— \ \beta = 8{,}5641861{,}8$$
$$— \ \gamma = 0{,}0062768{,}3$$

und die Coordinaten auf den Aequator und die Nachtgleichen des 1. Jan. 1815 finden sich aus den Formeln

$$x = r \sin a \sin (A + u)$$
$$y = r \sin b \sin (B + u)$$
$$z = r \sin c \sin (C + u)$$

in welchen

$$\log. \sin a = 9{,}8559433; \quad A + u = 236^\circ\, 26'\, 50'',52 + \phi.$$
$$— \ \sin b = 9{,}9703875; \quad B + u = 168\ \ 12\ \ 59,60 + \phi.$$
$$— \ \sin c = 9{,}8935128; \quad C + u = 95\ \ 55\ \ 14,82 + \phi.$$

13.

Statt die Grenzen der Unsicherheit der Elemente, aus angenommenen kleinen Veränderungen in den zum Grunde gelegten Oertern des Kometen, zu schätzen, habe ich einen anderen Weg eingeschlagen, der ohne Zweifel eine wichtigere Uebersicht gewährt. Alle durch Beobachtungen erhaltene Bestimmungen sind nämlich nicht wahr, sondern nur mehr oder weniger wahrscheinlich; die Bestimmung ist die beste, die die gröſste Wahrscheinlichkeit hat, und die Zahlenentwickelung dieser Wahrscheinlichkeit kann allein unser Urtheil über die Güte einer Bestimmung leiten. — Wenn man die nach der Methode der kleinsten Quadrate entwickelten Gleichungen

$$P = (an) + (aa)p + (ab)q + (ac)r + \ldots\ldots$$
$$Q = (bn) + (ab)p + (bb)q + (bc)r + \ldots\ldots$$
$$R = (cn) + (ac)p + (cb)q + (cc)r + \ldots\ldots$$

u. s. w.

so auflöset, daſs man hat

$$p = L + AP + \text{etc.}$$
$$q = L' + B'Q + \text{etc.}$$
$$r = L'' + C''R + \text{etc.}$$
$$s = L''' + D'''S + \text{etc.}$$

u. s. w.

so hat bekanntlich Gauſs gezeigt, daſs die den wahrscheinlichsten Werthen der unbekannten Gröſsen, nämlich $L, L', L'', \ldots$ zuzuschreibenden wahrscheinlichen Fehler, resp. $\sqrt{A}, \sqrt{B'}, \sqrt{C''}, \sqrt{D'''}, \ldots$ proportional sind; oder daſs sie für so sicher zu halten sind, als wären sie arithmetische Mittel aus

$$\frac{1}{A}, \frac{1}{B'}, \frac{1}{C''}, \frac{1}{D'''} \ldots$$

directen Bestimmungen. Auſser den Werthen von $L, L', L'', L''' \ldots$ wurden daher, aus den für die Bestimmung der Kometenbahn entwickelten Gleichungen, noch die Divisoren von $P, Q, R, S, \ldots$ gesucht und der Reihe nach gefunden

278,71; 106,93; 2165,15; 75,164; 292,56; 21,466;

woraus sich das Verhältniſs der wahrscheinlichen Fehler der sechs Elemente, zu dem wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen Beobachtung, nämlich einer solchen, deren Werth oben = 1 gesetzt wurde, folgendermaſsen ergab:

T 2

für T 1,1056
— n 0,9671
— i 0,2149
— w 1,1535
— π 1,2062
— e 4,4519

Die vollständige Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers der Elemente erforderte nun nur noch die des wahrscheinlichen Fehlers einer einzelnen Beobachtung, die ich, nachdem für die mittleren Oerter die durch die definitiven Elemente angegebenen gesetzt werden konnten, etwas genauer erhalten zu können glaubte, als durch die Untersuchung im 11. Art. In der That gab diese neue Untersuchung etwas verschiedene Resultate, nämlich aus den

Rectascensionen . . . . $\varepsilon \cos \delta = 9'',7514$ . . . . 183 Beobb.
Declinationen . . . . . (ε) . . $= 19,544$ . . . . 166 -

woraus, unter der Annahme des benutzten Verhältnisses 1 : 0,47717, für einen auf den Aequator reducirten Fehler der Rectascension, der mittlere Werth $\varepsilon \cos \delta = 9'',3872$ und der wahrscheinliche

$$\varepsilon'' = 7'',935$$

hervorgeht.

Mit dieser Bestimmung von ε'' erhält man endlich die wahrscheinliche Unsicherheit der Elemente:

Durchgangszeit . . . . $8'',773 = 3'25'',3$ in Zeit.
Knoten . . . . $7'',674$
Neigung . . . . $1'',705$
Abst. des Perih. v. ☊. . $9'',153$
Kürzester Abstand . . . $9'',571 = 0,00004640$
Excentricität . . . . . $35'',327 = 0,00017127$

Diese wahrscheinliche Unsicherheit der Excentricität entspricht 0,27657 Jahren oder 101 Tagen in der Umlaufszeit. Es ist sehr zu bedauern, daſs die Umstände der geocentrischen Bewegung, bei der Bestimmung der Excentricität einen, im Verhältnisse mit den übrigen so groſsen wahrscheinlichen Fehler übrig gelassen haben. — Indessen ist diese Unsicherheit in sich nicht sehr bedeutend, so daſs es überraschend ist, zu sehen, welche groſse Wahrscheinlichkeit die neueren häufigen Kometenbeobachtungen, selbst in einem ungünstigen Falle, gewähren. Nach der Theorie im 10. Art. verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten von Fehlern gröfser als 0,5, 0,75, 1,0 Jahr, zu den Wahrscheinlichkeiten kleinerer, resp. wie 1 : 3,49; 15,84; 66,85.

14.

Man würde indessen bedeutend irren, wenn man die Wiedererscheinung des Kometen im Perihelio, die nach den Elementen am 14. Mai 1889 stattfinden sollte, in einer auf beiden Seiten 3 bis 4 Monate von diesem Zeitpunkte entfernten Zwischenzeit erwarten wollte. Die Störungen der Kometen, namentlich durch Jupiter, sind so bedeutend, dafs auch hier eine, weit aufser den Grenzen der Unsicherheit der Elemente liegende Veränderung zu erwarten war. Es war deshalb nothwendig, diese Störungen zu berechnen; ich zögerte keinen Augenblick, diese Arbeit zu übernehmen, da es mir scheint, als hätte die Feinheit, die ich in der Bestimmung der Elemente zu erreichen suchte, kaum ein Interesse, wenn man die Störungen aufser Acht liefse.

Die Methode, die bei dieser Arbeit befolgt wurde, habe ich in meinem Werkchen über den Kometen von 1807 erläutert. Indessen veranlafste mich die Absicht, durch eine nicht sehr bedeutende Vermehrung der Arbeit, eine bedeutende Vermehrung der Sicherheit zu erlangen, nicht immer die bequemste, S. 77. gegebene Formel für den Differentialquotienten der nächsten Durchgangszeit, die ich durch T′ bezeichne, nämlich:

$$\left(\frac{dT'}{dt}\right) = -\left(\frac{dT}{dt}\right) + \tfrac{3}{2}\, a^{\frac{1}{2}} \left(\frac{da}{dt}\right)$$

die sich, durch die Substitution der Werthe von $\left(\frac{dT}{dt}\right)$ und $\left(\frac{da}{dt}\right)$, in

$$\left(\frac{dT'}{dt}\right) = -A'a\left\{\frac{r}{e}(2e - \cos\varphi - e\cos\varphi^2) + \frac{3e}{h}k(T' - t)\sin\varphi\right\}$$
$$- B'a\left\{\frac{r}{e}(2 + e\cos\varphi)\sin\varphi + \frac{3}{h}k(T' - t)(1 + e\cos\varphi)\right\}$$

verwandelt, anzuwenden. Denn da die Störungen einen bedeutenden Einflufs auf die Bewegung des Kometen haben, so würde die Rechnung weit weniger genau ausgefallen seyn, als ich wünschte, wenn man zu der Berechnung der Oerter u. s. w. des Kometen, für die ganze Dauer des Umlaufes, die bei seiner Sichtbarkeit stattfindenden Elemente unverändert beibehalten hätte. Selten oder nie wird man, wenn einige Genauigkeit erreicht werden soll, bei den Kometen die Quadrate und Producte der störenden Massen vernachlässigen können.

Allein es ist einleuchtend, daſs man dennoch nicht nöthig hat, die Veränderungen aller Elemente zu berechnen, oder sehr häufig neue zu substituiren; den Fall ausgenommen, wo die Genauigkeit auf's Höchste getrieben werden soll, welcher bei einem Kometen eintreten würde, bei dem es der Zweck der Rechnung wäre, mehrere beobachtete Wiederkehren mit der gröſsten Genauigkeit darzustellen, und eine zu erwartende mit derselben Genauigkeit vorauszubestimmen. Hier, wo ein Fehler von einigen Tagen von gar keiner Bedeutung ist *), kann man sich begnügen, die aus den Beobachtungen geschlossenen Elemente, bis zu etwa einem Viertel der Umlaufszeit, ungeändert zu lassen, sie dann zu verbessern, und die letzte Verbesserung am Ende des dritten Viertels vorzunehmen. Man wird ferner nicht alle Elemente verbessern dürfen, sondern nur die, die auf die Oerter des Kometen einen bedeutenden Einfluſs haben, nämlich die Durchgangszeit durch das Perihelium von 1815 und die groſse Axe. Knoten und Perihel wurden demzufolge während der ganzen Dauer des Umlaufes als syderisch ruhend, und die übrigen Elemente als unverändert angenommen, mit Ausschluſs der Excentricität, die so bestimmt wurde, wie es die Veränderung der groſsen Axe erforderte.

Da bei der Berechnung der Störungen für eine so lange Zeit, die Erfindung der störenden Kräfte jedes Planeten sehr häufig wiederkehrt, so wurden für die Ausdrücke der Kräfte, in der Abhandlung über den Kometen von 1807, S. 46, folgende bequemere substituirt.

Wenn man die Neigung der Bahn eines störenden Planeten gegen die Kometenbahn durch i' bezeichnet, die Länge des aufsteigenden Knotens des Planeten auf der Kometenbahn durch n', die Länge des Planeten in seiner Bahn durch l', den Abstand des Perihels des Kometen vom aufsteigenden Knoten des Planeten durch P, die Länge des Planeten auf der Kometenbahn vom Knoten an gerechnet durch L, seine Breite durch λ; ferner $l' - n'$ durch u' und $P + \varphi$ durch u, so hat man die Coordinaten, parallel mit dem Radius Vector des Kometen und senkrecht auf denselben, durch die Formeln:

*) Wenn man die äuſserste Genauigkeit erreichen wollte, so würde es bequemer seyn, die Bewegung der Sonne um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt des Systems abgesondert in Rechnung zu bringen.

$$\begin{array}{lll}
\cos\lambda\ \cos L = \cos u'; & x' = r'\cos\lambda\ \cos(L-u); & x = r \\
\cos\lambda\ \sin L = \sin u'\ \cos i'; & y' = r'\cos\lambda\ \sin(L-u); & y = o \\
\sin\lambda = \sin u'\ \sin i'; & z' = r'\ \sin\lambda; & z = o
\end{array}$$

ferner

$$\varrho\varrho = (x'-x)^2 + y'^2 + z'^2$$

$$A' = \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\varrho^3}\right)\mu' x' + \frac{\mu' r}{\varrho^3}$$

$$B' = \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\varrho^3}\right)\mu' y'.$$

$$C' = \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\varrho^3}\right)\mu' z'.$$

Die Zahlenwerthe von i', n' und P findet man:

		Jupiter	Saturn	Uranus
1815	$i' =$	43° 14′	42° 19′	43° 44′,5
	$n' =$	8ᶻ 23° 7′,5	8ᶻ 22° 11′,5	8ᶻ 23° 37′,5
	$P =$	8 6 4	8 7 20	8 5 21,5
1887	$i' =$	43° 14′	42° 19′	43° 44′
	$n' =$	8ᶻ 24° 7′,6	8ᶻ 23° 11′,7	8ᶻ 24° 38′
	$P =$	8 6 2,5	8 7 18,5	8 5 20

In der Zwischenzeit verändern sie sich gleichförmig. Die Massen des Jupiters und Uranus wurden nach Laplace's, des Saturns nach Bouvard's neuesten Bestimmungen angenommen, nämlich:

Jupiter	$\log\mu' =$	6,97180 — 10
Saturn		6,45445 — 10
Uranus		5,70988 — 10

Da es etwas genauer ist, aus der Integration von $d\frac{1}{a}$ die grofse Axe zu suchen, als unmittelbar aus der Integration von da, so wurden nicht diese, sondern jene Differentiale berechnet. Da ferner die Differentialquotienten für Zwischenzeiten von 365 Tagen berechnet wurden, so war es bequem, die ursprünglichen Formeln mit 365 zu multipliciren.

15.

Störungen vom 4. August 1815 bis 30. Juli 1833.

Jupiter.

			$365\left(\frac{dT}{dt}\right)$	$365\left(\frac{d\frac{1}{a}}{dt}\right)$
1815	Aug.	4	+ 0,009	+ 0,00008437
1816	—	3	+ 0,134	+ 0,00028167
1817	—	3	+ 0,440	+ 0,00029963
1818	—	3	+ 0,777	+ 0,00023716
1819	—	3	+ 0,779	+ 0,00016641
1820	—	2	+ 0,372	+ 0,00011629
1821	—	2	— 0,403	+ 0,00006123
1822	—	2	— 1,279	+ 0,00000601
1823	—	2	— 1,869	— 0,00003492
1824	—	1	— 1,936	— 0,00005527
1825	—	1	— 1,458	— 0,00005779
1826	—	1	— 0,540	— 0,00004877
1827	—	1	+ 0,751	— 0,00003141
1828	Juli	31	+ 2,217	— 0,00001050
1829	—	31	+ 3,617	+ 0,00001185
1830	—	31	+ 4,496	+ 0,00003215
1831	—	31	+ 4,206	+ 0,00004759
1832	—	30	+ 2,292	+ 0,00004632
1833	—	30	— 0,895	+ 0,00003423

Saturn.

1815	Aug.	4	+ 0,000	+ 0,00000392
1816	—	3	+ 0,007	— 0,00000008
1817	—	3	+ 0,032	+ 0,00001197
1818	—	3	+ 0,042	+ 0,00001384
1819	—	3	+ 0,060	+ 0,00001388
1820	—	2	+ 0,017	+ 0,00001025
1821	—	2	— 0,016	+ 0,00000620

1822	Aug.	2	— 0,048	+ 0,00000406
1823	—	2	— 0,105	+ 0,00000215
1824	—	1	— 0,156	+ 0,00000046
1825	—	1	— 0,213	— 0,00000100
1826	—	1	— 0,259	— 0,00000221
1827	—	1	— 0,297	— 0,00000307
1828	Juli	31	— 0,313	— 0,00000363
1829	—	31	— 0,310	— 0,00000392
1830	—	31	— 0,283	— 0,00000396
1831	—	31	— 0,234	— 0,00000378
1832	—	30	— 0,166	— 0,00000347
1833	—	30	— 0,081	— 0,00000305

Uranus.

1816	Aug.	3	0,000	— 0,00000023
1817	—	3	— 0,001	+ 0,00000005
1818	—	3	— 0,003	+ 0,00000028
1819	—	3	— 0,004	+ 0,00000048
1821	—	2	— 0,002	+ 0,00000074
1823	—	2	0,000	+ 0,00000083
1825	—	1	+ 0,006	+ 0,00000079
1827	—	1	+ 0,014	+ 0,00000068
1829	Juli	31	+ 0,022	+ 0,00000054
1831	—	31	+ 0,028	+ 0,00000042
1833	—	30	+ 0,032	+ 0,00000032

Die Integration dieser Differentiale, vom 4. Aug. 1815 bis 30. Juli 1833, wurde nach der hier hinreichenden dritten Cotesischen Formel, nämlich:

$$\frac{\Delta}{8}\,[a + 3a' + 3a'' + a''']$$

gemacht, woraus sich folgende Integrale ergaben:

	$\int dT$	$\int d\frac{1}{a}$
Vom Perihelio bis zum 4. Aug. 1815 (Art. 8.)	+ 0,001	+ 0,00000996
Jupiter vom 4. Aug. 1815 bis 30. Juli 1833 . .	+ 12,487	+ 0,00114663
Saturn vom 4. Aug. 1815 bis 30. Juli 1833 . .	— 2,174	+ 0,00003768
Uranus vom 4. Aug. 1815 bis 30. Juli 1833 . .	+ 0,158	+ 0,00000966
Summe	+ 10,472	+ 0,00120393

16.

Störungen vom 30. Juli 1833 bis 21. Juli 1869.

Die vorigen Rechnungen geben die für diese Zwischenzeit benutzten Elemente:

$$T = -\ 105{,}527$$
$$\log a = 1{,}2372240$$
$$e = 0{,}92975964$$

Jupiter.

		$365\left(\frac{dT}{dt}\right)$	$-\ 365\left(\frac{d\frac{1}{a}}{dt}\right)$
1833	Juli 30	— 0,895	+ 0,00005423
1835	— 30	— 6 067	— 0,00000306
1837	— 29	— 4,974	— 0,00002284
1839	— 29	+ 0,767	— 0,00002148
1841	— 28	+ 7,873	— 0,00000797
1843	— 28	+ 8,010	+ 0,00000826
1845	— 27	— 0,648	+ 0,00002154
1847	— 27	— 11,490	+ 0,00001310
1849	— 26	— 10,175	— 0,00000121
1851	— 26	+ 0,133	— 0,00001318
1853	— 25	+ 10,768	— 0,00001602
1855	— 25	+ 17,908	— 0,00001315
1857	— 24	+ 0,533	+ 0,00001170
1859	— 24	— 18,628	+ 0,00002723
1861	— 23	— 17,978	+ 0,00001865
1863	— 23	— 1,733	— 0,00000486
1865	— 22	+ 21,255	— 0,00003288
1867	— 22	+ 31,302	— 0,00004049
1869	— 21	+ 4,608	— 0,00000050

Saturn.

1833	Juli 30	— 0,081	— 0,00000305
1835	— 30	+ 0,118	— 0,00000[illegible]14
1837	— 29	+ 0,343	— 0,00000130
1839	— 29	+ 0,569	— 0,00000061
1841	— 28	+ 0,773	— 0,00000009
1843	— 28	+ 0,935	+ 0,00000028
1845	— 27	+ 1,005	+ 0,00000053
1847	— 27	+ 0,929	+ 0,00000075
1849	— 26	+ 0,649	+ 0,00000101
1851	— 26	+ 0,139	+ 0,00000138
1853	— 25	— 0,556	+ 0,00000181
1855	— 25	— 1,275	+ 0,00000218
1857	— 24	— 1,789	+ 0,00000234
1859	— 24	— 1,918	+ 0,00000213
1861	— 23	— 1,616	+ 0,00000156
1863	— 23	— 0,987	+ 0,00000069
1865	— 22	— 0,157	— 0,00000036
1867	— 22	+ 0,776	— 0,00000153
1869	— 21	+ 1,756	— 0,00000277

Uranus.

1833	Juli 30	+ 0,032	+ 0,00000032
1837	— 29	+ 0,045	+ 0,00000021
1841	— 28	+ 0,056	+ 0,00000011
1845	— 27	+ 0,031	+ 0,00000007
1849	— 26	+ 0,022	+ 0,00000005
1853	— 25	+ 0,011	+ 0,00000004
1857	— 24	— 0,009	+ 0,00000005
1861	— 23	— 0,033	+ 0,00000007
1865	— 22	— 0,060	+ 0,00000010
1869	— 21	— 0,091	+ 0,00000014

Zur Integration für die Störungen des Jupiters wurde, wegen der längeren Zwischenzeiten, die vierte Cotesische Formel, die ich

$$\frac{\Delta}{90}\left[7a + 32a' + 12a'' + 32a''' + 7a^{IV}\right]$$

finde, benutzt, obgleich das durch sie erhaltene Resultat nicht bedeutend von dem durch die dritte erhaltenen abweicht *). — Diese Integration ergab:

			$\int d\,T.$	$\int d\,\frac{1}{a}.$
Jupiter	vom 30. Juli 1833	....	+ 62,960	— 0,00014417
Saturn	bis	....	— 2,591	+ 0,00001182
Uranus	21. Juli 1869	....	+ 0,074	+ 0,00000368
Vom 26. April 1815 bis 30. Juli 1833			+ 10,472	+ 0,00120393
Summe			+ 70,915	+ 0,00107526

17.

Störungen vom 21. Juli 1869 bis zur Wiederkehr.

Für diese Zwischenzeit ist, nach den bisherigen Rechnungen,

$$T = -45{,}084$$
$$\log a = 1{,}23818912$$
$$e = 0{,}92991553$$

Es war vorauszusehen, daſs die Aenderungen der **nächsten** Durchgangszeit durch's Perihel in dem letzten Viertel der Bahn nur sehr gering ausfallen würden; — die Rechnung zeigte sogar, daſs sie ganz unbedeu-

*) Da zuweilen der Fall vorkommen kann, daſs man den zwischen zwei Differentialquotienten befindlichen Theil des Integrals durch diese und die **äuſseren** sucht, so wird die folgende Formel dafür hin und wieder eine Anwendung finden. Wenn nämlich, bei gleichen Intervallen der Differentialquotienten, die beiden, zwischen welchen man das Integral sucht, a und b, der vorhergehende und folgende a' und b', der dann vorhergehende und folgende a'' und b'' .... sind, und man setzt

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(a + b)\;;\quad \beta = \tfrac{1}{2}(a' + b')\;;\quad \gamma = \tfrac{1}{2}(a'' + b'')\;;\;\ldots.$$

so ist das Integral zwischen a und b

$$= \Delta\;\left[\alpha + \tfrac{1}{12}(\alpha - \beta) + \tfrac{11}{720}(2\alpha - 3\beta + \gamma) + \ldots\right]$$

tend sind. — Da diese Rechnung nur die Erfindung von T′, und nicht die der übrigen Elemente zu dieser Zeit, zum Zwecke hat, so konnte für das letzte Viertel der Bahn die im 14. Art. gegebene Formel benutzt werden, wonach sich folgende Differentialquotienten von T′ ergaben:

Jupiter.

		$365\left(\frac{dT'}{dt}\right)$
1869	Juli 21	— 4, 285
1871	— 21	— 0, 751
1873	— 20	+ 1, 767
1875	— 20	+ 2, 038
1877	— 19	+ 0, 807
1879	— 19	— 0, 834
1881	— 18	— 1, 137
1883	— 18	— 0, 383
1885	— 17	— 0, 033
1886	— 17	— 0, 017

Saturn.

1869	Juli 21	+ 0, 126
1871	— 21	— 0, 001
1873	— 20	— 0, 080
1875	— 20	— 0, 140
1877	— 19	— 0, 179
1879	— 19	— 0, 158
1881	— 18	— 0, 110
1883	— 18	— 0, 051
1885	— 17	— 0, 004
1886	— 17	+ 0, 013

Die Wirkung des Uranus ist ganz unmerklich. Die Integration, nach der 4ten Cotesischen Formel, giebt hieraus

Jupiter	vom 21. Juli 1869	. . $\int dT'$ =	— 0,836 Tage
Saturn	bis 17. Juli 1886	. . . .	— 1,341 -
Summe		. . . .	— 2,177 Tage.

18.

Da nun mit der am 21. Juli 1869 stattfindenden grofsen Axe, die

Umlaufszeit	26295,503 Tage
und T	— 45,084 -

ist, so hat man die aus diesen Elementen folgende Epoche des nächsten Durchganges durch's Perihel, vom Anfange von 1815 an gerechnet

= 26340,587 Tagen.

In dem letzten Viertel der Bahn betragen die

Störungen	— 2,177 -
so dafs die Summe	= 26338,41 Tage

den nächsten Durchgang des Kometen durch das Perihel

1887. Febr. 9,4

giebt.

Nach den rein elliptischen Elementen würde dieser Durchgang 824,51 Tage später erfolgen; von der Veränderung erzeugen die Störungen

aller Planeten	vom 26. Apr 1815 bis 4. Aug 1815		— 6,82 Tage
des Jupiters	vom 4. Aug. 1815	. . . .	— 775,70 -
— Saturns	bis	. . . .	— 30,39 -
— Uranus	zur Wiederkehr	. . . .	— 9,32 -
die Producte etc. der Aenderung der grofsen Axe		.	— 2,28 -
			— 824,51 Tage.

Hoffentlich werden unsere Enkel Gelegenheit haben, die Richtigkeit dieses Resultats zu prüfen, indem sie ohne Zweifel den Olbersschen Kometen mit Eifer aufsuchen und wieder entdecken werden. Diese Aufsuchung würde sogar, selbst bei dem heutigen Zustande der optischen Hülfsmittel, keine Schwierigkeit haben, da man für jeden Tag die Linie an der Himmelskugel kennt, in welcher die Bahn sich projicirt.

Anhang.

Unter den Beobachtungen dieses Kometen auf der Königsberger Sternwarte scheint mir eine besonders interessant zu seyn. Am 26. April bedeckte nämlich der Komet einen Stern 9ter Gröfse, soviel sich mit 80- und 100maligen Vergröfserungen eines 7füfsigen Dollondschen Fernrohrs sehen liefs, central. Von $12^U\ 36'$ bis $12^U\ 44'$ der Uhr, oder von $10^U\ 20'\ 4''$ bis $10^U\ 28'\ 3''$ M. Z., war zwischen dem Sterne und dem Kometenkerne kein Zwischenraum zu bemerken; allein der Stern blieb sichtbar, obgleich sein Licht merklich verwaschen und, wie es schien, etwas schwächer wurde. Eine $12^U\ 56'$ der Uhr versuchte Schätzung der gegenseitigen Stellung des Kometen und des bedeckten Sterns, gegen die zugleich im Fernrohre sichtbaren No. 28 und 29 Camelopardali Fl., liefs aber vermuthen, dafs der Komet etwas, höchstens 10 bis $12''$, südlich von dem Sterne vorbeigegangen ist.

Es schien mir interessant, die genauere Erfindung des kürzesten Abstandes auf eine andere Weise zu versuchen, indem ich den Ort des Kometen, so wie ihn die definitiven Elemente der Bahn angeben, mit dem durch Meridianbeobachtungen bestimmten Orte des Sterns verglich. Indessen stiefs ich auch hierbei auf Schwierigkeiten: denn der Stern erschien zu lichtschwach, um ihn mit dem Fernrohre des Kreises genau beobachten zu können; bei der unteren Culmination, wegen der geringen Höhe; bei der oberen, wegen des, in der Nähe des Zeniths nothwendigen Gebrauchs eines mit einem Spiegel versehenen, das Licht schwächenden Oculars. Indessen gaben mir einige Beobachtungen den mittleren Ort für den Anfang 1815:

$$83^\circ\ 21'\ 15'',9. \quad 56^\circ\ 52'\ 14'',3.$$

Bringt man hierbei die Aberration an, so hat man den scheinbaren, auf den Aequator und das Aequinoctium des 1. Jan. 1815 bezogenen Ort

$$83^\circ\ 20'\ 50'',21. \quad 56^\circ\ 52'\ 22'',12.$$

Aus den Elementen ergiebt sich, mit Berücksichtigung des Fehlers der Sonnentafeln, den 8 Beobachtungen für diese Zeit $= -4'',79$ geben, der scheinbare Ort des Kometen, gleichfalls auf den Aequator und das Aequinoctium des 1. Jan. bezogen,

$10^U\ 27'\ 15'',2.$	$83^\circ\ 21'\ 8'',75.$	$56^\circ\ 52'\ 27'',15$
Parallaxe	$6,24$	$-\ 3,66$
	$83^\circ\ 21'\ 2'',51.$	$56^\circ\ 52'\ 23'',49$
Veränderung in $1'$	$+\ 3'',241$	$+\ 0'',9843$

Hiernach findet die nächste Zusammenkunft $10^{U}\,24'\,29'',8$ M. Z. statt, und der kürzeste Abstand ist $1'',54$ südlich.

Das Mittel der Zeit, in welcher der Kern des Kometen nicht von dem Sterne getrennt erschien, entspricht bis auf $26'',3$ dieser Rechnung, welche Uebereinstimmung gröſser ist, als bei der Unsicherheit der Beobachtung erwartet werden konnte. Gäben aber genauere Beobachtungen der Declination des Sterns denselben Abstand, so würde diese Beobachtung die äuſserste Kleinheit des Kerns beweisen, und demnach für die Erkenntniſs der physischen Beschaffenheit des Kometen nicht unwichtig seyn.

V o n

der Ableitung der Winkelfunctionen aus bloſs analytischen Betrachtungen, ohne Rücksicht auf ihre geometrische Entstehung.

Von Herrn Tralles *).

§. 1.

Man pflegt die goniometrischen Funktionen zu betrachten, als ob sie nur in geometrischen Vorstellungen ihren Ursprung finden und haben könnten. Eine der Analysis nachtheilige Ansicht besonders, in so ferne diese für sich als wissenschaftliches System, als allgemeine reine Mathesis, im strengeren Sinne, betrachtet werden kann. Jene Meinung hat veranlaſst, Untersuchungen, in welchen Sinusse, Cosinusse etc. vorkommen, auſser dem eigenthümlichen algebraischen Gebiete begründet zu halten, da solche Funktionen doch in demselben von so häufigem Gebrauche sind und seyn müssen. Es kommt zwar nicht viel darauf an, wo man diese Grenzlinie zwischen elementarer und transcendenter Analysis zieht, wenn man eine solche anzunehmen sich berechtigt glaubt; hingegen ist sehr viel daran gelegen, zu wissen, in welchem Zusammenhange eine bestimmte Lehre mit den übrigen steht, welche diejenigen sind, an die sie zunächst grenzt. Denn man kann nicht wohl behaupten, daſs eine Lehre im Klaren sey, wenn man ihre Beziehungen nicht vollständig und deutlich erkennt. Dies scheint mir nur der Fall mit der Theorie der genannten Gröſsen noch zu seyn. Das Bestreben der vorzüglichsten Geometer, sie von so vielen Seiten zu behandeln, zeigt ihre

*) Vorgelesen den 6ten December 1810.

Wichtigkeit, und läſst nicht viel bedeutendes für deren Erweiterung bei neuen Untersuchungen erwarten; aber ihre erste Entstehung scheint hingegen stets an eben der Stelle nur nachgesucht zu seyn, so daſs es nicht überflüssig ist, zu zeigen, wie sie aus mannigfaltigen Vorstellungen entspringen. Alle mögliche vorzutragen habe ich aber eben so wenig nothwendig erachtet, als die Durchführung der veranlaſsten Untersuchungen, sondern diese nur in so weit, als es nöthig schien auf den Weg zu kommen, auf welchem weiter zu gehen deutliche Anweisungen sich finden. Mehreres hätte wohl bloſs summarisch in Worten gefaſst werden können, ohne bekannte Formen aufzunehmen. Da aber doch von ihnen die Rede seyn muſste, so werden sie den Augen der Kenner nicht anstöſsig erscheinen, um so weniger, da sie andern nicht unnütz, und im Ganzen immer das kürzeste und sicherste, in jedem Falle aber das bequemste Mittel der Verständlichkeit sind.

§. 2.

Es ist

$$(a + b)(c + d) = ac + bd + bc + ad$$

also, wenn man im entwickelten Produkt die Gröſse $2\sqrt{abcd}$ addirt und subtrahirt

$$(a + b)(c + d) = \begin{cases} ac - 2\sqrt{abcd} + bd \\ + bc + 2\sqrt{abcd} + ad \end{cases}$$

mithin

$$(a + b)(c + d) = (\sqrt{ac} - \sqrt{bd})^2 + (\sqrt{bc} + \sqrt{ad})^2$$

In dieser besonderen binomischen Form des Produkts binomischer Faktoren sind jedoch nur dann die Wurzeln beider Theile für sich möglich, wenn alle vier Gröſsen, a, b, c, d, einerlei Zeichen haben.

Es wird aber die Untersuchung der Beziehungen jener zusammengesetzten Gröſsen als reelle nicht beschränkt, indem man annimmt, die einzelnen Gröſsen seyen insgesammt positiv, welches sich ausdrückt, wenn statt der einfachen Gröſsen a, b, c, d, quadratische A^2, B^2, C^2, D^2, gebräucht werden.

Dann ist also

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC - BD)^2 + (BC + AD)^2; \quad \ldots . (A)$$

welche Formel ausdrückt, daſs da Produkt von zwei Binomen, welche die Summe zweier Quadrate sind, aus der Summe zweier Quadrate besteht.

woraus denn sogleich folgt, daſs das Produkt so vieler Binome als man will, jedes aus der Summe zweier Quadrate zusammengesetzt, ein ähnliches Binom ist; weil, wenn man die eben erhaltene Gleichung beiderseits mit $E^2 + F^2$ multiplicirt, eben ihr zu Folge, das Produkt des andern Theils wiederum in die Form der Summe zweier Quadrate gebracht werden kann, also auch bei jeder folgenden ähnlichen Multiplication.

§. 3.

Im andern Theile der gefundenen Gleichung (A) kann man in demjenigen Gliede, in welchem das negative Zeichen vorkommt, welches aber willkührlich im ersten oder im andern Gliede gesetzt werden konnte, die Faktoren in den beiden Produkten, aus welchen es besteht, gegen einander vertauschen, C gegen A, und zugleich D gegen B und umgekehrt, ohne daſs der Wurzelwerth dieses Gliedes, noch der des andern, wenn dieselbe Gröſsenvertauschung auch in diesem vorgenommen wird, sich ändert.

Nimmt man auch im ersten Theile dieselbe Vertauschung vor, so entsteht dieselbe Gleichung (A), nur mit veränderter Ordnung der Gröſsen, nämlich:

$$(C^2 + D^2)(A^2 + B^2) = (CA - DB)^2 + (DA + CB)^2$$

so daſs es ganz identische Resultate giebt, unabhängig von der Ordnung, in welcher die beiden Binome $A^2 + B^2$ und $C^2 + D^2$ multiplicirt werden.

Bezeichnet man die Gröſsen, welche gegen einander verwechselt werden können, ohne jene formale Identität zu stören, mit einerlei, nur mit Abzeichen zu versehenden Buchstaben; diejenigen mit $p_{,}$, $p_{,,}$, welchen im ersten Gliede, wo das negative Zeichen angenommen, das positive Zeichen vorgesetzt worden, welches willkührlich vor AC oder BD geschehen konnte, und mit $q_{,}$, $q_{,,}$ diejenigen, welche das negative Zeichen vor sich haben sollen, so wird die Gleichung

$$(p_{,}^2 + q_{,}^2)(p_{,,}^2 + q_{,,}^2) = (p_{,}p_{,,} - q_{,}q_{,,})^2 + (q_{,}p_{,,} + p_{,}q_{,,})^2$$

Multiplicirt man dies weiter mit $p_{,,,}^2 + q_{,,,}^2$, so entsteht

$$(p_{,}^2 + q_{,}^2)(p_{,,}^2 + q_{,,}^2)(p_{,,,}^2 + q_{,,,}^2) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left[\pm(p_{,}p_{,,} - q_{,}q_{,,})\begin{matrix}p_{,,,}\\q_{,,,}\end{matrix} \mp (q_{,}p_{,,} + p_{,}q_{,,})\begin{matrix}q_{,,,}\\p_{,,,}\end{matrix}\right]^2 + \left[(q_{,}p_{,,} + p_{,}q_{,,})\begin{matrix}p_{,,,}\\q_{,,,}\end{matrix} + (p_{,}p_{,,} - q_{,}q_{,,})\begin{matrix}q_{,,,}\\p_{,,,}\end{matrix}\right]^2$$

worin die Gröſsen $p_{,,,}$, $q_{,,,}$ stets zweimal stehen, und $q_{,,,}$ im Gliede mit abwechselnden Zeichen das Negative vor sich fordert. Man kann nach Willkühr die oberen oder die unteren gebrauchen, in so ferne man bloſs auf die völlige quadratische Gleichheit sieht. Da man aber wiederum $p_{\prime\prime\prime}$ als eine Gröſse betrachtet, welche gegen $p_{\prime}$ oder $p_{\prime\prime}$ verwechselt werden darf, wenn zugleich $q_{\prime\prime\prime}$ gegen $q_{\prime}$ oder $q_{\prime\prime}$ verwechselt wird, und diese Verwechselung die Identität des Resultats, selbst in den Wurzelwerthen, nicht aufheben soll, so sind nur, wie man sich leicht überzeugen kann, die oberen Gröſsen und Zeichen zuläſslich, also die Wurzelwerthe

$$(p_{\prime} p_{\prime\prime} - q_{\prime} q_{\prime\prime})\, p_{\prime\prime\prime} - (q_{\prime} p_{\prime\prime} + p_{\prime} q_{\prime\prime})\, q_{\prime\prime\prime} \text{ und}$$
$$(q_{\prime} p_{\prime\prime} + p_{\prime} q_{\prime\prime})\, p_{\prime\prime\prime} + (p_{\prime} p_{\prime\prime} - q_{\prime} q_{\prime\prime})\, q_{\prime\prime\prime}.$$

Betrachtet man ferner diese Ausdrücke, als aus dem Produkte zweier quadratischer Binome

$$[(p_{\prime} p_{\prime\prime} - q_{\prime} q_{\prime\prime})^2 + (q_{\prime} p_{\prime\prime} + p_{\prime} q_{\prime\prime})^2]\ (p_{\prime\prime\prime}^2 + q_{\prime\prime\prime}^2)$$

hervorgegangen, wie sie denn in der That entstanden sind, so ergiebt sich, daſs in denselben

$$p_{\prime\prime\prime} \text{ nur gegen } p_{\prime} p_{\prime\prime} - q_{\prime} q_{\prime\prime} \text{ und zugleich}$$
$$q_{\prime\prime\prime} \text{ nur gegen } q_{\prime} p_{\prime\prime} + p_{\prime} q_{\prime\prime}$$

vertauscht werden kann, wenn jene Ausdrücke identisch bleiben sollen.

Es ist also angemessen dem vorher bemerkten, die erstere Gröſse, die stets das positive Zeichen vor sich hat, wieder mit einem p, die andere, vor welcher auch in dieser neuen Verbindung das negative Zeichen kommt, mit einem q zu bezeichnen, und nur von den schon gebrauchten Bezeichnungen zu unterscheiden. Man kann also setzen

$$p_{\prime} p_{\prime\prime} - q_{\prime} q_{\prime\prime} = q_{..}; \quad q_{\prime} p_{\prime\prime} + p_{\prime} q_{\prime\prime} = p_{..}$$

Dann ist:

$$(p_{\prime}^2 + q_{\prime}^2)\ (p_{\prime\prime}^2 + q_{\prime\prime}^2) = p_{..}^2 + q_{..}^2$$
$$(p_{\prime}^2 + q_{\prime}^2)\ (p_{\prime\prime}^2 + q_{\prime\prime}^2)\ (p_{\prime\prime\prime}^2 + q_{\prime\prime\prime}^2) = (p_{..}\, p_{\prime\prime\prime} - q_{..}\, q_{\prime\prime\prime})^2 + (q_{..}\, p_{\prime\prime\prime} + p_{..}\, q_{\prime\prime\prime})^2 = p_{...}^2 + q_{...}^2$$

u. s. w.

Setzt man $p_{\prime}^2 + q_{\prime}^2 = r_{\prime}^2$; $p_{\prime\prime}^2 + q_{\prime\prime}^2 = r_{\prime\prime}^2$ . . . . .

$$p_{\mu}^2 + q_{\mu}^2 = r_{\mu}^2; \quad p_{\mu+1}^2 + q_{\mu+1}^2 = r_{\mu+1}^2 \text{ u. s. w.}$$

wo μ die Zahl der die Gröſsen unterscheidenden Anzeiger, und setzt ferner

$$r_{\prime}^2 .\ r_{\prime\prime}^2 .\ r_{\prime\prime\prime}^2 .\ .\ .\ .\ r_{\mu}^2 = r_m^2$$

wo m die Anzahl der Faktoren, also daſs $r_{m+1}^2 = r_m^2 \cdot r_{\mu+1}^2$; und bestimmt nun in Folge des bisherigen jedes p_{m+1} und q_{m+1}, welche ganze positive Zahl auch m, daſs stets sey

$$p_{m+1} = p_m\, p_{\mu+1} - q_m\, q_{\mu+1}, \quad q_{m+1} = q_m\, p_{\mu+1} + p_m\, q_{\mu+1};$$

so ist:

$$r_n^2 = p_n^2 + q_n^2$$

und p_n, q_n sind aus $p_\prime$, $p_{\prime\prime}$ .... p_ν; $q_\prime$, $q_{\prime\prime}$ .... q_ν bestehende, in p und q symmetrische Funktionen, welche ihren Werth nicht ändern, wenn irgend ein Paar p und zugleich die ihnen zugehörigen q gegen einander vertauscht werden.

Zieht man aus den beiden Gleichungen

$$p_{m+1} = p_m p_{\mu+1} - q_m q_{\mu+1}; \quad q_{m+1} = q_m p_{\mu+1} + p_m q_{\mu+1}$$

di Werthe von p_m und q_m, so werden diese seyn:

$$p_m = \frac{p_{m+1}\, p_{\mu+1} + q_{m+1}\, q_{\mu+1}}{p_{\mu+1}^2 + q_{\mu+1}^2}; \quad q_m = \frac{q_{m+1}\, p_{\mu+1} - p_{m+1}\, q_{\mu+1}}{p_{\mu+1}^2 + q_{\mu+1}^2}.$$

Also

$$p_{m-1} = \frac{p_m p_\mu + q_m q_\mu}{p_\mu^2 + q_\mu^2}; \quad q_{m-1} = \frac{q_m p_\mu - p_m q_\mu}{p_\mu^2 + q_\mu^2}$$

Versteht man unter $p_{(n-m)}$, $q_{(n-m)}$ ähnliche Gröſsen, als unter p_n, q_n, nur daſs so wie diese zusammengesetzt sind aus $p_\prime$, $p_{\prime\prime}$ ..... p_ν; $q_\prime q_{\prime\prime}$ ... q_ν, jene aus $p_{\mu+1}$, $p_{\mu+2}$ ... p_ν; $q_{\mu+1}$, $q_{\mu+2}$ ... q_ν bestehen, oder die m Gröſsen $p_\prime$, $p_{\prime\prime}$ ... p_μ und $q_\prime$, $q_{\prime\prime}$ ... q_μ nicht enthalten, welche für sich allein auf eben die Weise zusammengesetzt p_m, q_m hervorbringen.

Weil nun dieser und vorhergegangener Bezeichnung zufolge:

$$(p_m^2 + q_m^2)\,(p_{(n-m)}^2 + q_{(n-m)}^2) = r_m^2 .\, r_{(n-m)}^2 = r_n^2$$

und

$$r_n^2 = p_{m+(n-m)}^2 + q_{m+(n-m)}^2 = p_n^2 + q_n^2 .$$

so ist auch

$$p_{m+(n-m)} = p_n = p_m\, p_{(n-m)} - q_m\, q_{(n-m)}$$
$$q_{m+(n-m)} = q_n = q_m\, p_{(n-m)} + p_m\, q_{(n-m)}$$

Denn nur diese für sich allgemein gültige Formen für p_n und q_n stimmen auch zugleich mit dem besondern Fall überein, wenn $m = n - 1$ oder $n = m + 1$ gesetzt wird, also

$p_{(n-m)}$, $q_{(n-m)}$ in $p_{\mu+1}$, $q_{\mu+1}$ übergehen;

und aus beiden Gleichungen zieht man

$$p_{(n-m)} = \frac{p_n p_m + q_n q_m}{p_m^2 + q_m^2};\ q_{(n-m)} = \frac{q_n p_m - p_n q_m}{p_m^2 + q_m^2}.$$

§. 4.

Werden die bisher unbestimmt in Gröſse verschieden gehaltenen $p_{\backslash}$, $p_{\backslash\backslash}$ . . . p, etc. . ; $q_{\backslash}$, $q_{\backslash\backslash}$ . . . q, etc. gleichgesetzt, so entstehen oder bestehen alle bisherige Sätze in ihrer mehrfältigen Verbindung. Da man aber nicht mehr zu beachten hat, welche p und q in der Zusammensetzung eines p_m, q_m vorkommen, sondern nur wie viele, so ist die zuletzt gebrauchte unterscheidende Bezeichnung $p_{(n-m)}$, $q_{(n-m)}$ überflüssig; diese Gröſsen sind gleich p_{n-m}, q_{n-m}; man wird diese also statt jener in den so eben behandelten Formeln nehmen, so wie p oder $p_{\backslash}$, q oder $q_{\backslash}$, statt p_μ, $p_{\mu+1}$, q_μ, $q_{\mu+1}$, um diejenigen zu haben, welche der angenommenen Voraussetzung entsprechen.

Es entsteht in Folge derselben, daſs die Zusammensetzungszahl n in die vollendet gedachte Entwickelung von p_n, q_n anstatt der mannigfaltigen Gröſsen von p und q eintreten, p_n, q_n also durch p, q und n allein bestimmbar sind, und nichts hindert dieser Zahl auch negative Werthe beizulegen. Denn setzt man in der Gleichung für p_{n-m}, q_{n-m}, $n = m$, so hat man

$$p_o = \frac{p_m^2 + q_m^2}{p_m^2 + q_m^2} = 1;\ q_o = 0$$

Daher

$$p_{o-1} = p_{-1} = \frac{p_o p + q_o q}{p^2 + q^2} = \frac{p}{p^2 + q^2};\ q_{-1} = \frac{q_o p - p_o q}{p^2 + q^2} = -\frac{q}{p^2 + q^2}$$

Man kann also weiter fortgehen, allein es ist hier überflüssig, bei besondern Fällen zu verweilen.

Da in $(p_{\backslash}^2 + q_{\backslash}^2)^m = p_n^2 + q_n^2$, wenn n eine ganze positive Zahl, die Gröſsen p_n und q_n nur aus Produkten der Potenzen von $p_{\backslash}$ und $q_{\backslash}$ zusammengesetzt seyn können, so wird:

$$p_n = A p^n + B p^{n-1} q + C p^{n-2} q^2 + D p^{n-3} q^3 + \ldots \quad (1)$$
$$q_n = a p^n + b p^{n-1} q + c p^{n-2} q^2 + d p^{n-3} q^3 + \ldots \quad (2)$$

wo sowohl für p_n als für q_n alle Verbindungen der Potenzen von p und q, deren Produkt n Faktoren bilden, angenommen sind, und es bleibt nur die Bestimmung der Koefficienten A, B, C .... und a, b, c ...., welche nur von n abhängen können, übrig. Man wird also auch haben:

$$p_{n+1} = A_{,} p^{n+1} + B_{,} p^n q + C_{,} p^{n-1} q^2 + D_{,} p^{n-2} q^3 + \ldots \quad (3)$$
$$q_{n+1} = a_{,} p^{n+1} + b_{,} p^n q + c_{,} p^{n-1} q^2 + d_{,} p^{n-2} q^3 + \ldots \quad (4)$$

wo $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$ .... und $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$ .... nichts anders seyn können, als die Koefficienten A, B, C .... und a, b, c ...., wenn man in diesen n + 1 statt n setzt.

Es ist aber auch nach dem Gesetz der Bildung dieser Gröſsen

$$p_{n+1} = p_n p - q_n q$$
$$q_{n+1} = q_n p + p_n q$$

Wenn man daher in den letzten Theilen dieser Gleichungen die für p_n, q_n angenommenen Entwickelungen (1) und (2) setzt, so hat man:

$$p_{n+1} = \left\{\begin{array}{r|r|r|l} A p^{n+1} + B & p^n q + C & p^{n+1} q^2 + D & p^{n-2} q^3 + \ldots \\ - a & - b & - c & \end{array}\right.$$

$$q_{n+1} = \left\{\begin{array}{r|r|r|l} a p^{n+1} + b & p^n q + c & p^{n-1} q^2 + d & p^{n-2} q^3 + \ldots \\ + A & + B & + C & \end{array}\right.$$

in welchen Entwickelungen die Koefficienten mit denen bei gleichen Verbindungen von p und q in (3) und (4) einerlei seyn müssen; ihre Gleichsetzung wird also zu ihrer Bestimmung dienen. Man hat also:

$A_{,} = A$ oder $A_{,} - A = 0$, d. i. $\Delta A = 0$

A ist unveränderlich, welche Zahl auch n.

Aber für $n = 1$ ist $A = 1$, also überhaupt $A = 1$.

Eben so ist

$a_{,} = a$ also $\Delta a = 0$, daher a beständig.

Aber für $n = 1$ ist $a = 0$ also überhaupt $a = 0$.

Dann ist ferner:

$B - a = B$, d. i. $\Delta B = 0$, also B beständig,

für $n = 1$ wird aber B Null also $B = 0$,

$b + A = b_{,}$ also $\Delta b = A = 1$ also $b = n + \text{const.}$

Aber für $n = 1$ wird $b = 1$, weil dann $q_{,} = q$.

Also $1 + \text{const} = 1$, mithin $\text{const} = 0$ also: $b = n$.

$C - b = C_{,}$ giebt $\Delta C = - b = - n$, also $C = - \dfrac{n.\ n - 1}{1.\ 2}$

Es kommt keine Beständige hinzu, denn es wird C mit $n = 1$ Null wie es soll. Dies ist der Fall mit allen folgenden Koefficienten, daſs sie für $n = 1$ Null werden; also erhalten sie weiter keine unbestimmte Beständige, wenn sie so gefunden werden, daſs sie in der That mit $n = 1$ verschwinden. Es kann also auch kein von n unabhängiger beständiger Koefficient vorkommen.

$c + B = c_{\backslash}$, d. i. $\Delta c = 0$, also $c = 0$

$D - c = D_{\backslash}$, d. i. $\Delta D = 0$, also $D = 0$

$d + C = d_{\backslash}$, d. i. $\Delta d = C = -\dfrac{n.\,n-1}{1.\,2}$, daher $d = -\dfrac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3}$

$E - d = E_{\backslash}$, d. i. $\Delta E = -d = \dfrac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3}$ daher $E = \dfrac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3}{1.\,2.\,3.\,4}$

u. s. w.

Das Fortschreitungsgesetz der Koefficienten hat keine Schwierigkeit, und man hat

$$p_n = p^n - \frac{n.\,n-1}{1.\,2} p^{n-2} q^2 + \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3}{1.\,2.\,3.\,4} p^{n-4} q^4 - \text{etc.}$$

$$q_n = n p^{n-1} q - \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3} p^{n-3} q^3 + \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} p^{n-5} q^5 - \text{etc.}$$

Will man diese Reihen als allgemeine Ausdrücke für p_n und q_n ansehen, d. i. als solche, in welchen man für n jede, oder auch nur jede ganz positive Zahl substituiren darf, um stets Gröſsen p_n, q_n zu erhalten, so beschaffen, daſs $p_n^2 + q_n^2 = (p^2 + q^2)^n$; so müssen sie ins unbestimmte — wie man zu sagen pflegt, ins Unendliche — fortgesetzt gedacht werden. Denn nur unter dieser Voraussetzung entsprechen sie jedem n, wenn es eine ganze positive Zahl, und brechen von selbst ab. Dahingegen, wenn man sie nur bis zu irgend einem bestimmbaren Gliede fortgehend dächte, so ist klar, daſs wenn man in derselben für n eine Zahl setzte, gröſser als der höchste Potenzexponent von q, die Ausdrücke für p_n, q_n nicht mehr richtig wären, und Glieder fehlen würden. Setzte man diese fehlenden hinzu, so geschähe dieses dann nicht in Folge der endlichen, sondern der allgemeinen unbestimmten Reihe, die man im Sinne hätte und haben muſs, und die man daher sich auch als ausgedruckt vorzustellen hat, widrigenfalls dieselbe nicht analysisch die Regel darlegt, indem nach einer andern verfahren wird, als die Gröſsenbezeichnung angiebt. Diese Bemerkung beiläufig hier

zu

zu machen, habe ich nicht unterlassen wollen, weil ich sie nirgends ausdrücklich genug ausgesprochen gefunden.

Da nun schon die Gültigkeit der Reihen für n jede ganze positive Zahl erfordert, daſs sie ohne Ende fortschreiten, so unterscheiden sie sich formal keinesweges in diesem Falle von der Annahme irgend einer Zahl für n, und ihre allgemeine Gültigkeit in jener Voraussetzung entsteht eben daher, daſs der Werth von n, unbestimmt genommen, den erforderten Eigenschaften von p_n und q_n entspreche.

Die allgemeinen Glieder der Reihen kann man ausdrücken

$$\text{für } p_n \text{ durch } \frac{n.\ n-1.\ n-2\ \ldots\ldots\ [n-(2\mu-1)]}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ 2\mu}\, p^{n-2\mu}\, q^{2\mu}\, z^{\mu}$$

$$\text{für } q_n \text{ durch } \left\{\frac{n.\ n-1\ \ldots\ldots\ (n-(2\mu-1))\ (n-2\mu)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ 2\mu.\quad 2\mu+1}\, p^{n-2\mu-1} q^{2\mu+1}.\ z^{\mu+\frac{1}{2}}\right\} :\ z^{\frac{1}{2}}$$

worin μ nur eine ganze positive Zahl seyn kann, und die Gröſse z hinzugefügt ist, um das abwechselnde Zeichen der Glieder zu bestimmen, die dann durchgängig mit dem positiven Vorzeichen geschrieben werden können, und das ihnen zukommende empfangen, wenn endlich $z = -1$ gesetzt wird.

Die in p_n und q_n bei $q^{2\mu}$, $q^{2\mu+1}$ gehörigen Koëfficienten, sind offenbar diejenigen, welche diesen Potenzen von q in der binomischen Potenz von $(p+q)^n$ zugehören. Aber p_n enthält nur die geraden Potenzen von q, und q_n allein die ungeraden. Es ist also, wenn man sich der eingeführten Hülfsgröſse z bedient, in Folge der, vermittelst derselben gegebenen Ausdrücke der allgemeinen Glieder,

$$p_n = \frac{(p + q.\ z^{\frac{1}{2}})^n + (p - q.\ z^{\frac{1}{2}})^n}{2}$$

$$z^{\frac{1}{2}}.\ q_n = \frac{(p + q.\ z^{\frac{1}{2}})^n - (p - q.\ z^{\frac{1}{2}})^n}{2}$$

$$\text{oder } q_n = \frac{(p + q.\ z^{\frac{1}{2}})^n - (p - q.\ z^{\frac{1}{2}})^n}{2.\ z^{\frac{1}{2}}}$$

wo man nämlich in den am Ende der Entwickelung der Reihen noch vorhandenen z, dessen Werth gleich -1 zu setzen hat. Allein man kann auch schon vor der Entwickelung in den Formeln selbst für z den Werth setzen.

§. 5.

Aus dem, was bisher dargethan worden, läſst sich das fernere der Gröſsenbeziehungen von p_n, q_n, in deren mannigfaltigen Folgerungen ohne Schwierigkeit ableiten. Aber es ist unserem Zweck angemessen, vorher auch zu zeigen, wie man auch auf kürzerm Wege, ohne Hülfe der Geometrie, zu den schon gefundenen Formeln unmittelbar gelangen kann.

Es ist sehr leicht zu ersehen, daſs für $p_{\backslash}$, $p_{\backslash\backslash}\ldots$, $q_{\backslash}$, $q_{\backslash\backslash}\ldots$ und z willkührliche Gröſsen:

$$(p_{\backslash} + q_{\backslash}.\, z^{\frac{1}{2}})\,(p_{\backslash\backslash} + q_{\backslash\backslash}.\, z^{\frac{1}{2}})\,(p_{\backslash\backslash\backslash} + q_{\backslash\backslash\backslash}.\, z^{\frac{1}{2}})\,\ldots\ldots\,(p_{\mu} + q_{\mu}.\, z^{\frac{1}{2}}) = P + Q.\, z^{\frac{1}{2}}$$
$$(p_{\backslash} - q_{\backslash}.\, z^{\frac{1}{2}})\,(p_{\backslash\backslash} - q_{\backslash\backslash}.\, z^{\frac{1}{2}})\,(p_{\backslash\backslash\backslash} - q_{\backslash\backslash\backslash}.\, z^{\frac{1}{2}})\,\ldots\ldots\,(p_{\mu} - q_{\mu}.\, z^{\frac{1}{2}}) = P - Q.\, z^{\frac{1}{2}}$$

wenn nämlich P und Q nur z in ganzen positiven Potenzen enthalten, oder $Q z^{\frac{1}{2}}$ allein die Glieder alle in sich begreift, welche in der Entwickelung der beiden Produkte z auf Potenzen enthalten, deren Exponenten Brüche mit dem Nenner 2 sind. Denn die untere Gleichung kann angesehen werden, als entstehe sie aus der oberen, wenn man in derselben $-(z^{\frac{1}{2}})$ statt $z^{\frac{1}{2}}$ setzt. Diese Substitution aber ändert die Vorzeichen der ganzen Potenzen von z, also auch P und Q, nicht. Es wird also nur das $Q z^{\frac{1}{2}}$ der oberen Gleichung in $Q \times -(z)^{\frac{1}{2}}$, d. i. in $-\, z^{\frac{1}{2}}$, übergehen.

Multiplicirt man nun beide Gleichungen mit einander, so entsteht

$$(p_{\backslash}^2 - q_{\backslash}^2\, z)\,(p_{\backslash\backslash}^2 - q_{\backslash\backslash}^2.z)\,(p_{\backslash\backslash\backslash}^2 - q_{\backslash\backslash\backslash}^2.z)\,\ldots\ldots\,(p_{\mu}^2 - q_{\mu}^2.\, z) = P^2 - Q^2.\, z$$

welche Gleichung bestehen muſs, z sey was es wolle. Man setze in derselben $z = -1$, so geht sie über in

$$(p_{\backslash}^2 + q_{\backslash}^2)\,(p_{\backslash\backslash}^2 + q_{\backslash\backslash}^2)\,(p_{\backslash\backslash\backslash}^2 + q_{\backslash\backslash\backslash}^2)\,\ldots\,(p^2 + q_{\mu}^2) = \underset{z=-1}{(P^2)} + \underset{z=-1}{(Q^2)}$$

welches gleich $\left(\underset{z=-1}{P}\right)^2 + \left(\underset{z=-1}{Q}\right)^2$, weil es einerlei ist, ob man z einen bestimmten Werth in P und Q giebt, und sie dann zur zweiten Potenz erhebt, oder umgekehrt.

Das beobachtete Verfahren bietet also ein Mittel dar, die Gröſsen p_m, q_m, denn dies sind die Werthe von P und Q für $z = -1$, unmittelbar auf einem der Analysis gemäſsen Wege zu erlangen. Für den Fall, wo $p_{\backslash} = p_{\backslash\backslash}\ldots\ldots$ und $q_{\backslash} = q_{\backslash\backslash}\ldots\ldots$ gehen diese Produkte der m Faktoren über in

$$(p + q.\, z^{\frac{1}{2}})^m = P + Q.\, z^{\frac{1}{2}}$$
$$(p - q.\, z^{\frac{1}{2}})^m = P - Q.\, z^{\frac{1}{2}}$$

wenn, wie zuvor, P und Q neben p und q nur ganze Potenzen von z enthalten. Die Multiplikation beider Gleichungen giebt die

$$(p^2 - q^2 . z)^m = P^2 - Q^2 . z$$

welche in $(p^2 + q^2)^m = p_m^2 + q_m^2$ übergeht, wenn man $z = -1$ setzt, und unter p_m, q_m diejenigen Werthe von **P** und Q versteht, welche sie unter dieser Voraussetzung erhalten.

Aus den beiden obigen Gleichungen zieht man

$$\mathbf{P} = \frac{(p + q . z^{\frac{1}{2}})^m + (p - q . z^{\frac{1}{2}})^m}{2}$$

$$Q = \frac{(p + q . z^{\frac{1}{2}})^m - (p - q . z^{\frac{1}{2}})^m}{2 . z^{\frac{1}{2}}}$$

aus welchen p_m, q_m entstehen, wenn man nach den Entwickelungen der binomischen Potenzen, nach steigenden von $z^{\frac{1}{2}}$, und der wirklichen Division mit $z^{\frac{1}{2}}$ für Q, dann $z = -1$ setzt.

Setzt man $z = +1$, so hat man ebenfalls merkwürdige Formeln, für die Voraussetzung gültig, dafs $p^2 - q^2 = r^2$ oder $(p^2 - q^2)^n = p^2_{n)} - q^2_{n)}$, wo $p_{n)}$, $q_{n)}$ von den vorigen als verschieden im Werth, und in ihrer Natur auch verschieden bezeichnet sind. Aber auch im Falle z unbestimmt gelassen wird, haben die Formeln Bedeutsamkeit, welche auch geometrisch angesehen umfassender ist.

Giebt man, um bequem die Gröfsen zu unterscheiden, denen, die bisher mit **P**, Q bezeichnet sind, noch einen Zahlzeiger, gleich dem Exponenten der Potenz von $p \pm q z^{\frac{1}{2}}$, aus welcher sie entstehen, und beachtet beide Fälle zugleich, so ist

$$(p \pm q . z^{\frac{1}{2}})^m = P_m \pm Q_m \, z^{\frac{1}{2}}$$
$$(p \pm q . z^{\frac{1}{2}})^n = P_n \pm Q_n \, z^{\frac{1}{2}}$$

wo P_n, Q_n eben die Funktionen von n, als P_m, Q_m von m sind, und aus diesen entstehen, wenn n statt m in denselben substituirt wird. Multiplicirt man beide Gleichungen, indem man nur die oberen oder die unteren Verbindungszeichen beachtet, so entsteht

$$(p \pm q . z^{\frac{1}{2}})^{m+n} = P_m P_n + Q_m Q_n z \pm (Q_m P_n + P_m Q_n) z^{\frac{1}{2}}.$$

Da aber auch, dem so eben bemerkten zufolge, der erste Theil der Gleichung sich durch $P_{m+n} \pm Q_{m+n} . z^{\frac{1}{2}}$ ausdrücken läfst, und man wegen der gedachten Identität beider Ausdrücke, die in $z^{\frac{1}{2}}$ multiplicirten Gröfsen unter sich gleich setzen mufs, so folgt, dafs seyn werde:

$$P_{m+n} = P_m P_n + Q_m Q_n z \text{ und } Q_{m+n} = Q_m P_n + P_m Q_n$$

welche durch die Annahme von $z = -1$ übergehen in

$$p_{m+n} = p_m p_n - q_m q_n ; \quad q_{m+n} = q_m p_n + p_m q_n.$$

Die Gleichungen zwischen den allgemeinen z in sich enthaltenden Gröſsen sind wahr für m und n jede Zahl; also sind es auch die zwischen den daraus unter der Bedingung $z = -1$ folgenden.

In der hier genommenen Ansicht entspringen die Hauptformeln der Sinus-Beziehungen bloſs aus der näheren Betrachtung einer binomischen Potenz $(p \pm q.\ z^{\frac{1}{2}})^n$ oder $(p \pm q\ z)^n$; denn es ist einerlei, ob man q als Koëfficient von z oder $z^{\frac{1}{2}}$ ansieht. Jenes führt mit diesem auf einerlei Resultat. Nur einer geringen Nebenbetrachtung halber ist $z^{\frac{1}{2}}$ statt z gebraucht worden. Uebrigens, wenn man einmal zu den Eigenschaften, die sich ergeben, gelangt ist, kann man das z weglassen, und dafür die Gröſse -1 selbst in den Formeln, wie bekannt, gebrauchen, da es einerlei ist, ob vor oder nach den Ausführungen der Entwickelungen dieser Werth angenommen wird, und dann hat man sogleich $(p \pm q\sqrt{-1})^m = p_m \pm q_m\sqrt{-1}$, mithin alle daraus sich ergebende Folgerungen in den so allgemein bekannten als gebräuchlichen Formen.

§. 6.

Diese aber ergeben sich auch unmittelbar, indem man $(p + \sqrt{p^2 - r^2})^m$ nach steigenden Potenzen von $\sqrt{p^2 - r^2}$ entwickelt, und die geraden, welche also nicht die Radikalgröſse $\sqrt{p^2 - r^2}$, sondern nur ganze Potenzen von $p^2 - r^2$ enthalten, von den ungeraden trennt, in denen allen $\sqrt{p - r^2}$ als Faktor vorkommt. Man bezeichne die Reihe jener rationalen Glieder mit p_m, die Reihe dieser kann man sich alle unter dem Radikalzeichen gebracht denken, und mit $\sqrt{p_m^2 - r_m^2}$ bezeichnen, so daſs es nur darauf ankommt, r_m auszumitteln. Weil also

$$(p + \sqrt{p^2 - r^2})^m = p_m + \sqrt{p_m^2 - r_m^2}, \text{ so ist auch}$$
$$(p - \sqrt{p^2 - r^2})^m = p_m - \sqrt{p_m^2 - r_m^2}$$

multiplicirt man beide Gleichungen, so erhält man $r^{2m} = r_m^2$, also $r_m = r^m$, und es ist

$$p_m = \frac{(p + \sqrt{p^2 - r^2})^m + (p - \sqrt{p^2 - r^2})^m}{2}$$

$$\sqrt{p_m^2 - r^{2m}} = \frac{(p + \sqrt{p^2 - r^2})^m - (p - \sqrt{p^2 - r^2})^m}{2}$$

Diese Gleichungen haben allgemeine formale Richtigkeit, wobei es unentschieden bleibt, ob r kleiner oder gröfser ist als p. Nimmt man aber hierüber etwas bestimmtes an, so ist dies für den ersten Ausdruck für p_m gleichgültig, da $\sqrt{p^2 - r^2}$ darin nach der Entwickelung wegfällt. Für den andern hingegen folgt, dafs, da derselbe $\sqrt{p^2 - r^2}$ zum allgemeinen Faktor hat, auch im ersten Theile r^{2m} gröfser als p_m^2, es also den gewöhnlicheren Vorstellungen angemessen ist, $\sqrt{r^{2m} - p_m^2}$ statt $\sqrt{p_m^2 - r^{2m}}$ zu setzen, welches geschehen darf, wenn man auch $\sqrt{p^2 - r^2}$ statt des allgemeinen Faktors $\sqrt{p^2 - r^2}$ im andern Theile hat. Dem analytischen Algorithmus aber ist es angemessener zu setzen:

$$\sqrt{p_m^2 - r^{2m}} = \sqrt{r^{2m} - p_m^2}.\ \sqrt{-1}$$

welches, in die letztere Gleichung gesetzt, giebt

$$\sqrt{r^{2m} - p_m^2} = \frac{(p + \sqrt{r^2 - p^2})^m - (p - \sqrt{r^2 - p^2})^m}{2\sqrt{-1}}$$

welche also formal genommen von derjenigen, aus welcher sie entstanden, nicht verschieden ist.

Da: $(p + \sqrt{p^2 - r^2})^m = p_m + \sqrt{p_m^2 - r^{2m}}$;
so ist auch $(p + \sqrt{p^2 - r^2})^n = p_n + \sqrt{p_n^2 - r^{2n}}$.

Denn die erste Formel gilt zufolge ihrer Bedeutung für m jede Zahl, also kann man n statt m setzen, oder p_n mufs eben die Funktion von n, als p_m von m seyn, da hier p und r als beständige, wenn gleich willkührche und unbestimmte Gröfsen betrachtet werden.

Multiplizirt man beide Gleichungen mit einander, so folgt

$$(p + \sqrt{p^2 - r^2})^{m+n} = \begin{cases} p_m p_n + \sqrt{p_m^2 - r^{2m}}.\ \sqrt{p_n^2 - r^{2n}} \\ + \ p_n \sqrt{p_m^2 - r^{2m}} + p_m \sqrt{p_n^2 - r^{2n}} \end{cases}$$

Aber man hat auch

$$(p + \sqrt{p^2 - r^2})_{m+n} = p^{m+n} + \sqrt{p_{m+n}^2 - r^{2(m+n)}}$$

Um die Theile dieses Ausdruckes mit denen der vorigen zu vergleichen, hat man diejenigen derselben p_{m+n} gleich zu setzen, welche keine ungerade Potenz von $\sqrt{p^2 - r^2}$ oder dieses Radikal nicht als Faktor enthalten. Weil nun sowohl $\sqrt{p_m^2 - r^{2m}}$ als $\sqrt{p_n^2 - r^{2n}}$ die ungeraden Potenzen von $\sqrt{p^2 - r^2}$ oder diese Gröſse selbst als Faktor enthalten, so enthält ihr Produkt nur gerade Potenzen derselben. Es ist demnach:

$$p_{m+n} = p_m\, p_n + \sqrt{p_m^2 - r^{2m}}.\ \sqrt{p_n^2 - r^{2n}},$$
$$\sqrt{p_{m+n}^2 - r^{2(m+n)}} = p_n \sqrt{p_m^2 - r^{2m}} + p_m \sqrt{p_n^2 - r^{2n}},$$

worin man, wenn man will, wie in allen bisherigen Formen dieses Artikels, q_n statt $\sqrt{r^{2n} - p_n^2}$ etc. setzen kann, um die im vorigen schon gegebenen Ausdrücke buchstäblich wieder zu erhalten, welche also hier zu wiederholen überflüssig, so wie die gewöhnliche Entwickelung von p_n, q_n, welche nun auch sich aus diesen Formeln bloſs vermittelst der binomischen Potenz von selbst darbietet.

§. 7.

Aus der Gleichung

$$(p + q\sqrt{z})^n\ (p - q\sqrt{z})^n = (p^2 - q^2.\ z)^n$$

folgt:

$$\left(\frac{p - q\sqrt{z}}{\sqrt{p^2 - q^2.z}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{p^2 - q^2.\ z}}{p + q.\ \sqrt{z}}\right)^n = \left(\frac{p + q\sqrt{z}}{\sqrt{p^2 - q^2.z}}\right)^{-n}$$

Setzt man also, der bisherigen Bezeichnung folgend,

$$\left(\frac{p + q\sqrt{z}}{\sqrt{p^2 - q^2.\ z}}\right)^n = \frac{P_n + Q_n\sqrt{z}}{(p^2 - q^2.\ z)^{n:2}} = u^y, \text{ so ist:}$$
$$\left(\frac{p - q\sqrt{z}}{\sqrt{p^2 - q^2.\ z}}\right) = \frac{P_n - Q_n\sqrt{z}}{(p^2 - q^2.\ z)^{n:2}} = u^{-y}.$$

Die ersten Theile dieser Gleichungen sind offenbar, die Zähler nach steigenden Potenzen von z entwickelt gedacht, der Form $A \pm B\sqrt{z}$, nämlich:

$$A = (p^2 - q^2.\ z)^{-n:2}.\ P_n;\quad B = (p^2 - q^2.\ z)^{-n:2}.\ Q_n$$

so daſs A und B nur ganze Potenzen von z enthalten. Da nun

$$u^{\pm y} = A \pm B\sqrt{z};\quad \text{so ist } \pm y \log u = \log (A \pm B\sqrt{z}).$$

Aber $\log (A \pm B\sqrt{z})$ ist der Form $\alpha \pm \beta\sqrt{z}$, wo α und β wiederum nur ganze Potenzen von z enthalten, welches in Folge der logarithmischen Reihe für $A \pm B\sqrt{z}$ klar ist. Man kann also diese wirklich $\alpha \pm \beta\sqrt{z}$

gleich setzen, und hat alsdann, wenn man von der dadurch entstehenden logarithmischen Gleichung

$$\pm y \log u = \alpha \pm \beta \sqrt{z}$$

zu den Zahlen zurückgeht im System, dessen Basis e

$$e^{\pm y \log u} = e^{\alpha \pm \beta \sqrt{z}}.$$

Aber der erste Theil ist gleich $u^{\pm y}$, also

$$u^{\pm y} = e^{\alpha \pm \beta \sqrt{z}}$$

Es ist aber $u^y . u^{-y} = 1$, also $e^{\alpha + \beta \sqrt{z}} . e^{\alpha - \beta \sqrt{z}} = e^{2\alpha} = 1$.

folglich $\alpha = 0$; daher $u^{\pm y} = e^{\pm \beta \sqrt{z}}$, und also

$$e^{\pm \beta \sqrt{z}} = \frac{P_n \pm Q_n \sqrt{z}}{(p^2 - q^2 . z)^{n:2}} = \left(\frac{p \pm q \sqrt{z}}{\sqrt{p^2 - q^2 z}}\right)^n$$

Setzt man also $\gamma = \frac{1}{n} \beta$, so folgt

$$e^{\pm \gamma \sqrt{z}} = \frac{p + q \sqrt{z}}{\sqrt{p^2 - q^2 . z}}$$

woraus der Werth von γ sich bestimmen läſst. Man nehme die Logarithmen und setze $\frac{q}{p} = t$, so hat man für die oberen Zeichen

$$\gamma . \sqrt{z} = -\log \sqrt{p^2 - q^2 . z} + \log p + \log (1 + t \sqrt{z})$$

Da nur im letzten Gliede $\sqrt{z}$ vorkommt, so hat man nur dieses zu entwikkeln nöthig, und es wird

$$\gamma \sqrt{z} = \begin{cases} \log p - \log \sqrt{p^2 - q^2 . z} \\ + t \sqrt{z} - \frac{t^2}{2} z + \frac{t^3}{3} z \sqrt{z} - \frac{t^4}{4} z^2 + \ldots . \end{cases}$$

Die allein gerade oder ungerade Potenzen von $\sqrt{z}$ enthaltenden Funktionen müssen unter sich gleich seyn. Es folgt also für die geraden

$$\log p - \log \sqrt{p^2 - q^2 . z} - \tfrac{1}{2} (t^2 z + \frac{t^4}{2} z^2 + \frac{t^6}{3} z^3 + \ldots .) = 0$$

Das ist

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 - q^2 . z}} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2 . z}}$$

Dieses bewährt sich also, wie es geschehen muſs, von selbst. Die Vergleichung der ungerade Potenzen von $\sqrt{z}$ enthaltenden Gröſsen hingegen giebt, wenn man alle mit $\sqrt{z}$ dividirt, den Werth von γ, nämlich:

$$\gamma = t + \frac{t^3}{3} z + \frac{t^5}{5} z^2 + \frac{t^7}{7} z^3 + \ldots\ldots$$

welcher in der Voraussetzung $z = -1$ die bekannte Leibnizische ist.

Man kann nun P_n, Q_n durch γ als eine bekannte Funktion betrachtet ausdrücken. Denn es ist nach den obigen Gleichungen

$$P_n = (p^2 - q^2 . z)^{n:2} \frac{e^{n\gamma . \sqrt{z}} + e^{-n\gamma . \sqrt{z}}}{2}$$

$$Q_n = (p^2 - q^2 . z)^{n:2} \frac{e^{n\gamma . \sqrt{z}} - e^{-n\gamma . \sqrt{z}}}{2\sqrt{z}}$$

welche entwickelt geben

$$\frac{P_n}{(p^2 - q^2 . z)^{n:2}} = 1 + \frac{n^2 \gamma^2}{1.\ 2} z + \frac{n^4 \gamma^4}{1.2.3.4} z^2 + \ldots.$$

$$\frac{Q_n}{(p^2 - q^2\ z)^{n:2}} = n\gamma + \frac{n^3 \gamma^3}{1.\ 2.\ 3} z + \frac{n^5 \gamma^5}{1.2.3.4.5} z^2 + \ldots.$$

und in der Voraussetzung $z = -1$ die Werthe der Gröſsen

$$\frac{p_n}{(p^2 + q^2)^{n:2}},\ \frac{q_n}{(p^2 + q^2)^{n:2}} \text{ oder } \frac{p_n}{r^n},\ \frac{q_n}{r^n}$$

und die ihnen entsprechenden Reihen.

§. 8.

Um zu diesen Reihenentwickelungen von $p_n : r^n$ und $q_n : r^n$ nach Potenzen von n zu gelangen, ist es indessen nicht nothwendig, durch die gegebenen an sich merkwürdigen Exponentialvergleichungen zu gehen. Sie ergeben sich auch unmittelbar aus den zuerst gefundenen Entwickelungen dieser Gröſsen nach steigenden Potenzen von q.

Man dividire jenen Ausdruck von p_n mit p^n, so geht derselbe über in eine Reihe nach Potenzen von $\frac{q}{p}$, welches gleich $\frac{\vartheta}{n}$ gesetzt giebt

$$\frac{p_n}{q^n} = 1 - \frac{n.\ n-1}{1.\ 2} \frac{\vartheta^2}{n^2} + \frac{n.\ n-1.\ n-2.\ n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \frac{\vartheta^4}{n^4} -$$

und diese Reihe nach Potenzen von n geordnet ist

p_n

$$\frac{p_n}{p^n} = 1 - \frac{\vartheta^2}{1.2} + \frac{\vartheta^4}{1.2.3.4} - \frac{\vartheta^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1.2}\vartheta^2 - \frac{1+2+3}{1.2.3.4}\vartheta^4 + \frac{1+..+5}{1.....6}\vartheta^6 - \frac{1+..+7}{1.....8}\vartheta^8 + \ldots\right.$$

$$- \frac{1}{n^2}\left(\frac{1.2+1.3+2.3}{1.2.3.4}\vartheta^4 - \frac{1.2+\ldots+4.5}{1.....6}\vartheta^6 - \frac{1.2+\ldots+6.7}{1......8}\vartheta^8 - \ldots\right.$$

$$+ \frac{1}{n^3}\left(\frac{1.2.3}{1.2.3.4}\vartheta^4 - \frac{1.2.3+\ldots+3.4.5}{1\ldots.6}\vartheta^6 + \frac{1.2.3+\ldots+5.6.7}{1\ldots..8}\vartheta^8 - \ldots\right.$$

$$- \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Verfährt man ähnlich mit der Reihe für q_n, so wird

$$\frac{q_n}{p^n} = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \frac{\vartheta^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

$$+ \frac{1}{n}\left(\frac{1+2}{1.2.3}\vartheta^3 - \frac{1+\ldots+4}{1\ldots.5}\vartheta^5 + \frac{1+\ldots+6}{1\ldots.7}\vartheta^7 - \ldots\right.$$

$$- \frac{1}{n^2}\left(\frac{1.2}{1.2.3}\vartheta^3 - \frac{1.2+\ldots+3.4}{1\ldots..5}\vartheta^5 + \frac{1.2+\ldots+5.6}{1\ldots..7}\vartheta^7 - \ldots\right.$$

$$+ \frac{1}{n^3}\left(\frac{1.2.3+\ldots+2.3.4}{1\ldots..5}\vartheta^5 - \frac{1.2.3+\ldots+4.5.6}{1\ldots..7}\vartheta^7 + \ldots\right.$$

$$- \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die gebrauchte Bezeichnung der Koefficienten ist leicht verständlich; indessen kommt es hier auf diese nicht sowohl an, als auf die ersten von n unabhängigen Glieder und die Form der Entwickelung, nach welcher also, wenn man jene mit P und Q bezeichnet, seyn wird:

$$\frac{p_n}{p^n} = P + T_{\prime}.n^{-1} - T_{\prime\prime}.n^{-2} + T_{\prime\prime\prime}.n^{-3} - \ldots.$$

$$\frac{q_n}{p^n} = Q + T'_{\prime}.n^{-1} - T'_{\prime\prime}.n^{-2} + T'_{\prime\prime\prime}.n^{-3} + \ldots,$$

wo P, Q, und so auch die Koefficienten der negativen Potenzen von n, kein n enthalten.

Quadrirt man beide Ausdrücke und addirt sie, so entsteht offenbar ein Resultat folgender Form:

$$\frac{p_n^2 + q_n^2}{p^{2n}} = P^2 + Q^2 + T''_{\prime}\,n^{-1} + T''_{\prime\prime}\,n^{-2} + T''_{\prime\prime\prime}.n^{-3} + \ldots..$$

worin wiederum n nicht weiter vorkommt, als in so ferne es wirklich erscheint.

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\left(1+\frac{q^2}{p^2}\right)^{-n} = \left(1+\frac{\vartheta^2}{n^2}\right)^{-n}$, den ersten Theil mit jener, den andern Theil mit der formalen Entwickelung der letzten Gröſse, auch nach negativen Potenzen von n geordnet, also mit

$$\frac{1}{\left(1+\frac{q^2}{p^2}\right)^n} = 1 + t_{\prime}\, n^{-1} + t_{\prime\prime}\, n^{-2} + \ldots.$$

so entsteht

$$\frac{p_n^2 + q_n^2}{(p^2+q^2)^n} = P^2 + Q^2 + T_{\prime}''' n^{-1} + T_{\prime\prime}'''. n^{-2} + \ldots..$$

Allein das vordere Glied der Gleichung ist in Folge der Natur dieser Gröſsen gleich 1, mithin auch das nachstehende. Da aber $T_{\prime}'''$, $T_{\prime\prime}'''$ u. s. w. kein n enthalten, aber in verschiedenen Potenzen von der willkührlichen n multiplicirt sind, so können sie weder für sich noch vereinigt vorkommen; diese Koefficienten müssen also jeder insbesondere Null seyn, also hat man

$$1 = P^2 + Q^2.$$

Die Gröſsen P und Q haben also die merkwürdige Eigenschaft, daſs, ohnerachtet diejenige Gröſse, von welcher sie abhängen, jeglichen Werth haben kann, P und Q doch stets zwischen + 1 und — 1 bleiben. Setzt man $m\vartheta$ statt ϑ in denselben, und bezeichnet die Resultate mit P_m, Q_m, so hat man

$$P_m = 1 - \frac{m^2\vartheta^2}{1.2} + \frac{m^4\vartheta^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

$$Q_m = m\vartheta - \frac{m^3\vartheta^3}{1.2.3} + \frac{m^5\vartheta^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

und wiederum

$$P_m^2 + Q_m^2 = 1, \text{ oder auch } P_m^2 + Q_m^2 = (P^2+Q^2)^m.$$

Diese Gröſsen verhalten sich also vollkommen wie p_μ, q_μ, das ist solche, aus welchen sie abgeleitet worden sind, denn deren Bedingung gemäſs muſs seyn

$$p_\mu^2 + q_\mu^2 = (p^2+q^2)^\mu = r^{2\mu}.$$

Diese gehen also in jene über, wenn man entweder $r = 1$ setzt, oder, indem man die Gleichung mit $r^{2\mu}$ dividirt, wo dann seyn wird

$$\frac{p_\mu^2}{r^{2\mu}} + \frac{q_\mu^2}{r^{2\mu}} = 1.$$

Mithin auch wenn a eine willkührliche

$$\frac{p_\mu}{r^\mu} = 1 - \frac{a^2\mu^2}{1.2} + \frac{a^4\mu^4}{1.2.3.4} - \ldots \text{ und } \frac{q_\mu}{r^\mu} = a\mu - \frac{a^3\mu^3}{1.2.3} + \frac{a^5\mu^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

gesetzt werden kann.

§. 9.

Man kann auch $p_\mu : r^\mu$, $q_\mu : r^\mu$ geradezu in die Form obiger Reihen entwickeln, für μ eine jede Gröſse vermittelst der Bedingungsgleichungen, welchen gemäſs, wenn man kürzer schreibt, p_x statt $p_\mu : r^\mu$, und q_x statt $q_\mu : r^\mu$, seyn muſs

$$p_{x+y} = p_x p_y - q_x q_y, \quad q_{x+y} = q_x p_y + p_x q_y.$$

Aus diesen die Werthe von p_x, q_x gezogen, wird erhalten

$$p_x = p_{x+y} p_y + q_{x+y} q_y; \quad q_x = q_{x+y} p_y - p_{x+y} q_y.$$

Setzt man $x + y = z$, so werden diese Gleichungen

$$p_{z-y} = p_z p_y + q_z q_y; \quad q_{z-y} = q_z p_y - p_z q_y.$$

Macht man hierin $z = y$, so hat man

$$p_0 = p_y^2 + q_y^2 = 1; \quad q_0 = 0.$$

Macht man z allein Null, so hat man

$$p_{-y} = p_0 p_y - q_0 q_y; \quad q_{-y} = q_0 p_y - p_0 q_y.$$

Daher wegen den so eben gefundenen Werthen 1 und 0 für p_0 und q_0 wird

$$p_{-y} = p_y; \quad q_{-y} = - q_y.$$

Demnach ist p_y eine solche Funktion von y, welche ihren Werth nicht ändert, man mag y positiv oder negativ nehmen.

Will man also untersuchen, ob sich p_y als eine in y entwikelte Funktion darstellen lasse, so kann dieselbe nur aus geraden Potenzen von y zusammengesetzt seyn, deren von y unabhängiges Glied gleich 1 seyn muſs, da p_y für $y = 0$ gleich 1 wird.

Eben so kann q_y als Funktion von y den Werth zwar nicht ändern, wenn man y negativ nimmt, aber es wird negativ.

Also kann q_y, als nach ganzen positiven Potenzen von y entwickelt betrachtet, nur ungerade Potenzen von y enthalten.

Man setze also

$$p_y = 1 + Ay^2 + By^4 + Cy^6 + \ldots$$
$$q_y = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + \ldots$$

so wird, da man für p_x, q_x dieselben Koefficienten der Entwickelung, als für p_y, q_y annehmen muſs, nach den Gleichungen, die p_{x+y}, q_{x+y} in p_x, q_x, p_y, q_y ausgedrückt geben, wenn man denselben gemäſs verfährt,

$$\begin{array}{rllllll}
p_{x+y} = & 1 + Ay^2 & + By^4 & + Cy^6 & + Dy^8 & + \ldots \\
& + Ax^2 & + A^2x^2y^2 & + ABx^2y^4 & + ACx^2y^6 & + \ldots \\
& & + Bx^4 & + BAx^4y^2 & + BCx^4y^4 & + \ldots \\
& & & + Cx^6 & + CAx^6y^2 & + \ldots \\
& & & & + Dx^8 & + \ldots \\
& & & & & + \ldots \\
& - a^2xy & - abxy^3 & - acxy^5 & - adxy^7 & - \ldots \\
& & - bax^3y & - bbx^3y^3 & - bcx^3y^5 & - \ldots \\
& & & - cax^5y & - cbx^5y^3 & - \ldots \\
& & & & - dax^7y & - \ldots \\
& & & & & - \ldots
\end{array}$$

Diese Entwickelung aber muſs identisch seyn mit der von

$$p_{y+x} = 1 + A(y+x)^2 + B(y+x)^4 + C(x+y)^6 + \ldots.$$

welche sich mit Zuziehung des binomischen Potenzgesetzes so darstellt:

$$\begin{array}{rllllll}
p_{y+x} = & 1 + Ay^2 & + By^4 & + Cy^6 & + Dy^8 & + \ldots \\
& + Ax^2 & + \frac{4.3}{1.2}Bx^2y^2 & + \frac{6.5}{1.2}Cx^2y^4 & + \frac{8.7}{1.2}Dx^2y^6 & + \ldots \\
& & + Bx^4 & + \frac{6.5}{1.2}Cx^4y^2 & + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}Dx^4y^4 & + \ldots \\
& & & + Cx^6 & + \frac{8.7}{1.2}Dx^6y^2 & + \ldots \\
& & & & + Dx^8 & + \ldots \\
& & & & & + \ldots \\
& + 2Axy & + 4Bxy^3 & + 6Cxy^5 & + 8Dxy^7 & + \ldots \\
& & + 4Bx^3y & + \frac{6.5.4}{1.2.3}Cx^3y^3 & + \frac{8.7.6}{1.2.3}Dx^3y^5 & + \ldots \\
& & & + 6Cx^5y & + \frac{8.7.6}{1.2.3}Dx^5y^3 & + \ldots \\
& & & & + 8Dx^7y & + \ldots \\
& & & & & + \ldots
\end{array}$$

Zugleich aber hat man auch

$$
\begin{array}{llllll}
q_{x+y} = ay & + \; by^3 & + \; cy^5 & + \; dy^7 & + \; \ldots \\
 & + \; Aax^2y & + \; Abx^2y^3 & + \; Acx^2y^5 & + \; \ldots \\
 & & + \; Bax^4y & + \; Bbx^4y^3 & + \; \ldots \\
 & & & + \; Cax^6y & + \; \ldots \\
 & & & & + \; \ldots \\
 & & & & \\
+ \; ax & + \; aAxy^2 & + \; aBxy^4 & + \; acxy^6 & + \; \ldots \\
 & + \; bx^3 & + \; bAx^3y^2 & + \; bBx^3y^4 & + \; \ldots \\
 & & + \; cx^5 & + \; cAx^5y^2 & + \; \ldots \\
 & & & + \; dx^7 & + \; \ldots \\
 & & & & + \; \ldots
\end{array}
$$

welche Entwickelung von q_{y+x} identisch seyn muſs mit derjenigen von q_{y+x}, wenn in der angenommenen Reihe für q_y statt y gesetzt wird $y+x$, also mit

$$q_{y+x} = a(y+x) + b(y+x)^3 + c(y+x)^5 + \ldots .$$

oder entwickelt mit

$$
\begin{array}{llllll}
q_{y+x} = ay & + \; by^3 & + \; cy^5 & + \; dy^7 & + \; \ldots \\
 & + \; \frac{3.2}{1.2} bx^2y & + \; \frac{5.4}{1.2} cx^2y^3 & + \; \frac{7.6}{1.2} dx^2y^5 & + \; \ldots \\
 & & + \; \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} cx^4y & + \; \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} dx^4y^3 & + \; \ldots \\
 & & & + \; \frac{7\ldots2}{1\ldots6} dx^6y & + \; \ldots \\
 & & & & + \; \ldots \\
 & & & & \\
+ \; ax & + \; 3.bxy^2 & + \; 5.cxy^4 & + \; 7.dxy^6 & + \; \ldots \\
 & + \; bx^3 & + \; \frac{5.4.3}{1.2.3} cx^3y^2 & + \; \frac{7.6.5}{1.2.3} dx^3y^4 & + \; \ldots \\
 & & + \; cx^5 & + \; \frac{7\ldots3}{1\ldots5} dx^5y^2 & + \; \ldots \\
 & & & + \; dx^7 & + \; \ldots \\
 & & & & + \; \ldots
\end{array}
$$

Beide Paare identischer Gleichungen, die für p_{x+y} gefundenen sowohl, als die beiden für q_{x+y}, müssen die in den ersten Formen derselben unbekannt angenommen Koefficienten bestimmen. Man sieht leicht, dafs, wenn man, statt der verschiedenen Buchstaben, allgemein mit K_{2n} den Koefficienten von y^{2n} in p_n, mit K_{2n+1} den von y^{2n+1} in q_n bezeichnet, der Koefficient von $x^{2m}\, y^{2n}$ in der ersten Entwickelung von p_{x+y} seyn wird $K_{2m}\, K_{2n}$. In der andern ihr identischen aber ist der Koefficient von $x^{2m}\, y^{2n}$ gleich

$$\frac{2\,(n+m)\,[2\,(n+m)-1]\,\ldots\ldots\,(2n+1)}{1.\quad 2\quad \ldots\quad 2m}\,K_{2(n+m)}\,;$$

in welchen man auch m gegen n in Folge der Eigenschaft der binomischen Potenzkoefficienten verwechseln kann. Dieser letzte Koefficient, dem ersteren $K_{2m}\, K_{2n}$ gleich gesetzt, giebt

$$K_{2\,(n+m)} = \frac{1,\ 2\ \ldots\ldots\ 2m}{(2n+1)\ (2n+2)\ \ldots\ 2(n+m)}\,K_{2m}\,K_{2n}$$

für $m=1$ ist also

$$K_{2n+2} = \frac{1.\ 2.\ K\,2}{(2n+1)\,(2n+2)}\,K_n$$

woraus sich nach einander alle Koefficienten mit geraden Zeigezahlen durch K_2 bestimmen.

Eben so ist der Koefficient von $x^{2m-1}.\ y^{2n+1}$ in der ersten Entwikkelung von $p_{x+y} = -K_{2m-1}.\ K_{2n+1}$, in der andern aber

$$\frac{2\,(n+m)\,(2\,(n+m)-1)\ldots.2\,(n+1)}{1.\quad 2\quad \ldots.(2m-1)}\,K_{2(n+m)} = \frac{2\,(n+m)\,(2\,(n+m)-1)\ldots.2m}{1.\quad 2\quad \ldots 2n+1}\,K_{2(n+m)}$$

also jenem gleich gesetzt

$$K_{2n+1} = -\,\frac{2m.\ 2m+1\ \ldots\ldots\ 2\,(n+m)}{1.\quad 2\quad \ldots\ 2n+1}\ \frac{K_{2\,(n+m)}}{K_{2m-1}}$$

Mithin für $m=1$

$$K_{2n+1} = -\,2\,(n+1)\ K_{2(n+1)} : K_1$$

woraus in Verbindung mit dem vorigen sich alle Koefficienten nach einander ergeben, wenn man n in der Folge die Werthe o, 1, 2 ... beilegt.

Man kann also auch zu den obigen Entwickelungen zurückkehren, und nach Fortschreitung der Glieder die bei gleichen Potenzverbindungen von x und y befindlichen Koefficienten beider Entwickelungen gleich setzen, so ergeben für p_{x+y} die Koefficienten von

$x\,y$ dafs $2\,A = -\,a^2$ also $A = -\frac{a^2}{2}$.

$x^2 y^2 \;..\; \frac{4.3}{1.2} B = A\,A \qquad 4.3.B = -\,a^2.A$ daher $B = \frac{a^4}{1.2.3.4}$

$x^2 y^4 \;..\; \frac{6.5}{1.2} C = A\,B \qquad 6.5.C = -\,a^2\,B \qquad C = -\frac{a^6}{1.2.3.4.5.6}$

$x^2 y^6 \;..\; \frac{8.7}{1.2} D = A\,C \qquad 8.7.D = -\,a^2\,C \qquad D = \frac{a^8}{1.2\ldots8}$

u. s. w.

Ferner geben die Koefficienten von

$x\,y^3$ dafs $4\,B = -\,a\,b$ also $b = -\,4\frac{B}{a}$ also $b = -\frac{a^3}{1.2.3}$

$x\,y^5 \;..\; 6\,C = -\,a\,c \qquad c = -\,6\frac{C}{a} \qquad c = \frac{a^5}{1.2.3.4.5}$

$x\,y^7 \;..\; 8\,D = -\,a\,d \qquad d = -\,8\frac{D}{a} \qquad d = -\frac{a^7}{1.2\ldots7}$

...... u. s. w.

folglich ist

$$p_y = 1 - \frac{a^2 y^2}{1.2} + \frac{a^4 y^4}{1.2.3.4} - \frac{a^6 y^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$q_y = a\,y - \frac{a^3 y^3}{1.2.3} + \frac{a^5 y^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

Nimmt man die identischen Entwickelungen von q_{x+y}, so geben die Koefficienten von

$x^2 y$ dafs $\frac{3.2}{1.2} b = A\,a$ also $b = \frac{A\,a}{3}$

$x^2 y^3 \;..\; \frac{5.4}{1.2} c = A\,b \;...\; c = \frac{2\,A\,b}{4.5} = \frac{2.A^2.a}{3.4.5}$

$x^2 y^5 \;..\; \frac{7.6}{1.2} d = A\,c \;...\; d = \frac{2\,A\,c}{6.7} = \frac{2^2.A^3.a}{3.4.5.6.7}$

u. s. w.

und es geben die Koefficienten von

$$x y^2 \quad \text{daſs } 3b = aA \quad \text{also } A = \frac{3b}{a}$$

$$x y^3 \quad 5c = aB \quad B = \frac{5c}{a}$$

$$x y^5 \quad 7d = aC \quad C = \frac{7d}{a}$$

u. s. w.

und in den letzten die so eben gefundenen Werthe für b, c, d ... substituirt, so folgt

$$A = A; \quad B = \frac{2A^2}{3 \cdot 4}, \quad C = \frac{2^2 A^3}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \dots$$

Also

$$q_y = ay + \frac{2^0 . Aa}{3} y^3 + \frac{2^2 . A^2 . a}{3 \cdot 4 \cdot 5} y^5 + \frac{2^2 . A^3 . a}{3 \dots 7} y^7 + \dots$$

$$p_y = 1 + 2^0 . A \; y^2 + \frac{2^1 . A^2}{3 \cdot 4} y^4 + \frac{2^2 . A^3}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} y^6 + \dots$$

Hier bleiben zwei unbestimmte Gröſsen, von welchen die eine durch die Betrachtung, daſs

$$q_y^2 + p_y^2 = 1$$

sich bestimmen lassen muſs. Man hat nur nöthig von q_y das erste Glied, und von p_y die beiden ersten Glieder in den Quadraten dieser Gröſsen aufzunehmen, um die zu y^2 gehörigen Koefficienten vollständig zu erhalten, da die übrigen Glieder höhere Potenzen geben. Also wird

$$q_y^2 + p_y^2 = a^2 y^2 + \dots + 1 + 2Ay^2 + \dots = 1,$$

welches fordert daſs sey

$$a^2 + 2A = 0;$$

aus welcher Gleichung erhellet, daſs A nicht anders als negativ angenommen werden könne, damit a, wie es für q_y erforderlich, reell bleibe. Hingegen bleibt a völlig willkührlich, wenn man A durch dasselbe ausdrückt. Setzt man dann den Werth von $A = -\frac{a^2}{2}$ in die eben gefundenen Reihen, so entstehen die zuvor vollständig durch p_{x+y} gefundenen.

In diesen Reihen für p_y und q_y ist noch eine willkührliche A geblieben, deren Gröſse aber ergiebt sich, wenn man $y = 1$ setzt, da alsdann

$$p_1 = 1 - \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^4}{1.2.3.4} - \ldots \text{ und } q_1 = a - \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

seyn mufs. Mithin, wenn man a willkührlich annimmt, so sind p_1, q_1, die man schlechthin auch mit p und q bezeichnen kann, bestimmte Gröfsen. Wollte man hingegen diesen irgend einen bestimmten Werth beilegen, so müfste der entsprechende Werth von a aus einer von jenen Reihen gefunden werden, welches allerdings geschehen kann. Am natürlichsten ist es aber, p und q die Werthe beizulegen, welche sie erhalten, wenn man $a = 1$ setzt, so dafs also

$$p = 1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots \text{ und } q = 1 - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

als zwei eigenthümliche Absolutzahlen in der Analysis aufzunehmen sind, wie die bekannten gewöhnlich mit e und π bezeichneten.

§. 10.

Indem die Funktionen p_n, q_n sich darstellen als Theile einer binomischen Potenz, wenn man die Glieder in jedem mit abwechselnden Zeichen nimmt, so führt dies ganz natürlich auf die ihnen entsprechenden Exponentialausdrücke, welche sich auch schon dargeboten haben, die jedoch noch kurz etwas näher zu betrachten sind, wäre es auch nur, um wie im Gange der Geometrie der Alten die Sätze umzuwenden. Aber es scheint auch nicht überflüssig, die Leichtigkeit bemerklich zu machen, mit welcher sich die Eigenschaften jener Funktionen aus der Betrachtung der Summe und Differenz zweier reciproker Zahlen und deren Potenzen ergeben.

Man sehe zwei reciproke Gröfsen, a^μ, $a^{-\mu}$, als Summe und Unterschied zweier anderen Gröfsen an, die sich offenbar als Funktionen von μ betrachten lassen. Es werde daher jene gleich s_μ, diese gleich t_μ gesetzt, so dafs, wenn man $\mu + \nu$ statt μ setzt, welche Zahlen diese auch seyn mögen, die Gleichungen

$$s_\mu = \frac{a^\mu + a^{-\mu}}{2}, \quad t_\mu = \frac{a^\mu - a^{-\mu}}{2}$$

ähnlichermafsen ausgedrückt werden, durch

$$s_{\mu+\nu} = \frac{a^{\mu+\nu} + a^{-(\mu+\nu)}}{2}; \quad t_{\mu+\nu} = \frac{a^{\mu+\nu} - a^{-(\mu+\nu)}}{2}.$$

Da nun, wenn ν Null,

$$a^\mu = s_\mu + t_\mu; \quad a^{-\mu} = s_\mu - t_\mu,$$

und wenn μ Null,

$$a^{\nu} = s_{\nu} + t_{\nu}\,; \quad a^{-\nu} = s_{\nu} - t_{\nu},$$

so folgt durch Multiplication und der Bezeichnung gemäſs

$$a^{\mu+\nu} = s_{\mu+\nu} + t_{\mu+\nu} = s_{\mu} s_{\nu} + t_{\mu} t_{\nu} + s_{\mu} t_{\nu} + t_{\mu} s_{\nu}$$

$$a^{-(\mu+\nu)} = s_{\mu+\nu} - t_{\mu+\nu} = s_{\mu} s_{\nu} + t_{\mu} t_{\nu} - s_{\mu} t_{\nu} - t_{\mu} s_{\nu},$$

welches, addirt und subtrahirt, giebt:

$$s_{\mu+\nu} = s_{\mu} s_{\nu} + t_{\mu} t_{\nu}$$

$$t_{\mu+\nu} = s_{\mu} t_{\nu} + t_{\mu} s_{\nu}$$

Ferner, weil in den Fundamentalgleichungen

$$s_{\mu} = \frac{a^{\mu} + a^{-\mu}}{2}, \quad t_{\mu} = \frac{a^{\mu} - a^{-\mu}}{2}$$

statt a der Werth gesetzt werden kann in s_{μ} und t_{μ}, d. i. in s und t, bei der Voraussetzung, μ sey gleich 1, so ist

$$s_{\mu} = \frac{(s+t)^{\mu} + (s-t)^{\mu}}{2}; \quad t_{\mu} = \frac{(s+t)^{\mu} - (s-t)^{\mu}}{2}$$

und

$$(s+t)^{\mu} = s_{\mu} + t_{\mu}, \quad (s+t)^{-\mu} = (s-t)^{\mu} = s_{\mu} - t_{\mu},$$

deren Produkt giebt:

$$1 = s_{\mu}^2 - t_{\mu}^2.$$

Also kann man auch setzen:

$$(s^2 - t^2)^{\mu} = s_{\mu}^2 - t_{\mu}^2$$

und da

$$t_{\mu} = \sqrt{s_{\mu}^2 - 1}\,; \quad t = \sqrt{s^2 - 1},$$

so können diese letzteren Ausdrücke in den so eben vorgekommenen Gleichungen substituirt werden, und man hat

$$s_{\mu} = \frac{(s + \sqrt{s^2 - 1})^{\mu} + (s - \sqrt{s^2 - 1})^{\mu}}{2}$$

$$t_{\mu} = \sqrt{s_{\mu}^2 - 1} = \frac{(s + \sqrt{s^2 - 1})^{\mu} - (s - \sqrt{s^2 - 1})^{\mu}}{2}$$

$$(s+t)^{\mu} = s_{\mu} + \sqrt{s_{\mu}^2 - 1}, \quad (s-t)^{\mu} = s_{\mu} - \sqrt{s_{\mu}^2 - 1}$$

Diese Formeln sind insgesammt den oben gegebenen völlig ähnlich. Sie unterscheiden sich nur dadurch von den Beziehungen zwischen p, q, p_{μ}, q_{μ}, daſs diese auf die Voraussetzung $p_{\mu}^2 + q_{\mu}^2 = 1$, die zwischen s, t,

s_μ, t_μ aber auf $s_\mu^2 - t_\mu^2 = 1$ beruhen; doch ist auch diese Hypothese im Vorigen nicht unbeachtet gelassen.

Die Gröſsen s_μ, t_μ verhalten sich gegen einander als Sekante und Tangente eines und desselben Winkels, freilich nicht eines der Gröſse μ proportionalen, so daſs man hat $t_\mu = \text{tang.}\,\varphi\mu$, $s_\mu = \sec\varphi\mu$, wo $\varphi\mu$ eine aus den bisherigen bestimmbare Funktion, von welcher die veränderlichen Werthe, als Winkel betrachtet, die aufgestellten Relationen der Tangenten und Sekanten derselben zukommen. Bekanntlich entsprechen s_μ, t_μ auch den rechtwinklichten Coordinaten einer gleichseitigen Hyperbel, auf ihren Mittelpunkt bezogen, wenn deren Axe gleich 1 ist.

Bei den bekannten Exponential- und Potenzentwickelungen der hier vorkommenden Gröſsen ist es unnöthig zu verweilen, um die gegebenen einfachen Relationen derselben unter eine andere Gestalt zu bringen. Auf diese führt die Betrachtung der symmetrischen Gleichungen

$$s_{\mu+\nu} = s_\mu s_\nu + t_\mu t_\nu\,; \quad t_{\mu+\nu} = s_\mu t_\nu + t_\mu s_\nu$$

deren Theile natürlich als Funktionen von $\mu + \nu$, durch die Verwechselung von μ gegen ν und umgekehrt, im Werthe nicht ändern können; eine Unveränderlichkeit, welche auch die Ausdrücke für $s_{\mu+\nu}$ und $t_{\mu+\nu}$ selbst vor die Augen legen. Allein dies würde auch noch der Fall seyn, wenn in der ersten Gleichung die Glieder des zweiten Theiles, anstatt durch Addition, durch Subtraktion verbunden würden; die andere Gleichung gestattet eine solche Zeichenänderung nicht. Man kann also fragen, welche Relationen Gröſsen der Form

$$p_\mu p_\nu - q_\mu q_\nu \text{ und } p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu$$

gegen einander haben, welche mit andern Buchstaben als zuvor bezeichnet sind, nicht nur, weil s, t von p, q verschieden seyn dürfen, sondern auch p_μ, q_μ andere Funktionen von μ als s_μ, t_μ seyn werden.

Eben weil diese Gröſsen in μ und ν symetrisch, und durch Verwechselung derselben ihren Werth nicht ändern, lassen sich beide als Funktionen von $\mu+\nu$ betrachten, und man kann setzen, wenn unter φ und ψ zu bestimmende Functionszeichen verstanden werden.

$$p_\mu p_\nu - q_\mu q_\nu = \varphi(\mu + \nu)\,; \quad p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu = \psi(\mu + \nu)$$

welche Gleichungen, quadrirt und addirt, geben:

$$(\varphi.\ \mu + \nu)^2 + (\psi.\ \mu + \nu)^2 = (p_\mu^2 + q_\mu^2)\,(p_\nu^2 + q_\nu^2).$$

Man setze $\nu = 0$, so wird $p_\mu^2 + q_\nu^2$ eine willkührlich zu bestimmende Gröſse; diese gleich c^2 gesetzt, so ist:

$$(\varphi\mu)^2 + (\psi\mu)^2 = c^2 p_\mu^2 + c^2 q_\mu^2.$$

Daraus folgt, daſs die eine der zu bestimmenden Funktionen gleich $\pm c p_\mu$, die andere $\pm c q_\mu$ seyn müsse.

Aber nach der ersten Gleichung ist

$$\varphi\mu. = p_0 p_\mu - q_0 q_\mu; \quad \psi\mu = p_0 q_\mu + q_0 p_\mu.$$

Damit eine jede von diesen in $c p_\mu$ oder in $c q_\mu$ übergehe, muſs $q_0 = 0$ und $p_0 = c$ oder umgekehrt seyn. Setzt man $p_0 = 0$ also $q_0 = c$, so wird $\varphi\mu = -c q_\mu$, $\psi\mu = c p_\mu$. Also wird seyn

$$-c q_{\mu+\nu} = p_\mu p_\nu - q_\mu q_\nu \text{ oder } c q_{\mu+\nu} = q_\mu q_\nu - p_\mu p_\nu$$
$$\text{und } c p_{\mu+\nu} = p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu.$$

Nimmt man umgekehrt $p_0 = c$; $q_0 = 0$, so geräth man auf die schon gebrauchten Bezeichnungen; beide aber führen ihrer Natur nach zu denselben Resultaten, welche zu verfolgen hier um so unnöthiger ist, da sie Wiederholung des schon abgehandelten veranlassen würden.

Die Analogie von diesen symmetrischen Gleichungen, mit den so eben aus den reciproken Gröſsen gefundenen, leitet auf einen verwandten Ursprung, welcher in einer allgemeiner als zuvor genommenen Ansicht sich findet. Man sieht sogleich, daſs diese letztern aus jenen entstehen, wenn man $c = 1$ und $\sqrt{-1}.\, q_\mu$ statt t_μ; also auch $\sqrt{-1}\, q_{\mu+\nu}$ statt $t_{\mu+\nu}$, und p_μ statt s_μ setzt. Beide Gröſsenarten aber gehen also aus den Gleichungen

$$s_\mu = \frac{a^\mu + a^{-\mu}}{2}, \quad t_\mu = \frac{a^\mu - a^{-\mu}}{2\, b^{1:2}}$$

mit einander hervor, nachdem man $b = +1$ oder $= -1$ setzt.

Im letztern Falle ist es aber angemessener, die Formeln so auszudrücken, daſs ohnerachtet des darin vorhandenen Zeichens $\sqrt{-1}$, dennoch ihre Realität augenscheinlich werde, welches der Fall ist mit den Formen

$$\frac{a^{\sqrt{-1}.\,\mu} + a^{-\sqrt{-1}.\,\mu}}{2}, \quad \frac{a^{\sqrt{-1}.\,\mu} - a^{-\sqrt{-1}.\,\mu}}{2\sqrt{-1}}$$

die nichts anders ausdrücken und sind, als die Hälften der Summe und des Unterschiedes der entwickelten Exponentialreihen von a^μ und $a^{-\mu}$, in welchen die Glieder aber abwechselnd positiv und negativ genommen werden. Eine Vorstellungsart, auf die man leicht geräth, welche an sich so klar als in den Folgen ergiebig ist, sobald man diese Reihen oder jene Formeln als Funktionen betrachtet, deren Natur und Beziehungen man untersuchen will, welche man daher auch zu einem solchen Zweck besonders bezeichnen mufs. Setzt man also die erste von jenen Formeln gleich p_μ, die andere gleich q_μ, so finden sich alle schon für diese Gröfsen vorgekommene Gleichungen eben so leicht, als die für s_μ, t_μ, welche die Werthe von $(a^\mu \pm a^{-\mu}) : 2$ bezeichneten, gefunden worden sind. Durch die besondere Bezeichnung einer Funktion wird dieselbe als eine eigenthümliche angesehen, und es ist nichts daran gelegen, wie sie benannt werden mag, das ausgezeichnete in den ihr zukommenden Eigenschaften ist das wesentliche.

§. 11.

Will man die Funktion einer veränderlichen Gröfse suchen, welche für irgend einen Werth von dieser, nicht gröfser als eine gegebene und nicht kleiner als eben dieselbe Gröfse, negativ genommen werden kann, so geräth man wiederum auf die behandelten Funktionen. Die Frage läfst sich auch dahin abändern, die Funktionen zu finden, deren gröfste und kleinste Werthe $+1$ und -1 sind. Denn man darf nur die Funktion mit der gegebenen, welche ihr positives und negatives Maximum bestimmt, dividiren.

Es sey p diese letztere Funktion von x, so dafs also, welchen Werth man auch x beilegt, stets sey

$$p < 1 \text{ und } p > -1; \quad \text{also } p^2 < 1.$$

Daraus folgt, dafs es nebst p noch eine andere Funktion $q = \sqrt{1 - p^2}$ giebt, welche ähnlicher Natur ist, und man hat

$$p^2 + q^2 = 1;$$

von welcher Gleichung man ebenfalls unmittelbar als bedingende Eigenschaft ausgehen kann, um die Natur der Funktionen p und q zu suchen.

Man differenzire die Gleichung, und man hat

$$p \frac{dp}{dx} + q \frac{dq}{dx} = 0.$$

oder

$$\frac{\frac{dp}{dx}}{\frac{dq}{dx}} = -\frac{q}{p}$$

Dieser Gleichung wird schon genügt, wenn man setzt

$$\frac{dp}{dx} = -q; \quad \frac{dq}{dx} = p.$$

Allein allgemeiner wird man setzen

$$\frac{dp}{dx} = -u'.q; \quad \frac{dq}{dx} = u'p,$$

wo u' eine willkührliche Funktion von x, welche man auch durch $\frac{du}{dx}$ als eine Differenzialfunktion ansehen und bezeichnen kann.

Es ist also, wenn man p und q als Funktionen von u betrachtet,

$$\frac{dp}{du} = -q; \quad \frac{dq}{du} = p.$$

Nach dem allgemeinen binomischen Theorem aber ist

$$p_{u+v} = p_u + \frac{dp}{du} v + \frac{d^2p}{du^2}\frac{v^2}{1.2} + \ldots$$

und die successiven Differenziale von p nach u ergeben sich in Folge der so eben für die ersten Differenziale gefundenen, so daſs in diesem Falle

$$p_{u+v} = p - qv - p.\frac{v^2}{1.2} + q\frac{v^3}{1.2.3} + \ldots$$

Man setze p, nehme den Werth 1 an, wenn $u = \alpha$, so wird das entsprechende $q = 0$, also

$$p_{\alpha+v} = 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

Setzt man nun $v = u - \alpha$, so erhält man

$$p_u = 1 - \frac{(u-\alpha)^2}{1.2} + \frac{(u-\alpha)^4}{1.2.3.4} -$$

Allein da u eine willkührliche Funktion von x, so ist auch $u - \alpha$ eine solche, für welche ψx gesetzt für den Werth von p als gesuchte Funktion x folgt

$$p = 1 - \frac{(\psi x)^2}{1.2} + \frac{(\psi x)^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

völlig ähnlich erhält man

$$q = \psi x - \frac{(\psi x)^3}{1.2.3} + \frac{(\psi x)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

In beiden ist ψx dieselbe willkührliche Funktion. Es entsprechen allerdings p und q in jener allgemeinern oder bestimmtern Gestalt stets der Bedingungsgleichung $p^2 + q^2 = 1$ oder $p^2 < 1$, welchen Werth man auch x giebt; allein damit p wirklich alle mögliche Werthe annehmen könne, welche diese Funktion zufolge ihrer Natur anzunehmen vermag, muſs ψx auch wirklich jede Gröſse anzunehmen fähig seyn.

In dieser Rücksicht wird man für ψx, von welchen p und q als Funktionen erscheinen, ein unabhängiges Gröſsenzeichen, x selbst also, setzen, und dann hat man die bekannten Formen von p und q bloſs als Funktionen von x, nämlich:

$$p_x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - ; \quad q_x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

statt x, x + y in p_x gesetzt, so wird nach obigem

$$p_{x+y} = p_x - q_x\, y - p_x \frac{y^2}{1.2} + q_x \frac{y^3}{1.2.3} + p_x \frac{y^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots$$

$$= p_x \left(1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) - q_x \left(y - \frac{y^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$

$$= p_x\, p_y - q_x\, q_y$$

und ähnlich kommt man zum oft vorgekommenen Resultat für q_{x+y} zurück.

Diese Gleichungen in endlichen Ausdrücken sind nicht nur in ihrer Form gegen einander wichtig, sondern auch in Beziehung auf die Reihen, aus welchen sie hervorgegangen, indem für diese durch jene erhellt, daſs sie für keinen Werth von x, wie groſs er auch seyn mag, unendlich werden können, obwohl sie in diesen Fällen zur wirklichen Berechnung von p_x, q_x nicht anwendbar sind. Die Ausdrücke für p_{x+y}, q_{x+y} durch die einfachen in x und y allein, führen dahin, daſs man in den Reihen selbst die Veränderliche, wie bekannt, nicht einmal der Einheit gleich zu nehmen genöthigt ist.

§. 12.

Aus den gedachten endlichen Gleichungen entstehen andere, deren Herleitung auch in den Schriften, welche diesen Gegenstand behandeln, freilich nicht mehr durch geometrische Betrachtung geschieht; dennoch, weil dieselben in zu genauer Verbindung mit dem vorhergehenden stehen, und noch nicht mannigfaltige Beweise für sich haben, halte ich eine von den bekannten sich unterscheidende Ableitung nicht überflüssig.

Es ist zufolge obiger Gleichungen, weil $p_{n+2} = p_{(n+1)+1}$; $p_n = p_{(n+1)-1}$,

$$p_{n+2} = p_{n+1}\, p - q_{n+1}\, q$$
$$p_n = p_{n+1}\, p + q_n\, q$$

Also

$$p_{n+2} + p_n = 2\, p \cdot p_{n+1}$$

oder $p_{n+2} = 2\, p \cdot p_{n+1} - p_n.$

Aehnlich erhält man

$$q_{n+2} = 2\, p \cdot q_{n+1} - q_n.$$

Diese Gleichungen erhalten durch Multiplikation mit 2 folgende Form:

$$2\, p_{n+2} = 2\, p \cdot 2\, p_{n+1} - 2\, p_n\,; \quad 2\, q_{n+2} = 2\, p \cdot 2\, q_{n+1} - 2\, q_n$$

und nach diesen lassen sich die Werthe von $2\, p_n$, $2\, q_n$ nach bloſsen Potenzen von p entwickeln, die folgenden nämlich stets aus den beiden nächst vorhergehenden. Nun sind aber die Werthe von $2\, p_0$, $2\, p_1$ bekannt, nämlich gleich 2 und $2\, p$; also wird

$$2\, p_2 = (2\, p)^2 - 2$$
$$2\, p_3 = (2\, p)^3 - 3\, (2\, p)$$
$$2\, p_4 = (2\, p)^4 - 4\, (2\, p)^2 + 2$$
$$2\, p_5 = (2\, p)^5 - 5\, (2\, p)^3 + 5\, (2\, p)$$

u. s. w.

Die Entwickelung läſst sich sehr leicht fortsetzen, denn jeder folgende Werth, wie $2\, p_6$, $2\, p_7 \ldots$, wird erhalten, wenn man bloſs die Potenzexponenten des Vorhergehenden um 1 erhöht, und dann den Vorvorhergehenden mit entgegengesetzten Zeichen hinzusetzt, welches sich in eine bloſse Addition der Koefficienten verwandelt. Es ist eben so leicht zu ersehen, daſs auch in Folge der Formel irgend ein $2\, p_m$ nur nach Potenzen von $2\, p$ fortschreiten kann, deren Exponenten um 2 verschieden sind, und daſs abwechselnd, das ist in denjenigen $2\, p_n$, wo n eine gerade Zahl, die also mit $(2\, p)_0$ aufhören, der letzte Koefficient die Zahl 2 seyn muſs, positiv oder negativ, nachdem $\frac{1}{2}n$ gerade oder ungerade ist.

Um aber den allgemeinen Ausdruck zu erhalten, setze man

$$2\, p_n = (2\, p)^n + A_n\, (2\, p)^{n-2} + B_n\, (2\, p)^{n-4} + C_n\, (2\, p)^{n-6} + \ldots .$$

worin man nur statt n zu setzen hat $n - 1$, $n + 1$, um die allgemeinen

For-

Formen von $2p_{n-1}$, $2p_{n+1}$ zu bezeichnen. Dann wird die allgemeine Gleichung

$$2p_{n+1} = 2p . 2p_n + 2p_{n-1} = 0$$

dienen, die Koefficienten A_n, B_n etc., als Funktionen von n betrachtet, zu bestimmen, denn sie geht über in

$$0 = \begin{array}{r|r|r|r|l} (2p)^{n+1} + A_{n+1} & (2p)^{n-1} + B_{n+1} & (2p)^{n-3} + C_{n+1} & (2p)^{n-5} + D_{n+1} & (2p)^{n-7} + .. \\ -(2p)^{n+1} - A_n & - B_n & - C_n & - D_n & \\ +\ 1 & + A_{n-1} & + B_{n-1} & + C_{n-1} & \end{array}$$

Also $\Delta n = 1$ genommen, so hat man

$$A_{n+1} - A_n = \Delta A_n; \quad B_{n+1} - B_n = \Delta B_n \text{ u. s. w.}$$

mithin die Gleichungen:

$$\Delta A_n = -1; \quad \Delta B_n = -A_{n-1}; \quad \Delta C_n = -B_{n-1} \ldots\ldots$$

und integrirt

$$A_n = -n + \text{const.}$$

Aber für $n = 2$ wird $A_2 = -2$, also mufs seyn

$$-2 = -2 + \text{const, also const} = 0\text{, folglich}$$

$$A_n = -n.$$

$$\Delta B_n = -A_{n-1} = n - 1 \text{ giebt}$$

$$B_n = \frac{n-1 . n-2}{1 . 2} + \text{const, und da } B_4 = 2 \text{ also}$$

$$B_4 = 2 = 3 + \text{const, also const} = -1\text{; so ist}$$

$$B_n = \frac{n-1 . n-2}{1 . 2} - 1.$$

$$\Delta C_n = -B_{n-1} = -\frac{n-2 . n-3}{1 . 2} + 1 \text{ giebt}$$

$$C_n = -\frac{n-2 . n-3 . n-4}{1 . 2 . 3} + n + \text{const. Aber}$$

$$C_6 = -2 = -4 + 6 + \text{const, also const} = -4 \text{ und}$$

$$C_n = -\frac{n-2 . n-3 . n-4}{1 . 2 . 3} + n - 4.$$

$$\Delta D_n = -C_{n-1} = \frac{n-3 . n-4 . n-5}{1 . 2 . 3} - (n-5)$$

$$D_n = \frac{n-3 . n-4 . n-5 . n-6}{1 . 2 . 3 . 4} - \frac{n-5 . n-6}{1 . 2}$$

Da $D_8 = 2$ und im Ausdruck für D_n die $n = 8$ gesetzt, dieses wirklich 2 wird, so ist er richtig und die beständige Null.

$$\Delta E_n = - D_{n-1} = - \frac{n-4 \ldots . n-7}{1 \ldots \ldots 4} + \frac{n-6.\ n-7}{1.\quad 2}$$

$$E_n = - \frac{n-4 \ldots \ldots n-8}{1 \ldots \ldots 5} + \frac{n-6.\ n-7.\ n-8}{1.\quad 2.\quad 3}$$

weil dieser Werth von E_n für $n = 10$, wie es seyn muſs, -2 wird, so ist die hinzuzufügende Beständige Null, welches auch für alle folgenden Koefficienten der Fall; es geht also das allgemeine Gesetz ihrer Fortschreitung klar aus dem bisherigen hervor, und es bestimmt sich jeder folgende Koefficient aus dem vorhergehenden, wenn man die Zeichen wechselt, statt n setzt $n-1$, und einen Faktor mehr nimmt in jedem der beiden Glieder, aus welchen derselbe zusammengesetzt ist. Es wird daher F_n, das ist der Koefficient von $(2\,p)^{n-12}$ oder von $(2\,p)^{n-2.6}$ in $2\,p_n$

$$= \begin{cases} - \dfrac{n-7.\ n-8.\ n-9.\ n-10}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4} \\ + \dfrac{n-5.\ n-6 \ldots \ldots n-10}{1.\quad 2 \ldots \ldots 6} \end{cases}$$

Also der Koefficient von $(2\,p)^{n-2\mu}$ wird seyn:

$$(-1)^\mu \begin{Bmatrix} \dfrac{(n-\mu+1)\ (n-\mu))\ n-\mu-1)\ (n-\mu-2) \ldots . (n-2\mu+2)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4 \ldots \ldots \mu} \\ - \dfrac{(n-\mu-1)\ (n-\mu-2) \ldots \ldots (n-2\mu+2)}{1.\quad 2. \ldots \ldots \mu-2} \end{Bmatrix}$$

Diesem Ausdrucke kann aber auch eine andere Gestalt gegeben werden. Es ist derselbe gleich

$$(-1)^\mu \left(\frac{(n-\mu-1)\ (-\mu-2) \ldots . (n-2\mu+2)}{1.\quad 2. \ldots . \mu-2} \right) \left(\frac{(n-(\mu-1))\ (n-\mu)}{(\mu-1).\quad \mu} - 1 \right)$$

Der letzte Faktor aber wird $\dfrac{n\ (n-2\mu+1)}{\mu-1.\ \mu}$, also der ganze Koefficient von $(2\,p)^{n-2\mu}$ in $2\,p_n$

$$(-1)^\mu \frac{n\ (n-\mu-1)\ (n-\mu-2)\ (n-\mu-3) \ldots (n-2\mu+2)\ (n-2\mu+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4 \ldots \ldots \mu-1.\quad \mu}$$

nach welchem die Reihe für $2\,p_n$ sich bildet. Allein es ist noch eine bis jetzt nicht berücksichtigte Bedingung zu beachten, nämlich, daſs die Koefficienten Null werden müssen, wenn $2\mu > n$ und n eine ganze Zahl, weil in dem Falle die Reihe für $2\,p_n$ abbrechen soll, da keine negative Potenzen von $2\,p$ dann vorkommen dürfen.

Es wird aber der gegebene, nur für die positiven Potenzen von $2\,p$ gültige, allgemeine Koefficient für sich, wenn $2\mu > n$, nur so lange Null, als derselbe, n ausgenommen, nicht aus lauter negativen Faktoren besteht, also bis $n - \mu - 1$ zuerst negativ, also gleich -1, das ist bis $\mu = n$ wird, und der Koefficient mithin zu $(2\,p)^{n-2n}$ oder $(2\,p)^{-n}$ gehört. Es wird aber derselbe gefunden, wenn man $\mu = n$ in dem obigen setzt, gleich

$$(-1)^n.\ \frac{n.\ 1.\ 2 \ldots . (n-2)\ (n-1).\ (-1)^{n-1}}{1.\ 2.\ 3 \ldots n-1).\quad n} = (-1)^{2n-1} = -1$$

Wird, allgemein genommen, $\mu = n + \mu'$, und in den allgemeinen Koefficienten von $(2\,p)^{n-2\mu}$ substituirt, wodurch der von $p^{-n-2\mu'}$ gefunden wird, so erhält man für denselben

$$(-1)^{n+\mu'}\ \frac{n.\ (\mu'+1)\ (\mu'+2) \ldots \ldots (n+2\mu'-2)\ (n+2\mu'-1)\ (-1)^{n+\mu'-1}}{1.\quad 2.\quad 3. \ldots \ldots (n+\mu'-1)\ (n+\mu')} = \ldots$$

$$-\ \frac{n.\ (n+\mu'+1)\ n+\mu'+2) \ldots \ldots (n+2\mu'-2)\ (n+2\mu'-1)}{1.\quad 2.\quad 3 \ldots \ldots \mu'-1.\quad \mu'}$$

Da also diese Koefficienten stets negativ werden, so hat man damit, im Falle, wo n eine ganze positive Zahl, die negativen Potenzglieder sich aufheben, im unbeschränkten Ausdruck der Reihe eben dieselben Glieder mit den gefundenen aber entgegengesetzt genommenen Koefficienten hinzuzusetzen, so dafs also

$$2\,p_n = (2\,p)^n - n\,(2\,p)^{n-2} + \frac{n.\ n-3}{1.\ 2}\,(2\,p)^{n-4} - \frac{n.\ n-4.\ n-5}{1.\ 2.\ 3}\,(2\,p)^{n-6} + \ldots\ldots$$

$$+ (2\,p)^{-n} + n\,(2\,p)^{-n-2} + \frac{n.\ n+3}{1.\ 2}\,(2\,p)^{-n-4} + \frac{n.\ n+4.\ n+5}{1.\ 2.\ 3}\,(2\,p)^{-n-6} + \ldots\ldots$$

§. 13.

Der Ausdruck für q_n läfst sich auf ähnliche Weise wie p_n, und auch, wie bekannt, durch Differenziation des letztern finden. Allein es lassen sich auch beide zugleich erhalten, da zwischen $2\,p_{n+2}$, $2\,p_{n+1}$, $2\,p_n$ eben die Relation, als zwischen $2\,q_{n+2}$, $2\,q_{n+1}$, $2\,q_n$, statt hat. Nur im Anfange ist eine Verschiedenheit, da $2\,p_0 = 2$, hingegen $2\,q_0 = 0$. Dieser auszuweichen, kann man von irgend einem unbestimmten $2\,p_\mu$ oder $2\,q_\mu$ anfangen, welches durch Q_o bezeichnet werden soll, noch unentschieden, ob es jenes oder dieses bedeutet. Dann hat die allgemeine Gleichung statt

$$Q_{m+2} = 2p.\ Q_{m+1} - Q_m,$$

aus welcher, ω statt $2p$ gesetzt, nach einander folgt:

$$Q_o = Q$$
$$Q_I = Q_\backslash$$
$$Q_{II} = \omega.\ Q_\backslash - Q$$
$$Q_{III} = (\omega^2 - 1)\ Q_\backslash - \omega.\ Q$$
$$Q_{IV} = (\omega^3 - 2\omega)\ Q_\backslash - (\omega^2 - 1)\ Q$$
$$Q_V = (\omega^4 - 3\omega^2 + 1)\ Q_\backslash - (\omega^3 - 2\omega)\ Q$$

u. s. w.

Da alle Q_m nur aus $Q_\backslash$ und Q geformt werden, so ist, wenn man setzt

$$Q_{m-1} = \beta_{m-1}\ Q_\backslash - \alpha_{m-1}\ Q$$

und ähnlich $Q_m = \beta_m\ Q_\backslash - \alpha_m\ Q$,

in Folge der allgemeinen Formel:

$$Q_{m+1} = (\omega\beta_m - \beta_{m-1})\ Q_\backslash - (\omega.\alpha_m - \alpha_{m-1})\ Q.$$

Die Koefficienten von Q folgen also demselben Gesetze als die zon $Q_\backslash$. Es ist aber der Koefficient von Q in $Q_{\backslash\backslash}$ gleich dem von $Q_\backslash$ in $Q_\backslash$, oder der von Q in $Q_{\backslash\backslash\backslash}$ gleich dem von $Q_\backslash$ in $Q_{\backslash\backslash}$, also $\alpha_2 = \beta_\backslash$ oder $\alpha_3 = \beta_2$, und so in allen folgenden, also $\alpha_m = \beta_{m-1}$ und demnach:

$$Q_m = \beta_m\ Q_\backslash - \beta_{m-1}.\ Q.$$

Es ist aber β_m eine nur aus ganzen positiven Potenzen von ω mit bestimmten Zahlkoefficienten bestehende Gröfse. Da nun β_2 nur ungerade, β_3 aber nur gerade Potenzen von ω enthält, so wird $\beta_4 = \omega\beta_3 - \beta_2$ wiederum nur ungerade enthalten können; mithin mufs dies immerfort abwechseln, und in einem jeden folgenden β werden die Potenzen von ω um einen Grad höher. In β_2 ist ω' die höchste Potenz von ω, also in β_n ist es ω_{n-1}.

Man kann also setzen:

$$\beta_n = \omega^{n-1} + A_n\,\omega^{n-3} + B_n\,\omega^{n-5} + \ldots\ldots \left.\begin{matrix} +\ k\,\omega \\ \underline{+}\ 1 \end{matrix}\right\}$$

wo A_n, B_n .... die β_n eigenen Zahlkoefficienten sind. Wenn nun auch A_{n-1}, B_{n-1} etc..., A_{n+1}, B_{n+1} etc... die in β_{n-1}, β_{n+1} ähnlich vorkommenden bedeuten, so wird in Folge der Gleichung

$$\beta_{n+1} - \omega.\ \beta_n + \beta_{n-1} = 0,$$

wenn man in derselben die für β_n angenommene Reihe gehörig substituirt,

$$\left.\begin{array}{r|r|r|r} \omega_n + A_{n+1} & \omega^{n-2} + B_{n+1} & \omega^{n-4} + C_{n+1} & \omega^{n-6} \quad + \ldots \\ -\omega_n - A_n & - B_n & - C_n & - \ldots \\ + 1 & + A_{n-1} & + B_{n-1} & + \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Es ist also die ω eine unbestimmte Gröfse, wenn man $A_{n+1} - A_n$ mit ΔA_n bezeichnet, und eben so bei den übrigen Koefficienten, wobei denn $\Delta n = 1$ verstanden wird,

$$\Delta A_n = -1, \quad \Delta B_n = -A_{n-1}, \quad \Delta C_n = -B_{n-1} \text{ etc.} \ldots$$

Da man, um die Koefficienten vollständig zu bestimmen, irgend einen Werth derselben kennen mufs, so nehme man dafür die Werthe von A, B, C ...., wenn sie die Koefficienten von ω^0 sind oder allein ohne ω stehen, wo ihre Werthe gleich Eins seyn müssen. Denn wenn in irgend einem Werth von β die Einheit als besonderes Glied vorkommt, z. B. in β_m, so mufs sie auch in β_{m+2}, aber mit entgegengesetztem Zeichen, vorkommen, weil dieses $-\beta_m$ enthält, daher abwechselnd immer $+1$, -1 in β_5, β_7 .... vorkommen, weil β_3 die -1 enthält. Kraft dieser und vorhergegangener Bemerkungen sind also, weil in der allgemeinen Form für β_n, A_n, B_n, C_n .... die Koefficienten von ω^{n-3}, ω^{n-5}, ω^{n-7} etc..., A_3, B_5, C_7 etc... die Koefficienten von ω^0, mithin:

$$A_3 = -1, \quad B_5 = 1, \quad C_7 = -1 \text{ etc.}$$

Nun folgt

aus $\Delta A_n = -1$; $A_n = -n + C$

und da $A_3 = -1 = -3 + C$, so ist

$$A_n = -n + 2 = -(n-2)$$

Aus $\Delta B_n = -A_{n-1} = n - 3$; $B_n = \dfrac{n-3 \,.\, n-4}{1 \,.\, 2}$

Aber $B_5 = \dfrac{5-3 \,.\, 5-4}{1 \,.\, 2} + C = 1$, also $C = 0$

welcher Werth von B_n, da er für $n = 5$ gleich 1 wird, keine Constante bedarf.

Aus $\Delta C_n = -B_{n-1} = -\dfrac{n-4 \,.\, n-5}{1 \,.\, 2}$, $C_n = -\dfrac{n-4 \,.\, n-5 \,.\, n-6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$

welcher Werth von C_n für $n = 7$ gleich -1 wird, also dem besonderen Werth auch entsprechend ist.

Das allgemeine Gesetz der Koefficienten geht nun überzeugend hervor, da zufolge der Differenzgleichungen für jeden folgenden Koefficienten die von n zu subtrahirenden Zahlen und die Anzahl der Faktoren um 1 gröfser seyn müssen, als im vorhergehenden, so dafs also, wenn man unter M_n den μten Koefficienten, das ist den von $\omega^{n-1-2\mu}$, versteht, mit Berücksichtigung des Vorzeichens, seyn wird:

$$M_n = (-1)^\mu \frac{(n-\mu-1)\ (n-\mu-2)\ (n-\mu-3)\ \ldots\ldots\ (n-\mu-\mu)}{1.\ \ 2.\ \ 3\ \ldots\ldots\ \mu}$$

welcher für $n = 2\mu + 1$ gleich wird $(-1)^\mu$, wie erforderlich.

Es ist also

$$\beta_n = \omega^{n-1} - (n-2)\,\omega^{n-3} + \frac{n-3.\ n-4}{1.\ \ 2}\,\omega^{n-5} - \frac{n\ \ 4.\ n-5.\ n-6}{1.\ \ 2.\ \ 3}\,\omega^{n-7} + \text{etc.}$$

Mithin

$$Q_n = \begin{cases} \left(\omega^{n-1} - \frac{(n-2)}{1}\,\omega^{n-3} + \frac{n-3.\ n-4}{1.\ \ 2}\,\omega^{n-5} - \frac{n-4.\ n-5.\ n-6}{1.\ \ 2.\ \ 3}\,\omega^{n-7} + \text{etc.}\ldots\right) Q_{\backslash} \\ -\ \left(\omega^{n-2} - \frac{n-3}{1}\,\omega^{n-4} + \frac{n-4.\ n-5}{1.\ \ 2}\,\omega^{n-6} - \text{etc.}\ldots\right) Q \end{cases}$$

wo in β_n und β_{n-1}, welches die Koefficienten von $Q_{\backslash}$ und Q sind, keine Glieder aufgenommen werden dürfen, in welchen der Potenzexponent von ω nicht ganze positive Zahl oder Null wäre.

Dieser Werth von Q_n kann in Folge seiner Entstehung sowohl $2\,p_n$ als $2\,q_n$ werden. Dieses hat statt, wenn man $Q_{\backslash} = 2\,q_{\backslash} = 2\,q$ setzt, und unter ω die Gröfse $2\,p$ versteht. Dann wird aber $Q = 2\,q_0 = 0$. Also drückt die erste Zeile von Q_n allein den Werth von $2\,q_n$ aus, oder es ist $2\,q_n = \beta.\ 2\,q$. Soll hingegen $Q_n = 2\,p_n$ werden, so setzt man $Q_{\backslash} = 2\,p_{\backslash} = 2\,p$, so wird $Q = 2\,p_0 = 2$, und die beiden Theile des Ausdrucks für Q_n lassen sich verbinden. Man findet nämlich dann

$$2\,p_n = \omega^n - (n-2+2)\,\omega^{n-2} + \left(\frac{n-3.\ n-4}{1.\ \ 2} + \frac{2\,(n-3)}{1}\right)\omega^{n-4} - \ldots.$$

welches in die Form

$$2\,p_n = \omega^n - n\,\omega^{n-2} + \frac{n.\ n-3}{1.\ \ 2}\,\omega^{n-4} - \frac{n.\ n-4.\ n-5}{1.\ \ 2.\ \ 3}\,\omega^{n-6} + \ldots.$$

übergeht.

Allgemein findet sich der μte Koefficient M' dieses Ausdruckes für $2p_n$, wenn man M_n den μten in $2q_n$ oder in β_n nennt, L_n den nächst vorhergehenden, also den $\mu - 1$ten in β_n, L_{n-1} aber den $\mu - 1$ten in $2q_{n-1}$ oder in β_{n-1}; dann ist

$$M'_n = M_n - 2L_{n-1}.$$

Aber L_{n-1} findet sich aus dem oben gegebenen Ausdruck für M_n, wenn man in demselben $n - 1$ statt n, und $\mu - 1$ statt μ setzt; es wird also

$$M'_n = \begin{cases} (-1)^\mu . \dfrac{(n \quad \mu - 1)}{1.} \dfrac{(n - \mu - 2)}{2.} \cdots\cdots\cdots \dfrac{(n - 2\mu)}{\mu} \\ -(-1)^{\mu-1} \dfrac{(n - \mu - 1)}{1.} \dfrac{(n - \mu - 2)}{2.} \cdots\cdots \dfrac{(n - 2\mu + 1)}{\mu - 1} . 2 \end{cases}$$

Also:

$$M'_n = (-1)^\mu \left(\frac{(n - \mu - 1)}{1.} \frac{(n - \mu - 2)}{2.} \cdots \frac{(n - 2\mu + 1)}{\mu - 1}\right) \left(2 + \frac{n - 2\mu}{\mu}\right)$$

wo der letzte Faktor in $n : \mu$ übergeht, welches in $2p_n$ der bei $\omega^{n-2\mu}$ befindliche Koefficient ist, wie schon oben vorgekommen. Die Vergleichung von M'_n und M_n giebt

$$M'_n = n \frac{M_n}{n - 2\mu}$$

Der allgemeine Ausdruck eines Gliedes der Formel für $\frac{2q_n}{2q}$ oder β_n ist

$$M_n\, \omega^{n-1-2\mu} = (-1)^\mu . \frac{(n - \mu - 1)}{1.} \frac{(n - \mu - 2)}{2} \cdots\cdots \frac{(n - 2\mu)}{\mu} \omega^{n-1-2\mu}$$

Man setze $n - 2\mu = 2\nu$ und substituire den Werth von $\mu = \frac{n}{2} - \nu$ im Ausdrucke des allgemeinen Gliedes, so wird dasselbe

$$(-1)^{\frac{n}{2}-\nu} \frac{\left(\frac{n}{2} + \nu - 1\right)\left(\frac{n}{2} + \nu - 2\right) \cdots\cdots\cdots 2\nu}{1. \quad 2 \cdots\cdots \frac{n}{2} - \nu} \omega^{2\nu-1}$$

oder, wenn man 2ν als ganze positive Zahl nimmt, mit $2\nu - 1 . 2\nu - 2 \ldots . 2. 1.$ multiplizirt und dividirt,

$$(-1)^{\frac{n}{2}-\nu} \frac{\left(\frac{n}{2}+\nu-1\right)\left(\frac{n}{2}+\nu-2\right)\ldots\ldots\ldots 2\nu.\, 2\nu-1.\, 2-2\ldots\ldots 2.\, 1}{(1. \quad 2\ldots\ldots 2\nu-1)\left(\frac{n}{2}-\nu\right)\left(\frac{n}{2}-\nu-1\right)\ldots 2.\, 1} \omega^{2\nu-1}$$

wo nun im Zähler, als das Produkt aller in natürlicher Ordnung folgenden ganzen Zahlen von 1 bis $\frac{n}{2}+\nu-1$ betrachtet, durch das Produkt der im Nenner befindlichen, von 1 nur bis $\frac{n}{2}-\nu$ fortschreitenden Faktoren, die diesen gleichen, sich aufheben, und nur die gröſseren, von $\frac{n}{2}-\nu+1$ an, bleiben; die Formel wird demnach

$$M_n\omega^{2\nu-1}=(-1)^{\frac{n}{2}-\nu} \frac{\left(\frac{n}{2}+\nu-2\right)\left(\frac{n}{2}\mp\nu-2\right)\ldots\ldots\left(\frac{n}{2}-\nu+2\right)\left(\frac{n}{2}-\nu+1\right)}{1. \quad 2\ldots\ldots(2\nu-2)\;(2\nu-1)} \omega^{2\nu-1}$$

oder wenn man jeden Faktor mit 2 multiplicirt und dafür $\omega^{2\nu-1}$ mit $2^{2\nu-1}$ dividirt, so wird $M_n\omega^{2\nu-1}$ gleich . . . (A) $=$ . . . .

$$2^{2\nu-1}.M_n p^{2\nu-1}=(-1)^{\frac{n}{2}-\nu} \frac{(n+2\nu-2)(n+2\nu-4)\ldots\ldots(n-2\nu+4)(n-2\nu+2)}{1. \quad 2\ldots\ldots 2\nu-2. \quad 2\nu-1.} p^{2\nu-1}$$

Das allgemeine Glied für $2p_n$ ist nach obiger Bezeichnung $M'_n.\,\omega^{2\nu-\mu}$ Es ist also

für $\frac{2p_n}{2p}$ oder $\frac{p_n}{p}$ gleich $M'_n\,\omega^{n-1-2\mu}=\frac{n}{n-2\mu}M_n\,\omega^{n-1-2\mu}$

und hierin anstatt μ den angenommenen Werth $\frac{n}{2}-\nu$ gesetzt, so wird:

$$M'_n\,\omega^{n-1-2\mu}=\frac{n}{2\nu}M_n\,\omega^{2\nu-1}=\frac{n}{2\nu}.\,2^{2\nu-1}M_n\,p^{2\nu-1}.$$

Also das allgemeine Glied von $\frac{p_n}{p}$ gleich . . . . B $=$ . . . .

$$\frac{n}{2\nu}2^{2\nu-1}M_n p^{2\nu-1}=(-1)^{\frac{n}{2}-\nu} \frac{n.(n+2\nu-2)(n+2\nu-4)\ldots(n-2\nu+4)(n-2\nu+2)}{1. \quad 2. \quad 3\ldots\ldots 2\nu-1. \quad 2\nu} p^{2\nu-1}$$

Diese

Diese beiden allgemeinen Glieder, der nach ganzen positiven Potenzen von p fortschreitenden, für $q_n : q$, $p_n : p$ gesuchten Reihen, wie sie in (A) und (B) ausgedrückt sind, zeigen, daſs, da in denselben 2ν eine ganze positive gerade oder ungerade Zahl gesetzt worden, ν nicht allein eine ganze Zahl, sondern auch ein Bruch seyn kann, dessen Nenner 2, weshalb denn, wenn n eine ganze Zahl, (A) und (B) jede sich in einem doppelten Fall trennen, von welchen der eine oder der andere statt haben kann, weil der Faktor des Koefficienten $(-1)^{\frac{n}{2}-\nu}$ eine mögliche Gröſse werden muſs. Dieses fordert, daſs 2ν nur gerade oder ungerade angenommen werden müsse, nachdem n gerade oder ungerade gesetzt wird, damit der aus den anfänglichen besondern Fällen hervorgehenden Bedingung des Fortschreitens, bloſs nach geraden oder ungeraden Potenzen Genüge geleistet werde.

Das allgemeine Glied von $q_n : q$ nimmt eine andere Gestalt an, wenn man die in (A) gleich vom Anfang und Ende entfernten Faktoren wirklich multiplizirt, und es wird dasselbe

$$(-1)^{\frac{n}{2}-\nu} \frac{n^2-(2\nu-2)^2}{\nu^2-(\nu-1)^2} \cdot \frac{n^2-(2\nu-4)^2}{\nu^2-(\nu-2)^2} \cdot \frac{n^2-(2\nu-6)^2}{\nu^2-(\nu-3)^2} \ldots\ldots p^{2\nu-1}$$

Will man die Faktoren hier vom entgegengesetzten Ende oder in (A) von der Mitte her anfangen, so hat man, nach dem so eben bemerkten, zu unterscheiden, ob 2ν gerade oder ungerade, also ν ganze Zahl oder Bruch ist. In jenem Falle, wenn 2ν eine gerade Zahl bedeutet, wird (A) gleich

$$(-1)^{\frac{n}{2}-\nu} \frac{n}{\nu} \frac{n^2-2^2}{\nu^2-1} \cdot \frac{n^2-4^2}{\nu^2-2^2} \ldots\ldots \frac{n^2-(2\nu-4)^2}{\nu^2-(\nu-2)^2} \cdot \frac{n^2-(2\nu-2)^2}{\nu^2-(\nu-1)^2} \cdot p^{2\nu-1}$$

in diesem Falle aber, für 2ν ungerade, wird (A)

$$(-1)^{\frac{n}{2}-\nu} \frac{n^2-1^2}{\nu^2-(\frac{1}{2})^2} \cdot \frac{n^2-3^2}{\nu^2-(\frac{3}{2})^2} \ldots\ldots \frac{n^2-(2\nu-4)^2}{\nu^2-(\nu-2)^2} \; \frac{n^2-(2\nu-2)^2}{\nu^2-(\nu-1)^2} \, p^{2\nu-1}$$

in beiden kann aber für das Produkt der Nenner $1.\ 2.\ 3 \ldots 2\nu-2.\ 2\nu-1$ beibehalten werden.

Multiplizirt man diese Ausdrücke von (A) mit $\frac{n}{2\nu}$, so hat man auch die Ausdrücke des allgemeinen Gliedes von $p_n : p$, aus welchen sich ohne

Schwierigkeit die verschiedenen bekannten Reihen für q_n, p_n bilden, wenn ν gehörig nach einander folgende absolute Zahlenwerthe erhält.

Aber die nach diesen Formeln entstehende Reihen sind nicht geeignet, die Werthe von q_n und p_n zu geben, wenn εn ein Bruch, wegen der Gröſse $(-1)^{\frac{n}{2}-\nu}$, entsprungen aus der anfänglich in der Absicht als Mitfaktor eingeführten Gröſse $(-1)^{\mu}$, um den Koefficienten das gehörige Vorzeichen zu geben. An ihre Stelle wird man aber eben sowohl eine jede andere Gröſse, welche dasselbe leistet, wenn μ eine ganze Zahl ist, setzen und gebrauchen können, und wenn deren Werthe auch für μ jede gebrochene oder andere Zahl angeblich, so wird vermittelst Zuziehung derselben als Mitfaktor dem Werthe von $p_n : p$ oder p_n für n jede Zahl entsprochen werden.

Nun aber folgt aus der Formel

$$p_{\mu+1} = p_\mu p_1 - q_\mu q_1$$

in welcher p_1 welchen Werth man will von $+1$ bis -1 haben kann, daſs wenn man $p_1 = -1$ setzt, und wegen dieses bestimmten Werthes die Bezeichnung von der allgemeinen unterscheidet und p_1 durch π_1 ausdrückt, also in diesem Sinne auch schreibt:

$$\pi_{\mu+1} = \pi_\mu \pi_1 - \sqrt{1-\pi_\mu^2}\ \sqrt{1-\pi_1^2}$$

daſs in der allgemeinen Voraussetzung es sey

$$p^2 + q^2 = 1, \ \sqrt{1-\pi_1^2} = 0, \text{ weil } \pi_1 = -1, \text{ mithin}$$
$$\pi_{\mu+1} = -\pi_\mu, \ \mu \text{ sey was es wolle, folglich}$$
$$\pi_{\mu+2} = \pi_{(\mu+1)+1} = -\pi_{\mu-} = \pi_\mu$$

und so fort, daſs also, wenn m eine ganze Zahl,

$$\pi_{\mu+2m} = \pi_\mu; \quad \pi_{\mu+2m+1} = -\pi_\mu$$

Also wenn $\mu = 1$, so ist:

$$\pi_{1+2m} = \pi_1 = -1; \quad \pi_{2+2m} = +1.$$

Also ist $\pi_\mu = \pm 1$,

nachdem μ eine gerade oder ungerade Zahl, und man kann daher die Gröſse π_μ statt des oben zuerst aufgenommenen $(-1)^\mu$ gebrauchen.

Diese Gröſse π_μ wird nun in den Ausdrücken der allgemeinen Glieder (A) und (B), wo für μ die Gröſse $\frac{n}{2} - \nu$ gesetzt worden, $\pi_{\frac{n}{2}-\nu}$, und diese ist also auch an die Stelle von $(-1)^{\frac{n}{2}-\nu}$ zu gebrauchen.

Da nun unter dem allgemeinen Gliede von $q_n : q'$ oder $p_n : p$ ein solches verstanden wird, in welchem die Potenz $p^{2\nu-1}$ entweder Null oder eine ganze positive Zahl zum Exponenten hat, so ist 2ν stets eine ganze positive Zahl. Weil aber

$$\pi_{\frac{n}{2}-\nu} = \pi_{\frac{n}{2}}\ \pi_\nu\ + \sqrt{1-\pi^2_{\frac{n}{2}}}\ \sqrt{1-\pi^2_\nu}$$

so ist, im Falle ν eine ganze Zahl, nach obigen $\pi_\nu = \pm 1$, nachdem ν gerade oder ungerade, also

$$\sqrt{1-\pi^2_\nu} = 0, \text{ und } \pi_{\frac{n}{2}-\nu} = \pi_{\frac{n}{2}}\ \pi_\nu.$$

Ueberhaupt ist

$$\pi_{m+n} = \pi_m \pi_n$$

wenn eine der beiden Gröſsen m oder n eine ganze positive oder negative Zahl. Da aber

$$\pi_1 = \pi_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \pi_{\frac{1}{2}}{}^2 - (1 - \pi_{\frac{1}{2}}{}^2)$$

und $\pi_1 = -1$, so ist $\pi_{\frac{1}{2}} = 0$

Also $\pi_{m \pm \frac{1}{2}} = \pi_m\ \pi_{\frac{1}{2}} = 0$

für m eino ganze Zahl.

Wenn 2ν eine ungerade, so ist $\nu + \frac{1}{2}$ eine ganze Zahl, daher:

$$\pi_{\frac{n}{2}-\nu} = \pi_{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}-(\nu+\frac{1}{2})} = \pi_{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}\ \pi_{\nu+\frac{1}{2}} = \pm\ \pi_{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}$$

nachdem ν der Form $\frac{4m+1}{2}$ oder $\frac{4m+3}{2}$ ist.

Man kann auch setzen, weil ebenfalls $\nu - \frac{1}{2}$ eine ganze Zahl,

$$\pi_{\frac{n}{2}-\nu} = \pi_{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}-(\nu-\frac{1}{2})} = \pi_{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \cdot \pi_{\nu-\frac{1}{2}}$$

Die Zeigezähler von π kann man, wie bekannt, nach dem, was schon oben für p_n überhaupt vorgekommen, auch negativ setzen.

Aus diesen Gleichungen zwischen π mit verschiedenen Zeigezahlen geht hervor, dafs sich ihr Algorithmus ähnlich verhält, wie derjenige für die Potenzen von (-1) mit verschiedenen Exponenten, und jene an die Stelle dieser treten können, da sie mit diesen einerlei Werth haben, wenn die Exponenten gleiche ganze Zahlen sind. Aber die durch π ausgedrückte Gröfsen haben den Vortheil, dafs die Werthe sowohl für gebrochene als ganze Zeigezahlen bedeutend oder reel sind, nur werden sie Null, wenn die Potenz von -1 unmöglich, nämlich die Hälfte einer ganzen ungeraden Zahl zum Exponenten hat.

Diesen Bemerkungen zufolge wird also das allgemeine Glied von $q_n : q$, welches oben mit (A) bemerkt worden,

$$(n+2\nu-2)\,(n+2\nu-4)\ldots\ldots(n-2\nu+2)\,\frac{p^{2\nu-1}}{1.2\ldots 2\nu-1}.\,\pi_{\frac{n}{2}-\nu}$$

und die Reihe für $q_n : q$ wird erhalten, wenn für $2\nu-1$, als Potenzexponent von p, alle ganze positive Zahlen genommen werden, Null eingeschlossen.

Will man unter ν nur ganze Zahlen verstehen, so ist man genöthiget, die zwei auf einander folgenden Glieder auszudrücken, in welchen sich jener einfache Ausdruck auflöset, und es wird erhalten:

$$\left\{\begin{array}{l} n.\,(n^2-4)\;n^2-16)\ldots\ldots(n^2-(2\nu-2)^2)\,\frac{p^{2\nu-1}}{1.2\ldots 2\nu-1}.\,\pi_{\frac{n}{2}-\nu} \\ +\,(n^2-1)\,(n^2-9)\ldots\ldots(n^2-(2\nu-1)^2)\,\frac{p^{\nu}}{1.2\ldots 2\nu}.\,\pi_{\frac{n}{2}-\nu} \end{array}\right.$$

welches, so wie der vorige, für $q_n : q$ allgemein gilt und angeblich ist, n sey welche Zahl man wolle, da die Gröſsen $\pi_{\frac{n}{2}-\nu}$, $\pi_{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}-\nu}$, sich bestimmen lassen, die Zeigezahlen an π mögen seyn welche sie wollen. Da im letztern Ausdruck ν stets ganze positive Zahl, so werden

$$\pi_{\frac{n}{2}-\nu},\ \pi_{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}-\nu},\ \text{gleich}\ \pi,\ \pi_{\frac{n}{2}},\ \pi,\ \pi_{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}};\ \text{also}\ \pm\,\pi_{\frac{n}{2}},\ \pm\,\pi_{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}$$

nachdem ν eine gerade oder ungerade Zahl. Sucht man also $q_n : q$ als eine Reihe nach ganzen Potenzen von p, so daſs

$$q_n = \left((q_n) + (q_n)'.\ p + (q_n)''.\ \frac{p^2}{1.2} + (q_n)'''.\ \frac{p^3}{1.2.3} + \ldots\right) q;$$

so wird, wenn man noch bemerkt, daſs aus dem einfachen allgemeinen Gliede (q_n) als Koefficient von p_0 folgt, wenn $2\nu - 1 = 0$ gesetzt wird, in welchem Falle die Zahl oder der Exponent der in gleichen Unterschieden fortlaufenden Faktoren Null, also ihr Werth bekanntlich 1, mithin auch $(q_n) = 1.\ \pi_{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}$, die Reihe für q_n

$$q_n = \left(\pi_{\frac{n-1}{2}} - n.\pi_{\frac{n}{2}}\, p - n^2 1. - \pi_{\frac{n-1}{2}} \frac{p^2}{1.2} + n.n^2-4.\pi_{\frac{n}{2}} \frac{p^3}{1.2.3} + n^2-1.n^2-9.\pi_{\frac{n-1}{2}} \frac{p^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) q$$

und ähnlich erhält man die Reihe für $p_n : p$, oder

$$p_n = \pi_{\frac{n}{2}} + n.\ \pi_{\frac{n-1}{2}}\, p - n^2\ \pi_{\frac{n}{2}} \frac{p^2}{1.2} - n.n^2-1.\ \pi_{\frac{n-1}{2}} \frac{p^3}{1.2.3} + n^2.n^2-4.\pi_{\frac{}{2}} \frac{p^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

Für $p = 0$ wird $q = 1$, also jenes gleich $\pi_{\frac{1}{2}}$, dieses π_0, also $p_n = \pi_{\frac{n}{2}}$ und $q_n = \pi_{\frac{n}{2}-\nu}$, welchem besonderen Fall die letzten Formeln, wie auch erforderlich, wirklich entsprechen, wenn in denselben $p = 0$, $q = 1$ gesetzt wird.

§. 14.

Da

$$p_{(m+\lambda)+\lambda} = p_{m+\lambda}\, p_\lambda - q_{m+\lambda}\, q_\lambda$$
$$p_{(m+\lambda)-\lambda} = p_{m+\lambda}\, q_\lambda + q_{m+\lambda}\, q_\lambda$$

so ist addirt beiderseits

$$p_{m+2\lambda} + p_m = p_{m+\lambda} \cdot 2\,p_\lambda$$

und ähnlicherweise wird erhalten

$$q_{m+2\lambda} + q_m = q_{m+\lambda} \cdot 2\,p_\lambda$$

für $\lambda = 2$ ist aber $p_\lambda = p_2 = 2p^2 - 1 = (2q^2 - 1)(-1)$

Also

$$p_{m+4} = (4p^2 - 2)\,p_{m+2} - p_m = (4q^2 - 1)\,(-p_{m+2}) - p_m$$

Demnach:

$$p_{m+2\mu} = (4p^2 - 2)\,p_{m+2(\mu-1)} - p_{m+2(\mu-2)} \quad \ldots\ldots (A)$$

und

$$p_{m+2\mu} = (4q^2 - 2).(-1).\,p_{m+2(\mu-1)} - p_{m+2(\mu-2)}$$

Mithin auch, wenn man statt -1 den Buchstaben π braucht,

$$\pi^{e+\mu}\,p_{m+2\mu} = (4q^2 - 2)\left(\pi^{e+\mu-1}\,p_{m+2(\mu-1)}\right) - \pi^{e+\mu-2}\,p_{m+2(\mu-2)} \quad \ldots (B)$$

Gleicherweise hat man

$$q_{m+2\mu} = (4p^2 - 2)\,q_{m+2(\mu-1)} - q_{m+2(\mu-2)} \quad \ldots\ldots (C)$$

$$\pi^{e+\mu}\,q_{m+2\mu} = (4q^2 - 2)\left(\pi^{e+\mu-1}\,q_{m+2(\mu-1)}\right) - \pi^{e+\mu-2}\,q_{m+2(\mu-2)} \quad \ldots (D)$$

Die Gleichungen A, B, C, D haben einerlei Form, nach welcher $p_{m+2\mu}$ sich eben so durch μ, p und p_{m-2}, p_{m-4} bestimmt, als $\pi^{e+\mu}\,p_{m+2\mu}$ durch μ, q, und $\pi^{e-1}\,p_{m-2}$, $\pi^{e-2}\,p_{m-4}$. Die ersteren Gröſsen sind also einerlei Funktionen der letztern, und eben so ist es mit $q_{m+2\mu}$ und $\pi^{e+\mu}\,q_{m+2\mu}$ beschaffen.

Völlig wie jene aus (A) und (B), bestimmen auch diese sich in Folge der Gleichungen (B), (C) auf einerlei Weise, und so wie, wenn man von q_{m-2}, q_{m-4} als bestimmten Gröſsen ausgeht, nach einander q_m, q_{m+2}, q_{m+4} u. s. w. . . . . $q_{m+2\mu}$, vermittelst der Gröſse $4p^2 - 2$, d. i. vermittelst der Gröſse p entstehen; eben so ergeben sich aus und von $\pi^{e-1}\,q_{m-2}$, $i^{e-2}\,q_{m-4}$ an, die $\pi^e\,q_m$, $\pi^{e+1}\,q_{m+2}$ u. s. w. . . . . . $\pi^{e+\mu}\,q_{m+2\mu}$ vermittelst $4q^2 - 2$, d. i. vertelst q.

Setzt man noch $m = 3$ und $m = 4$, so geben die Gleichungen (A) und (C):

$$p_{3+2\mu} = f(\mu,\, p,\, p_1,\, p_{-1}) = f(\mu,\, p,\, p,\, p)$$

$$p_{4+2\mu} = f(\mu,\, p,\, p_2,\, p_0) = f(\mu,\, p,\, 2p^2 - 1,\, 1)$$

$$q_{3+2\mu} = f(\mu,\, p,\, q_1,\, q_{-1}) = f(\mu,\, p,\, q,\, -q)$$

$$q_{4+2\mu} = f(\mu,\, p,\, q_2,\, q_0) = f(\mu,\, p,\, 2pq,\, 0)$$

wo das f durchgängig einerlei Funktionsform der in bestimmter Ordnung folgenden Gröſsen bedeutet.

Demnach geben auch die Gleichungen (B) und (D):

$$\pi^{e+\mu} p_{3+2\mu} = f(\mu, q, \pi^{e-1} p_1, \pi^{e-2} P_{-1})$$
$$\pi^{e+\mu} p_{4+2\mu} = f(\mu, q, \pi^{e-1} p_2, \pi^{e-2} p_0)$$
$$\pi^{e+\mu} q_{3+2\mu} = f(\mu, q, \pi^{e-1} q_1, \pi^{e-2} q_{-1})$$
$$\pi^{e+\mu} q_{4+2\mu} = f(\mu, q, \pi^{e-1} q_2, \pi^{e-2} q_0)$$

in welchen e ein bisher willkührlicher Exponent von π. Setzt man denselben in der zweiten Gleichung gleich o, in den übrigen 1, so wird, wenn man nachher den Gröſsen p_1, p_{-1}, q_1, q_{-1}, p_2, q_2 ihre Werthe in p und q beilegt,

$$\pi^{1+\mu} p_{3+2\mu} = f(\mu, q, p_1, -p_{-1}) = f(\mu, q, p, -p)$$
$$\pi^{1+\mu} p_{4+2\mu} = f(\mu, q, -p_2, p_0) = f(\mu, q, 2q^2 - 1, 1)$$
$$\pi^{1+\mu} q_{3+2\mu} = f(\mu, q, q_1, -q_{-1}) = f(\mu, q, q, q)$$
$$\pi^{1+\mu} q_{4+2\mu} = f(\mu, q, q_2, -q_0) = f(\mu, q, 2qp, 0)$$

Es fällt in die Augen, daſs für eine jede von den letzten vier Gleichungen sich eine unter den vier ersteren findet, welche mit ihr übereinstimmt, wenn man q und p verwechselt, und es ist

$$\pi^{1+\mu}.\ p_{3+2\mu} = q_{3+2\mu}$$
$$\pi^{\mu}.\ p_{4+2\mu} = p_{4+2\mu}$$
$$\pi^{1+\mu}.\ q_{3+2\mu} = p_{3+2\mu}$$
$$\pi^{1+\mu}.\ q_{4+2\mu} = q_{4+2\mu}$$

wenn nämlich in den Entwickelungen der nach dem Gleichungszeichen stehenden Gröſsen p und q gegeneinander verwechselt werden.

Setzt man sowohl $3 + 2\mu = n$ als $4 + 2\mu = n$, und bestimmt darnach die Werthe von μ, als Exponenten für die zustehenden Potenzen von π, so folgt:

$$\pi^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}.\ p_n = [q_n]$$
$$\pi^{\frac{n}{2}}.\ p_n = [p_n]$$
$$\pi^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}.\ q_n = [p_n]$$
$$\pi^{\frac{n}{2}-1}.\ q_n' = [q_n]$$

wo die Einschliefsung der Funktionen die in ihren Entwickelungen erforderliche Verwechselung von p gegen q und umgekehrt andeuten soll.

Diese Entwickelungen aber sind aus dem Vorigen bekannt durch ihre allgemeinen Glieder (A) und (B), oder deren abgeänderte Formen. Bezeichnet man mit (q_n), (p_n) diese allgemeinen Glieder von q_n, p_n, so ist, wenn

$$\frac{(n+2\nu-2)\,(n+2\nu-4)\,\ldots\ldots\,(n-2\nu+4)\,(n-2\nu+2)}{1.\quad 2\quad \ldots\ldots\quad 2\nu-2.\quad 2\nu-1} = N$$

$$(q_n) = N\,p^{2\nu-1}.\; q\,(-1)^{\frac{n}{2}-\nu},$$

$$(p_n) = \frac{n}{2\nu}\,N\,p^{2\nu}\;(-1)^{\frac{n}{2}-\nu}$$

Daher p und q verwechselt

$$[(q_n)] = N\,q^{2\nu-1}\,p\,(-1)^{-\nu}\,(-1)^{\frac{n}{2}} = N\,q^{2\nu-1}\;p\,(-1)^{\nu}\,(-1)^{\frac{n}{2}}$$

$$[(p_n)] = \frac{n}{2\nu}\,N\;q^{2\nu}\;(-1)^{-\nu}\,(-1)^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2\nu}\;q^{2\nu}\;(-1)^{\nu}\;(-1)^{\frac{n}{2}}$$

Aber die vorigen vier Gleichungen, blofs auf ihre allgemeinen Glieder beschränkt, sind:

$$\pi^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\,(p_n) = [(q_n)];\quad \pi^{\frac{n}{2}}\,(p_n) = [(p_n)]$$

$$\pi^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\,(q_n) = [(p_n)];\quad \pi^{\frac{n}{2}-1}\,(q_n) = [(q_n)]$$

Mithin die Werthe von den letzteren $[(q_n)]$, $[(p_n)]$ substituirt, und mit den Potenzen von π beiderseits dividirt, so folgt, wenn man -1 statt π gebraucht,

$$(p_n) = N\,q^{2\nu-1}\;p\,(-1)^{\frac{1}{2}-\nu}$$

$$(p_n) = \frac{n}{2\nu}\;N\;q^{2\nu}\;(-1)^{-\nu}$$

$$(q_n) = \frac{n}{2\nu}\;N.\;q^{2\nu}\,(-1)^{\frac{1}{2}-\nu}$$

$$(q_n) = N\;q^{2\nu-1}\;p\,(-1)^{1-\nu}$$

Die hieraus folgenden Entwickelungen von p_n, q_n hängen nun zwar in Rücksicht ihrer Möglichkeit nicht mehr von n ab, sind also für jeglichen Werth von n anwendbar, nur sieht man, dafs die erste und dritte Formel, um nach der gewöhnlichen Ansicht möglich zu seyn, fordert, dafs 2ν ungerade, die zweite und vierte hingegen, dafs 2ν gerade sey. Indessen,

sen, wenn man die Reihen für p_n und q_n als nach ganzen Potenzen von q fortschreitend, sucht, ist es auffallend, zu finden, dafs ihre Koefficienten abwechselnd mit dem Zeichen $\sqrt{-1}$ behaftet sind, p_n und q_n in der Gestalt $A + B\sqrt{-1}$ also als unmögliche Gröfsen erscheinen, denn B wird in keinem Falle Null, wie man leicht einsieht, da p und q jeden ächten Bruch bedeuten können, und die Koefficienten ihrer Potenzen nicht Null werden. Man sieht also nicht einmal aus den Resultaten mit vollständiger Ueberzeugung ein, ob p_n, q_n wirklich den reellen Theilen der Formen $A + A\sqrt{-1}$ allein genommen gleich sind. Da man aber weifs, dafs p_n, q_n reeller Entwickelungen in ganzen Potenzen von q fähig sind, gesetzt auch, man wolle dies blofs für n als ganze Zahl annehmen, wo die Induktion es vollständig bewährt, dennoch die allgemeinen Formeln dahin führen, dafs p_n oder q_n in Form gleich $A+B\sqrt{-1}$, wo A und B reel, so mufs folgen $B\sqrt{-1}=0$. Da nun B nicht Null, so mufste $\sqrt{-1} = 0$ seyn. Eine Folgerung, die man nicht gelten lassen kann, welcher also auszuweichen man eine andere Gröfsenart anzunehmen genöthiget ist. Jene Schwierigkeit durch besondere Betrachtungen, wie es geschehen kann, zu beseitigen, entspricht nicht dem allgemeinen Gange der Analysis, ist auch nicht nothwendig, wofern man nur das Zeichen $(-1)^m$ in einer anderen als die gewöhnliche Bedeutung nimmt, welche es haben kann, indem man es nicht als eine überhaupt an sich unverständliche mte Potenz der Wurzel -1, sondern in ihrem ganzen Umfange als eine stetige Funktion von m betrachtet, der Eigenschaft, dafs sie für m jede gerade Zahl gleich $+1$, für jede ungerade -1 wird. Dann wird $(-1)^{\frac{1}{2}}$, der Werth dieser Funktion für m, gleich $\frac{1}{2}$, welcher keinesweges eine unmögliche Gröfse seyn mufs, sondern so wie $(-1)^{m+\frac{1}{2}}$ für m jede ganze Zahl allerdings Null seyn kann, ohne den Werthen von $(-1)^m$ zu widersprechen. Diese Ansicht leidet die bisher geführte Untersuchung durchgängig.

Die nähere Betrachtung der letzten Formeln führt also zu eben dem Resultat, auf welches die Verallgemeinerung von p_n, q_n im vorigen leitete, und wenn man, wie dort (§. 13.) geschehen, statt $(-1)^\mu$ die Gröfse π_μ auch hier in jener Bedeutung nimmt und setzt, also die Potenzen von (-1) nicht gebraucht, sondern die Potenzen von π beibehält, aber die Potenzzahlen allgemeiner als blofse Zeigezahlen betrachtet und andeutet, indem man π_μ statt π^μ schreibt, so werden die letzten Formeln:

$$(p_n) = N.\ q^{2\nu-1}\, p.\ \pi_{\frac{1}{2}-\nu}; \quad (p_n) = \frac{n}{2\nu} N.\ q^{2\nu}.\ \pi_{-\nu};$$

$$(q_n) = \frac{n}{2\nu} N\ q^{2\nu}\ \pi_{\frac{1}{2}-\nu}; \quad (q_n) = N\ q^{2\nu-1}\ p\ \pi_{1-\nu};$$

vollkommen genügend für alle ganze Potenzexponenten der nach q geordneten Reihen, indem nun die Koefficienten von selbst Null werden, welche beim Gebrauch des Zeichens $\sqrt{-1}$ als unmöglich erschienen.

Will man jedoch mit diesem Zeichen zum Endresultat gelangen, so hat man nur zu bemerken, daſs aus den Gleichungen zwischen p_{n+2}, p_{n+1}, p_n und denen in q leicht folgt, daſs seyn müsse $p_{-n} = p_n$, $q_{-n} = -q_n$. Wenn nun, um p_{-n} auszudrücken, im Koefficienten N des allgemeinen Gliedes von p_n anstatt n gesetzt wird $-n$, so wird n positiv oder negativ, nachdem $2\nu - 1$ gerade oder ungerade; also negativ, wenn $\frac{1}{2} - \nu$, als der Exponent von -1, keine ganze Zahl ist. Es fallen also in der Summe $p_{-n} + p_n = 2 p_n$ die unmöglichen Glieder weg, und man findet p_n wie im Falle, wo aus $\sqrt{-1}$ Null wird. Für q_n verhält es sich ähnlich.

Da den vier Gleichungen zufolge $q_n = p_n . \sqrt{-1}$, aber

$p_n = A + B\sqrt{-1}$ der Form nach, also

$q_n = A\sqrt{-1} - B$,

wirklich aber nur A und B die wahren Werthe von p_n, q_n sind, so ergiebt sich, daſs die Reihen aus jenen Gleichungen, mit Beibehaltung der imaginairen Gröſsen, nichts anders sind, als

$p_n - q_n \sqrt{-1}$ und $p_n \sqrt{-1} + q_n$

jene also die vollständige Entwickelung von $(p - q\sqrt{-1})^n$ darbietet.

Zu diesem Resultate gelangt man auch durch die Betrachtung der Form von p_n, welche schon oben (§. 12.) vorgekommen. Es hat sich nämlich dort allein aus der Gleichung $p_{n+2} = 2p.\ p_{n+1} - p_n$ der vollständige Ausdruck von p_n ergeben, so daſs der Form nach war

$2 p_n = f(n) + f(-n)$

wo in der Funktion $f(-n)$ nur negative Potenzen von p vorkommen, dahingegen in der letzteren Behandlung (§. 13 und 14.) nur die positiven allein in Betrachtung gezogen worden sind, also auch nur fn erhalten werden konnte, woraus erhellet, daſs noch $f(-n)$ hinzuzusetzen sey, um den

Ausdruck für $2 p_n$ zu erhalten. Allein da in den letzteren Formeln $f n$ in Potenzen von p erhalten werden, deren Exponenten von n unabhängig, so werden ebenfalls auch die Potenzen von p in $f(-n)$ von $-n$ unabhängig, also wie in $f n$ positiv bleiben, und nur die Koefficienten sich ändern, so wie es eben vorgekommen.

§. 15.

Am natürlichsten ist es jedoch, unmittelbar die für p_n, q_n gefundenen Werthe so zu bestimmen, daſs sie den besonderen Fällen p_3, p_4 . . ., welche nur gerade Potenzen von q enthalten, entsprechen. Auf welche Weise dieser Bedingung Genüge geleistet werden kann, ist auch angezeigt, auch schon nachgewiesen, wie man zur Kenntniſs der Funktionen π_μ gelangen kann, wozu aber der Ausdruck von p_{x+y} benutzt worden ist. Indessen kann man die Ableitungen von p_n, q_n einzig aus den Differenzgleichungen $p_{n+2} = 2 p . p_{n+1} - p_n$ und $q_{n+2} = 2 p . q_{n+1} - q_n$, welche man sich als unmittelbar gegebene vorstellt, fordern, ohne die Ausdrücke von p_{x+y}, q_{x+y} in p_x, q_x, p_y, q_y, welche vielmehr dann als Folge jener anzusehen sind, zu Hülfe zu ziehen.

In der That folgt aus jener Differenzgleichung zwischen p_{n+2}, p_{n+1} und p_n, da man in ihrer Integration $p_0 = 1$, $p_1 = p$ gemacht hat, daſs, wenn man $p_1 = -1$ setzt, und, wie auch oben geschehen, mit π_1 bezeichnet, seyn werde:

$$\pi_{n+2} = 2 \pi_1 . \pi_{n+1} - \pi_n \text{ oder } \pi_{n+2} = - 2 . \pi_{n+1} - \pi_n.$$

Da nun $\pi_0 = p_0 = 1$, so folgt auch hieraus, wenn m eine ganze Zahl,

$$\pi_{2m} = 1, \; \pi_{2m+1} = - 1.$$

Ferner für $n = -1$ in obiger Gleichung

$$\pi_1 = 2 \pi_1 \pi_0 - \pi_{-1}, \text{ also } \pi_{-1} = 1;$$

und wenn man jene Gleichung umwendet,

$$\pi_n = 2 . \pi_{n+1} - \pi_{n+2}$$

$$\pi_{-2m} = 1, \; \pi_{-(2m+1)} = - 1.$$

Also $\pi_m = \pm 1$, nachdem m gerade oder ungerade ganze Zahl, sie sey positiv oder negativ.

Mit Hülfe dieser Funktion kann öfters eine Reihe überhaupt, welche nach steigenden Potenzen von q fortschreitet, wenn man die Glieder derselben, welche q^λ, $q^{\lambda+1}$ u. s. w. enthalten, noch mit $\pi_{m+\mu}$, $\pi_{m+2\mu}$ u. s. w.

multiplicirt, erforderlichen Bedingungen entsprechend gemacht werden. Der Fall, welchen wir jetzt betrachten, ist der, wo eine Reihe wie

$$p_n = 1 + N_1 q^1 + N_2 q^2 + N_3 q^3 + \ldots$$

ohne andere Aenderung für die Koefficienten in den Zeichen abwechseln und nur die ungeraden Potenzen wegfallen sollen. Dies wird also geschehen, wenn man sie bloſs mit $\pi_{\frac{1}{2}}$, π_1, $\pi_{\frac{3}{2}}$ u. s. w. Glied nach Glied multiplicirt, also setzt:

$$p_n = 1 + N_1 \pi_{\frac{1}{2}} q + N_2 \pi_1 q^2 + N_3 \pi_{\frac{3}{2}} q^3 + \ldots$$

und da bloſs π_m für m ganze Zahl bis jetzt bestimmte Werthe annehmen soll, so hindert nichts, die Funktion π_μ überhaupt noch so zu bestimmen, daſs sie für $\pi_{(2m+1):2}$, wenn m eine ganze positive oder negative Zahl ist, Null wird.

Da man die Natur dieser Funktion überhaupt und ihre Werthe für m jede Zahl zu kennen nöthig hat, so wird dieselbe nach den von ihr geforderten Eigenschaften allgemein näher zu bestimmen seyn.

Man bezeichne sie im allgemeinen mit fz, und man hat

$fz = 1$, also $1 - fz = 0$, für z jede gerade ganze Zahl, positiv oder negativ;

$fz = -1$, also $1 + fz = 0$, für z jede ungerade ganze Zahl, positiv oder negativ.

Also das Produkt

$(1 - fz)(1 + fz) = 1 - fz^2 = 0$ für jede ganze positive sowohl als negative Zahl.

Setzt man $1 - fz^2 = Fz$, so muſs $Fz = +1$ werden für z, gleich der Hälfte jeder ungeraden Zahl, da für eine solche fz Null werden soll. Weil aber Fz für jede ganze Zahl 0 wird, so muſs es für Zwischenwerthe abwechselnd positiv und negativ werden. Man erfüllt also letztere Bedingung, wenn man für Fz das Quadrat derjenigen Funktion nimmt, welche mit z jede ganze positive oder negative Zahl 0 wird, und diese Funktion so bestimmt, daſs sie für $z + \zeta$ gleiche oder entgegengesetzte Werthe erhält, nachdem ζ gerade oder ungerade ganze Zahl ist, damit sie für $z = \pm \frac{1}{2}$ wechselnd $+1$ oder -1 für jedes ζ als ganze Zahl werden könne. Es wird also diese Funktion Q, nachdem man z positiv oder negativ nimmt, entggenesetzte gleiche Werthe für einerlei ζ haben, daher, binomisch nach Potenzen von z entwickelt, nur die ungeraden Potenzen enthalten, mit wechselnden Zeichen, damit sie auch für z jede ganze Zahl Null werden könne. Die Form ihrer Entwickelung wird also seyn:

$$Q = Q_1\, z - Q_3 \frac{z^3}{1.2.3} + Q_5 \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

Wird nun $z + \zeta$ statt z gesetzt, wo ζ irgend eine ganze Zahl, so wird erhalten:

$$\begin{array}{lllll}
Q = Q_1 .\, z & - Q_3 .\, z^3 & + Q_5 \dfrac{z^5}{1.2.3.4.5} & - \ldots\ldots & \\
\quad + Q_1 .\, \zeta & - Q_3 .\, \zeta .\, \dfrac{z^2}{1.2} & + Q_5\, \zeta \dfrac{z^4}{1.2.3.4} & - \ldots\ldots & \\
 & - Q_3 \dfrac{\zeta^2}{1.2}\, z & + Q_5 \dfrac{\zeta^2}{1.2} \dfrac{z^3}{1.2.3} & - \ldots\ldots & \\
 & - Q_3 \dfrac{\zeta^3}{1.2.3} & + Q_5 \dfrac{\zeta^3}{1.2.3} \dfrac{z^2}{1.2} & - \ldots\ldots & \\
 & & + Q_5 \dfrac{\zeta^4}{1.2.3.4}\, z & - \ldots & \\
 & & + Q^5 .\, \dfrac{\zeta^5}{1.2.3.4.5} & - \ldots\ldots & \\
 & & & - \ldots\ldots &
\end{array}$$

Welches wiederum, nach Potenzen von z geordnet, giebt:

$$\begin{array}{l}
Q = Q_1\, \zeta - Q_3 \dfrac{\zeta^3}{1.2.3} + Q_5 \dfrac{\zeta^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots \\
\quad + \left(Q_1 - Q_3 \dfrac{\zeta^2}{1.2} + Q_5 \dfrac{\zeta^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots\right) z \\
\quad - \left(Q_3\, \zeta - Q_5 \dfrac{\zeta^3}{1.2.3} + Q_7 \dfrac{\zeta^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots\right) \dfrac{z^2}{1.2} \\
\quad - \left(Q_3 - Q_5 \dfrac{\zeta^2}{1.2} + Q_7 \dfrac{\zeta^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots\right) \dfrac{z^3}{1.2.3} \\
\quad + \left(Q_5\, \zeta - Q_7 \dfrac{\zeta^3}{1.2.3} + Q_9 \dfrac{\zeta^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots\right) \dfrac{z^4}{1.2.3.4} \\
\quad + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Diese letzte Entwickelung von Q muſs der ersten gleich seyn, wenn beide durch den Koefficienten von z dividirt werden, damit die Zeichenfolge derselben einerlei in beiden wird.

Vergleicht man die Koefficienten, so hat man zuerst alle die der geraden Potenzen von z Null, also den von $z^{2\mu}$

$$Q_{2\mu+1}\,\zeta - Q_{2\mu+3}\,\frac{\zeta^3}{1.2.3} + Q_{2\mu+5}\,\frac{\zeta^5}{1.2.3.4.5} - \ldots = 0$$

so wie es auch erforderlich, da Q für $z = \zeta$ Null werden soll. Ferner:

$$\frac{Q_{2\mu+1} - Q_{2\mu+3}\,\frac{\zeta^2}{1.2} + Q_{2\mu+5}\,\frac{\zeta^4}{1.2.3.4} - \ldots}{Q_1 - Q_3\,\frac{\zeta^2}{1.2} + Q_5\,\frac{\zeta^4}{1.2.3.4} - \ldots} = \frac{Q_{2\mu+1}}{Q_1}$$

welche Gleichungen sich bewähren müssen, ζ sey welche ganze Zahl man wolle, welche also in Folge derselben unbestimmbar bleiben muſs.

Aus letzterer wird, da die entstehenden Gleichheiten in ζ identisch seyn müssen, durch Gleichsetzung der Koefficienten bei einerlei Potenz von ζ,

$$Q_1 \cdot Q_{2\mu+\lambda} = Q_\lambda \cdot Q_{2\mu+1}$$

Mithin

$$\frac{Q_{2\mu+\lambda}}{Q_{2\mu+1}} = \frac{Q_\lambda}{Q_1}$$

Daher, was auch μ für eine ganze positive Zahl,

$$\frac{Q_{2\mu+3}}{Q_{2\mu+1}} = \frac{Q_3}{Q_1}$$

Setzt man diese gleich α^2, so ist

$$Q = z - \alpha^2.\,\frac{z^3}{1.2.3} + \alpha_4.\,\frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

wo der Werth von α sich bestimmt durch die Bedingung, daſs für $z = \frac{1}{2}$ $Q = 1$ werde.

Zu eben diesem Resultat wäre man auch gelangt, wenn man in der anfänglichen Gleichung $1 - fz^2 = Fz$ für Fz die erforderliche quadratische Funktion φz^2 gesetzt hätte, indem daraus die Gleichung hervorgegangen wäre

$$fz^2 + \varphi z^2 = 1,$$

deren Auflösung hier hätte angewendet werden können, aber schon oben (§. 11.) gegeben ist.

Sucht man die Funktion Q von z, welche mit z gleich jeder ganzen Zahl ζ und $z = 0$ Null wird, so hat dieselbe auſser z die Faktoren

$1 - \frac{z}{\zeta}$, $1 + \frac{z}{\zeta}$, und es ist, wenn $\frac{Q}{z}$ mit $z = 0$ gleich Eins werden, und bloſs das Produkt jener Faktoren seyn soll,

$$Q = z(1 - z^2)\left(1 - \frac{z^2}{4}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9}\right) \ldots = \frac{z.\ 1 - z.\ 1 + z.\ 2 - z.\ 2 + z \ldots}{1.\quad 1.\quad 2.\quad 2 \ldots}$$

und aus der zweiten Form ist klar, daſs wenn man statt z setzt $z + \zeta$, wo ζ eine ganze Zahl, im Zähler alle dieselben Faktoren wieder erscheinen, nur in einer von der gesetzten verschiedenen Folge. Daraus erhellt, daſs $Q_{\zeta+z} = \pm Q_z$, nachdem ζ gerade oder ungerade, weil in jenem Falle zwei Faktoren negativ werden, in diesem nur einer. Nun hat man für Q, als Reihe nach Potenzen von z, die oben angenommene Form und eben dieselbe bestimmende Bedingung für die Koefficienten. Das so eben auseinandergesetzte dient also in eben der Form für die Bestimmung der Entwickelung des Produkts der unendlichen Menge Faktoren. Da man aber aus den Eigenschaften des Resultats, so wie sie oben (§. 11.) aus den ähnlichen Reihen abgeleitet sind, sich versichern kann, daſs sie wirklich nicht anders als für ζ eine ganze Zahl Null und niemals unendlich werden können, so ist dieselbe dem gesuchten Produkt wirklich gleich. Ohne diese Betrachtung wäre man nicht überzeugt, ob nicht die gefundene Reihe eine Funktion von Q wäre, der Form $Q + AQ^3 + BQ^5 + \ldots$, welche allerdings auch die Eigenschaft hat, mit $z = \zeta$ Null zu werden, aber überdem, da auch $0 = 1 + AQ^2 + BQ^4 + \ldots$ gesetzt werden darf, für z andere Werthe als reelle ganze Zahlen, dieses also auch jenes, Null wird.

Man hätte auch fx unmittelbar aus der Bedingung bestimmen können, daſs, da diese Funktion für $z = 2\zeta + \frac{1}{2}$ Null werde, sie das Produkt aller Faktoren der Form $1 - \frac{4z^2}{(4\zeta + 1)^2}$ enthalten müsse, und dieses Produkt auf die gewiesene Weise suchen, wobei sich finden würde, daſs als Gleichung, für ihre Maxima und Minima gleich ± 1 gesetzt, $Q = 0$ entsteht, also fz wirklich sich bloſs als das Produkt jener Faktoren bewährt.

Es ist also das gesuchte π_z, denn dies ist die Funktion fz, für z jede Zahl gefunden, mithin die Natur der Gröſsen p_n, q_n, bloſs aus der Differenzgleichung zwischen p_{m+2}, p_{m+1}, p_m und der ihr ähnlichen in q abgeleitet. Man sieht auch, daſs p_n mit π_n als Funktion einerlei Natur, nur p_1, nicht wie $\pi_1 = -1$, sondern einen willkührlichen Werth zwischen +

und -1 haben kann. Mehr ins Einzelne zu gehen und manches nur kurz berührte bündig auseinander zu setzen, dürfte nur in einem ausführlichen Werke, wo Behandlung dieses Gegenstandes ihre Stelle fände, erforderlich seyn.

§. 16.

Es wird aber aus dem bisherigen hinlänglich hervorgehen, daſs, wenn man bloſs die Kenntniſs der Natur der Gröſsen p_n beabsichtigt, gleich anfänglich ein anderer Gesichtspunkt als bisher gewählt werden könne, indem man unmittelbar die Gleichung gebrauchen kann

$$p_n = (p + q\,\pi_{\frac{1}{2}})^n$$

wenn man in der Entwickelung des zweiten Theils die Potenzexponenten nur an p und p, in $\pi_{\frac{1}{2}}$ hingegen als Zeigezahlen von $\pi_{\frac{1}{2}}$, also statt $(\pi_{\frac{1}{2}})^m$ $\pi_{m:2}$ setzt, unter $\pi_{m:2}$ aber die Funktion versteht, welche, nachdem m doppelt gerade, einfach gerade oder ungerade, $+1$, -1 und Null wird. Man kann in dieser Gleichung stets p und q der Bequemlickeit wegen so annehmen, daſs $p^2 + q^2 = 1$, weil, wenn es nicht der Fall wäre, sie doch sich dahin zurückbringen lieſse, indem man $\sqrt{p^2 + q^2}$ als Faktor zu Hülfe nähme. In jenem Falle übersieht man sogleich, daſs p_n, positiv oder negativ genommen. stets kleiner als 1, oder vielmehr nicht gröſser als 1 wird, da man die Werthe $+1$ und -1 als Maxima und Minima der Funktion π_m betrachten kann. Uebrigens kann man mit dieser Formel ganz elementarisch verfahren, so wie es die ersteren Artikel dieser Abhandlung nachweisen, wo man durchgängig unter z^n, π_n, so lange das $z^{\frac{1}{2}}$ als eine unbestimmte Gröſse angesehen worden, oder π_μ, $\pi_{\frac{1}{2}}$ statt z^μ, $z^{\frac{1}{2}}$ setzen darf. Die dort vor der Einführung des Zeichens $\sqrt{-1}$ gefolgerten Sätze gelten also auch hier, wo nach der Entwickelung $\pi_{\frac{1}{2}}$ Null gesetzt wird, und bedürfen keiner abermaligen Wiederholung. Der Gebrauch von π_m ist derselbe, wie der von z^m und $\pi_{m+i} = \pi_m\,\pi_i$, so wie $z^{m+i} = z^m . z^i$, aber diese Trennung gilt nur für m eine ganze Zahl, wo dann $\pi_{m+i} = \pm\,\pi_i$, nachdem m gerade oder ungerade, da allgemein $\pi_{m+i} = \pi_m\,\pi_i + \pi_{m-\frac{1}{2}}\,\pi_{i+\frac{1}{2}}$ ist.

Die bisher meistens mit p, p_n, q, q_n angedeuteten Gröſsen und Funktionen sollen nun durch p_x, p_{nx}, q_x, q_{nx} näher bezeichnet werden. Die vorige Gleichung wird man aber zweckmäſsiger auch so ausdrücken können:

p_{nx}.

$$p_{nx} \cdot \pi_0 + q_{nx} \pi_{\frac{1}{2}} (p_x \cdot \pi_0 + q_x \cdot \pi_{\frac{1}{2}})^n$$

Denn der andere Theil dieser Gleichung wird nach der geforderten Behandlung der Exponenten rücksichtlich auf π sich entwickeln in

$$p_x^n \pi_{0n} + n p_x^{n-1} q_x \pi_{0(n-1)+\frac{1}{2}} + \frac{n.\ n-1}{1.\ 2} p_x^{n-2} q_x^2 \pi_{0(n-2)+\frac{2}{2}} + \ldots$$

$$= p_x^n \pi_0 + n p_x^{n-1} q_x \pi_{\frac{1}{2}} - \frac{n.\ n-1}{1.\ 2} p_x^{n-2} q_x^2 \pi_0 - \ldots$$

indem man π, in so ferne es ganze Zeigezahlen an sich hat, in die Zahlen $+1$ und -1 auflöset. Diese letztere Reihe besteht also aus den beiden in π_0 und $\pi_{\frac{1}{2}}$ multiplicirten Theilen, welche die erste Form der Gleichung ausdrückt. Der erste Theil geht aber nach Substitution der Werthe von $\pi_0 = 1$, $\pi_{\frac{1}{2}} = 0$ allein in p_{nx} über, in welcher Gestalt derselbe auch als die Entwickelung vom andern angesehen, also gesetzt werden kann

$$p_{nx} = (p_x \cdot \pi_0 + q_x \pi_{\frac{1}{2}})^n$$

Aber man hat noch allgemeiner, für m und n jede Zahl,

$$(p_x \pi_m \pm q_x \pi_{m+\frac{1}{2}})^n = p_{nx} \pi_{nm} \pm q_{nx} \pi_{nm+\frac{1}{2}}$$

Denn in der Entwickelung des ersten Theils müssen auch die Zeigezahlen der π, in so ferne sie als Produkte neben einander kommen, analog, so wie es statt ihrer Potenzen geschieht, vereiniget werden, so dafs dieselbe seyn wird

$$p_x^n \pi_{mn} + n p_x^{n-1} q_x \cdot \pi_{m(n-1)+m+\frac{1}{2}} + \frac{n.\ n-1}{1.\ 2} p_x^{n-2} q_x^2 \cdot \pi_{m(n-2)+2(m+\frac{1}{2})} + \ldots$$

$$= p_x^n \pi_{nm} + n p_x^{n-1} q_x \pi_{mn+\frac{1}{2}} + \frac{n.\ n-1}{1.\ 2} p_x^{n-2} q_x^2 \cdot \pi_{mn+1} + \ldots$$

worin, wenn die entstehenden ganzen Zeigezahlen an π weggelassen werden, und dafür + oder -1 gehörig substituirt wird, nur noch π_{mn} und $\pi_{mn+\frac{1}{2}}$ als Faktoren vorkommen an den Gliedern, welche zusammen offenbar p_{nx} und q_{nx} ausmachen.

Die fernere Auflösung von π_{nm}, $\pi_{nm+\frac{1}{2}}$ hat im allgemeinen nicht statt, da es nur, in so ferne n m ganze Zahlen enthält, geschehen kann. Da aber π_m eine ähnliche Funktion von m, oder π blofs als Zahl betrachtet, eben dieselbe von $m\pi$ als p_x von x, so dafs $\pi_m = p_{m\pi}$, so ist der andere Theil der Gleichung gleich

$$p_{nx} p_{nm\pi} + q_{nx} p_{(nm+\frac{1}{2})\pi} = p_{nx+nm\pi}$$

weil da $p_{\frac{1}{2}\pi} = \pi_{\frac{1}{2}} = 0$, also $q_{\frac{1}{2}\pi} = 1$, also

$$p_{(nm+\frac{1}{2})\pi} = p_{nm\pi}\, p_{\frac{1}{2}\pi} - q_{nm\pi}\, q_{\frac{1}{2}\pi} = - q_{nm\pi}.$$

Daher entsteht die Gleichung

$$(p_x\, \pi_m \pm q_x\, \pi_{m+\frac{1}{2}})^n = p_{nx \pm nm\pi} = p_{(x \pm m\pi)n}$$

Der erste Theil geht, ähnlich dem andern, über in $p_{x+m\pi)n}$, so dafs seyn wird

$$(p_{x+m\pi})^n = p_{(x+m\pi)n}$$

welche nicht sonderbar erscheinen wird, wenn man bedenkt, dafs der Exponent doch keine wahre Potenzerhebung bewirken soll; so ist auch

$$(q_{x+m\pi+\frac{\pi}{2}})^n = q_{(x+m\pi)n+\frac{\pi}{2}}$$

denn diese Gleichung ist mit der vorigen einerlei, da sie aus gleichen Gliedern besteht.

In dieser, so wie in der allgemeinen Formel, ist zu beachten, dafs x kleiner als π sey, aus leicht zu findender Ursache, aber dafür geben sie auch bestimmt sowohl die Theilung oder Vervielfachung der Winkel x, $x + \pi$, $x + 2\pi$ u. s. w., nachdem man m nimmt.

§. 17.

Da in der allgemeinen Formel m eine unbestimmte Zahl, und in der Entwickelung die π_μ sich insgesammt, wenn man die ganzen in μ enthalnen Zeigezahlen wegbringt, auf die beiden π_{nm} und $\pi_{nm+\frac{1}{2}}$ beschränken, der Faktor von jenen aber p_{nx} von diesem q_{nx}, so kann man die Entwickelung dieser Gröfsen getrennt erkennen, und man hat also auch aus

$$p_{nx}.\, \pi_{nm} \pm q_{nx}\, \pi_{nm+\frac{1}{2}} = (p_x\, \pi_m \pm q_x\, \pi_{m+\frac{1}{2}})^n$$

als zwei Gleichungen genommen, nachdem man sie addirt oder subtrahirt, die den gewöhnlichen Formeln ähnlichen

$$p_{nx} = \frac{(p_x\, \pi_m + q_x\, \pi_{m+\frac{1}{2}})^n + (p_x\, \pi_m - q_x\, \pi_{m+\frac{1}{2}})^n}{2.\ \pi_{nm}};$$

$$q_{nx} = \frac{(p_x\, \pi_m + q_x\, \pi_{m+\frac{1}{2}})^n - (p_x\, \pi_m - q_x\, \pi_{m+\frac{1}{2}})^n}{2.\ \pi_{nm+\frac{1}{2}}}.$$

Diese müssen, da m in den ersten Gliedern nicht vorkommt und an sich willkührlich von derselben unabhängig seyn, also werden nach den Entwickelungen die unbestimmten π Funktionen wegfallen.

Es ist auch die Produktform

$$(p_x \pi_m + q_x \pi_{m+\frac{1}{2}})\ (p_x \pi_m - q_x \pi_{m+\frac{1}{2}}) = p_x^2 \pi_{2m} - q_x^2 \pi_{2m+1},$$

wenn man nämlich wirklich multiplizirt, aber in Beziehung auf π wie zuvor verfährt; also ist sie gleich

$$(p_x^2 + q_x^2)\ \pi_{2m} = \pi_{2m}$$

Daher stets gleich $+ 1$, wenn m eine ganze Zahl oder Null ist. Man sieht auch, daſs den einzelnen Faktoren die Gestalt $\pi_m (p_x \pm q_x \pi_{\frac{1}{2}})$ gegeben werden kann, woferne man sie nicht als Endresultat betrachtet, da überhaupt, so lange der Calcul mit diesen Gröſsen fortgeführt wird, stets nach Willkühr $\pi_m \pi_\mu$ statt $\pi_{m+\mu}$ gesetzt werden darf, m, μ seyen ganze positive oder negative Zahlen oder Brüche; nur im Resultate, wenn es darum zu thun ist, ihnen ihre wahren Werthe zu geben, müssen alle, die als Faktoren zu einander stehen, unter einer Zeigezahl zusammengezogen werden, wo man dann beliebig, um alle Gröſsen derselben Art auch auf einerlei Weise zu bezeichnen, $p_{\lambda\pi}$ statt π_λ setzen kann. Auch lassen sich alle Gröſsen aus p in q Funktionen und umgekehrt verwandeln, wenn man bemerkt, daſs $q_x = p_{x-\frac{\pi}{2}}$, $p_x = q_{x+\frac{\pi}{2}}$, welche aus der allgemeinen Formel für p_{x+y}, q_{x+y} unmittelbar folgen, da $p_\pi = -1$, also $q_\pi = 0$, $p_{\frac{\pi}{2}} = 0$; $q_{\frac{\pi}{2}} = 1$. Diesem gemäſs hat man auch statt der gewöhnlichen Ausdrücke für p_{x+y}, q_{x+y} folgende:

$$p_{x+y} = p_x p_y + p_{x+\frac{\pi}{2}} p_{y-\frac{\pi}{2}} = p_x p_y + p_{x-\frac{\pi}{2}} p_{y+\frac{\pi}{2}},$$

$$q_{x+y} = p_{x+y-\frac{\pi}{2}} = p_{x-\frac{\pi}{2}} p_y + p_x p_{y-\frac{\pi}{2}}$$

wo der letztere aus p_{x+y} entsteht, indem man in jedem Gliede x oder y um $\frac{\pi}{2}$ vermindert. Man hat diesen also auch unmittelbar in etwas veränderter Gestalt, indem man $x - \frac{\pi}{2}$ statt x oder $y - \frac{\pi}{2}$ statt y im ersteren setzt.

Nichts hindert in diesen Algorithmus der Funktionen p, q, die entstehenden Gleichungen durchgängig mit π_λ zu multipliziren oder zu dividiren, wo letzteres einerlei ist, mit einer Multiplikation durch $\pi_{-\lambda}$. Dies beruht darauf, daſs die Formeln im allgemeinen ein unbestimmtes π_m enthalten, wo m willkührlich, welches daher auch, wo es nicht erscheint oder

$m = o$ ist, doch als in denselben enthalten gedacht werden kann. Mithin kann man statt m sich immer diejenige Zahl substituirt gedenken, welche eine Multiplikation mit π_λ oder $\pi_{-\lambda}$ bewirken, das ist alle Zeigezahlen an π um λ vergröſsern oder vermindern würde. Allein da in jeder Gleichung, welche man erhält, die π_λ wahre Gröſsen nach ihrem eigenthümlichen Werthe sind, so hindert nichts, sie als solche zu behandeln, und den Algorithmus zu verlassen.

Die allgemeine Formel

$$p_{n(x+m\pi)} = (p_x \pi_m + q_x \pi_{m+\frac{1}{2}})^n$$

ist nur noch in einer Ordnung entwickelt, in der entgegengesetzten wird sie, nach Wegbringung der ganzen bestimmten Zeigezahlen an π,

$$\left.\begin{array}{l} (q_x \pi_{m+\frac{1}{2}} + p_x \pi_m)^n = \pi_{(m+\frac{1}{2})n} \left(q_x^n - \frac{n.n-1}{1.\ 2} q_x^{n-2} p_x^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4} q_x^{n-4} p_x^4 - \ldots\right) \\ \qquad + \pi_{(m+\frac{1}{2})n-\frac{1}{2}} \left(n q_x^{n-1} p_x - \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3} q_x^{n-3} p_x^3 + \frac{n.\ldots(n-4)}{1\ldots 5} q_x^{n-5} p^5 - \ldots\right) \end{array}\right\}$$

Die Faktoren von $\pi_{(m+\frac{1}{2})n}$ und $\pi_{(m+\frac{1}{2})n-\frac{1}{2}}$ sind eben die Funktionen von q_x und p_x, als in der ersten Entwickelung die Faktoren von π_{nm} und $\pi_{nm-\frac{1}{2}}$ nämlich p_{nx} und q_{nx} von p_x und q_x waren. Da aber $q_x = p_{x-\frac{\pi}{2}}$, $p_x = q_{x-\frac{\pi}{2}} = - q_{x-\frac{\pi}{2}}$: so sind jene Faktoren eben die Funktionen von $p_{x-\frac{\pi}{2}}$ und $-q_{x-\frac{\pi}{2}}$ als die letzteren, nämlich p_{nx} und q_{nx}, von p_x und q_x. Da aber in dem ersten Faktor p_x, also auch $-q_{x-\frac{\pi}{2}}$ nur in geraden Potenzen, in dem zweiten nur in ungeraden vorkommt, so ändert das negative Vorzeichen bei $q_{x-\frac{\pi}{2}}$ den ersten nicht, und macht den Werth des zweiten bloſs negativ, so daſs man hat:

$$(q_x \pi_{m+\frac{1}{2}} + p_x \pi_m)^n = \pi_{(m+\frac{1}{2})n} \cdot p_{(x-\frac{\pi}{2})n} - \pi_{(m+\frac{1}{2})n-\frac{1}{2}} \cdot q_{(x-\frac{\pi}{2}n)}$$

welches offenbar gleich $p_{(x+m\pi)n}$, also mit dem Resultat der ersten Entwickelung identisch ist. Da man dieses aber schon ohne weiteres anzunehmen berechtiget ist, so lassen sich auch bloſs aus der Form der andern Entwickelung

$$p_{n(x+m\pi)} = \pi_{n(m+\frac{1}{2})} \cdot P + \pi_{n(m+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} \cdot Q$$

die Faktoren P und Q finden, indem man das erste Glied der Gleichung in die Form $p_{n(x-\frac{\pi}{2})+(m+\frac{1}{2})n\pi}$ bringt, welche schon sichtlich, entwickelt gedacht, die angegebenen Werthe von P und Q darbietet.

Wird das negative Zeichen in der Verbindung gebraucht, so hat man

$$(q_x \pi_{m+\frac{1}{2}} - p_x \pi_m)^n = \pi_{(m+\frac{1}{2})n}\, p_{(x-\frac{\pi}{2})n} + \pi_{(m+\frac{1}{2})n-\frac{1}{2}}\, q_{(x-\frac{\pi}{2})n}$$

daher mit der vorigen, durch Addition und Subtraktion vereiniget, die den ersten ähnliche Formeln

$$p_{(x-\frac{\pi}{2})n} = \frac{(q_x \pi_{m+\frac{1}{2}} + p_x \pi_m)^n + (q_x \pi_{m+\frac{1}{2}} - p_x \pi_m)^n}{2\,\pi_{(m+\frac{1}{2})n}}$$

$$q_{(x-\frac{\pi}{2})n} = \frac{(q_x \pi_{m+\frac{1}{2}} - p_x \pi_m)^n - (q_x \pi_{m+\frac{1}{2}} + p_x \pi_m)^n}{2\,\pi_{(m+\frac{1}{2})n-\frac{1}{2}}}$$

§. 18.

Es sind also vier Reihen, welche aus der Entwickelung von $(p_x \pi_m + q_x \pi_{m+\frac{1}{2}})^n$ entspringen, die für p_{nx}, q_{nx} aus der Entwickelung in der ersten Ordnung, nach abnehmenden Potenzen von p_x und steigenden Potenzen von q_x, und die für $p_{(x-\frac{\pi}{2})n}$, $-q_{(x-\frac{\pi}{2})n}$ nach der andern Entwikkelung hingegen in steigenden Potenzen von p_x und abnehmenden von q_x. Jede dieser Funktionen läſst sich demnach noch in einer doppelten Form nach Potenzen der einen oder der andern Gröſse allein fortschreitend darstellen, die oben gegeben worden, indessen können die Koefficienten der letzteren Formen in einer anderen von der gefundenen verschiedenen Gestalt erscheinen, die sich sehr natürlich darbietet. Aus den Reihen für $p_{(x-\frac{\pi}{2})n}$ und $q_{(x-\frac{\pi}{2})n}$ können dann umgekehrt wieder p_{nx} und q_{nx} erhalten werden, indem man hat

$$p_{nx} = p_{(x-\frac{\pi}{2})n+n\frac{\pi}{2}}, \quad q_{nx} = q_{(x-\frac{\pi}{2})n+n\frac{\pi}{2}}$$

wo dann also p_{nx}, q_{nx} aus $p_{(x-\frac{\pi}{2})n}$, $q_{(x-\frac{\pi}{2})n}$, $\pi_{\frac{n}{2}}$, $\pi_{\frac{n+1}{2}}$ sich zusammensetzen.

Wenn man die binomischen Potenzkoefficienten mit n, n_2, n_3 etc. bezeichnet, so ist

$$p_{nx} = p_x^n - n_2 . p_x^{n-2}\, q^2 + n_4\, p_x^{n-4}\, q_x^4 - n_6\, p_x^{n-6}\, q_x^6 + \ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

und entwickelt man die Potenzen von q_n^2, indem man für q_x^{2n} setzt $1 - p_x^2)^n$, so entsteht

$$\left.\begin{array}{l} p_{nx} = p_x^n - n_2\, p_x^{n-2} + n_4\, p_x^{n-4} - n_6\, p_x^{n-6} + \ldots \\ \quad + n_2\, p_x^n - 2n_4\, p_x^{n-2} + 3n_6\, p_x^{n-4} - 4n_8\, p_x^{n-6} + \ldots \\ \quad + n_4\, p_x^n - \frac{3.2}{1.2} n_6\, p_x^{n-2} + \frac{4.3}{1.2} n_8\, p_x^{n-4} - \frac{5.4}{1.2} n_{10}\, p_x^{n-6} + \ldots \\ \quad + n_6\, p_x^n - \frac{4.3.2}{1.2.3} n_8\, p_x^{n-2} + \frac{5.4.3}{1.2.3} n_{10}\, p_x^{n-4} - \frac{6.5.4}{1.2.3} n_{12}\, p_x^{n-6} - \ldots \\ \quad \text{u. s. w.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots \text{(III)}$$

$$q_{nx} = n\, p_x^{n-1}\, q^x - n_3\, p_x^{n-3}\, q_x^3 + n_5\, p_x^{n-5}\, q_x^5 - n_7\, p_x^{n-7}\, q_x^7 + \ldots \quad \text{(II)}$$

Daher:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{q_n}{q} = n\, p_x^{n-1} - n_3\, p_x^{n-3} + n_5\, p_x^{n-5} - \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + n_3\, p_x^{n-1} - 2n_5\, p_x^{n-3} + 3n_7\, p_x^{n-5} - \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + n_5\, p_x^{n-1} - \frac{3.2}{1.2} n_7\, p_x^{n-3} + \frac{4.3}{1.2} n_9\, p_x^{n-5} - \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \text{u. s. w.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots \text{(IV)}$$

Diese Entwickelungen sind zwar nicht von bequemer Anwendung, allein da vorher die Ausdrücke für die Koefficienten der Potenzen von p gefunden worden, so ist es nicht unmerkwürdig, dieselben zu kennen als die Summen von diesen Reihen, welche jedoch alle abbrechen, wenn n eine ganze positive Zahl.

Entwickelt man hingegen in (I) und (II) die Potenzen von p in Potenzen von q, so wird allgemein

$$\left.\begin{array}{rl}
p_{nx} = 1 & - \frac{n}{2} q_x^2 + \left(\frac{n}{2}\right)_2 q_x^4 - \left(\frac{n}{2}\right)_3 q_x^6 + \left(\frac{n}{2}\right)_4 q_x^8 - \ldots \\
 & - n_2 q_x^2 + n_2 \left(\frac{n-2}{2}\right) q_x^4 - n_2 \left(\frac{n-2}{2}\right)_2 q_x^6 + n_2 \left(\frac{n-2}{2}\right)_3 q_x^8 - \ldots \\
 & + n_4 q_x^4 - n_4 \left(\frac{n-4}{2}\right) q_x^6 + n_4 \left(\frac{n-4}{2}\right)_2 q_x^8 - \ldots \\
 & - n_6 q_x^6 + n_6 \left(\frac{n-6}{2}\right) q_x^8 - \ldots \\
 & + n_8 q_x^8 - \ldots \\
 & - \ldots
\end{array}\right\} \quad (V)$$

und addirt man die Koefficienten

$$p_{nx} = 1 - \frac{n^2}{2} q_x^2 + \frac{n^2 (n^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} q_x^4 - \frac{n^2 (n^2 - 4)(n^2 - 16)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} q_x^6 +$$

Diese Zusammenziehung kann beschwerlich scheinen. Allein da diese letztere Form aus dem vorigen bekannt, so lassen sich doch die Koefficienten in V als eigenthümliche Formen betrachten, deren bemerkungswerthe Identität mit jenen eben durch die Entwickelung erhellt.

Wenn n eine ganze Zahl, so kann man entweder die Entwickelung (V) wie sie ist gebrauchen, und in jedem Falle, wenn n eine gerade positive Zahl, oder wenn n ungerade, aus (I) die Form von $p_n : p$ nehmen, welche in geratenzen von p fortschreiten, also ebenfalls für $p_n : p$ in q einen sich endenden Ausdruck geben wird.

Aus (II) erhält man ganz ähnlich allgemein

$$\left.\begin{array}{rl}
q_n = n q_x & - n. \left(\frac{n-1}{2}\right) q_x^3 + n. \left(\frac{n-1}{2}\right)_2 q_x^5 - n. \left(\frac{n-1}{2}\right)_3 q_x^7 + \ldots \\
 & - n_3 q_x^3 + n_3 \left(\frac{n-3}{2}\right) q_x^5 - n_3 \left(\frac{n-3}{2}\right)_2 q_x^7 + \ldots \\
 & + n_5 q_x^5 - n_5 \left(\frac{n-5}{2}\right) q_x^7 + \ldots \\
 & - n_7 q_x^7 + \ldots \\
 & + \ldots
\end{array}\right\} . (VI)$$

welches der Form

$$q_{nx} = n\,q_x - \frac{n(n^2-1)}{1.\,2.\,3}\,q_x^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-q)}{1.\;2.\;3.\;\;4.\;5}\,q_x^5 -$$

entspricht.

Ist $n-1$ eine gerade positive Zahl, so endet die Reihe; wenn hingegen $n-1$ eine ungerade, so wird durch Division mit p, $q_{nx}:p_x$ nach geraden positiven Potenzen fortschreiten und in q eines endlichen Ausdrucks fähig.

Nimmt man nun die Grundreihen für p_{nx}, q_{nx}, indem man die Gröſsen p_x, q_x gegen einander verwechselt, so entsteht zuerst

$$p_{-n(x-\frac{\pi}{2})} = q_x^n - n_2\,q_x^{n-2}\,p_x^2 + n_4\,q_x^{n-4}\,p_x^4 - \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VII)}$$

der Werth der Reihe, vorausgesetzt, daſs man denselben noch nicht kennt, wird leicht gefunden, wenn man die q Funktionen in p ausdrückt, und umgekehrt, also für p_x setzt $-q_{x-\frac{\pi}{2}}$ oder $q_{-(x-\frac{\pi}{2})}$, für q_x aber $p_{x-\frac{\pi}{2}}$ oder $p_{-(x-\frac{\pi}{2})}$, wodurch die Reihe eben dieselbe wird in $p_{-(x-\frac{\pi}{2})}$ und $q_{-(x-\frac{\pi}{2})}$, als die p_{nx} in p_x und q_x, sie ist also gleich $p_{-n(x-\frac{\pi}{2})}$, welches gleich $p_{+n(x-\frac{\pi}{2})}$, aber es ist angemessener, jene Form beizubehalten, wegen der andern Reihe

$$q_{-n(x-\frac{\pi}{2})} = n\,q_x^{n-1}\,p_x - n_3\,q_x^{n-3}\,p_x^3 + n_5\,q_x^{n-5}\,p_x^5 - \ldots\ldots \text{(VIII)}$$

von welcher es sich auch unmittelbar ausweiset, daſs sie mit denselben Substitutionen wie zuvor, nämlich von $p_{-(x-\frac{\pi}{2})}$, $q_{-(x-\frac{\pi}{2})}$, statt q_x, p_x eben die Funktion jener wird, als q_{nx} von p_x und q_x, also den Werth $q_{-n(x-\frac{\pi}{2})}$ hat.

Aus den beiden Gleichungen (VII) (VIII), entstehen offenbar für p_{-n} zwei, (IX) und (X), nach abnehmenden Potenzen von q_x, so wie nach p_x in (III) und (IV) oder deren Stellvertreter (§. 12.). Ferner durch Substitution von $1-p_x^2$ statt q_x^2, zwei, (XI) und (XII), in p wie (V) und (VI) in q, wobei zu bemerken, daſs hier für n ganze positive Zahl nur die Reihe von $(p_{-n(x-\frac{\pi}{2})}):q_x$ durch p_x, so wie $p_{nx}:p_x$ durch q_x für n ungerade und $(q_{-n(x-\frac{\pi}{2})}):q_x$ durch p_x,

so

so wie $q_{nx}:p$, durch q_x ausgedrückt, für n gerade sich enden können, also die Zahl dieser vier Gleichungen doppelt genommen werden kann, wenn man diese letzte Formen mit aufnimmt, und wie es auch geschehen kann, als allgemeine Formeln ausdrückt. Von welchen sechszehn Formeln die eine Hälfte wechselseitig sich aus der andern ergiebt, wenn man in den Reihen bloſs q_x und p_x verwechselt, im ersten Gliede aber, welches die durch sie bestimmte Funktion bezeichnet, $-(x-\frac{\pi}{2})$ statt x, an q oder p, setzt. In der genommenen Ansicht und Bezeichnung hat man den Vortheil, der lästigen Unterscheidung der Fälle von n gerade oder ungerade überhoben zu seyn, die Formeln bestimmen selbst das ihnen zugehörige Zeichen überhaupt, und in den Fällen wo darauf zu sehen ist.

Zu den aufgezählten Formen kommen noch die viere hinzu, welche aus zwei Reihen zusammengesetzt sind, und entstehen, wenn man p_{nx}, q_{nx} durch $p_{-n(x-\frac{\pi}{2})}$, $q_{-n(x-\frac{\pi}{2})}$, oder umgekehrt diese durch jene ausdrücken will, wo dann in beiden Fällen die Gröſsen $\pi_{\frac{n}{2}}$, $\pi_{\frac{(n-1)}{2}}$ als Faktoren der beiden Reihen erscheinen. Endlich kann man die hier als ebenfalls zusammengesetzte sich anschlieſsenden Ausdrücke für $p_{nx+nm\pi}$ und den ähnlichen der andern drei nicht entbehren, in den Fällen, wo man x gröſser als π ursprünglich anzunehmen hätte.

§. 19.

Umgekehrt sind noch die Potenzen p_x^n, q_x^n von p_x, p_x durch p_{mx} q_{mx} auszudrücken. Dies könnte geschehen durch gewöhnliche Methoden der Umkehrung der Reihen, angewendet auf die ersten Gleichungen, welche p_{nx}, q_{nx} ausdrücken. Allein es wird der Zweck durch Hülfe des eingeführten Algorithmus erreicht.

Wenn man für die identische Gleichung

$$2\,p_x\,\pi_m = (p_x\,\pi_m + q_x\,\pi_{m+\frac{1}{2}}) + (p_x\,\pi_m - q_x\,\pi_{m+\frac{1}{2}})$$

beiderseits so verfährt, als wenn man sie auf die nte Potenz erhebt, aber die zu π kommenden Potenexponenten wie bisher unten an π bringt, so wird das allgemeine Glied der Entwickelung seyn

$$[2^n p_x^n \pi_{nm}]_\mu = \ldots\ldots$$

$$\frac{n.n-1\ldots\ldots(n-(\mu-1))}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ \mu}(p_x\pi_m + q_x\pi_{m+\frac{1}{2}})^{n-2\mu}((p_x\pi_m + q_x\pi_{m+\frac{1}{2}})(p_x\pi_m - q_x\pi_{m+\frac{1}{2}}))^\mu$$

Es ist aber das Produkt der letzten beiden Faktoren gleich π_{2m}, also die μte Potenz des Produkts $(\pi_{2m})^\mu$, im Sinne wie es hier genommen werden muſs, gleich $\pi_{2\mu m}$; oder, wenn man in umgekehrter Ordnung verfährt, so hat man gedachtes Produkt, bestehend aus den μten Potenzen von dessen beiden Faktoren. Diese aber geben nach der allgemeinen Formel

$$(p_{\mu x}\pi_{\mu m} + q_{\mu x}\pi_{\mu m+\frac{1}{2}})(p_{\mu x}\pi_{\mu m} - q_{\mu x}\pi_{\mu m+\frac{1}{2}}) = \pi_{2\mu m}$$

Es wird also das allgemeine Glied

$$[2^n p_x^n \pi_{nm}]_\mu = \frac{n.n-1\ldots\ldots(n-(\mu-1))}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ \mu}(p_{(n-2\mu)x}\pi_{(n-2\mu)m} + q_{(n-2\mu)x}\pi_{(n-2\mu)m+\frac{1}{2}})\pi_{2\mu m}$$

$$= \frac{n.n-1\ldots\ldots(n-(\mu-1))}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ \mu}(p_{(n-2\mu)x}\pi_{nm} + q_{(n-2\mu)x}\pi_{nm+\frac{1}{2}}) \ldots\ldots (A)$$

Da aber der erste Theil der Gleichung durch die nfache Erhebung überhaupt wird $2^n p_x^n . \pi_{nm}$, so kann man alle Zeigezahlen an π um nm vermindern, und erhält dann

$$[2^n p_x^n]_\mu = \frac{n.n-1\ldots\ldots(n-(\mu-1))}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ \mu}(p_{(n-2\mu)x}\pi_0 + q_{(n-2\mu)x}\pi_{\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{n.n-1\ldots(n-(\mu-1))}{1.\ 2\ \ldots\ \mu}p_{(n-2\mu)x}$$

zu welchem Resultat man auch gelangt, wenn man, da m willkührlich dasselbe so bestimmt gedenkt, daſs nm eine ganze Zahl, wo dann die Faktoren π_{nm} in beiden Theilen der Gleichheit ± 1, und der Faktor $\pi_{nm+\frac{1}{2}}$ von $q_{(n-2\mu)x}$ gleich $\pm\pi_{\frac{1}{2}} = 0$ wird.

Man kann auch die Gleichung (A) auf beiden Seiten wirklich mit π_{nm} dividiren, und erhält

$$[2^n p_x^n]_\mu = \frac{n.n-1\ldots(n-(\mu-1))}{1.\ 2\ \ldots\ \mu}p_{(n-2\mu)x} + \left(\frac{n.n-1\ldots(n-(\mu-1))}{1.\ 2\ \ldots\ \mu}q_{(n-2\mu)x}\right)\frac{\pi_{nm+\frac{1}{2}}}{\pi_{nm}}$$

Da aber der erste Theil der Gleichung dem ersten Gliede des andern allein gleich ist, so folgt, daſs, da $\pi_{nm+\frac{1}{2}} : \pi_{nm}$ jede Gröſse seyn kann, die Entwickelung des letzten Gliedes

$$q_{nx} + n\,q_{(n-2)x} + \frac{n.\,n-1}{1.\;\;2}\,q_{(n-4)x} + \ldots. = 0.$$

Da ähnlich dem vorigen

$$(2\,q_x\,\pi_{m+\frac{1}{2}})^n = ((q_x.\,\pi_{m+\frac{1}{2}} + p_x\,\pi_m) + (q_x.\,\pi_{m+\frac{1}{2}} - p_x\,\pi_m))^n$$

so wird, wenn man bemerkt, daſs das Produkt der beiden Glieder, die im andern Theile der Gleichung befindlich sind, gleich $-\pi_{2m}$, das allgemeine Glied, nachdem μ gerade oder ungerade, seyn

$$[2^n\,q_x^n.\,\pi_{(m+\frac{1}{2})n}]_\mu = \pm\frac{n.\,n-1\ldots.(n-(\mu-1))}{1.\;\;2\;.\;.\;.\;\mu}(q_{(n-2\mu)x}\pi_{(n-2\mu)m+\frac{1}{2}} + p_{(n-2\mu)x}\pi_{(n-2\mu)m})\pi_{2\mu m}$$

$$= \pm\frac{n.\,n-1\ldots.(n-(\mu-1))}{1.\;\;2\;.\;.\;.\;.\;\mu}(q_{(n-2\mu)x}\,\pi_{nm+\frac{1}{2}} + p_{(n-2\mu)x}\,\pi_{nm})$$

Daher

$$[2^n\,q_x^n]_\mu = \pm\frac{n.\,n-1\ldots.(n-(\mu-1))}{1.\;\;2\;.\;.\;.\;.\;\mu}(q_{(n-2\mu)x}\,\pi_{\frac{1}{2}(1-n)} + p_{(n-2\mu)x}\,\pi_{-\frac{n}{2}})$$

Die Zeigezahlen an π kann man ohne Störung entgegengesetzt $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n}{2}$ annehmen, und man sieht, daſs nur, wenn n eine ganze Zahl, die Reihe für $2^n\,q_x^n$ nach einer der Gröſsen q oder p fortschreitet, so daſs alle verschiedene Fälle in demselben Ausdrucke vor Augen liegen. Allgemein aber wird derselbe

$$[2^n\,q_x^n]_\mu = \pm\frac{n.\,n-1\ldots.(n-(\mu-1))}{1.\;\;2\;.\;.\;.\;.\;\mu}\,p_{(n-2\mu)x-\frac{n}{2}\pi}$$

Es ist aber die Gröſse $(q_x\,\pi_{m+\frac{1}{2}} + p_x\,\pi_m)^{n-2\mu}$ nach der ersten Art entwickelt gedacht worden. Denkt man die Entwickelung in der zweiten Ordnung, welche die Stellung ihrer Theile andeutet, vollführt, so wird sie nach obigem

$$p_{(x-\frac{\pi}{2})(n-2\mu)}\;\pi_{(m+\frac{1}{2})(n-2\mu)} - q_{(x-\frac{\pi}{2})(n-2\mu)}\;\pi_{(m+\frac{1}{2})(n-2\mu)-\frac{1}{2}}$$

Das Produkt der beiden andern zum allgemeinen Gliede gehörigen Theile bleibt wie zuvor

$$q_x\,\pi_{m+\frac{1}{2}} + p_x\,\pi_m)^\mu\;(q_x\,\pi_{m+\frac{1}{2}} - p_x\,\pi_m)^\mu = -\pi_{2\mu m}$$

also das vorige mit $\pi_{2\mu m}$ multiplizirt und dem Zahlkoefficienten beigefügt, so wird die andere Form erhalten

$$[2^n q_x^n \pi_{(m+\frac{1}{2})n}]_\mu = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm \frac{n.n-1\ldots(n-(\mu-1))}{1.\quad 2\ldots\ldots\mu} \left\{ \begin{array}{l} (p_{(x-\frac{\pi}{2})(n-2\mu)}\ \pi_{(m+\frac{1}{2})n-\mu} \\ -\,q_{(x-\frac{\pi}{2})(n-2\mu)}\ \pi_{(m+\frac{1}{2})n-\mu-\frac{1}{2}}) \end{array} \right\} \ldots\ldots \text{(B)}$$

und vermindert man hier beiderseits die Zeigezahlen an π um $(m+\frac{1}{2})n$, oder wenn man dieses einer ganzen Zahl gleich setzt, so entsteht

$$[2^n q_x^n]_\mu = \pm \frac{n.n-1\ldots(n-(\mu-1))}{1.\quad 2\ldots\ldots\mu} (p_{(x-\frac{\pi}{2})(n-2\mu)}\ \pi_{-\mu} - q_{(x-\frac{\pi}{2})(n-2\mu)}\ \pi_{-\mu-\frac{1}{2}}$$

und zieht man den letzten Faktor zusammen, so ist derselbe

$$p_{(x-\frac{\pi}{2})(n-2\mu)-\mu\pi} = p_{(n-2\mu)x-\frac{n}{2}\pi}$$

welcher, an seine Stelle gesetzt, eben dieselbe Formel giebt, welche so eben gefunden worden.

Uebrigens sieht man aus der vorhergehenden Formel, daſs, da μ eine ganze Zahl, das $\pi_{-\mu-\frac{1}{2}}$ stets Null, $\pi_{-\mu}$ also, nachdem μ gerade oder ungerade, $+1$ oder -1 wird, daher denn auch das Vorzeichen stets positiv macht, so daſs

$$[2^n q_x^n =]_\mu \frac{n.n-1\ldots(n-(\mu-1))}{1.\quad 2\ldots\ldots\mu} p_{(x-\frac{\pi}{2})(n-2\mu)}$$

Dieselbe Entwickelungsordnung, welche zuletzt in der Formel (B) $2^n q_x^n \pi_{(m+\frac{1}{2})n}$ gegeben, giebt auch $2^n p_x^n \pi_{mn}$. Denn da

$$(2 p_x \pi_m)^n = ((q_x \pi_{m+\frac{1}{2}} + p_x \pi_m) - (q_x \pi_{m+\frac{1}{2}} - p_x \pi_m))^n$$

so wird im andern Theile von (B) nur das doppelte Vorzeichen wegfallen, also wenn man jetzt die Zeigezahlen an π um mn vermindert, oder mn gleich einer ganzen Zahl nimmt,

$$[2^n p_x^n]_\mu = \frac{n.n-1\ldots(n-(\mu-1))}{1.\quad 2\ldots\ldots\mu} (p_{(x-\frac{\pi}{2})(n-2\mu)}\ \pi_{\frac{n}{2}-\mu} - q_{(x-\frac{\pi}{2})(n-2\mu)}\ \pi_{\frac{n}{2}-\mu-\frac{1}{2}})$$

und den letzten Faktor zusammengezogen, so entsteht die Formel:

$$[2^n p_x^n]_\mu = \pi_\mu \frac{n.n-1\ldots(n-(\mu-1))}{1.\quad 2\ldots\ldots\mu} p_{(n-2\mu)x}$$

welche zuerst vorgekommen ist.

Die beigebrachten Formeln entstehen mit gröſserer Leichtigkeit bloſs aus der Gleichung

$$2 p_x \pi_m = p_{x+m\pi} + p_{x-m\pi}$$

wenn man sich erinnert, dafs, bei gehörigem Gebrauch der Indexzeiger an π,

$$(p_{x\pm m\pi})' = p_{x'+m\pi} \text{ und } (p_{x+m\pi})^{\mu}(p_{x-m\pi})^{\mu} = \pi_{2\mu m} = p_{2\mu m\pi}$$

und die in $m\pi$ multiplicirten Zeigezahlen alle unter demselben p blofs nach ihren Zeichen addirt werden müssen. Denn es wird das allgemeine Glied von

$$(2 p_x \pi_m)^n = (p_{x+m\pi} + p_{x-m\pi})^n$$

$$[2^n p_x^n \pi_{nm}]_{\mu} = \frac{n.\, n-1 \ldots .(n-(\mu-1))}{1. \quad 2 \ldots . \quad \mu}\; p_{x(n-2\mu)+m(n-2\mu)\pi+2\mu m\pi}$$

Der erste Theil hat $\pi_{nm} = p_{nm\pi}$ zum allgemeinen Faktor, durch dessen Wegnahme also entsteht

$$[2^n p_x^n]_{\mu} = \frac{n.\, n-1 \ldots .(n-(\mu-1))}{1. \quad 2 \ldots . \quad \mu}\; p_{x(n-2\mu)}$$

Da nun x willkührlich, so wird, indem man $x - \frac{1}{2}\pi$ statt x setzt, das allgemeine Glied der andern Formel, nämlich von $2^n p^n_{x-\frac{\pi}{2}}$ oder von $2^n q_x^n$ erhalten.

§. 20.

Da

$$1 + p_x = 2 p^2_{\frac{x}{2}}; \quad q_x = 2 p_{\frac{x}{2}} q_{\frac{x}{2}}$$

so wird, wenn man die erste Gleichung mit π_m, die andere mit $\pi_{m+\frac{1}{2}}$ multiplicirt und addirt,

$$\pi_m + p_x \pi_m + q_x \pi_{m+\frac{1}{2}} = 2 p_{\frac{x}{2}} (p_{\frac{x}{2}} \pi_m + q_{\frac{x}{2}} \pi_{m+\frac{1}{2}})$$

aus welcher folgt, wenn man sie zusammenzieht und wie auf die Potenz -1 erhebt,

$$(2 p_{\frac{x}{2}})^{-1} p_{-(\frac{x}{2}+m\pi)} = \frac{\pi_{-m}}{1 + p_{x+m\pi} : \pi_m}$$

welches auf die gehörige Weise, ähnlich dem zuletzt benutzten abgekürzten Verfahren, entwickelt giebt

$$\pi_m \frac{p_{-(\frac{x}{2}+m\pi)}}{2 p_{\frac{x}{2}}} = 1 - \frac{p_{x+m\pi}}{\pi_m} + \frac{p_{2(x+m\pi)}}{\pi_{2m}} - \frac{p_{3(x+m\pi)}}{\pi_{3m}} + \ldots . \text{ (A)}$$

Also

$$\frac{p_{-\frac{x}{2}}}{2\, p_{\frac{x}{2}}} = \tfrac{1}{2} = 1 - p_x + p_{2x} - p_{3x} + \dots$$

Es ist aber auch

$$2\, q^2_{\frac{x}{2}} = 1 - p_x; \quad 2\, q_{\frac{x}{2}}\, p_{\frac{x}{2}} = q_x$$

Daraus erhält man ähnlich wie zuvor

$$2\, q_{\frac{x}{2}} (q_{\frac{x}{2}} \varpi_m - p_{\frac{x}{2}} \varpi_{m+\frac{1}{2}}) = \varpi_m - (p_x \varpi_m + q_x \varpi_{m+\frac{1}{2}})$$

Das erste Glied ist gleich $2\, q_{\frac{x}{2}} \varpi_{-\frac{1}{2}} (q_{\frac{x}{2}} \varpi_{m+\frac{1}{2}} - p_{\frac{x}{2}} \varpi_{m+1})$

und weil $\varpi_{m+1} = - \varpi_m$, so wird die Gleichung

$$2\, q_{\frac{x}{2}} \varpi_{-(\frac{1}{2}+m)}\, p_{\frac{x}{2}+m\varpi} = 1 - \frac{p_{x+m\varpi}}{\varpi_m}$$

wird davon wie die -1te Potenz genommen, so wird

$$\frac{\varpi_{m+\frac{1}{2}}\, p_{-(\frac{x}{2}+m\varpi)}}{2\, q_{\frac{x}{2}}} = 1 + \frac{p_{x+m\varpi}}{\varpi_m} + \frac{p_{2(x+m\varpi)}}{\varpi_{2m}} + \dots \quad \text{(B)}$$

Der Zähler des ersten Gliedes geht aber, wenn man reduzirt, über in

$$\varpi_{m+\frac{1}{2}}\, p_{-(\frac{x}{2}-\frac{\varpi}{2}+(m+\frac{1}{2})\varpi)} = p_{-(\frac{x}{2}-\frac{\varpi}{2})} = q_{\frac{x}{2}}$$

Also wenn man dann auch in den Gliedern der Reihe, die m aufhebt, so erhält man

$$q_{\frac{x}{2}} : 2\, q_{\frac{x}{2}} = \tfrac{1}{2} = 1 + p_x + p_{2x} + p_{3x} + \dots$$

Dividirt man aber vor der Reduktion beiderseits mit $\varpi_{\frac{1}{2}}$, so entsteht

$$\frac{\varpi_m\, p_{-(\frac{x}{2}+m\varpi)}}{2\, q_{\frac{x}{2}}} = \varpi_{-\frac{1}{2}} + \frac{q_{x+m\varpi}}{\varpi_m} + \frac{q_{2(x+m\varpi)}}{\varpi_{2m}} + \dots$$

Also

$$\frac{p_{-\frac{x}{2}}}{2\, q_{\frac{x}{2}}} = q_x + q_{2x} + q_{3x} + \dots$$

Die gewöhnlichen Exponentialausdrücke der Sinusse und Cosinusse erhalten durch die Einführung der ϖ Funktion eine Abänderung. Man hat nämlich:

$$p_{x+m\varpi} = \varpi_m\, e^{x\varpi_{1:2}} \quad q_{x+m\varpi} = \varpi_{m+\frac{1}{2}}\, e^{x\varpi_{1:2}}$$

also überhaupt wie oben

$$\frac{(p_{x+m\pi})^n}{\pi_{\frac{1}{2}}} = \frac{p_{(x+m\pi)n}}{\pi_{\frac{1}{2}}} = q_{(x+m\pi)n}$$

und wenn $m = o$ gesetzt wird, die einfachern Ausdrücke

$$p_x = e^{x.\pi_{1:2}}; \quad q_x = \pi_{-\frac{1}{2}}.\ e^{x.\pi_{1:2}}$$

wovon man sich, um nicht schon auseinandergesetztes zu wiederholen, kurz durch die Entwickelung leicht überzeugen kann, wenn man nur mit dem π_m auf die gehörige Weise verfährt. Durch dieselbe erhellet, daſs in der That, in Folge der Reihen für p_x, q_x,

$$\pi_m\ e^{x\pi_{1:2}} = \pi_m.\ p_x + \pi_{m+\frac{1}{2}}\ q_x; \quad \frac{\pi_m\ e^{x\pi_{1:2}}}{\pi_{\frac{1}{2}}} = \pi_{m-\frac{1}{2}}\ p_x + \pi_m\ q_x$$

Hieraus erkennt man den Ursprung einiger sonderbaren Formeln der Kreisfunktionen. Nimmt man, um nur eine anzuführen, von $p_x = e^{x\pi_{1:2}}$ die Logarithmen, so entsteht

$$\log p_x = x\,\pi_{\frac{1}{2}}$$

und macht man x gleich der Zahl π

$$\log p_\pi = \pi.\ \pi_{\frac{1}{2}}, \text{ das ist } \frac{\log \pi_1}{\pi_{\frac{1}{2}}} = \pi$$

welche unter der Form $\dfrac{\log -1}{\sqrt{-1}} = \pi$ bekannt ist.

Nimmt man die zuerst gefundene Gleichung dieses Artikels

$$2\,p_{\frac{x}{2}}\ p_{\frac{x}{2}+m\pi} = \pi_m + p_{x+m\pi}$$

so wird dieselbe durch Zuziehung der Exponentialform

$$2\,p_{\frac{x}{2}}.\ \pi_m\ e^{\frac{x}{2}\pi_{1:2}} = \pi_m + p_{x+m\pi}$$

und mit π_m dividirt und die Logarithmen genommen

$$\log 2\,p_{\frac{x}{2}} + \frac{x}{2}.\ \pi_{\frac{1}{2}} = \frac{p_{x+m\pi}}{\pi_m} - \frac{1}{2}\,\frac{p_{2x+2m\pi}}{\pi_{2m}} + \frac{1}{3}\,\frac{p_{3x+3m\pi}}{\pi_{3m}} - \ldots$$

Daraus folgt zuerst, von m befreit, die Gleichung

$$\log 2\,p_{\frac{x}{2}} = p_x - \tfrac{1}{2}\,p_{2x} + \tfrac{1}{3}\,p_{3x} - \ldots.$$

Ferner, wenn man mit $\pi_{\frac{1}{2}}$ dividirt, da überhaupt $\dfrac{p_{\mu x+\mu m\pi}}{\pi_{\frac{1}{2}}}$ gleich $q_{\mu x+\mu m\pi}$

dann auch $\pi_{-\frac{x}{2}}$ log $2p_{\frac{x}{2}}$ wegfällt, so folgt nach Aufhebung der m die andere Gleichung

$$\frac{x}{2} = q_x - \tfrac{1}{2}q_{2x} + \tfrac{1}{3}q_{3x} - \ldots$$

Die erste giebt, wenn man $2x$ statt x setzt und den log 2 entwickelt,

$$\log p_x = -(1-p_{2x}) + \tfrac{1}{2}(1-p_{4x}) - \tfrac{1}{3}(1-p_{6x}) + \ldots.$$

oder

$$\log p_x = -2(q_x^2 - \tfrac{1}{2}q_{2x}^2 + \tfrac{1}{3}q_{3x}^2 - \ldots)$$

Wenn man oben die Gleichung (A) mit $\pi_{\frac{x}{2}}$ beiderseits dividirt, so verwandeln sich die p in q, das $\pi_{-\frac{x}{2}}$ des ersten Gliedes der Reihe fällt weg als Null, und nach Wegschaffung des m hat man

$$-\frac{q_{\frac{x}{2}}}{2p_{\frac{x}{2}}} = -q_x + q_{2x} - q_{3x} + \ldots.$$

von welcher der hier gefundene log $2p_{\frac{x}{2}}$ das Integral ist. Auch ist die unter (A) gefundene das Differenzial der hier sich für $\frac{x}{2}$ ergebenen Reihe. Zu dieser kann man eine ähnliche noch finden, durch die Integration der ersten unter (B),

$$-\tfrac{1}{2} = p_x + p_{2x} + p_{3x} + \ldots.$$

welche alsdann giebt

$$C - \frac{x}{2} = q_x + \tfrac{1}{2}q_{2x} + \tfrac{1}{3}q_{3x} + \ldots.$$

um die Constante zu finden, setze man $x = \frac{\pi}{2}$ oder π, so wird

$$C - \frac{\pi}{4} = q_{\pi:2} + \tfrac{1}{2}q_{\pi} + \tfrac{1}{3}q_{3\pi:2} + \ldots. = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \ldots..$$

Also, da letztere Zahl gleich $\frac{\pi}{4}$, so ist $C = \pi:2$, daher

$$\frac{\pi - x}{2} = q_x + \tfrac{1}{2}q_{2x} + \tfrac{1}{3}q_{3x} + \ldots.$$

Setzt man in der andern Gleichung statt $p_{\frac{x}{2}+m\pi}$ die Exponentialform $\pi_m\, e^{\frac{x}{2}\pi\, 1:2}$, so wird sie

$$2\, q_{\frac{x}{2}} \cdot \pi_{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{x}{2}\pi_{\frac{1}{2}}} = 1 - \frac{p_{x+m\pi}}{\pi_m} \cdots$$

und die Logarithmen genommen

$$\log. 2\, q_{\frac{x}{2}} + \log \pi_{-\frac{1}{2}} + \pi_{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x}{2} = -\frac{p_{x+m\pi}}{\pi_m} - \frac{1}{2}\frac{p_{2(x+m\pi)}}{\pi_{2m}} - \frac{1}{3}\frac{p_{3(x+m\pi)}}{\pi_{3m}} - \ldots\ldots$$

Aber $\log \pi_{-\frac{1}{2}} = \log p_{-\frac{\pi}{2}} = \log e^{-\frac{\pi}{2}\cdot\pi_{\frac{1}{2}}} = -\pi_{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\pi}{2}$

Mithin wird $\log \pi_{-\frac{1}{2}}$ in der Gleichheit Null, daher, wenn man die m wegbringt, bleibt

$$\log 2\, q_{\frac{x}{2}} = -p_x - \frac{1}{2} p_{2x} - \frac{1}{3} p_{3x} - \ldots\ldots$$

Diese ähnlich wie oben $\log 2\, p_{\frac{x}{2}}$ behandelt, giebt

$$\log q_x = -2\,(p^2_x - \frac{1}{2}\, p^2_{2x} + \frac{1}{3}\, p^2_{3x} - \frac{1}{4}\, q^2_{4x} + \ldots.)$$

und mit der genannten verbunden

$$\log \frac{q_x}{p_x} = -2\,(p_{2x} + \frac{1}{3}\, p_{6x} + \frac{1}{5}\, p_{10x} + \ldots.)$$

Dividirt man aber die Gleichheit mit $\pi_{\frac{1}{2}}$, so wird sie

$$\pi_{-\frac{1}{2}} \log 2\, q_{\frac{x}{2}} - \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} = -\frac{q_{x+m\pi}}{\pi_m} - \frac{1}{2}\frac{q_{2(x+m\pi)}}{\pi_{2m}} - \frac{1}{3}\frac{q_{3(x+m\pi)}}{\pi_{3m}} - \ldots\ldots$$

welche nach Weglassung des in $\pi_{-\frac{1}{2}}$ als Null multiplizirten Gliedes und Aufhebung von m giebt

$$\frac{\pi - x}{2} = q_x + \frac{1}{2}\, q_{2x} + \frac{1}{3}\, q_{3x} + \ldots\ldots$$

wie auch so eben gefunden worden.

Differenzirt man $\log 2\, q_{\frac{x}{2}}$ und dessen Werth, so wird erhalten

$$\frac{p_{\frac{x}{2}}}{q_{\frac{x}{2}}} = q_x + q_{2x} + q_{3x} + \ldots\ldots$$

welches, mit dem vorher für $q_{x:2} : p_{x:2}$ gefundenen multiplicirt, giebt

$$1 = (q_x + q_{3x} + q_{5x} + \ldots)^2 - (q_{2x} + q_{4x} + q_{6x} + \ldots)^2$$

Integrirt man die Gleichung

$$\frac{x}{2} = q_x - \frac{1}{2}\, q_{2x} + \frac{1}{3}\, q_{3x} - \ldots\ldots$$

so bekommt man

$$C + \frac{x^2}{4} = - p_x + \tfrac{1}{4}\, p_{2x} - \tfrac{1}{9}\, p_{3x} + \tfrac{1}{16}\, p_{4x} - \ldots .$$

Aber für $x = \pi$ hat man $- p_x = 1$, also

$$C + \frac{\pi^2}{4} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots .$$

Macht man hingegen $x = 0$, so ist $p_x = + 1$ u. s. w., also

$$C = - 1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \ldots .$$

Daher subtrahirt und halbirt

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots .$$

Da aber

$$\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

so folgt:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

Man kann die Integration der Reihe für $C + \frac{x^2}{4}$ wieder vornehmen, und auf die daraus die entstehende Reihe u. s. w., wodurch man die Summen der Reihen $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots$ nach einander findet.

Nimmt man von den Gleichungen im Anfange dieses Artikels statt der (-1)ten Potenz die $n$te, so erhält man, durch ein dem angewendeten ähnliches Verfahren, aus der einen die allgemeinen Formeln

$$2^n\, p_{\frac{nx}{2}} \cdot p^n_{\frac{x}{2}} = 1 + n\, p_x + \frac{n.\, n-1}{1.\ 2}\, p_{2x} + \frac{n.\, n-1.\, n-2}{1.\ 2.\ 3}\, p_{3x} + \ldots .$$

$$2^n\, q_{\frac{nx}{2}} \cdot p^n_{\frac{x}{2}} = n\, q_x + \frac{n.\, n-1}{1.\ 2}\, q_{2x} + \frac{n.\, n-1.\, n-2}{1.\ 2.\ 3}\, q_{3x} + \ldots .$$

aus der andern

$$2^n\, p_{\frac{nx}{2}}\, q_{\frac{x}{2}} = \begin{cases} \pi_{\frac{n}{2}} \left(1 - n\, p_x + \dfrac{n.\, n-1}{1.\ 2}\, p_{2x} - \dfrac{n.\, n-1.\, n-2}{1.\ 2.\ 3}\, p_{6x} + \ldots \right. \\ - \pi_{\frac{n+1}{2}} \left(n\, q_x - \dfrac{n.\, n-1}{1.\ 2}\, q_{2x} + \dfrac{n.\, n-1.\, n-2}{1.\ 2.\ 3}\, q_{3x} - \ldots \right. \end{cases}$$

von welcher die eine oder die andere Reihe Null wird, nachdem n eine gerade oder ungerade positive Zahl ist.

Behandelt man hingegen die ursprünglichen Gleichungen

$$2\,p_x^2 = 1 + p_{2x};\quad 2\,q_x^2 = 1 - p_{2x}$$

nach bloſs algebraischer Methode, so geben sie unmittelbar und sichtlich die logarithmischen Reihen, welche oben nach $p_{\mu x}$ fortschritten, in Potenzen von p_{2x}, und man hat

$$\log p_{2x} = -\,2\,q_x^2 - \tfrac{1}{2}\,2^2\,q_x^4 - \tfrac{1}{3}\,2^3\,q_x^6 - \tfrac{1}{4}\,2^4\,q_x^8 - \ldots\ldots$$
$$\log p_x = \log\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\,(p_{2x} - \tfrac{1}{2}\,p_{2x}^2 + \tfrac{1}{3}\,p_{2x}^3 - \ldots\ldots)$$
$$\log q_x = \log\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\,(p_{2x} + \tfrac{1}{2}\,p_{2x}^2 + \tfrac{1}{3}\,p_{2x}^3 + \ldots\ldots)$$

Daher

$$\log q_x = -\,\tfrac{1}{2}\,(p_x^2 + \tfrac{1}{2}\,p_x^4 + \tfrac{1}{3}\,p_x^6 + \ldots\ldots)$$
$$\log (q_x : p_x) = -\,p_{2x} - \tfrac{1}{3}\,p_{2x}^3 - \tfrac{1}{5}\,p_{2x}^5 - \ldots\ldots\ldots$$

welche Reihen, wegen ihrer Einfachheit und Analogie, mit den angeführten nicht, wie es scheint, unbemerkt zu bleiben verdienen. Sie weiter zu verfolgen ist hier nicht der Ort, wo besonders nur die Behandlung des eingeführten Algorithmus der Winkelfunktionen zu betrachten war. Andere Anwendungen desselben würden auch hier zu weit führen, und scheinen als weitere Auseinandersetzung der Behandlung des Algorithmus jetzt nicht nöthig zu seyn, wegen seiner Analogie mit dem Gebrauch des $\sqrt{-1}$, welcher sich jenem doch angemessen halten oder vorstellen läſst. Allein jene Reihen, zu welchen derselbe geführt hat, noch kurz von einer andern Seite zu erwägen, dürfte nicht überflüssig seyn, da sie bisher seltener vorkommen, wofern sie alle bekannt sind.

So wie oben (§. 12.) die beiden Gleichungen

$$p_{m+2} + p_m = 2p \cdot p_{m+1};\quad q_{m+2} + q_m = 2p \cdot q_{m+1}$$

gefunden worden, ergeben sich auch zwei ihnen ähnliche

$$p_{m+2} - p_m = 2q \cdot q_{m+1};\quad q_{m+2} - q_m = 2q \cdot p_{m+1}.$$

Nimmt man die auf ihnen folgenden

$$p_{m+4} - p_{m+2} = -2q \cdot q_{m+3} \text{ und } q_{m+4} - q_{m+2} = 2q \cdot p_{m+3}$$

$$p_{m+6} - p_{m+4} = -2q \cdot q_{m+5}, \quad q_{m+6} - q_{m+4} = 2q \cdot p_{m+5}$$

$$\vdots$$

$$p_{m+2n} - p_{m+2n-2} = -2q \cdot q_{m+2n-1}; \; q_{m+2n} - q_{m+2n-1} = 2q \cdot p_{m+2n-1}$$

und addirt alle nebst der ersten, so erhält man die beiden

$$(A) \ldots \frac{p_m - p_{m+2n}}{2q} = q_{m+1} + q_{m+3} + q_{m+5} + \ldots\ldots + q_{m+2n-1}$$

$$(B) \ldots \frac{q_{m+2n} - q_m}{2q} = p_{m+1} + p_{m+3} + p_{m+5} \ldots\ldots + p_{m+2n-1} \; .$$

Nimmt man $m+1$ statt m addirt und subtrahirt, so hat man die Ausdrücke für die Summen der Reihen, mit gleichen oder abwechselnden Zeichen,

$$(C) \ldots \begin{cases} \dfrac{p_m \pm p_{m+1} - p_{m+2n} \mp p_{m+2n+1}}{2q} = \ldots\ldots \\ q_{m+1} \pm q_{m+2} + q_{m+3} \pm q_{m+4} + \ldots\ldots + q_{m+2n-1} \pm q_{m+2n} \ldots \end{cases}$$

$$(D) \ldots \begin{cases} \dfrac{q_{m+2n} \pm q_{m+2n+1} - q_m \mp q_{m+1}}{2q} = \ldots\ldots \\ p_{m+1} \pm p_{m+2} + p_{m+3} \pm p_{m+4} + \ldots\ldots + p_{m+2n-1} \pm p_{m+2n} \end{cases}$$

Diese Formeln sind gültig für m jede Zahl und für irgend eine Anzahl von Gliedern, und auch für n jede Zahl in transcendenter Ansicht. Allein sie lehren unmittelbar nichts über den Werth der Reihe, wenn man n unendlich setzt, indessen deuten sie in dieser Voraussetzung ihren Zusammenhang mit den vorher gefundenen an.

Es sey $p = \pi_z$, so wird $p_m = \pi_{mz}$, und die erste Reihe (A) folgende . . . . (E)

$$\frac{\pi_{mz} - \pi_{mz-2z.n}}{2 . \pi_{z-\frac{1}{2}}} = \pi_{mz+z-\frac{1}{2}} + \pi_{mz+3z-\frac{1}{2}} + \pi_{mz+5z-\frac{1}{2}} + \ldots\ldots + \pi_{mz-(2n-1)z-\frac{1}{2}}$$

Welche gebrochene Zahl nun auch z seyn mag, so ist klar, daſs man n, gleichgültig wie groſs es nöthig, so nehmen kann, daſs $2z.n$ zuerst eine ganze, also ungerade Zahl wird; in diesem Falle wird, welches diese Zahl auch seyn mag,

$$\pi_{mz+2z.n} = -\pi_{mz} \text{ und}$$

$$\pi_{mz+(2n-1)z-\frac{1}{2}+2\nu z} = -\pi_{mz+(2\nu-1)z-\frac{1}{2}}$$

so lange also die ganze Zahl ν kleiner als n, sind die den n Gliedern obiger Reihe zunächst folgenden, von $\nu = 1$ an, den vorhergehenden vom Anfange an Glied fur Glied gleich, aber im Vorzeichen entgegengesetzt. Die dann wieder folgenden n Glieder mit dem Gliede $\pi_{mz+(4n+1)z-\frac{1}{2}}$ anfangenden, bis zum Gliede $\pi_{mz+(6n-1)z-\frac{1}{2}}$, haben mit den ersten gleiche Werthe etc. Aber die ersten n Glieder haben zur Summe

$$\frac{\pi_{mz} + \pi_{mz}}{2\,\pi_{z-\frac{1}{2}}} = \frac{\pi_{mz}}{\pi_{z-\frac{1}{2}}}$$

Der Werth der Summe der unendlichen Reihe von (E) ist also, wenn man sie in Perioden von n Gliedern abtheilt, da die Summe jeder folgenden n Glieder zusammen eben so grofs als die der vorhergegangenen n seyn mufs, nur mit entgegengesetzten Zeichen, gleich

$$\frac{\pi_{mz}}{\pi_{z-\frac{1}{2}}}(1-1+1-1+\ldots) = \frac{\pi_{mz}}{\pi_{z-\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{1+1}\right)$$

und dieses stimmt, wenn man $m = 1$ setzt, mit dem oben gefundenen Werth der unendlichnn Reihe $q_x + q_{2x} + q_{3x} + \ldots$ überein, und zeigt, in welchem Sinne die Summe einer solchen, ins unendliche fortschreitenden, eigentlich nicht convergirenden Reihe, deren Glieder ins unendliche stets mit anfänglichen gleichen Werth erhalten, zu nehmen sey.

Die Gleichung (E) zeigt in ihrem ersten Theile, dafs wenn man $2nz$ gerade Zahl nimmt, die Summe der zugehörigen Glieder o werde, wie es auch aus dem Resultate hervorgeht.

Die Reihe (B) giebt in derselben Bezeichnung . . . . (F) . . . .

$$\frac{\pi_{mz+2nz-\frac{1}{2}} - \pi_{mz-\frac{1}{2}}}{2.\,\pi_{z-\frac{1}{2}}} = \pi_{mz+z} + \pi_{mz+3z} + \pi_{mz+5z} + \ldots\ldots + \pi_{mz+(2n-1)z},$$

und wenn man $2nz$ ganze ungerade Zahl nimmt, alles ähnlich wie zuvor, und der erste Theil wird

$$\frac{-\pi_{mz-\frac{1}{2}}-\pi_{mz-\frac{1}{2}}}{2.\pi_{z-\frac{1}{2}}}=-\frac{\pi_{mz-\frac{1}{2}}}{\pi_{z-\frac{1}{2}}}$$

Daher die Summe der Reihe (F) ins unendliche und in ganzen Perioden von n Gliedern, das n so genommen, daſs $2nz$ zur kleinsten oder auch zu irgend einer ungeraden Zahl wird, fortgesetzt, gleich ist:

$$-\frac{\pi_{mz-\frac{1}{2}}}{\pi_{z-\frac{1}{2}}}(1-1+1-1+\ldots)=-\tfrac{1}{2}.\frac{\pi_{mz-\frac{1}{2}}}{\pi_{z-\frac{1}{2}}}$$

welches im Falle $m=1$ gleich $-\frac{1}{2}$ wird, wie oben.

Dies beruht zwar auf die Voraussetzung, z sey ein rationaler Bruch, allein kann offenbar auf jeden möglichen Werth von z ausgedehnt werden.

Will man diese Reihen nicht nach einer gleichförmigen Gliederanzahl nehmen, so läſst sich auch für dieselbe, so weit man will fortgesetzt, keine bestimmte Summe angeben, in so ferne man n nicht absolut unendlich denkt, in welchem Falle man sich allerdings vorstellen darf, daſs es das unendlichfache der Zahl der Glieder einer Periode sey, wie es der Faktor $1-1+1-\ldots$ darlegt. Eine andere Schwierigkeit könnte man vielleicht darin finden, daſs, wenn man Perioden nimmt, so daſs $2nz$ eine gerade Zahl: dann geben beide Formeln die Summe einer solchen Gliedermenge $=0:2\pi_{z-\frac{1}{2}}$, also die Reihe $\frac{1}{2\pi_{z-\frac{1}{2}}}(0+0+0\ldots.)$, wie es auch aus der $1-1+1\ldots$ folgt, wenn man zwei Perioden zusammenzieht. Allein jene Reihe $0+0+$ ins unendliche ist bloſs eine unbestimmte Gröſse, die man als aus der Entwickelung von $\frac{c.\,0}{1-1}$ entsprungen, zu betrachten hat; für den Fall $z=0$ sieht man, sowohl aus (E) als aus (F), daſs im ersten Theile Zähler und Nenner zugleich Null werden, also der Werth einer Periode unbestimmt ist.

Die ersteren Herleitungen dieser Reihen vermittelst des eingeführten Algorithmus haben aber den Vorzug für sich, daſs sie daselbst als das, was sie sind, nämlich entwickelte Funktionen ihrer ersten Glieder oder sogenannten Summen darbieten, mithin jede fernere analytische Behandlung gestatten. Will man die letzteren Formen ferner benutzen, z. B. durch Differenziation oder Integration anderer ableiten, so muſs man sie nothwendig als unendliche Reihen sich denken, damit sie für jede durch den unbestimmten Werth von z erforderliche Periode passen, sonst sind sie keiner Substitution verschiedener Werthe für z fähig, weil dadurch auch die Zahl der zu einer Periode gehörigen Glieder ändert, eine Zahl, die man aber gar nicht zu kennen oder zu unterscheiden hat, wenn man sich die Reihen nur immerwährend fortgehend denkt, damit alle Glieder vorhanden seyen, in welchen die Substitution vorzunehmen ist. Es ist klar, dafs durch analytische Operationen vom Anfang entfernten Gliedern oder Perioden, solche Koefficienten zukommen können, in Folge von welchen neue aus jenen entstehende Reihen convergiren, also einen genäherten Werth der ganzen um so genauer geben, je mehr Glieder man nimmt, wo dann die Berücksichtigung der Perioden überflüssig wird.

Setzt man in den gefundenen allgemeinen Werthen der Reihen noch $m = 0$, so erhält man $p_1 + p_3 + p_5 + \ldots = 0$ und $q_1 + q_3 + q_5 + \ldots = \frac{1}{2q_1}$ welche zu den Reihen für $m = 1$, nämlich $p_2 + p_4 + p_6 + \ldots = -\frac{1}{2}$ und $q_2 + q_4 + q_6 + \ldots = \frac{p_1}{2q_1}$, durch Addition und Subtraktion gesetzt, die Werthe der mit wechselnden oder denselben Zeichen fortgehenden Reihen geben, aus welchen man durch Integration die übrigen oben vorgekommenen findet, und durch Differenziation andere, welche alle ihrer Form und Anwendung wegen wichtig, und auf diesem so einfachen, und ich möchte sagen, nun auch gesicherteren Wege, wie es scheint, am natürlichsten zu suchen und anzutreffen sind.