ALGÈBRE

ÉLÉMENTAIRE

AVIS.

Tous les exemplaires de cet ouvrage non revêtus de notre griffe seront réputés contrefaits.

L. Hachette et Cie

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET, RUE DE VAUGIRARD, 9.

Irving Stringham

ALGÈBRE

ÉLÉMENTAIRE

AVEC DE NOMBREUSES APPLICATIONS

A LA GÉOMÉTRIE ET AUX QUESTIONS LES PLUS SIMPLES DE PHYSIQUE
DE MÉCANIQUE, ETC

A L'USAGE

DES ASPIRANTS

A L'ÉCOLE MILITAIRE DE SAINT-CYR, A L'ÉCOLE NAVALE, A L'ÉCOLE FORESTIÈRE
A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES, ETC

PAR Hte SONNET

DOCTEUR ÈS SCIENCES

PARIS

L. HACHETTE ET Cie

LIBRAIRES DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE

RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 12

1848

I. M.
Irving Stringham

AVANT-PROPOS.

D'après l'usage adopté dans l'enseignement, on divise l'Algèbre en deux parties : l'Algèbre élémentaire et l'Algèbre supérieure. La première partie, qui renferme la résolution des équations du premier et du second degré, la formule du binome, la théorie des logarithmes, et quelques questions accessoires, est celle qui est traitée dans ce volume. L'Algèbre supérieure n'étant exigée que pour le baccalauréat ès sciences mathématiques et pour l'admission à l'École Polytechnique et à l'École Normale, nous croyons être utile au plus grand nombre des élèves en publiant séparément un traité sur la partie de l'Algèbre qui est comprise dans le cadre des mathématiques élémentaires. En supprimant l'Algèbre supérieure, que nous nous réservons d'ailleurs de traiter plus tard avec les développements qu'elle comporte, nous avons pu réduire considérablement l'étendue de ce livre, tout en donnant à l'exposition des théories principales plus d'extension qu'elle n'en reçoit d'ordinaire.

L'Algèbre, comme les autres branches des mathématiques, peut être enseignée sous deux points de vue : soit sous le point de vue spéculatif ou purement théorique, soit sous le point de vue des applications. Nous n'avons rien négligé pour compléter la partie théorique et pour lui donner la rigueur qui est devenue aujourd'hui un des premiers besoins de l'enseignement. Mais en même temps nous aurions cru être infidèle au système que nous avons adopté dans nos autres publications, si nous n'avions essayé d'ajouter à la clarté et à l'intérêt de l'exposition théorique par de nombreuses applications. Il y a sans doute des esprits auxquels les vérités abstraites plaisent, par cela seul que ce sont des vérités; mais le plus grand nombre aiment à trouver dans le monde des abstractions quelque chose d'utile et d'applicable au monde réel. Pour les esprits neufs ou rebelles, ce sont d'ailleurs les applications qui servent à faire comprendre la théorie, qui en donnent pour ainsi dire la clef, et qui contribuent le plus puissamment à en fixer les préceptes dans la mémoire.

Parmi les applications de l'Algèbre, les plus intéressantes sont celles qui se rattachent à la Géométrie élémentaire; nous n'avons pas hésité à en donner un grand nombre : rien n'est plus propre à fortifier et à étendre le jugement des élèves que l'étude des relations intimes qui existent entre ces deux branches de la science; et nous aurions eu d'autant plus de regrets de nous priver d'une source aussi abondante de problèmes, que presque toujours la Géométrie est enseignée avant l'Algèbre, ou au moins parallèlement avec elle. Si quelques-uns de MM. les professeurs croyaient néanmoins avoir des motifs de commencer par l'Algèbre, ils trouveront à la suite de chaque théorie des exemples et des problèmes abstraits sur lesquels ils pourront exercer leurs élèves.

Les autres applications sont prises parmi les problèmes les plus élémentaires de Physique et de Mécanique, ou dans des questions usuelles. Nous avons plutôt choisi que multiplié les énoncés, et les élèves laborieux pourront consulter à ce sujet des recueils connus et estimés où ils trouveront en abondance de quoi alimenter leur zèle.

Il y a un certain nombre de questions que nous avons traitées d'une manière très-différente de celle qui est en usage; telles sont :

la discussion (partielle) des valeurs générales fournies par trois équations du premier degré à trois inconnues; l'extraction de la racine carrée des quantités en partie commensurables et en partie incommensurables, celle des quantités imaginaires; la résolution de l'équation exponentielle, etc. Nous n'avons point été guidés en cela par un vain amour de la nouveauté; nous croyons nos méthodes préférables; MM. les professeurs en jugeront. Il y a d'autres questions que nous avons traitées plus complétement qu'on ne le fait d'ordinaire, tels sont : le calcul des irrationnelles, les combinaisons, les logarithmes, et enfin les approximations numériques. Cette dernière question, qu'on ne traite pas ordinairement en Algèbre, et qui cependant ne saurait être traitée convenablement en Arithmétique, a été de notre part l'objet d'un soin tout particulier; nous y avons donné quelques théorèmes utiles et simples, connus sans doute, mais dont l'énoncé ne se trouve pas ordinairement dans les livres; entre autres celui-ci : Lorsqu'une quantité plus grande que l'unité est donnée à moins d'une unité décimale d'un certain ordre, sa racine carrée ou cubique peut être obtenue avec le même degré d'approximation =. Nous avons consacré un paragraphe particulier aux *approximations relatives*, les seules qui intéressent la pratique, et dont les règles ne sont données nulle part, du moins à notre connaissance.

Quant à l'ordre que nous avons suivi, on s'en fera une juste idée en parcourant la table des matières. On verra que dans chacune des divisions de l'ouvrage l'indispensable est toujours ce que nous avons mis en première ligne.

Quoique nous n'ayons pas eu l'intention de composer un Manuel des aspirants à telle ou telle école spéciale, néanmoins les élèves qui se destinent aux écoles trouveront dans ce traité tout ce qui peut leur être utile, et, en particulier, la solution de *toutes les questions de théorie ou d'application proposées dans le questionnaire de Saint-Cyr*. Nous croyons donc pouvoir leur offrir ce livre, ainsi qu'aux élèves qui suivent l'enseignement spécial dans les colléges, et à tous ceux en général qui se livrent à l'étude des Mathématiques élémentaires, comme un guide qu'ils pourront consulter avec quelque fruit.

ALGÈBRE
ÉLÉMENTAIRE.

PREMIÈRE PARTIE.

OPÉRATIONS FONDAMENTALES ET PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

§ I. But de l'Algèbre.

1. L'Algèbre est la science qui a pour but de résoudre d'une manière générale les questions relatives aux nombres.

C'est-à-dire que, dans cette partie des mathématiques, on ne se contente pas de la solution particulière d'une question, on recherche encore la solution générale de toutes les questions du même genre.

Pour y parvenir, on représente par des lettres les grandeurs connues ou inconnues que l'on a à considérer; et, à l'aide de signes abréviatifs on *écrit* les relations que la nature du problème établit entre ces grandeurs. L'Algèbre donne ensuite des règles pour *transformer* ces relations en d'autres plus simples, ou mieux appropriées au but qu'on se propose; et c'est en déplaçant ainsi successivement la difficulté qu'on peut la diminuer et enfin la résoudre. On obtient alors la valeur de chaque inconnue sous la forme d'une expression *générale*, dans laquelle il n'y aura plus, dans chaque cas particulier, qu'à remplacer chaque lettre par sa valeur particulière, et à *effectuer* les calculs qui ne sont qu'indiqués. Une pareille expression générale est ce qu'on nomme une *formule algébrique*.

Un exemple éclaircira ces généralités.

2. Proposons-nous d'abord cette question particulière : *Trouver* *deux nombres dont la somme soit* 17 *et dont la différence soit* 5. Pour la résoudre, nous pourrons d'abord faire le raisonnement suivant :

La différence des deux nombres étant 5, le plus grand est égal au plus petit augmenté de 5 ; la somme des deux nombres est donc égale au plus petit nombre augmenté de 5, plus encore au plus petit nombre ; ou, ce qui revient au même, à deux fois le plus petit nombre, plus 5. Mais cette somme doit faire 17 ; donc le double du plus petit nombre, plus 5, égale 17. Il en résulte que le double du plus petit nombre équivaut à 17 diminué de 5, ou à 12 ; et que par conséquent ce plus petit nombre lui-même est la moitié de 12, ou 6. Par suite, le plus grand nombre est égal à 6 plus 5, ou à 11.

On remarque que dans ce raisonnement certaines expressions se reproduisent un grand nombre de fois ; ce sont *le plus petit nombre* ; *le plus grand nombre* ; *plus* ou *augmenté de* ; *moins* ou *diminué de* ; *égale* ou *équivaut à*. On pourra donc simplifier l'écriture de ce raisonnement en convenant, par exemple, de représenter *le plus petit nombre* par la lettre x, *le plus grand nombre* par la lettre y ; les expressions *plus* ou *augmenté de* par le signe $+$, déjà employé en arithmétique, les expressions *moins* ou *diminué de* par le signe $-$; la division par 2 en mettant ce nombre en dénominateur ; enfin les expressions *égale* ou *équivaut à* par le signe $=$. A l'aide de ces conventions, le raisonnement ci-dessus pourra s'écrire de la manière suivante :

$$y-x=5\ ;$$

donc $$y=x+5\ .$$

Mais $$y+x=17\ ;$$

donc $$x+5+x=17\ ,$$

ou $$2x+5=17\ .$$

De là résulte $$2x=17-5=12\ ;$$

donc $$x=\frac{12}{2} \quad \text{ou} \quad x=6\ .$$

Par suite, $$y=6+5=11\ .$$

Chacune des lignes que nous venons d'écrire, correspond à l'un des raisonnements partiels qui composent le raisonnement total écrit plus haut.

3. Les raisonnements seraient évidemment les mêmes si les nombres 17 et 5 étaient remplacés par des nombres quelconques. Mais les signes abréviatifs que nous avons employés ne suffisent pas pour mettre en évidence ce qu'il peut y avoir de commun dans les

résultats des raisonnements, quelles que soient les données. Cela tient à ce que les résultats numériques auxquels on est conduit n'offrent aucune trace des opérations qui ont servi à les obtenir. Ainsi le nombre 6, qui a été obtenu en retranchant 5 de 17 et en prenant la moitié du reste, pourrait s'obtenir d'une infinité d'autres manières; et rien dans ce résultat brut 6 n'indique comment on y est parvenu.

Il n'en serait plus de même si, au lieu d'effectuer les opérations numériques au fur et à mesure qu'elles se présentent, on se contentait de les indiquer par des signes. C'est ce que nous allons montrer en reprenant le même problème; mais afin de donner à la solution toute la généralité qu'elle comporte, nous remplacerons les données numériques par des lettres auxquelles on pourra ensuite attribuer telles valeurs qu'on voudra. Nous désignerons donc par a la somme des deux nombres inconnus x et y; et par b leur différence; x désignant toujours le plus petit.

Cela posé, nous allons reprendre le raisonnement total; nous le reproduirons ensuite en employant l'écriture algébrique; et, afin de rendre la comparaison plus facile nous aurons soin de marquer d'un numéro d'ordre commun les raisonnements partiels qui se correspondent :

[1] Le plus grand nombre, moins le plus petit, égale la différence donnée;

[2] Donc, le plus grand nombre équivaut au plus petit, plus la différence donnée;

[3] Le plus grand nombre, plus le plus petit, égale la somme donnée;

[4] Donc, le plus petit nombre augmenté de la différence donnée, plus encore le plus petit nombre, égale la somme donnée;

[5] Ou bien, deux fois le plus petit nombre, plus la différence donnée, égale la somme donnée.

[6] Il en résulte que : deux fois le plus petit nombre égale la somme donnée, moins la différence donnée;

[7] Et qu'enfin, le plus petit nombre égale la moitié de la somme donnée, moins la moitié de la différence donnée.

[8] Par suite, le plus grand nombre égale la moitié de la somme donnée, moins la moitié de la différence donnée, plus cette même différence;

[9] Ce qui revient à la moitié de la somme donnée, plus la moitié de la différence donnée.

En écriture algébrique, les mêmes raisonnements deviendront :

[1] $y - x = b$;

[2] donc $y = x + b$.

[3] Mais $y + x = a$;

[4] donc $x + b + x = a$;

[5] ou bien $2x + b = a$.

[6] Il en résulte $2x = a - b$,

[7] et enfin $x = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$.

[8] Par suite $y = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b$,

[9] ou bien $y = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

Remarque. On voit que *lorsqu'on a la somme et la différence de deux nombres, on obtient le plus petit en retranchant la moitié de la différence de la moitié de la somme, et le plus grand en ajoutant la moitié de la différence à la moitié de la somme*; ce qui constitue un *théorème* de calcul.

4. Les valeurs générales

$$x = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

sont des *formules* qui donneront immédiatement les valeurs des inconnues dans chaque cas particulier; il suffira d'y remplacer a et b par les données particulières, et d'effectuer les calculs indiqués.

Si l'on demande, par exemple, de trouver deux nombres dont la somme soit 31 et la différence 13 , on aura

$$x = \frac{31}{2} - \frac{13}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{31}{2} + \frac{13}{2} ,$$

ou $x = \frac{18}{2}$ et $y = \frac{44}{2}$,

ou enfin $x = 9$ et $y = 22$;

c'est-à-dire que le plus petit des deux nombres demandés est 9 , et le plus grand 22 . En effet, 22 diminué de 9 donne 13 , et 22 augmenté de 9 donne 31 .

5. La question très-simple que nous venons de traiter suffit néanmoins pour faire voir comment l'écriture algébrique, indé-

pendamment de sa brièveté, permet de traiter un problème de la manière la plus générale, et conduit à des formules ou règles pour obtenir la solution dans chaque cas particulier.

La série des égalités [4], [5], [6], [7] du numéro (5), offre un exemple des transformations successives à l'aide desquelles on peut, d'une relation entre une inconnue et des quantités données, déduire une relation plus simple qui donne la valeur de cette inconnue.

Le but de l'Algèbre étant ainsi clairement établi, nous allons nous occuper des signes abréviatifs qu'elle emploie et des règles du calcul algébrique.

§ II. Des signes algébriques.

6. Nous donnons dans ce paragraphe l'explication de tous les signes abréviatifs usités en Algèbre, quoique plusieurs d'entre eux ne soient pas, dès à présent, indispensables à connaître. Notre but est d'éviter au lecteur, qui aurait oublié le sens d'un signe, la peine d'en chercher la définition dans le corps de l'ouvrage, en lui offrant un tableau qu'il lui sera toujours facile de consulter.

7. Le signe $+$ s'énonce *plus*; placé entre deux quantités, il indique qu'on en fait la somme. Ainsi $x+5$ signifie la somme des quantités x et 5 ; de même $x+a+5$ exprime la somme des quantités x, a et 5 .

8. Le signe $-$ s'énonce *moins*; placé entre deux quantités, il indique qu'on en fait la différence, ou que de la première on retranche la seconde. Ainsi $x-5$ exprime la différence des quantités x et 5, ou ce qui reste de la quantité représentée par x quand on en retranche 5. De même $x-a-5$ indique ce qui reste de la quantité x quand on en retranche successivement la quantité a et le nombre 5 .

9. Le signe $\times$ s'énonce *multiplié par*; placé entre deux quantités, il indique qu'on en fait le produit. Ainsi $x\times 5$ indique le produit de x par 5. De même $x\times a\times 5$ exprime le produit des trois facteurs x, a et 5 .

On remplace souvent le signe $\times$ par un simple point. Ainsi au lieu de $a\times b$ on peut écrire $a.b$.

Plus souvent encore on se contente, pour exprimer la multiplication, d'écrire les facteurs à la suite les uns des autres, sans aucune interposition de signe. Mais cela ne se fait que lorsqu'il n'y a pas plus d'un facteur numérique, et ce facteur se place alors le premier. Ainsi au lieu de $x\times a\times 5$ on peut ecrire $x.a.5$, ou plus simplement $5ax$.

Le facteur numérique qui précède ainsi un produit de facteurs exprimés par des lettres, porte le nom de *coefficient*.

10. Quand un produit renferme plusieurs facteurs égaux, on se contente d'écrire l'un d'eux, et l'on place à sa droite, et un peu au-dessus, le nombre qui indique combien il y a de ces facteurs égaux. Ainsi, au lieu de 5×5 on peut écrire 5^2 ; au lieu de $x \times x \times x$ on peut écrire x^3 .

Ce nombre qui indique combien il y a de facteurs égaux à celui qu'on n'écrit qu'une fois, porte le nom d'*exposant*; et le produit des facteurs égaux s'appelle *puissance* de l'un de ces facteurs. L'expression $5a^3b^2x$ indiquerait un produit composé du facteur 5 , de 3 facteurs égaux à a , de 2 facteurs égaux à b , et enfin d'un facteur égal à x ; ou bien le produit de 5 par la 3^e puissance de a , par la 2^e puissance de b , et par la 1^{re} puissance de x .

11. Le signe $:$ s'énonce *divisé par*; placé entre deux quantités; il indique que la première est divisée par la seconde. Ainsi $x : 5$ exprime le quotient de x par 5 .

On indique encore la division en écrivant le quotient comme une fraction qui aurait pour numérateur le dividende et pour dénominateur le diviseur. Par exemple

$$x : 5 \quad \text{peut s'écrire} \quad \frac{x}{5} \; .$$

Le trait horizontal qui sépare le dividende du diviseur se nomme *barre de division*.

12. Le signe $\sqrt{}$ indique la *racine carrée* de la quantité placée au-dessous, c'est-à-dire une quantité qui, multipliée par elle-même, reproduirait la quantité placée sous le signe. Par exemple $\sqrt{49}$ exprime la racine carrée de 49 , ou le nombre qui, multiplié par lui-même, donne 49 .

Le signe $\sqrt[3]{}$ indique de même la *racine cubique* de la quantité placée au-dessous, c'est-à-dire une quantité qui, prise 3 fois comme facteur, donnerait pour produit la quantité placée sous le signe. Ainsi, $\sqrt[3]{64}$ exprime la racine cubique de 64 , ou le nombre qui, pris 3 fois comme facteur, donnerait pour produit 64 .

Les signes $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, etc., indiqueraient de même la *racine quatrième*, la *racine cinquième*, etc., de la quantité placée au-dessous, c'est-à-dire une quantité qui, prise 4 fois, 5 fois, etc., comme facteur, donnerait pour produit la quantité placée sous le signe.

Ce signe porte en général le nom de *radical*, et le nombre placé au-dessus dans son ouverture est ce qu'on nomme l'*indice* du radical. Ainsi, dans $\sqrt[3]{}$, c'est 3 qui est l'indice du radical.

13. Les parenthèses ( ) expriment le *résultat* des opérations indiquées sur les quantités qu'elles enveloppent ; les signes qui affectent les parenthèses indiquent les opérations à effectuer sur ce résultat. Ainsi,

$$x-(a-5)$$

indique que de la quantité x on retranche le résultat obtenu en retranchant 5 de a.

$$(x+5)\times a$$

indique qu'après avoir fait la somme des quantités x et 5, on multiplie le résultat, ou la somme, par a.

$$(x-2):a$$

indique qu'après avoir retranché 2 de x on divise le résultat, ou la différence, par la quantité a.

$$(x+5)^3:(a-2)^2$$

indique qu'après avoir fait la somme des quantités x et 5 et formé un produit de 3 facteurs égaux à cette somme, on divise ce produit par le produit de 2 facteurs égaux à la différence entre a et 2.

14. Le signe $=$ s'énonce *égale*; placé entre des expressions numériques ou algébriques, il indique que les deux expressions sont égales en valeur.

Le signe $>$ s'énonce *plus grand que*; placé entre deux quantités, il indique que la première est plus grande que la seconde. Ainsi, $x>5$ signifie que la quantité représentée par x est plus grande que 5.

Le signe $<$ s'énonce *plus petit que*; placé entre deux quantités, il indique que la première est plus petite que la seconde. Ainsi, $x<5$ signifie que la quantité représentée par x est plus petite que 5.

15. Lorsque, dans une question, on a représenté certaines quantités par des lettres, on réprésente des quantités analogues par les mêmes lettres chargées d'un ou plusieurs accents. Les lettres chargées d'un accent s'énoncent en y ajoutant le mot *prime*; celles qui sont chargées de deux accents s'énoncent en y ajoutant le mot *seconde*; pour trois accents on ajoute le mot *tierce*; et ainsi de suite. Par exemple :

$$a\ ,\quad a'\ ,\quad a''\ ,\quad a'''\ ,$$

s'énonceraient a, a prime, a seconde, a tierce.

L'usage que nous ferons des divers signes dont il vient d'être question, en fixera peu à peu le sens dans la mémoire du lecteur.

§ III. Des diverses espèces d'expressions algébriques.

16. Les expressions algébriques les plus simples sont les lettres mêmes de l'alphabet destinées à représenter certaines quantités connues ou inconnues. On emploie ordinairement les premières lettres de l'alphabet, a, b, c, d, etc., pour représenter des quantités supposées connues, mais dont on ne particularise pas la valeur numérique. Les quantités inconnues se désignent, au contraire, par les dernières lettres x, y, z, etc.

17. On donne en général le nom d'*expression algébrique* à tout ensemble de lettres, ou de lettres et de nombres, réunis par quelques-uns des signes énumérés dans le paragraphe précédent. Ainsi

$$15a^3b(x+5):\sqrt{a-b}$$

est une expression algébrique.

Une expression algébrique est dite *rationnelle* quand elle ne contient point de signe radical. Elle est *irrationnelle* dans le cas contraire.

Une expression algébrique est dite *entière* lorsqu'aucune division n'y est indiquée. Elle est *fractionnaire* dans le cas contraire.

Nous nous occuperons d'abord des expressions algébriques rationnelles et entières. Telle est l'expression :

$$5a^3x-4a^2x^2+16ax^3\ .$$

18. Dans une expression algébrique rationnelle et entière où il n'entre point de parenthèses, les différentes parties séparées par les signes $+$ ou $-$ sont ce que l'on appelle les différents *termes* de l'expression. Telles sont dans l'expression ci-dessus les parties $5a^3x$, $-4a^2x^2$, ou $+16ax^3$.

Une expression algébrique qui n'a qu'un terme prend le nom de *monome*; telle est l'expression $-4a^2x^3$.

Une expression algébrique qui a deux termes prend le nom de *binome*; tel est $3a-5b$.

Une expression algébrique qui a trois termes porte le nom de *trinome*; tel est $2x^2-3ax+5ab$.

En général, une expression algébrique qui a plusieurs termes porte le nom de *polynome*.

19. Dans un monome, il y a quatre éléments à distinguer :

1° Le signe dont il est précédé, et qui peut être $+$ ou $-$. Tout monome qui n'a pas de signe est censé précédé du signe $+$. Les monomes précédés (ou supposés précédés) du signe $+$ sont des monomes *additifs* ou *positifs*. Les monomes précédés du signe $-$ sont des monomes *soustractifs* ou *négatifs*.

2° Le facteur numérique, s'il y en a un. Ce facteur qu'on écrit le premier, porte, ainsi que nous l'avons vu, le nom de *coefficient*.

3° Les lettres qui forment les autres facteurs.

4° Les *exposants* de ces lettres, ou les nombres écrits à droite et un peu au-dessus, qui indiquent combien de fois chaque lettre entre comme facteur dans le produit total.

Ainsi dans $-4a^2x^3$, le signe est $-$, le coefficient est 4, les lettres sont a et x, les exposants sont 2 et 3.

20. Remarque. Si dans un monome on imagine que chaque lettre prenne une valeur numérique déterminée, le produit indiqué par ce monome prendra lui-même une certaine valeur numérique, laquelle devra être prise *positivement* ou *négativement*, c'est-à-dire additivement ou soustractivement, suivant que le monome est affecté du signe $+$ ou du signe $-$. Si, par exemple, dans le monome $4a^2x^3$ on imagine que a ait la valeur 3 et x la valeur 5, le monome reviendra à $-4.3.3.5.5.5$ ou à -4500.

On pourrait attribuer aux lettres des valeurs numériques fractionnaires, sans que pour cela le monome cessât d'être *entier*, algébriquement parlant. Si par exemple on attribue à a la valeur $\frac{1}{2}$ et à x la valeur $\frac{1}{3}$, le monome $-4a^2x^3$ reviendra à $-\frac{1}{27}$.

C'est toujours sous cette forme numérique qu'il faut se représenter un monome; c'est-à-dire qu'on doit se le représenter comme composé d'une valeur absolue, entière ou fractionnaire, et d'un signe qui est $+$ ou $-$.

21. On nomme *degré* d'un monome la somme des exposants des lettres qui y entrent. Les lettres qui n'ont point d'exposant n'entrant qu'une fois comme facteur, sont supposées avoir pour exposant 1. Ainsi le degré du monome $5a^3b^2x$ est $3+2+1$ ou 6.

22. On nomme *termes semblables* dans un polynome ceux qui ne diffèrent que par le coefficient et par le signe. Ils contiennent par conséquent les mêmes lettres affectées des mêmes exposants. Ainsi dans le polynome

$$15a^3b^2x - 6a^2b^2x^2 + 8a^3b^2x + 7ab^2x^3 - 9a^3b^2x - 4a^3b^2x\ ,$$

il y a quatre termes semblables :

$$15a^3b^2x,\quad +8a^3b^2x,\quad -9a^3b^2x \text{ et } -4a^3b^2x\ .$$

On peut toujours réduire les termes semblables en un seul. Il est clair en effet, dans l'exemple précédent, que quelle que soit la valeur numérique de a^3b^2x il faut prendre 15 fois cette valeur, ajouter encore 8 fois la même valeur, puis en retrancher d'abord 9 fois cette même valeur, et encore 4 fois cette valeur. Le résultat sera donc le même que si de $15+8$ ou 23 fois la valeur numérique dont il s'agit, on retranchait $9+4$ ou 13 fois cette même valeur, ce qui donnerait $23-13$ ou 10 fois cette valeur. L'ensemble des quatre termes considérés revient donc à $10\,a^3b^2x$.

Si l'ensemble des termes négatifs l'emportait sur celui des termes positifs, le résultat serait lui-même négatif. On tire de là cette règle : *Pour effectuer la réduction des termes semblables, on fait la somme de tous les coefficients qui ont le signe* $+$ *et la somme de tous les coefficients qui ont le signe* $-$ *; on retranche la plus petite somme de la plus grande, on donné au reste le signe de la plus grande, et on écrit à la suite la partie littérale commune.*

23. Un polynome est dit *homogène* quand tous ses termes sont du même degré (**21**). Tel est le polynome

$$5ab^2x^3-6a^2b^2x^2+8a^4bx\quad,$$

dont tous les termes sont du 6^e degré.

24. *Ordonner* un polynome, c'est écrire ses différents termes dans un ordre tel que les exposants d'une même lettre aillent toujours en augmentant ou toujours en diminuant d'un terme à l'autre. La lettre que l'on choisit pour guide prend le nom de *lettre ordonnatrice*; si l'on écrit les termes de manière que les exposants de la lettre *ordonnatrice* aillent en augmentant, on dit que le polynome est ordonné *par rapport aux puissances croissantes* de cette lettre; si les exposants de la lettre ordonnatrice vont en diminuant, on dit que le polynome est ordonné *par rapport aux puissances décroissantes* de cette lettre.

Ainsi le polynome, déjà considéré ci-dessus,

$$5ab^2x^3-6a^2b^2x^2+8a^4bx$$

est ordonné par rapport aux puissances croissantes de a, ou par rapport aux puissances décroissantes de x.

Dans la plupart des calculs algébriques on a soin d'ordonner ainsi les polynomes; cette opération facilite les calculs, en leur donnant plus de symétrie. Il est clair d'ailleurs que, quel que soit l'ordre dans lequel on écrit les termes, soit additifs, soit soustractifs, d'un polynome, sa valeur demeure la même. Cette valeur se compose évidemment de la somme des valeurs numériques des termes additifs ou positifs, diminuée de la somme des valeurs numériques des termes soustractifs ou négatifs.

Il peut arriver que plusieurs termes d'un polynome contiennent la même puissance de la lettre ordonnatrice; on les ordonne alors entre eux par rapport aux puissances d'une seconde lettre. Par exemple, le polynome

$$3a^2x^2 - 2abx^2 + 6ab^2x - 4a^2b^2$$

ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, contient deux termes affectés de x^2; ces deux termes sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une seconde lettre, a.

L'ensemble des termes qui contiennent la lettre ordonnatrice principale avec son plus haut exposant forme ce qu'on appelle *le groupe le plus élevé du polynome.* S'il y avait plusieurs termes contenant la lettre ordonnatrice avec son moindre exposant, leur ensemble formerait *le groupe le moins élevé.*

CHAPITRE II.

DES QUATRE OPÉRATIONS FONDAMENTALES, ET DES FRACTIONS ALGÉBRIQUES.

25. Nous ne nous occuperons dans ce chapitre et dans le suivant que des expressions algébriques rationnelles, en commençant par celles qui sont entières. Nous supposerons de plus, si elles sont monomes, qu'elles sont positives, ou que, si elles sont polynomes, l'ensemble des termes positifs l'emporte en valeur absolue sur l'ensemble des termes négatifs.

Nous verrons plus tard (chap. IV) le sens qu'il faut attribuer aux opérations algébriques et aux quantités mêmes sur lesquelles elles s'effectuent, lorsque la condition dont nous venons de parler n'est pas remplie.

§ I. De l'addition.

26. En ayant égard à la restriction exprimée dans le numéro précédent, additionner deux expressions algébriques, c'est ajouter à la valeur absolue de la première, la valeur absolue de la seconde.

1° Si les deux expressions à additionner sont deux monomes semblables (**22**), on additionnera les coefficients, et l'on écrira à la suite de la somme la partie littérale commune. Par exemple, les deux expressions $5a^2x^3$ et $7a^2x^3$ ont pour somme $12a^2x^3$.

2° Si les deux expressions à additionner sont deux monomes dissemblables, il suffira d'écrire le second à la suite du premier en les séparant par le signe $+$; et le résultat ne sera susceptible d'aucune simplification. Par exemple, la somme des expressions $5a^2x^3$ et $7a^3x^2$ est

$$5a^2x^3+7a^3x^2 .$$

27. Supposons maintenant que les expressions à additionner soient polynomes; et qu'à $a-b$, par exemple, on se propose d'ajouter $c-d$.

Si à la suite de $a-b$ on écrivait le premier terme de $c-d$ en le faisant précéder du signe $+$, ce qui donnerait $a-b+c$, on aurait ajouté à $a-b$ une quantité trop grande de d ; le résultat serait donc lui-même trop grand de d. Pour lui donner sa véritable valeur, il faut donc le diminuer de d, ce qui se fera en écrivant à sa suite $-d$; et l'on aura

$$a-b+c-d.$$

On voit qu'il a suffi d'écrire à la suite de $a-b$ chacun des termes de $c-d$, avec le signe qu'il avait; car le terme c qui n'était précédé d'aucun signe, devait être regardé comme précédé du signe $+$ (**19**).

En répétant les raisonnements qui précèdent pour des polynomes composés d'autant de termes qu'on voudra, on verrait de même que les termes positifs du second polynome doivent s'écrire à la somme avec le signe $+$, et que les termes négatifs de ce même polynome doivent s'écrire à la somme avec le signe $-$. En d'autres termes: *Pour additionner deux polynomes, on écrit le second à la suite du premier en conservant à chaque terme son signe.*

Remarque. La règle serait évidemment la même pour ajouter un polynome à un monome.

28. Si la somme présente alors des termes semblables, il faut en opérer la réduction (**22**), ce qui simplifie le résultat.

Soient, par exemple, à additionner les polynomes

$$4a^3x^2-6a^2x^3+7ax^4-9x^5$$

et
$$5a^3x^2+2a^2x^3-11ax^4+10x^5,$$

on trouvera
$$9a^3x^2-4a^2x^3-4ax^4+x^5.$$

Soient de même, les polynomes:

$$a^2b+3ab^2-4b^3$$

et
$$5a^2b-3ab^2+b^3,$$

on trouvera
$$6a^2b-3b^3.$$

§ II. De la soustraction.

29. D'après l'hypothèse admise dans ce chapitre, soustraire deux expressions algébriques l'une de l'autre, c'est retrancher de la valeur absolue de la première la valeur absolue de la seconde. 1° Si les deux expressions sont deux monomes semblables, on retranchera le coefficient de la seconde du coefficient de la première, ce que nous supposerons possible, et l'on écrira à la suite de la différence la partie littérale commune. Par exemple, la différence entre $7a^2bx$ et $4a^2bx$ est évidemment $3a^2bx$.

2° Si les expressions à soustraire sont deux monomes dissemblables, on écrira le second à la suite du premier en les séparant par le signe $-$; et le résultat ne sera susceptible d'aucune simplification.

Ainsi la différence des monomes $5ax^4$ et $3a^2x^3$ est $5ax^4-3a^2x^3$.

30. Supposons maintenant que l'expression à soustraire soit polynome, celle dont on soustrait pouvant être polynome ou monome. Par exemple, supposons que de $a-b$, on veuille soustraire $c-d$.

Si à la suite de $a-b$ on écrivait le terme c avec le signe $-$, c'est-à-dire si de $a-b$ on retranchait c, ce qui donnerait $a-b-c$, on aurait évidemment retranché une quantité trop grande de d; le résultat serait donc trop petit de d. Pour lui rendre sa vraie valeur il faudra donc lui ajouter d, ce qui se fera en écrivant $+d$ à la suite, et l'on aura $a-b-c+d$.

On remarquera que le terme c qui avait, ou était censé avoir, le signe $+$ dans le polynome à soustraire, a le signe $-$ au résultat; et que le terme d qui avait le signe $-$ dans le polynome à soustraire, a le signe $+$ au résultat.

En répétant les mêmes raisonnements et les mêmes observations pour des polynomes, composés d'autant de termes qu'on voudra, on verrait de même que tout terme ayant le signe $+$ dans le polynome à soustraire devra être écrit au résultat avec le signe $-$, et que tout terme ayant le signe $-$ dans le polynome à soustraire, devra être écrit au résultat avec le signe $+$. De là cette règle : *Pour soustraire un polynome d'un autre, on l'écrit à la suite de cet autre en changeant le signe de chacun de ses termes.*

Si la différence ainsi obtenue présente des termes semblables, il faut, pour simplifier le résultat, opérer la réduction (**22**) de ces termes.

Exemples. I. Du polynome $9a^3x^2-4a^2x^3-4ax^4+x^5$

on veut soustraire $4a^3x^2-6a^2x^3+7ax^4-9x^5$,

on aura d'abord pour résultat

$$9a^3x^2-4a^2x^3-4ax^4+x^5-4a^3x^2+6a^2x^3-7ax^4+9x^5$$

ou, en réduisant,

$$5a^3x^2+2a^2x^3-11ax^4+10x^5 .$$

II. Si de $a^2+2ab+b^2$ on soustrait $a^2-2ab+b^2$,

on trouvera pour reste

$$a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$$

ou, en réduisant, $4ab$.

31. *Remarque sur l'usage des parenthèses.* Il arrive souvent que l'on a intérêt à regarder un polynome, soit comme la somme, soit comme la différence de deux autres polynomes. Pour cela, on réunit entre parenthèses tous les termes qu'on regarde comme composant le polynome ajouté ou soustrait, et l'on fait précéder ces parenthèses du signe $+$ dans le premier cas, ou du signe $-$ dans le second. Mais, afin d'avoir égard aux règles données (**27**, **30**) pour l'addition ou pour la soustraction des polynomes, si l'on met $+$ devant les parenthèses, on écrit les termes entre parenthèses chacun avec le signe qu'il avait; tandis que si l'on met $-$ devant les parenthèses, on écrit les termes entre parenthèses, chacun avec un signe contraire. Si, dans la suite des calculs ou des raisonnements, on vient à supprimer les parenthèses, c'est-à-dire à effectuer l'opération indiquée sur le polynome qu'elle renfermait, ses termes conservent leur signe si les parenthèses étaient précédées du signe $+$, et chacun d'eux en change au contraire si les parenthèses étaient précédées du signe $-$. Dans un cas, comme dans l'autre, on reproduit ainsi le polynome total, tel qu'il était avant l'introduction des parenthèses.

Soit, par exemple, le polynome

$$a+b-c+d-e+f-g+h\ .$$

On pourra l'écrire de chacune des manières suivantes :

$$a+(b-c+d-e+f-g+h)\ ,$$
$$a+b-(c-d+e-f+g-h)\ ,$$
$$a+b-c+(d-e+f-g+h)\ ,$$
$$a+b-c+d-(e-f+g-h)\ ,$$
etc. ,

et, en supprimant les parenthèses, c'est-à-dire en effectuant l'addition ou la soustraction indiquées, on reproduira le polynome primitif

$$a+b-c+d-e+f-g+h\ .$$

§ III. De la multiplication.

32. D'après les restrictions établies au commencement de ce chapitre, le but que nous nous proposons dans la multiplication algébrique sera le même qu'en arithmétique; c'est-à-dire qu'étant données deux expressions algébriques, monomes ou polynomes, nous chercherons à en former une troisième dont la valeur numérique ou absolue soit le produit des valeurs absolues des deux premières.

Supposons donc d'abord que les deux facteurs soient deux monomes; par exemple $5a^3b^2x$ et $3a^2by^2$.

Le premier monome $5a^3b^2x$ représente le résultat qu'on obtiendrait en multipliant 5 par le produit de trois facteurs égaux à a, puis en multipliant le résultat de cette première multiplication par le produit de deux facteurs égaux à b, et en multipliant enfin le résultat de cette seconde multiplication par le facteur x. Or, on a vu en arithmétique que multiplier un nombre par un produit de plusieurs facteurs revient à multiplier ce nombre successivement par chacun de ces facteurs; et ce principe subsiste pour les quantités fractionnaires comme pour les nombres entiers. Le monome $5a^3b^2x$ pourra donc s'écrire

$$5\times a\times a\times a\times b\times b\times x\ .$$

De même, le monome $3a^2by^2$ pourra s'écrire

$$3\times a\times a\times b\times y\times y\ .$$

Et, en vertu du principe déjà invoqué ci-dessus, on obtiendra le produit demandé en multipliant le premier monome successivement par chacun des facteurs du second; ce qui donnera

$$5\times a\times a\times a\times b\times b\times x\times 3\times a\times a\times b\times y\times y\ .$$

Mais dans un produit de plusieurs facteurs, entiers ou fractionnaires, on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer le produit. On pourra donc, en rapprochant les facteurs égaux, écrire le produit de la manière suivante :

$$5\times 3\times a\times a\times a\times a\times a\times b\times b\times b\times x\times y\times y\ .$$

Le produit de 5 par 3 est 15. Ce produit doit être multiplié successivement par cinq facteurs égaux à a, ce qui revient à le multiplier par le produit effectué de ces cinq facteurs, ou par a^5. On aura donc ainsi $15\times a^5$. Ce produit doit être multiplié à son tour successivement par trois facteurs égaux à b, ce qui revient à le multiplier par le produit effectué de ces trois facteurs, ou par b^3. On aura ainsi $15\times a^5\times b^3$. Multipliant par x, il vient $15\times a^5\times b^3\times x$. Multipliant enfin successivement par deux facteurs égaux à y, ou, ce qui revient au même, par le produit effectué de ces deux facteurs, ou par y^2, il vient enfin $15\times a^5\times b^3\times x\times y^2$; ou en supprimant les signes de multiplication :

$$15a^5b^3xy^2\ .$$

On voit 1° que le coefficient 15 du produit est le produit des coefficients 5 et 3 des deux facteurs monomes; 2° que toutes les lettres qui entrent dans l'un des facteurs entrent au produit; 3° que l'exposant 5 de la lettre a au produit est la somme des exposants 3 et 2 qu'elle avait dans les deux monomes; 4° que l'exposant 3 de la lettre b au produit est la somme des exposants 2 et 1 qu'elle avait dans les deux monomes; 5° que le facteur x, qui n'entre qu'au multiplicande, entre au produit avec le même exposant 1; 6° enfin que le facteur y^2, qui n'entre qu'au multiplicateur, entre au produit avec le même exposant 2.

De là cette règle : *Pour multiplier l'un par l'autre deux monomes positifs, il faut faire le produit des deux coefficients, écrire à la suite toutes les lettres qui entrent dans les deux facteurs monomes, et affecter chacune d'elles d'un exposant égal à la somme de ceux qu'elle a dans ces deux facteurs.* (En appliquant cette règle, on voit que toute lettre qui n'entre que dans l'un des deux monomes entre au produit avec le même exposant.)

Exemple. Le produit de $7a^5b^3cd^2$ par $4ab^2dx^3$ est $28a^6b^5cd^3x^3$.

Remarque. Il résulte de la règle de la multiplication des monomes, que le degré (21) du produit est la somme des degrés des deux monomes facteurs. Ainsi le degré de $5a^3b^2x$ étant 6, et le degré de $3a^2by^2$ étant 5, le degré de leur produit $15a^5b^3xy^2$ est $6+5$ ou 11. De même, le degré de $7a^5b^3cd^2$ étant 11, et le degré de $4ab^2dx^3$ étant 7, le degré de leur produit $28a^6b^5cd^3x^3$ est $11+7$ ou 18.

33. Soit maintenant à multiplier un polynome par un monome, par exemple $a+b-c$ par m. Les lettres a, b, c, m représentent des quantités numériques entières ou fractionnaires. Pour fixer les idées et faciliter le discours, supposons que le multiplicateur monome m ait pour valeur $\frac{4}{3}$; la multiplication aura pour but de prendre les $\frac{4}{3}$ du multiplicande. Si celui-ci se réduisait à $a+b$, on obtiendrait évidemment le produit en prenant les $\frac{4}{3}$ de a, puis les $\frac{4}{3}$ de b, et faisant la somme des produits partiels obtenus; c'est-à-dire que le produit total s'obtiendrait en multipliant séparément a et b par m et faisant la somme de ces produits partiels, ce qui donnerait $am+bm$. Mais en opérant ainsi on a pris les $\frac{4}{3}$ d'un polynome trop grand de c, puisque ce n'était pas $a+b$ qu'il fallait multiplier, mais bien $a+b-c$, ou $a+b$ diminué de c. Le produit obtenu $am+bm$ est donc trop grand des $\frac{4}{3}$ de c ou du produit cm; pour lui rendre sa véritable valeur il faut donc en retrancher cm, ce qui donnera

$$am+bm-cm.$$

Comme on pourrait répéter le même raisonnement pour chaque terme soustractif, on voit que *pour faire le produit d'un polynome par un monome* (positif), *il faut multiplier séparément chaque terme du polynome multiplicande par le monome multiplicateur, en donnant à chaque terme du produit le signe du terme du multiplicande qui l'a fourni.*

Ainsi le produit de $5ax^2+3a^2x-4a^3$ par $6a^2bx$ serait

$$30ab^3x^3+18a^4bx^2-24a^5bx\ .$$

De même, le produit de $3a^3b-2a^2b^2+5ab^3-b^4$ par $4ab^2c$ serait $$12a^4b^3c-8a^3b^4c+20a^2b^5c-4ab^6c.$$

34. Soit enfin à multiplier un polynome par un polynome, par exemple $a-b$ par $c-d$ pour plus de simplicité. Faisons d'abord le produit du multiplicande $a-b$ par le terme c du multiplicateur, ce qui donnera, d'après ce qu'on vient de voir $ac-bc$.

En opérant ainsi, on a multiplié le multiplicande par une quantité trop grande de d, puisque ce n'était pas par c qu'il fallait multiplier, mais bien par c diminué de d. Il s'ensuit que le résultat est lui-même trop grand du produit de $a-b$ par d, c'est-à-dire de $ad-bd$.

Pour lui rendre sa véritable valeur, il faut donc en retrancher $ad-bd$, ce qui donne, d'après les règles de la soustraction, c'est-à-dire en changeant le signe de chaque terme du polynome à soustraire,

$$ac-bc-ad+bd\ .$$

En examinant ce résultat, on voit qu'il contient les produits partiels de chaque terme du multiplicande $a-b$ par chaque terme du multiplicateur $c-d$. Quant au signe dont chaque produit partiel est affecté, on remarque 1° que les termes a et c, qui avaient (ou étaient censés avoir) le signe $+$, ont donné un produit ac qui figure au résultat avec le signe $+$; 2° que les termes b et c, dont l'un avait le signe $-$ et l'autre le signe $+$, ont fourni au résultat le terme négatif $-bc$; 3° que les termes a et d, dont l'un avait le signe $+$ et l'autre le signe $-$, ont fourni au résultat le terme négatif $-ad$; 4° enfin que les termes b et d, qui avaient tous deux le signe $-$, ont fourni au résultat le terme positif $+bd$.

En résumant, on voit que deux termes de même signe ont donné un produit positif, et que deux termes de signe contraire ont donné un produit négatif.

Les mêmes raisonnements appliqués à deux polynomes quelconques montreraient que ces règles sont générales, et que *deux termes de même signe donnent toujours un produit affecté du* *signe* $+$, *et que deux termes de signe contraire donnent un produit affecté du signe* $-$. C'est en cela que consiste ce qu'on appelle la *règle des signes* dans la multiplication.

On l'énonce quelquefois en disant d'une manière abrégée que

$+$	multiplié par	$+$	donne	$+$
$+$		$-$		$-$
$-$		$+$		$-$
$-$		$-$		$+$

On dira donc que, *pour multiplier deux polynomes l'un par l'autre, il faut multiplier chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, en ayant égard à la règle des signes.*

Si le résultat présente des termes semblables, on en opère la réduction.

35. Soit, par exemple, à multiplier $5ax^3-3a^2x^2-4a^3x+a^4$ par $6ax^2-2a^2x+3a^3$. On disposera ces calculs de la manière suivante :

Multiplicande	$5ax^3$	$-\ 3a^2x^2$	$-\ 4a^3x$	$+a^4$		
Multiplicateur	$6ax^2$	$-\ 2a^2x$	$+\ 3a^3$			
1er produit partiel	$30a^2x^5$	$-18a^3x^4$	$-24a^4x^3$	$+6a^5x^2$		
2e »		$-10a^3x^4$	$+\ 6a^4x^3$	$+8a^5x^2$	$-\ 2a^6x$	
3e »			$+15a^4x^3$	$-9a^5x^2$	$-12a^6x$	$+3a^7$
Produit total réduit	$30a^2x^5$	$-28a^3x^4$	$-\ 3a^4x^3$	$+5a^5x^2$	$-14a^6x$	$+3a^7$

On écrit d'abord le multiplicande; on écrit au-dessous le multiplicateur ; on tire un trait horizontal au-dessous du multiplicateur. On fait le produit du multiplicande par le premier terme du multiplicateur ; c'est le premier produit partiel, qu'on écrit au-dessous du trait horizontal. On fait le produit du multiplicande par le second terme du multiplicateur ; c'est le second produit partiel qu'on écrit au-dessous du premier. On obtient ainsi autant de produits partiels qu'il y a de termes au multiplicateur. Au-dessous du dernier produit partiel, on tire un second trait horizontal ; et au-dessous de ce trait on écrit le produit total, qui est la somme des produits partiels, somme dans laquelle on effectue, s'il y a lieu, la réduction des termes semblables.

Il convient d'ordonner (**24**) le multiplicande, le multiplicateur et le produit total par rapport aux puissances d'une même lettre ; les calculs ayant alors plus de symétrie sont plus faciles à vérifier. Il convient aussi d'écrire chaque terme d'un produit partiel au-dessous du terme semblable, s'il y en a, dans le produit partiel précédent; la réduction des termes semblables se trouve ainsi facilitée; il est aussi plus facile d'ordonnèr le produit total.

36. Nous placerons ici trois produits dont on fait un fréquent usage en Algèbre, et qui fournissent autant de théorèmes de calcul.

I.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \quad\quad \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}\ .$$

Cette multiplication montre que *le carré de la somme de deux quantités renferme le carré de la première, plus le double produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde.*

(On se rappelle qu'en arithmétique on nomme *carré* d'une quantité le produit de cette quantité par elle-même.)

Ce théorème, écrit algébriquement, donne

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\ .$$

II.

$$\begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \quad\quad \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}\ .$$

Cette multiplication montre que *le carré de la différence de deux quantités renferme le carré de la première, moins deux fois le produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde.*

Ce théorème, écrit algébriquement, donne

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\ .$$

III.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \quad\quad \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2 \quad\quad\quad -b^2 \end{array}\ .$$

Cette multiplication montre que *le produit de la somme de deux quantités par leur différence, équivaut à la différence de leurs carrés.*

Ce théorème, écrit algébriquement, donne

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2\ .$$

37. Remarques. I. Si le multiplicande et le multiplicateur sont homogènes (25), le produit est lui-même homogène. Car chaque

terme du produit s'obtenant en multipliant un terme du multiplicande par un terme du multiplicateur, le degré de ce terme du produit est la somme des degrés des deux termes qui l'ont fourni (**32**), c'est-à-dire la somme des degrés du multiplicande et du multiplicateur, puisque ceux-ci sont homogènes. Tous les termes du produit sont donc du même degré, c'est-à-dire qu'il est homogène.

On voit de plus que son degré est la somme des degrés des deux polynomes facteurs.

Ainsi, dans l'exemple donné au nº **35**, le multiplicande est homogène et du 4ᵉ degré, le multiplicateur est homogène et du 3ᵉ degré, le produit est homogène et du 7ᵉ degré.

38. II. Par suite des réductions qui s'opèrent entre les termes semblables, certains termes du produit peuvent disparaître; c'est ce qu'on voit dans l'exemple III du nº **36**. Mais il y a toujours au moins deux termes qui ne disparaissent pas : ces termes sont, si le multiplicande et le multiplicateur ont été ordonnés par rapport aux puissances d'une même lettre, le produit du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur, et le produit du dernier terme du multiplicande par le dernier terme du multiplicateur.

En effet : si, pour fixer les idées, on suppose ces polynomes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre; le premier terme du multiplicande et le premier terme du multiplicateur contenant chacun la lettre ordonnatrice à une puissance plus élevée qu'aucun des termes qui suivent, leur produit contiendra cette même lettre à une puissance plus élevée qu'aucun autre terme du produit, et ne pourra conséquemment se réduire avec aucun autre. De même : le dernier terme du multiplicande et le dernier terme du multiplicateur contenant chacun la lettre ordonnatrice à une puissance moins élevée qu'aucun des termes qui précèdent, leur produit contiendra cette même lettre à une puissance moins élevée qu'aucun autre terme du produit, et ne pourra en conséquence se réduire avec aucun autre. Tels sont, dans la multiplication du nº **35**, le premier terme $30a^2x^5$ du produit et le dernier $+3a^7$.

Quelles que soient les réductions qui s'opèrent, il restera donc au moins deux termes au produit. La multiplication suivante offre un exemple du cas où il ne reste que ces deux termes.

$$\begin{array}{l}
a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4 \\
a-b \\
\hline
a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4 \\
\quad\;\; -a^4b-a^3b^2-a^2b^3-ab^4-b^5 \\
\hline
\qquad\qquad a^5-b^5
\end{array}$$

39. III. Il peut arriver que plusieurs termes du multiplicande contiennent la lettre ordonnatrice avec le même exposant; on ordonne alors ces termes entre eux par rapport à une seconde lettre, comme on l'a vu (**24**). La même circonstance peut se présenter au multiplicateur.

On écrit ordinairement les termes d'un même groupe (**24**) dans une même colonne verticale, afin de mieux distinguer les différents groupes. La multiplication s'effectue d'ailleurs comme à l'ordinaire.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{llll}
3a^2x^2 & +6ab^2x & -4a^2b^2 & \\
-2abx^2 & & & \\
\hline
3ax & -4ab & & \\
+2bx & & & \\
\hline
9a^3x^3 & +18a^2b^2x^2 & -12a^3b^2x & \\
-6a^2bx^3 & +12ab^3x^2 & -8a^2b^3x & \\
+6a^2bx^3 & -12a^3bx^2 & -24a^2b^3x & +16a^3b^3 \\
-4ab^2x^2 & +3a^2b^2x^2 & & \\
\hline
9a^3x^3 & -12a^3bx^2 & -12a^3b^2x & +16a^3b^3 \\
-4ab^2x^3 & +26a^2b^2x^2 & -32a^2b^3x & \\
 & +12ab^3x^2 & &
\end{array}$$

Lorsque, comme dans l'exemple précédent, il y a au multiplicande et au multiplicateur plusieurs termes affectés de la plus haute puissance de la lettre ordonnatrice, on peut remarquer que le produit de ces deux groupes de termes donne le groupe le plus élevé (**24**) du produit; c'est-à-dire que les termes provenant de la multiplication de ces deux groupes peuvent bien se réduire entre eux, mais ne sauraient se réduire avec ceux qui proviennent des groupes suivants, attendu qu'ils contiennent la lettre ordonnatrice principale avec un plus haut exposant. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, les termes $3a^2x^2 - 2abx^2$ du multiplicande, et les termes $3ax + 2bx$ du multiplicateur, ont fourni au produit quatre termes qui se sont réduits à deux $9a^3x^3 - 4ab^2x^3$; mais ces termes n'auraient pu se réduire avec les autres qui contiennent tous la lettre ordonnatrice x avec un exposant moindre que 3.

La même chose aurait lieu s'il y avait au multiplicande et au multiplicateur plusieurs termes affectés de la moindre puissance de la lettre ordonnatrice; ces deux groupes de termes donneraient le groupe le moins élevé (**24**) du produit.

Ces remarques nous seront bientôt utiles.

40. IV. On a vu, en arithmétique, et nous avons déjà rappelé, qu'un produit de facteurs entiers ou fractionnaires ne change pas dans quelque ordre qu'on effectue les multiplications. Les quantités

monomes ou polynomes que nous considérons jusqu'ici n'étant, d'après les restrictions établies au commencement de ce chapitre, que des quantités numériques, on peut leur appliquer le même principe. Cette remarque fournit un moyen de vérifier une multiplication algébrique; il suffit de la recommencer en prenant le multiplicateur pour multiplicande et le multiplicande pour multiplicateur; le produit doit rester le même. On pourrait encore recommencer l'opération en changeant de lettre ordonnatrice.

Mais il est préférable d'acquérir de bonne heure assez d'habitude du calcul pour pouvoir se passer de ces sortes de vérification.

§ IV. De la division.

41. La division, en Algèbre comme en arithmétique, est une opération par laquelle, étant donnés un produit de deux facteurs et l'un de ces facteurs, on se propose de retrouver le second facteur. Le produit donné est le dividende, le facteur donné est le diviseur, le facteur cherché est le quotient.

Soit d'abord à diviser un monome (positif) par un autre monome (également positif), par exemple $15a^5b^3xy^2$ par $5a^3b^2x$.

D'après les règles de la multiplication des monomes (32) le coefficient 15 du dividende a été formé en multipliant le coefficient 5 du diviseur par le coefficient inconnu du quotient; on obtiendra donc ce coefficient inconnu en divisant 15 par 5, ce qui donne 3. Le quotient ne peut contenir aucune lettre qui ne soit pas au dividende. Or, l'exposant 5 de la lettre a au dividende est la somme de l'exposant 3 de la même lettre au diviseur et de l'exposant inconnu de cette même lettre au quotient; on obtiendra donc cet exposant inconnu en retranchant 3 de 5, ce qui donne pour reste 2 et montre que le quotient doit contenir le facteur a^2. De même, l'exposant 3 de la lettre b au dividende est la somme de l'exposant 2 de cette même lettre au diviseur et de l'exposant inconnu de cette même lettre au quotient; on obtiendra donc cet exposant inconnu en retranchant 2 de 3, ce qui donne pour reste 1, et montre que le quotient contiendra le facteur b. La lettre x entrant avec le même exposant au dividende et au diviseur, ne saurait entrer au quotient. La lettre y n'entrant pas au diviseur, doit entrer au quotient avec le même exposant qu'au dividende. Le quotient sera donc $3a^2by^2$. Et, en effet, en multipliant $5a^3b^2x$ par $3a^2by^2$ on retrouve bien $15a^5b^3xy^2$.

De là cette règle : *pour diviser deux monomes* (positifs) *l'un par l'autre, divisez le coefficient du monome dividende par le coefficient du monome diviseur, vous obtiendrez le coefficient du monome quotient. Examinez successivement chaque lettre du dividende. Si elle* *est commune au dividende et au diviseur, et que son exposant au dividende surpasse son exposant au diviseur, écrivez-la au quotient avec un exposant égal à la différence de ces exposants. Si elle a le même exposant au dividende et au diviseur, dispensez-vous de l'écrire au quotient. Si elle n'entre qu'au dividende, écrivez-la avec le même exposant au quotient.*

Exemple. Le quotient de $28a^6b^5cd^3x^3$ par $7a^5b^3cd^2$ est $4ab^2dx^3$.

42. Remarques. I. La division serait impossible : 1° si le diviseur contenait une lettre qui n'entrât pas au dividende ; 2° si une lettre avait au diviseur un exposant plus élevé qu'au dividende ; 3° si le coefficient du dividende n'était pas exactement divisible par le coefficient du diviseur.

II. Lorsqu'une lettre entre au dividende et au diviseur avec le même exposant, si on lui appliquait la même règle qu'aux autres lettres, on devrait l'écrire au quotient avec un exposant égal à la différence des exposants qu'elle a au dividende et au diviseur, c'est-à-dire avec l'exposant *zéro*. Ainsi, le quotient de $15a^3b^2x$ par $3a^3b$ serait $5a^0bx$.

Or, nous avons vu que le quotient doit être $5bx$; le facteur a^0 représente donc un facteur qui n'altère pas le produit ; c'est-à-dire qu'il représente l'unité.

On se sert quelquefois de ce symbole pour conserver au quotient la trace d'un facteur du dividende qui disparaîtrait sans cela. Mais il faut bien se rappeler qu'une expression telle que a^0 est le symbole de l'unité, ou que a^0 est égal à 1.

43. Soit maintenant à diviser un polynome par un monome (positif), par exemple $30a^3bx^3 + 18a^4bx^2 - 24a^5bx$ par $6a^2bx$.

Le quotient sera un polynome, car le produit d'un monome par un monome serait un monome. Or, on a vu (33) que le produit d'un polynome par un monome est un polynome composé du même nombre de termes affectés des mêmes signes, et qu'ils s'obtiennent en multipliant respectivement chaque terme du polynome multiplicande par le monome multiplicateur. On formera donc le quotient demandé en divisant chaque terme du polynome dividende par le monome diviseur, et affectant chaque terme du quotient du même signe que le terme du dividende qui l'a fourni.

Le quotient de $30a^3bx^3$ par $6a^2bx$ est $5ax^2$; on l'écrira au quotient total, où il sera censé avoir le signe $+$, attendu qu'il sera le premier. Le quotient de $18a^4bx^2$ par $6a^2bx$ est $3a^2x$; on l'écrira avec le signe $+$ à la suite du premier terme du quotient total. Le quotient de $24a^5bx$ par $6a^2bx$ est $4a^3$; on l'écrira avec le signe $-$ à la suite des deux premiers termes du quotient total.

Le quotient total sera ainsi $5ax^2+3a^2x-4a^3$. On peut vérifier, en effet, qu'en multipliant ce quotient par le diviseur $6a^2bx$ on reproduirait le polynome dividende.

On voit que *pour diviser un polynome par un monome* (positif), *il faut diviser chaque terme du polynome dividende par le monome diviseur, et affecter chaque terme du quotient du même signe que le terme du dividende qui l'a fourni.*

Ainsi, le quotient de $12a^4b^3c-8a^3b^4c+20a^2b^5c-4ab^6c$ par $4ab^2c$ est $3a^3b-2a^2b^2+5ab^3-b^4$.

Remarque. La division serait impossible si un terme quelconque du polynome dividende n'était pas exactement divisible (**42**) par le monome diviseur.

44. Lorsque tous les termes d'un polynome admettent un facteur commun, il est souvent utile de mettre ce facteur *en évidence*, c'est-à-dire de décomposer le polynome en deux facteurs dont l'un soit le facteur monome commun à tous ses termes, et dont l'autre soit le quotient du polynome proposé par le facteur commun; ce quotient ou ce facteur polynome se met alors entre parenthèses. Par exemple, on a vu tout à l'heure que le polynome

$$30a^3bx^3+18a^4bx^2-24a^5bx$$

était divisible par $6a^2bx$ et donnait pour quotient

$$5ax^2+3a^2x-4a^3.$$

On peut donc écrire ce polynome de la manière suivante:

$$(5ax^2+3a^2x-4a^3)\,6a^2bx$$

qui exprime le produit du quotient par le diviseur (**13**). Le facteur monome peut se mettre indifféremment à droite ou à gauche de la parenthèse.

Soit de même le polynome $12a^4b^3c-8a^3b^4c+20a^2b^5c-4ab^6c$. On reconnaît que le facteur $4ab^2c$ est commun à tous ses termes; on peut donc mettre ce facteur en évidence, en écrivant entre parenthèses le quotient du polynome proposé par le facteur mis hors parenthèses. On aura ainsi:

$$4ab^2c\,(3a^3b-2a^2b^2+5ab^3-b^4).$$

On fait encore usage d'une autre notation qui remplace les parenthèses. Lorsqu'un polynome contient plusieurs termes affectés de la même puissance de la lettre ordonnatrice, on écrit quelquefois ces termes dans une même colonne verticale; mais la lettre ordonnatrice ne s'écrit qu'une fois dans cette colonne, et on la sépare des autres facteurs par un trait vertical, qui tient lieu de parenthèses. Ainsi, au lieu d'écrire

$$9a^3x^3 - 4ab^2x^3 - 12a^3bx^2 + 26a^2b^2x^2 + 12ab^3x^2 - 12a^3b^2x - 32a^2b^3x + 16a^3b^3\ ,$$

on écrira

$$\left.\begin{array}{r} 9a^3 \\ -4ab^2 \end{array}\right| x^3 \left.\begin{array}{r} -12a^3b \\ +26a^2b^2 \\ +12ab^3 \end{array}\right| x^2 \left.\begin{array}{r} -12a^3b^2 \\ -32a^2b^3 \end{array}\right| x + 16a^3b^3$$

On voit que x^3 est mis en facteur commun par un trait vertical pour les deux premiers termes, x^2 pour les trois suivants, et x pour les deux suivants.

45. Soit enfin à diviser un polynome par un polynome; par exemple,

$$30a^2x^5 - 28a^3x^4 - 3a^4x^3 + 5a^5x^2 - 14a^6x + 3a^7$$

par

$$5ax^3 - 3a^2x^2 - 4a^3x + a^4\ .$$

On commencera par écrire le diviseur à la droite du dividende, en les ordonnant par rapport aux puissances d'une même lettre, s'ils n'étaient pas déjà ordonnés; et on les séparera par un trait vertical. On tirera un trait horizontal au-dessous du diviseur pour le séparer du quotient. Ces dispositions sont indiquées dans le tableau ci-dessous; les polynomes y sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de la lettre x.

	Dividende.	Diviseur.
	$30a^2x^5 - 28a^3x^4 - 3a^4x^3 + 5a^5x^2 - 14a^6x + 3a^7$	$5ax^3 - 3a^2x^2 - 4a^3x + a^4$
	$-30a^2x^5 + 18a^3x^4 + 24a^4x^3 - 6a^5x^2$	$6ax^2 - 2a^2x + 3a^3$ Quotient.
1er reste...	$-10a^3x^4 + 21a^4x^3 - a^5x^2 - 14a^6x + 3a^7$	
	$+10a^3x^4 - 6a^4x^3 - 8a^5x^2 + 2a^6x$	
2e reste..........	$+15a^4x^3 - 9a^5x^2 - 12a^6x + 3a^7$	
	$-15a^4x^3 + 9a^5x^2 + 12a^6x - 3a^7$	
3e reste..........	0	

Concevons que le quotient inconnu soit ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la même lettre. Comme le dividende est le produit du diviseur par le quotient, le produit partiel du premier terme du diviseur par le premier terme du quotient doit donner le premier terme du dividende; car on a vu (38, II) que ce produit partiel n'a pu se réduire avec aucun autre. On obtiendra donc le premier terme du quotient en divisant le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur.

Mais ici il sera nécessaire d'avoir égard aux signes, car en ordonnant les deux polynomes il peut également arriver que le premier terme ait le signe $+$ ou le signe $-$. Or, la *règle des signes* donnée pour la multiplication (34) nous apprend que si le produit de deux termes est positif, ces deux termes sont de même signe; et que si le produit est négatif, les deux termes sont de signe contraire. On peut donc former le tableau suivant :

$+$	divisé par	$+$	donne au quotient	$+$
$+$		$-$		$-$
$-$		$+$		$-$
$-$		$-$		$+$

ce qui montre que *le quotient de deux termes de même signe a le signe* $+$ *, et que le quotient de deux termes de signe contraire a le signe* $-$; règle qui est la même que pour la multiplication.

Dans l'exemple actuel, le premier terme du dividende et le premier terme du diviseur étant positifs, le premier terme du quotient sera positif. On divisera donc $30a^2x^5$ par $5ax^3$, ce qui donne $6ax^2$, et l'on écrira ce premier terme du quotient au-dessous du diviseur.

Le dividende étant le produit du diviseur par le quotient, contient tous les produits partiels du diviseur par les différents termes du quotient. Le premier terme du quotient étant trouvé, on peut donc multiplier le diviseur par ce terme, et retrancher le produit ainsi obtenu du dividende; le reste ne contiendra plus que les produits du diviseur par les termes suivants du quotient, et sera par conséquent un nouveau dividende plus simple sur lequel on pourra opérer comme sur le premier. Ce calcul se fait de la manière suivante : $+5ax^3$ multiplié par $+6ax^2$ donne $+30a^2x^5$, et, pour soustraire, $-30a^2x^5$, qu'on écrit au-dessous du premier terme du dividende; $-3a^2x^2$ par $+6ax^2$ donne $-18a^3x^4$, et, pour soustraire, $+18a^3x^4$, qu'on écrit au-dessous du dividende, à la suite du terme précédent; $-4a^3x$ par $+6ax^2$ donne $-24a^4x^3$, et, pour soustraire, $+24a^4x^3$, qu'on écrit au-dessous du dividende à la suite des deux termes précédents; enfin $+a^4$ par $+6ax^2$ donne $+6a^5x^2$, et, pour soustraire, $-6a^5x^2$, qu'on écrit encore au-dessous du dividende à la suite des trois termes précédents. On tire un trait horizontal au-dessous du polynome soustrait; on opère la réduction des termes semblables, et l'on obtient pour premier reste

$$-10a^3x^4+21a^4x^3-a^5x^2-14a^6x+3a^7 .$$

Ce premier reste étant le produit du diviseur par l'ensemble des termes inconnus du quotient, et se trouvant ordonné comme le diviseur et le quotient, par rapport aux puissances décroissantes de la lettre x, son premier terme est le produit exact du premier terme du diviseur par le premier des termes inconnus du quotient, puisque ce produit partiel n'a pu se réduire avec aucun autre. On aura donc le second terme du quotient en divisant le premier terme du premier reste, ou second dividende, par le premier terme du diviseur. Or, $-10a^3x^4$ divisé par $+5ax^3$ donne $-2a^2x$; on écrit ce quotient partiel à la suite du premier terme du quotient total.

Connaissant le second terme du quotient, on peut faire le produit du diviseur par ce second terme, et retrancher ce produit du premier reste; le second reste qu'on obtiendra ne contiendra plus que les produits partiels du diviseur par les termes suivants du quotient. En effectuant ces calculs de la même manière que ci-dessus, on obtient pour second reste

$$+15a^4x^3-9a^5x^2-12a^6x+3a^7 .$$

Ce second reste étant le produit du diviseur par l'ensemble des termes inconnus du quotient, et se trouvant ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la lettre x, son premier terme est le produit exact du premier terme du diviseur par le premier des termes inconnus du quotient, puisque ce produit partiel n'a pu se réduire avec aucun autre. On obtiendra donc le troisième terme du quotient en divisant le premier terme du second reste par le premier terme du diviseur. Or, $+15a^4x^3$ divisé par $+5ax^3$ donne $+3a^3$; on écrit ce quotient partiel à la suite des deux premiers termes du quotient total.

Connaissant le troisième terme du quotient, on peut multiplier le diviseur par ce terme, et soustraire le produit du second reste; le troisième reste qu'on obtiendra ne contiendra plus que les produits partiels du diviseur par les termes suivants du quotient, s'il y en a. En effectuant ces calculs, on trouve *zéro* pour troisième reste; il en résulte que l'opération est terminée, et que le quotient total est

$$6ax^2-2a^2x+3a^3 .$$

En multipliant, en effet, le diviseur par ce quotient, on reproduirait le dividende (34).

De tout ce qui précède, on tire la règle suivante : *Pour diviser deux polynomes l'un par l'autre, on écrit le diviseur à la droite du dividende en les ordonnant par rapport aux puissances d'une même lettre; on les sépare par un trait vertical, et l'on tire un trait horizontal au-dessous du diviseur pour le séparer du quotient. On divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; on obtient ainsi le premier terme du quotient, qu'on écrit au-dessous* *du diviseur. On multiplie le diviseur par ce terme; on soustrait le produit du dividende, et l'on obtient un premier reste. On divise le premier terme de ce premier reste par le premier terme du diviseur; on obtient ainsi le second terme du quotient; on l'écrit à la suite du premier; on multiplie le diviseur par ce second terme; on soustrait le produit du premier reste, et l'on obtient un second reste. On opère sur ce second reste et sur les suivants, comme sur le premier; on obtient ainsi les termes successifs du quotient. Si le dividende est le produit exact du diviseur par un polynome entier, on obtient* zéro *pour dernier reste, et l'opération est terminée.*

(*Dans chaque division partielle de monomes, il faut observer la* règle des signes, *qui consiste en ce que deux termes de même signe donnent un quotient positif, et deux termes de signe contraire un quotient négatif.*)

46. Il peut arriver que le dividende et le diviseur contiennent plusieurs termes affectés de la plus haute puissance de la lettre ordonnatrice; dans ce cas, la même circonstance peut se présenter au quotient. Or, on a vu (**39**) que le groupe le plus élevé du multiplicande, multiplié par le groupe le plus élevé du multiplicateur, donne le groupe le plus élevé du produit, sans réduction avec les autres groupes. Si donc on divise le groupe le plus élevé du dividende par le groupe le plus élevé du diviseur, on obtiendra le groupe le plus élevé du quotient, lequel groupe pourra n'avoir qu'un seul terme, mais en renfermera ordinairement plusieurs. On multipliera le diviseur par le groupe de termes obtenus, on retranchera le produit du dividende, et l'on obtiendra un premier reste, sur lequel on opérera comme sur le dividende; et ainsi de suite.

Le tableau ci-dessous offre un exemple du cas qui nous occupe :

$$
\begin{array}{l|l}
\text{Dividende.} & \text{Diviseur.} \\
\left.\begin{array}{r}9a^3\\-4ab^2\end{array}\right|x^3 \left.\begin{array}{r}-12a^3b\\+26a^2b^2\\+12ab^3\end{array}\right|x^2 \left.\begin{array}{r}-12a^3b^2\\-32a^2b^3\end{array}\right|x +16a^3b^3 & \left.\begin{array}{r}3a^2\\-2ab\end{array}\right|x^2+6ab^2x-4a^2b^2 \\
\hline
& \text{Quotient.} \\
\left.\begin{array}{r}-9a^3\\+4ab^2\end{array}\right|x^3 \left.\begin{array}{r}-18a^2b^2\\-12ab^3\end{array}\right|x^2 \left.\begin{array}{r}+12a^3b^2\\+8a^2b^3\end{array}\right|x & \left.\begin{array}{r}3a\\+2b\end{array}\right|x-4ab \\
\hline
\text{1}^{\text{er}}\text{ reste...}\quad \left.\begin{array}{r}-12a^3b\\+8a^2b^2\end{array}\right|x^2-24a^2b^3x\quad+16a^3b^3 & \\
\qquad\qquad\quad \left.\begin{array}{r}+12a^3b\\-8a^2b^2\end{array}\right|x^2+24a^2b^3x\quad-16a^3b^3 & \\
\hline
\text{2}^{\text{e}}\text{ reste...}\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Après avoir disposé le dividende et le diviseur comme ce tableau l'indique, on divise le groupe le plus élevé du dividende, c'est-à-dire $(9a^3-4ab^2)x^3$, par le groupe le plus élevé du diviseur, savoir $(3a^2-2ab)x^2$. Le facteur $9a^3-4ab^2$ divisé par le facteur $3a^2-2ab$,

$$\begin{array}{r|l} 9a^3-4ab^2 & 3a^2-2ab \\ \cline{2-2} -9a^3+6a^2b & 3a+2b \\ \hline +6a^2b-4ab^2 & \\ -6a^2b+4ab^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

donne pour quotient $3a+2b$. Et comme le facteur x^3 divisé par le facteur x^2 donne pour quotient x, le quotient des deux groupes considérés sera $(3a+2b)x$. On écrit ce groupe de termes au quotient total, on multiplie le diviseur par ce groupe, on soustrait le produit du dividende, et l'on obtient le premier reste.

Le groupe le plus élevé de ce premier reste est $(-12a^3b+8a^2b^2)x^2$. Pour le diviser par le groupe le plus élevé du quotient, ou par $(3a^2-2ab)x^2$, il suffit de diviser $-12a^3b+8a^2b^2$ par $3a^2-2ab$, puisque x^2 divisé par x^2 donne l'unité. Effectuant cette division partielle

$$\begin{array}{r|l} -12a^3b+8a^2b^2 & 3a^2-2ab \\ \cline{2-2} +12a^3b-8a^2b^2 & -4ab \\ \hline 0 & \end{array}$$

on trouve $-4ab$, qu'on écrit à la droite du premier groupe de termes du quotient. On multiplie le diviseur par le nouveau terme obtenu, on soustrait le produit du premier reste; et comme on obtient pour second reste *zéro*, il s'ensuit que l'opération est terminée, et que le quotient total cherché est

$$\left.\begin{array}{r} 3a \\ +2b \end{array}\right| x-4ab\ .$$

47. Remarques. I. On reconnaît que la division ne peut s'effectuer exactement : 1° lorsque le diviseur contient une lettre qui n'entre pas au dividende; 2° lorsque la plus haute puissance d'une lettre au diviseur surpasse la plus haute puissance de la même lettre au dividende; 3° lorsque, après avoir ordonné le dividende et le diviseur par rapport aux puissances, décroissantes par exemple, d'une même lettre, quelle qu'elle soit, le premier terme du dividende n'est pas exactement divisible par le premier terme du diviseur, ou que le groupe de termes le plus élevé du dividende n'est pas exactement divisible par le groupe le plus élevé du diviseur; 4° lorsque le dernier terme du dividende n'est pas exactement divisible par le dernier terme du diviseur, ou que le groupe de termes le moins élevé du dividende n'est pas exactement divisible par le groupe le

moins élevé du diviseur; 5° enfin lorsque, dans le courant de l'opération, le premier terme d'un reste n'est pas exactement divisible par le premier terme du diviseur, ou que le premier groupe de termes de ce reste n'est pas exactement divisible par le premier groupe du diviseur.

II. Lorsqu'il se manifeste une impossibilité dans le courant de l'opération, le reste auquel on est parvenu est ce qu'on appelle le *reste de l'opération.* Si l'on ajoute ce reste au produit du diviseur par l'ensemble des termes obtenus au quotient, on doit reproduire le dividende.

Soit, par exemple, à diviser

$$12a^2x^3+7a^3x^2-8a^4x+2a^5$$

par

$$4ax^2+5a^2x-6a^3.$$

En opérant comme précédemment,

$$\begin{array}{l r|l}
 & 12a^2x^3+\ 7a^3x^2-\ 8a^4x+\ 2a^5 & 4ax^2+5a^2x-6a^3 \\ \cline{3-3}
 & -12a^2x^3-15a^3x^2+18a^4x & 3ax-2a^2 \\ \cline{2-2}
\text{1}^{\text{er}}\text{ reste}\ldots\ldots & -\ 8a^3x^2+10a^4x+\ 2a^5 & \\
 & +\ 8a^3x^2+10a^4x-12a^5 & \\ \cline{2-2}
\text{2}^{\text{e}}\text{ reste}\ldots\ldots & +20a^4x-10a^5 &
\end{array}$$

on obtient d'abord au quotient les deux termes $3ax$ et $-2a^2$; puis l'on parvient à un second reste $20a^4x-10a^5$ dont le premier terme n'est pas divisible par le premier terme du diviseur, puisqu'il contient la lettre ordonnatrice à une puissance moindre. Il en résulte que l'opération ne peut s'effectuer exactement, et que le dividende est égal au produit du diviseur par $3ax-2a^2$, augmenté du reste $20a^4x-10a^5$; ce qu'il est facile de vérifier.

48. Nous placerons ici quelques théorèmes de calcul, dont on fait assez souvent usage, et qui se rattachent à la division.

I. Soit le binome x^m-a^m, dans lequel m désigne un nombre entier quelconque. Proposons-nous de diviser ce binome par le binome $x-a$.

$$\begin{array}{l|l}
x^m-a^m & x-a \\ \cline{2-2}
-x^m+ax^{m-1} & x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\text{etc}\ldots+a^{m-1} \\ \cline{1-1}
\quad +ax^{m-1}-a^m & \\
\quad -ax^{m-1}+a^2x^{m-2} & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad +a^2x^{m-2}-a^m & \\
\qquad\quad -a^2x^{m-2}+a^3x^{m-3} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad +a^3x^{m-3}-a^m\ \text{etc.} & \\
\qquad\qquad\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
\qquad\qquad\quad +a^{m-1}x-a^m & \\
\qquad\qquad\quad -a^{m-1}x+a^m & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\quad +a^m-a^m\ \text{ou } \textit{zéro}. &
\end{array}$$

Ces binomes étant ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x, divisons le premier terme x^m du dividende par le premier terme x du diviseur. Le quotient partiel sera x affecté d'un exposant égal à la différence entre m et 1, c'est-à-dire x^{m-1}. Multipliant le diviseur par ce terme, et soustrayant le produit du dividende, on obtient pour premier reste $+ax^{m-1}-a^m$. Divisons ax^{m-1} par x, le quotient sera $+ax^{m-2}$, puisque l'exposant de x devra être diminué d'une unité. Multipliant le diviseur par ce terme, et soustrayant le produit du dividende, on obtient pour second reste $+a^2x^{m-2}-a^m$; et ainsi de suite.

Or, si l'on examine ces restes successifs, on reconnaît que, dans leur premier terme, l'exposant de a va sans cesse en augmentant d'une unité d'un reste à l'autre, tandis que l'exposant de x va en diminuant d'une unité; de sorte que la somme des deux exposants reste toujours égale à m. Il viendra donc un moment où l'exposant de a sera devenu m, tandis que x aura disparu; en sorte qu'à cet instant on aura pour reste $a^m - a^m$ ou *zéro*. D'où il résulte que : $\mathrm{x}^m - \mathrm{a}^m$ *est divible par* $\mathrm{x}-\mathrm{a}$.

Quant au quotient, il est facile à retenir. Tous ses termes sont positifs, et ont pour coefficient l'unité; l'exposant de x va en diminuant d'une unité d'un terme à l'autre; celui de a va en augmentant d'une unité. Le premier terme est x^{m-1}. Quant au dernier, on le trouvera en remarquant que les termes consécutifs du quotient ne sont autre chose que les premiers termes des restes successifs dans lesquels l'exposant de x a été diminué d'une unité; or, le reste qui précède $a^m - a^m$, est, d'après la loi des exposants $+a^{m-1}x - a^m$; le terme correspondant du quotient est donc $+a^{m-1}$; et ce terme est le dernier, puisque le reste suivant est zéro.

On démontrerait d'une manière analogue que :

II. $x^m - a^m$ est divisible par $x+a$ lorsque m est pair.

III. $x^m + a^m$ est divisible par $x+a$ lorsque m est impair.

IV. $x^m + a^m$ n'est jamais divisible par $x-a$.

Nous engageons le lecteur à développer lui-même la démonstration de chacun de ces théorèmes. (Voy. le n° **392**.)

§ V. Des fractions algébriques.

49. Lorsqu'une division est impossible, on se contente de l'indiquer : pour cela on écrit le diviseur au-dessous du dividende en les séparant par un trait horizontal appelé *barre de division* (**11**).

Ainsi, dans l'exemple du n° **47**, lorsque l'on est parvenu au reste $20a^4x-10a^5$, l'opération ne pouvant être continuée, on indiquerait le quotient de ce reste par le diviseur, sous la forme

$$\frac{20a^4x-10a^5}{4ax^2+5a^2x-6a^3}$$

et cette expression serait ce qu'il faut ajouter au quotient déjà obtenu pour le compléter.

Une expression de cette forme est ce qu'on nomme une *fraction algébrique*; mais le sens qu'on attache ici au mot fraction n'est point le même qu'en arithmétique. Dans une fraction ordinaire, en effet, les deux termes sont nécessairement entiers; dans une fraction algébrique, au contraire, les deux termes peuvent prendre des valeurs quelconques, entières ou fractionnaires, par suite des valeurs particulières attribuées aux lettres qui y entrent. (Ils peuvent même prendre des valeurs négatives, mais nous faisons abstraction de ce cas dans le présent chapitre.) On ne doit donc entendre par fraction algébrique qu'un quotient dans lequel le dividende prend le nom de numérateur, et le diviseur celui de dénominateur.

Le calcul des fractions algébriques a d'ailleurs la plus grande analogie avec celui des fractions ordinaires.

50. *On ne change pas la valeur d'une fraction algébrique en multipliant ou en divisant à la fois ses deux termes par une même quantité.*

Supposons, en effet, pour fixer les idées, que, par suite des valeurs attribuées aux lettres qui entrent dans la fraction algébrique, son numérateur prenne la valeur $\frac{6}{5}$ et son dénominateur la valeur $\frac{7}{11}$, la valeur de la fraction sera le quotient de ces deux expressions fractionnaires, c'est-à-dire

$$\frac{6\times11}{5\times7}.$$

Concevons maintenant que l'on multiplie les deux termes $\frac{6}{5}$ et $\frac{7}{11}$ par une même quantité qui ait la valeur $\frac{4}{3}$; ces deux termes deviendront respectivement $\frac{6\times4}{5\times3}$ et $\frac{7\times4}{11\times3}$; leur quotient deviendra donc

$$\frac{6\times4\times11\times3}{5\times3\times7\times4}$$

ou, en supprimant les facteurs communs 4 et 3,

$$\frac{6 \times 11}{5 \times 7},$$

c'est-à-dire que le quotient n'a pas changé.

On démontrerait de la même manière que le quotient ne change pas si l'on divise les deux termes par une même quantité.

Ainsi les expressions

$$\frac{2a}{3b}, \qquad \frac{4a^2}{6ab}, \qquad \frac{4a^2-2ab}{6ab-3b^2},$$

sont des fractions équivalentes; car on obtient la seconde en multipliant les deux termes de la première par $2a$, et la troisième en multipliant les deux termes de la première par $2a-b$; ou bien on obtiendrait la première en divisant les deux termes de la seconde par $2a$, ou les deux termes de la troisième par $2a-b$.

51. Pour simplifier une fraction, il faut supprimer les facteurs communs à ses deux termes. Ces facteurs sont faciles à apercevoir si les deux termes sont monomes.

Soit, par exemple, la fraction

$$\frac{48a^3b^2x^4}{60a^2bx^6},$$

on aperçoit sur-le-champ que les deux termes sont divisibles par $12a^2bx^4$; et, en effectuant la division, il vient

$$\frac{4ab}{5x^2}.$$

Si les deux termes sont polynomes, il faut chercher les facteurs communs à tous les termes de chaque polynome, et les mettre en évidence (**44**); on aperçoit alors facilement les facteurs monomes qui peuvent être communs aux deux termes de la fraction. Quant aux polynomes mis entre parenthèses, il arrive quelquefois qu'ils se décomposent à vue en facteurs polynomes plus simples, et que cette décomposition met en évidence des facteurs polynomes communs aux deux termes de la fraction.

Soit, par exemple, la fraction

$$\frac{36a^5b^2-36a^3b^4}{54a^4b^3-108a^3b^4+54a^2b^5}.$$

Le numérateur peut se mettre sous la forme

$$36a^3b^2(a^2-b^2)$$

ou, en vertu de ce qu'on a vu au n° **36**,

$$36a^3b^2(a+b)(a-b).$$

Le dénominateur peut s'écrire

$$54a^2b^3(a^2-2ab+b^2)$$

ou, en vertu de ce qu'on a vu au lieu cité,

$$54a^2b^3(a-b)(a-b) \quad .$$

La fraction proposée peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{36a^3b^2(a+b)(a-b)}{54a^2b^3(a-b)(a-b)} \quad .$$

On reconnaît alors que ses deux termes sont divisibles par $18a^2b^2$ et par $(a-b)$; supprimant ces facteurs communs, il reste

$$\frac{2a(a+b)}{3b(a-b)} \quad \text{ou} \quad \frac{2a^2+2ab}{3ab+3b^2} \quad .$$

L'habitude de ces transformations est d'un grand secours dans les calculs algébriques.

52. Si l'on a une fraction algébrique jointe à une quantité entière, on peut réduire le tout en une seule expression fractionnaire d'après les mêmes règles qu'en arithmétique. En effet, il est clair qu'on ne change pas la valeur de la quantité entière en la multipliant et en la divisant en même temps par le dénominateur de la fraction; on obtient ainsi deux quantités fractionnaires de même dénominateur; et l'on peut les réunir en une seule, en faisant la somme des numérateurs et donnant à cette somme le dénominateur commun; car diviser une somme revient à diviser ses parties et à faire la somme des quotients.

Soit, par exemple, l'expression

$$4b+\frac{(a-b)^2}{a} \quad \text{ou} \quad 4b+\frac{a^2-2ab+b^2}{a} \quad ,$$

on aura successivement

$$\frac{4ab+a^2-2ab+b^2}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{a^2+2ab+b^2}{a}$$

ou enfin (36)

$$\frac{(a+b)^2}{a} \quad .$$

Réciproquement : lorsqu'on a une expression fractionnaire dans laquelle, le numérateur et le dénominateur étant ordonnés par rapport aux puissances d'une même lettre, le premier terme du numérateur est exactement divisible par le premier terme du dénominateur, on peut opérer une ou plusieurs divisions partielles, qui fourniront un quotient partiel entier, et l'on complétera ce quotient par une fraction ayant pour numérateur le reste et pour dénominateur le diviseur, c'est-à-dire le dénominateur de l'expression proposée.

Soit, par exemple, la fraction

$$\frac{12a^2x^3+7a^3x^2-8a^4x+2a^5}{4ax^2+5a^2x-6a^3}.$$

On a vu au n° **47** que si l'on divise le numérateur par le dénominateur on obtient pour quotient $3ax-2a^2$ et pour reste $20a^4x-10a^5$. On pourra donc mettre la fraction proposée sous la forme

$$3ax-2a^2+\frac{20a^4x-10a^5}{4ax^2+5a^2x-6a^3}.$$

Soit de même la fraction

$$\frac{(a-b)^2}{a-2b} \quad \text{ou} \quad \frac{a^2-2ab+b^2}{a-2b}.$$

Effectuant la division, on obtient pour quotient a et pour reste b^2; on peut donc écrire la fraction proposée sous la forme

$$a+\frac{b^2}{a-2b}.$$

Ces diverses transformations sont au nombre de celles dont l'Algèbre fait un plus fréquent usage, soit dans la solution des problèmes, soit dans la démonstration des théorèmes de calcul.

53. Pour additionner deux fractions algébriques de même dénominateur, il suffit évidemment d'additionner les numérateurs et de donner à la somme le dénominateur commun; puisque, comme nous l'avons rappelé déjà, diviser une somme est la même chose que de diviser séparément les parties et de faire la somme des quotients.

Si les fractions à additionner n'ont pas le même dénominateur, on les réduira au même dénominateur en multipliant les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres, ce qui ne changera pas leur valeur (**50**).

Soit, par exemple, à additionner les fractions

$$\frac{a^2-ab}{a+b}, \quad \frac{a^2+ab}{a-b}, \quad \frac{a^2-b^2}{a}.$$

Multipliant les deux termes de la première par $a-b$ et par a, les deux termes de la seconde par $a+b$ et par a, et les deux termes de la troisième par $a+b$ et par $a-b$, elles deviendront :

$$\frac{a^4-2a^3b+a^2b^2}{a^3-a^2b}, \quad \frac{a^4+2a^3b+a^2b^2}{a^3-a^2b}, \quad \frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{a^3-a^2b};$$

ajoutant les numérateurs, et donnant à la somme le dénominateur commun, il viendra, après réductions,

$$\frac{3a^4+b^4}{a^3-a^2b}.$$

Si les dénominateurs des fractions proposées ont des facteurs communs, on peut obtenir un dénominateur commun plus simple que le produit des dénominateurs. Pour cela, on suivra la même marche qu'en arithmétique ; ayant décomposé les dénominateurs en facteurs aussi simples qu'on le pourra, on fera le produit de tous ces facteurs simples, en affectant chacun de son plus haut exposant; on aura ainsi le dénominateur commun. On le divisera par le dénominateur de chaque fraction, et l'on multipliera son numérateur par le quotient obtenu. On aura ainsi les nouveaux numérateurs, sous lesquels on écrira le dénominateur commun. Les fractions étant ainsi réduites au même dénominateur, on les additionnera comme ci-dessus.

Soient, par exemple, les fractions :

$$\frac{\mathrm{M}}{12a^5x-12a^4bx},\quad \frac{\mathrm{N}}{18a^4bx+18a^3b^2x},\quad \frac{\mathrm{P}}{24a^4x^2-24a^2b^2x^2},$$

dans lesquelles M, N, P représentent des numérateurs quelconques.

Les dénominateurs peuvent se mettre sous la forme :

$$2^2.3.a^4.x.(a-b)\ ,\quad 2.3^2.a^3.b.x.(a+b)\ ,\quad 2^3.3.a^2.x^2.(a+b)(a-b);$$

on devra donc prendre pour dénominateur commun

$$2^3.3^2.a^4.b.x^2.(a+b)(a-b)$$

ou

$$72a^6bx^2-72a^4b^3x^2$$

Le quotient de ce dénominateur commun par le dénominateur de la première fraction est $2.3.b.x.(a+b)$ ou $6abx+6b^2x$; c'est par ce quotient qu'il faudra multiplier le numérateur M.

Le quotient du dénominateur commun par le dénominateur de la seconde fraction est $2^2.a.x.(a-b)$ ou $4a^2x-4abx$; c'est par ce quotient qu'il faudra multiplier le numérateur N.

Le quotient du dénominateur commun par le dénominateur de la troisième fraction est $3.a^2.b$; c'est par ce quotient qu'il faudra multiplier le numérateur P.

Les fractions proposées pourront donc s'écrire :

$$\frac{\mathrm{M}(6abx+6b^2x)}{72a^6bx^2-72a^4b^3x^2},\quad \frac{\mathrm{N}(4a^2x-4abx)}{72a^6bx^2-72a^4b^3x^2},\quad \frac{3a^2b\mathrm{P}}{72a^6bx^2-72a^4b^3x^2};$$

et maintenant qu'elles ont le même dénominateur, il ne resterait qu'à faire la somme des numérateurs et à donner à cette somme le dénominateur commun.

34. Pour soustraire l'une de l'autre deux fractions algébriques, on commence par les réduire au même dénominateur, on soustrait le numérateur de l'une du numérateur de l'autre, et l'on donne à la différence le dénominateur commun.

Soit, par exemple, à soustraire de $\frac{a+b}{a-b}$ la fraction $\frac{a-b}{a+b}$; ces fractions réduites au même dénominateur deviennent respectivement $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$ et $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$.

Si du premier numérateur on retranche le second, on trouve pour reste $4ab$; donnant à cette différence le dénominateur commun, il vient

$$\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

35. Pour multiplier l'une par l'autre une fraction algébrique et une quantité entière, il suffit de multiplier le numérateur de la fraction par la quantité entière et de donner au produit le dénominateur de la fraction.

Concevons, en effet, que par suite des valeurs attribuées aux lettres, le numérateur de la fraction prenne la valeur $\frac{5}{3}$ et son dénominateur la valeur $\frac{7}{4}$; concevons de même que la quantité algébrique entière prenne la valeur numérique fractionnaire $\frac{2}{9}$. La fraction algébrique aura pour valeur le quotient de $\frac{5}{3}$ par $\frac{7}{4}$ ou $\frac{5\times4}{3\times7}$; et le produit de cette quantité par $\frac{2}{9}$ sera $\frac{5\times4\times2}{3\times7\times9}$.

Multiplions maintenant le numérateur $\frac{5}{3}$ de la fraction algébrique par la quantité $\frac{2}{9}$, le produit sera $\frac{5\times2}{3\times9}$; si nous lui donnons pour dénominateur $\frac{7}{4}$, le résultat sera le quotient de $\frac{5\times2}{3\times9}$ par $\frac{7}{4}$ ou bien $\frac{5\times2\times4}{3\times9\times7}$; résultat qui ne diffère de celui que nous avons obtenu d'abord, que par l'ordre des facteurs, lequel ordre est, comme on sait, indifférent.

Soit, par exemple, à multiplier $\frac{ab}{a^2-b^2}$ par $a-b$, le produit sera $\frac{ab(a-b)}{a^2-b^2}$ ou $\frac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)}$, ou enfin $\frac{ab}{a+b}$.

On aurait pu, au lieu de multiplier le numérateur de la fraction par la quantité entière, diviser son dénominateur, le résultat eût été le même; c'est ce qu'on démontrerait facilement comme ci-dessus.

Remarque. Pour multiplier une fraction algébrique par son dénominateur, il suffit de le supprimer. Soit, en effet, pour plus de simplicité, la fraction $\frac{a}{b}$; si on la multiplie par b, on aura, d'après la règle précédente $\frac{ab}{b}$, ou, en effectuant la division indiquée, a simplement, résultat auquel on fût parvenu en supprimant le dénominateur.

56. Pour multiplier deux fractions algébriques l'une par l'autre, il faut multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Supposons, en effet, que le numérateur de la première fraction ait la valeur $\frac{5}{3}$ et son dénominateur la valeur $\frac{7}{4}$; que le numérateur de la seconde ait pour valeur $\frac{2}{9}$ et son dénominateur $\frac{11}{8}$. La première fraction aura pour valeur le quotient de $\frac{5}{3}$ par $\frac{7}{4}$ ou $\frac{5\times4}{3\times7}$. La seconde fraction aura pour valeur le quotient de $\frac{2}{9}$ par $\frac{11}{8}$ ou $\frac{2\times8}{9\times11}$. Le produit des deux fractions a donc pour valeur $\frac{5\times4\times2\times8}{3\times7\times9\times11}$.

Multiplions maintenant entre eux les numérateurs $\frac{5}{3}$ et $\frac{2}{9}$ des fractions algébriques proposées, le produit sera $\frac{5\times2}{3\times9}$; multiplions de même leurs dénominateurs $\frac{7}{4}$ et $\frac{11}{8}$; le produit sera $\frac{7\times11}{4\times8}$. La fraction algébrique qui aura pour numérateur le produit des numérateurs des fractions proposées, et pour dénominateur le produit de leurs dénominateurs sera donc le quotient de $\frac{5\times2}{3\times9}$ par $\frac{7\times11}{4\times8}$, ou bien $\frac{5\times2\times4\times8}{3\times9\times7\times11}$; résultat qui ne diffère de celui que nous avions obtenu d'abord que par l'ordre des facteurs

Soit, par exemple, à multiplier $\frac{6ab}{a^2-b^2}$ par $\frac{a+b}{2a}$; le produit sera $\dfrac{6ab(a+b)}{2a(a^2-b^2)}$ ou $\dfrac{6ab(a+b)}{2a(a+b)(a-b)}$, ou enfin $\dfrac{3b}{a-b}$.

La même règle s'étendrait sans peine à un nombre quelconque de fractions.

37. On démontrerait comme ci-dessus : 1° Que pour diviser une fraction algébrique par une quantité entière, il faut multiplier son dénominateur par cette quantité entière (ou diviser son numérateur si cela est possible).

Exemple. Le quotient de $\dfrac{a^2-b^2}{2a}$ par $a-b$ est $\dfrac{a^2-b^2}{2a(a-b)}$ ou $\dfrac{(a+b)(a-b)}{2a(a-b)}$, ou enfin $\dfrac{a+b}{2a}$.

2° Que pour diviser une quantité entière par une fraction, il faut multiplier la quantité entière par le dénominateur de la fraction, et diviser le produit par le numérateur.

Exemple. Le quotient de a^2-b^2 par $\dfrac{ab+b^2}{2a}$ est $\dfrac{(a^2-b^2)2a}{ab+b^2}$ ou $\dfrac{(a+b)(a-b)2a}{(a+b)b}$, ou $\dfrac{(a-b)2a}{b}$, ou enfin $\dfrac{2a^2-2ab}{b}$.

3° Que pour diviser une fraction algébrique par une autre, il faut multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.

Exemple. Le quotient de $\dfrac{2a^2x-2b^2x}{5ab}$ par $\dfrac{4ab^2-4b^3}{15ax}$ est $\dfrac{(2a^2x-2b^2x).15ax}{5ab(4ab^2-4b^3)}$ ou $\dfrac{2.3.5.a.x^2.(a+b)(a-b)}{2^2.5.a.b^3(a-b)}$, ou enfin $\dfrac{3x^2(a+b)}{2b^3}$.

Ces règles sont faciles à retenir, puisque, comme on a pu le remarquer, elles sont exactement les mêmes qu'en arithmétique.

38. Si l'on avait à multiplier ou à diviser des expressions algébriques formées d'une partie entière et d'une fraction, on commencerait par réduire la partie entière et la fraction en une seule expression fractionnaire (**32**); on opérerait ensuite comme pour des fractions.

Soit, par exemple, à diviser $3a-\dfrac{3b^2}{a}$ par $\dfrac{a^2}{b}-a$. Ces deux expressions reviennent à $\dfrac{3a^2-3b^2}{a}$ et $\dfrac{a^2-ab}{b}$. Leur quotient est donc $\dfrac{(3a^2-3b^2)b}{a(a^2-ab)}$, ou bien $\dfrac{3b(a+b)(a-b)}{a^2(a-b)}$, ou enfin $\dfrac{3b(a+b)}{a^2}$.

CHAPITRE III.

DES ÉQUATIONS ET DES PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

§ I. Notions générales sur les égalités.

59. On a vu au n° **14** que pour exprimer que deux quantités sont égales, on les écrit à la suite l'une de l'autre en les séparant par le signe $=$. Deux expressions algébriques séparées par ce signe forment ce qu'on appelle, en général, une *égalité;* et les quantités placées de part et d'autre du signe sont les deux *membres* de l'égalité. Par exemple :

$$a+b=c-d\ ;\quad (x-a)(x+a)=x^2-a^2\ ;\quad \frac{3x-1}{8}=4$$

sont des égalités. La quantité $a+b$ est le premier membre de la première; $c-d$ en est le second membre; et ainsi des autres.

Mais ces égalités sont, comme on va le voir, d'espèces très-différentes.

I. Il peut arriver que, dans un problème où figurent des quantités données a, b, c, d auxquelles on n'attribue pas de valeurs particulières, ces quantités soient néanmoins assujetties, par la nature même de la question, à satisfaire à la condition

$$a+b=c-d\ ;$$

cette condition serait plus particulièrement une *égalité*, ou une simple *relation*.

II. L'égalité $\qquad (x-a)(x+a)=x^2-a^2$

se distingue de la précédente en ce que, si l'on effectue les calculs indiqués, le premier membre devient identiquement égal au second

$$x^2-a^2=x^2-a^2\ .$$

Elle jouit, en conséquence, de la propriété caractéristique d'être satisfaite quelles que soient les valeurs qu'on attribue aux lettres qui y entrent. Si, par exemple, on remplace x par 2 et a par 1, elle donne :

$$(2-1)(2+1)=2^2-1^2 \quad \text{ou} \quad 1\times 3=4-1 \quad \text{ou} \quad 3=3\ .$$

Si l'on remplace x par 5 et a par 2, elle donne :

$$(5-2)(5+2)=5^2-2^2 \quad \text{ou} \quad 3\times 7=25-4 \quad \text{ou} \quad 21=21 \; ;$$

si l'on remplace x par $\frac{4}{3}$ et a par 1, elle donne :

$$\left(\frac{4}{3}-1\right)\left(\frac{4}{3}+1\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^2-1^2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3}\times\frac{7}{3}=\frac{16}{9}-1 \quad \text{ou} \quad \frac{7}{9}=\frac{7}{9},$$

et ainsi de suite.

Les égalités de cette espèce portent le nom d'*identités.*

III. L'égalité
$$\frac{3x-1}{8}=4$$
est satisfaite lorsqu'on y remplace x par 11 ; car 3 fois 11 font 33; $33-1$ font 32 ; 32 divisé par 8 donne bien 4. Mais cette égalité cesserait d'être vérifiée si l'on y mettait à la place de x toute autre valeur que le nombre 11.

On donne le nom d'*équation* à toute égalité de cette espèce, exprimant une relation entre une quantité inconnue et des quantités données, et qui ne peut être satisfaite que par certaines valeurs déterminées de l'inconnue.

(Nous considérerons plus tard le cas où il y a plusieurs inconnues.)

Remarque. On peut remarquer que les simples relations d'égalité deviennent des équations lorsqu'on y regarde comme inconnue l'une des lettres qui y entrent. Si, par exemple, dans la relation
$$a+b=c-d$$
trois seulement des quantités a, b, c, d étant supposées données b, c, d, par exemple, on se proposait d'en déduire la quatrième, a, cette simple relation d'égalité deviendrait une équation où a serait l'inconnue.

60. On peut faire subir aux égalités toutes transformations qui n'empêchent pas les deux membres de rester égaux ; ainsi, on peut ajouter une même quantité aux deux membres, soustraire une même quantité des deux membres, multiplier les deux membres par une même quantité, diviser les deux membres par une même quantité.

I. Les deux premières propriétés servent à *faire passer un terme d'un membre dans un autre,* transformation qui est très-fréquemment employée. Pour l'effectuer, il suffit d'effacer du membre où il était le terme que l'on veut changer de membre, et de l'écrire dans l'autre avec un signe contraire à celui qu'il avait.

Prenons pour exemple l'égalité
$$a+b=c-d$$
et supposons qu'on veuille faire passer le terme b dans le second

membre. Si, d'abord, on l'efface dans le premier, comme il était additif, on diminue ce membre de la quantité b; pour ne pas troubler l'égalité, il faut donc diminuer aussi le second membre de b, ce qui se fera en y écrivant $-b$. On aura ainsi :

$$a=c-d-b$$

Supposons maintenant qu'on veuille faire passer le terme d du second membre dans le premier. Si d'abord on l'efface dans le second, comme il était soustractif, on augmente ce second membre de la quantité d; pour ne pas troubler l'égalité, il faut donc augmenter aussi le premier membre de d, ce qui se fera en y écrivant $+d$; et l'on aura :

$$a+d=c-b\,.$$

Ainsi, *pour faire passer un terme d'un membre dans un autre il faut changer son signe.*

Remarque. Cette faculté de faire passer un terme d'un membre dans un autre, permet de réduire entre eux les termes semblables qui se trouvent dans les deux membres. Ainsi l'égalité

$$3a^2-6ab+b^2=2a^2+2ab-15b^2$$

peut s'écrire $\quad 3a^2-6ab+b^2-2a^2-2ab+15b^2=0$

ou, plus simplement, $\quad a^2-8ab+16b^2=0.$

Lorsqu'un même terme se trouve dans les deux membres avec le même signe, on peut le supprimer de part et d'autre; car cela revient à retrancher une même quantité aux deux membres si ce terme est additif, ou à l'ajouter aux deux membres s'il est soustractif.

Ainsi l'égalité $\quad a^2-4ab+b^2=b^2-4ab+c^2$

revient à $\quad a^2=c^2\,.$

61. II. La troisième propriété, qui permet de multiplier les deux membres par une même quantité, sert à *faire disparaître les dénominateurs* lorsqu'il y en a. Pour cela, on commence par réduire tous les termes de l'égalité, tant entiers que fractionnaires, au même dénominateur (**52**, **53**); il est alors permis de supprimer ce dénominateur, car cette suppression revient à multiplier tous les termes de l'égalité, et par conséquent les deux membres, par ce dénominateur même (**55**, Rem.).

Soit, par exemple, l'égalité

$$a-\frac{b^2}{a}=c+\frac{d^2}{c}\,,$$

en réduisant tous les termes au même dénominateur ac, on a d'abord

$$\frac{a^2c}{ac}-\frac{b^2c}{ac}=\frac{ac^2}{ac}+\frac{ad^2}{ac}\,,$$

et, en supprimant le dénominateur commun, ce qui revient à multiplier tous les termes par ac, il vient

$$a^2c-b^2c=ac^2+ad^2 .$$

Ainsi, *pour faire disparaître les dénominateurs d'une égalité, il suffit de réduire tous les termes au même dénominateur, et de supprimer ensuite le dénominateur commun.*

62. III. La quatrième propriété, qui permet de diviser les deux membres par une même quantité, sert à supprimer les facteurs communs aux deux membres, quand il s'en trouve. Cette suppression simplifie les calculs. Soit pour exemple l'égalité

$$4a^3-8a^2b+4ab^2=6a^2b-6b^3 ,$$

si l'on met en évidence (**44**), dans chaque membre, les facteurs communs à tous les termes, il vient

$$4a(a^2-2ab+b^2)=6b(a^2-b^2)$$

ou

$$4a(a-b)^2=6b(a+b)(a-b) .$$

Sous cette forme, on voit que les deux membres sont divisibles par $2(a-b)$. Effectuant cette division, il reste l'égalité plus simple.

$$2a(a-b)=3b(a+b)$$

ou

$$2a^2-2ab=3ab+3b^2 .$$

63. Ces diverses transformations s'appliquent aux équations comme aux autres espèces d'égalités. On peut démontrer, de plus, que, sauf certaines restrictions que nous aurons soin de signaler, elles n'altèrent pas *les valeurs* de l'inconnue, c'est-à-dire celles qui, mises à la place de l'inconnue, rendent le premier membre égal au second (**59**, III).

Les équations qui, sous des formes différentes, sont néanmoins satisfaites par les mêmes valeurs de l'inconnue, sont dites *équivalentes.*

On peut d'abord, *sans changer les valeurs de l'inconnue, ajouter une même quantité aux deux membres.* En effet, soit, par exemple, l'équation

$$ax^2-bx=cx-d \qquad [1],$$

ajoutant aux deux membres une même quantité m; nous aurons

$$(ax^2-bx)+m=(cx-d)+m \qquad [2],$$

équation où nous avons à dessein enveloppé de parenthèses les membres de l'équation primitive. Il est clair que si une certaine valeur attribuée à x satisfait à l'équation [1], elle satisfera aussi à l'équation [2]; car les quantités entre parenthèses étant égales de part et d'autre, puisqu'on suppose l'équation [1] satisfaite, ces quantités, augmentées chacune de m, sont encore égales. Réciproquement : si une certaine valeur mise pour x vérifie l'équation [2], elle vérifiera aussi l'équation [1]; car, pour que les deux membres de l'équation [2] deviennent égaux, comme ils ont une partie commune m, il faut que les parties non communes, mises entre parenthèses, deviennent égales elles-mêmes; or, ces quantités ne sont autre chose que les deux membres de l'équation [1]; donc cette équation est vérifiée. Les deux équations [1] et [2] admettent donc exactement les mêmes valeurs; ce qui démontre la proposition énoncée.

On démontrerait de la même manière que *l'on peut, sans changer les valeurs de l'inconnue, retrancher une même quantité aux deux membres.*

Il résulte de ces deux propriétés que *l'on peut, sans changer les valeurs de l'inconnue, faire passer un terme d'un membre dans un autre* [en changeant son signe, comme il a été dit plus haut (**60**, I)].

64. *On peut, sans changer (en général) les valeurs de l'inconnue, multiplier les deux membres d'une équation par une même quantité.*

Soit encore l'équation

$$ax^2 - bx = cx - d \qquad [1].$$

En multipliant les deux membres par une même quantité m, on obtient

$$(ax^2 - bx)m = (cx - d)m \qquad [2].$$

Si une certaine valeur mise pour x satisfait à l'équation [1], elle satisfera à l'équation [2]; car les deux membres de l'équation [1] devenant égaux, il en est de même des facteurs entre parenthèses dans les deux membres de l'équation [2]; et comme le second facteur m est le même de part et d'autre, les produits sont égaux; c'est-à-dire que l'équation [2] est vérifiée.

Réciproquement : si une certaine valeur mise pour x satisfait à l'équation [2], c'est que ses deux membres deviennent égaux; et comme ils ont le facteur commun m, il faut que les facteurs entre parenthèses deviennent égaux. Or ces facteurs ne sont autre chose que les deux membres de l'équation [1]; donc cette équation est vérifiée.

Les équations [1] et [2] sont donc satisfaites par les mêmes valeurs de x, ce qui démontre la proposition énoncée.

Remarques. I. Cette démonstration suppose essentiellement que le facteur m introduit n'est pas nul; et il faut admettre par conséquent qu'il ne contient pas l'inconnue x. S'il la contenait, il serait possible de trouver une valeur de x qui annulât le facteur m ; cette valeur annulant par suite les deux membres de l'équation [2], cette équation se trouverait satisfaite ; tandis qu'il arriverait en général que l'équation [1] ne le serait pas. Ces deux équations ne seraient pas alors équivalentes :

Soit, par exemple, l'équation très-simple

$$x+1=4\ ;$$

multiplions ces deux membres par $x-1$, il viendra

$$x^2-1=4x-4\ .$$

Cette équation est vérifiée par la valeur 1, qui annule le facteur introduit $x-1$; tandis qu'il est facile de s'assurer que cette même valeur 1 ne satisfait pas à l'équation primitive.

II. Il y a cependant une exception à cette exception ; c'est-à-dire que la proposition générale subsiste lorsque le facteur par lequel on multiplie les deux membres d'une équation est le dénominateur commun à tous ses termes, qu'il contienne ou non l'inconnue.

Cela tient à ce que la suppression du dénominateur commun, bien qu'elle soit équivalente à une multiplication (**55** et **61**), n'introduit pas réellement de facteur dans l'équation résultante, si l'on a pris le plus petit dénominateur commun, comme il est facile de le faire dans les cas qui se présentent ordinairement. Mais de plus amples détails sur ce sujet seraient ici hors de propos.

Il résulte de la proposition précédente et de la dernière remarque que *l'on peut, sans changer les valeurs de l'inconnue, faire disparaître les dénominateurs d'une équation.*

63. On démontrerait exactement de la même manière que *l'on peut, sans changer les valeurs de l'inconnue, diviser les deux membres d'une équation par une même quantité; et,* par conséquent, *supprimer les facteurs communs aux deux membres.*

Il faut cependant faire ici la même restriction que ci-dessus, et supposer que le facteur supprimé n'est pas nul, et qu'il ne contient pas l'inconnue. S'il la contenait, on pourrait trouver une valeur de l'inconnue qui annulât ce facteur et satisfît par suite à l'équation primitive, sans satisfaire pour cela à l'équation résultant de la suppression du facteur. C'est ainsi que l'équation :

$$x^2-1=4x-4$$

dans laquelle ces deux membres sont divisibles par $x-1$, est satisfaite par la valeur 1 qui, mise pour x, annule ce facteur commun et par suite les deux membres; tandis que cette même valeur 1 ne satisfait pas à l'équation

$$x+1=4$$

qu'on obtient en supprimant le facteur $x-1$.

66. Les équations à une seule inconnue se distinguent les unes des autres par leur *degré*; on nomme degré d'une équation, le plus haut exposant de l'inconnue lorsqu'on a fait disparaître les dénominateurs, effectué les calculs indiqués, et opéré la réduction des termes semblables (**60**).

L'équation $3x+1=4-2x$ est du *premier degré*, parce que le plus haut exposant de x est l'unité.

L'équation $ax^2-bx=cx-d$ est du *second degré*, parce que le plus haut exposant de x est 2.

L'équation $ax^2+bx^4=c$ est du *quatrième degré*, parce que le plus haut exposant de x est 4. Et ainsi de suite.

L'équation $(x-a)^2-x^2=b^2$

qui paraît du second degré au premier abord, n'est réellement que du premier, parce que, lorsqu'on a développé $(x-a)^2$ et fait la réduction des termes semblables, il reste :

$$a^2-2ax=b^2 .$$

L'équation $$ax+\frac{b}{x}=c$$

au contraire, dans laquelle x n'entre qu'à la première puissance, est réellement du second degré, parce que, lorsqu'on a fait disparaître les dénominateurs, elle devient :

$$ax^2+b=cx$$

où x entre avec l'exposant 2.

Nous ne nous occuperons d'abord que des équations du premier degré.

On distingue encore les équations en équations *numériques* et en équations *littérales*, suivant que les quantités données qui y entrent sont exprimées par des *nombres* ou représentées par des *lettres*.

§ II. De la résolution des équations du premier degré à une seule inconnue.

67. *Résoudre* une équation, c'est déterminer les valeurs qui, mises à la place de l'inconnue, rendent le premier membre égal au second, et changent par conséquent l'équation en identité.

Pour résoudre une équation, on cherche à la transformer en une équation équivalente (**63**), dans laquelle l'inconnue soit seule et à la première puissance dans un membre, l'autre membre ne contenant que des quantités connues. Si, par exemple, en opérant de cette manière, on arrive à une équation telle que $x=4$, comme cette équation est évidemment satisfaite quand on y remplace x par 4, il s'ensuit que le nombre 4 est une valeur de l'inconnue, puisque cette valeur satisfait à l'équation proposée qui, par hypothèse, est équivalente à $x=4$.

Si, de même, on parvient à une équation telle que $x=a-b$, il s'ensuit que $a-b$ est la valeur de l'inconnue.

Pour résoudre une équation quelconque du premier degré à une seule inconnue, on suit une marche uniforme que l'on peut résumer de cette manière :

1° Faire disparaître les dénominateurs (**61**).

2° Effectuer les multiplications indiquées, s'il y en a.

3° Faire passer dans un même membre tous les termes qui contiennent l'inconnue, et dans l'autre membre tous les termes qui en sont indépendants (**60**).

4° Opérer la réduction des termes semblables (**22**).

Il convient de choisir le membre où l'on réunit les termes affectés de l'inconnue, de manière que, si les facteurs qui multiplient l'inconnue sont numériques, l'ensemble des termes positifs l'emporte sur l'ensemble des termes négatifs, et que, si ces facteurs sont littéraux, il y ait au moins un terme positif; ce qui sera toujours possible.

5° Mettre l'inconnue en facteur commun (**44**) dans le membre où elle se trouve (s'il y a plusieurs termes affectés de l'inconnue qui n'aient pu se réduire).

6° Diviser les deux membres par la quantité qui multiplie l'inconnue (**65**).

De cette manière, on aura passé par une suite d'équations équivalentes (**65**), dont la dernière présentera l'inconnue seule dans un membre et des quantités connues dans l'autre; c'est-à-dire que l'on aura obtenu la valeur de l'inconnue.

Soit pour premier exemple l'équation numérique :

$$\frac{2x-1}{5}-3=\frac{x+3}{8} .$$

Faisant disparaître les dénominateurs, nous aurons

$$2x\times 8-8-3\times 5\times 8=x\times 5+3\times 5 .$$

Effectuons les multiplications, l'équation deviendra

$$16x-8-120=5x+15 .$$

Faisons passer dans le premier membre tous les termes en x, et dans le second tous les termes indépendants de x, il viendra

$$16x-5x=15+8+120 ;$$

ou, en faisant la réduction des termes semblables,

$$11x=143 .$$

Divisons les deux membres par le nombre 11 qui multiplie x, nous aurons enfin

$$x=\frac{143}{11} \text{ , ou, en effectuant la division, } x=13 .$$

On peut vérifier, en effet, que si dans l'équation proposée on met 13 à la place de x, chacun des deux membres se réduit à 2; en sorte que l'équation est satisfaite.

Soit pour second exemple l'équation littérale

$$\frac{2x+8b}{a+b}=\frac{x-2a}{a-b}+5\ .$$

Faisons disparaître les dénominateurs, nous aurons

$$(2x+8b)(a-b)=(x-2a)(a+b)+5(a+b)(a-b)\ ,$$

ou, en effectuant les multiplications indiquées,

$$2ax+8ab-2bx-8b^2=ax-2a^2+bx-2ab+5a^2-5b^2\ .$$

Faisons passer dans le premier membre tous les termes affectés de x, et dans le second tous les termes indépendants de x, il viendra

$$2ax-2bx-ax-bx=-2a^2-2ab+5a^2-5b^2-8ab+8b^2\ ,$$

ou, en opérant la réduction des termes semblables,

$$ax-3bx=3a^2-10ab+3b^2\ .$$

Mettons x en évidence dans le premier membre, l'équation prendra la forme

$$(a-3b)x=3a^2-10ab+3b^2\ .$$

Divisons enfin les deux membres par la quantité $a-3b$ qui multiplie x, nous obtiendrons

$$x=\frac{3a^2-10ab+3b^2}{a-3b}\ ,$$

ou, en effectuant la division indiquée,

$$x=3a-b\ ,$$

La valeur de l'inconnue est donc $3a-b$; et, en effet, il est facile de vérifier que si l'on remplace x par cette valeur, les deux membres de l'équation proposée se réduisent tous deux à 6.

Exemples. Le lecteur pourra s'exercer sur les exemples suivants :

$$\frac{5x-2}{3}-6=\frac{4x-3}{5}\quad (\text{d'où}\quad x=7)\ ;$$

$$\frac{2x+76}{2a+b}-1=\frac{x+a}{2a-b}\quad (\text{d'où}\quad x=3a-2b)\ .$$

68. Remarques. I. *La valeur obtenue satisfait toujours à l'équation proposée*; car elle satisfait évidemment à la dernière équation, qui est équivalente à la proposée.

II. *Une équation du premier degré à une seule inconnue n'admet pour cette inconnue qu'une seule valeur*; car, pour qu'une valeur satisfasse à l'équation proposée, il faut qu'elle satisfasse à la dernière équation obtenue, qui lui est équivalente ; il faut donc qu'elle soit égale au second membre de cette dernière équation.

Par exemple, dans l'exemple numérique ci-dessus, on arrive à $x = 13$; pour qu'une valeur, mise à la place de x, satisfasse à la proposée, il faut qu'elle satisfasse à $x = 13$; il faut donc qu'elle soit égale à 13.

III. L'habitude du calcul permet souvent d'exécuter en même temps plusieurs des opérations que nous avons détaillées. Ainsi, en faisant disparaître les dénominateurs, on peut en même temps effectuer les multiplications. Ainsi, encore, en faisant passer les termes d'un membre dans un autre, on peut en même temps effectuer la réduction des termes semblables.

IV. Si, par suite du choix qu'on aurait fait pour le membre dans lequel on fait passer les termes affectés de l'inconnue, il arrivait qu'après la réduction des termes semblables, tous les termes affectés de l'inconnue fussent négatifs, on pourrait changer les signes de tous les termes, ce qui ne troublerait pas l'équation ; car ce changement revient à faire changer de membre à tous les termes, et à intervertir ensuite l'ordre des deux membres, ce qui est évidemment permis.

69. Remarques sur les inégalités. Lorsqu'on veut exprimer qu'une quantité doit être plus petite ou plus grande qu'une autre, on a vu (**14**) qu'il suffit de les écrire à la suite l'une de l'autre en les séparant par le signe $<$ dans le premier cas, ou par le signe $>$ dans le second. Une pareille expression est ce qu'on nomme une *inégalité*. Ainsi

$$a < b \quad ; \qquad x + 5 > 12 \quad ; \qquad \frac{a-x}{3} < \frac{b-x}{2}$$

sont des inégalités.

On peut évidemment leur faire subir les mêmes transformations qu'aux égalités, puisque ces transformations ne troublent pas l'inégalité. Toutefois, il ne serait pas permis d'intervertir l'ordre des deux membres; il faudrait dans ce cas renverser le signe de l'inégalité. On ne pourrait pas non plus changer les signes de tous les termes, sans renverser le sens de l'inégalité, puisque ce changement de signes revient à transposer les deux membres.

On a quelquefois besoin de transformer une inégalité en une autre dans laquelle une certaine quantité se trouve isolée dans l'un des deux membres, et précédée du signe $+$; cette transformation a pour but de déduire de l'inégalité une *limite* pour la quantité dont il s'agit. C'est ce qu'on appelle, par extension, *résoudre* l'inégalité par rapport à la quantité considérée. Cette résolution s'opère d'après les mêmes règles que pour les équations, sauf les restrictions énoncées plus haut.

Ainsi de $x+5>12$ on tire $x>12-5$ ou $x>7$.

De $\frac{a-x}{3}<\frac{b-x}{2}$ on tire successivement

$$2a-2x<3b-3x\,, \quad \text{puis} \quad 3x-2x<3b-2a\,;$$

puis enfin, $x<3b-2a$.

On traiterait de même toutes les inégalités qui sont du *premier degré* par rapport à la quantité considérée, c'est-à-dire qui, après la suppression des dénominateurs, ne contiennent cette quantité qu'à la première puissance.

§ III. Problèmes qui conduisent à une équation du premier degré à une seule inconnue.

70. La résolution d'un problème d'Algèbre se compose nécessairement de deux parties. Dans la première on cherche à exprimer les relations que l'énoncé établit entre les inconnues et les données, ce qui conduit toujours à un certain nombre d'équations, si le problème est réellement du ressort de l'Algèbre. Dans la seconde on cherche à déduire de ces équations les valeurs des inconnues.

L'Algèbre donne des règles certaines pour la résolution des équations; quant à la première partie, qu'on appelle la *mise en équations,* elle ne saurait être astreinte à des lois aussi certaines, vu l'immense variété des problèmes qu'on peut avoir à résoudre. Il existe cependant une sorte de *marche à suivre* qu'on peut formuler de cette manière : *Indiquer sur les lettres qui représentent les inconnues et sur les données numériques ou littérales les opérations* QUE L'ON EFFECTUERAIT, *si, après avoir trouvé les valeurs des inconnues, on se proposait de les vérifier*. L'usage que nous ferons de cette règle en fera comprendre l'esprit et la portée.

Nous ne nous occuperons dans ce paragraphe que des problèmes qui conduisent à une seule équation du premier degré à une seule inconnue.

71. PREMIER PROBLÈME. *Un père a* 37 *ans, son fils en a* 12; *on demande dans combien d'années l'âge du père sera le double de celui du fils.*

Désignons par x le nombre d'années cherché. Si ce nombre d'années était connu, et que l'on voulût le vérifier, on dirait :

Le père ayant 37 ans, dans x années il en aura $37+x$; à la même époque, le fils en aura $12+x$; d'après l'énoncé, le double de cet âge, c'est-à-dire $(12+x)\times 2$ doit valoir l'âge du père; on doit donc avoir l'égalité

$$(12+x)\times 2=37+x.$$

On a ainsi obtenu l'équation du problème. En la résolvant (**68**), on trouve

$$x=13.$$

Et, en effet, dans 13 ans, le fils aura $12+13$ ou 25 ans; le père en aura $37+13$ ou 50, qui est bien le double de 25.

72. Deuxième problème. *On a 60 hectolitres de blé à 30 fr. l'hectolitre; combien faut-il y joindre de blé à 22 fr. pour faire un mélange valant 25 fr. l'hectolitre?*

Désignons par x le nombre d'hectolitres cherché, et opérons comme si nous voulions vérifier ce nombre. Le prix des 60 hectolitres à 30 fr. est $30^{f}\times 60$ ou 1800 fr.; le prix des x hectolitres à 22 fr. est $22^{f}\times x$ ou $22x$; le prix total est donc $1800+22x$. Pour avoir le prix d'un hectolitre du mélange, il faut diviser le prix total par le nombre total d'hectolitres, qui est $60+x$. Mais, d'après l'énoncé, ce prix doit être de 25 fr.; on a donc l'égalité

$$\frac{1800+22x}{60+x}=25,$$

c'est l'équation du problème. En la résolvant, on trouve $x=100$. Il faut donc prendre 100 hectolitres à 22 fr.

Le même problème, traité généralement, donnera une formule pour résoudre toutes les questions analogues. Soient n le nombre d'hectolitres donné, à a francs l'hectolitre, x le nombre d'hectolitres cherché à b francs l'hectolitre, soit enfin c le prix d'un hectolitre du mélange. Le prix total du blé sera $na+bx$ et le nombre total d'hectolitres $n+x$; on aura donc

$$\frac{na+bx}{n+x}=c,$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{n(a-c)}{c-b},$$

c'est-à-dire qu'il faut multiplier le nombre n d'hectolitres donnés par la différence, $a-c$, entre le prix supérieur et le prix moyen, et diviser le produit par la différence, $c-b$, entre le prix moyen et le prix inférieur.

Si, par exemple, on suppose $n=40$; $a=24$, $b=19$; $c=21$, on trouvera

$$x=\frac{40\times 3}{2}=60,$$

73. TROISIÈME PROBLÈME. *Une paysanne, chargée de vendre des œufs au marché, vend à une première personne la moitié de ses œufs plus la moitié d'un œuf; à une seconde personne la moitié de ce qui lui reste plus la moitié d'un œuf; enfin, à une troisième la moitié de ce qui lui reste de la seconde vente, plus la moitié d'un œuf. Après cette troisième vente, il lui reste 7 œufs; combien en avait-elle en arrivant au marché?*

Soit x le nombre d'œufs qu'avait la marchande en arrivant.

Elle vend à une première personne un nombre d'œufs marqué par $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$; il lui en reste donc après cette première vente $x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ ou $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$. Elle vend à une seconde personne la moitié de ce qui lui reste, c'est-à-dire $\frac{x}{4}-\frac{1}{4}$, plus la moitié d'un œuf, ou $\frac{x}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$, ou encore $\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$; il lui en reste donc

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{4}-\frac{3}{4}.$$

Elle vend à une troisième personne la moitié de ce qu'il lui reste de cette seconde vente, c'est-à-dire $\frac{x}{8}-\frac{3}{8}$, plus la moitié d'un œuf, ou $\frac{x}{8}-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}$, ou encore $\frac{x}{8}+\frac{1}{8}$; il lui reste donc

$$\frac{x}{4}-\frac{3}{4}-\frac{x}{8}-\frac{1}{8} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{8}-\frac{7}{8}.$$

Mais, d'après l'énoncé, ce reste doit être égal à 7; on a donc l'égalité

$$\frac{x}{8}-\frac{7}{8}=7;$$

c'est l'équation du problème. En la résolvant, on trouve

$$x=63.$$

En effet, à la première personne, la paysanne vend la moitié de 63 plus la moitié de 1, ce qui est la même chose que la moitié de 64, c'est-à-dire 32; et il en reste par conséquent 31. A la seconde personne, elle vend la moitié de 31 plus la moitié de 1, ce qui est la même chose que la moitié de 32, c'est-à-dire 16, et il en reste par conséquent 15. A la troisième personne, elle vend la moitié de 15, plus la moitié de 1, ce qui est la même chose que la moitié de 16, c'est-à-dire 8; et il en reste bien 7, comme l'exige l'énoncé.

74. QUATRIÈME PROBLÈME. *Un ouvrier peut faire un certain ou-*

vrage en 18 heures de travail; un second ouvrier ferait le même ouvrage en 24 heures de travail; un troisième le ferait en 36 heures. On demande combien d'heures les trois ouvriers travaillant ensemble emploieront à faire ce même ouvrage.

Soit x le nombre d'heures cherché. Le premier ouvrier faisant l'ouvrage proposé en 18 heures, fera en 1 heure $\frac{1}{18}$ de cet ouvrage. En x heures il en fera donc une fraction marquée par $\frac{x}{18}$. Par une raison analogue, le second ouvrier, en x heures, fera $\frac{x}{24}$ de l'ouvrage proposé; et le troisième ouvrier en fera $\frac{x}{36}$. Or, la somme de ces fractions de l'ouvrage doit faire l'ouvrage entier, qui est pris ici pour unité; on doit donc avoir

$$\frac{x}{18}+\frac{x}{24}+\frac{x}{36}=1$$

ou
$$\frac{x(4+3+2)}{72}=1 \quad \text{d'où} \quad x=\frac{72}{9}=8.$$

Les trois ouvriers emploieront donc 8 heures.

On voit, en effet, qu'en 8 heures, le premier ouvrier fera les $\frac{8}{18}$ ou les $\frac{4}{9}$ de la tâche; le second en fera les $\frac{8}{24}$ ou le tiers, qui revient à $\frac{3}{9}$; le troisième en fera les $\frac{8}{36}$ ou les $\frac{2}{9}$. Or, la somme

$$\frac{4}{9}+\frac{3}{9}+\frac{2}{9} \quad \text{fait} \quad \frac{9}{9} \quad \text{ou} \quad 1,$$

c'est-à-dire la tâche tout entière.

On obtient facilement une formule générale pour résoudre les problèmes analogues. Soient a, b, c les nombres d'heures employées par chaque ouvrier pour faire la tâche à lui seul; en raisonnant comme ci-dessus, on arrivera facilement à l'équation :

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=1,$$

qui donne
$$x=\frac{abc}{ab+ac+bc}.$$

75. Cinquième problème. *Plusieurs personnes puisent dans un vase contenant du vin : La première y prend 1 litre, plus le quart de ce qui reste; la seconde vient ensuite prendre 2 litres, plus le quart de ce qui reste (après avoir pris ces 2 litres); la troisième vient ensuite prendre 3 litres, plus le quart de ce qui reste (après avoir pris ces 3 litres), et ainsi de suite. Il se trouve alors que le vin a été également partagé entre toutes les personnes.*

On demande la quantité de vin contenue dans le vase, le nombre des personnes et la part de chacune d'elles.

Il n'y a réellement qu'une inconnue dans ce problème, bien qu'il semble y en avoir trois, les deux autres se déduisant immédiatement de la première. Soit donc x le nombre de litres de vin contenu dans le vase. La part de la première personne sera $1+\frac{x-1}{4}$ ou $\frac{x+3}{4}$; et il restera $x-\frac{x+3}{4}$ ou $\frac{3x-3}{4}$.
Lorsque la seconde personne aura pris 2 litres, il restera $\frac{3x-3}{4}-2$ ou $\frac{3x-11}{4}$; la part de cette seconde personne sera donc $2+\frac{1}{4}\left(\frac{3x-11}{4}\right)$ ou $2+\frac{3x-11}{16}$, ou enfin $\frac{3x+21}{16}$. Mais les parts devant être égales, on a immédiatement l'équation du problème en égalant la première part et la seconde, ce qui donne

$$\frac{x+3}{4}=\frac{3x+21}{16} \quad \text{ou} \quad 4x+12=3x+21,$$

d'où

$$x=9.$$

Le vase contenait donc 9 litres de vin.

Substituant cette valeur dans la première part, on la trouve égale à $\frac{9+3}{4}$ ou 3 litres ; et puisqu'elles sont toutes égales, le nombre des personnes est le quotient de 9 par 3, ou 3.

On voit que l'égalité des trois parts est une conséquence de l'égalité des deux premières, et par conséquent l'énoncé du problème contient plus de conditions qu'il n'est nécessaire. Il est facile d'ailleurs de vérifier que ces conditions sont remplies.

La première personne prend 1 litre, il en reste 8 ; le quart de ce reste est 2 ; la part de la première personne est donc $1+2$ ou 3. Il reste alors 6 litres dans le vase. La seconde personne en prend 2 ; il en reste 4 ; le quart de ce reste est 1 ; la part de la seconde personne est donc $2+1$ ou 3. Il reste alors 3 litres dans le vase. La troisième personne prenant ces 3 litres, plus le quart de ce qui reste, ou zéro, la part de cette troisième personne est égale à 3 comme celle de chacune des deux autres.

76. Il n'est pas sans intérêt de traiter le même problème d'une manière générale, en supposant qu'au lieu de prendre chaque fois le quart de ce qui reste dans le vase, on en prenne une fraction marquée par $\frac{1}{n}$.

Dans cette hypothèse, la part de la première personne est $1+\frac{x-1}{n}$ ou $\frac{x+n-1}{n}$. Il reste dans le vase $x-\frac{x+n-1}{n}$ ou $\frac{nx-x-n+1}{n}$. La seconde personne prenant 2 litres sur ce reste, il reste alors dans le vase

$$\frac{nx-x-n+1}{n}-2 \quad \text{ou} \quad \frac{nx-x-n+1-2n}{n},$$

ou encore $\frac{nx-x-3n+1}{n}$. La part de la seconde personne sera donc

$$2+\frac{1}{n}\left(\frac{nx-x-3n+1}{n}\right),$$

ou $2+\frac{nx-x-3n+1}{n^2}$ ou encore $\frac{nx-x+2n^2-3n+1}{n^2}$.

Égalant les deux premières parts, on obtient l'équation

$$\frac{x+n-1}{n}=\frac{nx-x+2n^2-3n+1}{n^2},$$

ou $$nx+n^2-n=nx-x+2n^2-3n+1,$$

d'où $$x=n^2-2n+1 \quad \text{ou} \quad x=(n-1)^2.$$

Cette valeur de x, substituée dans l'expression de la première part, donne pour la valeur de cette part

$$\frac{n^2-2n+1+n-1}{n}, \quad \text{ou} \quad \frac{n^2-n}{n}, \quad \text{ou enfin} \quad n-1.$$

Divisant la valeur de x par la valeur d'une part, ou $(n-1)^2$ par $(n-1)$, on obtient pour quotient le nombre des parts, qui est $n-1$.

Il reste à vérifier l'égalité de toutes les parts. Or, d'abord, les deux premières sont égales, puisque c'est en écrivant cette égalité qu'on a obtenu l'équation du problème. Cela posé, pour démontrer l'égalité de toutes les autres nous emploierons un mode de démonstration dont on fait un fréquent usage en Algèbre. Il consiste à faire voir que si la proposition a été vérifiée pour un certain nombre de parts, elle sera vraie encore pour la part suivante; et, en effet, si cela était démontré, comme les deux premières parts sont égales, il en résulterait que la troisième est égale à chacune des deux premières; les trois premières étant donc égales, il en résulterait que la quatrième est égale à chacune des trois premières, et ainsi de suite : donc il serait démontré que toutes les parts sont égales.

Supposons donc que les p premières parts sont égales, et démontrons que la part suivante, ou la $(p+1)^{\text{ième}}$, est égale à une quelconque des précédentes. Pour cela, remarquons que la première part ayant pour valeur $n-1$, la somme des p premières parts est $(n-1)p$. Quand ces p premières parts ont été prises, il reste dans le vase $(n-1)^2-(n-1)p$. Or, la première personne prend 1 litre avant de prendre $\frac{1}{n}$ de ce qui reste; la deuxième personne prend de même 2 litres, la troisième prend 3 litres, la $p^{\text{ième}}$ prend donc p litres, et la $(p+1)^{\text{ième}}$ prend $p+1$ litres. Il restera donc alors dans le vase

$$(n-1)^2-(n-1)p-(p+1).$$

La part de la $(p+1)^{\text{ième}}$ personne sera donc

$$p+1+\frac{(n-1)^2-(n-1)p-(p+1)}{n},$$

ou

$$\frac{n(p+1)+(n-1)^2-(n-1)p-(p+1)}{n},$$

ou, en effectuant les multiplications, et réduisant

$$\frac{np+n+n^2-2n+1-np+p-p-1}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{n^2-n}{n};$$

ou, enfin, $n-1$.

La $(p+1)^{\text{ième}}$ part est donc égale à la première. Donc, d'après les raisonnements faits plus haut, toutes les parts sont bien égales.

Nous avons insisté sur ce problème, parce qu'il offre un utile exemple de mise en équation et de bons exercices de calcul.

77. Le lecteur pourra s'exercer sur quelques-uns des problèmes dont les énoncés suivent :

I. *Partager* 24 *en deux parties telles que le* 5^{me} *de la première, plus le* 7^{me} *de la seconde, fassent* 4. (Réponse : 10 et 14.)

II. *Un enfant, interrogé sur son âge, répond : « Dans* 16 *ans mon âge sera le triple de ce qu'il était il y a* 2 *ans.» On demande l'âge actuel de l'enfant.* (Réponse : 11 ans.)

III. *Une fontaine peut remplir un bassin en* 6 *heures, une autre peut le remplir en* 8 *heures, une troisième en* 10 *heures. Lorsqu'elles coulent ensemble pendant* 2 *heures, il s'en faut de* 26 *hectolitres que le bassin ne soit rempli. Quelle est sa capacité?* (Réponse : 120 hectolitres.)

IV. *Une personne charitable partage* 50 *fr. entre* 20 *pauvres, parmi lesquels il y a un certain nombre d'hommes et de femmes, et un seul enfant; elle donne* 3 *fr. à chaque homme,* 2 *fr. à chaque femme, et* 1 *fr. à l'enfant. On demande combien il y avait* *d'hommes, et combien il y avait de femmes.* (Réponse : 11 hommes et 8 femmes.)

V. *Un père laisse* 10000 *fr. à ses quatre fils, et ordonne par testament que le premier aura* 2 *fois autant que le second, moins* 2000 *fr.; le second* 3 *fois autant que le troisième, moins* 3000 *fr., et le troisième* 6 *fois autant que le quatrième, moins* 4000 *fr. Quelles seront les parts des quatre fils?* (Réponse : 4000 fr., 3000 fr., 2000 fr. et 1000 fr.)

VI. *Un vase contient un mélange d'eau et de vin. On en retire le quart et on le remplace par de l'eau; on retire ensuite le quart de ce nouveau mélange, et on le remplace également par de l'eau; enfin on retire le quart de ce troisième mélange, et on le remplace encore par de l'eau. Il arrive alors que le vase contient* 3 *fois plus d'eau que de vin. On demande dans quel rapport étaient l'eau et le vin dans le mélange primitif.* (Réponse : comme 11 est à 16.)

§ IV. Résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

78. Lorsque, dans un problème, il y a deux inconnues, il faut que l'énoncé fournisse deux équations entre ces inconnues. Si, en effet, il n'en fournissait qu'une, on pourrait attribuer à l'une des inconnues une valeur arbitraire; on n'aurait plus alors qu'une équation ne contenant que la seconde inconnue pour laquelle on trouverait un nombre limité de valeurs (une seule, par exemple, si l'équation était du premier degré par rapport à cette inconnue); et, comme on pourrait répéter ce calcul pour toutes les valeurs arbitraires attribuées à la première inconnue, on voit qu'il y aurait, en général, un nombre illimité de systèmes de valeurs propres à vérifier l'équation. On dit, dans ce cas, que le problème est *indéterminé.*

Si, par exemple, on n'avait entre deux inconnues x et y que l'équation unique

$$x - y = 1$$

on pourrait attribuer à y une valeur quelconque, la valeur correspondante de x serait

$$x = y + 1$$

ou la valeur attribuée à y, augmentée d'une unité. Il y aurait donc une infinité de solutions, et le problème serait indéterminé.

Nous supposerons donc dans ce paragraphe que l'énoncé du problème fournit deux équations du premier degré à deux inconnues.

79. Une équation à deux inconnues est dite du *premier degré* lorsqu'après y avoir fait disparaître les dénominateurs, les inconnues n'y entrent qu'à la première puissance, et n'y sont point multipliées entre elles. D'après cela : une équation du premier degré à deux inconnues, x et y, ne peut renfermer que trois espèces de termes ; savoir : des termes contenant x à la première puissance, des termes contenant y à cette même puissance, et des termes indépendants de x et de y. Concevons qu'après avoir fait disparaître les dénominateurs (**61**), on ait réuni dans un même membre tous les termes qui contiennent les inconnues, et dans l'autre membre les termes qui en sont indépendants ; puis, qu'après avoir opéré les réductions, on ait mis x en évidence parmi tous les termes qui le contiennent, et qu'on en ait fait autant pour y ; l'équation se présentera sous la forme

$$ax + by = c,$$

dans laquelle a, b et c peuvent être des quantités numériques ou algébriques, monomes ou polynomes.

La quantité a se nomme ordinairement le *coefficient* de x, et la quantité b se nomme le coefficient de y.

Nous admettrons donc que le problème fournisse deux équations de cette forme. *Résoudre* ces équations c'est trouver les valeurs qu'il faut attribuer aux inconnues pour satisfaire à la fois aux deux équations. Pour y parvenir on remarque d'abord que, si l'une des deux équations proposées ne renfermait que l'une des deux inconnues, les valeurs des deux inconnues s'obtiendraient immédiatement. Soit, en effet, une équation à deux inconnues

$$5x + 2y = 33 \qquad [1]$$

et une équation à une seule inconnue, qu'on peut toujours supposer résolue ; par exemple

$$x = 5 \qquad [2];$$

si l'on met pour x la valeur 5 dans l'équation [1], elle devient

$$25 + 2y = 33 \qquad [3],$$

d'où $\qquad 2y = 33 - 25 = 8 \quad$ et $\quad y = 4.$

Et ces valeurs $x = 5$, $y = 4$ sont les seules qui puissent satisfaire aux équations proposées [1] et [2] ; car la seconde exige que x soit égal à 5 ; et si x est égal à 5, l'équation [1] se change en l'équation [3], qui revient à $y = 4$, et n'est satisfaite que quand on y met 4 à la place de y.

On voit donc que si l'une des équations proposées ne contenait que l'une des inconnues, x par exemple, cette équation donnerait immédiatement la valeur de x ; et en substituant cette valeur à la place de x dans l'équation à deux inconnues, on en tirerait la valeur correspondante de y ; et l'on aurait ainsi le système *unique* de valeurs de x et de y propre à satisfaire à la fois aux deux équations.

Tout l'artifice de la résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, consiste donc à déduire de ce système d'équations un système de deux autres équations *équivalentes* (c'est-à-dire admettant les mêmes valeurs pour les inconnues), et telles que l'une d'elles ne contienne que l'une des deux inconnues. C'est ce que l'on appelle *éliminer* une inconnue. Il y a pour cela plusieurs méthodes que nous allons exposer, en traitant d'abord des exemples particuliers.

80. Soient les deux équations :

$$5x + 2y = 33 \qquad [1]$$
$$7x - 3y = 23 \qquad [2];$$

proposons-nous d'éliminer l'inconnue y. Observons pour cela qu'il est toujours permis d'ajouter ou de soustraire deux équations membre à membre ; car si deux quantités sont respectivement égales à deux autres quantités, la somme ou la différence des deux premières est évidemment égale à la somme ou à la différence des deux dernières. Or, si y avait le même coefficient dans les deux équations, on ferait disparaître cette inconnue en retranchant ces deux équations membre à membre ; et si y avait dans les deux équations des coefficients égaux et de signe contraire, on atteindrait le même but en ajoutant ces deux équations membre à membre.

Dans l'exemple qui nous occupe, y n'a pas le même coefficient dans les deux équations; mais il est facile de faire en sorte qu'il en soit ainsi : il suffit pour cela de multiplier tous les termes de la première équation par le coefficient 3 de y dans la seconde, et tous les termes de la seconde par le coefficient 2 de y dans la première, ce qui est permis (**64**).

On obtient ainsi les équations :

$$15x + 6y = 99 \qquad [3]$$
$$14x - 6y = 46 \qquad [4].$$

et, en les ajoutant membre à membre, puisque y a maintenant, dans les deux équations, des coefficients égaux et de signe contraire, il vient

$$29x = 145\ ,$$

d'où
$$x = \frac{145}{29} \quad \text{ou} \quad x = 5 \qquad [5].$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas du numéro précédent, et nous avons vu que les valeurs qui satisfont aux équations [1] et [5] sont

$$x=5 \quad \text{et} \quad y=4 ,$$

De là cette règle :

Lorsqu'on a deux équations du premier degré à deux inconnues, pour éliminer l'une de ces inconnues, il faut multiplier tous les termes de la première équation par le coefficient de cette inconnue dans la seconde, et tous les termes de la seconde par le coefficient de cette même inconnue dans la première. On soustrait alors, ou bien l'on ajoute, les deux équations membre à membre, selon que l'inconnue à éliminer se trouve avoir dans les deux équations des coefficients de même signe ou de signe contraire.

REMARQUES. I. Cette règle, qui a beaucoup d'analogie avec la réduction des fractions au même dénominateur, est aussi susceptible des mêmes simplifications ; si les coefficients de l'inconnue à éliminer avaient des facteurs communs, il suffirait de multiplier tous les termes de chaque équation par les facteurs non communs du coefficient de l'inconnue à éliminer dans l'autre.

II. Si l'inconnue à éliminer n'avait dans l'une des équations d'autre coefficient que l'unité, il suffirait de multiplier tous les termes de cette équation par le coefficient de cette inconnue dans l'autre ; ce qui rentre au reste dans la règle générale.

81. Il faut démontrer maintenant que l'équation obtenue par cette élimination, jointe à l'une des équations proposées, forme un système équivalent à celui des deux proposées. Mais on peut démontrer plus généralement que, si l'on multiplie la première équation par une quantité quelconque m, la seconde par une quantité quelconque n, et qu'on les ajoute ou qu'on les retranche membre à membre, l'équation ainsi obtenue, jointe à l'une des deux proposées forme un système équivalent à celui des deux proposées.

Soient, en effet, les deux équations

$$ax+by=c \qquad [1],$$
$$a'x+b'y=c' \qquad [2];$$

multiplions la première par m, et faisons passer tous les termes dans le premier membre ; multiplions la seconde par n, et faisons de même passer tous les termes dans un même membre ; nous obtiendrons ces deux équations

$$(ax+by-c)m=0 \qquad [3],$$
$$(a'x+b'y-c')n=0 \qquad [4],$$

équivalentes aux deux premières (**63**, **64**).

Retranchant membre à membre, on obtient

$$(ax+by-c)m-(a'x+b'y-c')n=0 \qquad [5].$$

Il s'agit de démontrer, par exemple, que le système des équations [1] et [5] équivaut au système des équations [1] et [2].

Or, tout système de valeurs de x et de y qui satisfera aux équations [1] et [2], annulera les premiers membres des équations [3] et [4], et par suite le premier membre de l'équation [5] qui en est la différence; ces valeurs satisferont donc à l'équation [5], et conviendront par conséquent au système [1] et [5].

Réciproquement : tout système de valeurs de x et de y qui satisfera aux équations [1] et [5], annulera les premiers membres des équations [3] et [5]; et par suite, le premier membre de l'équation [4] qui en est la différence; ces valeurs satisferont donc à l'équation [2] qui est la même que [4], et conviendront par conséquent au système [1] et [2].

Donc enfin le système [1] et [5] équivaut au système [1] et [2].

Il en serait encore de même si, au lieu de soustraire membre à membre les équations [1] et [2], on les eût ajoutées.

Remarque. Si, en particulier, les valeurs de m et de n sont telles que y disparaisse de l'équation [5], notre conclusion subsiste, et la légitimité de l'élimination effectuée plus haut se trouve démontrée.

82. Nous donnerons ici deux exemples du mode d'élimination exposé ci-dessus.

I. Soient d'abord les deux équations numériques

$$7x + 9y = 140\ ,$$
$$5x + 6y = 97\ .$$

On remarque que les coefficients de y ont le facteur commun 3, et que les facteurs non communs sont 3 et 2; multipliant donc tous les termes de la première équation par 2 et tous ceux de la seconde par 3, il vient

$$14x + 18y = 280$$
$$15x + 18y = 291\ ;$$

retranchant, membre à membre, la première de la seconde, puisque les coefficients de y ont le même signe, on obtient

$$x = 11.$$

Cette valeur, mise pour x dans la première équation, donne

$$77 + 9y = 140 \quad \text{d'où} \quad 9y = 63$$

et
$$y = 7.$$

II. Soient maintenant les deux équations littérales :

$$ax - by = a^2 + b^2$$
$$bx + ay = a^2 + b^2\ .$$

Multiplions tous les termes de la première par a, et tous ceux de la seconde par b, nous aurons

$$a^2x - aby = a^3 + ab^2$$
$$b^2x + aby = a^2b + b^3.$$

Ajoutons membre à membre; puisque les coefficients de y ont des signes contraires, il viendra

$$a^2x + b^2x = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$$

ou $$(a^2 + b^2)\,x = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3\;,$$

d'où $$x = \frac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{a^2 + b^2} \quad \text{ou} \quad x = a + b\;.$$

Cette valeur, mise pour x dans la première équation, donne

$$a^2 + ab - by = a^2 + b^2\;, \text{ d'où } by = ab - b^2\;,$$

puis $$y = \frac{ab - b^2}{b} \quad \text{ou} \quad y = a - b\;.$$

III. Le lecteur pourra s'exercer sur les deux exemples suivants :

$$12x - 5y = 6 \quad \text{d'où} \quad x = \frac{4}{3}\;.$$
$$9x + 4y = 20 \qquad\qquad y = 2\;.$$

$$(2a + b)x - (2a - b)y = 8ab \quad \text{d'où} \quad x = 2a + b$$
$$(2a - b)x + (2a - b)y = 8a^2 + 2b^2 \qquad y = 2a - b.$$

83. Nous avons exposé la première la méthode d'élimination qui offre dans la pratique le plus de commodité. On lui donne ordinairement le nom de *méthode par réduction* (au même coefficient). Mais l'élimination peut s'opérer de plusieurs autres manières.

I. Soient les deux équations traitées plus haut (80).

$$5x + 2y = 33 \qquad [1],$$
$$7x - 3y = 23 \qquad [2].$$

Supposons, pour un instant, que la valeur de x ait été déterminée par un procédé quelconque; en la mettant pour x dans l'une des deux équations proposées, dans la première, par exemple, on en tirerait la valeur correspondante de y. Or, si l'on tire de la première équation la valeur de y, en y regardant x comme connu, on obtient :

$$y = \frac{33 - 5x}{2} \qquad [3].$$

Cette valeur, jointe à la valeur qu'on suppose avoir trouvée pour x, doit satisfaire à la seconde équation proposée. Si donc on met dans l'équation [2], à la place de y la valeur [3], l'égalité

$$7x - 3\left(\frac{33 - 5x}{2}\right) = 23 \qquad [4],$$

à laquelle on parvient, sera une *condition* à laquelle la valeur de x devra satisfaire. Cette condition, traitée comme une équation où l'inconnue est x, donnera donc la valeur de x. En la résolvant, on trouve $x = 5$, comme on l'a trouvé par une autre méthode; et cette valeur, mise pour x dans l'équation [3] donne de même $y = 4$.

On voit que cette méthode consiste à prendre la valeur de l'une des inconnues dans l'une des deux équations, en y regardant l'autre inconnue comme déterminée, et à *substituer* cette valeur dans la seconde équation, qui ne contient plus alors qu'une seule inconnue. En conséquence on a donné à cette méthode le nom de méthode *par substitution.*

Elle a, dans la pratique, l'inconvénient d'introduire des dénominateurs qu'il faut ensuite faire disparaître. Mais elle offre l'avantage de pouvoir être généralisée, et appliquée, comme on le verra, à des équations de degré quelconque, toutes les fois que l'une de ces équations peut se résoudre par rapport à l'une des inconnues.

84. II. Reprenons encore les équations [1] et [2] du numéro précédent. Nous avons vu que, si l'on y regarde x comme déterminé, et qu'on tire de la première la valeur de y, on obtient

$$y = \frac{33 - 5x}{2}.$$

Si l'on tire de même de la seconde la valeur de y, on obtient

$$y = \frac{7x - 23}{3}.$$

Or, ces deux valeurs de y doivent être égales, puisque les mêmes valeurs de x et de y doivent satisfaire à la fois aux deux équations; en les égalant, on aura donc une *condition* à laquelle la valeur de x devra satisfaire. Cette condition

$$\frac{7x - 23}{3} = \frac{33 - 5x}{2}$$

traitée comme une équation où l'inconnue est x donne encore $x = 5$; et cette valeur mise pour x dans l'une quelconque des deux valeurs de y ci-dessus, donne $y = 4$.

Cette méthode est connue sous le nom de méthode *par comparai-*

son. Elle a, comme la précédente, l'inconvénient d'introduire des dénominateurs.

85. III. Enfin, reprenons une dernière fois les équations [1] et [2] du nº **83**. Si l'on multiplie la première par une quantité indéterminée m, et qu'on les ajoute membre à membre, on obtient

$$5mx + 7x + 2my - 3y = 33m + 23 \qquad [5].$$

On a démontré au nº **81** que l'équation ainsi obtenue, combinée avec l'une quelconque des deux proposées, forme un système d'équations équivalentes aux proposées. Or, la quantité m étant quelconque, on peut en disposer de manière à faire disparaître de l'équation [5] tous les termes en y. Pour cela, il suffit de poser $2m = 3$, d'où $m = \frac{3}{2}$. Cette valeur, mise pour m dans l'équation (5), la réduit à

$$\frac{15}{2}x + 7x = \frac{99}{2} + 23,$$

d'où l'on tire encore $x = 5$; et par suite $y = 4$.

Si les coefficients de y dans les deux équations proposées avaient eu le même signe, il eût fallu soustraire les équations au lieu de les ajouter.

Cette méthode, qu'on désigne sous le nom de *méthode des coefficients indéterminés*, offre, comme les deux précédentes, l'inconvénient des dénominateurs. Mais nous verrons bientôt qu'on peut s'en servir de manière à tirer à volonté d'une seule et même équation (l'analogue de l'équation [5]), soit la valeur de x, soit la valeur de y. Elle se rattache d'ailleurs à l'une des méthodes les plus générales et les plus fécondes de l'Algèbre. Nous y reviendrons incessamment; il nous suffit ici de l'avoir signalée.

Remarque. Les trois dernières méthodes que nous venons de faire connaître reviennent au fond à la première, comme il serait aisé de s'en convaincre; mais la méthode par réduction est plus *simple, plus commode et plus élégante*.

86. Remarques sur les inégalités. Une question fournit quelquefois deux conditions exprimées par deux inégalités, dans lesquelles entrent deux quantités pour lesquelles on veut obtenir des limites; c'est ce qu'on appelle *résoudre* ces deux inégalités. On peut, en général, employer à cet effet la méthode par réduction; mais il faut bien remarquer : 1° qu'on ne peut ajouter deux inégalités membre à membre qu'autant que les signes d'inégalité sont dans le même sens. Ainsi de

$a > b$ et $c > d$ on peut déduire $a + c > b + d$;

mais on ne pourrait savoir si $a-c$ est plus grand ou plus petit que $b-d$.

2° Qu'on ne peut soustraire deux inégalités membre à membre qu'autant que les signes d'inégalité sont de sens contraire : ainsi de

$$7>5 \quad \text{et} \quad 2<3 \quad \text{on peut déduire} \quad 7-2>5-3$$

en retranchant l'inégalité avec le signe $<$ de l'inégalité avec le signe $>$, et en mettant le signe $>$ dans l'inégalité résultante. Mais on ne pourrait rien conclure, en général, pour leur somme.

La résolution de deux inégalités du premier degré ne sera donc pas toujours possible.

Si l'on a, par exemple, les deux inégalités

$$4x-3y>11 \quad \text{et} \quad 7y-2x>3,$$

on en tirera par multiplication et addition, comme pour des équations,

$$x>\frac{43}{11} \quad \text{et} \quad y>\frac{17}{11};$$

mais si l'on avait les inégalités

$$4x+3y>11 \quad \text{et} \quad 7y-2x>3,$$

on en tirerait bien $y>\frac{86}{17}$, parce que x s'élimine par addition; mais on ne pourrait pas en déduire une limite pour x, parce qu'il faudrait soustraire pour éliminer y.

Si l'on avait au contraire les inégalités

$$4x+3y>11 \quad \text{et} \quad 7y-2x<5,$$

on en tirerait bien $x>\frac{31}{17}$, parce que y s'élimine en retranchant la seconde inégalité de la première; mais on ne pourrait pas en tirer une limite pour y, parce qu'il faudrait additionner pour éliminer x.

§ V. Problèmes qui conduisent à deux équations du premier degré à deux inconnues.

87. Parmi les problèmes qui présentent plusieurs inconnues, il en est un grand nombre qu'on peut résoudre en n'employant qu'une seule inconnue.

Prenons pour exemple ce problème : *Partager* 15 *en deux parties telles que la première surpasse d'une unité les* $\frac{4}{3}$ *de la seconde.*

Si l'on appelle x la première partie, la seconde sera $15-x$, et l'énoncé du problème fournit immédiatement l'équation

$$x=\frac{4}{3}(15-x)+1 \qquad [1],$$

d'où l'on tire $x=9$. Les deux parties sont donc 9 et 6; et, en effet, 9 surpasse d'une unité le nombre 8 qui est les $\frac{4}{3}$ de 6.

Mais lorsqu'on traite ainsi, à l'aide d'une seule inconnue, un problème qui en comporte plusieurs, c'est qu'on opère mentalement une véritable élimination. Dans le problème qui précède, par exemple, si l'on désigne par x la première partie et par y la seconde, on a les deux équations

$$x+y=15$$
$$x=\frac{4}{3}y+1 ,$$

et si l'on tire de la première la valeur de y pour la substituer dans la seconde, c'est-à-dire si l'on élimine y entre les deux équations, on retombe sur l'équation [1]. C'est cette élimination de y qu'on a opérée mentalement quand on a traité le problème avec la seule inconnue x.

Ces éliminations tacites, qui abrégent évidemment le calcul écrit, compliquent en revanche les opérations mentales que nécessite la mise en équation du problème; en sorte que, hors des cas très-simples, comme celui qui précède, ou ceux des problèmes I, IV, V, proposés au nº **77**, on perd plus qu'on ne gagne à diminuer le nombre des inconnues. C'est même, comme exercice d'intelligence seulement que nous avons proposé alors au lecteur le problème du nº **77**, que l'on traitera plus aisément avec deux inconnues, quoique leur rapport seul soit l'inconnue demandée.

Nous croyons donc devoir donner comme conseil général d'introduire dans le calcul toutes les inconnues que le problème comporte; si, parmi les équations qui les lient il y en a de très-simples, comme l'équation $x+y=15$ de tout à l'heure, on opérera par écrit les éliminations très-simples qu'on eût opérées mentalement; voilà toute la différence.

Nous ajouterons, par anticipation, que l'introduction de toutes les inconnues facilitera, en général, la discussion du problème; nous verrons, en effet, qu'il se présente parfois des circonstances inexplicables en apparence, lorsque l'on a réduit mal à propos le nombre réel des inconnues.

Quant à la mise en équation, elle est soumise à la seule règle générale que nous avons donnée au n° **70**. Il ne nous reste donc qu'à donner quelques exemples de problèmes conduisant à deux équations du premier degré à deux inconnues.

88. Premier problème. *Deux espèces de pièces de monnaie sont telles : que* 2 *pièces de la première, plus* 5 *pièces de la seconde font* 13 *fr.* ; *et que* 18 *pièces de la seconde surpassent de* 1 *fr.* 5 *cent. la valeur de* 5 *pièces de la première. Quelle est la valeur, en francs et centimes, de chacune de ces deux espèces de pièces de monnaie?*

Désignons par x la valeur d'une des pièces de la première espèce, et par y la valeur d'une des pièces de la seconde. Nous aurons, d'après l'énoncé, les deux équations :

$$2x+5y=13^{f},$$

$$18y=5x+1^{f},05.$$

On éliminera x en multipliant la première équation par 5, la seconde par 2 et ajoutant ; on trouve ainsi :

$$36y+25y=65^{f}+2^{f},10,$$

ou $$61y=67^{f},10, \text{ d'où } y=1^{f},10.$$

Cette valeur, mise pour y dans la première équation, donne

$$2x+5^{f},50=13^{f}, \text{ d'où } x=3^{f},75.$$

Chaque pièce de la première espèce vaut donc $3^{f},75$, et chaque pièce de la seconde espèce $1^{f},10$.

89. Deuxième problème. *Trouver une fraction telle que si l'on ajoute une unité à chacun de ses termes, elle devienne égale à* $\frac{3}{4}$; *et que si l'on retranche au contraire une unité de chacun de ses termes, elle devienne égale à* $\frac{2}{3}$.

Soient x le numérateur et y le dénominateur ; l'énoncé fournit sur-le-champ les deux équations suivantes :

$$\frac{x+1}{y+1}=\frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \frac{x-1}{y-1}=\frac{2}{3},$$

ou $$3y-4x=1 \quad \text{et} \quad 3x-2y=1,$$

qui donnent $x=5$ et $y=7$. La fraction demandée est donc $\frac{5}{7}$. Si, en effet, on ajoute une unité à chacun de ses termes, elle devient $\frac{6}{8}$ ou $\frac{3}{4}$; et si l'on retranche au contraire une unité de chacun de ses termes, elle devient $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$.

90. Troisième problème. *Un nombre est composé de deux chiffres, dont la somme absolue est* 14 *; et si on le retourne, il augmente de* 36 *; quel est ce nombre?*

Soient x le chiffre des dizaines, et y celui des unités; on aura d'abord

$$x+y=14 \qquad [1]$$

Maintenant, le nombre demandé a pour valeur $10x+y$, et le nombre retourné a pour valeur $10y+x$. Or, d'après l'énoncé, ce second nombre surpasse le premier de 36, on a donc

$$10y+x=10x+y+36,$$

ou

$$9y-9x=36,$$

ou encore

$$y-x=4 \qquad [2].$$

On connaît donc la somme et la différence des deux chiffres; en vertu du théorème démontré au n° 3, le plus grand, y, est égal à la moitié de leur somme plus la moitié de leur différence, c'est-à-dire à $7+2$ ou 9; et le plus petit, x, est égal à la moitié de leur somme moins la moitié de leur différence, c'est-à-dire à $7-2$ ou à 5; c'est ce qu'on verrait d'ailleurs en résolvant le système des équations [1] et [2].

Le nombre demandé est donc 59; en effet, la somme de ses chiffres est 14; et lorsqu'on le retourne, on obtient 95 qui surpasse 59 de 36.

91. Quatrième problème. *Une personne qui possède* 60000 *fr., en a placé une partie à* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100*, et l'autre à* $3\frac{1}{2}$ *pour* 100*; ce qui lui fait un revenu de* 2500 *fr. On demande combien elle a placé au taux de* $4\frac{1}{2}$*, et combien au taux de* $3\frac{1}{2}$.

Soient x et y les deux sommes placées; on aura d'abord

$$x+y=60000^{f}.$$

Maintenant, le capital x, au taux de $4\frac{1}{2}$ ou $\frac{9}{2}$, donne un revenu annuel de $\frac{x\times\frac{9}{2}}{100}$ ou $\frac{9x}{200}$. Le capital y, au taux de $3\frac{1}{2}$ ou $\frac{7}{2}$, donne un revenu annuel de $\frac{y\times\frac{7}{2}}{100}$ ou $\frac{7y}{200}$. La somme de ces revenus partiels doit faire le revenu total 2500 fr.; on a donc pour seconde équation

$$\frac{9x}{200}+\frac{7y}{200}=2500 \text{ fr.}$$

ou bien

$$9x+7y=500000 \text{ fr.}$$

Mettant pour y sa valeur $60000^f - x$ tirée de la première équation, et effectuant la multiplication par 7, il vient

$$9x + 420000 - 7x = 500000^f,$$

d'où
$$x = 40000^f,$$

par suite
$$y = 20000^f.$$

En effet, 40000 fr. à $4\frac{1}{2}$ pour 100 rapportent 1800 fr.; et 20000 fr. à $3\frac{1}{2}$ pour 100 rapportent 700 fr.; la somme de ces deux revenus fait bien 2500 fr.

92. Cinquième problème. *Une montre marque midi; l'aiguille des minutes est alors sur celle des heures. On demande à quelle heure se fera la prochaine rencontre des deux aiguilles, et chacune des autres rencontres successives.*

On sait que le tour du cadran est divisé en 60 parties, dont chacune répond à une minute pour la marche de la grande aiguille; on sait de plus que la grande aiguille parcourt les 60 divisions en une heure, tandis que la petite aiguille n'en parcourt que 5.

Cela posé, soit x le nombre des divisions parcourues par la grande aiguille, depuis midi jusqu'à la première rencontre; et soit y le nombre des divisions parcourues par la petite dans le même temps. On aura d'abord

$$x : y :: 60 : 5.$$

d'où
$$x = 12y \qquad [1].$$

En second lieu, la grande aiguille prenant l'avance ne pourra rencontrer la petite qu'après une révolution complète; le nombre de divisions parcourues par la grande aiguille se composera donc de 60, plus le nombre des divisions parcourues par la petite; c'est-à-dire qu'on aura

$$x = 60 + y \qquad [2].$$

De ces deux équations on tire très-facilement

$$y = \frac{60}{11} \quad \text{et} \quad x = 60 + \frac{60}{11}.$$

La grande aiguille aura donc parcouru 1° 60 divisions, qui correspondent à une heure, 2° $\frac{60}{11}$ de division, ou 5 divisions $\frac{5}{11}$, qui correspondent à 5 minutes et $\frac{5}{11}$. Il sera donc $1^h\,5^m\,\frac{5}{11}$.

Quant à la deuxième rencontre, il est clair qu'elle se fera $1^h\,5^m\,\frac{5}{11}$ après la première, puisqu'à l'instant de la première rencontre les aiguilles se retrouvent l'une par rapport à l'autre comme elles étaient à midi. Il sera donc $2^h\,10^m\,\frac{10}{11}$. En ajoutant successivement $1^h\,5^m\,\frac{5}{11}$, on trouvera pour les heures des autres rencontres successives :

$3^h\ 16^m\ \frac{4}{11}$
$4^h\ 21^m\ \frac{9}{11}$
$5^h\ 27^m\ \frac{3}{11}$
$6^h\ 32^m\ \frac{8}{11}$
$7^h\ 38^m\ \frac{2}{11}$
$8^h\ 43^m\ \frac{7}{11}$
$9^h\ 49^m\ \frac{1}{11}$
$10^h\ 54^m\ \frac{6}{11}$

$1 : 12 :: x : 5+x$
$12x = 5+x$
$11x = 5$
$x = \frac{5}{11}$

et enfin 12^h ou minuit;

ce qui fait, en tout, 11 rencontres en 12 heures.

93. Sixième problème. *Hiéron, roi de Syracuse, avait remis à un orfévre 10 livres d'or pour faire une couronne qu'il voulait offrir à Jupiter. Le travail étant achevé, la couronne se trouva du poids de 10 livres; mais le roi, soupçonnant que l'orfévre avait allié de l'argent à l'or, consulta Archimède. Celui-ci, sachant que l'or perd dans l'eau les 52 millièmes de son poids, et que l'argent y perd les 99 millièmes de son poids, détermina le poids de la couronne plongée dans l'eau, et trouva qu'il était de 9 livres 6 onces; ce qui fit reconnaître la fraude. On demande combien il y avait de livres de chaque métal dans la couronne.*

Soient x le poids de l'or, et y le poids de l'argent contenus dans la couronne. On aura d'abord l'équation

$$x + y = 160$$

si l'on suppose les poids exprimés en onces.

Maintenant, puisque l'or perd dans l'eau les 52 millièmes de son poids, le poids x de l'or contenu dans la couronne perdrait dans l'eau $\frac{52x}{1000}$. Par une raison analogue, le poids y de l'argent contenu dans la couronne, perdrait $\frac{99y}{1000}$. La somme de ces deux pertes doit faire la perte totale qu'a subie dans l'eau le poids de la couronne, c'est-à-dire 10 onces; puisque la couronne, qui pèse 10 livres dans l'air, ne pèse plus dans l'eau que 9 livres 6 onces. On a donc pour seconde équation :

$$\frac{52x}{1000} + \frac{99y}{1000} = 10$$

ou

$$52x + 99y = 10000.$$

Mettant pour y sa valeur $160-x$ tirée de la première équation, il vient

$$52x+99(160-x)=10000\ ,$$

ou

$$52x+15840-99x=10000\ ,$$

d'où

$$15840-10000=99x-52x\ ,$$

ou

$$5840=47x\ ,$$

d'où $x=\dfrac{5840}{47}$ d'once, ou 124 onces $\frac{12}{47}$,

ou enfin $x=7$ livres 12 onces $\frac{12}{47}$.

Par suite $y=2$ livres 3 onces $\frac{35}{47}$.

94. On peut tirer d'un calcul analogue une formule générale pour obtenir les proportions d'un alliage, connaissant sa densité et celle des métaux qui le composent. En effet, soient d et d' les densités des métaux alliés, x et y leurs poids, et d'' la densité de l'alliage. En prenant pour unité le poids de l'alliage, on aura d'abord

$$x+y=1\ .$$

Maintenant, la densité d'un corps étant le rapport de son poids à celui d'un égal volume d'eau, en divisant son poids par sa densité, on aura le poids d'un volume d'eau égal au sien. Ainsi $\frac{x}{d}$, $\frac{y}{d'}$ et $\frac{1}{d''}$ représenteront respectivement les poids de trois volumes égaux à ceux des métaux alliés et à celui de l'alliage. Or, si l'on admet que les métaux ne changent pas de volume en s'alliant, le volume de l'alliage sera la somme des volumes des métaux alliés; on devra donc avoir

$$\frac{x}{d}+\frac{y}{d'}=\frac{1}{d''}\ .$$

De ces deux équations, on tire

$$x=\frac{d(d''-d')}{d''(d-d')}\quad \text{et}\quad y=\frac{d'(d-d'')}{d''(d-d')}\ .$$

Le rapport de ces deux valeurs est $\dfrac{d(d''-d')}{d'(d-d'')}$.

Si, par exemple, on a $d=19$, $d'=7$, $d''=16$, on trouvera

$$x=\frac{19\times 9}{16\times 12}\ ;\qquad y=\frac{7\times 3}{16\times 12}\ ;\qquad \text{et}\qquad \frac{x}{y}=\frac{19\times 9}{7\times 3}=\frac{57}{7}\ ;$$

c'est-à-dire que les métaux alliés sont dans le rapport de 57 à 7; ou que, sur 64 unités de poids d'alliage, le premier métal entrerait pour 57 et le second pour 7 de ces unités de poids.

95. Le lecteur pourra s'exercer sur les problèmes dont les énoncés suivent.

I. *Trouver un nombre tel qu'en le divisant par* 5 *on ait pour reste* 2*; qu'en le divisant par* 8 *on ait pour reste* 5*; et que le quotient de la première division surpasse de* 3 *unités le quo-*

345

tient de la seconde. (Réponse : Les quotients sont 7 et 4 ; le nombre demandé est 37).

II. « *L'âne dit un jour au mulet : Si je prenais* 50 *kilogrammes de ta charge, la mienne deviendrait le double de la tienne.—Et moi, lui répondit le mulet, si je prenais* 50 *kilogrammes de ta charge, la mienne deviendrait triple de la tienne.* » *On demande la charge de chacun.* (Réponse : L'âne portait 110 kilogrammes et le mulet 130 kilogrammes .)

III. *La distance de Paris à Tours est de* 225 *kilomètres . Un convoi de wagons part de Paris pour Tours avec une vitesse de* 25 *kilomètres à l'heure;* 1 *heure* 48 *minutes après, un convoi part de Tours pour Paris avec une vitesse de* 35 *kilomètres à l'heure. On demande au bout de quel temps et à quelle distance de Paris les deux convois se croiseront.* (Réponse : Au bout de 3 heures à partir du second départ, et à 120 kilomètres de Paris.)

IV. *Deux joueurs conviennent que celui qui perdra la première partie doublera l'argent de son adversaire; que celui qui perdra la seconde triplera l'argent de son adversaire; que celui qui perdra la troisième quadruplera l'argent de son adversaire; et ainsi de suite. Au bout de trois parties, la perte ayant été alternative, ils se retirent chacun avec* 48 *francs . On demande ce qu'ils avaient en commençant le jeu.* (Réponse : Le premier perdant avait 62 francs et son adversaire 34 francs .)

V. *Deux vases contiennent à eux deux* 11 *litres d'eau. On prend la moitié de ce que contient le premier pour le verser dans le second; puis le tiers de ce que contient alors le second pour le verser dans le premier; puis le quart de ce que contient alors le premier pour le verser dans le second; enfin on prend le cinquième de ce que contient alors le second pour le verser dans le premier. A cet instant, le second vase se trouve contenir* 1 *litre d'eau de plus que le premier. On demande ce que chacun d'eux contenait primitivement.* (Réponse : Le premier vase contenait 3 litres d'eau et le second 8 litres .)

VI. *Si l'on augmente de* 2^{m} *la base d'un rectangle, et qu'on diminue sa hauteur de* 3^{m} *, sa surface diminue de* $48^{m.q}$ *; si l'on augmente au contraire sa base de* 3^{m} *, et qu'on diminue sa hauteur de* 2^{m} *, sa surface augmente de* $6^{m.q}$ *. On demande la base et la hauteur, sachant que la surface se mesure en multipliant ces deux dimensions l'une par l'autre.* (Réponse : la base a 30^{m} et la hauteur 24^{m}.)

§ VI. Résolution d'un système de trois équations du premier degré à trois inconnues; et en général d'un nombre quelconque d'équations du premier degré renfermant le même nombre d'inconnues.

96. Supposons d'abord qu'on ait à résoudre les trois équations

$$4x - 7y + 6z = 24 \qquad [1],$$
$$5x + 2y = 33 \qquad [2],$$
$$7x - 3y = 23 \qquad [3],$$

dont la première seule renferme les trois inconnues x, y, z, les deux dernières ne renfermant que les deux inconnues x et y.

Les deux dernières équations pourront être remplacées par les valeurs

$$x = 5,$$
$$y = 4,$$

qu'on en tire (**80**, **81**); et ces deux valeurs, mises pour x et y dans l'équation [1], la réduisent à

$$20 - 14 + 6z = 24 \qquad [4]$$

ou
$$6z = 38 - 20 = 18,$$

d'où l'on tire
$$z = 3.$$

Et ces valeurs des inconnues sont les seules qui puissent satisfaire au système des trois équations proposées; car les deux dernières n'admettent pas d'autres solutions que $x = 5$ et $y = 4$; et si x et y ont respectivement ces valeurs, l'équation [1] se change en l'équation [4] qui n'admet pas d'autre solution que $z = 3$.

Pour résoudre un système quelconque de trois équations du premier degré à trois inconnues, il faut donc tâcher d'en déduire un système *équivalent*, dans lequel deux des trois équations ne renferment que deux des inconnues.

97. Soient les trois équations :

$$2x - 3y + 5z = 27 \qquad [1],$$
$$3x + 6y - 4z = 2 \qquad [2],$$
$$5x + 4y + 2z = 40 \qquad [3].$$

Éliminons z entre les équations [1] et [2]; pour cela multiplions l'équation [1] par 4, l'équation [2] par 5; et ajoutons membre à membre, nous trouverons :

$$23x + 18y = 118 \qquad [4].$$

Éliminons de même z entre les équations [1] et [3]; pour cela multiplions l'équation [1] par 2, l'équation [3] par 5, et retranchons la première de la dernière, nous obtiendrons :

$$21x + 26y = 146 \qquad [5].$$

Les équations [4] et [5] ne renfermant plus que x et y, on sait en tirer les valeurs de ces inconnues. Si, par exemple, on multiplie l'équation [4] par 13, l'équation [5] par 9, et qu'on retranche la seconde de la première, y disparaîtra, et il restera

$$110x = 220 \quad \text{d'où} \quad x = 2 \ .$$

Cette valeur, mise pour x dans l'équation [4], donne

$$46 + 18y = 118 \quad \text{ou} \quad 18y = 72 \ ,$$

d'où

$$y = 4 \ .$$

Si maintenant dans l'une des trois équations proposées, dans l'équation [1] par exemple, on remplace x par 2 et y par 4, cette équation devient

$$4 - 12 + 5z = 27 \quad \text{ou} \quad 5z = 35 \ ,$$

d'où

$$z = 7 \ .$$

On voit, par cet exemple, que *pour résoudre un système de trois équations à trois inconnues* x, y, z, *il faut éliminer l'une des trois inconnues,* z *par exemple, deux fois, savoir : entre la première équation et la seconde, par exemple, puis entre la première et la troisième; on obtient ainsi deux équations entre les deux inconnues* x *et* y ; *on en tire les valeurs de ces inconnues; on substitue ces valeurs dans l'une des trois équations proposées, et l'on en tire la valeur de la troisième inconnue* z.

Remarque. C'est pour plus de symétrie dans le choix des lettres que nous avons d'abord éliminé z ; il eût été plus simple et plus commode d'éliminer d'abord y ; savoir, entre les équations [1] et [2], puis entre les équations [2] et [3], à cause des facteurs communs que présentent les coefficients de cette inconnue. On aurait eu ainsi à résoudre les deux équations plus simples :

$$\begin{aligned} 7x + \ \ 6z &= \ \ 56 \ , \\ 9x + 14z &= 116 \ ; \end{aligned}$$

qui donnent $x = 2$ et $z = 7$. Ces valeurs mises dans l'équation [1], donnent ensuite $y = 4$.

98. Les valeurs $x = 2$, $y = 4$, $z = 7$ sont les seules qui puissent satisfaire au système des équations [1], [4] et [5]; nous l'avons démontré (**96**) pour un exemple analogue. Il reste donc à faire voir que le système des équations [1], [4] et [5] est équivalent au système des trois équations proposées.

Mais on peut démontrer plus généralement que si l'on multiplie la première équation par une quantité quelconque m, la seconde par une quantité n, et qu'on les ajoute ou qu'on les retranche membre à membre; puis qu'on multiplie la première par une quantité quelconque m', la troisième par une quantité n', et qu'on les ajoute encore ou qu'on les retranche membre à membre, la première équation, jointe aux deux équations ainsi obtenues, forme un système équivalent à celui des trois équations proposées.

Pour le démontrer, concevons qu'on ait fait passer tous les termes de chaque équation dans un seul membre; désignons pour abréger ces membres par A, B, C; en sorte que les trois équations proposées seront représentées par

$$A=0\ ,\quad B=0 \quad \text{et} \quad C=0.$$

Il s'agit de faire voir, par exemple, que le système

$$A=0\ ,\quad mA+nB=0\ ,\quad m'A-n'C=0$$

est équivalent au premier.

Or, tout système de valeurs de x, y, z qui satisfera aux trois équations proposées, annulera A, B et C, et par suite $mA+nB$ et $m'A-n'C$; ces valeurs satisferont donc aux trois équations du second système.

Réciproquement : si un système de valeurs satisfait aux équations du second système, en vertu de $A=0$, ces valeurs annuleront A; la seconde équation $mA+nB=0$ se réduira donc à $nB=0$, ce qui exige $B=0$; et la troisième équation $m'A-n'C=0$ ou $m'A=n'C$ se réduira à $0=n'C$, ce qui exige $C=0$; c'est-à-dire que les valeurs en question annuleront à la fois A, B et C, et satisferont par conséquent aux équations du premier système.

Remarque. Si, en particulier, les multiplicateurs m, n, m' et n' sont choisis de manière qu'en ajoutant ou retranchant convenablement, l'inconnue z disparaisse des équations

$$mA+nB=0 \quad \text{et} \quad m'A-n'C=0\ ,$$

la démonstration subsiste; ce qui démontre la légitimité du mode de résolution que nous avons employé.

99. Comme exemple d'équations littérales, nous traiterons les suivantes :

$$ax-by+cz=a^2+c^2 \qquad [1]$$
$$bx+cy-az=b^2+c^2 \qquad [2]$$
$$-cx+ay+bz=a^2+b^2 \qquad [3].$$

Éliminons z entre les équations [1] et [2], nous trouvons

$$(a^2+bc)x+(c^2-ab)y=a^3+ac^2+b^2c+c^3 \qquad [4].$$

Éliminons z entre les équations [2] et [3], il viendra

$$(b^2-ac)x+(a^2+bc)y=a^3+ab^2+bc^2+b^3 \qquad [5].$$

L'élimination de y entre ces deux dernières, donne

$$(a^4+a^2bc+ab^3+ac^3)x=a^5+a^4b+a^3bc+a^2b^3+a^2b^2c+a^2c^3 \\ +ab^4+abc^3 ,$$

ou

$$(a^3+abc+b^3+c^3)x=a^4+a^3b+a^2bc+ab^3+ab^2c+ac^3+ab^3+bc^3;$$

d'où, en divisant les deux membres par $a^3+abc+b^3+c^3$,

$$x=a+b .$$

Cette valeur mise pour x dans l'équation [5] donne

$$(a^2+bc)y=a^3+a^2c+abc+bc^2$$

d'où, en divisant les deux membres par a^2+bc,

$$y=a+c .$$

Mettant pour x et y leurs valeurs dans l'équation [1], elle devient

$$a^2-bc+cz=a^2+c^2 \quad \text{ou} \quad cz=bc+c^2 ;$$

d'où

$$z=b+c .$$

100. Il est facile maintenant de généraliser la marche que nous avons suivie. Supposons qu'on ait 5 équations du premier degré entre les 5 inconnues x, y, z, u, t. On éliminera t quatre fois : par exemple entre la première équation et chacune des quatre autres ; on obtiendra ainsi 4 équations entre les inconnues x, y, z, u. On éliminera u trois fois : par exemple entre la première de ces quatre équations, et chacune des trois autres ; on obtiendra ainsi 3 équations entre les 3 inconnues x, y, z. On éliminera z deux fois : par exemple entre la première de ces trois équations et chacune des deux autres ; on obtiendra ainsi 2 équations entre les 2 inconnues x et y. On éliminera y entre ces deux équations, et l'on obtiendra une équation qui ne contiendra plus qu'une seule inconnue x. On en tirera la valeur de cette inconnue. On portera cette valeur à la place de x dans l'une des deux équations entre x et y ; et l'on en tirera la valeur de y. On portera les valeurs de x et de y dans l'une des trois équations entre x, y et z ; et l'on en tirera la valeur de z. On portera les valeurs de x, y et z dans l'une des quatre équations entre x, y, z et u; et l'on en tirera la valeur de u. On portera enfin les valeurs de x, y, z et u dans l'une des cinq équations proposées entre x, y, z, u et t; et l'on en tirera la valeur de t.

On suivrait une marche analogue pour un nombre quelconque d'équations du premier degré renfermant le même nombre d'inconnues.

101. Le calcul se simplifie, lorsque toutes les équations ne contiennent pas toutes les inconnues. Si, par exemple, dans le cas de 5 équations entre 5 inconnues x, y, z, u et t, il y avait une équation qui ne contînt pas l'inconnue x; cette équation pourrait être prise pour l'une des 4 équations à 4 inconnues qu'on se propose d'obtenir; et il suffirait d'éliminer x trois fois pour obtenir les trois autres. Si, parmi ces 4 équations entre les 4 inconnues y, z, u et t, il y en avait une qui ne contînt pas l'inconnue z par exemple, cette équation pourrait être prise pour l'une des 3 équations à 3 inconnues qu'on cherche à en déduire; et il suffirait d'éliminer z deux fois pour obtenir les deux autres. Et ainsi de suite.

Si deux inconnues manquent à la fois dans une même équation, le calcul se simplifie encore davantage. Il est rare qu'il ne se présente pas dans le courant des opérations quelque circonstance favorable dont on puisse tirer parti avec un peu d'adresse, lors même que les équations primitives contiennent toutes les inconnues.

Soient, pour exemple, les 4 équations :

$$5x-3y+4z-2u=1 \quad [1],$$
$$x+2y-5z+3u=5 \quad [2],$$
$$3x-y-2z+u=0 \quad [3],$$
$$4x+3y-3z+2u=11 \quad [4],$$

qui contiennent chacune les 4 inconnues x, y, z et u.

L'élimination de u entre [1] et [3], puis entre [2] et [3], enfin entre [1] et [4] donne très-facilement :

$$11x-5y=1 \quad [5],$$
$$-8x+5y+z=5 \quad [6],$$
$$9x+z=12 \quad [7].$$

L'équation [5] ne contenant pas z, il suffit d'éliminer z entre [6] et [7], ce qui donne

$$17x-5y=7 \quad [8].$$

L'élimination de y entre les équations [5] et [8], donne ensuite

$$6x=6, \quad \text{d'où} \quad x=1.$$

Mettant cette valeur de x dans les équations [5] et [7], on en tire

$$11-5y=1 \quad \text{et} \quad 9+z=12 ,$$

d'où

$$y=2 \quad \text{et} \quad z=3 .$$

Ces valeurs de x, y et z introduites dans l'équation [3], donnent

$$3-2-6+u=0 , \quad \text{d'où} \quad u=5 .$$

102. Le lecteur pourra s'exercer sur les exemples suivants :

I.
$$\begin{aligned} 2x-6y+3z&=5 , & \text{d'où} \quad x&=10 ,\\ x+2y-12z&=4 , & y&=3 ,\\ 8y+6z-3x&=0 , & z&=1 . \end{aligned}$$

II.
$$\begin{aligned} ax+by-cz&=b^2 , & \text{d'où} \quad x&=c ,\\ bx-cy+az&=a^2 , & y&=b ,\\ cx+ay-bz&=c^2 , & z&=a . \end{aligned}$$

III.
$$\begin{aligned} 6x+3y-3z+u&=5 , & \text{d'où} \quad x&=0 ,\\ 3x+5y+2z-2u&=4 , & y&=2 ,\\ 5x-2y-2z+2u&=2 , & z&=2 ,\\ 2x+5y+3z-3u&=1 , & u&=5 . \end{aligned}$$

§ VII. Problèmes qui conduisent à un nombre quelconque d'équations du premier degré, renfermant le même nombre d'inconnues.

103. La mise en équations de ces problèmes est soumise à la règle générale donnée au nº **70**. Nous rappellerons ici le conseil que nous avons donné au nº **87** d'introduire dans le calcul toutes les inconnues que le problème comporte. Sans doute, quand le nombre des inconnues est grand, il semblerait qu'on doit chercher à le restreindre; mais l'avantage qu'il en pourrait résulter pour le calcul serait presque toujours compensé, et au delà, par l'embarras que la suppression de quelques inconnues introduirait dans la mise en équations.

Cela dit, il ne nous reste qu'à donner quelques exemples.

PREMIER PROBLÈME. *On a trois lingots qui contiennent :*

Le premier,	20 *gr. d'or* ,	30 *d'argent* ,	40 *de cuivre* .
Le second,	30	40	50
Le troisième,	40	50	90

Combien faut-il prendre de chacun d'eux pour former un quatrième lingot qui contienne :

75 *gr. d'or* , 100 *d'argent* , *et* 149 *de cuivre ?*

Soient x, y, z les nombres de grammes de chacun des trois premiers lingots, qu'il faut prendre pour former le quatrième. On remarquera, que, dans le premier lingot, il y a 20^{gr} d'or, sur $20+30+40$ ou 90; c'est-à-dire que l'or y entre pour $\frac{2}{9}$. Dans le second lingot, il entre pour $\frac{3}{12}$, et dans le troisième, pour $\frac{4}{18}$. Ce métal entrera, en mêmes proportions, dans les parties x, y, z qu'on prendra des trois lingots; et, comme la somme des quantités d'or contenues dans ces parties doit faire 75^{gr}, on devra avoir l'équation :

$$\frac{2}{9}x+\frac{3}{12}y+\frac{4}{18}z=75^{gr}.$$

L'argent, dans le premier lingot, entre pour $\frac{3}{9}$, dans le second, pour $\frac{4}{12}$, dans le troisième, pour $\frac{5}{18}$; on verrait donc, par un raisonnement analogue au précédent, qu'on doit avoir :

$$\frac{3}{9}x+\frac{4}{12}y+\frac{5}{18}z=100^{gr},$$

Et, en opérant de même pour les quantités de cuivre, on trouverait de même l'équation :

$$\frac{4}{9}x+\frac{5}{12}y+\frac{9}{18}z=149^{gr}.$$

Telles sont les équations du problème. En faisant disparaître les dénominateurs et simplifiant, elles deviennent :

$$8x+\ \ 9y+\ \ 8z=2700 \qquad [1],$$
$$12x+12y+10z=3600 \qquad [2],$$
$$16x+15y+18z=5364 \qquad [3].$$

Éliminant d'abord x entre [1] et [2], puis entre [1] et [3], on obtient :

$$3y+4z=900 \qquad [4];$$
$$3y-2z=\ \ 36 \qquad [5].$$

Éliminant ensuite y entre ces deux dernières, on trouve

$$6z=864, \quad \text{d'où} \quad z=144^{gr}.$$

Cette valeur, mise dans [5], donne

$$3y-288=36, \quad \text{d'où} \quad y=108^{gr}.$$

Et ces valeurs, mises dans [1], donnent

$$8x+972+1152=2700, \quad \text{d'où} \quad x=72^{gr}.$$

104. Deuxième problème. *Trois vases contiennent, à eux trois, 18 litres d'eau. On prend la moitié de ce que contient le premier, pour le verser dans le second; on prend ensuite le tiers de ce que contient alors le second, pour le verser dans le troisième; on prend* *enfin le quart de ce que contient alors le troisième, pour le verser dans le premier. Il se trouve alors que l'eau est également partagée entre les trois vases. On demande ce que chacun d'eux contenait primitivement.*

Soient x, y, z les nombres de litres d'eau contenus primitivement dans chaque vase. Si l'on prend la moitié de ce que contient le premier, c'est-à-dire $\frac{x}{2}$ pour le verser dans le second, les trois vases contiendront des quantités d'eau marquées respectivement par

$$\tfrac{1}{2}x\ ;\quad y+\tfrac{1}{2}x\ ;\quad z\ .$$

On prend maintenant le tiers de ce que contient le second, c'est-à-dire $\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}x$, pour le verser dans le troisième; les quantités d'eau contenues deviendront donc :

$$\tfrac{1}{2}x\ ;\quad y+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{3}y-\tfrac{1}{6}x\ ;\quad \text{et}\quad z+\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{6}x\ ;$$

ou

$$\tfrac{1}{2}x\ ;\quad \tfrac{2}{3}y+\tfrac{1}{3}x\ ;\quad \text{et}\quad z+\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{6}x\ .$$

On prend enfin le quart de ce que contient le troisième vase, c'est-à-dire $\frac{1}{4}z+\frac{1}{12}y+\frac{1}{24}x$, pour le verser dans le premier; les quantités d'eau contenues deviennent dès lors :

$$\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}z+\tfrac{1}{12}y+\tfrac{1}{24}x\ ;\quad \tfrac{2}{3}y+\tfrac{1}{3}x\ ;\quad \text{et}\quad z+\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{6}x-\tfrac{1}{4}z-\tfrac{1}{12}y-\tfrac{1}{24}x\ ;$$

ou

$$\tfrac{13}{24}x+\tfrac{1}{4}z+\tfrac{1}{12}y\ ;\quad \tfrac{2}{3}y+\tfrac{1}{3}x\ ;\quad \text{et}\quad \tfrac{3}{4}z+\tfrac{1}{4}y+\tfrac{1}{8}x\ ;$$

mais l'eau se trouvant alors également partagée, chaque vase contient le tiers des 18 litres, c'est-à-dire 6 litres. On a donc les trois équations :

$$\begin{aligned} \tfrac{13}{24}x+\tfrac{1}{4}z+\tfrac{1}{12}y &= 6\ ,\\ \tfrac{2}{3}y+\tfrac{1}{3}x &= 6\ ,\\ \tfrac{3}{4}z+\tfrac{1}{4}y+\tfrac{1}{8}x &= 6\ ,\end{aligned}$$

ou, en simplifiant :

$$\begin{aligned} 13x+2y+6z &= 144\ ,\\ x+2y &= 18\ ,\\ x+2y+6z &= 48\ .\end{aligned}$$

Si l'on retranche les deux dernières membre à membre, on a sur-le-champ

$$6z=30\ ,\quad \text{d'où}\quad z=5\ ;$$

à l'aide de cette valeur, la première équation devient

$$13x+2y=114\ ;$$

si l'on en retranche la seconde membre à membre, il reste :

$$12x=96\ ,\quad \text{d'où}\quad x=8\ ;$$

enfin cette valeur, mise pour x dans la seconde équation, donne

$$8+2y=18\ ,\quad \text{d'où}\quad y=5\ .$$

Le premier vase contenait donc 8 litres, le second 5 et le troisième 5; ce qu'on vérifiera facilement.

105. Troisième problème. *Un nombre est tel : que, si on le divise par 7, on a pour reste 4, que, si on le divise par 9, on a pour reste 6, que, si on le divise par 13, on a pour reste 8; et de plus, la somme des trois quotients surpasse de 3 unités le quart du nombre lui-même. On demande quel est ce nombre?*

Soit x le nombre cherché, et soient y, z et u les quotients respectifs qu'on obtient en le divisant par 7, 9 ou 13. On aura, en vertu de la division même :

$$x=7y+4\ ,$$
$$x=9z+6\ ,$$
$$x=13u+8\ ,$$

et, en vertu de la dernière partie de l'énoncé,

$$y+z+u=\frac{1}{4}x+3\ .$$

Si l'on tire des trois premières équations les valeurs de y, z, u, en y regardant x comme connu, on obtient :

$$y=\frac{x-4}{7}\ ,\quad z=\frac{x-6}{9}\ ,\quad u=\frac{x-8}{13}\ ;$$

et, si l'on met pour y, z, u ces valeurs dans la quatrième équation, on obtient

$$\frac{x-4}{7}+\frac{x-6}{9}+\frac{x-8}{13}=\frac{1}{4}x+3\ ,$$

équation qui ne contient plus que l'inconnue x. On en tire, en faisant disparaître les dénominateurs :

$$468x-1872+364x-2184+252x-2016=819x+9828$$

ou
$$265x=15900\quad \text{d'où}\quad x=60.$$

Tel est le nombre demandé. Les quotients qu'on obtient en le divisant par 7, 9 ou 13, sont 8, 6 et 4, dont la somme 18 surpasse de 3 unités le nombre 15 qui est le quart de 60.

Remarque. Ce problème offre un exemple d'une question qui comporte réellement quatre inconnues, bien que l'énoncé semble n'en admettre qu'une.

106. Le lecteur pourra s'exercer sur les problèmes dont les énoncés suivent :

I. *Un homme chargé de transporter des vases de trois grandeurs, est convenu de payer pour chaque vase cassé par lui autant qu'il aurait reçu s'il l'eût rendu en bon état. On lui donne* 3 *grands vases,* 5 *moyens et* 9 *petits. On apprend qu'en route il a cassé tous les vases de l'une des trois grandeurs, mais l'on ne sait laquelle. Si ce sont les grands ou les petits le porteur touchera* 10 *fr.*; *mais si ce sont les moyens, il ne touchera que* 8 *fr. On demande ce qu'il doit toucher pour un vase de chaque espèce rendu en bon état.*

(Réponse : 3 fr. pour un grand vase, 2 fr. pour un moyen, 1 fr. pour chaque petit.)

II. *On demande quel est le nombre de quatre chiffres qui jouit des propriétés suivantes :* 1° *que la somme des deux premiers chiffres, soit à sa droite, soit à sa gauche, est égale à* 7 ; 2° *que le chiffre de ses unités est le triple de celui des centaines*; 3° *enfin que si l'on écrit ses quatre chiffres dans un ordre contraire, le nombre augmente de* 909. (Réponse : 5216.)

III. *Une personne a divisé son capital en trois parties qu'elle a placées, la première à* 5 *pour* 100, *la seconde à* 4 *pour* 100, *la troisième à* 3 *pour* 100. *Elle se fait ainsi un revenu annuel de* 4000 *fr., comme si tout son capital eût été placé à* 4 *pour* 100. *On sait de plus que la partie placée à* 5 *pour* 100 *rapporte annuellement* 600 *fr. de plus que celle qui est placée à* 3 *pour* 100. *On demande quel est le capital entier, et quelles sont les trois parties.*

(Réponse : le capital entier est de 100000 fr. ; les trois parties sont 30000 fr., 40000 fr. et 30000 fr.)

CHAPITRE IV.

DES QUANTITÉS NÉGATIVES, ET DE LA DISCUSSION DES PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

§ I. Des quantités négatives.

107. Jusqu'ici, lorsque nous avons eu à considérer des expressions algébriques polynomes, nous avons toujours supposé que l'ensemble des termes positifs l'emportait en valeur absolue sur l'ensemble des termes négatifs; et quant aux monomes isolés, nous les avons toujours supposés positifs. Nous avons à examiner maintenant, dans l'hypothèse contraire, le sens qu'il convient d'attacher aux expressions algébriques, et ce que deviennent les règles du calcul littéral, qui n'ont été établies, on se le rappelle, que dans la supposition où les quantités sur lesquelles on opère ont une valeur positive.

Considérons un polynome, dans lequel la partie négative soit supposée l'emporter en valeur absolue sur la positive; et pour plus de simplicité, choisissons le binome $a-b$. Si l'on attribue à b une valeur plus grande qu'à a, ce binome n'offre plus en apparence d'autre sens à l'esprit que celui d'une opération impossible.

On peut, à la vérité, donner une forme plus simple à l'expression $a-b$; car, si l'on désigne par d l'excès de la valeur absolue b sur la valeur absolue a, en sorte que b soit égal à $a+d$, on aura à retrancher de a la somme $a+d$; et si l'on en retranche d'abord a, ce qui donne *zéro* pour reste, on n'aura plus à indiquer que la soustraction de d, ce qui conduira à l'expression plus simple $-d$. On peut même remarquer que cette simplification revient à soustraire a de b et à affecter le reste d du signe $-$; c'est ainsi, par exemple, que $7-12$ reviendrait à $7-7-5$, et se réduirait par conséquent à -5.

Mais ces expressions négatives isolées, $-d$, -5, n'en sont pas moins des symboles d'impossibilité, si l'on s'en tient aux notions et aux conventions de l'arithmétique. Or, on va voir que, dans un autre ordre d'idées, ces expressions deviennent susceptibles d'une interprétation parfaitement rationnelle; et que, bien loin d'être les symboles d'une opération impossible, elles sont quelquefois la seule réponse raisonnable que puisse comporter une question.

Concevons, par exemple, qu'un thermomètre marquant 10^0 au-dessus de *zéro*, la température vienne à baisser de 6^0 ; pour avoir la température nouvelle, il faudra retrancher 6^0 de 10^0, ce qui donnera $10^0 - 6^0$ ou 4^0. Point de difficulté jusqu'ici.

Mais, le thermomètre marquant toujours 10^0 au-dessus de *zéro*, supposons que la température vienne à baisser de 14^0 ; si l'on veut, comme tout à l'heure, retrancher de la température primitive le nombre de degrés dont elle s'est abaissée, on est conduit à l'expression $10^0 - 14^0$ ou -4^0, d'après la simplification indiquée ci-dessus. D'un autre côté, si, partant du $10^{\text{ième}}$ degré au-dessus de zéro, on compte 14 degrés en descendant l'échelle thermométrique, on arrive à zéro quand on en a compté 10, et les 4 restants se trouvent comptés *au-dessous de zéro*. Remarquons cette correspondance entre le symbole -4^0 et le résultat réel 4^0 *au-dessous de zéro*.

Prenons un second exemple. Un lieu est situé sous le 40^e degré de latitude nord, un second lieu est situé à 30 degrés au sud du premier, sur le même méridien pour plus de clarté. Si l'on veut connaître à quelle latitude répond ce second lieu, on retranchera les 30^0 de la latitude 40^0, ce qui donnera $40^0 - 30^0$ ou 10^0 *de latitude nord*. Point de difficulté.

Mais si le second lieu était à 50^0 au sud du premier, et que, pour obtenir sa latitude, on retranchât encore les 50^0 de la latitude 40^0, on arriverait à l'expression $40^0 - 50^0$ ou -10^0. D'un autre côté, si, en partant du $40^{\text{ième}}$ degré de latitude nord on descend vers le sud en comptant 50 degrés, quand on en aura compté 40, on sera sur l'équateur, et les 10 qui restent seront comptés vers le sud; la latitude demandée sera donc 10^0 *de latitude sud*. Remarquons encore cette correspondance entre le symbole -10^0 et le résultat réel 10^0 *de latitude sud*.

Pour dernier exemple, imaginons qu'un événement ait eu lieu 600 ans après J. C., et qu'un autre événement ait eu lieu 400 ans auparavant. Pour avoir la date de celui-ci, il faudra retrancher 400 ans de 600 ans, ce qui donnera $600 - 400$ ou 200 ans après J. C. Mais si l'on suppose que le deuxième événement considéré ait eu lieu 800 ans avant celui dont on a parlé d'abord, et que pour avoir sa date on retranche encore les 800 ans des 600 ans, on arrive à l'expression $600 - 800$ ou -200 ans. D'un autre côté, il est facile de voir que l'événement en question a eu lieu 200 ans *avant J. C.* Remarquons encore cette correspondance entre le symbole -200 ans, et le résultat réel 200 ans *avant J. C.*

Dans les exemples que nous venons de prendre, et il serait facile de les multiplier, on trouve cette circonstance commune que la quantité cherchée est, par sa nature, susceptible d'être comptée dans deux sens opposés. Et l'on remarque que, l'un de ces deux sens étant celui qui est le plus ordinaire, et dans lequel on compte habituellement les quantités regardées comme positives, il arrive que si la quantité cherchée doit être comptée en sens contraire, le calcul de cette quantité effectué d'après les mêmes règles que si elle devait être positive, conduit à un résultat négatif.

Il n'y a qu'un pas de cette remarque à la convention de compter dans l'un des deux sens opposés les quantités positives, et dans le sens contraire les quantités négatives. De cette manière, toutes les fois qu'une quantité sera ainsi susceptible d'être comptée dans deux sens contraires, il sera aussi rationnel de lui attribuer des valeurs négatives que des positives; et les monomes négatifs isolés ne seront des symboles d'impossibilité absolue que lorsqu'ils représenteront une quantité qui, par sa nature, ne peut être comptée que dans un sens. Si, par exemple, il s'agit de la longitude d'un lieu, comme elle peut être comptée vers l'est ou vers l'ouest, on pourra admettre pour cette quantité des valeurs indistinctement positives ou négatives. S'il s'agit au contraire du nombre des côtés d'un polygone, comme il ne peut être compté que dans un sens, il n'admettra pas de valeurs négatives; et une valeur négative, dans ce cas, serait un symbole d'impossibilité absolue.

108. Cette convention peut être justifiée par une autre considération qui nous servira en même temps à montrer sous son véritable jour le calcul des quantités négatives, et l'Algèbre en général.

Reprenons l'exemple du thermomètre. Supposons qu'il marque 6^0 *au-dessus de zéro*, et que la température vienne à s'élever de 10 degrés; pour savoir le nombre de degrés que l'instrument marquera, il faudra *ajouter* aux 10 degrés d'élévation, les 6 degrés que le thermomètre marquait d'abord, ce qui donnera $10+6$ ou 16^0 *au-dessus de zéro.*

En général, si t désigne dans ce cas la température primitive, a l'accroissement, et T la température finale, on aura la relation

$$T = a + t \qquad [1].$$

Supposons maintenant que la température primitive soit de 6^0 *au-dessous de zéro*, et qu'elle s'élève encore de 10^0; la température finale s'obtiendra en remarquant que, si elle s'élève d'abord de 6 degrés, le thermomètre marquera zéro; et que les 4 degrés d'élévation restants seront comptés *au-dessus de zéro.* C'est-à-dire que pour avoir la température finale, il faudra des 10 degrés d'élévation *retrancher* les 6 degrés au-dessous de zéro que marquait primitivement le thermomètre ; ce qui donne en effet $10^0 - 6^0$ ou 4^0 *au-dessus de zéro.*

En général, si t désigne alors la température primitive, ou le nombre de degrés au-dessous de zéro que marquait primitivement le thermomètre, si a désigne toujours l'accroissement de température et T la température finale, on aura la relation

$$T = a - t \qquad [2].$$

On voit que les relations [1] et [2] ne diffèrent l'une de l'autre que par le signe qui précède la température initiale t. Cette remarque suffirait pour justifier la convention qui consiste à regarder comme *positives* les températures comptées *au-dessus* de zéro, et comme *négatives* celles qui sont comptées *au-dessous*.

Mais il y a plus, c'est que cette convention permet de réunir les deux formules [1] et [2] en une seule, qui comprendra tous les cas, et donnera ainsi la réponse la plus générale à la question proposée. Il suffit pour cela d'étendre la signification des mots *quantité* et *addition*. Nous appellerons *quantités algébriques* celles qui, comme la température, la latitude, le temps, etc., sont susceptibles d'être comptées indifféremment dans deux sens opposés; ces quantités étant positives si on les compte dans l'un de ces deux sens, et négatives si on les compte dans l'autre. Nous appellerons *addition algébrique* une opération ayant pour but de réunir deux ou plusieurs quantités algébriques *en conservant à chacune son signe;* de telle sorte que la *somme algébrique* de $+10$ et de -6 sera $10-6$, comme celle de $+10$ et de $+6$ est $10+6$. Nous pourrons alors ne conserver que la formule [1], et l'énoncer en disant : que si un thermomètre marque t degrés et que la température s'élève de a degrés, la température finale T sera la *somme algébrique* de a et de t. Cette formule répondra alors à tous les cas. Si, par exemple, la température initiale est de 10^0 au-dessous de zéro, et qu'elle s'élève de 7 degrés, pour avoir la température finale, on remplacera a par $+7$ et t par -10, et faisant la *somme algébrique,* on aura

$$T = +7 - 10 \quad \text{ou} \quad T = -3,$$

ce qui voudra dire que la température finale est de 3^0 *au-dessous* de zéro. C'est ce qu'il est facile de vérifier.

109. Prenons un dernier exemple. Supposons que deux villes soient situées sur le même méridien : l'une à 48^0 de latitude nord, l'autre à 35^0 de latitude nord; pour avoir leur distance en latitude, on n'aura qu'à *retrancher* 35 de 48, ce qui donnera $48^0 - 35^0$ ou 13^0 de latitude nord.

En général, si L et l désignent les deux latitudes nord, et d la distance des deux villes, on aura la relation

$$d = L - l \qquad [1].$$

Supposons maintenant que la première ville étant toujours à 48^0 de latitude nord, la seconde soit à 35^0 de latitude sud; il est clair que pour obtenir leur distance en latitude, il faudra *faire la somme* des nombres 48 et 35, ce qui donnera $48^0 + 35^0$ ou 83^0.

En général, si L désigne le nombre de degrés de latitude nord, l le nombre de degrés de latitude sud, et d la distance des deux villes, on aura la relation

$$d = L + l \qquad [2].$$

Les relations [1] et [2] ne diffèrent que par le signe qui précède la latitude l. Il est donc naturel de regarder la latitude comme une *quantité algébrique*, qui sera positive ou négative, suivant qu'elle sera comptée vers le nord ou vers le sud. On pourra ensuite renfermer tous les cas de la question qui nous occupe dans la formule [1], en étendant le sens du mot *soustraction*. On appellera *soustraction algébrique* une opération par laquelle on écrit une quantité algébrique à la suite d'une autre *en changeant son signe*; en sorte que la différence entre $+48$ et $+35$ sera $48 - 35$; mais que la différence entre $+48$ et -35 sera $48 + 35$. On énoncera alors la formule [1] d'une manière générale en disant : que pour obtenir la distance en latitude de deux lieux donnés, il faut faire la *différence algébrique* entre leurs latitudes.

110. En résumé, on voit qu'il existe des quantités susceptibles d'être comptées indifféremment dans deux sens opposés; et que, suivant qu'elles sont comptées dans l'un ou l'autre de ces deux sens, elles figurent avec un certain signe ou avec le signe contraire dans la solution d'une même question. Les quantités de cette espèce ont reçu le nom de *quantités algébriques;* on leur attribue le signe $+$ lorsqu'elles sont comptées dans l'un des deux sens dont on vient de parler, et le signe $-$ lorsqu'elles sont comptées dans le sens contraire. L'avantage qu'on retire de cette convention est non-seulement de trouver une interprétation pour les quantités négatives isolées que le calcul fournit quelquefois, mais encore de pouvoir généraliser les formules auxquelles conduit la solution d'un problème particulier.

Cette tendance de l'Algèbre à généraliser les opérations et les résultats est un de ses caractères distinctifs. Nous aurons occasion d'y revenir plus d'une fois. Il nous suffit pour le moment d'avoir essayé de faire comprendre l'origine des quantités négatives et des règles suivant lesquelles on les introduit dans le calcul. Nous allons maintenant exposer ces règles en détail.

111. *On appelle* QUANTITÉ ALGÉBRIQUE *une quantité qui se compose de deux éléments :* 1° *d'une valeur numérique* qui peut être entière ou fractionnaire; 2° *d'un signe* qui peut être $+$ ou $-$.

Ainsi $+4$, -4, $+\frac{5}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $+a$, $-a$, $+4a^2b$, $-4a^2b$, etc., sont des quantités algébriques. Si elles contiennent des lettres, il faut toujours imaginer que ces lettres tiennent lieu de certaines valeurs numériques entières ou fractionnaires.

Quant à l'ordre de grandeur des quantités négatives entre elles, ou comparées aux quantités positives, il faut remarquer que si d'un nombre quelconque, 5 par exemple, on retranche successivement une unité, on obtient des nombres de plus en plus petits 4, 3, 2, 1, 0. Arrivé à ce point, si l'on continue à retrancher toujours successivement une unité, on obtient les quantités négatives -1, -2, -3, -4, etc., dont la valeur absolue est croissante. Mais, comme c'est à l'aide d'une même opération, la soustraction d'une unité, qu'on a obtenu toute cette série de nombres, les uns positifs décroissants, les autres négatifs croissants en valeur absolue, l'analogie a conduit à regarder les quantités négatives comme moindres, algébriquement parlant, que les quantités positives, et comme d'autant moindres que leur valeur absolue est plus grande. Ainsi -1 est regardé comme moindre que 0; -2 est moindre que -1; et ainsi de suite.

Conformément à cette convention, lorsqu'on veut exprimer qu'une quantité a est positive, on écrit $a > 0$; et si l'on veut exprimer qu'elle est négative, on écrit $a < 0$.

112. *L'*ADDITION ALGÉBRIQUE *est une opération par laquelle on réunit plusieurs quantités algébriques en conservant à chacune son signe.*

Ainsi, la somme algébrique de $+a$ et de $+b$ est $a+b$; la somme algébrique de $+a$ et de $-b$ est $a-b$; la somme algébrique de $-a$ et de $+b$ est $-a+b$; la somme algébrique de $-a$ et de $-b$ est $-a-b$.

Un polynome peut être considéré comme la somme algébrique de ses termes.

Pour additionner deux polynomes, il suffit d'écrire le second à la suite du premier en conservant à chaque terme son signe. Cette règle a déjà été donnée au n° **27**; mais nous avions supposé alors que, dans chaque polynome, l'ensemble des termes positifs l'emportait sur l'ensemble des termes négatifs. Cette restriction devient inutile.

113. *La* SOUSTRACTION ALGÉBRIQUE *est une opération par laquelle on écrit la quantité à soustraire à la suite de la quantité dont on la soustrait, en changeant le signe de la quantité à soustraire.*

Ainsi, la différence algébrique entre $+a$ et $+b$ est $a-b$; la différence algébrique entre $+a$ et $-b$ est $a+b$; la différence algébrique entre $-a$ et $+b$ est $-a-b$; la différence algébrique entre $-a$ et $-b$ est $-a+b$.

Pour soustraire un polynome d'un autre, il faut l'écrire à la suite de cet autre en changeant le signe de chacun de ses termes. Cette règle a été donnée au nº **50**, en supposant que dans chaque polynome l'ensemble des termes positifs l'emportait sur l'ensemble des termes négatifs; cette restriction n'est plus nécessaire.

114. *La* MULTIPLICATION ALGÉBRIQUE *est une opération par laquelle on cherche une quantité algébrique, appelée* produit, *qui soit composée avec une quantité algébrique, appelée* multiplicande, *comme une autre quantité algébrique, appelée* multiplicateur, *est composée avec l'unité positive.*

Cette définition n'est, comme on le voit, qu'une extension de la définition donnée en arithmétique; on y a introduit l'élément qui distingue les quantités algébriques des quantités purement numériques, c'est-à-dire le signe.

Soit $+A$ à multiplier par $+B$. La valeur absolue du produit sera composée avec la valeur absolue A du multiplicande, comme la valeur absolue B du multiplicateur est composée avec l'unité; c'est-à-dire que, d'après les notations admises, cette valeur absolue du produit sera AB . Quant au signe du produit, comme le multiplicateur $+B$ a le même signe que l'unité positive, ce produit aura le même signe que le multiplicande, c'est-à-dire $+$.

Ainsi, le produit de $+A$ par $+B$ est $+AB$.

Soit $+A$ à multiplier par $-B$. La valeur absolue du produit sera, comme ci-dessus, AB . Mais le multiplicateur $-B$ ayant un signe contraire à celui de l'unité positive, le produit aura un signe contraire à celui du multiplicande, c'est-à-dire $-$.

Ainsi le produit de $+A$ par $-B$ est $-AB$.

Soit $-A$ à multiplier par $+B$. La valeur absolue du produit sera encore AB . Mais le multiplicateur $+B$ ayant le même signe que l'unité positive, le produit aura le même signe que le multiplicande, c'est-a-dire $-$.

Ainsi, le produit de $-A$ par $+B$ est $-AB$.

Soit enfin $-A$ à multiplier par $-B$. La valeur absolue du produit sera AB . Mais le multiplicateur $-B$ ayant un signe contraire à celui de l'unité positive, le produit aura un signe contraire à celui du multiplicande $-A$, c'est-à-dire $+$.

Ainsi, le produit de $-A$ par $-B$ est $+AB$.

La *règle des signes* établie au nº **34** par la considération de deux polynomes dans chacun desquels la partie positive était supposée l'emporter sur la partie négative, se trouve donc étendue à des monomes isolés, en partant de la distinction établie entre les quantités algébriques et les quantités purement numériques, et de la définition plus générale adoptée pour la multiplication.

Quant à la multiplication des polynomes, les règles établies au nº **34**, dans la supposition où la partie positive de chaque polynome l'emporte sur la partie négative, subsisteront encore dans l'hypothèse contraire.

Soit, en effet, à multiplier $a-b$ par $c-d$, et supposons d plus grand que c en valeur absolue; le binome $c-d$ revient à $-(d-c)$; expression dans laquelle, d'après notre supposition $d-c$ sera positif. Nous aurons donc à multiplier $+(a-b)$ par $-(d-c)$. Pour obtenir ce produit, il faudra d'abord multiplier entre elles les valeurs absolues $(a-b)$ et $(d-c)$ des deux facteurs, et changer ensuite le signe du résultat, puisque ces deux facteurs sont de signe contraire; car les règles démontrées ci-dessus ne supposent pas que A et B représentent des monomes plutôt que des polynomes. En multipliant d'abord les valeurs absolues $(a-b)$ et $(d-c)$ on obtient, d'après les règles du nº **34**, qui sont applicables ici, puisque $a-b$ et $d-c$ sont positifs l'un et l'autre :

$$ad-bd-ac+bc\ .$$

Et en changeant le signe du résultat, ce qui se fait en changeant le signe de chaque terme, on obtient :

$$-ad+bd+ac-bc$$

ou

$$ac-bc-ad+bd\ ,$$

comme on l'a obtenu au nº **34**.

Les règles de la multiplication subsistent donc sans la restriction faite alors.

115. *La* DIVISION ALGÉBRIQUE *est une opération par laquelle, étant donnés le produit de deux facteurs algébriques et l'un de ces facteurs, on cherche l'autre facteur.*

On a vu, aux nºˢ **41** à **46**, comment les règles de la division se déduisent de celles de la multiplication. Ces dernières étant maintenant établies sans restriction pour les monomes positifs ou négatifs, et pour les polynomes dans lesquels la partie positive est plus grande ou plus petite en valeur absolue que la partie négative, il en est de même des règles de la division.

116. Les règles données aux nos **50** à **58** pour le calcul des fractions algébriques, n'étant fondées que sur celles des quatre opérations fondamentales, elles acquièrent la même généralité que celles-ci.

117. Deux quantités algébriques sont égales lorsqu'elles ont même valeur absolue et même signe. Si on les multiplie chacune par une même troisième, les produits seront égaux; car il est évident qu'ils auront aussi même valeur absolue et même signe.

Il suit de là qu'on peut, sans troubler une égalité, multiplier ses deux membres par une même quantité algébrique; ce qui généralise la transformation indiquée au n° **61**.

On démontrerait de même qu'on peut, sans troubler une égalité, diviser ses deux membres par une même quantité algébrique; ce qui généralise la transformation du n° **62**.

Remarque. On peut dans une égalité changer les signes de tous les termes, car cette transformation revient à multiplier ou à diviser à la fois les deux membres par -1.

On retrouve ainsi, par une autre voie, une règle déjà démontrée (**68**, IV.)

§ II. Discussion des problèmes du premier degré à une seule inconnue.

118. Lorsqu'on a résolu un problème d'une manière générale, c'est-à-dire en représentant les données par des lettres, comme nous l'avons fait, par exemple, aux nos **74**, **76** et **94**, il est utile de rechercher les principales circonstances que peut présenter la solution, suivant les valeurs particulières qu'on peut attribuer à ces données. L'examen méthodique de ces circonstances est ce qu'on nomme la *discussion* du problème.

Nous nous occuperons dans ce paragraphe de la discussion des problèmes qui conduisent à une seule équation, à une seule inconnue.

Une pareille équation, lorsqu'on y a fait disparaître les dénominateurs, qu'on a rassemblé dans un membre tous les termes affectés de l'inconnue, et dans l'autre tous les termes indépendants de cette inconnue, qu'enfin on a mis l'inconnue en facteur commun parmi les termes où elle se trouve, peut toujours être ramenée à la forme

$$Ax = B \qquad [1],$$

dans laquelle A et B peuvent être des quantités quelconques, monomes ou polynomes, algébriques ou numériques.

On tire de cette équation $x = \frac{B}{A}$,

c'est cette valeur qu'il s'agit de discuter.

119. Lorsqu'on attribue aux données de la question des valeurs particulières, les quantités A et B prennent elles-mêmes diverses valeurs. Il peut arriver que A et B soient de mêmes signes, ou bien qu'ils soient de signe contraire; que l'une d'elles s'annule, ou qu'elles s'annulent toutes deux à la fois. Nous allons examiner ces divers cas.

I. Si A et B sont de même signe, leur quotient est positif; la valeur $x=\frac{B}{A}$ est alors une réponse directe à la question, et ne donne lieu à aucune remarque.

II. Si A et B sont de signes contraires, leur quotient est négatif; on peut alors distinguer deux cas.

Ou la quantité que x représente est susceptible d'être comptée dans deux sens opposés, qui correspondent, l'un à ses valeurs positives, l'autre à ses valeurs négatives. Dans ce cas, une valeur négative trouvée pour l'inconnue est encore une réponse directe à la question. Si, par exemple, l'inconnue x représentait un certain nombre de degrés du thermomètre, comptée à partir du zéro, une valeur telle que -6 n'aurait rien que de parfaitement admissible, et répondrait à 6^0 *au-dessous* de zéro, comme la valeur $+6$ répondrait à 6^0 *au-dessus* de zéro. Cela résulte des conventions dont nous avons parlé au nº **107**.

Ou la quantité que x représente n'est susceptible d'être comptée que dans un seul sens. Alors, une valeur négative trouvée pour x est un caractère d'impossibilité du problème, tel qu'il a été posé du moins. Cette valeur négative indique un vice dans l'énoncé, ou au moins dans la manière de l'entendre; elle montre qu'une quantité qu'on avait regardée comme additive devait être regardée comme soustractive, ou *vice versa*; et l'on peut, en rectifiant l'énoncé, être conduit à une valeur positive numériquement égale à la valeur négative trouvée en premier lieu.

Pour opérer cette rectification dans l'énoncé, on remarque que, si l'on a trouvé, par exemple, la valeur

$$x=-6$$

et qu'on change x en $-x$ dans l'équation du problème, les calculs demeureront les mêmes, à l'exception du signe de x; en sorte qu'on parviendra à l'équation

$$-x=-6\ , \quad \text{ce qui revient à} \quad x=6\ .$$

Ainsi donc, on changera x en $-x$ dans l'équation du problème; il sera facile alors de reconnaître le changement qu'il faudrait faire subir à l'énoncé pour qu'il conduise à l'équation ainsi modifiée, au lieu de conduire à l'équation primitive.

120. Soit proposé, par exemple, ce problème:

Un ouvrier fait, par jour, a *mètres d'une certaine étoffe; un second ouvrier en fait* b *mètres dans le même temps. Le premier a déjà fait* c *mètres, et le second en a fait* m *de plus. On demande dans combien de jours les deux ouvriers en auront fait autant l'un que l'autre.*

Désignons par x le nombre de jours demandé. Le premier ouvrier faisant a mètres par jour, en fera en x jours un nombre marqué par le produit de a par x, c'est-à-dire ax; au bout de ce temps, le nombre total de mètres qu'il aura fait sera donc $c+ax$. Le second ouvrier faisant b mètres par jour, en fera en x jours un nombre marqué par bx, et, au bout de ce temps, le nombre total de mètres qu'il aura fait sera $c+m+bx$. Or, d'après l'énoncé, ces deux nombres doivent être égaux; on doit donc avoir l'équation

$$c+ax=c+m+bx \qquad [1]$$

d'où l'on tire
$$x=\frac{m}{a-b} \qquad [2],$$

c'est-à-dire que, pour obtenir le nombre de jours demandé, il faut diviser l'avance du second ouvrier par la différence entre les nombres de mètres que les deux ouvriers font par jour; résultat auquel on aurait pu d'ailleurs parvenir directement. On remarquera de plus que la donnée c n'a servi que dans la mise en équation, et a complétement disparu du résultat, qui en est par conséquent indépendant.

Si l'on fait les hypothèses particulières $a=8$, $b=5$, $m=12$, on trouve

$$x=\frac{12}{8-5} \quad \text{ou} \quad x=4.$$

Mais si l'on fait, au contraire, les hypothèses $a=5$, $b=8$, $m=12$, on trouve

$$x=\frac{12}{5-8} \quad \text{ou} \quad x=-4.$$

Cette valeur négative indique qu'il y a alors un vice dans l'énoncé. Et en effet, le premier ouvrier travaillant moins vite que le second, ne pourra jamais rattraper celui-ci, qui a une avance de 12 mètres. La quantité x, qu'on avait regardée comme additive, doit donc être regardée comme soustractive. Changeons donc x en $-x$ dans l'équation [1] du problème, il viendra:

$$c-ax=c+m-bx \qquad [3],$$

et l'on voit facilement que pour que l'énoncé conduise à l'équation ainsi modifiée, il faut poser la question en ces termes:

Combien s'est-il écoulé de jours depuis celui où le nombre de mètres faits par chacun des deux ouvriers était le même?

En résolvant l'équation [3] on obtient :

$$x = \frac{m}{b-a} \qquad [4],$$

et, si l'on met pour a, b, m, les valeurs 5, 8, 12, qui avaient conduit tout à l'heure à une valeur négative, on trouve :

$$x = \frac{12}{8-5} \quad \text{ou} \quad x = 4 .$$

Remarque. Si l'on avait, dès l'abord, regardé le nombre de jours x comme susceptible d'être compté indifféremment vers l'avenir ou vers le passé, c'est-à-dire si on avait considéré x comme une quantité algébrique (**111**), on aurait pu sur-le-champ admettre la valeur négative, sans être obligé de modifier l'énoncé, autrement qu'en remplaçant ces mots *dans combien de jours* par les mots *depuis combien de jours*, et le mot *sera* par les mots *a été*, ce qui est simplement une nécessité de langage. Et la valeur négative trouvée pour x eût indiqué que l'époque cherchée était *antérieure* au lieu d'être *postérieure* à l'instant que l'on prend pour point de départ.

121. III. Il peut arriver que, par suite des valeurs particulières attribuées aux données, le numérateur B de la valeur

$$x = \frac{B}{A}$$

devienne nul, sans que le dénominateur le soit, ce qui donne :

$$x = \frac{0}{A} .$$

Une valeur de cette forme n'est autre que *zéro*; car *zéro* divisé par une quantité quelconque, donne évidemment pour quotient *zéro*. Si l'on conservait quelque doute à cet égard, il suffirait de remonter à l'équation

$$Ax = B ,$$

qui se réduit alors à

$$Ax = 0 ,$$

et ne peut être satisfaite que par la valeur

$$x = 0 ,$$

car, pour annuler un produit tel que Ax, il faut annuler un de ses facteurs ; et le facteur A est supposé différent de *zéro*.

Le problème précédent conduirait à une valeur nulle si l'on faisait l'hypothèse particulière $m=0$. Et, en effet, les quantités d'ouvrage faites par chaque ouvrier étant alors égales, la condition indiquée par l'énoncé se trouve remplie dès le jour même, et par conséquent le nombre de jours cherché est *zéro*.

122. IV. Il peut arriver que les hypothèses faites sur les données annulent le dénominateur A, sans annuler le numérateur, et qu'on ait:

$$x=\frac{B}{0}.$$

Remarquons d'abord que l'on ne sait pas *a priori* si une pareille expression pourrait être légitimement déduite de l'équation $Ax=B$; car il faut pour cela diviser ses deux membres par une quantité nulle, ce qui n'est point permis en général (**64**). Or, cette équation se réduit alors à $0=B$, et ne saurait par conséquent être satisfaite par aucune valeur de x. L'hypothèse $A=0$ répond donc à un cas d'impossibilité.

Pour voir ce que peut signifier en lui-même le symbole $\frac{B}{0}$, supposons d'abord que A, au lieu de devenir nul, prenne seulement une valeur très-petite, par exemple, $0,001$; on aura

$$x=\frac{B}{0,001} \quad \text{ou} \quad x=1000B.$$

Supposons en second lieu que, par de nouvelles hypothèses, le dénominateur A prenne une valeur encore plus petite, $0,000001$ par exemple; il viendra

$$x=\frac{B}{0,000001} \quad \text{ou} \quad x=1000000B.$$

Si A prenait une valeur plus petite encore, par exemple, $0,000000001$, on aurait

$$x=\frac{B}{0,000000001} \quad \text{ou} \quad x=1000000000B.$$

On voit qu'à mesure que le dénominateur A acquiert des valeurs de plus en plus petites, la valeur $\frac{B}{A}$ prend au contraire des valeurs de plus en plus grandes. Si donc on attribue à A la valeur zéro, c'est-à-dire une valeur moindre que toute quantité assignable, la fraction $\frac{B}{A}$ prendra au contraire une valeur plus grande que toute quantité assignable; c'est ce qu'on appelle une valeur *in-*

finiment grande, ou *infinie*. On dit, en conséquence, que l'expression $\frac{B}{0}$ est le *symbole de l'infini*.

Si, par exemple, dans le problème du nº **120**, on fait l'hypothèse $a=b$, on trouve $x=\frac{m}{0}$. Or, si l'on remonte à l'énoncé du problème, il est facile d'interpréter ce résultat. Au lieu de supposer $a=b$, c'est-à-dire au lieu de supposer que les deux ouvriers font chaque jour le même nombre de mètres, supposons d'abord que a surpasse b d'une très-petite quantité, c'est-à-dire que la quantité d'ouvrage faite journellement par le premier ouvrier ne surpasse que de très-peu celle que fait journellement le second; il est clair qu'il faudra au premier ouvrier un temps considérable pour rattraper le second. Si donc l'excès de a sur b est plus petit que toute quantité assignable, il faudra au premier ouvrier pour rattraper le second un temps plus long que toute quantité donnée; c'est-à-dire que si $a=b$, le temps cherché sera *infini*.

Une solution *infinie*, ou de la forme $\frac{B}{0}$, est donc un caractère d'impossibilité.

Remarque I. Puisque cette impossibilité se manifeste sur l'expression $\frac{B}{0}$ aussi bien que sur l'équation $Ax=B$ d'où on l'a déduite, on voit que cette déduction peut être regardée comme légitime, bien qu'elle consiste à diviser par A, c'est-à-dire alors par zéro, les deux membres de l'équation.

Remarque II. Il est utile de remarquer que les solutions infinies peuvent être en même temps négatives. Si, par exemple, dans le problème du nº **120**, on fait l'hypothèse $a<b$, on a vu que la valeur de x devenait négative; c'est-à-dire que si l'on suppose que le premier ouvrier travaille moins vite que le second, ce n'est qu'à une époque *antérieure* qu'ils ont pu avoir fait autant d'ouvrage l'un que l'autre. Or, cette époque antérieure sera d'autant plus éloignée que l'excès de a sur b sera plus petit; si donc on suppose cet excès nul, ou $a=b$, les deux ouvriers n'auront pu avoir fait autant d'ouvrage l'un que l'autre qu'à une époque antérieure *infiniment éloignée*. En sorte que la solution est à la fois négative et infinie. On trouve, en effet,

$$x=-\frac{m}{0}.$$

Ce caractère d'impossibilité est de même nature que l'infini positif; il n'y a de différence que dans le sens.

REMARQUE III. On représente quelquefois l'infini positif par le signe $+\infty$ et l'infini négatif par $-\infty$.

123. V. Il peut arriver enfin que les hypothèses faites sur les données représentées par des lettres, annulent à la fois le numérateur B et le dénominateur A de la valeur de l'inconnue x, auquel cas cette valeur prend la forme :

$$x=\frac{0}{0}.$$

Comme on ignore ce que peut signifier un pareil symbole, et qu'on ne sait d'ailleurs s'il pourrait être légitimement déduit de l'équation $Ax=B$, puisqu'il faudrait diviser ses deux membres par *zéro*, il faut remonter à l'équation même.

Or, dans le cas où A et B sont nuls, cette équation est satisfaite d'elle-même, quelle que soit la valeur qu'on attribue à x, puisque les deux membres sont tous deux égaux à *zéro*. Le problème admet donc autant de solutions qu'on voudra; et par conséquent *l'expression* $\frac{0}{0}$ *est un symbole d'indétermination.*

Si, par exemple, dans le problème du n° **120**, on fait en même temps les deux hypothèses $m=0$ et $a=b$, la valeur de x prend la forme $\frac{0}{0}$. Or, il est clair en effet que si aucun des deux ouvriers n'a d'avance sur l'autre, et s'ils font chaque jour le même nombre de mètres, le nombre total de mètres faits par chacun d'eux sera continuellement le même, et que par conséquent toute valeur imaginable de x sera une solution du problème.

On peut, en étudiant l'expression $\frac{0}{0}$ en elle-même, reconnaître également une quantité indéterminée. Concevons en effet une fraction algébrique $\frac{B}{A}$ dont les deux termes décroissent en conservant entre eux le même rapport. Ce rapport restant, par hypothèse, le même, quelque petits que soient ses deux termes en valeur absolue, on doit admettre qu'il restera encore le même à la limite, c'est-à-dire quand les deux termes seront nuls et que la fraction sera réduite à la forme $\frac{0}{0}$. Cette forme peut donc représenter le rapport dont nous parlons. Mais, comme ce rapport est quelconque d'ailleurs, on voit que $\frac{0}{0}$ peut représenter telle quantité que l'on voudra.

REMARQUE I. Puisque l'indétermination se manifeste aussi bien sur l'expression $\frac{0}{0}$ que sur l'équation $Ax = B$ d'où elle est déduite, on voit que la déduction se trouve légitimée, bien qu'elle consiste alors à diviser les deux membres de l'équation par *zéro*.

Remarque II. Il faut observer toutefois que la valeur de x peut prendre la forme $\frac{0}{0}$, sans qu'il y ait indétermination réelle, lorsqu'on a négligé de supprimer les facteurs communs au numérateur et au dénominateur.

Supposons, par exemple, qu'un problème ait conduit à la valeur

$$x = \frac{a^2 - 2ab - 3b^2}{a^2 - 9b^2},$$

et qu'on fasse les hypothèses particulières $a = b$ et $b = 2$, on trouvera

$$x = \frac{0}{0},$$

ce qui semble indiquer, dans ce cas, une indétermination du problème. Mais si l'on observe, que les deux termes de la valeur de x sont divisibles par $a - 3b$, et qu'on effectue cette division, il restera

$$x = \frac{a+b}{a+3b},$$

et si l'on fait, dans cette valeur ainsi simplifiée, les hypothèses $a = b$ et $b = 2$, qui avaient donné $\frac{0}{0}$, on trouve

$$x = \frac{8}{12} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{3},$$

valeur parfaitement déterminée.

On voit combien il est important de supprimer les facteurs qui peuvent être communs aux deux termes de la valeur de l'inconnue, puisque, indépendamment d'une plus grande complication dans l'expression de cette valeur, ils peuvent induire en erreur dans certains cas particuliers de la discussion du problème.

§ III. Discussion des problèmes du premier degré à deux inconnues.

124. Soient les deux équations :

$$ax + by = c \qquad [1],$$

$$a'x + b'y = c' \qquad [2].$$

Pour en tirer les valeurs de x et de y, nous allons employer la méthode des coefficients indéterminés, déjà indiquée au nº 85. Multiplions la première équation par une indéterminée m et retranchons-en la seconde membre à membre, il viendra

$$(ma-a')x+(mb-b')y=mc-c' \qquad [3].$$

On a démontré au nº 81 que le système des deux équations proposées peut être remplacé par le système formé de l'une d'entre elles et de l'équation [3]. Or, on peut profiter de l'indétermination de m pour tirer à volonté de l'équation [3], soit la valeur de x, soit celle de y.

Si, par exemple, on égale à zéro le coefficient de y, et qu'on pose

$$mb-b'=0 \quad \text{d'où} \quad m=\frac{b'}{b},$$

l'équation [3] se réduit à

$$(ma-a')x=mc-c' \quad \text{d'où} \quad x=\frac{mc-c'}{ma-a'},$$

ou, en mettant pour m sa valeur $\frac{b'}{b}$,

$$x=\frac{\frac{b'c}{b}-c'}{\frac{b'a}{b}-a'}=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'} \qquad [4].$$

Si, au contraire, on égale à zéro le coefficient de x, et qu'on pose

$$ma-a'=0 \quad \text{d'où} \quad m=\frac{a'}{a},$$

l'équation [3] se réduit à

$$(mb-b')y=mc-c' \quad \text{d'où} \quad y=\frac{mc-c'}{mb-b'},$$

ou, en mettant pour m sa valeur $\frac{a'}{a}$,

$$y=\frac{\frac{a'}{a}c-c'}{\frac{a'}{a}b-b'}=\frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'} \qquad [5],$$

en changeant les signes au numérateur et au dénominateur, afin de donner à la valeur de y le même dénominateur qu'à celle de x.

125. Il y a un moyen mnémonique très-simple de se rappeler ces valeurs générales, ou de les reformer directement au besoin.

On écrit sur une même ligne les deux combinaisons ab et ba ; on les sépare par le signe $-$, et dans chaque terme on accentue la seconde lettre, ce qui donne $ab'-ba'$; on a ainsi le dénominateur commun aux deux valeurs.

Pour former le numérateur de la valeur de x , il suffit de remplacer, dans ce dénominateur, les lettres a et a' , par les lettres c et c' ; c'est-à-dire chaque coefficient de x par le terme indépendant des inconnues qui lui correspond; on obtient, en effet, ainsi $cb'-bc'$, qui est bien le numérateur de la valeur de x .

Pour former le numérateur de la valeur de y , il faut remplacer dans le dénominateur les lettres b et b' par les lettres c et c' , c'est-à-dire chaque coefficient de y par le terme indépendant des inconnues qui lui correspond; on obtient ainsi, en effet, $ac'-ca'$, qui est bien le numérateur de la valeur de y .

126. On peut se servir de ces valeurs générales pour résoudre deux équations particulières. Il suffit pour cela d'y remplacer les lettres a , b , c , a' , b' , c' par leurs valeurs.

Soient, par exemple, les deux équations

$$5x+2y=33$$
$$7x-3y=23$$

déjà traitées au n° **80**. On aura, dans cet exemple,

$$a=5\ ,\quad b=2\ ,\quad c=33\ ,\quad a'=7\ ,\quad b'=-3\ ,\quad c'=23\ .$$

Par suite, en substituant dans les valeurs générales [4] et [5] on trouvera

$$x=\frac{33\times(-3)-2\times23}{5\times(-3)-2\times7}=\frac{-99-46}{-15-14}=\frac{-145}{-\ 29}=5\ ,$$

$$y=\frac{5\times23-33\times7}{5\times(-3)-2\times7}=\frac{115-231}{-15-14}=\frac{-116}{-\ 29}=4\ ,$$

comme au numéro cité.

Mais il sera, presque toujours, préférable de traiter directement chaque exemple particulier. Le principal usage des valeurs générales est dans la discussion que nous allons faire.

127. Cette discussion a pour but d'examiner les formes les plus remarquables que peuvent prendre ces valeurs lorsqu'on vient à faire des hypothèses particulières sur la valeur des lettres qui y entrent.

I. D'abord, si les hypothèses particulières donnent pour x et y des valeurs positives, ces valeurs sont une réponse directe à la question, et ne donnent lieu à aucune remarque.

II. Si les valeurs particulières attribuées aux lettres donnent pour l'une des inconnues ou pour chacune d'elles une valeur négative, il pourra arriver que ce soit le signe d'une impossibilité dans le problème; c'est ce qui aura lieu si la quantité dont il s'agit n'est susceptible par sa nature d'être comptée que dans un seul sens. Dans ce cas on suivra la marche déjà indiquée à l'occasion des problèmes à une seule inconnue : on changera dans les équations du problème le signe de l'inconnue pour laquelle on aura trouvé une valeur négative, et l'on cherchera le changement qu'il faut introduire dans l'énoncé pour qu'il conduise aux équations ainsi modifiées au lieu de conduire aux équations primitives. Il pourra arriver aussi que la valeur négative trouvée puisse être admise comme réponse à la question; c'est ce qui aura lieu si la quantité dont il s'agit est susceptible d'être comptée indifféremment dans deux sens opposés.

Nous allons donner des exemples de ces deux cas.

128. Problème. *Un ouvrier a travaillé une première fois dans une maison pendant* 7 *jours, sur* 3 *desquels il a eu avec lui un apprenti, et il a touché* 29 *francs. Une seconde fois, le même ouvrier a travaillé pendant* 11 *jours, sur* 4 *desquels il a eu avec lui son apprenti, et il a touché* 47 *francs. On demande ce que gagnait l'ouvrier par jour, et ce que lui rapportait le travail de son apprenti.*

La traduction de cet énoncé conduit immédiatement aux deux équations

$$7x+3y=29$$
$$11x+4y=47\ ,$$

dans lesquelles x représente le gain journalier de l'ouvrier, et y ce que lui rapporte par jour le travail de son apprenti.

En éliminant y on trouve $x=5$; et cette valeur, mise pour x dans la première équation, donne

$$35+3y=29\ ;\qquad \text{d'où}\qquad y=-2\ ,$$

résultat inadmissible.

Changeons donc le signe de y dans les équations du problème, qui deviendront

$$7x-3y=29\ ,$$
$$11x-4y=47\ .$$

On voit que les quantités $3y$ et $4y$, qu'on avait d'abord regardées comme additives, doivent être au contraire regardées comme soustractives; c'est-à-dire que l'apprenti, au lieu de rapporter chaque jour à son maître une somme y, lui coûte au contraire une certaine somme. Il faudra donc poser la question de cette manière : *On demande ce que gagnait l'ouvrier par jour, et ce que lui coûtait son apprenti.*

Avec cette modification, on trouve $x=5$ et $y=2$, qui répondent alors directement à l'énoncé.

129. PROBLÈME. *Deux courriers parcourent la même route; l'un fait* a *kilomètres par heure, l'autre fait* b *kilomètres dans le même temps; le premier a passé à minuit en un point* A *situé sur la route; le second,* h *heures après, a passé en un point* B *situé à* d *kilomètres au delà du point* A. *On demande le lieu et l'heure de leur rencontre.*

Nous supposerons d'abord que les deux courriers marchent dans le même sens, de X vers Y. Soit R le lieu de la rencontre, supposé situé au delà du point B. Désignons par x la distance BR, et par y le nombre d'heures écoulées depuis minuit jusqu'à l'instant de la rencontre.

Le premier courrier aura parcouru la distance AR ou $d+x$ en y heures ; et comme il fait a kilomètres par heure, on aura l'équation

$$ay=d+x \qquad [1].$$

Le second courrier aura parcouru la distance BR ou x en $y-h$ heures ; et comme il fait b kilomètres par heure, on aura pour seconde équation

$$b(y-h)=x \qquad [2].$$

Éliminant x, on obtient

$$ay=d+b(y-h), \quad \text{d'où} \quad y=\frac{d-bh}{a-b} \qquad [3].$$

Par suite $\quad y-h=\dfrac{d-bh-ah+bh}{a-b}=\dfrac{d-ah}{a-b}$;

et enfin
$$x=\frac{b(d-ah)}{a-b} \qquad [4].$$

Si l'on a $a>b$ et $d>ah$, on aura à plus forte raison $d>bh$; les termes des valeurs de x et de y étant positifs, ces valeurs seront positives elles-mêmes, et répondront directement à la question. Si, par exemple, on suppose $a=12^{k}$, $b=9^{k}$, $d=63^{k}$ et $h=4$ heures, on trouve

$$x=45^{k} \quad \text{et} \quad y=9^{h}.$$

C'est-à-dire que les courriers se rencontreront à 45 kilomètres au delà du point B, et que la rencontre aura lieu à 9 heures du matin.

Supposons, au contraire, que l'on ait $a > b$ et $d > bh$; mais en même temps $d < ah$, on trouvera pour y une valeur positive, mais pour x une valeur négative. Comme la distance BR est susceptible d'être comptée indifféremment à droite ou à gauche du point B, c'est-à-dire comme x est une quantité *algébrique*, nous savons que les valeurs négatives n'ont rien d'absurde et peuvent s'interpréter; ayant admis comme positives les valeurs comptées vers la droite, nous admettrons comme négatives celles qui seront comptées vers la gauche. La solution s'interprétera donc en disant que la rencontre, au lieu de se faire *au delà* du point B se fera *en deçà* de ce point, en R′ par exemple.

C'est ce qui doit être, en effet; car ah étant le chemin parcouru par le premier courrier dans h heures, la condition $d < ah$ indique que, à h heures après minuit, il aura parcouru une distance plus grande que d, et dépassé par conséquent le point B au moment où le second courrier y arrive; et comme il va plus vite que celui-ci, la rencontre ne pourra avoir lieu au delà du point B.

Soient, par exemple, $a = 12^k$, $b = 9^k$, $d = 42^k$ et $h = 4$, on trouvera

$$y = 2 \quad \text{et} \quad x = -18^k;$$

c'est-à-dire, d'après l'interprétation précédente, que la rencontre aura lieu à 2 heures du matin, et à 18 kilomètres en deçà du point B.

On arriverait aux mêmes résultats en traitant la question directement dans l'hypothèse d'une rencontre entre A et B. Soit, en effet, R′ le point de rencontre, et faisons $BR' = x$. Le chemin parcouru par le premier courrier sera AR′ ou $d - x$; on aura donc pour première équation

$$ay = d - x.$$

Le chemin parcouru par le second courrier sera BR′ ou x; quant au temps employé, ce ne sera plus $y - h$, mais bien $h - y$; car pour que la rencontre ait lieu entre A et B, il faut nécessairement que l'instant de la rencontre précède celui où le second courrier arrive en B, c'est-à-dire que y doit être moindre que h. On aura donc l'équation

$$b(h - y) = x.$$

Or, ces deux équations pourraient se déduire des équations primitives [1] et [2], en y changeant x en $-x$; elles conduiront donc aux mêmes valeurs, sauf le signe de x.

Si l'on faisait les hypothèses $a > b$ et $d < bh$, on aurait à plus forte raison $d<ah$, et les valeurs de x et de y seraient toutes deux négatives. On trouvera l'interprétation de ce résultat en regardant à son tour y comme une quantité algébrique, c'est-à-dire en supposant que y désigne un nombre d'heures susceptible d'être compté indifféremment avant ou après minuit; la rencontre aurait lieu alors un certain nombre d'heures avant minuit, et à gauche du point B; le point de rencontre serait même situé à gauche du point A, en R″, par exemple. Cela résulte de ce que la valeur absolue de x, qui est alors

$$\frac{b(ah-d)}{a-b} \quad \text{ou} \quad \frac{bah-bd}{a-b},$$

est plus grande que $\dfrac{ad-bd}{a-b}$, puisqu'on a $bh>d$; c'est-à-dire qu'elle est plus grande que $\dfrac{(a-b)d}{a-b}$ ou que d.

C'est ce qu'on voit encore en remarquant que bh est le chemin parcouru dans h heures par le second courrier; et que, puisque bh est plus grand que d, le second courrier était, à minuit, à gauche du point A, et que, par conséquent, la rencontre n'a pu avoir lieu que de ce côté.

Si, par exemple, on a $a=12^k$, $b=9^k$, $d=30^k$ et $h=4$; on trouve $y=-2$ et $x=-54^k$, c'est-à-dire, d'après l'interprétation précédente, que la rencontre a eu lieu 2 heures avant minuit, et à 54 kilomètres à gauche du point B (ou à 24 kilomètres à gauche du point A).

On peut encore vérifier ces résultats en traitant directement le problème pour le cas où la rencontre serait supposée avoir lieu en un point R″ situé à gauche du point A.

En effet, soient x la distance BR″, et y le nombre d'heures écoulées depuis l'instant de la rencontre jusqu'à l'arrivée du premier courrier en A, c'est-à-dire jusqu'à minuit. Le chemin parcouru par le premier courrier en y heures sera AR″ ou $x-d$; on aura donc pour première équation

$$ay=x-d.$$

Le chemin R″B ou x aura été parcouru par le second courrier dans un temps qui se compose de $y+h$, puisque le second courrier n'arrive en B que h heures après que le premier est arrivé en A; on aura donc pour seconde équation

$$a(y+h)=x.$$

Or, ces deux équations se déduisent des deux équations primitives [1] et [2] en y changeant à la fois x en $-x$ et y en $-y$. Elles donneront donc les mêmes valeurs avec des signes contraires.

130. Remarque I. Nous avons supposé jusqu'ici que le second courrier passait en B, un nombre h d'heures *après* que le premier a passé en A; on pourrait supposer que cela a lieu au contraire h heures *avant*. On va voir qu'il suffit pour introduire cette hypothèse nouvelle de changer partout h en $-h$; en sorte que les formules primitives resteraient applicables si l'on regardait h comme une quantité algébrique susceptible d'être comptée indifféremment en plus ou en moins. En effet, reprenons le premier cas où la rencontre a lieu en R; on aura comme plus haut

$$ay = d + x.$$

Le temps employé par le second courrier à parcourir l'espace BR ou x, sera alors $h + y$, puisque le second part de B, un nombre h d'heures avant que le premier parte du point A; on aura donc pour seconde équation

$$b(y + h) = x,$$

équation qui ne diffère de celle obtenue dans le numéro précédent qu'en ce que $-h$ est remplacé par $+h$, ou que h est changé en $-h$. Il suffira donc pour obtenir les valeurs de x et y de changer, dans celles obtenues plus haut, le signe des termes où entre h, ce qui donnera

$$y = \frac{d + bh}{a - b} \quad \text{et} \quad x = \frac{b(d + ah)}{a - b}.$$

131. Remarque II. Nous avons supposé jusqu'à présent que le premier courrier va plus vite que le second, ou qu'on a $a > b$; on pourrait faire l'hypothèse contraire. Le dénominateur des valeurs de x et de y devenant alors négatif, les valeurs positives trouvées plus haut deviendraient négatives et les négatives deviendraient positives. On trouverait d'ailleurs facilement l'interprétation de tous ces résultats; nous ne nous y arrêterons point.

Mais nous avons admis jusqu'ici que les deux courriers marchaient dans le même sens; voyons si les formules primitivement obtenues seraient encore applicables au cas où les deux courriers marcheraient à la renconte l'un de l'autre.

Admettons, par exemple, que le premier courrier allant de A vers B et le second de B vers A la rencontre se fasse en R' entre A et B. Soit x la distance BR'; et supposons que le second courrier arrive en B, un nombre h d'heures après que le premier est arrivé en A. Soit enfin, comme ci-dessus, y le nombre d'heures écoulées depuis le passage du premier courrier en A, c'est-à-dire depuis minuit, jusqu'à l'instant de la rencontre.

Le chemin parcouru en y heures par le premier courrier sera AR' ou $d-x$; on aura donc

$$ay = d - x .$$

Le chemin x sera parcouru par le second courrier dans un temps marqué par $y-h$, comme dans le premier cas; on aura donc pour seconde équation

$$b(y-h) = x .$$

De ces deux équations, on tire

$$y = \frac{d+bh}{a+b} \quad \text{et} \quad x = \frac{b(d-ah)}{a+b} .$$

Or, ces valeurs pourraient se déduire des valeurs primitives en y changeant le signe de b et celui de x; car elles donnent alors

$$y = \frac{d+bh}{a+b} \quad \text{et} \quad -x = \frac{-b(d-ah)}{a+b} \quad \text{ou} \quad x = \frac{b(d-ah)}{a+b} .$$

On voit donc que les valeurs primitives seraient applicables au cas qui nous occupe, si, d'une part, on continuait à regarder x comme négatif lorsque cette distance est comptée à gauche du point B, et si, de l'autre, ayant regardé b comme positif lorsque ce nombre de kilomètres parcourus dans une heure par le second courrier représentait un chemin fait vers la droite, on convenait de regarder b comme négatif lorsqu'il représente un chemin fait vers la gauche.

Il résulte de tout ce que nous avons dit dans ces trois derniers numéros que les formules établies pour un cas particulier du problème que nous avons en vue deviennent applicables à tous les cas de ce problème, lorsqu'on y regarde les quantités x, y, h, b, etc., comme des quantités algébriques, c'est-à-dire comme susceptibles d'être comptées indifféremment dans deux sens opposés. Et toutes les fois que les quantités considérées sont effectivement de cette nature, les formules établies dans un cas particulier deviennent applicables à tous; c'est là une vérité qui ne peut être directement démontrée, mais qui a été vérifiée un assez grand nombre de fois pour qu'on puisse la regarder comme bien établie.

Nous allons maintenant reprendre la discussion des valeurs générales du n° **124**:

$$x = \frac{cb'-bc'}{ab'-ba'} \quad \text{et} \quad y = \frac{ac'-ca'}{ab'-ba'} .$$

132. III. Nous venons d'examiner, dans ce qui précède, tous les cas où aucun des deux termes de ces valeurs générales ne devient nul. Il nous reste à examiner ceux dans lesquels l'un de ces termes ou tous deux à la fois prennent la valeur zéro.

Si l'un des numérateurs prend seul la valeur de zéro, celui de x par exemple, il en résulte une valeur nulle pour x, ce qui n'offre aucun caractère d'impossibilité.

Si les deux numérateurs sont nuls, sans que le dénominateur commun le soit, x et y sont nuls en même temps. C'est ce qui a lieu quand on fait les hypothèses $c=0$ et $c'=0$. Il est clair d'ailleurs que cela ne peut avoir lieu que dans ce cas. Car les valeurs $x=0$ et $y=0$ rendant nuls les premiers membres des équations

$$ax+by=c \quad \text{et} \quad a'x+b'y=c',$$

ces équations ne peuvent être satisfaites par ces valeurs qu'autant que les seconds membres sont nuls.

133. IV. Si le dénominateur commun prend la valeur zéro, sans que les numérateurs soient nuls, les valeurs de x et de y prennent la forme $\frac{\mathrm{B}}{0}$ que nous avons déjà rencontrée (**123**) dans la discussion des problèmes à une seule inconnue, et qui s'est présentée à nous comme le symbole de l'infini ou d'une impossibilité.

Comme on ne sait pas, *a priori*, si cette valeur peut être légitimement déduite des équations proposées, puisqu'il faudrait pour cela, quelle que fût d'ailleurs la méthode employée, diviser les deux membres d'une équation par zéro, il faut remonter aux équations mêmes :

$$ax+by=c \quad \text{et} \quad a'x+b'y=c'.$$

Pour les mieux comparer, multiplions la première par b' et la seconde par b ; elles deviennent

$$ab'x+bb'y=cb' \quad \text{et} \quad a'bx+bb'y=bc' \qquad [\mathrm{A}].$$

Or, si le dénominateur des valeurs de x et de y est nul, on a

$$ab'-ba'=0 \quad \text{ou} \quad ab'=ba' ;$$

dans les deux équations [A] les premiers membres sont donc identiques sans que les seconds le soient ; ces deux équations et par conséquent les deux proposées sont donc *incompatibles*.

Remarque. L'impossibilité étant manifeste sur les équations comme sur les valeurs qui en sont déduites, on peut regarder la déduction comme légitime.

134. Prenons pour exemple le problème des courriers.

Si l'on suppose $a=b$ dans les valeurs de x et de y du nº **129**, on trouve

$$y=\frac{d-bh}{0} \quad \text{et} \quad x=\frac{b(d-ah)}{0},$$

si l'on fait la même hypothèse dans les équations primitives

$$ay=d+x \quad \text{et} \quad b(y-h)=x$$

elles deviennent

$$ay=d+x \quad \text{et} \quad a(y-h)=x \quad \text{ou} \quad ay=ah+x\ ;$$

sous cette forme, l'incompatibilité est manifeste, puisque l'on a les mêmes premiers membres et des seconds membres différents.

En considérant le problème en lui-même, l'impossibilité n'est pas moins évidente. Car, si la vitesse du premier courrier surpasse de très-peu celle du second, il lui faudra un temps considérable pour le rattraper, et la rencontre n'aura lieu qu'à une distance très-grande. Si donc les deux vitesses deviennent égales, on peut dire qu'il faudra au premier courrier un temps infini pour rattraper le second, et que la rencontre aura lieu à une distance infinie.

135. V. Si les deux termes de la valeur de l'une des inconnues deviennent nuls, il en sera en général de même des deux termes de la valeur de la seconde, et ces deux valeurs se présenteront sous la forme $\frac{0}{0}$, qui, dans les problèmes à une seule inconnue, est un caractère d'indétermination (**123**).

Supposons, par exemple, que la valeur générale de x se présente sous cette forme, et qu'on ait à la fois

$$cb'-bc'=0 \quad \text{et} \quad ab'-ba'=0\ ,$$

ou

$$cb'=bc' \quad \text{et} \quad ab'=ba'\ .$$

En divisant ces relations membre à membre, et supprimant les facteurs communs, on en tire

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}\ , \quad \text{ou} \quad ac'=a'c\ , \quad \text{ou} \quad ac'-a'c=0\ ,$$

c'est-à-dire que le numérateur de la valeur de y est nul; et comme elle a le même dénominateur que celle de x, il s'ensuit qu'elle prend aussi la forme $\frac{0}{0}$.

Comme on ne sait si ces valeurs peuvent être légitimement déduites des équations, puisqu'il faudrait pour cela diviser les deux membres d'une même équation par *zéro*, il faut remonter aux équations mêmes, ou plutôt aux équations [A] que nous en avons déduites.

Or, en comparant ces équations, on reconnaît qu'elles sont identiques, puisque ab' est égal à $a'b$, et cb' à bc'. Ces deux équations, et par conséquent les deux proposées, rentrent donc l'une dans l'autre; on n'a, pour résoudre le problème, qu'une même équation sous deux formes différentes; il est donc indéterminé.

Remarque. L'indétermination se manifestant sur les équations proposées comme sur les valeurs de la forme $\frac{0}{0}$ qui en sont déduites, on peut regarder la déduction comme légitime.

136. Prenons encore pour exemple le problème des courriers. Si l'on suppose à la fois $a=b$ et $d=bh$, auquel cas la valeur de y se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, on déduit de ces relations cette autre relation très-simple $d=ah$. Par suite la valeur de x prend aussi la forme $\frac{0}{0}$.

Si l'on remonte aux équations mêmes

$$ay=d+x \quad \text{et} \quad b(y-h)=x,$$

elles deviennent, en ayant égard aux hypothèses ci-dessus,

$$ay=d+x \quad \text{et} \quad ay=bh+x \quad \text{ou} \quad ay=d+x,$$

c'est-à-dire qu'elles deviennent identiques.

On se rend également compte de l'indétermination en considérant le problème en lui-même. On suppose, en effet, $a=b$, c'est-à-dire que les deux courriers ont la même vitesse. On suppose de plus $d=bh$, c'est-à-dire qu'il faut h heures au second courrier pour parcourir la distance d; en d'autres termes, il était en A, un nombre h d'heures avant d'arriver en B. Il se trouvait donc en A à minuit, en même temps que le premier courrier; et comme ils ont la même vitesse, ils doivent se trouver et s'être trouvés ensemble en tous les points de la route, c'est-à-dire que le problème qui consiste à trouver le lieu et l'heure de la rencontre est un problème indéterminé.

Remarque. Il est bon de remarquer que, quoique le problème soit indéterminé lorsque les deux équations rentrent l'une dans l'autre, il n'en faudrait pas conclure que les valeurs de x et de y sont arbitraires. Elles sont évidemment liées par l'équation unique qu'a fournie le problème.

Ainsi, dans l'exemple des courriers, la distance x et le nombre d'heures y, restent liés par l'équation

$$ay = d + x \quad \text{d'où} \quad x - ay = d .$$

On pourra bien attribuer à y, par exemple, telle valeur qu'on voudra; mais il faudra donner à x la valeur qu'on tirera de cette équation.

137. VI. Il y a un cas où la valeur de l'une des inconnues prend la forme $\frac{0}{0}$, tandis que l'autre prend la forme $\frac{B}{0}$. Ce cas se présente quand les hypothèses introduites annulent à la fois les coefficients d'une même inconnue dans les deux équations.

Si, par exemple, on suppose à la fois $a = 0$ et $a' = 0$, les valeurs générales de x et de y deviennent

$$x = \frac{cb' - bc'}{0} \quad \text{et} \quad y = \frac{0}{0} .$$

Si l'on remonte aux équations primitives, on voit qu'elles se réduisent alors à

$$by = c \quad \text{et} \quad b'y = c' ,$$

équations incompatibles, puisqu'elles donnent pour y deux valeurs $\frac{c}{b}$ et $\frac{c'}{b'}$ qui ne sont point supposées égales. En même temps, sous un certain point de vue, il y a aussi indétermination, puisque, x n'entrant plus dans ces équations, il est permis d'attribuer à cette inconnue telle valeur que l'on voudra. Mais on ne peut concilier clairement ces deux caractères que par des considérations géométriques qui ne sauraient trouver place ici *.

Cette circonstance se présente dans le problème des courriers quand on suppose à la fois $a = 0$ et $b = 0$, c'est-à-dire que la vitesse de chaque courrier est nulle. On trouve alors

$$y = \frac{d}{0} \quad \text{et} \quad x = \frac{0}{0} .$$

Il est évident, par les hypothèses mêmes, que le problème est impossible si d n'est pas nul, c'est-à-dire si les courriers, devenus immobiles, ne sont pas au même point.

---

* Les équations $by = c$ et $b'y = c'$, représentent deux parallèles à l'axe des x; le point de rencontre a donc une abscisse infinie. Mais comme ce point de rencontre n'est pas plutôt sur l'une des parallèles que sur l'autre, ni même que sur toute autre droite parallèle aux deux premières, l'ordonnée de ce point est indéterminée.

Remarque. Si l'on a à la fois $a=0$, $a'=0$ et $bc'=cb'$, les valeurs de x et de y se présentent toutes deux sous la forme $\frac{0}{0}$; mais il est bon de remarquer que, pour la valeur de y, l'indétermination n'est alors qu'apparente. En effet, de la relation $bc'=cb'$ on tire $c'=\frac{cb'}{b}$. Introduisons cette valeur dans l'expression générale de y ; elle deviendra

$$y=\frac{a\cdot\frac{cb'}{b}-ca'}{ab'-ba'}=\frac{acb'-bca'}{b(ab'-ba')}=\frac{c(ab'-ba')}{b(ab'-ba')},$$

ou, en supprimant le facteur $ab'-ba'$ commun aux deux termes,

$$y=\frac{c}{b};$$

ce qui devait être, puisque ce cas ne diffère du précédent qu'en ce que les quantités $\frac{c}{b}$ et $\frac{c'}{b'}$ sont supposées égales.

§ IV. Discussion partielle des problèmes du premier degré à trois inconnues.

138. Comme cette discussion est beaucoup plus longue et a beaucoup moins d'intérêt que celle des problèmes à deux inconnues; comme d'ailleurs elle ne peut être clairement exposée sans le secours de certaines considérations géométriques *, nous nous bornerons à former les valeurs générales des inconnues, et à signaler quelques cas particuliers dignes de remarque.

Soient les trois équations :

$$ax+by+cz=d \qquad [1],$$
$$a'x+b'y+c'z=d' \qquad [2],$$
$$a''x+b''y+c''z=d'' \qquad [3].$$

Pour obtenir les valeurs de x, y et z propres à vérifier à la fois ces trois équations, nous emploierons encore la méthode des coefficients indéterminés. Multiplions la première équation par une indéterminée m, la seconde par une indéterminée n ; ajoutons membre à membre ces deux équations, et retranchons-en membre à membre la troisième, il viendra

$$(am+a'n-a'')x+(bm+b'n-b'')y+(cm+c'n-c'')z$$
$$=dm+d'n-d'' \qquad [4].$$

* La résolution de trois équations du premier degré à trois inconnues revient à la recherche du point d'intersection de trois plans.

Le système des trois équations proposées pourra être remplacé par le système des deux premières et de l'équation [4]. Pour le faire voir, remarquons que si, afin d'abréger l'écriture, on suppose qu'on ait fait passer tous les termes de chaque équation dans un seul membre, et qu'on représente les trois proposées par

$$A=0\ ,\quad A'=0\ ,\quad A''=0\ ,$$

l'équation [4] pourra être représentée par

$$Am+A'n-A''=0.$$

Or, tout système de valeurs de x, y, z qui satisfera aux trois équations proposées, annulera A, A' et A''; donc il annulera aussi $Am+A'n-A''$; donc il satisfera à l'équation [4]. Réciproquement : tout système de valeurs de x, y, z qui satisfera aux équations [1], [2] et [4] annulera A et A', et de plus $Am+A'n-A''$. Mais puisque A et A' sont nuls, cette dernière expression ne peut être nulle qu'autant que A'' est aussi annulé; ces valeurs satisferont donc à l'équation [3]. Donc enfin les systèmes [1], [2], [3] et [1], [2], [4] sont équivalents.

139. Cela posé, si nous voulons obtenir la valeur de x, profitons de l'indétermination de m et de n pour égaler à zéro les coefficients de y et de z dans l'équation [4], et posons

$$bm+b'n=b'' \qquad [5],$$

$$cm+c'n=c'' \qquad [6].$$

L'équation [4] se réduira à

$$(am+a'n-a'')x=dm+d'n-d''\ ;$$

d'où

$$x=\frac{dm+d'n-d''}{am+a'n-a''} \qquad [7];$$

valeur dans laquelle il n'y aura plus qu'à mettre pour m et pour n les valeurs tirées des équations [5] et [6].

Or, en appliquant ici la loi de formation des valeurs générales tirées de deux équations du premier degré à deux inconnues (**125**), on trouve

$$m=\frac{b''c'-c''b'}{bc'-cb'} \quad \text{et} \quad n=\frac{bc''-cb''}{bc'-cb'}\ .$$

Mettant ces valeurs dans l'expression [7], et multipliant, haut et bas, par $bc'-cb'$, on obtient

$$x=\frac{d(b''c'-c''b')+d'(bc''-cb'')-d''(bc'-cb')}{a(b''c'-c''b')+a'(bc''-cb'')-a''bc'-cb')} \quad [8].$$

On remarquera que le numérateur de cette expression peut se déduire du dénominateur en y remplaçant a, a', a'' par

d, d', d''; c'est-à-dire les coefficients de x par les termes indépendants des inconnues; remarque qu'on aurait déjà pu faire sur l'expression [7]. Reste donc à trouver la loi de formation du dénominateur.

Or, en développant les calculs et changeant tous les signes au numérateur et au dénominateur, ce qui n'altère pas la valeur de x, on trouve pour dénominateur

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'' ;$$

polynome qui peut être formé de la manière suivante :

On prend les deux lettres a et b dont on forme les deux permutations ab et ba. Dans chacun de ces produits on introduit successivement c à la troisième, à la seconde et à la première place, ce qui donne

$$abc, \quad acb, \quad cab, \quad bac, \quad bca, \quad cba.$$

On donne alternativement à ces termes le signe $+$ et le signe $-$, ce qui donne

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba.$$

Enfin, dans chaque terme on met un accent à la seconde lettre et deux accents à la troisième, ce qui donne

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''.$$

La valeur de x peut donc s'écrire

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''} \quad [9].$$

En opérant d'une manière tout à fait semblable, on trouvera :

$$y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''} \quad [10];$$

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''} \quad [11].$$

On reconnaîtra facilement : 1° Que les trois expressions ont le même dénominateur; 2° que pour former le numérateur de y il faut changer b, b', b'' en d, d', d''; 3° que pour former le numérateur de z, il faut changer c, c', c'' en d, d', d''. En un mot, pour former le numérateur de chaque inconnue, il faut, dans le dénominateur commun, remplacer les coefficients de cette inconnue par les termes indépendants des inconnues qui leur correspondent.

Ces valeurs sont des *formules* dont on pourrait se servir pour trouver, dans chaque cas particulier, les valeurs des inconnues; mais il sera presque toujours plus simple de résoudre directement les équations particulières proposées. Le véritable usage de ces valeurs générales est dans la discussion dont nous allons toucher les points principaux.

Pour abréger l'écriture, nous représenterons les valeurs ci-dessus sous la forme

$$x=\frac{A}{D}, \quad y=\frac{B}{D}, \quad z=\frac{C}{D}.$$

140. I. Si les hypothèses faites sur les données rendent x, y et z positifs, ces valeurs sont une réponse directe à la question.

Si une ou plusieurs de ces valeurs deviennent négatives, et que les grandeurs qu'elles représentent ne soient pas, par leur nature, susceptibles d'être comptées indifféremment dans deux sens opposés, on changera dans les équations proposées le signe des inconnues pour lesquelles on aura trouvé des valeurs négatives, et l'on cherchera les changements qu'il faut faire dans l'énoncé du problème pour qu'il conduise aux équations ainsi modifiées; on sera certain alors de trouver pour les inconnues des valeurs positives.

Si l'on trouve pour les inconnues des valeurs nulles, ces valeurs n'offrant par elles-mêmes aucun caractère d'impossibilité, elles seront encore une réponse directe à la question.

Ce cas se présenterait si l'on avait à la fois $d=0$, $d'=0$ et $d''=0$, comme on peut le voir. Il est clair d'ailleurs que cela ne pourra avoir lieu que dans ce cas; car des valeurs nulles mises pour x, y et z, rendant nuls les premiers membres des équations proposées, ces équations ne peuvent être satisfaites par ces valeurs qu'autant que les seconds membres sont nuls.

141. II. Nous avons vu que le système des trois équations proposées peut être remplacé par le système formé de deux d'entre elles, les deux premières par exemple, et de l'équation [4] du n° 138. Or, on démontrerait de la même manière qu'on peut substituer à l'équation [4] toute équation obtenue en multipliant respectivement les trois proposées par des facteurs quelconques, mais finis et différents de zéro, et en faisant la somme des résultats obtenus.

Cela posé, multiplions la première équation par $b''c'-c''b'$, la seconde par $bc''-cb''$, la troisième par $b'c-c'b$, et ajoutons-les membre à membre. Tous les termes en y s'entre-détruiront; il en sera de même des termes en z, et l'équation résultante se réduira à

$$Dx=A.$$

On arriverait encore au même résultat si l'un de nos trois multiplicateurs était nul. Supposons, par exemple, que $b'c - c'b$ soit nul. Multiplions la première équation par $b''c' - c''b'$, la seconde par $bc'' - cb''$ et ajoutons ; les termes en y se réduiront à

$$bb''c'y - b'b''cy \quad \text{ou à} \quad b''(bc' - c'b)y,$$

c'est-à-dire à *zéro* puisque $bc' - c'b$ est nul. Il en sera de même des termes en z ; et l'équation résultante se réduira encore à

$$Dx = A \qquad [12];$$

D et A ayant alors des valeurs différentes de celles qu'ils ont quand $bc' - c'b$ n'est pas nul.

Ainsi, tant qu'il n'y aura pas plus d'un des trois multiplicateurs qui s'annule, on pourra remplacer le système des trois équations proposées par le système des deux premières et de l'équation [12].

On démontrerait exactement de la même manière que, pourvu qu'il n'y ait pas plus d'un des trois binomes $ac' - ca'$, $a'c'' - c'a''$ ou $a''c - c''a$ qui soit nul, on pourra remplacer le système des trois proposées par le système de deux d'entre elles et de l'équation

$$Dy = B \qquad [13].$$

De même enfin, pourvu qu'il n'y ait pas plus d'un des trois binomes $ab' - ba'$, $a'b'' - b'a''$, ou $a''b - b''a$ qui soit nul, on pourra remplacer les trois proposées par deux d'entre elles et par l'équation

$$Dz = C \qquad [14].$$

Dans cette hypothèse, si le dénominateur D des valeurs générales s'annule pour certaines suppositions faites sur les données sans qu'aucun des numérateurs A, B ou C s'annule en même temps, le système des équations proposées sera *incompatible*. Car il pourra être remplacé par deux de ces équations et par une équation telle que [12], qui est alors impossible, puisque D est nul sans que A le soit, et qu'elle se réduit par conséquent à $0 = A$.

Si les trois numérateurs A, B, C, s'annulent en même temps que le dénominateur D, le système des équations proposées sera *indéterminé* ; car il pourra être remplacé par deux de ces équations et par une équation telle que [12], qui est alors satisfaite d'elle-même puisque A et D sont nuls, et qu'elle se réduit à $0 = 0$.

Ainsi, tant qu'il n'y a pas, dans chaque groupe de trois binomes tels que $bc' - cb'$, etc., considérés ci-dessus, plus d'un binome qui s'annule, on peut affirmer que si les valeurs de x, y,

z, se présentent toutes les trois sous la forme $\frac{A}{0}$, le système proposé est incompatible; et que si ces valeurs se présentent toutes les trois sous la forme $\frac{0}{0}$, le système est indéterminé.

Si l'une se présentait sous la forme $\frac{0}{0}$ et les autres sous la forme $\frac{N}{0}$; ou l'une sous la forme $\frac{N}{0}$ et les autres sous la forme $\frac{0}{0}$, il y aurait à la fois incompatibilité et indétermination; ce qui ne peut être rendu sensible que par des considérations géométriques *.

142. III. Si dans l'un des trois groupes de binomes, il y en a deux qui soient nuls, le troisième est nul également. Soient par exemple

$$bc' - cb' = 0 \quad \text{et} \quad b'c'' - c'b'' = 0 ,$$

on en tire facilement

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \quad \text{et} \quad \frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''} .$$

Par conséquent il en résulte

$$\frac{b}{c} = \frac{b''}{c''} \quad \text{ou} \quad bc'' - cb'' = 0 .$$

Dans cette hypothèse, reportons-nous à la valeur [8] de x, trouvée au n° **139**. Les trois binomes qui s'annulent sont multipliés respectivement par a, a', a'' au dénominateur, et par d, d', d'' au numérateur; il en résulte que les deux termes se réduisent à *zéro* et que x se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Il peut arriver alors qu'il y ait au moins une des deux autres valeurs qui se présente sous la forme $\frac{N}{0}$, ou qu'elles se présentent toutes les deux sous la forme $\frac{0}{0}$.

Examinons d'abord le premier cas; et supposons, pour fixer les idées, que ce soit la valeur de z qui se présente sous la forme $\frac{C}{0}$. Il faut pour cela qu'il n'y ait pas plus d'un des trois binomes $ab' - ba'$, $a'b'' - b'a''$, ou $a''b - b''a$ qui soit nul; car, comme ces binomes sont multipliés au dénominateur par c'',

* Exemple : deux plans parallèles coupés par un troisième.

c, c' et au numérateur par d'', d, d', s'ils étaient nuls tous les trois les deux termes se réduiraient à zéro, ce qui est contre l'hypothèse.

Mais, s'il n'y a pas plus d'un de ces trois binomes qui soit nul, on pourra remplacer le système des équations proposées par deux d'entre elles et par l'équation impossible [**141**]

$$Dz = C .$$

Ce système est donc incompatible.

Si les valeurs de y et de z prennent toutes deux la forme $\frac{0}{0}$ en même temps que celle de x, on ne pourra rien conclure en général, et il faudra remonter aux équations proposées.

Supposons, par exemple, que les neuf binomes $ab' - ba'$, $ab'' - ba''$, $bc' - b'c$, etc. soient nuls, ou, ce qui revient au même, qu'on ait la suite de rapports

$$a : b : c :: a' : b' : c' :: a'' : b'' : c'' .$$

Les valeurs des trois inconnues se présenteront sous la forme $\frac{0}{0}$.

Or, si l'on multiplie respectivement les trois équations par $a'a''$, par aa'' et par aa', les trois premiers membres deviendront identiques, tandis qu'il pourra arriver : ou que les seconds membres soient tous différents, auquel cas il y aurait incompatibilité entre ces trois équations; ou que deux seulement de ces seconds membres soient égaux, auquel cas le système se réduirait à deux équations incompatibles; ou enfin que les trois seconds membres soient égaux, auquel cas le système se réduisant à une seule équation, il serait indéterminé.

Ainsi, les valeurs des trois inconnues peuvent se présenter toutes les trois sous la forme $\frac{0}{0}$, soit que le système soit incompatible, ou à la fois incompatible et indéterminé, ou enfin totalement indéterminé. Il faut donc, alors, recourir aux équations elles-mêmes pour reconnaître directement le cas d'impossibilité ou d'indétermination qu'elles présentent.

CHAPITRE V.

ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

§ I. Résolution en nombres entiers d'une équation du premier degré à deux indéterminées.

143. Lorsqu'un problème qui comporte n inconnues, ne fournit que $n-p$ équations, on peut se donner arbitrairement p de ces inconnues, et en déduire les $n-p$ autres. Le problème est donc indéterminé. L'analyse indéterminée a pour objet de résoudre *en nombres entiers* les équations numériques qui renferment un nombre d'inconnues supérieur à celui des équations mêmes. Dans ce paragraphe, nous nous occuperons de la résolution *en nombres entiers* d'une équation du premier degré à deux inconnues, ou, suivant l'expression consacrée, à deux indéterminées.

Une équation numérique du premier degré à deux indéterminées peut toujours être mise sous la forme

$$ax+by=c \qquad [1],$$

dans laquelle a, b et c sont des nombres *entiers* positifs ou négatifs, et tels qu'il n'y ait pas de facteurs communs à tous les termes.

144. Il faut remarquer d'abord qu'une pareille équation ne peut admettre de solutions entières qu'autant que les coefficients a et b des deux indéterminées sont premiers entre eux.

En effet, s'ils avaient un facteur commun, ce facteur diviserait exactement le premier membre, puisque x et y sont supposés entiers; il devrait donc aussi diviser le second membre, ce qui est contre l'hypothèse, puisque l'on a supprimé les facteurs communs à tous les termes.

145. S'il existait un facteur commun entre a et c, ou entre b et c, l'équation pourrait être simplifiée. En effet, soient $a=a'm$ et $c=c'm$, a', c' et m étant des nombres entiers. Remplaçons a et c par ces valeurs, et divisons par m; il viendra

$$a'x+\frac{by}{m}=c'.$$

Or, c' étant entier ainsi que $a'x$, il faut que $\frac{by}{m}$ soit entier, c'est-à-dire que m divise le produit by ; mais il est premier avec b, puisqu'il n'y a pas de facteur commun à tous les termes; il faut donc qu'il divise exactement y. Soit y' le quotient, en sorte qu'on ait $y=my'$; l'équation proposée se réduira à

$$a'x+by'=c' ,$$

équation dont les termes sont plus simples. Quand on l'aura résolue, il suffira de multiplier par m les valeurs de y' pour obtenir celles de y.

146. Nous supposerons donc que dans l'équation à traiter il n'y ait plus de facteur commun entre les coefficients considérés deux à deux.

Nous allons faire voir que si l'on avait trouvé, par un moyen quelconque, un système de valeurs entières, $x=\alpha$ et $y=\beta$ par exemple, propre à vérifier l'équation proposée, on pourrait obtenir sur-le-champ tous les autres systèmes analogues.

En effet, puisque α et β, mis pour x et y, vérifient par hypothèse l'équation proposée, on a

$$a\alpha+b\beta=c .$$

Si l'on retranche cette relation de l'équation proposée, membre à membre, on obtient

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0 ,$$

d'où

$$x=\alpha-\frac{b(y-\beta)}{a} .$$

Or, puisque x doit être entier, et que le premier terme α de sa valeur est entier, il faut que le second le soit, c'est-à-dire que a divise le produit $b(y-\beta)$; et comme a est premier avec b, il faut qu'il divise $y-\beta$. Appelons t le quotient entier de cette division, nous aurons

$$\frac{y-\beta}{a}=t , \quad \text{d'où} \quad y=\beta+at \qquad [2].$$

Mettant t à la place de $\frac{y-\beta}{a}$ dans la valeur de x, elle devient

$$x=\alpha-bt \qquad [3].$$

Il suffira de donner à t des valeurs entières, positives ou négatives pour obtenir autant de systèmes correspondants de valeurs entières pour x et pour y.

La démonstration même prouve que tous les systèmes de valeurs entières sont compris dans ces formules ; et l'on vérifierait *a posteriori* qu'elles satisfont à la proposée en y substituant pour x et pour y les valeurs [3] et [2]; les termes en t disparaissent d'eux-mêmes, et il reste

$$a\alpha+b\beta=c,$$

relation qui est vérifiée par hypothèse.

On voit donc que lorsqu'on aura trouvé pour x et y un système de valeurs entières α et β, on formera leurs valeurs générales en ajoutant à α et à β le produit d'une nouvelle indéterminée entière t par le coefficient de x, s'il s'agit de la valeur de y, et par le coefficient de y pris en signe contraire, s'il s'agit de la valeur de x.

Il est clair, d'ailleurs, que comme t peut être changé en $-t$, on pourra prendre a en signe contraire et b avec son signe.

Remarque. La suite des valeurs de x forme une progression arithmétique dont la raison est le coefficient de y ; et la suite des valeurs de y forme une progression arithmétique dont la raison est le coefficient de x. Mais ces deux progressions seront l'une croissante et l'autre décroissante, si a et b sont positifs ; elles seront toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes si a et b sont de signe contraire.

147. Tout se réduit donc à trouver un système de valeurs entières pour x et pour y.

Remarquons d'abord que, dans quelques cas particuliers, on obtiendrait immédiatement ce système de valeurs. Par exemple, si c était nul, on satisferait à l'équation en prenant $x=0$ et $y=0$. Si c était un multiple de a, et qu'on eût $c=ma$, on satisferait en posant $x=m$ et $y=0$. Si c avait la forme $nb\pm ma$, on satisferait en posant $x=\mp m$ et $y=n$.

Hors ces cas, il faut une méthode particulière pour trouver un système de valeurs. Voici celles que l'on emploie.

I. Résolvons l'équation proposée par rapport à celle des deux indéterminées qui a le plus petit coefficient. Soit $a<b$; tirons la valeur de x, il viendra

$$x=\frac{c-by}{a}.$$

Je dis que si l'on substitue pour y une suite de nombres positifs 0, 1, 2,... jusqu'à $+p$; et une suite de nombres négatifs, -1, -2,... jusqu'à $-q$, en sorte que $p+q$ soit égal à $a-1$, il y aura dans ces substitutions une valeur de y qui donnera pour x un nombre entier.

En effet, soient $+y'$ et $-y''$, par exemple, deux de ces substitutions; soient q' et q'' les quotients positifs ou négatifs qu'on obtiendra en divisant $c-by'$ et $c+by''$ par a; les restes devront nécessairement différer. Car si les deux divisions donnaient le même reste r, on aurait en même temps

$$c-by'=aq'+r$$
$$c+by''=aq''+r,$$

d'où, en retranchant la première identité de la seconde

$$b(y'+y'')=a(q''-q').$$

Or, a divisant le second membre devrait diviser le premier; mais a est premier avec b; il devrait donc diviser $y'+y''$. Mais y' ne pouvant surpasser p, et y'' ne pouvant surpasser q, la somme $y'+y''$ ne peut surpasser $p+q$ ou $a-1$; elle ne saurait donc être divisible par a.

Il en serait de même, *a fortiori*, s'il s'agissait de deux substitutions prises toutes deux dans la série des nombres positifs, ou toutes deux dans la série des nombres négatifs.

Donc, tous les restes résultant de ces substitutions seront différents. Mais le nombre de ces restes, égal au nombre des substitutions, est $p+q+1$ ou a; et puisque ces restes ne peuvent surpasser le diviseur a, il faudra qu'un d'entre eux soit égal à zéro. Le nombre correspondant mis pour y donnera donc pour x un nombre entier; et l'on aura ainsi un système de valeurs entières de x et de y.

Soit, par exemple, l'équation

$$5x-8y=21.$$

On en tire $$x=\frac{21+8y}{5}.$$

Substituons pour y les nombres 0, $+1$, $+2$ et -1, -2; nous trouverons que -2 donne pour x un nombre entier $+1$. Les valeurs de x et de y seront donc

$$x=1+8t \quad \text{et} \quad y=-2+5t,$$

en prenant le coefficient $+5$ avec son signe, et le coefficient -8 en signe contraire.

148. II. Résolvons encore l'équation proposée par rapport à l'indéterminée qui a le plus petit coefficient; soit $a<b$; tirons la valeur de x, il vient

$$x=\frac{c-by}{a}.$$

Effectuons, autant qu'il est possible, la division de b par a ; soient q le quotient et r le reste ; nous aurons

$$x = -qy + \frac{c-ry}{a} .$$

Le premier terme de la valeur de x étant entier, il faut que le second le soit : égalons-le à une indéterminée entière t, nous aurons

$$x = -qy + t \qquad [2],$$

relation où y et t représentent des nombres entiers qui satisfont à l'équation

$$\frac{c-ry}{a} = t \quad \text{ou} \quad at + ry = c \qquad [3].$$

Cette équation est de même forme que la proposée, et il s'agit aussi de la résoudre en nombres entiers ; mais le coefficient r est moindre que le coefficient b de la proposée.

Traitons cette équation comme la proposée. Résolvons-la par rapport à l'indéterminée y qui a maintenant le plus petit coefficient, puisque le reste r est moindre que le diviseur a de la division qui l'a fourni ; il viendra

$$y = \frac{c-at}{r} .$$

Divisons a par r ; soient q' le quotient et r' le reste ; nous aurons

$$y = -q't + \frac{c-r't}{r} .$$

Le premier terme de la valeur de y étant entier, il faut que le second le soit ; égalons-le à une nouvelle indéterminée entière t' ; il viendra

$$y = -q't + t' \qquad [4],$$

relation où t et t' représentent des nombres entiers qui satisfont à l'équation.

$$\frac{c-r't}{r} = t' \quad \text{ou} \quad r't + rt' = c \qquad [5].$$

Cette équation est encore de même forme que la proposée et doit, comme elle, être résolue en nombres entiers ; mais le coefficient r' est moindre que le coefficient a de l'équation précédente.

Traitons encore cette équation comme la précédente, et résolvons-la par rapport à l'indéterminée qui a le plus petit coefficient, c'est-à-dire par rapport à t ; nous aurons

$$t = \frac{c-rt'}{r'} .$$

Divisons r par r' ; soient q'' le quotient et r'' le reste ; il viendra

$$t = -q''t' + \frac{c - r''t'}{r'} .$$

Le premier terme de la valeur de t étant entier, il faut que le second le soit ; égalons-le à une nouvelle indéterminée entière t'', nous aurons

$$t = -q''t' + t'' \qquad [6] ;$$

relation où t' et t'' représentent des nombres entiers qui satisfont à l'équation

$$\frac{c - r''t'}{r'} = t'' \quad \text{ou} \quad r''t' + r't'' = c \qquad [7],$$

équation de même forme que la proposée, mais à coefficients plus simples.

En continuant ainsi, on ramène successivement la résolution de l'équation proposée à celle d'une série d'équations de même espèce, dont les coefficients sont de plus en plus petits. Mais, si l'on fait attention aux opérations effectuées, on remarque qu'on a divisé d'abord a par b, puis b par le reste r de la division précédente, puis r par le reste r' de la division qui précède, et ainsi de suite ; c'est-à-dire qu'on effectue sur a et b les mêmes calculs que si l'on cherchait le plus grand commun diviseur entre ces nombres. Or, ces nombres sont premiers entre eux ; on devra donc parvenir à un reste égal à l'unité. Soit r'' ce reste égal à 1 ; en sorte qu'on ait

$$t' + r't'' = c .$$

On en tire

$$t' = c - r't'' ;$$

et il suffira de donner à t'' une valeur entière quelconque pour obtenir une valeur entière correspondante de t'. Les valeurs entières de t'' et de t' mises dans l'équation [6] donneront pour t une valeur entière ; ces valeurs entières de t' et de t mises dans l'équation [4] donneront une valeur entière pour y ; enfin ces valeurs entières de t et de y mises dans l'équation [2] donneront une valeur entière correspondante pour x.

On pourra effectuer ces substitutions successives sans donner d'abord aucune valeur particulière à t'' ; on obtiendra ainsi les valeurs de y et de x exprimées au moyen de la seule indéterminée t''. Il suffira, dans ces expressions, de donner à t'' une valeur entière, positive ou négative quelconque ; on en déduira immédiatement un système de valeurs entières pour x et y.

Prenons pour exemple l'équation

$$8x + 13y = 159 ;$$

les calculs précédemment indiqués donneront successivement :

$$x=\frac{159-13y}{8}=19-y+\frac{7-5y}{8}=19-y+t\ ,$$

en posant $\frac{7-5y}{8}=t$ ou $5y+8t=7$.

Puis, $y=\frac{7-8t}{5}=1-t+\frac{2-3t}{5}=1-t+t'$;

en posant $\frac{2-3t}{5}=t'$ ou $3t+5t'=2$.

Puis, $t=\frac{2-5t'}{3}=-t'+\frac{2-2t'}{3}=-t'+t''$,

en posant $\frac{2-2t'}{3}=t''$ ou $2t'+3t''=2$.

Puis, $t'=\frac{2-3t''}{2}=1-t''-\frac{t''}{2}=1-t''-t'''$,

en posant $t''=2t'''$.

Mettant cette valeur dans celle de t' , on trouve

$$t'=1-2t'''-t'''=1-3t''' \ ;$$

mettant les valeurs de t' et de t'' dans celle de t , il vient

$$t=-1+3t'''+2t'''=-1+5t''';$$

mettant les valeurs de t et de t' dans celle de y , on obtient

$$y=1+1-5t'''+1-3t'''=3-8t''' \ .$$

Enfin, mettant les valeurs de y et de t dans celle de x , on trouve

$$x=19-3+8t'''-1+5t'''=15+13t''' \ .$$

Remarque. Cette méthode est indépendante de la propriété démontrée au n° **146** pour la formation des valeurs générales de x et de y ; mais en y ayant égard, on peut abréger notablement l'application de la méthode. Dès qu'on parvient à une fraction dont on peut annuler le numérateur par une valeur entière de l'indéterminée qui y entre, on obtient, en remontant de proche en proche, un système de valeurs entières pour x et y , et par suite leurs valeurs générales.

Par exemple, dans le calcul ci-dessus, dès qu'on est parvenu à l'équation

$$t=-t'+\frac{2-2t'}{3}\ ;$$

on voit qu'on peut annuler la fraction en posant $t'=1$, ce qui donne $t=-1$; par suite $y=1+1+1=3$; par suite encore $x=19-3-1=15$. En vertu de la propriété du nº **146** on peut donc poser immédiatement

$$x=15+13t \quad \text{et} \quad y=3-8t,$$

t désignant une indéterminée entière.

149. Cette méthode comporte plusieurs simplifications qu'il importe de ne point négliger.

I. D'abord, il convient d'effectuer, autant qu'il est possible, la division de c par a, comme celle de b par a; en simplifiant les coefficients des indéterminées, on simplifie aussi les termes indépendants. C'est ce que nous avons fait dans l'exemple traité au numéro précédent.

II. En second lieu, on peut toujours s'arranger de manière que chaque reste soit plus petit que la moitié du précédent; il suffit pour cela de prendre les quotients par excès toutes les fois qu'en les prenant par défaut la condition indiquée ne serait pas remplie. Si, par exemple, on a

$$b=aq+r$$

on pourra écrire, en ajoutant $+a$ et $-a$,

$$b=a(q+1)-(a-r).$$

Or, des deux restes r et $a-r$, l'un sera toujours moindre que la moitié de a, puisque leur somme est égale à a. Il n'y a d'exception que pour le cas où ces restes seraient égaux; mais alors il serait indifférent de prendre le quotient par défaut ou par excès.

III. Enfin, il peut arriver qu'au numérateur de la fraction qu'on égale à une nouvelle indéterminée, il existe un facteur commun à tous les termes; en le mettant en évidence, il en résulte une simplification. Soit, par exemple, la fraction

$$\frac{c-by}{a}.$$

Si c et b ont un facteur commun m et qu'on ait $c=c'm$ et $b=b'm$, c' et b' étant des nombres entiers, on pourra écrire

$$\frac{m(c'-b'y)}{a}.$$

Or, pour que le numérateur soit divisible par a, il faut, puisque a est nécessairement premier avec m, facteur de b, que le binome entre parenthèses $c'-b'y$ soit divisible par a. On posera donc en conséquence

$$\frac{c'-b'y}{a}=t \quad \text{d'où} \quad at+b'y=c',$$

équation plus simple que l'équation $at+by=c$, à laquelle on serait parvenu sans avoir égard au facteur m.

Il faut remarquer toutefois que cette simplification ne se présenterait qu'autant qu'on aurait négligé d'avoir égard dès le principe au facteur m commun entre b et c, comme nous l'avons expliqué au nº **145**.

150. Le problème qu'on a en vue exige souvent, non-seulement que les valeurs de x et de y soient entières, mais encore qu'elles soient positives.

En reprenant les valeurs générales du nº **146**, on devra avoir (**111**)

$$\beta+at>0 \quad \text{et} \quad \alpha-bt>0 .$$

On tire de la première inégalité (**69**), en y supposant a positif, ce qui est permis,

$$t>-\frac{\beta}{a} .$$

Si b est négatif dans l'équation proposée et qu'on ait $b=-b'$, la lettre b' désignant un nombre entier positif, la seconde inégalité devient

$$\alpha+b't>0 \quad \text{d'où} \quad t>-\frac{\alpha}{b'} .$$

Les deux limites obtenues pour t étant toutes deux des limites inférieures, il suffira de donner à t des valeurs entières, algébriquement plus grandes que la plus grande de ces deux limites; par conséquent, le nombre des solutions entières et positives pour x et y sera illimité.

Si b est positif dans l'équation proposée, on tire de la seconde inégalité

$$\alpha>bt \quad \text{d'où} \quad t<\frac{\alpha}{b} .$$

On a ainsi pour t une limite inférieure et une limite supérieure. S'il y a des nombres entiers compris entre ces deux limites, en les mettant à la place de t on aura autant de systèmes de valeurs entières et positives pour x et y; mais le nombre en sera nécessairement limité. S'il n'y a aucun nombre entier compris entre les deux limites, ou si elles sont contradictoires, c'est-à-dire si la limite supérieure est algébriquement moindre que la limite inférieure, il n'y aura aucun système de valeurs entières et positives.

Dans l'exemple numérique traité plus haut, on a trouvé

$$y=-2+5t \quad \text{et} \quad x=1+8t \ .$$

On en déduit pour t deux limites supérieures

$$t>\frac{2}{5} \quad \text{et} \quad t>-\frac{1}{8} \ .$$

Il suffira de donner à t des valeurs entières supérieures à $\frac{2}{5}$, c'est-à-dire, 1, 2, 3 etc. jusqu'à l'infinitif positif.

Si une équation à deux indéterminées avait fourni les valeurs

$$y=-2+5t \quad \text{et} \quad x=31-8t \ ,$$

on en tirerait $$t>\frac{2}{5} \quad \text{et} \quad t<\frac{31}{8} \ .$$

On ne pourrait donc donner à t que les valeurs 1, 2 et 3 qui sont comprises entre ces limites.

Si une équation à deux indéterminées avait fourni les valeurs

$$y=-2+5t \quad \text{et} \quad x=1-8t \ ,$$

on en tirerait $$t>\frac{2}{5} \quad \text{et} \quad t<\frac{1}{8} \ ,$$

limites contradictoires; il n'y aurait donc aucun système de solutions entières et positives.

151. Remarque. Quand le nombre des systèmes de valeurs entières et positives est limité, on peut le déterminer à une unité près avant de résoudre l'équation proposée.

En effet, ce cas se présente lorsque a et b étant de même signe, on obtient pour t deux limites, l'une inférieure et l'autre supérieure

$$t>-\frac{\beta}{a} \quad \text{et} \quad t<\frac{\alpha}{b} \ .$$

Supposons, pour fixer les idées, que α et β soient positifs, auquel cas la première limite est négative et la seconde positive. Soient p le nombre entier immédiatement inférieur à $\frac{\alpha}{b}$, et q le nombre entier immédiatement inférieur à $\frac{\beta}{a}$. On ne pourra donner à t que les valeurs 0, 1, 2,... jusqu'à $+p$, et -1, -2, -3, etc..., jusqu'à $-q$; ce qui fait en tout $p+q+1$ valeurs.

Or on a, par hypothèse,

$$p<\frac{\alpha}{b} \quad \text{et} \quad q<\frac{\beta}{a} \quad \text{d'où} \quad p+q<\frac{\alpha}{b}+\frac{\beta}{a},$$

ou

$$p+q<\frac{a\alpha+b\beta}{ab},$$

ou enfin

$$p+q<\frac{c}{ab},$$

puisque α et β forment un système de valeurs de x et de y.

On aurait de même

$$p+1>\frac{\alpha}{b} \quad \text{et} \quad q+1>\frac{\beta}{a}, \text{d'où} \quad p+q+2>\frac{c}{ab}.$$

Il résulte de là que la quantité $\frac{c}{ab}$ est comprise entre $p+q$ et $p+q+2$, c'est-à-dire entre le nombre des valeurs de t diminué d'une unité et ce même nombre augmenté d'une unité. On aura donc ce nombre de valeurs en prenant le quotient $\frac{c}{ab}$ ou par excès ou par défaut.

Soit, par exemple, l'équation

$$7x+12y=200.$$

Le quotient par défaut de 200 par 7 fois 12 ou 84, est 2, le quotient par excès est 3; le nombre des valeurs entières et positives ne peut donc être que 2 ou 3. On trouve en effet :

$$y=-2+7t \quad \text{et} \quad x=32-12t.$$

L'indéterminée t doit donc être comprise entre $\frac{2}{7}$ et $\frac{32}{12}$ ou $\frac{8}{3}$ pour que x et y soient positifs; on ne peut donc donner à t que les valeurs 1 et 2; ce qui ne fournit que deux systèmes de valeurs,

$$y=5, \quad x=20,$$

et

$$y=12, \quad x=8.$$

132. Comme exemples de questions conduisant à une équation à deux indéterminées, nous traiterons les deux suivantes :

I. Problème. *Trouver un nombre dont le triple divisé par* 8 *donne pour reste* 5.

Soient x ce nombre, et y le quotient de $3x$ par 8; on devra avoir l'égalité

$$3x=8y+5.$$

En appliquant le mode de solution indiqué au n° **147**, on trouve que $y=-1$ donne la valeur entière $x=-1$; on a donc

$$y=-1+3t \quad \text{et} \quad x=-1+8t \;.$$

On peut donner à t toutes les valeurs entières et positives depuis 1 ; ce qui donne les systèmes

$$\begin{array}{ll} y=2\;, & x=7\;; \\ y=5\;, & x=15\;; \\ y=8\;, & x=23\;; \\ \text{etc.}\;, & \text{etc.} \end{array}$$

II. Problème. *Faire une somme de 26 fr. avec deux espèces de pièces étrangères, dont les unes valent* $3^{\mathrm{f}},75$ *et les autres* $1^{\mathrm{f}},10$.

Soient x le nombre des pièces de première espèce, et y le nombre des pièces de la seconde espèce ; on devra avoir

$$3,75\,.\,x+1,10\,.\,y=26\;;$$

ou, en multipliant tous les termes par 100,

$$375x+110y=2600\;.$$

Les nombres 375, 110 et 2600 ayant le facteur commun 5, on peut d'abord le supprimer, ce qui donne

$$75x+22y=520\;.$$

Les nombres 75 et 520 ayant encore le facteur commun 5, on peut poser (**145**) $y=5y'$, et supprimer le facteur 5, ce qui donne

$$15x+22y'=104\;.$$

Les nombres 22 et 104 ayant le facteur commun 2, on peut poser $x=2x'$ et supprimer le facteur 2, ce qui donne enfin l'équation

$$15x'+11y'=52\;.$$

On en tire $\quad y'=4-x'+\dfrac{4(2-x')}{11}=4-x'+4t\;,$

en posant $\quad \dfrac{2-x'}{11}=t\;, \quad$ d'où $\quad x'=2-11t\;;$

par suite $\quad y'=2+15t\;.$

On voit que x' et y' ne peuvent être positifs en même temps que pour $t=0$, ce qui donne $x'=2$ et $y'=2$; par suite $x=4$ et $y=10$.

En effet : 4 pièces à $3^{\mathrm{f}},75$ font 15 fr., et 10 pièces à $1^{\mathrm{f}},10$ font 11 fr. ; la somme $15+11$ est bien égale à 26.

Ce problème offre un exemple d'une question algébriquement indéterminée qui n'est cependant susceptible que d'une seule solution arithmétique.

Remarque. On aurait pu prévoir que le problème ne pouvait admettre au plus qu'un système de valeurs entières et positives; car le produit des coefficients 15 et 11 est plus grand que le terme indépendant 52; d'où il suit que les quotients par défaut et par excès de 52 par 15 fois 11, sont 0 et 1. Le nombre des systèmes de valeurs entières et positives ne pouvait donc pas surpasser 1.

Le lecteur pourra s'exercer sur les questions suivantes :

I. *Une société s'est cotisée pour une fête, à raison de* 9 *fr. pour chaque dame et de* 16 *fr. pour chaque homme; la somme ainsi réunie a été de* 330 *fr.; combien y avait-il d'hommes et de dames?*

(Réponse : Nombre des hommes : 15, 6;
Nombre des dames : 10, 26.)

II. *Trouver un nombre qui divisé par* 7 *donne pour reste* 5, *et qui divisé par* 18 *donne pour reste* 3.

(Réponse : 75, 201, 327, etc., nombres en progression arithmétique.)

III. *Faire une longueur d'un mètre en plaçant les unes à la suite des autres des pièces de* 2 *francs, dont le diamètre est de* 27 *millimètres, et des pièces de* 1 *franc, dont le diamètre est de* 23 *millimètres*.

(Réponse : Nombre des pièces de 2 francs : 20;
Nombre des pièces de 1 franc : 20.)

IV. *Diviser* 90 *en deux parties dont l'une soit divisible par* 5 *et l'autre par* 11.

(Réponse : Première partie : 90, 35;
Deuxième partie : 0, 55.)

V. *Trouver une fraction telle qu'en l'ajoutant terme à terme avec la fraction* $\frac{2}{3}$, *on obtienne pour résultat* $\frac{7}{24}$.

(Réponse : $\frac{5}{21}$, $\frac{12}{45}$, $\frac{19}{69}$, etc., fractions dont les termes sont en progression arithmétique.)

VI. *On a de l'argent au titre de* $0{,}950$, *et de l'argent au titre de* $0{,}820$. *Combien faut-il prendre, en nombres entiers, de déca-*

grammes de chaque espèce d'argent, pour faire un alliage qui contienne 1 kilogramme d'argent pur?

(Réponse : argent au titre de 0,950 : 88^{Dg}, 6^{Dg};
argent au titre de 0,820 : 20^{Dg}, 115^{Dg}.)

§ II. Résolution en nombres entiers des équations du premier degré à plus de deux indéterminées.

155. Considérons d'abord deux équations à trois indéterminées.

$$ax + by + cz = d \qquad [1],$$

$$a'x + b'y + c'z = d' \qquad [2],$$

dans lesquelles on peut toujours supposer qu'on ait supprimé les facteurs communs à tous les termes.

Ces équations ne pourront admettre de solutions entières pour x, y et z qu'autant que, dans chacune d'elles, il n'y aura aucun facteur commun aux trois coefficients des indéterminées. Car si a, b, c, par exemple, admettaient un facteur commun, ce facteur diviserait le premier membre, puisque x, y, z sont entiers; il devrait donc aussi diviser le second, ce qui est impossible, puisqu'il n'y a plus, par hypothèse, aucun facteur commun à tous les termes. Admettons donc que cette condition soit remplie.

Éliminons l'une des trois indéterminées, z par exemple, entre les deux équations proposées ; nous obtiendrons l'équation

$$(ac' - ca')x + (bc' - cb')y = dc' - cd' \qquad [3],$$

qui devra également admettre des solutions entières. Il faudra pour cela, qu'après avoir supprimé les facteurs communs aux deux membres, s'il s'en trouve, les coefficients de x et y soient premiers entre eux (**144**). Supposons cette condition remplie. Nous pourrons tirer de l'équation ci-dessus des valeurs de x et de y de la forme

$$x = \alpha + mt, \quad y = \beta + nt \qquad [4].$$

Transportant ces valeurs dans l'une des équations proposées, on obtiendra une équation en z et t, qui devra, à son tour, admettre des solutions entières. Si les conditions nécessaires sont remplies, on pourra obtenir pour z et t des valeurs de la forme

$$z = \gamma + pt', \quad t = \delta + qt',$$

mettant cette valeur de t dans les expressions de x et de y, celles-ci deviendront

$$x = (\alpha + m\delta) + mqt', \quad y = (\beta + n\delta) + nqt'.$$

Les trois indéterminées x, y, z se trouveront ainsi exprimées au moyen d'une seule indéterminée t' ; et il suffira de donner à t' des valeurs entières positives ou négatives pour obtenir autant de systèmes de valeurs entières pour x, y et z.

Soient, pour exemple, les équations

$$5x+8y-11z=45\ ,$$
$$7x-6y+3z=-1\ .$$

En éliminant z, on obtient d'abord

$$92x-42y=124 \quad \text{ou} \quad 46x-21y=62\ ,$$

d'où l'on tire (**148**)

$$x=5+21t \quad \text{et} \quad y=8+46t\ .$$

Ces valeurs, mises dans la seconde équation proposée, donnent

$$3z-129t=12\ ,$$

d'où l'on tire $\quad z=4+129t'$

et $\quad t=3t'$.

Par suite $\quad y=8+138t'$

et $\quad x=5+63t'$.

154. Il est bon de remarquer que, lorsque les coefficients $ac'-ca'$ et $bc'-cb'$ de l'équation [3] sont premiers entre eux, on est dispensé de résoudre une seconde équation à deux indéterminées. En effet, on a alors, α et β désignant un système de valeurs de l'équation [3],

$$x=\alpha+(bc'-cb')t \quad \text{et} \quad y=\beta-(ac'-ca')t\ .$$

Ces valeurs, mises dans l'équation [1], donnent, après réductions,

$$cz-c(ab'-ba')t=d-a\alpha-b\beta\ .$$

Le premier membre étant divisible par c, le second doit l'être également; en désignant le quotient par γ, on a

$$z-(ab'-ba')t=\gamma\ ,$$

d'où $\quad z=\gamma+(ab'-ba')t$.

Comme on a posé $\quad \dfrac{d-a\alpha-b\beta}{c}=\gamma\ ,$

d'où $\quad a\alpha+b\beta+c\gamma=d\ ,$

on voit que α, β, γ forment un système de valeurs entières de x, y, z ; et qu'on a

$$x=\alpha+(bc'-cb')t\ ,\qquad y=\beta+(ca'-ac')t\ ,$$
$$z=\gamma+(ab'-ba')t\ .$$

valeurs qui ont une symétrie remarquable.

Soient, par exemple, les équations

$$5x + 8y - 11z = 45 ,$$
$$7x - 3y + 2z = 19 .$$

On obtient, en éliminant z, l'équation

$$87x - 17y = 299 ,$$

d'où l'on tire $\quad x = 5 + 17t \quad$ et $\quad y = 8 + 87t$.

Substituant ces valeurs dans la première équation, elle devient, après réductions,

$$11z - 781t = 44 ,$$

d'où
$$z = 4 + 71t .$$

155. Si la question exige que les solutions soient entières et positives, on aura à satisfaire à trois inégalités.

On vient de voir que les valeurs de x, y, z se présentent sous la forme

$$x = \alpha + mt , \quad y = \beta + nt , \quad z = \gamma + rt .$$

On posera donc

$$\alpha + mt > 0 , \quad \beta + nt > 0 , \quad \gamma + rt > 0 ,$$

ce qui donnera trois limites pour t.

Si ces limites sont toutes trois inférieures ou toutes trois supérieures, on pourra donner à t toutes les valeurs au-dessus de la plus grande de ces limites, si elles sont inférieures, ou toutes les valeurs au-dessous de la plus petite, si elles sont supérieures. Il y aura donc un nombre illimité de solutions.

Si ces limites ne sont pas toutes trois de même sens, t devra être pris entre ces limites ; et par conséquent il y aura un nombre limité de solutions.

Si ces limites étaient contradictoires, il n'y aurait aucune solution positive possible.

156. Comme exemple d'une question conduisant à deux équations du premier degré à trois indéterminées, nous traiterons la suivante :

On veut donner une gratification aux ouvriers d'une fabrique. Si l'on donne 5 francs à chaque homme, 4 francs à chaque femme et 2 francs à chaque enfant, il faudra une somme de 156 francs. Si l'on donne 1 franc de moins à chacun, il ne faudra que 118 francs. On demande combien il y a d'hommes, de femmes et d'enfants.

Soient x le nombre des hommes, y celui des femmes, z celui des enfants. On aura évidemment les deux équations

$$5x+4y+2z=156\ ,$$
$$4x+3y+\ z=118\ .$$

Éliminant z, on trouve

$$3x+2y=80\ ,$$

d'où l'on tire $x=2t$ et $y=40-3t$.

Ces valeurs, mises dans la seconde équation du problème, donnent

$$t-z=2\ ,$$

d'où

$$z=t-2\ ,$$

Comme x, y et z doivent être positifs, on devra avoir

$$t>0\ ;\quad t<\frac{40}{3}\quad \text{et}\quad t>2\ .$$

On devra donc prendre pour t des valeurs entières et positives depuis 2 jusqu'à 13 inclusivement, ce qui donnera 12 solutions possibles :

Savoir	$t=$ 2 ;	$x=$ 4 ;	$y=$ 34 ;	$z=$ 0 ;
	3	6	31	1 ;
	4	8	28	2 ;
	5	10	25	3 ;
	6	12	22	4 ;
	7	14	19	5 ;
	8	16	16	6 ;
	9	18	13	7 ;
	10	20	10	8 ;
	11	22	7	9 ;
	12	24	4	10 ;
	13	26	1	11 .

157. Soit maintenant à résoudre en nombres entiers une équation unique, du premier degré à trois indéterminées

$$ax+by+cz=d\ ,$$

dans laquelle a, b, c sont des nombres entiers qui n'ont point de facteur commun.

Il y a deux cas à distinguer : ou, parmi les trois coefficients a, b, c, on en pourra trouver au moins deux qui soient premiers entre eux; ou bien ces coefficients, pris deux à deux comme on voudra, offriront toujours un facteur commun (ce qui ne veut pas dire qu'il y ait un facteur commun à la fois aux trois coefficients).

I. Examinons d'abord le premier cas; et, pour fixer les idées, supposons que a et b soient premiers entre eux.

Faisons passer le terme en z dans le second membre, et appliquons à l'équation

$$ax+by=d-cz$$

la méthode du n° **148**, en y considérant z comme connu; nous en tirerons, pour x et y des valeurs de la forme

$$x=\alpha-bt \quad \text{et} \quad y=\beta+at,$$

dans lesquelles α et β seront des polynomes entiers et du premier degré par rapport à z. On pourra dès lors prendre arbitrairement z et t; et, pourvu qu'on leur attribue des valeurs entières, il en résultera des valeurs entières pour x et y.

Si ces valeurs doivent, en outre, être positives, on donnera à z une valeur arbitraire entière et positive; on posera alors

$$\alpha-bt>0 \quad \text{et} \quad \beta+at>0.$$

Il en résultera pour t deux limites; et suivant que ces limites seront de même sens ou de sens contraire, compatibles ou incompatibles, il en résultera un nombre illimité de valeurs entières et positives pour x et y, ou un nombre limité de ces valeurs, ou bien il n'en existera aucune. On opérera de même pour chaque valeur entière et positive qu'on attribuera à z.

Soit, par exemple, l'équation unique

$$5x+8y-12z=41.$$

Comme 5 et 8 sont premiers entre eux, on peut appliquer la méthode; on écrira donc

$$5x+8y=41+12z,$$

d'où $\quad x=\dfrac{41+12z-8y}{5}=8+2z-2y+\dfrac{1+2z+2y}{5},$

ou $\quad x=8+2z-2y+t,$

en posant $\quad \dfrac{1+2z+2y}{5}=t \quad$ ou $\quad 2y-5t=-1-2z.$

Puis $\quad y=\dfrac{-1-2z+5t}{2}=-z+2t+\dfrac{t-1}{2}=-z+2t+t',$

en posant $\quad \dfrac{t-1}{2}=t' \quad$ ou $\quad t=1+2t'.$

Cette valeur, mise dans celle de y, donne

$$y=-z+2+4t'+t' \quad \text{ou} \quad y=-z+2+5t'.$$

Et en substituant pour y et t leurs valeurs dans celle de x, on obtient

$$x = 8 + 2z + 2z - 4 - 10t' + 1 + 2t' = 5 + 4z - 8t' .$$

Si l'on ne veut que des valeurs positives, on tirera de ces valeurs les conditions

$$t' > \frac{z-2}{5} \quad \text{et} \quad t' < \frac{4z+5}{8} .$$

Pour $z=0$, on a $t' > -\frac{2}{5}$ et $t' < \frac{5}{8}$; on ne pourra donc prendre que $t'=0$; ce qui donnera $y=2$ et $x=5$.

Pour $z=1$, on a $t' > -\frac{1}{5}$ et $t' < \frac{9}{8}$; on pourra donc admettre les valeurs $t'=0$ et $t'=1$, qui donneront, savoir :

$$t'=0 \ldots\ldots y=1 , \quad x=9 ;$$
$$t'=1 \ldots\ldots y=6 , \quad x=1 .$$

Pour $z=2$, on a $t' > 0$ et $t' < \frac{13}{8}$; on pourra donc admettre les valeurs $t'=0$ (car la condition $t' > 0$ n'exclut pas l'égalité) et $t'=1$.

Pour $t'=0$, on aura $y=0$, $x=13$.
Pour $t'=1$, $y=5$, $x=5$.

Pour $z=3$, on a $t' > \frac{1}{5}$ et $t' < \frac{17}{8}$; on pourra donc admettre les valeurs $t'=1$ et $t'=2$, qui donneront, savoir :

pour $t'=1 \ldots\ldots\ldots\ldots y=4$, $x=9$;
pour $t'=2 \ldots\ldots\ldots\ldots y=9$, $x=1$.

En continuant ainsi, on obtiendrait autant de systèmes de valeurs entières et positives qu'on le voudrait.

158. II. Supposons maintenant que, parmi les coefficients a, b, c, on ne puisse pas en trouver deux qui soient premiers entre eux. Désignons par m le plus grand commun diviseur entre a et b, par exemple ; soient a' et b' les quotients respectifs de a et b par m. L'équation proposée deviendra

$$ma'x + mb'y + cz = d ,$$

d'où l'on tire
$$a'x + b'y = \frac{d-cz}{m} .$$

Le premier membre étant supposé entier, il faut que le second le soit ; en désignant ce nombre entier par t, on aura donc

$$a'x + b'y = t \qquad [1],$$

et
$$\frac{d-cz}{m} = t \quad \text{ou} \quad cz + mt = d \qquad [2].$$

Or, a' et b' étant premiers entre eux, puisque ce sont les quotients de a et de b par leur plus grand commun diviseur, l'équation [1] admettra des solutions entières de la forme

$$x=\alpha-b't' \quad \text{et} \quad y=\beta+a't' \qquad [3],$$

dans lesquelles α et β seront des polynomes entiers et du premier degré par rapport à t ; cela résulte du mécanisme même de la méthode exposée au nº **148**.

De même, c et m étant premiers entre eux, puisque le facteur m, commun à a et à b, ne l'est pas à c, l'équation [2] admettra des solutions entières de la forme

$$z=\gamma-mt'' \quad \text{et} \quad t=\delta+ct'' \qquad [4];$$

mettant cette valeur de t dans les expressions de x et de y, ces indéterminées se trouveront exprimées par des polynomes entiers et du premier degré en t'' et t' ; tandis que z ne dépendra que de t''.

Si la question exige que les valeurs de x, y et z soient en outre positives, on posera les conditions qui expriment que ces valeurs sont plus grandes que *zéro*. On cherchera ensuite en opérant sur ces inégalités des transformations permises (86) à isoler t' et t'', et à obtenir ainsi des limites pour ces indéterminées ; mais l'on ne peut se flatter *a priori* d'y réussir.

Soit, pour exemple, l'équation

$$6x-10y+15z=37.$$

Les deux premiers coefficients ayant le facteur commun 2, nous pourrons la mettre sous la forme

$$3x-5y=\frac{37-15z}{2},$$

et poser en conséquence

$$3x-5y=t \quad \text{et} \quad \frac{37-15z}{2}=t \quad \text{ou} \quad 15z+2t=37.$$

On tire de la première : $y=t-3t'$ et $x=2t-5t'$.
De la seconde on tire de même : $z=1-2t''$ et $t=11+15t''$.
Mettant cette valeur de t dans les expressions de y et de x, elles deviennent

$$y=11+15t''-3t' \quad \text{et} \quad x=22+30t''-5t'.$$

Il suffira de donner à t' et à t'' des valeurs entières quelconques pour obtenir autant de systèmes de valeurs entières pour x, y et z.

Si l'on veut en outre que ces valeurs soient positives, on posera les conditions

$$1-2t''>0\;; \quad 11+15t''-3t'>0 \quad \text{et} \quad 22+30t''-5t'>0$$

La première donne $t'' < \frac{1}{2}$. Les deux autres peuvent s'écrire

$$3t' - 15t'' < 11 \quad \text{et} \quad 5t' - 30t'' < 22$$

ou, en multipliant les deux termes de la première des deux par 2,

$$[m] \qquad 6t' - 30t'' < 22 \quad \text{et} \quad 5t' - 30t'' < 22 \qquad [n].$$

Or, de $2t'' < 1$ on tire $30t'' < 15$. Ajoutant cette inégalité membre à membre avec chacune des deux précédentes, on en tire

$$6t' < 37 \quad \text{et} \quad 5t' < 37$$

conditions, dont la première comprend la seconde.

On ne devra donc prendre pour t' que les valeurs $+6$, $+5$, etc. jusqu'à l'infini négatif.

On tire des inégalités en t' et t'',

$$t'' > \frac{6t' - 22}{30} \quad \text{et} \quad t'' > \frac{5t' - 22}{30}.$$

Pour les valeurs positives de t', c'est la première de ces deux limites de t'' qu'il suffira de considérer; pour les valeurs négatives de t', ce sera la seconde; et l'on ne devra prendre pour t'' que les valeurs comprises entre 0 et cette limite. On trouve ainsi :

Pour $t' = 6$; 5 ; 4 ; qu'il n'y a point de valeur correspondante de t''.

Pour :

$t' = 3$;	on trouve $t'' = 0$;	d'où $x = 7$;	$y = 2$;	$z = 1$.
$t' = 2$;	0 ;	12 ;	5 ;	1 .
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
$t' = -2$;	$t'' = 0$;	$x = 32$;	$y = 17$;	$z = 1$.
	-1 ;	2 ;	2 ;	3 .
$t' = -3$;	0 ;	37 ;	20 ;	1 .
	-1 ;	7 ;	5 ;	3 .
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
$t' = -8$;	$t'' = 0$;	$x = 62$;	$y = 35$;	$z = 1$.
	-1 ;	32 ;	20 ;	3 .
	-2 ;	2 ;	5 ;	5 ;

et ainsi de suite.

159. Comme exemple de question qui conduit à une seule équation entre trois indéterminées, nous traiterons la suivante :

Faire une longueur d'un mètre en mettant à la suite l'une de l'autre des pièces de 5 *fr. dont le diamètre est de* 37 *millimètres ; des pièces de* 2 *fr. dont le diamètre est de* 27 *millimètres, et des pièces de* 1 *fr. dont le diamètre est de* 23 *millimètres.*

Si x, y, z représentent respectivement le nombre des pièces de 5 fr., de 2 fr. et de 1 fr., on devra avoir

$$37x + 27y + 23z = 1000\ .$$

On peut appliquer ici la méthode du n° **157**, et écrire

$$27y + 23z = 1000 - 37x\ ,$$

d'où l'on tire (**148**)

$$y = -3 + 8x - 23t \quad \text{et} \quad z = 47 - 11x + 27t\ .$$

Comme ces valeurs doivent être positives, on devra avoir

$$x > 0\ , \quad 8x - 23t - 3 > 0\ ; \quad 47 - 11x + 27t > 0\ ,$$

on éliminera t par réduction entre les deux dernières inégalités qui sont de même sens, et il viendra

$$-37x + 1000 > 0 \quad \text{d'où} \quad x < \frac{1000}{37}\ ,$$

condition qu'on aurait pu écrire sur-le-champ, puisqu'elle exprime que la somme des diamètres des pièces de 5 fr. ne doit pas surpasser 1000 millimètres ou 1 mètre, c'est-à-dire la longueur demandée.

L'indéterminée x aura donc pour limites 0 et 27 inclusivement. Des deux inégalités en x et t, on tire ensuite

$$t < \frac{8x-3}{23} \quad \text{et} \quad t > \frac{11x-47}{27}\ ;$$

chacune des valeurs attribuées à x, de 0 à 27, devra être mise dans ces inégalités ; il en résultera deux limites entre lesquelles les valeurs correspontantes de t devront être prises. Si ces limites ne comprenaient point de nombre entier, la valeur correspondante de x devrait être rejetée. On formera ainsi le tableau suivant :

$x=0$,	$t=-1$,	$y=20$,	$z=20$	$x=13$,	$t=4$,	$y=9$,	$z=12$
1	0	5	36	14	4	17	1
1	−1	28	9	15	5	2	17
2	0	13	25	16	5	10	6
3	0	21	14	17	»	»	»
4	+1	6	30	18	6	3	11
4	0	29	3	19	6	11	0
5	1	14	19	20	»	»	»
6	1	22	8	21	7	4	5
7	2	7	24	22	»	»	»
8	2	15	13	23	»	»	»
9	3	0	29	24	»	»	»
9	2	23	2	25	»	»	»
10	3	8	18	26	»	»	»
11	3	16	7	27	»	»	»
12	4	1	23	En tout 23 solutions.			

160. Ce qui précède indique suffisamment la marche qu'il faudrait suivre si l'on avait plus de trois indéterminées.

I. Si l'on avait, par exemple, trois équations à quatre indéterminées x, y, z et u, on en tirerait par l'élimination de u, deux équations à trois indéterminées x, y, z que l'on traiterait comme il a été dit plus haut (**155** et suiv.) Ayant obtenu les valeurs de x, y et z au moyen d'une indéterminée t, on porterait ces valeurs dans l'une des trois équations proposées, qui ne contiendrait plus alors que deux indéterminées t et u; on traiterait cette équation à deux indéterminées, et l'on en tirerait les valeurs de t et de u au moyen d'une nouvelle indéterminée t'. Portant alors la valeur de t en t' dans les expressions de x, y, z, on aurait les quatre indéterminées x, y, z et u exprimées au moyen d'une seule indéterminée t'.

II. Si l'on n'a que deux équations à quatre indéterminées x, y, z et u, on en tirera par l'élimination de u une équation à trois indéterminées, que l'on traitera comme il a été dit aux n^{os} **157** et suiv. Il y aura alors, comme on l'a vu, deux cas à distinguer.

Si l'on obtient les valeurs de x, y au moyen d'une seule indéterminée t, z restant arbitraire, on portera ces valeurs dans l'une des équations proposées qui ne contiendra plus que u, z et t. On la traitera comme la précédente, et l'on obtiendra soit u et z au moyen d'une seule indéterminée t', t restant arbitraire, auquel cas x, y, z et u pourront être exprimés au moyen de t et de t'; soit u, z et t au moyen de deux indéterminées t' et t'', auquel cas x, y, z et u pourront être exprimés au moyen de ces deux mêmes indéterminées.

Si, en traitant l'équation primitive résultant de l'élimination de u, on obtient x, y et z au moyen de deux indéterminées t et t', en portant ces valeurs dans l'une des équations proposées, on obtiendra une équation à trois indéterminées u, t et t'. En la traitant à son tour, on obtiendra soit u et t au moyen d'une seule indéterminée t'', t' restant arbitraire, auquel cas x, y, z et u pourront être exprimés au moyen de t' et de t''; soit u, t et t' au moyen de deux indéterminées t'' et t''', auquel cas x, y, z et u pourront être exprimés au moyen de ces deux mêmes indéterminées.

III. Enfin, si l'on n'a qu'une seule équation à quatre indéterminées x, y, z, u, il pourra se présenter deux cas, ou l'on pourra trouver deux coefficients premiers entre eux, ou on ne le pourra pas.

Dans le premier cas, supposons que ce soient les coefficients de x et de y qui soient premiers entre eux. On fera passer dans le second membre les termes en z et en u ; on traitera l'équation résultante comme une équation à deux indéterminées x et y, et l'on obtiendra les valeurs de x et de y au moyen d'une indéterminée t, z et u restant arbitraires.

Dans le second cas, on isolera encore dans le premier membre les termes en x et en y ; on divisera les deux membres par le plus grand commun diviseur des coefficients de x et de y. Le second membre devant être entier, on le représentera par une nouvelle indéterminée t. On obtiendra ainsi deux équations : l'une entre x, y et t, où l'on regardera t comme connu; l'autre en z, u et t. La première donnera x et y au moyen de t et d'une nouvelle indéterminée t'. La seconde donnera z, u et t au moyen de deux nouvelles indéterminées t'' et t'''. Portant la valeur de t dans celles de x et de y, on obtiendra ces dernières au moyen de trois indéterminées t', t'' et t''' ; tandis que z et u seront exprimés au moyen des deux indéterminées t'' et t''' seulement.

161. Le lecteur pourra s'exercer sur les problèmes qui suivent.

I. *Trouver un nombre qui, divisé par les nombres* 5, 8, 13, *donne respectivement pour restes* 4, 7, 12.

(Réponse : 619, 1039, 1559, etc., nombres en progression arithmétique.)

II. *Trouver un nombre composé de trois chiffres, dont la somme soit* 16, *et tel qu'en y ajoutant* 99 *on obtienne le nombre retourné.*

(Réponse : 394, 475, 556, 637 et 718.)

III. *On a trois espèces d'argent : la première au titre* 0,96 ; *la seconde au titre* 0,88 ; *la troisième au titre* 0,82. *Combien faudrait-il prendre, en nombres entiers, de décagrammes de chaque espèce d'argent, pour faire* 1 *kilogramme d'alliage, au titre* 0,90.

(Réponse :

1re espèce d'argent;	2e espèce;	3e espèce.
25Dg	75Dg	0Dg
28	68	4
31	61	8
34	54	12
37	47	16
40	40	20
43	33	24
46	26	28
49	19	32
52	12	36
55	5	40.)

IV. *Un propriétaire a fait travailler dans quatre fermes différentes, savoir : 12 hommes dans la première, 9 dans la seconde, 8 dans la troisième et 6 dans la quatrième. La dépense totale a été de 1350 francs . On voudrait savoir quelle a pu être la dépense par homme dans chacune des quatre fermes (en nombres entiers de francs). On se rappelle seulement que la dépense dans la seconde et la troisième ferme valait autant que la dépense dans la première; et que chaque homme employé dans celle-ci a gagné deux fois plus que chacun de ceux qui ont été employés dans la quatrième.*

(Réponse :	1re ferme;	2e ferme;	3e ferme;	4e ferme.
	50fr	0fr	75fr	25fr
	id.	8	66	*id.*
	id.	16	57	*id.*
	id.	24	48	*id.*
	id.	32	39	*id.*
	id.	40	30	*id.*
	id.	48	21	*id.*
	id.	56	12	*id.*
	id.	64	3	*id.*

SECONDE PARTIE.

PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ, PUISSANCES ET RACINES, LOGARITHMES.

CHAPITRE VI.

DE LA FORMATION DU CARRÉ DES QUANTITÉS ALGÉBRIQUES, ET DE L'EXTRACTION DE LEUR RACINE CARRÉE.

§ I. De la formation du carré des quantités algébriques.

162. Le *carré* d'une quantité algébrique est le produit de cette quantité par elle-même.

Pour former le carré d'un monome, il faut, d'après les règles de la multiplication des monomes, multiplier le coefficient par lui-même, et ajouter à lui-même l'exposant de chaque lettre; il faut donc, en d'autres termes, *faire le carré du coefficient et doubler tous les exposants.*

Ainsi, le carré de $5a^2b^3x$ sera $25a^4b^6x^2$.

163. On a vu (36) que *le carré d'un binome se compose du carré du premier terme, de deux fois le produit du premier par le second et du carré du second.*

Voyons comment se compose le carré d'un trinome.

Soit le trinome $a+b+c$. Représentons par une seule lettre x l'ensemble des deux premiers termes; nous aurons à former le carré de $x+c$, ce qui, d'après la règle rappelée ci-dessus, donnera

$$x^2+2cx+c^2,$$

ou, en remettant pour x sa valeur,

$$(a+b)^2+2c(a+b)+c^2,$$

ou encore $$a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2;$$

c'est-à-dire que *le carré d'un trinome se compose du carré du pre-*

mier terme, plus deux fois le produit du premier terme par le second, plus le carré du second, plus deux fois le produit de chacun des deux premiers par le troisième, plus le carré du troisième.

164. On trouverait de même que, s'il y avait un quatrième terme, le carré contiendrait, outre les parties qu'on vient d'énumérer, *deux fois le produit de chacun des trois premiers termes par le quatrième, plus le carré du quatrième.*

La loi de formation est évidente, et il est facile d'en démontrer la généralité.

En effet, supposons-la démontrée pour un polynome de $n-1$ termes $a+b+c....+k$, et faisons voir qu'elle subsistera pour un polynome de n termes

$$a+b+c....+k+l\ .$$

Pour cela, représentons par x l'ensemble des $n-1$ premiers termes ; nous aurons à former le carré de $x+l$, ce qui donnera

$$x^2+2lx+l^2$$

ou, en mettant pour x sa valeur,

$$(a+b+c....+k)^2+2(a+b+c....+k)l+l^2$$

ou $$(a+b+c....+k)^2+2al+2bl+2cl....+2kl+l^2\ ;$$

c'est-à-dire qu'il faudra ajouter au carré du polynome de $n-1$ termes *deux fois le produit de chacun de ces* n — 1 *premiers termes par le* n^ième^ *, plus le carré du* n^ième^ ; ce qui démontre que si la loi est vraie pour $n-1$ termes, elle est encore vraie pour n termes.

Or, on l'a démontrée directement pour 3 termes ; donc elle est vraie pour 4 ; étant vraie pour 4 termes, elle l'est pour 5 ; et ainsi de suite. Donc elle est générale.

D'après cette règle, on trouvera que le carré du polynome

$$2ax^3+4a^2x^2-4a^3x+3a^4$$

est $$4a^2x^6+16a^3x^5-20a^5x^3+40a^6x^2-24a^7x+9a^8\ .$$

165. Remarque I. Lorsqu'on ordonne le polynome par rapport aux puissances d'une même lettre, il y a toujours à son carré quatre termes qui ne peuvent se réduire avec aucun autre. Ces termes sont les deux premiers et les deux derniers, si le carré est lui-même ordonné.

En effet, si, par exemple, $a+b+c....+k+l$ représente un polynome quelconque, dont les termes a, b, etc., sont des monomes quelconques ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une certaine lettre x, le terme a contenant la lettre ordonnatrice avec un plus haut exposant que tous les autres, son carré a^2, qui sera le premier terme du carré total, contiendra aussi la lettre ordonnatrice avec un exposant plus élevé qu'aucun des termes $2ab$, b^2, $2ac$, etc. qui suivent, et ne pourra conséquemment se réduire avec aucun autre. C'est ce que nous avons déjà vu dans la théorie de la multiplication (38).

En second lieu, le terme $2ab$ se compose du produit des deux termes qui, dans le polynome proposé, contiennent la lettre ordonnatrice avec les exposants les plus élevés ; il contiendra donc lui-même cette lettre avec un exposant plus élevé que les termes b^2, $2ac$, $2bc$, etc. qui le suivent, et ne pourra conséquemment se réduire avec aucun autre.

Ce que nous avons dit des deux premiers termes, a^2 et $2ab$, en considérant les plus hauts exposants de la lettre ordonnatrice, nous pourrions le dire des deux derniers, l^2 et $2kl$, en considérant les plus faibles exposants de cette lettre.

Il y aura donc bien quatre termes qui ne se réduiront pas ; et ces termes seront les deux premiers et les deux derniers, si le polynome est ordonné.

Il faut bien remarquer qu'on ne pourrait rien affirmer de semblable pour les autres termes ; car le terme b^2, par exemple, pourrait fort bien se réduire, et se réduira ordinairement, en effet, avec le terme $2ac$, dont les deux facteurs contiennent la lettre ordonnatrice, l'un avec un exposant plus élevé que dans b, et l'autre avec un exposant plus faible.

Remarque II. Ce que nous venons de dire des termes isolés, on pourrait le dire des *groupes* de termes, s'il arrivait que le polynome proposé contînt plusieurs termes affectés de la même puissance de la lettre ordonnatrice (39).

166. Pour former le carré d'une fraction algébrique, il faut, d'après les règles de la multiplication des fractions (56), faire le carré de son numérateur et le carré de son dénominateur.

Ainsi le carré de $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^2}{b^2}$,

le carré de $\frac{2a-3b}{5ab}$ est $\frac{4a^2-12ab+9b^2}{25a^2b^2}$,

et ainsi de suite.

§ II. De l'extraction de la racine carrée des quantités algébriques.

167. La *racine carrée* d'une quantité algébrique est une seconde quantité qui, multipliée par elle-même, reproduit la première.

Mais cette racine se distingue de la racine carrée considérée en arithmétique par une différence essentielle. La racine *arithmétique* d'une quantité numérique est essentiellement positive; la racine *algébrique* d'une quantité, soit numérique, soit algébrique, peut être prise indifféremment avec deux signes contraires. En effet, soit à extraire la racine carrée de 49; au point de vue arithmétique, la racine est $+7$; mais, au point de vue algébrique, cette racine est aussi bien -7 que $+7$; car -7, multiplié par lui-même, donne, d'après les règles des signes (**114**), $+49$, aussi bien que $+7$ multiplié par lui-même. De même $+a^2$ étant aussi bien le carré de $-a$ que le carré de $+a$, la racine de $+a^2$ est donc, à volonté, $+a$ ou $-a$.

On indique cette double solution en affectant la racine du double signe $\pm$, et l'on écrit

$$\sqrt{a^2}=\pm a\ ; \quad \sqrt{49}=\pm 7\ .$$

Nous pouvons toutefois, quant à présent, faire abstraction de ce double signe; sauf à nous rappeler, lorsque nous aurons extrait la racine d'une quantité algébrique, que cette racine peut être prise indifféremment telle que nous l'aurons trouvée ou en signes contraires.

168. D'après la règle donnée (**162**) pour former le carré d'un monome, on peut voir que, pour qu'un monome soit un carré parfait, il faut: 1° que son coefficient soit un carré parfait; 2° que les exposants de toutes les lettres qui y entrent soient pairs.

Si ces deux conditions sont remplies, on obtiendra la racine carrée du monome proposé en extrayant la racine de son coefficient, et en divisant par 2 les exposants de toutes les lettres. Ainsi la racine de $49a^4b^6x^2$ est $7a^2b^3x$, abstraction faite du double signe $\pm$.

Si ces conditions ne sont pas remplies, on se contente d'indiquer la racine. Soit, par exemple, le monome $24a^3b^4x$; sa racine sera indiquée par $\sqrt{24a^3b^4x}$. Nous verrons plus loin comment on peut simplifier les expressions de ce genre.

169. Soit maintenant à extraire la racine carrée d'un polynome. Remarquons d'abord qu'un binome ne saurait être un carré parfait, car le carré d'un monome est un binome (**162**) et le carré d'un binome est un trinome (36). Il faut donc que le polynome proposé ait au moins trois termes.

Cela posé, désignons le polynome proposé par

$$A + B + C + D + E + \text{etc.}...$$

les lettres A, B, C, etc., représentant, pour abréger, des monomes quelconques, que nous supposerons ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre, x par exemple.

Supposons que le polynome proposé soit un carré parfait, et représentons sa racine par

$$a + b + c + d + \text{etc.}...$$

polynome que nous supposerons également ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x.

D'après les remarques faites au n° **165**, le carré du terme a n'a pu se réduire avec aucun autre terme du carré, et se trouve être le premier terme A du polynome proposé. En extrayant donc la racine de ce premier terme, on aura le premier terme a de la racine demandée.

Ayant trouvé ce premier terme de la racine, on en fera le carré que l'on retranchera du polynome proposé, et il restera

$$B + C + D + E + \text{etc.} \qquad [1].$$

Or, d'après les mêmes remarques, le premier terme B de ce reste doit être exactement le produit du double du premier terme de la racine par le second, produit qui n'a pu se réduire avec aucun autre. En divisant donc ce premier terme B par le double $2a$ du premier terme de la racine, on obtiendra pour quotient le second terme b.

Ayant trouvé ce second terme de la racine, on sait que le polynome proposé doit contenir le carré de la somme des deux premiers termes, $a + b$, de la racine (**164**), c'est-à-dire les trois termes $a^2 + 2ab + b^2$; on pourrait former ces trois termes et les retrancher du polynome proposé; mais comme on en a déjà retranché a^2, il suffit de former les deux suivants et de les retrancher du reste [1]. Pour cela, on écrira à la suite du double du premier terme de la racine le second terme de cette même racine, ce qui donnera $2a + b$, et l'on multipliera la somme par b, ce qui donnera $2ab + b^2$; on retranchera ce produit du reste [1], et on obtiendra un second reste

$$C' + D' + E' + F' + \text{etc.} \qquad [2].$$

D'après la loi de formation du carré d'un polynome (**164**), ce reste doit contenir encore les doubles produits de chacun des deux premiers termes de la racine par le troisième, plus le carré du troisième, etc.; c'est-à-dire les termes

$$2ac + 2bc + c^2 + \text{etc.}$$

Or, parmi ces termes, le premier $2ac$ est celui qui contient la lettre ordonnatrice x avec le plus haut exposant, car a est plus élevé en x que b ; ce terme n'a donc pu se réduire avec aucun de ceux qui le suivent, et doit, par conséquent se trouver le premier dans le reste [2]. En divisant donc le premier terme C' de ce second reste par le double $2a$ du premier terme de la racine, on obtiendra pour quotient le troisième terme c .

Ayant trouvé ce troisième terme, on sait que le polynome proposé doit contenir le carré de la somme des trois premiers termes de sa racine, lequel carré revient à $(a+b)^2 + 2ac + 2bc + c^2$. On pourrait former ce carré et le retrancher du polynome proposé; mais comme on en a déjà retranché $(a+b)^2$, il suffit de former les termes suivants et de les retrancher du reste [2]. Pour cela, on doublera les deux premiers termes de la racine, et l'on écrira à la suite le troisième, ce qui donnera $2a + 2b + c$; on multipliera par c , ce qui donnera $2ac + 2bc + c^2$; on retranchera ce produit du reste [2], et l'on obtiendra un troisième reste

$$D'' + E'' + F'' + \text{etc.} \qquad [3].$$

D'après la loi de formation du carré d'un polynome, ce reste doit contenir encore les doubles produits de chacun des trois premiers termes de la racine par le quatrième, plus le carré du quatrième, etc., c'est-à-dire

$$2ad + 2bd + 2cd + d^2 + \text{etc.}$$

Or, parmi ces termes, le premier $2ad$ est celui qui contient la lettre ordonnatrice x avec le plus haut exposant; ce terme n'a donc pu se réduire avec aucun de ceux qui suivent, et doit par conséquent se trouver le premier dans le reste [3]. En divisant donc le premier terme D'' de ce troisième reste par le double $2a$ du premier terme de la racine, on obtiendra le quatrième terme d .

Ayant trouvé ce quatrième terme, on sait que le polynome proposé doit contenir le carré de la somme des quatre premiers termes de sa racine, lequel carré revient à

$$(a+b+c)^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2 .$$

On pourrait former ce carré et le retrancher du polynome proposé; mais comme on en a déjà retranché $(a+b+c)^2$, il suffit de former les termes suivants et de les retrancher du reste [3]. Pour cela, on doublera les trois premiers termes de la racine, et l'on écrira à la suite le quatrième, ce qui donnera $2a + 2b + 2c + d$;

on multipliera par d, ce qui donnera $2ad+2bd+2cd+d^2$; on retranchera ce produit du reste [3], et l'on obtiendra un quatrième reste sur lequel on opérera comme sur le précédent.

En continuant ainsi, on obtiendra successivement tous les termes de la racine; et l'on reconnaîtra que l'opération est terminée lorsqu'on parviendra à un reste nul.

170. Dans la pratique, on dispose l'opération comme ci-dessous :

$$
\begin{array}{ll|l}
 & 4a^2x^6+16a^3x^5-20a^5x^3+40a^6x^2-24a^7x+9a^8 & 2ax^3+4a^2x^2-4a^3x+3a \\
\cline{3-3}
 & -4a^2x^6 & +4ax^3 \\
\cline{2-3}
[1] & +16a^3x^5-20a^5x^3+40a^6x^2-24a^7x+9a^8 & +4ax^3+4a^2x^2 \\
 & -16a^3x^5-16a^4x^4 & \qquad\qquad +4a^2x^2 \\
\cline{2-3}
[2] & -16a^4x^4-20a^5x^3+40a^6x^2-24a^7x+9a^8 & +16a^3x^5+16a^4x^4 \\
\cline{3-3}
 & +16a^4x^4+32a^5x^3-16a^6x^2 & +4ax^3+8a^2x^2-4a^3x \\
\cline{2-2}
[3] & +12a^5x^3+24a^6x^2-24a^7x+9a^8 & \qquad\qquad\qquad -4a^3x \\
\cline{3-3}
 & -12a^5x^3-24a^6x^2+24a^7x-9a^8 & -16a^4x^4-32a^5x^3+16a^6x^2 \\
\cline{2-3}
 & 0 & +4ax^3+8a^2x^2-8a^3x+3a \\
 & & \qquad\qquad\qquad\qquad +3a \\
\cline{3-3}
 & & +12a^5x^3+24a^6x^2-24a^7x+9a
\end{array}
$$

et l'on déduit de ce qui précède la règle suivante, dont on peut vérifier l'application sur l'exemple qu'on vient de traiter.

Pour extraire la racine carrée d'un polynome, on l'ordonne par rapport aux puissances d'une certaine lettre; on tire à sa droite un trait vertical pour le séparer de la racine à obtenir, et l'on tire un trait horizontal au-dessous de l'espace réservé à cette racine. On extrait la racine du premier terme du polynome, et on l'écrit comme premier terme à la racine. On fait le carré de ce premier terme, on le retranche du polynome proposé, et l'on obtient un premier reste [1]. *On écrit au-dessous de la racine le double de son premier terme; on divise le premier terme du reste* [1] *par ce double du premier terme de la racine; le quotient est le second terme de la racine. On écrit le double du premier terme de la racine; à sa droite on écrit le second terme, et l'on multiplie la somme par ce second terme; on retranche le produit du reste* [1], *et l'on obtient un second reste* [2]. *On divise le premier terme de ce second reste* [2] *par le double du premier terme de la racine; le quotient est le troisième terme de la racine. On écrit le double des deux premiers termes de la racine; à la droite de ce double, on écrit le troisième terme de la racine; on multiplie la somme par ce troisième terme; on retranche le produit du reste* [2], *et l'on obtient un troisième reste* [3]. *On divise le premier* *terme de ce troisième reste par le double du premier terme de la racine, et l'on obtient le quatrième terme de la racine; et ainsi de suite. L'opération est terminée quand on obtient pour reste* ZÉRO.

171. L'opération serait impossible :

1° Si le plus haut ou le plus faible exposant d'une lettre quelconque dans le polynome proposé était impair. Car, en ordonnant par rapport à cette lettre, il faut que le premier et le dernier termes soient des carrés parfaits, ce qui exige que les exposants de ces termes soient pairs;

2° Si, après avoir ordonné par rapport aux puissances d'une lettre quelconque, le premier et le dernier termes n'étaient pas des carrés parfaits;

3° Si le second terme n'était pas exactement divisible par le double de la racine carrée du premier, ou si l'avant-dernier terme n'était pas exactement divisible par le double de la racine carrée du dernier;

4° Si, dans le cours de l'opération, on parvenait à un reste dont le premier terme ne fût pas exactement divisible par le double du premier terme de la racine obtenue.

172. Lorsqu'un polynome n'est pas un carré parfait, on peut encore appliquer arbitrairement la règle du n° **170** jusqu'à ce qu'on parvienne à un cas d'impossibilité, au quatrième par exemple. Il résulte alors des calculs effectués que le polynome proposé est identiquement égal au carré de l'ensemble des termes trouvés à la racine, plus le reste auquel on est parvenu. L'opération n'a d'autre résultat, dans ce cas, que de décomposer le polynome proposé en deux parties dont l'une soit un carré parfait. Tel est, en effet, le seul but qu'on puisse alors se proposer.

Si, par exemple, on applique la règle du n° **170** au polynome

$$9a^2x^4 - 24a^3x^3 + 46a^4x^2 - 20a^5x + 13a^6$$

qui n'est point un carré parfait, puisque son dernier terme $13a^6$ n'est pas un carré, après avoir obtenu à la racine ces trois termes

$$3ax^2 - 4a^2x + 5a^3,$$

on trouve pour reste $20a^5x - 12a^6$.

Il en résulte que le polynome proposé peut se mettre sous la forme

$$(3ax^2 - 4a^2x + 5a^3)^2 + 20a^5x - 12a^6.$$

C'est le seul résultat qu'on puisse tirer des calculs effectués; mais ce résultat peut avoir son utilité dans certaines circonstances.

173. Remarque. Nous avons supposé qu'en extrayant la racine carrée du premier terme du polynome proposé on prenait cette racine avec le signe $+$; mais, d'après ce qui a été dit au nº **167**, on pourrait aussi la prendre avec le signe $-$. Il est aisé de voir, en récapitulant les calculs à effectuer, que l'on obtiendrait alors la même suite de termes à la racine, mais que ces termes auraient tous un signe contraire à celui qu'ils auraient eu si l'on eût pris le premier terme avec le signe $+$. En sorte qu'on obtiendrait la même racine totale, changée de signe, ce qui est en effet une solution du problème.

174. Pour extraire la racine carrée d'une fraction algébrique, il faut extraire la racine de chacun de ses termes; cela résulte de la loi de formation du carré d'une fraction (**166**). Ainsi la racine carrée de la fraction

$$\frac{25a^2-60ax+36x^2}{144a^2} \quad \text{est} \quad \pm\frac{5a-6x}{12a}\ .$$

Si l'un des deux termes n'est pas un carré parfait, on se contente d'indiquer la racine : ainsi la racine de

$$\frac{13ab}{9x^2} \quad \text{s'écrira} \quad \frac{\sqrt{13ab}}{3x}\ .$$

Nous nous occuperons bientôt du calcul des quantités affectées de radicaux du second degré.

CHAPITRE VII.

DES ÉQUATIONS ET DES PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

§ I. De la résolution des équations du second degré à une seule inconnue.

175. Une équation à une seule inconnue est du *second degré* quand, après avoir fait disparaître les dénominateurs et effectué les calculs, elle contient un ou plusieurs termes où l'inconnue entre à la seconde puissance.

Soit d'abord l'équation très-simple

$$x^2 = 25 ,$$

qui ne renferme qu'un terme en x^2 et un terme indépendant de x.

Lorsque deux quantités algébriques sont égales, on ne peut pas affirmer que leurs racines carrées soient égales, car ces racines peuvent différer par le signe (**167**); mais si l'on prend la racine de l'une avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, on peut être assuré d'avoir en même temps une racine de l'autre. On peut donc, en extrayant la racine des deux membres de l'équation ci-dessus, écrire généralement

$$\pm x = \pm 5 .$$

Cette équation offre quatre combinaisons de signes :

$$+x = +5 ,$$
$$+x = -5 ,$$
$$-x = +5 ,$$
$$-x = -5 .$$

Mais les deux dernières reproduisent les deux premières quand on y change à la fois tous les signes, ce qui est permis. On aura donc toutes les combinaisons distinctes en écrivant simplement

$$x = \pm 5 .$$

Si l'on avait l'équation $x^2 = \mathrm{A}$,

on en tirerait de même $x = \pm\sqrt{\mathrm{A}}$.

176. Soit maintenant l'équation

$$14x - x^2 = 40 \qquad [1],$$

ou

$$x^2 - 14x = -40 \qquad [2],$$

qui renferme un terme en x^2, un terme en x et un terme indépendant de x. Si l'on pouvait convertir le premier membre en un carré parfait, en extrayant ensuite la racine carrée des deux membres l'équation se trouverait ramenée au premier degré; car la racine d'un polynome du second degré en x doit être du premier degré par rapport à cette lettre.

Or, on remarque que $x^2 - 14x$ peut être considéré comme formant les deux premiers termes du carré d'un binome, savoir : x^2, le carré du premier terme de ce binome inconnu, et $-14x$ le double produit du premier terme de ce binome par le second. On aura le premier terme de ce binome inconnu en extrayant la racine de x^2, qui est x; et pour avoir le second, il faudra diviser le double produit $-14x$ des deux termes du binome inconnu par le double $2x$ du premier, ce qui donne -7. Le binome cherché est donc $x-7$, et l'on complétera son carré en ajoutant à x^2-14x le carré du second terme -7, c'est-à-dire 49. Mais, pour ne pas troubler l'égalité, il faudra ajouter aussi 49 au second membre de l'équation [2], ce qui donnera

$$x^2 - 14x + 49 = -40 + 49$$

ou

$$(x-7)^2 = 9 .$$

Extrayant alors la racine de chaque membre, en remarquant que, d'après ce qui a été dit au n° précédent, il suffit de mettre le double signe $\pm$ devant la racine du second membre, on obtient

$$x - 7 = \pm 3 ;$$

ou, en faisant passer le terme -7 dans le second membre,

$$x = 7 \pm 3 .$$

En adoptant le signe supérieur, on trouve

$$x = 7 + 3 = 10 ;$$

et en adoptant le signe inférieur, on trouve

$$x = 7 - 3 = 4 .$$

L'équation peut donc être satisfaite de deux manières, soit en remplaçant x par 10, soit en remplaçant x par 4. C'est ce qu'il est facile de vérifier, car on a dans le premier cas

$$14 \times 10 - 100 = 140 - 100 = 40 ,$$

et dans le second,

$$14 \times 4 - 16 = 56 - 16 = 40 .$$

177. Généralement, après avoir fait disparaître les dénominateurs, une équation du second degré ne pourra contenir que trois espèces de termes, savoir : des termes en x^2, des termes en x, et des termes indépendants de x. Si l'on fait passer tous les termes dans un même membre, qu'on mette x^2 en facteur parmi ceux qui le contiennent, et qu'on en fasse autant pour x, l'équation aura la forme générale

$$ax^2+bx+c=0\ ,$$

dans laquelle a, b, c peuvent être des quantités quelconques numériques ou algébriques, monomes ou polynomes.

Divisant tous les termes par a, il vient

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\ ;$$

ou, en remplaçant $\frac{b}{a}$ par p et $\frac{c}{a}$ par q, pour abréger l'écriture,

$$x^2+px+q=0\ .$$

Telle est l'équation qu'il s'agit de résoudre.

Faisons passer le terme q dans le second membre, et écrivons

$$x^2+px=-q \qquad [1].$$

Le premier membre peut être considéré comme renfermant les deux premiers termes du carré d'un binome, savoir : x^2 carré du premier terme de ce binome inconnu, et px double produit du premier terme de ce binome par le second. On aura le premier terme de ce binome inconnu en extrayant la racine de x^2, qui est x ; et pour avoir le second, il faudra diviser le double produit px des deux termes du binome inconnu, par le double $2x$ du premier, ce qui donne $\frac{p}{2}$. Le binome cherché est donc $x+\frac{p}{2}$; et l'on complétera son carré en ajoutant à x^2+px le carré de $\frac{p}{2}$ ou $\frac{p^2}{4}$. Mais, pour ne pas troubler l'égalité, il faudra aussi ajouter $\frac{p^2}{4}$ au second membre de l'équation [1], ce qui donnera

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=-q+\frac{p^2}{4}\ ,$$

ou

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q\ .$$

Extrayant la racine des deux membres en mettant le double signe $\pm$ devant la racine du second, on obtient

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ ;$$

ou, en faisant passer le terme $\frac{p}{2}$ dans le second membre,

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ .$$

Cette expression de x est une *formule générale* qui peut servir à trouver immédiatement l'inconnue dans une équation du second degré quelconque, sans répéter les raisonnements ci-dessus, et que l'on peut énoncer de la manière suivante :

Dans toute équation du second degré ramenée à la forme

$$x^2+px+q=0\ ,$$

l'inconnue est égale à la moitié du coefficient de la première puissance de x *, plus ou moins la racine carrée du carré de cette moitié, suivi du terme indépendant de* x *, pris avec le signe qu'il a dans le second membre.*

178. I. Si on applique cette règle à l'équation

$$x^2-5x+6=0\ ,$$

on trouvera immédiatement

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6}\ ,$$

ou

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\ ,$$

ce qui donne les deux valeurs

$$x=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3\ ,$$

et

$$x=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2\ ;$$

en sorte que l'équation est satisfaite par les deux valeurs 3 et 2.

II. Soit encore l'équation algébrique

$$x^2-(2a+3b)x+6ab=0\ ,$$

on trouvera, en appliquant la règle,

$$x=\frac{2a+3b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2a+3b}{2}\right)^2-6ab}$$

ou bien

$$x=\frac{2a+3b}{2}\pm\sqrt{\frac{4a^2+12ab+9b^2}{4}-6ab}\ .$$

Réduisant tout au dénominateur 4 sous le radical, et réduisant, il vient

$$x=\frac{2a+3b}{2}\pm\sqrt{\frac{4a^2-12ab+3b^2}{4}}\,.$$

Or la racine peut s'extraire exactement, ce qui donne

$$x=\frac{2a+3b}{2}\pm\frac{2a-3b}{2}\,.$$

De là deux valeurs

$$x=\frac{2a+3b+2a-3b}{2}=2a$$

et
$$x=\frac{2a+3b-2a+3b}{2}=3b\,.$$

179. Il est bon de savoir résoudre l'équation

$$ax^2+bx+c=0$$

sans être obligé de diviser par a.

Or, si, dans les valeurs obtenues plus haut,

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,,$$

on remplace p et q par leurs valeurs, il vient

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\,.$$

Réduisant au même dénominateur sous le radical, on trouve

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\,,$$

ou, en extrayant la racine du dénominateur $4a^2$, et mettant $2a$ en dénominateur commun,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,.$$

On peut arriver à cette expression d'une manière plus simple. Multiplions par $4a$ les deux membres de l'équation proposée, après avoir fait passer le terme c dans le second membre, elle devient

$$4a^2x^2+4abx=-4ac\,.$$

Ajoutons b^2 à chaque membre, nous aurons

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$

ou, en remarquant que le premier membre est un carré parfait,

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac\ .$$

Extrayant la racine, on obtient

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}\ ,$$

d'où

$$2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

et

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ .$$

On peut énoncer cette expression en disant que : *dans toute équation du second degré de la forme* $ax^2+bx+c=0$ *, l'inconnue est égale au coefficient de la première puissance de* x *pris en signe contraire, plus ou moins la racine carrée du carré de ce coefficient, diminué de quatre fois le produit du coefficient de* x^2 *par le terme indépendant de* x *; le tout divisé par le double du coefficient de* x^2 .

Soit pour exemple l'équation

$$3x^2-5x-2=0\ ,$$

on en tirera

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+4\times3\times2}}{6}\ ,$$

ou

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{5\pm7}{6}\ ,$$

ce qui donne les deux valeurs

$$x=\frac{5+7}{6}=2 \quad \text{et} \quad x=\frac{5-7}{6}=-\frac{1}{3}\ .$$

180. Enfin, lorsque le coefficient de la première puissance de x est divisible par 2, il se présente une petite simplification qu'il convient de ne pas négliger.

Soit $b=2\beta$, l'équation générale ci-dessus pourra s'écrire

$$ax^2+2\beta x+c=0\ .$$

Faisant passer le terme c dans le second membre et multipliant par a, il vient

$$a^2x^2+2a\beta x=-ac$$

ou, en ajoutant β^2 à chaque membre,

$$a^2x^2+2a\beta x+\beta^2=\beta^2-ac$$

ou

$$(ax+\beta)^2=\beta^2-ac\ ,$$

d'où, en extrayant la racine,

$$ax+\beta=\pm\sqrt{\beta^2-ac}\ ,$$

et par suite

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-ac}}{a}\ ,$$

c'est-à-dire que : *dans toute équation du second degré ramenée à la forme* $ax^2+2\beta x+c=0$ *, l'inconnue est égale à la moitié du coefficient de la première puissance de l'inconnue, prise en signe contraire, plus ou moins la racine carrée du carré de cette moitié, diminué du produit du coefficient de* x^2 *par le terme indépendant de* x *; le tout divisé par le coefficient de* x^2 .

EXEMPLES. I. Soit l'équation numérique

$$5x^2-6x+1=0\ ;$$

on aura, d'après cette règle,

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-5}}{5}=\frac{3\pm 2}{5}\ ,$$

d'où $$x=1 \quad \text{et} \quad x=\frac{1}{5}\ .$$

II. Soit, en second lieu, l'équation algébrique

$$(a^2-b^2)x^2-2a^2bx+a^2b^2=0\ .$$

On aura $$x=\frac{a^2b\pm\sqrt{a^4b^2-(a^2-b^2)a^2b^2}}{a^2-b^2}\ ,$$

ou $$x=\frac{a^2b\pm\sqrt{a^4b^2-a^4b^2+a^2b^4}}{a^2-b^2}=\frac{a^2b\pm ab^2}{a^2-b^2}\ ,$$

ou encore $$x=\frac{ab(a\pm b)}{(a+b)(a-b)}\ .$$

De là deux valeurs

$$x=\frac{ab(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{ab}{a-b}$$

et $$x=\frac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{ab}{a+b}\ .$$

III. Le lecteur pourra s'exercer sur les exemples suivants :

$$7x^2-32x+15=0\ ,$$

$$x^2-(4a-2b)x+3a^2-8ab-3b^2=0\ ,$$

$$\frac{a}{x-b}+\frac{b}{x-a}=2\ ,$$

$$\frac{3a}{x+b}+\frac{x-2b}{a-b}=4\ .$$

§ II. Problèmes qui conduisent à une équation du second degré à une seule inconnue.

181. Quant à la mise en équation des problèmes, nous n'avons rien à ajouter à ce qui a été dit d'une manière générale au n° **70**. Nous nous bornerons donc à traiter quelques questions choisies.

Problème I. *Un banquier a escompté en dedans un billet de* 2080 *fr. payable dans* 8 *mois, et un billet de* 3150 *fr. payable dans* 10 *mois; l'escompte total a été de* 230 *fr.; on demande quel était le taux de l'escompte.*

Soit x le taux de l'escompte. Puisque 100 fr., au bout d'un an, rapportent x, au bout de 8 mois ils rapporteraient $\frac{8x}{12}$ ou $\frac{2x}{3}$; par conséquent, si un billet payable dans 8 mois énonçait la somme $100^f + \frac{2x}{3}$, l'escompte *en dedans* de ce billet serait $\frac{2x}{3}$. Dans les mêmes conditions, l'escompte de 2080 fr. sera donc donné par le quatrième terme de la proportion

$$100 + \frac{2}{3}x : \frac{2}{3}x :: 2080^f : \text{ce quatrième terme},$$

dont la valeur est conséquemment

$$\frac{2080^f \times \frac{2}{3}x}{100 + \frac{2}{3}x}$$

ou, en multipliant haut et bas par 3,

$$\frac{4160x}{300+2x} \qquad [1].$$

En second lieu, 100 fr. au bout d'un an rapportant x, au bout de 10 mois ils rapporteront $\frac{10x}{12}$ ou $\frac{5x}{6}$; par conséquent, si un billet payable dans 10 mois énonçait la somme $100^f + \frac{5x}{6}$, l'escompte en dedans de ce billet serait $\frac{5x}{6}$. Dans les mêmes conditions, l'escompte de 3150 fr. sera donc donné par le quatrième terme de la proportion

$$100 + \frac{5x}{6} : \frac{5x}{6} :: 3150^f : \text{ce quatrième terme},$$

dont la valeur est conséquemment

$$\frac{3150^{f} \times \frac{5x}{6}}{100 + \frac{5x}{6}}$$

ou, en multipliant haut et bas par 6,

$$\frac{15750x}{600+5x} \qquad [2].$$

Mais, d'après l'énoncé, la somme de ces deux escomptes doit faire 230 fr.; on doit donc avoir l'équation

$$\frac{4160x}{300+2x}+\frac{15750x}{600+5x}=230 \qquad [3].$$

Faisant disparaître les dénominateurs, transposant et réduisant, il vient

$$50000x^2+6600000x=41400000$$

ou

$$x^2+132x=828 \qquad [4],$$

d'où l'on tire $x=6$ et $x=-138$.

Le taux de l'escompte étant essentiellement positif, la seconde valeur doit être rejetée; le taux cherché est donc 6 pour 100. On trouvera ensuite pour l'escompte des deux billets 80 fr. et 150 fr., en mettant pour x la valeur 6 dans les expressions [1] et [2].

Remarque. En changeant x en $-x$ dans l'équation [3], il serait facile de trouver un énoncé auquel convînt la solution -138 prise positivement; mais, outre que cet énoncé serait incompatible avec la notion d'escompte, la valeur positive $+6$ se trouverait alors convertie en une valeur négative -6.

On pourra être surpris, au premier abord, de voir l'Algèbre donner ainsi une solution étrangère à la question, quel que soit le signe que l'on donne à x dans l'équation du problème. Mais il faut bien remarquer que l'Algèbre doit donner la réponse à toutes les questions qui pourraient conduire à la même équation [4], et dont le nombre est illimité. Telles seraient, par exemple, les suivantes, bien différentes de celle que nous venons de résoudre.

Trouver un rectangle dont la surface soit de $828^{m.q}$ *et dont la base et la hauteur diffèrent de* 132^{m}; question qui conduit précisément à l'équation $x(x+132)=828$; en appelant x le plus petit côté du rectangle.

Trouver un rectangle dont la surface soit de $828^{m.q}$ *et dont la base et la hauteur fassent en somme* 132^{m}; question qui conduit à l'équation $x(132-x)=828$, laquelle ne diffère de l'équation [4] qu'en ce que x est changé en $-x$.

Enfin cette question générale qui comprend les précédentes : *Trouver deux quantités dont le produit soit 828 et dont la somme algébrique soit 132* ; laquelle, en désignant par x l'une des deux quantités demandées, conduit encore à l'équation [4], et admet les solutions négatives aussi bien que les positives.

L'équation [4] est donc beaucoup plus générale que le problème qui y a conduit ; et il n'est point surprenant qu'elle admette une solution étrangère à ce problème particulier. Nous aurons souvent l'occasion de faire des remarques analogues.

182. Problème II. *Partager 17 en deux parties telles que le carré de la première surpasse de 2 unités le double du carré de la seconde.*

Si l'on appelle x la première partie, la seconde sera $(17-x)$; et en traduisant algébriquement l'énoncé, on aura

$$2(17-x)^2+2=x^2$$

ou, en réduisant, $$x^2-68x+580=0\ ,$$

d'où l'on tire $$x=34\pm 24\ ,$$

c'est-à-dire $$x=58 \quad \text{et} \quad x=10\ .$$

La seconde valeur satisfait à la question, et donne pour les deux parties 10 et 7.

Quant à la première valeur, elle est, quoique positive, étrangère à la question proposée, puisqu'une des parties de 17 ne saurait surpasser 17.

Remarque. L'explication de cette circonstance, en apparence singulière, est facile à trouver. Le problème que nous venons de résoudre avec une seule inconnue, en comporte réellement deux, qui sont les deux parties de 17.

En appelant x et y ces deux parties, les équations du problème seraient

$$x+y=17\ ,$$
$$2y^2+2=x^2\ .$$

Or, il ne suffit pas que x soit positif pour que la solution réponde à l'énoncé, il faut encore que y le soit, ce qui ne peut avoir lieu si x surpasse 17.

Si l'on change y en $-y$, la première équation devient

$$x-y=17$$

et la seconde ne change point. Ces équations répondraient à ce problème : *Trouver deux nombres qui diffèrent de 17, et tel que le* *carré du plus grand surpasse de* 2 *unités le double du carré du plus petit*. Dans ce cas, les valeurs de x restant les mêmes, on trouve que la valeur $x=58$ satisfait et donne pour y une valeur positive $y=41$; tandis que $x=10$ donne $y=-7$.

Mais les valeurs, tant négatives que positives de y , deviendraient admissibles si l'on prenait pour énoncé : *Trouver deux quantités dont la somme algébrique soit* 17 *, et telles que le carré de la première surpasse de* 2 *unités le double du carré de la seconde*.

On voit ici, comme dans le problème précédent, que l'équation à laquelle on est parvenu est plus générale que le problème qui y a conduit, et que c'est à cette plus grande généralité qu'il faut attribuer les valeurs étrangères au problème particulier que l'on a en vue fournies par les procédés de l'Algèbre.

183. PROBLÈME III. *Un champ a* $480^{m.q}$ *de superficie; un champ voisin, qui a* 6^m *de plus en longueur, mais* 4^m *de moins en largeur, a la même superficie. On demande les dimensions des deux champs* (dont la forme est supposée être celle d'un rectangle).

La superficie d'un rectangle ayant pour expression le produit de sa longueur par sa largeur, si x désigne la longueur du premier champ, $\frac{480}{x}$ sera sa largeur. La longueur du second sera $x+6$; sa largeur sera $\frac{480}{x}-4$; et sa superficie sera le produit de ces deux expressions. On devra donc avoir

$$(x+6)\left(\frac{480}{x}-4\right)=480$$

ou, en effectuant et réduisant,

$$\frac{2880}{x}-4x-24=0\ .$$

Faisant disparaître le dénominateur x , transposant et divisant par 4 , il vient

$$x^2+6x-720=0\ ,$$

d'où l'on tire $x=-3\pm\sqrt{729}=-3\pm27$,

c'est-à-dire $x=24$ et $x=-30$.

Prenons d'abord la solution positive. La longueur du premier champ étant de 24^m , sa largeur est $\frac{480^{m.q}}{24^m}$ ou 20^m ; la longueur du second est 24^m+6^m ou 30^m , et sa largeur est 20^m-4^m ou 16^m , sa superficie a donc pour valeur 30×16 ou $480^{m.q}$; elle équivaut donc bien à la première.

Passons à la solution négative. Pour l'interpréter, changeons x en $-x$ dans l'équation du problème; nous aurons

$$(-x+6)\left(-\frac{480}{x}-4\right)=480 \quad ;$$

ou, en changeant à la fois le signe de chaque facteur, ce qui n'altérera pas le produit,

$$(x-6)\left(\frac{480}{x}+4\right)=480 \quad ,$$

équation qui répond au cas où le second champ aurait 6^m *de moins* en longueur et 4^m *de plus* en largeur.

On trouverait en effet pour solutions $x=30$ et $x=-24$. La première de ces valeurs donne pour la largeur du premier champ $\frac{480}{30}$ ou 16^m ; la longueur du second est $30-6$ ou 24^m et sa largeur est $16+4$ ou 20^m. C'est-à-dire que c'est le second champ du cas précédent qui est devenu le premier. Quant à la valeur négative -24, son interprétation nous ramènerait au premier cas.

On voit qu'on passe d'un cas à l'autre en changeant le signe de x ; et c'est pour cela que l'Algèbre les réunit en présentant la solution de l'un avec le signe $+$ et celle de l'autre avec le signe $-$.

184. Problème IV. *Une personne qui a 120000 fr. de capital en a fait deux parts qu'elle a placées à deux taux différents; la première lui rapporte annuellement 2800 fr. ; la seconde, qui est placée à un taux plus élevé de 1 fr. , lui rapporte 2500 fr. On demande quelles sont les deux parts, et à quels taux elles ont été placées.*

Désignons par x le taux auquel la première part est placée. Si la première part était connue, on obtiendrait son intérêt annuel en la multipliant par le taux x, et en divisant par 100 ; ce qui devrait donner 2800 fr. On aura donc l'expression de la première part en faisant les opérations inverses, c'est-à-dire en multipliant 2800 fr. par 100, et en divisant le produit par x ; ce qui donne

$$\frac{280000}{x} \cdot$$

En raisonnant de la même manière, on trouvera pour l'expression de la seconde part

$$\frac{250000}{x+1} \cdot$$

Et puisque la somme des deux parts doit faire le capital entier, on devra avoir

$$\frac{280000}{x}+\frac{250000}{x+1}=120000 ,$$

ou $$\frac{28}{x}+\frac{25}{x+1}=12 ,$$

ou encore $$12x^2-41x-28=0 ,$$

d'où l'on tire $$x=4 \quad \text{et} \quad x=-\frac{7}{12} .$$

La valeur positive $+4$, qui est seule admissible, donne $4+1$ ou 5 pour le taux auquel a été placée la seconde part. La première est alors

$$\frac{280000}{4} \quad \text{ou} \quad 70000^{f} ,$$

et la seconde est $$\frac{250000}{5} \quad \text{ou} \quad 50000^{f} .$$

La somme de ces deux parts forme bien le capital 120000 fr.

Ici, comme dans le problème I, la valeur négative $-\frac{7}{12}$ ne pourrait être interprétée qu'en partant d'un énoncé incompatible avec la notion d'intérêt. Rappelons que si l'Algèbre fournit ainsi une solution étrangère, cela tient à ce que l'équation à laquelle on est parvenu a plus de généralité que le problème particulier qui y a conduit, et que l'Algèbre doit répondre à toutes les questions qui conduiraient à cette même équation, et dont quelques-unes pourraient admettre la solution négative $-\frac{7}{12}$.

185. Problème V. *Diviser* 11 *en deux parties telles que la somme de leurs cubes soit égale à* 407.

Soit x l'une des parties, l'autre sera $11-x$. Le cube de la première s'écrira x^3. Pour former le cube de la seconde, formons d'abord son carré qui est $11^2-2\times 11 . x+x^2$, et multiplions ce carré par $11-x$, ce qui donnera

$$11^3-3\times 11^2 . x+3\times 11 . x^2-x^3 .$$

En faisant la somme des deux cubes, les termes en x^3 disparaissent; on doit donc avoir l'équation

$$11^3-3\times 11^2 . x+3\times 11 . x^2=407 ,$$

ou, en remarquant que tous les termes sont divisibles par 11,

$$11^2 - 3 \times 11 . x + 3x^2 = 37 ,$$

ou $$3x^2 - 33x + 84 = 0 ,$$

ou encore $$x^2 - 11x + 28 = 0 ,$$

d'où l'on tire $$x = 7 \quad \text{et} \quad x = 4 .$$

Si l'on prend 7 pour la première partie, la seconde sera $11-7$ ou 4. Si l'on prend 4 pour la première, la seconde sera $11-4$ ou 7. En sorte que, bien que nous trouvions deux valeurs positives distinctes et toutes deux admissibles, le problème n'admet néanmoins qu'une solution. Cela tient à ce que, x ne désignant pas plutôt une des parties que l'autre, l'Algèbre doit les donner toutes les deux ; et c'est ce qui arrive en effet.

186. Le lecteur pourra s'exercer sur les exemples qui suivent :

I. *Une personne a acheté du drap pour* 300 *fr. Si elle avait payé le mètre* 5 *fr. de moins elle aurait eu, pour la même somme,* 2^m *de drap de plus. On demande combien elle a acheté de mètres de drap.*

(Réponse : 10^m. Solution négative -12^m, qu'on interprétera comme au n° **185.**)

II. *Un amateur de tableaux achète pour original une copie qu'il est obligé de revendre ensuite* 24 *fr.; à ce marché il perd autant pour* 100 *que le tableau lui avait coûté. On demande quel a été le prix d'achat.*

(Réponses : 60 fr. et 40 fr.)

III. *Partager* 12 *en deux parties telles que le carré de la première soit inférieur d'une unité au double du carré de la seconde.*

(Réponse : la première partie est 7 ; par suite la seconde est 5. De plus une solution inadmissible, 41 pour la première partie, ce qui donnerait pour la seconde -30. Voy. le n° **182.**)

IV. *On a payé* 96 *fr. à* 14 *ouvriers, hommes et femmes; chaque homme a reçu autant de francs qu'il y avait de femmes, et chaque femme autant de francs qu'il y avait d'hommes. Combien y avait-il d'hommes et combien y avait-il de femmes?*

(Réponse : 8 hommes et 6 femmes, ou bien 6 hommes et 8 femmes).

V. *Trouver les quatre termes d'une proportion par quotient, sachant que la raison est* 3, *que la somme des antécédents est* 5, *et que la somme des carrés des quatre termes est* 130.

(Réponse : $2 : 6 :: 3 : 9$ ou $3 : 9 :: 2 : 6$).

VI. *Deux ouvriers ont un ouvrage à faire. Si chacun d'eux en faisait la moitié, il leur faudrait en tout* 25 *heures de travail pour le terminer; mais s'ils y travaillent ensemble, l'ouvrage sera fait en* 12 *heures. Combien d'heures chacun d'eux emploierait-il à faire l'ouvrage entier s'il travaillait seul?*

(Réponse : L'un des ouvriers emploierait 30 heures, et l'autre 20 heures.)

§ III. De la résolution de l'équation BICARRÉE, et des problèmes qui conduisent à une équation de cette espèce.

187. On nomme équation *bicarrée* une équation du quatrième degré (66) qui ne contient que les puissances paires de l'inconnue. Lorsqu'on a fait disparaître les dénominateurs, passé tous les termes dans un seul membre, réuni en un seul tous ceux qui contiennent l'inconnue à la quatrième puissance, en un autre tous ceux qui la contiennent à la deuxième puissance, enfin en un troisième tous ceux qui sont indépendants de l'inconnue, l'équation bicarrée se présente sous la forme

$$ax^4+bx^2+c=0 .$$

Pour résoudre une pareille équation, qui ne diffère d'une équation du second degré qu'en ce que x y est remplacé par x^2 et x^2 par x^4, on pourra prendre comme inconnue x^2. On posera donc

$$x^2=y \quad \text{d'où} \quad x^4=y^2$$

en élevant les deux membres au carré. Substituant ces valeurs dans l'équation proposée, elle deviendra

$$ay^2+by+c=0 ,$$

d'où l'on tirera (**179**)

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} .$$

Maintenant, de $x^2=y$, on déduit $x=\pm\sqrt{y}$; mettant donc pour y la valeur qu'on vient de trouver, on aura finalement

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} ,$$

ce qui fournit pour x quatre valeurs, en combinant les signes de toutes les manières possibles, savoir :

$$x=+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\ ,$$

$$x=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\ ,$$

$$x=+\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\ ,$$

$$x=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\ .$$

Ces valeurs sont deux à deux égales et de signe contraire, et c'est ce qu'on pouvait prévoir. Car, si une valeur quelconque α, mise pour x, satisfait à l'équation proposée, la valeur égale et de signe contraire $-\alpha$ y satisfera également, puisque le carré de $-\alpha$ est le même que celui de $+\alpha$, et que par conséquent il en est de même de leurs quatrièmes puissances.

188. I. Soit, pour exemple numérique, l'équation

$$x^4-169x^2+3600=0\ .$$

En posant $x^2=y$, d'où $x^4=y^2$, on obtient

$$y^2-169y+3600=0\ ,$$

équation qui donne pour y deux valeurs

$$y=144 \quad \text{et} \quad y=25\ ,$$

mettant ces valeurs dans $x^2=y$, il vient

$$x^2=144 \quad \text{et} \quad x^2=25\ ;$$

d'où $$x=\pm 12 \quad \text{et} \quad x=\pm 5\ .$$

II. Soit, pour exemple algébrique, l'équation

$$x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2=0\ .$$

En opérant comme ci-dessus, on aura successivement

$$y^2-2(a^2+b^2)y+(a^2-b^2)^2=0\ ,$$

d'où $$y=a^2+b^2\pm 2ab\ ,$$

c'est-à-dire $$y=(a+b)^2 \quad \text{et} \quad y=(a-b)^2\ ,$$

donc $$x^2=(a+b)^2 \quad \text{et} \quad x^2=(a-b)^2\ ,$$

d'où $$x=\pm(a+b) \quad \text{et} \quad x=\pm(a-b)\ ,$$

c'est-à-dire

$$x=+a+b\ ,\quad x=-a-b\ ,\quad x=+a-b\ ,\quad x=-a+b\ .$$

Il est facile de vérifier que chacune de ces quatre valeurs satisfait effectivement à l'équation proposée.

189. Nous allons donner quelques exemples de questions qui donnent lieu à la résolution d'une équation bicarrée.

PROBLÈME I. *Décomposer* 120 *en deux facteurs tels que la somme de leurs carrés soit égale à* 289.

Soit x l'un des facteurs, l'autre sera $\frac{120}{x}$; on devra donc avoir $x^2+\frac{14400}{x^2}=289$ ou $x^4-289x^2+14400=0$,

d'où l'on tire $x=\pm 15$ et $x=\pm 8$.

Si l'on ne veut que des facteurs numériques, les valeurs positives 15 et 8 peuvent seules convenir à la question; mais si l'on admet les facteurs algébriques, on aura encore une solution en prenant -15 et -8.

PROBLÈME II. *Trouver la base et la hauteur d'un rectangle sachant que sa surface est de* $12^{m\cdot q}$ *et que sa diagonale a* 5^{m}. (On suppose connus la mesure du rectangle et le théorème de Pythagore.)

Soit x la base, la hauteur sera $\frac{12}{x}$; or, d'après le théorème de Pythagore, la somme des carrés de ces deux dimensions doit égaler le carré de la diagonale; on doit donc avoir

$$x^2+\frac{144}{x^2}=25 \quad \text{ou} \quad x^4-25x^2+144=0,$$

d'où l'on tire $x=\pm 4$ et $x=\pm 3$.

Ici les valeurs $+4$ et $+3$ sont les seules qui soient admissibles.

PROBLÈME III. *Partager* 60 *en deux facteurs tels que le carré du triple du premier, plus le carré du double du second fassent une somme égale à* 801.

Soit x le premier facteur, le second sera $\frac{60}{x}$ et l'on devra avoir $(3x)^2+\left(\frac{120}{x}\right)^2=801$ ou $9x^2+\frac{14400}{x^2}=801$,

ou enfin $9x^4-801x^2+14400=0$,

d'où l'on tire $x=\pm 8$ et $x=\pm 5$.

Les seconds facteurs correspondants seront $\pm\frac{60}{8}$ et $\pm\frac{60}{5}$, c'est-à-dire $\pm\frac{15}{2}$ et ± 12.

Les deux facteurs devront être pris avec le même signe, attendu que le produit 60 est positif.

§ IV. Résolution, dans quelques cas simples, d'un système de plusieurs équations (dont une au moins du second degré) renfermant le même nombre d'inconnues.

190. Une équation à deux inconnues est dite du *second degré* lorsqu'après y avoir fait disparaître les dénominateurs et effectué les calculs, elle contient soit le carré de l'une des inconnues, soit le produit de ces deux inconnues.

En général, une équation à deux inconnues est du degré n, lorsque, après avoir fait disparaître les dénominateurs et effectué les calculs, la somme des exposants des deux inconnues est n dans le terme où cette somme est la plus grande.

Nous nous occuperons, dans ce paragraphe, de la résolution, dans quelques cas simples, d'un système de deux équations à deux inconnues, lorsque l'une au moins de ces équations est du second degré.

Soit d'abord le système des deux équations

$$x+y=a$$

$$xy=b\ .$$

Si l'on tire de la première la valeur de y en x, savoir $y=a-x$, et qu'on la mette à la place de y dans la seconde, on obtient

$$x(a-x)=b \quad \text{ou} \quad ax-x^2=b\ ,$$

ou encore
$$x^2-ax+b=0\ .$$

Si, au lieu d'éliminer y, on eût éliminé x, on serait parvenu à l'équation

$$y^2-ay+b=0\ ,$$

qui ne diffère de la précédente que par le caractère qui représente l'inconnue; d'où il suit que la même équation donne à la fois x et y; c'est-à-dire : non pas que x et y sont égaux, mais que si l'on prend pour x l'une des valeurs fournies par l'équation du second degré à laquelle on est parvenu, il faudra prendre pour y l'autre valeur fournie par la même équation.

On aurait pu prévoir ce résultat; car les équations proposées sont *symétriques* en x et y; c'est-à-dire que si l'on y changeait x en y et y en x, elles ne changeraient pas; il en résulte que le calcul qui donne x est le même que celui qui donne y, et que par conséquent il doit donner à la fois l'un et l'autre.

On tire de ce qui précède ce THÉORÈME DE CALCUL : *Lorsque l'on a la somme et le produit de deux quantités, elles sont données l'une et l'autre par une même équation du second degré, dans laquelle le terme affecté de la seconde puissance de l'inconnue a pour coefficient l'unité ; le terme affecté de la première puissance a pour coefficient la somme des deux quantités prises en signe contraire, et le terme indépendant de l'inconnue est le produit de ces mêmes quantités.*

191. Soit, par exemple, à résoudre ce problème : *Trouver la base et la hauteur d'un rectangle, sachant que sa surface est de* $48^{m.q}$ *et que son périmètre est de* 28^{m}.

En désignant par x la base et par y la hauteur, on aura xy pour l'expression de la surface et $2x+2y$ pour celle du périmètre. On devra donc avoir

$$xy=48 \quad \text{et} \quad 2x+2y=28 \quad \text{ou} \quad x+y=14 .$$

En vertu du théorème précédent, l'équation qui donnera à la fois la base et la hauteur sera

$$z^2-14z+48=0 ,$$

d'où

$$z=8 \quad \text{et} \quad z=6 ,$$

c'est-à-dire que si la base a 8^{m}, la hauteur aura 6^{m} ; ou que si la hauteur a 8^{m}, la base aura 6^{m}. Car z désigne indifférement la base ou la hauteur du rectangle.

192. Soit proposé un système quelconque de deux équations à deux inconnues, l'une de ces équations étant du premier degré, et l'autre du second.

On pourra tirer de la première la valeur de y en x, et, en la substituant dans la seconde, on aura à résoudre une équation du second degré en x. Ayant déterminé x, on remettra sa valeur dans la première équation, et l'on en tirera la valeur correspondante de y. Il y aura, en général, deux systèmes de valeurs, mais il pourra arriver qu'un seul des deux systèmes puisse convenir à la question particulière qui aura fourni les deux équations proposées.

Soit proposé, par exemple, ce problème : *Un capitaliste veut placer, à des taux différents, une somme de* 40000 *fr. et une somme de* 25000 *fr. S'il les place à intérêts simples, il en retirera* 6000 *fr. au bout de deux ans ; mais s'il les place à intérêts composés, il en retirera* 140 *fr. de plus. On demande à quels taux les deux sommes doivent être placées.*

Soient x et y ces deux taux. Pour obtenir l'intérêt de 40000 fr. au taux x, au bout de 2 ans, à intérêts simples, on sait qu'il faut multiplier 40000 fr. par x et par 2, et diviser le résultat par 100. On obtient ainsi

$$800x.$$

On obtient de la même manière, pour l'intérêt de 25000 fr., au bout de 2 ans, et au taux y

$$500y.$$

On aura donc, pour première équation

$$800x + 500y = 6000,$$

ou

$$8x + 5y = 60 \qquad [1].$$

En second lieu, pour savoir ce que devient un capital 40000 fr. au bout de 2 ans, au taux x et à intérêts composés, on sait qu'il faut multiplier le capital par $\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2$, ce qui donne

$$40000\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2.$$

De même, un capital de 25000 fr., placé pendant 2 ans au taux y et à intérêts composés, devient

$$25000\left(1 + \frac{y}{100}\right)^2.$$

Or, la somme de ces deux capitaux définitifs doit faire la somme des capitaux primitifs augmentée de ce qu'ils rapportent, c'est-à-dire augmentés de 6000 fr. plus 140 fr., ce qui fait en tout 71140 fr. On a donc pour seconde équation

$$40000\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 + 25000\left(1 + \frac{y}{100}\right)^2 = 71140,$$

ou, en effectuant, chassant les dénominateurs et réduisant,

$$8x^2 + 1600x + 5y^2 + 1000y = 12280 \qquad [2].$$

On tire de l'équation [1]

$$y = \frac{60 - 8x}{5} \qquad [3].$$

Mettant pour y cette valeur dans l'équation [2], faisant disparaître les dénominateurs, et réduisant, on obtient

$$13x^2 - 120x + 275 = 0,$$

d'où

$$x = 5 \quad \text{et} \quad x = 4\tfrac{3}{13}.$$

Ces valeurs, mises pour x dans l'équation [3] donnent

$$y = 4 \quad \text{et} \quad y = 5\tfrac{3}{13}.$$

Le problème admet donc deux solutions :

$$x = 5 \quad \text{avec} \quad y = 4 ,$$

et
$$x = 4\tfrac{3}{13} \quad \text{avec} \quad y = 5\tfrac{3}{13} .$$

193. Soient proposées, maintenant, deux équations simples, toutes deux du second degré; par exemple :

$$x^2 + y^2 = 289 \qquad [1],$$
$$xy = 120 \qquad [2].$$

(La seconde équation est du second degré, parce que les inconnues x et y y sont multipliées entre elles (**190**).)

On peut, d'abord, tirer de la seconde la valeur de y en x, laquelle est

$$y = \frac{120}{x} , \qquad [3],$$

et substituer cette valeur dans la première équation, qui ne contiendra plus alors que la seule inconnue x. On trouve ainsi

$$x^2 + \frac{14400}{x^2} = 289 ,$$

ou, en faisant disparaître le dénominateur x^2, et transposant

$$x^4 - 289x^2 + 14400 = 0 \qquad [4],$$

équation bicarrée, qui donne (**187**)

$$x = \pm 15 \quad \text{et} \quad x = \pm 8 .$$

Ces valeurs, mises pour x dans l'équation [3], donnent ensuite

$$y = \pm 8 \quad \text{et} \quad y = \pm 15 .$$

Les signes supérieurs doivent se correspondre ainsi que les signes inférieurs ; en d'autres termes, x et y doivent être de même signe, puisque leur produit doit être égal au nombre positif 120.

Remarque. Les quatre valeurs de y sont précisément les mêmes que les quatre valeurs de x. On pouvait le prévoir ; car les équations proposées étant symétriques par rapport à x et à y, c'est-à-dire ne changeant pas de forme quand on y change x en y et y en x, il en résulte que le calcul nécessaire pour déterminer y doit être précisément le même que celui qui détermine x, et que, par conséquent, on doit trouver les mêmes valeurs que ces deux inconnues.

Mais ce ne sont point les valeurs égales qui se correspondent :

à la valeur	$x = +15$	correspond	$y = +8$,
	-15		-8 ,
	$+8$		$+15$,
	-8		-15 .

194. On peut encore résoudre le système des deux équations précédentes par un autre procédé qu'il est bon de connaître.

On remarque que si, au premier membre de l'équation [1], on ajoutait le double du premier membre de l'équation [2], on obtiendrait le carré de $x+y$; et que si l'on retranchait au lieu d'ajouter, on obtiendrait le carré de $x-y$; par suite, on connaîtrait la somme des deux inconnues ainsi que leur différence ; et, en vertu du théorème démontré au n° 5 on obtiendrait immédiatement chacune de ces inconnues.

On trouve, en effet, en opérant ainsi :

$$x^2+2xy+y^2 \quad \text{ou} \quad (x+y)^2=289+240=529 \ ,$$

et $$x^2-2xy+y^2 \quad \text{ou} \quad (x-y)^2=289-240=\ 49 \ ,$$

d'où l'on tire $$x+y=\pm 23 \ ,$$

et $$x-y=\pm\ 7 \ .$$

Par suite $$x=\frac{\pm 23 \pm 7}{2} \quad \text{et} \quad y=\frac{\pm 23 \mp 7}{2} \ ,$$

ce qui donne pour x et y les valeurs écrites plus haut.

Soit proposé, par exemple, ce problème : *Trouver les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, sachant que son hypoténuse a* 13 *mètres , et que sa surface est de* 30 *mètres carrés.*

En désignant par x et y les deux côtés demandés, et remarquant que si l'un de ces deux côtés est pris pour base du triangle, l'autre mesure précisément la hauteur, on aura les deux équations * :

$$x^2+y^2=169 \ ,$$

et $$\frac{1}{2}xy=30^{\text{m.q}} \quad \text{ou} \quad xy=60 \ .$$

On tire de là $$(x+y)^2=169+120=289 \ ,$$

et $$(x-y)^2=169-120=\ 49 \ ,$$

d'où $$x+y=17 \quad \text{et} \quad x-y=7 \ .$$

On peut se dispenser du double signe, en remarquant que x et y doivent être positifs et en convenant d'appeler x le plus grand de ces deux côtés.

On a ensuite (5)

$$x=\frac{17+7}{2}=12 \quad \text{et} \quad y=\frac{17-7}{2}=5 \ .$$

---

* La somme des carrés des deux côtés de l'angle droit équivaut au carré de l'hypoténuse ; et la surface du triangle a pour mesure la moitié du produit de sa base par sa hauteur. (Voy. notre *Géométrie théorique et pratique,* 3e édition.)

195. Comme exemple d'une question à trois inconnues, soit proposé le problème suivant :

Trouver les trois dimensions d'un parallélépipède rectangle, sachant que sa diagonale a 7 mètres, que la surface de sa base est de 12m.q, et que la somme de ses douze arêtes est de 44 mètres.

Désignons par x et y les deux côtés adjacents du rectangle de base, et par z la hauteur du parallélépipède, nous aurons les trois équations

$$x^2+y^2+z^2=49 \qquad [1],$$

$$xy=12 \qquad [2],$$

et
$$4x+4y+4z=44 \quad \text{ou} \quad x+y+z=11 \qquad [3];$$

qui expriment : 1° que la somme des carrés des trois arêtes aboutissant à un même sommet équivaut au carré de la diagonale; 2° que le produit des deux côtés adjacents du rectangle de base mesure la surface de ce rectangle; 3° que la somme des douze arêtes, lesquelles sont égales 4 à 4, est de 44m.

Pour résoudre ce système d'équations, mettons la première sous la forme

$$x^2+y^2=49-z^2.$$

Ajoutons-la membre à membre avec l'équation [2] multipliée par 2 ; nous aurons

$$x^2+2xy+y^2=49-z^2+24,$$

ou
$$(x+y)^2=73-z^2.$$

Mais, de la troisième équation proposée, on tire

$$x+y=11-z.$$

Mettant pour $x+y$ cette valeur dans l'équation ci-dessus, il vient

$$(11-z)^2=73-z^2,$$

ou, en développant, transposant et réduisant,

$$2z^2-22z+48=0,$$

ou encore
$$z^2-11z+24=0;$$

d'où
$$z=8 \quad \text{et} \quad z=3.$$

La valeur $z=8$ ne peut convenir au problème; car le carré de 8 est plus grand, à lui seul, que 49. Prenons donc $z=3$; il en résulte

$$x+y=11-3=8,$$

et, comme on a
$$xy=12,$$

on est ramené à un système analogue à celui du nº **190**. Dès lors on aura à la fois x et y en résolvant l'équation

$$u^2 - 8u + 12 = 0 ,$$

dans laquelle le terme en u a pour coefficient la somme 8 des deux inconnues, prise en signe contraire, et où le terme indépendant de u est le produit 12 de ces mêmes inconnues.

Cette équation donne $u=6$ et $u=2$. On a donc $x=6$, $y=2$ ou bien $x=2$, $y=6$.

196. Le lecteur pourra s'exercer sur les problèmes qui suivent :

I. *Trouver la base et la hauteur d'un rectangle, sachant que sa diagonale a* $3^{m},7$ *et que sa surface est de* $4^{m.q},20$.

(Réponse : $3^{m},5$ et $1^{m},2$).

II. *Trouver une fraction telle que le produit de ses deux termes soit* 12, *et que si, à cette fraction, on ajoute la même fraction renversée, on obtienne pour somme* $2\frac{1}{12}$.

(Réponse : $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{3}$.)

III. *Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle, sachant que son périmètre est de* 90^{m} *et que sa surface est de* $180^{m.q}$.

(Réponse : hypoténuse, 41^{m} ; côtés de l'angle droit, 40^{m} et 9^{m}.

IV. *Calculer les trois arêtes adjacentes d'un parallélépipède rectangle, sachant que sa diagonale a* 13^{m}, *que la somme de ses faces est de* $192^{m.q}$, *et que le périmètre du rectangle de base est de* 14^{m}.

(Réponse : côtés du rectangle de base, 3^{m} et 4^{m} ; hauteur du parallélépipède, 12^{m}.)

V. *Partager* 17 *en trois parties telles que la somme de leurs carrés soit égale à* 121, *et que le produit des deux parties extrêmes soit égal au triple de la partie moyenne.*

(Réponse : 2, 6, 9.)

CHAPITRE VIII.

DES QUANTITÉS IRRATIONNELLES DU SECOND DEGRÉ, DES QUANTITÉS IMAGINAIRES, ET DE LA DISCUSSION DES PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

§ I. Des quantités irrationnelles du second degré.

197. Lorsqu'un nombre entier n'est pas un carré parfait, on sait que sa racine carrée ne peut être exprimée exactement ni par un nombre entier, ni par un nombre fractionnaire; mais que l'on peut en approcher aussi près qu'on le désire. Ainsi une expression telle que $\sqrt{2}$ représente une quantité dont la valeur ne peut être assignée exactement en nombres, mais qui a néanmoins une existence réelle, puisqu'on peut toujours trouver deux quantités numériques, différant entre elles d'aussi peu qu'on le voudra, et entre lesquelles elle soit comprise. Une pareille quantité est ce qu'on appelle une quantité *incommensurable,* si on la considère sous le rapport de son évaluation numérique, ou une quantité *irrationnelle,* si l'on ne s'attache qu'au signe $\sqrt{}$ par lequel elle est représentée.

Une quantité telle que $\sqrt{3ab}$, dans laquelle a et b sont des quantités numériques quelconques, est encore une quantité *irrationnelle.* On pourrait bien, à la vérité, trouver pour a et b des valeurs numériques telles que $3ab$ devînt un carré parfait, auquel cas $\sqrt{3ab}$ deviendrait rationnel et commensurable ; mais comme cela n'a pas lieu pour toutes les valeurs qu'on pourrait attribuer à a et à b, il convient de traiter l'expression $\sqrt{3ab}$ comme si le radical [12] ne pouvait jamais disparaître, c'est-à-dire qu'il convient de la traiter comme si elle devait rester irrationnelle pour toutes les valeurs de a et de b.

Généralement, toutes les fois qu'un radical du second degré porte sur une quantité algébrique qui n'est point un carré parfait, *algébriquement parlant,* c'est-à-dire indépendamment des valeurs particulières qu'on peut attribuer aux lettres qui y entrent, l'expression doit être regardée comme irrationnelle, bien que pour certaines valeurs particulières attribuées aux lettres, elle puisse cesser de l'être. C'est ainsi que $\sqrt{a^2+b^2}$ doit être considérée comme une quantité irrationnelle, attendu que a^2+b^2 ne peut être ni le carré d'un monome, ni celui d'un polynome; et cela, quoique certaines valeurs particulières, attribuées à a et à b, ou à l'une des deux seulement, puissent rendre a^2+b^2 un carré parfait, ce qui arriverait, par exemple, pour $b=\frac{3}{4}a$, auquel cas a^2+b^2 se réduirait à $\frac{25a^2}{4}$ et serait le carré de $\frac{5a}{2}$.

Nous allons nous occuper, dans ce paragraphe, des règles suivant lesquelles les irrationnelles du second degré doivent être introduites dans le calcul. Pour cela, nous commencerons par étendre aux quantités incommensurables quelques théorèmes fondamentaux qui n'ont été supposés démontrés jusqu'ici que pour les quantités commensurables.

198. I. *Un produit de deux facteurs incommensurables ne change pas, dans quelque ordre qu'on suppose la multiplication effectuée.*

Soit à multiplier, par exemple, $\sqrt{2}$ par $\sqrt{5}$. Il s'agit de faire voir que le produit est indépendant de l'ordre des facteurs.

Pour cela, soit α une valeur de $\sqrt{2}$, approchée par défaut à moins de $\frac{1}{n}$, en sorte que $\sqrt{2}$ soit compris entre α et $\alpha+\frac{1}{n}$. Soit de même β une valeur approchée de $\sqrt{5}$ au même degré d'approximation.

Les quantités α et β étant commensurables, on a

$$\alpha\times\beta=\beta\times\alpha\,.$$

Les quantités $\alpha+\frac{1}{n}$ et $\beta+\frac{1}{n}$ étant également commensurables, on a de même

$$\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)\left(\beta+\frac{1}{n}\right)=\left(\beta+\frac{1}{n}\right)\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)\,.$$

Or, $\sqrt{2}$ étant compris entre α et $\alpha+\frac{1}{n}$, et $\sqrt{5}$ étant compris entre β et $\beta+\frac{1}{n}$, le produit $\sqrt{2}\times\sqrt{5}$ est compris entre $\alpha\beta$ et $\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)\left(\beta+\frac{1}{n}\right)$, c'est-à-dire entre les premiers membres des égalités ci-dessus. Pareillement $\sqrt{5}\times\sqrt{2}$ est compris entre $\beta\alpha$ et $\left(\beta+\frac{1}{n}\right)\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)$, c'est-à-dire entre les seconds membres de ces mêmes égalités. Donc $\sqrt{2}\times\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}\times\sqrt{2}$ sont compris entre les mêmes limites.

Mais si l'on développe $\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)\left(\beta+\frac{1}{n}\right)$, ce qui donne

$$\alpha\beta+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n}+\frac{1}{n^2},$$

on voit que les deux premiers membres des égalités ci-dessus diffèrent de

$$\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n}+\frac{1}{n^2},$$

quantité qu'on peut rendre aussi petite qu'on voudra en prenant n suffisamment grand, c'est-à-dire en prenant pour α et β des valeurs de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{5}$ suffisamment approchées.

Les produits $\sqrt{2}\times\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}\times\sqrt{2}$ sont donc compris entre deux limites variables qu'on peut rapprocher l'une de l'autre autant qu'on le voudra ; il faut donc que ces produits soient rigoureusement égaux. Car, s'ils différaient, on pourrait rendre la différence des deux limites moindre que la différence des deux produits qu'elles comprennent entre elles, ce qui serait absurde. On a donc

$$\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{5}\times\sqrt{2},$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

199. II. *Multiplier une quantité par le produit de deux facteurs incommensurables, revient à la multiplier successivement par chacun de ces facteurs.*

Démontrons, par exemple, que multiplier une quantité a par le produit (supposé effectué) $(\sqrt{2}\times\sqrt{5})$, revient à multiplier d'abord cette quantité par $\sqrt{2}$, et à multiplier ensuite le produit par $\sqrt{5}$.

En conservant les notations du numéro précédent, on aura d'abord, puisque α et β, $\alpha+\frac{1}{n}$ et $\beta+\frac{1}{n}$ sont commensurables, et que la proposition a été démontrée en arithmétique dans ce cas :

$$a\times(\alpha\beta)=(a\alpha)\times\beta$$

et $$a\times\left[\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)\left(\beta+\frac{1}{n}\right)\right]=\left[a\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)\right]\times\left(\beta+\frac{1}{n}\right).$$

Or, $(\sqrt{2}\times\sqrt{5})$ étant compris entre $\alpha\beta$ et $\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)\left(\beta+\frac{1}{n}\right)$, le produit $a\times(\sqrt{2}\times\sqrt{5})$ sera compris entre les premiers membres des égalités ci-dessus. De même, $\sqrt{2}$ étant compris entre α et $\alpha+\frac{1}{n}$, le produit $a.\sqrt{2}$ est compris entre $a\alpha$ et

$a\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)$; par suite, comme $\sqrt{5}$ est compris entre β et $\beta+\frac{1}{n}$, le produit $(a.\sqrt{2})\times\sqrt{5}$ sera compris entre les seconds membres des égalités ci-dessus.

Les produits $a\times(\sqrt{2}\times\sqrt{5})$ et $(a.\sqrt{2})\times\sqrt{5}$ sont donc compris entre les mêmes limites. Or, en développant le premier membre de la seconde égalité, et retranchant le premier membre de la première, on trouve pour la différence entre les deux limites :

$$\frac{a\alpha}{n}+\frac{a\beta}{n}+\frac{a}{n^2},$$

quantité qui peut être rendue aussi petite que l'on voudra en prenant n suffisamment grand.

Les produits considérés sont donc compris entre deux limites variables qu'on peut rapprocher l'une de l'autre autant qu'on le voudra; ces deux produits sont donc rigoureusement égaux; et l'on a

$$a\times(\sqrt{2}\times\sqrt{5})=(a.\sqrt{2})\times\sqrt{5},$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

On l'étendrait facilement à un nombre quelconque de facteurs.

200. III. *Un produit d'autant de facteurs incommensurables qu'on le voudra est indépendant de l'ordre de ces facteurs.*

Il résulte d'abord du principe I que l'on peut intervertir l'ordre des deux premiers facteurs, puisque leur produit s'effectue avant l'introduction des facteurs suivants. Démontrons que l'on peut intervertir l'ordre des deux derniers.

Pour cela, soit a le produit de tous les facteurs jusqu'aux deux derniers, que nous supposerons être $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$. Le produit total sera

$$(a\times\sqrt{2})\times\sqrt{5},$$

ou, en vertu du principe II,

$$a\times(\sqrt{2}\times\sqrt{5});$$

mais, en vertu du principe I, on peut écrire

$$a\times(\sqrt{5}\times\sqrt{2});$$

et, en vertu du principe II, ce dernier produit équivaut à

$$(a\times\sqrt{5})\times\sqrt{2}.$$

On voit donc qu'il est permis d'intervertir l'ordre des deux derniers facteurs.

Il en résulte qu'on peut intervertir l'ordre de deux facteurs consécutifs quelconques, car ces facteurs peuvent être considérés comme les derniers avant l'introduction des facteurs qui suivent.

Pouvant intervertir l'ordre de deux facteurs consécutifs quelconques, on peut, par des changements successifs, amener un facteur désigné à une place désignée quelconque. Et, comme on en peut faire autant pour chaque facteur, on peut amener tous les facteurs dans un ordre déterminé quelconque.

Donc, enfin, l'ordre des facteurs n'influe pas sur le produit; ce qu'il s'agissait de démontrer.

201. La première chose à faire, dans le calcul des quantités irrationnelles, est de simplifier les radicaux s'il y a lieu. Cette simplification repose sur le principe suivant :

IV. *La racine carrée d'un produit équivaut au produit des racines carrées de ses facteurs.*

Soient, par exemple, a, b, c, d les facteurs du produit; je dis qu'on a

$$\sqrt{a.b.c.d}=\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{d}\ .$$

En effet, le premier membre élevé au carré donne $a.b.c.d$ par définition. Voyons ce qu'on obtient en élevant au carré le second membre. Ce carré se présente d'abord sous la forme

$$(\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{d})\,(\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{d})\ ,$$

ou, en vertu du principe II,

$$\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{d}.\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{d}\ ,$$

ou, en vertu du principe III,

$$\sqrt{a}.\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{c}.\sqrt{d}.\sqrt{d}\ ,$$

ou, en vertu du principe II,

$$(\sqrt{a}.\sqrt{a})\times(\sqrt{b}.\sqrt{b})\times(\sqrt{c}.\sqrt{c})\times(\sqrt{d}.\sqrt{d})\ .$$

Mais, par définition, $\sqrt{a}.\sqrt{a}$ est égal à a; de même $\sqrt{b}.\sqrt{b}$ est égal à b, et ainsi des autres. Le produit obtenu peut donc s'écrire

$$a.b.c.d\ .$$

Ainsi le carré du second membre de l'égalité ci-dessus revient au carré du premier membre. Donc ces deux membres sont égaux eux-mêmes en valeur absolue. Et comme, quel que soit le signe qu'on prenne pour chacun des radicaux $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, etc., le produit aura nécessairement le signe $+$ ou le signe $-$, c'est-à-dire l'un des deux signes que l'on peut donner au premier membre ; il s'ensuit que les deux membres sont égaux pour la valeur absolue et pour les signes.

202. Supposons maintenant qu'il s'agisse de simplifier un radical ; par exemple

$$\sqrt{75a^3b^4x}\ .$$

On décomposera la quantité placée sous le radical en deux facteurs, dont l'un soit un carré parfait ; on pourra écrire ainsi

$$\sqrt{25a^2b^4\times 3ax}\ .$$

Or, en vertu du principe précédent, on peut extraire séparément (ou indiquer si l'on ne peut l'extraire) la racine de chacun des deux facteurs, ce qui donnera

$$\sqrt{25a^2b^4}\times\sqrt{3ax}\ .$$

La première racine s'extrait exactement (**168**); il vient donc

$$5ab^2\sqrt{3ax}\ ,$$

et le signe radical porte maintenant sur une quantité plus simple.

On trouvera de même que les quantités

$$\sqrt{108ab^5x^2}\ ,\quad \sqrt{363a^3b^3x^4}\ ,\quad \sqrt{864a^5b^2x^3}$$

peuvent s'écrire respectivement

$$9b^2x\sqrt{3ab}\ ,\quad 11abx^2\sqrt{3ab}\ ,\quad 12a^2bx\sqrt{6ax}\ .$$

Remarque. On nomme quantités irrationnelles *semblables* celles qui, lorsqu'elles ont été simplifiées, présentent la même quantité sous le radical.

Telles sont les deux quantités $9b^2x\sqrt{3ab}$ et $11abx\sqrt{3ab}$ obtenues ci-dessus.

203. On peut, au contraire, dans certains calculs, avoir intérêt à faire passer sous le radical un facteur placé devant ; il est clair qu'il faut alors élever ce facteur au carré.

Si l'on a, en effet, l'expression $a\sqrt{b}$, on peut l'écrire

$$\sqrt{a^2}\,.\,\sqrt{b}$$

ou, en vertu du principe IV,

$$\sqrt{a^2b}\ .$$

204. Ce que nous venons de dire d'un facteur peut se dire d'un dénominateur, car diviser une quantité par m, par exemple, revient à la multiplier par $\frac{1}{m}$.

Soit l'expression

$$\sqrt{\frac{a}{m^2}}, \quad \text{qui revient à} \quad \sqrt{\frac{1}{m^2}\cdot a} \quad \text{ou à} \quad \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2\cdot a}.$$

En vertu de ce qui précède (**201**), on pourra l'écrire

$$\sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2}\cdot\sqrt{a}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{m}\sqrt{a}, \quad \text{ou enfin} \quad \frac{\sqrt{a}}{m}.$$

On a donc

$$\sqrt{\frac{a}{m^2}}=\frac{\sqrt{a}}{m},$$

ce qui permet de faire passer un dénominateur hors d'un radical en en extrayant la racine, ou de l'y faire entrer en l'élevant au carré.

205. Nous pouvons maintenant passer en revue les différentes opérations qu'on peut avoir à effectuer sur les radicaux du second degré.

L'ADDITION et la SOUSTRACTION ne peuvent que s'indiquer, si les radicaux sont dissemblables. Ainsi, la somme de $\sqrt{a}$ et de $\sqrt{b}$, s'écrira simplement $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; leur différence $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Si les radicaux sont semblables, on opère l'addition ou la soustraction des quantités placées devant le radical; ce radical est un facteur commun dont on affecte le résultat. Ainsi la somme des quantités

$$\sqrt{108ab^5x^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{363a^3b^3x^4},$$

qui reviennent à $9b^2x\sqrt{3ab}$ et $11abx^2\sqrt{3ab}$,

est $$(9b^2x+11abx^2)\sqrt{3ab}.$$

Leur différence est $$(9b^2x-11abx^2)\sqrt{3ab}.$$

206. MULTIPLICATION. *Pour faire le produit de deux radicaux du second degré, on peut faire le produit des quantités placées sous chacun d'eux et affecter le produit du radical commun.*

On a, en effet, en vertu du principe IV (**201**),

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}.$$

Cette règle s'étend à un nombre quelconque de facteurs.

Il peut arriver que le produit soit susceptible de se simplifier, ou même qu'il soit rationnel. Ainsi :

Le produit de $\sqrt{5a^3b}$ par $\sqrt{15ab^2x}$ est $\sqrt{75a^4b^3x}$, qui revient à $5a^2b\sqrt{3bx}$.

Le produit de $\sqrt{2a^3x}$ par $\sqrt{18ab^4x^5}$ est $\sqrt{36a^4b^4x^6}$, qui revient à $6a^2b^2x^3$.

207. Division. *Pour diviser deux radicaux l'un par l'autre, on peut diviser l'une par l'autre les quantités placées sous chacun d'eux et affecter le quotient du radical commun.*

Désignons, en effet, par q le quotient des radicaux $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$; en sorte qu'on ait

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=q \quad \text{ou} \quad \sqrt{a}=\sqrt{b}\cdot q\,.$$

En élevant les deux membres au carré, il viendra

$$a=b\,.\,q^2\,,$$

d'où

$$q^2=\frac{a}{b} \quad \text{et} \quad q=\sqrt{\frac{a}{b}}\,.$$

Par conséquent

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\,.$$

Il peut arriver que le quotient soit susceptible de se simplifier, ou même qu'il soit rationnel. Ainsi :

Le quotient de $\sqrt{15a^3bx^2}$ par $\sqrt{10ab^2x^3}$ est $\sqrt{\dfrac{15a^3bx^2}{10ab^2x^3}}$, ou, en simplifiant la fraction (51), $\sqrt{\dfrac{3a^2}{2bx}}$.

Le quotient de $\sqrt{21ab^3x}$ par $\sqrt{12a^3x^3}$ est $\sqrt{\dfrac{21ab^3x}{12a^3x^3}}$, ou $\sqrt{\dfrac{7b^3}{4a^2x^2}}$, ou $\dfrac{b\sqrt{7b}}{2ax}$.

Le quotient de $\sqrt{18a^3bx^4}$ par $\sqrt{8ab^3x^2}$ est $\sqrt{\dfrac{18a^3bx^4}{8ab^3x^2}}$, ou $\sqrt{\dfrac{9a^2x^2}{4b^2}}$, ou $\dfrac{3ax}{2b}$.

208. La formation des puissances et l'extraction des racines des radicaux du second degré rentrant dans celles des radicaux d'un degré quelconque, et n'étant point nécessaires pour la résolution ni pour la discussion des problèmes du second degré, nous n'en traiterons pas ici d'une manière particulière. Il ne nous reste donc à parler que de quelques transformations qu'il est souvent utile de faire subir aux expressions algébriques affectées de radicaux du second degré.

Lorsqu'une fraction algébrique contient un ou plusieurs radicaux du second degré à son dénominateur, on peut les faire passer à son numérateur.

I. Soit d'abord l'expression $\frac{a}{m\sqrt{b}}$. En multipliant ses deux termes par $\sqrt{b}$, on obtient $\frac{a\sqrt{b}}{mb}$, expression dont le dénominateur est rationnel.

Si, par exemple, on a la fraction $\frac{9}{2\sqrt{3}}$, on obtiendra, en multipliant ses deux termes par $\sqrt{3}$,

$$\frac{9\sqrt{3}}{2\times3} \quad \text{ou} \quad \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

II. Soit, en second lieu, l'expression $\frac{a}{b+m\sqrt{c}}$. Multiplions ses deux termes par $b-m\sqrt{c}$, il viendra

$$\frac{a(b-m\sqrt{c})}{b^2-m^2c},$$

expression dont le dénominateur est rationnel.

Si, par exemple, on a la fraction $\frac{5}{4+2\sqrt{3}}$; en multipliant ses deux termes par $4-2\sqrt{3}$, il viendra

$$\frac{5(4-2\sqrt{3})}{16-4\times3}, \quad \text{ou} \quad \frac{5(4-2\sqrt{3})}{4}, \quad \text{ou encore} \quad \frac{5(2-\sqrt{3})}{2}.$$

III. Soit l'expression $\frac{a}{m\sqrt{b}+n\sqrt{c}}$. Multiplions ses deux termes par $m\sqrt{b}-n\sqrt{c}$, il viendra

$$\frac{a(m\sqrt{b}-n\sqrt{c})}{m^2b-n^2c},$$

expression dont le dénominateur est rationnel.

Si, par exemple, on a la fraction $\frac{9}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$; en multipliant les deux termes par $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$, il viendra

$$\frac{9(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{9\times2-4\times3}, \quad \text{ou} \quad \frac{9(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{6}, \quad \text{ou encore} \quad \frac{3(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{2}.$$

IV. Si le dénominateur contenait plus de deux radicaux, on pourrait encore, par des multiplications successives, parvenir à le rendre rationnel. Soit pour exemple la fraction

$$\frac{24}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}.$$

Mutiplions d'abord les deux termes par $\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$; il viendra

$$\frac{24(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2-3} \quad \text{ou} \quad \frac{24(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{5+2\sqrt{10}+2-3},$$

ou $$\frac{24(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4+2\sqrt{10}}, \text{ ou encore } \frac{12(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2+\sqrt{10}}.$$

Multiplions maintenant les deux termes par $\sqrt{10}-2$; il viendra

$$\frac{12(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{10}-2)}{10-4} \quad \text{ou} \quad 2(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{10}-2).$$

209. On a vu, dans la résolution de l'équation bicarrée (**187**), qu'on peut avoir un radical du second degré portant sur une quantité composée d'une partie rationnelle et d'une partie irrationnelle ; en un mot qu'il peut se présenter des expressions de la forme $\sqrt{a+\sqrt{b}}$. On peut, dans certains cas particuliers, transformer cette expression en une autre composée de deux radicaux séparés, telle que $\sqrt{m}+\sqrt{n}$.

Pour y parvenir, posons

$$x=\sqrt{a+\sqrt{b}},$$

ou $$x^2=a+\sqrt{b}, \text{ ou encore } x^2-a=\sqrt{b},$$

d'où l'on tire, en élevant les deux membres au carré, puis transposant,

$$x^4-2ax^2+a^2-b=0.$$

Cette équation bicarrée peut être considérée comme résultant de l'élimination d'une inconnue y (**193**) entre les deux équations

$$x^2+y^2=2a \quad \text{et} \quad xy=\sqrt{a^2-b}.$$

Or, si on traite ce système d'équations comme au n° **194**, on obtient :

$$(x+y)^2=2a+2\sqrt{a^2-b} \quad \text{et} \quad (x-y)^2=2a-2\sqrt{a^2-b}.$$

Par conséquent :

$$x+y=\pm\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}} \quad \text{et} \quad x-y=\pm\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}},$$

puis enfin

$$x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}},$$

ou, en faisant passer le dénominateur 2 sous le radical (**204**),

$$x = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} .$$

Sous cette forme, on voit que la transformation qu'on se propose serait effectuée si a^2-b était un carré parfait ; car en désignant par c la racine de ce carré, on aurait :

$$x = \pm\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}} .$$

Quant aux signes qu'il conviendrait de prendre, on remarquera que si l'on élève cette valeur au carré, on obtient

$$x = a \pm \sqrt{\frac{a^2-c^2}{4}} ,$$

et qu'il faut mettre le signe $+$ ou le signe $-$ devant le radical suivant que les deux radicaux séparés qui entrent dans la valeur de x sont pris avec le même signe ou en signe contraire. Or, on doit avoir aussi

$$x^2 = a + \sqrt{b} .$$

Les deux radicaux de la valeur trouvée pour x devront donc être pris avec le même signe, et ce signe devra être $+$ si l'expression proposée $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ est elle-même précédée du signe $+$. Ce signe devrait au contraire être $-$, si l'expression proposée était précédée du signe $-$. En sorte qu'on a

$$\pm\sqrt{a+\sqrt{b}} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}\right) .$$

S'il s'agissait au contraire de l'expression $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ qui conduit à la même équation bicarrée, ces deux radicaux séparés dans la valeur de x devraient être pris en signe contraire, afin que leur produit fût affecté du signe $-$, comme le terme $-\sqrt{b}$; et l'on aurait

$$\pm\sqrt{a-\sqrt{b}} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}\right) .$$

Soit, pour exemple, l'expression

$$\sqrt{8-\sqrt{60}} ,$$

On a, dans ce cas, $a^2 - b = 64 - 60 = 4$; d'où $c = 2$ et par suite

$$\sqrt{8-\sqrt{60}} = \sqrt{\frac{8+2}{2}} - \sqrt{\frac{8-2}{2}} = \sqrt{5} - \sqrt{3} .$$

La transformation se trouve ainsi effectuée.

§ II. Des quantités imaginaires du second degré.

210. Nous avons fait remarquer, au commencement du paragraphe précédent, que la racine carrée d'une quantité positive, qu'elle soit commensurable ou non, a toujours une existence réelle, puisqu'on peut toujours assigner deux limites numériques, aussi rapprochées qu'on le voudra, entre lesquelles elle soit comprise. Il n'en serait plus de même si la quantité dont on veut extraire la racine était une quantité négative. Non-seulement la racine carrée d'une quantité négative ne saurait être assignée en nombres, mais elle n'a même aucune existence réelle; car il résulte de la règle des signes (**114**) qu'aucune quantité réelle, soit positive, soit négative, ne peut, lorsqu'on la multiplie par elle-même, donner un produit négatif.

Ainsi $+2$, multiplié par lui-même, donne $+4$; et -2, multiplié par lui-même, donne également $+4$. Mais il n'existe aucune quantité réelle qui, multipliée par elle-même, puisse donner pour produit -4. La racine carrée de -4, n'a donc pas d'existence réelle; et l'expression $\sqrt{-4}$ n'est que le symbole d'une opération impossible.

Les expressions de cette espèce sont ce que l'on appelle des quantités *imaginaires*.

Toute racine de degré pair d'une quantité négative est encore une quantité *imaginaire;* car, d'après la règle des signes, toute puissance paire d'une quantité réelle, soit positive, soit négative, est nécessairement positive. Mais nous nous occuperons spécialement dans ce qui va suivre des imaginaires du second degré.

On donne ordinairement à ces quantités une forme plus commode. Reprenons comme exemple l'expression $\sqrt{-4}$. On regarde la quantité -4, placée sous le radical, comme le produit de $+4$ par -1 ; et pour extraire la racine carrée du produit on convient d'appliquer encore la règle du n° **201**, c'est-à-dire qu'on extrait, ou que du moins on indique la racine carrée de chaque facteur. On obtient ainsi $2.\sqrt{-1}$. De même l'expression $\sqrt{-a^2}$ pourrait s'écrire $a\sqrt{-1}$; l'expression $\sqrt{-3}$ s'écrirait $\sqrt{3}.\sqrt{-1}$.

En un mot, la racine d'une quantité négative s'écrit en multipliant par $\sqrt{-1}$ la racine de la même quantité prise positivement.

211. Pour additionner ou pour soustraire deux quantités de la forme $a\sqrt{-1}$, on opère l'addition ou la soustraction des quantités réelles que $\sqrt{-1}$ multiplie, et l'on met $\sqrt{-1}$ en facteur commun. Ainsi

$$a\sqrt{-1}+b\sqrt{-1}=(a+b)\sqrt{-1} \;;\quad 5\sqrt{-1}-3\sqrt{-1}=2\sqrt{-1}\,.$$

Pour multiplier l'une par l'autre deux quantités de la forme $a\sqrt{-1}$, on fait le produit des quantités réelles, et l'on multiplie l'un par l'autre les deux facteurs $\sqrt{-1}$.

Soit, par exemple, à multiplier $a\sqrt{-1}$ par $b\sqrt{-1}$; on multiplie d'abord a par b, ce qui donne ab; puis on multiplie $\sqrt{-1}$ par $\sqrt{-1}$. Ce dernier produit, qui n'est autre que le carré de $\sqrt{-1}$, donne -1 par la définition même de la racine carrée; le résultat total est donc $-ab$, c'est-à-dire le produit des quantités réelles pris en signe contraire.

Ainsi
$$(+3\sqrt{-1})\times(+5\sqrt{-1})=-15\,,$$
$$(+3\sqrt{-1})\times(-5\sqrt{-1})=+15\,.$$

Pour diviser l'une par l'autre deux quantités de la forme $a\sqrt{-1}$, on fait le quotient des quantités réelles, et le facteur $\sqrt{-1}$ disparaît.

Ainsi
$$\frac{a\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}}=\frac{a}{b}\;;\quad \frac{3\sqrt{-1}}{-5\sqrt{-1}}=-\frac{3}{5}\,.$$

Remarque I. On pourrait faire le produit de $\sqrt{-1}$ par $\sqrt{-1}$ en appliquant la règle du nº **206**, c'est-à-dire en effectuant la multiplication sous le radical. On trouverait ainsi $\sqrt{(-1)\times(-1)}$ ou $\sqrt{+1}$, c'est-à-dire ±1; tandis qu'en regardant le produit comme le carré de l'un des facteurs $\sqrt{-1}$, nous n'avons trouvé que -1. On pourrait expliquer cette contradiction apparente en remarquant que $\sqrt{-1}$ devant implicitement être pris avec un double signe, le produit $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$ peut lui-même être affecté d'un double signe; en sorte que si le produit absolu est -1, le produit, eu égard aux signes, est ∓1.

Mais il est préférable d'effectuer le produit comme nous l'avons fait en premier lieu; cette méthode étant conforme à la définition même de $\sqrt{-1}$, et indépendante de toute convention étrangère.

Remarque II. On voit que les règles qu'on vient de donner pour le calcul des quantités de la forme $a\sqrt{-1}$ ne sont que l'extension des règles établies pour le calcul des quantités réelles. Cette extension, dont l'utilité sera mieux sentie par la suite, est justifiée par la tendance de l'Algèbre à généraliser ses procédés.

212. Toute expression algébrique dans laquelle il entre des quantités de la forme $a\sqrt{-1}$ est une expression imaginaire. Celles qui sont les plus importantes à considérer, et auxquelles on peut, comme on le verra plus tard, ramener toutes les autres, sont les expressions de la forme $a+b\sqrt{-1}$, qui se composent d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. Nous allons reprendre en détail l'examen des opérations qu'on peut avoir à effectuer sur des quantités de cette forme.

I. Addition. Soient à additionner les deux quantités $a+b\sqrt{-1}$ et $c+d\sqrt{-1}$; on pourra d'abord écrire le résultat de cette manière : $a+b\sqrt{-1}+c+d\sqrt{-1}$. Mais on peut aussi, en intervertissant l'ordre des termes, écrire $a+c+b\sqrt{-1}+d\sqrt{-1}$, ou (**211**) $(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}$.

Et l'on voit que la somme de deux quantités de la forme $a+b\sqrt{-1}$ est encore une quantité de même forme.

II. Soustraction. On verrait de la même manière que la différence des deux quantités $a+b\sqrt{-1}$ et $c+d\sqrt{-1}$ est

$$(a-c)+(b-d)\sqrt{-1},$$

c'est-à-dire une quantité de même forme.

213. III. Multiplication. Soit à multiplier $a+b\sqrt{-1}$ par $c+d\sqrt{-1}$. En multipliant chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, et en ayant égard à ce qui a été dit au n° **211**, on obtiendra

$$ac+bc\sqrt{-1}+ad\sqrt{-1}-bd \quad \text{ou} \quad (ac-bd)+(bc+ad)\sqrt{-1}.$$

Ainsi le produit est encore une quantité de même forme.

Remarque I. On peut observer que si l'on avait $c=a$ et $d=-b$, le résultat se réduirait à a^2+b^2. Ainsi on a ce théorème :

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2+b^2,$$

qui n'est que l'extension du théorème analogue démontré pour les quantités réelles au n° **56**.

Remarque II. Le produit ne peut être nul qu'autant que la partie réelle et la partie imaginaire s'annulent séparément, puisque l'une d'elles ne saurait se réduire avec l'autre. Pour que le produit fût nul, il faudrait donc que l'on eût à la fois

$$ac - bd = 0 \quad \text{et} \quad bc + ad = 0 \ .$$

Faisant la somme des carrés, on obtient

$$a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2 = 0 \ ,$$

ou

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 0 \ .$$

Or, un produit de quantités réelles ne peut être nul qu'autant que l'un des facteurs est nul. On doit donc avoir

ou bien $a^2 + b^2 = 0$, ce qui exige $a = 0$ et $b = 0$,
ou bien $c^2 + d^2 = 0$, ce qui exige $c = 0$ et $d = 0$.

Dans le premier cas, le facteur $a + b\sqrt{-1}$ s'annule; dans le second, c'est le facteur $c + d\sqrt{-1}$.

Ainsi, *un produit de deux quantités imaginaires du second degré ne peut être nul qu'autant que l'un des deux facteurs est nul.*

IV. Division. Soit à diviser $a + b\sqrt{-1}$ par $c + d\sqrt{-1}$. On peut d'abord écrire le quotient sous la forme fractionnaire

$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{c + d\sqrt{-1}} \ .$$

Multiplions les deux termes de cette expression fractionnaire par $c - d\sqrt{-1}$; il viendra

$$\frac{(ac + bd) + (bc - ad)\sqrt{-1}}{c^2 + d^2} \ ;$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\sqrt{-1} \ .$$

Ainsi le quotient se compose encore d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, c'est-à-dire qu'il est de la même forme que le dividende et que le diviseur.

On trouverait ainsi que le quotient de $10 + 15\sqrt{-1}$ par $1 + 2\sqrt{-1}$ est $8 - \sqrt{-1}$.

214. V. Soit à former le carré de la quantité $a + b\sqrt{-1}$. D'après les règles de la multiplication, on trouvera

$$(a^2 - b^2) + 2ab\sqrt{-1} \ ,$$

quantité de la même forme que $a + b\sqrt{-1}$.

Ainsi le carré de $3 + 2\sqrt{-1}$ est $5 + 12\sqrt{-1}$.

VI. Soit enfin à extraire la racine de $a + b\sqrt{-1}$. Nous allons faire voir qu'elle est encore de même forme. Pour le démontrer, posons

$$\sqrt{a + b\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1} \qquad [1].$$

Il s'agira de démontrer qu'on peut trouver pour x et y des valeurs réelles propres à satisfaire à cette égalité.

Si l'on élève les deux membres au carré, on obtient

$$a + b\sqrt{-1} = x^2 - y^2 + 2xy\sqrt{-1} \qquad [2].$$

Or, comme on suppose x et y réels, et que les quantités réelles ne peuvent se réduire avec les imaginaires, cette équation ne pourra subsister qu'autant qu'il y aura égalité entre les quantités réelles, d'une part, et les quantités imaginaires de l'autre. On devra donc avoir à la fois

$$x^2 - y^2 = a \qquad [3]$$

et

$$2xy = b \qquad [4].$$

On pourrait obtenir les valeurs de x et de y au moyen d'une équation bicarrée, mais les résultats se présenteront sous une forme plus simple en opérant comme il suit.

Multiplions l'équation [3] par b, l'équation [4] par a, et retranchons ensuite membre à membre pour faire disparaître les termes indépendants de x et de y ; nous trouverons

$$bx^2 - 2axy - by^2 = 0 ,$$

ou, en divisant par y^2,

$$b\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2a\left(\frac{x}{y}\right) - b = 0 .$$

Résolvons cette équation en y regardant $\frac{x}{y}$ comme l'inconnue ; il viendra

$$\frac{x}{y} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \qquad [5].$$

Multipliant membre à membre avec l'équation [4], on obtient

$$2x^2 = a \pm \sqrt{a^2 + b^2} ,$$

d'où

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \qquad [6],$$

en ne prenant que le signe $+$, attendu que x^2 doit être positif.

De là

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \qquad [7],$$

quantité réelle.

Pour obtenir y, il suffit de mettre pour x^2 sa valeur [6] dans l'équation [3], qui donne

$$y^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} - a = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2},$$

d'où

$$y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \qquad [8],$$

quantité réelle, puisque $\sqrt{a^2 + b^2}$ est plus grand que $\sqrt{a^2}$ ou que a.

En ayant égard à l'équation [4], on voit que x et y doivent être pris avec le même signe si b est positif, et avec des signes contraires si b est négatif. On aura donc

$$\sqrt{a + b\sqrt{-1}} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \sqrt{-1} \right)$$

et

$$\sqrt{a - b\sqrt{-1}} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \sqrt{-1} \right),$$

quantités qui sont bien de la forme $a + b\sqrt{-1}$.

Soit, par exemple, à extraire la racine de $5 + 12\sqrt{-1}$; on aura $a = 5$, $b = 12$, par suite

$$\begin{aligned}
\sqrt{5 + 12\sqrt{-1}} &= \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{25 + 144} + 5}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{25 + 144} - 2}{5}} \sqrt{-1} \right) \\
&= \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{169} + 5}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{169} - 5}{2}} \sqrt{-1} \right) \\
&= \pm \left(\sqrt{\frac{13 + 4}{2}} + \sqrt{\frac{13 - 5}{2}} \sqrt{-1} \right) \\
&= \pm \left(3 + 2\sqrt{-1} \right).
\end{aligned}$$

215. Le lecteur a pu se demander plusieurs fois dans quel but, si les quantités de la forme $b\sqrt{-1}$ ou $a + b\sqrt{-1}$ n'ont aucune réalité, on étend à ces expressions les règles établies pour le calcul des quantités réelles, et quelle est l'utilité qu'on peut retirer du calcul des quantités imaginaires. A cela, nous pourrions répondre que ces quantités jouant un rôle dans la discussion des problèmes du second degré, il importe de les étudier d'abord en elles-mêmes. Mais on peut ajouter aussi que ces sortes de quantités, bien que n'ayant aucune réalité, peuvent servir à des transformations auxquelles il serait souvent très-difficile de parvenir sans leur secours. Elles forment, comme on l'a dit quelquefois, une sorte de pont que l'on jette d'une expression réelle à une autre, et que l'on brise après l'avoir passé.

Pour donner un exemple élémentaire de cette propriété, qui justifierait à elle seule l'extension des règles du calcul des quantités réelles aux quantités imaginaires, proposons-nous de démontrer ce théorème d'arithmétique :

Si un nombre est la somme de deux carrés, son carré est encore la somme de deux carrés.

Pour le faire voir, désignons par n un nombre qui soit la somme de deux carrés a^2 et b^2, en sorte qu'on ait

$$n = a^2 + b^2 .$$

En vertu de la propriété démontrée au n° **215**, on peut écrire cette égalité de la manière suivante :

$$n = (a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1}) .$$

Élevons les deux membres au carré, il viendra

$$n^2 = (a + b\sqrt{-1})^2 (a - b\sqrt{-1})^2 ,$$

ou, en développant chaque carré,

$$n^2 = (a^2 - b^2 + 2ab\sqrt{-1})(a^2 - b^2 - 2ab\sqrt{-1}) ,$$

ou, en vertu de la propriété déjà citée,

$$n^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 .$$

Or, le second membre est bien la somme de deux carrés ; savoir : du carré de $a^2 - b^2$ et du carré de $2ab$.

En sorte que non-seulement on a démontré la proposition, mais encore on a des formules pour la décomposition de n^2 en deux carrés.

Soit, par exemple, $n = 5$. Ce nombre est la somme de deux carrés 4 et 1. Si l'on pose $a^2 = 4$ et $b^2 = 1$, ou $a = 2$ et $b = 1$, on aura, d'après ce qui précède,

$$n^2 = (4 - 1)^2 + 4.4.1 = 3^2 + 4^2 ,$$

ainsi n^2 ou 25 est la somme du carré de 3 et du carré de 4.

Posons maintenant $N = 4^2 + 3^2$, en faisant $a = 4$ et $b = 3$. Les mêmes formules donneront

$$N^2 = (16 - 9)^2 + 4.4^2.3^2 = 7^2 + 24^2 ;$$

ainsi N^2, ou le carré de 25, c'est-à-dire 625, est la somme du carré de 7 et du carré de 24 ; ce qui est en effet. Et ainsi de suite.

Sans doute on aurait pu démontrer ce théorème sans le secours des quantités imaginaires, mais la démonstration qui précède est très-propre à faire voir, sur un exemple élémentaire et simple, comment, d'une relation entre quantités réelles, on peut déduire, par le secours des imaginaires, une autre relation entre quantités réelles.

§ III. Discussion des problèmes du second degré.

216. Nous avons vu (**177**, **179**) qu'une équation du second degré peut toujours être ramenée à la forme $x^2+px+q=0$, ou à la forme plus générale $ax^2+bx+c=0$. Pour cela nous avons dit qu'il fallait faire disparaître les dénominateurs et effectuer les calculs. Nous pouvons ajouter à présent que, si l'équation contenait un ou deux radicaux du second degré, sous lesquels l'inconnue fût engagée, il faudrait les faire disparaître.

A cet effet, s'il n'y a qu'un seul radical, on l'isole dans un membre; et, en élevant les deux membres au carré, on le fait disparaître. Soit, par exemple, l'équation :

$$2x+3\sqrt{x-5}=24,$$

on en tirera successivement

$$3\sqrt{x-5}=24-2x \quad \text{d'où} \quad 9(x-5)=(24-2x)^2,$$

où il n'y aura plus qu'à effectuer les calculs et transposer.

S'il y a deux radicaux, on les isole dans un membre; on élève au carré; le membre qui contenait les radicaux ne contient plus alors que leur double produit. On isole le double produit dans un seul membre; et, en élevant une seconde fois au carré, on obtient une équation débarrassée de radicaux. Soit, par exemple, l'équation :

$$\sqrt{x}+\sqrt{13-x}=5,$$

on en tirera successivement

$$x+13-x+2\sqrt{x(13-x)}=25, \quad \text{ou} \quad \sqrt{x(13-x)}=6;$$

puis

$$x(13-x)=36,$$

où il n'y aura plus que les calculs à effectuer.

Cela posé, reprenons l'équation du second degré sous la forme :

$$x^2+px+q=0 \qquad [1].$$

Nous avons vu (**177**) qu'en la résolvant on obtient les deux valeurs :

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p}{4}-q},$$

$$x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};$$

Ces valeurs, que nous désignons par x' et x'', sont ce que l'on a l'habitude d'appeler les *racines* de l'équation du second degré. Il est important de ne pas les confondre avec le *radical* qu'elles renferment.

Si on les ajoute on obtient

$$x'+x''=-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=-p\ ,$$

et si on les multiplie, on trouve pour produit

$$x'x''=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=q\ .$$

Ainsi : 1° *la somme des racines d'une équation du second degré, de la forme* $x^2+px+q=0$, *est égale au coefficient de la première puissance de* x, *pris en signe contraire ; et,* 2° *le produit de ces mêmes racines est égal au terme indépendant de* x.

Réciproquement : si deux quantités a et b remplissent ces conditions, en sorte qu'on ait à la fois

$$a+b=-p \quad \text{et} \quad ab=q\ ;$$

ces quantités sont racines de l'équation [1], c'est-à-dire que, mises à la place de x, elles satisfont à l'équation. Car, on tire de la première relation

$$b=-p-a\ ,$$

et, en mettant pour b cette valeur dans la seconde, il vient

$$-pa-a^2=q \quad \text{ou} \quad a^2+pa+q=0\ .$$

On démontrerait, en éliminant a au contraire, qu'on a aussi

$$b^2+pb+q=0\ .$$

217. Remplaçons, dans l'équation [1], p et q par leurs valeurs $-(x'+x'')$ et $x'x''$; il viendra

$$x^2-(x'+x'')x+x'x''=0$$

ou

$$x^2-x'x-x''x+x'x''=0\ ,$$

ou encore

$$x(x-x')-x''(x-x')=0\ ,$$

ou enfin

$$(x-x')(x-x'')=0 \qquad [2].$$

Ainsi, *le premier membre de l'équation* $x^2+px+q=0$ *se décompose en deux facteurs du premier degré, formés de l'inconnue* x *diminuée alternativement des deux racines.*

Si, par exemple, on a l'équation

$$x^2-5x+6=0\ ,$$

qui a pour racines 2 et 3 ; son premier membre pourra se mettre sous la forme $(x-2)(x-3)$, ce qu'il est facile de vérifier.

Pareillement, le premier membre de l'équation

$$x^2+x-6=0 ,$$

qui a pour racines $+2$ et -3, pourra se mettre sous la forme

$$(x-2)(x+3) ,$$

attendu que la différence entre x et -3 est $x+3$.

Remarque I. Le théorème que nous venons de démontrer fait comprendre pourquoi une équation du second degré peut être satisfaite de deux manières; c'est que, son premier membre pouvant se décomposer en deux facteurs du premier degré, on peut annuler ce premier membre en égalant à zéro l'un ou l'autre des deux facteurs.

Si, par exemple, on a l'équation $x^2-5x+6=0$, et qu'on la mette sous la forme

$$(x-2)(x-3)=0 ,$$

on voit qu'elle peut être satisfaite, soit en posant $x-2=0$, d'où $x=2$; soit en posant $x-3=0$, d'où $x=3$.

Remarque II. Le même théorème démontre aussi qu'*une équation du second degré n'a que deux racines*, c'est-à-dire ne peut être satisfaite que de deux manières. Et, en effet, en mettant l'équation [1] sous la forme [2], on voit bien qu'on ne peut satisfaire à l'équation, c'est-à-dire annuler son premier membre, qu'en annulant l'un des deux facteurs (**215**, rem. II), ce qui donne ou $x-x'=0$ d'où $x=x'$, ou $x-x''=0$ d'où $x=x''$.

Remarque III. Il résulte encore du même théorème que *si* a *est une des racines de l'équation* $x^2+px+q=0$, *son premier membre est divisible par* $x-a$; car, si l'on appelle b la seconde racine, le premier membre pourra se mettre sous la forme $(x-a)(x-b)$; donc il est divisible par $x-a$.

218. Discutons maintenant les valeurs tirées de l'équation $x^2+px+q=0$, savoir

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad \text{et} \quad x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} .$$

I. Faisons d'abord l'hypothèse $q>0$.

En même temps, il peut arriver que la quantité placée sous le radical soit positive, nulle ou négative.

Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q>0$, les deux racines sont réelles; et comme

$\frac{p^2}{4}-q$ est alors moindre que $\frac{p^2}{4}$, sa racine est moindre que $\frac{p}{2}$; c'est-à-dire que le radical est alors moindre, en valeur absolue, que le terme $-\frac{p}{2}$; c'est donc ce terme qui donne son signe aux deux racines; ainsi, elles sont de même signe; toutes deux négatives si p est positif, toutes deux positives si p est négatif. (On ne peut supposer $p=0$, puisque $\frac{p^2}{4}-q$ est positif.)

Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q=0$, le radical disparaît; les deux racines se réduisent à $-\frac{p}{2}$; elles sont donc égales; négatives si p est positif; nulles, si p est nul; positives, si p est négatif.

Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q<0$, le radical porte sur une quantité négative; les deux racines sont donc imaginaires. Elles seraient égales et de signe contraire si p était nul.

II. Faisons, en second lieu, l'hypothèse $q=0$.

Dans ce cas,

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}}=-\frac{p}{2}+\frac{p}{2}=0,$$
$$x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}}=-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=-p.$$

Ainsi, l'une des racines est nulle, l'autre est de signe contraire à p; elle serait nulle aussi si l'on avait, en même temps, $p=0$.

III. Faisons, enfin, l'hypothèse $q<0$.

Dans ce cas, $-q$ est positif; la quantité placée sous le radical est donc positive; les deux racines sont réelles. Mais comme $\frac{p^2}{4}-q$ est alors plus grand que $\frac{p^2}{4}$, sa racine est plus grande que $\frac{p}{2}$, c'est-à-dire que le radical est alors plus grand, en valeur absolue, que le terme $-\frac{p}{2}$; c'est donc le radical qui donne son signe à chaque racine; l'une d'elles est donc positive et l'autre négative, quel que soit le signe de p. La plus grande, en valeur absolue, est celle où le radical est de même signe que $-\frac{p}{2}$, c'est-à-dire que celle qui est de signe contraire à p. Elles seraient égales et de signe contraire si p était nul.

219. Cette discussion peut être présentée d'une autre manière, fondée sur les théorèmes du n° **216**, et plus facile à retenir.

I. Soit $q>0$. Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q>0$, les deux racines sont réelles. De plus, elles sont de même signe puisque leur produit q est positif. Elles sont positives si leur somme $-p$ est positive, c'est-à-dire si p est négatif; elles sont négatives si leur somme $-p$ est négative, c'est-à-dire si p est positif. On ne peut, dans ce cas, supposer $p=0$.

Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q=0$, les deux racines sont égales; chacune vaut la moitié de leur somme, c'est-à-dire $-\frac{p}{2}$; elles sont positives, nulles ou négatives, selon que p est négatif, nul ou positif.

Si l'on a $\frac{p^2}{4}-q<0$, les deux racines sont imaginaires. Elles sont égales et de signe contraire si leur somme $-p$ est nulle, c'est-à-dire si $p=0$.

II. Soit $q=0$. Le produit des deux racines étant nul, il faut que l'une d'elles le soit. L'autre est alors égale à leur somme $-p$, et est positive, nulle ou négative, suivant que p est négatif, nul ou positif.

III. Soit $q<0$. Les deux racines sont réelles. Elles sont de signe contraire puisque leur produit q est négatif. La plus grande en valeur absolue est de même signe que leur somme $-p$, c'est-à-dire positive si p est négatif, et négative si p est positif. Si p était nul, les deux racines étant de signe contraire devraient être égales en valeur absolue.

220. On peut, à l'aide de ces remarques, reconnaître la nature des racines d'une équation du second degré avant de l'avoir résolue. Soit, par exemple, l'équation

$$x^2-7x+12=0 .$$

Ici $\frac{p^2}{4}-q$ est égal à $\frac{49}{4}-12$ ou à $\frac{49}{4}-\frac{48}{4}$, quantité positive.

Les deux racines sont donc réelles. Elles sont de même signe, puisque leur produit est $+12$; elles sont positives, puisque leur somme est $+7$.

Soit l'équation $$x^2+7x+12=0 .$$

Les deux racines sont encore réelles et de même signe; mais elles sont négatives, puisque leur somme est -7.

Soit l'équation $x^2+7x-12=0$.

Les deux racines sont réelles; elles sont de signe contraire, puisque leur produit est -12. La plus grande est négative, puisque leur somme est -7.

221. Remarque I. Lorsque les racines sont égales, le premier membre est un carré parfait. Cela résulte du théorème du n° **217**, puisque ce premier membre revient alors à $(x-x')(x-x')$ ou à $(x-x')^2$. Mais il est bon de le voir directement. On a alors $\frac{p^2}{4}-q=0$ ou $q=\frac{p^2}{4}$. Si, dans l'équation proposée, on remplace q par cette valeur, on obtient

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=0 \quad \text{ou} \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0 .$$

Remarque II. Lorsque les racines sont imaginaires, le premier membre est la somme de deux quantités positives, et ne saurait par conséquent devenir nul pour aucune valeur réelle de x, ce qui rend l'impossibilité manifeste. On a, en effet, dans ce cas, $\frac{p^2}{4}-q<0$ ou $q>\frac{p^2}{4}$. On peut donc poser $q=\frac{p^2}{4}+\alpha^2$, en désignant par α^2 une quantité essentiellement positive. Mettant pour q cette valeur dans l'équation, elle devient

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}+\alpha^2=0 \quad \text{ou} \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\alpha^2=0 .$$

Sous cette forme, on voit bien qu'aucune valeur réelle mise à la place de x ne saurait satisfaire à l'équation; car, que $x+\frac{p}{2}$ soit positif ou négatif, son carré est toujours positif.

Remarque III. Lorsque les coefficients de l'équation, savoir p et q, sont réels, les deux racines sont toujours réelles ensemble ou imaginaires ensemble. Car, si l'une des racines était une quantité réelle a, et que l'autre fût une quantité imaginaire $b+c\sqrt{-1}$, on aurait, en vertu des théorèmes du n° **216**,

$$-p=a+b+c\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad q=a(b+c\sqrt{-1})$$

ou $$p=-(a+b)-c\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad q=ab+ac\sqrt{-1} ,$$

c'est-à-dire que les coefficients p et q seraient tous deux imaginaires.

Remarque IV. Si l'équation est numérique et que les coefficients p et q soient commensurables, les racines sont toujours commensurables ensemble ou incommensurables ensemble. Car, si l'une des racines était une quantité commensurable a, et l'autre une quantité incommensurable, pouvant avoir une partie commensurable, telle que $b+\sqrt{c}$, on aurait, en vertu des théorèmes déjà cités,

$$-p=a+b+\sqrt{c} \quad \text{et} \quad q=a(b+\sqrt{c})$$

ou $$p=-(a+b)-\sqrt{c} \quad \text{et} \quad q=ab+\sqrt{a^2c} \;,$$

c'est-à-dire que les coefficients p et q seraient tous deux incommensurables.

222. Nous avons supposé jusqu'ici que l'on pouvait mettre l'équation sous la forme $x^2+px+q=0$; c'est-à-dire que dans l'équation plus générale $ax^2+bx+c=0$, a n'était pas nul, et qu'alors on pouvait diviser par a. Il s'agit de voir maintenant ce qui arriverait si des hypothèses particulières faites sur les données du problème venaient à annuler a.

Pour cela, changeons d'abord x en $\frac{1}{y}$; aux plus grandes valeurs de y correspondront les plus petites valeurs de x, *et vice versa*. On obtient ainsi

$$\frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}+c=0 \;,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$a+by+cy^2=0 \;.$$

Faisons maintenant l'hypothèse $a=0$; l'équation se réduit à

$$by+cy^2=0 \quad \text{ou} \quad y(b+cy)=0 \;.$$

On satisfait à cette équation, soit en posant $y=0$, soit en posant

$$b+cy=0 \;, \quad \text{d'où} \quad y=-\frac{b}{c} \;;$$

mais puisque $x=\frac{1}{y}$, on déduit de ces valeurs de y

$$x=\frac{1}{0} \quad \text{et} \quad x=-\frac{c}{b} \;.$$

La première de ces valeurs est une valeur *infinie* (**122**), que l'on n'aurait pas soupçonnée si l'on se fût contenté de faire $a=0$ dans l'équation proposée, puisqu'elle se réduit alors à

$$bx+c=0 \;,$$

et ne donne pour x que la seconde valeur $-\frac{c}{b}$.

Si l'on fait en même temps $a=0$ et $b=0$, l'équation en y ci-dessus se réduit à

$$cy^2=0\ ,$$

et donne pour y deux valeurs nulles. Il en résulte pour x deux valeurs infinies, et c'est ce qu'on pouvait prévoir puisque la seconde valeur $-\frac{c}{b}$ se réduit alors à $-\frac{c}{0}$ ou à l'infini.

223. On aurait pu faire les mêmes hypothèses dans les valeurs générales tirées de l'équation $ax^2+bx+c=0$. Ces valeurs sont (**179**)

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ,\quad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ .$$

Si l'on suppose $a=0$, on trouve

$$x'=\frac{-b+b}{0}=\frac{0}{0}\quad \text{et}\quad x''=\frac{-2b}{0}=\text{l'infini.}$$

On trouve bien une valeur infinie, mais l'autre se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour faire voir que cette indétermination n'est qu'apparente, on multiplie les deux termes de x' par

$$-b-\sqrt{b^2-4ac}\ ,$$

ce qui donne

$$x'=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{-2a\left(b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}=-\frac{4ac}{2a\left(b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}\ .$$

Sous cette forme, on voit que, si l'on fait $a=0$, la valeur de x' se réduit à $\frac{0}{0}$; mais que si, avant de faire cette hypothèse, on supprime le facteur $2a$ commun aux deux termes (**125**), on obtient

$$-\frac{2c}{b+b}\quad \text{ou}\quad -\frac{c}{b}\ ,$$

qui est bien la valeur finie et déterminée qu'on devait obtenir.

Si l'on fait à la fois $a=0$ et $b=0$, les deux valeurs de x se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Quant à la première, on vient de voir que l'indétermination n'est qu'apparente et que la véritable valeur est $-\frac{c}{b}$, qui, pour $b=0$, se réduit à $-\frac{c}{0}$ ou à l'infini.

Pour la seconde, multiplions ses deux termes par $-b+\sqrt{b^2-4ac}$, ce qui donne

$$x''=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{2a(-b+\sqrt{b^2-4ac})}=-\frac{4ac}{2a(-b+\sqrt{b^2-4ac})},$$

ou, en supprimant le facteur commun $2a$,

$$x''=-\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Si maintenant on fait $a=0$ et $b=0$, cette valeur se réduit à $-\frac{2c}{0}$, c'est-à-dire à l'infini.

Ainsi, pour $a=0$ et $b=0$, les deux racines sont infinies, comme cela devait être, d'après ce qui a été dit au numéro précédent.

Enfin, si l'on faisait à la fois $a=0$, $b=0$ et $c=0$, les deux valeurs de x se présenteraient encore toutes les deux sous la forme $\frac{0}{0}$; mais dans ce cas l'indétermination serait réelle. Car il est évident que, dans ce cas, l'équation pourrait être satisfaite par une valeur quelconque de x.

224. Nous allons appliquer cette discussion à quelques exemples particuliers.

PROBLÈME I. *Trouver le dénominateur d'une fraction dont le numérateur est* a, *sachant que, si l'on ajoute* b *à chacun des deux termes, la fraction augmente de* m.

Soit x le dénominateur demandé. On devra avoir

$$\frac{a+b}{x+b}-\frac{a}{x}=m,$$

ou

$$mx^2-(1-m)bx+ab=0,$$

d'où

$$x=\frac{(1-m)b\pm\sqrt{(1-m)^2b^2-4mab}}{2m}.$$

1° Ces deux valeurs seront réelles et positives si l'on a

$$(1-m)^2b^2>4mab \quad \text{et} \quad 1-m>0.$$

Soient, par exemple, $a=3$, $b=2$, $m=\frac{1}{12}$, on trouvera

$$x=\frac{\frac{11}{12}.2\pm\sqrt{\left(\frac{11}{12}\right)^2.4-4.\frac{1}{12}.3.2}}{2.\frac{1}{12}}=11\pm7,$$

d'où $x'=18$ et $x''=4$.

Si l'on adopte la première valeur, la fraction demandée est $\frac{3}{18}$, et se change en $\frac{5}{20}$ quand on ajoute 2 à chacun de ses termes. Or, $\frac{5}{20}-\frac{3}{18}$ ou $\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$ vaut effectivement $\frac{1}{12}$.

Si l'on adopte la seconde valeur, la fraction demandée est $\frac{3}{4}$, et se change en $\frac{5}{6}$ quand on ajoute 2 à chacun de ses termes. Or, $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{1}{12}$.

2° Les deux valeurs deviendraient égales si l'on avait

$$(1-m)^2b^2=4mab\ .$$

Soient, par exemple, $a=1$, $b=8$, $m=\frac{1}{2}$; on trouvera pour ces deux valeurs $x=4$. La fraction demandée est alors $\frac{1}{4}$, et se change en $\frac{9}{12}$ ou $\frac{3}{4}$ quand on ajoute 8 à chacun de ses termes. Or, $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

3° Les deux valeurs seraient imaginaires si l'on avait :

$$(1-m)^2b^2<4mab\ .$$

C'est ce qui arriverait si l'on avait, par exemple, $a=1$, $m=\frac{1}{3}$, $b=2$.

Dans ce cas le problème serait impossible.

4° On trouverait une racine positive et une négative, si l'on supposait b négatif; c'est-à-dire si l'on supposait qu'au lieu d'ajouter un même nombre aux deux termes de la fraction on en retranchât un même nombre.

Soient, par exemple, $a=11$, $b=-2$, $m=\frac{5}{12}$; on trouvera

$$x=\frac{-\frac{7}{12}\cdot 2\pm\sqrt{\frac{49}{144}\cdot 4+4\cdot\frac{5}{12}\cdot 11\cdot 2}}{2\cdot\frac{5}{12}}=\frac{-7\pm 37}{5}\ ,$$

d'où

$$x'=6 \quad \text{et} \quad x''=-8\tfrac{4}{5}\ .$$

La seconde solution est purement algébrique; la première donne pour la fraction demandée $\frac{11}{6}$. Cette fraction, quand on retranche 2 à chacun de ses termes, devient $\frac{9}{4}$. Or, $\frac{9}{4}-\frac{11}{6}$ égale en effet $\frac{5}{12}$.

5° On trouverait une solution infinie si l'on faisait $m=0$, c'est-à-dire si l'on demandait que la seconde fraction fût équivalente à la première.

Les deux valeurs de x sont alors

$$x'=\frac{b}{0} \quad \text{et} \quad x''=a .$$

La seconde solution est évidente : car si le dénominateur est égal au numérateur, auquel cas la fraction équivaut à l'unité, en ajoutant un même nombre aux deux termes on ne change pas sa valeur.

La première solution s'explique avec la même facilité; car si le dénominateur x est infini, il en est de même du dénominateur $x+b$; les deux fractions $\frac{a+b}{x+b}$ et $\frac{a}{x}$ sont donc nulles toutes les deux, et, par conséquent, leur différence est également nulle.

225. Problème II. *Trouver les rayons, extérieur et intérieur, d'une sphère creuse de matière quelconque, connaissant l'épaisseur de la matière et le volume qu'elle occupe.*

Soit x le rayon intérieur, le rayon extérieur sera $x+e$ en désignant par e l'épaisseur de la matière. Le volume que cette matière occupe est la différence entre les deux sphères dont les rayons sont $x+e$ et x; on doit donc avoir, en appelant V ce volume,

$$\frac{4}{3}\pi(x+e)^3-\frac{4}{3}\pi x^3=\mathrm{V}\ ^*,$$

ou, en divisant par $\frac{4\pi}{3}$,

$$(x+e)^3-x^3=\frac{3\mathrm{V}}{4\pi}.$$

Si l'on fait le carré de $x+e$, on trouve $x^2+2ex+e^2$; et en multipliant ce carré par $x+e$, on obtient pour le cube de ce binome

$$x^3+3ex^2+3e^2x+e^3 .$$

* Le volume d'une sphère a pour expression les $\frac{4}{3}$ du rapport π de la circonférence au diamètre, multipliés par le cube du rayon.

Mettant cette valeur dans l'équation ci-dessus, et supprimant les termes en x^3 qui se détruisent, il vient

$$3ex^2+3e^2x+e^3=\frac{3V}{4\pi},$$

ou

$$x^2+ex+\frac{e^2}{3}-\frac{V}{4\pi e}=0 \qquad [1].$$

On tire de cette équation

$$x=-\frac{e}{2}\pm\sqrt{\frac{V}{4\pi e}-\frac{e^2}{12}}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que ces valeurs soient réelles; mais comme alors la seconde est nécessairement négative, il faut, de plus, que la première soit positive. Les deux racines devant être de signe contraire, il faut que le dernier terme de l'équation [1] soit négatif (**216**), et cette condition suffit en même temps pour la réalité des racines (**218**).

Posons donc $\frac{e^2}{3}-\frac{V}{4\pi e}<0$, d'où $V>\frac{4}{3}\pi e^3$.

Cette condition exprime que le volume donné doit être plus grand que celui de la sphère qui aurait pour rayon l'épaisseur donnée; et, en effet, le plus petit volume qu'on puisse obtenir en conservant une épaisseur donnée, correspond évidemment au cas où le rayon intérieur serait nul; la matière occuperait alors une sphère pleine ayant l'épaisseur donnée pour rayon.

Si l'on avait $V=\frac{4}{3}\pi e^2$, on devrait trouver *zéro* pour la valeur positive de x; et c'est ce qui arrive en effet, car on a alors

$$x=-\frac{e}{2}+\sqrt{\frac{4\pi e^3}{3.4\pi e}-\frac{e^2}{12}}=-\frac{e}{2}+\sqrt{\frac{e^2}{3}-\frac{e^2}{12}},$$

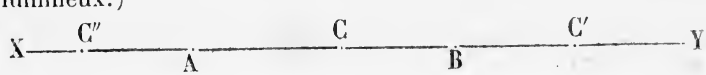
ou

$$x=-\frac{e}{2}+\sqrt{\frac{e^2}{4}}=-\frac{e}{2}+\frac{e}{2}=0.$$

Quant à la valeur négative, elle est purement algébrique, et ne peut convenir au problème.

226. Problème III. *Trouver sur la droite* XY*, qui joint deux points lumineux* A *et* B*, le point qui reçoit de chacun d'eux la même quantité de lumière.*

(On suppose connu ce principe de physique : que la quantité de lumière reçue est en raison inverse du carré de la distance au point lumineux.)



Prenons pour inconnue la distance AC du point cherché à l'un des deux points lumineux, et désignons-la par x ; soit d la distance AB des deux lumières. Représentons par α^2 la quantité de lumière que recevrait un point situé à 1 mètre du point A, et par β^2 celle qu'il recevrait à 1 mètre du point B.

Si l désigne pour un moment la quantité de lumière que le point cherché C reçoit du point A, on devra avoir, d'après le principe cité :

$$l:\alpha^2::1^m:x \quad \text{d'où} \quad l=\frac{\alpha^2}{x}.$$

En raisonnant de même, on trouvera que la quantité de lumière que le point cherché C reçoit du point B est

$$\frac{\beta^2}{(d-x)^2}.$$

Ces deux quantités de lumière reçue par le point cherché C devant être égales d'après l'énoncé, on doit avoir l'équation :

$$\frac{\alpha^2}{x^2}=\frac{\beta^2}{(d-x)^2} \qquad [1].$$

On pourrait la traiter comme à l'ordinaire, et nous conseillons cet exercice aux élèves ; mais il est plus simple de remarquer que les deux membres étant des carrés parfaits, on peut en extraire la racine, ce qui donne les deux équations du premier degré

$$\frac{\alpha}{x}=\pm\frac{\beta}{d-x} \qquad [2].$$

Si l'on prend le signe $+$ devant le second membre, on trouve, en faisant disparaître les dénominateurs,

$$\alpha d-\alpha x=\beta x, \quad \text{d'où} \quad x'=d.\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Si l'on prend le signe $-$ devant le second membre, on trouve, de la même manière,

$$\alpha d-\alpha x=-\beta x, \quad \text{d'où} \quad x''=d.\frac{\alpha}{\alpha-\beta},$$

valeurs réelles qu'il s'agit de discuter.

1° Supposons d'abord la première lumière plus intense que la seconde, ou $\alpha>\beta$. Dans ce cas les deux valeurs x' et x'' sont toutes deux positives.

Considérons d'abord la valeur x'. Comme $\alpha+\beta$ est plus grand que α, l'expression $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ est moindre que 1 ; la valeur x' est donc moindre que d, et répond à un point compris entre les points lumineux A et B. De plus, comme $\alpha+\beta$ est moindre que $\alpha+\alpha$ ou 2α, l'expression $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ est plus grande que $\frac{\alpha}{2\alpha}$ ou que $\frac{1}{2}$; ainsi x' est plus grand que la moitié de d. Le point correspondant C est donc plus près du point B que du point A.

Considérons, en second lieu, la valeur x''. Comme $\alpha-\beta$ est moindre que α, l'expression $\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$ est plus grande que 1 ; ainsi x'' est plus grand que d, et répond à un point C', situé au delà du point lumineux B qui a la moindre intensité. On conçoit, en effet, qu'on puisse trouver de ce côté un point pour lequel la différence d'intensité des deux lumières soit compensée par la différence des distances au point éclairé.

2° Supposons que l'intensité de la seconde lumière aille en augmentant et que par conséquent β augmente en se rapprochant ainsi de α, la valeur x' ira en diminuant et la valeur x'' ira en augmentant. Ainsi le point C se rapprochera du milieu de AB, et le point C' s'éloignera de plus en plus de la lumière B.

Si l'on suppose maintenant $\alpha=\beta$, ou les deux lumières d'égale intensité, on aura $x'=\frac{d}{2}$ et $x''=\frac{\alpha d}{0}$, c'est-à-dire que le point C se trouvera alors au milieu de AB, et que le point C' se sera éloigné à une distance infinie à droite du point B. On conçoit, en effet, que pour compenser la différence d'intensité des deux lumières, il faut éloigner le point C' d'autant plus que cette différence est moindre ; et que si enfin elle devient nulle, ce n'est qu'à une distance infinie que la différence due aux distances devient insensible.

3° Supposons que β, continuant à croître, devienne plus grand que α, ou que la lumière B soit plus intense que la lumière A.

La valeur x' reste positive et moindre que d, c'est-à-dire qu'elle répond toujours à un point compris entre A et B. Mais, comme β est plus grand que α, il s'ensuit que $\alpha+\beta$ est plus grand que 2α, et que, par conséquent, $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ est moindre que $\frac{\alpha}{2\alpha}$ ou que $\frac{1}{2}$; ainsi x' est moindre que $\frac{d}{2}$, c'est-à-dire que le point C est alors plus près de la lumière A que de la lumière B.

Quant à la valeur x'', elle devient négative ; et, puisqu'on a regardé comme positives les distances comptées à droite du point A, on devra, pour la généralité des formules (**110**), regarder comme négatives celles qui sont comptées à gauche de ce point. La valeur négative trouvée pour x'' correspondra donc à un point C'', situé à gauche du point lumineux A qui a la moindre intensité, et à une distance de ce point d'autant plus grande que la différence absolue $\beta - \alpha$ est plus petite.

4° Si l'on faisait maintenant décroître l'intensité de la lumière B jusqu'à ce qu'on en fût revenu à l'hypothèse $\beta = \alpha$, on trouverait pour x'' des valeurs négatives de plus en plus grandes, et enfin une valeur infinie qu'on devrait regarder comme négative, puisqu'elle serait la limite vers laquelle tend une quantité négative de plus en plus grande en valeur absolue. Ainsi, pour $\alpha = \beta$ la solution infinie répond à un point que l'on peut supposer placé indifféremment à droite ou à gauche des deux lumières, ce qui doit être.

Il ne faudrait pas en conclure que l'équation du second degré a, dans ce cas, trois racines, elle n'en a que deux; mais la valeur infinie peut être affectée du signe $+$ ou du signe $-$, suivant qu'on la considère comme limite de quantités croissantes positives, ou de quantités croissantes en valeur absolue, mais négatives.

5° Si l'on fait en même temps les deux hypothèses $\alpha = \beta$ et $d = 0$, c'est-à-dire si l'on suppose que les deux lumières soient de même intensité, et placées en outre au même point A, on trouve

$$x' = 0 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{0}{0}.$$

La première valeur donne le point A; cela devait être, puisque le point C, qui est au milieu de AB pour $\alpha = \beta$, se confond alors avec A et B.

La seconde est indéterminée; et, en effet, en quelque point de la droite XY qu'on place alors le point éclairé, il recevra des deux points lumineux la même quantité de lumière.

Si, sans faire aucune hypothèse sur d, on fait les deux suppositions $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, on trouve pour x' et x'' deux valeurs indéterminées. Et, en effet, si les deux lumières sont éteintes, un point quelconque situé soit entre A et B, soit en deçà ou au delà, reçoit de chacun de ces points une quantité de lumière nulle et par conséquent une quantité égale.

227. Le lecteur pourra s'exercer sur les exemples qui suivent :

I. *Partager le nombre* a *en deux parties telles que la somme de leurs racines carrées soit égale à un nombre* b.

II. *Un voyageur a* n *kilomètres à faire, et marche d'une manière régulière. S'il faisait chaque jour* a *kilomètres de plus, il* *emploierait à son voyage* b *jours de moins. Quelle serait alors la durée de son voyage?*

III. *Trouver le côté de l'une des bases d'un tronc de pyramide à bases carrées, connaissant le côté de l'autre base, la hauteur du tronc et son volume.*

IV. *Partager* a *en deux parties telles que la somme de leurs cubes soit égale à* b .

§ IV. Discussion de l'équation bicarrée.

228. L'équation bicarrée peut se présenter sous l'une des deux formes

$$x^4+px^2+q=0 \quad \text{ou} \quad ax^4+bx^2+c=0 .$$

En posant $x^2=y$, on en tire

$$y^2+py+q=0 \quad \text{ou} \quad ay^2+by+c=0 .$$

Soient y' et y'' les deux racines de l'équation en y, on aura

$$x'=\pm\sqrt{y'} \quad \text{et} \quad x''=\pm\sqrt{y''} .$$

1° Si y' et y'' sont réels et positifs, on aura pour x quatre valeurs réelles, dont deux positives et deux négatives, égales deux à deux en valeur absolue. Ce cas se présentera quand on aura en même temps

$$q>0 , \quad p<0 \quad \text{et} \quad \frac{p^2}{4}-q>0 ,$$

ou

$$c>0 , \quad b<0 \quad \text{et} \quad b^2-4ac>0 ,$$

attendu que a peut toujours être supposé positif.

2° Si y' est positif et y'' négatif, on aura pour x' deux valeurs réelles, égales et de signe contraire, et pour x'' deux valeurs imaginaires. Ce cas aura lieu pour

$$q<0 \quad \text{ou} \quad c<0 .$$

3° Si y' et y'' sont tous deux réels et négatifs, on aura pour x quatre valeurs imaginaires. Cela aura lieu pour

$$q>0 , \quad p>0 \quad \text{et} \quad \frac{p^2}{4}-q>0 ,$$

ou

$$c>0 , \quad b>0 \quad \text{et} \quad b^2-4ac>0 .$$

4° Si y' et y'' sont imaginaires, il en sera de même des quatre valeurs de x, puisque la racine carrée d'une quantité imaginaire du second degré est elle-même imaginaire (**214**). Ce cas se présentera pour

$$q>0 \quad \text{et} \quad \frac{p^2}{4}-q<0\ ,$$

ou

$$c>0 \quad \text{et} \quad b^2-4ac<0\ .$$

5° Si y' et y'' sont égaux, les valeurs positives de x seront égales entre elles, et les valeurs négatives égales entre elles. Cela aura lieu pour

$$\frac{p^2}{4}-q=0 \quad \text{ou} \quad b^2-4ac=0\ .$$

Elles seront d'ailleurs réelles, nulles ou imaginaires, suivant que y' et y'' seront positifs, nuls ou négatifs, c'est-à-dire suivant qu'on aura

$$p<0\ ,\quad p=0\ ,\quad p>0$$

ou

$$b<0\ ,\quad b=0\ ,\quad b>0\ .$$

6° Si l'équation en y a des racines infinies, il en sera de même de l'équation en x. Mais celles-ci pourront être réelles ou imaginaires, suivant que les racines de l'équation en y seront égales à l'infini positif ou à l'infini négatif.

229. Comme exemple de cette discussion nous traiterons la question suivante :

Problème. *Un capitaliste place deux sommes* a *et* b *à des taux différents et à intérêts composés pendant deux ans, et obtient au bout de ce temps un capital définitif total* c *. S'il eût placé les mêmes sommes une année au premier taux, et l'année suivante au second taux, le capital définitif total eût été* d *. On demande quels sont ces deux taux.*

Désignons par t et t' les deux taux demandés. La somme a au taux t, et à intérêts composés, devient au bout de deux ans $a\left(1+\frac{t}{100}\right)^2$; la somme b au taux t', à intérêts composés et au bout du même temps, devient $b\left(1+\frac{t'}{100}\right)^2$. On a donc pour première équation

$$a\left(1+\frac{t}{100}\right)^2+b\left(1+\frac{t'}{100}\right)^2=c\ .$$

La somme a au taux t, au bout d'un an, devient $a\left(1+\frac{t}{100}\right)$; cette dernière somme au taux t', au bout d'une autre année, devient à son tour $a\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1+\frac{t'}{100}\right)$. La somme b, placée de la même manière, deviendrait $b\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1+\frac{t'}{100}\right)$. On a donc pour seconde équation

$$(a+b)\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1+\frac{t'}{100}\right)=d .$$

Pour simplifier le calcul, prenons pour inconnues les quantités $1+\frac{t}{100}$ et $1+\frac{t'}{100}$; posons en conséquence

$$1+\frac{t}{100}=x \quad \text{et} \quad 1+\frac{t'}{100}=y .$$

Les deux équations du problème deviendront

$$ax^2+by^2=c \quad \text{et} \quad (a+b)\,xy=d .$$

Si l'on prend dans la seconde la valeur de y en x pour la substituer dans la première, on trouve, après avoir fait disparaître les dénominateurs

$$a(a+b)^2x^4-(a+b)^2cx^2+bd^2=0 \qquad [1];$$

d'où
$$x=\sqrt{\frac{(a+b)\,c\pm\sqrt{(a+b)^2c^2-4abd^2}}{2a(a+b)}} \qquad [2],$$

en ne mettant point de double signe devant le radical total, attendu que x doit être essentiellement positif.

En éliminant au contraire x entre les deux équations proposées, on arrive à l'équation

$$b(a+b)^2y^4-(a+b)^2cy^2+ad^2=0 \qquad [3];$$

d'où
$$y=\sqrt{\frac{(a+b)c\mp\sqrt{(a+b)^2c^2-4abd^2}}{2b(a+b)}} \qquad [4].$$

On doit mettre $\mp$ au lieu de $\pm$ devant le radical intérieur, afin qu'en prenant les signes supérieurs ensemble ou les signes inférieurs ensemble, on obtienne un système de valeurs qui satisfasse aux équations proposées.

1° Le second terme des équations [1] et [2] étant essentiellement négatif, et le troisième étant essentiellement positif, il s'ensuit que, pour que les valeurs obtenues soient réelles, il suffit que le radical intérieur le soit, c'est-à-dire qu'on ait

$$(a+b)^2c^2>4abd^2 \qquad [5].$$

Le problème est alors susceptible de deux solutions distinctes. Ayant obtenu x et y, on en déduira facilement

$$t=100x-1 \quad \text{et} \quad t'=100y-1 .$$

Comme cas particulier, supposons que les deux modes de placement donnent le même capital définitif, ou qu'on ait $c=d$; les valeurs de x et de y deviendront

$$x=\sqrt{\frac{(a+b)c\pm(a-b)c}{2a(a+b)}} \quad \text{et} \quad y=\sqrt{\frac{(a+b)c\mp(a-b)c}{2b(a+b)}},$$

ce qui donne les deux systèmes

$$x'=\sqrt{\frac{c}{a+b}} \quad \text{avec} \quad y'=\sqrt{\frac{c}{a+b}},$$

ou

$$x''=\sqrt{\frac{c}{a+b}\cdot\frac{b}{a}} \quad \text{avec} \quad y'=\sqrt{\frac{c}{a+b}\cdot\frac{a}{b}}.$$

Le premier système donne $x'=y'$, solution évidente *a priori* dans ce cas.

2° Si l'on a $$(a+b)^2c^2=4abd^2 \qquad [6],$$
les deux systèmes se réduisent à un seul :

$$x=\sqrt{\frac{c}{2a}} \quad \text{et} \quad y=\sqrt{\frac{c}{2b}}.$$

Dans ce cas, on ne peut supposer $c=d$ sans supposer en même temps $a=b$; car si l'on fait $c=d$ dans la relation [6], elle se réduit, en divisant par c^2, à

$$(a+b)^2=4ab, \quad \text{d'où} \quad a^2-2ab+b^2=0,$$

ou

$$(a-b)^2=0, \quad \text{ou enfin} \quad a=b.$$

3° Si l'on a $$(a+b)^2c^2<4abd^2.$$

Ces deux systèmes sont imaginaires.

4° Si l'on suppose $a=0$, l'équation [1] donne pour x^2 une valeur infinie, et une valeur finie... $x=\dfrac{d}{\sqrt{bc}}$.

L'équation [3] donne $y^2=0$, et $y=\sqrt{\dfrac{c}{b}}$ pour les valeurs correspondantes.

On peut s'assurer que le second système satisfait alors aux deux équations proposées. Quant au premier, il s'explique en remarquant que si la somme a était très-petite, l'un des systèmes représentés par les équations [2] et [4] donnerait pour x une valeur très-grande et pour y une valeur très-petite ; en sorte que si a devient nul, x devient infini et y nul.

Si l'on suppose à la fois $a=0$ et $b=0$, toutes les valeurs se présentent sous la forme $\dfrac{0}{0}$; mais si l'on commence par faire

$b=a$ dans les équations [1] et [3], et si l'on supprime le facteur a alors commun à tous les termes, puis qu'on fasse ensuite $a=0$, ces équations se réduisent toutes deux à $d^2=0$, ce qui indique que les valeurs de x et de y sont infinies (**222**). Il est évident, en effet, qu'il faudra un taux d'autant plus élevé pour obtenir un même capital définitif, que le capital primitif sera plus petit; et que par conséquent si le capital primitif devient nul, il faudra un taux infiniment grand.

230. Le lecteur pourra s'exercer sur les exemples suivants :

I. *Trouver les quatre termes d'une proportion par quotient, dont la raison est* q *, sachant que la somme des carrés de ces termes est égale à* a *, et que leur produit est égal à* b .

II. *Inscrire dans une sphère un cylindre dont la surface soit équivalente à un cercle donné.*

III. *Partager un nombre* a *en deux parties telles que, si l'on multiplie respectivement leurs carrés par* m *et* n *, la différence des produits soit égale à un nombre donné* b .

IV. *Trouver les rayons des bases d'un tronc de cône, connaissant sa hauteur, son volume, et la moyenne géométrique entre les surfaces de ses bases.* (On pourra représenter cette moyenne par la surface d'un cercle donné, et le volume du tronc par celui d'un cylindre de même hauteur.)

CHAPITRE IX.

DES PUISSANCES ET DES RACINES D'UN DEGRÉ QUELCONQUE.

§ I. Des combinaisons.

231. La formation des puissances des polynomes exigeant la connaissance de la théorie élémentaire des combinaisons, nous allons d'abord l'exposer, afin de ne pas interrompre ce que nous aurons à dire sur les puissances.

On nomme *combinaisons de* m *objets* n *à* n les différentes manières de grouper ces objets n à n, de telle sorte que deux groupes diffèrent au moins par un des objets qui y entrent.

On nomme *permutations* de n objets les différentes manières de les ranger suivant une figure déterminée, par exemple en ligne droite.

On est convenu de nommer *arrangements de* m *objets* n *à* n les différentes manières de ranger ces objets suivant une figure déterminée, en ligne droite par exemple, en les prenant n à n.

Il résulte de ces définitions que si, après avoir formé toutes les *combinaisons* de m objets n à n, on effectuait, dans chaque groupe de n objets toutes les *permutations* possibles, on obtiendrait précisément tous les *arrangements* possibles de ces m objets n à n. En sorte que, si l'on multiplie le nombre des combinaisons de m objets n à n, par le nombre des permutations qu'on peut faire subir à un groupe de n objets, on obtiendra précisément pour produit le nombre des arrangements possibles de ces m objets n à n.

Si donc on désigne par $C_{m,n}$ le nombre des combinaisons de m objets n à n; par P_n le nombre des permutations qu'on peut faire subir à un groupe de n objets; et par $A_{m,n}$ le nombre des arrangements possibles de m objets n à n, on aura la relation

$$C_{m,n} \times P_n = A_{m,n},$$

d'où l'on déduit $$C_{m,n} = \frac{A_{m,n}}{P_n};$$

c'est-à-dire que, pour obtenir le nombre des combinaisons de

m objets n à n, il faut diviser le nombre des arrangements possibles de ces m objets n à n, par le nombre des permutations qu'on peut faire subir à un groupe de n objets.

Nous allons donc chercher à déterminer $A_{m,n}$ et P_n; nous en déduirons $C_{m,n}$.

Afin de fixer les idées, nous supposerons que les objets dont il s'agit sont les lettres de l'alphabet. $C_{m,n}$ désignera alors le nombre de manières de prendre m lettres n à n, de telle sorte qu'on obtienne, en les multipliant, autant de produits *distincts*. P_n désignera le nombre de manières d'écrire à la suite les unes des autres n lettres déterminées. Enfin $A_{m,n}$ désignera le nombre de manières d'écrire à la suite les unes des autres n lettres, prises, de toutes les façons possibles, sur un nombre total de m lettres.

232. Soient $a, b, c, d, \ldots h, k, l$, les m lettres considérées.

Le nombre des arrangements de ces m lettres 1 à 1 est évidemment égal au nombre de ces lettres; on a donc

$$A_{m,1} = m.$$

Cherchons à former les arrangements 2 à 2. Pour cela, il suffira de prendre tour à tour chacune des m lettres, et d'écrire à sa droite chacune des $m-1$ lettres restantes; ce qui donnera

$$\begin{array}{ccccc}
ab & ba & ca & . & .\,la \\
ac & bc & cb & . & .\,lb \\
ad & bd & cd & . & .\,lc \\
.. & .. & .. & . & ... \\
.. & .. & .. & . & ... \\
ak & bk & ck & . & .\,lh \\
al & bl & cl & . & .\,lk.
\end{array}$$

On aura bien ainsi tous les arrangements 2 à 2; il suffit pour le démontrer de faire voir qu'aucun arrangement n'a été omis, et qu'aucun n'a été répété. Or, 1° considérons un arrangement quelconque ck. On a pris chaque lettre à son tour pour former une colonne verticale; on a donc pris en particulier la lettre c. A la suite de cette lettre, on a écrit successivement chacune des lettres restantes; on a donc écrit en particulier la lettre k; ce qui a donné l'arrangement ck. Donc, aucun arrangement n'a été omis.

2° Comparons deux arrangements quelconques écrits dans le tableau ci-dessus. Ou ils se trouveront dans une même colonne verticale, et alors ils différeront par la dernière lettre; ou ils se trouveront dans deux colonnes différentes, et alors ils différeront par la première lettre. Donc, tous les arrangements obtenus sont distincts.

Donc enfin, on a bien ainsi tous les arrangements 2 à 2. Il reste à en déterminer le nombre. Or, il y a autant de colonnes qu'il y a d'arrangements 1 à 1, ou de lettres; c'est-à-dire m; et il y a $m-1$ arrangements dans chaque colonne; il y a donc en tout $m(m-1)$ arrangements 2 à 2; et l'on a

$$A_{m,2} = m(m-1).$$

Formons les arrangements 3 à 3. Pour cela, il suffira de prendre tour à tour chaque arrangement 2 à 2, et d'écrire à sa suite chacune des $m-2$ lettres restantes, ce qui donnera

$$\begin{array}{llllll}
abc & acb & bca & . & . & kla \\
abd & acd & bcd & . & . & klb \\
abe & ace & bce & . & . & klc \\
\ldots & \ldots & \ldots & . & . & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & . & . & \ldots \\
abl & acl & bcl & . & . & klh.
\end{array}$$

On aura bien ainsi tous les arrangements 3 à 3. En effet :

1° Considérons un arrangement quelconque bck. On a pris, à son tour, chaque arrangement 2 à 2 pour former une colonne verticale; on a donc pris en particulier l'arrangement bc. On a écrit à la suite chacune des lettres restantes; on a donc écrit en particulier la lettre k, ce qui a donné l'arrangement bck. Donc aucun arrangement n'a été omis.

2° Comparons deux arrangements quelconques écrits dans le tableau ci-dessus. Ou ils sont dans la même colonne verticale, et alors ils diffèrent par la dernière lettre; ou ils sont dans deux colonnes différentes, et alors ils diffèrent au moins par l'ordre des deux premières lettres, comme abk et bak. Donc tous les arrangements écrits sont distincts.

Donc enfin, on a bien ainsi tous les arrangements 3 à 3. Il reste à en déterminer le nombre. Or, il y a autant de colonnes qu'il y a d'arrangements 2 à 2, c'est-à-dire $A_{m,2}$ ou $m(m-1)$; et, dans chaque colonne, il y a $m-2$ arrangements; il y a donc en tout $m(m-1)(m-2)$ arrangements 3 à 3; et l'on a

$$A_{m,3} = m(m-1)(m-2).$$

La loi de formation de ces valeurs est évidente. Mais on peut la démontrer d'une manière générale. Concevons que nous ayons trouvé le nombre $A_{m,n-1}$ des arrangements $n-1$ à $n-1$, et que nous voulions former les arrangements n à n. Pour cela, il suffira de prendre à son tour chacun des arrangements $n-1$ à

$n-1$, et d'écrire à sa suite chacune des lettres restantes, lesquelles sont au nombre de $m-(n-1)$ ou $m-n+1$. On formera ainsi autant de colonnes verticales qu'il y a d'arrangements $n-1$ à $n-1$, et dans chacune de ces colonnes il y aura $m-n+1$ arrangements. 1° Aucun arrangement n à n n'aura été omis; car, soit, par exemple, l'arrangement $abc\ldots gh$ que nous supposerons formé de n lettres. On a pris à son tour chaque arrangement $n-1$ à $n-1$ pour former une colonne verticale; on a donc pris en particulier l'arrangement $abc\ldots g$. On a écrit à la suite chacune des lettres restantes; on a donc écrit en particulier la lettre h, ce qui a formé l'arrangement $abc\ldots gh$. 2° Aucun arrangement n'a été répété; car, si l'on compare deux arrangements écrits dans le tableau formé comme il vient d'être dit, ou ils seront dans une même colonne verticale, et alors ils différeront par la dernière lettre; ou ils seront dans deux colonnes différentes, et alors ils différeront au moins par l'ordre des $n-1$ premières lettres, comme $abc\ldots gh$ et $gbc\ldots ah$.

Donc enfin on aura bien tous les arrangements n à n. Pour en déterminer le nombre, il faut multiplier le nombre des colonnes, ou le nombre des arrangements $n-1$ à $n-1$, c'est-à-dire $A_{m,n-1}$, par le nombre d'arrangements contenus dans chaque colonne, c'est-à-dire par $m-n+1$; on aura donc

$$A_{m,n}=A_{m,n-1}.(m-n+1).$$

Cette formule étant générale, on peut y donner à n toutes les valeurs entières depuis 2 jusqu'à n; on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
A_{m,2}&=A_{m,1}.(m-1)\\
A_{m,3}&=A_{m,2}.(m-2)\\
A_{m,4}&=A_{m,3}.(m-3)\\
&\ldots\ldots\\
A_{m,n}&=A_{m,n-1}.(m-n+1).
\end{aligned}$$

Si l'on multiplie ces égalités membre à membre, qu'on supprime les facteurs $A_{m,2}$, $A_{m,3}$, $A_{m,4}\ldots$, $A_{m,n-1}$ communs aux deux membres, et qu'on remplace $A_{m,1}$ par sa valeur m, on obtient

$$A_{m,n}=m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1).$$

233. Remarque. Le second membre se compose de n facteurs, qui vont en diminuant d'une unité, à partir de m qui est le premier. Ainsi le nombre des facteurs est toujours égal à l'indice n de $A_{m,n}$; le nombre des arrangements 2 à 2 est exprimé par 2 facteurs; le nombre des arrangements 3 à 3 est exprimé par

3 facteurs, etc.; le nombre des arrangements n à n est exprimé par n facteurs.

Exemple I. *Combien peut-on former de nombres de 3 chiffres avec les chiffres impairs 1, 3, 5, 7, 9?*

Le nombre demandé est le nombre des arrangements de 5 objets 3 à 3; il est donc égal à un produit de 3 facteurs, dont le premier est 5, et les autres vont en diminuant successivement d'une unité. Ce nombre est donc

$$5 \times 4 \times 3 \quad \text{ou} \quad 60 .$$

Exemple II. *Combien pourrait-on former de rubans rayés de 4 couleurs avec les 7 couleurs du prisme?*

Le nombre demandé est le nombre des arrangements de 7 objets 4 à 4; il est donc égal à un produit de 4 facteurs, dont le premier est 7; et les autres vont en diminuant successivement d'une unité. Ce nombre est donc

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \quad \text{ou} \quad 840 .$$

Exemple III. *Six joueurs jouent à un jeu de cartes où l'on donne une carte à chacun; de combien de manières peut-il arriver qu'ils soient servis?*

Le nombre demandé est le nombre des arrangements de 32 objets 6 à 6; il est donc égal à un produit de 6 facteurs, dont le premier est 32, et les autres vont en diminuant successivement d'une unité. Ce nombre est donc

$$32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27 \quad \text{ou} \quad 652458240 .$$

Si le jeu était de 52 cartes, le nombre demandé serait

$$52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 \times 47 \quad \text{ou} \quad 14658134400 .$$

234. Évaluons maintenant le nombre des permutations possibles qu'on peut faire subir à n objets. Les permutations ne diffèrent des arrangements qu'en ce que l'on prend toutes les lettres; en d'autres termes, le nombre des permutations de n objets est égal au nombre des arrangements de n objets n à n; c'est-à-dire que l'on peut écrire

$$P_n = A_{n,n} .$$

Si donc on remplace m par n dans la valeur de $A_{m,n}$, on aura la valeur de P_n. On trouve ainsi

$$P_n = n(n-1)(n-2) \ldots . 2 . 1$$

ou

$$P_n = 1 . 2 . 3 \ldots . (n-1) . n .$$

C'est-à-dire que le nombre des permutations de n objets est égal au produit de la suite naturelle des nombres, depuis 1 jusqu'à n.

On remarquera que, comme dans la formule des arrangements, le nombre des facteurs est égal à n.

On aurait pu établir directement cette formule.

Supposons, en effet, qu'on ait formé les permutations de $n-1$ lettres a, b, c, ... k, et que leur nombre soit P_{n-1}. Pour former les permutations de n lettres, on prendra chacune des permutations de $n-1$ lettres, et on y introduira la $n^{\text{ième}}$ lettre, l, successivement à toutes les places. Les permutations ainsi obtenues seront toutes distinctes; car elles différeront, ou par l'ordre des $n-1$ lettres primitives, ou par la place qu'occupe la $n^{\text{ième}}$ lettre introduite l. D'ailleurs, aucune permutation ne sera omise; car, si l'on considère la permutation $ablc \ldots k$, par exemple, on voit qu'elle provient de la permutation $abc \ldots k$ de $n-1$ lettres, dans laquelle on a introduit l à la 3ᵉ place; elle a donc dû être formée. On aura donc bien ainsi toutes les permutations de n lettres. Or, chaque permutation de $n-1$ lettres en fournira n de n lettres; car la lettre l peut être mise à n places différentes.

On aura donc
$$P_n = P_{n-1} \times n.$$

Si, dans cette formule, qui est générale, on donne à n toutes les valeurs depuis 2 jusqu'à n, on obtient

$$\begin{aligned}
P_2 &= P_1 . 2\\
P_3 &= P_2 . 3\\
P_4 &= P_3 . 4\\
&\ldots\ldots\ldots\\
P_n &= P_{n-1} . n.
\end{aligned}$$

Multipliant terme à terme, supprimant les facteurs communs aux deux membres, et observant que le nombre des permutations de 1 lettre est égal à 1, ou que $P_1 = 1$, il viendra

$$P_n = 1.2.3.4 \ldots n.$$

Exemple I. *De combien de manières peut-on atteler à une diligence 5 chevaux désignés?*

Le nombre demandé est celui des permutations de 5 objets; sa valeur est donc

$$1.2.3.4.5 \quad \text{ou} \quad 120.$$

Exemple II. *Une maîtresse de maison offre à ses convives 12 assiettes de dessert; de combien de manières peuvent-elles être placées sur la table, en conservant la même ordonnance?*

Le nombre demandé est celui des permutations de 12 objets, c'est-à-dire

$$1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12 \quad \text{ou} \quad 479001600 .$$

Exemple III. *De combien de manières les cartes peuvent-elles être disposées dans un paquet de 24 cartes?*

Le nombre demandé est celui des permutations de 24 objets; c'est-à-dire

$$1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24 .$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$620448401733239439360000 .$$

235. Ayant déterminé le nombre des arrangements de m objets n à n, et le nombre des permutations possibles de n objets, on obtient sur-le-champ le nombre des combinaisons n à n par la formule

$$C_{m,n}=\frac{A_{m,n}}{P_n}$$

établie au nº **231**.

En mettant pour $A_{m,n}$ et pour P_n leurs valeurs (**232**, **234**), on trouve

$$C_{m,n}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots.(m-n+1)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4 \;\ldots.\; n} .$$

Il y a, dans cette expression, n facteurs au numérateur et autant au dénominateur. Le numérateur a pour premier facteur le nombre total m des objets; les autres facteurs vont en diminuant successivement d'une unité. Le dénominateur est le produit de la suite naturelle des nombres entiers depuis 1 jusqu'au nombre n d'objets qui entrent dans chaque combinaison.

On aurait pu établir aussi cette formule directement.

Supposons qu'on ait formé les combinaisons de m lettres $n-1$ à $n-1$, et qu'on veuille former les combinaisons n à n. On pourra, à la droite de chaque combinaison $n-1$ à $n-1$, écrire successivement chacune des $m-(n-1)$ ou $m-n+1$ lettres restantes. Mais, il est facile de voir que chaque combinaison n à n sera ainsi répétée n fois; car elle proviendra également de l'introduction de l'une quelconque des n lettres qui y entrent, dans la combinaison formée des $n-1$ autres.

Pour avoir le nombre des combinaisons n à n, il faudra donc multiplier le nombre des combinaisons $n-1$ à $n-1$ par $m-n+1$, et diviser le produit par n. Ainsi on a

$$C_{m,n}=C_{m,n-1}\times\frac{m-n+1}{n} .$$

Si, dans cette formule qui est générale, on donne à n toutes les valeurs depuis 2 jusqu'à n, on aura la série d'égalités

$$C_{m,2} = C_{m,1} \cdot \frac{m-1}{2},$$

$$C_{m,3} = C_{m,2} \cdot \frac{m-2}{3},$$

$$C_{m,4} = C_{m,3} \cdot \frac{m-3}{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{m,n} = C_{m,n-1} \cdot \frac{m-n+1}{n}.$$

Multipliant terme à terme, supprimant les facteurs communs aux deux membres, et remarquant que $C_{m,1} = m$, ou $\frac{m}{1}$, il viendra

$$C_{m,n} = \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdots \frac{m-n+1}{n}$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n}.$$

Exemple I. *Dans un conseil, composé de 12 membres, on tire au sort une commission de 5 membres, pour s'occuper d'un certain travail. De combien de manières cette commission pourra-t-elle être composée?*

Le nombre demandé est celui des combinaisons de 12 objets 5 à 5. Le numérateur devra se composer des 5 facteurs $12.11.10.9.8$; et le dénominateur des 5 facteurs $1.2.3.4.5$. Le nombre cherché sera donc

$$\frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5} \quad \text{ou} \quad 11.9.8, \quad \text{ou enfin} \quad 792.$$

Exemple II. *Un maître de poste, qui a 15 chevaux dans son écurie, doit en fournir 4 pour relayer une voiture; de combien de manières peut-il le faire?*

Le nombre demandé est le nombre des combinaisons de 15 objets 4 à 4. Le numérateur devra se composer des 4 facteurs $15.14.13.12$; et le dénominateur, des 4 facteurs $1.2.3.4$. Le nombre cherché sera donc

$$\frac{15.14.13.12}{1.2.3.4} \quad \text{ou} \quad 15.7.13, \quad \text{ou enfin} \quad 1365.$$

Exemple III. *Chaque joueur qui fait, au jeu du piquet, donne*

12 *cartes sur* 32 *à son adversaire; de combien de manières celui-ci peut-il être servi?*

Le nombre demandé est celui des combinaisons de 32 objets 12 à 12, c'est-à-dire

$$\frac{32 \,.\, 31 \,.\, 30 \,.\, 29 \,.\, 28 \,.\, 27 \,.\, 26 \,.\, 25 \,.\, 24 \,.\, 23 \,.\, 22 \,.\, 21}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 9 \,.\, 10 \,.\, 11 \,.\, 12},$$

ou, en supprimant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur,

$$31 \,.\, 29 \,.\, 26 \,.\, 23 \,.\, 21 \,.\, 20 \quad \text{ou} \quad 225792840 .$$

236. Remarque I. La valeur de $C_{m,n}$ peut être mise sous une autre forme qu'il est bon de connaître.

Si l'on multiplie les deux termes de $C_{m,n}$ par le produit

$$(m-n)(m-n-1)(m-n-2) \ldots . 3 \,.\, 2 \,.\, 1 ,$$

ou
$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots . (m-n) ,$$

on trouve

$$C_{m,n} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)(m-n)(m-n-1)\ldots 3.2.1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots . n \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (m-n)} .$$

Or, le numérateur est alors le produit de la suite descendante des nombres entiers depuis m jusqu'à 1, ou, ce qui revient au même, le produit de la suite naturelle des nombres depuis 1 jusqu'à m. On peut donc écrire

$$C_{m,n} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots . n \times 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots . (m-n)} .$$

Et, comme $C_{m,n}$ est nécessairement un nombre entier, on voit que *le produit de la suite naturelle des nombres depuis* 1 *jusqu'à* m *est toujours divisible par le produit* $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots . \mathrm{n}$, *par le produit* $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots . (\mathrm{m}-\mathrm{n})$, *et par le produit de ces deux produits.*

On aurait pu remarquer de même, sous la première forme de $C_{m,n}$, que le produit $m(m-1)(m-2) \ldots . (m-n+1)$ est toujours divisible par le produit $1.2.3 \ldots . n$; ou que *le produit de* n *nombres consécutifs est toujours divisible par le produit des* n *premiers nombres.*

Remarque II. Il résulte aussi de la forme que nous venons de donner à $C_{m,n}$ que *le nombre des combinaisons de* m *objets* n *à* n *est égal au nombre des combinaisons de ces mêmes objets* $\mathrm{m}-\mathrm{n}$ *à* $\mathrm{m}-\mathrm{n}$.

En effet, la formule ci-dessus étant générale, on peut donner à n une valeur quelconque moindre que m; donnons-lui la valeur $m-n$, c'est-à-dire changeons n en $m-n$; il en résultera que $m-n$ sera changé en $m-(m-n)$ ou en n. On aura donc

$$C_{m,m-n}=\frac{1.2.3.4.\dots\dots\dots\dots\dots\dots m}{1.2.3\dots(m-n)\times 1.2.3\dots n}.$$

Par conséquent $\qquad C_{m,n}=C_{m,m-n}$,

ce qu'il fallait démontrer.

On aurait pu apercevoir cette propriété directement. Car, si l'on prend n lettres, par exemple, sur m, il en reste $m-n$; à chaque combinaison de n lettres répond une combinaison de $m-n$ lettres, et *vice versa*. Et si les combinaisons n à n sont toutes distinctes, il en sera de même des combinaisons $m-n$ à $m-n$, et *vice versa*. Donc ces combinaisons sont en même nombre.

257. Problème I. *Parmi les combinaisons de* 12 *lettres* a, b, c, ..., *etc.*, 5 *à* 5, *combien y en a-t-il qui contiennent à la fois* 3 *lettres déterminées* a, b, c *?*

Pour résoudre ce problème, concevons que l'on veuille former les combinaisons 5 à 5 qui contiennent à la fois a, b et c. Nous commencerons par écrire ces 3 lettres ; et, à la suite de ces 3 lettres, il en faudra écrire 2 autres, prises parmi les $12-3$ ou 9 lettres restantes. Le nombre demandé est donc celui des combinaisons de 9 lettres 2 à 2 ; c'est-à-dire

$$\frac{9.8}{1.2} \text{ ou } 36.$$

Si l'on demandait généralement : *combien, parmi les combinaisons de* m *lettres* n *à* n, *y en a-t-il qui contiennent à la fois* p *lettres déterminées?* On remarquerait de même que, pour former les combinaisons demandées, il faudrait d'abord écrire les p lettres qui doivent entrer dans toutes ces combinaisons, puis compléter le nombre de n lettres dans chaque combinaison, en prenant les $n-p$ lettres complémentaires parmi les $m-p$ lettres non encore écrites. Le nombre demandé serait donc celui des combinaisons de $m-p$ lettres $n-p$ à $n-p$, c'est-à-dire

$$\frac{(m-p)(m-p-1)(m-p-2)\dots[m-p-(n-p)+1]}{1\;.\;2\;.\;3\;\dots\;(n-p)},$$

ou $$\frac{(m-p)(m-p-1)(m-p-2)\dots(m-n+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\dots\;(n-p)}.$$

Problème II. *Parmi les combinaisons de* 12 *lettres* a, b, c, ..., *etc.*, 5 *à* 5, *combien y en a-t-il qui ne contiennent ni* a, *ni* b, *ni* c*?*

Si l'on met à part les 3 lettres a, b, c qui ne doivent pas entrer dans les combinaisons demandées, il en restera $12-3$ ou

9 ; le nombre demandé est donc celui des combinaisons de 9 lettres 5 à 5, c'est-à-dire

$$\frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5} \quad \text{ou} \quad 126\ .$$

Si l'on demandait généralement : *combien, parmi les combinaisons de* m *lettres* n *à* n, *y en a-t-il qui ne contiennent aucune des* p *lettres déterminées* a, b, c, *etc.?* On remarquerait de même qu'en mettant à part ces p lettres qui ne doivent pas entrer dans les combinaisons demandées, il en resterait $m-p$. Le nombre demandé serait donc celui des combinaisons de $m-p$ lettres n à n, c'est-à-dire

$$\frac{(m-p)(m-p-1)(m-p-2)\ldots.(m-p-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots.\ n}\ .$$

PROBLÈME III. *Parmi les combinaisons de* 12 *lettres* a, b, c, ..., *etc.*, 5 *à* 5, *combien y en a-t-il qui contiennent au moins une des* 3 *lettres* a, b, c *?*

Si l'on cherche le nombre total des combinaisons 5 à 5, puis le nombre de ces combinaisons qui ne contiennent ni a, ni b, ni c, la différence de ces deux nombres sera le nombre de combinaisons où entre nécessairement l'une au moins des 3 lettres a, b, c. Or, le nombre total des combinaisons de 12 lettres 5 à 5 est

$$\frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5} \quad \text{ou} \quad 792\ .$$

Nous venons de trouver que le nombre de ces combinaisons où n'entrent ni a, ni b, ni c est 126 ; la différence $792-126$, ou 666 sera donc le nombre demandé.

Si l'on demandait généralement : *combien, parmi les combinaisons de* m *lettres* n *à* n, *y en a-t-il qui contiennent au moins l'une des* p *lettres déterminées* a, b, c, *etc.?* On remarquerait de même que le nombre demandé est la différence entre le nombre total des combinaisons de m lettres n à n, et le nombre de ces combinaisons qui ne contiennent aucune des p lettres déterminées, nombre que l'on a exprimé tout à l'heure. Le nombre demandé serait donc

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots.\ n} - \frac{(m-p)(m-p-1)\ldots.(m-p-n+1)}{1\ .\ 2\ \ldots.\ n}\ .$$

PROBLÈME IV. Le lecteur pourra appliquer ces formules à la solution des problèmes suivants :

Si l'on donne à un joueur 12 *cartes sur* 32 *, de combien de manières pourra-t-il arriver : 1° qu'il ait les* 4 *as ; 2° qu'il n'ait aucune figure ; 3° qu'il ait au moins un trèfle ?*

(Réponses : 1° de 3108105 manières ; 2° de 125970 manières ; 3° de 223088684 manières.)

§ II. De la formation des puissances des quantités algébriques. — Formule du binome.

238. On nomme *puissance m*^ième^ d'une quantité le produit de m facteurs égaux à cette quantité.

Cherchons d'abord comment on forme la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un monome ; et, soit pour fixer les idées, le monome $3a^2b^3x$ à élever à la puissance 5^e^. D'après la définition, cette puissance sera exprimée par

$$3a^2b^3x \times 3a^2b^3x \times 3a^2b^3x \times 3a^2b^3x \times 3a^2b^3x \ .$$

Or, d'après la règle de la multiplication des monomes, il faudra, pour effectuer ce produit, faire le produit des coefficients, c'est-à-dire le produit de 5 facteurs égaux à 3 , ou la 5^e^ puissance de 3 , qui est 243 . Il faudra ensuite affecter chaque lettre de la somme des exposants qu'elle a dans chaque facteur ; la lettre a devra donc avoir pour exposant $2+2+2+2+2$, c'est-à-dire 2×5 , ou 10 ; la lettre b devra avoir pour exposant $3+3+3+3+3$, c'est-à-dire 3×5 , ou 15 ; enfin, la lettre x devra avoir pour exposant $1+1+1+1+1$, c'est-à-dire 1×5 , ou 5 . La 5^e^ puissance demandée sera donc

$$243a^{10}b^{15}x^5 \ .$$

On voit que pour la former il a fallu élever le coefficient du monome proposé à la 5^e^ puissance, et multiplier par 5 les exposants de toutes les lettres qui y entrent.

En général, *pour élever un monome à la puissance* m *, il faut élever son coffiecient à la puissance* m *et multiplier par* m *les exposants de toutes les lettres qui y entrent.*

On trouvera ainsi que

$$(2ab^4x^2)^7 = 128a^7b^{28}x^{14} \ ; \qquad (5a^3b^2x^4)^4 = 625a^{12}b^8x^{16}$$

et

$$(6a^2bc^3x^5)^3 = 216a^6b^3c^9x^{15} \ .$$

Si le monome à élever à la puissance m était négatif, chaque couple de facteurs donnant un produit positif, en vertu de la règle des signes, le produit total serait positif ou négatif selon que le nombre des facteurs serait pair ou impair. Ainsi, la puissance $m^{\text{ième}}$ d'une quantité négative a le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que m est pair ou impair.

On trouvera de cette manière

$$(-a)^2=+a^2\ ;\quad (-a)^3=-a^3\ ;\quad (-a)^4=+a^4\ ;\quad (-a)^5=-a^5\ ;$$

et ainsi de suite.

De même

$$(-3a^2b^3x)^4=+81a^8b^{12}x^4\ ;\qquad (-3a^2b^3x)^5=-243a^{10}b^{15}x^5\ .$$

239. Occupons-nous maintenant de former la $m^{\text{ième}}$ puissance d'un binome.

On pourrait, étant donné ce binome, en obtenir par des multiplications successives le carré, puis le cube, puis la 4^e puissance, et enfin une puissance quelconque. Mais le but que l'on doit se proposer est de découvrir une loi qui permette de développer la puissance $m^{\text{ième}}$ sans être obligé de passer par les puissances intermédiaires.

Si l'on calcule, par des multiplications successives, les puissances successives d'un binome très-simple, tel que $x+a$, comme ce binome est homogène, on voit bien que ses puissances seront homogènes; et, comme il est du premier degré, on reconnaît sans peine que son carré sera du second, son cube du troisième, etc.; et enfin que sa puissance $m^{\text{ième}}$ sera du degré m. En sorte que la loi des exposants est très-simple, puisque, dans chaque terme du développement, la somme des exposants doit être égale à m.

Mais, quant à la loi des coefficients, on ne peut la découvrir à la seule inspection des résultats; cela tient aux réductions qui se sont effectuées entre les termes semblables, et par suite desquelles la trace des opérations qui les ont fournis a disparu.

Pour empêcher ces réductions, on commence par multiplier entre eux des binomes dont le premier terme est le même, mais dont les seconds termes sont différents, tels que $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc.

On trouve ainsi :

1° Que le produit $(x+a)(x+b)$, revient à

$$\begin{array}{l|l} x^2+a & x+ab\ . \\ +b & \end{array}$$

2° Que le produit $(x+a)(x+b)(x+c)$, revient à

$$\begin{array}{l|l|l} x^3+a & x^2+ab & x+abc\ . \\ +b & +ac & \\ +c & +bc & \end{array}$$

3° Que le produit $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$, revient à

$$\begin{array}{r|r|r|l} x^4+a & x^3+ab & x^2+abc & x+abcd\ , \\ +b & +ac & +abd & \\ +c & +ad & +acd & \\ +d & +bc & +bcd & \\ & +bd & & \\ & +cd & & \end{array}$$

et ainsi de suite.

Or, dans ces développements il y a une loi manifeste :

L'exposant de x dans le premier terme est égal au nombre des facteurs binomes; il va ensuite en diminuant d'une unité d'un terme à l'autre, jusqu'au dernier qui ne contient plus x, c'est-à-dire où l'exposant de x est *zéro* (**42**, Rem. II).

Le coefficient du premier terme est l'unité.

Le coefficient du second terme est la somme des seconds termes des binomes.

Le coefficient du troisième terme est la somme des produits 2 à 2 des seconds termes des binomes.

Le coefficient du quatrième terme est la somme des produits 3 à 3 des seconds termes des binomes, et ainsi de suite.

Enfin le dernier terme est le produit des seconds termes de tous les binomes.

240. Il s'agit de démontrer que cette loi est générale. Pour cela, admettons qu'elle s'applique à un produit de $m-1$ binomes, et faisons voir qu'elle s'appliquera dès lors à un produit contenant un facteur binome de plus, c'est-à-dire m facteurs binomes.

Soient donc $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, ... $x+k$, les $m-1$ binomes pour lesquels nous supposons que la loi énoncée ci-dessus se vérifie. Désignons par S_1 la somme des seconds termes de ces binomes, par S_2 la somme de leurs produits 2 à 2, par S_3 la somme de leurs produits 3 à 3, en général par S_n la somme de leurs produits n à n. D'après la loi admise, le développement du produit de ces $m-1$ facteurs binomes sera

$$x^{m-1}+S_1x^{m-2}+S_2x^{m-3}+S_3x^{m-4}\ldots.+S_{n-1}x^{m-n}+S_nx^{m-n-1}\ldots.+S_{m-1}.$$

Introduisons un $m^{\text{ième}}$ facteur $x+l$, le produit sera

$$\begin{array}{l|r|r|r|l} x^m+S_1 & x^{m-1}+S_2 & x^{m-2}+S_3 & x^{m-3}\ldots.+S_n & x^{m-n}\ldots.+S_{m-1}l. \\ \quad +l & +S_1l & +S_2l & +\ldots.+S_{n-1}l & \quad +\ldots. \end{array}$$

Dans ce développement, l'exposant du premier terme est égal au nombre m des facteurs binomes; l'exposant de x va ensuite en diminuant d'une unité d'un terme à l'autre, jusqu'au dernier où il est *zéro*, c'est-à-dire où x n'entre pas.

Le coefficient du premier terme est l'unité.

Le coefficient du second terme se compose de la somme S_1 des seconds termes des $m-1$ premiers binomes, plus du second terme l du $m^{\text{ième}}$ binome; il est donc égal à la somme des seconds termes des m binomes.

Le coefficient du terme qui en a 2 avant lui se compose de la somme S_2 des produits 2 à 2 des seconds termes des $m-1$ premiers binomes, plus du produit $S_1 l$ de la somme des seconds termes de ces $m-1$ premiers binomes, par le second terme l du $m^{\text{ième}}$; en d'autres termes, il se compose des produits 2 à 2 des seconds termes des m binomes, puisque S_2 représente la somme de ceux où n'entre pas l, et que $S_1 l$ est la somme de tous ceux qui contiennent l.

Le coefficient du terme qui en a 3 avant lui se compose de la somme S_3 des produits 3 à 3 des seconds termes des $m-1$ premiers binomes, plus du produit $S_2 l$ de la somme de leurs produits 2 à 2 par le second terme l du $m^{\text{ième}}$ binome; en d'autres termes, il se compose de la somme des produits 3 à 3 des seconds termes des m binomes, puisque S_3 représente la somme de ceux où n'entre pas l, et que $S_2 l$ est la somme de tous ceux qui contiennent l.

Généralement, le coefficient du terme en x^{m-n}, ou du terme qui en a n avant lui, se compose de la somme S_n des produits n à n des seconds termes des $m-1$ premiers binomes, plus du produit $S_{n-1} l$ de la somme de leurs produits $n-1$ à $n-1$ par le second terme l du $m^{\text{ième}}$ binome; en d'autres termes, il se compose de la somme des produits n à n des seconds termes des m binomes, puisque S_n est la somme de ceux où n'entre pas l, et que $S_{n-1} l$ représente la somme de tous ceux qui contiennent l.

Enfin, S_{m-1} étant le produit des seconds termes des $m-1$ premiers binomes, $S_{m-1} l$ est le produit des seconds termes des m binomes.

Ainsi la loi énoncée étant supposée vérifiée pour $m-1$ binomes, est vraie encore pour un binome de plus. Or, elle a été vérifiée pour 4 binomes, donc elle est vraie pour 5; étant vraie pour 5 binomes elle l'est pour 6, et ainsi de suite; donc elle est générale.

241. Pour déduire de cette loi celle du développement de la $m^{\text{ième}}$ puissance d'un même binome $x+a$, il n'y a qu'à supposer que tous les seconds termes a, b, c, ... k, l deviennent égaux.

La somme des seconds termes des binomes deviendra égale à a répété autant de fois qu'il y a de binomes, c'est-à-dire m fois. Le coefficient du second terme du développement sera donc ma.

La somme des produits 2 à 2 des seconds termes des binomes deviendra égale à a^2, répété autant de fois qu'on peut faire de combinaisons 2 à 2 avec m lettres, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}$ fois. Le coefficient du troisième terme du développement sera donc égal à $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2$.

La somme des produits 3 à 3 des seconds termes des binomes deviendra égale à a^3, répété autant de fois qu'on peut faire de combinaisons 3 à 3 avec m lettres, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ fois. Le coefficient du quatrième terme du développement sera donc égal à $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3$.

Généralement, la somme des produits n à n des seconds termes des binomes deviendra égale à a^n, répété autant de fois qu'on peut faire de combinaisons n à n avec m lettres, c'est-à-dire un nombre de fois marqué par $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,n}$. Le coefficient du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme, ou de celui qui en a n avant lui, sera donc égal à

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,n}a^n.$$

Enfin le produit des seconds termes des binomes deviendra égal à a^m; ainsi le dernier terme du développement sera a^m.

On aura donc enfin

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{m-3} + \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots.\,n}a^nx^{m-n} + \ldots. + a^m.$$

Telle est la *formule du binome*; cette formule est due à Newton.

242. Pour appliquer cette formule à un exemple particulier, il n'est pas nécessaire d'y remplacer m par sa valeur particulière. Il est plus commode d'observer d'après quelle loi chaque terme peut se déduire du précédent; cette loi connue, on pourra développer une puissance quelconque de $x+a$ sans le secours de la formule générale.

Le premier terme x^m a pour exposant celui de la puissance qu'on veut développer.

Le terme max^{m-1} peut se déduire du précédent x^m en le multipliant par m, exposant de x dans ce terme, en introduisant le facteur a, c'est-à-dire en augmentant l'exposant de a d'une unité, et en diminuant au contraire celui de x d'une unité.

Le terme $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2m^{m-2}$ peut se déduire du précédent max^{m-1} en le multipliant par $m-1$, exposant de x dans ce terme, en divisant par 2, nombre supérieur d'une unité à l'exposant de a dans le même terme, puis en augmentant d'une unité l'exposant de a et en diminuant d'une unité l'exposant de x.

Le terme $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{m-3}$ peut se déduire du précédent $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^2x^{m-2}$ en le multipliant par $m-2$, exposant de x dans ce terme, en le divisant par 3, nombre supérieur d'une unité à l'exposant de a dans ce même terme, puis en augmentant d'une unité l'exposant de a et en diminuant d'une unité l'exposant de x.

Cette loi est générale. Pour le faire voir, considérons le terme général

$$[n]\ldots\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n-1)\,.\,n}a^nx^{m-n}\,.$$

Pour en déduire le terme précédent, il n'y a qu'à changer n en $n-1$, ce qui donne

$$[n-1]\ldots\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+3)(m-n+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n-2)\,.\,(n-1)}a^{n-1}x^{m-n+1}\,.$$

On reconnaît ainsi que pour déduire au contraire le terme $[n]$ du terme précédent $[n-1]$, il faut le multiplier par $(m-n+1)$, exposant de x dans ce terme, le diviser par n, nombre supérieur d'une unité à l'exposant $n-1$ de a dans ce même terme, puis augmenter d'une unité l'exposant de a et diminuer d'une unité l'exposant de x.

243. Une autre remarque peut servir à abréger les calculs, c'est que *les coefficients des termes également éloignés des extrêmes sont égaux*.

En effet : le nombre total des termes du développement est $m+1$, puisque le premier terme est x^m, que l'exposant de x va en diminuant d'une unité d'un terme à l'autre, et que le dernier terme ne contient pas x.

Cela posé, considérons le terme qui en a n avant lui ; ce terme a pour coefficient le nombre des combinaisons de m lettres n à n

ou $C_{m,n}$. Considérons le terme qui en a n après lui; d'après la remarque qui précède, il en aura $m-n$ avant lui, puisque le nombre des termes qui suivent, ajouté au nombre des termes qui précèdent, doit faire m. Ce terme aura donc pour coefficient le nombre des combinaisons de m lettres $m-n$ à $m-n$ ou $C_{m,m-n}$. Or, le nombre des combinaisons de m lettres $m-n$ à $m-n$ est égal au nombre des combinaisons de m lettres n à n (**236**, Rem. III); donc ces deux coefficients sont égaux.

On aurait pu arriver à la même conséquence en remarquant que le développement de $(x+a)^m$ doit être le même que celui de $(a+x)^m$; et que, puisque, dans ces deux développements, les coefficients se forment d'après la même loi, deux termes de même rang doivent avoir le même coefficient. Or, deux termes qui ont le même rang dans les deux développements sont précisément deux termes également éloignés des extrêmes dans l'un de ces développements considéré seul.

244. Il résulte de la remarque précédente que si m est impair, auquel cas il y aura un nombre pair $m+1$ de termes, tous les coefficients se reproduiront deux fois; il suffira donc de calculer la moitié des termes; les termes suivants s'obtiendront en récrivant les précédents en ordre inverse, en y changeant x en a et a en x.

Si m est pair, auquel cas il y aura un nombre impair $m+1$ de termes, il y aura un terme du milieu dont le coefficient ne se reproduira pas; il faudra pousser le calcul jusqu'à ce terme; les suivants se déduiront des précédents comme il vient d'être dit.

On peut même se dispenser de compter les termes.

Dans le cas de m impair, on reconnaîtra qu'on est parvenu au dernier terme de la première moitié, lorsque l'exposant de x ne surpassera plus celui de a que d'une unité. En effet, soit Ma^px^q le terme qui termine cette première moitié; le suivant devra être Ma^qx^p; mais, d'après la loi de formation, on doit avoir $q=p+1$.

Dans le cas de m pair, on reconnaîtra qu'on est parvenu au terme du milieu, quand les exposants de a et de x seront égaux. Car, soit Ma^px^q le terme du milieu; le terme précédent contiendra $a^{p-1}x^{q+1}$, et le terme suivant contiendra au contraire $a^{p+1}x^{q-1}$. Or, ces deux termes étant également éloignés des extrêmes, doivent pouvoir se déduire l'un de l'autre en changeant x en a et a en x; ce qui exige qu'on ait $p+1=q+1$ et $p-1=q-1$, ou simplement $p=q$.

245. Appliquons la formule du binome et les remarques que nous venons de faire au développement de $(x+a)^7$.

Le premier terme sera x^7.

Pour obtenir le second, il faudra multiplier le premier par 7, introduire le facteur a, et diminuer l'exposant de x d'une unité, ce qui donne $7ax^6$.

Pour obtenir le suivant, il faut multiplier celui-ci par 6, diviser par $1+1$ ou 2, ce qui revient à multiplier par 3, puis augmenter d'une unité l'exposant de a et diminuer d'une unité l'exposant de x, ce qui donne $21a^2x^5$.

Pour obtenir le suivant, il faut multiplier celui-ci par 5, diviser par $2+1$ ou 3, ou, ce qui est plus commode, diviser d'abord par 3 et multiplier ensuite par 5, puis augmenter d'une unité l'exposant de a et diminuer d'une unité l'exposant de x, ce qui donne $35a^3x^4$.

Comme l'exposant de x ne surpasse plus celui de a que d'une unité, les termes suivants s'obtiendront en récrivant en ordre inverse les termes déjà écrits, après avoir changé x en a et a en x. Ces termes sont donc $35a^4x^3$, $21a^5x^2$, $7a^6x$ et a^7.

Ainsi on aura

$$(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4+35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7 .$$

On trouvera de même

$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3 .$$

$$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4 .$$

. . . .

$$(x+a)^8=x^8+8ax^7+28a^2x^6+56a^3x^5+70a^4x^4+56a^5x^3+28a^6x^2 \\ +8a^7x+a^8 .$$

246. Nous avons supposé jusqu'ici que le binome à élever à la puissance m avait ses deux termes positifs; si l'on avait à élever à la puissance m le binome $x-a$, le développement de cette puissance pourrait se déduire de celui de $(x+a)^m$ en changeant a en $-a$. Les puissances impaires de $-a$ étant négatives, et ses puissances paires étant positives (**238**), les termes de rang impair, qui contiennent a à des puissances paires, seront positifs, et les termes de rang pair, qui contiennent a à des puissances impaires, seront négatifs, c'est-à-dire que les termes seront alternativement positifs et négatifs. Ainsi on aura

$$(x-a)^m=x^m-max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}a^2x^{m-2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}a^3x^{m-3}+\ldots \\ \ldots\pm a^m .$$

Le dernier terme a^m sera précédé du signe $+$ s'il est de rang impair, c'est-à-dire si $m+1$ est impair, ou si m est pair. Il sera précédé du signe $-$ s'il est de rang pair, c'est-à-dire si m est impair.

On trouvera ainsi

$$(x-a)^5=x^5-5ax^4+10a^2x^3-10a^3x^2+5a^4x-a^5 .$$
$$(x-a)^6=x^6-6ax^5+15a^2x^4-20a^3x^3+15a^4x^2-6a^5x+a^6 .$$

247. Soit maintenant à développer une puissance d'un binome quelconque, par exemple $(2a^2-3ab)^5$.

On commencera par poser $2a^2=p$, $3ab=q$. On aura ainsi à développer $(p-q)^5$; ce qui donnera

$$p^5-5p^4q+10p^3q^2-10p^2q^3+5p^4q-q^5 .$$

On aura ensuite

$$p=2a^2 ,\quad p^2=4a^4 ,\quad p^3=8a^6 ,\quad p^4=16a^8 ,\quad p^5=32a^{10} .$$
$$q=3ab ,\quad q^2=9a^2b^2,\quad q^3=27a^3b^3,\quad q^4=81a^4b^4 ,\quad q^5=243a^5b^5 .$$

Substituant ces valeurs dans le développement ci-dessus, on obtiendra

$$32a^{10}-5.16a^8.3ab+10.8a^6.9a^2b^2-10.4a^4.27a^3b^3+5.2a^2.81a^4b^4 -243a^5b^5 ;$$

ou, en effectuant les multiplications indiquées,

$$32a^{10}-240a^9b+720a^8b^2-1080a^7b^3+810a^6b^4-243a^5b^5 .$$

On développerait de la même manière une puissance quelconque d'un binome donné.

248. Remarque I. Si, dans le développement de $(x+a)^m$, on suppose $x=1$ et $a=1$, les puissances de x et de a se réduisent toutes à l'unité; en sorte que le développement se réduit à la somme des coefficients. Mais, en même temps, l'expression $(x+a)^m$ se réduit à $(1+1)^m$ ou à 2^m. Ainsi donc : *la somme des coefficients, dans le développement de* $(x+a)^m$, *est égale à la* m$^{\text{ième}}$ *puissance de* 2.

Par exemple, dans $(x+a)^7$, on a vu que les coefficients sont

$$1 ,\ 7 ,\ 21 ,\ 35 ,\ 35 ,\ 21 ,\ 7 ,\ 1 .$$

Si l'on en fait la somme, on trouve 128, qui est bien la 7^e puissance de 2.

De même, les coefficients de $(x+a)^8$ sont, comme on l'a vu,

$$1 ,\ 8 ,\ 28 ,\ 56 ,\ 70 ,\ 56 ,\ 28 ,\ 8 ,\ 1 .$$

La somme de ces coefficients est 256, qui est la 8^e puissance de 2.

Remarque II. Cette propriété peut trouver son application. Supposons, par exemple, que l'on demande de combien de manières on peut partager m objets en deux groupes. On remarquera que l'on peut d'abord ne rien mettre dans le premier groupe, et mettre les m objets dans le second, ce qui ne peut se faire que d'une manière. On peut ensuite mettre 1 objet dans le premier groupe, et $m-1$ dans le second, ce qui peut se faire de m manières. On peut en mettre 2 dans le premier et $m-2$ dans le second, ce qui peut se faire d'autant de manières qu'il y a de combinaisons possibles de m objets 2 à 2, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}$. On peut en mettre 3 dans le premier groupe, et $m-3$ dans le second, ce qui peut se faire d'autant de manières qu'il y a de combinaisons possibles de m objets 3 à 3, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$. En continuant ainsi, on voit que les différentes manières d'exécuter le partage demandé sont en nombres marqués par les coefficients du développement de $(x+a)^m$. Donc, le nombre total de manières d'effectuer ce partage, sera exprimé par la somme des coefficients de ce développement, c'est-à-dire par 2^m.

Exemple I. *Huit personnes sont placées dans 2 chambres, de combien de manières cela peut-il se faire?*

(Réponse : 2^8 ou 256.)

Exemple II. *On veut mettre 12 pièces de monnaie dans une bourse à deux compartiments; de combien de manières peut-on le faire?*

(Réponse : 2^{12} ou 4096.)

Exemple III. *Avec un jeu de 52 cartes on propose de faire 2 parts ; de combien de manières pourra-t-on le faire?*

(Réponse : 2^{52} ou 4503599627370496 .)

Remarque III. Si l'on fait $x=1$ et $a=1$ dans le développement de $(x-a)^m$, on obtient pour résultat la somme des coefficients de rang impair du développement de $(x+a)^m$, *moins* la somme de ses coefficients de rang pair. La différence entre ces deux sommes est donc nulle, puisque $(1-1)^m$ se réduit à zéro.

249. Soit maintenant à développer la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un polynome quelconque $a+b+c+d+e\ldots.+k+l$, que nous désignerons par P pour abréger. Posons

$$b+c+d+e\ldots.+k+l=x,$$

nous aurons

$$P^m=(x+a)^m=x^m+max^{m-1}\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\quad.\quad n}a^nx^{m-n}\ldots+a^m.$$

Dans ce développement, il faudra remplacer x^m, x^{m-1}, etc., par leurs valeurs. Pour cela, posons

$$c+d+e\ldots.+k+l=y\ ,$$

nous aurons $x=b+y$; d'où l'on tirera, par exemple,

$$x^{m-n}=(y+b)^{m-n}=y^{m-n}+(m-n)by^{m-n-1}\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots.(m-n-p+1)}{1\ .\ 2\ \ldots.\ p}b^py^{m-n-p}\ldots.+b^{m-n}\ .$$

Dans ce nouveau développement, il faudra remplacer y^{m-n}, y^{m-n-1}, etc., par leurs valeurs. Pour cela, posons

$$d+e\ldots.+k+l=z\ ,$$

nous aurons $y=c+z$; d'où l'on déduira, par exemple,

$$y^{m-n-p}=(z+c)^{m-n-p}=z^{m-n-p}+(m-n-p)cz^{m-n-p-1}\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{(m-n-p)(m-n-p-1)\ldots(m-n-p-q+1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ q}c^qz^{m-n-p-q}\ldots.$$
$$\ldots.+c^{m-n-p}\ .$$

Dans ce nouveau développement, il faudra remplacer z^{m-n-p}, $z^{m-n-p-1}$, etc., par leurs valeurs. Pour cela, posons

$$e+\ldots.+k+l=u\ ,$$

nous aurons $z=d+u$; d'où l'on tirera, par exemple,

$$z^{m-n-p-q}=(u+d)^{m-n-p-q}=u^{m-n-p-q}+(m-n-p-q)du^{m-n-p-q-1}\ldots.$$
$$\ldots+\frac{(m-n-p-q)(m-n-p-q-1)\ldots.(m-n-p-q-r+1)}{1\ .\ 2\ \ldots.\ r}d^ru^{m-n-p-q-r}$$
$$\ldots.+d^{m-n-p-q}\ .$$

En continuant ainsi, on parviendra à des développements dans lesquels n'entreront plus que les diverses puissances de $k+l$, que l'on sait développer. On obtiendra donc le développement total par des substitutions successives.

Soit, par exemple, à développer $(a+b+c)^3$. On aura d'abord

$$(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3\ .$$

On aura ensuite

$$x=b+c\ .$$
$$x^2=b^2+2bc+c^2\ ,$$
$$x^3=b^3+3b^2c+3bc^2+c^3\ .$$

Et, en substituant, et effectuant les calculs,

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3.$$

Remarque. On peut encore écrire ce développement ainsi :

$$(a+b+c)^3=(a^3+b^3+c^3)+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+6abc\ .$$

250. On peut se proposer de trouver le terme général du développement de P^m.

Pour cela, il faudra, dans le terme général de $(x+a)^m$, remplacer x^{m-n} par le terme général de son développement, c'est-à-dire par le terme général du développement de $(y+b)^{m-n}$. Puis, dans ce second terme général, remplacer y^{m-n-p} par le terme général du développement de $(z+c)^{m-n-p}$. Puis, dans ce troisième terme général, remplacer $z^{m-n-p-q}$ par le terme général du développement de $(u+d)^{m-n-p-q}$. Et ainsi de suite.

Pour fixer les idées, supposons que P n'ait que les cinq termes $a+b+c+d+e$; ou que $u=e$. En effectuant les substitutions dont on vient de parler, on trouvera, au numérateur du coefficient du terme général, la suite des facteurs

$$m\,,\quad m-1\,,\quad \ldots.\,,\quad m-n+1\;;$$

puis $m-n\,,\quad m-n-1\,,\quad \ldots.\,,\quad m-n-p+1\;;$

puis $m-n-p\,,\quad m-n-p-1\,,\quad \ldots.\,,\quad m-n-p-q+1\;;$

puis $m-n-p-q\,,\quad m-n-p-q-1\,,\quad \ldots.\,,\quad m-n-p-q-r+1\,.$

On voit que ces facteurs forment la suite descendante des nombres entiers depuis m jusqu'à $m-n-p-q-r+1$, ou jusqu'à $s+1$; en désignant par s le nombre $m-n-p-q-r$. On peut prolonger cette suite de facteurs jusqu'à l'unité, sauf à multiplier le dénominateur par $s(s-1)\ldots.3.2.1$, ou, ce qui revient au même, par $1.2.3\ldots.s$.

Le dénominateur sera alors formé du produit

$$1.2.3\ldots.n\times1.2.3\ldots.p\times1.2.3\ldots.q\times1.2.3\ldots.r\times1.2.3\ldots.s\,.$$

Quant au monome affecté de ce coefficient, ce sera

$$a^nb^pc^qd^re^{m-n-p-q-r} \quad \text{ou} \quad a^nb^pc^qd^re^s\,.$$

Le terme général demandé sera donc enfin

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(m-1)m}{1.2.3\ldots n\times1.2.3\ldots p\times1.2.3\ldots.q\times1.2.3\ldots r\times1.2.3\ldots s}a^nb^pc^qd^re^s\,,$$

avec la condition $n+p+q+r+s=m$.

Il serait facile de généraliser ce résultat.

251. Remarque I. Le coefficient de ce terme général étant nécessairement un nombre entier, il en résulte que le produit de la suite naturelle des nombres depuis 1 jusqu'à m, est divisible par le produit

$$1.2.3\ldots.n\times1.2.3\ldots.p\times1.2.3\ldots.q\times\text{etc.}\,,$$

pourvu que la somme des nombres n, p, q, etc., soit égale à m.

REMARQUE II. Si l'on fait $a=1$, $b=1$, $c=1$, etc., le développement se réduit à la somme de ses coefficients. Quant au polynome, il se réduit à N ; en désignant par cette lettre le nombre de ses termes. La somme des coefficients du développement de la $m^{\text{ième}}$ puissance d'un polynome de N termes est donc égale à N^m.

REMARQUE III. Cette propriété peut trouver son application. On démontrerait facilement que le coefficient du terme général exprime le nombre de manières de partager m objets en N groupes, dont le premier contienne n objets, le second p, le troisième q, et ainsi de suite. La somme des coefficients du développement de la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un polynome de N termes exprime donc le nombre de manières de partager m objets en N groupes. Or, d'après ce qu'on vient de voir, ce nombre de manières a pour expression N^m.

EXEMPLE I. *De combien de manières peut-on placer* 8 *personnes dans* 3 *chambres?*

(Réponse : 3^8 ou 6561.)

EXEMPLE II. *De combien de manières peut-on mettre* 12 *pièces de monnaie dans un porte-monnaie qui a* 4 *compartiments?*

(Réponse : 4^{12} ou 16777216.)

EXEMPLE III. *De combien de manières peut-on faire* 10 *parts avec un jeu de* 52 *cartes?*

(Réponse : 10^{52}, ou un nombre formé de l'unité suivie de 52 zéros.)

§ III. Des racines des quantités algébriques.

252. La *racine* $n^{\text{ième}}$ d'une quantité algébrique est une seconde quantité qui, prise n fois comme facteur, donne pour produit la première. On désigne la racine $n^{\text{ième}}$ d'une quantité par le signe $\sqrt[n]{}$ placé en avant de cette quantité. Ainsi $\sqrt[n]{a}$ désigne la racine $n^{\text{ième}}$ de a. La lettre n placée au-dessus du signe *radical* se nomme l'*indice* de la racine.

D'après la règle donnée (**238**) pour former la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un monome, on voit que, *si un monome est une puissance* $\mathrm{n}^{\text{ième}}$ *exacte, on en extraira la racine en extrayant celle de son coefficient, et en divisant par* n *les exposants de toutes les lettres qui y entrent.*

Ainsi $\sqrt[7]{128a^7b^{28}x^{14}}=2ab^4x^2$; $\sqrt[4]{625a^{12}b^8x^{16}}=5a^3b^2x^4$.

(La racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre peut s'extraire par un procédé analogue à celui à l'aide duquel on extrait sa racine carrée ou sa racine cubique. Mais, à ce procédé laborieux, on substitue avec avantage l'emploi des logarithmes, comme nous le verrons bientôt. Lorsqu'il s'agit de nombres peu considérables, on peut se contenter de former les puissances $n^{\text{ièmes}}$ des neuf premiers nombres, et de voir quelle est celle qui reproduit le nombre proposé.)

Quant à la racine $n^{\text{ième}}$ d'un polynome, elle pourrait s'extraire par un procédé analogue à celui que nous avons employé au nº **170** pour extraire la racine carrée, et en se fondant sur la formule du binome. Mais ce calcul étant à peu près sans applications, nous ne nous y arrêterons pas.

253. Lorsqu'un nombre entier N n'est pas une $n^{\text{ième}}$ puissance exacte, sa racine $n^{\text{ième}}$ est *incommensurable;* car les puissances d'une quantité fractionnaire irréductible sont elles-mêmes irréductibles, et ne sauraient reproduire un nombre entier N.

Lorsqu'une expression fractionnaire irréductible $\frac{a}{b}$ n'est pas une $n^{\text{ième}}$ puissance exacte, sa racine $n^{\text{ième}}$ est incommensurable. Multiplions, en effet, ses deux termes par b^{n-1}, elle deviendra $\frac{ab^{n-1}}{b^n}$. Son dénominateur sera une puissance $n^{\text{ième}}$ exacte; mais il n'en sera pas de même de son numérateur, car il faudrait pour cela que a contînt le facteur b, ce qui est contraire à l'hypothèse. La racine $n^{\text{ième}}$ du numérateur sera donc incommensurable; il en sera donc de même de la racine de l'expression fractionnaire proposée.

On démontrerait, comme aux nºˢ **198** et suivants, que l'on peut étendre aux quantités incommensurables du degré n les règles ordinaires du calcul algébrique.

254. Une quantité négative ne peut être une puissance $n^{\text{ième}}$ exacte qu'autant que n est impair; car les puissances paires d'une quantité réelle, positive ou négative, sont positives d'après la règle des signes. Il en résulte que toute racine d'indice pair d'une quantité négative est une quantité *imaginaire*, et n'offre que le symbole d'une opération impossible. Ainsi, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{-5}$, etc., sont des quantités imaginaires.

255. Nous allons maintenant exposer les règles générales du calcul des radicaux. On démontre, dans l'Algèbre supérieure, que tout radical, dont l'indice est n, est susceptible de n déterminations distinctes; mais une seule de ces déterminations est réelle et positive, c'est la valeur arithmétique ou numérique de ce radical.

Nous ne nous occuperons ici que de la valeur numérique des radicaux.

Le principe fondamental du calcul des radicaux est celui-ci : *La racine* n^ième^ *d'un produit est égale au produit des racines* n^ièmes^ *de ses facteurs.*

Soit, en effet, $abcd$ un produit quelconque. La racine $n^{\text{ième}}$ de ce produit sera exprimée par $\sqrt[n]{abcd}$.

Le produit des racines $n^{\text{ièmes}}$ des facteurs sera exprimé par

$$\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}\,.\,\sqrt[n]{d}\,.$$

Or, je dis que cette quantité est une nouvelle forme de la racine du produit $abcd$. En effet, si on élève cette quantité à la puissance n, on aura

$$(\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}\,.\,\sqrt[n]{d})\,(\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}\,.\,\sqrt[n]{d})\,(\qquad\qquad)\ldots\ldots$$

le nombre des parenthèses semblables étant n.

Mais, pour multiplier une quantité par un produit de plusieurs facteurs, on peut multiplier successivement par chacun des facteurs de ce produit; on pourra donc écrire

$$\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}\,.\,\sqrt[n]{d}\,.\,\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}\,.\,\sqrt[n]{d}\,.\,\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}\,.\,\sqrt[n]{d}\,\ldots\ldots$$

ou, en intervertissant l'ordre des facteurs,

$$\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\ldots\ \sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{b}\ldots\ \sqrt[n]{c}\,.\,\sqrt[n]{c}\,.\,\sqrt[n]{c}\ldots\ \sqrt[n]{d}\,.\,\sqrt[n]{d}\,.\,\sqrt[n]{d}\ldots$$

chaque radical entrant n fois de suite comme facteur.

Or, multiplier entre elles n quantités égales à $\sqrt[n]{a}$, c'est élever $\sqrt[n]{a}$ à la puissance n, ce qui donne, par définition, a. Multiplier cette quantité successivement par n facteurs égaux à $\sqrt[n]{b}$, revient à la multiplier par le produit de ces n facteurs, ou par la $n^{\text{ième}}$ puissance de $\sqrt[n]{b}$, qui est b, par définition. Multiplier le produit ab successivement par n facteurs égaux à $\sqrt[n]{c}$, revient à le multiplier par le produit de ces n facteurs, ou par c, ce qui donne abc. Enfin, multiplier abc successivement par n facteurs égaux à $\sqrt[n]{d}$, revient à le multiplier par le produit de ces n facteurs, ou par d, ce qui donne $abcd$.

Donc, en élevant à la $n^{\text{ième}}$ puissance, le produit

$$\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}\,.\,\sqrt[n]{d}\,,$$

on obtient le même résultat, $abcd$, qu'en élevant à la $n^{\text{ième}}$ puissance le radical $\sqrt[n]{abcd}$. Donc ces deux quantités sont numériquement égales, et l'on a

$$\sqrt[n]{abcd}=\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}\,.\,\sqrt[n]{d}\,.$$

Ce qui revient à la proposition énoncée.

256. Le premier usage qu'on peut faire de ce principe est de simplifier les radicaux. Pour cela, on décompose, s'il est possible, la quantité placée sous le radical en deux facteurs, dont l'un soit une puissance exacte d'un degré égal à l'indice du radical. On extrait alors la racine de ce facteur, et l'on se contente d'indiquer la racine du second. Le radical porte ainsi sur une quantité plus simple.

On trouvera de cette manière

$$\sqrt[3]{40a^7b^5}=\sqrt[3]{8a^6b^3.\,5ab^2}=\sqrt[3]{8a^6b^3}.\sqrt[3]{5ab^2}=2a^2b\sqrt[3]{5ab^2}\ .$$

$$\sqrt[4]{567a^7x^9}=\sqrt[4]{81a^4x^8.\,7a^3x}=\sqrt[4]{81a^4x^8}.\sqrt[4]{7a^3x}=3ax^2\sqrt[4]{7a^3x}\ .$$

$$\sqrt[5]{6400000a^7b^{17}x^{11}}=\sqrt[5]{3200000a^5b^{15}x^{10}.\,2a^2b^2x}=20ab^3x^2\sqrt[5]{2a^2b^2x}\ .$$

On nomme radicaux *semblables* ceux qui portent sur des quantités égales, quelle que soit la quantité qui peut être placée comme facteur hors du radical.

On peut quelquefois, en simplifiant les radicaux, les amener à être semblables. Ainsi les expressions

$$\sqrt[3]{54a^5b} \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{250a^2b^4}$$

reviennent à $3a\sqrt[3]{2a^2b}$ et $5b\sqrt[3]{2a^2b}$,

qui renferment des radicaux semblables.

257. Au lieu de faire sortir un facteur du radical, on peut au contraire avoir intérêt à faire passer sous le radical un facteur qui est devant.

Pour cela, il faut évidemment élever ce facteur à une puissance marquée par l'indice du radical.

Ainsi $a\sqrt[n]{b}$ revient à $\sqrt[n]{a^nb}$,

car, si on simplifiait la seconde expression, on retomberait sur la première.

258. L'addition et la soustraction des radicaux ne peuvent que s'indiquer lorsque les radicaux ne sont pas semblables. Mais s'ils le sont, on peut opérer sur les quantités qui multiplient le radical, et mettre ce radical en facteur commun. Ainsi

$$3a\sqrt[3]{a^2b}+5b\sqrt[3]{a^2b}-a\sqrt[3]{a^2b}=(3a+5b-a)\sqrt[3]{a^2b}=(2a+5b)\sqrt[3]{a^2b}\ .$$

259. Multiplication. *Pour multiplier l'un par l'autre deux radicaux de même indice, il suffit de multiplier l'une par l'autre les quantités placées sous chaque radical, et d'affecter le produit du radical commun.*

On a, en effet, en vertu du principe fondamental (**255**),

$$\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\ .$$

Cette règle s'étend à un nombre quelconque de facteurs.

Il peut arriver que le produit soit susceptible de se simplifier, ou même qu'il soit rationnel. Par exemple,

$$\sqrt[5]{8a^3b^9x^{12}}\,.\,\sqrt[5]{4a^2bx^3}=\sqrt[5]{32a^5b^{10}x^{15}}=2ab^2x^3\ .$$

260. Division. *Pour diviser l'un par l'autre deux radicaux de même indice, il suffit de diviser l'une par l'autre les quantités placées sous chaque radical, et d'affecter le quotient du radical commun.*

Soit, en effet,
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=q\ .$$

On en tire
$$\sqrt[n]{a}=q\,.\,\sqrt[n]{b}\ ,$$

ou, en élevant à la puissance n les deux membres

$$a=q^n.\,b \qquad \text{d'où} \qquad q^n=\frac{a}{b}$$

et, en extrayant la racine $n^{\text{ième}}$ des deux membres,

$$q=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\ .$$

Deux quantités égales à une troisième étant égales entre elles, on en conclut

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\ .$$

Il peut arriver que le quotient se simplifie, ou même qu'il soit rationnel. Ainsi

$$\frac{\sqrt[3]{162a^7bx^4}}{\sqrt[3]{384ab^7x}}=\sqrt[3]{\frac{162a^7bx^4}{384ab^7x}}=\sqrt[3]{\frac{27a^6x^3}{64b^6}}=\frac{\sqrt[3]{27a^6x^3}}{\sqrt[3]{64b^6}}=\frac{3a^2x}{4b^2}\ .$$

261. Formation des puissances. *Pour élever un radical à la puissance* p *, il suffit d'y élever la quantité placée sous le radical.*

En effet, on a $(\sqrt[n]{a})^p=\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\ldots.\sqrt[n]{a}$,

les facteurs du second membre étant en nombre p .

D'après la règle de la multiplication des radicaux, on aura donc

$$(\sqrt[n]{a})^p=\sqrt[n]{a.a.a\ldots.a}\ ,$$

les facteurs placés sous le radical étant aussi en nombre p. On peut donc écrire

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p},$$

ce qui revient à l'énoncé de la proposition.

On aura, par exemple,

$$(\sqrt[5]{3ab^2x^3})^4 = \sqrt[5]{(3ab^2x^3)^4} = \sqrt[5]{81a^4b^8x^{12}}.$$

262. Extraction des racines. *Pour extraire d'un radical une racine du degré* p *, il suffit de multiplier par* p *, l'indice de ce radical.*

Soit, en effet, $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = b$.

Élevons les deux membres à la puissance p ; il suffira pour y élever le premier membre de supprimer le premier radical ; cela résulte de la définition même de la racine. On aura donc

$$\sqrt[n]{a} = b^p.$$

Elevons les deux membres de cette nouvelle égalité à la puissance n ; il suffira dans le premier membre de supprimer le radical, et dans le second il faudra multiplier l'exposant p par n (**238**). Il viendra donc

$$a = b^{pn} \quad \text{ou} \quad b^{np}.$$

Extrayons maintenant la racine $np^{\text{ième}}$ des deux membres, nous obtiendrons

$$\sqrt[np]{a} = b.$$

Et, puisque deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles,

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a},$$

ce qui revient à l'énoncé de la proposition.

On trouvera ainsi

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64a^{12}b^6}} = \sqrt[6]{64a^{12}b^6} = 2a^2b.$$

263. *On peut, sans changer la valeur numérique d'un radical, multiplier par un même nombre son indice et l'exposant de chaque facteur qu'il affecte.*

Soit, en effet, l'expression $\sqrt[n]{a^m}$.

Si on élève cette quantité à la puissance p, on aura, en vertu de ce qui a été démontré au n° **261**,

$$\sqrt[n]{a^{mp}}.$$

Si l'on extrait maintenant la racine $p^{ième}$ du résultat, on obtiendra, en vertu du numéro précédent,

$$\sqrt[np]{a^{mp}} .$$

Or, ces deux opérations contraires ayant pour effet de se détruire, on doit retrouver la quantité primitive. On a donc

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} ,$$

ce qui démontre la proposition.

Par une raison semblable *on peut, sans changer la valeur numérique d'un radical, diviser par un même nombre son indice et l'exposant de chaque facteur qu'il affecte.*

Ainsi $$\sqrt[6]{a^2b^4} = \sqrt[3]{ab^2} ,$$

puisqu'on peut diviser par 2 l'indice 6 et les exposants 2 et 4.

264. Le principe démontré au commencement du numéro précédent permet de réduire deux radicaux quelconques au même indice.

Pour réduire deux radicaux au même indice, on multiplie l'indice de chaque radical, ainsi que les exposants des facteurs qu'il affecte, par l'indice de l'autre radical.

Soient les deux radicaux $\sqrt[n]{a^m}$ et $\sqrt[p]{b^q}$. On multipliera n et m par p, puis p et q par n, ce qui n'altérera pas (**263**) la valeur numérique de ces radicaux. Ils deviendront alors

$$\sqrt[np]{a^{mp}} \quad \text{et} \quad \sqrt[pn]{b^{qn}} ,$$

et auront tous les deux le même indice.

Cette opération, qui a beaucoup d'analogie avec la réduction de deux fractions au même dénominateur, est susceptible des mêmes simplifications; c'est-à-dire que l'on peut prendre pour indice commun le plus petit multiple des deux indices. On divisera alors ce plus petit multiple par l'indice de chaque radical, et l'on élèvera la quantité placée sous ce radical à une puissance marquée par le quotient obtenu.

Soient, par exemple, $\sqrt[6]{25a^3b^2x}$ et $\sqrt[8]{27ab^3x^4}$, ou, ce qui revient au même, $\sqrt[6]{5^2.a^3b^2x}$ et $\sqrt[8]{3^3.ab^3x^4}$. Le plus petit multiple des indices 6 et 8 est 24. Le quotient de 24 par 6 est 4 ; on élèvera donc à la 4^e puissance la quantité placée sous le premier radical. Le quotient de 24 par 8 est 3 ; on élèvera donc au cube la quantité placée sous le second radical. On obtiendra ainsi pour les deux radicaux

$$\sqrt[24]{5^8.a^{12}b^8x^4} \quad \text{et} \quad \sqrt[24]{3^9.a^3b^9x^{12}} .$$

Si l'on avait plus de deux radicaux, on multiplierait l'indice de chaque radical, ainsi que l'exposant de chacun des facteurs qu'il affecte, par le produit des indices des autres radicaux. Ainsi les trois radicaux

$$\sqrt[n]{a^m}\ ,\quad \sqrt[p]{b^q}\ ,\quad \sqrt[r]{c^s}$$

deviendraient $\sqrt[npr]{a^{mpr}}\ ,\quad \sqrt[npr]{b^{qnr}}\ ,\quad \sqrt[npr]{c^{snp}}$.

Si les indices avaient des facteurs communs, on prendrait leur plus petit multiple pour l'indice commun, et l'on opérerait comme il a été dit pour le cas de deux radicaux.

265. La réduction des radicaux au même indice sert à multiplier ou à diviser l'un par l'autre deux radicaux d'indices quelconques.

Soit, par exemple, à multiplier $\sqrt[n]{a^m}$ par $\sqrt[p]{a^q}$; en réduisant d'abord ces radicaux au même indice, on aura $\sqrt[np]{a^{mp}}$ et $\sqrt[np]{a^{nq}}$. Opérant alors la multiplication par la règle du nº **259**, on obtiendra

$$\sqrt[np]{a^{mp}.\,a^{nq}} \quad \text{ou} \quad \sqrt[np]{a^{mp+nq}}\ .$$

S'il s'agissait au contraire de diviser l'un par l'autre les mêmes radicaux, on aurait d'abord, en appliquant la règle du nº **260**,

$$\sqrt[np]{\frac{a^{mp}}{a^{nq}}}\ ,$$

ou, en vertu de la règle de la division des monomes,

$$\sqrt[np]{a^{mp-nq}}\ .$$

Par exemple, $\sqrt[5]{a^4}\times\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[15]{a^{12}.\,a^{10}}=\sqrt[15]{a^{22}}$,

$$\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[15]{\frac{a^{12}}{a^{10}}}=\sqrt[15]{a^2}\ .$$

§ IV. Des exposants fractionnaires et des exposants négatifs.

266. On a vu au nº **252** que pour extraire la racine $n^{\text{ième}}$ d'un monome, il faut diviser par n l'exposant de chaque lettre qui y entre. Ainsi, $\sqrt[n]{a^m}$ peut s'écrire $a^{\frac{m}{n}}$ toutes les fois que la division de m par n peut s'effectuer, puisque $\frac{m}{n}$ représente le quotient de m par n.

L'analogie conduit ensuite à adopter la même notation, lors même que la division de m par n n'est plus possible, et à poser en conséquence, quels que soient les nombres entiers m et n,

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},$$

c'est-à-dire que *pour indiquer la racine* $n^{\text{ièm}}$ *de la puissance* $m^{\text{ième}}$ *d'une quantité* a, *on affecte cette quantité d'un exposant fractionnaire qui a pour numérateur l'exposant* m *de la puissance, et pour dénominateur l'indice* n *de la racine.*

L'avantage de cette notation est de simplifier sur-le-champ le calcul des radicaux, attendu que *les règles établies pour le calcul des exposants entiers subsistent pour les exposants fractionnaires.* C'est ce que nous allons démontrer.

267. I. Multiplication. Soit à multiplier les deux expressions

$$a^{\frac{m}{n}} \quad \text{et} \quad a^{\frac{p}{q}}.$$

D'après la définition des exposants fractionnaires, ces expressions reviennent respectivement à

$$\sqrt[n]{a^m} \quad \text{et à} \quad \sqrt[q]{a^p},$$

ou, en les réduisant au même indice, à

$$\sqrt[nq]{a^{mq}} \quad \text{et à} \quad \sqrt[nq]{a^{np}}.$$

Effectuant la multiplication d'après la règle du n° **259**, il vient

$$\sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}},$$

ou, d'après la règle de la multiplication des monomes, dans le cas des exposants entiers,

$$\sqrt[nq]{a^{mq+np}}.$$

Si l'on se sert, pour exprimer ce produit, d'un exposant fractionnaire, on aura

$$a^{\frac{mq+np}{nq}} \quad \text{ou} \quad a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}},$$

c'est-à-dire que, *pour multiplier deux puissances fractionnaires d'une même quantité, il faut faire la somme des exposants*, comme dans le cas des exposants entiers.

II. Division. Soit à diviser

$$a^{\frac{m}{n}} \quad \text{par} \quad a^{\frac{p}{q}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sqrt[n]{a^m} \quad \text{par} \quad \sqrt[q]{a^p},$$

ou, en réduisant au même indice,

$$\sqrt[nq]{a^{mq}} \quad \text{par} \quad \sqrt[nq]{a^{np}} .$$

Effectuant la division d'après la règle du n° **260**, il vient

$$\sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}},$$

ou, d'après la règle de la division des monomes pour le cas des exposants entiers,

$$\sqrt[nq]{a^{mq-np}} .$$

Si l'on emploie un exposant fractionnaire, ce quotient pourra s'écrire

$$a^{\frac{mq-np}{nq}} \quad \text{ou} \quad a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},$$

c'est-à-dire que, *pour diviser l'une par l'autre deux puissances fractionnaires d'une même quantité, il faut retrancher l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende,* comme dans le cas des exposants entiers.

III. Puissances et racines. Soit à élever $a^{\frac{m}{n}}$ à la puissance fractionnaire $\frac{p}{q}$. Ce cas renfermera celui où q serait égal à 1, c'est-à-dire où la puissance serait entière, et celui où p serait égal à 1, c'est-à-dire où l'on aurait à extraire seulement une racine d'indice q.

La quantité proposée $a^{\frac{m}{n}}$ ou $\sqrt[n]{a^m}$ doit, d'après la définition de l'exposant fractionnaire $\frac{p}{q}$, être élevée d'abord à la puissance p, et l'on doit ensuite extraire de cette puissance une racine dont l'indice est q.

Or, on a $\quad (\sqrt[n]{a^m})^p = \sqrt[n]{a^{mp}} \quad$ (**261**).

On a ensuite $\quad \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} \quad$ (**262**).

Employant maintenant un exposant fractionnaire, on pourra écrire

$$a^{\frac{mp}{nq}} \quad \text{ou} \quad a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}},$$

c'est-à-dire que, *pour élever une quantité affectée d'un exposant fractionnaire* $\frac{m}{n}$, *à une puissance fractionnaire* $\frac{p}{q}$, *il faut faire le produit des deux exposants* $\frac{m}{n}$ *et* $\frac{p}{q}$, comme dans le cas des exposants entiers.

On voit que toutes les règles du calcul des exposants entiers s'appliquent aux exposants fractionnaires; ce qui justifie l'emploi de cette notation, plus générale que celle des exposants entiers, et plus conforme, par conséquent, à l'esprit de l'Algèbre.

Remarque. Le principe du n° **265** revient à celui d'après lequel on peut multiplier ou diviser à la fois les deux termes d'une fraction par un même nombre sans en changer la valeur.

268. On a vu, au n° **41**, que pour diviser l'une par l'autre deux puissances entières d'une même quantité, il faut soustraire l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende.

Ainsi $\frac{a^m}{a^n}$ peut s'écrire a^{m-n},

lorsque n est moindre que m.

L'analogie conduit à faire usage de la même notation, lors même que n est plus grand que m, et à poser en conséquence

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

quels que soient les nombres m et n.

Or, si n surpasse m d'une quantité p, et qu'on ait $n = m + p$, on pourra écrire l'égalité ci-dessus sous la forme

$$\frac{a^m}{a^{m+p}} = a^{-p},$$

et, en divisant les deux termes du premier membre par a^m (**41**, **267**),

$$\frac{1}{a^p} = a^{-p}.$$

Telle est la définition de l'exposant négatif $-p$. Ainsi, les expressions

$$a^{-1}, \quad a^{-4}, \quad a^{-\frac{2}{3}}$$

reviennent respectivement à

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a^4}, \quad \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}.$$

L'avantage de cette notation est encore que, *les règles démontrées pour le calcul des exposants positifs* (*entiers ou fractionnaires*) *subsistent pour les exposants négatifs*; et c'est cette généralité, conforme à l'esprit de l'Algèbre, qui justifie l'emploi des exposants négatifs.

Il reste à démontrer la proposition énoncée.

269. I. Multiplication. Soit à multiplier a^{-m} par a^{+p}, m et p pouvant être entiers ou fractionnaires.

D'après la définition des exposants négatifs, on aura à multiplier

$$\frac{1}{a^m} \text{ par } a^{+p},$$

ce qui donnera, d'après le calcul des exposants positifs,

$$\frac{a^p}{a^m} \text{ ou } a^{p-m},$$

puisqu'il faut soustraire les exposants dans la division, qu'ils soient entiers ou fractionnaires, et qu'on admet un exposant négatif.

Or, $p-m$ est la *somme algébrique* de p et de $-m$. Donc il faut, dans le cas où nous sommes, faire la somme des exposants des deux facteurs.

Soit à multiplier a^{-m} par a^{-p}, ou ce qui revient au même,

$$\frac{1}{a^m} \text{ par } \frac{1}{a^p};$$

on obtiendra, d'après le calcul des exposants positifs,

$$\frac{1}{a^m \cdot a^p} \text{ ou } \frac{1}{a^{m+p}};$$

mais, d'après la définition des exposants négatifs, ce résultat peut s'écrire

$$a^{-(m+p)} \text{ ou } a^{-m-p}.$$

Or, $-m-p$ est encore la somme algébrique des exposants des deux facteurs. Donc *pour multiplier entre elles deux puissances* (positives ou négatives) *d'une même quantité, il faut faire la somme algébrique des exposants.*

II. Division. Soit à diviser a^{-m} par a^{+p}, ou bien

$$\frac{1}{a^m} \text{ par } a^p;$$

il viendra, d'après le calcul des exposants positifs,

$$\frac{1}{a^m \cdot a^p} \text{ ou } \frac{1}{a^{m+p}},$$

ou, en employant un exposant négatif,

$$a^{-(m+p)} \text{ ou } a^{-m-p}.$$

Or $-m-p$ est la différence algébrique entre l'exposant $-m$ du dividende et l'exposant $+p$ du diviseur.

Soit à diviser au contraire a^{+m} par a^{-p} ou bien

$$a^m \quad \text{par} \quad \frac{1}{a^p} \,;$$

il viendra, d'après le calcul des exposants positifs,

$$a^m . a^p \quad \text{ou} \quad a^{m+p} \,.$$

Or $m+p$ est la différence algébrique entre l'exposant $+m$ du dividende et l'exposant $-p$ du diviseur.

Soit enfin à diviser a^{-m} par a^{-p} ou bien

$$\frac{1}{a^m} \quad \text{par} \quad \frac{1}{a^p} \,,$$

ce qui donnera, d'après le calcul des exposants positifs,

$$\frac{a^p}{a^m} \,,$$

ou, d'après le même calcul et en admettant un exposant négatif,

$$a^{p-m} \,.$$

Or $p-m$, ou $-m+p$, est la différence algébrique entre l'exposant $-m$ du dividende et l'exposant $-p$ du diviseur.

Donc, *pour diviser l'une par l'autre deux puissances* (positives ou négatives) *d'une même quantité, il faut soustraire l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende.*

III. Puissances. Soit à élever a^{-m} à la puissance $+p$, ou, ce qui revient au même, $\frac{1}{a^m}$ à la puissance p. On aura

$$\left(\frac{1}{a^m}\right)^p \quad \text{ou} \quad \frac{1}{a^{mp}} \,,$$

en vertu du calcul des exposants positifs.

Mais, si l'on emploie un exposant négatif, le résultat pourra s'écrire

$$a^{-mp} \,.$$

Or $-mp$ est le produit de l'exposant $-m$ par l'exposant $+p$.

Soit, au contraire, à élever a^{+m} à la puissance $-p$. D'après la définition de l'exposant négatif $-p$ on devra avoir

$$\frac{1}{(a^m)^p} \,,$$

ou, d'après le calcul des exposants positifs,

$$\frac{1}{a^{mp}} \,.$$

Employant un exposant négatif, on pourra écrire

$$a^{-mp} .$$

Or $-mp$ est le produit de l'exposant $+m$ par l'exposant $-p$.

Soit enfin à élever a^{-m} à la puissance $-p$. D'après la définition des exposants négatifs, on devra avoir

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^p} ,$$

ou, d'après le calcul des exposants positifs,

$$\frac{1}{\frac{1}{a^{mp}}} \quad \text{ou} \quad a^{mp} .$$

Or $+mp$ est le produit de l'exposant $-m$ par l'exposant $-p$.

Donc, *pour élever une puissance* (positive ou négative) *d'une quantité à une seconde puissance* (positive ou négative), *il faut faire le produit des deux exposants.*

Le cas d'une puissance renferme implicitement celui d'une racine, puisque les exposants peuvent être fractionnaires. On voit donc que le calcul des exposants *entiers* et *positifs,* étendu d'abord aux exposants positifs *fractionnaires,* peut s'étendre aux exposants entiers ou fractionnaires *négatifs,* c'est-à-dire à des exposants commensurables quelconques.

270. On peut même l'étendre à des exposants incommensurables; car de pareils exposants pouvant être remplacés par des quantités commensurables qui en diffèrent d'aussi peu que l'on voudra, le calcul applicable à ces quantités approchées est applicable à leurs limites, c'est-à-dire aux exposants incommensurables dont il s'agit.

Donc, enfin, les règles pour le calcul des exposants sont générales.

CHAPITRE X.

DES ÉQUATIONS EXPONENTIELLES ET DES LOGARITHMES.

§ I. De la résolution des équations exponentielles.

271. On nomme en général équations *exponentielles* celles dans lesquelles l'inconnue entre comme exposant. La plus simple des équations de ce genre est l'équation

$$a^x = b\ ;$$

c'est la seule que l'on traite dans les éléments; nous allons dans ce paragraphe nous occuper de sa résolution pour le cas où a et b sont positifs.

Remarquons d'abord que, si l'on savait résoudre cette équation pour une valeur particulière de a et pour toutes les valeurs de b, on saurait la résoudre pour toute autre valeur de a. Supposons, par exemple, que l'on sache résoudre l'équation

$$10^x = n$$

pour toutes les valeurs de n, et qu'on veuille résoudre l'équation

$$a^y = b\ .$$

On posera $y = \dfrac{x}{m}$ d'où $a^{\frac{x}{m}} = b$ ou $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^x = b$ (**267**) .

On posera ensuite $a^{\frac{1}{m}} = 10$ d'où $a = 10^m$ en élevant les deux membres à la puissance m.

Puisque par hypothèse on sait résoudre cette dernière équation, on en tirera la valeur de m. On aura ensuite à résoudre l'équation

$$\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^x = b \quad \text{ou} \quad 10^x = b\ ,$$

d'où l'on tirera de même la valeur de x. Connaissant m et x, on en déduira y par la relation $y = \dfrac{x}{m}$.

272. Remarquons, en second lieu, que si l'on savait résoudre l'équation

$$10^x = n$$

pour toutes les valeurs de n plus grandes que 1, on saurait la résoudre pour des valeurs plus petites que 1. Soit, en effet, à résoudre l'équation

$$10^x = \frac{1}{p},$$

dans laquelle p peut être entier ou fractionnaire, mais plus grand que 1. Posons

$$x = -y,$$

il viendra $\quad 10^{-y} = \frac{1}{p} \quad$ ou $\quad \frac{1}{10^y} = \frac{1}{p} \quad$ (**268**),

ce qui exige $\quad 10^y = p$.

Or, puisque p est plus grand que 1, on sait, par hypothèse, résoudre cette équation; on en tirera donc la valeur de y; et, en la prenant en signe contraire, on aura la valeur de x.

273. Remarquons enfin que, si l'on savait résoudre l'équation

$$10^x = n$$

pour toutes les valeurs entières de n, on saurait la résoudre pour toutes les valeurs fractionnaires. Soit, en effet, à résoudre l'équation

$$10^x = \frac{p}{q},$$

dans laquelle p et q sont supposés entiers. Posons

$$x = y - z,$$

il viendra $\quad 10^{y-z} = \frac{p}{q} \quad$ ou $\quad \frac{10^y}{10^z} = \frac{p}{q} \quad$ (**269**).

Or, on satisfera à cette équation en posant séparément

$$10^y = p \quad \text{et} \quad 10^z = q,$$

équations que l'on sait résoudre par hypothèse, puisque p et q sont entiers. Connaissant y et z, on en fera la différence $y - z$, et l'on aura la valeur de x.

274. Il reste donc à résoudre l'équation $10^x = n$ pour les valeurs entières de n.

La valeur de x sera entière toutes les fois que n sera égal à l'unité suivie d'un certain nombre de zéros. Si, par exemple, on a à résoudre

$$10^x = 100000;$$

comme 100000 équivaut à 10^5, il s'ensuit que $x = 5$.

Les équations

$$10^x = 10; \quad 10^x = 100; \quad 10^x = 1000; \quad 10^x = 10000; \text{ etc.};$$

donneraient de même

$$x=1 \quad ; \quad x=2 \quad ; \quad x=3 \quad ; \quad x=4 \quad ; \text{ etc.}$$

Remarque. L'équation $10^x=1$ donne $x=0$. Car on a vu (**41**) qu'on a en général $a^0=1$.

275. Pour toute autre valeur entière de n, x sera incommensurable. Supposons, en effet, qu'on donne à x la valeur commensurable $\frac{p}{q}$. L'expression 10^x deviendra $10^{\frac{p}{q}}$ ou $\sqrt[q]{10^p}$. Pour que cette quantité fût égale à un nombre entier, il faudrait que 10^p fût une puissance exacte du degré q. Or, $10^p=2^p.5^p$. Pour que ce produit fût une puissance $q^{\text{ième}}$ exacte, il faudrait qu'il en fût de même de 2^p et de 5^p : Il faudrait donc que p fût divisible par q. Mais alors $\frac{p}{q}$ serait un nombre entier; et $10^{\frac{p}{q}}$ serait égal à l'unité suivie d'un certain nombre de zéros, ce qui est contraire à l'hypothèse.

276. On ne pourra donc pas, en général, obtenir exactement la valeur de x; on ne pourra que se proposer d'en approcher.

On a calculé une fois pour toutes, par des méthodes qui ne sont point élémentaires, une table où l'on trouve, en regard de chaque valeur entière de n, depuis 1 jusqu'à 100000 et au delà, la valeur correspondante de x, à moins d'une demi-unité du 7ᵉ ordre décimal.

Nous reviendrons bientôt sur l'usage de cette table. Pour le moment, nous essayerons de faire comprendre comment, par des moyens élémentaires, on aurait pu la calculer.

Imaginons qu'on extraye la racine carrée de 10; puis la racine carrée de cette racine; puis la racine carrée de cette nouvelle racine, et ainsi de suite. On obtiendra ainsi des quantités qui iront en diminuant, mais qui seront toujours supérieures à l'unité, puisque, d'après le mécanisme même de l'extraction de la racine carrée, tout nombre plus grand que 1 a une racine plus grande que 1. Ces quantités ne seront autre chose que des puissances fractionnaires de 10, dont les exposants seront successivement

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16} \ldots \text{ etc.};$$

car $\sqrt{10}=10^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{10^{\frac{1}{2}}}=10^{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{10^{\frac{1}{4}}}=10^{\frac{1}{8}}$; et ainsi de suite. Après la 25ᵉ opération, on parviendra à une puissance de 10 qui aura pour exposant

$$\frac{1}{2^{25}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{33554432}$$

quantité plus petite qu'une demi-unité du 7^e ordre décimal; car son dénominateur est plus grand que 20000000.

Désignons cet exposant par $\frac{1}{\beta}$ pour faciliter l'écriture, et représentons par $1+\alpha$ la valeur de $10^{\frac{1}{\beta}}$; en sorte qu'on ait

$$10^{\frac{1}{\beta}}=1+\alpha \qquad [1].$$

277. Concevons maintenant que, par des multiplications successives, on calcule les puissances successives du second membre de cette équation; on aura les égalités

$$10^0=1\ ;\quad 10^{\frac{1}{\beta}}=1+\alpha\ ;\quad 10^{\frac{2}{\beta}}=(1+\alpha)^2\ ;$$

$$10^{\frac{3}{\beta}}=(1+\alpha)^3\ ;\quad 10^{\frac{4}{\beta}}=(1+\alpha)^4\ ;\ldots.\ 10^{\frac{m}{\beta}}=(1+\alpha)^m\ ;$$

dans lesquelles les seconds membres auront été calculés par hypothèse.

Or, 1° les exposants successifs $\frac{1}{\beta}$, $\frac{2}{\beta}$, $\frac{3}{\beta}$, etc., diffèrent entre eux de $\frac{1}{\beta}$, c'est-à-dire de moins d'une demi-unité du 7^e ordre décimal.

2° Je dis que tout nombre entier moindre que 1000000 tombera entre deux termes consécutifs de la série formée par les seconds membres.

En effet, en vertu de la relation [1], on a d'abord

$$10=(1+\alpha)^\beta=1+\beta\alpha+\frac{\beta(\beta-1)}{1\ .\ 2}\alpha^2+\text{etc.}$$

Donc le terme $\beta\alpha$, à lui seul, est moindre que 10, et l'on a $\beta\alpha<10$.

On ne troublera pas cette inégalité en remplaçant β par un nombre moindre, par 10000000, par exemple; on aura donc

$$10000000\,\alpha<10\ ,\qquad \text{d'où}\qquad \alpha<\frac{1}{1000000}\ .$$

Cela posé, prenons la différence entre deux termes consécutifs de la série des seconds membres; par exemple, entre les termes $(1+\alpha)^{m-1}$ et $(1+\alpha)^m$. Cette différence est

$$(1+\alpha)^m-(1+\alpha)^{m-1}\qquad \text{ou}\qquad (1+\alpha)^{m-1}[(1+\alpha)-1]\ ,$$

ou encore

$$(1+\alpha)^{m-1}.\,\alpha\ ;$$

et comme α est moindre que $\frac{1}{1000000}$, cette différence est moindre que

$$\frac{(1+\alpha)^{m-1}}{1000000}.$$

Cette différence sera donc moindre que l'unité tant que l'on aura

$$(1+\alpha)^{m-1} < 1000000 .$$

D'ailleurs la série des quantités

$$(1+\alpha)\ ,\quad (1+\alpha)^2\ ,\quad (1+\alpha)^3 \ldots\ldots (1+\alpha)^{m-1}\ ,\quad (1+\alpha)^m\ ,\ \text{etc.},$$

peut toujours être poussée assez loin pour que le dernier terme atteigne et surpasse même tout nombre donné, 1000000, par exemple ; il suffit pour cela qu'on ait

$$(1+\alpha)^m > 1000000 \quad \text{ou} \quad 1+m\alpha+\frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}\alpha^2+\text{etc.} > 1000000\ ;$$

inégalité à laquelle on satisfera si l'on pose

$$m\alpha > 1000000 \quad \text{ou} \quad m > \frac{1000000}{\alpha}\ ,$$

ce qui sera toujours possible à réaliser.

Donc, puisqu'on peut prolonger cette série depuis 1 jusqu'à 1000000, et que dans toute cette série la différence entre deux termes consécutifs est moindre que 1, il s'ensuit que tout nombre entier, moindre que 1000000, tombera entre deux termes consécutifs de cette série.

278. D'après cela on aura tous les éléments nécessaires pour former la table dont il s'agit.

Supposons, en effet, que l'on demande la valeur de x qui satisfait à l'équation

$$10^x = n\ ,$$

n étant un nombre moindre que 1000000. Soient $(1+\alpha)^{m-1}$ et $(1+\alpha)^m$ les deux termes consécutifs de la série entre lesquels n tombera; on aura les égalités

$$10^{\frac{m-1}{\beta}} = (1+\alpha)^{m-1}\ ,$$
$$10^x = n$$
$$10^{\frac{m}{\beta}} = (1+\alpha)^m\ .$$

Les trois seconds membres étant rangés par ordre de grandeur, il en sera de même des trois premiers ; donc x sera compris entre $\frac{m-1}{\beta}$ et $\frac{m}{\beta}$. Or, ces deux fractions ne diffèrent que de $\frac{1}{\beta}$, c'est-à-dire de moins d'une demi-unité du 7ᵉ ordre décimal. On pourra donc prendre l'une ou l'autre pour la valeur de x; l'erreur commise sera encore moindre que cette différence. En d'autres termes, l'une ou l'autre de ces fractions sera la valeur approchée de x, à moins d'une demi-unité du 7ᵉ ordre décimal, soit par défaut, soit par excès.

En raisonnant de même, on déduirait du calcul ci-dessus indiqué les valeurs de x correspondantes à toutes les valeurs entières de n, depuis 1 jusqu'à 1000000. Mais il n'est pas nécessaire de pousser la table de ces valeurs aussi loin.

Remarque. Cette méthode, comme toutes les méthodes élémentaires qu'on pourrait employer pour le même objet, serait inapplicable à cause de la longueur des calculs; mais elle est propre à faire comprendre la possibilité de former une table des valeurs approchées de x, table qui est d'une grande importance dans les calculs numériques, ainsi qu'on va le voir, et qui est connue sous le nom de *Table des logarithmes* des nombres.

§ II. Des logarithmes.

279. On appelle *logarithme* d'un nombre l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever une quantité constante pour reproduire ce nombre. Cette quantité constante se nomme la *base* des logarithmes, et les logarithmes de tous les nombres, pris par rapport à une même base, forment ce qu'on appelle un *système de logarithmes*.

Par exemple, dans l'équation

$$a^x = b\ ,$$

l'exposant x est le logarithme de b; et si l'on fait varier b en donnant à x les valeurs correspondantes qui vérifient cette équation, ces valeurs formeront un système de logarithmes dont la base sera la quantité constante a.

On désigne le logarithme d'un nombre b par la notation $\log b$. Ainsi $\log b = x$ signifie que le logarithme de b est égal à x.

Dans tout système de logarithmes, le logarithme de la base est 1; car on a, quel que soit a

$$a^1 = a\ .$$

Dans tout système de logarithmes, le logarithme de l'unité est zéro; car on a, quel que soit a

$$a^0 = 1\ .$$

Dans tout système de logarithmes, les puissances commensurables de la base ont seules des logarithmes commensurables. Car, si l'on avait

$$x=\frac{p}{q} \quad \text{d'où} \quad a^{\frac{p}{q}}=b \ ,$$

le nombre b serait une puissance commensurable de a.

Tous les autres nombres ont des logarithmes incommensurables.

Remarque. Il peut arriver que la base soit incommensurable; les logarithmes des puissances commensurables de la base n'en sont pas moins commensurables. Ainsi l'équation

$$(\sqrt{2})^x=\sqrt[4]{32}$$

est satisfaite par $x=\frac{5}{2}$; car on a

$$(\sqrt{2})^{\frac{5}{2}}=\sqrt{\sqrt{2^5}}=\sqrt[4]{2^5}=\sqrt[4]{32} \ .$$

280. Les logarithmes de tous les systèmes jouissent des propriétés fondamentales suivantes :

I. *Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes de ses facteurs.*

Soient b, b', b'', etc., les facteurs d'un produit P. Soient x, x', x'', etc., et X leurs logarithmes respectifs. On aura les égalités

$$a^x=b \ ; \quad a^{x'}=b' \ ; \quad a^{x''}=b'' \ ; \text{ etc.}$$

En les multipliant membre à membre, et observant que, d'après les règles démontrées dans le chapitre précédent, pour faire le produit de plusieurs puissances d'une même quantité, il faut faire la somme des exposants, il viendra

$$a^{x+x'+x''+\text{etc.}}=b\times b'\times b''\times \text{etc} \ .$$

Or on a aussi $\quad a^X=P=b.b'.b''.\text{etc}$.

Donc $\quad X=x+x'+x''+\text{etc.}$,

ou bien $\quad \log bb'b''\ldots=\log b+\log b'+\log b''+\text{etc.}$,

ce qui revient à l'énoncé de la proposition.

II. *Le logarithme du quotient de deux quantités est égal au logarithme du dividende, moins le logarithme du diviseur.*

Soient b et b' deux quantités, x et x' leurs logarithmes. Soient q le quotient de b par b', et X son logarithme. On aura les égalités

$$a^x=b \quad \text{et} \quad a^{x'}=b' \ .$$

En les divisant membre à membre, et observant que pour diviser l'une par l'autre deux puissances d'une même quantité, il faut retrancher l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende, il viendra

$$a^{x-x'}=\frac{b}{b'} ;$$

mais on a aussi $$a^{\mathrm{X}}=q=\frac{b}{b'} .$$

Donc $$\mathrm{X}=x-x' \quad \text{ou} \quad \log\frac{b}{b'}=\log b-\log b' ,$$

ce qui revient à l'énoncé de la proposition.

III. *Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre, multiplié par l'exposant de la puissance.*

Soient b un nombre, x son logarithme. Soient P la puissance $p^{\text{ième}}$ de b, et X son logarithme. On aura d'abord

$$a^x=b .$$

Elevant les deux membres à la puissance p, et remarquant que pour élever une puissance d'une quantité à une nouvelle puissance il faut faire le produit des exposants, il viendra

$$a^{px}=b^p ;$$

mais on a aussi $$a^{\mathrm{X}}=\mathrm{P}=b^p .$$

Donc $$\mathrm{X}=px \quad \text{ou} \quad \log b^p=p.\log b ,$$

ce qui revient à l'énoncé de la proposition.

IV. *Le logarithme d'une racine d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre, divisé par l'indice de la racine.*

Soient b un nombre, x son logarithme. Soient R la racine $m^{\text{ième}}$ de b, et X son logarithme. On aura d'abord

$$a^x=b .$$

Extrayant la racine $m^{\text{ième}}$ des deux membres et observant que pour extraire la racine $m^{\text{ième}}$ d'une puissance d'une quantité, il faut diviser son exposant par m, il viendra

$$a^{\frac{x}{m}}=\sqrt[m]{b} .$$

Mais on a aussi $$a^{\mathrm{X}}=\mathrm{R}=\sqrt[m]{b} .$$

Donc $$\mathrm{X}=\frac{x}{m} \quad \text{ou} \quad \log\sqrt[m]{b}=\frac{\log b}{m} ,$$

ce qui revient à l'énoncé de la proposition.

281. On voit que ces propriétés des logarithmes permettent de ramener la multiplication à une addition, la division à une soustraction, la formation d'une puissance à une multiplication, et l'extraction d'une racine à une division, pourvu qu'on ait une table des logarithmes de tous les nombres.

En effet, si l'on veut faire le produit de deux nombres, on cherchera leurs logarithmes dans la table ; on en fera la somme ; on cherchera cette somme dans la colonne des logarithmes, et le nombre correspondant sera le produit demandé.

Si l'on veut trouver le quotient de deux nombres, on cherchera leurs logarithmes dans la table ; on retranchera le logarithme du diviseur de celui du dividende ; on cherchera la différence dans la colonne des logarithmes, et le nombre correspondant sera le quotient demandé.

Si l'on veut élever un nombre à une puissance, on cherchera dans la table le logarithme de ce nombre ; on multipliera ce logarithme par l'exposant de la puissance ; on cherchera le produit obtenu dans la colonne des logarithmes, et le nombre correspondant sera la puissance demandée.

Enfin, si l'on veut extraire une racine d'un nombre, on cherchera dans la table le logarithme de ce nombre ; on divisera ce logarithme par l'indice de la racine ; on cherchera le quotient obtenu dans la colonne des logarithmes, et le nombre correspondant sera la racine demandée.

282. Dans les systèmes de logarithmes ordinairement employés, la base est plus grande que 1.

I. Les logarithmes des quantités plus grandes que 1 sont alors positifs et d'autant plus grands que ces quantités sont plus grandes.

D'abord ils sont positifs. On a vu, en effet, que lorsqu'une quantité est plus grande que 1, on peut toujours l'élever à une puissance positive telle que le résultat surpasse un nombre donné quelconque (**277**). Soit x le logarithme d'un nombre b plus grand que 1 ; on pourra toujours élever la base a à une puissance positive X, telle que le résultat N soit plus grand que b. On aura les égalités

$$a^X = N\ ,$$

$$a^x = b\ ,$$

d'ailleurs $$a^0 = 1\ .$$

Les trois seconds membres étant rangés par ordre de grandeur, il devra en être de même des trois premiers. Donc x est compris entre 0 et un nombre positif X ; donc il est lui-même positif.

En second lieu, les logarithmes sont d'autant plus grands que les nombres auxquels ils correspondent sont eux-mêmes plus grands. En effet, soient x et x' les logarithmes de deux nombres b et b' ; en sorte qu'on ait

$$a^x = b \quad \text{et} \quad a^{x'} = b' .$$

Supposons $b' > b$, et divisons la seconde égalité par la première; il viendra

$$a^{x'-x} = \frac{b'}{b} .$$

Or, le second membre étant plus grand que 1 , $x' - x$ qui en est le logarithme devra, d'après ce qui précède, être positif. Donc x' est plus grand que x .

II. Les logarithmes des quantités moindres que 1 sont négatifs et d'autant plus grands en valeur absolue que ces quantités sont plus petites.

D'abord ils sont négatifs. Soit, en effet, x le logarithme d'une quantité b moindre que 1 ; on aura

$$a^x = b .$$

Posons
$$b = \frac{1}{\beta} ,$$
β étant plus grand que 1 .

Posons en outre $x = -y$. Il viendra

$$a^{-y} = \frac{1}{\beta} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{a^y} = \frac{1}{\beta} \quad \text{d'où} \quad a^y = \beta .$$

Or, β étant plus grand que 1 , d'après ce qui a été démontré ci-dessus, il faut que y soit positif. Donc x est négatif.

D'ailleurs la valeur de y est d'autant plus grande que β est plus grand; en d'autres termes, la valeur absolue de x est d'autant plus grande que b est plus petit.

Remarque. Puisque a^x croît indéfiniment avec x , lorsque a est plus grand que 1 , on en conclut qu'à une valeur infinie, mais positive, de x répond une valeur infinie de a^x ou de b , et *vice versa*, ce qu'on exprime en disant que *le logarithme de l'infini est l'infini positif*.

Par la même raison, puisque à une valeur infinie de β répond une valeur infinie et positive de y , on en conclut qu'à une valeur nulle de b répond une valeur infinie, mais négative pour x ; ce qu'on exprime en disant que *le logarithme de zéro est l'infini négatif*.

283. Les logarithmes le plus fréquemment employés, et qu'on désigne, pour cette raison, sous le nom de *logarithmes vulgaires*, sont ceux dont la base est 10, et qui répondent conséquemment à l'équation

$$10^x = n .$$

Nous avons vu (**278**) comment on pouvait concevoir que la table de ces logarithmes ait été formée. Ces logarithmes ont été calculés sous forme décimale, à moins d'une demi-unité du 7e ordre. Ils se composent d'une partie entière qu'on appelle *la caractéristique,* et d'une partie décimale formée de 7 chiffres.

Les logarithmes des nombres plus grands que 1 sont positifs, ainsi qu'on l'a démontré ci-dessus; ceux des quantités moindres que 1 sont négatifs; mais ces derniers ne figurent point dans les tables; on en verra bientôt la raison.

Au lieu d'employer des logarithmes entièrement négatifs, on préfère employer des logarithmes dont la caractéristique seule est négative; ces logarithmes se convertissent facilement les uns dans les autres.

Soit, par exemple, un logarithme entièrement négatif

$$-2{,}7364508 .$$

Ce logarithme revient à

$$-2 - 0{,}7364508 .$$

Si on y ajoute $+1$ et -1, ce qui ne changera pas sa valeur, on pourra l'écrire

$$-2 - 1 + 1 - 0{,}7364508 ,$$

ou $\quad -3 + 0{,}2635492$, ou enfin $\bar{3}{,}2635492$.

On met ainsi le signe — au-dessus de la caractéristique pour indiquer qu'il ne porte que sur elle et n'affecte pas la partie décimale.

Pour retrancher 0,7364508 de 1, on sait qu'il n'y a qu'à retrancher le premier chiffre significatif à droite de 10, et tous les autres de 9. On voit donc que: *pour convertir un logarithme entièrement négatif en un logarithme dont la caractéristique seule soit négative, il faut augmenter la caractéristique d'une unité, mettre le signe — au-dessus, et soustraire chaque décimale de 9, en allant de gauche à droite, sauf la dernière décimale significative que l'on soustrait de 10.*

Ainsi $-1{,}7998405$; $-0{,}0467739$; $-4{,}8654231$;

reviennent à

$$\bar{2}{,}2001595 \ ; \quad \bar{1}{,}9532261 \ ; \quad \bar{5}{,}1345769 .$$

Réciproquement: *pour convertir un logarithme, dont la caractéristique seule est négative, en un logarithme entièrement négatif, il faut: diminuer la caractéristique d'une unité, mettre le signe —*

devant, et soustraire chaque décimale de 9 *, en allant de gauche à droite, sauf la dernière décimale significative que l'on soustrait de* 10 *.*

On peut reprendre, comme exemples, les logarithmes écrits ci-dessus.

284. Dans le système dont la base est 10 :

Quand on multiplie, ou quand on divise un nombre par une puissance entière de 10 *, la partie décimale de son logarithme ne change pas.*

Soit, en effet, x le logarithme d'un nombre n, dans le système dont la base est 10, en sorte qu'on ait

$$10^x = n \, .$$

Multiplions membre à membre par 10^m, m étant un nombre entier; il viendra

$$10^{x+m} = n \, . \, 10^m \, ,$$

c'est-à-dire que le logarithme de $n \, . \, 10^m$ est $x + m$, ou le logarithme de n augmenté du nombre entier m ; la partie décimale est donc la même ; la caractéristique seule a changé et contient m unités de plus.

Par exemple, le nombre 2 ayant pour logarithme $0{,}3010300$;

le logarithme de	20	sera	1,3010300 ,
le logarithme de	200		2,3010300 ,
le logarithme de	2000		3,3010300 ,
le logarithme de	20000		4,3010300 ,

et ainsi de suite.

Divisons, au contraire, les deux membres de l'équation

$$10^x = n$$

par 10^m, il viendra
$$10^{x-m} = \frac{n}{10^m} \, ,$$

c'est-à-dire que le logarithme de $\frac{n}{10^m}$ est $x - m$, ou le logarithme de n diminué du nombre entier m. Si l'on fait porter cette diminution sur la caractéristique, la partie décimale ne changera pas.

Ainsi :	le logarithme de	2	étant	$0{,}3010300$,
	le logarithme de	0,2	sera	$\bar{1}{,}3010300$,
	le logarithme de	0,02		$\bar{2}{,}3010300$,
	le logarithme de	0,002		$\bar{3}{,}3010300$,
	le logarithme de	0,0002		$\bar{4}{,}3010300$,

et ainsi de suite.

285. La caractéristique du logarithme d'un nombre peut s'obtenir sans le secours des tables, et il est important de s'exercer à la trouver.

I. *La caractéristique du logarithme d'un nombre décimal est positive et a autant d'unités que la partie entière du nombre décimal a de chiffres, moins un.*

Soit, par exemple, le nombre $2369,751$; ce nombre ayant 4 chiffres à la partie entière, son logarithme aura pour caractéristique 3. Car, le nombre proposé est compris entre 1000 et 10000, ou entre 10^3 et 10^4; son logarithme est donc compris entre 3 et 4; sa caractéristique est donc 3.

Généralement : supposons qu'il y ait m chiffres à la partie entière; le nombre décimal sera compris entre 10^{m-1} et 10^m; son logarithme sera donc compris entre le logarithme de 10^{m-1} qui est précisément $m-1$, et le logarithme de 10^m qui est m. Puisque le logarithme du nombre décimal proposé est compris entre $m-1$ et m, il se compose de $m-1$ unités et d'une partie décimale. Sa caractéristique est donc $m-1$, et se compose par conséquent d'autant d'unités qu'il y a de chiffres, moins un, dans la partie entière du nombre décimal donné.

Cette règle s'applique au cas où la partie décimale du nombre proposé est nulle, c'est-à-dire au cas où le nombre proposé est entier. *La caractéristique du logarithme d'un nombre entier a donc autant d'unités que ce nombre a de chiffres, moins un.*

Ainsi le nombre 34690752 ayant 8 chiffres, la caractéristique de son logarithme est 7.

II. *La caractéristique du logarithme d'une fraction décimale est négative, et égale au nombre qui exprime le rang du premier chiffre significatif après la virgule.*

Soit, par exemple, la fraction $0,005397$. En transportant la virgule après le chiffre 5, ce qui donne $5,397$, on multiplie par 1000 ou 10^3; la partie décimale du logarithme ne change donc pas, et la caractéristique seule augmente de 3 unités. Mais le nombre $5,397$ ainsi obtenu, ayant *un* chiffre à sa partie entière, la caractéristique de son logarithme est *zéro*. Celle de la fraction proposée qui a 3 unités de moins sera donc $\bar{3}$.

Généralement : supposons que le premier chiffre significatif soit le m^{ieme} après la virgule. Transportons la virgule après ce premier chiffre significatif, ce qui revient à multiplier la fraction proposée par 10^m; la partie décimale de son logarithme n'aura pas changé; la caractéristique seule aura augmenté de m unités. Mais le nombre décimal ainsi obtenu ayant *un* chiffre à la partie entière, la caractéristique de son logarithme sera *zéro*. Celle de la fraction proposée, qui a m unités de moins, sera donc $\overline{m}$.

Si l'on faisait usage d'un logarithme entièrement négatif, la caractéristique aurait une unité de moins (**283**), et serait par conséquent égale au nombre des zéros compris entre la virgule et le premier chiffre significatif.

Remarque. Réciproquement : si un logarithme est positif et a m unités à sa caractéristique, ce logarithme est celui d'un nombre plus grand que 1, et qui, mis sous forme décimale, a $m+1$ chiffres à la partie entière.

Si un logarithme a une caractéristique seule négative $\overline{m}$, il appartient à une fraction décimale dont le premier chiffre significatif occupe le $m^{\text{ième}}$ rang après la virgule.

Si un logarithme entièrement négatif a m unités à sa caractéristique, il appartient à une fraction décimale dans laquelle il y a m zéros entre la virgule et le premier chiffre significatif.

§ III. De l'usage des tables de logarithmes.

286. L'usage des tables de logarithmes se réduit à la résolution de ces deux problèmes : 1° *Étant donné un nombre, trouver son logarithme*; 2° *étant donné un logarithme, trouver le nombre auquel il correspond.*

Nous allons nous occuper de ces deux problèmes, en supposant que le lecteur ait entre les mains, d'abord les tables de Delalande, en second lieu les tables de Callet.

Usage des Tables de Delalande.

287. Ces tables sont disposées sur trois colonnes : La première, intitulée *Nomb.*, contient les nombres entiers, depuis 0 jusqu'à 10000. La seconde, intitulée *Logarit.*, contient les logarithmes de ces nombres, calculés avec 7 décimales. La troisième n'est remplie qu'à partir du nombre 990 ; elle est intitulée *Diff.*, et contient les différences entre les logarithmes consécutifs. Ces différences expriment des unités du 7e ordre décimal; mais on n'en a mis que la valeur absolue, afin de tenir moins de place. On les désigne sous le nom de *différences tabulaires*.

288. Premier problème. *Étant donné un nombre, trouver son logarithme.*

La résolution de ce problème se compose de deux parties :

1° *Trouver la caractéristique du logarithme demandé*; 2° *Trouver la partie décimale.*

1° D'après les règles établies au n° **285**, si le nombre proposé est entier, la caractéristique de son logarithme sera positive et composée d'autant d'unités qu'il y a de chiffres, moins un, dans ce nombre.

Si le nombre proposé est décimal et plus grand que 1, la caractéristique de son logarithme sera positive et composée d'autant d'unités qu'il y a de chiffres, moins un, à la partie entière de ce nombre.

Si le nombre proposé est une fraction décimale, la caractéristique de son logarithme sera négative et composée d'autant d'unités qu'il y en a dans le nombre qui exprime le rang du premier chiffre significatif après la virgule.

Par exemple : si le nombre est

$$42367 \;,\quad \text{ou}\quad 423{,}67 \;,\quad \text{ou}\quad 0{,}0042367 \;,$$

la caractéristique du logarithme correspondant sera

$$4 \;,\qquad \text{ou}\qquad 2 \;,\qquad \text{ou}\qquad \bar{3} \;.$$

2° Pour trouver la partie décimale du logarithme demandé, il faut distinguer deux cas.

Si le nombre proposé n'a pas plus de 4 chiffres consécutifs (tant à la partie entière qu'à la partie décimale), on cherchera le nombre formé par ces 4 chiffres dans la colonne intitulée *Nomb.* On trouvera à côté, dans la colonne intitulée *Logarit.*, un logarithme qui aura la partie décimale demandée (**284**).

Soit, par exemple, le nombre $4{,}236$; on cherchera 4236 dans la colonne des nombres; on trouvera à côté, dans la colonne des logarithmes, un logarithme qui a pour partie décimale $,6269560$. Et, comme la caractéristique du logarithme cherché doit être *zéro*, puisque le nombre proposé n'a qu'un chiffre à la partie entière, le logarithme de ce nombre sera $0{,}6269560$.

Si le nombre proposé a plus de 4 chiffres consécutifs, on commencera par séparer, au moyen d'une virgule, les 4 premiers chiffres à gauche. S'il s'agit, par exemple, du nombre 42367 , on mettra une virgule après le chiffre 6 . S'il s'agit du nombre $42{,}367$ ou du nombre $0{,}042367$, on transportera la virgule après le chiffre 6 . On obtiendra ainsi un nombre décimal $4236{,}7$ ayant 4 chiffres à sa partie entière.

On cherchera cette partie entière dans la colonne des nombres; on prendra, dans la colonne des logarithmes, la partie décimale du logarithme correspondant, c'est-à-dire 6269560 .

On prendra ensuite, dans la colonne des différences, la différence 1025 entre ce logarithme et le suivant. On multipliera cette différence par la partie décimale 0,7 qui suit la partie entière du nombre décimal. On trouvera pour produit 717,5 . On ajoutera la partie entière de ce produit, considérée comme exprimant des unités du 7e ordre décimal, à la partie décimale trouvée dans la table :

$$\begin{array}{r} ,6269560 \\ 717 \\ \hline ,6270277 \end{array}$$

et l'on obtiendra la partie décimale ,6270277 du logarithme cherché.

Si le nombre proposé est	42367	son log. sera donc	4,6270277
Si	42,367		1,6270277
Si	0,042367		$\bar{2}$,6270277

et ainsi de suite.

Voici maintenant l'explication du procédé que nous venons de suivre.

La différence entre le logarithme de 4236 et le logarithme de 4237 est 1025 unités du 7e ordre ; mais, en jetant les yeux sur la table, on voit que la différence entre le logarithme de 4237 et celui de 4238 est encore 1025 . On en conclut que, dans cette partie de la table, les différences entre les logarithmes sont proportionnelles aux différences entre les nombres, du moins au degré d'approximation de la table. On peut donc poser cette proportion :

Si pour 1 unité de différence entre les nombres 4236 et 4237 , il y a 1025 dix-millionièmes de différence entre leurs logarithmes, combien pour 0,7 de différence entre 4236 et 4236,7 y aura-t-il de différence entre leurs logarithmes ; ou

$$1 : 1025 :: 0,7 : x \text{ ; d'où } x = 1025 \times 0,7 = 717,5 \text{ .}$$

La quantité x exprime des unités de même ordre que 1025 , c'est-à-dire des dix-millionièmes ; il faut donc ajouter sa partie entière 717 aux dix-millionièmes de la partie décimale ,6269560 du logarithme de 4236 , pour obtenir celle du logarithme demandé.

Il n'arrive pas toujours ainsi que deux différences tabulaires consécutives soient égales ; mais elles ne diffèrent jamais que d'un très-petit nombre d'unités, même dans le commencement de la table, où elles sont le plus grandes ; il est donc toujours permis de poser approximativement la proportion sur laquelle se fonde le procédé que nous venons d'indiquer.

289. SECOND PROBLÈME. *Étant donné un logarithme, trouver le nombre auquel il correspond.*

Ce problème se divise aussi en deux parties : 1° *Trouver les chiffres consécutifs dont le nombre cherché se compose;* 2° *trouver l'ordre d'unités que doit exprimer le premier de ces chiffres.*

1° Pour trouver les chiffres consécutifs du nombre cherché, il faut distinguer deux cas :

Si la partie décimale du logarithme donné se trouve dans la table, on trouvera en regard les 4 chiffres dont le nombre cherché se compose; car c'est toujours parmi les logarithmes des nombres de 4 chiffres qu'il faut chercher cette partie décimale, afin de pouvoir, au besoin, faire usage des différences tabulaires;

Si, par exemple, la partie décimale donnée est 6269560, on trouvera 4236 pour les 4 chiffres du nombre demandé. On aura alors égard à la caractéristique :

Si la caractéristique est	$\bar{3}$,	le nombre demandé sera 0,004236
Si	$\bar{2}$,	0,04236
Si	$\bar{1}$,	0,4236
Si	0,	4,236
Si	1,	42,36
Si	2,	423,6
Si	3,	4236
Si	4,	42360
Si	5,	423600

et ainsi de suite.

Si la partie décimale du logarithme donné ne se trouve pas dans la table, elle tombera entre celles des logarithmes de deux nombres consécutifs. Par exemple, si la partie décimale donnée est 6270277, elle tombera entre celles des logarithmes des nombres 4236 et 4237.

On retranchera de la partie décimale du logarithme donné celle du logarithme du plus petit de ces deux nombres, savoir : 6269560. On obtiendra un reste 717.

On divisera ce reste par la différence tabulaire 1025 entre les logarithmes des deux nombres consécutifs; on pourra pousser le quotient jusqu'aux centièmes; on trouvera ainsi 0,69 ou 0,70, en remarquant que le chiffre suivant serait encore un 9.

On mettra les chiffres du quotient obtenu à la droite de ceux du plus petit des deux nombres consécutifs, ce qui donnera 423670, ou simplement 42367 pour les chiffres consécutifs du nombre demandé.

On aura alors égard à la caractéristique du logarithme donné. Par exemple,

Si la caractéristique est	$\bar{2}$,	le nombre demandé sera	0,042367
Si	0 ,		4,2367
Si	3 ,		4236,7
Si	6 ,		4236700

et ainsi de suite.

L'explication de ce procédé est la même que dans le premier problème. En admettant que les différences entre les logarithmes sont proportionnelles aux différences entre les nombres, on pourra poser la proportion :

Si, pour 1025 dix-millionièmes de différence entre les logarithmes des nombres consécutifs 4236 et 4237 il y a 1 unité de différence entre ces nombres, combien, pour 717 dix-millioniêmes de différence entre le logarithme donné et celui de 4236, y aura-t-il de différence entre ces nombres? ou

$$1025 : 1 :: 717 : y \; ; \quad \text{d'où} \quad y = \frac{717}{1025} = 0{,}699 \ldots . \quad \text{ou} \quad 0{,}7 \; .$$

Cette valeur de y sera donc ce qu'il faut ajouter au nombre 4236. On aura ainsi 4236,7, ou simplement 42367, puisqu'on ne s'occupe ici que de la succession de ces chiffres, et que leur valeur relative doit être déterminée par la caractéristique du logarithme donné.

Remarque. Si le logarithme donné était entièrement négatif, il faudrait le changer en un autre dont la caractéristique seule fût négative. (Voy. le n° 283.)

Usage des Tables de Callet.

290. Nous supposons, pour la clarté des explications qui vont suivre, que le lecteur a les tables à la main.

De 0 à 1200, ces tables sont disposées sur deux colonnes : l'une intitulée N contient les nombres, l'autre intitulée *Log.* contient la partie décimale des logarithmes de ces nombres, chacune placée en regard du nombre auquel elle correspond.

A partir de 1200 la disposition est plus compliquée. Les deux premières colonnes n'ont point rapport à l'objet qui nous occupe. La troisième, intitulée N, contient les nombres depuis 1200 jusqu'à 10800 ; mais il faut considérer ces nombres comme exprimant des dizaines. Le chiffre des unités se trouve écrit au haut de la page, comme titre de l'une des 10 colonnes qui suivent.

Dans la colonne intitulée 0, on trouve la partie décimale des logarithmes des nombres inscrits dans la colonne intitulée N. Cette partie décimale est donnée avec 7 chiffres jusqu'au nombre 10000 de la colonne N, et avec 8 chiffres au delà. Les trois premiers chiffres, qui sont communs à plusieurs logarithmes consécutifs, ne sont écrits qu'une seule fois, et sont laissés en blanc tant qu'ils ne changent pas; il en est même ainsi pour les 4 premiers chiffres, dès que la partie décimale en a 8.

Dans les colonnes intitulées 1, 2, 3 .... 9, on trouve en regard de chaque nombre de la colonne N 4 chiffres; ces chiffres sont destinés à remplacer les 4 derniers chiffres de la partie décimale du logarithme de ce nombre, lorsqu'on le considère comme exprimant des dizaines, et que le chiffre des unités est le chiffre placé en tête de la colonne verticale dont il s'agit. Nous reviendrons sur ce sujet.

Enfin, dans une dernière colonne intitulée *Dif.*, on trouve les différences entre les logarithmes consécutifs, c'est-à-dire entre les groupes de 4 chiffres placés sur une même ligne horizontale dans les 10 colonnes successives intitulées 0, 1, 2 .... 9, ou entre le groupe qui termine une ligne horizontale et celui qui commence la suivante. Chaque différence, ordinairement commune à un grand nombre de logarithmes successifs, n'est écrite qu'une fois. Au-dessous de cette différence se trouve un petit tableau à 2 colonnes, dont l'une contient les chiffres 1, 2, 3 .... 9, et dont l'autre donne, en regard de ces chiffres, les produits de la différence dont il s'agit par 0,1, par 0,2, par 0,3, etc....; enfin par 0,9.

Dans le commencement de la table ces différences et ces tableaux étant souvent très-multipliés, on les trouve placés eux-mêmes sur deux colonnes; mais il est facile de reconnaître à quelle partie de la table, ou plutôt de la page, chacun de ces tableaux correspond.

Remarque. En jetant les yeux sur la table, on remarquera de temps à autre une interruption dans la série des groupes de 4 chiffres qui se succèdent sur une même ligne horizontale, dans les colonnes 0, 1, 2,.... 9. Après un certain nombre de ces groupes, la ligne se continue en blanc, et les groupes suivants se trouvent une ligne plus bas, et sont précédés à leur tour d'un espace blanc. Cela tient à ce que les 3 premiers chiffres de la partie décimale ont changé; les groupes qui précèdent l'interruption correspondent à la première valeur de ces 3 premiers chiffres, et les groupes qui suivent l'interruption correspondent à la valeur suivante de ces trois chiffres. Cette nouvelle valeur se trouve en effet placée sur la même ligne que la seconde série de groupes, en avant du blanc qui les précède.

Enfin, pour faciliter les recherches, on a placé en tête de chaque page les 3 premiers chiffres du premier nombre écrit dans la colonne N et les 3 premiers chiffres du premier logarithme écrit dans la colonne 0. Les uns sont précédés d'un N, et les autres d'un L.

Pour de plus amples renseignements, on pourrait recourir au *Précis élémentaire sur l'explication des logarithmes,* etc.. que l'auteur a mis en tête de ses tables. Mais ce qui précède suffit pour résoudre les deux problèmes dont nous avons à nous occuper.

291. Premier problème. *Un nombre étant donné, trouver son logarithme.*

La caractéristique s'obtiendra d'abord par les règles du n° **285**.

Pour obtenir la partie décimale, on fera abstraction de la virgule, s'il y en a une, dans le nombre proposé, et l'on ne considérera que la suite de ses chiffres. Supposons d'abord qu'il n'y en ait pas plus de cinq, par exemple, 56274. On cherchera dans la colonne N le nombre 5627 formé par les quatre premiers chiffres à gauche. On trouvera dans la colonne 0 et à gauche dans cette colonne, les trois premiers chiffres 750 de la partie décimale cherchée. On suivra ensuite la ligne horizontale où se trouve le nombre 5627; et, dans la colonne verticale qui a pour titre le cinquième chiffre 4 du nombre proposé, on trouvera quatre chiffres 3078 que l'on écrira à la suite des trois premiers 750 pour former la partie décimale du logarithme cherché 7503078.

Si le nombre proposé a un sixième chiffre, s'il s'agit, par exemple, de 562743, on cherchera ce sixième chiffre 3 dans la colonne de gauche du petit tableau placé au-dessous de la différence tabulaire 78; et en regard, dans la colonne de droite, on trouvera un nombre 23 qu'il faudra ajouter aux dix-millionièmes de la partie décimale déjà obtenue

$$\begin{array}{lr} & 7503078 \\ & 23 \\ \hline \text{ce qui donnera} & 7503101 \end{array}$$

Si le nombre proposé avait un septième chiffre, s'il s'agissait, par exemple, du nombre 5627438, on chercherait ce septième chiffre 8 dans la colonne de gauche du même petit tableau, et l'on trouverait en regard dans la colonne de droite le nombre 62; mais au lieu de l'ajouter aux dix-millionièmes de la partie décimale déjà obtenue, il faudrait l'écrire un rang plus loin, de manière que le chiffre 2 fût au rang des cent-millionièmes, ce qui revient à diviser 62 par 10 avant de l'ajouter aux dix-millionièmes ; on formerait ainsi le tableau suivant :

	7503078
	23
	62
et en additionnant on aurait	7503107

pour la partie décimale demandée.

(On ne tient pas compte du chiffre 2 écrit au huitième rang ; nous ne l'avons écrit que pour la clarté des explications.)

Si le nombre proposé avait un huitième chiffre, on le chercherait de même dans le petit tableau des différences proportionnelles, et l'on prendrait le nombre placé en regard ; mais il faudrait le diviser par 100 avant de l'ajouter aux dix-millionièmes de la partie décimale déjà obtenue.

Au delà du huitième chiffre, les suivants seraient sans influence sensible sur les sept premiers chiffres de la partie décimale demandée.

Pour compléter le logarithme cherché, il n'y aurait plus qu'à écrire sa caractéristique.

Si le nombre proposé était	562743800	son logarithme serait	8,7503107
Si	5627,438		3,7503107
Si	5,627438		0,7503107
Si	0,05627438		$\bar{2}$,7503107

et ainsi de suite.

Remarque. L'usage du petit tableau placé au-dessous de la différence tabulaire, et que l'on nomme *tableau des différences proportionnelles*, est fondé sur l'hypothèse que les différences entre les logarithmes sont sensiblement proportionnelles aux différences entre les nombres ; ou que l'on peut dire : Si, pour 1 unité ajoutée au nombre, il faut ajouter, par exemple, 78 dix-millionièmes à son logarithme,

pour	0,1	ajouté au nombre, il faudra ajouter	$78 \times 0,1$	dix-millionièmes à son log.
	0,2		$78 \times 0,2$	
	0,3		$78 \times 0,3$	
	etc.		etc.	
	0,01		$78 \times 0,01$	
	0,02		$78 \times 0,02$	
	etc.		etc.	

Pour justifier cette hypothèse, il suffit de remarquer que la même différence tabulaire 78 est commune à plusieurs couples de logarithmes consécutifs ; en sorte que, dans cette partie de la table,

Le nombre augmentant de	1 ,	son logarith. augmente de	1 fois 78 dix-millionièmes;
	2 ,		2 fois 78
	3 ,		3 fois 78

et ainsi de suite ; ou, en d'autres termes, que les différences entre les logarithmes sont proportionnelles aux différences entre les nombres, du moins au degré d'approximation des tables ; ce qui suffit pour rendre raison du procédé indiqué ci-dessus.

292. Second problème. *Étant donné un logarithme, trouver le nombre correspondant.*

On cherchera d'abord les chiffres consécutifs du nombre demandé; on déterminera ensuite, d'après la caractéristique du logarithme donné, l'ordre d'unités que doit exprimer le premier de ces chiffres.

1° Supposons, pour fixer les idées, que la partie décimale du logarithme donné soit 7503107 .

On cherchera les trois premiers chiffres 750 dans la colonne 0 , et à gauche dans cette colonne ; on cherchera ensuite les quatre chiffres suivants 3107 parmi les groupes de quatre chiffres destinés à compléter les logarithmes qui commencent par 750 . Celui de ces divers groupes qui approche le plus, par défaut, de 3107 est 3078 . Ce groupe correspond à la ligne horizontale où se trouve, dans la colonne N , le nombre 5627 , et à la colonne verticale qui a pour titre 4 ; on en conclura que les cinq premiers chiffres du nombre demandé sont 56274 .

On retranchera 3078 de 3107 , ce qui donne pour reste 29 . On cherchera dans la colonne de droite du petit tableau des différences, ce reste 29 . Le nombre qui en approche le plus, par défaut, est 23 ; en regard de 23 , dans la colonne de gauche du même tableau, se trouve le chiffre 3 ; ce sera le sixième chiffre du nombre demandé, dont les six premiers chiffres sont conséquemment 562743 .

Pour avoir le septième, on retranchera 23 de 29 , ce qui donne pour reste 6 ; on multipliera ce nombre par 10 , ce qui donne 60 ; et l'on cherchera de nouveau ce nombre dans la colonne de droite du petit tableau des différences proportionnelles. Le nombre qui en approche le plus est 62 , qui correspond au chiffre 8 ; les sept premiers chiffres du nombre demandé sont donc 5627438 .

Pour obtenir ce dernier chiffre, on prend, comme on voit, dans le petit tableau le nombre qui approche le plus de celui qu'on y cherche, que ce soit d'ailleurs par excès ou par défaut. Il faudrait

18

le prendre par défaut si l'on se proposait de trouver le huitième chiffre du nombre cherché; mais on ne pourrait pas compter sur son exactitude; il peut même arriver que le septième ne soit approché qu'à une unité près, par défaut ou par excès.

2° Lorsqu'on a trouvé les chiffres consécutifs dont se compose le nombre cherché, on a égard à la caractéristique du logarithme donné pour déterminer l'ordre d'unités que doit exprimer le premier de ces chiffres.

Dans l'exemple qui précède,

Si la caractéristique était	8	, le nombre demandé serait	562743800
Si	3		5627,438
Si	0		5,627438
Si	$\bar{2}$		0,05627438

et ainsi de suite.

Remarque. L'usage du tableau des différences proportionnelles est fondé sur la même hypothèse que dans le problème précédent. On voit en outre que cet usage est inverse dans les deux problèmes.

§ IV. Des calculs par logarithmes.

293. Nous avons vu (**281**) que les propriétés des logarithmes permettent de ramener la multiplication à une addition, la division à une soustraction, la formation d'une puissance à une multiplication, et l'extraction d'une racine à une division. Nous pouvons maintenant en donner des exemples.

I. Soit à *multiplier* 362,4 *par* 5,97 .

On trouvera : $\log 362{,}4 = 2{,}5591882$
$\log 5{,}97 = 0{,}7759743$

Faisant la somme, on obtient $3{,}3351625$

Le nombre correspondant 2163,528 sera le produit demandé.

II. Soit à *diviser* 71,645 *par* 6,25 .

On a : $\log 71{,}645 = 1{,}8551859$
$\log 6{,}25 = 0{,}7958800$

Faisant la différence, on trouve : $1{,}0593059$

Le nombre correspondant 11,4632 sera le quotient demandé.

III. Soit à *élever* 2 *à la* 20^{e} *puissance*. On trouvera d'abord que le logarithme de 2 est 0,3010300 . Multipliant par 20 , on obtient $6,020600$. Le nombre correspondant 1048576 sera la puissance demandée.

Si l'emploi de la proportion (**289**) ou du tableau des différences proportionnelles (**292**) laissait quelque incertitude sur le dernier chiffre, on pourrait remarquer que ce chiffre doit être pair, puisqu'il s'agit d'une puissance de 2. On pourrait d'ailleurs le trouver directement d'une manière assez prompte, en remarquant que la 5^e puissance de 2, qui est 32, est terminée par un 2; que par conséquent la 10^e est terminée par 2 fois 2 ou 4, et la 20^e par le même chiffre que 4 fois 4 ou 16, c'est-à-dire par 6.

IV. Soit à *extraire la racine cinquième de* 365478. On trouvera d'abord que le logarithme de ce nombre est $5,5628612$. Divisant par 5, on obtient $1,1125722$. Le nombre correspondant $12,9590$ sera la racine demandée, à moins d'un dix-millième.

294. On voit par ces derniers exemples que l'emploi des logarithmes permet d'effectuer avec prômptitude, et sans aucune tension d'esprit, des calculs qui, de toute autre manière, exigeraient beaucoup de temps et d'efforts, s'ils n'étaient même tout à fait impossibles.

Pour soulager encore davantage son attention, le calculateur peut même se dispenser d'effectuer aucune soustraction. S'il se présente, en effet, un logarithme à soustraire, c'est-à-dire précédé du signe —, comme, par exemple,

$$-2,7135498,$$

on peut le changer en un logarithme dont la caractéristique seule soit négative (**283**), et écrire

$$\bar{3},2864502,$$

puis ajouter ce logarithme au lieu de le soustraire.

Quant à l'opération par laquelle on soustrait chaque décimale de 9 et la dernière de 10, elle ne doit pas être comptée comme une soustraction; il suffit de graver une fois pour toutes dans son esprit ce tableau

0	1	2	3	4
9	8	7	6	5

et de se rappeler que, toutes les fois qu'il se présente un des chiffres de la première ligne, il faut le remplacer par le chiffre correspondant de la seconde, et *vice versa*, sauf pour la dernière décimale significative qui doit être retranchée de 10.

Nous indiquerons les logarithmes ainsi préparés par le signe abréviatif $\bar{L}$. Dans l'exemple II du numéro précédent, nous aurions ainsi :

$$\begin{array}{ll} \log 71{,}645 = & 1{,}8551859 \\ \bar{L} \quad 6{,}25 = & \bar{1}{,}2041200 \\ \hline & 1{,}0593059 \end{array}$$

d'où, en additionnant : $1{,}0593059$
comme au numéro cité.

Des personnes peu habituées aux calculs numériques regardent comme une complication la simplification dont nous venons de parler; avec un peu de pratique le lecteur se convaincra que c'est une simplification des plus réelles et des plus importantes.

Si le logarithme à soustraire avait déjà une caractéristique négative; s'il s'agissait, par exemple, de soustraire $\bar{3},4771895$, cette opération reviendrait à changer le signe de la caractéristique et celui de la partie décimale, ce qui donnerait

$$3 - 0{,}4771895$$

ou

$$2 + (1 - 0{,}4771895)$$

ou enfin

$$2{,}5228105\ ;$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, *il faudrait changer le signe de la caractéristique, la diminuer d'une unité, puis soustraire chaque chiffre décimal de* 9, *sauf la dernière décimale significative qui doit être soustraite de* 10.

On trouvera ainsi

$$\begin{aligned} \bar{L}\ 0{,}2 &= 0{,}6989700 \\ \bar{L}\ 0{,}03 &= 1{,}5228788 \\ \bar{L}\ 0{,}0005 &= 3{,}3010300\ , \end{aligned}$$

etc.

295. La même simplification est ordinairement présentée d'une autre manière, qu'il est indispensable de connaître.

On nomme *complément arithmétique* d'un nombre ce qu'il faut lui ajouter pour faire une unité de l'ordre immédiatement supérieur à celui de son premier chiffre à gauche. Ainsi, le complément arithmétique de 7 est 3, attendu que 7 et 3 font 10 ; le complément de 76 est 24, attendu que 76 et 24 font 100; le complément de 762 est 238, attendu que 762 et 238 font 1000, et ainsi de suite.

Comme les logarithmes des nombres entiers le plus fréquemment employés sont moindres que 10, on nomme *complément* d'un nombre ce qu'il faut ajouter à ce logarithme pour faire 10. Ainsi le complément de $3{,}7820497$ est $6{,}2179503$. Ce complément s'obtient en retranchant chaque chiffre de 9, sauf le dernier chiffre significatif à droite qui doit être retranché de 10. L'opération nécessaire pour obtenir le complément d'un logarithme ne doit donc pas être comptée comme une soustraction ; c'est une opération machinale qui s'exécute à l'aide du tableau

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{array};$$

et, lorsqu'on en a acquis l'habitude, il n'est pas plus long d'écrire le complément que le logarithme lui-même.

Cela posé, *au lieu de soustraire un logarithme on peut ajouter son complément et retrancher ensuite* 10.

Soit, en effet, l un logarithme qu'il s'agit de retrancher d'une quantité a, on aura à effectuer le calcul indiqué par l'expression

$$a - l .$$

Or, on ne changera pas cette expression en ajoutant et retranchant 10, ce qu'on peut écrire

$$a + (10 - l) - 10 .$$

Mais $10 - l$ est précisément le complément de l ; on peut donc écrire, en indiquant par C^{t} le complément,

$$a + \mathrm{C}^{t} l - 10 ;$$

ce qui revient à l'énoncé de la proposition.

Si l'on a plusieurs logarithmes à soustraire, on peut ajouter leurs compléments, et retrancher du résultat autant de fois 10 *qu'il y a eu de compléments employés.*

Cette manière d'opérer la simplification dont nous parlons est la plus usitée ; mais celle que nous avons d'abord indiquée au n° **294** est la plus commode.

296. Nous pouvons maintenant nous occuper de l'application des logarithmes à tous les calculs qui comportent leur emploi.

Résoudre une question par logarithmes, c'est déduire des logarithmes des données le logarithme de l'inconnue. Cette inconnue se déduit ensuite de son logarithme à l'aide des tables. Pour qu'une question puisse être traitée de cette manière, il faut qu'on n'ait à se servir des tables que deux fois, savoir : une première fois pour y chercher les logarithmes des données, une seconde fois pour y chercher le nombre correspondant au logarithme de l'inconnue. On exprime quelquefois cette condition en disant qu'il faut n'avoir à *passer aux nombres* qu'une fois.

On peut toujours concevoir que l'inconnue elle-même soit exprimée au moyen des données. Pour que cette expression soit calculable par logarithmes, il faut qu'elle ne contienne que des produits, des quotients, des puissances ou des racines; ou que, si les signes $+$ ou $-$ y entrent, ces signes ne réunissent que les *premières puissances* des données.

Ainsi, l'expression $x=\frac{3a^2\sqrt{bc}}{5m}$ est calculable par logarithmes, parce qu'elle ne contient que des produits, des quotients, des puissances et des racines.

L'expression $x=\sqrt{(a+b)(a-b)}$ est encore calculable par logarithmes, parce que les signes $+$ et $-$ qui y entrent ne réunissent que les premières puissances des données a et b. Comme on ne peut, en effet, ramener l'addition et la soustraction à des opérations d'un ordre plus simple, on conçoit que l'on fasse la somme $a+b$ et la différence $a-b$, sans le secours des logarithmes, puis, que le produit à effectuer et la racine à extraire se calculent par le moyen des logarithmes. On n'a ainsi à passer aux nombres qu'une fois, c'est-à-dire pour trouver le nombre correspondant au logarithme de x.

Au contraire, l'expression $x=\sqrt{a^2+bc}$ n'est point calculable par logarithmes, parce que le signe $+$ qu'elle renferme réunit des quantités qui ne sont pas les premières puissances des données a, b, c, mais bien le carré de l'une et le produit des deux autres. On pourrait bien, à la vérité, calculer a^2 et bc par le moyen des logarithmes; mais il faudrait passer aux nombres pour obtenir a^2 et bc. C'est alors seulement qu'on en pourrait faire la somme, et que l'on pourrait extraire la racine de cette somme par le secours des logarithmes.

297. Pour appliquer les logarithmes à une formule, il suffit de se rappeler les propriétés fondamentales des logarithmes (**280**).

Soit, par exemple, l'expression

$$x=\frac{3a^2\sqrt{bc}}{5m},$$

on aura d'abord, en se rappelant que le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende, moins le logarithme du diviseur,

$$\log x=\log\left(3a^2\sqrt{bc}\right)-\log(5m)\ ;$$

mais le logarithme d'un produit étant égal à la somme des logarithmes de ses facteurs, on pourra écrire

$$\log x=\log 3+\log a^2+\log\sqrt{bc}-(\log 5+\log m)\ .$$

Puis, remarquant que le logarithme de a^2 est égal à 2 fois le logarithme de a, et que le logarithme de $\sqrt{bc}$ est égal à la moitié du logarithme du produit bc, ou à la moitié de la somme des logarithmes de b et de c, il viendra :

$$\log x = \log 3 + 2\log a + \tfrac{1}{2}(\log b + \log c) - (\log 5 + \log m) \ .$$

Et, si l'on veut éviter les soustractions indiquées,

$$\log x = \log 3 + 2\log a + \tfrac{1}{2}(\log b + \log c) + \bar{\mathrm{L}}\,5 + \bar{\mathrm{L}}\,m \qquad (\mathbf{294}),$$

ou

$$\log x = \log 3 + 2\log a + \tfrac{1}{2}(\log b + \log c) + \mathrm{C^t}\log 5 + \mathrm{C^t}\log m - 20 \quad (\mathbf{295}).$$

Comme application, supposons à a, b, c, m les valeurs suivantes :

$$a = 29{,}645 \ , \quad b = 105897 \ , \quad c = 3{,}7899 \ , \quad m = 441{,}8 \ .$$

d'où $$x = \frac{3 \times (29{,}645)^2 \times \sqrt{105897 \times 3{,}7899}}{5 \times 441{,}8} \ ,$$

On disposera le calcul de la manière suivante :

$$\begin{array}{llrr}
 & & & \log 3 = 0{,}4771212 \\
 & \log 29{,}645 = 1{,}4719515 & & 2\log 29{,}645 = 2{,}9439030 \\
 & \log 105897 = 5{,}0248837 & & \\
 & \log 3{,}7899 = 0{,}5786278 & & \\
\text{somme} & 5{,}6035115 & & \\
\text{demi-somme} & 2{,}8017557 & & \log\sqrt{} = 2{,}8017557 \\
 & & & \bar{\mathrm{L}}\ 5 = \bar{1}{,}3010300 \\
 & & & \bar{\mathrm{L}}\ 441{,}8 = \bar{3}{,}6452257 \\
 & & \log x \ \text{ou} & \text{somme} = 3{,}1690356
\end{array}$$

d'où $$x = 1475{,}827 \ldots.$$

On traiterait de la même manière toute autre formule calculable par logarithmes.

298. Comme applications, nous traiterons les problèmes suivants :

Problème I. *Trouver le rayon d'une sphère dont le volume est de* $0^{\mathrm{m\cdot c}},250$.

En désignant par x le rayon de la sphère, et par π le rapport de la circonférence au diamètre, on a*

$$\tfrac{4}{3}\pi x^3 = 0{,}250 \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt[3]{\frac{0{,}250 \times 3}{4\pi}} \ ,$$

* Voy. notre *Géométrie théorique et pratique*, 3e édition, n° 702.

et en appliquant les logarithmes,

$$\log x = \frac{\log 0{,}250 + \log 3 + \bar{\mathrm{L}}\, 4 + \bar{\mathrm{L}}\, \pi}{3} .$$

On trouvera $\log 0{,}250 = \bar{1}{,}3979400$
$\log 3 = 0{,}4771212$
$\bar{\mathrm{L}}\ 4 = \bar{1}{,}3979400$
$\bar{\mathrm{L}}\ \pi$ ou $\bar{\mathrm{L}}\ 3{,}1415926 = \bar{1}{,}5028501$

$\bar{2}{,}7758513$

Pour prendre le tiers de ce résultat, il suffit de rendre la caractéristique divisible par 3, ce qu'on fera en ajoutant -1 et $+1$; on dira alors : le tiers de $\bar{3}$ est $\bar{1}$; le tiers de 17 est 5; le tiers de 27 est 9, et ainsi de suite; ce qui donne

$$\bar{1}{,}5919504 .$$

Le nombre $0^{m},390796\ldots$, qui correspond à ce logarithme, est le rayon demandé.

Problème II. *Trouver un nombre tel que 4 fois la racine cinquième de son cube, soit égal à 108.*

En appelant x ce nombre, on devra avoir

$$4\sqrt[5]{x^3} = 108 \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt[3]{\left(\frac{108}{4}\right)^5} ;$$

et, en appliquant les logarithmes,

$$\log x = \frac{5(\log 108 + \bar{\mathrm{L}}\ 4)}{3} .$$

On trouve $\log 108 = 2{,}0334238$
$\bar{\mathrm{L}}\ 4 = \bar{1}{,}3979400$

dont la somme $= 1{,}4313638$;
multipliant par 5, il vient $7{,}1568190$;
puis, en divisant par 3, $2{,}3856063$.

Ce logarithme correspond au nombre demandé, 243.

Problème III. *Trouver la hauteur de l'hectolitre, sachant que c'est un cylindre dont le diamètre égale la hauteur.*

Désignons par x la hauteur cherchée, qui est aussi le diamètre de la base. Le volume du cylindre aura pour expression *

$$\tfrac{1}{4}\pi x^2 \times x \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{4}\pi x^3 ,$$

* Voy. notre *Géométrie théorique et pratique*, 3e édition, n° 688.

et, en l'égalant à 1 hectolitre, c'est-à-dire à $0^{m\cdot c},1$, on aura

$$\tfrac{1}{4}\pi x^3 = 0,1 \quad \text{d'où} \quad x^3 = \sqrt[3]{\frac{0,4}{\pi}} \quad ,$$

ou, par logarithmes,

$$\log x = \frac{\log 0,4 + \overline{\mathrm{L}}\, 3,1415926}{3} \quad .$$

On trouve

$$\begin{array}{lr} \log 0,4 & = \bar{1},6020599 \\ \overline{\mathrm{L}}\ 3,1415926 & = \bar{1},5028501 \\ \hline \end{array}$$

dont la somme est $\bar{1},1049100$

Pour diviser par 3, ajoutons -2 et $+2$, nous dirons : le tiers de $\bar{3}$ est $\bar{1}$; le tiers de 21 est 7, etc., ce qui donne

$$\bar{1},7016367 \ .$$

Ce logarithme correspond à la hauteur demandée $0^{m},503079$ ... ou, approximativement $0^{m},503$.

Problème IV. Le lecteur pourra s'exercer sur les problèmes suivants :

I. *Trouver le rayon de la sphère dont la surface a* 1 *mètre carré.*

(Réponse : $0^{m},282094$... ou simplement $0^{m},282$.)

II. *Trouver un nombre dont le tiers, le cube et la racine carrée forment un produit égal à* $170\frac{2}{3}$.

(Réponse : 4.)

III. *Trouver la hauteur du litre, sachant que c'est un cylindre dont la hauteur est double du diamètre.*

(Réponse : $0^{m},172050$... ou simplement $0^{m},172$.)

299. Il arrive quelquefois qu'une formule, qui n'est pas calculable par logarithmes, peut le devenir à l'aide de certaines transformations.

I. Soit proposé, pour premier exemple, de *calculer le volume d'un cône connaissant son côté et le rayon de sa base.*

Désignons par V le volume du cône, par c son côté et par r le rayon de sa base ; sa hauteur étant l'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'autre côté de l'angle droit est r et dont l'hypoténuse est c, sera exprimée par $\sqrt{c^2-r^2}$; par conséquent l'expression du volume V sera *

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{c^2-r^2} \ .$$

---

* Voy. notre *Géométrie théorique et pratique*, 3e édition, n° 693.

Cette formule n'est pas immédiatement calculable par logarithmes, à cause du signe — qui réunit les carrés des données c et r. Mais on remarque que la différence $c^2 - r^2$ peut être considérée comme le produit des deux facteurs $c+r$ et $c-r$ (56); on peut donc écrire

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{(c+r)(c-r)}\ ,$$

formule qui est calculable par logarithmes, puisque les signes + et — qui y entrent ne réunissent que les premières puissances des données.

En y appliquant les logarithmes, on obtient

$$\log V = \bar{\mathrm{L}}\,3 + \log\pi + 2\log r + \tfrac{1}{2}[\log(c+r) + \log(c-r)]\ .$$

Si $r = 0^{\mathrm{m}},04$ et $c = 0^{\mathrm{m}},07$ on trouvera

$$\begin{array}{lrl}
c+r = 0^{\mathrm{m}},11 & \log 0,11 = & \bar{1},0413927 \\
c-r = 0^{\mathrm{m}},03 & \log 0,03 = & \bar{2},4771212 \\
 & & \overline{\bar{3},5185139} \\
 & \tfrac{1}{2}(\log 0,11 + \log 0,03) = & \bar{2},7592569 \\
\log 0,04 = \bar{2},6020599;\ldots & 2\log 0,04 = & \bar{3},2041198 \\
 & \log 3,1415926 = & 0,4971499 \\
 & \bar{\mathrm{L}}\ 3 = & \bar{1},5228788 \\
 & \text{Donc}\quad \log V = & \bar{5},9834054
\end{array}$$

Le volume demandé est le nombre correspondant à ce logarithme, ou

$$0^{\mathrm{m.cub}},000096252\ ,$$

ou $96^{\mathrm{cent.cub}}$ et $252^{\mathrm{millim.cub}}$.

II. Comme second exemple, nous prendrons la formule qui donne l'aire d'un triangle au moyen de ses trois côtés.

En désignant cette aire par A, et les côtés par a, b, c, on démontre* que l'on a

$$A = \tfrac{1}{4}\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}\ ,$$

formule qui n'est pas calculable par logarithmes.

Mais on remarque que la quantité placée sous le radical est la différence de deux carrés et se décompose, par conséquent, en deux facteurs, dont l'un est la somme des racines de ces carrés, et l'autre la différence de ces mêmes racines. On a ainsi

$$A = \tfrac{1}{4}\sqrt{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}\ .$$

---

* Voy. notre *Géométrie théorique et pratique*, 3e édition, page 186.

Or, la première quantité entre parenthèses revient à

$$(a+c)^2-b^2$$

et se décompose, par conséquent, en

$$(a+c+b)(a+c-b)\ .$$

La seconde quantité entre parenthèses revient à

$$b^2-(a-c)^2$$

et se décompose en

$$(b+a-c)(b-a+c)\ .$$

Il vient donc

$$A=\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}\ ,$$

formule qui est calculable par logarithmes, puisque les signes $+$ et $-$ qui y entrent ne réunissent que des premières puissances des données.

On lui donne une forme plus simple en posant

$$a+b+c=2s\ ,$$

d'où

$$a+c-b=2(s-b)\ ,$$
$$b+a-c=2(s-c)\ ,$$
$$b-a+c=2(s-a)\ .$$

Substituant ces valeurs, et remarquant que le facteur 2^4, mis hors du radical, devient 2^2 ou 4, et détruit par conséquent le facteur $\frac{1}{4}$, on obtient

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ ,$$

ou, en appliquant les logarithmes,

$$\log A=\tfrac{1}{2}[\log s+\log(s-a)+\log(s-b)+\log(s-c)]\ .$$

Si $a=41^{\text{m}}$, $b=37^{\text{m}}$, $c=16^{\text{m}}$;

on trouvera d'abord $a+b+c=94$;

d'où $s=47$, $s-a=6$, $s-b=10$, $s-c=31$.

Puis

$$\begin{aligned}\log 47&=1{,}6720979\\ \log\ \ 6&=0{,}7781512\\ \log 10&=1{,}0000000\\ \log 31&=1{,}4913617\\ \hline &\ \ \ 4{,}9416108\\ \log A&=2{,}4708054\ .\end{aligned}$$

L'aire demandée est le nombre correspondant à ce logarithme, ou

$$295^{\text{m.c}},6687\ldots$$

III. Le lecteur pourra s'exercer à rendre calculable par logarithmes la formule

$$A = \frac{1}{4}\cdot\frac{a+b}{a-b}\sqrt{4c^2d^2-[c^2+d^2-(a-b)^2]^2}\ ,$$

qui représente l'aire d'un trapèze dont la plus grande base est a, la plus petite b, et les côtés non parallèles c et d.

Il trouvera qu'en posant $a+c+d-b=2p$ elle peut s'écrire

$$A = \frac{a+b}{a-b}\sqrt{p(p-c)(p-d)(p+b-a)}\ ,$$

formule calculable par logarithmes.

Pour $a=83^{m}$, $b=61^{m}$, $c=55^{m}$, $d=49^{m}$; il trouvera

$$A = 3520^{m.c},55\ .$$

300. Lorsqu'une formule ne peut pas être rendue calculable par logarithmes, c'est-à-dire lorsqu'on ne peut déduire le logarithme de l'inconnue des logarithmes des données, sans passer préalablement aux nombres, il faut au moins tâcher de le faire le plus petit nombre de fois possible, ce à quoi on parvient quelquefois au moyen d'une inconnue auxiliaire.

I. Soit, par exemple, à *calculer le volume d'un tronc de pyramide dont la hauteur est* h *et dont les bases sont des carrés ayant respectivement pour côtés* a *et* b.

En désignant ce volume par V, on aura*

$$V = \tfrac{1}{3}h(a^2+b^2+ab)\ ,$$

formule qui n'est point calculable par logarithmes. On pourrait bien calculer par logarithmes les quantités a^2, b^2 et ab ; mais il faudrait passer trois fois aux nombres pour obtenir la valeur de la quantité entre parenthèses.

Pour l'éviter, ajoutons, entre les parenthèses, les termes $+ab$ et $-ab$, ce qui ne changera pas la valeur de V ; il viendra

$$V = \tfrac{1}{3}h(a^2+b^2+2ab-ab)$$

ou

$$V = \tfrac{1}{3}h[(a+b)^2-ab]\ .$$

Posons $x^2=ab$ d'où $x=\sqrt{ab}$ et $\log x = \frac{1}{2}(\log a+\log b)$. L'inconnue auxiliaire ayant été calculée, on pourra mettre x^2 à la place de ab dans la formule, et il viendra

$$V = \tfrac{1}{3}h[(a+b)^2-x^2] = \tfrac{1}{3}h(a+b+x)(a+b-x)$$

d'où

$$\log V = \bar{L}\,3 + \log h + \log(a+b+x) + \log(a+b-x)\ .$$

* Voy. notre *Géométrie théorique et pratique*, 3e édition, no 697.

On parvient ainsi à appliquer les logarithmes à la formule, en ne passant préalablement aux nombres qu'une fois au lieu de trois.

Soient, par exemple, $a=12^{\text{m}}$, $b=10^{\text{m}}$ et $h=2^{\text{m}}$. On aura d'abord

$$\begin{array}{rl} \log 12 = & 1{,}0791812 \\ \log 10 = & \underline{1{,}0000000} \\ & 2{,}0791812 \\ \log x \;= & 1{,}0395906 \;. \end{array}$$

Et, en passant aux nombres, $x=10{,}9797$.

$$\begin{array}{lrl} \text{Puis : } a+b+x=32{,}9797\;; & \log 32{,}9797 & = 1{,}5182467 \\ \phantom{\text{Puis : }} a+b-x=11{,}0203\;; & \log 11{,}0203 & = 1{,}0421935 \\ & \log\ 2 & = 0{,}3010300 \\ & \bar{\text{L}}\ \ 3 & = \underline{\bar{1}{,}5228788} \end{array}$$

d'où $$\log \text{V} = 2{,}3843490$$

et $$\text{V} = 242^{\text{m}\cdot\text{cub}}{,}2975\ldots.$$

II. Le lecteur pourra traiter de même la formule

$$\text{V} = \tfrac{1}{3}\pi h(\text{R}^2+r^2+\text{R}r) \;,$$

qui exprime le volume d'un tronc de cône, dont la hauteur est h et dont les bases ont pour rayons R et r *.

Pour $\text{R}=6$, $r=5$, $h=2$, il trouvera $x=5{,}477225$; puis $\text{V}=190^{\text{m}\cdot\text{cub}}{,}590$.

301. L'un des principaux usages des logarithmes est de servir à résoudre les équations exponentielles. Nous avons vu (**271**) que, dès que l'on sait résoudre l'équation

$$a^x = b \qquad [1],$$

pour une valeur particulière de a et pour toutes les valeurs de b, on sait, par cela même, la résoudre pour toute autre valeur de a. Or, les tables des logarithmes vulgaires résolvent immédiatement l'équation

$$10^x = n \qquad [2],$$

on pourra donc en déduire la solution de l'équation [1] pour des valeurs positives quelconques de a et de b.

En appliquant, en effet, les logarithmes à cette équation, on en tire

$$x \log a = \log b$$

d'où $$x = \frac{\log b}{\log a} \qquad [3],$$

* Voy. notre *Géométie théorique et pratique*, 3e édition, no 698.

c'est-à-dire que la valeur de x est le quotient du logarithme du nombre b par le logarithme du nombre a.

On pourrait même obtenir ce quotient par logarithmes; car, en appliquant les logarithmes à l'équation [3], on en déduit

$$\log x = \log(\log b) - \log(\log a)$$

ou
$$\log x = \log(\log b) + \bar{\mathrm{L}}\ (\log a) \qquad (294),$$

ou encore
$$\log x = \log(\log b) + \mathrm{C}^{\mathrm{t}}\log(\log a) - 10 \qquad (295).$$

Soit, par exemple, à résoudre l'équation exponentielle

$$2^x = 3,$$

on aura
$$x = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,4771212}{0,3010300},$$

d'où
$$\log x = \log(0,4771212) + \bar{\mathrm{L}}(0,3010300)$$
$$= \bar{1},6786287 + 0,5213902 = 0,2000189,$$

d'où
$$x = 1,58497\ldots.$$

On trouvera de même que la valeur de x dans l'équation

$$(5,76)^x = 40$$

est
$$x = 2,10680.$$

502. I. Enfin, ayant une table de logarithmes calculée dans le système dont la base est 10, on peut par une opération très-simple former une table de logarithmes dans un système quelconque.

En effet, soient a la base de ce système et y le logarithme d'un nombre n dans ce système, on devra avoir

$$a^y = n.$$

Prenons les logarithmes des deux membres dans le système vulgaire, dont la base est 10, il viendra

$$y \log a = \log n,$$

d'où
$$y = \frac{\log n}{\log a} = \log n \times \left(\frac{1}{\log a}\right).$$

Or, $\log n$ est le logarithme vulgaire de n, et y est son logarithme dans le système dont la base est a; on voit donc que *pour obtenir le logarithme d'un nombre dans un système quelconque, il suffit de diviser son logarithme vulgaire par le logarithme vulgaire de la base de ce système, ou,* ce qui revient au même, *de le multiplier par la quantité constante*

$$\frac{1}{\log a}.$$

Cette quantité constante, par laquelle il faut multiplier les logarithmes vulgaires de tous les nombres pour obtenir leurs logarithmes dans le système dont la base est a, est ce qu'on nomme le *module* de la nouvelle base, par rapport à la base 10.

Si l'on demandait, par exemple, le logarithme de 2 dans le système dont la base est 7, il faudrait multiplier le logarithme vulgaire de 2, ou $0,3010300$ par $\frac{1}{\log 7}$ ou par $\frac{1}{0,8450980}$.

Ainsi en appelant x le logarithme demandé, on aurait

$$x = \frac{0,3010300}{0,8450980} \quad \text{d'où} \quad \log x = \log 0,3010300 + \bar{\text{L}}\, 0,8450980\,,$$

$$= \bar{1},4786098 + 0,0730928\,,$$
$$= \bar{1},5517026\,;$$

d'où
$$x = 0,3562071\ldots.$$

Plus généralement, si x est le logarithme d'un nombre n dans le système dont la base est a, et que y soit le logarithme du même nombre dans le système dont la base est b, on devra avoir

$$b^y = n\,;$$

et en prenant les logarithmes des deux membres dans le système dont la base est a,

$$y \log b = \log n = x\,;$$

d'où
$$y = x \cdot \left(\frac{1}{\log b}\right);$$

c'est-à-dire qu'il faut diviser le logarithme du nombre n, pris dans le système primitif, par le logarithme de la nouvelle base pris dans ce même système primitif, ou, ce qui revient au même, le multiplier par la quantité constante

$$\frac{1}{\log b},$$

que l'on nomme le *module* de la nouvelle base par rapport à l'ancienne, et qui est le quotient de l'unité par le logarithme de la nouvelle base pris dans l'ancien système.

II. Si l'on demandait dans quel système de logarithmes le nombre n a pour logarithme α, en appelant x la base de ce système, on aurait

$$x^\alpha = n\,;$$

d'où
$$\alpha \log x = \log n \quad \text{et} \quad \log x = \frac{\log n}{\alpha}\,,$$

c'est-à-dire que pour avoir le logarithme de la base demandée dans un système quelconque, il faudrait diviser le logarithme du nombre n, pris dans ce même système, par le logarithme donné.

Par exemple, si l'on demandait dans quel système de logarithmes le nombre 47 a pour logarithme $3,8501475$; en appelant x la base demandée, et en prenant les logarithmes dans le système dont la base est 10, on aurait

$$\log x = \frac{\log 47}{3,8501475} = \frac{1,6720979}{3,8501475}.$$

Effectuant ce calcul par logarithmes, on trouvera :

$$\log x = 0,4342947 ;$$

d'où
$$x = 2,71828 \ldots.$$

Remarque. La base dont nous venons de déterminer la valeur est en effet celle d'un système de logarithmes usité ; c'est celle des logarithmes *népériens* ou *hyperboliques* qui jouissent de propriétés remarquables, mais dont le développement ne saurait trouver place ici.

TROISIÈME PARTIE.

QUESTIONS DIVERSES.

CHAPITRE XI.

REMARQUES SUR L'EXTRACTION DES RACINES CARRÉES ET CUBIQUES.

303. L'extraction de la racine carrée et celle de la racine cubique des nombres sont ordinairement exposées dans les traités d'Arithmétique ; c'est pourquoi nous n'avons pas cru devoir en parler dans le corps même de cet ouvrage. Mais comme la théorie de ces opérations donne lieu à plusieurs remarques qui ne peuvent être bien comprises sans le secours de l'Algèbre, il ne sera peut-être pas inutile de la reproduire, comme application des principes précédemment établis.

§ I. De l'extraction de la racine carrée des nombres.

304. *Le* carré *d'un nombre est le produit de ce nombre par lui même.*

Les carrés des nombres

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
sont	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100 .

On remarquera qu'aucun de ces carrés ne se termine par un des chiffres 2 , 3 , 7 ou 8 .

Les carrés des nombres

	10	100	1000	etc.,
sont	100	10000	1000000	etc.

En général, le carré de 10^n est 10^{2n} ; c'est-à-dire que le carré de l'unité suivie de n zéros est l'unité suivie de $2n$ zéros.

Le carré d'un nombre composé uniquement de dizaines est un *nombre de centaines*; car le nombre étant terminé par un zéro, le produit de ce nombre par lui-même sera terminé par deux zéros. Ainsi le carré de 80 est 6400.

Le carré d'un nombre composé de dizaines et d'unités, se compose: du carré des dizaines, du double produit des dizaines par les unités, et du carré des unités.

Car en appelant n ce nombre, d ses dizaines et u ses unités, on a

$$n = d + u\ , \quad \text{d'où} \quad n^2 = d^2 + 2du + u^2\ .$$

On remarquera que d étant un nombre de dizaines, d^2 est un nombre de centaines, $2du$ est un nombre de dizaines. Il en résulte que le chiffre des unités de n^2 est le chiffre des unités de u^2 ; donc le carré d'un nombre entier ne peut être terminé par aucun des chiffres 2, 3, 7 ou 8.

Si un nombre admet un facteur premier p, il ne peut être un carré parfait qu'autant qu'il est divisible par p^2. Car si un carré n^2 est divisible par p, le facteur p devant diviser l'un des deux facteurs du produit $n \times n$ divise nécessairement n ; ainsi n est de la forme pq, q étant un nombre entier; donc n^2 est de la forme p^2q^2 ; donc n^2 est divisible par p^2.

Par exemple, si un nombre est divisible par 2 et qu'il ne le soit pas par 4, il ne saurait être un carré parfait. Si un nombre est divisible par 3 et qu'il ne le soit pas par 9, il ne saurait être un carré parfait; et ainsi de suite.

305. *On appelle* racine carrée *d'un nombre un second nombre qui, multiplié par lui-même, reproduit le premier.*

Ainsi 2 est la racine carrée de 4 ; 3 est la racine carrée de 9 ; etc.

Lorsqu'un nombre n'est pas un carré parfait, sa racine ne peut être exprimée exactement ni par un nombre entier, ni par un nombre fractionnaire.

D'abord elle ne peut être exprimée par un nombre entier. Supposons qu'elle puisse l'être par un nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$, qu'on peut toujours regarder comme réduit à sa plus simple expression. Il faudrait alors que son carré $\frac{a^2}{b^2}$ fût un nombre entier. Or a et b n'ayant aucun facteur commun, il en est de même de a^2 et de b^2, et par conséquent $\frac{a^2}{b^2}$ ne peut être égal à un nombre entier.

La racine carrée d'un nombre qui n'est pas un carré parfait est dite, pour cette raison, *incommensurable*. On se propose ordinairement alors de trouver cette racine avec un certain degré d'approximation.

306. *Extraire la racine carrée d'un nombre* A MOINS D'UNE UNITÉ PRÈS (*par défaut*), *c'est chercher la racine du plus grand carré contenu dans ce nombre.*

Supposons d'abord que le nombre proposé n'ait pas plus de deux chiffres.

Soit, par exemple, le nombre 72. Ce nombre est compris entre 64 et 81; sa racine est donc comprise entre 8 et 9; c'est-à-dire que 8 est sa racine carrée à moins d'une unité, par défaut.

On voit qu'il suffit, dans ce cas, de chercher entre quels carrés consécutifs le nombre proposé est compris; la racine du plus petit de ces deux carrés est la racine demandée.

Au lieu de prendre la racine carrée à moins d'une unité près, *par défaut*, on pourrait la prendre *par excès*; ce serait alors la racine du carré immédiatement supérieur au nombre proposé.

Ainsi 9 serait la racine carrée de 72, à moins d'une unité près, par excès.

Il peut arriver que la racine par excès soit plus approchée que la racine par défaut. C'est ce qui arriverait, par exemple, pour le nombre 80, dont la racine est évidemment plus voisine de celle de 81 que de celle de 64, c'est-à-dire plus voisine de 9 que de 8. Nous reviendrons d'une manière générale sur cette circonstance.

307. Supposons, en second lieu, que le nombre proposé ait plus de 2 chiffres, mais pas plus de 4. Soit, par exemple, le nombre 7209.

Ce nombre ayant 4 chiffres, est compris entre 100 et 10000. Le plus grand carré contenu dans ce nombre étant au moins égal à 100, qui y est contenu, est lui-même compris entre 100 et 10000. Sa racine, qui est le nombre demandé, sera donc comprise entre 10 et 100, et se composera par conséquent de dizaines et d'unités. Le carré de cette racine contiendra donc le carré des dizaines, le double produit des dizaines par les unités, et le carré des unités. Le nombre proposé contiendra en outre un reste, s'il n'est pas un carré parfait.

Le carré des dizaines de la racine demandée, étant un nombre de centaines, ne peut se trouver que dans les 72 centaines du nombre proposé. Je dis que, si l'on extrait la racine carrée du plus grand carré contenu dans les 72 centaines du nombre proposé, on aura précisément le chiffre des dizaines de la racine demandée. En effet, désignons par a la racine du plus grand carré contenu dans 72; nous aurons

$$a^2 < 72 < (a+1)^2 ,$$

ou, en multipliant par 100,

$$a^2 \times 100 < 7200 < (a+1)^2 \times 100 ;$$

mais, ces trois nombres exprimant des centaines, on ne changera pas le sens de l'inégalité, si l'on ajoute au nombre intermédiaire un nombre, 9, moindre que 100 ; on aura donc

$$a^2 . 100 < 7209 < (a+1)^2 . 100 ,$$

ou, en extrayant la racine,

$$a . 10 < \sqrt{7209} < (a+1) . 10 .$$

La racine du nombre proposé est donc comprise entre a dizaines et $a+1$ dizaines ; il en est donc de même de la racine du plus grand carré contenu, puisqu'elle diffère de la racine totale de moins d'une unité. Elle se compose donc de a dizaines, et d'un certain nombre d'unités moindre que 10. Le chiffre des dizaines est donc a.

Le plus grand carré contenu dans 72 est 64 dont la racine est 8. Le chiffre des dizaines de la racine demandée est donc 8.

Retranchons du nombre proposé le carré des dizaines obtenues à la racine. Le reste 809 contient encore le double produit des dizaines de la racine demandée par les unités, plus le carré des unités, plus un reste si 7209 n'est pas un carré parfait.

Le double produit des dizaines de la racine par les unités étant un nombre de dizaines, ne peut se trouver que dans les 80 dizaines du reste 809. Si ces 80 dizaines étaient exactement le double produit des dizaines de la racine par les unités, en le divisant par le double des dizaines obtenues on aurait les unités. Mais comme ces 80 dizaines peuvent contenir en outre quelques dizaines provenant du carré des unités et du reste, s'il y en a un, en faisant cette division il pourra arriver qu'on obtienne un quotient plus grand que le chiffre des unités ; et il sera nécessaire de l'essayer.

Le double des 8 dizaines obtenues est 16 dizaines. Le quotient de 80 par 16 est 5. Pour essayer le chiffre 5, il faut former le double produit des 8 dizaines par ces 5 unités, le carré de ces 5 unités ; et voir si la somme peut se retrancher du reste 809. On fait ce calcul plus commodément en écrivant le chiffre à essayer, 5, à la droite du double des dizaines obtenues, 16, et en multipliant par 5 :

$$\begin{array}{r} 165 \\ 5 \\ \hline 825 \end{array}$$

car on forme ainsi le produit du double des dizaines par les unités et le carré des unités.

La somme 825 étant plus grande que 809, on en conclut que le chiffre 5 est trop fort. On essaye de la même manière le chiffre 4 :

$$\begin{array}{r} 164 \\ 4 \\ \hline 656 \end{array}$$

On voit que 4 n'est pas trop fort; et comme il ne peut être trop faible, il s'ensuit que c'est le chiffre exact des unités. La racine demandée est donc 84.

On retranche 656 de 809, et l'on obtient pour reste 153, c'est le *reste* de l'opération.

Le nombre proposé est donc égal au carré de 84, plus le reste 153.

Voici le tableau de l'opération :

$$\begin{array}{r|r|r} 72\cdot09 & \multicolumn{2}{l}{84} \\ \cline{2-3} 64 & 165 & 164 \\ \cline{1-1} 80\cdot9 & 5 & 4 \\ \cline{2-3} 656 & 825 & 656 \\ \cline{1-1} 153 & & \end{array}$$

508. Remarque I. Si le double des dizaines n'était pas contenu dans les dizaines du reste, le chiffre des unités serait 0 ; et ce reste serait le reste de l'opération. Exemple :

$$\begin{array}{r|l} 50\cdot38 & 70 \\ \cline{2-2} 49 & 14 \\ \cline{1-1} 13\cdot8 & \end{array}$$

Le double des 7 dizaines, ou 14, n'étant pas contenu dans les 13 dizaines du reste 138, le chiffre des unités est 0 ; la racine est donc 70, et le reste de l'opération est 138.

Remarque II. La crainte de mettre aux unités de la racine un chiffre trop fort pourrait en faire mettre un trop petit. Voici comment on serait averti de cette erreur. Soit a la racine trouvée; si elle était trop petite d'une unité, le nombre proposé pourrait contenir le carré de $a+1$. Or, ce carré, a^2+2a+1, surpasse le carré de a de $2a+1$; mais le nombre proposé surpasse le carré de a d'une quantité égale au reste de l'opération. Il faudrait donc que ce reste fût au moins égal au double de la racine obtenue, plus 1, pour que cette racine fût trop petite d'une unité.

Remarque III. La racine obtenue est approchée à moins d'une unité par défaut; en l'augmentant d'une unité on a la racine à moins d'une unité par excès. On peut demander quelle est celle qui est la plus approchée.

Pour répondre à cette question, désignons par N le nombre proposé, par a la racine obtenue, et par r le reste de l'opération ; nous aurons

$$N = a^2 + r .$$

Faisons le carré de $a + \frac{1}{2}$, nous aurons

$$(a + \tfrac{1}{2})^2 = a^2 + a + \tfrac{1}{4} .$$

Si r surpasse a, il le surpassera au moins d'une unité, puisque ce sont des nombres entiers ; on aura donc

$$r > a + \tfrac{1}{4} ,$$

par suite $N > (a + \frac{1}{2})^2$, d'où $\sqrt{N} > a + \frac{1}{2}$,

c'est-à-dire que la racine du nombre proposé sera plus près de $a + 1$ que de a.

Si r est égal ou inférieur à a, on aura

$$r < a + \tfrac{1}{4} ,$$

par suite $N < (a + \frac{1}{2})^2$, d'où $\sqrt{N} < a + \frac{1}{2}$,

c'est-à-dire que la racine du nombre proposé sera plus près de a que de $a + 1$.

En résumé, *il n'y a d'avantage à augmenter d'une unité la racine obtenue que lorsque le reste surpasse cette racine.*

Si l'on a égard à cette règle, on aura toujours la racine à moins d'une demi-unité près.

309. Supposons maintenant que le nombre proposé ait plus de 4 chiffres, mais pas plus de 6. Soit, par exemple, le nombre 720958.

Ce nombre étant plus grand que 100, sa racine est plus grande que 10 ; il en est de même de la racine du plus grand carré contenu (**307**) ; elle se compose donc de dizaines et d'unités ; et son carré contient le carré des dizaines, le double produit des dizaines par les unités et le carré des unités. Le nombre proposé contient en outre un reste, s'il n'est pas un carré parfait.

Le carré des dizaines de la racine demandée ne peut se trouver que dans les 7209 centaines du nombre proposé. On démontrerait comme ci-dessus (**307**) qu'en extrayant la racine carrée du plus grand carré contenu dans ces 7209 centaines, on aura les dizaines de la racine. On trouve ainsi que la racine demandée a 84 dizaines, et l'on obtient pour reste 15358.

Ce nombre contient encore le double produit des 84 dizaines obtenues par les unités, le carré des unités et un reste s'il y en a un. Le double produit des 84 dizaines par les unités ne peut se trouver que dans les 1535 dizaines du reste. Si l'on divise ces 1535 dizaines par le double de 84 ou 168, on obtiendra pour quotient le chiffre des unités ou un chiffre trop fort. Le quotient de 1535 par 168 est 9. Pour essayer ce chiffre, on l'écrira à la droite du double des dizaines obtenues et l'on multipliera par ce chiffre ; on formera ainsi le double produit des dizaines par les unités et le carré des unités ; et l'on verra si le résultat peut être soustrait du reste 15358.

$$\begin{array}{r} 1689 \\ 9 \\ \hline 15201 \end{array}$$

On obtient ainsi 15201

Ce nombre pouvant être soustrait de 15358, le chiffre 9 est le chiffre des unités de la racine. La racine demandée est 849 ; et le reste de l'opération est 157.

Le nombre proposé 720958 est donc égal au carré de 849 plus le reste 157.

Voici le tableau des opérations :

7 2·0 9·5 8	8 4 9		
6 4	1 6 5	1 6 4	1 6 8 9
8 0·9	5	4	9
6 5 6	8 2 5	6 5 6	1 5 2 0 1
1 5 3 5·8			
1 5 2 0 1			
1 5 7			

On pourrait faire ici les mêmes remarques qu'au n° **308**.

510. En répétant ces raisonnements, on pourra extraire la racine d'un nombre composé d'autant de chiffres qu'on le voudra ; et l'on est conduit à la règle suivante :

Pour extraire, à moins d'une unité, la racine carrée d'un nombre entier, on le divise en tranches de deux chiffres, à partir de la droite (la dernière tranche à gauche pouvant n'en avoir qu'un). On extrait la racine du plus grand carré contenu dans la première tranche à gauche ; on a ainsi le chiffre des plus hautes unités de la racine. On soustrait de cette première tranche le carré du chiffre écrit à la racine ; à la droite du reste, on écrit la tranche suivante, ce qui donne le PREMIER RESTE. *On sépare par un point le chiffre des unités de ce reste, et l'on divise la partie à gauche par le double du chiffre obtenu à la racine ; on obtient pour quotient le second chiffre de la racine, ou un chiffre trop fort. Pour l'essayer, on l'écrit à la droite du double du chiffre déjà obtenu, et l'on multiplie par le chiffre qu'on essaye. Si le produit peut être soustrait du premier reste, le chiffre* *essayé est bon, et on l'écrit à la droite du chiffre déjà obtenu à la racine. A la droite du reste de la soustraction, on écrit la troisième tranche du nombre proposé; on obtient ainsi le* SECOND RESTE. *On sépare son premier chiffre à droite par un point, et l'on divise la partie à gauche par le double de la partie déjà obtenue à la racine; on obtient pour quotient le troisième chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. Pour l'essayer, on l'écrit à la droite du double de la partie déjà obtenue à la racine, et l'on multiplie par le chiffre qu'on essaye; si le produit peut être soustrait du second reste, le chiffre essayé est bon, et on l'écrit à la racine. A droite du reste de la soustraction, on écrit la quatrième tranche, et l'on obtient un* TROISIÈME RESTE *sur lequel on opère comme sur les précédents. On continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait obtenu tous les chiffres de la racine qui sont en même nombre que les tranches du nombre proposé.*

311. Lorsqu'on a obtenu plus de la moitié des chiffres de la racine, les autres peuvent s'obtenir par une simple division.

Pour fixer les idées, soit N le nombre proposé; supposons que la racine, à moins d'une unité, ait $2n+1$ chiffres, et qu'on en ait déjà obtenu $n+1$. Désignons par a la valeur de cette partie obtenue, et par x ce qu'il faudrait y ajouter pour compléter la racine *exacte*. Soit enfin R le reste auquel on est parvenu.

On aura $$N=(a+x)^2=a^2+2ax+x^2,$$
d'où $$N-a^2 \quad \text{ou} \quad R=2ax+x^2$$

et, en divisant par $2a$,

$$\frac{R}{2a}=x+\frac{x^2}{2a} \qquad \text{d'où} \quad x=\frac{R}{2a}-\frac{x^2}{2a}.$$

Soit b la partie entière du quotient de R par $2a$, et r le reste; on pourra écrire

$$x=b+\frac{r}{2a}-\frac{x^2}{2a}.$$

Or, puisqu'on a déjà obtenu $n+1$ chiffres à la racine, il en reste n à obtenir; x se compose donc d'un nombre de n chiffres, plus une quantité moindre que 1; x est donc moindre que l'unité suivie de n zéros; et conséquemment x^2 est moindre que l'unité suivie de $2n$ zéros. D'un autre côté, a se composant de $n+1$ chiffres suivis de n zéros, est plus grand que l'unité suivie de $2n$ zéros; il en est de même, à plus forte raison, de $2a$. La quantité $\frac{x^2}{2a}$ est donc moindre que 1;

d'ailleurs $\frac{r}{2a}$ est une fraction ; leur différence

$$\frac{r}{2a} - \frac{x^2}{2a}$$

est donc moindre que 1. Par conséquent, on a, à moins d'une unité près,

$$x = b\ ;$$

c'est-à-dire que si on divise le reste R par $2a$, la partie entière du quotient donnera les n chiffres qui restent à trouver à la racine. Mais on pourra avoir ainsi la racine approchée, à moins d'une unité par excès ou par défaut, suivant que x^2 sera plus grand ou plus petit que r, ce qu'on ne peut savoir *a priori*.

Si, par exemple, on demande, à moins d'une unité près, la racine de 2000000000000 ; la racine devant avoir 7 chiffres, il suffira d'en calculer 4 par la règle du n° **510**. On trouve que ces 4 premiers chiffres sont 1414, et l'on obtient pour reste 604000000. Si l'on divise ce reste par le double de 1414000, c'est-à-dire par 2828000, ou, ce qui revient au même, 604000 par 2828, on obtiendra les 3 derniers chiffres de la racine. On trouve ainsi, pour ces 3 derniers chiffres 213 ; et la racine totale est par conséquent 1414213, à moins d'une unité près, par excès ou par défaut.

Remarque. On peut déterminer, *a posteriori*, si la racine obtenue est approchée par excès ou par défaut. On a en effet

$$N = a^2 + R \quad \text{et} \quad R = 2ab + r$$

d'où

$$N = a^2 + 2ab + r\ .$$

Si r est plus grand que b^2, N sera plus grand que $(a+b)^2$, et $a+b$ sera approché par défaut. Si r est moindre que b^2, N sera moindre que $(a+b)^2$, et $a+b$ sera approché par excès.

Dans l'exemple précédent, on trouve $r = 1636000$; et l'on a $b = 213$; par conséquent r est plus grand que b^2, et la racine obtenue est approchée par défaut.

512. Soit maintenant à extraire la racine du nombre n, à moins de la fraction $\frac{1}{p}$ près.

C'est chercher deux fractions ayant pour dénominateur p et pour numérateurs deux nombres entiers consécutifs x et $x+1$, tels que ces fractions comprennent entre elles la racine de n. Ainsi on doit avoir

$$\frac{x}{p} < \sqrt{n} < \frac{x+1}{p}\ ,$$

d'où

$$x < \sqrt{np^2} < x+1\ ,$$

c'est-à-dire que x est la racine du plus grand carré contenu dans np^2. Ainsi : *pour extraire la racine d'un nombre* n*, à moins d'une fraction près ayant pour numérateur* 1 *et pour dénominateur* p*, il faut multiplier le nombre proposé* n *par le carré du dénominateur* p*, extraire la racine du produit à moins d'une unité, et donner à cette racine le dénominateur* p.

Si, par exemple, on demande la racine de 42 à moins de $\frac{1}{7}$, on multipliera 42 par 49, carré de 7 ; on extraira à moins d'une unité la racine du produit 2058 ; ayant obtenu cette racine, qui est 44, on lui donnera le dénominateur 7 ; et l'on aura $\frac{44}{7}$ ou $6\frac{2}{7}$ pour la racine demandée.

313. Si la fraction qui exprime l'approximation est une unité d'un certain ordre décimal, l'application de la règle ci-dessus conduit à mettre à la droite du nombre proposé 2 fois autant de zéros qu'on veut obtenir de décimales à la racine ; à extraire à moins d'une unité la racine du nombre ainsi obtenu, et à séparer sur la droite de cette racine le nombre de décimales demandé.

Soit, par exemple, à extraire la racine de 2 à moins de $\frac{1}{1000000}$; il faudra mettre 12 zéros à la droite de 2, ce qui donnera le nombre 2000000000000 ; extraire à moins d'une unité la racine de ce nombre, ce qui donnera 1414213 ; et séparer 6 décimales sur la droite de cette racine, ce qui donnera $1,414213$.

Dans le cas où l'on doit avoir un grand nombre de décimales, on peut appliquer la méthode abrégée du nº **311**.

314. Soit enfin à extraire la racine carrée d'une fraction.

I. Si les deux termes sont des carrés parfaits, il suffira d'en extraire séparément la racine ; car, pour élever une fraction au carré, il faut, d'après la règle de la multiplication des fractions, y élever séparément ses deux termes.

Ainsi, la racine carrée de $\frac{64}{81}$ est $\frac{8}{9}$.

II. Si le dénominateur seul est un carré parfait, on peut en extraire exactement la racine, puis extraire celle du numérateur à moins d'une unité ; on obtient ainsi la racine demandée à moins d'une fraction dont le numérateur est 1, et dont le dénominateur est la racine carrée du dénominateur de la fraction proposée.

Ainsi, la racine de $\frac{5}{9}$ est $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ à moins de $\frac{1}{3}$.

Mais ce degré d'approximation paraît en général insuffisant ; il convient d'obtenir la racine à moins d'une fraction dont le numérateur soit 1 et le dénominateur celui de la fraction proposée. Pour cela on opérera comme dans le cas suivant.

III. Si aucun des deux termes n'est un carré parfait, on rendra le dénominateur un carré en multipliant les deux termes de la fraction proposée par son dénominateur; on extraira la racine du numérateur à moins d'une unité, et celle du dénominateur exactement. On aura ainsi la racine demandée à moins d'une fraction ayant pour numérateur l'unité, et pour dénominateur celui de la fraction proposée.

Ainsi, la racine de $\frac{7}{12}$ sera celle de $\frac{84}{144}$, c'est-à-dire $\frac{\sqrt{84}}{12}$ ou $\frac{9}{12}$ à moins de $\frac{1}{12}$.

On peut souvent rendre le dénominateur un carré parfait sans être obligé de multiplier les deux termes par ce dénominateur, mais on n'obtient pas ainsi une approximation suffisante.

Ainsi, en multipliant les deux termes de la fraction $\frac{7}{12}$ par 3, on obtient $\frac{21}{36}$, dont le dénominateur est un carré parfait; et si on en extrait la racine on obtient $\frac{\sqrt{21}}{6}$ ou $\frac{4}{6}$, à moins de $\frac{1}{6}$; tandis que nous l'avons obtenue à moins de $\frac{1}{12}$ tout à l'heure.

IV. On peut même obtenir la racine demandée à moins d'une fraction ayant pour numérateur l'unité, et pour dénominateur un multiple quelconque du dénominateur de la fraction proposée. Par exemple, on peut obtenir la racine de $\frac{a}{b}$ à moins de $\frac{1}{mb}$. Pour cela, il suffit de multiplier les deux termes par m^2b, ce qui donne $\frac{m^2ab}{m^2b^2}$; et en extrayant la racine $\frac{\sqrt{m^2ab}}{mb}$. Si l'on extrait la racine indiquée au numérateur à moins d'une unité, on obtiendra celle de la fraction proposée à moins de $\frac{1}{mb}$.

Ainsi, pour obtenir la racine de $\frac{7}{12}$ à moins de $\frac{1}{60}$, on multipliera les deux termes par 25×12 ou par 300, ce qui donnera $\frac{2100}{3600}$; et, en extrayant la racine, $\frac{45}{60}$ ou $\frac{3}{4}$ à moins de $\frac{1}{60}$.

Remarque. Il peut arriver qu'en extrayant la racine de $\frac{a}{b}$ à moins de $\frac{1}{b}$, on obtienne pour racine la fraction proposée elle-même. Il suffit pour cela que la racine de ab, à moins d'une unité, soit a. Or, on a dans ce cas

$$a < \sqrt{ab} < a + 1,$$

ou, en élevant au carré,

$$a^2 < ab < a^2 + 2a + 1;$$

ou, en divisant par a,

$$a < b < a + 2 + \frac{1}{a},$$

c'est-à-dire que b est plus grand que a, mais plus petit que $a + 2 + \frac{1}{a}$; il ne peut donc avoir que l'une des valeurs $a+1$ ou $a+2$. En d'autres termes, la circonstance dont nous parlons se présentera quand le dénominateur ne surpassera le numérateur que de 1 ou 2 unités au plus.

Par exemple, la racine de $\frac{7}{8}$, à moins de $\frac{1}{8}$, est la racine de $\frac{56}{64}$, c'est-à-dire $\frac{7}{8}$.

§ II. De l'extraction de la racine cubique des nombres.

315. *Le* cube *d'un nombre est un produit de trois facteurs égaux à ce nombre.*

Les cubes des nombres

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10,
sont	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000.

Les cubes des nombres

	10	100	1000	etc.,
sont	1000	1000000	1000000000	etc.

En général, le cube de 10^n est 10^{3n}.

Le cube d'un nombre composé uniquement de dizaines est un nombre de mille; car le nombre étant terminé par un zéro, un produit de trois facteurs égaux à ce nombre sera terminé par trois zéros. Ainsi le cube de 80 est 512000.

Le cube d'un nombre composé de dizaines et d'unités contient :

le cube des dizaines, le triple produit du carré des dizaines par les unités, le triple produit des dizaines par le carré des unités, et le cube des unités.

Car en appelant n ce nombre, d ses dizaines et u ses unités, on a

$$n = d + u, \quad \text{d'où} \quad n^3 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3 \quad (\mathbf{245}).$$

316. *On appelle* racine cubique *d'un nombre un second nombre qui, pris trois fois comme facteur, reproduit le premier.*

Ainsi 2 est la racine cubique de 8 ; 3 est la racine cubique de 27 , etc. On démontrerait comme au nº **305**, que *lorsqu'un nombre n'est pas un cube parfait, sa racine cubique est incommensurable.* On ne peut alors l'obtenir qu'avec un certain degré d'approximation.

Extraire la racine cubique d'un nombre à moins d'une unité près (par défaut), c'est chercher la racine du plus grand cube contenu dans ce nombre.

Supposons d'abord que le nombre proposé n'ait pas plus de 3 chiffres; soit, par exemple, le nombre 641 .

Ce nombre est compris entre 512 et 729 ; sa racine cubique est donc comprise entre 8 et 9 ; c'est-à-dire que sa racine cubique à moins d'une unité, *par défaut,* est 8 . Il suffit, comme on voit, dans ce cas, de chercher entre quels cubes consécutifs le nombre proposé est compris; la racine du plus petit de ces deux cubes est la racine demandée.

La racine du plus grand serait la racine approchée à moins d'une unité *par excès.* Ainsi 9 serait la racine de 641 par excès.

317. Supposons, en second lieu, que le nombre proposé ait plus de 3 chiffres, mais pas plus de 6 . Soit, par exemple, le nombre 641793 .

Ce nombre ayant 6 chiffres est compris entre 1000 et 1000000 . Le plus grand cube contenu dans ce nombre étant au moins égal à 1000 qui y est contenu, est lui-même compris entre 1000 et 1000000 . Sa racine, qui est le nombre demandé, sera donc comprise entre 10 et 100 , et se composera par conséquent de dizaines et d'unités. Le cube de cette racine contiendra donc le cube des dizaines, le triple produit du carré des dizaines par les unités, etc. Le nombre proposé contiendra en outre un reste s'il n'est pas un cube parfait.

Le cube des dizaines de la racine demandée étant un nombre de mille , ne peut se trouver que dans les 641 mille du nombre proposé. Je dis que, si l'on extrait la racine cubique du plus grand cube contenu dans ces 641 mille , on aura le chiffre des dizaines de la racine demandée. En effet, si a désigne la racine de ce plus grand cube, on aura

$$a^3 < 641 < (a+1)^3 \ ;$$

d'où
$$a^3 . 1000 < 641000 < (a+1)^3 . 1000 \ ;$$

ou en ajoutant 793 au nombre intermédiaire, ce qui ne changera pas le sens des inégalités, puisque ces nombres expriment des mille,

$$a^3 . 1000 < 641793 < (a+1)^3 . 1000 \ ;$$

ou, en extrayant la racine cubique,

$$a . 10 < \sqrt[3]{641793} < (a+1) . 10 \ .$$

La racine du nombre proposé est donc comprise entre a dizaines et $a+1$ dizaines ; il en est de même de la racine cubique du plus grand cube contenu, puisqu'elle diffère de la racine totale de moins d'une unité. Elle se composera donc de a dizaines et d'un certain nombre d'unités moindre que 10.

Le plus grand cube contenu dans 641 est 512, dont la racine est 8. Le chiffre des dizaines de la racine demandée est donc 8.

Retranchons du nombre proposé le cube des dizaines obtenues à la racine; le reste 129793 contient encore le triple produit du carré des dizaines de la racine demandée par les unités, etc.

Ce triple produit du carré des dizaines par les unités étant un nombre de centaines, ne peut se trouver que dans les 1297 centaines du reste; et si l'on divise ces 1297 centaines par le triple carré des dizaines de la racine, on aura le chiffre des unités ou un chiffre trop fort. Divisant 1297 par 3 fois 64 ou par 192, on trouve pour quotient 6. Pour essayer ce chiffre il faut former le triple produit du carré des dizaines par 6, le triple produit des dizaines par le carré de 6, puis le cube de 6, et voir si la somme de ces trois parties peut être retranchée du reste 129793.

On fait ce calcul plus commodément en remarquant que

$$3d^2u + 3du^2 + u^3$$

peut s'écrire
$$[3d^2 + (3d+u)u]u \ .$$

On fera donc le triple des dizaines $3d$; on y ajoutera les unités, ce qui donnera $3d+u$, et l'on multipliera la somme par les unités, ce qui donnera $(3d+u)u$; on ajoutera ensuite ce produit au triple carré des dizaines qui est déjà formé; on aura ainsi $3d^2 + (3d+u)u$; et en multipliant par les unités, on aura enfin

$$[3d^2 + (3d+u)u]u \quad \text{ou} \quad 3d^2u + 3du^2 + u^3 \ .$$

Voici le tableau de ce petit calcul dans l'exemple dont nous nous occupons :

Triple des dizaines	240
Unités	6
Somme	246
Produit par les unités 6	1476
Triple carré des dizaines	19200
Somme	20676
Produit par les unités 6	124056

Ce nombre étant plus petit que le reste 129793, le chiffre essayé 6 n'est pas trop fort. On l'écrira donc à la racine ; et en retranchant 124056 de 129793 on aura le reste de l'opération 5737.

Voici le tableau général des calculs :

641·793	86	
512	192	240
129793		246
124056		1476
5737		19200
		20676
		124056

Remarque I. Si le triple carré des dizaines de la racine n'était pas contenu dans les centaines du reste, le chiffre des unités serait 0, et ce reste serait le reste de l'opération.

Remarque II. La crainte de mettre aux unités de la racine un chiffre trop fort pourrait en faire mettre un trop petit. On s'en apercevrait si le reste de l'opération contenait le triple du carré de la racine, plus le triple de cette racine, plus 1 ; car le cube de $(a+1)^3$ étant a^3+3a^2+3a+1, surpasse le cube de a de $3a^2+3a+1$.

318. Si le nombre proposé avait plus de 6 chiffres, mais pas plus de 9, on démontrerait comme ci-dessus qu'en extrayant la racine du plus grand cube contenu dans ses mille on aurait les dizaines de la racine demandée, lesquelles seraient alors exprimées par un nombre de 2 chiffres. On retrancherait des mille du nombre proposé le cube des dizaines obtenues à la racine, et à côté du reste on abaisserait les trois chiffres suivants. On remarquerait comme ci-dessus que le triple produit du carré des dizaines obtenues par les unités ne peut se trouver que dans les centaines de ce reste ; et que par conséquent en divisant ces centaines par le triple carré des dizaines obtenues à la racine, on aurait les unités ou un chiffre trop fort. On essayerait ce chiffre comme ci-dessus; puis, s'il était reconnu bon, on l'écrirait à la racine. Exemple :

641·793·845	867	
57378·45	7396	2580
5303963		7
433882		2587
		7
		18109
		739600
		757709
		7
		5303963

Ayant obtenu les deux premiers chiffres de la racine, comme ci-dessus, on a pour reste 5737 ; et en abaissant les 3 chiffres suivants, 5737845 . On forme le triple carré de 86 , qui est 7396 ; on divise 57378 par 7396 ; on trouve pour quotient 8 ; mais avec un peu d'habitude on reconnaît facilement que ce chiffre serait trop fort. On essaye donc 7 ; on obtient 5303963 qui peut être retranché de 5737845 . Le chiffre 7 est donc bon; la racine demandée est 867 ; et le reste de l'opération 433882 .

De là cette règle :

Pour extraire, à moins d'une unité, la racine cubique d'un nombre entier, on le divise en tranches de 3 *chiffres à partir de la droite (la dernière tranche à gauche pouvant en avoir moins de* 3). *On extrait la racine du plus grand cube contenu dans la première tranche à gauche; on a ainsi le chiffre des plus hautes unités de la racine. On soustrait de cette première tranche le cube du chiffre trouvé à la racine; à la droite du reste on abaisse la tranche suivante, ce qui donne un* PREMIER RESTE. *On sépare par un point les deux premiers chiffres à droite de ce reste, et l'on divise la partie à gauche par le triple carré du chiffre obtenu à la racine; on obtient pour quotient le second chiffre de la racine, ou un chiffre trop fort. Pour l'essayer, on l'ajoute au triple de la partie déjà trouvée à la racine et l'on multiplie la somme par ce chiffre; au produit on ajoute le triple carré de la partie obtenue à la racine et l'on multiplie cette nouvelle somme par le chiffre qu'on essaye. Si le produit peut être retranché du premier reste, le chiffre essayé est bon, et on l'écrit à la racine. A la droite du reste de la soustraction on abaisse la tranche suivante; on obtient ainsi un* SECOND RESTE. *On sépare par un point les deux premiers chiffres à droite, et l'on divise la partie à gauche par le triple carré de la partie déjà obtenue à la racine; on essaye le quotient comme ci-dessus, et l'on continue* *ainsi jusqu'à ce qu'on ait obtenu tous les chiffres de la racine, qui sont en même nombre que les tranches du nombre proposé.*

319. Soit maintenant à extraire la racine cubique du nombre n à moins de la fraction $\frac{1}{p}$ près.

C'est chercher deux fractions ayant pour dénominateur p et pour numérateurs deux nombres entiers consécutifs x et $x+1$, tels que ces fractions comprennent entre elles la racine cubique de n. Ainsi on doit avoir

$$\frac{x}{p}<\sqrt[3]{n}<\frac{x+1}{p},$$

d'où

$$x<\sqrt[3]{np^3}<x+1,$$

c'est-à-dire que x est la racine du plus grand cube contenu dans np^3. Ainsi, *pour extraire la racine cubique d'un nombre* n *à moins d'une fraction ayant pour numérateur* 1 *et pour dénominateur* p, *il faut multiplier le nombre proposé* n *par le cube du dénominateur* p, *extraire la racine du produit à moins d'une unité, et donner à cette racine le dénominateur* p.

Si, par exemple, on demande la racine cubique de 15 à moins de $\frac{1}{9}$, on multipliera 15 par 729 cube de 9, on extraira à moins d'une unité la racine cubique du produit 10935 ; ayant obtenu cette racine, qui est 22, on lui donnera le dénominateur 9 ; et l'on aura $\frac{22}{9}$ ou $2\frac{4}{9}$ pour la racine demandée.

Si la fraction qui exprime l'approximation est une unité d'un certain ordre décimal, l'application de la règle ci-dessus conduit à mettre à la droite du nombre proposé 3 fois autant de zéros qu'on veut obtenir de décimales; à extraire à moins d'une unité la racine cubique du nombre ainsi obtenu; et à séparer sur la droite de cette racine le nombre de décimales demandé.

Soit, par exemple, à extraire la racine cubique de 2 à moins de $\frac{1}{100}$, il faudra mettre 6 zéros à la droite de 2, ce qui donnera 2000000 ; extraire à moins d'une unité la racine de ce nombre, ce qui donnera 125 ; et séparer deux décimales sur la droite de cette racine, ce qui donnera 1,25.

320. Soit enfin à extraire la racine cubique d'une fraction.

I. Si les deux termes sont des cubes parfaits, il suffira d'extraire séparément la racine de chacun d'eux; car, pour élever une fraction au cube, il faut, d'après les règles de la multiplication des fractions, y élever séparément ses deux termes.

Ainsi, la racine cubique de $\frac{512}{729}$ est $\frac{8}{9}$.

II. Dans tous les autres cas, on obtiendra la racine demandée, à moins d'une fraction ayant pour numérateur l'unité, et pour dénominateur celui de la fraction proposée, en multipliant les deux termes de celle-ci par son dénominateur, extrayant la racine cubique du numérateur à moins d'une unité, et celle du dénominateur exactement.

Car $\frac{a}{b}$ revient à $\frac{ab^2}{b^3}$, dont la racine cubique est $\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$. Ainsi, la racine cubique de $\frac{7}{12}$ sera celle de $\frac{1008}{12^3}$, c'est-à-dire $\frac{\sqrt[3]{1008}}{12}$, ou $\frac{10}{12}$, ou $\frac{5}{6}$, à moins de $\frac{1}{12}$.

III. On peut obtenir la racine demandée à moins d'une fraction ayant pour numérateur 1 et pour dénominateur un multiple quelconque du dénominateur de la fraction proposée. Par exemple, on peut obtenir la racine cubique de $\frac{a}{b}$ à moins de $\frac{1}{mb}$. Pour cela, il suffit de multiplier les deux termes par m^3b^2, ce qui donne $\frac{m^3ab^2}{m^3b^3}$, et en extrayant la racine $\frac{\sqrt[3]{m^3ab^2}}{mb}$. Si l'on extrait la racine indiquée au numérateur à moins d'une unité, on obtiendra celle de la fraction proposée à moins de $\frac{1}{mb}$.

Ainsi, pour obtenir la racine cubique de $\frac{7}{12}$ à moins de $\frac{1}{60}$, on multipliera les deux termes par 125×144 ou par 18000, ce qui donnera $\frac{126000}{60^3}$; et, en extrayant la racine, $\frac{50}{60}$ ou $\frac{5}{6}$, à moins de $\frac{1}{60}$.

CHAPITRE XII.

DES PROGRESSIONS.

§ I. Des progressions par différence.

321. On nomme *progression par différence* ou *progression arithmétique,* une suite de termes tels que chacun surpasse le précédent (ou en est surpassé) d'une quantité constante appelée *raison.* Pour écrire une semblable progression, on la fait précéder du signe $\div$, et l'on sépare les termes par un point. Ainsi:

$$\div 2.5.8.11.14.17.20.23.26.29. \text{ etc.}$$

est une progression par différence, dont la raison est 3.

Cette progression est *croissante.* Si on l'écrivait dans un ordre inverse, elle serait *décroissante.* On peut considérer les progressions décroissantes comme des progressions dont la raison est négative, et adopter alors, pour définition générale, que chaque terme est la *somme algébrique* du terme précédent et de la raison.

Il résulte de la nature même des progressions arithmétiques, que chaque terme est moyen arithmétique entre celui qui le précède et celui qui le suit. Ainsi on a

$$2.5:5.8\ ;\quad 5.8:8.11\ ;\quad 8.11:11.14\ ;\quad \text{etc.}$$

322. On peut calculer un terme de rang quelconque, connaissant le premier et la raison, sans qu'il soit nécessaire pour cela de former les termes intermédiaires.

Soient en effet a le premier terme et δ la raison.

le deuxième terme sera $a+\delta$;
le troisième terme sera $a+2\delta$;
le quatrième terme sera $a+3\delta$;
le cinquième terme sera $a+4\delta$;
et ainsi de suite.

On remarque que le coefficient de δ est précisément le nombre des termes qui précèdent celui qu'on veut former; en sorte qu'en appelant l le terme de rang n, c'est-à-dire qui en a $n-1$ avant lui, on aura

$$l=a+(n-1)\delta \qquad [1],$$

c'est-à-dire qu'*un terme de rang quelconque est égal au premier augmenté d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

Comme applications de cette formule, soit à résoudre les problèmes suivants :

I. *Un ouvrier place cette année* $200\,fr.$ *à la caisse d'épargne, et se propose d'y ajouter* $125\,fr.$ *chaque année; quelle sera la somme placée au bout de* 15 *ans ?* (Abstraction faite des intérêts.)

La somme demandée est le seizième terme d'une progression par différence, dont le premier terme est 200 et dont la raison est 125. En appelant x cette somme, on aura donc

$$x = 200^{f} + 125^{f} \times 15 = 2075^{f}.$$

II. *Un charretier doit déposer* 50 *voitures de sable en des points espacés de* 20^{m} *en* 20^{m} *sur une route; le point où il vient prendre le sable est situé sur la même route, à* 150^{m} *de celui où il doit déposer la première voiture; quel chemin aura-t-il à parcourir pour déposer la* 50^{e} *voiture et revenir au point de départ?*

Pour déposer la première charretée et revenir au point de départ, il aura à parcourir deux fois 150^{m}, c'est-à-dire 300^{m}. Pour déposer la seconde et revenir, il devra parcourir 20^{m} de plus en allant et 20^{m} en revenant, c'est-à-dire 40^{m} de plus que pour la première. Pour déposer la troisième et revenir, il devra parcourir encore 40^{m} de plus; et ainsi de suite. Les distances successives à parcourir forment donc une progression arithmétique dont le premier terme est 300^{m} et la raison 40^{m}; ainsi on aura pour la valeur du 50^{e} terme x.

$$x = 300^{m} + 40^{m} \times 49 = 2260^{m}.$$

323. La formule [1] peut servir à résoudre 4 problèmes différents, suivant que l'inconnue est a, l, n ou δ. Elle peut servir, par exemple, à traiter cette question :

Entre deux nombres donnés A *et* B *insérer* m *moyens arithmétiques*; c'est-à-dire former une progression par différence, dont A et B soient les termes extrêmes, et telle qu'il y ait m termes entre A et B.

Pour cela on remarque qu'il y aura $m+2$ termes, et que, par conséquent, en nommant δ la raison inconnue, on aura

$$B = A + (m+1)\delta, \text{ d'où } \delta = \frac{B-A}{m+1},$$

c'est-à-dire que *pour obtenir la raison, il faut diviser la différence des deux nombres donnés par le nombre des moyens à insérer, plus un.* On obtiendra ensuite les moyens demandés en ajoutant successivement à A les quantités δ, 2δ, 3δ, etc.

Par exemple, si on propose d'insérer 6 moyens entre 9 et 13, on aura $\delta = \frac{13-9}{6+1} = \frac{4}{7}$. Par conséquent, la progression demandée sera :

$$\div 9 \,.\, 9\tfrac{4}{7} \,.\, 10\tfrac{1}{7} \,.\, 10\tfrac{5}{7} \,.\, 11\tfrac{2}{7} \,.\, 11\tfrac{6}{7} \,.\, 12\tfrac{3}{7} \,.\, 13 \,.$$

324. *Dans toute progression par différence, la somme de deux termes également éloignés des extrêmes est égale à la somme des extrêmes.*

Soient en effet a et l les termes extrêmes, δ la raison, T le terme qui en a n avant lui et T′ celui qui en a n après lui. On aura

$$T = a + n\delta \quad \text{et} \quad l = T' + n\delta \,.$$

Retranchant ces égalités membre à membre, il vient

$$T - l = a - T' \text{ , d'où } \; T + T' = a + l \,,$$

ce qu'il fallait démontrer.

325. On peut se proposer de calculer la somme des termes d'une progression par différence.

Pour cela, soit $\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,....\, g \,.\, h \,.\, k \,.\, l$,
la progression proposée. En désignant par S la somme des termes, on aura indifféremment

$$S = a + b + c + d + \dots + g + h + k + l \,,$$

ou

$$S = l + k + h + g + \dots + d + c + b + a \,,$$

en écrivant les termes dans un ordre inverse.

Or, on remarque que les termes placés l'un au-dessous de l'autre dans ces deux sommes sont précisément les termes à égale distance des extrêmes. Si donc, on ajoute ces deux égalités membre à membre, le second équivaudra, en vertu de la proposition démontrée au numéro précédent, à autant de fois la somme des extrêmes qu'il y a de termes; en appelant donc n ce nombre de termes, on aura

$$2S = (a + l)n \text{ , d'où } \; S = \frac{(a+l)n}{2} \qquad [2],$$

c'est-à-dire que *la somme des termes d'une progression par différence s'obtient en faisant la somme des extrêmes, multipliant cette somme par le nombre des termes, et prenant la moitié du résultat.*

Comme application de cette formule, on peut se proposer les problèmes suivants :

I. *Un corps qui tombe verticalement, dans le vide, parcourt* $4^{m},9044$ *dans la première seconde, et successivement* $9^{m},8088$ *de* *plus dans chacune des secondes suivantes; quel chemin aura-t-il parcouru au bout de* 10 *secondes ?*

Les espaces successivement parcourus dans la première seconde, la deuxième, la troisième, etc., forment une progression par différence dont le premier terme est $4^m,9044$ et la raison $9^m,8088$. En appelant l l'espace parcouru dans la 10^e seconde, on aura donc d'abord (**322**)

$$l = 4^m,9044 + 9^m,8088 \times 9 = 93^m,1836 .$$

En appelant S l'espace total parcouru en 10 secondes, on aura ensuite

$$S = \frac{(4^m,9044 + 93^m,1836)10}{2} = 490^m,44 .$$

II. *Un charretier doit déposer* 50 *voitures de sable, en des points espacés de* 20^m *en* 20^m *sur une route; le point où il vient prendre le sable est situé sur la même route, à* 150^m *de celui où il doit déposer la première voiture; quel chemin aura-t-il à parcourir pour déposer les* 50 *voitures et revenir au point de départ?*

Nous avons déjà vu (**322**) que les espaces successifs à parcourir pour déposer chaque voiture et revenir au point de départ, forment une progression par différence dont le premier terme est 300^m et la raison 40^m. Nous avons trouvé pour le dernier terme 2260^m. En appelant S le chemin total, nous aurons donc

$$S = \frac{(300 + 2260)50}{2} = 64000^m .$$

326. La formule [2] suppose que l'on connaisse le dernier terme; mais on peut encore se dispenser de le calculer. En effet, si, dans cette formule, on met pour l sa valeur tirée de la formule [1], on trouve

$$S = \frac{[a + a + (n-1)\delta]n}{2} = an + \frac{n(n-1)\delta}{2} \qquad [3].$$

Si, par exemple, on applique cette formule au dernier problème, on aura

$$S = 300^m.50 + \frac{50.49.40}{2} = 15000^m + 49000^m = 64000^m .$$

327. Généralement, à l'aide des deux formules

$$l = a + (n-1)\delta \qquad \text{et} \qquad S = \frac{(a+l)n}{2}$$

qui contiennent 5 quantités, a, δ, n, l, S, on peut résoudre tous les problèmes dans lesquels, 3 de ces quantités étant données, on demande les 2 autres. Le nombre de ces problèmes est celui des combinaisons de 5 objets 2 à 2, ou $\frac{5.4}{1.2}$, c'est-à-dire 10 (**235**).

Soit, pour exemple, à résoudre ce problème :

Combien faudra-t-il d'années pour s'acquitter d'une dette de 7700 fr., en donnant 500 fr. la première année, et successivement 200 fr. de plus chacune des années suivantes?

Les sommes payées chaque année forment une progression par différence dont le premier terme est 500 fr. et la raison 200 fr.; c'est-à-dire qu'on a ici : $a=500$ fr., $\delta=200$ fr. et $S=7700$ fr. Les inconnues sont l et n. Mettant pour a, δ et S leurs valeurs dans les deux formules ci-dessus, on obtient

$$l=500+(n-1)200 \quad \text{et} \quad 7700=\frac{(500+l)n}{2}.$$

Mettons pour l sa valeur dans la seconde équation, et faisons disparaître le dénominateur 2, il viendra

$$15400=(500+500+(n-1)200)n.$$

ou
$$15400=1000n+200n^2-200n,$$

ou
$$200n^2+800n-15400=0,$$

ou enfin
$$n^2+4n-77=0,$$

d'où
$$n=-2\pm\sqrt{4+77}=-2\pm 9.$$

La première valeur convient seule à la question; c'est $n=7$. Il faudra donc 7 années. On trouve ensuite

$$l=500+6.200=1700^{f}$$

pour la somme payée la 7^e année.

§ II. Somme des puissances semblables des termes d'une progression par différence. — Application aux piles de boulets.

328. Considérons une progression par différence

$$\div a.b.c.d....k.l$$

dont la raison est δ et dont N est le nombre des termes.

On a la suite d'égalités

$$b=a+\delta\,;\quad c=b+\delta\,;\quad d=c+\delta\,;\ \ldots\ l=k+\delta.$$

Élevons toutes ces égalités à la puissance $n+1$; nous aurons

$$b^{n+1}=a^{n+1}+(n+1)a^n\delta+\frac{(n+1)n}{1\,.\,2}a^{n-1}\delta^2+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{n-2}\delta^3\ldots.+\delta^{n+1}.$$

$$c^{n+1}=b^{n+1}+(n+1)b^n\delta+\frac{(n+1)n}{1\,.\,2}b^{n-1}\delta^2+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}b^{n-2}\delta^3\ldots.+\delta^{n+1}.$$

$$d^{n+1}=c^{n+1}+(n+1)c^n\delta+\frac{(n+1)n}{1\,.\,2}c^{n-1}\delta^2+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}c^{n-2}\delta^3\ldots.+\delta^{n+1}.$$

. . . .

$$l^{n+1}=k^{n+1}+(n+1)k^n\delta+\frac{(n+1)n}{1\,.\,2}k^{n-1}\delta^2+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}k^{n-2}\delta^3\ldots.+\delta^{n+1}.$$

Nous aurons aussi l'égalité

$$(l+\delta)^{n+1}=l^{n+1}+(n+1)l^n\delta+\frac{(n+1)n}{1\,.\,2}l^{n-1}\delta^2+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}l^{n-2}\delta^3\ldots.+\delta^{n+1}.$$

Ajoutons toutes ces égalités membre à membre, en observant que les termes b^{n+1}, c^{n+1}, d^{n+1} .... k^{n+1}, l^{n+1}, communs aux deux membres de l'égalité résultante peuvent être supprimés; et en posant pour abréger

$$S_n=a^n+b^n+c^n+\ldots.+k^n+l^n\ ;$$
$$S_{n-1}=a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}+\ldots.+k^{n-1}+l^{n-1}\ ;$$
$$S_{n-2}=a^{n-2}+b^{n-2}+c^{n-2}+\ldots.+k^{n-2}+l^{n-2}\ ;$$

et ainsi de suite; il viendra

$$(l+\delta)^{n+1}=a^{n+1}+(n+1)\delta S_n+\frac{(n+1)n}{1\,.\,2}\delta^2 S_{n-1}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}\delta^3 S_{n-2}\ldots+N\delta^{n+1}.$$

Cette formule permettra de calculer S_n quand on connaîtra toutes les sommes analogues depuis S_1 jusqu'à S_{n-1}.

Or, la somme S_1 est la somme des termes mêmes de la progression et peut être facilement calculée (**325**). Connaissant S_1, on fera $n=2$ dans la formule ci-dessus, et on en tirera S_2. Connaissant S_1 et S_2, on fera $n=3$ dans la formule, et l'on en tirera S_3. Connaissant S_1, S_2 et S_3, on fera $n=4$, et l'on obtiendra S_4. En continuant ainsi, on finira par obtenir S_n, quel que soit le nombre entier n.

329. Supposons, pour premier exemple, que la progression dont il s'agit soit la suite naturelle des nombres, depuis 1 jusqu'à N. Nous aurons $a=1$, $\delta=1$, $l=N$.

I. D'ailleurs $S_1=\dfrac{(1+N)N}{1\,.\,2}$ (**325**).

II. Faisons donc $n=2$ dans la formule générale, elle deviendra

$$(N+1)^3 = 1+3S_2+3S_1+N\ ,$$

ou
$$(N+1)^3 = 1+3S_2+3\frac{(1+N)N}{1\ .\ 2}+N\ ,$$

d'où
$$6S_2 = 2(N+1)^3 - 3N(N+1) - 2(N+1)\ ,$$

ou
$$\begin{aligned}6S_2 &= (N+1)\,[2(N+1)^2 - 3N - 2]\\ &= (N+1)(2N^2+N) = N(N+1)(2N+1)\ ,\end{aligned}$$

et enfin
$$S_2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\ .$$

III. Faisons $n=3$ dans la formule générale, elle deviendra

$$(N+1)^4 = (1+4S_3+6S_2+4S_1+N\ ,$$

ou $(N+1)^4 = 1+4S_3+N(N+1)(2N+1)+2N(N+1)+N\ ,$

d'où
$$\begin{aligned}4S_3 &= (N+1)^4 - N(N+1)(2N+1) - 2N(N+1) - (N+1),\\ &= (N+1)^4 - N(N+1)(2N+1) - (N+1)(2N+1)\ ,\\ &= (N+1)^4 - (N+1)^2(2N+1)\ ,\\ &= (N+1)^2[(N+1)^2 - (2N+1)] = (N+1)^2N^2\end{aligned}$$

et
$$S_3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}\ .$$

On remarquera que cette valeur est égale au carré de S_1.

IV. Connaissant S_1, S_2 et S_3, on aurait, en faisant $n=4$ dans la formule générale,

$$(N+1)^5 = 1+5S_4+10S_3+10S_2+5S_1+N\ ,$$

d'où l'on tirerait la valeur de S_4.

330. Comme seconde application de la formule générale, supposons qu'il s'agisse de la série des nombres impairs depuis 1 jusqu'à $2N-1$. On remarquera d'abord que le nombre des termes de cette progression est N ; car, en appelant x ce nombre de termes, on doit avoir (**322**)

$$2N-1 = 1+2(x-1) \quad \text{d'où} \quad x=N\ .$$

On a de plus $a=1$, $\delta=2$ et $l=2N-1$.

I. La formule du n° **325** donnera

$$S_1 = \frac{[1+(2N-1)]N}{2} = N^2\ ,$$

c'est-à-dire que *la somme des nombres impairs, depuis 1 jusqu'à un nombre impair quelconque, est égale au carré du nombre de ces nombres impairs.*

II. Faisons maintenant $n=2$ dans la formule, elle deviendra

$$(2N+1)^3=1+3.2S_2+3.4S_1+N.8$$

ou
$$(2N+1)^3=1+6S_2+12N^2+8N\ ,$$

d'où
$$\begin{aligned}6S_2&=(2N+1)^3-12N^2-8N+1\ ,\\&=8N^3-2N=2N(4N^2-1)\ ,\\&=2N(2N+1)(2N-1)\end{aligned}$$

et
$$S_2=\frac{2N(2N+1)(2N-1)}{6}\ .$$

On peut donner à cette expression une forme plus simple en appelant m le nombre impair qui termine la série considérée, c'est-à-dire en posant $2N-1=m$, d'où $2N=m+1$ et $2N+1=m+2$. Il vient en effet

$$S_2=\frac{m(m+1)(m+2)}{6}\ .$$

III. On obtiendrait de la même manière les sommes S_3, S_4, et ainsi de suite.

331. Les piles de boulets en usage dans les arsenaux sont de trois espèces : 1° les piles à base carrée ; 2° les piles à base rectangulaire ; 3° les piles à base triangulaire.

I. Dans les piles à base carrée chaque boulet d'une tranche repose sur 4 boulets de la tranche immédiatement inférieure. Chaque tranche présente la forme d'un carré, et contient autant de files de boulets qu'il y a de boulets dans chaque file ; en sorte que si n est le nombre des boulets de la première file de cette tranche, le nombre des boulets de la tranche entière sera $n\times n$ ou n^2. De plus, le côté de chaque tranche contient un boulet de moins que le côté de la tranche inférieure.

Il résulte de cette disposition que la tranche supérieure est formée d'un seul boulet ; que la seconde est formée de 2 fois 2 ou 4 boulets ; que la troisième est formée de 3 fois 3 ou 9 boulets ; et, en général, que la $n^{\text{ième}}$ tranche est formée de n^2 boulets. La somme totale des boulets contenus dans une pile à base carrée qui a N tranches est donc la somme des nombres

$$1+4+9+16+\text{etc.}\dots+N^2\ ,$$

ou la somme des carrés de la suite naturelle des nombres depuis 1 jusqu'à N ; c'est-à-dire, d'après ce qu'on a vu au n° **329**,

$$\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\ .$$

Si, par exemple, il y a 10 tranches, le nombre des boulets sera

$$\frac{10.11.21}{6} \quad \text{ou} \quad 385 .$$

Une pile à base carrée peut être tronquée. Elle est alors la différence entre deux piles complètes. Pour fixer les idées, supposons qu'elle ait m tranches, et qu'il y ait n boulets dans le côté de la tranche supérieure. Puisqu'il y a n boulets dans le côté de la première tranche, il y en aura $n+1$ dans le côté de la seconde, $n+2$ dans le côté de la troisième, etc.; donc $n+m-1$ dans le côté de la $m^{\text{ième}}$. Si donc la pile était complète, le nombre des boulets contenus serait la somme des carrés des nombres 1, 2, 3 ... jusqu'à $n+m-1$, c'est-à-dire

$$\frac{(n+m-1)(n+m)(2n+2m-1)}{6} .$$

Maintenant, puisque le côté de la tranche supérieure a n boulets, celui de la tranche qui serait placée au-dessus en aurait $n-1$. Le nombre des boulets de la pile qui manque est donc la somme des carrés des nombres 1, 2, 3 ... jusqu'à $n-1$, c'est-à-dire

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} .$$

Le nombre des boulets de la pile tronquée est donc la différence entre les deux expressions que nous venons d'obtenir, c'est-à-dire

$$\frac{(m+n-1)(m+n)(2m+2n-1)-(n-1)n(2n-1)}{6} .$$

Si, par exemple, il y a 7 tranches et qu'il y ait 5 boulets dans le côté de la tranche supérieure, le nombre total des boulets sera

$$\frac{11.12.23-4.5.9}{6} \quad \text{ou} \quad 476 .$$

332. II. Dans les piles à base rectangulaire, la tranche supérieure est une simple file de boulets. La seconde tranche se compose de 2 files, ayant chacune 1 boulet de plus que la file supérieure. La troisième tranche se compose de 3 files, ayant chacune 1 boulet de plus que les files de la seconde tranche, ou 2 boulets de plus que la première file; et ainsi de suite. Si donc on désigne par $p+1$ le nombre des boulets de la première tranche,

la première tranche aura	$p+1$	boulets	$p+1$;
la seconde	$(p+2).2$	ou	$2p+2^2$;
la troisième	$(p+3).3$	ou	$3p+3^2$;
....	......		....
la $N^{\text{ième}}$	$(p+N)N$	ou	$Np+N^2$.

Si l'on fait la somme de ces valeurs, on trouvera d'une part

$$p + 2p + 3p \ldots. + Np$$

ou

$$p(1 + 2 + 3 \ldots. + N),$$

c'est-à-dire

$$\frac{p.N(N+1)}{2};$$

de l'autre,

$$1 + 2^2 + 3^2 \ldots. + N^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

La somme totale est donc

$$\frac{pN(N+1)}{2} + \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

ou

$$\frac{N(N+1)(3p+2N+1)}{6}.$$

Si, par exemple, il y a 11 boulets dans la file supérieure et qu'il y ait 7 tranches, le nombre total des boulets sera

$$\frac{7.8.(33+14+1)}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{7.8.48}{6},$$

c'est-à-dire 448.

On évaluerait une pile tronquée à base rectangulaire de la même manière qu'on a évalué une pile tronquée à base carrée, c'est-à-dire en la considérant comme la différence entre deux piles complètes. Nous ne nous y arrêterons pas.

333. Dans les piles à base triangulaire, chaque boulet repose sur 3 boulets de la tranche immédiatement inférieure. Chaque tranche a la forme triangulaire, et se compose d'une série de files inégales dont la première contient 1 boulet, la seconde 2 boulets, la troisième 3, etc. Chaque tranche a une file de plus que la tranche immédiatement supérieure.

Voyons d'abord comment on peut évaluer le nombre des boulets contenus dans une même tranche. La première file ayant 1 boulet, la seconde 2, la troisième 3, etc.; s'il y a n files, la dernière contiendra n boulets. Le nombre des boulets contenus dans la tranche sera donc la somme des nombres $1, 2, 3 \ldots. n$; c'est-à-dire

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n.$$

Cela posé, on aura le nombre de boulets de chaque tranche en faisant successivement dans cette formule $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc., jusqu'à n ; ce qui donnera

pour la première tranche : $\frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}1$;
deuxième $\frac{1}{2}4 + \frac{1}{2}2$;
troisième $\frac{1}{2}9 + \frac{1}{2}3$;
quatrième $\frac{1}{2}16 + \frac{1}{2}4$;
....
$n^{\text{ième}}$ $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

Faisant la somme, on trouvera d'une part

$$\tfrac{1}{2}(1+4+9+16\ldots.+n^2) \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ ;$$

en second lieu :

$$\tfrac{1}{2}(1+2+3+4\ldots.+n) \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}.\frac{n(n+1)}{2} \ .$$

La somme sera donc

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4} \ ,$$

ou $\dfrac{n(n+1)[(2n+1)+3]}{12}$, ou encore $\dfrac{n(n+1)(2n+4)}{12}$,

ou enfin $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Si, par exemple, il y a 10 tranches, le nombre des boulets sera

$$\frac{10.11.12}{6} \quad \text{ou} \quad 220 \ .$$

On obtiendrait le nombre des boulets d'une pile tronquée à base triangulaire, en la considérant encore comme la différence entre deux piles complètes.

Remarques. Les nombres compris dans la formule

$$\frac{n(n+1)}{2} \ ,$$

savoir : 1 , 3 , 6 , 10 , 15 , 21 , 28 , etc.,

sont ceux que l'on appelle *triangulaires*, parce qu'ils expriment le nombre de boulets, ou d'objets de même espèce, que l'on peut ranger suivant une figure triangulaire.

Les nombres compris dans la formule

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \ ,$$

savoir : 1 , 4 , 10 , 20 , 35 , 56 , 84 , etc., sont ceux que l'on appelle *pyramidaux*, parce qu'ils expriment le nombre de boulets ou d'objets quelconques que l'on peut ranger de manière à former une pyramide triangulaire.

§ III. Des progressions par quotient.

354. On nomme *progression par quotient* ou *progression géométrique*, une suite de termes tels que chacun soit égal au précédent multiplié par une quantité constante appelée *raison*. Pour écrire une semblable progression, on la fait précéder du signe $\div\!\div$, et l'on sépare les termes par deux points. Ainsi :

$$\div\!\div 5 : 10 : 20 : 40 : 80 : 160 : 320 : 640 : \text{etc.}$$

est une progression par quotient, dont la raison est 2.

Une progression par quotient est *croissante* lorsque la raison est plus grande que l'unité ; elle est *décroissante* dans le cas contraire. Si la raison était l'unité, la progression se réduirait à une suite de termes égaux.

Il résulte de la nature même des progressions géométriques, que chaque terme est moyen géométrique entre celui qui le précède et celui qui le suit. Ainsi on a

$$5 : 10 :: 10 : 20 \;;\quad 10 : 20 :: 20 : 40 \;;\quad 20 : 40 :: 40 : 80 \;;\ \text{etc.}$$

355. On peut calculer un terme de rang quelconque, connaissant le premier et la raison. Car, soient a le premier terme et q la raison.

Le deuxième terme sera aq ;
le troisième aq^2 ;
le quatrième aq^3 ;
le cinquième aq^4 ;
et ainsi de suite.

On remarque que l'exposant de q est précisément le nombre des termes qui précèdent celui que l'on veut former ; en sorte qu'en appelant l le terme de rang n, ou qui en a $n-1$ avant lui, on aura

$$l = aq^{n-1} \qquad [1],$$

c'est-à-dire qu'*un terme de rang quelconque est égal au premier multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent.*

Si, par exemple, le premier terme est 7 et la raison $2,25$, on aura le 20^e terme par la formule

$$l = 7.(2,25)^{19} \; ; \quad \text{d'où} \quad \log l = \log 7 + 19 \log 2,25 = 7,5365659 \; ;$$

ce qui donne $l = 34400590$, à moins d'une dizaine.

336. La formule [1] peut servir à résoudre ce problème :

Entre deux nombres A *et* B *insérer* m *moyens géométriques* ; c'est-à-dire former une progression par quotient, dont A et B soient les extrêmes, et telle qu'il y ait m termes entre A et B.

Le nombre total des termes devant être $m+2$, on devra avoir, en appelant q la raison,

$$B = Aq^{m+1} \quad \text{d'où} \quad q = \sqrt[m+1]{\frac{B}{A}},$$

c'est-à-dire que *pour obtenir la raison, il faut diviser le second nombre par le premier, et extraire du quotient une racine dont l'indice est le nombre des moyens à insérer, plus un.*

On obtiendra ensuite les moyens demandés en multipliant successivement A par q, par q^2, par q^3, etc.

Par exemple, si on propose d'insérer 6 moyens entre 9 et 13, on aura

$$q = \sqrt[7]{\frac{13}{9}} \quad \text{d'où} \quad \log q = \frac{\log 13 + \bar{\mathrm{L}}\, 9}{7} = 0,0228144,$$

et par suite, $q = 1,053536..$ On obtiendra ensuite les logarithmes des 6 moyens en ajoutant $\log q$, $2 \log q$, $3 \log q$, etc., au logarithme de 9 ; ce qui donne, en appelant m_1, m_2, m_3, ... m_6, ces moyens

$$\begin{aligned}
\log m_1 &= 0,9770569 \quad \text{d'où} \quad & m_1 &= 9,48543.. \\
\log m_2 &= 0,9998713 & m_2 &= 9,99703.. \\
\log m_3 &= 1,0226857 & m_3 &= 10,53624.. \\
\log m_4 &= 1,0455001 & m_4 &= 11,10452.. \\
\log m_5 &= 1,0683145 & m_5 &= 11,70346.. \\
\log m_6 &= 1,0911289 & m_6 &= 12,30634..
\end{aligned}$$

337. On peut calculer la somme des termes d'une progression par quotient.

Soit $\dot{\dot{}}\!\!\div a : b : c : d : \ldots : k : l$

la progression proposée. Désignons la raison par q, et la somme des termes par S. On aura d'abord

$$b = aq \; ; \quad c = bq \; ; \quad d = cq \ldots \; ; \quad l = kq \; .$$

Si l'on ajoute ces égalités membre à membre, il viendra

$$b+c+d\ldots\ldots+l=q(a+b+c\ldots\ldots+k)$$

ou

$$S-a=q(S-l)\ ,$$

d'où

$$S=\frac{ql-a}{q-1} \qquad [2],$$

c'est-à-dire que *pour obtenir la somme des termes d'une progression par quotient, il faut multiplier le dernier terme par la raison, en retrancher le premier terme, et diviser le reste par la raison diminuée d'une unité.*

Exemple : soit la progression

$$5:15:45:135:405:1215:3645\ .$$

On aura

$$S=\frac{3645\,.\,3-5}{3-1}=5465\ .$$

Si l'on met pour l sa valeur aq^{n-1}, la formule qui donne S prend la forme

$$S=\frac{aq^n-a}{q-1}=\frac{a(q^n-1)}{q-1}\ .$$

On aurait pu établir cette formule directement, car on a

$$S=a+aq+aq^2+aq^3\ldots\ldots+aq^{n-1}\ ,$$

ou

$$S=a(1+q+q^2+q^3\ldots\ldots+q^{n-1})\ ,$$

ou encore

$$S=a(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots\ldots+q^2+q+1)\ .$$

Or, la quantité entre parenthèses est le quotient de q^n-1 par $q-1$ (48); on peut donc écrire

$$S=a\frac{q^n-1}{q-1}\ ,$$

comme ci-dessus.

Comme application de cette formule, on peut proposer les problèmes suivants :

I. *Un joueur double sa mise chaque fois qu'il perd. Si sa mise primitive était de* $0^f,25$ *et qu'il perdît* 20 *fois de suite, quelle serait sa perte totale ?*

Ses pertes successives forment une progression par quotient dont le premier terme est $0^f,25$ et dont la raison est 2. On trouvera d'abord pour le 20^e terme

$$l=0^f,25\times 2^{19}=131072^f\ .$$

On aura ensuite

$$S=\frac{131072\times 2-0,25}{2-1}=262143^f,75\ .$$

II. *Un maquignon interrogé sur le prix d'un cheval répond : Les fers de mon cheval sont fixés à l'aide de 20 clous; si vous me donniez 1 centime pour le premier, 2 centimes pour le second, 4 pour le troisième, et ainsi de suite, toujours en doublant, je vous donnerais le cheval et* $485^f,75$. *On demande combien il l'estimait.*

Il faut d'abord chercher le nombre de centimes qu'il faudrait donner pour le 20^e clou. Ce nombre est le 20^e terme d'une progression par quotient dont le premier terme est 1 et la raison 2 ; on a donc, en le désignant par l,

$$l = 1 \,.\, 2^{19} = 524288^c \,.$$

Le nombre total S de centimes payés pour les 20 clous serait donc

$$S = \frac{524288 \times 2 - 1}{2 - 1} = 1048575^c \quad \text{ou} \quad 10485^f,75 \,.$$

Si de ce nombre on retranche $485^f,75$, il reste 10000^f.

338. Lorsqu'on prolonge indéfiniment une progression géométrique décroissante, la somme de ses termes s'approche sans cesse d'une limite finie qu'elle ne peut atteindre, mais dont elle peut différer aussi peu que l'on veut, si l'on prend un nombre suffisant de termes.

Supposons, en effet, que q soit moindre que 1. La formule [2] pourra s'écrire, en changeant les signes des deux termes du second membre,

$$S = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} \,.\, q^n \,.$$

La première partie du second membre est une quantité indépendante du nombre des termes ; la seconde partie contient un facteur $\frac{a}{1 - q}$ qui ne dépend pas non plus du nombre des termes. Mais le facteur q^n est d'autant plus petit que la progression est prolongée plus loin ; car les puissances successives d'une fraction vont sans cesse en diminuant.

Nous allons démontrer que l'on peut toujours prolonger la progression assez loin pour que q^n devienne plus petit que toute quantité donnée.

En effet, q étant moindre que 1 peut se mettre sous la forme $\frac{1}{1 + \alpha}$, α étant positif. Il suffit donc de démontrer que $(1 + \alpha)^n$ peut devenir aussi grand qu'on le voudra en pre-

nant n suffisamment grand. Or, le développement est de $(1+\alpha)^n$, c'est-à-dire
$$1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\alpha^2+\text{etc.}$$
se composant d'une suite de termes positifs, si l'on rend l'un de ces termes $n\alpha$ plus grand qu'une quantité donnée, le développement sera, à plus forte raison, plus grand que cette quantité. Or, on pourra toujours rendre $n\alpha$ aussi grand qu'on le voudra en prenant le facteur n suffisamment grand. Donc enfin, on pourra prendre n assez grand pour que q^n soit plus petit que toute quantité donnée.

Il suit de là que la seconde partie de la valeur de S pourra être rendue aussi petite qu'on voudra en prenant un nombre suffisant de termes; et que, par conséquent, cette valeur tend sans cesse vers une limite fixe qui est
$$S=\frac{a}{1-q} \qquad [3].$$
Cette limite est ce qu'on nomme quelquefois *la somme* des termes de la progression *prolongée à l'infini.*

Ainsi, *la limite de la somme des termes d'une progression géométrique décroissante est égale au premier terme, divisé par l'unité moins la raison.*

Par exemple, la progression
$$\div\!\div 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{8} : \text{etc.}$$
dont la raison est $\frac{1}{2}$, a pour limite
$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \text{ ou } \frac{2}{2-1}, \text{ c'est-à-dire } 2.$$
La progression
$$\div\!\div 1 : \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{9} : \tfrac{1}{27} : \text{etc.}$$
dont la raison est $\frac{1}{3}$, a pour limite
$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \text{ ou } \frac{3}{3-1}, \text{ c'est-à-dire } \tfrac{3}{2}.$$
La progression $\div\!\div 7 : 6 :$ etc., dont la raison est $\frac{6}{7}$, a pour limite
$$\frac{7}{1-\frac{6}{7}} \text{ ou } \frac{49}{7-6}, \text{ c'est-à-dire } 49.$$
Comme application de la formule [3], on peut convertir en fraction ordinaire une fraction décimale périodique simple.

Soit la fraction périodique simple $0,\text{PPP}\ldots$, dans laquelle P représente un nombre de p chiffres. On pourra écrire cette fraction sous la forme

$$\frac{P}{10^p}+\frac{P}{10^{2p}}+\frac{P}{10^{3p}}+\text{etc.}$$

On voit que cette suite forme la somme des termes d'une progression géométrique décroissante, dont le premier terme est $\frac{P}{10^p}$ et dont la raison est $\frac{1}{10^p}$. A mesure qu'on prendra un plus grand nombre de périodes on approchera donc de plus en plus d'une limite finie, qui est ce qu'on appelle en arithmétique la valeur de la fraction périodique. Cette limite, d'après ce qu'on vient de voir, est

$$\frac{\frac{P}{10^p}}{1-\frac{1}{10^p}} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{10^p-1}.$$

Or 10^p-1 est un nombre composé du chiffre 9 répété p fois; par conséquent la limite de la progression ou *la valeur de la fraction périodique est égale à une fraction ordinaire qui a pour numérateur la période, et pour dénominateur un nombre composé d'autant de* 9 *qu'il y a de chiffres dans la période.*

C'est la règle donnée en arithmétique.

339. I. Les logarithmes sont considérés en arithmétique comme les termes d'une progression par différence, dont le premier terme est 0, correspondants aux termes d'une progression par quotient, dont le premier terme est 1. Cette manière d'envisager les logarithmes revient au fond à celle que nous avons adoptée au chap. X, et qui consiste à les regarder comme exposants.

Soient, en effet, les deux progressions :

$$\div\!\!\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 \ldots\ldots : q^n : \text{etc.}$$
$$\div\, 0 \,.\, d \,.\, 2d \,.\, 3d \,.\, 4d \ldots\ldots nd. \text{ etc.}$$

Les termes de la seconde seront les logarithmes des termes correspondants de la première, d'après la définition donnée en arithmétique; mais, en même temps, il est facile de voir que les termes de la première s'obtiennent en élevant la quantité constante q à des puissances marquées par les termes correspondants de la seconde; ce qui s'accorde avec la définition donnée au chapitre X (**279**).

II. *Si plusieurs nombres sont en progression géométrique, leurs logarithmes sont en progression arithmétique, et réciproquement.*

En effet, si l'on a $\div\!\div a : b : c : d :$ etc.

d'où $b = aq$; $c = bq$; $d = cq$; etc. ;

on en déduit

$\log b = \log a + \log q$; $\log c = \log b + \log q$; $\log d = \log c + \log q$; etc. ;

d'où l'on voit que chaque logarithme surpasse le précédent de la quantité constante $\log q$; et que, par conséquent, on a la progression arithmétique

$$\div \log a \,.\, \log b \,.\, \log c \,.\, \log d \,.\, \text{etc.}$$

dont la raison est $\log q$.

On démontrerait de même la réciproque.

§ IV. Applications aux questions d'intérêt composé.

340. On sait que l'on nomme *intérêt* d'une somme d'argent ce que cette somme rapporte au bout d'un certain temps ; le *taux* de l'intérêt est l'intérêt de 100 fr. par an ; la somme placée prend le nom de *capital*.

Si a est le capital, t le taux, n le nombre d'années qui composent la durée du placement, et i l'intérêt ; 100 fr. rapportant t par an, rapporteront nt au bout de n années ; on aura donc

$$100 : nt :: a : i \quad \text{d'où} \quad i = \frac{ant}{100} \qquad [1].$$

C'est la formule des *intérêts simples* ; elle donne lieu à quatre problèmes, suivant que l'inconnue est i , a , n ou t . On en trouvera des exemples dans tous les traités d'arithmétique.

Un capital est dit placé à *intérêts composés* lorsque, chaque année, ce capital s'augmente des intérêts produits pendant l'année précédente.

Soit b la valeur de ce capital après un certain nombre d'années, et cherchons ce qu'il deviendra au bout de l'année suivante. Au bout de cette année, il sera augmenté de l'intérêt produit pendant cette année ; or, d'après la formule des intérêts simples, l'intérêt de b au bout d'un an est $\frac{bt}{100}$; le capital b sera donc devenu $b + \frac{bt}{100}$ ou $b\left(1 + \frac{t}{100}\right)$, c'est-à-dire qu'il aura été multiplié par la quantité $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$ qui ne dépend pas du nombre d'années déjà écoulées.

Il en résulte que les valeurs d'un capital a au bout de 1 année, 2 années, 3 années, etc., forment les termes d'une progression par quotient, dont le premier terme est a et la raison $\left(1+\frac{t}{100}\right)$. La valeur de ce capital au bout de n années sera le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de cette progression ; on aura donc, en le désignant par A (335) :

$$A = a\left(1+\frac{t}{100}\right)^n \qquad [2],$$

c'est la formule des intérêts composés. Le capital a se nomme le *capital primitif,* et A se nomme le *capital définitif.*

En appliquant les logarithmes à cette formule, on en tire

$$\log A = \log a + n[\log(100+t) - 2] \qquad [3].$$

Cette égalité permet de résoudre quatre problèmes, suivant que l'inconnue est A, a, n ou t. Nous allons en donner des exemples.

341. Application I. *Quel est le capital définitif produit au bout de* 21 *ans, à* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100, *et à intérêts composés, par un capital primitif de* 600 *fr.* ?

On a ici $a=600$, $n=21$, $t=4,5$; donc

$$\log A = \log 600 + 21[\log 104,5 - 2] = 3,1795935,$$

d'où $A = 1512^{f},15$.

Application II. *Quelle somme faut-il placer pendant* 10 *ans, à* 5 *pour* 100, *et à intérêts composés, pour produire un capital définitif de* 4800 *fr.* ?

Ici, c'est a qui est inconnu ; on a $A=4800$, $n=10$, $t=5$.

L'équation [3] donne

$$\log a = \log A - n[\log(100+t) - 2],$$

donc $\log a = \log 4800 - 10[\log 105 - 2] = 3,4693482$,

d'où $a = 2946^{f},78$.

Application III. *Au bout de combien d'années un capital placé à* 5 *pour* 100, *et à intérêts composés, est-il doublé ?*

Ici, c'est n qui est inconnu ; on a $A=2a$ et $t=5$.

L'équation [3] donne

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log(100+t) - 2} \text{ ; et ici } n = \frac{\log 2}{\log 105 - 2} = \frac{0,3010300}{0,0211893}$$

ou $n = 14$, et une fraction. Il faut donc prendre $n = 15$, attendu que les intérêts se composent par années, mais non par fractions d'années.

APPLICATION IV. *A quel taux faut-il placer une somme de* 3000 *fr.*, *pendant* 11 *ans et à intérêts composés, pour produire un capital définitif de* 5406f,28 ?

Ici, c'est t qui est inconnu; on a $a = 3000$, $n = 11$, $A = 5406,28$.

La formule [3] donne

$$\log(100+t) = 2 + \frac{\log A + \bar{L}\, a}{n}$$

et ici

$$\log(100+t) = 2 + \frac{\log 5406,28 + \bar{L}\, 3000}{11} = 2,0232525,$$

d'où $100 + t = 105,5$, et $t = 5,5$ ou $5\frac{1}{2}$.

342. On peut traiter d'une manière analogue les problèmes suivants, quoiqu'il ne s'agisse point d'intérêts.

I. *La population d'un État est de* 20000000 *d'habitants; et elle s'accroît chaque année de* $\frac{1}{250}$ *de sa valeur; on demande quelle sera la population de cet État dans* 50 *ans.*

Si P est la population au bout d'un certain nombre d'années, elle sera $P + \frac{P}{250}$ l'année suivante, c'est-à-dire $P\left(1 + \frac{1}{250}\right)$; les valeurs successives de la population sont donc les termes d'une progression par quotient, dont le premier terme est 20000000, et dont la raison est $1 + \frac{1}{250}$. On demande le 51e terme de cette progression; en le désignant par x, on aura donc

$$x = 20000000\left(1 + \frac{1}{250}\right)^{50} = 20000000\left(\frac{251}{250}\right)^{50},$$

d'où

$$\log x = \log 20000000 + 50\,[\log 251 + \bar{L}\, 250] = 7,3877150;$$

et par conséquent $x = 24418270$, à 10 habitants près.

II. *Les populations de deux États sont* P *et* P′, *la première s'accroît chaque année de* $\frac{1}{p}$ *de sa valeur, et la seconde de* $\frac{1}{p'}$ *de sa valeur. On demande dans combien d'années les deux populations seront égales.*

En appelant x le nombre d'années demandé, on trouvera facilement qu'on doit avoir l'équation

$$\mathrm{P}\left(1+\frac{1}{p}\right)^x=\mathrm{P}'\left(1+\frac{1}{p'}\right)^x .$$

On peut la mettre sous la forme

$$\frac{\left(1+\frac{1}{p}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{p'}\right)^x}=\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{p'(1+p)}{p(1+p')}\right)^x=\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} .$$

En appliquant les logarithmes, on obtient

$$x[\log p'+\log(1+p)+\overline{\mathrm{L}}\,p+\overline{\mathrm{L}}\,(1+p')=\log \mathrm{P}'+\overline{\mathrm{L}}\ \mathrm{P} ,$$

d'où
$$x=\frac{\log \mathrm{P}'+\overline{\mathrm{L}}\,\mathrm{P}}{\log p'+\log(1+p)+\overline{\mathrm{L}}\,p+\overline{\mathrm{L}}\,(1+p')} .$$

Par exemple : pour $\mathrm{P}=20000000$, $\mathrm{P}'=30000000$, $p=200$, $p'=300$, on trouvera : $x=244$ ans, et une fraction.

343. Revenons aux intérêts composés. Dans les problèmes traités ci-dessus, nous n'avions à calculer que le dernier terme d'une progression ; il peut se faire qu'on ait à calculer la somme.

Si, par exemple, on place chaque année une somme a, au taux t et à intérêts composés, on peut désirer savoir quel sera le capital C dont on pourra disposer au bout de n années.

Pour résoudre cette question, remarquons que la somme a, placée actuellement, produira dans n années $a\left(1+\frac{t}{100}\right)^n$.

La somme a, placée au bout de la première année, produira au bout de la n^{me} $a\left(1+\frac{t}{100}\right)^{n-1}$; puisque la durée du placement aura été moindre d'une année.

La somme a, placée au bout de la seconde année, produira de même au bout de la $n^{\text{ième}}$ $a\left(1+\frac{t}{100}\right)^{n-2}$.

Enfin, la somme a, placée au bout de la $(n-1)^{\text{ième}}$ année, produira au bout de la $n^{\text{ième}}$ $a\left(1+\frac{t}{100}\right)$

Le capital demandé C est la somme de tous ces capitaux définitifs qui forment, comme on voit, une progression par quotient dont le premier terme est $a\left(1+\frac{t}{100}\right)$, le dernier $a\left(1+\frac{t}{100}\right)^n$

et la raison $\left(1+\frac{t}{100}\right)$. On aura donc (**337**)

$$C=a\frac{\left(1+\frac{t}{100}\right)^{n+1}-a\left(1+\frac{t}{100}\right)}{\left(1+\frac{t}{100}\right)-1}$$

ou
$$C=\frac{a(100+t)}{t}\left[\left(1+\frac{t}{100}\right)^{n}-1\right].$$

Cette formule n'est point calculable par logarithmes, mais on pourra se servir des logarithmes au moyen d'une inconnue auxiliaire (**300**). On posera

$$y=\left(1+\frac{t}{100}\right)^{n},$$

d'où
$$C=\frac{a(100+t)(y-1)}{t},$$

et, en appliquant les logarithmes,

$$\log y=n[\log(100+t)-2]$$
$$\log C=\log a+\log(100+t)+\log(y-1)+\bar{L}\,t.$$

Après avoir déterminé $\log y$ par la première équation, on passera aux nombres, c'est-à-dire que l'on cherchera y dans les tables; quand on l'aura trouvé, on en retranchera une unité, et l'on cherchera de nouveau dans les tables le logarithme de $y-1$, pour calculer $\log C$ ou $\log a$.

EXEMPLE I. *On place chaque année une somme de* 200 *fr.*, *à* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100 *et à intérêts composés; de quel capital pourra-t-on disposer au bout de* 20 *ans?*

On aura d'abord $\log y=20(\log 104{,}5-2)=0{,}3823260$
d'où $y=2{,}411715$; et $y-1=1{,}411715$.

On aura ensuite

$$\log C=\log 200+\log 104{,}5+\log 1{,}411715+\bar{L}\,4{,}5$$
$$=3{,}8136808,$$

d'où $C=6511^{f},496..$ ou $6511^{f},50$.

EXEMPLE II. *Quelle somme faut-il placer annuellement, à* 5 *pour* 100, *et à intérêts composés, pour mettre à sa disposition un capital de* 60000 *fr.* *au bout de* 10 *ans?*

On aura d'abord $\log y=10(\log 105-2)=0{,}2118930$
d'où $y=1{,}62889$; et $y-1=0{,}62889$.

On aura ensuite

$$\log 60000 = \log a + \log 105 + \log 0{,}62889 + \overline{\mathrm{L}}\,5\ ,$$

d'où

$$\log a = \log 60000 + \overline{\mathrm{L}}\,105 + \overline{\mathrm{L}}\,0{,}62889 + \log 5$$
$$= 3{,}6573572$$

et

$$a = 4543^{\mathrm{f}},15\ .$$

344. Enfin, au nombre des questions qui se rattachent à l'objet de ce paragraphe, sont comprises les questions d'annuités et d'amortissement.

On nomme *annuité* la somme qu'il faut payer annuellement pour s'acquitter d'une dette au bout d'un nombre déterminé d'années.

Supposons qu'on emprunte une somme A ; au bout de n années cette somme vaudra, en ayant égard aux intérêts composés, et en appelant t le taux de l'intérêt,

$$A\left(1+\frac{t}{100}\right)^n .$$

Telle est donc la somme qu'il faudrait rendre au bout de n années. On préfère s'acquitter par annuités. Soit a cette somme annuelle.

La somme a, qu'on payera au bout de la première année, vaudra, au bout de $n-1$ années, pour le créancier qui jouira des intérêts,

$$a\left(1+\frac{t}{100}\right)^{n-1} .$$

La somme a, qu'on payera au bout de la seconde année, vaudra de même

$$a\left(1+\frac{t}{100}\right)^{n-2},$$

et ainsi de suite. Enfin la somme a payée au bout de la $n^{\text{ième}}$ année, vaudra simplement a. Ces capitaux définitifs forment une progression par quotient dont le premier terme est a, le dernier $a\left(1+\frac{t}{100}\right)^{n-1}$ et la raison $\left(1+\frac{t}{100}\right)$; leur somme a donc pour valeur (**337**),

$$\frac{a\left(1+\frac{t}{100}\right)^n - a}{\left(1+\frac{t}{100}\right)-1} \quad \text{ou} \quad \frac{100a}{t}\left[\left(1+\frac{t}{100}\right)^n - 1\right] .$$

Pour que la dette soit amortie par ces annuités, il faudra qu'on ait

$$\frac{100a}{t}\left[\left(1+\frac{t}{100}\right)^n - 1\right] = A\left(1+\frac{t}{100}\right)^n .$$

En posant comme ci-dessus

$$y=\left(1+\frac{t}{100}\right)^n,$$

on aura
$$\frac{100a(y-1)}{t}=Ay\ ;$$

et, en appliquant les logarithmes,

$$\log y = n[\log(100+t)-2]$$
$$2+\log a+\log(y-1)+\overline{\mathrm{L}}\,t=\log A+\log y\ .$$

On tirera de la première de ces égalités la valeur de $\log y$; on cherchera y dans les tables; on en retranchera l'unité; on cherchera de nouveau dans les tables le logarithme de $y-1$, et l'on aura tout ce qu'il faut pour calculer, à l'aide de la seconde égalité, soit $\log A$, soit $\log a$.

Exemple I. *Quelle somme faut-il prêter à* $4\frac{1}{2}$ *pour* 100 *et à intérêts composés pour en être remboursé au bout de* 10 *ans par des annuités de* 500 *fr.* ?

On a $a=500$, $n=10$, $t=4{,}5$; on cherche A.

On aura d'abord

$$\log y=10(\log 104{,}5-2)=0{,}1911630\ ,$$

d'où $y=1{,}55297$; et $y-1=0{,}55297$.

On aura ensuite

$$\log A=2+\log 500+\log 0{,}55297+\overline{\mathrm{L}}\ 4{,}5+\overline{\mathrm{L}}\ 1{,}55297$$
$$=3{,}5972961\ ;\quad \text{d'où}\quad A=3956^{\mathrm{f}},36\ .$$

Exemple II. *Une compagnie a emprunté une somme de* 2000000 fr. *pour des travaux; quelle annuité devra-t-elle payer pour s'acquitter en* 15 *ans; le taux de l'intérêt étant* 5 *pour* 100 ?

On a $A=2000000$; $n=15$; $t=5$; on cherche a.

On aura d'abord

$$\log y=15(\log 105-2)=0{,}3178395\ ;$$

d'où $y=2{,}07893$; et $y-1=1{,}07893$.

On aura ensuite

$$\log a=\log 2000000+\log 2{,}07893-2+\overline{\mathrm{L}}\ 1{,}07893+\log 5$$
$$=5{,}2848461\ ;\quad \text{d'où}\quad a=192684^{\mathrm{f}},20\ .$$

343. Le lecteur pourra s'exercer sur les problèmes qui suivent :

I. *A quel taux faut-il placer* 5000 *fr. à intérêts composés, pour produire, au bout de* 17 *ans, un capital définitif de* 9739$^{\mathrm{f}}$,50 ?

(Réponse : à 4 pour 100.)

II. *Au bout de combien d'années un capital placé à* $5\frac{1}{2}$ *pour* 100, *et à intérêts composés, est-il doublé?*

(Réponse : au bout de 13 ans.)

III. *La population d'un État s'est accrue d'un quart dans l'espace d'un siècle; de quelle fraction de sa valeur augmente-t-elle chaque année?*

(Réponse : des 0,002234..., ou de $\frac{1}{448}$ environ.

IV. *Quelle somme faut-il placer annuellement, à dater de la naissance d'un enfant, pour lui constituer, à l'âge de* 21 *ans, un capital de* 48000 *fr., le taux de l'intérêt étant* $4\frac{1}{2}$?

(Réponse : $1356^{f},50$.)

V. *Quelle annuité faut-il payer pour s'acquitter d'une dette de* 6400 fr. *en* 7 *ans, au taux de* 4 *pour* 100 ?

(Réponse : $1066^{f},02$.)

CHAPITRE XIII.

DES FRACTIONS CONTINUES.

§ I. Propriétés principales des fractions continues.

346. On appelle *fraction continue* une expression qui se compose d'une partie entière suivie d'une fraction dont le numérateur est 1, et dont le dénominateur se compose d'une partie entière suivie d'une fraction dont le numérateur est 1, et dont le dénominateur se compose d'une partie entière suivie d'une fraction, et ainsi de suite. Telle est l'expression

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\text{etc.}}}}}$$

Les nombres entiers a, b, c, d, etc., se nomment *quotients incomplets*; ils sont au moins égaux à 1, sauf le premier a qui peut être nul. Les fractions $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, etc., se nomment *fractions intégrantes*. Enfin les valeurs successives

$$a\,,\quad a+\frac{1}{b}\,,\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}\,,\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}\,,\ \text{etc.},$$

qu'on obtient en s'arrêtant aux quotients incomplets successifs, sont ce que l'on appelle les *réduites* successives.

347. *Formation des réduites.* Les réduites peuvent s'obtenir sous forme de fractions ordinaires, d'après une loi très-simple.

En effet, la première réduite est a ou $\frac{a}{1}$; la seconde est $a+\frac{1}{b}$ ou $\frac{ab+1}{b}$. Pour former la troisième, il suffit évidemment de changer dans la seconde b en $b+\frac{1}{c}$, ce qui donne

$$\frac{a\left(b+\frac{1}{c}\right)+1}{b+\frac{1}{c}} \quad \text{ou} \quad \frac{a(bc+1)+c}{bc+1}, \quad \text{ou encore} \quad \frac{(ab+1)c+a}{bc+1}.$$

On voit que le numérateur de cette troisième réduite peut s'obtenir en multipliant le numérateur $ab+1$ de la réduite précédente par le quotient incomplet c qui répond à la réduite que l'on forme, et en ajoutant à ce produit le numérateur a de la réduite qui précède de deux rangs. De même le dénominateur de la troisième réduite peut s'obtenir en multipliant le dénominateur b de la réduite précédente par le quotient incomplet c qui répond à la réduite que l'on forme, et en ajoutant à ce produit le dénominateur 1 de la réduite qui précède de deux rangs.

Nous allons montrer que cette loi est générale. Pour cela, soient

$$\frac{P}{P'}, \quad \frac{Q}{Q'}, \quad \frac{R}{R'}, \quad \frac{S}{S'},$$

quatre réduites consécutives, r le quotient incomplet qui répond à $\frac{R}{R'}$, et s celui qui répond à $\frac{S}{S'}$. Admettons que la loi que nous voulons démontrer soit vraie pour les trois réduites $\frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}, \frac{R}{R'}$, et faisons voir qu'elle subsistera pour la réduite suivante $\frac{S}{S'}$.

Si la loi est vraie pour les trois réduites $\frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}, \frac{R}{R'}$, on a

$$\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}.$$

Pour former la réduite suivante, il suffit de remplacer r par $r+\frac{1}{s}$, ce qui donne

$$\frac{S}{S'}=\frac{Q\left(r+\frac{1}{s}\right)+P}{Q'\left(r+\frac{1}{s}\right)+P'}=\frac{Q(rs+1)+Ps}{Q'(rs+1)+P's}=\frac{(Qr+P)s+Q}{(Q'r+P')s+Q'}$$

ou $\frac{S}{S'}=\frac{Rs+Q}{R's+Q'}$.

Par conséquent, si la loi est vraie pour trois réduites consécutives, elle est encore vraie pour la réduite suivante. Or, nous l'avons vérifiée pour la troisième réduite, donc elle est vraie pour la quatrième; étant vraie pour la quatrième, elle est vraie pour la cinquième, et ainsi de suite; donc elle est générale. Ainsi, *pour former une réduite quelconque il faut multiplier chaque terme de la réduite précédente par le quotient incomplet qui répond à la réduite qu'on veut former, et ajouter au produit le terme correspondant de la réduite qui précède de deux rangs.*

Si l'on a, par exemple, la fraction

$$2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}},$$

on trouvera pour les réduites successives

$$\frac{2}{1},\quad \frac{9}{4},\quad \frac{29}{13},\quad \frac{154}{69},\quad \frac{337}{151},\quad \frac{491}{220},\quad \text{etc.}$$

REMARQUE I. D'après la loi de formation, les termes des réduites successives vont toujours en augmentant.

REMARQUE II. Si le nombre des fractions intégrantes est limité, la dernière réduite ne sera autre chose que la valeur de la fraction continue.

348. *La valeur de la fraction continue est comprise entre deux réduites consécutives quelconques.*

Soient $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$, trois réduites consécutives, et r le quotient incomplet qui répond à $\frac{R}{R'}$; nous aurons, en vertu de la loi de formation,

$$\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}.$$

Si dans cette expression on remplace r, quotient incomplet, par le quotient complet

$$r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{t+\text{etc.}}},$$

c'est-à-dire par r augmenté de tout ce qui le suit dans la fraction continue, on aura évidemment la valeur de cette fraction continue. En représentant donc ce quotient complet par y, et en appelant x la valeur de la fraction continue, on aura

$$x=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}.$$

Faisons la différence entre cette valeur et chacune des deux réduites consécutives $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$, nous aurons

$$x-\frac{P}{P'}=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}-\frac{P}{P'}=\frac{y(QP'-PQ')}{P'(Q'y+P')},$$

$$x-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{PQ'-QP'}{Q'(Q'y+P')}.$$

Or, ces différences sont de signes contraires, puisque y est positif ainsi que les dénominateurs, et que les quantités $QP'-PQ'$ et $PQ'-QP'$ sont égales et de signes contraires. Donc x est compris entre les deux réduites consécutives quelconques $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$.

349. *Chaque réduite approche plus de la valeur de la fraction continue que la réduite précédente.*

Car, si l'on considère les deux différences ci-dessus en valeur absolue seulement, on voit qu'elles ont le facteur commun

$$\frac{PQ'-QP'}{Q'y+P'}$$

multiplié par $\frac{y}{P'}$ dans la valeur de $x-\frac{P}{P'}$, et par $\frac{1}{Q'}$, dans la valeur de $x-\frac{Q}{Q'}$. Or, y est plus grand que 1, puisqu'il renferme le quotient incomplet r qui est au moins égal à 1 (**346**); et P' est moindre que Q', d'après la loi de formation (**347**). Par cette double raison $\frac{y}{P'}$ est plus grand que $\frac{1}{Q'}$; donc $x-\frac{P}{P'}$ est plus grand que $x-\frac{Q}{Q'}$, c'est-à-dire que x approche plus de $\frac{Q}{Q'}$ que de $\frac{P}{P'}$; ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Comme a est moindre que x, $a+\frac{1}{b}$ sera plus grand que x; la troisième réduite sera moindre que x; la quatrième sera plus grande que x, et ainsi de suite. Ainsi, *toutes les réduites de rang impair sont moindres que la valeur de la fraction continue; toutes les réduites de rang pair sont plus grandes que cette même valeur.*

D'ailleurs les réduites vont en s'approchant de la valeur de la fraction continue; donc, *les réduites de rang impair vont en augmentant, et les réduites de rang pair en diminuant.*

350. *Le numérateur de la différence entre deux réduites consécutives est égal à l'unité* (en valeur absolue).

Faisons voir d'abord que ce numérateur est constant.

En effet, on a

$$\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}=\frac{QP'-PQ'}{P'Q'}\,;\quad \frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{PQ'-QP'}{Q'R'}\,,$$

donc ce numérateur est le même, en valeur absolue.

Or, la différence entre les deux premières réduites a et $a+\frac{1}{b}$ est $\frac{1}{b}$, et a pour numérateur 1. Donc ce numérateur constant est égal à l'unité.

Remarque. *Les deux termes d'une réduite sont toujours premiers entre eux.* Car, puisqu'on a $PQ'-QP'=\pm 1$, si P et P', par exemple, avaient un diviseur commun, ce nombre, divisant le premier membre, devrait diviser le second, ce qui impossible.

351. *L'erreur commise en prenant une réduite pour la valeur de la fraction continue est moindre que l'unité divisée par le produit du dénominateur de cette réduite et du dénominateur de la réduite suivante.*

Si l'on prend, par exemple, $\frac{Q}{Q'}$ pour la valeur de la fraction continue, comme cette valeur est comprise entre $\frac{Q}{Q'}$ et $\frac{R}{R'}$, on commet une erreur moindre que la différence entre ces deux réduites. Or, cette différence est $\frac{1}{Q'R'}$; donc l'erreur commise est moindre que l'unité divisée par le produit du dénominateur Q' de la réduite à laquelle on s'arrête et du dénominateur R' de la réduite suivante.

Corollaire. Il suit de là qu'*en prenant une réduite suffisamment éloignée, on peut approcher d'aussi près qu'on le voudra de la valeur de la fraction continue.* Car le produit $Q'R'$ peut devenir aussi grand qu'on le voudra, puisque, d'après la loi de formation des réduites, les dénominateurs vont sans cesse en augmentant.

Cette propriété a fait donner aux réduites le nom de *fractions convergentes.*

Remarque I. Si le dénominateur R' de la réduite qui suit celle à laquelle on s'arrête n'est pas connu, on peut substituer une autre limite à celle que l'on vient d'indiquer. On a, en effet, $R'=Q'r+P'$. On ne connaît pas r ; mais sa plus petite valeur est 1 ; ainsi R' est au moins égal à $Q'+P'$. On peut donc dire, *a fortiori*, que *l'erreur commise* en s'arrêtant à la réduite $\frac{Q}{Q'}$ *est moindre que* $\frac{1}{Q'(Q'+P')}$; c'est-à-dire moindre que *l'unité divisée par le produit qu'on obtient en multipliant le dénominateur de la réduite à laquelle on s'arrête, par la somme de ce dénominateur et de celui de la réduite précédente.*

Remarque II. Si l'on ne voulait pas se servir du dénominateur de la réduite précédente, on pourrait supprimer P' au dénominateur de l'expression ci-dessus, ce qui la rendrait plus grande ; on peut donc dire que *l'erreur commise est,* a fortiori, *moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de la réduite à laquelle on s'arrête.*

Si, par exemple, on se reporte à la fraction continue

$$2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}}}$$

du nº **347**, et qu'on s'arrête à la réduite $\frac{29}{13}$, l'erreur commise sera moindre que $\frac{1}{13\times 69}$ ou que $\frac{1}{897}$. En adoptant la règle indiquée dans la remarque I, on aurait simplement pour limite $\frac{1}{13(13+4)}$ ou $\frac{1}{221}$; et, en adoptant la règle indiquée dans la remarque II on aurait seulement pour limite $\frac{1}{13^2}$ ou $\frac{1}{169}$.

352. *Une réduite quelconque approche plus de la valeur de la fraction continue que toute autre fraction dont les termes seraient aussi simples, ou plus simples.*

En d'autres termes : pour qu'une fraction $\frac{A}{B}$ approche plus de la valeur x de la fraction continue qu'une réduite $\frac{Q}{Q'}$, il faut que B soit plus grand que Q', et que A soit plus grand que Q.

En effet, si $\frac{A}{B}$ approche plus de x que $\frac{Q}{Q'}$, il en approchera à plus forte raison plus que la réduite précédente $\frac{P}{P'}$; et, comme x est compris entre ces deux réduites, il faudra que $\frac{A}{B}$ tombe elle-même entre ces deux réduites. Par conséquent on aura, en valeur absolue,

$$\frac{A}{B}-\frac{P}{P'}<\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'} \quad \text{ou} \quad \frac{AP'-BP}{BP'}<\frac{1}{P'Q'} \qquad (350).$$

Or $AP'-BP$ est un nombre entier, et ne saurait se réduire à zéro; car on aurait alors $\frac{A}{B}=\frac{P}{P'}$, et la fraction $\frac{P}{P'}$ ne serait pas plus approchée de x que $\frac{Q}{Q'}$ (349). Il faut donc que $AP'-BP$ soit au moins égal à 1 ; mais alors, pour que l'inégalité ci-dessus ait lieu, il faut que B soit plus grand que Q'.

En considérant les fractions $\frac{P'}{P}$, $\frac{B}{A}$ et $\frac{Q'}{Q}$, qui sont aussi rangées par ordre de grandeur, on démontrerait de même que A doit être plus grand que Q.

353. *Toute fraction continue* PÉRIODIQUE (c'est-à-dire dans laquelle un certain nombre de quotients incomplets se reproduisent périodiquement dans le même ordre) *est une des racines d'une équation du second degré à coefficients commensurables.*

Pour fixer les idées, considérons une fraction continue périodique *mixte,* c'est-à-dire dans laquelle un certain nombre de quotients incomplets, à partir du premier, ne se reproduisent pas. Par exemple :

$$x=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}}}}}$$

Représentons par y l'ensemble du quotient incomplet 1 et de tout ce qui le suit ; nous pourrons écrire

$$x=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{y}} \quad \text{et} \quad y=1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{y}}}.$$

En appliquant la loi de formation des réduites, on trouvera

$$x=\frac{7y+2}{3y+1} \quad \text{et} \quad y=\frac{25y+6}{21y+5} .$$

En éliminant y entre ces deux équations, on trouverait, pour déterminer x, une équation du second degré.

Mais il est plus simple d'opérer comme il suit :

La seconde équation revient à

$$21y-20y-6=0$$

et n'a qu'une valeur positive qui est $\frac{10+\sqrt{226}}{21}$; en la portant dans la valeur de x, on obtient

$$x=\frac{112+7\sqrt{226}}{51+3\sqrt{226}}=\frac{(112+7\sqrt{226})(51-3\sqrt{226})}{567}$$

$$=\frac{966+21\sqrt{226}}{567}=\frac{46+\sqrt{226}}{27} .$$

Généralement si, après une suite de quotients incomplets a, b, c, ... l, qui ne se reproduisent pas, il vient une série de quotients incomplets m, n, p, ... u qui se reproduisent périodiquement dans le même ordre, on pourra poser

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c \ddots +\cfrac{1}{l+\cfrac{1}{y}}}} \qquad \text{et} \qquad y=m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p \ddots +\cfrac{1}{u+\cfrac{1}{y}}}} .$$

Appliquons la loi de formation des réduites; soient $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$ les deux avant-dernières réduites de la valeur de x ; la dernière, qui ne sera autre que x (**347**, Remarque II), aura pour valeur :

$$x=\frac{Qy+P}{Q'y+P'} .$$

Soient $\frac{R}{R'}$ et $\frac{S}{S'}$ les deux avant-dernières réduites de la valeur de y ; la dernière, qui ne sera autre que y, aura pour valeur :

$$y=\frac{Ry+S}{R'y+S'} .$$

En éliminant y entre ces deux équations on aurait pour déterminer x une équation du second degré.

Mais on peut mettre d'abord la seconde équation sous la forme.

$$R'y^2 + (S' - R)y - S = 0 .$$

Cette équation, dont le dernier terme est négatif, n'aura qu'une racine positive (**216**); si on nomme β cette racine, on aura

$$x = \frac{Q\beta + P}{Q'\beta + P'} .$$

Ce que nous venons de dire comprend le cas où la fraction continue serait périodique *simple*, c'est-à-dire où tous les quotients incomplets, à partir du premier, se reproduiraient; car ce cas est précisément celui de la valeur de y écrite ci-dessus.

§ II. Applications.

354. Quand on a une fraction dont les termes sont considérables, on peut souvent lui substituer avec avantage une fraction approchée dont les termes soient plus simples, et n'aient, par exemple, pas plus de 1 ou 2 chiffres. Il faut alors, parmi les fractions de cette espèce, choisir celle qui approche le plus de la fraction proposée. Pour cela on réduit celle-ci en une fraction continue; on choisit, parmi les réduites qui remplissent la condition demandée, celle qui est du rang le plus élevé; et, en vertu des principes établis aux n^{os} **349** et **352** on a la fraction demandée.

Soit, par exemple, la fraction $\frac{4573}{2195}$, qu'on se propose de remplacer par une fraction approchée qui n'ait pas plus de deux chiffres à son dénominateur. On commencera par réduire la fraction proposée en fraction continue.

Pour cela, on divisera le numérateur 4573 par le dénominateur 2195; le quotient 2 sera le premier quotient incomplet; et l'on aura

$$\frac{4573}{2195} = 2 + \frac{183}{2195} = 2 + \frac{1}{\left(\frac{2195}{183}\right)} .$$

On divisera 2195 par le reste 183 de la division précédente; le quotient 11 sera le second quotient incomplet; et l'on aura

$$\frac{2195}{183} = 11 + \frac{182}{183} = 11 + \frac{1}{\left(\frac{183}{182}\right)} .$$

On divisera 183 par 182 ; le quotient 1 sera le troisième quotient incomplet ; et l'on aura

$$\frac{183}{182}=1+\frac{1}{182}\,.$$

En rapprochant les égalités précédentes, on en déduit facilement

$$\frac{4573}{2192}=2+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{182}}}\,.$$

On voit que, *pour réduire une fraction ordinaire en fraction continue, il faut appliquer à ses deux termes le procédé du plus grand commun diviseur ; les quotients successifs sont les quotients incomplets que l'on cherche.*

Ce procédé est même l'origine de la dénomination de quotients incomplets.

Si l'on forme les réduites successives, on obtient

$$\frac{2}{1}\,,\quad \frac{23}{11}\,,\quad \frac{25}{12}\,,\quad \frac{4573}{2195}\,.$$

La fraction $\frac{25}{12}$ est donc celle qui remplit les conditions demandées. Elle approche de la proposée à moins de $\frac{1}{12\times 2195}$ ou $\frac{1}{25340}$.

355. Une fraction décimale pouvant toujours être mise sous forme de fraction ordinaire, on peut lui appliquer le même procédé.

Si la fraction décimale n'était qu'approchée par défaut, il faudrait augmenter d'une unité son dernier chiffre décimal, et développer comme il vient d'être dit, la fraction proposée et la fraction modifiée. La véritable valeur de cette fraction étant comprise entre les deux développements, les quotients incomplets communs appartiendraient au développement de cette véritable valeur.

Si, par exemple, on développe ainsi les fractions

$$3{,}1415926 \quad \text{et} \quad 3{,}1415927$$

qui sont des valeurs approchées du rapport π de la circonférence au diamètre, on trouve que la série des quotients

$$3\;,\quad 7\;,\quad 15 \quad \text{et} \quad 1$$

est commune aux deux développements. On peut donc prendre ces quotients comme faisant partie du développement du nombre π.

On obtient ainsi les quatre réduites

$$\frac{3}{1}, \quad \frac{22}{7}, \quad \frac{333}{106}, \quad \frac{355}{113},$$

parmi lesquelles on reconnaît le rapport $\frac{22}{7}$ donné par *Archimède*, et le rapport $\frac{355}{113}$ attribué à *Adrien Métius*.

356. On peut développer sous forme de fractions continues les quantités irrationnelles, ce qui fournit un moyen d'approcher de leur véritable valeur.

Soit, par exemple, à développer $\sqrt{11}$ en fraction continue. Cette racine étant comprise entre 3 et 4, on peut poser

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{x},$$

en désignant par x une quantité plus grande que 1. On tire de là

$$x = \frac{1}{\sqrt{11} - 3} = \frac{\sqrt{11} + 3}{2} \quad (\mathbf{208}).$$

Cette valeur est comprise entre $\frac{6}{2}$ et $\frac{7}{2}$, par conséquent entre 3 et 4 ; on peut donc poser

$$x = \frac{\sqrt{11} + 3}{2} = 3 + \frac{1}{y},$$

en désignant par y une quantité plus grande que 1. On tire de là

$$y = \frac{2}{\sqrt{11} - 3} = \sqrt{11} + 3.$$

Cette valeur est comprise entre 6 et 7 ; on peut donc poser

$$y = \sqrt{11} + 3 = 6 + \frac{1}{z},$$

en désignant par z une quantité plus grande que 1. On tire de cette équation

$$z = \frac{1}{\sqrt{11} - 3}.$$

Par conséquent, z est égal à x ; ce qui indique qu'à partir de la seconde égalité les calculs se reproduiront indéfiniment dans le même ordre, et que la valeur de $\sqrt{11}$ est une fraction continue périodique. En rapprochant les égalités qui précèdent, on trouve

$$\sqrt{11}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\text{etc.}}}}}$$

On obtient ensuite les réduites successives :

$$\frac{3}{1},\quad \frac{10}{3},\quad \frac{63}{19},\quad \frac{199}{60},\quad \frac{1257}{379},\quad \text{etc.}$$

La seconde est approchée à moins de $\dfrac{1}{19\times 3}$ ou $\dfrac{1}{57}$,

la troisième $\dfrac{1}{19\times 60}$ ou $\dfrac{1}{1140}$,

la quatrième $\dfrac{1}{60\times 379}$ ou $\dfrac{1}{22740}$, etc.

357. Le développement en fraction continue peut servir à résoudre les équations exponentielles.

Soit, par exemple, à résoudre l'équation

$$10^x=200 \qquad [1].$$

Si l'on donne à x les valeurs 1, 2, 3, on obtient pour 10^x les valeurs 10, 100, 1000. Le nombre 200 étant compris entre ces deux derniers nombres, il s'ensuit que l'exposant x est compris entre 2 et 3 ; et que par conséquent on peut poser

$$x=2+\frac{1}{y} \qquad [2],$$

en désignant par y une quantité plus grande que l'unité. Mettant pour x cette valeur dans l'équation [1], on obtient

$$10^{2+\frac{1}{y}}=200\,,\quad \text{ou}\quad 10^2.10^{\frac{1}{y}}=200\,,\quad \text{ou}\quad 10^{\frac{1}{y}}=\frac{200}{100}=2\,,$$

et, en élevant les deux membres à la puissance y,

$$10=2^y \qquad [3].$$

Donnons à y les valeurs 1, 2, 3, 4 ; nous trouverons pour 2^y les valeurs 2, 4, 8, 16. Le nombre 10 étant compris entre ces deux derniers nombres, il en résulte que y est compris entre 3 et 4, et que l'on peut poser en conséquence

$$y=3+\frac{1}{z} \qquad [4],$$

en désignant par z une quantité plus grande que l'unité. Mettons cette valeur à la place de y dans l'équation [3], elle deviendra

$$10 = 2^{3+\frac{1}{z}} = 2^3 . 2^{\frac{1}{z}} = 8 . 2^{\frac{1}{z}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{10}{8} = 2^{\frac{1}{z}},$$

ou, en élevant les deux membres à la puissance z,

$$\left(\frac{10}{8}\right)^z = 2 \qquad [5].$$

Donnons à z les valeurs 1, 2, 3, 4; nous trouverons pour $\left(\frac{10}{8}\right)^z$ les valeurs correspondantes $\frac{10}{8}$, $\frac{100}{64}$, $\frac{1000}{512}$, $\frac{10000}{4096}$. Le nombre 2 étant compris entre ces deux derniers nombres, on en conclut que z est compris entre 3 et 4; et l'on peut par conséquent poser

$$z = 3 + \frac{1}{t} \qquad [6],$$

en désignant par t une quantité plus grande que l'unité. Cette valeur, mise pour z dans l'équation [5], donne

$$\left(\frac{10}{8}\right)^{3+\frac{1}{t}} = 2, \text{ ou } \left(\frac{10}{8}\right)^3 . \left(\frac{10}{8}\right)^{\frac{1}{t}} = 2, \text{ d'où } \left(\frac{10}{8}\right)^{\frac{1}{t}} = 2 . \left(\frac{8}{10}\right)^3 = \frac{1024}{1000}$$

et, en élevant les deux membres à la puissance t,

$$\frac{10}{8} = \left(\frac{1024}{1000}\right)^t \qquad [7].$$

En donnant à t les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10, on trouve, par un calcul assez laborieux, que $\frac{10}{8}$ est compris entre les résultats correspondants à ces deux derniers nombres; en sorte que t est compris entre 9 et 10, et que l'on peut poser

$$t = 9 + \frac{1}{u} \qquad [8],$$

en désignant par u une quantité plus grande que l'unité.

Si l'on rapproche les relations [2], [4], [6], [8], on verra que la valeur de x se développe sous la forme

$$x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{u}}}},$$

c'est-à-dire sous forme d'une fraction continue, que l'on pourra pousser aussi loin qu'on le voudra. Le seul obstacle sera la longueur des calculs, qui croît à mesure qu'on avance, et rend cette méthode impraticable lorsqu'on veut obtenir une grande approximation.

Les quatre premières réduites de la valeur que nous venons d'obtenir sont

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{23}{10}, \quad \frac{214}{93};$$

cette dernière est approchée à moins de

$$\frac{1}{93(93+10)} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{9579}.$$

358. Enfin le développement en fraction continue peut servir à trouver un premier système de valeurs propres à satisfaire à une équation du premier degré à deux indéterminées.

Soit l'équation à deux indéterminées

$$ax + by = c.$$

On développe le rapport $\frac{a}{b}$ en fraction continue (**354**). La dernière réduite sera $\frac{a}{b}$; désignons par $\frac{R}{R'}$ l'avant-dernière. En vertu du principe démontré au nº **350**, si $\frac{a}{b}$ est de rang pair, on aura

$$aR' - bR = 1,$$

d'où, en multipliant par c,

$$aR'c - bRc = c.$$

On voit donc qu'on satisfera, dans ce cas, à la proposée, en posant

$$x = R'c \quad \text{et} \quad y = -Rc.$$

Si $\frac{a}{b}$ est de rang impair, on aura

$$aR' - bR = -1.$$

Multipliant alors par $-c$, on obtiendra

$$-aR'c + bRc = c;$$

et l'on voit qu'on satisfera dans ce cas à l'équation proposée en posant

$$x = -R'c \quad \text{et} \quad y = Rc.$$

Prenons pour exemple l'équation

$$8x + 13y = 159$$

déjà traitée au n° **148**. Développons en fraction continue le rapport $\frac{8}{13}$; nous trouverons pour les quotients incomplets successifs

$$0\,,\quad 1\,,\quad 1\,,\quad 1\,,\quad 1\,,\quad 1\,,\quad 1\;;$$

en sorte que les réduites successives seront

$$\frac{0}{1}\,,\quad \frac{1}{1}\,,\quad \frac{1}{2}\,,\quad \frac{2}{3}\,,\quad \frac{3}{5}\,,\quad \frac{5}{8}\,,\quad \frac{8}{13}\,.$$

Le numérateur de la différence entre les deux dernières est

$$8\,.\,8 - 13\,.\,5 = -1\,.$$

Multipliant donc par -159, il vient

$$-8\,.\,8\,.\,159 + 13\,.\,5\,.\,159 = 159\,,$$

d'où

$$x = -8\,.\,159 = -1272\,,$$
$$y = +5\,.\,159 = +\ 795\,.$$

On obtiendrait, en effet, ces valeurs en faisant $t''' = -99$ dans les valeurs générales trouvées au numéro cité.

Remarque. Cette méthode a l'inconvénient de donner pour x et y un système de valeurs qui ne sont pas, en général, assez simples.

CHAPITRE XIV.

DES APPROXIMATIONS.

359. On est souvent obligé d'introduire dans le calcul des quantités qui ne peuvent être obtenues qu'avec un certain degré d'approximation; tels sont les quotients décimaux périodiques, telles sont les racines des nombres qui ne sont pas des puissances parfaites, tel est encore le rapport π de la circonférence au diamètre qui figure dans une foule d'applications géométriques, etc. Les données du calcul n'étant alors qu'approchées, le résultat final de ce calcul ne peut lui-même être obtenu exactement. On peut, en conséquence, se proposer deux questions : 1° Connaissant la limite de l'erreur commise sur les données, déterminer le degré d'approximation avec lequel le résultat pourra être obtenu ; 2° réciproquement, déterminer le degré d'approximation avec lequel les données du calcul devront être prises pour que l'erreur commise sur le résultat soit moindre qu'une quantité assignée à l'avance.

Quoique ces deux questions semblent être du ressort de l'Arithmétique, leur solution ne peut être donnée d'une manière satisfaisante sans le secours de l'Algèbre; c'est pourquoi nous avons cru devoir en faire l'objet de ce chapitre.

L'erreur commise sur une quantité peut être appréciée de deux manières, ou en elle-même et d'une manière absolue, comme lorsqu'on dit qu'une quantité est approchée à moins d'un 10e d'unité, d'un 30e d'unité, d'un 100e d'unité, etc.; ou, par rapport à la valeur exacte de la quantité dont il s'agit, comme lorsqu'on dit qu'une quantité est approchée à moins d'un 10e de sa valeur, d'un 30e de sa valeur, d'un 100e de sa valeur.

Dans le premier cas l'erreur est *absolue,* et à cette espèce d'erreur correspond un certain degré d'*approximation absolue*. Dans le second cas l'erreur est *relative*, et à cette seconde espèce d'erreur répond aussi un certain degré d'*approximation relative.* Nous consacrerons un paragraphe à chacune de ces deux espèces d'approximation.

§ I. Des approximations absolues.

360. Nous supposerons d'abord qu'une seule des données soit approchée. Nous la désignerons par A; nous la supposerons comprise entre a et $a+\delta$; en sorte que l'une quelconque de ces deux quantités sera une valeur de A approchée à moins de δ.

Addition. Soit à ajouter à A une quantité exacte B. On a

$$a<A<a+\delta,$$

donc

$$a+B<A+B<a+\delta+B.$$

Or, les quantités extrêmes diffèrent entre elles de δ; l'erreur commise en prenant l'une d'elles pour la valeur de $A+B$, est donc moindre que δ, c'est-à-dire que *le degré d'approximation de la somme est le même que celui de* A.

Soustraction. I. Soit à soustraire B de A, on aura

$$a-B<A-B<a+\delta-B.$$

Les quantités extrêmes diffèrent encore de δ; donc l'erreur commise en prenant l'une d'elles pour la valeur de $A-B$, est moindre que δ, c'est-à-dire que *le degré d'approximation de la différence est le même que celui de* A *, et a le même sens.*

II. Soit à soustraire A de B, on aura

$$B-a>B-A>B-a-\delta.$$

Les quantités extrêmes diffèrent toujours de δ; ainsi l'erreur commise en prenant l'une d'elles pour la valeur de $B-A$, est moindre que δ; mais si l'on prend A par défaut, l'erreur sera par excès; et si l'on prend A par excès, l'erreur sera par défaut. Donc *le degré d'approximation de la différence est encore le même que celui de* A; *mais l'approximation est de sens contraire.*

361. Multiplication. I. Soit à multiplier A par B, on aura

$$aB<AB<(a+\delta)B \quad \text{ou} \quad aB+\delta B.$$

Les quantités extrêmes diffèrent de δB; l'erreur commise en prenant l'une d'elles pour la valeur de AB est donc moindre que δB, c'est-à-dire que *l'erreur commise sur le produit est moindre que la limite de l'erreur commise sur le facteur approché* A *, multipliée par le facteur exact* B.

Si, par exemple, A est approché à moins de $\frac{1}{30}$, et que B soit égal à 5, l'erreur commise sera moindre que $\frac{5}{30}$ ou $\frac{1}{6}$.

Si A est approché à moins de $0,01$, et que B soit égal à $31,5$; l'erreur commise sera moindre que $0,01 \times 31,5$ ou que $0,315$.

Si A est approché à moins de $0,001$, et que B soit égal à 31500, l'erreur commise sera moindre que $0,001 \times 31500$, c'est-à-dire moindre que $31,5$.

II. On peut demander avec quel degré d'approximation A doit être pris pour que le produit soit approché à moins d'une quantité donnée ε.

On vient de voir que l'erreur commise sur le produit est moindre que δB ; posons

$$\delta B < \varepsilon ,$$

et nous satisferons *a fortiori* à la condition proposée.

On tire de là
$$\delta < \frac{\varepsilon}{B} ,$$

c'est-à-dire que *la limite de l'erreur commise sur le facteur* A *doit être moindre que la limite de l'erreur qu'on veut commettre sur le produit, divisée par le facteur exact* B.

Si, par exemple, on veut obtenir le produit à moins de $0,001$, et que B soit égal à $39,5$, on devra avoir

$$\delta < \frac{0,001}{39,5} \quad \text{ou} \quad \delta < \frac{1}{39500} ,$$

c'est-à-dire que le facteur A devra être approché à moins d'un 39500^e. En calculant A à moins d'*un cent-millième* on remplirait *a fortiori* la condition.

Si l'on avait $B = 0,395$ on devrait avoir

$$\delta < \frac{0,001}{0,395} \quad \text{ou} \quad \delta < \frac{1}{395} ,$$

c'est-à-dire que le facteur A devrait être approché à moins d'un 395^e. En le calculant à moins d'*un millième* on remplirait *a fortiori* la condition.

Si l'on avait $B = 0,00395$, on devrait avoir

$$\delta < \frac{0,001}{0,00395} \quad \text{ou} \quad \delta < \frac{1}{3,95} ,$$

ou si l'on veut $\delta < \frac{1}{4}$. En calculant A à moins d'*un dixième* on remplirait *a fortiori* la condition.

362. Division. I. Soit à diviser A par B, on aura

$$\frac{a}{B} < \frac{A}{B} < \frac{a+\delta}{B} .$$

Les quantités extrêmes diffèrent de $\frac{\delta}{B}$; ainsi l'erreur commise en prenant l'une d'elles pour la valeur de $\frac{A}{B}$ est moindre que $\frac{\delta}{B}$, c'est-à-dire que *l'erreur commise sur le quotient est moindre que la limite de l'erreur commise sur le dividende* A, *divisée par le diviseur* B.

Si, par exemple, A est approché à moins de $\frac{1}{30}$ et que B soit égal à $43,7$, l'erreur commise sera moindre que

$$\frac{1}{30 \times 43,7} \quad \text{ou que} \quad \frac{1}{1311}.$$

Si A est approché à moins de $0,001$ et que B soit égal à $8,75$, l'erreur commise sera moindre que

$$\frac{0,001}{8,75} \quad \text{ou que} \quad \frac{1}{8750}.$$

Si A est approché à moins de $0,1$ et que B soit égal à $0,085$ l'erreur commise sera moindre que

$$\frac{0,1}{0,085}, \quad \text{ou que} \quad \frac{1000}{85}, \quad \text{ou que} \quad 11,76....$$

II. On peut demander avec quel degré d'approximation A doit être pris pour que le quotient soit approché à moins d'une quantité donnée ε.

On vient de voir que l'erreur commise sur le quotient est $\frac{\delta}{B}$; posons

$$\frac{\delta}{B} < \varepsilon,$$

et nous satisferons *a fortiori* à la condition proposée.

On tire de là $\delta < \varepsilon . B$;

c'est-à-dire que *la limite de l'erreur commise sur le dividende* A *doit être moindre que la limite de l'erreur qu'on veut commettre sur le quotient, multipliée par le diviseur* B.

Si, par exemple, on veut obtenir le quotient à moins de $\frac{1}{3000}$ et que B soit égal à 24, il faudra qu'on ait

$$\delta < \frac{24}{3000} \quad \text{ou} \quad \delta < \frac{1}{125},$$

c'est-à-dire que le dividende A devra être approché à moins de $\frac{1}{125}$.

Si l'on veut obtenir le quotient à moins de $0,0001$ et que B soit égal à $37,5$ on devra avoir $\delta < 0,0001 \times 37,5$ ou $\delta < 0,00375$. En calculant A à moins de $0,001$, on remplirait *a fortiori* la condition proposée.

Si l'on veut obtenir le quotient à moins de $0,01$ et que B soit égal à 3759, on devra avoir

$$\delta < 0,01 \times 3759 \quad \text{ou} \quad \delta < 37,59 .$$

En calculant A à moins d'une dizaine, on remplirait *a fortiori* la condition.

III. Soit maintenant à diviser B par A ; on aura

$$\frac{B}{a} > \frac{B}{A} > \frac{B}{a+\delta} .$$

Les quantités extrêmes diffèrent de

$$\frac{B}{a+\delta} - \frac{B}{a} \quad \text{ou de} \quad \frac{B\delta}{a(a+\delta)} .$$

En appelant e l'erreur commise en prenant une de ces quantités extrêmes pour la valeur de $\frac{B}{A}$, on aura donc

$$e < \frac{B\delta}{a(a+\delta)}, \quad \text{et } a \textit{ fortiori}, \quad e < \frac{B\delta}{a^2} \quad \text{ou} \quad \delta . \frac{B}{a^2} ,$$

c'est-à-dire que *l'erreur commise sur le quotient est moindre que la limite de l'erreur commise sur le dividende* A, *multipliée par le quotient qu'on obtient en divisant le dividende* B *par le carré de la valeur de* A *approchée par défaut.*

Si, par exemple, la valeur appprochée de A à moins de $\frac{1}{25}$ est $\frac{31}{25}$, par défaut, et qu'on ait $B = 16,33$, on aura

$$e < \frac{1}{25} . \frac{16,33}{\left(\frac{31}{25}\right)^2}, \quad \text{ou} \quad e < \frac{16,33 \times 25}{(31)^2}, \quad \text{ou} \quad e < \frac{408,25}{961},$$

ou à peu près et *a fortiori* $e < \frac{1}{2}$.

Si la valeur approchée de A, à moins de $0,01$ est $8,75$, et qu'on ait $B = 0,38$, on aura

$$e < \frac{1}{100} . \frac{0,33}{(8,75)^2} \quad \text{ou} \quad e < \frac{3300}{765625} \quad \text{ou} \quad e < \frac{1}{232,00} .$$

Si la valeur de A approchée à moins de 0,001 est 1,462 et qu'on ait $B = 0,045$, on aura

$$e < \frac{1}{1000} \cdot \frac{0,045}{(1,462)^2} \quad \text{ou} \quad e < \frac{45000}{2137444} \quad \text{ou} \quad e < \frac{1}{47,49},$$

ou, *a fortiori*,
$$e < \frac{1}{47}.$$

IV. On peut demander avec quel degré d'approximation doit être pris le diviseur A, pour que le quotient soit approché à moins d'une quantité donnée ε.

On vient de voir que l'erreur commise sur le quotient est moindre que $\dfrac{B\delta}{a^2}$; posons

$$\frac{B\delta}{a^2} < \varepsilon,$$

et nous satisferons *a fortiori* à la condition proposée.

On tire de là
$$\delta < \varepsilon \cdot \frac{a^2}{B} \qquad [1],$$

c'est-à-dire que *la limite de l'erreur commise sur le diviseur* A *doit être moindre que la limite de l'erreur qu'on veut commettre sur le quotient, multipliée par le quotient qu'on obtient en divisant le carré de la valeur du diviseur* A (*approchée* en moins) *par le dividende* B.

Il faut remarquer que cette valeur approchée du diviseur dépend du degré d'approximation que l'on cherche, et n'est par conséquent pas connue; mais, comme la condition ci-dessus [1] sera remplie *a fortiori* si on y satisfait après avoir remplacé a par une quantité moindre, on pourra mettre pour a dans cette formule une valeur de A approchée par défaut à un degré d'approximation quelconque.

Si, par exemple, on a $B = 21,55$; $A = 8,317317\ldots$ et qu'on veuille obtenir le quotient à moins de 0,0001 on pourra prendre 8 à la place de a, et écrire

$$\delta < \frac{1}{10000} \times \frac{64}{21,55}, \quad \text{d'où} \quad \delta < \frac{1}{3367,1..}.$$

En prenant A à moins d'un *dix-millième,* c'est-à-dire 8,3173, on remplirait *a fortiori* la condition proposée.

Si l'on a $B = 560$; $A = 1,6545454\ldots$; et qu'on veuille obtenir le quotient à moins de 0,001 ; on pourra prendre 1,6 à la place de a, et écrire

$$\delta < \frac{1}{1000} \cdot \frac{(1,6)^2}{560}, \quad \text{d'où} \quad \delta < \frac{1}{218750}.$$

En prenant A à moins de $0,000001$, c'est-à-dire $1,654545$, on remplirait *a fortiori* la condition proposée.

Si l'on a $B = 0,25$ et $A = \sqrt{5}$, et qu'on veuille obtenir le quotient à moins de $0,01$, on pourra prendre 2 à la place de a, et écrire

$$\delta < \frac{1}{100} \cdot \frac{4}{0,25}, \quad \text{d'où} \quad \delta < \frac{4}{25} \quad \text{ou} \quad \delta < \frac{1}{6,25}.$$

En calculant $\sqrt{5}$ à moins d'un *dixième*, on remplirait *a fortiori* la condition.

363. Carré. I. Soit à former le carré de A; on aura

$$a^2 < A^2 < (a + \delta)^2 \quad \text{ou} \quad a^2 + 2a\delta + \delta^2.$$

La différence entre les quantités extrêmes est $2a\delta + \delta^2$; ainsi en appelant toujours e l'erreur commise quand on prend l'une de ces quantités extrêmes pour la valeur de A^2, on aura

$$e < 2a\delta + \delta^2 \quad \text{ou} \quad e < 2a\left(\delta + \frac{\delta^2}{2a}\right).$$

Le plus ordinairement le terme $\frac{\delta^2}{2a}$ sera négligeable vis-à-vis de δ, et l'on pourra prendre pour la limite de l'erreur commise

$$e = 2a\delta = \delta . 2a,$$

c'est-à-dire que *la limite de l'erreur commise sur le carré est égale à la limite de l'erreur commise sur la première puissance, multipliée par le double de la valeur de cette première puissance, approchée par défaut.*

Si, par exemple, la valeur de A, approchée à moins de $\frac{1}{30}$ est $\frac{23}{30}$, l'erreur commise en l'élevant au carré sera moindre que

$$\frac{1}{30} \times 2 . \frac{23}{30}, \quad \text{ou} \quad \frac{46}{900}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{19,56}$$

et, *a fortiori,* moindre que $\frac{1}{19}$.

Si la valeur de A, approchée à moins de $0,001$ est $5,341$: l'erreur commise en l'élevant au carré sera moindre que

$$0,001 \times 2 \times 5,341 \quad \text{ou que} \quad 0,010682,$$

ou, *a fortiori,* moindre que $0,011$.

II. On peut demander avec quel degré d'approximation il faut prendre A, pour qu'en l'élevant au carré l'erreur commise soit moindre qu'une quantité donnée ε.

On vient de voir que l'erreur commise en formant le carré est généralement moindre que $2a\delta$; posons

$$2a\delta < \varepsilon ,$$

nous satisferons *a fortiori* à la condition proposée.

On tire de là

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2a} \qquad [2],$$

c'est-à-dire que *la limite de l'erreur commise sur* A *doit être moindre que la limite de l'erreur qu'on veut commettre sur son carré, divisée par le double de la valeur approchée de* A *, par défaut.*

Ici encore la valeur approchée a dépend du degré d'approximation que l'on cherche et n'est, par conséquent, pas connue à l'avance; mais on peut mettre à la place de a une quantité plus petite; si l'on satisfait à l'inégalité dans ce cas, l'inégalité [2] sera satisfaite *a fortiori*. On peut donc remplacer a par une valeur la plus simple possible approchée par défaut.

Si, par exemple, A est égal à $7,364364364....$ on pourra remplacer a par 7 ; et si l'on veut que le carré soit approché à moins de $0,001$, on écrira

$$\delta < \frac{0,001}{14} \quad \text{ou} \quad \delta < \frac{1}{14000} .$$

En prenant A avec 5 décimales on remplira *a fortiori* cette condition.

Si A est égal à $329,7272....$, on pourra remplacer a par 329 ; et si l'on veut que le carré soit approché à moins de $0,0001$, on écrira :

$$\delta < \frac{0,0001}{329\times 2} \quad \text{ou} \quad \delta < \frac{1}{6580000} .$$

En prenant A avec 8 décimales on remplira *a fortiori* cette condition.

364. Racine carrée. I. Soit à extraire la racine carrée de A ; on aura

$$\sqrt{a} < \sqrt{A} < \sqrt{a+\delta} .$$

La différence entre les quantités extrêmes est $\sqrt{a+\delta}-\sqrt{a}$; en appelant e l'erreur commise en prenant une de ces quantités extrêmes pour la valeur de $\sqrt{A}$, on aura donc

$$e < \sqrt{a+\delta}-\sqrt{a} .$$

Multiplions et divisons à la fois le second membre par $\sqrt{a+\delta}+\sqrt{a}$; il viendra

$$e<\frac{(\sqrt{a+\delta}-\sqrt{a})(\sqrt{a+\delta}+\sqrt{a})}{\sqrt{a+\delta}+\sqrt{a}} \quad \text{ou} \quad e<\frac{\delta}{\sqrt{a+\delta}+\sqrt{a}}$$

et, *a fortiori*,
$$e<\frac{\delta}{2\sqrt{a}},$$

c'est-à-dire que *l'erreur commise sur la racine carrée sera moindre que la limite de l'erreur commise sur le nombre proposé, divisée par deux fois la racine carrée de la valeur approchée de ce nombre.*

Si, par exemple, la valeur approchée de A, à moins de $\frac{1}{30}$ est $\frac{23}{30}$, on aura

$$e<\frac{\left(\frac{1}{30}\right)}{2\sqrt{\frac{23}{30}}},$$

ou, en mettant pour la racine qui entre au dénominateur sa valeur approchée par défaut, ce qui est permis puisque cette substitution tend à augmenter le second membre,

$$e<\frac{\left(\frac{1}{30}\right)}{2.\frac{26}{30}} \quad \text{ou} \quad e<\frac{1}{52}.$$

Si la valeur approchée de A, à moins de 0,001, est 11,522, on aura

$$e<\frac{0{,}001}{2\sqrt{11{,}522}},$$

ou, en mettant pour le radical du dénominateur sa valeur approchée par défaut 3,39...,

$$e<\frac{0{,}001}{6{,}78} \quad \text{ou} \quad e<\frac{1}{6780}.$$

II. On peut demander avec quel degré d'approximation il faut prendre A pour que la racine carrée soit approchée à moins d'une quantité donnée ε.

On vient de voir que la limite de l'erreur commise sur la racine est moindre que $\frac{\delta}{2\sqrt{a}}$; posons donc

$$\frac{\delta}{2\sqrt{a}} < \varepsilon ,$$

nous satisferons *a fortiori* à la condition proposée.

On tire de là $$\delta < \varepsilon \,.\, 2\sqrt{a} \qquad [3],$$

c'est-à-dire que *la limite de l'erreur commise sur* A *doit être moindre que la limite de l'erreur qu'on veut commettre sur sa racine, multipliée par deux fois la racine carrée de la valeur approchée de* A *, par défaut.*

Ici encore, cette valeur approchée de A n'est pas connue, puisqu'elle dépend du degré d'approximation que l'on cherche; mais on peut la remplacer par une quantité moindre; si l'on satisfait à l'inégalité dans ce cas, l'inégalité [3] sera satisfaite *a fortiori*.

Si, par exemple, on a $A = 318{,}272727...$; et qu'on veuille obtenir sa racine à moins de $0{,}001$, on pourra remplacer a par 318 , et $\sqrt{a}$ par sa valeur approchée par défaut 17 . On devra donc avoir

$$\delta < 0{,}001 \times 34 \quad \text{ou} \quad \delta < 0{,}034 .$$

En prenant A avec deux décimales, on satisfera *a fortiori* à la condition.

Si l'on a $A = 0{,}04712712....$; et qu'on veuille obtenir la racine à moins de $0{,}01$; on pourra remplacer a par $0{,}04$; et $\sqrt{a}$ par $0{,}2$; on devra avoir alors

$$\delta < 0{,}01 \times 2 \times 0{,}2 \quad \text{ou} \quad \delta < 0{,}004 .$$

En prenant A avec trois décimales, on satisfera *a fortiori* à la condition.

III. Remarque. *Lorsqu'une quantité est plus grande que* 1 *, il suffit, pour obtenir sa racine carrée avec* n *chiffres décimaux exacts, de connaître cette quantité elle-même avec* n *chiffres décimaux exacts.*

En effet, on a alors $\varepsilon = \frac{1}{10^n}$; et $A > 1$; on peut donc remplacer a par 1 dans l'inégalité [3], et écrire

$$\delta < \frac{2}{10^n} .$$

Si donc la quantité A est donnée avec n chiffres décimaux exacts, c'est-à-dire si δ est moindre qu'une unité du $n^{\text{ième}}$ ordre décimal, la condition sera remplie *a fortiori*.

Plus généralement, si α est l'exposant (positif ou négatif) de la plus haute puissance de 100 contenue dans A, on aura

$$a > 100^\alpha ;$$

on posera
$$\delta < \frac{1}{10^{n-\alpha}},$$

et, en satisfaisant à cette inégalité, on satisfera *a fortiori* à la condition [3]. Car on aura $\frac{1}{10^{n-\alpha}} = \frac{10^\alpha}{10^n} < \frac{2 \,.\, \sqrt{100^\alpha}}{10^n} < \frac{2\sqrt{a}}{10^n}$.

C'est-à-dire qu'*il suffira de prendre* A *avec un nombre de décimales marqué par le nombre* n *de décimales qu'on veut obtenir à la racine, diminué de l'exposant* α *de la plus haute puissance de* 100 *contenue dans* A.

Si, par exemple, $A = 356{,}709\ldots.$, on aura $\alpha = 1$, et il faudra prendre A avec $n-1$ décimales ; si $A = 51678{,}023\ldots.$, on aura $\alpha = 2$, et il faudra prendre $n-2$ décimales ; si au contraire $A = 0{,}0317\ldots.$, on aura $\alpha = -1$, et il faudra prendre $n+1$ décimales ; et ainsi de suite.

Lorsqu'un nombre entier a $2n+1$ *chiffres, on peut, sans connaître les* n *premiers chiffres à droite, obtenir sa racine carrée à moins d'une unité.*

En effet, on a alors $\varepsilon = 1$ et $A > 10^{2n}$; on peut donc remplacer a par 10^{2n}, et par conséquent $\sqrt{a}$ par 10^n ; et écrire

$$\delta < 2 \,.\, 10^n .$$

Or, si l'on retranche les n premiers chiffres à droite du nombre, ou, ce qui revient au même, si, ne les connaissant pas, on les remplace par des zéros, on commet une erreur moindre que 10^n ; donc on peut obtenir la racine à moins d'une unité.

365. CUBE. I. Soit à former le cube de A ; on aura

$$a^3 < A^3 < (a+\delta)^3 \quad \text{ou} \quad a^3 + 3a^2\delta + 3a\delta^2 + \delta^3 .$$

La différence entre les quantités extrêmes est $3a^2\delta + 3a\delta^2 + \delta^3$; en nommant toujours e l'erreur commise en prenant une de ces quantités extrêmes pour la valeur de A^3, on aura donc

$$e < 3a^2\delta + 3a\delta^2 + \delta^3 \quad \text{ou} \quad e < 3a^2\left(\delta + \frac{\delta^2}{a} + \frac{\delta^3}{3a^2}\right).$$

Le plus ordinairement, l'ensemble des deux derniers termes écrits dans la parenthèse sera négligeable devant le premier ; on pourra donc prendre pour limite de l'erreur commise

$$e = \delta \,.\, 3a^2 ,$$

c'est-à-dire que *la limite de l'erreur commise sur le cube est égale à la limite de l'erreur commise sur la première puissance, multipliée par le triple carré de la valeur de cette première puissance, approchée par défaut.*

Si, par exemple, la valeur approchée de A à moins de $0,01$ est $3,14$, l'erreur commise en l'élevant au cube sera moindre que

$$0,01 \times 3 \times (3,14)^2 \quad \text{ou} \quad 0,295788,$$

ou, *a fortiori*, moindre que $0,3$.

Si la valeur approchée de A, à moins de $0,001$ est $0,612$, l'erreur commise en l'élevant au cube sera moindre que

$$0,001 \times (0,612)^2 \times 3 \quad \text{ou} \quad 0,001123632,$$

ou, *a fortiori*, moindre que $0,002$.

II. On peut demander avec quel degré d'approximation la quantité A doit être prise pour qu'en l'élevant au cube, on commette une erreur moindre qu'une quantité donnée ε.

L'erreur commise sur le cube différant peu de $\delta . 3a^2$, posons

$$\delta . 3a^2 < \varepsilon,$$

nous satisferons à la condition indiquée.

On tire de là $$\delta < \frac{\varepsilon}{3a^2},$$

c'est-à-dire que *la limite de l'erreur commise sur la première puissance doit être moindre que la limite de l'erreur qu'on veut commettre sur le cube, divisée par le triple carré de la valeur approchée de la première puissance.*

Cette valeur approchée a n'est pas connue, puisqu'elle dépend du degré d'approximation cherché; mais on peut la remplacer par une quantité moindre, puisqu'on ne fait ainsi qu'augmenter le second membre; on pourra donc mettre pour a une valeur la plus simple possible approchée par défaut.

Si, par exemple, on a $A = 6,1275275 \ldots$, et qu'on veuille obtenir son carré à moins de $0,001$, on pourra remplacer a par 6, et écrire

$$\delta < \frac{0,001}{3 \times 36} \quad \text{ou} \quad \delta < \frac{1}{108000}.$$

En prenant A avec 6 décimales, on remplirait *a fortiori* la condition, et il est probable qu'on la remplirait encore avec 5 décimales.

366. Racine cubique. I. Soit enfin à extraire la racine cubique de A, on aura

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{a+\delta},$$

En nommant e l'erreur commise en prenant une des quantités extrêmes pour la valeur de $\sqrt[3]{A}$, on aura donc

$$e < \sqrt[3]{a+\delta} - \sqrt[3]{a}\ .$$

Multiplions et divisons à la fois le second membre par la quantité

$$\sqrt[3]{(a+\delta)^2} + \sqrt[3]{a(a+\delta)} + \sqrt[3]{a^2}\ .$$

Le numérateur se réduira à la différence des cubes des radicaux $\sqrt[3]{a+\delta}$ et $\sqrt[3]{a}$, c'est-à-dire à δ ; et l'on aura

$$e < \frac{\delta}{\sqrt[3]{(a+\delta)^2} + \sqrt[3]{a(a+\delta)} + \sqrt[3]{a^2}},$$

et *a fortiori*
$$e < \frac{\delta}{3\sqrt[3]{a^2}},$$

c'est-à-dire que *l'erreur commise sur la racine cubique est moindre que la limite de l'erreur commise sur la quantité donnée* A *divisée par le triple carré de la racine cubique de cette quantité, approchée par défaut.*

Si, par exemple, on a $A = 1,26$ à moins de $0,01$, on aura

$$e < \frac{0,01}{3\sqrt[3]{(1,26)^2}} \quad \text{ou} \quad e < \frac{0,01}{3\sqrt[3]{1,5876}},$$

ou en remplaçant le radical du dénominateur par sa valeur approchée en moins, ce qui est permis, puisque cela a pour effet d'augmenter le second membre,

$$e < \frac{0,01}{3 \times 11} \quad \text{ou} \quad e < \frac{1}{3300}\ .$$

II. On peut demander avec quel degré d'approximation on doit prendre A pour que sa racine cubique soit approchée à moins d'une quantité donnée ε.

On vient de voir que l'erreur commise sur la racine cubique est moindre que $\frac{\delta}{3\sqrt[3]{a^2}}$; posons donc

$$\frac{\delta}{3\sqrt[3]{a^2}} < \varepsilon,$$

nous satisferons *a fortiori* à la condition indiquée.

On tire de là
$$\delta < \varepsilon . 3\sqrt[3]{a^2} \qquad [4],$$

c'est-à-dire que *la limite de l'erreur commise sur* A *doit être moindre que la limite de l'erreur que l'on veut commettre sur sa racine, multipliée par le triple carré de la racine cubique de la valeur approchée de* A *, par défaut.*

Cette valeur approchée n'étant pas connue, puisqu'elle dépend de l'approximation cherchée, on pourra la remplacer par une quantité plus petite.

Si, par exemple, on a $A = 3{,}1272727....$, et qu'on veuille obtenir sa racine cubique à moins de $0{,}01$, on pourra remplacer a par 3, et l'on posera

$$\delta < 0{,}01 \times 3\sqrt[3]{9},$$

ou en prenant $\sqrt[3]{9}$ à une unité près, par défaut,

$$\delta < 0{,}01 \times 3 \times 2 \quad \text{ou} \quad \delta < 0{,}06.$$

En prenant A avec deux décimales on remplirait *a fortiori* la condition.

III. Remarque. *Lorsqu'une quantité est plus grande que* 1, *il suffit, pour obtenir sa racine cubique avec* n *chiffres décimaux exacts, de connaître cette quantité elle-même avec* n *chiffres décimaux exacts.*

Car on a alors $\varepsilon = \dfrac{1}{10^n}$ et $A > 1$; on peut donc remplacer a par 1 et écrire

$$\delta < \frac{3}{10^n}.$$

Si donc la quantité A est donnée avec n chiffres décimaux exacts, c'est-à-dire si δ est moindre qu'une unité décimale de l'ordre n, la condition sera remplie *a fortiori*.

Plus généralement, si α est l'exposant (positif ou négatif) de la plus haute puissance de 1000 contenue dans A, on aura $a > 1000^\alpha$. On posera

$$\delta < \frac{1}{10^{n-2\alpha}},$$

et en satisfaisant à cette inégalité on satisfera *a fortiori* à la condition [4], car on aura

$$\frac{1}{10^{n-2\alpha}} = \frac{10^{2\alpha}}{10^n} < \frac{3\sqrt[3]{1000^{2\alpha}}}{10^n} < \frac{3\sqrt[3]{a^2}}{10^n},$$

c'est-à-dire qu'*il suffira de prendre* A *avec un nombre de décimales marqué par le nombre* n *de décimales qu'on veut obtenir à la racine, diminué du double* 2α *de l'exposant de la plus haute puissance de* 1000 *contenue dans* A.

Si, par exemple, $A = 3479{,}102....$, on aura $\alpha = 1$ et il suffira de prendre $n - 2$ décimales. Si $A = 0{,}00347....$, on aura $\alpha = -1$, et il faudra en prendre $n + 2$, et ainsi de suite.

367. Jusqu'ici nous avons supposé qu'une seule des données était inexacte; cherchons maintenant ce qui arrive lorsque plusieurs d'entre elles ne sont qu'approchées. L'erreur commise varie alors suivant le sens de l'approximation de chacun des éléments du calcul; mais, afin de ne pas multiplier les règles, nous n'examinerons, dans chaque cas particulier, que l'hypothèse la plus défavorable.

ADDITION. Le cas le plus défavorable est celui où les erreurs sont de même sens : soient A et B deux quantités à ajouter; soient a et b leurs valeurs approchées, l'une à moins de α, l'autre à moins de β; soit enfin e l'erreur commise sur le résultat. On aura

$$a < A < a + \alpha,$$
$$b < B < b + \beta,$$

d'où, en ajoutant, ce qui est permis (**86**),

$$a + b < A + B < a + b + \alpha + \beta.$$

Les quantités extrêmes diffèrent de $\alpha + \beta$; on a donc

$$e < \alpha + \beta,$$

c'est-à-dire que *l'erreur commise sur la somme, est moindre que la somme des limites des erreurs commises sur chacune des quantités ajoutées.*

Si, par exemple, l'une des quantités est approchée à moins de $\frac{1}{30}$ et l'autre à moins de $\frac{1}{60}$, la somme sera approchée à moins de $\frac{1}{30} + \frac{1}{60}$, c'est-à-dire à moins de $\frac{1}{20}$.

La règle serait la même, dans le cas le plus défavorable, pour un nombre quelconque de quantités.

Si, par exemple, on fait la somme de 10 logarithmes, approchés chacun à moins d'une demi-unité du septième ordre décimal, l'erreur commise sur la somme sera moindre que 5 unités de cet ordre, dans le cas le plus défavorable.

REMARQUE. *Si plusieurs quantités sont approchées au même degré d'approximation, leur moyenne, dans le cas le plus défavorable, est approchée au même degré.*

Soit, en effet, δ la limite de l'erreur commise sur chaque quantité; si elles sont en nombre n la limite de l'erreur commise sur leur somme sera $n\delta$, dans le cas le plus défavorable; en divisant donc par n pour prendre la moyenne, on aura δ pour la limite de l'erreur commise (**362**, I).

Si, par exemple, on prend la moyenne entre un certain nombre de températures estimées chacune à moins d'un dixième de degré, cette moyenne sera approchée elle-même, à moins d'un dixième de degré.

Si un certain nombre d'observations donnent la valeur d'un angle, chacune à moins d'un quart de minute, la moyenne de ces observations sera rapprochée à moins d'un quart de minute.

Et ainsi de suite.

368. Soustraction. Le cas le plus défavorable est celui où les erreurs sont de sens contraire. Supposons qu'on ait, en conservant les mêmes notations,

$$a < A < a + \alpha ,$$
$$b > B > b - \beta ,$$

on pourra retrancher membre à membre (86), ce qui donne

$$a - b < A - B < a + \alpha - b + \beta .$$

Les quantités extrêmes diffèrent de $\alpha + \beta$; on a donc

$$e < \alpha + \beta ,$$

c'est-à-dire que *l'erreur commise sur la différence est moindre que la somme des limites des erreurs commises sur chaque quantité.*

Si, par exemple, la quantité à soustraire est approchée par défaut à moins de $\frac{1}{60}$, et que la quantité dont on soustrait soit approchée par excès à moins de $\frac{1}{30}$, la limite de l'erreur commise par excès sur la différence, sera $\frac{1}{30} + \frac{1}{60}$ ou $\frac{1}{20}$.

369. Multiplication. Le cas le plus défavorable est celui où les erreurs sont de même sens. Si l'on a

$$a < A < a + \alpha ,$$
$$b < B < b + \beta ,$$

on peut multiplier membre à membre, ce qui donne

$$ab < AB < ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta ,$$

et, par conséquent, $e < a\beta + b\alpha + \alpha\beta$.

Le plus ordinairement, le terme $\alpha\beta$ sera négligeable vis-à-vis des précédents, et l'on pourra prendre pour la limite de l'erreur commise sur le produit

$$e = a\beta + b\alpha ,$$

c'est-à-dire que *la limite de l'erreur commise sur le produit, est la* *somme des produits obtenus en multipliant chaque facteur par la limite de l'erreur commise sur l'autre.*

Si, par exemple, la valeur approchée de A à moins de $\frac{1}{30}$ est $\frac{23}{30}$, et que la valeur approchée de B à moins de $\frac{1}{60}$ soit $\frac{367}{60}$, la limite de l'erreur commise sur le produit sera

$$\frac{367}{30}+\frac{23}{60}, \quad \text{ou} \quad \frac{757}{60}, \quad \text{ou} \quad 12 \ \text{unités et} \ \frac{37}{60}.$$

Si la valeur approchée de A à moins de $0,01$ est $3,14$, et que la valeur approchée de B à moins de $0,001$ soit $0,221$; l'erreur commise sur le produit sera moindre que

$$3,14\times 0,001+0,221\times 0,01, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0,00535,$$

moindre *a fortiori* que $0,006$.

Remarque. Si l'on demandait avec quel degré d'approximation il faut prendre les données pour que le produit soit approché à moins d'une quantité assignée ε, le problème serait indéterminé. On pourrait poser, en effet,

$$a\beta+b\alpha<\varepsilon;$$

mais on voit que l'on peut donner à α, par exemple, une valeur arbitraire (qui rende le terme $b\alpha$, et même $B\alpha$, moindre que ε) et qu'on pourra déterminer ensuite β de manière à satisfaire encore à l'inégalité.

370. Division. Le cas le plus défavorable est celui où les erreurs sont de sens contraire. Supposons qu'on ait

$$a<A<a+\alpha,$$
$$b>B>b-\beta,$$

on pourra diviser membre à membre, et l'on aura

$$\frac{a}{b}<\frac{A}{B}<\frac{a+\alpha}{b-\beta}.$$

Écrivons que l'erreur commise e est moindre que la différence des quantités extrêmes, nous aurons

$$e<\frac{a+\alpha}{b-\beta}-\frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad e<\frac{b\alpha+a\beta}{b(b-\beta)},$$

ou, *a fortiori*,

$$e<\frac{a\beta+b\alpha}{(b-\beta)^2},$$

c'est-à-dire que *l'erreur commise sur le quotient sera moindre que la somme des produits obtenus en multipliant chaque terme de la division par la limite de l'erreur commise sur l'autre, divisée par le carré de la valeur approchée du diviseur par défaut.*

Si, par exemple, la valeur approchée de A par défaut, à moins de $0,01$ est $11,24$, et que la valeur approchée de B par excès, à moins de $0,1$ soit $28,7$; la limite de l'erreur commise sur le quotient sera

$$\frac{11,24 \times 0,1 + 28,7 \times 0,01}{(28,6)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1,411}{817,96} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{579,7\ldots},$$

ou, *a fortiori*,

$$\frac{1}{579}.$$

Remarque. Si l'on demandait avec quel degré d'approximation on doit prendre le dividende et le diviseur pour que le quotient soit approché à moins d'une quantité donnée ε, le problème serait encore indéterminé. On poserait

$$\frac{a\beta + b\alpha}{(b-\beta)^2} < \varepsilon \quad \text{ou} \quad \frac{a\beta}{(b-\beta)^2} + \frac{b\alpha}{(b-\beta)^2} < \varepsilon.$$

On pourrait donner à β une valeur arbitraire (qui rendît le premier terme moindre que ε), et déterminer ensuite α de manière à satisfaire encore à l'inégalité.

371. Applications. I. *Calculer à moins d'un centimètre carré la surface d'un cercle qui a* $0^m,37$ *de rayon.*

En appelant S l'aire du cercle, et π le rapport de la circonférence au diamètre*, on a**

$$S = \pi \times (0^m,37)^2 = \pi \times 0^{m\cdot c},1369.$$

Il s'agit de déterminer le nombre de décimales qu'on devra prendre au facteur π, pour que le produit soit approché à moins de $0,0001$. Appliquons la règle du n° **361** (II), nous trouverons

$$\delta < \frac{0,0001}{0,1369} \quad \text{ou} \quad \delta < \frac{1}{1369},$$

il faudra donc prendre π avec 4 décimales, ou $\pi = 3,1415\ldots$, ou mieux $\pi = 3,1416$, attendu que le cinquième chiffre décimal est un 9. On aura donc

$$S = 0^{m\cdot c},1369 \times 3,1416 = 0^{m\cdot c},43008504 \quad \text{ou} \quad S = 0^{m\cdot c},4300$$

en ne conservant que les décimales certaines.

---

* On a $\pi = 3,1415926535\ldots$

** Voy. notre *Géométrie théorique et pratique*, 3e édition, n° **327**.

II. *Trouver, à* 1000 *habitants près, la population de la terre, sachant que le quart seulement de sa surface est habité, et en comptant* 1500 *habitants par myriamètre carré.*

La circonférence du méridien étant de 4000 myriamètres, le rayon de la terre a pour valeur $\frac{4000}{2\pi}$ ou $\frac{2000}{\pi}$; le quart de la surface du globe ou la surface d'un grand cercle *, a donc pour expression $\pi\left(\frac{2000}{\pi}\right)^2$ ou $\frac{4000000}{\pi}$ myriamètres carrés. Multipliant par 1500, on trouve, pour le nombre d'habitants demandé,

$$N = \frac{4000000 \times 1500}{\pi} = \frac{6000000000}{\pi}.$$

Il s'agit de calculer ce nombre à moins de 1000 unités près; et il faut déterminer d'abord pour cela le nombre de décimales avec lequel on doit prendre la valeur de π. Appliquons la règle du nº **362** (IV), nous trouverons (en prenant 3 pour valeur approchée de π)

$$\delta < \frac{9000}{6000000000} \quad \text{ou} \quad \delta < \frac{1}{666666,666}.$$

Il faudra donc prendre π avec 6 décimales, ou $\pi = 3,141592$. On aura alors

$$N = \frac{6000000000}{3,141592} = 1990891000,$$

à moins de 1000 habitants près.

III. *Calculer, à moins d'un dixième de seconde, le temps qu'emploierait un corps à tomber dans le vide d'une hauteur de* 100^{m}.

On fait voir, en Physique, que si l'on désigne par h la hauteur de chute, par t le temps employé, exprimé en secondes, et par g le double de l'espace parcouru dans la première seconde, ou $9^{m},8088..$, on a

$$h = \tfrac{1}{2} g t^2, \quad \text{d'où} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Dans l'exemple proposé, on a donc

$$t = \sqrt{\frac{200^{m}}{g}}.$$

Il s'agit de déterminer le nombre de décimales avec lequel il faudra prendre g, pour que le résultat puisse être calculé à moins de $0,1$.

---

* Voy. notre *Géométrie théorique et pratique*, 3e édition, nº 664.

Pour cela, il faut déterminer d'abord avec quelle approximation doit être calculé le quotient $\frac{200}{g}$.

En appliquant la règle du nº **364** (II), et remarquant que $\frac{200}{g}$ étant plus grand que 20, sa racine est plus grande que 4, on trouvera

$$\delta < 0,1 \times 2 \times 4 \quad \text{ou} \quad \delta < 0,8 .$$

Ainsi le quotient devra être calculé à moins de $0,8$. Appliquant maintenant la règle du nº **362** (IV), en prenant 9 pour la valeur de g, en moins, on aura

$$\delta' < 0,8 . \frac{81}{200} \quad \text{ou} \quad \delta' < 0,324 .$$

Il suffira donc de prendre g avec une décimale, ce qui donne

$$t = \sqrt{\frac{200}{9,8}} = \sqrt{20,4} = 4'',5 ,$$

à moins d'un dixième de seconde.

IV. *Calculer, à moins d'un millimètre, la circonférence du cercle circonscrit à un carré qui a* 1^{m} *de côté.*

D'après des principes connus de Géométrie *, le rayon de ce cercle aura pour expression $\sqrt{2}$; sa circonférence aura donc pour valeur

$$C = 2\pi\sqrt{2} ,$$

c'est cette expression qu'il s'agit de calculer à moins de $0,001$, ce qui revient à calculer $\pi\sqrt{2}$ à moins de $0,0005$.

Désignons par a une valeur approchée de π à moins de α, et par b une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à moins de β, par défaut toutes deux ; la limite de l'erreur commise sera à très-peu près (**369**)

$$a\beta + b\alpha .$$

Posons
$$a\beta + b\alpha < 0,0005 .$$

Pour satisfaire à cette inégalité, prenons d'abord β de manière que le terme $a\beta$ soit moindre que $0,0005$; posons pour cela

$$4\beta < 0,0005 ,$$

en remarquant que a est moindre que 4. Nous tirerons de là

$$\beta < 0,000125 .$$

On satisfera *a fortiori* à cette condition en calculant $\sqrt{2}$ à moins

* Voy. notre *Géométrie théorique et pratique*, nºs 285 et 349.

de $0{,}0001$, ce qui donne $b=1{,}4142$. L'inégalité devient alor

$$a\times 0{,}0001+\alpha\times 1{,}4142<0{,}0005\ ,$$

d'où
$$\alpha\times 1{,}4142<0{,}0005-a\times 0{,}0001\ ,$$

ou en mettant pour a la valeur 4 plus grande que π, afin de diminuer le second membre

$$\alpha\times 1{,}4142<0{,}0005-0{,}0004\quad \text{ou}\quad <0{,}0001\ .$$

Si l'on satisfait à cette inégalité, on satisfera *a fortiori* à l'inégalité primitive. On tire de là

$$\alpha<\frac{0{,}0001}{1{,}4142}\quad \text{ou}\quad \alpha<\frac{1}{14142}\ .$$

Il faudra donc prendre π avec 5 décimales. On aura ainsi

$$C=2\times 3{,}14159\times 1{,}4142=8^{m},885\ ,$$

à moins d'un millimètre.

§ II. Des approximations relatives.

372. Nous avons dit au commencement de ce chapitre qu'on pouvait évaluer l'erreur commise sur une quantité, *par rapport* à la valeur exacte de cette quantité, et que l'erreur ainsi évaluée était une erreur *relative*; comme lorsqu'on dit qu'une quantité est obtenue, à moins d'un 20^{e}, d'un 30^{e}, d'un 100^{e} *de sa valeur.*

Soit A une quantité qu'on ne peut obtenir qu'approximativement, et soit e la limite de l'erreur absolue commise sur cette quantité. Le rapport de cette limite d'erreur e à la valeur de la quantité A, ou la fraction $\frac{e}{A}$ sera la limite de l'erreur *relative.*

Nous la représenterons, dans ce qui va suivre, par la lettre m; en sorte que nous aurons

$$\frac{e}{A}=m\ ,\quad \text{d'où}\quad e=mA\ .$$

Nous représenterons par a la valeur approchée de A, par défaut, en sorte qu'on aura

$$a<A<a+mA\ .$$

Enfin, nous représenterons par E la limite de l'erreur absolue, et par μ la limite de l'erreur relative, commises sur le résultat.

Cela posé, passons en revue les principales opérations qu'on peut avoir à effectuer.

373. ADDITION. Soit à ajouter B à A; on aura

$$a+B<A+B<a+mA+B\ .$$

La différence des quantités extrêmes étant mA, on a

$$E<mA\ ;\ \text{d'où}\ \frac{E}{A+B}\ \text{ou}\ \mu<m.\frac{A}{A+B}\ ,$$

c'est-à-dire que *la limite de l'erreur relative se trouve diminuée dans le rapport de* A *à* $A+B$.

Si, par exemple, la valeur approchée de A par défaut est $31,55$, on a $m=\frac{1}{3155}$. Si $B=839$, on aura

$$\mu<\frac{1}{3155}\cdot\frac{31,55..}{839+31,55..}\ ,\ \text{ou}\ \mu<\frac{1}{83900+3155}\ ,$$

ou

$$\mu<\frac{1}{87055}\ .$$

374. SOUSTRACTION. Soit à soustraire B de A; on aura

$$a-B<A-B<a+mA-B\ ;$$

donc

$$E<mA\ ;\ \text{d'où}\ \frac{E}{A-B}\ \text{ou}\ \mu<m.\frac{A}{A-B}\ ,$$

c'est-à-dire que *la limite de l'erreur relative se trouve augmentée, dans le raport de* A *à* $A-B$.

Si, par exemple, la valeur de A, approchée par défaut est $45,7$ on a $m=\frac{1}{457}$; si $B=28,9$, on aura

$$\mu<\frac{1}{457}\cdot\frac{45,7}{45,7-28,9}\ ,\ \text{ou}\ \mu<\frac{1}{457-289}\ ,\ \text{ou}\ \mu<\frac{1}{168}\ .$$

375. MULTIPLICATION. Soit à multiplier A par B; on aura

$$aB<AB<aB+mAB\ ,$$

d'où

$$E<mAB\ \text{et}\ \frac{E}{AB}\ ,\ \text{ou}\ \mu<m\ ,$$

c'est-à-dire que *la limite de l'erreur relative reste la même.*

Si, par exemple, A est approché à moins de $\frac{1}{350}$ de sa valeur, son produit par un nombre quelconque B sera encore approché à moins de $\frac{1}{350}$ de sa valeur.

Si la valeur de A, approchée par défaut, est $18,59..$, cette quantité A est approché à moins de $\frac{1}{1859}$ de sa valeur; il en sera donc de même du produit de A par un nombre quelconque.

376. Division. I. Soit à diviser A par B ; on aura

$$\frac{a}{B} < \frac{A}{B} < \frac{a}{B} + \frac{mA}{B},$$

donc $$E < m\frac{A}{B} \text{ ; d'où } \frac{E}{\left(\frac{A}{B}\right)} \text{ ou } \mu < m,$$

c'est-à-dire que *la limite de l'erreur relative reste la même.*

II. Soit à diviser B par A ; on aura

$$\frac{B}{a} > \frac{B}{A} > \frac{B}{a + mA},$$

donc $$E < \frac{B}{a} - \frac{B}{a+mA}, \text{ ou } E < \frac{mBA}{a(a+mA)};$$

d'où $$\frac{E}{\left(\frac{B}{A}\right)} \text{ ou } \mu < \frac{mA^2}{a(a+mA)}, \text{ et, \textit{a fortiori}, } \mu < m.\frac{A^2}{a^2}.$$

Mais, comme a est supposé différer peu de A, leur quotient est très-peu supérieur à l'unité, et l'on peut écrire

$$\mu = m,$$

c'est-à-dire que *la limite de l'erreur relative reste la même.*

377. Carré. On a $a^2 < A^2 < a^2 + 2amA + m^2A^2$;

donc $E < 2amA + m^2A^2$; d'où $\frac{E}{A^2}$ ou $\mu < 2m.\frac{a}{A} + m^2$,

et, *a fortiori*, $$\mu < 2m + m^2;$$

mais, comme m^2 sera ordinairement très-petit, on pourra poser

$$\mu = 2m,$$

c'est-à-dire que *la limite de l'erreur relative est doublée.*

378. Racine carrée. On a $\sqrt{a} < \sqrt{A} < \sqrt{a + mA}$,

donc $E < \sqrt{a+mA} - \sqrt{a}$ ou $E < \frac{mA}{2\sqrt{a}}$ (voy. le n° **364**)

De là $$\frac{E}{\sqrt{A}} \text{ ou } \mu < \frac{m}{2}\sqrt{\frac{A}{a}}.$$

Et, comme a diffère peu de A, on pourra écrire

$$\mu = \frac{m}{2},$$

c'est-à-dire que *la limite de l'erreur relative est divisée par* 2.

379. Cube. On a $a^3 < A^3 < a^3 + 3a^2mA + 3am^2A^2 + m^3A^3$;
donc,
$$E < 3a^2mA + 3am^2A^2 + m^3A^3 ,$$
d'où
$$\frac{E}{A^3} \text{ ou } \mu < 3m \cdot \frac{a^2}{A^2} + 3m^2 \cdot \frac{a}{A} + m^3 ,$$
et, *a fortiori*,
$$\mu < 3m + 3m^2 + m^3 ;$$
mais comme m sera ordinairement très-petit, m^2 et m^3 seront négligeables vis-à-vis de m ; et l'on pourra poser
$$\mu = 3m ,$$
c'est-à-dire que *la limite de l'erreur relative est triplée.*

380. Racine cubique. On a $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{a+mA}$;
donc, $E < \sqrt[3]{a+m.A} - \sqrt[3]{a}$, ou $E < \dfrac{mA}{3\sqrt[3]{a^2}}$ (voy. le n° **366**);
de là
$$\frac{E}{\sqrt[3]{A}} \text{ ou } \mu < \frac{m}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{A^2}{a^2}} .$$
Mais comme a diffère très-peu de A , on pourra écrire :
$$\mu = \frac{m}{3} ,$$
c'est-à-dire que *la limite de l'erreur relative est divisée par* 3 .

381. La simplicité de ces règles permet de traiter avec la plus grande facilité les questions inverses. Par exemple :

I. *Avec combien de décimales faut-il prendre le nombre* 3,1415926.... *pour que son cube soit approché à moins de* $\dfrac{1}{1000}$ *de sa valeur ?*

Puisque en élevant un nombre au cube la limite de l'erreur relative est triplée (**379**), il faudra prendre le nombre proposé à moins de $\dfrac{1}{3000}$ de sa valeur. Il suffira pour cela de prendre trois décimales; car le nombre 3,141 est approché à moins de $\dfrac{1}{3141}$ de sa valeur.

De plus, on devra supprimer au résultat tous les chiffres qui exprimeraient une quantité moindre que la 1000^e partie de ce résultat. On trouvera ainsi
$$30,98 ,$$
en supprimant les chiffres suivants, qui exprimeraient une quantité moindre que la 1000^e partie de 30,98 .

II. *Avec combien de décimales faut-il prendre le nombre*

657,8787...., *pour que sa racine carrée soit approchée à moins de* $\frac{1}{10000}$ *de sa valeur?*

Puisque, lorsqu'on extrait la racine carrée d'un nombre, la limite de l'erreur relative est divisée par 2 (378), il suffira de prendre le nombre proposé à moins de $\frac{2}{10000}$ ou de $\frac{1}{5000}$ de sa valeur. On remplira cette condition en prenant ce nombre avec *une* décimale; car le nombre 657,8 est approché à moins de $\frac{1}{6578}$ de sa valeur.

On trouve 25 pour la partie entière de la racine; on pourra donc arrêter l'opération dès qu'on arrivera à un chiffre qui exprimerait une quantité moindre que la 10000^e partie de 25, c'est-à-dire dès qu'on arrivera à un chiffre exprimant moins de 0,0025. Par conséquent, il suffira de calculer jusqu'au chiffre des millièmes. On trouve ainsi

$$25,647$$

à moins de $\frac{1}{10000}$ de la valeur de ce résultat.

382. Nous avons insisté longuement sur les calculs approximatifs. Il est rare, en effet, que les commençants aient des idées nettes sur ce sujet. Ils s'imaginent, d'ordinaire, qu'ils approchent de plus en plus du résultat lorsqu'ils écrivent un nombre de plus en plus grand de décimales à sa droite, quel que soit le degré d'approximation des données.

Si, dans un produit de deux facteurs, ils ont pris le multiplicande à moins d'un millième et le multiplicateur à moins d'un centième, ils se figurent avoir obtenu le produit à moins d'un cent millième. S'ils veulent avoir 3 décimales à la racine carrée d'un nombre, ils croient nécessaire d'avoir ce nombre avec 6 décimales*; et ainsi de suite.

Nous espérons qu'en lisant attentivement ce chapitre, et en appliquant chaque règle à un certain nombre d'exemples, ils rectifieront leurs idées.

---

* Remarquons en passant que, s'il en était ainsi, certains calculs deviendraient impraticables. Pour obtenir, par exemple, le rapport π de la circonférence au diamètre, à moins d'une unité du cinquième ordre décimal, on a 11 racines carrées consécutives à extraire; pour avoir la dernière avec 6 décimales, il faudrait avoir la précédente avec 12 décimales, la précédente avec 24, la précédente avec 48; et, en remontant ainsi, on trouve qu'*il faudrait calculer la première racine avec 6144 décimales.* Tandis qu'il suffit, en réalité, de calculer chacune d'elles avec 6 décimales exactes. (Voy. notre *Géométrie théorique et pratique,* 3^e édition, n^{os} 302 et 303.)

Nous appelons particulièrement l'attention du lecteur sur les *approximations relatives*, les seules qui intéressent réellement les applications; il importe moins, en effet, de savoir si une longueur, par exemple, est approchée à moins d'un centimètre ou d'un millimètre, que de savoir si elle est approchée à moins d'un centième ou d'un millième de sa valeur. Or, cette manière d'estimer l'approximation n'est pas seulement la plus utile, c'est encore celle qui conduit aux règles les plus simples et les plus faciles à appliquer, ainsi qu'on a pu s'en convaincre.

CHAPITRE XV.

CHOIX DE PROBLÈMES.

§ I. Problèmes d'algèbre pure.

383. *Trouver le* maximum *ou le* minimum* *des valeurs que peut prendre le trinome du second degré* ax^2+bx+c *pour des valeurs réelles de* x .

Si a est positif, posons $ax^2+bx+c=y$.

La condition pour que x soit réel est

$$b^2-4a(c-y)>0 \qquad (\mathbf{218}),$$

d'où

$$y>\frac{4ac-b^2}{4a} .$$

La plus petite valeur que pourra prendre y , c'est-à-dire le *minimum* de y , sera donc

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a} ,$$

valeur à laquelle correspond $x=-\frac{b}{2a}$.

Cette valeur *minimum* de y sera positive, nulle ou négative, suivant que les racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$ seront imaginaires, réelles et égales, ou réelles et inégales (**218**).

Si a est négatif et égal à $-a'$, on pourra écrire

$$a'x^2-bx-c=-y .$$

La condition de réalité de x sera

$$b^2-4a'(y-c)>0 , \quad \text{d'où} \quad y<\frac{b^2-4a'c}{4a'} .$$

La plus grande valeur que pourra prendre y , c'est-à-dire le *maximum* de y , sera donc

$$y=\frac{b^2-4ac}{4a} , \quad \text{d'où} \quad x=\frac{b}{2a} .$$

* Une valeur d'une expression est dite *maximum* lorsqu'elle surpasse à la fois celles qui précèdent et qui suivent immédiatement. Elle est dite *minimum* lorsqu'elle est surpassée par celles qui précèdent et qui suivent immédiatement.

Cette valeur *maximum* de y sera positive, nulle ou négative, selon que les racines de l'équation $a'x^2 - bx - c = 0$ seront réelles et inégales, réelles et égales, ou bien imaginaires.

EXEMPLE. Soit l'expression $3x^2 - 5x + 6$; on trouvera qu'elle a un *minimum* répondant à $x = \frac{5}{6}$, et ce *minimum* est $-\frac{47}{12}$.

Soit l'expression $6 + 5x - 3x^2$; on trouvera qu'elle a un *maximum* répondant à $x = \frac{5}{6}$, et ce *maximum* est $-\frac{97}{12}$.

384. *Trouver le* maximum *ou le* minimum *de l'expression*

$$y = \frac{(x-1)(x-4)}{x-5} .$$

Cette relation peut se mettre sous la forme

$$x^2 - (y+5)x + 5y + 4 = 0 .$$

La condition pour que x soit réel est

$$(y+5)^2 - 4(5y+4) > 0$$

ou

$$y^2 - 10y + 9 > 0 .$$

Le premier membre de cette inégalité se décompose en deux facteurs du premier degré $y-1$ et $y-9$; on doit donc avoir

$$(y-1)(y-9) > 0 .$$

Pour que cette inégalité soit satisfaite, il faut qu'on ait ou $y < 1$ ou $y > 9$. L'expression proposée a donc un *maximum* $y = 1$ et un *minimum* $y = 9$. Le premier répond à

$$x^2 - 6x + 9 = 0 , \quad \text{d'où} \quad x = 3 .$$

Le second répond à

$$x^2 - 14x + 49 = 0 , \quad \text{d'où} \quad x = 7 .$$

Il n'y a aucune valeur réelle de x qui puisse donner à l'expression proposée les valeurs comprises entre 1 et 9 ; mais elle peut prendre toutes les valeurs au-dessous de 1 jusqu'à l'infini négatif, et toutes les valeurs au-dessus de 9 jusqu'à l'infini positif.

385. I. *Partager le nombre* a *en deux parties telles que leur produit soit le plus grand possible* (ou *maximum*).

Soit x l'une des parties, l'autre sera $a - x$, et leur produit sera $ax - x^2$. Posons

$$ax - x^2 = y .$$

La condition pour que x soit réel est $a^2 - 4y > 0$, d'où

$y < \frac{a^2}{4}$. Le produit y a donc un maximum $y = \frac{a^2}{4}$, qui répond à $x = \frac{a}{2}$.

Ainsi, il faut partager le nombre proposé en deux parties égales.

II. *Partager* a *en deux parties telles que la somme de leurs carrés soit la plus petite possible* (ou *minimum*).

En appelant x l'une des parties et y la somme de leurs carrés, on aura

$$x^2 + (a - x)^2 = y \quad \text{ou} \quad 2x^2 - 2ax + a^2 - y = 0 .$$

La condition pour que x soit réel est $y > a^2$. La somme y a donc un minimum, $y = a^2$, qui répond à $x = 0$ ou $x = a$, c'est-à-dire qu'il faut que l'une des deux parties soit nulle.

386. *Former une équation du second degré dont les racines soient* $2\mathrm{a} + \mathrm{b}$ *et* $\mathrm{a} - 2\mathrm{b}$.

Soit $x^2 + px + q = 0$ cette équation. On devra avoir

$$-p = 2a + b + a - 2b = 3a - b , \quad \text{d'où} \quad p = -(3a - b)$$

et
$$q = (2a + b)(a - 2b) = 2a^2 - 3ab - 2b^2 .$$

L'équation demandée est donc

$$x^2 - (3a - b)x + 2a^2 - 3ab - 2b^2 = 0 .$$

On peut vérifier, en la résolvant, qu'elle admet les deux racines proposées.

387. I. *Trouver la somme des carrés des racines de l'équation* $\mathrm{x}^2 + \mathrm{px} + \mathrm{q} = 0$, *sans la résoudre.*

Appelons a et b les deux racines, et S la somme de leurs carrés. On a

$$S = a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab ;$$

mais
$$a + b = -p \quad \text{et} \quad ab = q ,$$

donc
$$S = p^2 - 2q .$$

II. *Trouver la somme des cubes des mêmes racines.*

Soit S cette somme, on aura

$$S = a^3 + b^3 .$$

Élevons au cube la relation $a + b = -p$, il viendra

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -p^3 ,$$

ou
$$a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -p^3 ,$$

ou
$$S - 3qp = -p^3 , \quad \text{d'où} \quad S = 3pq - p^3 .$$

Remarque. En opérant de même, on trouverait pour la somme des quatrièmes puissances des mêmes racines

$$S=p^4-4p^2q+2p^2 .$$

388. I. *Déterminer* q *dans l'équation* $x^2+4x+q=0$, *de manière que la somme des carrés des racines soit égale à* 12.

On devra avoir, en vertu de ce qui précède,

$$16-2q=12 , \quad \text{d'où} \quad q=2 .$$

Les deux racines de l'équation seront, en effet,

$$x=-2+\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x=-2-\sqrt{2} ,$$

et leurs carrés seront $6-4\sqrt{2}$ et $6+4\sqrt{2}$, dont la somme est 12.

II. *Déterminer* q *dans l'équation* $x^2+px+q=0$, *de manière que* m *fois l'une des racines plus* n *fois l'autre fasse une somme égale à un nombre donné* r.

En appelant a et b les deux racines, on aura

$$a+b=-p , \quad ab=q \quad \text{et} \quad ma+nb=r ,$$

équations où les inconnues sont a, b et q. Éliminons a et b entre la première et la troisième, qui sont du premier degré, et portant leurs valeurs dans la seconde, nous aurons la valeur de q.

On trouve ainsi $a=\dfrac{r+np}{m-n}$ et $b=-\dfrac{r+mp}{m-n}$,

d'où

$$q=-\frac{(r+np)(r+mp)}{(m-n)^2} .$$

389. I. *Étant donnée l'équation* $x^2+px+q=0$, *former une équation du second degré dont les racines soient celles de la proposée, multipliées par un même facteur* m.

Soit y l'inconnue de la nouvelle équation, on devra avoir

$$y=mx , \quad \text{d'où} \quad x=\frac{y}{m} .$$

Mettons cette valeur pour x dans la proposée, et faisons disparaître les dénominateurs, il viendra

$$y^2+mpy+m^2q=0 ,$$

ce qui sera l'équation demandée.

II. *Former une équation dont les racines soient égales à celles de* $x^2+px+q=0$, *diminuées chacune d'une même quantité* m.

Soit y l'inconnue de la nouvelle équation, on devra avoir

$$y=x-m , \quad \text{d'où} \quad x=y+m .$$

Mettant pour x cette valeur dans la proposée, et réduisant, on obtient

$$y^2+(2m+p)y+m^2+mp+q=0 \ ,$$

ce qui est l'équation demandée.

Si m était égal à $-\frac{p}{2}$, cette équation se réduirait à

$$y^2-\frac{p^2}{4}+q=0 \ .$$

III. *Former une équation qui ait pour racines les carrés des racines de l'équation* $x^2+px+q=0$.

On devra avoir $y=x^2$ d'où $x=\sqrt{y}$.
Mettant cette valeur de x dans la proposée, on obtient

$$y+p\sqrt{y}+q=0 \quad \text{d'où} \quad p\sqrt{y}=-y-q \ ,$$

et, en élevant au carré,

$$p^2y=y^2+2qy+q^2$$

ou

$$y^2-(p^2-2q)y+q^2=0 \ ,$$

c'est l'équation demandée.

390. I. *Résoudre l'équation* $ax+b\sqrt{x}+c=0$.

Au lieu de faire disparaître le radical comme ci-dessus, on peut poser $\sqrt{x}=z$, d'où $x=z^2$ et $az^2+bz+c=0$. Ayant résolu cette équation, on élèvera ses racines au carré, et l'on aura les racines de l'équation proposée.

II. *Résoudre l'équation* $Aa^{2x}+Ba^x+C=0$.

On pose $a^x=y$, d'où $a^{2x}=y^2$. Il vient alors

$$Ay^2+By+C=0 \ ,$$

Soient y' et y'' les racines de cette équation, il reste à résoudre les équations exponentielles (**301**) :

$$a^x=y' \quad \text{et} \quad a^x=y'' \ .$$

391. I. *Résoudre les deux équations* $x+y=a$ *et* $\log x+\log y=b$.

La seconde revient à $\log xy=b$ (**280**),

d'où $xy=10^b$,

si les logarithmes sont supposés pris dans le système dont la base est 10. Le problème se trouve donc ramené à chercher deux nombres, connaissant leur somme et leur produit; question qui a été traitée (**190**).

II. *Résoudre les deux équations* $x^2+y^2=a^2$ *et* $log\,x+log\,y=b$.

On tire de la seconde $xy=10^b$.

La question est donc ramenée à trouver deux nombres, connaissant leur produit et la somme de leurs carrés; question qui a été traitée (**194**).

III. *Résoudre les deux équations* $x^4+y^4=a^2$ *et* $log\,x+log\,y=b$.

On tire encore de la seconde $xy=10^b$; d'où $x^2y^2=10^{2b}$.

Posons $x^2=u$ et $y^2=v$, nous aurons à résoudre les deux équations

$$u^2+v^2=a^2 \quad \text{et} \quad uv=10^{2b},$$

ce qui rentre encore dans la question traitée au nº **194**.

Ayant obtenu u et v, on en extraira la racine carrée et l'on aura les valeurs de x et de y.

392. *Étant donné un polynome entier par rapport à* x, *tel que* $Mx^m+Nx^n+Px^p+$ etc., *trouver le reste de la division de ce polynome par* $x-a$.

Le diviseur étant du premier degré, le quotient sera un polynome entier par rapport à x, et le reste sera indépendant de x. On aura donc, en désignant ce quotient par $Mx^{m-1}+$ etc., et le reste par R,

$$Mx^m+Nx^n+Px^p+\text{etc.}=(x-a)(Mx^{m-1}+\text{etc.})+R.$$

Dans cette identité, si l'on remplace x par a les deux membres resteront égaux; or, le facteur $x-a$ deviendra nul, et le facteur $Mx^{m-1}+$ etc., prendra une valeur finie, puisque x n'entrant pas en dénominateur, il ne peut devenir infini pour aucune valeur finie de x; d'ailleurs le reste R ne changera pas, puisqu'il est indépendant de x. On aura donc

$$Ma^m+Na^n+Pa^p+\text{etc.}=R;$$

c'est-à-dire que *le reste de la division du polynome en* x *proposé, par* $x-a$, *est le résultat qu'on obtient en remplaçant* x *par* a *dans ce polynome.*

Si l'on divisait par $x+a$, qui revient à $x-(-a)$, on aurait pour reste

$$M(-a)^m+N(-a)^n+P(-a)^p+\text{etc.},$$

ou le résultat qu'on obtient en remplaçant x par $-a$ dans le polynome proposé.

Remarque. Ce théorème démontre immédiatement les caractères de divisibilité de $x^m\pm a^m$ par $x\pm a$ (**48**).

Soit x^m+a^m à diviser par $x+a$; le reste sera $(-a)^m+a^m$. Il sera nul quand m sera impair.

Soit $x^m + a^m$ à diviser par $x - a$; le reste sera $(+a)^m + a^m$. Il ne pourra jamais être nul.

Soit $x^m - a^m$ à diviser par $x + a$; le reste sera $(-a)^m - a^m$. Il sera nul quand m sera pair.

Soit enfin $x^m - a^m$ à diviser par $x - a$; le reste sera $a^m - a^m$. Il sera nul quel que soit m.

§ II. Problèmes de Géométrie *.

593. *Trouver un triangle rectangle dont les trois côtés soient représentés par trois nombres entiers consécutifs.*

Soient $x - 1$, x et $x + 1$ ces trois nombres, on devra avoir

$$(x+1)^2 = x^2 + (x-1)^2 \quad \text{ou} \quad x^2 - 4x = 0 ,$$

d'où

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = 4 .$$

La seconde valeur seule satisfait ; les trois côtés sont donc représentés par les trois nombres 3, 4 et 5.

594. *Diviser un cercle en moyenne et extrême raison par une circonférence concentrique.*

Soient R le rayon du cercle donné, x celui du cercle cherché ; la surface de ce cercle sera πx^2, et celle de la couronne comprise entre les deux circonférences concentriques sera $\pi(R^2 - x^2)$. On devra donc avoir

$$\pi R^2 : \pi x^2 :: \pi x^2 : \pi(R^2 - x^2) \quad \text{ou} \quad R^2 : x^2 :: x^2 : R^2 - x^2 ,$$

d'où

$$x^4 + R^2x^2 - R^4 = 0 ,$$

et

$$x = \pm R\sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}} .$$

La seule solution admissible est

$$x = R\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} .$$

Si l'on veut que ce soit la couronne qui soit moyenne proportionnelle entre le grand cercle et le petit cercle, on devra poser

$$R^2 : R^2 - x^2 :: R^2 - x^2 : x^2 ,$$

d'où

$$R^2 - x^2 = Rx \quad \text{et} \quad x = R\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) .$$

* Voy., pour les principes sur lesquels repose la solution de ces problèmes, notre *Géométie théorique et pratique*, 3e édition.

Remarque. Cette valeur est celle du plus grand segment du rayon divisé lui-même en moyenne et extrême raison.

395. *Trouver la hauteur d'un segment sphérique, connaissant la surface totale et le rayon de la sphère.*

Soient R le rayon de la sphère, x la hauteur du segment, et πa^2 un cercle équivalent à la surface totale donnée. La surface de la calotte est $2\pi Rx$; celle du cercle de base est πr^2, en appelant r son rayon. Mais r est moyen proportionnel entre les deux segments x et $2R - x$ du diamètre ; on a donc $r^2 = x(2R - x)$. L'équation du problème est par conséquent :

$$2\pi Rx + \pi x(2R - x) = \pi a^2 \quad \text{ou} \quad 4Rx - x^2 = a^2 .$$

d'où

$$x = 2R \pm \sqrt{4R^2 - a^2} .$$

Il est évident que la seconde valeur peut seule convenir. Pour qu'elle soit réelle, il faut qu'on ait $a < 2R$, ou que le rayon du cercle équivalent à la surface totale du segment soit moindre que le diamètre de la sphère. En d'autres termes, il faut que la surface donnée soit tout au plus égale à la surface de la sphère, condition qu'on aurait pu prévoir.

396. I. *Diviser un trapèze en deux parties équivalentes, par une parallèle aux bases.*

Tout se réduit à trouver la longueur de cette parallèle. Désignons-la par x. Soient a et b la grande et la petite base du trapèze. Si l'on prolonge les deux côtés non parallèles, on formera trois triangles semblables, dans lesquels b, x et a seront des côtés homologues. Chacun de ces triangles pourra être représenté par le carré de l'un de ces trois côtés. La partie supérieure du trapèze sera donc représentée par $x^2 - b^2$, et la partie inférieure par $a^2 - x^2$. Ainsi on devra avoir

$$x^2 - b^2 = a^2 - x^2 , \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} .$$

On voit que la solution ne dépend pas de la hauteur du trapèze.

II. *Diviser la surface convexe d'un tronc de cône en deux parties équivalentes par un plan parallèle aux bases.*

Ce plan coupera la surface du tronc de cône suivant une circonférence. Tout se réduit à trouver son rayon. Désignons-le par x ; soient R et r les rayons des deux bases. En raisonnant comme ci-dessus, on trouvera de même

$$x = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}} .$$

III. *Diviser le volume d'un tronc de cône en deux parties équivalentes par un plan parallèle aux bases.*

En conservant les mêmes notations on trouvera, à l'aide de raisonnements analogues,

$$x = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}} .$$

597. I. *Trouver l'expression de la surface convexe d'un tronc de cône, en la considérant comme la différence entre deux cônes.*

Soient R et r les rayons des bases, A le côté du grand cône, a celui du petit, α le côté du tronc de cône, lequel équivaut à $A - a$. La surface du grand cône aura pour valeur πRA, celle du petit πra. La surface S du tronc de cône aura donc pour expression

$$S = \pi(AR - ar) .$$

Mais on a $A : a :: R : r$, d'où $A = \frac{aR}{r}$. Substituant, il vient

$$S = \frac{\pi a}{r}(R^2 - r^2) = \frac{\pi a(R - r)(R + r)}{r} = \pi\left(\frac{aR}{r} - a\right)(R + r)$$
$$= \pi(A - a)(R - r) = \pi\alpha(R + r)$$

qui est l'expression connue.

II. *Trouver l'expression du volume d'un tronc de cône, en le considérant comme la différence de deux cônes.*

Soient toujours R et r les rayons des deux bases; H la hauteur du grand cône, h celle du petit, $z = H - h$ celle du tronc; enfin V le volume du tronc. Le volume du cône entier aura pour valeur $\frac{1}{3}\pi R^2H$; celui du petit $\frac{1}{3}\pi r^2h$. On aura donc

$$V = \tfrac{1}{3}\pi(R^2H - r^2h) ;$$

mais on a $R : r :: H : h$, d'où $H = \frac{Rh}{r}$. Substituant, il vient

$$V = \tfrac{1}{3}\pi\frac{h}{r}(R^3 - r^3) = \tfrac{1}{3}\pi\frac{h}{r}(R - r)(R^2 + Rr + r^2)$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi\left(\frac{Rh}{r} - h\right)(R^2 + Rr + r^2) = \tfrac{1}{3}\pi(H - h)(R^2 + Rr + r^2)$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi z(R^2 + Rr + r^2) .$$

C'est l'expression connue.

598. *Une sphère et un cylindre étant posés sur un même plan horizontal, on propose de les couper par un second plan parallèle au premier, de telle sorte que les volumes interceptés entre les deux plans soient entre eux comme* m *est à* n.

Soient R le rayon de la sphère, r celui de la base du cylindre, et x la distance des deux plans horizontaux. Le volume du segment de sphère compris entre les deux plans aura pour expression $\pi x^2(R - \frac{1}{3}x)$; et la portion du cylindre comprise entre les mêmes plans aura pour expression $\pi r^2 x$. On devra donc avoir

$$\pi x^2(R - \tfrac{1}{3}x) : \pi r^2 x :: m : n ,$$

d'où, en supprimant la solution $x = 0$,

$$nx(R - \tfrac{1}{3}x) = mr^2 \quad \text{ou} \quad nx^2 - 3nRx + 3mr^2 = 0 .$$

La condition de réalité est

$$9n^2R^2 - 12\,mnr^2 > 0 , \quad \text{ou} \quad 3nR^2 - 4mr^2 > 0 ,$$

ou

$$r < R\sqrt{\frac{3n}{4m}} .$$

Si elle est remplie, l'équation aura deux racines positives. Mais, pour que les deux solutions conviennent à la question, il faut que la plus grande soit moindre que le diamètre $2R$ de la sphère. En écrivant cette condition, on a

$$\frac{3nR + \sqrt{9n^2R^2 - 12mnr^2}}{n} < 2R , \quad \text{d'où} \quad r < R\sqrt{\frac{2}{3}\frac{n}{m}} .$$

399. I. *Déterminer, dans une sphère, un segment à une base, dont la surface soit à celle du cône de même base et de même hauteur dans un rapport donné* m .

Soient R le rayon de la sphère et x la hauteur du segment; le rayon de sa base sera $\sqrt{x(2R - x)}$ (395); et le côté du cône étant moyen proportionnel entre la hauteur x et le diamètre, aura pour valeur $\sqrt{2Rx}$. La surface de la calotte sphérique aura pour valeur $2\pi Rx$; celle du cône

$$\pi . \sqrt{x(2R - x)} . \sqrt{2Rx} \quad \text{ou bien} \quad \pi x\sqrt{2R(2R - x)} .$$

On devra donc avoir, en supprimant les facteurs communs π et x ,

$$2R = m . \sqrt{2R(2R - x)} , \quad \text{d'où} \quad x = 2R . \frac{m^2 - 1}{m^2} .$$

La valeur $x = 0$, qu'on a supprimée en divisant par x , est une solution illusoire.

Pour que la valeur obtenue soit positive, il faut qu'on ait $m > 1$. On aura alors $x < 2R$.

II. *Déterminer le segment de manière que son volume soit à celui du cône de même hauteur, dans un rapport donné* n .

Le volume du segment a pour expression $\frac{1}{3}\pi x^2(3R - x)$; et celui du cône $\frac{1}{3}\pi . x(2R - x) . x$ ou $\frac{1}{3}\pi x^2(2R - x)$. On devra donc avoir, en supprimant les facteurs communs $\frac{1}{3}\pi$ et x^2,

$$3R - x = m(2R - x) \text{ , d'où } x = R . \frac{2m-3}{m-1} .$$

Il faut nécessairement que l'on ait $m > 1$; et, pour que x soit positif, il faut qu'on ait en même temps $2m - 3 > 0$ ou $m > \frac{3}{2}$. On aura alors $x < 2R$.

Le rapport m a un minimum, $\frac{3}{2}$, qui répond à $x = 0$.

400. *Inscrire dans un cercle un rectangle dont la surface soit un maximum.*

Soient R le rayon du cercle, x et y la base et la hauteur du rectangle, A la surface; on aura $A = xy$ et $x^2 + y^2 = 4R^2$. Éliminant y, il vient $x^4 - 4R^2x^2 + A^2 = 0$.

La condition de réalité est $4R^4 - A^2 > 0$, d'où $A < 2R^2$.

Le maximum de la surface est donc $A = 2R^2$; ce qui répond à $x^2 = 2R^2$ ou $x = R\sqrt{2}$, et donne $y = R\sqrt{2}$.

Le rectangle demandé est donc le carré inscrit.

401. I. *Inscrire dans une sphère un cylindre dont la surface convexe soit un maximum.*

Soient R le rayon de la sphère, x le rayon de la base du cylindre, y la moitié de sa hauteur, et πa^2 un cercle équivalent à la surface convexe du cylindre. On aura

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ et } 2\pi x . 2y = \pi a^2 \text{ ou } 4xy = a^2 \text{ , d'où } 2xy = \frac{a^2}{2} .$$

En faisant usage de la méthode indiquée au n° **194**, on trouvera

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{R^2 + \frac{a^2}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{2}} \text{ ; } y = \tfrac{1}{2}\sqrt{R^2 + \frac{a^2}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{2}} .$$

La condition de réalité est $R^2 - \frac{a^2}{2} > 0$, d'où $a^2 < 2R^2$ et $\pi a^2 < 2\pi R^2$.

La surface du cylindre a donc un maximum $2\pi R^2$, égal à la moitié de la surface de la sphère, et qui répond à $x = y = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$.

II. *Inscrire dans une sphère un cylindre dont la surface totale soit un maximum.*

En conservant les mêmes notations, et en désignant par πa^2 la surface totale du cylindre, on aura

$$[1] \quad x^2 + y^2 = R^2 \text{ et } 2\pi x . 2y + 2\pi x^2 = \pi a^2 \text{ ou } 4xy + 2x^2 = a^2 \quad [2].$$

Multiplions l'équation [1] par a^2, l'équation [2] par R^2, et retranchons la seconde de la première ; il viendra

$$a^2y^2 - 4R^2xy + (a^2 - 2R^2)x^2 = 0 ,$$

ou, en divisant par x^2,

$$a^2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4R^2\left(\frac{y}{x}\right) + a^2 - 2R^2 = 0 .$$

Pour que le rapport $\frac{y}{x}$ soit réel, il faut qu'on ait :

$$4R^4 - a^2(a^2 - 2R^2) > 0 \quad \text{ou} \quad a^4 - 2R^2a^2 - 4R^4 < 0 .$$

En égalant à zéro le premier membre de cette inégalité, et y regardant a^2 comme l'inconnue, on verrait (**217**) qu'il se décompose en deux facteurs ; et qu'on peut écrire en conséquence,

$$[a^2 - R^2(1+\sqrt{5})][a^2 + R^2(\sqrt{5}-1)] < 0 .$$

Le second facteur étant essentiellement positif, il faut, pour que l'inégalité soit satisfaite, qu'on ait

$$a^2 < R^2(1+\sqrt{5}) .$$

Dans le cas du maximum de surface, on aura donc

$$a^2 = R^2(1+\sqrt{5}) \text{ , d'où } \quad \pi a^2 = \pi R^2(1+\sqrt{5}) .$$

Dans ce cas, l'équation [3] a deux racines égales (**218**); et l'on en tire

$$\frac{y}{x} = \frac{2R^2}{a^2} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} .$$

En combinant cette équation avec l'équation [1], on en déduit pour x et y les valeurs

$$x = R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \quad \text{et} \quad y = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} .$$

402. *Trouver le nombre des côtés d'un polygone qui a* n *diagonales.*

Soit x le nombre des côtés ou des sommets. De chaque sommet, on pourra mener autant de diagonales qu'il y a de sommets, moins 3 ; car le sommet que l'on considère est joint au sommet qui précède ou qui suit, par un côté et non par une diagonale. Chaque sommet fournira donc $x-3$ diagonales ; et, comme il y a x sommets, on obtiendrait ainsi $x(x-3)$ diagonales. Mais, comme il est aisé de voir que chacune d'elles serait ainsi comptée 2 fois ; le nombre réel des diagonales sera

$$\frac{x(x-3)}{2} = n .$$

On tire de là $$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+8n}}{2} .$$

La première valeur seule répond à la question.

§ III. Problèmes élémentaires de Physique et de Mécanique *.

403. *Trouver le diamètre d'un boulet de 24 kilogrammes.*

Soit x ce diamètre, exprimé en décimètres; le volume du boulet exprimé en décimètres cubes sera

$$\tfrac{1}{6}\pi x^3 .$$

Or, on trouve dans les tables de densité, que la densité de la fonte est 7,207; c'est-à-dire qu'un décimètre cube de fonte pèse $7^k,207$. En multipliant donc ce poids par le nombre de décimètres cubes contenus dans le volume du boulet, on aura son poids. Égalant enfin ce poids au poids donné, 24^k, on aura

$$\tfrac{1}{6}\pi x^3 .7,207 = 24 \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt[3]{\frac{24\times 6}{\pi\times 7,207}} .$$

En employant les logarithmes, on trouve $x = 1^{\text{décim}},85272..$ ou, à peu près, $0^{\text{m}},185$.

404. *Il faut 19 feuilles d'or, de forme carrée, et de 19 centimètres de côté, pour faire le poids d'un gramme. Quelle est leur épaisseur?*

Soit x cette épaisseur, exprimée en fraction du décimètre. Le volume de chaque feuille, exprimé en décimètre cube, aura pour expression $(1,9)^2.x$. La densité de l'or battu est 19,362; le poids d'une feuille, en kilogrammes, sera donc $(1,9)^2.x.19,362$. En égalant le poids des 19 feuilles à 1 gramme ou $0^k,001$, on aura donc

$$(1,9)^2.x.19,362.19 = 0^k,001 \quad \text{ou} \quad (1,9)^3.19,362.x = 0,1 ,$$

d'où
$$x = \frac{0,1}{(1,9)^3.19,362} .$$

En employant les logarithmes, on trouve

$$x = 0^{\text{dec}},00000075299 \quad \text{ou à peu près} \quad x = 0^{\text{mm}},0000729 .$$

Il faudrait près de 16000 de ces feuilles pour faire l'épaisseur d'un millimètre.

405. *Trouver le diamètre d'un fil de platine, pesant 1 gramme, et qui a 1 kilomètre de long.*

Soit x le diamètre cherché, exprimé en fraction du décimètre. Le volume du fil, considéré comme un cylindre, sera $\tfrac{1}{4}\pi x^2.10000$,

* Voy., pour les principes invoqués, le *Traité de Physique* de M. Péclet.

en décimètres cubes. La densité du platine tiré à la filière étant $21,0417$, le poids du fil, exprimé en kilogrammes, sera $\frac{1}{4}\pi x^2.10000 \times 21,0417$. On devra donc avoir

$$\tfrac{1}{4}\pi x^2.10000.21,0417 = 0,001 \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt{\frac{0,004}{\pi.210417}}.$$

On trouve, en opérant par logarithmes, $x = 0^{\text{dec}},000077788\ldots$ ou $x = 0^{\text{mm}},0077788\ldots$.

406. I. *On enfonce dans l'eau, par le sommet, un cône de bois de sapin; de quelle fraction de sa hauteur devra-t-il plonger pour se maintenir en équilibre?*

Soient h sa hauteur, x la quantité dont il plonge, et d la densité du sapin. Le poids du volume d'eau déplacé devra être égal au poids du cône. Le volume plongé et le volume total sont deux cônes semblables, qui sont proportionnels aux cubes de leurs hauteurs; on pourra donc les représenter par kx^3 et kh^3. Ainsi on devra avoir

$$kx^3 \times 1 = kh^3 \times d,$$

puisque la densité de l'eau est 1. On tire de là

$$x = h\sqrt[3]{d} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{h} = \sqrt[3]{d}.$$

Pour le sapin, on a $d = 0,55$. On aura donc $\dfrac{x}{h} = \sqrt[3]{0,55}$.

On trouve, par logarithmes, $\dfrac{x}{h} = 0,81932$.

Le cône devra donc plonger des $\dfrac{4}{5}$ environ de sa hauteur.

II. *De quelle fraction de sa hauteur le même cône devrait-il plonger, pour l'équilibre, si on l'enfonçait par la base?*

Soit toujours h la hauteur. Appelons y la portion de cette hauteur qui devra dépasser le niveau de l'eau. Le volume extérieur à l'eau pourra être représenté par ky^3, le volume total par kh^3, et le volume plongé par $k(h^3-y^3)$. On devra donc avoir

$$k(h^3-y^3)\times 1 = kh^3.d;$$

d'où

$$y = h\sqrt[3]{1-d}.$$

On remarquera que, pour que y soit réel, il faut qu'on ait $d<1$.

La hauteur x que l'on cherche est égale à $h-y$; on a donc

$$x = h - h\sqrt[3]{1-d} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{h} = 1 - \sqrt[3]{1-d}.$$

Pour le sapin, c'est-à-dire pour $d=0,55$, on trouve $\dfrac{x}{h} = 0,23368\ldots$

Le cône devra donc plonger, dans ce cas, d'un peu moins du quart de sa hauteur.

407. *Une sphère creuse faite d'une matière dont la densité est* d, *est remplie d'un gaz dont la densité est* δ *; quelle est la condition pour que cette sphère puisse s'élever dans l'air?* (On donne l'épaisseur e de l'enveloppe.)

Soient R et r les rayons extérieur et intérieur de la sphère creuse; et supposons les densités d et δ rapportées à celle de l'air. En exprimant que le poids de l'enveloppe, augmenté du poids du gaz contenu, forme une somme moindre que le poids de l'air déplacé, on aura

$$\tfrac{4}{3}\pi(R^3-r^3)d+\tfrac{4}{3}\pi r^3\delta<\tfrac{4}{3}\pi R^3,$$

d'où

$$R^3(d-1)<r^3(d-\delta),$$

ou

$$r>R\sqrt[3]{\frac{d-1}{d-\delta}},$$

mais $r=R-e$; en substituant on aura donc

$$R-e>R\sqrt[3]{\frac{d-1}{d-\delta}} \quad \text{d'où} \quad R>\frac{e}{1-\sqrt[3]{\dfrac{d-1}{d-\delta}}}.$$

Si, par exemple, la matière solide était du cuivre, et le gaz de l'hydrogène, on aurait pour la densité du cuivre rapportée à l'eau $8,788$; mais la densité de l'eau rapportée à l'air, est le rapport de deux poids égaux d'eau et d'air, d'un litre, par exemple, ce qui donne $\dfrac{1000}{1,3}$; on aurait donc pour la densité du cuivre rapportée à l'air $\dfrac{87880}{13}$ ou 6760. On aurait ensuite pour la densité de l'hydrogène $0,0668$. Supposons en outre $e=0^m,001$, il viendra

$$R>\frac{0^m,001}{1-\sqrt[3]{\dfrac{6759}{6759,9332}}}.$$

En effectuant les calculs indiqués, on trouvera $R>20^m,1613\ldots$

408. *Deux corps tombent du même point dans le vide, mais à un intervalle de temps* δ. *On demande au bout de quel temps ils seront distants de* m *mètres.*

Soient E l'espace parcouru au bout du temps t par le premier corps, et e l'espace parcouru au bout du même temps par le second, lequel n'aura marché réellement que pendant le temps $t-\delta$.

On aura, en vertu des lois de la chute des corps :

$$E = \tfrac{1}{2} g t^2 \quad \text{et} \quad e = \tfrac{1}{2} g (t - \delta)^2 ,$$

Mais $E - e = m$, on aura donc

$$m = \tfrac{1}{2} g \left[t^2 - (t-\delta)^2\right] = \tfrac{1}{2} g (2t\delta - \delta^2) \quad \text{d'où} \quad t = \frac{m}{g\delta} + \frac{\delta}{2} .$$

Si, par exemple, $\delta = 0'',1$ et $m = 10^{m}$, en se rappelant que $g = 9^{m},8088$, on trouvera $t = 10'',24$.

409. *Un corps est lancé verticalement dans le vide avec une vitesse initiale* v . *Au bout de quel temps sera-t-il à une hauteur* h ?

En appelant t le temps cherché, on aura, d'après les lois du mouvement vertical des corps dans le vide,

$$h = vt - \tfrac{1}{2} g t^2 \quad \text{d'où} \quad t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 2gh}}{g} .$$

La condition de réalité est $v^2 - 2gh > 0$. La hauteur h a donc un *maximum* $h = \dfrac{v^2}{2g}$, qui répond à $t = \dfrac{v}{g}$.

Si la condition de réalité est remplie, on a pour t deux valeurs positives qui conviennent toutes deux à la question. La plus petite se rapporte à l'ascension du mobile et la plus grande à la descente, qui commence à l'instant où le mobile est parvenu à la hauteur *maximum*.

410. *Un observateur laisse tomber une pierre dans un puits et perçoit le bruit de sa chute* t *secondes après. On demande la profondeur du puits, sachant que le son parcourt* a *mètres par seconde.*

Soit x la profondeur demandée. L'intervalle de temps t observé est la somme du temps employé par la pierre à parvenir au fond du puits, et du temps employé par le son à parvenir à l'oreille de l'observateur. Le premier de ces deux temps a pour valeur $\sqrt{\dfrac{2x}{g}}$, en vertu de la relation déjà employée $e = \tfrac{1}{2} g t^2$. Le second temps a pour valeur $\dfrac{x}{a}$. On a donc

$$\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{2x}{g}} = t .$$

Posons $\sqrt{x} = y$, d'où $x = y^2$, il viendra

$$\frac{y^2}{a} + y\sqrt{\frac{2}{g}} = t , \quad \text{d'où} \quad y = -\sqrt{\frac{a^2}{2g}} \pm \sqrt{\frac{a^2}{2g} + at} .$$

La première valeur convient seule à la question. On aura donc

$$x = \left(\sqrt{\frac{a^2}{2g} + at} - \sqrt{\frac{a^2}{2g}}\right)^2 .$$

Si, par exemple, on prend $a = 340^{\mathrm{m}}$ et qu'on suppose $t = 5''$, on trouvera $x = 107^{\mathrm{m}},54$, à un centimètre près.

411. I. *Un poids* P *est équilibré par un poids* Q *dans une balance fausse; si l'on change le poids* P *de plateau, il faudra un poids* Q′ *pour lui faire équilibre. On demande dans quel rapport sont les longueurs des deux bras du fléau.*

Soient a et b ces deux longueurs. On a dans le premier cas

$$\mathrm{P}a = \mathrm{Q}b ,$$

et dans le second

$$\mathrm{Q}'a = \mathrm{P}b .$$

Multipliant ces deux égalités terme à terme et supprimant le facteur commun P, il vient

$$\mathrm{Q}'a^2 = \mathrm{Q}b^2 ,$$

d'où $a\sqrt{\mathrm{Q}'} = b\sqrt{\mathrm{Q}}$ et $a : b :: \sqrt{\mathrm{Q}} : \sqrt{\mathrm{Q}'}$,

c'est-à-dire que les longueurs des bras du fléau sont en raison inverse des racines carrées des poids qui faisaient équilibre au même poids P, lorsqu'il était appliqué à l'extrémité de chacun de ces bras.

II. *Deux poids égaux se font équilibre dans une balance. Si l'un des deux bras du fléau augmentait d'une quantité* a, *il faudrait pour l'équilibre que le poids correspondant diminuât de* p ; *et si ce même bras diminuait de* b, *il faudrait que le poids correspondant augmentât de* q. *On demande la longueur du bras du fléau et le poids qui y est suspendu.*

Soient x la longueur des bras, et y le poids qui y est suspendu; on aura

$$(x + a)(y - p) = xy \quad \text{et} \quad (x - b)(y + q) = xy ,$$

ou

$$ay - px = ap \quad \text{et} \quad qx - by = bq .$$

On tire de ces équations

$$x = \frac{ab(p + q)}{aq - bp} \quad \text{et} \quad y = \frac{pq(a + b)}{aq - bp} .$$

Dans le cas où l'on aurait $b = a$, il resterait

$$x = a \cdot \frac{q + p}{q - p} \quad \text{et} \quad y = p \cdot \frac{2q}{q - p} .$$

412. *Un pendule simple, dont la longueur est* l, *a fait un certain nombre d'oscillations dans un certain temps, et l'on remarque* *qu'il en aurait fait* n *de plus si on l'eût raccourci de la quantité* a. *On demande pendant combien de temps il a oscillé, et le nombre d'oscillations qu'il a faites.*

La durée d'une oscillation d'un pendule simple dont la longueur est l, a pour expression

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

En nommant donc x le nombre d'oscillations qu'il a faites dans le temps inconnu y, on aura

$$y = x\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

mais on aura, par une raison analogue,

$$y = (x+n)\pi\sqrt{\frac{l-a}{g}}.$$

Éliminant y, il vient, après avoir divisé par π et multiplié par $\sqrt{g}$,

$$x\sqrt{l} = (x+n)\sqrt{l-a}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{n\sqrt{l-a}}{\sqrt{l}-\sqrt{l-a}},$$

et, par suite,

$$y = n\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\sqrt{l-a}}{\sqrt{l}-\sqrt{l-a}}.$$

Si, par exemple, on a $l = 1^{m}$, $a = 0^{m},36$, et $n = 20$, on trouvera

$$x = 80 \quad \text{et} \quad y = 80'',244\ldots.$$

413. I. *Un gaz occupe un volume* V, *sous la pression* P *et à la température* t, *à quelle température faut-il l'élever pour qu'il occupe le volume* V′ *sous la pression* P′ ?

Il résulte de la loi de Mariotte et de la loi de Gay-Lussac, que, pour une même masse de gaz, la quantité

$$\frac{VP}{1+at}$$

reste constante (a désignant le coefficient de dilatation). En nommant donc x la température cherchée, on devra avoir

$$\frac{VP}{1+at} = \frac{V'P'}{1+ax} \quad \text{d'où} \quad 1+ax = (1+at)\frac{V'P'}{VP},$$

et

$$x = \left(\frac{1}{a}+t\right)\frac{V'P'}{VP} - \frac{1}{a}.$$

Si, par exemple, $\frac{V'}{V}=2$, $\frac{P'}{P}=\frac{2}{3}$, et $t=10^0$; comme on a $a=0,00366$; il viendra $x=104^0,4$.

II. *Le coefficient de dilatation des gaz est* 0,00366 *quand on prend pour point de départ le volume à* 0^0 *et qu'on se sert du thermomètre centigrade. Quel serait ce coefficient, si on se servait d'un thermomètre qui marquât* α *degrés pour la glace fondante et* β *pour l'ébullition de l'eau; et que l'on prît pour point de départ le volume du gaz à* n *degrés de ce thermomètre.*

Puisque l'intervalle $\beta-\alpha$ répond à 100^0 du thermomètre centigrade, 1 degré du thermomètre proposé en vaut $\frac{100}{\beta-\alpha}$ du thermomètre centigrade; $n-\alpha$ degrés (qui est le nombre de degrés au-dessus de la glace fondante correspondant au point de départ proposé), valent donc $(n-\alpha)\frac{100}{\beta-\alpha}$ ou $100\frac{n-\alpha}{\beta-\alpha}$ degrés du thermomètre proposé.

Cela posé, soient v le volume du gaz à cette température de point de départ, V son volume à la température de l'ébullition et v_0 son volume à la température de la glace fondante. On aura

$$V=v_0(1+100a)\ ;\quad v=v_0\left[1+100\frac{n-\alpha}{\beta-\alpha}.a\right].$$

En appelant d'ailleurs x le coefficient cherché, on aura

$$V=v[1+(b-n)x].$$

De ces trois équations on tire

$$\left[1+100\frac{n-\alpha}{\beta-\alpha}.a\right][1+(b-n)x]=1+100a.$$

d'où

$$x=\frac{100a}{(\beta-\alpha)+100a(n-\alpha)},$$

Si, par exemple, on se sert du thermomètre de Farenheit et qu'on prenne pour point de départ le volume du gaz à 50^0 de ce thermomètre, ce qui répond à peu près à la température moyenne de l'année, on aura $\alpha=32$, $\beta=212$, $n=50$; d'ailleurs $a=0,00366$; on trouvera ainsi

$$x=0,001529.$$

414. *On a compté* 11 *secondes* $\frac{1}{2}$ *entre l'instant où l'on a aperçu la lumière résultant de l'explosion d'une pièce d'artillerie, et l'instant où l'on a entendu le bruit de cette explosion. On sait que cette pièce était placée à* 4000^m *de distance. On demande la température au moment de l'observation.*

La formule qui donne la vitesse du son dans l'air est

$$V = 333^{\text{m}}\sqrt{1 + 0,00366 . t} ,$$

t désignant la température exprimée en degrés du thermomètre centigrade. D'après l'énoncé on doit avoir $V \times \frac{23}{2} = 4000$, puisque V est l'espace que le son parcourt dans une seconde. On tire de là $V = \frac{8000}{23}$; par conséquent $\frac{8000}{23} = 333\sqrt{1 + 0,00366 . t}$, d'où $t = 24^{\circ},8$.

415. *On demande le nombre de demi-tons moyens contenus dans l'intervalle de deux sons musicaux, dont l'un répond à* a *vibrations dans une seconde, et l'autre à* b *vibrations dans le même temps.*

Le nombre demandé est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la quantité $\sqrt[12]{2}$ pour produire le rapport $\frac{a}{b}$; en d'autres termes, c'est le *logarithme acoustique* de ce rapport. On a donc

$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^x = \frac{a}{b} , \quad \text{d'où} \quad x = \frac{(\log a + \bar{\text{L}}\, b) . 12}{\log 2} .$$

Si, par exemple, on a $a = 2700$ et $b = 1800$, auquel cas l'intervalle considéré est une quinte juste, on trouvera

$$x = 7,02 ,$$

ou un peu plus de 7 demi-tons moyens. Cet intervalle est donc un peu plus élevé que la quinte tempérée, qui est de 7 demi-tons moyens exactement.

416. *Un corps se refroidit dans l'air. L'excès de sa température sur celle de l'air était primitivement de* 10° ; *au bout de* 12 *minutes cet excès est réduit à* 5° ; *on demande dans combien de temps il sera réduit à* 2°.

L'excès de température étant faible, on peut admettre la loi de Newton. En appelant T l'excès de température au bout du temps t ; T_0 l'excès primitif, et m un coefficient constant, on a

$$T = \frac{T_0}{10^{mt}} .$$

Appelons x le temps cherché, nous aurons les deux équations

$$5 = \frac{10}{10^{12m}} \quad \text{et} \quad 2 = \frac{10}{10^{mx}} ,$$

d'où l'on tire $12m + \log 5 = 1$ et $mx + \log 2 = 1$, et en éliminant m,

$$x = 12 \cdot \frac{1 - \log 2}{1 - \log 5} = 27',8628 \quad \text{ou} \quad 27'\,52'' \text{ environ}.$$

417. *Un corps est placé à une certaine distance au-dessus de la surface du globe; cette distance est telle que, si elle augmentait de* h *, l'attraction terrestre diminuerait d'une fraction* m *de sa valeur. Quelle est cette distance?*

Désignons par x la distance actuelle du corps au centre de la terre, par R le rayon du globe, par g l'accélération due à la pesanteur à la surface du globe, et par y celle qui est due à l'attraction terrestre à la distance x ; ces accélérations mesureront l'attraction à la distance R et à la distance x.

On aura donc

$$y : g :: \mathrm{R}^2 : x^2 \quad \text{et} \quad y - my : g :: \mathrm{R}^2 : (x+h)^2 .$$

De la première proportion, on tire

$$y = \frac{g\mathrm{R}^2}{x^2} ;$$

et, en substituant dans la seconde, il vient

$$\frac{g\mathrm{R}^2(1-m)}{x^2} : g :: \mathrm{R}^2 : (x+h)^2 , \quad \text{d'où} \quad (x+h)^2(1-m) = x^2 ;$$

et, en extrayant la racine carrée,

$$(x+h)\sqrt{1-m} = x , \quad \text{d'où} \quad x = \frac{h\sqrt{1-m}}{1-\sqrt{1-m}} .$$

Par suite
$$y = g\frac{\mathrm{R}^2}{h^2}\left(\frac{1-\sqrt{1-m}}{\sqrt{1-m}}\right)^2 .$$

Si l'on a, par exemple $h = \mathrm{R}$ et $m = \frac{3}{5}$, on trouvera

$$x = 4\mathrm{R} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{16} g .$$

418. *Deux corps célestes, dont les masses sont* m *et* M *, sont à une distance* d *l'un de l'autre : en quel point de la ligne qui joint leurs centres faut-il placer un troisième corps, pour qu'il demeure en équilibre sous l'attraction de chacun des deux premiers?*

Soient m' la masse du troisième corps; x sa distance au corps dont la masse est m : $d-x$ sera sa distance au corps dont la masse est M . On devra donc avoir

$$\frac{mm'}{x^2} = \frac{\mathrm{M}m'}{(d-x)^2} , \quad \text{d'où} \quad m(d-x)^2 = \mathrm{M}x^2 \quad [1];$$

et, en extrayant la racine,

$$(d-x)\sqrt{m}=x\sqrt{\mathrm{M}}\ ;$$

d'où
$$x=\frac{d\sqrt{m}}{\sqrt{\mathrm{M}}+\sqrt{m}}=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{m}}}\,.$$

S'il s'agit, par exemple, de la terre et de la lune, on aura, en nommant R le rayon terrestre,

$$d=60\mathrm{R} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{M}}{m}=65\,,$$

d'où l'on tirera
$$x=6{,}72\,.\,\mathrm{R}\,,$$

c'est-à-dire plus de 6 fois $\frac{1}{2}$ le rayon terrestre.

Remarque. En extrayant la racine des deux membres de l'équation [1], on n'a pris que le signe $+$ devant chaque membre, attendu que, le point cherché étant supposé placé entre les deux centres, x et $d-x$ doivent être de même signe.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME PARTIE.

QUESTIONS DIVERSES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

lg.

[illegible] p. 324