ANALES

DE LA

Facultad de Ciencias

DE ZARAGOZA

Se publican por trimestres, en los meses de Marzo, Junio, Septiembre y Diciembre

AÑO I. — JUNIO. — NÚM. 2

SUMARIO

Matemática.—Nota sobre fracciones racionales. —*F. Correa.*—Punto notable asociado á un punto de una cónica. *M. Stuyvaert.*—Sobre dos integrales definidas. *C. Pompeiu.*—Cuestiones propuestas.
Mecánica.—Algunas observaciones sobre la teoría de centros de gravedad. *J. Hatzidakis.*
Física.—Sobre algunos fenómenos de polarización. —*E. Terradas.*
Química.—Influencia de la forma de las masas líquidas que fermentan, en la cantidad de alcohol producido y en la duración del fenómeno. *A. Gregorio Rocasolano.*
Historia Natural.—Ornitología de Aragón. *L. Navás. S. J.*—Teruelitas del Museo de Historia Natural de Zaragoza. *P. Ferrando.*
Meteorología.—Estudio preliminar del clima de Zaragoza. *G. Silván.*—Observaciones meteorológicas del 2.º trimestre. *J. A. Izquierdo.*
Bibliografía. Publicaciones recibidas.
Crónica

Precio de suscripción . { España. . . 1 año 8 pesetas. Extranjero. 1 id. 10 francos.

La correspondencia administrativa á D. ANTONIO SANZ, D. Alfonso I, 20, librería

ZARAGOZA
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE EMILIO CASAÑAL, COSO, 100
1907

Anales de la Facultad de Ciencias

SEÑORES PROFESORES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE ZARAGOZA

ALVAREZ Y UDE (JOSÉ GABRIEL).—Catedrático de Geometría descriptiva y Geometría de la posición.

ARÉVALO Y CARRETERO (CELSO).—Auxiliar de Historia Natural.

BOZAL Y OBEJERO (EDUARDO).—Auxiliar de Física.

CALAMITA Y ALVAREZ (GONZALO).—Catedrático de Química orgánica.

FERRANDO Y MÁS (PEDRO).—Catedrático de Historia natural.

GALÁN Y RUIZ (GABRIEL).—Catedrático de Astronomía y Cosmografía.

G. DE GALDEANO (ZOEL).—Catedrático de Cálculo infinitesimal.

GREGORIO Y ROCASOLANO (ANTONIO DE).—Catedrático de Química general.

IZQUIERDO Y GÓMEZ (J. ANTONIO).—Catedrático de Física y Cristalografía.

LAFIGUERA Y LEZCANO (LUIS).—Auxiliar de Geometría.

LOBO Y GÓMEZ (RUPERTO).—Auxiliar de Química.

MARCO Y MONTÓN (JUAN).—Auxiliar de Mecánica y Astronomía.

RIUS Y CASAS (JOSÉ).—Catedrático de Análisis matemático, 1.º y 2.º curso.

SAVIRÓN Y CARAVANTES (PAULINO).—Catedrático de Química inorgánica y Análisis químico.

SILVÁN Y GONZÁLEZ (GRACIANO).—Catedrático de Geometría analítica y Geometría métrica.

TERRADAS É ILLA (ESTEBAN).—Catedrático de Mecánica racional.

YOLDI Y BEREAU (FRANCISCO).—Auxiliar de Química.

ANALES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
DE ZARAGOZA

AÑO I | MARZO DE 1907 | NÚM. 1

NUESTROS PROPÓSITOS

Hace tiempo, que los profesores de la Facultad de Ciencias de Zaragoza, unidos por estrechos lazos de amistad, pensábamos en la publicación de una Revista de carácter científico.

Dificultades muy variadas, que no escaparán al buen juicio del lector, hicieron imposible por mucho tiempo que llegásemos á dar forma y realidad á aquel pensamiento; mas para que rompiéramos nuestro temor y viésemos el nacimiento de nuestro deseo, con los ojos optimistas de nuestra buena voluntad, han contribuido actualmente varias causas, entre las que debemos mencionar el haber cesado en su publicación la *Revista Trimestral de Matemáticas*, dirigida por D. José Rius y Casas, que prolongó por varios años los dignos propósitos iniciados y mantenidos antes en dos diversas épocas, por el *Progreso Matemático*, de que fué fundador D. Zoel G. de Galdeano.

Al hacer nuestra Revista eco de la Facultad de Ciencias, hemos creido conveniente no limitar su campo de acción al de la Matemática pura, sino dar en ella lugar á todas las Ciencias que son objeto de enseñanza en nuestro centro, constituyendo otras tantas secciones especiales que se denominarán Física, Química, Historia natural, Astronomía y Meteorología.

A nadie ha de extrañar que nuestra labor, realizada con escasos medios de investigación, sea insuficiente para nutrir las páginas de unos anales que constarán por término medio de sesenta y cuatro páginas cada trimestre. Por ello, y porque la labor ajena será siempre para nosotros respetada y estimada, en las columnas de nuestra publicación tendrán cabida, y con ello nos honraremos, los trabajos de colaboración que posean el carácter apropiado.

No pretendemos que estén formados nuestros ANALES por trabajos de originalidad indiscutible, pues en el estado actual del campo de la Ciencia, por tantos ingenios cultivado, no se nos oculta que es difícil recolectar frutos nuevos; pero en terreno fértil siempre quedan algunas espigas por recoger cuando la perseverancia las busca.

La labor científica actual, á menos que esté encomendada á los elegidos, se limita de un lado por la modesta investigación que corrobora, analiza, perfecciona ó discute lo ya hecho; y del otro por la vulgarización, que despojándose de los naturales medios de expresión propios de cada ciencia, y enojosos para muchos, lleva á los espíritus ávidos, en forma siempre sencilla y á veces atractiva y pintoresca, los principios fundamentales de las ciencias exactas, y particularmente, los dotados de carácter experimental.

Este segundo modo, que podríamos llamar de vulgarización, ha sido y es adoptado en numerosas revistas y periódicos diarios, que haciendo un paréntesis en las cuestiones de sus particulares fines, buscan la amenidad y la manera de satisfacer al lector, informándole sobre cuestiones científicas ó sobre recientes descubrimientos.

El primer modo, el de investigación, comprendiendo en él la didáctica y la crítica, ha sido adoptado por algunas recientes publicaciones que hacen honor á la ciencia española, y que merecerán el parabién de los amantes del estudio.

Serán nuestros Anales, ó por lo menos, así lo deseamos una de estas publicaciones, aunque la más modesta por sus fines.

A todas ellas saludamos cordialmente al comenzar nuestras tareas, que serán premiadas con exceso si llegamos á colaborar en la obra del movimiento científico afortunadamente ya iniciado en España por un núcleo numeroso de hombres independientes, prestos en el hacer, tardos en el pedir, no adictos á secta ni escuela alguna, y mucho menos apasionados por otra que no sea la labor continua, ni guiados por más esperanzas de progreso, que la paz y el trabajo.

La Redacción.

Sobre el cuadrilátero plano inscriptible y circunscriptible á un círculo.

1. Indicando con a, b, c, d los lados AB, BC, CD, DA y con α, β, γ, δ los ángulos BAC, CBD, DCA y ADB (*) las fórmulas conocidas que dan los senos de los semiángulos de un cuadrilátero inscriptible, cuando sea también circunscriptible ó se tenga

(1) $$a + c = b + d,$$

darán (**)

[2] $$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{bc}{ad+bc}},$$

de la que

[3] $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \cot\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{bc}{ad}}$$ y [4] $$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \sqrt{\frac{ac}{bd}}.$$

Serán por consiguiente

(5) $$b = a\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$ (6) $$c = a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

(7) $$d = a\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

y estas relaciones dan el modo de expresar cualquiera función de los cuatro lados por medio de uno de ellos y de los dos ángulos adyacentes, cuyos tres elementos determinan completamente el cuadrilátero (***).

2. Indicando con r y R los radios de los círculos inscrito y circunscrito, y recordando sus expresiones en función de los la-

(*) Se ruega al lector que dibuje la figura.

(**) Cuando el número de orden de la fórmula esté en paréntesis cuadrado, se deberá extender á los demás elementos, por permutación circular entre a, b, c, d y y entre α, β, γ, δ, teniendo en cuenta las conocidas relaciones entre estos.

(***) La (6) y la (7) se pueden deducir de la (5) siguiendo primero la sustitución indicada y sirviéndose después de la (5) misma.

dos de un cuadrilátero inscriptible, por las (1), (5), (6) y (7) se obtiene fácilmente

$$(8)\quad r = \frac{a \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha \,.\, \operatorname{sen} \frac{1}{2}\beta}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}, \qquad (9)\quad R = \frac{a\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}}{4\cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

de las que inmediatamente resulta

$$(10)\qquad \frac{R^2}{r^2} = \frac{1+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta}.$$

3. Consideremos las dos diagonales AC y BD, é indicando con E el punto de intersección y con e', f', e'', f'' los segmentos AE, BE, CE, DE es fácil ver que se tiene (*)

$$[11]\qquad \operatorname{sen} ABD = \operatorname{sen} ACD = \frac{2\cos\frac{1}{2}\alpha \operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}},$$

$$[12]\qquad \cos ABD = \cos ACD = \frac{1+2\cos\frac{1}{2}\alpha \operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}$$

$$[13]\qquad e' = \frac{a\cos\frac{1}{2}\alpha \operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} =$$

$$= 2R\operatorname{sen}\beta\cos^2\frac{1}{2}\alpha = r\cot\frac{1}{2}\alpha\,.\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}.$$

Observación. De la (13) se obtiene

$$e'+e''=2R\operatorname{sen}\beta, \qquad f'+f''=2R\operatorname{sen}\alpha, \qquad e'e''=f'f'',$$

como debía verificarse.

4. Si indicamos con P el centro del círculo circunscrito y con O el del inscrito, y bajamos desde ellos la perpendicular sobre AB cuyos pies sean M_a y K_a, tendremos

$$\overline{OP}^2 = (PM_a - OK_a)^2 + (AK_a - AM_a)^2,$$

ó sea

$$\overline{OP}^2 = \left(\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}} - r\right)^2 + \left(r\cot\frac{\alpha}{2} - \frac{a}{2}\right)^2,$$

(*) Haciendo la permutación circular antedicha en los segundos miembros, los primeros son respectivamente f' e'' f''.

ó también

$$\frac{\overline{OP}^2}{R^2} = \left(\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2R}\right)^2} - \frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{R}{r} \cot \frac{\alpha}{2} - \frac{a}{2R}\right)^2.$$

Ahora, de la (10) se deduce fácilmente

$$\frac{r}{R} \cot \frac{\alpha}{2} - \frac{a}{2R} = - \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}},$$

y de la (9) de igual modo

$$1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 = \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{1 + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} =$$

$$= \frac{\left[1 - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)\right]^2}{1 + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta},$$

por lo cual será

$$\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2R}\right)^2} - \frac{r}{R} = \frac{1 - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}} =$$

$$= \frac{1 - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}}.$$

De donde sustituyendo y reduciendo resulta

$$\frac{\overline{OP}^2}{R^2} = \frac{1 - \operatorname{sen} \alpha \, . \operatorname{sen} \beta}{1 + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}. \tag{14}$$

Observación. De la (10) y de la (14) se obtiene

$$\frac{r^2}{\overline{OP}^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta}{1 - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}. \tag{15}$$

5. Si de P se baja la perpendicular sobre BD y H es su pie, se tiene

$$\overline{PE}^2 = \overline{HE}^2 + \overline{HP}^2 = \overline{HE}^2 + \overline{DP}^2 - \overline{DH}^2 = R^2 - (\overline{DH}^2 - \overline{HE}^2) =$$
$$= R^2 - (DH + HE)(DH - HE) = R^2 - f'f'';$$

y de aquí y de las (13) se deduce inmediatamente

$$\frac{\overline{PE}^2}{R^2} = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta. \tag{16}$$

Observación. De la (14) y de la (16) resulta

$$\frac{PE}{OP} = 1 + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta. \tag{17}$$

6. Si de O y de E se bajan las perpendiculares sobre el lado AB y son K_a, S_a sus pies, se tiene

$$\overline{OE}^2 = (OK_a - ES_a)^2 + \overline{K_aS_a}^2 = (OK_a - ES_a)^2 + (K_aB - S_aB)^2,$$

y por tanto

$$\frac{\overline{OE}^2}{r^2} = \left(1 - \frac{f' \operatorname{sen} ABD}{r}\right)^2 + \left(\cot\frac{\beta}{2} - \frac{f' \cos ABD}{r}\right)^2,$$

y de aquí por las [11], [12] y [13]

$$\frac{\overline{OE}^2}{r^2} = \left(1 - 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)^2 + 4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

ó sea

$$\frac{\overline{OE}^2}{r^2} = 1 - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta. \tag{18}$$

Observación. De la (15) y la (18) se obtiene

$$OC = OP \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta. \tag{19}$$

7. De todas las fórmulas precedentes se pueden deducir consecuencias muy notables, de las que daremos algunos ejemplos.

I). De la [3], siendo

$$K_aB = r\cot\frac{\beta}{2}, \qquad K_aA = r\cot\frac{\alpha}{2}$$

resulta

$$K_aB : K_aA = b : d;$$

ó sea que: *todo lado es dividido por el punto de contacto con el círculo inscrito en partes proporcionales á los lados adyacentes.*

II) De la (10) y la (14) se obtiene

$$R^2 - \overline{OP}^2 = \frac{2r^2}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}, \qquad R^2 + \overline{OP}^2 = \frac{2r^2}{\operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\beta}$$

de las que

$$\left(R^2 + \overline{OP}^2\right) 2r^2 = \left(R^2 - \overline{OP}^2\right)^2.$$

Esta relación es conocida bajo la forma equivalente

$$\frac{r^2}{(R+OP)^2} + \frac{r^2}{(R-OP)^2} = 1,$$

y es un caso particular de una relación que se encuentra en la teoría de las funciones elípticas.

III) De las relaciones precedentes resulta fácilmente que si se considera el diámetro OP del círculo circunscrito y se trazan las tangentes desde sus extremidades (y de una misma parte) al círculo inscrito, estas tangentes son perpendiculares entre sí.

IV) De la (17) y la (19) se obtiene la relación

$$OE + OP = PE,$$

de la cual resulta que en un cuadrilátero inscriptible y circunscriptible, el punto de intersección de las diagonales internas está en línea recta con los centros de los dos círculos.

La demostración de este nuevo teorema fué propuesta en la *R. T. M.* (96 c.) y en el *Supplemento di Matematica* (58 q. a conc.); en ambas revistas se publicó una demostración del Sr. Vercellin, basada en elegantes consideraciones geométricas. Habemos creído útil la publicación de la demostración precedente, por la importancia que parece tener la recta p encontrada, la cual, como el Sr. Vercellin ha demostrado, contiene además de los puntos O, P y E otros puntos notables y es perpendicular á la tercera diagonal.

Observación. Se demuestra que si existe un cuadrilátero inscriptible á un círculo y circunscriptible á otro, existen otros en número infinito, y el formado por las cuatro tangentes antedichas (**7**, III) es uno de ellos.

Todos esos cuadriláteros tienen común el punto de intersección de las diagonales interiores (porque OE es función de R y r solamente), y también por consiguiente la tercera diagonal.

La consideración del cuadrilátero de las tangentes muestra pues que la recta p es siempre perpendicular á la tercera diagonal; y muestra también cómo se pueden trazar inmediatamente dos círculos tales que exista un cuadrilátero circunscriptible al uno é inscriptible en el otro.

Octubre de 1905.

Prof. Giuseppe Pesci.
della R. Accademia Navale de Livorno.

Por la traducción: G. Silván.

Relaciones entre la teoría de los números y la de los grupos de operaciones.

1. Representaremos en esta nota con la letra p un número primo impar, y con las notaciones $\Pi(m)$, $\Pi(r_m)$, ..., respectivamente, los productos $(1 . 2 . 3 ..... m)$, $(r_1 . r_2 . r_3 ..... r_m)$, ...

Se sabe que si ϑ es un número natural cualquiera menor que p, los elementos de la serie

$$\vartheta,\ 2\vartheta,\ 3\vartheta, \ldots\ldots (p-1)\vartheta,$$

reproducen, respecto del módulo p, y prescindiendo del orden, los números de la serie

$$1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots p-1;$$

ya que si $m\vartheta$ es un elemento de la primera serie, siendo $m < p$, $\vartheta < p$, $m\vartheta$ es primo con p, y por tanto

$$m\vartheta \equiv r_m \ (\text{mód}\ p), \qquad 1 \leqq r_m \leqq p-1,$$

y si $m'\vartheta$ es otro elemento de la primera serie, se tiene de igual modo,

$$m'\vartheta \equiv r_{m'} \ (\text{mód}\ p), \qquad 1 \leqq r_{m'} \leqq p-1;$$

pero r_m y $r_{m'}$ deben ser diferentes, porque si fuesen iguales, sería

$$(m - m')\,\vartheta \equiv 0 \ (\text{mód}\ p),$$

lo que no es posible. Luego, como habíamos dicho, los números de ambas series coinciden, prescindiendo del orden.

Multiplicando miembro á miembro las congruencias del sistema

$$u\vartheta \equiv r_u \ (\text{mód}\ p), \qquad (u = 1, 2, 3, \ldots, p-1),$$

se halla

$$\Pi(p-1) \,.\, \vartheta^{p-1} \equiv \Pi(r_{p-1}) \ (\text{mód}\ p);$$

mas como, evidentemente, el producto

$$\Pi(p-1) = \Pi(r_{p-1}),$$

representa un número primo con p, se deduce (*Teorema de Fermat*)

$$\vartheta^{p-1} \equiv 1 \quad (\text{mód}\ p). \tag{a}$$

Formemos ahora la serie de las potencias sucesivas de ϑ,

$$\vartheta,\ \vartheta^2,\ \vartheta^3, \ldots\ldots \vartheta^k, \ldots\ldots \vartheta^h, \ldots\ldots \tag{b}$$

Puesto que, por la relación (a), existen potencias de ϑ que son congruentes con la unidad según el módulo p, sea β el primer exponente que satisfaga la congruencia

$$\vartheta^{\beta} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Todas las potencias de ϑ que preceden á ϑ^{β}, dan restos diferentes respecto del módulo p; porque siendo

$$\vartheta^{h} \equiv r_h \pmod{p}, \qquad \vartheta^{k} \equiv r_k \pmod{p},$$

dos de estas potencias, y $h > k$; si fuese $r^h = r^k$, deberíamos concluir que

$$\vartheta^{k} (\vartheta^{h-k} - 1) \equiv 0 \pmod{p},$$

lo que no es posible, por ser ϑ^{k} un número primo con p, y por ser $h - k < \beta$.

Los números de la serie (b), tomados respecto del módulo p, se reproducen periódicamente, ya que de las dos relaciones

$$\vartheta^{\beta} \equiv 1 \pmod{p}, \qquad \vartheta^{h} \equiv r_h \pmod{p},$$

se deduce

$$\vartheta^{\beta+h} \equiv r^h \pmod{p}.$$

Las únicas potencias de ϑ que admiten como resto la unidad, son evidentemente aquellas cuyo exponente es múltiplo de β. Luego, en virtud de la congruencia (a), se tiene $p - 1 = n\beta$, siendo n un número entero.

Se suele decir que el número ϑ *pertenece al exponente* β respecto del módulo p, es decir (*), que β es el menor exponente diferente de cero, que satisface la congruencia

$$\vartheta^{\beta} \equiv 1 \pmod{p}.$$

También se dice que β es el *gausiano* de ϑ respecto del módulo p A lo cual podemos añadir que el gausiano del número ϑ respecto del módulo p, es siempre un divisor de $p - 1$.

2. Sea q un divisor de $p - 1$, y ρ un número cuyo gausiano sea q, respecto del módulo p: todos los números cuyo gausiano es q, son raíces de la congruencia

$$x^q \equiv 1 \pmod{p},$$

y el número de estas no puede ser mayor que q (**); mas, como ρ

(*) Véase, por ejemplo: M. MARZAL.— *Calculatoria.*— Barcelona, 1898, pág. 291.= EULOGIO JIMENEZ.—*Teoría de los números.*—Mem. de la R. A. de Ciencias de Madrid, tomo VII, 1877, pág. 185.

(**) GAUSS.—*Disquisitiones arithmeticæ.*—1801, § 54.=EULOGIO JIMENEZ, *loc. cit.* p. 179.

es, por hipótesis, una de ellas, dichas raíces son

$$1, \rho, \rho^2, \rho^3, \ldots\ldots \rho^{q-1},$$

que son todas incongruentes entre sí respecto del módulo p. Para determinar el gausiano de cualquiera de estas raíces ρ^r, llamemos s al número más pequeño que verifique la relación

$$(\rho^r)^s = \rho^{rs} \equiv 1 \text{ (mód } p);$$

para lo cual debe ser rs múltiplo de q, ya que ρ pertenece al exponente q por hipótesis. Sea δ el máximo codivisor de r y q, y rq/δ su mínimo comúltiplo, será $s = q/\delta$ el menor número que cumpla la anterior condición, y ρ^r pertenece, por tanto (*), al exponente q/δ. Luego, para que su gausiano sea q, es necesario y suficiente que r y q sean primos entre sí; luego, de haber uno, hay $\varphi(q)$ números cuyo gausiano es q, representando con $\varphi(q)$ el *indicador de Gauss*, ó sea, el número de números primos con q y no mayores que q. Por lo tanto, si llamamos $\psi(q)$ el número de enteros menores que p cuyo gausiano respecto del módulo p es el divisor q de $p-1$, ó será $\psi(q) = 0$, ó bien $\psi(q) = \varphi(q)$. Mas, evidentemente, $\Sigma\psi(q) = p - 1$, supuesto extendido el símbolo sumatorio á todos los divisores de $p-1$; y como también $\Sigma\varphi(q) = p - 1$, resulta que siempre $\psi(q) = \varphi(q)$.

Así, por ejemplo, si el módulo es $p = 13$, basta buscar el gausiano de los doce primeros números de la serie natural, y como los divisores de 12 son: 1, 2, 3, 4, 6, 12; se ve (**) que hay:

$\varphi(1) = 1$ números cuyo gausiano es	1:	el mismo 1;
$\varphi(2) = 1$	2:	el número 12;
$\varphi(3) = 2$	3:	el 3 y el 9;
$\varphi(4) = 2$	4:	el 5 y el 8;
$\varphi(6) = 2$	6:	el 4 y el 10;
$\varphi(12) = 4$	4:	el 2, el 6, el 7 y el 11.

Ahora, como dado un elemento ϑ de orden m, sus potencias sucesivas

$$\vartheta, \vartheta^2, \vartheta^3, \ldots\ldots \vartheta^{m-1}, \vartheta^m = 1,$$

forman un grupo cíclico; podemos concluir que la serie de los números enteros tomados con relación al módulo p, excluidos los múltiplos del módulo, constituye un grupo cíclico de orden $p - 1$. También, y de un modo más general, si el módulo m es un entero cualquiera, existen $\varphi(m)$ números menores que m y primos con m, tales que, siendo x uno cualquiera de ellos, se tiene (*Teorema de*

(*) M. MARZAL, *loc. cit.* pág 281.=EULOGIO JIMENEZ, *loc. cit.* pág. 190.
(**) EULOGIO JIMENEZ, *loc cit.* pág 201.

Fermat generalizado)

$$x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m};$$

y si de la serie natural conservamos y referimos al módulo m, únicamente los números primos con él, se forma un grupo cíclico de orden $\varphi(m)$.

En el caso particular de que $m = p^n$, siendo p primo, será $\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$, y siendo x primo con p,

$$x^{p^{n-1}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^n};$$

de modo que si el gausiano de x es r, será

$$\varphi(p^n) \equiv 0 \pmod{r}.$$

También se puede repetir aquí el razonamiento hecho antes para ver cuántos números tienen un gausiano dado. Los números que respecto del módulo p^n pertenecen al exponente r, siendo r un divisor de $\varphi(p^n)$, son raíces de la congruencia

$$x^r \equiv 1 \pmod{p^n},$$

las cuales, siendo ρ uno de aquellos números, son á su vez, 1, ρ, ρ^2, ... ρ^{r-1}, incongruentes entre sí dos á dos respecto del módulo p^n. Para que una de estas raíces, por ejemplo, ρ^β, pertenezca al exponente r, es necesario y suficiente que β sea primo con r, luego el número $\psi(r)$ de los números cuyo gausiano es r, ó es 0, ó es igual á $\varphi(r)$. Mas por otra parte $\Sigma\,\psi(r) = \varphi(p^n)$, $\Sigma\,\varphi(r) = \varphi(p^n)$, entendiendo siempre que los símbolos sumatorios se extienden á todos los divisores de $\varphi(p^n)$, luego debe ser siempre $\varphi(r) = \psi(r)$. De donde se deduce que el grupo Ω de los $\varphi(p^n)$ números menores que y primos con p^n es un grupo cíclico.

Fácilmente podremos también deducir cual es el gausiano de un número cuando $p = 2$: basta recordar que el grupo I de los automorfismos de un grupo cíclico G de orden p^n, siendo p un número primo cualquiera, es de orden $\varphi(p^n)$; ya que se puede representar I como un grupo regular de substituciones cuyos elementos corresponden á las operaciones de G de orden más elevado; que, por lo tanto, el orden de I es 2^{n-1} cuando $p = 2$, y en él está contenido un subgrupo cíclico de orden 2^{n-m}, $(m > 1)$, constituido por todas aquellas operaciones que transforman en sí misma una operación de orden 2^m de G. Ahora, puesto que, cuando $p = 2$, el grupo I contiene, como es sabido, un subgrupo cíclico de orden 2^{n-2} y una operación de segundo orden que transforma cada operación de G en su inversa, y puesto que en el subgrupo de orden 2^{n-2} cada operación de orden 2^k es permutable con las operaciones de orden 2^{n-k} de G, pero no con las de orden 2^{n-k+1}; resulta que el gausiano buscado, está representado por el orden de la operación correspondiente del grupo I. Por lo tanto, tienen por gausiano 2^k, $(k > 1)$, respecto del módulo 2^n, todos los números de la forma $\pm (m \cdot 2^{n-k} + 1)$, siendo m uno cualquiera de los $\varphi(2^k)$ números menores que 2^k y primos con él.

El recíproco es cierto.

Pertenecen, por ejemplo, al exponente 2^{n-2}, todos los números x que satisfagan una ú otra de las dos congruencias,

$$x \equiv 3 \pmod 8, \qquad x \equiv 5 \pmod 8.$$

3. En la teoría de los números se demuestra que si g es un entero cualquiera tal que $g = \vartheta_1 \vartheta_2$, siendo ϑ_1 y ϑ_2, números primos entre sí, se tiene

$$\varphi(g) = \varphi(\vartheta_1) \cdot \varphi(\vartheta_2);$$

y que en general si $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots\ldots \vartheta_n$, son números primos entre sí dos á dos

$$\varphi[\Pi(\vartheta_i)] = \Pi[\varphi(\vartheta_i)], \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n).$$

Supongamos que el número $g = \vartheta_1 \vartheta_2$ es el orden del grupo cíclico G: se sabe que este es el producto directo de los dos subgrupos cuyos órdenes respectivos son ϑ_1 y ϑ_2. Si multiplicamos de todos los modos posibles una operación de orden ϑ_1 del primero de estos subgrupos, por una operación de orden ϑ_2 del segundo, obtendremos todas las operaciones de orden $\vartheta_1 \vartheta_2$; luego, el número de operaciones de orden más elevado en G, viene dado por el producto de los números que expresan cuántas son las operaciones de orden más elevado en los dos subgrupos, ó sea, por el producto de los indicadores $\varphi(\vartheta_1)$, $\varphi(\vartheta_2)$. Es decir, que

$$\varphi(\vartheta_1) \cdot \varphi(\vartheta_2) = \varphi(\vartheta_1 \vartheta_2) = \varphi(g). \qquad (c)$$

Por extensión, si el orden de G es $g = \Pi(\vartheta_i)$, el grupo G es el producto directo de los subgrupos cuyos órdenes son $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots\ldots \vartheta_n$, respectivamente; y el número de operaciones de orden más elevado en G, viene dado por el producto de los números que expresan cuántas son las operaciones de orden más elevado en cada uno de estos n subgrupos; de modo que

$$\Pi[\varphi(\vartheta_i)] = \varphi[\Pi(\vartheta_i)] = \varphi(g).$$

Análogamente, si $g = p^n$, todos sus subgrupos están contenidos en el subgrupo de orden p^{n-1}, por lo que

$$\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1} = p^n \left(1 - \frac{1}{p}\right);$$

y si $g = p_1^{n_1} p_2^{n_2}$, siendo p_1 y p_2 números primos diferentes

$$\varphi(g) = \varphi(p_1^{n_1} p_2^{n_2}) = \varphi(p_1^{n_1}) \cdot \varphi(p_2^{n_2}) = p_1^{n_1}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot p_2^{n_2}\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$$

$$= p_1^{n_1} p_2^{n_2}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right);$$

y, de un modo general, si $g = \Pi\left(p_i^{n_i}\right)$,

$$\varphi(g) = \Pi\left[\varphi(p_i^{n_i})\right] = \Pi\left(p_i^{n_i}\right) . \Pi\left(1 - \frac{1}{p_i}\right),$$

ó sea

$$\varphi(g) = g \,.\, \Pi\left(1 - \frac{1}{p_i}\right). \qquad (d)$$

Sean ahora 1, d_1, d_2, ... d_m, g, todos los divisores del número g, orden del grupo G; y sea S uno de sus generadores: las potencias enésimas ($n = 1, 2, \ldots g$) de S contienen, como es sabido d_1 operaciones cuyos órdenes son divisores de d_1, y que constituyen el único subgrupo cíclico de orden d_1 que hay en G. En este grupo hay por lo tanto $\varphi(d_1)$ operaciones de orden d_1. Por la misma razón en G hay solamente $\varphi(d_2)$ operaciones de orden d_2, que constituyen su subgrupo cíclico de orden d_2, y así de los demás. Así resulta, por fin, que la totalidad de las operaciones de los diferentes órdenes posibles en el grupo G, está expresada por el número

$$\varphi(1) + \varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots\ldots + \varphi(d_m) + \varphi(g).$$

Pero el valor de esta suma (*) es g (*Teorema de Gauss*); luego la suma de los números que expresan cuántas son las operaciones de cada uno de los órdenes posibles en el grupo G, coincide con la suma de los indicadores de todos los divisores del orden g, de dicho grupo, es decir, que es igual al mismo orden del grupo.

Así, por ejemplo, si $g = 15$, cuyos divisores son 1, 3, 5 y 15; en el grupo G de orden décimoquinto, habrá:

$\varphi(1) = 1$ operación de primer orden,
$\varphi(3) = 2$ operaciones de tercer orden,
$\varphi(5) = 4$ operaciones de quinto orden,
$\varphi(15) = 8$ operaciones de orden décimoquinto,

y la totalidad de operaciones de los varios órdenes posibles es

$$\varphi(1) + \varphi(3) + \varphi(5) + \varphi(15) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15.$$

4. El razonamiento que acabamos de hacer, puede extenderse

(*) M. Marzal, *loc cit.* pág. 260.—Eulogio Jimenez, *loc. cit.* pág. 107.

fácilmente al siguiente caso más general. Llamemos $\varphi_k(g)$ ó *indicador de orden k*, el número de agrupaciones con repetición de los números no mayores que g, tomados de k en k, de tal modo, que los k números de cada agrupación y el número g sean primos entre sí. Se tiene, si $g = p$,

$$\varphi_k(p) = p^k - 1 = p^k\left(1 - \frac{1}{p^k}\right);$$

si $g = p^n$,

$$\varphi_k(p^n) = p^{(n-1)k}\,(p^k - 1) = p^{nk}\left(1 - \frac{1}{p^k}\right);$$

y si $g = \Pi\,(p_i^{n_i})$,

$$\varphi_k(g) = \Pi\,\varphi_k\,(p_i^{n_i}) = g^k\,\Pi\left(1 - \frac{1}{p_i^k}\right).$$

Sea, en efecto, k el número de generadores independientes del grupo abeliano G de orden g,

$$S_1,\, S_2,\, S_3\, \ldots\ldots\, S_k:$$

toda operación S del grupo G, puede escribirse bajo la forma

$$S = \Pi\,(S_i^{n_i}) \qquad (n_i = 1, 2, \ldots\ldots g),$$

y siempre que el máximo codivisor de los números g y n_i sea la unidad, g será el orden de S. Recíprocamente, si g es el orden de la operación S, los números g y n_i son primos entre sí. El número de las operaciones de orden g en G, se corresponde, pues, con el indicador $\varphi_k(g)$ de orden k del número g.

Cuando g no es potencia de un número primo, podemos en virtud de (c) substituir un generador de orden g por dos generadores independientes de órdenes respectivos ϑ_1 y ϑ_2, siendo $\vartheta_1\vartheta_2 = g$, y ϑ_1 y ϑ_2 números primos entre sí. Al descomponer así en dos factores cada uno de los generadores independientes del grupo G, consideramos este grupo como el producto directo de dos subgrupos, tales que cada uno tiene k generadores independientes de órdenes ϑ_1 y ϑ_2 respectivamente; y el número de operaciones de orden más elevado en G, es igual al producto de los números de operaciones de orden más elevado en aquellos dos subgrupos; es decir, que

$$\varphi_k(g) = \varphi_k(\vartheta_1)\quad \varphi_k(\vartheta_2).$$

Si $g = p^n$, el número de operaciones de orden p^n en G, es igual al número total de sus operaciones p^{nk}, disminuído en el número $p^{(n-1)k}$ de las operaciones cuyos órdenes son divisores de p^{n-1}; es decir, que

$$\varphi_k(p^n) = p^{nk} - p^{(n-1)k} = p^{nk}\left(1 - \frac{1}{p^k}\right).$$

Se puede seguir casi análogo razonamiento para determinar el valor de la función $\varphi_k(g)$, cuando $g = \Pi\,(p_i^{n_i})$. En este caso el grupo G es el producto de los los i subgrupos H_1, H_2, ... H_i, cuyos órdenes respectivos son $p_1^{n_1}$, $p_2^{n_2}$, ... $p_i^{n_i}$; y cada uno de estos i subgrupos posee k generadores independientes de los órdenes $p_1^{n_1}$, $p_2^{n_2}$, ... $p_i^{n_i}$, respectivamente, que son también generadores independientes de G. En este grupo hay por lo tanto $k \times i$ generadores independientes, y su orden es siempre potencia de un cierto número primo: estos órdenes constituyen el máximo número de invariantes de G. Una operación de orden g en G, está formada por factores tomados sucesivamente en H_1, en H_2, ..., en H_i, entre los que tienen el mayor orden posible en cada uno de estos subgrupos, es decir, que sus órdenes son, ordenada y respectivamente $p_1^{n_1}$, $p_2^{n_2}$, ..., $p_i^{n_i}$

Pero en H_1 el número de operaciones de orden $p_1^{n_1}$ está representado por su orden disminuido en el orden del grupo cuyas invariantes san todas iguales á $p_1^{n_1-1}$; en H_2 el número de operaciones de orden $p_2^{n_2}$ está representado por su orden disminuido en el orden del grupo que tiene sus k invariantes iguales á $p_2^{n_2-1}$; y así en los demás. Luego

$$\varphi_k(g) = \Pi\,[\varphi_k(p_i^{n_i})] = \Pi\,(p_i^{(n_i-1)k}).\ \Pi\,(p_i^k - 1) = g^k.\ \Pi\left(1 - \frac{1}{p_i^k}\right).$$

Evidentemente, para $k = 1$, esta relación coincide con la (d)

5. Sea

$$a_1,\ a_2,\ .....\ a_m, \qquad (e)$$

la serie de los $\varphi(g)$ números primos con g y menores que g: en un automorfismo del grupo G de orden g, los $\varphi(g)$ grupos deben corresponderse recíprocamente. Un generador a_i debe, pues, corresponderse con una de sus potencias, por ejemplo, con a_i^k, siendo k y g números primos entre sí. Un automorfismo de G puede obtenerse transformando todos sus elementos mediante uno de ellos (*);

(*) FROBENIUS.—*Berliner Sitzungsberichte*, 1895, p. 184.

y puesto que cuando un elemento transforma una operación del grupo en una potencia dada, transforma en las potencias de igual exponente todas las restantes operaciones del grupo, puede obtenerse dicho automorfismo haciendo corresponder á cada operación su potencia de exponente k. Un automorfismo de G equivale, le, pues, á una substitución tal como

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_i \\ a_\alpha a_i \end{pmatrix} \quad (\text{mód } g),$$

y por cada substitución de esta clase, se tiene un automorfismo de G. El complexo de estas substituciones constituye, de este modo, el grupo I de los automorfismos de G, y es holomorfo con el grupo $\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ de orden m, que hemos llamado Ω. Por consiguiente, el grupo cíclico Ω, cuyos elementos son los $\varphi(g)$ números enteros menores que g y primos con g (**2**), es grupo de automorfismos del grupo cíclico G de orden g (*). El factor máximo de m no puede ser mayor, evidentemente, que el factor máximo de g.

Si $g = p^n$, siendo p un número primo cualquiera, como entonces $\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$, el grupo Ω es de orden 2^{n-1} si $p = 2$, y en otro caso es el producto directo de dos subgrupos cíclicos de órdenes p^{n-1} y $p-1$, respectivamente, y el primero de estos subgrupos comprende todas las operaciones de I que transforman las operaciones de G en potencias cuyos exponentes son congruentes con la unidad (**) respecto del módulo p. En otros términos, si nos representamos I como un grupo numérico respecto del módulo p^n, los números correspondientes á su subgrupo de orden $p-1$ son los números ϑ_i, menores que p^n, y tales que

$$\vartheta_i \equiv 1 \ (\text{mód. } p),$$

y, siendo δ un número entero positivo,

$$\vartheta_i^{p^\delta} \equiv 1 \left(\text{mód. } p^{\delta+1}\right).$$

Luego, todo número x que satisface la congruencia

$$x \equiv 1 \left(\text{mód } p^{\delta+1}\right),$$

es respecto del módulo p^n, siendo n arbitrario, potencia p^δ de algún otro número.

Los $\varphi(g)$ elementos de la serie (e) forman un grupo relativo á la multiplicación, si en vez de los productos se toman sus restos

(*) G. A. Miller.—*Annals of Mathematics*, vol. II. pág. 78.
(**) G. A. Miller.—*Bull. of Amer. Maht. Soc.* vol. VIII, pág. 351.

mínimos positivos respecto del módulo g, ya que de la relación

$$a_i a_j = kg + r, \qquad (g > r > 0),$$

resulta que si g y r tuviesen un divisor primo común, debería ser también divisor de a_i ó de a_j, de modo que estos números no serían primos con g, según se ha supuesto.

Poniendo esto en relación con cuanto llevamos dicho hasta aquí, se establece una correspondencia directa entre las propiedades del grupo Ω, y la proposición bien conocida de la teoría de los números que se llama *Teorema de Wilson generalizado*, y que establece, representando con $\Pi(a_m)$ el producto de los $\varphi(g)$ números de la serie (e), que se tiene

$$\Pi(a_m) \equiv -1 \text{ (mód. } g)$$

cuando g tiene una de las formas p^n, $2p^n$, 2^2, y

$$\Pi(a_m) \equiv +1 \text{ (mód } g)$$

en cualquier otro caso. En efecto, la operación de segundo orden del grupo Ω corresponde á los números $p^n - 1$, $2p^n - 1$, $2^2 - 1$, respectivamente, y estos números son congruentes con -1. La operación idéntica corresponde al número $+1$.

Además, si g no es múltiplo de p, se tiene (*).

$$\Pi(p-1) \equiv \pm g^{\frac{p-1}{2}} \text{ (mód } g);$$

tomando el signo superior ó el inferior según que g sea norresto ó resto cuadrático de p; mas como por el teorema de Wilson

$$\Pi(p-1) \equiv -1 \text{ (mód } p),$$

se tiene también

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \text{ (mód } p),$$

según que g sea resto ó norresto cuadrático de p; propiedades que en la teoría de los números suelen deducirse como consecuencia del teorema de Dirichlet (**).

6. Si una operación del grupo I corresponde á un número incongruente con la unidad, debe transformar todas las operaciones de G, de modo que si una potencia de tal operación es permutable con una operación de orden p de G, debe ser también permutable con todas las demás operaciones de G, es decir que debe coincidir con la operación idéntica. Esto es lo mismo que de-

(*) M. Marzal, *loc. cit* pág. 281 y 283.—Eulogio Jimenez, *loc. cit.* pág. 254.
(**) Eulogio Jimenez, *loc. cit.* pág. 255.

cir que los números x que corresponden á las operaciones del subgrupo de orden $p-1$, tienen el mismo gausiano respecto del módulo p^n, ó sea, que si x es una raíz emésima propia respecto del módulo p, lo es también respecto del módulo p^n; y puesto que I es un grupo cíclico, el número de tales raíces debe ser el mismo respecto de entrambos módulos.

Demostraremos ahora, en particular, que un resto cuadrático de p lo es también de cualquier potencia p^n de p, y recíprocamente.

A toda substitución del grupo de automorfismos del grupo cíclico G de orden $g = p$, puede asociarse un número que, respecto del módulo p, es congruente con el exponente de las potencias en que tal substitución transforma todas las operaciones de G. El complexo de tales números constituye un isomorfismo holoédrico con I. Si x es uno de tales números, la substitución correspondiente es positiva ó negativa (par ó impar), según que el carácter cuadrático de x respecto del módulo p, que se expresa por el símbolo de Legendre,

$$\left(\frac{x}{p}\right) \equiv x^{\frac{p-1}{2}} \text{ (mód } p),$$

sea $+1$ ó -1, es decir (*), según que x sea resto ó norresto cuadrático del módulo p. Esto se extiende también al caso en que $g = p^n$: si asociamos á las substituciones del grupo cíclico de orden $\varphi(p^n)$ los exponentes (mód p^n) de las potencias en que tales substituciones transforman las operaciones del grupo G, toda substitución es positiva ó negativa, según que (x/p^n) sea $+1$ ó -1. Pero se sabe que todo número p primo impar posee $(p-1)/2$ restos cuadráticos positivos menores que p, por lo que de los números naturales menores que p, la mitad son restos cuadráticos de p, y la otra mitad no lo son; y por lo que hemos dicho antes, la mitad de los primeros $\varphi(p^n)$ números primos con p son restos cuadráticos de p^n. Así, pués, todo resto cuadrático de p, lo es también de p^n, y recíprocamente. En otros términos, los $\varphi(p^n)$ números enteros menores que p^n y primos con p, ordenados arbitrariamente, y multiplicados por un número cualquiera x primo con p, dan productos cuya disposición respecto del módulo p^n representa una substitución de grado $\varphi(p^n)$, que es positiva ó negativa, según que el carácter cuadrático de x respecto del módulo p sea $+1$ ó -1.

Se demuestra en la teoría de los números (**) que si p_1 y p_2 son

(*) P. L. Tchebichef, trad. por J. Massarini.—*Teoría delle congruenze*, 1895, p. 62.= Eulogio Jimenez, *loc. cit.* pág. 125.

(**) P. Gazzaniga.—*Gli elementi della teoria dei numeri*, Padova, 1903, p. 98.—P. L. Tchebichef, *loc. cit.* p. 81.—Eulogio Jimenez, *loc. cit.* pág. 293

dos números primos impares y diferentes, se tiene

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)(-1)^{\frac{p_1-1}{2}\cdot\frac{p_2-1}{2}},$$

es decir *(ley de reciprocidad de Legendre)*, que si de los dos números p_1 y p_2 uno por lo menos es de la forma $4n+1$, el número p_2 es ó no es resto cuadrático de p_1, según que p_1 sea ó no sea resto cuadrático de p_2; mientras que si los dos números p_1 y p_2 son ambos de la forma $4n+3$, el p_2 es ó no es resto cuadrático de p_1, según que p_1 no sea ó sea resto cuadrático de p_2.

Supongamos que los dos números p_1 y p_2 son los factores de orden g del grupo cíclico G, es decir que $g = p_1^{n_1}\, p_2^{n_2}$. Si nos representamos este grupo como un grupo intransitivo de substituciones, de grado $p_1^{n_1} + p_2^{n_2}$, su grupo de automorfismos I, es el producto directo de dos grupos cíclicos cuyos órdenes respectivos son $\varphi(p_1^{n_1})$ y $\varphi(p_2^{n_2})$, y puede venir representado como un grupo intransitivo de substituciones que contiene dos sistemas de intransitividad de grados $\varphi(p_1^{n_1})$ y $\varphi(p_2^{n_2})$ respectivamente. A todo elemento de I podemos suponer asociado el exponente (mód $p_1^{n_1} p_2^{n_2}$) de la potencia en que esta substitución transforma todas las operaciones de G, y entonces la substitución que corresponde al valor

$$x \equiv p_1 + p_2 \,(\text{mód } p_1^{n_1} p_2^{n_2})$$

es positiva, á no ser que p_1 y p_2 sean ambos de la forma $4n+3$. Evidentemente, las substituciones positivas de I corresponden á los números que son restos cuadráticos de p_1 y de p_2, ó que no lo lo son, ni de p_1 ni de p_2; mientras que las negativas corresponden á los números que sólo son restos cuadráticos de p_1, ó sólo de p_2.

Son, por ejemplo (*), substituciones negativas, las que corresponden á los números 2, 3, 5, 6, 7, ... ya que:

2 es resto de	$p_1 = 8n + (1, 7)$ y no lo es de	$p_2 = 8n + (3, 5)$;
3	$p_1 = 12n + (1, 11)$, ...	$p_2 = 12n + (5, 7)$;
5	$p_1 = 20n + (1, 9, 11, 19)$ . .	$p_2 = 20n + (3, 7, 13, 17)$;
6	$p_1 = 24n + (1, 5, 19, 23)$ . .	$p_2 = 24n + (7, 11, 13, 17)$;
7	$p_1 = 28n + (1, 3, 9, 19, 25, 27)$.	$p_2 = 28n + (5, 11, 13, 15, 17, 23)$.

7. Las operaciones de segundo orden del grupo abeliano G engendran, como es sabido, un grupo H de orden 2^n, en el cual hay n generadores independientes de segundo orden. Sea η uno de estos generadores; entonces H es el producto directo del gru-

(*) P. GAZZANIGA.—*Op. cit.* pág. 97.—EULOGIO JIMENEZ, *loc cit.* págs. 294 y 322.

po $\{1, \eta\}$ por el subgrupo constituyen los demás generadores independientes, y que es de orden 2^{n-1}. Luego η es factor de una mitad de las operaciones que entran en H, y por esto, si $n > 1$, no debe entrar en el producto continuo de todas las operaciones de H. Por lo tanto, si G contiene más de una operación de segundo orden, el producto continuo de todas sus operaciones es la identidad, y si al contrario sólo contiene una, ésta misma es el producto continuo de todas sus operaciones.

Si el grupo G es cíclico, y $g = p^n$, $(n > 1)$, su grupo de automorfismos I es el producto directo del grupo cíclico de orden p^{n-1} por el grupo de automorfismos del grupo de orden p; luego el grupo I del grupo G de orden p^n, y por lo tanto también el del de orden $2p^n$, contiene una sola operación de segundo orden. Pero se sabe que el grupo I del grupo cíclico de orden 2^n contiene tres operaciones de segundo orden si $n > 2$; luego cuando contenga una sola operación de segundo orden, debe ser $n = 2$.

Si $g = 2^n \Pi (p_i^{n_i})$, el grupo I de G es el grupo de automorfismos de los grupos cíclicos cuyos órdenes respectivos son los números 2^n, $p_1^{n_1}$, $p_2^{n_2}, \ldots\ldots$; y puesto que el orden de cada uno de tales grupos de automorfismos es un número par, excepto el del grupo de orden 2^n, si $n > 1$; por esto I debe contener más de una operación de segundo orden, excepto en los casos en que el orden del grupo G venga representado por alguno de los números 2^2, p^n, $2p^n$. Luego, si el grupo I del grupo G de orden g, contiene una sola operación de segundo orden, g ha de ser uno de estos tres números.

El recíproco se deduce muy fácilmente, recordando que la condición necesaria y suficiente para que el grupo de automorfismos I de un grupo cíclico G de orden g sea también cíclico, es que g posea raíces primitivas; y recíprocamente. Pero como se sabe (*) que respecto del módulo compuesto $g = 2^n \Pi (p_i^{n_i})$, no puede haber raíces primitivas, sino cuando g es potencia de un número primo impar, ó el duplo de tal potencia, ó el número 4; así en el caso en cuestión, el grupo I es cíclico, sólo cuando g tiene uno de los valores 2^2, p^n, $2p^n$.

También, si $g = 2^n$, respecto del módulo 2^n, todo número impar es raíz primitiva de 2, si $n = 1$; el número 3 es raíz primitiva de 4, si $n = 2$; pero si $n \geqslant 3$, no hay raíces primitivas, es decir que G no puede ser grupo cíclico.

Evidentemente en p hay $\varphi(p-1)$ raíces primitivas; y en p^n hay

$$\varphi[\varphi(p^n)] = \varphi(p-1) \,.\, \varphi(p^{n-1}).$$

(*) P. Gazzaniga.—*Op. cit.* p. 84.=Eulogio Jimenez, *loc. cit.* pág. 190.

Si ρ es raíz primitiva de p^n ó de $2p^n$, también ρ^k es raíz primitiva de p^n ó de $2p^n$, siempre que k sea primo con $\varphi(p^n)$. En otros términos, si ρ pertenece al exponente $\varphi(p^n)$ ó $\varphi(2p^n)$, también ρ^k pertenece al mismo exponente si $\varphi(p^n)$ ó $\varphi(2p^n)$ y k son números primos entre sí.

8. Se ha demostrado de varios modos (*) que el grupo I de un grupo cíclico G es siempre abeliano, y puede venir representado como un grupo regular de substituciones cuyos elementos corresponden á las operaciones de orden más elevado de G, y que G contiene un subgrupo cíclico de orden p^{n-1}, si p es un número primo impar, y de orden 2^{n-2}, si $p = 2$; pero también se sabe que no todo grupo abeliano es grupo de automorfismos de algún grupo cíclico.

Un grupo abeliano que sea grupo de antomorfismos de un grupo cíclico, es decir, que pueda representarse como hemos representado el grupo Ω, de orden m, de los $\varphi(g)$ números enteros primos con g y menores que g (**5**), pertenece á una clase particular de grupos que cumplen ciertas condiciones (**).

Si tal grupo es cíclico, y n es un número entero cualquiera, positivo ó nulo, su orden g debe ser de la forma $p^n(p-1)$, y como los dos números pares más pequeños que no son de esta forma son los números $2 . 5$ y $2 . 6$, estos son los dos números pares más pequeños que no pueden tomarse para representar el orden de un grupo cíclico que sea grupo de automorfismos de otros grupos.

Si $g = 2^n \Pi(p_i^{n_i})$, siendo los números p_i todos diferentes, siendo G en este caso el producto directo de los subgrupos cuyos órdenes respectivos son los factores de g, y siendo también cíclico el grupo I de todo grupo cíclico cuyo orden es potencia de un número p; Ω es el producto directo (***) de los grupos cíclicos cuyos órdenes son $\varphi(p_1^{n_1})$, $\varphi(p_2^{n_2})$, ..., respectivamente, cuando sea $n = 0$, ó $n = 1$, pero se debe tener en cuenta además, entre estos grupos factores, un grupo de segundo orden y un grupo cíclico de orden 2^{n-2}, cuando sea $n > 1$.

Siendo Ω el producto directo de varios grupos cuyos órdenes son todos números pares, m es par, y será por tanto un número de la forma $2^n . \Pi(p_i^{n_i}) . \Pi(p_i - 1)$; los números pares más pequeños que no pueden ponerse bajo esta forma son los números $2 . 7$ y $2 . 13$ (****), luego estos dos números representan los más pequeños órdenes de grupos que no pueden ser grupos de automorfismos de grupos cíclicos.

(*) WEBER.—*Lehrbuch der Algebra*, 1899, vol. II, p. 60.
(**) G. A. MILLER.—*Annals of Math.*, vol. II, p. 78.
(***) G. A. MILLER.—*Bull. of Amer. Math. Soc.*, vol. V, p. 296.
(****) LUCAS.—*Théorie des nombres*, 1891, p. 394.

Si m es potencia de un número primo, este no puede ser sino el 2, y g debe ser de la forma $2^n \Pi (p_i)$, donde los números p_i deben ser todos de la forma $2^{n_i} + 1$, $(n_1 < n_2 < \ldots\ldots < n_i)$. En este caso, el grupo I es el producto directo de los grupos cíclicos cuyos órdenes son respectivamente $2^{n_1}, 2^{n_2}, \ldots\ldots$, pero además de estos grupos factores se debe tener en cuenta dos grupos cíclicos de órdenes 2 y 2^{n-2}, cuando $n > 1$. Los números que representan estos órdenes representan también el menor número posible de generadores independientes del grupo numérico Ω, ó sea, son las invariantes del grupo Ω, y son todos distintos, excepto en los tres casos siguientes:

1.º $n_1 = 1, n > 1$; 2.º $n_1 > 1, n_i = n - 2 > 1$, 3.º $n - 2 = 1$.

El grupo Ω contiene tres invariantes iguales cuando y sólo cuando se verifiquen simultáneamente las condiciones del primero y del tercer caso; y contiene dos pares de invariantes iguales en el segundo caso de excepción.

C. Alasia de Quesada.

Por la traducción,

J. Rius y Casas.

Estudio de la acción del anhídrido sulfuroso, sobre una raza del "Saccharomyces ellipsoideus,, (levadura de vino).

Entre los diversos antisépticos de las levaduras, es el que más interés presenta, tratándose de una raza de levadura aplicable á la vinificación, el anhídrido sulfuroso (tufo de pajuela) por utilizarse para la preparación de vasijas vinarias y para el tratamiento de mostos y vinos.

Mr. Duclaux, en su Tratado de Microbiología (1), dice, que probablemente las levaduras alcohólicas se habituarán al gas sulfuroso como el *Saccharomyces cerevisæ*, fué habituado á los fluoruros (Sorel y Effront).

Esta idea, fué el punto de partida de las investigaciones que vamos á describir sin perdonar detalle práctico alguno, pero prescindiendo en cuanto sea posible, de todo cuanto no se refiera esencialmente á la práctica de la investigación.

En un matraz Pasteur de 500 c. c., pusimos 350 c. c. de mosto de uva esterilizado (del que habíamos determinado previamente, las variables azúcar y acidez total) adicionado de la cantidad necesaria de una disolución valorada de bisulfito sódico, para que el líquido tuviera una riqueza en anhídrido sulfuroso de 0,02 gramos por litro: en este caldo de cultivo sembramos la levadura pura en que estudiamos la acción del sulfuroso (2) y colocado el matraz en la estufa á la temperatura de 25-27°, abandonamos el caldo en su fermentación alcohólica durante doce días, al cabo de los cuales, tomando como levadura la producida en este matraz, sembramos en otro que contenía caldo análogo, adicionado de la disolución de bisulfito sódico necesario, para que el líquido tuviera una riqueza en anhídrido sulfuroso de 0,05 gramos por litro; verificada la fermentación de este caldo en condiciones análogas al anterior, con la levadura que en él se obtuvo, se sembró en otro matraz cuyo líquido de cultivo tenía una riqueza en anhídrido sulfuroso de 0,075 por litro y del mismo modo y sucesivamente fueron haciéndose siembras en matraces que contenían líquidos de

(1) Tomo III. Paris, 1900.

(2) Esta levadura de vino fué aislada y seleccionada, partiendo de uva que se recolectó en el monte de Torrero (Zaragoza).

cultivo cuyas riquezas crecientes en anhídrido sulfuroso eran 0,1, 0,125; 0,150, y hasta 0,180 gramos por litro.

En líquidos de este último valor en sulfuroso, no se realizó la fermentación y pudimos comprobar que la levadura quedó inactiva, pero no muerta, porque no pudo observarse al microscopio la completa granulación del protoplasma de la célula, y sobre todo, porque sembrada después en caldo de cultivo apropiado, originó fermentación alcohólica.

Mr. Linossier, deduce de sus investigaciones, que una dosis de 0,108 gramos de anhídrido sulfuroso por litro, mata la levadura alcohólica en 24 horas y en las experiencias que describimos, hemos llegado á una levadura que vive, aunque sin producir fermentación, en líquidos de riqueza 0,180 gramos por litro del referido antiséptico; esta resistencia sospechamos que podrá ser un carácter de diferenciación para las diferentes razas del *Saccharomyces ellipsoideus*, pues según ha demostrado Wischin, no todas son igualmente resistentes.

Tratando ahora de hacer un estudio comparativo entre nuestra levadura habituada al gas sulfuroso, y la misma levadura, pero sin habituar, sembramos de ellas en iguales condiciones de edad y muy próximamente en igual cantidad, en mosto de uva esterilizado y sin sulfitar, cuya riqueza en glucosa era 24 por 100, y 0,52 por 100 su acidez total referida al ácido tartárico: colocados los matraces que contenían estos caldos en una estufa á temperatura 24-26°, pasados doce días analizamos los líquidos fermentados, pesamos después de lavada y seca la levadura obtenida, encontrando el resultado siguiente:

	Lev. habituada — Gramos por 100	Lev. no habituada — Gramos por 100
Glucosa sin desdoblar	9,5	8,7
Glucosa desdoblada	14,5	15,3
Alcohol en volumen	8,4	8,9
Extracto, deducido el azúcar	1,64	1,61
Acidez total referida al tartárico	0,59	0,62
Peso de levadura obtenida	0,12	0,14

Deducimos de esta experiencia, que la levadura habituada al gas sulfuroso tiene un poder de fermentación y de multiplicación, algo menor que la no habituada y que el alcohol que cada una de ellas produce, desdoblando igual peso de azúcar en distinto tiempo, es el mismo (1).

(1) En las condiciones de la experiencia, 1 gramo de glucosa produce 0,575° de alcohol en los dos casos

Practicamos después siembras de la misma levadura habituada y no habituada al gas sulfuroso, en mostos de uva esterilizados y sulfitados por la adición de 0,150 gramos de sulfito sódico por litro (0,075 gramos de SO_2), observando la marcha de la fermentación, y analizado el líquido fermentado encontramos: que la fermentación del caldo sembrado con levadura habituada, comenzó dos días después que en la experiencia anterior, en que hicimos la siembra en mosto no sulfitado; que la fermentación del mosto sulfitado sembrado con levadura no habituada, comenzó *cinco* días después que la en que hicimos la siembra en mosto sin sulfitar, y que el peso del azúcar desdoblado al cabo del mismo tiempo en los dos líquidos, es mayor en el sembrado con levadura habituada, donde la fermentación marcha con más velocidad; por último, 18 días después de hecha la siembra, que era próximamente 4 días después de haber terminado la fase de fermentación tumultuosa, quedaba en el caldo sulfitado y sembrado con levadura habituada 1,2 por 100 de azúcar sin desdoblar, y en el sembrado con levadura sin habituar 4,1 por 100 (valor medio de cuatro experiencias).

En vinicultura, puede prestar en determinados casos muy buenos servicios, una levadura habituada al gas sulfuroso.

De un modo general puede afirmarse, que cuando por las malas condiciones en que haya sido hecha la vendimia, sea muy difícil lo conservación del vino, puede convenir la fermentación de mostos sulfitados, y para concretar, nos referiremos á un caso particular.

Cuando es muy lluvioso el mes que precede al de la recolección de la uva, existen condiciones de ambiente muy favorable para que sobre el fruto que se recolecta, se haya desarrollado el *Botrytis cinerea* productor de una *oxidasa* denominada *œnoxidasa*, que actuando sobre la materia colorante del vino, da lugar á la formación de productos de oxidación insolubles que comunican al vino tales propiedades, que le hacen imposible para la venta: esta alteración de la que se conocen tres formas distintas y algunas variedades se denomina en Francia *casse* y en España, alguna de sus formas, reciben el nombre de *tumbado* del vino ó *vinos vueltos* (1). Para combatir esta enfermedad no son de seguro éxito más que los medios preventivos, pues el llevar á un estado normal el vino ya alterado, es en todos los casos difícil y en algunos, dados los conocimientos actuales, imposible.

---

(1) En estas denominaciones se incluyen también varios casos en que por defectos de constitución (no por infección microbiana) aparecen los vinos turbios ó revueltos y resistentes á la clarificación, no siendo este el caso de que ahora tratamos.

Los medios preventivos que con mejor éxito pueden practicarse son, la esterilización ó en su defecto la sulfitación de los mostos.

La esterilización la estimamos como el mejor medio que puede seguirse, ya que la *œnoxidasa* es destruída á la temperatura de 60-65°, pero la práctica de la esterilización de los mostos, está llena de dificultades por lo costoso de la instalación que se hace necesaria y por el mal resultado práctico que se obtiene al ser adoptados para la esterilización de mostos, varios tipos de esterilizadores; de aquí resulta que este medio es impracticable para la mayoría de los vinicultores.

La sulfitación de los mostos, por adición de la cantidad conveniente de bisulfito sódico ó potásico, es el medio que con más facilidad puede seguirse, pero tiene el inconveniente, de que la fermentación de los mostos sulfitados tiene lugar de un modo defectuoso si se trabaja en las condiciones ordinarias, porque el gas sulfuroso obra como freno en la marcha de la fermentación alcohólica, retardando notablemente el trabajo de la levadura: desciende la temperatura de las bodegas no muchos días después de la vendimia, cesa la fermentación, y se habrá llegado á obtener un vino en el que resta todavía 5 ó 7 por 100 de glucosa sin desdoblar, pobre en alcohol, y en las mejores condiciones para no resistir otras infecciones que le inutilizan, tales como diversas formas de velos que aparecen en la superficie, algunos mycodérmicos precursores de infecciones acéticas, etc.

Si se utilizase para la fermentación de los mostos sulfitados, levadura habituada al gas sulfuroso, sembrada en buenas condiciones de edad y vigor, se conseguiría una fermentación normal con desdoblamiento total de la glucosa del mosto, mucho más si se variaba la raza de levadura sembrando una, la más apropiada al mosto que fermenta y se obtendrá un vino en el que la *casse* no se produciría por la buena aplicación de un tratamiento preventivo, y en el que no era fácil que aparecieran nuevas infecciones, porque desdoblada totalmente la glucosa, se obtendría un vino bien constituído, y por lo tanto, mucho más resistente á las acciones microbianas.

Antonio Gregorio Rocasolano.

La glucosa, levulosa y sacarosa en la orina de un diabético.

Sabidas son las dificultades que en muchos casos puede presentar la determinación del azúcar en la orina, unas veces por contener ésta azúcares de diversas naturalezas y otras por la existencia en la orina de substancias que actúen en el mismo sentido que el azúcar sobre los medios de observación ó también contrariando las indicaciones de aquél.

Ni el líquido Fehling solo, ni los procedimientos ópticos exclusivamente, ni muchas veces ambos medios, bastan para averiguar con certeza la cantidad de azúcar contenida en ciertas orinas, y por tanto pueden cometerse errores considerables, por la presencia de azúcares de diverso poder reductor sobre el líquido Fehling, y también por la de otras substancias ópticamente activas y que no sean azúcares, siempre que no se investigue la existencia de éstos, ó se valga el operador solamente de uno de los dos procedimientos ya indicados y más en uso.

Ejemplo de lo dicho lo da el análisis de la orina de un diabético que he verificado recientemente y en la que he encontrado la sacarosa, la levulosa y la glucosa.

El primer indicio que tuve para entrar en sospecha de que la orina contenía azúcares diferentes de la glucosa, fué la reducción anormal que experimentaba el líquido Fehling. El precipitado no era rojo, denso y bien aglomerado, sino amarillento sucio, y el líquido quedaba siempre verde, no lográndose averiguar el término de la reducción total del reactivo.

Examinada entonces la orina al polarímetro acusaba una desviación que no correspondía á la cantidad de glucosa, que á pesar de las incertidumbres del límite, había dado el método de reducción, sino que era bastante inferior al calculado.

Esta orina no tiene albúmina, ni glicuronatos (después de hervida con los ácidos diluidos tiene menor poder rotatorio), tampoco tiene cantidad apreciable de acetonas (reacción de Gerhardt). La reacción común á la glucosa, rafinosa y sacarosa con el reactivo Sélivanoff, la presenta con mucha claridad. Así, mezclando volúmenes iguales de orina y ácido clorhídrico diluido, y adicionando á esta mezcla caliente un volumen igual al suyo de disolución de resorcina al 1 por 100, se produjo coloración roja; á la larga y por enfriamiento, obtuvose un depósito amorfo oscuro.

Una vez realizados estos ensayos previos se hicieron las determinaciones que se especifican á continuación:

Reducción del líquido Fehling

Valor del líquido Fehling.—10 cm^3.=0,045 de glucosa.

Primer ensayo.—Con la orina filtrada. En estas condiciones no es posible fijar el límite de la reacción; el color del precipitado es verde amarillento sucio y el líquido queda turbio y también de color verdoso. Tomando como fin el momento en que el líquido no cambiaba ya de aspecto, se encontró como valor medio para 10 cc. de Fehling un gasto de 3,9 cm^3, de orina, lo que da para el litro una cantidad de glucosa de

$$\frac{0{,}045.1000}{3{,}9} = 11{,}54 \text{ g.}$$

Segundo ensayo.—Con la orina filtrada y diluida al tercio se tropieza con las mismas dificultades: la reducción es anormal, y el líquido no queda descolorado. Tomando, igual que en el caso anterior, como fin de la reacción el momento en que no ha habido cambio aparente por la adición de una gota de líquido reductor, los 10 cm^3 de Fehling han gastado 10 cm^3 de orina diluida; que para un litro de la misma sin diluir acusa una riqueza de

$$\frac{0{,}045 \times 1000 \times 3}{10} = 13{,}5 \text{ g de glucosa.}$$

Tercer ensayo.—La misma orina se defecó con disolución de acetato de plomo cristalizado y se precipitó el exceso de plomo con disolución de carbonato sódico, dejándola en definitiva diluida al tercio, como en el caso anterior. De las varias determinaciones que se verificaron, en dos de ellas se observó con bastante limpieza el fin de la reducción; en las restantes se perturbó por los mismos fenómenos, no tan marcados, que en los casos anteriores. El gasto de orina diluida fué de 9,8 cm^3 que corresponde á una cantidad de azúcar reductor por litro de

$$\frac{0{,}045 \times 1000 \times 3}{9{,}8} = 13{,}77 \text{ g.}$$

De estos tres ensayos se deduce que las diferencias encontradas en ellos deben atribuirse en primer término á la mala observación del límite, mucho peor con la orina concentrada, que en la diluida y defecada; y que por la marcha más regular, de la reducción, mejor aspecto del precipitado y mayor concordancia de los ensayos repetidos, debe tomarse como aproximado á la verdad el último valor de los tres, ó sea que el poder reductor de la orina representa en glucosa 13,77 g.

Por otra parte la rotación sobre la luz polarizada de la orina defecada, fué en grados sacarimétricos de $+ 4^{\circ}, 29$. Con este ensayo sólo, hubiéramos atribuído á la orina una cantidad de glucosa de $4{,}29 \times 2{,}06 = 8{,}84$ g. por litro en vez los 13,70 g. que nos acusa el líquido Fehling.

Pero además, si procedemos á la inversión, nos encontramos con los resultados siguientes:

Poder rotatorio (en grados sacarimétricos). . . + 2,79.
Azúcar reductor con el líquido Fehling. . . . . 15,588.

Luego es indudable que en la orina existe la sacarosa.

Como el total de azúcar reductor después de la inversión es de 15,59 g y antes habíamos hallado para la orina sin invertir 13,77 g, la reducción debida á la inversión será

$$15{,}588 - 13{,}70 = 1{,}818 \text{ g.}$$

Esta cantidad de azúcar reductor proviene de la inversión de 1,727 g. de sacarosa, existente en la orina, cuya sacarosa produce una desviación polarimétrica de

$$1{,}727 \times 1{,}62 = + 2^{\circ}{,}8$$

Si restamos de la rotación producida por la orina la que corresponde á la sacarosa, tendremos la polarización que hubiera dado la orina desprovista de este azúcar

$$4{,}29^{\circ} - 2{,}8 = 1^{\circ}{,}49$$

que representa en glucosa

$$1{,}49 \times 2{,}065 = 3{,}077 \text{ g.}$$

Pero como el líquido Fehling ha dado en repetidos ensayos 13,77 g. de azúcar reductor, tiene que haber en la orina además de la sacarosa una mezcla de glucosa y levulosa.

Para calcular las cantidades respectivas de cada una de éstas, tendremos según los datos anteriores:

Desviación de la orina al polarímetro.

Sin sacarosa *(calculada)*.	$+ 1^{\circ}{,}49$
Glucosa que representa	3,077 g.
Total de glucosa + levulosa	13,77 g.

Coeficiente polarimétrico de la glucosa.	2,065
Id. íd. de la levulosa.	1,154
Suma de estos coeficientes	3,219

Existe en la orina 3 gr. 077 de glucosa, mas una cantidad compensada por otra de levulosa. La relación en peso de estos azúcares será la de los coeficientes polarimétricos y su totalidad la diferencia

$$13{,}77 - 3{,}077 = 10{,}693 \text{ g.}$$

Llamando *x* á la cantidad desconocida de *glucosa* se tendrá

$$\frac{x}{10{,}693} = \frac{2{,}065}{3{,}219}$$

$$x = 6{,}86$$

Glucosa	$6{,}86 + 3{,}077 = 9{,}937$ g.
Levulosa.	$13{,}77 - 9{,}937 = 3{,}833$ g.

Solo nos falta hacer observar que la cantidad de sacarosa hallada por el aumento de reducción sobre el líquido Fehling de la orina invertida, coincide sensiblemente con la obtenida por la variación de poder rotario antes y después de la citada inversión; en efecto:

Observación directa.	+ 4,29
Invertida.	+ 2,79
Diferencia.	1,50
Temperatura.	10°C.

$$\text{Sacarosa} = \frac{200 \times 1{,}5 \times 1{,}62}{278} = 1{,}748 \text{ g.}$$

Valor obtenido anteriormente = 1,727 g.

Si el poder reductor del azúcar invertido es algo inferior al de la glucosa (Bourquelot y Grimbert), el primer número es más exacto que el segundo.

En resumen: la naturaleza y cantidades de los azúcares de esta orina, son como sigue:

Sacarosa.	1,748 g.
Glucosa	9,937 g.
Levulosa.	3,833 g.
	15,518 g

PAULINO SAVIRÓN.

ORNITOLOGÍA DE ARAGÓN

POR EL R. P. LONGINOS NAVÁS, S. J.

INTRODUCCIÓN

Título.—Por hacerlo sencillo y breve resulta acaso pretencioso el título que encabeza este trabajo. Este no es ni puede ser un estudio completo de las aves que en Aragón existen, sino una noticia de las que conocemos.

Fuentes.—Desde el insigne naturalista Asso hasta nuestros días poco se ha hecho en la Ornitología de Aragón. Por esto será forzoso incluir aquí lo que Asso escribió sobre Ornitología en su obra *Introductio in Oryctographiam et Zoologiam Aragoniæ* el año 1784. Sobre todo que ya el año 1887 el Dr. Hagen, profesor en la Universidad de Cambridge (Estados Unidos), juzgaba útil la reimpresión de la obra (1). Al transcribir los nombres de Asso, que son los de Linneo, habrá que dar, en cuanto sea posible definirlos, su correspondencia con los modernos.

El catálogo de *Aves de España* publicado por D. José Arévalo y Baca en 1887 (Madrid) (2) dará abundancia de datos, al menos indirectos, por lo que á Aragón se refiere, dignos de ser tenidos en cuenta en esta enumeración.

Pero sobre todo prestará materiales y el orden mismo con que procederemos la obra de Ernesto Hartet, *Las Aves de la Fauna paleártica*, que se publica en Berlín (1903 y siguientes).

Además nos valdremos del estudio de ejemplares existentes en el Museo de la Facultad de Ciencias de esta Universidad, en el del Colegio del Salvador, en el del Instituto, de la Escuela de Veterinaria y en otros particulares, ó de los que nos hayan comunicado las personas que en su propio lugar se citen.

Índole.—Para quitar el carácter de descarnado catálogo á estos apuntes y hacerlo más útil para todos, añadiremos algunos cuadros sinópticos y sucintas descripciones, así como algún grabado que contribuya al más claro conocimiento de géneros ó especies.

(1) Soc. Entom. de Bélgica, sesión del 5 de Noviembre de 1887.
(2) Comunicado generosamente por mi amigo D. Alfonso Gaspar.

Voces técnicas.—Por lo mismo comenzaremos por dar la explicación de las voces técnicas más necesarias y usuales en las descripciones, trasladando aquí (fig. 1.ª) la figura que trae Hartet en su Introducción.

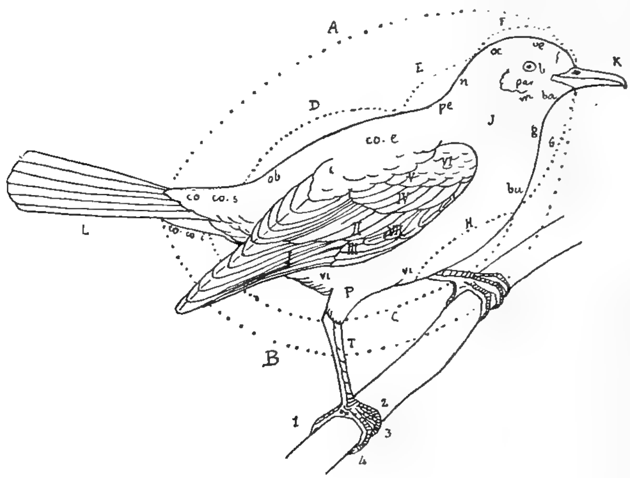


Fig. 1.ª

A. Cara superior del cuerpo.
B. Cara inferior.
C. Parte baja del cuerpo.
D. Dorso.
E. Cuello. Cara dorsal ó superior.
F. Cabeza. Porción superior
G. Cuello. Cara anterior.
H. Pecho.
J. Cuello. Cara lateral.
K. Pico.
L. Cola. Plumas rectrices ó timoneras.
P. Piernas.
T. Tarso.
1 Dedo posterior.
2. Dedo interno.
3. Dedo medio.
4. Dedo externo.
f. Frente.
ve. Vértice, parte superior de la cabeza.

oc. Occipucio.
b. Brida.
par. Región parotídea.
m. Mejilla.
n. Nuca.
g. Garganta.
pe. Pescuezo.
bu. Buche.
vi. Vientre
ob. Obispillo, rabadilla.
co. e. Cobijas de la espalda.
co. co. s. Cobijas superiores de la cola.
co co. i. Cobijas inferiores de la cola.
I. Rémiges primarias (de la mano).
II. Rémiges secundarias (del brazo).
III. Cobijas (de la mano).
IV. Cobijas grandes del ala.
V. Cobijas medianas del ala.
VI. Cobijas pequeñas del ala.
VII. Alilla (alula)

Nomenclatura.—En cuanto á la nomenclatura seguiremos las reglas más universalmente admitidas y practicadas. La ley de prioridad tendrá para nosotros un valor preferente. Usaremos siempre la nomenclatura binaria ó el binomio, diciendo v. gr.: *Passer domesticus* L. Si hay que designar alguna variedad, la indicaremos dentro de la especie, haciendo preceder el nombre que la califique de la voz var. *(varietas)*; así, v. gr., var. ***hispana***.

Evitaremos por consiguiente el trinomio, no diciendo, por ejemplo: *Corvus corax hispanus.*

No menos huiremos de la tautología que resulta de repetir el mismo nombre para designar las palabras genérica, específica y forma tipo de la especie. Así, para nombrar el *cuervo* típico, no diremos con Hartet *Corvus corax corax*, ni para citar el *picogordo* escribiremos con el mismo *Coccothraustes coccothraustes coccothraustes,* sino que en el primer caso escribiremos simplemente *Corvus corax* L., bastando esto, sin más añadir, para que se entienda que hablamos del tipo; y en el segundo, no hallando medio de evitar la enfadosa repetición, inventaremos el nombre genérico *Pycnorhinus*, diciendo consiguientemente *Pycnorhinus coccothrautes* L. En vista de las reglas de nomenclatura redactadas por Blanchard en 1904 no nos hubiéramos atrevido á seguir ese camino, á nuestro parecer el más sencillo y racional, si no tuviésemos delante la práctica constante de Mr. Kirby en su Catálogo de los Ortópteros, cuyo segundo volumen se acabó de imprimir en Noviembre pasado, práctica empleada también en España por el Sr. Bolívar, cuando, por ejemplo, creó el género *Ephippigerida* para evitar la tautología, según parece, pues en el mismo Catálogo antes citado leemos *nom. spec.* al referir el género abandonado *Ephippiger*.

Orden en la exposición.—Prescindiendo de discusiones sobre la clasificación general de las aves y su división en grupos y familias, guardaremos por lo general el orden que el mismo Hartet establece en su obra, siguiendo á su vez á Sharpe.

Deficiencias.—Para evitar en lo posible deficiencias ó lagunas fáciles de llenar en este catálogo sistemático, incluiremos en él aquellas aves, que si bien no se han citado ó hallado en Aragón, que sepamos, sin embargo, por hallarse en varios sitios de España ó por tener una área geográfica muy extensa, es muy creíble se hallen en nuestra región. Mas distinguiremos las ciertas de las problemáticas, con lo que, estimulando el celo de los que lean estas páginas, podremos ser ocasión del placer que experimenten al comprobar como ciertos los datos que aquí se les suministran solamente como probables.

Igualmente, con el fin de disminuir semejantes deficiencias, agradeceremos cuantos datos ciertos se nos comuniquen sobre aves que en Aragón se han visto.

Colegio del Salvador 15 de Marzo de 1907.

I. Orden PÁJAROS

Es el orden más numeroso y menos caracterizado de las aves. Son en general los pájaros aves de pequeño tamaño, casi todas cantoras. Andan á saltos, teniendo los pies conformados normalmente, con tres dedos dirigidos hacia delante y uno hacia atrás, desnudos, lo mismo que los tarsos; éstos cubiertos de escamas ó de una placa á manera de bota. Pico muy diverso, desprovisto de cera. Alas de mediano tamaño. Monógamas. Los pollitos nacen ciegos y se crían en los nidos.

1.ª Familia córvidos

Son los gigantes del Orden. 10 rémiges primarias, la primera de las cuales es corta, como la mitad de la segunda. Pata cubierta por detrás por una placa única. Aberturas nasales alejadas de la base del pico, á veces cubiertas por cerdas ó plumas sedosas.

1 Género **CORVUS** L

Tamaño mayor. Color negro. Aberturas nasales ocultas bajo plumillas como cerdas largas. Pico grande y grueso, mandíbula superior abovedada cerca de la punta. Cola redondeada ó algo escalonada, más corta que el ala.

1. **Corvus corax** L. *Cuervo.*—Negro con reflejos acerados ó purpúreos. Pico y patas fuertes y negros. Las timoneras laterales 4 ó 5 centímetros más cortas que las medianas, de suerte que la cola es redondeada en el extremo. Long. del ala, 43-45 cm.; de la cola, 24-25 cm.; del pico 70-84 mm.; altura máxima del mismo 31 milímetros.

Se halla en toda Europa. Zaragoza. (Gaspar). Hartet no lo cita de España, pero el ejemplar del Museo de la Universidad, de Aragón, y el del Colegio del Salvador, de Cataluña, pertenecen igualmente á la forma típica.

«Corvus Corax. *Cuervo* Funes p. 59. Ubique frequens.» Asso.

Var. **hispana** Hart. et Kleinschm. (Fig. 2.ª). Pico corto, grueso; mandíbula superior arqueada desde la base con el borde inferior sinuoso (en el tipo es recto). Longitud máxima del ala 43 cm. España. No lo he visto de Aragón.

Fig. 2.ª

2. **Corvus cornix** L. *Corneja cenicienta.* Pico y patas negros. Cabeza, buche, piernas y cola negros, lo restante ceniciento. Long. del ala, 32-34 cm.; de la cola, 18-21 centímetros; del pico, 47-50 mm.

3. **Corvus corone** L. *Graja.*—Negro, con reflejo purpúreo en la parte superior, cabeza y cuello verdosos. Pico fuerte (fig. 3.ª), semejante al del cuervo, negro, como las patas. Long. del ala, 30-33 cm.; de la cola, 18-13 cm.; del pico, 46-56 milímetros.

Fig. 3.ª

«Corvus Corone. Nostratibus Corvatiella. Habitat Cæsaraugustæ.» Asso.

Toda España. Zaragoza! (Gil, D. Ricardo).

Clave de las especies del género «Corvus»

1. Color general negro. 2
— Color grisáceo y negro . . . . *cornix* L.
2. Pico más corto que la cabeza; plumas de la garganta cortas y compactas . . . . *corone* L.
— Pico más largo que la cabeza; plumas de la garganta alargadas y puntiagudas . . . . *corax* L.

2. Género TRYPANOCORAX Bonap.

Aberturas nasales al descubierto, sin cerdas en la base del pico, al menos en la edad adulta; brida y barba con piel desnuda amarillenta, granujienta y como tiñosa. Lo demás parecido al género *Corvus*, en el cual lo incluye Hartet.

4. **Trypanocorax frugilegus**. L. *Corbina, Grajo.*—Negro, con hermosos reflejos purpúreos, especialmente en la cabeza, cuello, pecho y cobijas de las alas. Garganta con plumón pardo rojizo (fig. 4.ª). Ala 30-33 cm.; cola 16-18 centímetros; pico 52-63 mm.

Fig. 4.ª

Aragón (Museo de la Universidad).

3. Género COLŒUS Kaup.

Pico grueso y corto, apenas tan largo como la cabeza. Aberturas nasales cubiertas por las vibrisas. Plumas del cuello y de la nuca muy divididas, radiantes ó filiformes.

5. **Colœus monedula** L. *Chova.*—Negruzco. Cabeza con la frente, vértice y garganta de un negro intenso; nuca y pescuezo grisáceos (fig. 5.ª). Ala 23-25 cm.; cola 13-14 cm.; pico 29-36 milímetros.

Fig. 5.ª

Citado de varias regiones de España (Arévalo): de Cataluña existe en el Museo del Colegio del Salvador.

4. Género **Fregilus** Lesson (=*Pyrrhocorax* Vieill. nom. spec.)

De aspecto corvino, pero con el pico y patas rojos ó amarillos. Aberturas nasales cubiertas por plumas cortas, densas y fuertes. Alas largas. Cola casi cuadrada en el extremo. Tarso cubierto por delante y por detrás con una placa indivisa.

6. **Fregilus pyrrhocorax** L. *Graja.*—Negro con reflejos acerados, en las alas y cola verdosos. Pico rojo, tanto ó más largo que la cabeza; mandíbula superior arqueada en el extremo. Tarsos del mismo color. Ala 27-31 cm.; cola 15-17 cm.; pico45-58 mm.

«Corvus totus ater, rostro pedibusque sanguineis. Varietas *C. Graculi* ratione ætatis. *Grajo* Funes p. 77. Marcuello. p. 222.» Asso.

Aragón(Mus. Univ). Alcolea de Cinca!(Sender, Mus. Col. Salv.)

7. **Fregilus graculus** L. *Grajo.*—De un negro uniforme. Pico amarillo, más corto que la cabeza. Patas amarillentas, rojizas. Ala 26-28 cm.; cola 17-19 cm.; pico 25-30 mm.

Pirineos (Arévalo).

5. Género **Nucifraga** Vieillot

Pico redondeado, con las ventanas nasales cercanas á la base, no cerradas con membrana, cubiertas por cortas vibrisas dirigidas hacia delante. Plumaje abundante, pardo obscuro con manchas blancas. Las rémiges 4-6 casi iguales y las más largas, la 3.ª algo más corta, la 1.ª poco más de la mitad de la 2.ª.

Nucifraga caryocatactes L. *Cascanueces.*—Vibrisas y plumas de la brida de un blanco sucio, negras en la base. Alas negras; sus cobijas con manchas blancas; sólo las cobijas más largas de un color. Ala 18-19 cm.; cola 12-13 cm.; pico 40-45 mm.

Fig. 6.ª

Del Norte y Centro de Europa llega á los Pirineos (Hartet).

6. Género **Melanopica** (1) nom. nov. (=*Pica* Vieill. nom. spec.)

Cola larga, cuneiforme, con las timoneras medianas doble más largas que las laterales. Primera rémige muy corta, estrecha y ensiforme (fig. 7.ª) Color mezclado de blanco y negro, éste con reflejos metálicos muy brillantes.

Fig 7.ª

(1) Del griego μέλας, μέλαινα, μέλαν, *negro;* por alusión al color dominante.

3. **Melanopica pica** L. *Urraca, Picaza, Picaraza, Marica.*— Pico y patas negros. Cabeza, cuello, lomo, buche, piernas, vientre, de un negro intenso. Una faja blanca ó grisácea en el obispillo. Pecho y vientre blancos. Ala 15-19 cm.; cola 21-26 cm.; pico 28-35 mm.

El tipo no se ha citado de España.

Var. **melanotos** Brehm. Todo el lomo y obispillo negros, ó con vestigios en éste de una faja amarillenta.

Toda la Península. Frecuentísima en todo Aragón.

«Corvus Pica. *Hurraca* Funes p. 78 Nostratibus *Picaraza* et *Picaza* Marcuello p. 38. Habitat Cæsaraugustæ, circa Luna.» Asso.

7. Género **CYANOPICA** Bonap.

Parecido al género *Melanopica* por su cola larga y escalonada, distinto por su color, tamaño menor y primera rémige no ensiforme.

10. **Cyanopica Cooki** Bonap. *Urraca azul.*—Cabeza y pico de un negro intenso, barba y garganta blancas. Muchas rémiges y las timoneras de azul ceniciento, lo demás rojizo de tórtola. Ala 13-14 cm.; cola 19-20 cm.; pico 25 mm.

España meridional y central (Hartet); Cataluña (Mus. Salv.). Debe de hallarse en Aragón.

Para Hartet es una subespecie de la *Cyanopica cyanus* Pall., de Siberia.

8. Género **GARRULUS** Vieill.

Cabeza con plumas alargadas más ó menos en forma de moño. Aberturas nasales cubiertas por las vibrisas. Cobijas de las alas de azul claro, franjeadas de negro. Cola larga, truncada.

11. **Garrulus glandarius** L. *Arrendajo*, *Gayo* (arag.).—Color dominante rojizo de canela. Cabeza con pico negro y mancha negra, ancha y larga á manera de bigote; barba y garganta blancas. Ala 17-19 cm.; cola 15 cm.; pico 25 mm.

Comunísimo en los encinares. Mus. Univ., Col. Salv. Veruela! (Zaragoza), etc.

«Corvus glandarius. Nostratibus Gay. Habitat circa Epila, Cæsaraugustæ, ubi editur, et venalis prostat in foro. A congeneribus differre videtur rostro nonnihil adunco, dente obsoleto versus apicem utrinque instructo. Amat iliceta.» Asso.

N. B. No puedo referir á ninguna de las especies precedentes la que cita Asso con estas palabras: «Corvus totus niger, rectricibus basi albis. Vidimus circa Rodanas. Congeneribus minor».

Clave de los géneros de CÓRVIDOS

1. Pico desnudo en la base, con aberturas nasales patentes alejadas de la misma. . . . . *Trypanocorax Bp.*

—Pico más ó menos cubierto de plumillas ó vibrisas en la base, ocultando las aberturas nasales. 2

2. Cola casi cuadrada ó redondeada en el extremo, con las rectrices centrales poco más largas que las laterales. . . . 3

—Cola escalonada, con las timoneras centrales doblemente más largas que las exteriores. 7

3. Cola redondeada en un extremo, corta; alas de mediana longitud; pico y patas negros. 4

—Cola truncada en el extremo; pico y patas de distinto color, no negros. 6

4. Plumaje de color uniforme, negro por lo común, ó variado, pero sin manchas blancas sueltas. 5

—Plumaje abundante, pardo obscuro con manchas blancas. *Nucifraga* Vieill.

5. Pico grande y grueso. Plumas del cuello y nuca normales. *Corvus* L.

—Pico más corto que la cabeza. Plumas del cuello y nuca divididas, radiantes ó filiformes, cenicientas . . . *Colœus* Kaup.

6. Cola corta, alas largas. Pico y patas de color amarillo ó rojo. *Fregilus* Less.

—Cola larga, alas medianas. Pico negro y patas amarillentas. *Garrulus* Vieill.

7. Rémiges y rectrices negras casi totalmente, con reflejos metálicos intensos. . . . . *Melanopica* Nav.

—Rémiges y rectrices azules casi en su totalidad, sin reflejos metálicos. . . . . *Cyanopica* Bonap.

Determinación de la hora media y de la latitud en Zaragoza

El haber adquirido recientemente la Facultad de Ciencias de Zaragoza un teodolito muy aceptable para las prácticas de los alumnos de las clases de Cosmografía y Astronomía, ha sido motivo para que les encomendásemos como primer trabajo, la determinación de la *hora media* y de la *latitud*, si bien los cálculos han sido realizados casi exclusivamente por el Sr. Rey Pastor.

1. *Instrumentos.*—Los instrumentos empleados han sido un teodolito, adquirido en la casa constructora Rud. & Aug-Rost.—Wien; y un cronómetro, de tiempo medio (Parkinson & Frdsham) cuyo movimiento, muy próximo á *un segundo* fué determinado en el Observatorio de Madrid.

El teodolito tiene un círculo horizontal de 35 centímetros de diámetro, provisto de II microscopios que permiten apreciar un *segundo de arco*. El círculo vertical de 20 centímetros tiene II nonios que permiten apreciar *diez segundos de arco*.

Los microscopios que de la casa constructora venían con un error de posición bastante considerable, se han corregido de modo que sus lecturas solo llegan á discrepar en muy pocos segundos en la posición diametralmente opuesta.

El error de inclinación del eje vertical y el de colimación que influye en las alturas instrumentales no se han calculado, sino que se han corregido cuidadosamente. Y así se ha hecho también con el del eje horizontal, aunque su influencia sea secundaria.

El error de posición del cero, en el círculo de altura, se ha determinado, antes y después de la serie de observaciones de alturas, haciendo las lecturas de un objeto terrestre en posiciones inversas del círculo.

2. *Lugar de observación.*—El instrumento se ha instalado en una de las ventanas de la planta principal de la Facultad de Ciencias, en su fachada *S*. Su posición respecto al punto *P*, vértice de la triangulación geodésica, correspondiente á la torre de la iglesia del Pilar, es la que indica la figura, donde *F* señala nuestro lugar de observación.

La distancia meridiana PF_1 entre ambos lugares es muy aproximadamente, según los planos topográficos de la población

$$PF_1 = 1025 \text{ metros}$$

que reducido á arco, adoptando para valor de un grado 111.111,111 metros es

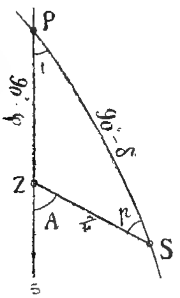
$$PF_1 = 33'',21$$

estando F_1 al Sur de P.

Adoptando, pues, el valor que da «Le connaissance des temps» para el citado vértice geodésico, la latitud aproximada de nuestra estación, es

$$41^\circ\ 39'\ 24'' - 33'',21 = 41^\circ\ 38'\ 50'',\ 79$$

3. *Fórmulas referentes al problema.*—El procedimiento adoptado ha sido el de alturas absolutas del Sol, utilizando para la determinación de la latitud las mismas observaciones hechas para la determinación de la hora.



En el triángulo PZS (Polo-Zenit-Sol) de la figura se tiene

$$\cos z = \text{sen}\ \varphi\ \text{sen}\ \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

de la cual por sencillas transformaciones sale

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg}^2 \dfrac{1}{2} t = \dfrac{\text{sen}\,(S-\delta)\ \text{sen}(\,S-\varphi)}{\cos S \cos\,(S-z)} \\ \text{en la cual} \qquad S = \dfrac{1}{2}\,(\varphi + \delta + z) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

y representando por δt la ecuación de tiempo y por U la hora cronométrica observada, el estado Δu del cronómetro será, dando á δt el signo correspondiente

$$\Delta u = t + \delta t - U \qquad (2)$$

La hora cronométrica adoptada U ha sido el promedio de diez observaciones, y la distancia zenital el promedio de las correspondientes distancias zenitales, corregidas convenientemente por no ser cierta la proporcionalidad entre las horas y las distancias zenitales. La corrección en la distancia zenital por esta causa es

$$C'' = -\frac{1}{2n}\,\frac{15 \times 15}{206265}\,\frac{\cos \varphi \cos \delta \cos A \cos p}{\cos h}\,\Sigma[(u-U)^{s}]^{2} \qquad (3)$$

donde u representa cada una de las n horas cronométricas y U el promedio de todas.

Para la determinación de la latitud se ha empleado la fórmula siguiente:

$$\cos z = \text{sen}\ \varphi\ \text{sen}\ \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

de la cual haciendo

$$\left.\begin{array}{r} \text{sen}\ \delta = m\ \text{sen}\, M \\ \cos \delta \cos t = m \cos M \end{array}\right\}\ \text{tg}\ M = \frac{\text{tg}\ \delta}{\cos t} \qquad (4)$$

sale $$\cos(\varphi - M) = \frac{\cos z \operatorname{sen} M}{\operatorname{sen} \delta} \qquad (5)$$

para definir el valor de φ.

4. *Observaciones verificadas.*—Las observaciones verificadas en la mañana del 17 de Marzo de 1907, se expresan en el siguiente cuadro:

1.ª Posición del cero. C. I. $\begin{cases} \text{I} = 14^\circ\, 16'\, 50'' \\ \text{II} = \, 50'' \end{cases}$ C. D. $\begin{cases} \text{I} = 168^\circ\, 36'\, 50'' \\ \text{II} = \, 37'\, 10'' \end{cases}$

ALTURAS OBSERVADAS		HORAS CRONOMÉTRICAS	
$h_1 = 39^\circ\ 10'$	$h_6 = 40^\circ\ 00'$	$u_1 = 10^h\ 8^m\ 34^s$	$u_6 = 14^h\ 15^m\ 23^s$
$h_2 = 20'$	$h_7 = 10'$	$u_2 = 9\ 54$	$u_7 = 16\ 46$
$h_3 = 30'$	$h_8 = 20'$	$u_3 = 11\ 15$	$u_8 = 18\ 09$
$h_4 = 40'$	$h_9 = 30'$	$u_4 = 12\ 37$	$u_9 = 19\ 34$
$h_5 = 50'$	$h_{10} = 40'$	$u_5 = 14\ 00$	$u_{10} = 21\ 00$

2.ª Posición del cero. CI. $\begin{cases} \text{I} = 14^\circ\, 17'\, 10'' \\ \text{II} = \, 0'' \end{cases}$ CD. $\begin{cases} \text{I} = 168^\circ\, 37'\, 10'' \\ \text{II} = \, 36'\, 50'' \end{cases}$

Las lecturas se han hecho con CI. (círculo á la izquierda).

Se ha observado el borde inferior.

Temperatura, 15°. Presión 736 mm.

En el siguiente cuadro se exponen las alturas corregidas de la posición del cero, del semidiámetro, de la paralaje y de la refracción.

Alturas instrumentales	Posición del cero —	Paralaje +	Refracción —	Semidiámetro +	Distancias zenitales	Horas de cronómetro	$(u - U)^2$
$h_1 = 39^\circ\ 10'$	1°26'58",75	6",80	1'10",77	16'6"13	52° 1' 56",59	$10^h\ 8^m\ 34^s$	136161
$h_2 = 20$	íd.	íd.	10,47	íd.	51 51 56,29	9 54	83521
$h_3 = 30'$	íd.	íd.	10,05	íd.	51 41 55,87	11 15	43264
$h_4 = 40'$	íd.	íd.	9,63	íd.	51 31 55,45	12 37	15876
$h_5 = 50'$	íd.	íd.	9,21	íd.	51 21 15,03	14 00	1849
$h_6 = 40^\circ\ 00'$	íd.	íd.	8,81	íd.	51 11 54,63	15 23	1600
$h_7 = 10'$	íd.	íd.	8,41	íd.	51 1 54,23	16 46	15129
$h_8 = 20'$	íd.	íd.	8,01	íd.	50 51 53,83	18 09	42436
$h_9 = 30'$	íd.	íd.	7,61	íd.	50 41 53,43	19 34	84681
$h_{10} = 40'$	íd.	íd.	7,30	íd.	50 31 53,12	21 00	142129
					Promedio	Promedio	Suma
					51 16' 54"85	$10^h\ 14^m\ 43^s,20$	566646

Corrección de la distancia zenital promedia: Aplicando la fórmula (3) en la cual se han adoptado como valores del azimut y del ángulo paraláctico los calculados con valores aproximados de φ y de t

$$A = 37^\circ\ 42'\ 20''$$
$$p = 27^\circ\ 12'\ 20''$$

se ha obtenido $C'' = 20'',75$

La distancia zenital correspondiente á hora U es pues

$$Z = 51^\circ\ 16'\ 34'',10$$

5. *Cálculo de la hora y de la latitud.*—Aplicando las fórmulas (1) y (2) se ha obtenido

$$t = 2^h\ 0^m\ 48^s,71$$
$$\Delta u = 6^m\ 45^s,36 \quad \text{(adelantado)}$$

y aplicando las (4) y (5)

$$M = -(1^\circ\ 59'\ 24'',94$$
$$\varphi - M = 43^\circ\ 38'\ 15'',70$$

y por tanto $\varphi = 41^\circ\ 38'\ 50'',76.$

6. *Resultado.*—Como se ve coincide nuestro valor de la latitud con el del vértice geodésico hasta en las *décimas de segundo.* Sin embargo, más debe atribuirse á una extraña compensación de errores, que á una buena determinación, pues no eran excelentes ni mucho menos, las condiciones en que se operaba, por falta de la conveniente estabilidad del pilar. Será pues, prudente, tener mayor número de determinaciones, para fijar el valor de la latitud y llegar á calcular su error probable.

GABRIEL GALÁN.

ESTUDIO PRELIMINAR DEL CLIMA DE ZARAGOZA.

PRIMERA PARTE

PRESIÓN ATMOSFÉRICA Y TEMPERATURA

La capital de Aragón, situada á las 41° 35′ de latitud N. y 2° 18′ de longitud E. respecto del meridiano de Madrid, extiéndese por la llanura de 200^m de altitud que forma la vega del Ebro, cuyo río lame por el N. los muros de la ciudad, y se une en el E. de la misma con los ríos Gállego y Huerva, que afluyen á él del N. y S., respectivamente.

Como además por el S. y E. de la población, corre el Canal imperial, caudalosa arteria que con sus aguas fecundiza la llanura aragonesa, se comprenderá la abundancia de agua en el terreno cuyo clima tratamos de estudiar, circunstancia muy de tener en cuenta para mejor apreciar las consecuencias deducidas de ese estudio.

El suelo de Zaragoza, constituído por los aluviones antiguos y modernos, en su totalidad, se asienta sobre rocas yesosas que forman dos series de colinas á ambos lados del Ebro, las cuales por su falta casi absoluta de vegetación y característica desnudez, forman muy raro contraste con la frondosidad de la vega zaragozana.

Cierran esta llanura por el N. los Pirineos con sus importantes estribaciones, que con rápido declive bajan hasta dominar la explanada; por el S. y el N., los macizos más irregulares y separados de la cordillera Ibérica, en la que descuella el Moncayo como gigantesca atalaya; y por el E., á lo lejos, las estribaciones de las serranías costeras de Valencia y Cataluña, que aunque de poca altura relativa, impiden el libre acceso de los vientos mediterráneos.

En ese recinto montañoso, y en dirección dominante del NO. al

SE., corre el Ebro por entre frondosos campos rodeados de áridos y extensos campos, que como el Castellar y los llanos de Plasencia, los Monegros y otras llanuras de la ribera derecha, recuerdan por su aspecto desolado en los años de sequía á las altas tierras de Argelia y Marruecos, constituyendo la *estepa aragonesa* en parte remediada por el aprovechamiento de sus ríos y torrentes.

Esos antecedentes geográficos, expuestos como introducción al estudio de nuestro clima, pueden servirnos para juzgar mejor los resultados obtenidos y permitirá tener en cuenta las influencias regionales y locales que afecten de un modo más ó menos directo á esos resultados.

Las observaciones de que disponemos para el estudio del clima de Zaragoza, corresponden á cuatro estaciones diversas, de muy varias condiciones de emplazamiento y aun altitud, lo cual nos permitirá, dentro de lo que consienta la índole de las observaciones, llegar al mejor conocimiento de clima tan complejo é irregular. Pero, por ahora, nos limitaremos al estudio de las observaciones realizadas en la *Estación oficial* desde 1865 á 1894, completadas é ilustradas por las muy asíduas y cuidadosas del R. P. Blas Ainsa, en el Colegio de Escuelas Pías (210^m) durante los años de 1880 á 89, observaciones más frecuentes, y perfectamente comparables por sus condiciones de emplazamiento con las del observatorio oficial.

Estuvo instalado este observatorio hasta 1885 en una terraza construída *ad hoc* en el Instituto provincial de segunda enseñanza, al E. de la ciudad, muy cerca del Ebro y casi en el contorno del casco de población. Trasladado en dicha fecha al edificio colindante, de la Universidad, en análogas condiciones de instalación, podemos considerar toda la serie como perteneciente á una estación única de 218^m de altitud.

Como esa serie es algo deficiente ha sido preciso examinar cuidadosamente los datos, para corregir algunos valores erróneos ó defectuosos y llenar otras lagunas, como las de los años 1881, 1885 y 1887, con las observaciones de las Escuelas Pías antes citadas. De ese modo resulta la serie más aceptable y podremos obtener valores que sirvan como *definición preliminar* del clima de Zaragoza, susceptible de más exacta apreciación en trabajos posteriores.

I.—PRESIÓN ATMOSFÉRICA

Se han obtenido los valores de este elemento meteorológico mediante los observados á las 9^h y 15^h, que de ordinario son máximo y mínimo de las alturas barométricas, y cuyo promedio representa con bastante exactitud la presión media diurna, no en cada día, pero sí en el mes.

I.—Presiones medias sextihorarias

	3^h	9^h	15^h	21^h	Promedio
Enero	748.0	748,6	747,1	747,9	747,9
Febrero	46.3	47.2	45 5	46.5	46.4
Marzo	43.4	44.3	42.4	43.6	43.4
Abril	40.3	40.8	39.1	40.7	40.2
Mayo	43.3	44.0	42 2	43.4	43.2
Jnnio	44.3	44.8	43 0	44 1	44.0
Julio	44.7	45.4	43.3	44.3	44.4
Agosto	43.9	44 7	42.4	43.5	43.6
Septiembre	44.5	45.5	43 7	44.7	44.6
Octubre	44.2	45.1	43.5	44.6	44.3
Noviembre	46.4	47.3	45.8	46.7	46.5
Diciembre	47 6	48.4	47.0	47 7	47.7
Año	744.7	745.5	743.8	744.8	744.7

El cuadro preinserto que se refiere á las observaciones de las Escuelas Pías en los seis años de 1880 á 85, nos muestra en efecto, que los valores de la presión media rara vez difieren de los obtenidos como promedios de las observaciones barométricas á las 9^h y 15^h, confirmando así una vez más la regla general que presidió el establecimiento de esas horas de observación. Realizadas las observaciones trihorarias el año 1884, tampoco se notó diferencia entre los promedios barométricos de las ocho observaciones correspondientes y los de las cuatro que anteceden, mostrando claramente lo suficiente de estas últimas para la exacta determinanación de los citados promedios.

Puede además advertirse en el cuado anterior la pequeña diferencia que existe entre las presiones de las 9^h de la noche y 3^h de la madrugada siguiente, en cuyas horas el barómetro se aparta muy poco de la presión media diurna, y se mantiene por término medio sin alteración apenas perceptible. Sólo por el intermedio de observaciones más frecuentes se observa que existe un máximo, poco pronunciado, entre las 21^h y las 23^h, según las estaciones, seguido de un mínimo entre las 5^h y 2^h de la madrugada, los cuales con el máximo mayor entre 8^h y 10^h y el mínimo menor entre las 14^h y las 17^h, constituyen la doble oscilación diurna propia de las latitudes medias.

En los días de alta presión sostenida, esa oscilación se acusa bastante bien, como todas aquellas oscilaciones que requieren una situación atmosférica relativamente estable, y en ellos alcanza un valor muy frecuente de 2 á 4 milímetros. Pero esa oscilación, que puede exceder en los días tan variables del invierno de 12^{mm}, salto de la presión más bien que oscilación barométrica, alcanza apenas á 2^{mm} como término medio, con un pequeño descenso y ascenso respectivo de algunas décimas de milímetro en los meses de invierno y verano.

Agrupando por quinquenios los valores medios de la presión media mensual, hemos formado el cuadro II, que se refiere á las observaciones de la Estación oficial, y nos da muy clara idea de la oscilación anual de la altura barométrica, dentro de la variabilidad de los citados valores en los años sucesivos.

Como acontece en las demás estaciones de la Península y todas las continentales de análoga latitud, es máxima la presión atmosférica en los meses del invierno, en cuya época residen habitualmente sobre nuestras latitudes, enormes áreas de altas presiones, casi estacionarias durante varios días y aún semanas, hasta ser desalojadas por las borrascas invernales, que durante un tiempo más ó menos largo alteran la predominante situación anticiclónica produciendo bruscos y muy importantes descensos barométricos.

Por el contrario, en la primavera (Marzo, Abril y Mayo) se advierte un mínimo, producido por el alejamiento hacia el Atlántico del anticiclón invernal, y después de una pequeña oscilación en los meses del estío y los dos primeros del otoño, que no alteran apenas la altura barométrica, vuelve de nuevo á ascender en Noviembre y meses sucesivos.

II. Alturas barométricas medias

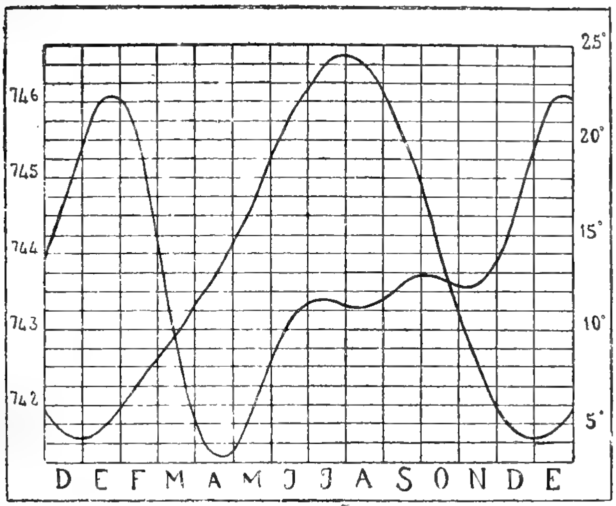
	1865 1869	1870 1874	1875 1879	1880 1884	1885 1889	1890 1894	Promedio....	Máxima	Año....	Mínima.	Año....
Enero	744.3	744.2	746.9	748.1	744,6	745.2	745,6	754 0	1882	739.0	1881
Febrero	47.2	44.2	44.9	46.3	43.9	45 7	45.4	51.4	1891	38.9	1870
Marzo	39.5	43.8	42.3	42 9	41.8	43.2	42 3	48.3	1874	36.7	1869
Abril	43.0	42.1	39.9	39.5	40.0	42.7	41.2	44 9	1870	36.7	1884
Mayo	41.3	41.8	41.3	42.5	42.3	43.2	42 1	46.7	1892	39.3	1890
Junio	43.9	42 9	43.2	43 5	43.0	44.5	43.5	46 1	1892	42 3	1888
Julio	43.8	42.5	44.3	43.5	43.6	42.7	43.4	47 5	1878	41.5	1892
Agosto	42.9	42.8	44.3	43 3	43.6	42 8	43.3	47.9	1878	41.0	1885
Septiembre	44 0	43.5	43.3	43.6	43.9	43 8	43 7	47 2	1865	40.9	1868
Octubre	44.1	41.9	43.6	44.1	43 1	4.27	43.3	47.3	1890	39.4	1865
Noviembre	45.1	42.2	42.3	46.8	44.1	43.3	44.0	50 2	1889	39.2	1887
Diciembre	45.6	43.6	44.6	46.4	45.5	44.8	45.1	50.4	1879	39.9	1890
Año	743.7	743.0	743.4	744.2	743,3	743.7	743.6	745.5	1882	742.0	1872

Si agrupadas por decenas las presiones medias, aplicamos á los promedios deducidos, el método de los mínimos cuadrados por el intermedio de una función periódica, obtenemos la expresión

$$B_x = 743{,}56 + 1^{mm}{,}25 \,.\, \text{sen}\,(x + 110^0 1') + 1^{mm}{,}15 \;\text{sen}\,(2x + 45^0 21') + 0^{mm}{,}58 \;\text{sen}\,(3x + 165^0),$$

que nos representa aproximadamente la marcha de la presión en el curso del año ideal promedio de los observados. Esa excursión anual de la altura barométrica media, tiene su representación en la curva correspondiente del adjunto gráfico, que da clara idea de su modo de ser y de sus principales accidentes. Para ver bien

Curvas anuales de presión y temperatura media



claras las diversas oscilaciones, especialmente la del estío y otoño está muy exagerada la escala correspondiente á la altura barométrica.

Finalmente, el cuadro III, que contiene los valores extremos de la columna barométrica, nos acaba de instruir acerca de la variación de la misma, mostrándonos la mayor insconstancia de la presión en los meses del invierno, que con Marzo nos ofrecen las más altas y bajas presiones y las mayores oscilaciones barométricas mensuales y extremas.

III.—Alturas barométricas extremas

	Máx. diurna media.	Mín. diurna media....	Os. diurna media ...	Máx. mensual media	Mín. mensual media	Os. mensual media....	Máx. absoluta.....	Fecha	Mín. absoluta.....	Fecha....	Os. extrema	Año......
Enero.....	746 4	741.8	1,6	755.2	732.6	22 6	765.1	17—82	720.7	13—18	34.5	1883
Febrero...	46.2	44.5	1,7	51.2	34.5	19.7	61.1	23—83	21.5	19—88	33.1	1866
Marzo....	43.3	41.4	1,9	52 4	31.0	21 4	56.8	9—83	20.6	10—69	35.5	1878
Abril	42.1	40.4	1,7	50.4	31.5	18.9	55.2	23—92	24 4	7—85	27.1	1889
Mayo.....	43.0	41.2	1,8	49.5	33.4	16.2	55 4	27—92	28.0	25—89	22.1	1883
Junio......	44.5	42.6	1,9	49 3	36 5	12.8	54.0	29—92	33 0	2—81	15.3	1893
Julio......	44.3	42.3	2,0	48.9	37.1	11.8	52.6	16—83	33.2	28—92	17.1	1883
Agosto. ..	41.3	42.2	2,1	48.4	37.0	11.4	51.4	11—78	32.0	29—85	15.5	1885
Sepbre....	44.7	42.8	1,9	49 6	36.0	13.6	55.5	26—90	29.0	28—69	18.6	1890
Octubre...	44.1	42.4	1,7	50.6	33.4	17.2	56 2	23—88	26.3	18—65	27 8	1888
Noviembre	44.8	43.2	1,6	51.9	33.0	18.9	58 2	20—89	23 2	23—69	27.2	1867
Diciembre	45.9	44.4	1,5	53.7	32.5	21.2	61.7	28—79	20.9	29—70	43.0	1879
Año......	744.5	742.7	1 8	751.2	734.0	17.2	765.1	En—82	720 7	En—83	40.4	1883

II.—TEMPERATURA

Más importantes que los de la presión, bajo el punto de vista climatológico, son los fenómenos que se refieren á la temperatura, tan variable en nuestras latitudes por la desigual duración de los días con las diversas alturas que alcanza el Sol sobre el horizonte. Los valores registrados como temperaturas medias en las observaciones que estudiamos, son los promedios de las máximas y mínimas de los diversos días de cada mes, y en realidad sólo miden esa temperatura media con aproximación, cuya cuantía vamos á tratar de apreciar.

IV.—Temperaturas medias sextihorarias

	3 am.	9 am.	3 pm	9 pm.	Promedio..	Promed. de máx y mín	Diferencia.
Enero...........	1.8	2.3	8.0	3.9	4.0	4.7	—0.7
Febrero...........	6.0	7.3	13 4	8.6	8.8	9.4	—0.6
Marzo	7.0	9.5	15.6	10.0	10.5	11.1	—0.6
Abril..	8.9	12.4	17.1	11.9	12.6	13.2	—0.6
Mayo.............	12.2	16.8	22 2	16.2	16.8	17.4	—0.6
Junio...	14.6	19.5	25.3	19.0	19.6	20.3	—0.7
Julio.....	18.6	23.4	30.7	23.6	24.1	25.0	—0.9
Agosto.......	18.9	23.2	30 5	23.6	24.0	24 9	—0.9
Septiembre	15.3	18.5	24.6	18.7	19.3	19.8	—0 7
Octubre...........	11.0	13.2	18.7	13.4	14.1	14.6	—0.5
Noviembre........	6.8	7.7	13 5	8.9	9.2	9.7	—0.5
Diciembre.........	2.1	2.7	7.8	3.7	4.1	4.6	—0.5

El cuadro anterior, que contiene los valores medios de las temperaturas sextihorarias observadas desde 1880 á 85 en el Colegio de Escuelas Pías, nos muestra que la temperatura media diurna difiere del promedio de máximas y mínimas en 0°,6, como término medio, diferencia que habremos de aplicar á este promedio como corrección sustractiva. También se advierte, que la media aritmética de las cuatro temperaturas de las 9^h de la mañana, 5^h de la noche, máxima y mínima, aprecia la media diurna con un error que en ningún caso excede de 0°,2.

Ambas consecuencias tienen carácter casi general para las estaciones de las latitudes medias, y permiten simplificar la labor climatológica. Además nos muestran la conveniencia de completar las observaciones meteorológicas de las 9^h am. y 3 p. n. con la de las 9 p. m., que no exige los desvelos de la observación á las 3^h de la madrugada, aunque en la organización actual del servicio meteorológico resulta igualmente irrealizable. La última de las consecuencia advertidas se verifica también en períodos menores de un mes, y hemos podido comprobarla con igual exactitud para las temperaturas medias de las décadas.

Observaciones realizadas cada tres horas en el año 1884, no dan variaciones apreciables en los valores de la temperatura diurna media deducida de las citadas observaciones sextihorarias, mostrándonos lo suficiente de estas últimas para la determinación de la temperatura.

En el cuadro V, inserto á continuación se contienen los valores de la temperatura media en cada mes, acompañados de la ma-

V.—Temperaturas medias

	1865 1869	1870 1874	1875 1879	1880 1884	1885 1889	1890 1894	Promedio..	Máxima....	Año... ...	Mínima ...	Año.....	Máx. diurna media..	Mín diurna media....	Osc. diurna media....
Enero	6.1	5.3	5.2	3.8	4.1	4.0	4.8	7.7	1877	0.6	1876	10.2	0.5	9.7
Febrero....	8.5	7.7	8.1	8.3	6.6	6.8	7.7	10.5	1867	3.7	1888	14.2	2.5	11.7
Marzo............	9.1	10.3	10.6	10.8	9.3	9.1	9.9	12.5	1880	6.9	1883	17.0	3 9	13.1
Abril.	14.7	13.5	14.3	12.9	11.3	12.6	13.2	16.6	1871	11.5	1885	20.8	6.9	13.9
Mayo.	18.8	17.3	17.8	16.8	16.6	17.0	17.4	20.7	1868	15.2	1890	25.8	10.3	15.5
Junio	22.1	20.6	21.3	19.6	20.2	22.2	21 0	23.7	1870	18.4	1884	29 7	13.5	16.2
Julio	25.4	25.3	24.3	24.5	23.5	23.7	24.5	26.8	1876	21.8	1888	33.5	16 5	17.0
Agosto	23.9	22.9	25.0	24.6	23.7	23.9	24.0	26.0	1893	18.0	1873	32.9	16 3	16.6
Septiembre	20.7	20.6	20.6	19.6	20.0	19.7	20.2	22.3	1865	16.8	1882	28.2	13.3	14.9
Octubre	14.9	14.0	14.8	14.3	12.7	14 4	14.2	17.5	1880	10 5	1887	21.3	8.4	12.9
Noviembre........	9.0	8.9	9.0	9.0	8.4	8.4	8.8	10.7	1866	7.3	1878	14.7	4.1	10.6
Diciembre	7.1	4.0	5 6	4.6	5.1	4 8	5.2	10 0	1868	-0.1	1879	10.5	0.9	9.6
Año..............	15 0	14.2	14.7	14.1	13.5	13.9	14.2	15 5	1878	13.2	1890	21.5	8.0	13.5

yor y menor de las observadas en los 30 años. De su examen resulta inmediatamente: la variabilidad del estado térmico en un mismo mes al pasar de uno á otro año, la oscilación anual de la temperatura con su mínimo de Diciembre y Enero y su máximo de Julio y Agosto, y la mayor rapidez en el enfriamiento ó descenso térmico de Agosto á Diciembre que el caldeamiento de Enero á Julio.

Por la última parte de este cuadro advertimos que la oscilación media diurna, con su mínimo ordinario de entre 4^h y 8^h de la mañana, según las estaciones, y su máximo entre 1^h y 5^h de la tarde, tiene una amplitud creciente del invierno al estío, pudiendo exceder de 22° en alguno de los días de esta última estación.

De modo análogo que para la presión se deduce la fórmula

$$T_x = 14{,}18 + 9^0{,}69 \operatorname{sen}(x + 293^0.4') + 1^0.51 \operatorname{sen}(2x + 241^0.24'),$$

como expresión de la temperatura media en el transcurso del año teórico establecido con el promedio de los 30 años de observación. Calculando valores con esa fórmula se obtiene la curva anual de la temperatura media que figura en el gráfico antes considerado y nos dibuja claramente la oscilación anual de ese elemento meteorológico.

Si reducimos las temperaturas al nivel del mar, por la regla empírica generalmente admitida, veremos que son: 5°.9, 25°.8 y 15°.4 las temperaturas de Enero, de Julio y del año al nivel del mar. Pero como por su latitud corresponderán á esas épocas temperaturas aproximadas de 3°.4, 21°.8 y 12°.9, resultan como diferencias ó *anomalías* positivas 2°.5, 4°.0 y 2°.5, números que claramente nos muestran, comparados con otros análogos, que no está tan favorecida Zaragoza en cuanto á su exceso de termicidad como Inglaterra, Francia, Noruega y otras naciones de la Europa occidental y del centro, que reciben en grado más sensible la influencia de la corriente del Golfo y vientos del SO.

Para acabar de juzgar las afecciones climatológicas que dicen relación á la temperatura, nos resta examinar los valores medios y absolutos de las temperaturas extremas, con sus oscilaciones correspondientes. El cuadro VI contiene esas temperaturas á la sombra y bajo cubierto, y nos muestra la posibilidad de que los objetos colocados á la sombra y bajo ligeros resguardos, se encuentren sometidos á temperaturas que dentro de un mismo mes difieran en 36° y muy cerca de 60° dentro del año.

VI.—Temperaturas extremas á cubierto

	Máx. mensual media.	Min mensual media	Osc. mensual media.	Máx menor	Fecha....	Mín. mayor	Fecha	Máx. absoluta......	Fecha... ..	Mín. absoluta......	Fecha	Os. máxima	Año ......
Enero. ...	17.7	-5.9	23.6	14.0	27—76	-1.2	30—72	20 7	28—67	—14.0	1—88	30 6	1888
Febrero...	20.3	-2.8	23.1	16.0	15—93	3.0	2—79	25.9	27—82	— 9.0	2—75	29.4	1878
Marzo ...	23.7	-1.4	25.1	17.8	1—69	3.0	19—81	30.0	11—82	— 5.5	10—83	32.4	1874
Abril	28 3	2.0	26.3	23.5	21—85	5.6	30—67	34.0	23—71	— 2.2	2 - 75	32.4	1871
Mayo.....	32.7	5.8	26.9	28.4	21—91	9.5	23—69	36.0	24—68	1.0	1—80	34.0	1880
Junio	37.0	8.9	28 1	31.9	8—89	11.6	1—70	40.8	22—70	4.0	8—94	32.7	1894
Julio......	39.8	12.0	27.8	36.0	19—82	15.4	31—67	41.8	21—80	8.8	25—77	35.7	1880
Agosto ..	39.0	11.7	27.3	35.0	3—92	16.0	25—78	42.4	23—69	8 6	17—74	33.0	1875
Septiemb .	35.1	7.5	27.6	30 0	2—91	11.2	29—71	39.4	15—70	1.6	28 - 85	36.2	1870
Octubre...	27 8	2.5	25.3	24.4	23—73	7.0	—91	34.0	6—69	— 3.8	31—69	37.8	1869
Noviembre	21.4	-2.6	24.0	17.0	24—91	2.9	16—82	25.8	2—94	—11.0	29—90	32.8	1870
Diciembre	16 6	-4.9	21.5	12.7	23—89	1.0	31—73	22.3	20—68	—14 9	31—87	31.0	1887
Año	28.3	2.7	25.6	36.9	Jul.—94	-2 6	Dic.-86	44.8	Jul.—80	—14.9	Dic.-87	57.0	1876

Para conocer la influencia que en las temperaturas puedan ejercer las radiaciones locales compara el P. Ainsa sus observaciones con las anotadas simultáneamente en el observatorio de la Granja agrícola, instalada en pleno campo, y encontró para la media de las máximas compulsadas una diferencia de 0°,2 que resulta perfectamente inapreciable, y para las mínimas correcciones sustractivas: de 1°,4 en *invierno*, 1°,2 en *primavera*, 0°,7 en *verano*, y 1°,3 en *otoño*.

Por último, aunque muy imperfectamente podremos juzgar de la acción solar y la irradiación terrestre por los números del cuadro VII, que dicen relación á las observaciones de la temperatura al Sol y por irradiación en los años de 1880 á 94. De su examen resulta inmediatamente la advertencia de un notable acrecimiento en las temperaturas máximas, aumento que sólo de un modo muy deficiente podemos considerar como medida de la acción del Sol, y un decrecimiento correlativo en las mínimas, que aumenta la extremosidad del clima para los cuerpos terrestres expuestos al aire libre sin resguardo alguno protector de la radiación solar ó la irradiación nocturna.

Si comparamos esos promedios con los correspondientes á la sombra y bajo cubierto en los mismos años, veremos que la acción solar así apreciada se traduce en un aumento de 4°.0 en la temperatura diurna de los días del invierno, de 4°.5 en la primavera y otoño, y de 5°.0 en el estío; y que la irradiación terrestre disminuye la temperatura media diurna en sólo 1° ó 1°,5, según sea invierno ó estío. Esa acción es mucho más considerable sobre los valores extremos de temperatura, y así vemos diferir á veces más de 15° las temperaturas máximas al Sol y á la sombra y hasta en 5° las mínimas bajo cubierto y por irradiación.

VII.—Temperaturas extremas al descubierto

	Máx. diurna media.	Mín. diurna media	Osc. diurna media	Máx. mensual media.	Mín. mensual media.	Os. mensual media	Máx. absoluta	Fecha	Mín. absoluta	Fecha	Os. extrema	Año
Enero	12.9	—0.8	13.7	20.4	—6.7	27.1	25.4	29—84	—15.7	1—88	35.0	1891
Febrero	17.4	1 1	16.3	24.7	—4.2	28.9	27.5	20—85	— 9.0	25—89	34.2	1889
Marzo	20.9	3.1	17.8	29.4	—2.4	31.8	34.3	31—84	— 7.2	10—83	39.0	1888
Abril	23.8	5.6	18.2	32.7	0.0	32.7	38.3	11—84	— 4.0	1—91	40.0	1891
Mayo	28.7	8.9	19.8	37.7	3.5	34.2	40.0	29—93	— 1.0	18—91	47.0	1892
Junio	33.1	12.3	20.8	43.1	7.1	36.0	45.5	30—92	3.0	8—94	43.8	1884
Julio	37.2	15.0	22.2	45.1	10.2	34.9	49.0	3—93	6.8	7—90	41.2	1893
Agosto	36.6	14.9	21.7	44.7	9.2	35.5	48.0	15—91	5.0	23—91	43.0	1891
Septiembre	31.7	12.2	19.5	41.1	6.1	35.0	44.1	1—89	1.2	28—85	41.4	1893
Octubre	25.1	7.2	17.9	33.9	1.2	32.7	39.0	2—91	— 6 0	28—87	38.8	1890
Noviembre	18.2	3.2	15.0	28.2	—3.4	31.6	30.6	3—81	—18.0	29—90	40.0	1890
Diciembre	13.4	0.0	13.4	21.1	—6.7	27.8	24.0	3—91	—17.4	31—87	39.4	1887
Año	24.9	6.8	18.1	33.5	1.2	32.3	52.4	Jul.-84	—17.4	Dic.-87	62.0	1891

Por razón de esta última se alarga la influencia del frío, y mientras que en el aire no se registran bajo cubierto temperaturas inferiores á 0° después del 18 de Abril, y muy rara vez en este mes, el suelo, los vegetales y demás objetos terrestres al descubierto pueden adquirir temperaturas *bajo cero* en dicho mes, un año de cada dos, y aún excepcionalmente en Mayo mucho más de tarde en tarde.

Así nos lo confirman las escarchas que, según las observaciones del P. Ainsa, se registran en número de 10 en Enero, 7 en Febrero, 4 en Marzo, 1 en Abril, 0.5 en Mayo, 1 en Octubre, 6 en Noviembre y 10 en Diciembre, números que las demás observaciones y la misma experiencia personal nos hacen temer que pecan de exagerados. De todos modos esas escarchas son casi siempre, y sobre todo fuera de los meses de Diciembre y Enero, muy poco espesas y duraderas.

En resumen, aunque el estudio de los vientos y del vapor acuoso es indispensable para la definición total del clima, podemos dar una primera idea del de esta ciudad, situada en la *zona templada* propiamente dicha y sub-zona *templada cálida*, y que puede por sus elementos climatológicos, referirse á *región agrícola del olivo,* aunque cerca de su límite boreal. La poca persistencia de las bajas temperaturas, la mayor frecuencia de las altas y la limpidez del cielo, permiten desarrollar perfectamente el fruto del olivo; la escasez de lluvias, la casi ausencia de nieves, poca abundancia y sobre todo espesor de las escarchas; y la grandísima evaporación, acaban de retratar el clima propio de la mencionada región agrícola.

Podemos, pues, definir el de Zaragoza como: *clima continental brusco, templado dulce, con temperaturas bajas aisladas y más persistentes temperaturas elevadas; de inviernos húmedos, nebulosos, y con escasas precipitaciones acuosas; primaveras relativamente secas, más bruscas que los inviernos, y con lluvias, aunque escasas y repartidas, algo mayores; veranos sofocantes en ocasiones, bastante secos, y con bruscas oscilaciones termométricas; y otoños templados, de tiempo más igual, pero relativamente secos también y con precipitaciones no muy abundantes.*

GRACIANO SILVÁN.

ESTACIÓN ME

Observaciones verificadas duran

DIAS........	ENERO								FEB			
	TEMPERATURA				HUMEDAD RELATIVA		DIRECCIÓN DEL VIENTO		TEMPERATURA			
	MÁXIMA		MÍNIMA						MÁXIMA		MÍNIMA	
	Sol	Sombra	Cubierto	Reflector	A las 9h	A las 15h	A las 9h	A las 15h	Sol	Sombra	Cubierto	Reflector
1	23.3	15.8	—1.1	—2.0	74	68	NO	N	9.2	4.8	—2.1	—4 0
2	12.5	11.8	2.2	0.2	80	64	NO	O	7.2	0.9	—2.6	—4.4
3	19.7	12.2	4.1	2.0	66	61	NO	NO	7.2	2.2	—5.1	—7.0
4	16.8	11.2	3.0	0.9	67	57	NO	NO	9.9	4.1	—5.1	—7.2
5	17.3	12.6	3 7	1.7	63	53	NO	NO	9.7	4 8	- 4.2	—6.3
6	16.2	11.4	4 7	2.1	61	54	NO	NO	16.2	4.1	—4.2	—6.5
7	17.6	12.4	4.2	2.1	70	56	NO	NO	3.4	2.5	—3.2	—5.1
8	19.8	12.6	3.2	1.1	72	53	NO	NO	14.1	9.2	0.4	—1.2
9	22.9	11.6	0.2	—2.1	71	83	NE	NO	14.8	10.2	4 0	2.1
10	15.0	8.2	—2.1	—4.2	96	90	NO	NO	16.2	12 5	4.9	3.0
11	13.7	10.1	—3.2	—5.0	97	90	NO	NO	18 3	11 6	5.5	3.1
12	14.5	9.4	—4.2	—5.8	83	93	NO	NO	32.9	18.6	5.3	3.6
13	17.8	12.0	1.1	—1.0	83	66	NO	NO	12.3	8 2	5.0	3.0
14	17.6	11.6	—0.7	—1.9	86	84	NO	NO	15.7	10.1	4 2	2.6
15	21.4	12.2	—2.8	—4.2	86	83	NO	NO	14.8	9.4	4.0	3.0
16	22.4	9 3	—3 9	- 5.6	82	83	NO	SE	18.2	13.1	3.1	1.4
17	21.6	10.0	—4 3	—6.2	86	83	NO	NO	16.2	11.0	1.5	—0.3
18	0.8	0.0	—5.1	—7 2	88	96	E.SE	SE	22.6	18 2	2.9	0.2
19	1.7	1.7	—4.6	—6.2	81	97	NO	NO	21.2	14.8	5.6	3.3
20	14.1	7.6	—4.6	—6.8	81	84	O	NE	20.1	13.9	2.0	0.4
21	12.6	9.1	—4.4	—6.8	87	80	NO	NO	18.8	12.5	4.0	1.8
22	14.6	8.2	1.9	0.0	60	82	NO	NO	24.2	13.8	3.2	1.5
23	5.9	4.6	—3.9	—5.9	82	97	NO	NE	27.8	16 2	0.3	—1.9
24	14.2	10.8	—1.5	—3.2	67	78	NO	SE	22.0	16 3	4.7	3.5
25	11.5	8.2	0.4	—2 0	62	84	SE	SE	23.8	13.7	1.6	—1.2
26	15 2	12 2	4.6	2.6	94	66	O.NO	NO	23.7	13.8	2.5	0.0
27	7.3	3.2	—3.6	—5.9	82	69	NO	NO	31.8	16.4	4.2	2.6
28	14.8	10 3	—2.3	—5.5	68	62	NO	NO	31.1	18.2	0.9	—0.9
29	15.0	10.2	3.4	1.2	56	51	NO	NO				
30	13.9	8 8	4.7	2 5	87	80	NO	NO				
31	12.2	5.0	1.6	—1.2	73	83	NO	NO				

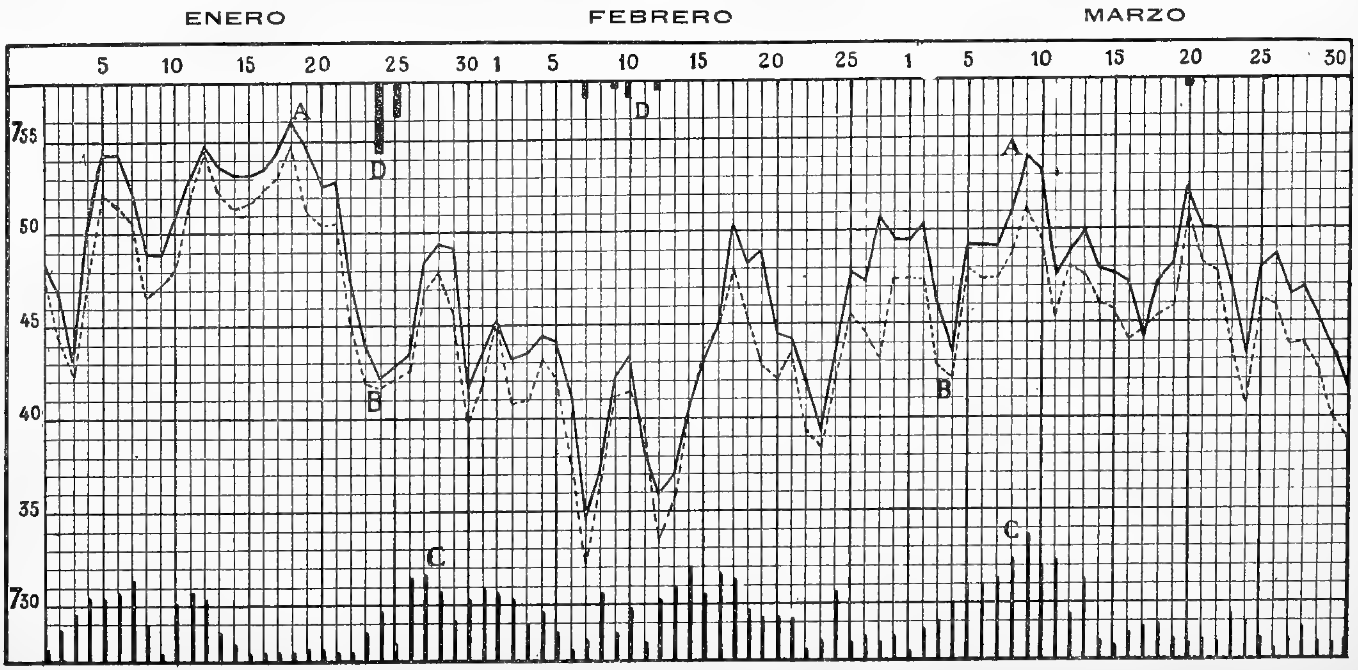
TEOROLÓGICA

te el primer trimestre de 1907

RERO				MARZO							
HUMEDAD RELATIVA		DIRECCIÓN DEL VIENTO		TEMPERATURA				HUMEDAD RELATIVA		DIRECCIÓN DEL VIENTO	
				MÁXIMA		MÍNIMA					
A las 9h	A las 15	A las 9h	A las 15h	Sol	Sombra	Cubierto	Reflector	A las 9h	A las 15h	A las 9h	A las 15h
80	62	NO	NO	25.4	17.3	4.8	2.6	61	78	NO	NO
90	75	NO	N.NO	26.2	14.1	5.8	3 2	57	51	NO	N
62	80	NO	N.NO	23.1	14.2	4.9	2.7	59	40	NO	NO
77	60	NO	NO	21.5	13.1	1.6	—0.9	65	43	NO	NO
77	50	N.NO	NO	16.4	11.5	1.8	0.0	58	44	NO	NO
75	55	NE	SE	20.5	16.4	5.9	3 9	74	52	NO	NO
86	100	NO	E	15.7	11.0	3.1	1.5	70	61	NO	NO
84	64	O.NO.	NO	18.6	14.1	2.4	0.2	66	62	NO	NO
71	66	NO	N.NO	18.6	14.2	2.5	0.6	68	66	NO	NO
68	62	SE	NO	19.6	15.2	4.1	2.5	53	55	NO	NO
68	81	NO	NO	20.4	14.2	3.9	1.9	57	76	NO	NO
76	51	NO	NO	19.8	14.7	2.4	0.2	79	71	NO	NO
63	73	NO	NO	19.8	14.9	2.2	0 8	70	72	NO	NO
74	72	NO	NO	18.2	12.9	1.6	0.0	49	72	NO	NO
70	73	NO	NO	26.0	17.0	5.4	3.2	44	48	NO	N
66	55	NO	NO	25.5	18.2	0.8	—1.4	46	52	NO	SE
58	48	NO	NO	31.0	19.4	4.4	2.6	58	52	NO	NO
73	60	NO	NO	29.3	22.2	6.5	4 3	45	44	NO	NO
66	62	NO	NO	28.8	23.1	8.7	5.9	51	52	NO	NO
65	65	NE	O NO	25.2	18 4	8.8	6 0	72	69	NO	SE
66	46	NO	NO	36.8	22.2	7.3	5.1	65	53	NO	SE
75	44	NO	NO	26.6	19.8	5 6	3.6	47	55	SE	SE
71	43	E	NO	28.7	21.4	3.8	2.0	51	54	SE	NO
61	49	NO	NO	25.1	20.3	7.7	4.9	48	58	NO	NO
71	61	NO	NO	24.6	17.5	2.3	0.1	55	56	NO	SE
61	59	NO	SE	24.7	16.2	3.8	2.1	67	58	NO	SE
61	54	NO	NO	28.7	20.0	2.0	0.8	42	60	NO	NO
57	40	NO	NO	23.2	17.2	3.1	1.6	38	59	NO	E.SE
				24.8	19.1	5.1	3.5	48	67	NO	SE
				23.8	21.0	2.6	1 1	43	60	SE	NO
				27.0	20.6	4.2	2.6	54	55	SE	SE

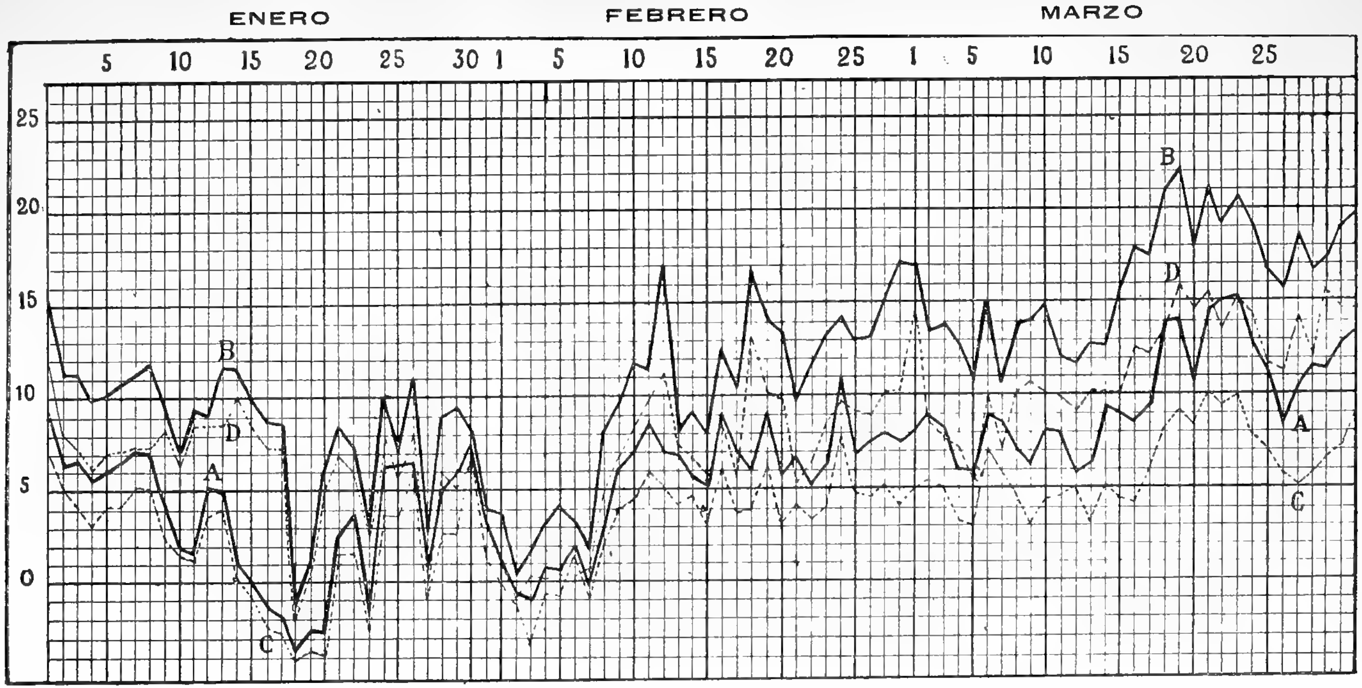
ESTACIÓN METEOROLÓGICA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS

Gráficas de las observaciones correspondientes al primer trimestre de 1907.—**Barómetro, pluviómetro, anemómetro**



Nota.—*A.*—Presión barométrica á 0° corregida de capilaridad á las 9h.
B.— íd. íd. íd. íd. íd. á las 15h.
C.—Camino recorrido por el viento en 24 horas—*1 mm.=700 mts.*
D.—Agua recogida—*1 mm.=2 mm. de agua.*

TERMÓMETRO



Nota.—*A.*—Temperatura del termómetro seco á las 9 h.
C.— Idem del termómetro húmedo á las 9 h.
B.— Idem del termómetro seco á las 15 h.
D.— Idem del termómetro húmedo á las 15 h.

BIBLIOGRAFÍA

Anuario del Observatorio de Madrid para 1907.

Atendiendo á una frase conocida, de que los prólogos, suelen ser remedio anticipado para los achaques de los libros, el Observatorio de Madrid, sin prólogo alguno—quizá por hallarse exento de achaques el libro—nos sorprende, muy gratamente por cierto, con la reaparición de su Anuario, que por muchos años publicó, y que tuvo suspendido desde hace algunos.

Por motivo de la nueva organización el libro aparece encabezado por la «Dirección general del Instituto geográfico y estadístico» por más que en él colabore solamente, el personal del Observatorio.

Los amantes de la Astronomía, encontrarán con la aparición de este libro, motivo para recordar los tiempos en que la pluma amenísima de D. Miguel Merino, y la del personal del Observatorio, hacían artículos de vulgarización, á la par que publicaban otros de fondo científico.

El actual Anuario siguiendo las huellas de los correspondientes á la anterior etapa, inicia esta nueva—que desearemos nó ver interrumpida,—con una labor á la vez que de investigación, de vulgarización é información.

Contiene como trabajos de información, un primer capítulo extenso, destinado al «Calendario». Otro segundo, más extenso aún referente á «Efemérides y tablas astronómicas, y datos astronómico-geodésicos» que contiene copiosos datos del Sol, Luna, Planetas, Satélites y Cometas; de Eclipses y Ocultaciones; de Estrellas y Nebulosas.

El tercer capítulo está destinado á las «Tablas meteorológicas».

El resto del libro, contiene los siguientes artículos notables, del personal del Observatorio: De D. Antonio Vela, sobre la *Medida del tiempo*. De D. Frascisco Cos, sobre la *Radiación calorífica solar*. De D. Miguel Aguilar, sobre las *Manchas solares*. Y otro, por fin, sobre *Los progresos de la Física solar*, cuya firma F. I., no creemos engañarnos, si la atribuímos á D. Francisco Iñiguez, el director del Observatorio.

A él como á todo el personal de aquel centro científico, nuestro parabien por haber iniciado una nueva época de propaganda de los trabajos astronómicos que realizan, por los cuales actualmente se interesa un público más numeroso de lo que infundadamente se cree, y que contribuirá á alentar á muchos en el estudio de una ciencia, alta en sus fines, agradable en su objeto é instructiva en sus investigaciones.

GABRIEL GALÁN.

Tratado de Geometría analítica, por D. Miguel Vegas, catedrático de la Universidad Central y Académico. Tomo I, 2.ª edición. Madrid, 1906.

No es propiamente este tratado una edición nueva del publicado por el distinguido catedrático en 1894, sino más bien una refundición completa del mismo, con ampliaciones y reformas notables que lo mejoran extraordinariamente, acentuando y realizando de modo más perfecto la aplicación de la Geometría proyectiva como base de la exposición analítica de las figuras geométricas.

Se divide el libro en tres *Secciones*, correspondientes á las tres categorías de formas geométricas fundamentales, y de esas secciones comprende las dos primeras el tomo examinado. En la primera, *Figuras de 1.ª categoría,* que viene después de unos preliminares acerca de proyecciones y triedrometría, estudia en cuatro capítulos las *series rectilíneas* con sus diversos sistemas de coordenadas, problemas de distancias y centros correspondientes, razón doble, serie armónica, y centros armónicos de diversos órdenes; los haces de rectas y de planos; las figuras proyectivas de primera categoría, mejor expuestas y más completas que en la edición anterior; y las series y haces en involución con sus relaciones proyectivas, terminadas con ligeras nociones acerca de las involuciones de orden superior.

En la *Sección segunda*, aparecen estudiadas por primera vez simultánea y correlativamente las *figuras planas y las radiadas*, que por ingeniosos y bien definidos sistemas coordenados determinantes de las rectas y planos de la radiación, vienen definidas por unas mismas ecuaciones y estudiadas con los mismos recursos analíticos.

El *Libro I* de esta sección estudia muy al por menor, bajo la denominación de *Figuras de primer orden*, los sistemas de coordenadas binarias y ternarias, de puntos y rectas en el plano y de rectas y planos en la radiación, expuestas con mucha generalidad por medio de las de figuras de primera categoría, incluyendo como casos particulares, las coordenadas cartesianas, las plückerianas, las coordenadas paralelas d'Ocagne, los diversos sistemas de coordenadas puntuales y tangenciales homogéneas, y otros varios sistemas particulares. Completados esos sistemas coordenados por las coordenadas polares de puntos y rectas en el plano, y de rectas y planos en la radiación, resulta esta parte muy completa é interesante, con mucho nuevo y provechoso.

Los problemas métricos y correlativos en los diversos sistemas de coordenadas, el estudio de las relaciones proyectivas de las figuras de primera categoría contenidas en las formas planas y radiadas, y la definición analítico-geométrica de los elementos imaginarios por medio de las relaciones involutivas, completan la abundante doctrina de esta parte de la obra examinada.

Se refiere el *Libro II* á las *Curvas y conos de segundo orden*, que clasificadas en el capítulo primero con toda generalidad y precisión, según la marcha expuesta en unos folletos por el catedrático de Sevilla, D. Juan José Camacho, son objeto de estudio en los catorce capítulos siguientes que tratan todas las cuestiones con mucha generalidad analítico-geométrica. Son de mencionar entre esos capítulos, aparte del antes citado, los correspondientes á la *determinación de curvas y conos de segundo orden*, y á *diámetros y planos diametrales de las superficies cónicas*, que contiene un bonito estudio de la ecuación en S; así como los cuatro últimos que exponen muy elegantemente los contactos de curvas y superficies de segundo orden con las nociones de curvaturas correspondientes, los invariantes de los sistemas de dos de esas figuras, y las propiedades de los haces, series, redes y complejos de curvas y conos de segundo orden.

En el *Libro III*, dedicado á las *curvas planas y las superficies cónicas en general*, desarrolla el autor en cinco capítulos con bastante concisión y claridad, las teorías generales acerca de esas figuras, con su generación y construcción, resultando un complemento muy interesante de las teorías del libro anterior, que se aplican en éste para la generación de cuárticas y cúbicas planas.

Con el *Libro IV* y último, *Transformaciones lineales y cuadráticas en las figuras de segunda categoría*, pone el distinguido catedrático digno remate á su obra, estudiando las figuras homográficas con sus variedades; las homológicas; los sistemas en involución, correlativos y polares; y finalmente las transformaciones cuadráticas, con sus casos particulares de inversión respecto de un triángulo ó triedro y respecto de una curva ó superficie cónica de segundo orden, ó de polaridad respecto de un triángulo ó triedro.

El enunciado de las teorías desarrolladas en las 688 páginas en 8.º mayor que constituyen el volumen de que tratamos; muestra lo interesante de su doctrina, expuesta con elegancia matemática y por procedimientos generales y uniformes, que huyen de particularismos y artificios analíticos muy corrientes en los libros de Analítica.

Todos sus capítulos tratan, como complemento necesario de las teorías expuestas, problemas de enunciado general que mejoran mucho la edición, siquiera se echen de menos otras colecciones de ejercicios al final de cada capítulo ó teoría, suprimidas tal vez en favor de la brevedad y para no hacer el tomo más voluminoso.

También sería de desear, ya que el método geométrico de la obra lo consentía, una mayor y más clara aplicación de las formas algébricas, que tanta transcendencia tienen hoy en el estudio analítico. De todos modos resulta el libro muy notable é interesante, y de verdadera consulta útil y provechosa para los que, conociendo los tratados corrientes de Analítica, deseen completar y sintetizar sus conocimientos.

Para aquellos otros que de primera intención estudien la Geometría analítica, tiene este tratado la difícil facilidad tan necesaria para que la labor resulte provechosa y duradera; y si su estudio resulta algo más laborioso, se encuentra el trabajo excesivamente compensado con un mejor y más completo conocimiento de las teorías expuestas. Por eso no podemos menos de recomendarlo, á todos cuantos deseen adquirir un conocimiento fundamentado y sólido de la Geometría analítica.

G. S. G.

CRÓNICA.

PREMIOS

Concurso del año 1908 de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y y Naturales de Madrid.

Artículo 1.º La Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, abre concurso público para adjudicar tres premios á los autores de las memorias que desempeñen satisfactoriamente, á juicio de la misma Corporación, los temas siguientes:

1.º

«*Sucinta exposición de los principios fundamentales de la* Nomografía, *estrictamente necesarios para la composición y fácil inteligencia de un* sistema de ábacos *ó* nomogramas, *desconocidos hasta ahora y aplicables, con manifiesta ventaja sobre cualquier otro procedimiento, á la resolución de una serie de cuestiones, interesantes en teoría y de utilidad en la práctica, referentes á las ciencias físico-matemáticas*».

2.º

«*Estudio sistemático de las acciones catalíticas y de los catalizadores*».

El autor de la memoria acompañará los comprobantes de los trabajos prácticos por él realizados.

3.º

«*Flora descriptiva de las algas de una parte del litoral de España*».

La memoria citará las localidades, en que el autor haya encontrado cada una de las especies mencionadas, y contendrá las noticias y juicios críticos, que el autor estime necesarios para relacionar los datos que aquélla suministre con los anteriormente publicados. El trabajo irá acompañado de ejemplares clasificados y convenientemente preparados de las especies recogidas.

Los premios que se ofrecen y se adjudicarán serán de tres clases: *premio* propiamente dicho, *accesit* y *mención honorífica*.

El *premio* consistirá en un diploma, una medalla de oro, de 60 gramos de peso, retribución pecuniaria de 1.500 pesetas, impresión por cuenta de la Academia de la memoria premiada y entrega al autor de 100 ejemplares. El *accesit* consistirá en diploma y medalla iguales á los del premio, impresión de la memoria y entrega de 100 ejemplares al autor. La *mención honorífica* se hará en un diploma análogo á los de *premio* y *accesit*.

El concurso, ya abierto, se cerrará el 31 de Diciembre de 1908, hasta cuya fecha se recibirán las memorias en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, número 26.

Al concurso podrán optar los nacionales y extranjeros.

Las memorias, escritas en castellano ó latín, deberán presentarse en pliego cerrado sin firma ni indicación del nombre del autor, pero sí con un lema perfectamente legible en el sobre ó cubierta. El mismo lema deberá ponerse en el sobre de otro pliego, también cerrado, dentro del cual constará el nombre del autor y las señas de su domicilio ó paradero.

IV Congreso internacional de matemáticos.—Roma, 1908.

El Comité de organización invita á los matemáticos al IV Congreso internacional que tendrá lugar en Roma, del 6 al 11 de Abril de 1908.

El Comité ha colocado este Congreso bajo los auspicios de una Comisión internacional de miembros de la «R. Accademia des Lincei» y del «Circolo matematico di Palermo».

Con objeto de dar una idea del estado actual de las principales ramas de la Matemática y de sus aplicaciones, el Comité ha organizado una serie de conferencias que serán explicadas en las sesiones plenarias del Congreso, sobre temas que se indicarán en tiempo oportuno, por los Sres G. Darboux, A. R. Forsyth, D. Hilbert, F. Klein, H. A. Lorentz, G. Mittag-Leffler, S. Newcomb, E Picard, H. Poincaré.

Se está confeccionando el Programa del Congreso, el que se hará saber por medio de una Circular. En ésta se consignarán además las recepciones ofrecidas á los sabios congresistas.

El Comité de organización lo forman: P. Blaserna, *Presidente*; G. Castelnuovo, *Secretario general*; V. Reina, *Tesorero*, V. Cerruti, A. Di Legge, G. Pittarelli, A. Sella, A. Jonelli y Volterra.

El Congreso se dividirá en cuatro secciones:

I Aritmética, Algebra, Análisis.

II Geometría.

III Mecánica, Física matemática, Matemáticas aplicadas.

IV Cuestiones filosóficas, históricas y didácticas.

Para tomar parte en el Congreso y tener derecho al volumen de las Actas de las sesiones, basta pagar la cuota de 25 francos.

Toda persona perteneciente á la familia de un Miembro del Congreso, gozará de los mismos derechos (menos el volumen de las Actas), pagando 15 francos de cuota.

El tesorero del Congreso es el Prof. *Vicenzo Reina*, 5, *Piazza S. Pietro in Vincoli, Roma.*

Las informaciones las suministrará el Secretario general del Comité de organización:

Prof. *G. Castelnuovo, 5, Piazza S. Pietro in Vincoli, Roma.*

En los días 19 al 23 de Agosto del corriente año, se celebrará en Boston, Massachusetts, E. U. de A., el séptimo Congreso internacional de Zoología. La comisión organizadora ha dirigido invitaciones á los Centros científicos para que designen delegados que los representen en tan importante Congreso.

En breve aparecerá en Lieja, una publicación que se titulará *Archives de Mathématiques pures et appliquées.* Esta nueva Revista publicará trabajos sobre las matemáticas puras y aplicadas en general y particularmente sobre la Geometría del triángulo y del tetraedro, la Metageometría, la Mecánica general y la teoría matemática de la elasticidad.

Cuenta con la colaboración de Jules Andrade, Alasia F. Chomé, G. Lazzeri, G. Loria, J. Richard, M. Stuyvaert, F. Gómez Teixeira, etc., etc.

La Revista será trimestral y formará anualmente un volumen de 280 páginas

La correspondencia científica y administrativa, corre á cargo de Mr. Emile Weber, Rue du Mambourg, 10, Liége.

Establecimiento tipográfico de Emilio Casañal, Coso, 100