Alexandr Zivek

107

I. СОМОВЪ,

академикъ Императорской Академіи Наукъ, профессоръ С.-Петербургскаго Университета и Института Путей Сообщенія, докторъ математики и астрономіи

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ

Изданіе четвертое,

подъ редакціей проф. П. СОМОВА

Цѣна 2 р.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
Изданіе М. В. Пирожкова
1907

Prof. Alex. Ziwet
gt.
2-2-1923

Типографія Ф. Вайсберга и П. Гершунина. Екатерининскій каналъ, д. № 71—6.

# ОГЛАВЛЕНІЕ

## ОТДѢЛЪ I

## Приложеніе начальной Алгебры къ рѣшенію опредѣленныхъ геометрическихъ вопросовъ.

### А. Предметъ Аналитической Геометріи. Примѣры на рѣшеніе геометрическихъ вопросовъ помощью Алгебры. Однородность и построеніе формулъ.



### В. О проекціяхъ.



## ОТДѢЛЪ II

## Приложеніе Анализа къ изслѣдованію геометрическихъ мѣстъ на плоскости.

### А. Общія понятія о геометрическихъ мѣстахъ вообще.

§§ СТРАН

B. **Опредѣленіе положенія точки на плоскости. Уравненіе прямой линіи. Задачи на прямую линію и точку.**



C. **Перемѣна координатъ.**



D. **О плоскихъ линіяхъ вообще. Линіи второго порядка.**

*Примѣчаніе.* Мѣста текста, отмѣченныя знаками —*...*—, могутъ быть, при первоначальномъ изученіи предмета, пропущены безъ нарушенія послѣдовательности.

# ОТДѢЛЪ I

## Приложеніе начальной алгебры къ рѣшенію опредѣленныхъ геометрическихъ вопросовъ

### А. Предметъ Аналитической Геометріи. Примѣры на рѣшеніе геометрическихъ вопросовъ помощью Алгебры. Однородность и построеніе формулъ.

**1.** Аналитическая Геометрія имѣетъ предметомъ рѣшеніе помощью Математическаго Анализа вопросовъ, относящихся къ изслѣдованію свойствъ и къ измѣренію протяженій. Приложеніе Алгебры къ рѣшенію вопросовъ этого рода составляетъ основаніе Аналитической Геометріи.

Протяженія разсматриваются въ Аналитической Геометріи, какъ числа.

Означая какую-либо линію буквою, напр., $a$, мы должны подразумѣвать подъ этою буквою число, показывающее отношеніе разсматриваемой линіи къ другой, взятой за единицу, данной или произвольной. Число, означающее линію, мы будемъ называть *линейнымъ*, а всякую алгебраическую формулу, обозначающую линію,—*линейною формулою*. Если $a$ и $b$ означаютъ линейныя числа, то $2a - b$ будетъ линейная формула.

Означая буквою поверхность, надо подразумѣвать подъ этою буквою число поверхностныхъ единицъ въ разсматриваемой поверхности. За единицу поверхности обыкновенно берутъ квадратъ, у котораго сторона есть линейная единица. Число квадратныхъ единицъ въ площади прямоугольника есть произведеніе двухъ линейныхъ чиселъ, выражающихъ основаніе и высоту прямоугольника; т.-е., если $a$ есть число линейныхъ единицъ въ основаніи, а $b$ есть число тѣхъ же единицъ въ высотѣ, то число квадратныхъ единицъ въ прямоугольникѣ будетъ $ab$. Всякую другую поверхность можно также выразить произведеніемъ двухъ линейныхъ чиселъ, потому что всегда можно себѣ представить прямоугольникъ, равномѣрный съ данной поверхностью. Напр., боковая поверхность прямого цилиндра равна произведенію изъ окружности основанія и изъ высоты, т.-е. она равна площади прямоугольника, у котораго основаніе равно окружности основанія цилиндра, а высота—высотѣ цилиндра.

Означая буквою объемъ, мы должны подразумѣвать подъ этою буквою отношеніе разсматриваемаго объема къ другому, взятому за единицу. За единицу объемовъ обыкновенно берутъ кубъ, у котораго ребро есть линейная единица. Число кубическихъ единицъ въ прямоугольномъ параллелепипедѣ выражается произведеніемъ изъ трехъ линейныхъ чиселъ, изображающихъ ребра; т.-е., если буквы $a$, $b$ и $c$ изображаютъ три смежныя ребра параллелепипеда, то произведеніе $abc$ выражаетъ объемъ. Всякій другой объемъ можно выразить также произведеніемъ трехъ линейныхъ чиселъ, которыя представляютъ ребра прямоугольнаго параллелепипеда, равномѣрнаго съ разсматриваемымъ объемомъ. Напр., объемъ прямого цилиндра выражается произведеніемъ высоты на полуокружность основанія и на радіусъ основанія, т.-е. онъ равномѣренъ съ объемомъ прямоугольнаго параллелепипеда, у котораго три смежныя ребра равны этимъ тремъ длинамъ.

Линейныя числа, отъ перемноженія которыхъ происходитъ число, выражающее поверхность или объемъ, называются измѣреніями поверхности или объема. Собственно въ этомъ смыслѣ можно назвать всякую поверхность величиною двухъ измѣреній, а объемъ—величиною трехъ измѣреній.

Вообще, въ произведеніи нѣсколькихъ линейныхъ чиселъ $abcd\ldots$, линейныя числа $a$, $b$, $c$, $d$, ... называются измѣреніями произведенія, если даже множителей будетъ болѣе трехъ.

Отношеніе двухъ линій разсматривается, какъ отвлеченное число, которое не зависитъ отъ линейной мѣры. Такимъ образомъ, если $a$ и $b$ означаютъ линіи, то $\frac{a}{b}$ представляетъ отвлеченное число, которое будетъ то же, въ какихъ бы линейныхъ единицахъ ни были выражены $a$ и $b$, въ футахъ, дюймахъ и т. п. То же самое должно сказать объ отношеніи двухъ поверхностей или двухъ объемовъ.

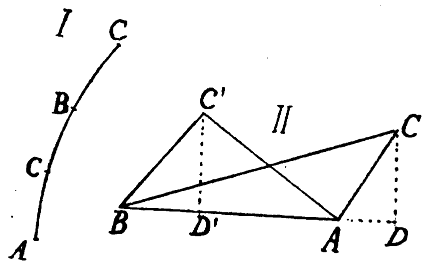
Натуральный *синусъ*, *косинусъ*, *тангенсъ* и пр. какого-либо угла суть отвлеченныя числа, показывающія отношеніе тригонометрическихъ линій къ радіусу дуги, измѣряющей уголъ.

**2.** Линейныя числа могутъ быть положительныя и отрицательныя; на чертежѣ они представляются противоположными длинами.

Пусть будутъ (I) на одной линіи три длины: $AB$, $BC$ и $BC'$, выраженныя числами $a$, $b$, $b'$, такъ что

$$AC = a + b, \quad AC' = a - b'.$$

Положительному числу $+b$ и отрицательному $-b'$ соотвѣтствуютъ длины: $BC$ и $BC'$, отложенныя въ противныя стороны относительно точки $B$; поэтому, если въ вычисленіе, относящееся къ какой-либо фигурѣ, входило число $b$, означающее длину $BC$, и надобно это вычисленіе приложить къ другой фигурѣ, которая можетъ быть выведена изъ первой, перемѣною длины $BC$ на противоположную $BC'$, выраженную числомъ $b'$, то должно перемѣнить въ вычисленіи $b$ на $-b'$. Напр., пусть даны два треугольника $ACB$ и $AC'B$ (II), у которыхъ $CD$ и $C'D'$ суть высоты, и положимъ, что уголъ $CAB$ тупой, а уголъ $C'AB$ острый. Означивъ чрезъ $a$, $b$, $c$, $x$ соотвѣтственно стороны $BC$, $CA$, $AB$ и отрѣзокъ $AD$, найдемъ по извѣстной формулѣ




Фиг. 1

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx.$$

Эта же формула можетъ быть приложена и къ треугольнику $AC'B$, который отъ перваго отличается тѣмъ, что вмѣсто $AD$ въ немъ находится противоположная длина $AD'$; но, означивъ опять буквами $a$, $b$, $c$, $x$ стороны $BC'$, $C'A$, $AB$ и отрѣзокъ $AD'$, мы должны въ формулѣ перемѣнить $x$ на $-x$, т.-е. положить, что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

**3.** Рѣшеніе помощью Алгебры геометрическаго вопроса, въ которомъ предложено найти одну или нѣсколько величинъ, состоитъ изъ двухъ главныхъ пріемовъ:

a) Изъ составленія по условіямъ вопроса уравненій между неизвѣстными и данными величинами и

b) Изъ рѣшенія этихъ уравненій.

При составленіи уравненій изъ условій вопроса, должно поступать слѣдующимъ образомъ: во-первыхъ, надо ясно представить себѣ геометрическую фигуру, показывающую расположеніе и свойства искомыхъ и данныхъ величинъ; для большей наглядности можно на самомъ дѣлѣ начертить фигуру отъ руки; затѣмъ слѣдуетъ внимательно разсмотрѣть, посредствомъ какихъ извѣстныхъ истинъ можно перейти отъ данныхъ величинъ къ искомымъ, или обратно, разсматривая безъ различія всѣ величины, какъ извѣстныя. Такимъ образомъ мы отыщемъ зависимость между величинами и выразимъ ее уравненіями. Впрочемъ, по разнообразію условій, каждый вопросъ требуетъ особенныхъ соображеній, которыя нельзя подвести подъ общія правила. Иногда приходится разсматривать вспомогательныя величины, находящіяся въ зависимости отъ данныхъ и искомыхъ и облегчающія составленіе уравненій.

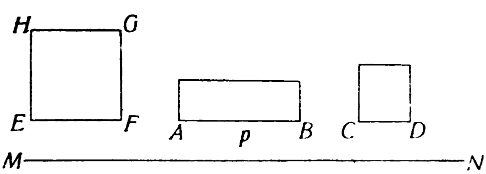
Для рѣшенія составленныхъ такимъ образомъ уравненій, должно выбирать наивыгоднѣйшіе способы и брать за неизвѣстныя такія величины, которыя ведутъ кратчайшимъ путемъ къ рѣшенію вопроса.

Когда вопросъ опредѣленный, число уравненій не должно быть менѣе числа неизвѣстныхъ.

По формуламъ, выведеннымъ изъ уравненій, можно найти неизвѣстныя величины или *вычисленіемъ* (какъ это дѣлается въ Тригонометріи) или *построеніемъ*, начертивъ на самомъ дѣлѣ, помощью циркуля и линейки, фигуру, заключающую искомыя величины.

**4.** Для поясненія изложеннаго, рѣшимъ нѣсколько вопросовъ.

I. *Построить на данныхъ основаніяхъ $AB$ и $CD$ два прямоугольника такъ, чтобы сумма ихъ площадей была равна площади даннаго квадрата $EFGH$, а сумма периметровъ данной длинѣ $MN$.*



Фиг. 2

Положимъ $AB = a$, $CD = b$, $EF = c$, и означимъ черезъ $x$ и $y$ неизвѣстныя высоты прямоугольниковъ. Для площадей искомыхъ прямоугольниковъ получимъ числа: $ax$ и $by$, сумма которыхъ, по условію вопроса, должна быть равна числу $c^2$, выражающему площадь даннаго квадрата; слѣдовательно,

$$ax + by = c^2.$$

Числа: $2x + 2a$, $2y + 2b$ выражаютъ периметры прямоугольниковъ и въ суммѣ должны составить длину $p$, поэтому

$$2x + 2a + 2y + 2b = p;$$

откуда выводимъ

$$x+y=\frac{p}{2}-a-b$$

или

$$x+y=m,$$

означивъ для сокращенія черезъ $m$ длину $\frac{p}{2}-a-b$, которую легко найти.

Итакъ, для опредѣленія неизвѣстныхъ $x$ и $y$ имѣемъ два уравненія:

$$ax+by=c^2,\quad x+y=m,$$

изъ которыхъ выходитъ

$$x=\frac{c^2-bm}{a-b},\quad y=\frac{am-c^2}{a-b}.$$

По этимъ формуламъ легко вычислить искомыя числа, подставивъ вмѣсто буквъ, означающихъ данныя длины, соотвѣтственныя извѣстныя числа. Если для примѣра положимъ $a=2$ дюймамъ, $b=1$, $c=3$, $p=16$, то найдемъ:

$$m=\frac{p}{2}-a-b=5,$$

$$x=4,\quad y=1.$$

По свойству вопроса $x$ и $y$ должны быть положительныя; поэтому, если $a>b$ (что можно допустить, означивъ буквою $a$ большее изъ данныхъ основаній), то данныя числа должны удовлетворять условіямъ:

$$c^2>bm\ \text{ и }\ am>c^2;$$

въ противномъ случаѣ задача невозможна.

Задача также невозможна, когда $a=b$, а $c^2$ неравно $bm$ или $am$, потому что тогда величины $x$ и $y$ безконечны.

Задача будетъ неопредѣленная, когда $a=b$ и $c^2=am=bm$.

Если, рѣшая уравненія, мы получимъ отрицательное число, то, перемѣнивъ въ уравненіяхъ знакъ у той неизвѣстной, для которой вышло это рѣшеніе, мы будемъ имѣть новыя уравненія, изъ которыхъ выведемъ положительное рѣшеніе вмѣсто прежняго отрицательнаго. Эти новыя уравненія будутъ выражать условія новаго вопроса (см. нач. Алгебру).

Положимъ напр., что въ послѣднемъ примѣрѣ при $a > b$ будетъ $c^2 < bm$; тогда $x$ отрицательное, а $y$ положительное. Перемѣнивъ $x$ на $-x$, мы получимъ вмѣсто уравненій

$$ax + by = c^2 \text{ и } x + y = m$$

слѣдующія:

$$by - ax = c^2, \quad y - x = m, \tag{$a$}$$

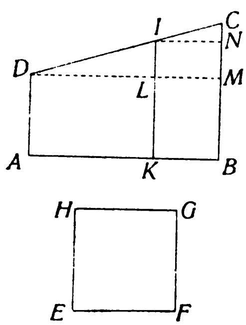
изъ которыхъ выведемъ положительныя величины:

$$x = \frac{bm - c^2}{a - b}, \quad y = \frac{am - c^2}{a - b}.$$

Уравненія ($a$) выражаютъ условія слѣдующаго вопроса:

*Построить на данныхъ основаніяхъ $a$ и $b$ два прямоугольника такъ, чтобы разность ихъ площадей была равна данному квадрату $c^2$, а разность высотъ данной линіи $m$.*

II. *Отъ трапеціи $ABCD$, въ которой стороны $AD$ и $BC$ перпендикулярны къ $AB$, отрѣзать часть, равную площади прямоугольника $EFGH$, посредствомъ прямой, перпендикулярной къ $AB$.*




Фиг. 3

Пусть будетъ $IK$ прямая, перпендикулярная къ $AB$, проведенная такъ, что $ADIK = EFGH$. Здѣсь данныя величины суть стороны трапеціи $ABCD$ и прямоугольника $EFGH$.

Положимъ: $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$, $FG = m$, $EF = n$, а за неизвѣстныя возьмемъ $IK = x$ и $AK = y$.

Для площади трапеціи $ADIK$ найдемъ число $\frac{(a + x)y}{2}$, которое, по условію вопроса, должно быть равно $mn$, площади прямоугольника $EFGH$; слѣдовательно,

$$\frac{(a + x)y}{2} = mn \quad \text{или} \quad (a + x)\,y = 2mn. \tag{1}$$

Легко видѣть, что вопросъ долженъ быть опредѣленный. Въ самомъ дѣлѣ, съ удаленіемъ прямой $IK$ отъ $AD$, площадь $ADKI$ непремѣнно увеличивается, а, съ приближеніемъ къ $AD$, уменьшается и обращается въ нуль, когда $IK$ совпадаетъ съ $AD$; потому, если $EFGH < ADCB$, то должно быть необходимо между $AD$ и $CB$ одно только положеніе для $IK$, при которомъ $ADIK = EFGH$. Слѣдовательно, кромѣ уравненія (1) должно быть еще уравненіе для опредѣленія $x$ и $y$; но оно не выражено явно условіями вопроса. Его можно найти, разсматривая свойства трапеціи.

Проведя $DM$, параллельную $AB$, составимъ два подобныхъ треугольника: $DLI$ и $DMC$, въ которыхъ найдемъ

$$\frac{LI}{DL} = \frac{CM}{DM};$$

но

$$LI = IK - LK = IK - AD = x - a,$$

$$DL = AK = y,\ CM = CB - BM = CB - AD = b - a,$$

$$DM = AB = c;$$

слѣдовательно,

$$\frac{x - a}{y} = \frac{b - a}{c}. \qquad (2)$$

Итакъ, имѣемъ два уравненія для опредѣленія $x$ и $y$. Перемноживъ уравненія (1) и (2), исключимъ $y$ и получимъ

$$x^2 - a^2 = \frac{2mn(b-a)}{c};$$

откуда выходитъ

$$x = \sqrt{a^2 + \frac{2mn(b-a)}{c}}.$$

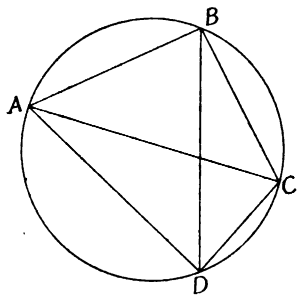
Потомъ уравненіе (2) даетъ

$$y = \frac{c(x-a)}{b-a} = \frac{c}{b-a}\left[\sqrt{a^2 + \frac{2mn(b-a)}{c}} - a\right].$$

Для окончательнаго рѣшенія задачи, должно вымѣрить данныя длины какою-либо единицею, подставить вмѣсто буквъ $a$, $b$, $m$, $n$ найденныя для нихъ числа и вычислить $x$ и $y$. Впрочемъ, для опредѣленія положенія $IK$, достаточно вычислить одну изъ величинъ $x$ или $y$. Вычисливъ $x$, отложимъ $BN = x$, проведемъ чрезъ точку $N$ прямую, параллельную $AB$, замѣтимъ пересѣченіе ея $I$ съ стороною $DC$ и опустимъ изъ $I$ перпендикуляръ $IK$ на $AB$. Если же узнаемъ $y$, то отложимъ $AK = y$ и возставимъ $IK$, перпендикулярную къ $AB$.

III. *По даннымъ сторонамъ четыреугольника, вписаннаго въ кругъ, вычислить его діагонали.*

Пусть будетъ $ABCD$ данный четыреугольникъ. Положимъ $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=x$, $BD=y$.



Фиг 4

Въ $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ найдемъ

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(ABC)\,. \quad (1)$$

$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(ADC)\,. \quad (2)$$

но $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$; поэтому

$$\cos(ADC) = -\cos(ABC)$$

и ур. (2) можно замѣнить слѣдующимъ

$$x^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos(ABC).$$

Здѣсь $\cos(ABC)$ есть вспомогательная величина, которую должно исключить; для этого помножимъ послѣднее уравненіе на $ab$, а уравненіе (1) на $cd$ и сложимъ произведенія; получимъ

$$(ab+cd)\,x^2 = (a^2+b^2)\,cd + (c^2+d^2)\,ab = (ad+bc)\,(bd+ac);$$

отсюда выводимъ

$$x = \sqrt{\frac{(ad+bc)\,(bd+ac)}{ab+cd}}\,.$$

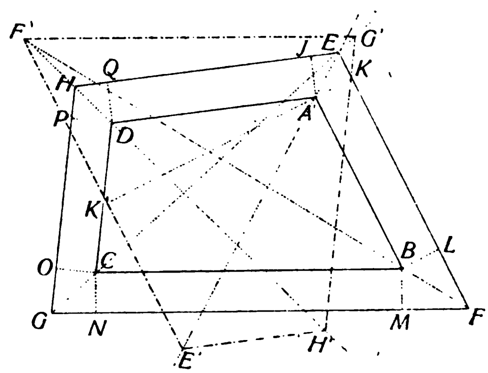
Точно также найдемъ

$$y = \sqrt{\frac{(ad+bc)\,(ab+dc)}{ac+bd}}\,.$$

IV. *Резервуаръ воды $ABCD$ окружить тротуаромъ, имѣющимъ вездѣ одну ширину и заключающимъ данную площадь.*

Здѣсь требуется начертить по данному многоугольнику $ABCD$ другой $EFGH$ такъ, чтобы стороны обоихъ многоугольниковъ были соотвѣтственно параллельныя и равно-отстоящія, а разность между площадями была равна данной площади, которую означимъ чрезъ $m^2$. Положимъ сверхъ того $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ и означимъ чрезъ $A$, $B$, $C$, $D$ углы многоугольника. За искомую величину можно взять разстояніе между соотвѣтственными сторонами, которое означимъ чрезъ $x$. Оно на чертежѣ изображено перпендикулярами: $AI$, $AK$, $BL$, $BM$, $CN$, $CO$, $DP$, $DQ$, опущенными изъ вершинъ даннаго многоугольника на стороны искомаго многоугольника.

Площадь тротуара состоитъ изъ прямоугольниковъ: $AL$, $BN$, $CP$, $DI$, имѣющихъ основаніями стороны даннаго многоугольника, а высотами ширину тротуара $x$, и четыреугольниковъ: $KI$, $LM$, $NO$, $PQ$. Каждый изъ послѣднихъ состоитъ изъ двухъ равныхъ треугольниковъ. Такъ, напр., $KI = AKE + AIE$, гдѣ треугольники $AKE$ и $AIE$ равны, потому что имѣютъ общую гипотенузу $AE$ и равные катеты $AK$ и $AI$; слѣдовательно, $KI = 2AKE = KEx$. Поэтому площадь тротуара равна




Фиг. 5

$$(a + b + c + d)\,x + (KE + FM + GO + HQ)\,x;$$

но

$$KE = AK \operatorname{cotg}(KEA) = x \operatorname{cotg}\left(\frac{1}{2} KEI\right) = x \operatorname{cotg}\frac{A}{2};$$

также найдемъ

$$FM = x \operatorname{cotg}\frac{B}{2},\; GO = x \operatorname{cotg}\frac{C}{2},\; HQ = x \operatorname{cotg}\frac{D}{2};$$

отъ этого выраженіе площади тротуара приведется къ слѣдующему:

$$(a + b + c + d)\,x + \left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} + \operatorname{cotg}\frac{D}{2}\right)x^2,$$

что, по условію вопроса, должно быть равно $m^2$. Итакъ, для вычисленія $x$ имѣемъ уравненіе второй степени:

$$\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} + \operatorname{cotg}\frac{D}{2}\right)x^2 + (a + b + c + d)\,x = m^2.$$

Если положимъ для сокращенія $a+b+c+d=p$ и

$$v=\frac{p}{\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}+\cot g\frac{D}{2}}$$

т.-е.

$$\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}+\cot g\frac{D}{2}=\frac{p}{v},$$

то найденное уравненіе можемъ представить подъ видомъ

$$\frac{px^2}{v}+px=m^2,\quad \text{или } x^2+vx=\frac{m^2v}{p};$$

откуда выходитъ

$$x=-\frac{v}{2}\pm\sqrt{\frac{v^2}{4}+\frac{m^2v}{p}}.$$

Эти величины $x$ вещественныя; одна изъ нихъ

$$-\frac{v}{2}+\sqrt{\frac{v^2}{4}+\frac{m^2v}{p}}$$

положительная, потому что $\sqrt{\frac{v^2}{4}+\frac{m^2v}{p}}>\frac{v}{2}$; другая

$$-\frac{v}{2}-\sqrt{\frac{v^2}{4}+\frac{m^2v}{p}}$$

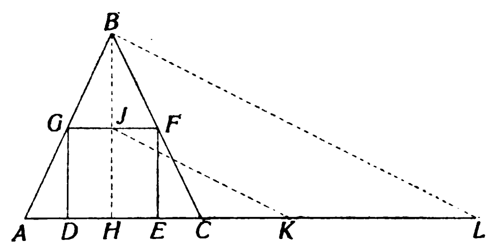
отрицательная. Пусть $h$ будетъ первая, а $-h'$ вторая. Каждая изъ нихъ послужитъ для построенія многоугольника по условіямъ вопроса слѣдующимъ образомъ:

Начертивъ данный многоугольникъ $ABCD$ и раздѣливъ углы его пополамъ, возставимъ изъ вершины $A$ перпендикуляръ къ сторонѣ $AB$ и отложимъ на немъ длину $AK$, изображающую число $h$. Потомъ чрезъ точку $K$ проведемъ прямую параллельную къ $AB$ и замѣтимъ пересѣченія ея $E$ и $F$ съ прямыми, раздѣляющими пополамъ углы $A$ и $B$. Эти точки будутъ двѣ вершины искомаго многоугольника. Чрезъ нихъ проведемъ прямыя $FG$ и $EH$ параллельныя сторонамъ $b$ и $d$ до встрѣчи съ прямыми, раздвояющими углы $C$ и $D$, и наконецъ эти точки встрѣчи $G$ и $H$ соединимъ прямою. Также помощью второй величины $x=-h'$ можно построить другой многоугольникъ, удовлетворяющій условіямъ вопроса.

Для этого на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ точки $A$ къ сторонѣ $AB$, отложимъ противоположно $AK$ длину $AK' = h'$, проведемъ чрезъ точку $K'$ прямую, параллельную $AB$, и замѣтимъ пересѣченія ея $E'$ и $F''$ съ прямыми, раздвояющими углы $A$ и $B$ потомъ чрезъ $E'$ и $F'$ проведемъ прямыя параллельныя сторонамъ $AD$ и $BC$ до встрѣчи съ прямыми, раздвояющими углы $D$ и $C$, и наконецъ соединимъ прямою найденныя точки $H'$ и $G'$. Такимъ образомъ составится другой многоугольникъ $E'F''G'H'$, котораго стороны параллельны сторонамъ даннаго и равно отъ нихъ удалены; причемъ удовлетворено условіе, что разность между площадью его и площадью даннаго равна $m^2$.

V. *Въ данный треугольникъ вписать квадратъ, у котораго одна сторона лежала бы на основаніи треугольника, а двѣ противоположныя ей вершины на двухъ прочихъ сторонахъ треугольника.*

Пусть $ABC$ будетъ данный треугольникъ, $DGFE$ вписанный въ него квадратъ по условію вопроса и $BH$ высота треугольника. Основаніе $AC$ и высоту $BH$ можно разсматривать, какъ данныя величины. Положимъ $AC = a$, $BH = b$ и означимъ чрезъ $x$ неизвѣстную сторону квадрата.



Фиг. 6

Такъ какъ $GF$ параллельна $AC$, то треугольникъ $BGF$ подобенъ треугольнику $ABC$, а въ подобныхъ треугольникахъ высоты пропорціональны основаніямъ; поэтому

$$FG : AC = BI : BH,$$

или

$$x : a = (b - x) : b;$$

отсюда, взявъ произведеніе крайнихъ и среднихъ членовъ, получимъ уравненіе

$$bx = ab - ax,$$

изъ котораго легко выведемъ

$$x = \frac{ab}{a+b}. \qquad (a)$$

Эту формулу не трудно построить. Замѣтимъ, что здѣсь можно разсматривать $x$ какъ четвертую пропорціональную величину къ тремъ извѣстнымъ: $a$, $b$, $a+b$, т.-е.

$$(a+b):a=b:x.$$

На основаніи теоремы начальной Геометріи, что прямая, параллельная одной изъ сторонъ треугольника, раздѣляетъ двѣ прочія его стороны на части пропорціональныя, можно найти $x$ слѣдующимъ черченіемъ:

Начертивъ въ самомъ дѣлѣ треугольникъ $ABC$ и проведя его высоту $BH$, отложимъ отъ точки $H$ длину $HK=AC$ и $KL=BH$; потомъ проведемъ прямую $BL$ и прямую $KI$ ей параллельную, которая отсѣчетъ на высотѣ $BH$ отрѣзокъ $HI$, равный искомой длинѣ $x$. Дѣйствительно: здѣсь въ треугольникѣ $BHL$, по параллельности $IK$ съ $BL$, имѣемъ

$$HL:HK=BH:HI,$$

т.-е.

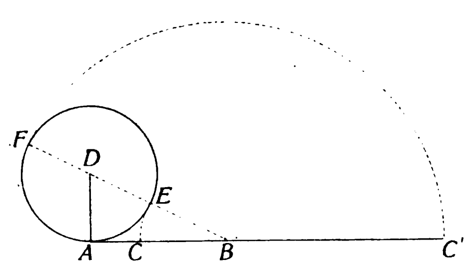
$$(a+b):a=b:HI,$$

отсюда выходитъ

$$HI=\frac{ab}{a+b}=x.$$

Найдя точку $I$, проведемъ чрезъ нее параллельную къ основанію $AC$ и замѣтимъ $G$ и $F$, пересѣченія ея съ сторонами тр. $ABC$; потомъ опустимъ изъ этихъ точекъ перпендикуляры $GD$ и $FE$ на основаніе; такимъ образомъ составимъ квадратъ, вписанный въ данный треугольникъ.

VI. *Раздѣлить данную длину прямой линіи въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.*




Фиг. 7

Положимъ, что $AB$ изображаетъ данную длину и $C$ представляетъ искомую точку дѣленія. Означивъ чрезъ $a$ длину $AB$ и чрезъ $x$ большій ея отрѣзокъ $BC$, будемъ имѣть $AC=a-x$ и, по условію вопроса,

$$AB:BC=BC:AC$$

или

$$a:x=x:(a-x);$$

отсюда, взявъ произведеніе крайнихъ и среднихъ членовъ, получимъ уравненіе

$$x^2 = a^2 - ax, \tag{1}$$

которое даетъ

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}.$$

Чтобы найти эти величины, построимъ сперва

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2},$$

который означимъ для сокращенія чрезъ $z$.

Очевидно, что $z$ есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника, у котораго катеты суть $a$ и $\frac{a}{2}$; поэтому, если возставимъ $AD$, перпендикулярную къ $AB$ и равную ея половинѣ, потомъ проведемъ прямую $DB$, то получимъ

$$z = BD.$$

и, слѣдовательно,

$$x = -\frac{a}{2} \pm BD. \tag{2}$$

Первую изъ этихъ величинъ

$$-\frac{a}{2} + BD = BD - \frac{a}{2},$$

найдемъ вычитаніемъ длины $AD$ изъ $BD$; для этого изъ точки $D$, какъ центра, радіусомъ $DA$ начертимъ кругъ, который пересѣчетъ $BD$ въ нѣкоторой точкѣ $E$ такъ, что будетъ $DE = DA = \frac{a}{2}$, а потому $BE = BD - \frac{a}{2}$ будетъ искомая величина $x$, удовлетворяющая вопросу. По отложеніи $BC = BE$, данная прямая будетъ раздѣлена въ $C$ въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

Вторая величина $x$ есть

$$-\frac{a}{2} - BD = -\left(\frac{a}{2} + BD\right).$$

Для построенія ея, продолжимъ кругъ, описанный радіусомъ $DA$, до пересѣченія съ продолженіемъ $BD$; получимъ $BF = DF + BD = = \frac{a}{2} + BD$ и слѣдовательно

$$x = - BF.$$

Эта величина, хотя удовлетворяетъ уравненію (1), но не удовлетворяетъ вопросу. Впрочемъ, легко обобщить вопросъ такъ, что обѣ найденныя величины $x$ будутъ ему удовлетворять.

Отложивъ на продолженіи $AB$ противоположно $BC$ длину $BC' = BF$, получимъ $x = - BC'$. Отъ подстановленія $- BC'$ вмѣсто $x$ въ уравненіе (1) найдемъ

$$a : - BC' = - BC' : (a + BC');$$

а перемѣнивъ знаки въ обѣихъ частяхъ этого равенства и, подставивъ $AB$ вмѣсто $a$, получимъ

$$AB : BC' = BC' : (AB + BC')$$

или

$$AB : BC' = BC' : AC'.$$

Эта пропорція показываетъ, что точка $C'$ имѣетъ такое же свойство, какъ и $C$, а именно, что разстояніе ея отъ $B$ есть среднее пропорціональное между разстояніемъ ея отъ $A$ и данною длиною $AB$. Итакъ, чтобы обѣ найденныя величины $x$ удовлетворяли вопросу, надобно предложить вопросъ слѣдующимъ образомъ: *на данной прямой $AB$ найти точку такъ, чтобы разстояніе ея отъ одного конца прямой $B$ было среднею пропорціональною величиною между разстояніемъ ея отъ другого конца $A$ и цѣлою длиною $AB$.*

Предыдущее рѣшеніе показываетъ, что искомая точка можетъ быть помѣщена, или на самой длинѣ $AB$, или на ея продолженіи.

**5.** Разсмотрѣвъ внимательно уравненія, разрѣшенныя въ предыдущихъ вопросахъ, мы находимъ, что они всѣ однородныя, т.-е. въ каждомъ уравненіи всѣ члены имѣютъ одинаковое число измѣреній. Это свойство не случайное, но принадлежитъ всѣмъ уравненіямъ, связывающимъ линейныя числа, отнесенныя къ произвольной единицѣ.

Для доказательства этого свойства замѣтимъ сперва общее свойство однородныхъ формулъ или функцій.

Если по замѣненіи величинъ $a, b, c, \dots x, y$, заключающихся въ формулѣ, соотвѣтственно произведеніями $na, nb, nc, \dots, nx, ny$, гдѣ $n$ число произвольное, формула пріобрѣтетъ множитель $n^m$, не претерпѣвая никакого другого измѣненія, то такую формулу называютъ однородною относительно $a, b, c, \ldots, x, y$. Число $m$, показатель степени $n^m$, называется *числомъ измѣреній* или *степенью однородности формулы*. Напр., формулы:

$$ab, \quad a^2 + ab, \quad abc, \quad \frac{a^3 - 2a^2 b}{c^2 + d^2}$$

отъ перемѣны $a, b, c, d$, соотвѣтственно на $an, bn, cn, dn$, обратятся въ слѣдующія:

$$abn^2, \quad (a^2 - ab)\,n^2, \quad abcn^3, \quad \frac{a^3 - 2a^2 b}{c^2 + d^2} \cdot n;$$

поэтому онѣ однородныя; первыя двѣ двухъ измѣреній, третья трехъ измѣреній, а четвертая одного.

Когда формула цѣлая, какъ, напр., $a^2 + ab$, тогда всѣ члены ея должны имѣть одинаковое число измѣреній, потому что они по указанному замѣчанію должны умножиться на одну и ту же степень $n$.

Уравненіе называется однороднымъ, когда всѣ его члены, перенесенные въ одну сторону знака равенства, составляютъ однородную формулу, напр.,

$$ax + bx - ab = 0. \tag{1}$$

Такое уравненіе не нарушится отъ замѣненія линейныхъ чиселъ, въ немъ содержащихся: $a, b, c, \ldots, x, y$, произведеніями $na, nb, nc, \ldots, nx, ny$; потому что тогда все уравненіе помножится только на степень числа $n$; такъ, въ ур. (1) въ первой части получимъ

$$(ax + bx - ab)\,n^2,$$

что будетъ равно нулю, потому что множитель $ax + bx - ab$ равенъ нулю.

Однородность уравненій въ геометрическихъ вопросахъ происходитъ отъ того, что геометрическая связь между линейными числами не зависитъ отъ длины, взятой за единицу для измѣренія линій, т.-е., если уравненіе содержитъ линейныя числа $a, b, c, \ldots, x, y, \ldots$, отнесенныя къ единицѣ $AB$, то оно не нарушится отъ подставленія вмѣсто этихъ чиселъ другихъ: $a', b', c', \ldots, x', y'$, полученныхъ отъ измѣренія всѣхъ разсматриваемыхъ линій новою единицею $CD$. Напр., въ прямоугольномъ треугольникѣ, квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ, будутъ-ли стороны треугольника выражены въ футахъ или въ дюймахъ. Означивъ чрезъ $n$ отношеніе $AB : CD$, найдемъ, что линія, выраженная въ единицахъ

$AB$ числомъ $a$, выразится въ новыхъ единицахъ $CD$ числомъ $an$; напр., если $AB$ есть футъ, а $CD$ дюймъ, то $a$ футовъ раздробится въ $12\,a$ дюймовъ. Итакъ, отъ перемѣны единицы $AB$ на $CD$, числа

$$a,\ b,\ c, \ldots, x, y, \ldots$$

перемѣняются соотвѣтственно на

$$an,\ bn,\ cn, \ldots, xn,\ yn, \ldots$$

и эти новыя числа должны быть связаны такимъ же уравненіемъ, какъ и прежнія, при всякомъ отношеніи $n$. Это свойство имѣетъ однородное уравненіе или уравненіе, способное разложиться на нѣсколько однородныхъ. Для поясненія послѣдняго предложенія, разсмотримъ уравненіе

$$a^3 + 2a^2b - x^3 + 3ab + xy - c^2 + b + x = 0, \qquad (2)$$

въ которомъ не всѣ члены имѣютъ одинаковое число измѣреній. Первая его часть состоитъ изъ трехъ однородныхъ функцій:

$$a^3 + 2a^2b - x^3,\ 3ab + xy - c^2,\ b + x;$$

покажемъ, что онѣ порознь должны быть равны нулю, если уравненіе (2) удовлетворяетъ условію однородности. Означивъ численныя величины этихъ функцій для сокращенія чрезъ $A$, $B$, $C$, будемъ имѣть

$$A + B + C = 0.$$

Отъ перемѣны: $a, b, c, \ldots, x, y, \ldots$, на: $an, bn, cn, \ldots, xn, yn, \ldots$ число $A$ перемѣнится на $An^3$, $B$ на $Bn^2$, $C$ на $Cn$, а потому уравненіе перемѣнится на

$$An^3 + Bn^2 + Cn = 0$$

или

$$An^2 + Bn + C = 0.$$

Такъ какъ послѣднее уравненіе должно существовать при всякомъ $n$, то оно должно быть тождественно относительно $n$, т.-е. должно быть:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0;$$

въ противномъ случаѣ имѣли бы для $n$ опредѣленную величину. Итакъ, уравненіе (2) разлагается на три однородныя:

$$a^3 + 2a^2b - x^3 = 0, \quad 3ab + xy - c^2 = 0, \quad b + x = 0.$$

**6.** Формулы, полученныя отъ рѣшенія однородныхъ уравненій, должны быть также однородныя. Мы разсмотримъ главнѣйшія изъ нихъ.

Во-первыхъ, положимъ, что величина $x$, имѣющая $m$ измѣреній, выражена цѣлою формулою линейныхъ чиселъ: $a$, $b$, $c$, ... Очевидно, что для однородности каждый членъ этой формулы долженъ имѣть также $m$ измѣреній. Итакъ, когда $x$ есть линія, то въ каждомъ членѣ цѣлой функціи, ее выражающей, должно быть по одному измѣренію; напр.,

$$x = 2a + b - \frac{3}{4}c;$$

здѣсь коэффиціенты, какъ отвлеченныя числа, не входятъ въ счетъ измѣреній.

Поверхность выражается суммою членовъ о двухъ измѣреніяхъ; напр.,

$$x = a^2 + 2ab - c^2.$$

Въ выраженіи объема каждый членъ долженъ имѣть по три измѣренія, напр.,

$$x = a^3 - 2ab^2.$$

Пусть будетъ теперь

$$x = \frac{A}{B},$$

гдѣ $A$ и $B$ цѣлыя функціи относительно $a$, $b$, $c$, ... Освободивъ отъ знаменателя, получимъ уравненіе

$$Bx = A,$$

которое должно быть однородное; для этого очевидно требуется, чтобы $A$ и $B$ были однородныя. Означивъ чрезъ $p$ степень $A$, а чрезъ $q$ степень $B$, найдемъ, по перемноженіи $B$ на $x$, въ каждомъ членѣ произведенія $q + m$ измѣреній, и это число должно быть равно $p$. Итакъ,

$$p = q + m,$$

т.-е., *если величина $x$ выражается раціональною дробью, то оба члена этой дроби должны быть порознь однородные, и разность между числомъ измѣреній числителя и числомъ измѣреній знаменателя* *должна быть равна числу измѣреній величины, выражаемой дробью.* Напр., формула

$$x = \frac{ba}{a+b}$$

выражаетъ линію,

$$x = \frac{a^5 + 3a^4b - a^3c^2}{a^3 - b^3}$$

поверхность, а

$$x = \frac{a^3b^2}{c^2 - d^2}$$

объемъ.

Такъ какъ число измѣреній тригонометрической величины равно нулю, то въ дробяхъ, выражающихъ эти величины, оба члена имѣютъ одинаковое число измѣреній. Напр., означивъ чрезъ $a$, $b$, $c$ стороны треугольника и чрезъ $A$ уголъ, противоположный сторонѣ $A$, имѣемъ

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

*Когда величина $x$ выражается корнемъ какой-либо степени, тогда подкоренное количество должно быть однородное и число его измѣреній должно быть равно числу измѣреній величины $x$, умноженному на показатель корня.* Пусть будетъ

$$x = \sqrt[n]{A}.$$

Возведя обѣ части равенства въ степень $n$, получимъ

$$x^n = A.$$

Если $x$ имѣетъ $m$ измѣреній, то, будучи возвышено въ степень $n$, составитъ число, имѣющее $mn$ измѣреній; слѣд., $A$ должно имѣть $mn$ измѣреній. Когда $A$ цѣлая формула, тогда у всѣхъ ея членовъ должно быть по $mn$ измѣреній; напр.,

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad x = \sqrt{ab}.$$

Если же $A$ дробная, то разность между числомъ измѣреній числителя и числомъ измѣреній знаменателя должна быть равна $mn$; напр., формула, найденная въ задачѣ (II),

$$x = \sqrt{a^2 + \frac{2mn\,(b-a)}{c}} = \sqrt{\frac{a^2c + 2mnb - 2mna}{c}}.$$

**7.** Однородный видъ формулы нарушится, когда одна изъ линій, входящихъ въ формулу, будетъ взята за единицу; потому что тогда вмѣсто буквы, означающей эту единицу, должно подставить 1; отчего въ нѣкоторыхъ членахъ число множителей уменьшится. Напр., предыдущая формула при $a = 1$ приметъ видъ неоднородной формулы

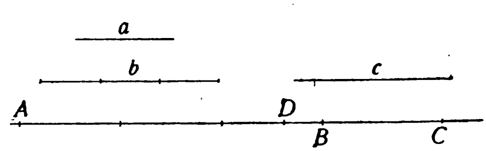
$$x = \sqrt{\frac{c + 2mnb - 2mn}{c}}. \qquad (a)$$

Но нетрудно всякій разъ возстановить однородный видъ формулы, перемѣнивъ единицу на другую произвольную; отъ этого прежняя единица выразится нѣкоторымъ числомъ $a$, которое должно войти множителемъ одинъ или нѣсколько разъ въ тѣ члены, гдѣ кажется, что недостаетъ измѣреній для однородности. Такъ, въ формулѣ ($a$) должно $c$ помножить на $a^2$ и $2mn$ на $a$, чтобы привести формулу къ прежнему виду.

Разсмотримъ теперь общіе способы для построенія простѣйшихъ алгебраическихъ формулъ. Мы можемъ ограничиться однѣми линейными формулами, потому что построеніе другихъ протяженій приводится къ построенію линій.

a) Построеніе цѣлой линейной формулы съ раціональными коэффиціентами приводится къ сложенію, вычитанію, умноженію на цѣлое число и дѣленію на нѣсколько равныхъ частей данныхъ линій. Напр., чтобы построить по даннымъ линіямъ: $a$, $b$, $c$, формулу

$$x = 3a + \frac{2}{3}b - c,$$



Фиг. 8

отложимъ, во-первыхъ, на неопредѣленной прямой длину $AB = 3a$; потомъ, раздѣливъ извѣстнымъ способомъ $b$ на три равныя части, отложимъ $BC = \frac{2}{3}b$ и наконецъ отъ точки $C$ къ $B$ отложимъ $CD = c$; длина $AD$ будетъ искомая величина $x$.

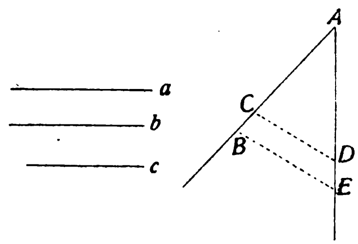
b) Простѣйшая дробная линейная формула есть

$$x = \frac{ab}{c}.$$

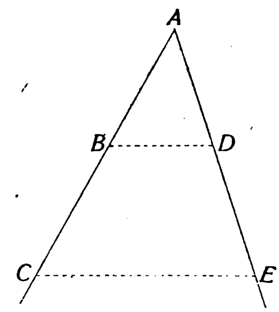
Она можетъ быть выведена изъ пропорціи

$$c : a = b : x,$$

а потому построеніе ея приводится къ отысканію четвертой пропорціональной къ тремъ даннымъ линіямъ: $a$, $b$, $c$. Для этого, начертивъ произвольный уголъ $A$ (фиг. 9), отложимъ на одной изъ его сторонъ длины: $AB = a$ и $AC = c$, а на другой сторонѣ $AD = b$; потомъ, соединивъ прямою точки $C$ и $D$, проведемъ $BE$, параллельную $CD$, до пересѣченія съ продолженіемъ $AD$; отъ этого выйдетъ




Фиг. 9




Фиг. 10

$AE = x$. Въ самомъ дѣлѣ: по извѣстной теоремѣ, относящейся къ пропорціональнымъ линіямъ, имѣемъ

$$AB : AC = AE : AD$$

или

$$a : c = AE : b;$$

откуда выходитъ

$$AE = \frac{ab}{c},$$

а это и есть выраженіе искомой величины $x$.

Можно измѣнить расположеніе линій: $a$, $b$, $c$ на сторонахъ угла $A$, наблюдая только, чтобы на одной сторонѣ не лежали длины, означенныя буквами $a$ и $b$ или буквами $x$ и $c$; т.-е. можно дѣлать только тѣ перестановки въ буквахъ: $a$, $b$, $c$, $x$, отъ которыхъ пропорція $a : c = x : b$ не нарушается.

Вмѣсто того, чтобы откладывать обѣ длины $a$ и $c$ отъ вершины, можно (фиг. 10) положить $a$ на продолженіе $c$, т.-е. отложить сперва $AB = c$, потомъ $BC = a$ и $AD = b$; послѣ этого провести прямую $BD$ и параллельную ей $CE$. Отъ этого выйдетъ $DE = x$, потому что

$$AB : BC = AD : DE$$

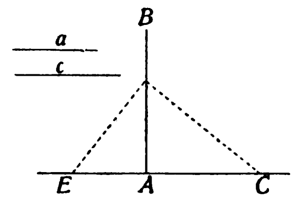
или

$$c : a = b : DE;$$

откуда

$$DE = \frac{ab}{c} = x.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $a = b$, т.-е. $x = \frac{a^2}{c}$, можно другимъ способомъ построить эту формулу. Начертивъ прямой уголъ $A$, отложимъ на сторонахъ его $AB = a$ и $AC = c$, потомъ проведемъ прямую $CB$ и перпендикулярную къ ней $BE$ до пересѣченія съ продолженіемъ $CA$; отъ этого выйдетъ $AE = x$. Это построеніе основано на теоремѣ: *Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорціональная между отрѣзками гипотенузы.*




Фиг. 11

Поэтому въ прямоугольномъ треугольникѣ $CBE$ имѣемъ

$$BA^2 = AC \cdot AE$$

или

$$a^2 = c \cdot AE;$$

отсюда выводимъ

$$AE = \frac{a^2}{c} = x.$$

c) Построеніе линейной формулы, въ которой числитель и знаменатель одночленныя количества и знаменатель имѣетъ два или болѣе измѣреній, приводится къ построенію нѣсколько разъ четвертой пропорціональной; вообще столько разъ, сколько измѣреній въ знаменателѣ.

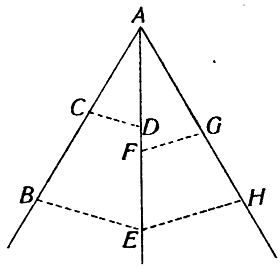
Напр., чтобы построить формулу

$$x = \frac{abc}{de},$$

которую можно написать слѣдующимъ образомъ

$$x = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e},$$

положимъ $\frac{ab}{d} = y$ и построимъ эту длину по вышеизложенному способу; послѣ того будемъ имѣть $x = \frac{yc}{e}$ и найдемъ $x$ опять по тому же способу. Эти построенія можно произвести въ слѣдующемъ порядкѣ: начертимъ два произвольныхъ смежныхъ угла при вершинѣ $A$, отложимъ $AB=a$, $AC=d$ и $AD=b$; проведемъ потомъ $CD$ и параллельную ей $BE$; отъ этого получимъ $AE=y$. Послѣ того, отложивъ $AF=e$ и $AG=c$, проведемъ $FG$ и параллельную ей $EH$; чрезъ это найдемъ $AH=x$.



Фиг. 12

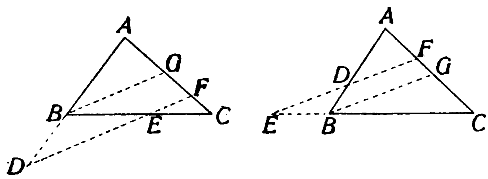
Построеніе формулы

$$x=\frac{abc}{de}$$

можно привести къ построенію одной четвертой пропорціональной, если найдемъ сперва двѣ линіи $m$ и $n$, которыхъ отношеніе $\frac{m}{n}$ было бы равно отношенію $\frac{ab}{de}$; потому что тогда будетъ

$$x=\frac{mc}{n}.$$

—* Въ начальной Геометріи есть нѣсколько способовъ перемѣнить отношеніе площадей $ab$ и $de$ на отношеніе линій $m$ и $n$; наиболѣе удобные основаны на теоремахъ *Птоломея и Чевы*. Теорема Птоломея состоитъ въ слѣдующемъ: *отъ пересѣченія сторонъ треугольника $ABC$ произвольною прямою $DF$ на каждой сторонѣ выйдетъ по два отрѣзка, заключающіеся между концами стороны и пересѣкающею, а именно: на сторонѣ $AB$ отрѣзки $AD$ и $BD$, на $BC$ отрѣзки $BE$ и $CE$, а на $AC$ отрѣзки $AF$ и $CF$; отношеніе между отрѣзками одной стороны $\frac{AD}{BD}$, помноженное на отношеніе отрѣзковъ другой стороны $\frac{BE}{CE}$, равно отношенію отрѣзковъ третьей стороны $\frac{AF}{CF}$, т.-е.*



Фиг. 13

$$\frac{AD}{BD}\cdot\frac{BE}{CE}=\frac{AF}{CF}.$$

Для доказательства проведемъ $BG$ параллельную пересѣкающей $DF$; отъ этого получимъ въ тр. $ADF$:

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AF}{GF}$$

и въ тр. $BGC$:

$$\frac{BE}{CE} = \frac{GF}{CF};$$

перемноживъ эти пропорціи почленно для исключенія $GF$, найдемъ

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} = \frac{AF}{CF},$$

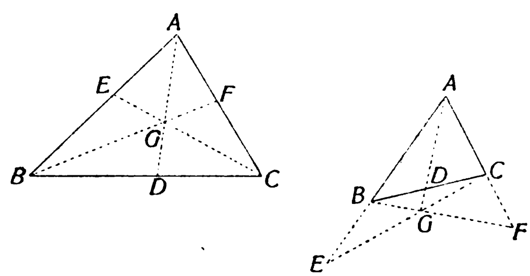
что требовалось доказать. Изъ этой пропорціи выходитъ равенство

$$AD \cdot BE \cdot CF = BD \cdot CE \cdot AF,$$

показывающее, что *произведеніе трехъ несмежныхъ отрѣзковъ равно произведенію трехъ остальныхъ отрѣзковъ.*

Теорема Чевы:

*Отъ пересѣченія сторонъ треугольника $ABC$ тремя прямыми, проведенными изъ вершинъ чрезъ произвольную точку $G$, выйдетъ на каждой сторонѣ по два отрѣзка: на $AB$ отрѣзки $AE$ и $BE$, на $BC$ отрѣзки $BD$ и $CD$, на $AC$ отрѣзки $CF$ и $AF$; произведеніе трехъ несмежныхъ отрѣзковъ равно произведенію трехъ остальныхъ, т.-е.*



Фиг. 14

$$AE \cdot BD \cdot CF = BE \cdot CD \cdot AF.$$

Доказательство этой теоремы основано на предыдущей: Въ тр. $ABD$, пересѣченномъ прямою $EC$, имѣемъ

$$AE \cdot BC \cdot DG = BE \cdot CD \cdot AG,$$

а въ тр. $ADC$, пересѣченномъ прямою $BF$,

$$AG \cdot BD \cdot CF = DG \cdot BC \cdot AF.$$

Перемноживъ эти равенства и сокративъ на общіе множители въ обѣихъ частяхъ, получимъ

$$AE \cdot BD \cdot CF = BE \cdot CD \cdot AF,$$

что требовалось доказать.

Чтобы въ формулѣ

$$x = \frac{ab}{de} . c$$

замѣнить отношеніе $\frac{ab}{de}$ отношеніемъ двухъ линій, начертимъ произвольный уголъ $B$ (фиг. 13), отложимъ на сторонахъ его $BD = d$, $DA = a$, $BE = b$, $EC = e$; потомъ проведемъ прямыя $AC$ и $DE$ и замѣтимъ ихъ пересѣченіе $F$. По теоремѣ Птоломея получимъ

$$\frac{ab}{de} = \frac{AF}{CF}.$$

Послѣ того легко найти

$$x = \frac{AF . c}{CF}.$$

Отношеніе $\frac{ab}{de}$ можно замѣнить отношеніемъ двухъ линій по теоремѣ Чевы слѣдующимъ образомъ: начертивъ произвольный уголъ $A$ (фиг. 14), отложимъ на его сторонахъ длины: $AE = a$, $EB = d$, $AF = e$, $FC = b$; проведемъ потомъ прямыя $BC$, $BF$, $CE$ и чрезъ пересѣченіе двухъ послѣднихъ $G$ прямую $AD$, которая раздѣлитъ $BC$ въ требуемомъ отношеніи; потому что, по теоремѣ Чевы, имѣемъ

$$a . BD . b = d . DC . e,$$

а отсюда выходитъ

$$\frac{ab}{de} = \frac{DC}{BD}.$$

Повтореніемъ этихъ построеній нѣсколько разъ можно изобразить отношеніемъ двухъ линій отношеніе между величинами трехъ или болѣе измѣреній.

Напр., чтобы найти отношеніе

$$\frac{abc}{def},$$

замѣнимъ по предыдущему способу отношеніе $\frac{ab}{de}$ отношеніемъ двухъ линій $\frac{m}{n}$, получимъ

$$\frac{abc}{def} = \frac{mc}{nf};$$

потомъ опять тѣмъ же способомъ замѣнимъ отношеніе $\frac{mc}{nf}$ отношеніемъ двухъ линій $\frac{p}{q}$. * —

d) Для построенія линейной дроби, у которой числитель многочленный, а знаменатель одночленный, подпишемъ знаменатель подъ каждымъ членомъ числителя и построимъ каждый членъ отдѣльно; послѣ чего будемъ приведены къ построенію цѣлой линейной формулы по правилу ($a$). Напр., пусть будетъ дано построить

$$x = \frac{abc + a^2d - mpq}{ah}$$

или

$$x = \frac{bc}{h} + \frac{ad}{h} - \frac{mpq}{ah}.$$

Положивъ $\frac{bc}{h} = y$, $\frac{ad}{h} = z$, $\frac{mpq}{ah} = u$, построимъ эти величины по предыдущимъ способамъ; послѣ чего получимъ

$$x = y + z - u$$

и найдемъ $x$ сложеніемъ $y$ съ $z$ и вычитаніемъ $u$ изъ суммы $y + z$.

Построеніе дроби сокращается, когда числитель можетъ быть разложенъ на линейные множители, напр., $x = \frac{a^2 - b^2}{c} = \frac{(a+b)(a-b)}{c}$. Для построенія этой формулы, надобно найти только одну четвертую пропорціональную къ $a + b$, $a - b$ и $c$.

e) Когда у дроби, данной для построенія, знаменатель многочленный, его можно сдѣлать одночленнымъ. Если онъ одного измѣренія, то сложеніемъ и вычитаніемъ его членовъ приведемъ его къ одной линіи; напр., если

$$x = \frac{a^2 + b^2}{a + b},$$

то сложеніемъ найдемъ $a + b = y$; послѣ того получимъ $x = \frac{a^2 + b^2}{y}$ и построимъ эту величину по предыдущему.

Если же знаменатель имѣетъ два или болѣе измѣреній, то должно положить его равнымъ произведенію стольких линейныхъ множителей, сколько у него измѣреній, взявъ всѣ множители, исключая одного, произвольными и разсматривая остальной множитель, какъ неизвѣстную линію. Для опредѣленія послѣдней получимъ дробь съ одночленнымъ знаменателемъ, которую построимъ по правилу ($c$); послѣ того у данной дроби знаменатель будетъ одночленный и дробь построится по правилу ($d$). Построимъ для примѣра дробь

$$x = \frac{abc + def}{ab + cd}.$$

Положимъ $ab+cd=ay$, гдѣ множитель $y$ неизвѣстенъ. Онъ опредѣлится формулою

$$y=\frac{ab+cd}{a}=b+\frac{cd}{a},$$

которую умѣемъ построить. Послѣ того получимъ

$$x=\frac{abc+def}{ay}=\frac{bc}{y}+\frac{def}{ay}$$

и легко построимъ это по предыдущимъ правиламъ.

*Примѣры на построеніе раціональныхъ формулъ:*

1) Построить на данномъ основаніи параллелепипедъ, равномѣрный данной пирамидѣ.

2) Построить на данномъ основаніи прямой цилиндръ, равномѣрный данному шару.

3) На данномъ основаніи построить цилиндръ, вмѣщающій объемъ даннаго шара и объемъ даннаго конуса.

**8.** По предыдущимъ правиламъ можно построить всякую раціональную формулу помощью линейки и циркуля, т.-е. помощью прямой линіи и круга; но ирраціональныя формулы не всѣ имѣютъ это свойство; можно построить такимъ образомъ только корни квадратные, корни, которыхъ показатели суть степени 2-хъ (4, 8, 16, ...) и вообще сложныя формулы, составленныя изъ этихъ корней и раціональныхъ дѣйствій.

Построимъ сперва простѣйшіе квадратные корни:

$$x=\sqrt{ab},\quad x=\sqrt{a^2+b^2},\quad x=\sqrt{a^2-b^2}.$$

a) Величина $x=\sqrt{ab}$ есть средняя пропорціональная между $a$ и $b$, потому что можетъ быть выведена изъ пропорціи

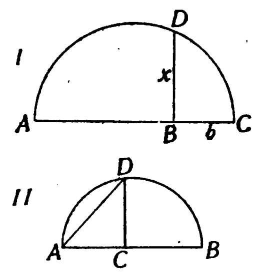
$$a:x=x:b.$$

Для построенія ея можно воспользоваться одною изъ двухъ извѣстныхъ теоремъ: 1) *Перпендикуляръ, опущенный изъ точки окружности круга на діаметръ, есть средняя пропорціональная между отрѣзками діаметра.* 2) *Хорда есть средняя пропорціональная между діаметромъ, проведеннымъ чрезъ одинъ изъ ея концовъ, и разстояніемъ этого конца отъ перпендикуляра, опущеннаго на діаметръ изъ другого ея конца.*

Отложимъ на произвольной прямой (фиг. 15,I) длины: $AB=a$, $BC=b$, начертимъ полукругъ, имѣющій діаметромъ ихъ сумму

$AC = a + b$, потомъ изъ точки $B$ возставимъ $BD$ перпендикулярную къ $AC$ до встрѣчи съ окружностью. По первой изъ приведенныхъ теоремъ, этотъ перпендикуляръ будетъ искомая величина $x = \sqrt{ab}$.

Чтобы найти $x$ по второй теоремѣ, возьмемъ между длинами $a$ и $b$ большую, которая пусть будетъ $AB = a$ (фиг. 15, II) и отложимъ на ней другую $AC = b$; потомъ начертимъ полукругъ, имѣющій діаметромъ $AB$, возставимъ къ $AB$ перпендикуляръ $CD$ и проведемъ хорду $AD$, которая изобразитъ величину $x = \sqrt{ab}$. Послѣднее построеніе иногда выгоднѣе перваго, потому что занимаетъ меньше мѣста.

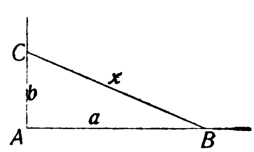


Фиг. 15

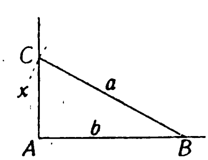
b) Формула $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ выражаетъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника, у котораго катеты равны $a$ и $b$. Поэтому, если начертимъ прямой уголъ $A$, отложимъ на его сторонахъ длины: $AB = a$, $AC = b$ и проведемъ прямую $BC$, то получимъ $CB = \sqrt{a^2 + b^2} = x$.

c) Величина $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ возможна только въ случаѣ $a > b$ и выражаетъ тогда катетъ прямоугольнаго треугольника, у котораго другой катетъ есть $b$, а гипотенуза $a$.

Для построенія этой формулы, начертимъ прямой уголъ $A$,



Фиг. 16



Фиг. 17

отложимъ потомъ на одной изъ его сторонъ длину $AB = b$ и начертимъ дугу изъ центра $B$ радіусомъ $a$, пересѣкающую другую сторону прямого угла; замѣтивъ это пересѣченіе $C$, найдемъ

$$AC = \sqrt{a^2 - b^2} = x.$$

d) Построеніе линейной формулы, представляющей корень квадратный изъ сложной раціональной, можетъ быть приведено къ построенію раціональной формулы и одной средней пропорціональной между двумя извѣстными длинами. Для примѣра построимъ формулу

$$x = \sqrt{a^2 + \frac{2mn(b-a)}{c}} \text{ (задача II).}$$

Такъ какъ подкоренное выраженіе есть величина двухъ измѣреній, то можно представить ее произведеніемъ двухъ линейныхъ множителей, изъ которыхъ одинъ произвольный, а другой неизвѣстный; положимъ

$$a^2 + \frac{2mn(b-a)}{c} = ay;$$

отсюда выходитъ

$$y = a + \frac{2mn(b-a)}{ca}.$$

Эту раціональную формулу построимъ по извѣстнымъ правиламъ, изложеннымъ выше. Зная $y$, можемъ построить формулу

$$x = \sqrt{ay},$$

т.-е. найти среднюю пропорціональную между $a$ и $y$.

Когда всѣ члены подкоренного количества суть квадраты, тогда можно построить формулу посредствомъ нѣсколькихъ прямоугольныхъ треугольниковъ. Напримѣръ, для построенія

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2},$$

положимъ $a^2 + b^2 = y^2$; отъ этого выйдетъ

$$x = \sqrt{y^2 - c^2}.$$

Сперва построимъ прямоугольный треугольникъ по катетамъ: $a$ и $b$, гипотенуза его будетъ $y$; послѣ того построимъ прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ $y$ и катету $c$, другой катетъ послѣдняго треугольника будетъ величина $x$.

Чтобы построить формулу

$$x = \sqrt[4]{abcd},$$

построимъ сперва двѣ вспомогательныя:

$$y = \sqrt{ab}, \quad z = \sqrt{cd},$$

т.-е. среднюю пропорціональную между $a$ и $b$ и среднюю пропорціональную между $c$ и $d$; послѣ того останется построить

$$x = \sqrt[4]{y^2 z^2} = \sqrt{yz}.$$

Построеніе корня четвертой степени изъ сложной формулы можетъ быть приведено къ предыдущему. Построимъ, напримѣръ,

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^5 - 2ab^4}{c}}.$$

Положивъ

$$\frac{a^5 - 2ab^4}{c} = a^2 by,$$

будемъ имѣть

$$x = \sqrt[4]{a^2 by}, \qquad y = \frac{a^5 - 2ab^4}{a^2 bc} = \frac{a^3}{bc} - \frac{2b^3}{ac}.$$

Построимъ сперва $y$ по правиламъ для раціональныхъ формулъ, потомъ построимъ

$$z = \sqrt{by};$$

отчего выйдетъ $by = z^2$ и

$$x = \sqrt[4]{a^2 z^2} = \sqrt{az};$$

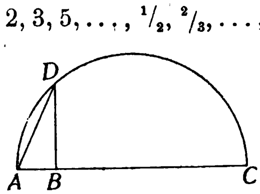
слѣдовательно, останется найти среднюю пропорціональную между $a$ и $z$.

Такъ же не трудно построить, посредствомъ нѣсколькихъ квадратныхъ корней, корень 8-й, 16-й, и вообще корень степени $2^n$.

Для построенія

$$x = \sqrt{n},$$

гдѣ $n$ означаетъ извѣстное неквадратное число: $2, 3, 5, \ldots, {}^1/_2, {}^2/_3, \ldots$, отложимъ на неопредѣленной прямой длину $AB$, взятую за единицу, и длину $AC = AB \times n$; начертимъ потомъ кругъ на діаметрѣ $AC$, возставимъ перпендикуляръ $BD$ и проведемъ хорду $AD$, которая и будетъ искомая длина $x$, потому что



Фиг. 18

$AD = \sqrt{AB \cdot AC} = \sqrt{AB \cdot AB \cdot n} = AB\sqrt{n}$, а какъ $AB$ взята за единицу, то

$$AD = \sqrt{n} = x.$$

Для построенія $x = \sqrt{2}$, стоитъ только найти гипотенузу прямоугольнаго треугольника, котораго катеты равны единицѣ.

Величина $x = \sqrt{3}$, представленная подъ видомъ

$$x = \sqrt{4-1} = \sqrt{2^2 - 1^2},$$

будетъ катетъ прямоугольнаго треугольника, котораго гипотенуза равна 2, а другой катетъ 1.

Величина $x = \sqrt{2/3}$ есть средняя пропорціональная между 2 и $1/3$.

**9.** Разсмотримъ теперь построеніе корней полныхъ квадратныхъ уравненій, которыя могутъ быть всегда приведены къ общему виду

$$x^2 + px + q = 0. \tag{1}$$

Если $x$ означаетъ линію, то $x^2$ есть величина двухъ измѣреній, а потому для однородности $px$ и $q$ должны также имѣть по два измѣренія; слѣдовательно, $p$ представляетъ положительную или отрицательную линію, которую означимъ чрезъ $\pm a$, а $q$ положительную или отрицательную площадь. Изобразивъ чрезъ $b$ сторону квадрата, равномѣрнаго съ этою площадью, будемъ имѣть $q = \pm b^2$. Поэтому уравненіе (1) приводится къ слѣдующему:

$$x^2 \pm ax \pm b^2 = 0$$

и представляетъ четыре случая:

1) $\quad x^2 + ax + b^2 = 0,$

2) $\quad x^2 - ax + b^2 = 0,$

3) $\quad x^2 + ax - b^2 = 0,$

4) $\quad x^2 - ax - b^2 = 0.$

1) Въ первомъ случаѣ корни уравненія:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$$

будутъ вещественные, когда $\frac{a}{2} > b$. Допустивъ это, построимъ величину $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$, представляющую катетъ прямоугольнаго треугольника, у котораго другой катетъ есть $b$, а гипотенуза $\frac{a}{2}$.

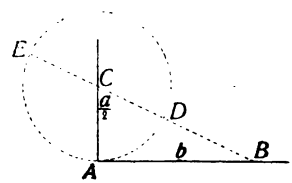
Для этого, начертивъ прямой уголъ $A$ и отложивъ на сторонѣ его длину $AB = b$, опишемъ радіусомъ $\frac{a}{2}$ изъ центра $B$ дугу, пересѣкающую другую сторону прямого угла; замѣтивъ пересѣченіе $C$ и проведя прямую $BC$, получимъ

$$AC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2};$$

слѣдовательно, корни разсматриваемаго уравненія будутъ:

$$x = -\frac{a}{2} + AC = -\left(\frac{a}{2} - AC\right)$$

$$x = -\frac{a}{2} - AC = -\left(\frac{a}{2} + AC\right)$$




Фиг. 19

Такъ какъ $AC < \frac{a}{2}$, (потому что катетъ меньше гипотенузы), то оба корня отрицательные. Начертивъ окружность круга радіусомъ $CA$ изъ центра $C$ и замѣтивъ пересѣченія ея $D$ и $E$ съ прямою $BC$, найдемъ

$$BD = CB - CD = \frac{a}{2} - AC$$

$$BE = CB + CE = \frac{a}{2} + AC;$$

слѣдовательно,

$$x = -BD \quad \text{и} \quad x = -BE.$$

2) Точно также построимъ корни уравненія

$$x^2 - ax + b^2 = 0,$$

а именно:

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}.$$

$$x = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}.$$

При условіи $\frac{a}{2} > b$ они оба положительные. Найдя величину

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2} = AC,$$

получимъ

$$x = \frac{a}{2} + AC = BE,$$

$$x = \frac{a}{2} - AC = BD.$$

3) Уравненіе

$$x^2 + ax - b^2 = 0$$

имѣетъ вещественные корни:

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2},$$

$$x = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2},$$

первый положительный, а второй отрицательный.

Для построенія ихъ, найдемъ сперва величину $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$.

Начертивъ прямой уголъ $A$, отложимъ на его сторонахъ длины: $AB = b$, $AC = \frac{a}{2}$ и проведемъ прямую $CB$, которая и будетъ искомая величина $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$; поэтому

$$x = -\frac{a}{2} + CB = CB - \frac{a}{2},$$

$$x = -\frac{a}{2} - CB = -\left(CB + \frac{a}{2}\right).$$

Чтобы найти эти величины, опишемъ окружность круга радіусомъ $CA = \frac{a}{2}$ изъ центра $C$ и замѣтимъ ея пересѣченія $D$ и $E$ съ $CB$; отъ этого выйдетъ

$$BD = CB - CD = CB - \frac{a}{2}$$

$$BE = CB + CE = CB + \frac{a}{2}$$

слѣдовательно,

$$x = BD \text{ и } x = -BE.$$

4) Наконецъ, въ случаѣ

$$x^2 - ax - b^2 = 0$$

имѣемъ:

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2},$$

$$x = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}.$$

Построивъ величину $BC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$ по предыдущему и начертивъ опять кругъ $EAD$, получимъ:

$$x = \frac{a}{2} + BC = BE,$$

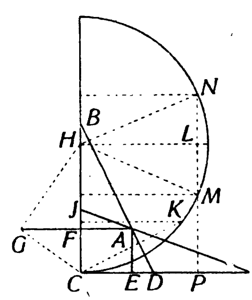
$$x = \frac{a}{2} - BC = -\left(BC - \frac{a}{2}\right) = -BD.$$

—* Въ задачѣ VI мы имѣли уже случай строить корни полнаго уравненія второй степени. Еще для примѣра рѣшимъ слѣдующій вопросъ:

*Чрезъ данную точку $A$ провести прямую $BD$ такъ, чтобы площадь $BCD$, заключающаяся между этою прямою и сторонами даннаго прямого угла $C$, была равна площади даннаго квадрата $c^2$.*

Для рѣшенія вопроса, достаточно найти длину $CD$, которую означимъ чрезъ $x$. По условію $BCD = c^2$ имѣемъ

$$\frac{1}{2} BC \cdot x = c^2 \text{ или } BC \cdot x = 2c^2. \quad (1)$$



Фиг. 20

Неизвѣстную длину $BC$ должно выразить посредствомъ $x$ и данныхъ величинъ.

Даннымъ положеніемъ точки $A$ опредѣляется длина перпендикуляра $AE$, опущеннаго на $CD$ и длина $CE$; пусть будетъ $AE = a$ и $CE = b$. Изъ подобія треугольниковъ $BCD$ и $AED$ выходитъ

$$BC : CD = AE : ED,$$

т.-е.

$$BC : x = a : (x - b),$$

а потому

$$BC = \frac{ax}{x-b}.$$

Подставивъ это выраженіе $BC$ въ условіе (1), получимъ

$$\frac{ax^2}{x-b} = 2c^2;$$

или

$$x^2 - \frac{2c^2}{a}x + \frac{2c^2b}{a} = 0.$$

что приметъ видъ

$$x^2 - 2mx + n^2 = 0, \tag{2}$$

если положимъ для сокращенія

$$\frac{c^2}{a} = m, \quad \frac{2c^2b}{a} = n^2.$$

Для опредѣленія вспомогательной величины $m$, проведемъ $AF$ перпендикулярную къ $BC$, продолженіе ея засѣчемъ прямою $CG = c$ и проведемъ $GH$ перпендикулярную къ $GC$; получимъ $CH = \frac{c^2}{a} = m$. Величина $n$ опредѣлится по условію

$$n^2 = 2mb,$$

которое показываетъ, что $n$ есть средняя пропорціональная между $2m$ и $b$; поэтому, если радіусомъ $HC$ начертимъ кругъ, потомъ отложимъ $CJ = b$, возставимъ $KJ$ перпендикулярную къ $HC$ и проведемъ хорду $KC$, то найдемъ

$$KC = n.$$

Рѣшивъ уравненіе (2)

$$x^2 - 2mx + n^2 = 0,$$

получимъ

$$x = m \mp \sqrt{m^2 - n^2}. \tag{3}$$

Эти корни должны быть вещественные, т.-е. должно быть удовлетворено условіе

$$m^2 > n^2$$

или

$$\frac{c^4}{a^2} \geqq \frac{2bc^2}{a},$$

которое, по сокращеніи, приведется къ слѣдующему:

$$c^2 \geqq 2ab,$$

показывающему, что площадь прямоугольника $AFCE$ должна быть не больше половины площади даннаго квадрата. Въ частномъ случаѣ, когда $c^2 = 2ab$, имѣемъ

$$x = m = 2b;$$

тогда, для рѣшенія задачи, стоитъ только отложить $ED = CE = b$ и провести прямую чрезъ точки $D$ и $A$. Въ самомъ дѣлѣ: отъ этого $BC = 2AE = 2a$ и площадь $BCD = 2ab = c^2$.

При $c^2 > 2ab$ корни (3) будутъ неравные, и даютъ задачѣ два рѣшенія. Легко построить ихъ слѣдующимъ образомъ: отложивъ $PC = KC = n$, проведемъ чрезъ $P$ прямую параллельную $CH$ и замѣтимъ точки $M$ и $N$, гдѣ эта прямая пересѣкаетъ окружность круга; длины $PM$ и $PN$ будутъ искомыя величины $x$. Въ самомъ дѣлѣ: проведя $HL$ перпендикулярную къ $MN$ и радіусы $MH$ и $HN$, получимъ въ $\triangle\ MLH$ и $\triangle\ LNH$,

$$ML = NL = \sqrt{m^2 - n^2}.$$

потомъ

$$PN = PL + LN = m + \sqrt{m^2 - n^2},$$

$$PM = PL - ML = n - \sqrt{m^2 - n^2}.$$

* —

## B. О проекціяхъ

**10.** Необходимымъ пособіемъ въ приложеніи Анализа къ Геометріи служитъ теорія проекцій; поэтому здѣсь изложены главнѣйшія предложенія этой теоріи.

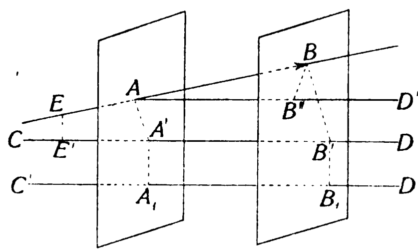
*Проекціею точки на данной прямой называется пересѣченіе прямой съ перпендикуляромъ, на нее опущеннымъ изъ точки.*

*Проекціею длины прямой линіи на другой неопредѣленной прямой называется разстояніе между проекціями концовъ этой длины.*

Пусть $AB$ будетъ данная прямолинейная длина, $CD$ неопредѣленная прямая, а $AA'$ и $BB'$ перпендикуляры къ $CD$; тогда $A'$ будетъ проекція точки $A$, $B'$ проекція точки $B$, и $A'B'$ проекція длины $AB$. Точки $A$, В и длина $AB$ называются *проектируемыми*, прямая $CD$ *осью проекцій*, а $AA'$ и $BB'$ *проектирующими перпендикулярами*.

Должно замѣтить, что ось проекцій и проектируемая прямая не всегда находятся въ одной плоскости.

Черезъ $AA'$ можно провести плоскость, перпендикулярную къ $CD$, и разсматривать проекцію $A'$ какъ пересѣченіе этой плоскости съ осью $CD$; слѣдовательно, *проекція точки есть также пересѣченіе оси проекцій съ плоскостью къ ней перпендикулярною, проведенною чрезъ проектируемую точку* $A$. Проекція $A'B'$ длины $AB$ есть разстояніе между плоскостями, проведенными чрезъ $A$ и $B$ перпендикулярно къ $CD$. Такъ какъ эти плоскости параллельны, то онѣ вездѣ равно отстоятъ, а потому проекція $AB$ на всякой другой оси $C'D'$, параллельной $CD$, равна $A'B'$. Слѣдовательно, проекція $AB''$ длины $AB$ на оси $AD''$, параллельной $CD$, равна $A'B'$.



Фиг. 21

Прямая $BB''$ очевидно перпендикулярна къ $AB''$, а потому треуг. $ABB''$ прямоугольный и даетъ

$$A'B' = AB'' = AB\cos(BAB''),$$

т.-е. *проекція равна проектируемой длинѣ, умноженной на косинусъ угла, заключающагося между этими двумя прямыми.*

Изобразивъ буквою $a$ проектируемую длину, буквою $a'$ проекцію и знакомъ $(aa')$ уголъ, между ними заключающійся, будемъ имѣть

$$a' = a\cos(aa'). \tag{1}$$

Эта формула можетъ служить для вычисленія проекцій по данной проектируемой линіи и по углу, который она составляетъ съ осью проекцій.

Отъ перемѣны $AB$ на противоположную ей $AE$, проекція $A'B'$ перемѣнится также на противоположную $A'E'$, и если величина $a' = A'B'$ входила въ вычисленіе, то надобно по правилу знаковъ перемѣнить ее на $-A'E'$. Но нѣтъ надобности перемѣнять знакъ въ выраженіи (1), если подъ угломъ $(aa')$ будемъ подразумѣвать тупой уголъ $EAD''$; потому что тогда $\cos(aa')$ опредѣлитъ знакъ проекціи. Итакъ, чтобы выраженіе

$$a' = a \cos(aa')$$

принадлежало положительной и отрицательной проекціи, согласимся брать всегда для $(aa')$ острый или тупой уголъ, составленный направленіемъ проектируемой длины съ прямою, проведенною чрезъ ея начало параллельно оси проекцій и направленною въ одну сторону съ осью. Отъ перемѣны направленія оси, уголъ $(aa')$ перемѣнится на дополнительный до $180°$, а $\cos(aa')$ перемѣнитъ знакъ; слѣдовательно, и проекція также перемѣнитъ знакъ.

Въ частномъ случаѣ, когда проектируемая линія параллельна оси проекцій, будетъ или $(aa') = 0$, или $(aa') = 180°$, смотря по тому, имѣютъ ли эти линіи одинаковыя или противоположныя направленія; тогда $\cos(aa') = \pm 1$ и $a' = \pm a$.

Въ случаѣ перпендикулярности проектируемой линіи къ оси проекцій будетъ: $(aa') = 90°$, $\cos(aa') = 0$ и, слѣдовательно, $a' = 0$, т.-е. *проекція прямой на оси къ ней перпендикулярной равна нулю.*

**11.** *Сумма проекцій прямолинейныхъ частей ломаной линіи на данной оси равна проекціи на той же оси прямой, замыкающей ломаную линію, т.-е. прямой, проведенной отъ начала ломаной линіи до конца ея.*

Пусть дана ломаная линія $ABCDEF$ (фиг. 22) и ось проекцій $l$; тогда очевидно проекція $A'F'$ замыкающей прямой $AF$ будетъ равна $A'B' + B'C' - C'D' + D'E' + E'F'$, гдѣ

$$\begin{aligned}
A'B' &= \text{проекціи } AB = AB\cos(AB,\ l)\\
B'C' &= \quad\text{„}\quad BC = BC\cos(BC,\ l)\\
-C'D' &= \quad\text{„}\quad CD = CD\cos(CD,\ l)\\
D'E' &= \quad\text{„}\quad DE = DE\cos(DE,\ l)\\
E'F' &= \quad\text{„}\quad EF = EF\cos(EF,\ l)
\end{aligned}$$

Поэтому, означивъ длины и направленія сторонъ $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EF$ чрезъ $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, а длину и направленіе прямой $AF$ чрезъ $b$, имѣемъ

$$b\cos(bl) = a_1\cos(a_1l) + a_2\cos(a_2l) + a_3\cos(a_3l) +$$
$$+ a_4\cos(a_4l) + a_5\cos(a_5l).$$

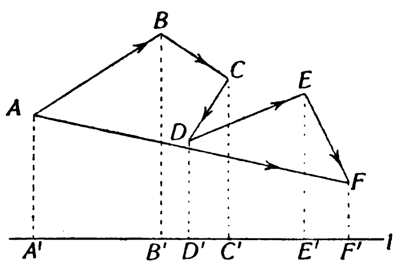
Перемѣнивъ направленіе $AF$ на противоположное $FA$, которое означимъ чрезъ $a_6$, и подразумѣвая подъ $a_6$ длину равную $b$, мы можемъ написать нашу формулу въ слѣдующемъ видѣ

$$a_1 \cos(a_1 l) + a_2 \cos(a_2 l) + a_3 \cos(a_3 l) + a_4 \cos(a_4 l) + \\ + a_5 \cos(a_5 l) = - a_6 \cos(a_6 l),$$

потому что $\cos(bx) = - \cos(a_6 x)$; а отсюда выводимъ

$$a_1 \cos(a_1 l) + a_2 \cos(a_2 l) + a_3 \cos(a_3 l) + a_4 \cos(a_4 l) + \\ + a_5 \cos(a_5 l) + a_6 \cos(a_6 l) = 0.$$

Это уравненіе показываетъ, что *алгебраическая сумма проекцій всѣхъ сторонъ многоугольника ABCDEF равна нулю.*



Фиг. 22

Очевидно, что эти предложенія остаются справедливыми для какой угодно ломаной линіи и для многоугольника съ какимъ угодно числомъ сторонъ.

Когда даны всѣ стороны многоугольника, исключая одной, и углы, между ними заключающіеся, то многоугольникъ можетъ быть построенъ, а слѣдовательно, по этимъ даннымъ можетъ быть опредѣлена остальная сторона и углы, къ ней прилежащіе. На основаніи доказаннаго нами свойства суммы проекцій сторонъ многоугольника не трудно вычислить эти неизвѣстныя.

Пусть: $a_2, a_3, \ldots, a_n$ будутъ данныя стороны, а $a_1$ неизвѣстная. Положивъ, что $a_2, a_3, \ldots, a_n$ направлены въ одну сторону, а $a_1$ противоположно, будемъ имѣть

$$a_1 \cos(a_1 l) = a_2 \cos(a_2 l) + a_3 \cos(a_3 l) + \ldots + a_n \cos(a_n l),$$

какое бы ни было направленіе оси $l$. Если возьмемъ для этой оси направленія самихъ сторонъ и замѣтимъ, что

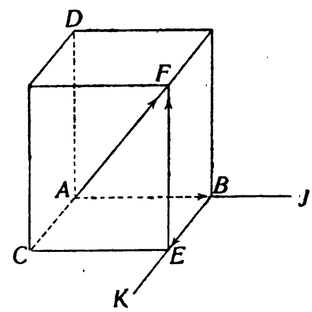
$$\angle(a_1 a_1) = 0, \quad \angle(a_2 a_2) = 0, \ldots, \angle(a_2 a_1) = \angle(a_1 a_2), \ldots$$

то получимъ

$$
\left.\begin{array}{l}
a_1 = a_2 \cos(a_2 a_1) + a_3 \cos(a_3 a_1) + \ldots + a_n \cos(a_n a_1) \\
a_1 \cos(a_1 a_2) = a_2 + a_3 \cos(a_3 a_2) + \ldots + a_n \cos(a_n a_2) \\
a_1 \cos(a_1 a_3) = a_2 \cos(a_2 a_3) + a_3 + \ldots + a_n \cos(a_n a_3) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_1 \cos(a_1 a_n) = a_2 \cos(a_2 a_n) + a_3 \cos(a_3 a_n) + \ldots + a_n
\end{array}\right\} . \qquad (1)
$$

Помноживъ эти уравненія соотвѣтственно на $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и взявъ сумму, найдемъ

$$
\begin{aligned}
a^2_1 = a^2_2 + a^2_3 + \ldots + a^2_n + \\
+ 2a_2a_3\cos(a_2a_3) + \ldots + 2a_2a_n\cos(a_2a_n) + \\
+ 2a_3a_4 \cos(a_3a_n) + \ldots, \qquad (2)
\end{aligned}
$$



Фиг. 23

т.-е. *квадратъ стороны всякаго сомкнутаго многоугольника равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ сторонъ, сложенной съ удвоенными произведеніями прочихъ сторонъ, перемноженныхъ между собою по двѣ и на косинусы угловъ, между ними заключающихся.*

Второе изъ уравненій (1) даетъ

$$
\cos(a_1a_2) = \frac{a_2 + a_3 \cos(a_3a_2) + \ldots + a_n \cos(a_na_2)}{a_1}.
$$

По этой формулѣ можно вычислить $\angle(a_1a_2)$, когда уже опредѣлена сторона $a_1$ по уравненію (2). Такимъ образомъ найдемъ углы, составленные стороною $a_1$ съ прочими сторонами.

По формулѣ (2) легко вычислить діагональ параллелепипеда, когда даны три смежныя его ребра и углы, между ними заключающіеся. Пусть будетъ въ параллелепипедѣ $DE$ (фиг. 23)

$$
AB = x, \quad AC = y, \quad AD = z \quad \text{и} \quad AF = \delta
$$

$$
\angle\, BAC = (xy), \quad \angle\, CAD = (yz), \quad \angle\, BAD = (xz).
$$

Такъ какъ въ параллелепипедѣ противоположныя ребра равны и параллельны, то $BE = y$, $FE = z$, $\angle\, JBE = (xy)$, $\angle\, FEK = (zy)$

и уголъ, составленный направленіемъ $EF$ съ направленіемъ $AB$, равенъ $(xz)$; слѣдовательно, по формулѣ (2) имѣемъ

$$\delta^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(xy) + 2yz\cos(yz) + 2zx\cos(zx), \quad (3)$$

т.-е. *квадратъ діагонали косоугольнаго параллелепипеда равенъ суммѣ квадратовъ трехъ смежныхъ реберъ, сложенной съ удвоенными произведеніями этихъ реберъ, перемноженныхъ по дв и на косинусы угловъ, между ними заключающихся.*

Въ частномъ случаѣ, когда параллелепипедъ прямоугольный, имѣемъ:

$$(xy) = 90^\circ, \quad (yz) = 90^\circ, \quad (zx) = 90^\circ,$$

$$\cos(xy) = 0, \quad \cos(yz) = 0, \quad \cos(zx) = 0,$$

и слѣдовательно,

$$\delta^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (4)$$

что впрочемъ легко вывести прямо, а именно: треугольникъ $AFE$ даетъ

$$\delta^2 = AE^2 + z^2,$$

а треугольникъ $ABE$

$$AE^2 = x^2 + y^2;$$

поэтому

$$\delta^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Проекціи длины прямой на трехъ взаимно-перпендикулярныхъ осяхъ имѣютъ свойство, *что сумма квадратовъ этихъ проекцій равна квадрату проектируемой линіи.*

Пусть будетъ $AF = \delta$ длина, проектируемая на три какія нибудь взаимно-перпендикулярныя оси. Гдѣ бы ни были помѣщены эти оси, можно замѣнить ихъ осями: $AB$, $AC$, $AD$, имъ параллельными, проведенными чрезъ начало длины $AF$. Проведя плоскости чрезъ эти оси и три другія имъ параллельныя чрезъ точку $F$, составимъ прямоугольный параллелепипедъ, въ которомъ діагональ будетъ проектируемая длина $AF$, а ребра $AB$, $AC$, $AD$ проекціи $AF$ на данныхъ осяхъ, взятые съ $+$ или $-$; поэтому, означивъ проекціи $AF$ на данныхъ осяхъ чрезъ $x$, $y$, $z$, будемъ имѣть

$$\delta^2 = (\pm x)^2 + (\pm y)^2 + (\pm z)^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

слѣдовательно, квадратъ проектируемой длины равенъ суммѣ квадратовъ ея проекцій. Такъ какъ здѣсь

$$x = \delta \cos(\delta x), \quad y = \delta \cos(\delta y), \quad z = \delta \cos(\delta z),$$

то

$$\cos(\delta x) = \frac{x}{\delta} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos(\delta y) = \frac{x}{\delta} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos(\delta z) = \frac{x}{\delta} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}:$$

слѣдовательно, *косинусы угловъ, составляемыхъ прямою съ тремя взаимно-перпендикулярными осями, равны соотвѣтственнымъ проекціямъ на этихъ осяхъ, раздѣленнымъ на квадратный корень изъ суммы квадратовъ проекцій.*

Взявъ сумму квадратовъ этихъ косинусовъ, найдемъ

$$\cos^2(\delta x) + \cos^2(\delta y) + \cos^2(\delta z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 1,$$

т.-е. *сумма квадратовъ косинусовъ угловъ, составляемыхъ прямою съ тремя взаимно-перпендикулярными осями, равна единицѣ.*

Введя синусы вмѣсто косинусовъ, получимъ

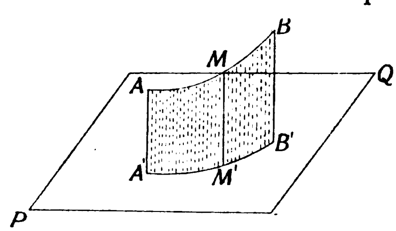
$$1 - \sin^2(\delta x) + 1 - \sin^2(\delta y) + 1 - \sin^2(\delta z) = 1$$

или по сокращеніи

$$\sin^2(\delta x) + \sin^2(\delta y) + \sin^2(\delta z) = 2,$$

т.-е. *сумма квадратовъ синусовъ угловъ, составленныхъ прямою съ тремя взаимно-перпендикулярными осями, равна двумъ.*

**12.** *Проекціею точки* на данной плоскости называется пересѣченіе этой плоскости съ перпендикуляромъ, на нее опущеннымъ изъ точки.

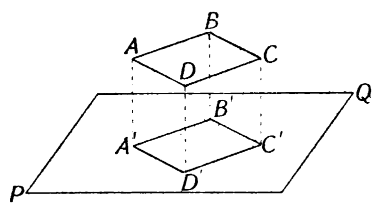


Фиг. 24

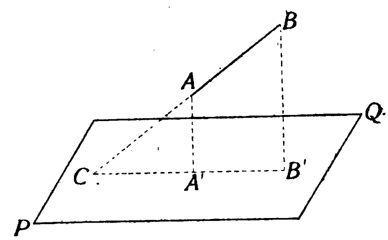
*Проекціею линіи AB на плоскости PQ называется линія A′B′*, на которой находятся проекціи всѣхъ точекъ линіи $AB$ такъ, что если на $AB$ возьмемъ произвольную точку $M$ и опустимъ изъ нея перпендикуляръ на плоскость $PQ$, то конецъ перпендикуляра $M'$ будетъ на линіи $A'B'$.

*Проекціею площади* $ABCD$ (фиг. 25) *на плоскости* $PQ$ *называется площадь* $A'B'C'D'$, *въ которой находятся проекціи всѣхъ точекъ площади* $ABCD$. Очевидно, что линіи, ограничивающія эту проекцію, суть проекціи линій, ограничивающихъ проектируемую площадь.

Перпендикуляры, проектирующіе линію $AB$ (фиг. 24), составляютъ цилиндрическую поверхность, которая со всякою плоскостью, параллельною $PQ$, пересѣкается по линіи совершенно равной $A'B'$;




Фиг. 25




Фиг. 26

поэтому проекція линіи не измѣнится, если перемѣнимъ плоскость проекцій на другую ей параллельную. То же справедливо и для проекціи площади.

*Проекція длины прямой линіи на плоскости равна проектируемой длинѣ, умноженной на косинусъ угла наклоненія прямой къ плоскости.* Въ самомъ дѣлѣ: если $A'B'$ (фиг. 26) есть проекція длины $AB$ на плоскости $PQ$, то она есть также проекція этой длины на прямой $CB'$, а потому

$$A'B' = AB \cos(BCB'),$$

гдѣ уголъ $BCB'$ измѣряетъ наклоненіе прямой $AB$ къ плоскости $PQ$.

**13.** *Проекція площади равна проектируемой площади, умноженной на косинусъ угла, заключающагося между плоскостью проекцій и плоскостью проектируемой фигуры.*

Докажемъ сперва это предложеніе для треугольника. Для удобства доказательства перенесемъ плоскость проекцій въ ближайшую къ ней вершину треугольника, которая пусть будетъ $A$; при этомъ могутъ быть два случая: 1) одна изъ оставшихся вершинъ, напр. $B$, лежитъ также въ плоскости проекціи, или 2) обѣ вершины $B$ и $C$ находятся внѣ этой плоскости. Допустивъ первый случай (фиг. 27), опредѣлимъ $C'$, проекцію точки $C$, и проведемъ прямыя $AC'$ и $BC'$; отъ этого получимъ треугольникъ $AC'B$, представляющій проекцію треугольника $ABC$. Проведемъ еще плоскость $CDC'$, перпендикулярную къ $AB$; въ пересѣченіи ея съ плоскостями двухъ треугольниковъ, мы получимъ двѣ прямыя $CD$ и $C'D$, которыя, очевидно, перпендикулярны къ $AB$ и, слѣдовательно, представляютъ высоты треугольниковъ, при общемъ основаніи $AB$; поэтому

$$\text{площ. } AC'B = \frac{1}{2} AB \,.\, C'D,$$

$$\text{площ. } ABC = \frac{1}{2} AB \,.\, CD,$$

а такъ какъ $C'D$ есть проекція длины $CD$, то

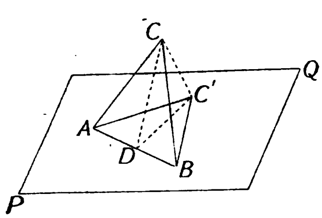
$$C'D = CD \,.\, \cos(CDC')$$

и слѣдовательно,

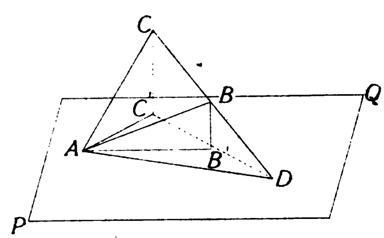
$$\text{площ. } ABC' = \frac{1}{2} AB \,.\, CD \,.\, \cos(CDC') = \text{площ. } ABC \,.\, \cos(CDC').$$

Здѣсь уголъ $CDC'$ измѣряетъ двугранный уголъ, заключающійся между плоскостями $ABC$ и $ABC'$.

Положимъ теперь, что вершины $B$ и $C$ не лежатъ въ плоскости проекцій (фиг. 28). Сверхъ того можно допустить, что прямая $BC$ не




Фиг. 27




Фиг. 28

параллельна этой плоскости; потому что въ противномъ случаѣ мы могли бы замѣнить плоскость проекцій другою, проведенною чрезъ $BC$, и такимъ образомъ возвратились бы къ первому случаю. Положимъ, что прямая $BC$ пересѣкаетъ $PQ$ въ $D$, и пусть $B'$ и $C'$ будутъ проекціи точекъ $B$ и $C$. Тогда

$ADC'$ будетъ проекціею $ADC$,

$ADB'$ „ „ $ADB$

и

$AB'C'$ „ „ $ABC$.

У двухъ первыхъ проектируемыхъ площадей вершины $A$ и $D$ лежатъ въ плоскости проекцій, а потому онѣ подходятъ подъ первый случай; слѣдовательно, означивъ чрезъ $\alpha$ уголъ наклоненія плоскости $ABC$ къ $AB'C'$, имѣемъ

$$ADC' = ADC \,.\, \cos\alpha,$$

$$ADB' = ADB \,.\, \cos\alpha;$$

отсюда выходитъ

$$ADC' - ADB' = (ADC - ADB)\cos\alpha$$

или

$$AB'C' = ABC \,.\, \cos\alpha.$$

Итакъ, во всякомъ случаѣ проекція площади треугольника равна проектируемой площади, умноженной на косинусъ двуграннаго угла, заключающагося между обѣими площадьми. Легко распространить это предложеніе на всякій многоугольникъ.

Пусть будетъ многоугольникъ $P$, а $P'$ его проекція. Разложивъ $P$ діагоналями на треугольники: $T$, $T'$, $T''$,... и опредѣливъ проекціи діагоналей, мы разложимъ также площадь $P'$ на треугольники: $t$, $t'$, $t''$,..., которые, очевидно, будутъ проекціи треугольниковъ: $T$, $T'$, $T''$,...; поэтому, если изобразимъ чрезъ $\alpha$ двугранный уголъ, заключающійся между плоскостями многоугольниковъ $P$ и $P'$, то получимъ

$$t = T\cos\alpha, \quad t' = T'\cos\alpha, \quad t'' = T''\cos\alpha, \ldots$$

Взявъ сумму этихъ величинъ, найдемъ

$$t + t' + t'' + \ldots = (T + T' + T'' + \ldots)\cos\alpha,$$

или

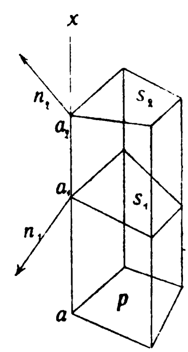
$$P' = P\cos\alpha,$$

что требовалось доказать.

Такъ какъ площадь, ограниченную кривыми линіями, можно принять за прямолинейный многоугольникъ съ безконечно-малыми сторонами, то доказанное предложеніе относится ко всякой криволинейной площади.

— * **14.** *Алгебраическая сумма проекцій на данной плоскости граней со всѣхъ сторонъ ограниченнаго многогранника равна нулю.*

Представимъ себѣ на данной плоскости проекціи всѣхъ реберъ многогранника; онѣ будутъ ограничивать площади, которыя составляютъ проекціи всѣхъ граней многогранника. Возьмемъ между этими площадьми одну $p$, такую, которая не заключала бы внутри себя проекціи какого-либо ребра и построимъ на ней неопредѣленную прямую призму. Эта призма, входя въ многогранникъ, образуетъ на его поверхности площадь $s_1$; потомъ, выходя изъ многогранника образуетъ площадь $s_2$; послѣ того она опять можетъ войти въ многогранникъ, и образовать на поверхности его площадь $s_3$, и выходя опять изъ многогранника, образовать площадь $s_4$ и т. д. Такъ какъ многогранникъ со всѣхъ сторонъ ограниченъ, то, сколько разъ призма войдетъ въ пространство, имъ занимаемое, столько же разъ она должна изъ него выйти; слѣдовательно, на поверхности многогранника образуется четное число площадей: $s_1$, $s_2$, $s_3$, $s_4, \ldots$, которымъ взятая за основаніе призмы площадь $p$ служитъ общею проекціею; слѣдовательно, $p$ равна каждой изъ площадей $s_1$, $s_2$, $s_3$, $s_4, \ldots$, умноженной на косинусъ остраго угла, ею составляемаго съ плоскостью проекцій. Чтобы выразить это условіе, возставимъ къ каждой изъ площадей $s_1$, $s_2, \ldots$ перпендикуляръ, направленный во внѣшнее пространство, и означимъ черезъ $n_1$, $n_2$, $n_3, \ldots$ эти направленія, а черезъ $x$ направленіе одной изъ производящихъ проектирующей призмы; если направленіе $x$ соотвѣтствуетъ порядку, въ которомъ расположены площади $s_1$, $s_2, \ldots$, то $\angle (n_1 x)$ будетъ тупой, $\angle (n_2 x)$ острый, $\angle (n_3 x)$ опять тупой и т. д.; вообще $\angle (n_m x)$ будетъ тупой, когда значекъ $m$ нечетный, и острый при $m$ четномъ, т.-е. тупой, когда $x$ входитъ въ многогранникъ и острый, когда $x$ выходитъ изъ многогранника; поэтому




Фиг. 29

$$p = -s_1 \cos(n_1 x) = +s_2 \cos(n_2 x) = -s_3 \cos(n_3 x) = \ldots;$$

отсюда выводимъ, что

$$s_1 \cos(n_1 x) + s_2 \cos(n_2 x) + s_3 \cos(n_3 x) + \ldots + s_m \cos(n_m x),$$

гдѣ $m$ означаетъ число всѣхъ площадей $s_1$, $s_2, \ldots$, приводится къ

$$-p + p - p + \ldots = 0.$$

**Если** это заключеніе распространить на всѣ площади $p$, составляющія проекціи всѣхъ граней многогранника, то найдемъ, что *алгебраическая сумма проекцій всѣхъ граней многогранника равна нулю.*

Пусть $a_1, a_2, \ldots$ будутъ всѣ грани многогранника, а $n_1, n_2, \ldots$ внѣшніе къ нимъ перпендикуляры, то

$$a_1 \cos(n_1 x) + a_2 \cos(n_2 x) + \ldots = 0.$$

Если для $n_1$ возьмемъ направленіе противоположное, то будемъ имѣть

$$a_1 \cos(n_1 x) = a_2 \cos(n_2 x) + \ldots$$

т.-е. *проекція одной грани ограниченнаго многогранника равна суммѣ проекцій остальныхъ граней.* Отсюда можно вывести тѣ же предложенія, которыя мы вывели въ **§ 11**-мъ для проекціи прямыхъ линій. Но для этой цѣли удобнѣе будетъ замѣнить проекціи площадей проекціями линій, имъ пропорціональныхъ. Представимъ себѣ на перпендикулярѣ $n_1$ длину, отложенную по направленію $n_1$ и заключающую столько линейныхъ единицъ, сколько содержитъ квадратныхъ единицъ площадь $a_1$, и означимъ эту длину также буквою $a_1$; потомъ чрезъ конецъ длины $a_1$ проведемъ прямую параллельную перпендикуляру $n_2$, въ одну сторону съ нимъ направленную, и отложимъ на ней $a_2$ линейныхъ единицъ отъ конца длины $a_1$, и т. д. Такимъ образомъ получимъ многоугольникъ, котораго стороны $a_1, a_2, \ldots$ пропорціональны гранямъ многогранника и къ нимъ перпендикулярны. Этотъ многоугольникъ необходимо замыкается, потому что алгебраическая сумма проекцій его сторонъ на всякой прямой $x$ равна нулю. * —

**15.** Проекціи площади на трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ имѣютъ такое же свойство, какъ проекціи длины на трехъ перпендикулярныхъ осяхъ, т.-е. *сумма квадратовъ проекцій равна квадрату проектируемой площади.* Пусть будутъ взаимно-перпендикулярныя площади: $zOy$, $zOx$, $xOy$ и четвертая плоскость, въ которой находится площадь $P$.

Означивъ

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | чрезъ $X$ | проекцію | $P$ | на плоскости | $zOy$, |
| и | „ $Y$ | „ | $P$ | „ | $zOx$, |
| | „ $Z$ | „ | $P$ | „ | $xOy$ |

и проведя прямую $Ol$, перпендикулярную къ плоскости, въ которой взята площадь $P$, мы найдемъ, что уголъ $(lx)$ измѣряетъ двугранный уголъ между плоскостями $P$ и $zOy$, къ которымъ прямыя $Ol$

и $Ox$ соотвѣтственно перпендикулярны; также $(ly)$ есть мѣра угла двухъ плоскостей $P$ и $zOx$, а $(lz)$ мѣра угла плоскостей $P$ и $zOy$; поэтому

$$X = \pm P \cos (lx), \quad Y = \pm P \cos (ly), \quad Z = \pm P \cos (lz),$$

гдѣ $+$ отвѣчаетъ острому углу, а $-$ тупому. Взявъ сумму квадратовъ этихъ величинъ и обративъ вниманіе на условіе

$$\cos^2 (lx) + \cos^2 (ly) + \cos^2 (lz) = 1,$$

(см. § 11), найдемъ

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = P^2 [\cos^2 (lx) + \cos^2 (ly) + \cos^2 (lz)] = P^2$$

отсюда

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

ОТДѢЛЪ II

## Приложеніе анализа къ изслѣдованію геометрическихъ мѣстъ на плоскости

### A. Общія понятія о геометрическихъ мѣстахъ вообще

**16.** Геометрія имѣетъ предметомъ не только измѣреніе или вычисленіе протяженій, но также опредѣленіе фигуръ протяженій и относительныхъ ихъ положеній въ пространствѣ. Способы для изслѣдованія фигуръ протяженій должны предшествовать способамъ для ихъ измѣренія, потому что послѣдніе зависятъ отъ фигуръ протяженій.

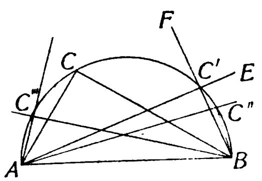
При изслѣдованіи фигуры протяженія, его разсматриваютъ какъ общее мѣсто точекъ, имѣющихъ одно свойство, по которому эти точки отличаются отъ точекъ, не принадлежащихъ протяженію. Напримѣръ, поверхность шара есть общее мѣсто точекъ, удаленныхъ отъ центра на одномъ разстояніи, равномъ радіусу. Разстояніе отъ центра всякой точки, взятой внутри шара, меньше радіуса, а для точки, взятой внѣ шара, это разстояніе больше радіуса. Прибавивъ къ этому условіе, что точки лежатъ въ одной плоскости, проведенной чрезъ центръ, получимъ свойства, принадлежащія: 1) точкамъ окружности круга, 2) точкамъ, находящимся внутри круга и 3) точкамъ, лежащимъ внѣ круга.

Поверхность прямого цилиндра, имѣющаго основаніемъ кругъ, есть общее мѣсто точекъ, равно-удаленныхъ отъ оси цилиндра. Поверхность прямого конуса есть общее мѣсто точекъ, имѣющихъ то свойство, что прямыя, соединяющія эти точки съ вершиною конуса, составляютъ равные острые или тупые углы съ осью конуса. Точки, принадлежащія одной плоскости, имѣютъ то свойство, что прямыя, соединяющія ихъ съ одною изъ точекъ плоскости, перпендикулярны къ одной прямой, проведенной чрезъ эту точку.

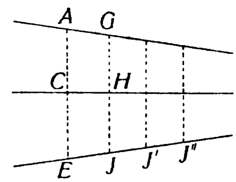
Поверхности можно разсматривать, какъ общія мѣста линій. Напримѣръ, поверхность шара есть общее мѣсто окружностей круговъ, имѣющихъ общій діаметръ. Поверхность прямого кругового цилиндра есть общее мѣсто прямыхъ, параллельныхъ съ осью и равно отъ нея удаленныхъ. Поверхность прямого конуса есть общее мѣсто прямыхъ, проходящихъ чрезъ вершину и составляющихъ равные углы, острые или тупые, съ осью. Плоскость есть общее мѣсто перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ одной точки къ одной прямой.

Когда извѣстно общее свойство точекъ или линій, принадлежащихъ протяженію, тогда мы въ состояніи начертить протяженіе въ самомъ дѣлѣ, или вообразить его начертаннымъ непрерывнымъ движеніемъ точки или линіи. Напримѣръ, мы чертимъ окружность круга, заставляя точку двигаться такъ, что она во время движенія не измѣняетъ своего разстоянія отъ центра. Поверхность шара мы производимъ обращеніемъ окружности круга около своего діаметра. Объемъ шара можно представить себѣ, какъ пространство, пройденное площадью круга, обращающагося около діаметра.

Если мы не въ состояніи въ самомъ дѣлѣ начертить протяженіе непрерывнымъ движеніемъ точки или линіи, то изображаемъ рядъ точекъ или линій, настолько между собою сближенныхъ, чтобы можно было составить себѣ ясное представленіе о фигурѣ и о положеніи протяженія. Для примѣра начертимъ дугу круга, основываясь на свойствѣ, что углы, вписанные въ одну дугу круга, между собою равны. Для этого нѣтъ надобности знать, гдѣ находится центръ дуги. Пусть будутъ $A$, $C$, $B$ три данныя точки, чрезъ которыя должно провести дугу круга. Чтобы получить новую точку этой дуги, проведемъ произвольную прямую $AE$ и начертимъ при точкѣ $B$ уголъ $CBF$ равный углу $CAE$; въ пересѣченіи прямыхъ $AE$ и $BF$ получимъ искомую точку $C'$, потому что точки $A$ и $B$, какъ вершины равныхъ угловъ $CAC'$ и $CBC'$, должны находиться на одной окружности круга съ точками $C$ и $C'$, чрезъ которыя проходятъ стороны этихъ угловъ. Также найдемъ другія точки разсматриваемой дуги: $C''$, $C'''$, ... Соединивъ всѣ эти точки непре-




Фиг. 30




Фиг. 31

рывною чертою, получимъ изображеніе дуги, которое тѣмъ ближе будетъ подходить къ истинному, чѣмъ больше точекъ: $A$, $C'''$, $C$, $C'$, $C''$, $B$.

Подобнымъ образомъ можно начертить прямую, основываясь на общемъ свойствѣ ея точекъ. Положимъ, напримѣръ, что даны двѣ пересѣкающіяся прямыя $AB$ и $CD$; но точка ихъ пересѣченія недоступна, или не помѣщается на чертежѣ, а между тѣмъ требуется провести чрезъ это пересѣченіе и данную точку $E$ третью прямую. Послѣднюю можно начертить по точкамъ, (напр., на землѣ провѣшить кольями или вѣхами), основываясь на свойствѣ, что двѣ параллельныя прямыя раздѣляются на пропорціональныя части тремя прямыми, пересѣкающимися въ одной точкѣ. Проведемъ $EA$ и параллельную ей $GH$; потомъ на продолженіи послѣдней отложимъ длину $HJ$, опредѣленную условіемъ

$$HJ : GH = CE : AC; \qquad (a)$$

отъ этого получимъ точку $J$, находящуюся на искомой прямой. Прямая, проведенная чрезъ $J$ и $E$ будетъ искомая. Можно назначить по изложенному способу еще другія точки этой прямой: $J'$, $J''$, ...; рядъ этихъ точекъ представитъ прямую.

**17.** Уравненіе, выражающее общее свойство точекъ линіи или поверхности, называется *уравненіемъ линіи* или *уравненіемъ поверхности*, а сама линія или поверхность — *геометрическимъ мѣстомъ* *ея точекъ.* Такъ, въ послѣднемъ примѣрѣ, пропорція ($a$) есть уравненіе прямой $EJ$. Положивъ $HJ = x$, $GH = y$, $CE = a$, $AC = b$, имѣемъ

$$x : y = a : b$$

или

$$bx = ay.$$

Здѣсь $a$ и $b$ постоянныя величины, а $x$ и $y$ перемѣнныя; онѣ измѣняются отъ перемѣны мѣста точки $J$, которую онѣ опредѣляютъ.

Величины, опредѣляющія положеніе точки геометрическаго мѣста, называются *координатами точекъ*; поэтому $x$ и $y$ суть координаты точки $J$. Въ первомъ примѣрѣ (фиг. 30) построенія дуги круга, за координаты точки $C$ можно взять разстоянія $AC$ и $BC$. Положивъ $AC = x$, $BC = y$, $AB = a$, и $\angle ACB = C$, въ треугольникѣ $ABC$ найдемъ уравненіе

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos C = a^2,$$

принадлежащее дугѣ круга $ACB$. Здѣсь $x$ и $y$ суть координаты.

Изъ приведенныхъ нами примѣровъ можемъ уже заключить, что уравненія линій и поверхностей должны служить основаніемъ въ приложеніи Анализа къ изслѣдованію этихъ протяженій.

Линіи могутъ быть раздѣлены на два разряда:

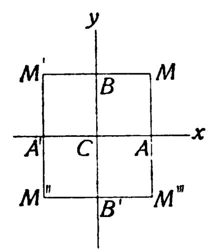
1) *Плоскія*, у которыхъ всѣ точки лежатъ въ одной плоскости, такъ что плоскость, проведенная чрезъ три произвольныя точки линіи, проходитъ чрезъ всѣ прочія;

2) *Неплоскія* или *косыя*, у которыхъ не всѣ точки лежатъ въ одной плоскости.

Опредѣленіе точекъ и линій въ пространствѣ можно, посредствомъ проекцій, привести къ опредѣленію точекъ и линій въ плоскостяхъ. Въ самомъ дѣлѣ: если намъ даны проекціи точки на двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ, то мы узнаемъ проектируемую точку, опредѣливъ пересѣченіе двухъ перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ данныхъ проекцій къ плоскостямъ проекцій. Поэтому можно опредѣлить линію въ пространствѣ, когда даны ея проекціи на двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ.

### В. **Опредѣленіе положенія точки на плоскости. Уравненіе прямой линіи. Задачи на прямую линію и точку.**

**18.** Мѣсто точки $M$ на плоскости обыкновенно опредѣляется разстояніями этой точки, $MA$ и $MB$, отъ двухъ данныхъ, взаимно-перпендикулярныхъ прямыхъ $Ox$ и $Oy$. Разстоянія $MA$ и $MB$, или равныя имъ $OB$ и $OA$, называются *прямоугольными координатами точки* $M$. Прямыя $Ox$ и $Oy$, неопредѣленно продолженныя въ обѣ стороны, называются *осями координатъ*, а пересѣченіе ихъ $O$ — *началомъ координатъ*.



Фиг. 32

Если вмѣсто прямого угла $yOx$ будетъ взятъ острый или тупой, а вмѣсто перпендикуляровъ $AM$ и $BM$ — двѣ прямыя, параллельныя сторонамъ этого угла, то $AM$ и $BM$, или равныя имъ $BO$ и $OA$, называются *косоугольными координатами* $M$. Для опредѣленія помощью координатъ мѣста точки $M$, должно отложить по осямъ $Ox$ и $Oy$ длины $OA$ и $OB$ и провести чрезъ точки $A$ и $B$ параллельно осямъ двѣ прямыя, которыя пересѣкутся въ точкѣ $M$. Можно опредѣлить точку $M$ еще слѣдующимъ способомъ: отложить на оси $Ox$ длину $OA$, провести потомъ чрезъ $A$ прямую, параллельную другой оси $Oy$ и отложить длину $AM$, равную $OB$; конецъ $AM$ опредѣлитъ мѣсто точки $M$; или, отложивъ $OB$, провести чрезъ $B'$ прямую, параллельную оси $Ox$ и взять $BM$, равную $OA$. Одна изъ координатъ, преимущественно та, которая прежде откладывается на соотвѣтственной оси, называется *абсциссою*, а другая — *ординатою*. Соотвѣтственныя имъ оси называются: *осью абсциссъ* и *осью ординатъ*.

Положимъ, что $Ox$ есть ось абсциссъ и означимъ вообще буквою $x$ абсциссу какой-нибудь точки, а буквою $y$ — соотвѣтственную ординату. Условіе, что точка $M$ опредѣлена координатами $OA$ и $OB$, можно выразить двумя равенствами:

$$x = OA, \quad y = OB, \quad \text{или} \quad x = a, \quad y = b,$$

гдѣ подъ $a$ и $b$ подразумѣваются числа, выражающія длины $OA$ и $OB$.

Кромѣ величинъ координатъ $a$ и $b$, надо знать еще сторону, въ которую онѣ отложены отъ начала координатъ по осямъ, потому что по даннымъ величинамъ $a$ и $b$ можно, кромѣ точки $M$, найти еще три точки. Въ самомъ дѣлѣ, отложивъ $OA' = OA$, $OB' = OB$, проведя чрезъ точки $A'$ и $B'$ параллельныя осямъ, найдемъ въ пересѣченіи этихъ прямыхъ между собою и съ продолженіями $MB$ и $MA$ три точки: $M'$, $M''$, $M'''$, у которыхъ координаты будутъ равны соотвѣтственно координатамъ точки $M$. Въ вычисленіяхъ координаты четырехъ точекъ $M$, $M'$, $M''$, $M'''$ различаются знаками $+$ и $-$. Если въ формулу входятъ $x$ и $y$ такъ, что для точки $M$ должно положить

$$x = OA = a, \quad y = OB = b,$$

то, для приложенія той же формулы къ координатамъ точки $M'$ должно, по правилу знаковъ **§ 2**, положить

$$x = -a = -OA', \quad y = b.$$

Здѣсь $x$ будетъ величина отрицательная, потому что $OA'$ имѣетъ направленіе обратное относительно $OA$.

Для точки $M''$, подобнымъ образомъ будетъ

$$x = -a, \quad y = -b;$$

а для точки $M'''$

$$x = a, \quad y = -b.$$

Итакъ, равенства:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x = a$, | $y = b$ | опредѣляютъ | точку | $M$, |
| $x = -a$, | $y = b$ | „ | „ | $M'$, |
| $x = -a$, | $y = -b$ | „ | „ | $M''$, |
| $x = +a$, | $y = -b$ | „ | „ | $M'''$. |

Знаки координатъ всегда покажутъ сторону, въ которую должно отложить по осямъ длины координатъ.

Для точки, находящейся на одной изъ координатныхъ осей, координата, означающая разстояніе точки отъ этой оси, равна нулю; такимъ образомъ

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| для | точки | $A$ | $\ldots x = a$, | $y = 0$ |
| „ | „ | $A'$ | $\ldots x = -a$, | $y = 0$ |
| „ | „ | $B$ | $\ldots x = 0$, | $y = b$ |
| „ | „ | $B'$ | $\ldots x = 0$, | $y = -b$, |

а для начала координатъ, т.-е. для точки $O$

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Впослѣдствіи мы будемъ для сокращенія означать точку $M$, опредѣленную координатами $x$ и $y$, знакоположеніемъ $(x,y)$.

Координаты разныхъ точекъ какой-либо линіи должны удовлетворять одному уравненію, которое и будетъ *уравненіе линіи*. Оно выражаетъ общее свойство точекъ, находящихся на линіи.

Ординаты всѣхъ точекъ, находящихся на оси абсциссъ $Ox$ равны нулю; поэтому $y = 0$ есть *уравненіе оси абсциссъ*. Точно также уравненіе $x = 0$ принадлежитъ *оси ординатъ*.

У всѣхъ точекъ прямой $MM'''$, параллельной оси $Oy$ и продолженной неопредѣленно, абсцисса $OA = a$ есть общая; поэтому $x = a$ есть уравненіе прямой линіи $MM'''$, параллельной оси ординатъ. У всѣхъ точекъ прямой $MM'$, параллельной $Ox$ и неопредѣленно-продолженной, ордината $OB = b$ есть общая; слѣдовательно, уравненіе $y = b$ принадлежитъ прямой $MM'$, параллельной оси абсциссъ. Уравненіе $x = -1$ принадлежитъ прямой $M'M''$, которую найдемъ, отложивъ въ сторону отрицательныхъ абсциссъ длину $OA'$, равную линейной единицѣ, напримѣръ, одному дюйму, и проведя чрезъ точку $A'$ линію, параллельную оси ординатъ. Уравненіе $y = -2$ принадлежитъ прямой $M''M'''$, которую найдемъ, отложивъ въ сторону отрицательныхъ ординатъ длину $OB'$, равную двумъ линейнымъ единицамъ, и проведя чрезъ точку $B'$ параллельную оси абсциссъ.

**19.** При осяхъ прямоугольныхъ, для всякаго положенія точки $M$ координаты ея $x$ и $y$ суть проекціи на осяхъ прямой, проведенной изъ начала координатъ въ точку $M$, т.-е., если означимъ эту проектируемую линію чрезъ $r$, то

$$x = r\cos(rx), \quad y = r\cos(ry),$$

гдѣ направленія $x$ и $y$ взяты въ ту сторону, куда условились отсчитывать положительныя координаты. Здѣсь знаки координатъ опредѣляются знаками $\cos(rx)$ и $\cos(ry)$ и согласуются съ предыдущимъ правиломъ.

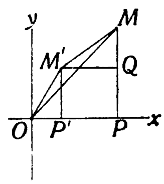
Пусть будутъ двѣ точки $M(x, y)$ и $M'(x', y')$. Соединивъ ихъ между собою и съ началомъ координатъ, получимъ

$$\text{проекція } OM = \text{пр. } OM' + \text{пр. } M'M$$

или

$$\text{проекція } M'M = \text{пр. } OM - \text{пр. } OM';$$

слѣдовательно, положивъ $M'M = r$ и взявъ направленіе этой прямой отъ $M'$ къ $M$, будемъ имѣть




Фиг. 33

$$r\cos(rx) = x - x'; \quad r\cos(ry) = y - y',$$

т.-е. *проекціи какого-нибудь отрѣзка $r$ на осяхъ координатъ суть разности между координатами конца этого отрѣзка и соотвѣтственными координатами начала.*

Это заключеніе можно отнести и къ осямъ косоугольнымъ, если условиться называть косоугольною проекціею точки на одной изъ осей пересѣченіе этой оси съ прямою, проведенною черезъ точку параллельно другой оси, а косоугольною проекціею прямой $M'M$ разстояніе проекціи точки $M$ отъ проекціи точки $M'$.

Въ случаѣ осей прямоугольныхъ $\angle(ry) = 90° - \angle(rx)$, или $\angle(ry) = \angle(rx) - 90°$, поэтому $\cos(ry) = \sin(rx)$ и, слѣдовательно,

$$x - x' = r\cos(rx), \quad y - y' = r\sin(rx).$$

**20.** Если чрезъ точки $M(x, y)$ и $M'(x', y')$ проведемъ прямыя, параллельныя осямъ координатъ, то составимъ треугольникъ $M'QM$, котораго стороны суть: длина $M'M$ и длины проекцій ея на осяхъ, т.-е. разности координатъ: $x - x'$ и $y - y'$. Поэтому при осяхъ прямоугольныхъ будемъ имѣть

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2, \tag{1}$$

т.-е. *квадратъ разстоянія между двумя точками равенъ суммѣ квадратовъ изъ алгебраическихъ разностей между соотвѣтственными координатами концовъ прямой.*

Положивъ $x' = 0$ и $y' = 0$, получимъ

$$r = OM, \quad r^2 = x^2 + y^2. \tag{2}$$

Если оси координатъ косоугольныя и $\theta$ означаетъ уголъ между направленіями положительныхъ координатъ, то уголъ $MQM'$ будетъ $180° - \theta$, когда разности $x - x'$ и $y - y'$ положительныя; тогда

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + 2(x - x')(y - y')\cos\theta. \tag{3}$$

Но легко удостовѣриться, что эта формула справедлива и для всякаго положенія точекъ $M$ и $M'$, если для координатъ этихъ точекъ мы будемъ соблюдать правило знаковъ.

Для разстоянія $M$ отъ начала координатъ надобно положить $x'=0$ и $y'=0$; тогда $r=OM$ и

$$r^2=x^2+y^2+2xy\cos\theta. \tag{4}$$

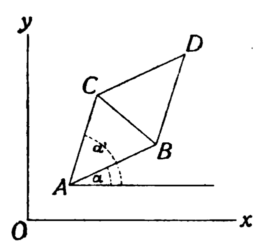
Если въ уравненіи (3) будемъ разсматривать $r$, $x'$, $y'$, $\cos\theta$ какъ постоянныя, а $x$ и $y$ какъ перемѣнныя, то всѣ точки, которыхъ координаты $x$ и $y$ удовлетворяютъ этому уравненію, принадлежатъ окружности круга, имѣющаго центръ въ $M'(x', y')$, а радіусъ $r$; слѣдовательно, уравненіе (3) есть уравненіе этой окружности.

Уравненіе (1) принадлежитъ окружности круга, отнесеннаго къ прямоугольнымъ координатамъ; уравненія (2) и (4) принадлежатъ окружности круга, имѣющаго центръ въ началѣ координатъ.

**21.** Зная координаты вершинъ даннаго многоугольника, легко вычислить его площадь.

Сперва найдемъ выраженіе площади параллелограмма $ABCD$ по даннымъ координатамъ трехъ вершинъ:

$$A(x,y),\quad B(x',y'),\quad C(x'',y'').$$



Фиг. 34

Положимъ $AB=r$, $AC=r'$ и означимъ чрезъ $\alpha$ и $\alpha'$ углы, составляемые этими прямыми съ прямою, проведенною чрезъ точку $A$ параллельно оси $Ox$. По извѣстной формулѣ имѣемъ

$$\text{площ. } ABCD = rr'\sin(\alpha'-\alpha) = rr'\sin\alpha'\cos\alpha - rr'\cos\alpha'\sin\alpha;$$

но по доказанному выше,

$$r\cos\alpha = x'-x,\quad r\sin\alpha = y'-y,\quad r'\cos\alpha' = x''-x,$$
$$r'\sin\alpha' = y''-y;$$

слѣдовательно,

$$\text{площ. } ABCD = (x'-x)\,(y''-y) - (y'-y)\,(x''-x)\,^{*}). \tag{1}$$

*) Это выраженіе есть опредѣлитель второго порядка $\begin{vmatrix} x'-x, & y'-y \\ x''-x, & y''-y \end{vmatrix}$ (см. прибавленіе I).

Если точка $A$ въ началѣ координатъ 0, то $x = 0$, $y = 0$ и найденное выраженіе приводится къ слѣдующему

$$x'y'' - y'x''.$$

Площадь треугольника $ABC$ есть половина площади параллелограмма $ABCD$; слѣдовательно,

$$\text{площ. } ABC = \frac{1}{2}\,[(x'-x)(y''-y) - (y'-y)(x''-x)]. \qquad (2)$$

Помощью этой формулы можно вычислить площадь какого ни есть многоугольника, разложивъ его діагоналями на треугольники.

Пусть будутъ даны координаты вершинъ какого-либо многоугольника. Разобьемъ его на треугольники діагоналями, проведенными изъ одной вершины. Вычтя координаты этой вершины изъ соотвѣтственныхъ координатъ прочихъ вершинъ, получимъ разности, которыя означимъ чрезъ

$$x_1, y_1;\; x_2, y_2;\; \ldots,\; x_n, y_n.$$

Помощью этихъ разностей мы можемъ вычислить по формулѣ (2) площади треугольниковъ; въ суммѣ ихъ получимъ площадь даннаго многоугольника, а именно:

$$\frac{1}{2}\,[x_1y_2 - y_1x_2 + x_2y_3 - y_2x_3 + \ldots x_{n-1}y_n - y_{n-1}x_n]$$

Для примѣра вычислимъ площадь четыреугольника, котораго вершины суть: $(1, 0)$, $(1\frac{1}{2}, 1)$, $(2\frac{1}{4}, 3)$, $(-1, 3\frac{1}{2})$.

Вычтя координаты первой точки изъ соотвѣтственныхъ координатъ прочихъ точекъ, получимъ разности:

$$(\tfrac{1}{2}, 1),\quad (1\tfrac{1}{4}, 3),\quad (-2, 3\tfrac{1}{2});$$

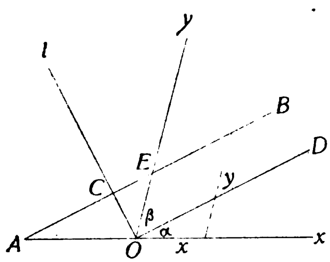
поэтому искомая площадь равна

$$\frac{1}{2}\,[\tfrac{1}{2}\,.\,3 - 1\,.\,1\tfrac{1}{4} + 1\tfrac{1}{4}\,.\,3\tfrac{1}{2} + 3\,.\,2] = 5\tfrac{5}{16}.$$

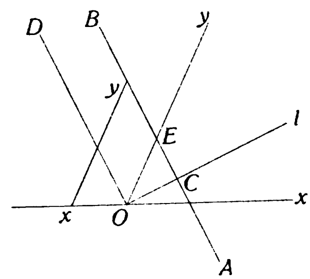
**22.** Выведемъ уравненіе какой ни есть прямой линіи $AB$, точки которой отнесены къ осямъ $Ox$ и $Oy$. Проведемъ чрезъ начало координатъ $O$ перпендикуляръ на данную прямую, въ ту сторону, куда отсчитываются положительныя ординаты, и означимъ чрезъ $l$ его направленіе. Пусть $x$ и $y$ будутъ координаты какой нибудь точки, взятой на данной прямой. Гдѣ бы ни была эта точка на прямой $AB$, сумма проекцій ея координатъ на $l$ будетъ одна и та же и равна разстоянію $OC$ начала координатъ отъ прямой $AB$, взятому съ $+$, когда $OC$ имѣетъ направленіе $l$ (фиг. 35, 36), и съ $-$, когда $OC$ противоположно $l$ (фиг. 37, 38); поэтому, положивъ $\mp OC = p$, имѣемъ

$$x \cos(lx) + y \cos(ly) = p. \tag{1}$$

Это есть уравненіе данной прямой. Здѣсь $p$, $\cos(lx)$, $\cos(ly)$ суть постоянныя количества, а $x$ и $y$ — перемѣнныя. Вмѣсто угловъ $(lx)$




Фиг. 35




Фиг. 36

и $(ly)$ обыкновенно вводятъ въ уравненіе углы, составляемые прямою $OD$, параллельною данной прямой $AB$, съ осями координатъ; причемъ для $OD$ берутъ направленіе въ сторону положительныхъ ординатъ $y$. Положивъ $\angle DOx = \alpha$, $\angle DOy = \beta$, мы будемъ имѣть:

$$\angle lx = 90^\circ + \alpha, \qquad \angle ly = 90^\circ - \beta \quad \text{(фиг. 35, 37)}$$

$$\angle lx = \alpha - 90^\circ, \qquad \angle ly = 90^\circ - \beta \quad \text{(фиг. 36, 38);}$$

поэтому $\cos(lx) = \mp \sin\alpha$, $\cos(ly) = \sin\beta$ и уравненіе (1) можетъ быть замѣнено слѣдующимъ

$$\mp x \sin\alpha + y \sin\beta = p.$$

Когда прямая проходитъ чрезъ начало координатъ, тогда $p = O$ и уравненія (1) и (2) приводятся къ слѣдующимъ:

$$x \cos(lx) + y \cos(ly) = 0,$$

$$\mp x \sin\alpha + y \sin\beta = 0.$$

Если прямая $AB$ пересѣкаетъ ось $Oy$ въ точкѣ $E$, ордината которой есть $b$, то уравненіе (2) удовлетворится при $x=0$, $y=b$; слѣдовательно,

$$b \sin\beta = p.$$

Подставивъ эту величину $p$ въ уравненіе (2), получимъ

$$\mp x \sin\alpha + y \sin\beta = b \sin\beta; \tag{3}$$

откуда выводится

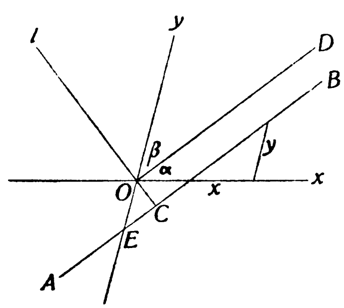
$$y = \pm \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} x + b$$

или

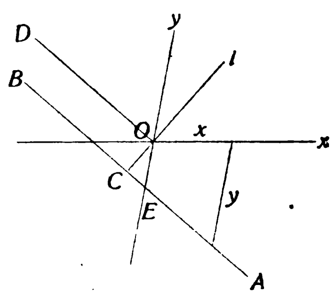
$$y = ax + b, \tag{4}$$

гдѣ для сокращенія положено $\pm \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = a$.

Такимъ образомъ ордината какой нибудь точки данной прямой выражается функціею абсциссы. *Эта функція первой степени и*




Фиг. 37




Фиг. 38

*содержитъ два постоянныхъ количества: одно изъ нихъ, $a$, коэффиціентъ при абсциссѣ, есть отношеніе между синусами угловъ, составляемыхъ прямою съ осями координатъ, взятое съ $+$, или съ $-$, а другое есть ордината точки пересѣченія прямой съ осью ординатъ.* Величина $a$ будетъ положительная, когда $\alpha$ меньше угла $xOy$, составляемаго осями координатъ (фиг. 35 и 37), и отрицательная, когда $\alpha$ больше $xOy$ (фиг. 36 и 38). Положивъ $xOy = \theta$, будемъ имѣть въ первомъ случаѣ:

$$\beta = \theta - \alpha, \quad a = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)};$$

во второмъ:

$$\beta = \alpha - \theta, \quad a = -\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = -\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \theta)},$$

такъ какъ $-\sin(\alpha - \theta) = \sin(\theta - \alpha)$, то въ обоихъ случаяхъ имѣемъ

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

При осяхъ прямоугольныхъ должно положить $\theta = 90^\circ$; тогда

$$a = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha,$$

т.-е. *при осяхъ прямоугольныхъ коэффиціентъ при абсциссѣ въ уравненіи прямой* (4) *есть тангенсъ угла, составляемаго прямою съ осью абсциссъ.* Для прямой, параллельной оси $Ox$, должно положить $\alpha = 0$ и $\beta = \theta$, тогда уравненіе (3) даетъ

$$y = \frac{p}{\sin\theta} = b.$$

Для прямой, параллельной оси $Oy$, должно положить $\beta = 0$ и $\alpha = \theta$; тогда по уравненію (2) имѣемъ:

$$x = \mp \frac{p}{\sin\theta}.$$

Эта величина $x$, будучи одна и та же для всѣхъ точекъ прямой должна быть равна абсциссѣ пересѣченія прямой съ осью $Ox$.

**23.** Изъ выведеннаго уравненія прямой линіи видно, что оно всегда первой степени относительно координатъ точки прямой. Легко доказать, что всякое уравненіе первой степени относительно двухъ перемѣнныхъ величинъ $x$ и $y$, означающихъ прямолинейныя координаты, есть уравненіе нѣкоторой прямой.

Мы уже разсмотрѣли случай, когда уравненіе содержитъ одну *только* координату и видѣли, что оно тогда принадлежитъ или прямой, параллельной одной изъ осей координатъ, или самой оси. Поэтому остается доказать предложеніе для уравненія, содержащаго обѣ координаты и которое имѣетъ общій видъ

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

гдѣ $A$ и $B$ не равны нулю и могутъ означать какія нибудь положительныя или отрицательныя количества, а $C$ — какое нибудь количество или нуль. Разрѣшивъ это уравненіе относительно $y$, получимъ:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad \text{или} \quad y = ax + b,$$

гдѣ

$$a = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Каковы бы ни были величины $a$ и $b$, можно найти прямую, у которой для каждой точки ордината выражается функціею $y = ax + b$. Для этого по ординатѣ $b$ опредѣлимъ на оси $Oy$ точку $C$, чрезъ которую проведемъ прямую, составляющую съ осью $Ox$ уголъ $\alpha$, выведенный изъ уравненія

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)} = a.$$

Это уравненіе даетъ вообще

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\theta}{1 + a\cos\theta},$$

а въ случаѣ прямоугольныхъ осей просто $\operatorname{tg}\alpha = a$. Такъ какъ тангенсъ способенъ имѣть всякую величину отъ $-\infty$ до $+\infty$, то при всякой величинѣ $a$ опредѣленіе угла $\alpha$ возможно, и, слѣдовательно, указанное построеніе прямой всегда возможно. А потому всегда уравненіе (1) принадлежитъ нѣкоторой прямой.

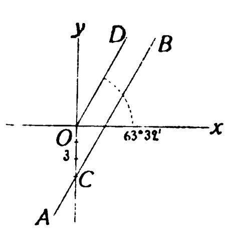
Для примѣра построимъ прямую по уравненію

$$y = 2x - 3;$$

здѣсь

$$b = -3, \quad \operatorname{tg}\alpha = 2 \quad \text{и} \quad \alpha = 63^\circ\, 32'.$$

Проведя прямоугольныя оси $Ox$ и $Oy$, отложимъ въ сторону отрицательныхъ ординатъ длину $OC$ равную 3 даннымъ линейнымъ единицамъ; отъ этого получимъ точку $C$, въ которой данная прямая пересѣкаетъ ось ординатъ. Послѣ того начертимъ уголъ $DOx = \alpha = 63^\circ\, 32'$ и чрезъ $C$ проведемъ параллельно $OD$ прямую $AB$. Эта прямая будетъ искомая.



Фиг. 39

— * Можно всегда уравненіе (1) сдѣлать тождественнымъ съ общимъ уравненіемъ

$$x\cos(lx) + y\cos(ly) = p,$$

выведеннымъ для какой ни есть прямой, а это можетъ также служить доказательствомъ того, что уравненіе (1) принадлежитъ нѣкоторой прямой. Чтобы эти два уравненія были тожественны, надобно, чтобы второе уравненіе могло произойти отъ умноженія перваго на нѣкоторый постоянный множитель $\lambda$, т.-е.

$$\cos(lx) = A\lambda, \quad \cos(ly) = B\lambda, \quad p = -C\lambda. \tag{1}$$

Такъ какъ уголъ $lx$ равенъ $\theta \pm ly$, то

$$\cos(lx) = \cos(\theta \pm ly) = \cos\theta \,.\, \cos(ly) \mp \sin\theta \,.\, \sin(ly);$$

откуда легко выводится уравненіе

$$\cos^2(lx) + \cos^2(ly) - 2\cos\theta \,.\, \cos(lx)\cos(ly) = \sin^2\theta.$$

Подставивъ сюда $A\lambda$ и $B\lambda$ вмѣсто $\cos(lx)$ и $\cos(ly)$, получимъ

$$\lambda^2(A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta) = \sin^2\theta,$$

а отсюда

$$\lambda = \frac{\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}},$$

и по уравненію (2) найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos(lx) &= \frac{A\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}} \\ \cos(ly) &= \frac{B\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}} \\ p &= \frac{-C\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

При выводѣ уравненія прямой мы предположили, что прямая $l$ направлена въ сторону положительныхъ ординатъ, а потому уголъ $ly$ не можетъ быть тупой; слѣдовательно, если $\cos(ly)$ не равенъ нулю, то онъ долженъ имѣть знакъ $+$; для чего надобно взять при $\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$ тотъ знакъ, какой имѣетъ $B\sin\theta$ или $B$, такъ какъ $\sin\theta$ всегда положительный.

Означая, какъ прежде, чрезъ $\alpha$ и $\beta$ углы между прямою и осями координатъ, имѣемъ $\cos(lx) = \mp\sin\alpha$, $\cos(ly) = \sin\beta$ (см. § 22); слѣдовательно,

$$\sin\alpha = \frac{\mp A\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}, \quad \sin\beta = \frac{B\sin\theta}{\mp\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}.$$

По этимъ формуламъ найдемъ углы, составляемые прямою съ осями координатъ. * —

**24.** Можно начертить прямую по данному ея уравненію помощью двухъ точекъ, опредѣленныхъ координатами, выведенными изъ уравненія прямой. Прямая, не проходящая чрезъ начало координатъ, можетъ быть удобно начерчена по двумъ точкамъ, въ которыхъ она пересѣкаетъ координатныя оси. Общій видъ уравненія такой прямой есть

$$Ax + By + C = 0,$$

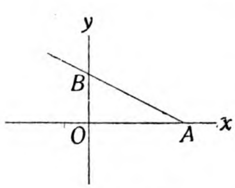
гдѣ $C$ не равно нулю. Ордината точки пересѣченія прямой съ осью $Ox$ равна нулю, а абсцисса должна удовлетворять уравненію; слѣдовательно, мы найдемъ эту абсциссу, положивъ въ уравненіи $y = 0$ и выведя величину $x$, а именно:

$$x = -\frac{C}{A}.$$

Пусть будетъ $A$ точка, имѣющая эту абсциссу. Положивъ $x = 0$, найдемъ

$$y = -\frac{C}{B}$$

для ординаты пересѣченія прямой съ осью $Oy$. Пусть будетъ $B$ эта точка. Слѣдовательно, прямая $AB$ есть искомая.



Фиг. 40

Когда въ данномъ уравненіи будетъ $C = 0$, т.-е.

$$Ax + By = 0,$$

тогда прямая проходитъ чрезъ начало координатъ; потому что при $x = 0$ будетъ $y = 0$, а эти координаты принадлежатъ началу. Чтобы въ этомъ случаѣ начертить прямую, надобно узнать еще одну ея точку. Для этого возьмемъ произвольную абсциссу, выведемъ изъ уравненія соотвѣтственную ординату и опредѣлимъ точку по этимъ координатамъ; прямая, соединяющая эту точку съ началомъ координатъ, будетъ требуемая. Для примѣра построимъ прямую по уравненію

$$y - x = 0.$$

Положивъ $x = OA$, найдемъ $y = x = AO$; поэтому, отложивъ ординату $AB = AO$ (фиг. 41), получимъ точку $B$, принадлежащую искомой прямой, которая будетъ $OB$.

Легко найти уравненіе прямой, не проходящей чрезъ начало координатъ, по даннымъ координатамъ точекъ, въ которыхъ она пересѣкаетъ оси. Пусть будетъ $p$ абсцисса пересѣченія съ осью $Ox$, $q$ ордината пересѣченія съ осью $Oy$ и $Ax + By + C = 0$ уравненіе прямой. Такъ какъ этому уравненію должны удовлетворять координаты:

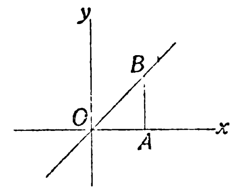
$$x = p, y = 0 \quad \text{и} \quad x = 0, y = q;$$

то

$$Ap + C = 0, \quad Bq + C = 0;$$

отсюда выходитъ:

$$A = -\frac{C}{p}, \quad B = -\frac{C}{p}.$$



Фиг. 41

Подставивъ эти выраженія $A$ и $B$ въ уравненіе $Ax + By + C = 0$, получимъ

$$-\frac{Cx}{p} - \frac{Cy}{q} + C = 0$$

или

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

т.-е. *сумма перемѣнныхъ координатъ, раздѣленныхъ на соотвѣтственныя координаты пересѣченій прямой съ осями, равна единицѣ.*

**25.** Задачи, относящіяся къ прямой линіи:

I. *Найти пересѣченіе двухъ прямыхъ.*

Пусть будутъ:

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0 \tag{1}$$

уравненія данныхъ прямыхъ. Величины $x$ и $y$ въ первомъ уравненіи суть координаты произвольной точки одной прямой и могутъ быть не равны величинамъ $x$ и $y$, находящимся во второмъ уравненіи, означающемъ координаты произвольной точки другой прямой; но для общей точки онѣ должны быть тѣ же въ обоихъ уравненіяхъ. Допустивъ это, надобно рѣшить данныя уравненія для опредѣленія координатъ искомой точки пересѣченія. По общимъ формуламъ для рѣшенія двухъ линейныхъ уравненій съ двумя неизвѣстными, мы найдемъ:

$$x = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'}, \quad y = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'}. \tag{2}$$

Въ случаѣ параллельности данныхъ прямыхъ точка пересѣченія безконечно удалена отъ начала координатъ; тогда одна изъ величинъ (2) или обѣ будутъ безконечны, для чего необходимо, чтобы общій знаменатель былъ равенъ нулю, т.-е.

$$AB' - BA' = 0, \tag{3}$$

и по крайней мѣрѣ одинъ изъ числителей не равенъ нулю. При этомъ могутъ представиться слѣдующіе случаи: 1) ни $A$, ни $B$ не равно нулю; тогда $A'$ и $B'$ также не могутъ быть равны нулю; потому что, если бы $A' = 0$, то по условію (3) было бы $B' = 0$, а въ такомъ случаѣ второе изъ данныхъ уравненій (1) не представляло бы никакой прямой. 2) $A = 0$; тогда $B$ не можетъ быть равно нулю и, чтобы удовлетворить условію (3), необходимо положить $A' = 0$; въ этомъ случаѣ прямыя (1) параллельны оси $x$-въ. 3) $B = 0$; тогда $A$ не можетъ быть равно нулю и, по условію (3), необходимо $B' = 0$. Въ этомъ случаѣ данныя прямыя (1) параллельны оси $y$-овъ. Въ первомъ изъ разсмотрѣнныхъ случаевъ условіе параллельности (3) можно написать подъ видомъ

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}, \tag{4}$$

который показываетъ, что *въ случаѣ параллельности прямыхъ* (1) *коэффиціенты при соотвѣтственныхъ перемѣнныхъ $x$ и $y$ пропорціональны.* Напримѣръ, уравненія

$$2x - 3y + 1 = 0 \text{ и } 4x - 6y - 5 = 0$$

принадлежатъ двумъ параллельнымъ прямымъ, потому что $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6}$.

Если уравненія прямыхъ имѣютъ видъ

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b',$$

то условіе параллельности беретъ видъ

$$\frac{a}{a'} = 1, \text{ или } a = a'.$$

Уравненіе $Ax + By = 0$ принадлежитъ прямой, проходящей чрезъ начало координатъ и параллельной прямой $Ax + By + C = 0$.

Если при условіи (3) будемъ имѣть

$$BC' - CB' = 0 \quad \text{и} \quad CA' - AC' = 0,$$

то найденныя выраженія (2) для координатъ точки пересѣченія берутъ видъ $\frac{0}{0}$. Въ этомъ случаѣ данныя уравненія (1) тождественны (см. начальную Алгебру) и принадлежатъ одной прямой.

Если чрезъ точку пересѣченія данныхъ прямыхъ (1) должна проходить третья прямая

$$A''x + B''y + C'' = 0, \tag{5}$$

то надобно, чтобы величины $x$ и $y$ (2), выведенныя изъ уравненій (1), удовлетворяли уравненію (5). Для этого между постоянными уравненій (1) и (5) должно существовать условіе

$$(BC' - CB')\,A'' + (CA' - AC')\,B'' + (AB' - BA')\,C'' = 0\,^{*}).$$

Если первое изъ уравненій (1) помножимъ на какое-нибудь число $m$ и сложимъ со вторымъ, то получимъ уравненіе

$$(mA + A')\,x + (mB + B')\,y + mC + C' = 0, \tag{6}$$

принадлежащее прямой, проходящей чрезъ пересѣченіе прямыхъ (1); потому что величины $x$ и $y$, выведенныя изъ уравненій (1), будутъ удовлетворять уравненію (6).

— * Найдемъ для примѣра условіе, при которомъ три прямыя:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,\ \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1,\ \frac{x}{a''} + \frac{y}{b''} = 1$$

пересѣкаются въ одной точкѣ. Вычтя второе уравненіе изъ перваго, получимъ уравненіе

$$\frac{a' - a}{aa'}\,x + \frac{b' - b}{bb'}\,y = 0, \tag{7}$$

принадлежащее прямой, проходящей чрезъ пересѣченіе первыхъ двухъ прямыхъ; притомъ эта прямая проходитъ чрезъ начало координатъ. Вычтя третье изъ данныхъ уравненій изъ перваго, получимъ уравненіе

$$\frac{a'' - a}{aa''}\,x + \frac{b'' - b}{bb''}\,y = 0, \tag{8}$$

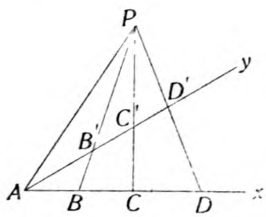
---

*) т.-е. опредѣлитель системы уравненій

$$Ax + By + C = 0,\ \ A'x + B'y + C' = 0,\ \ A''x + B''y + C'' = 0$$

долженъ равняться нулю.

принадлежащее прямой, проходящей также чрезъ начало координатъ и сверхъ того чрезъ пересѣченіе первой изъ данныхъ прямыхъ съ третьею. Прямыя (7) и (8) должны совпадать въ одну, чтобы данныя прямыя пересѣкались въ одной точкѣ, а для этого уравненія (7) и (8) должны быть тожественны, т.-е.




Фиг. 42

$$\frac{a'-a}{aa'}:\frac{a''-a}{aa''}=\frac{b'-b}{bb'}:\frac{b''-b}{bb''}$$

или

$$\frac{a'-a}{a'}:\frac{a''-a}{a''}=\frac{b'-b}{b'}:\frac{b''-b}{b''}. \quad (9)$$

Если $PB$, $PC$ и $PD$ суть данныя прямыя, то $a = AB$, $a' = AC$, $a'' = AD$, $b = AB'$, $b' = AC'$, $b'' = AD'$ и уравненіе (9) выражаетъ условіе между отрѣзками двухъ прямыхъ $Ax$ и $Ay$, пересѣкающихъ четыре прямыя $PA$, $PB$, $PC$, $PD$, выходящія изъ одной точки $P$, а именно:

$$\frac{BC}{AC}:\frac{BD}{AD}=\frac{B'C'}{AC'}:\frac{B'D'}{AD'}.$$

Въ первой части этой пропорціи предшествующій членъ $\frac{BC}{AC}$ представляетъ отношеніе между разстояніями двухъ точекъ $A$ и $B$ отъ третьей $C$, а послѣдующій $\frac{BD}{AD}$ отношеніе между разстояніемъ тѣхъ же двухъ точекъ $A$ и $B$ отъ четвертой $D$. Отношеніе вида $\frac{BC}{AC}:\frac{BD}{AD}$ называется *ангармоническимъ*. Выведенная пропорція показываетъ, что ангармоническое отношеніе, составленное изъ отрѣзковъ прямой $AD$, пересѣченной четырьмя прямыми, выходящими изъ одной точки $P$, равно ангармоническому отношенію отрѣзковъ другой прямой $AD'$. * —

II. *Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки.*

Пусть $(x'\ y')$ и $(x''\ y'')$ будутъ данныя точки и $Ax + By + C = 0$ уравненіе искомой прямой. Здѣсь неизвѣстныя суть: $A$, $B$ и $C$. По условію, что первая изъ данныхъ точекъ принадлежитъ искомой прямой, имѣемъ уравненіе:

$$Ax' + By' + C = 0,$$

которое даетъ возможность исключить изъ уравненія

$$Ax + By + C = 0$$

неизвѣстную $C$. Для этого стоитъ только вычесть одно уравненіе изъ другого; такимъ образомъ получимъ уравненіе

$$A(x - x') + B(y - y') = 0, \tag{1}$$

принадлежащее всякой прямой, проходящей чрезъ точку $(x'y')$. Чтобы оно принадлежало прямой, проходящей и чрезъ точку $(x''y'')$, надобно, чтобы ему удовлетворяли координаты этой точки, т.-е.

$$A(x'' - x') + B(y'' - y') = 0. \tag{2}$$

Исключивъ неизвѣстныя $A$ и $B$ изъ ур. (1) и (2), получимъ уравненіе

$$(y'' - y')(x - x') - (x'' - x')(y - y') = 0, \tag{3}$$

принадлежащее искомой прямой. Въ самомъ дѣлѣ: это уравненіе первой степени относительно перемѣнныхъ координатъ $x$ и $y$; слѣдовательно, оно принадлежитъ прямой линіи; притомъ оно будетъ удовлетворено, если вмѣсто $x$ и $y$ подставимъ $x'$ и $y'$ или $x''$ и $y''$, а потому прямая линія, которой принадлежитъ это уравненіе, проходитъ чрезъ данныя точки.

Если $x'' - x'$ и $y'' - y'$ не равны нулю, то уравненіе (3) можетъ быть представлено подъ видомъ пропорціи

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'}, \tag{4}$$

показывающей, что разности между координатами какой-нибудь точки прямой и соотвѣтственными координатами одной изъ данныхъ точекъ пропорціональны разностямъ соотвѣтственныхъ координатъ данныхъ точекъ. Уравненіе (3) или (4) можно разсматривать, какъ условіе, которому должны удовлетворять координаты трехъ точекъ $(x\,y)$, $(x'\,y')$, $(x''\,y'')$, лежащихъ на одной прямой линіи *).

Если означимъ чрезъ $m$ разстояніе между точками $(xy)$ и $(x'y')$, а чрезъ $n$ разстояніе между $(x''y'')$ и $(x'y')$, то $x - x'$ и $x'' - x'$

---

*) Первая часть уравненія (3) есть опредѣлитель $\begin{vmatrix} x - x', & y - y' \\ x'' - x', & y'' - y' \end{vmatrix}$; слѣдовательно, если три точки лежатъ на одной прямой, то опредѣлитель, составленный изъ разностей координатъ одной точки и двухъ прочихъ, равенъ нулю.

будутъ проекціи этихъ разстояній на оси $x$-въ, и $y - y'$ и $y'' - y'$ проекціи ихъ на оси $y$-въ. А такъ какъ длины проекцій пропорціональны длинамъ проектируемыхъ линій, когда послѣднія лежатъ на одной прямой, то

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \pm \frac{m}{n} \quad \text{и} \quad \frac{y - y'}{y'' - y'} = \pm \frac{m}{n}; \tag{5}$$

откуда вытекаетъ равенство (4).

Изъ уравненія (5) легко вывести формулы

$$x' = \frac{mx'' \mp nx}{m \mp n}, \quad y' = \frac{my'' \mp ny}{m \mp n}$$

для опредѣленія координатъ точки $(x'y')$, которая находится на одной прямой съ двумя другими $(xy)$, $(x''y'')$. Здѣсь должно взять при $n$ знакъ $+$, когда точка $(x'y')$ находится между $(xy)$ и $(x''y'')$. Когда $(x'y')$ есть средина разстоянія между $(xy)$ и $(x''y'')$, тогда $m = n$ и, слѣдовательно,

$$x' = \frac{x + x''}{2}, \quad y' = \frac{y + y''}{2}.$$

Примѣры на уравненіе (4).

1) Если точки $(x_1y_1)$, $(x_2y_2)$, ... , $(x_ny_n)$ находятся на одной прямой линіи, то на этой же прямой будетъ точка, опредѣляемая координатами:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

гдѣ $m_1$, $m_2$, ...., $m_n$ означаютъ произвольныя величины.

2) Если точки $(x_1y_1)$, $(x_2y_2)$, ... ,$(x_ny_n)$ находятся на одной прямой, то на этой же прямой будетъ точка $(xy)$, опредѣляемая координатами, удовлетворяющими уравненіямъ:

$$\frac{1}{x - x_1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{x_3 - x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n - x_1}\right)$$

$$\frac{1}{y - y_1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{y_2 - y_1} + \frac{1}{y_3 - y_1} + \ldots + \frac{1}{y_n - y_1}\right).$$

III. *Провести прямую чрезъ данную точку параллельно данной прямой.*

Пусть будутъ: $(x'y')$ данная точка,

$$Ax + By + C = 0$$

данная прямая и $A'x + B'y + C' = 0$ искомая прямая. По условію, что искомая прямая должна проходить чрезъ данную точку, имѣемъ уравненіе

$$A'x' + B'y' + C' = 0.$$

Вычтя это уравненіе изъ предыдущаго, для исключенія неизвѣстнаго $C'$, получимъ

$$A'(x - x') + B'(y - y') = 0.$$

По условію же параллельности (см. зад. 1 ур. 3) имѣемъ

$$AB' - BA' = 0.$$

Исключивъ изъ двухъ послѣднихъ уравненій неизвѣстныя $A'$ и $B'$, найдемъ уравненіе

$$A(x - x') + B(y - y') = 0,$$

принадлежащее искомой прямой. Можно провѣрить, что это есть уравненіе искомой прямой, слѣдующимъ образомъ: оно первой степени, а потому принадлежитъ прямой; эта прямая проходитъ чрезъ данную точку, потому что ея уравненіе удовлетворено величинами $x = x'$, $y = y'$; сверхъ того она параллельна данной прямой, потому что коэффиціенты при $x$ и $y$ въ ея уравненіи равны коэффиціентамъ при $x$ и $y$ въ уравненіи данной прямой.

**IV.** *Вычислить уголъ, составляемый данными прямыми.*

Если одна изъ данныхъ прямыхъ параллельна одной изъ осей координатъ, то искомый уголъ равенъ углу, составляемому съ этою осью второю прямою, и можетъ быть вычисленъ по способу, изложенному въ § 23; поэтому можно устранить этотъ случай и предположить, что данныя прямыя не параллельны осямъ координатъ; тогда ихъ уравненія могутъ быть представлены подъ видомъ:

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b'.$$

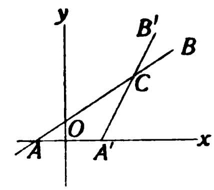
Положимъ, что первое уравненіе принадлежитъ прямой $A'C$, а второе $AC$ и пусть $\angle CA'x = \alpha$, $\angle CAx = \alpha'$ и $\angle ACA' = \beta$. Такъ какъ $\beta = \alpha - \alpha'$, то

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{1 + \operatorname{tg} \alpha . \operatorname{tg} \alpha'}. \qquad (1)$$

При осяхъ координатъ прямоугольныхъ $\operatorname{tg}\ \alpha = a$, $\operatorname{tg}\ \alpha' = a'$; слѣдовательно,

$$\operatorname{tg}\ \beta = \frac{a - a'}{1 + aa'}. \tag{2}$$

По даннымъ уравненіямъ прямыхъ линій мы будемъ знать величины $a$ и $a'$; помощью выведенной формулы вычислимъ искомый уголъ $\beta$.



Фиг. 43

Въ случаѣ перпендикулярности прямыхъ $AC$ и $A'C$ уголъ $\beta$ прямой; слѣдовательно, тогда $\operatorname{tg}\ \beta = \infty$. Для этого необходимо, чтобъ

$$1 + aa' = 0. \tag{3}$$

Поэтому условіе перпендикулярности прямыхъ, отнесенныхъ къ прямоугольнымъ осямъ координатъ, можетъ быть выражено такъ: *единица, сложенная съ произведеніемъ коэффиціентовъ при абсциссѣ въ формулахъ, выражающихъ ординаты точекъ этихъ прямыхъ, равна нулю* *). Въ случаѣ параллельности прямыхъ $\beta = 0$ или $180°$; тогда $a - a' = 0$, что согласно съ условіемъ (3) задачи I.

Условіе, что прямыя должны составлять данный уголъ, котораго тангенсъ равенъ $m$, будетъ

$$m(1 + aa') = a - a'. \tag{4}$$

Напримѣръ, когда $\beta = 45°$, тогда $\operatorname{tg}\beta = 1$ и $1 + aa' = a - a'$.

Когда данныя прямыя отнесены къ осямъ координатъ косоугольнымъ, составляющимъ уголъ $\theta$, тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a \sin\theta}{1 + a\cos\theta},\ \operatorname{tg}\alpha' = \frac{a' \sin\theta}{1 + a'\cos\theta}\ \text{(см. § 23).}$$

Въ этомъ случаѣ по формулѣ (1), найдемъ

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{(a - a')\sin\theta}{1 + (a + a')\cos\theta + aa'}.$$

Поэтому условіе перпендикулярности прямыхъ при осяхъ косоугольныхъ выражается уравненіемъ

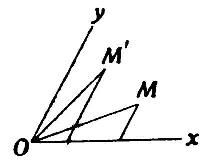
$$1 + (a + a')\cos\theta + aa' = 0. \tag{5}$$

---

*) Здѣсь предполагается, что $a$ и $a'$ суть величины конечныя, т.-е., что прямыя не параллельны оси $Oy$.

Мы изложимъ другое рѣшеніе задачи, ведущее къ болѣе общимъ выводамъ.

Пусть будутъ двѣ точки $M\ (xy)$ и $M'\ (x'y')$, отнесенныя къ осямъ, составляющимъ уголъ $yOx = \theta$, и положимъ $OM = r$, $OM' = r'$. Такъ какъ прямая $r$, направленная отъ $O$ къ $M$, замыкаетъ ломаную линію, составленную изъ координатъ $x$ и $y$, то проекція $r$ на всякой оси равна суммѣ проекцій $x$ и $y$ на той же оси; слѣдовательно,



Фиг. 44

$$r \cos(rr') = x \cos(xr') + y \cos(yr')$$

и

$$rr' \cos(rr') = xr' \cos(r'x) + yr' \cos(r'y). \qquad (6)$$

Прямая $OM' = r'$ замыкаетъ ломаную линію, составленную изъ $x'$ и $y'$; поэтому проекція $r'$ на всякой оси равна суммѣ проекцій $x'$ и $y'$ на этой же оси; слѣдовательно,

$$r' \cos(r'x) = x' + y' \cos\theta, \quad r' \cos(r'y) = x' \cos\theta + y';$$

отчего формула (6) приведется къ слѣдующей:

$$rr' \cos(rr') = xx' + yy' + (xy' + yx') \cos\theta,$$

изъ которой выводимъ

$$\cos(rr') = \frac{xx' + yy' + (xy' + yx') \cos\theta}{rr'}. \qquad (7)$$

По формулѣ же для разстоянія точки отъ начала координатъ (см. § 20) имѣемъ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta}, \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\theta}.$$

Подставивъ эти выраженія $r$ и $r'$ въ предыдущую формулу, получимъ окончательно формулу

$$\cos(rr') = \frac{xx' + yy' + (xy' + yx')\cos\theta}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta}\ \sqrt{x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\theta}} \qquad (8)$$

для опредѣленія угла двухъ прямыхъ $r$ и $r'$, проведенныхъ изъ начала координатъ, помощью координатъ концовъ этихъ прямыхъ: $(x, y)$, $(x', y')$.

Пусть требуется найти уголъ двухъ прямыхъ:

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0.$$

Возьмемъ вмѣсто нихъ прямыя, имъ параллельныя, проходящія чрезъ начало координатъ:

$$Ax + By = 0 \quad \text{и} \quad A'x + B'y = 0. \tag{9}$$

Уголъ послѣднихъ, очевидно, равенъ углу данныхъ прямыхъ и можетъ быть вычисленъ по формулѣ (8). Для этого подставимъ вмѣсто $x$ и $y$ координаты какой-нибудь точки первой изъ прямыхъ (9), а вмѣсто $x'$ и $y'$ координаты какой-нибудь точки второй. Проще всего будетъ взять на первой прямой точку ($x = B$, $y = -A$), а на второй точку ($x' = B'$, $y' = -A'$); тогда получимъ

$$\cos(rr') = \frac{AA' + BB' - (AB' + BA')\cos\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\theta}}. \tag{10}$$

При осяхъ координатъ прямоугольныхъ имѣемъ $\theta = 90^\circ$, $\cos\theta = 0$ и, слѣдовательно,

$$\cos(rr') = \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{A'^2 + B'^2}}.$$

Въ случаѣ перпендикулярности данныхъ прямыхъ $\cos(rr') = 0$, для чего требуется условіе

$$AA' + BB' - (AB' + BA')\cos\theta = 0. \tag{11}$$

Если вторая изъ данныхъ прямыхъ параллельна оси $Ox$, то $A' = 0$ и формула (10) даетъ

$$\cos(rx) = \frac{B - A\cos\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}.$$

Также найдемъ

$$\cos(ry) = \frac{A - B\cos\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}.$$

По этимъ формуламъ можно вычислить углы, составляемые данною прямою $Ax + By + C = 0$ съ осями координатъ.

V. *Чрезъ данную точку провести перпендикуляръ къ данной прямой.*

Пусть будетъ $(x'\ y')$ данная точка, а $y = ax + b$ данная прямая. Уравненіе всякой прямой, проходящей чрезъ данную точку, имѣетъ видъ

$$y - y' = a'(x - x'). \tag{1}$$

Чтобы оно принадлежало искомому перпендикуляру, коэффиціентъ $a'$ при $x$ въ этомъ уравненіи и коэффиціентъ $a$ при $x$ въ данномъ уравненіи должны удовлетворять условію перпендикулярности, выведенному при рѣшеніи предыдущей задачи.

Это условіе, въ случаѣ прямоугольныхъ осей, есть (3) : $1 + aa' = 0$ и даетъ $a' = -\frac{1}{a}$; слѣдовательно, уравненіе искомаго перпендикуляра будетъ

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \quad \text{или} \quad a(y - y') + (x - x') = 0. \quad (2)$$

— * Для полученія болѣе общаго вывода положимъ, что

$$Ax + By + C = 0$$

есть уравненіе данной прямой, а

$$A'(x - x') + B'(y - y)' = 0$$

уравненіе искомой. По общему условію перпендикулярности двухъ прямыхъ (11), имѣемъ

$$AA' + BB' - (AB' + BA')\cos\theta = 0.$$

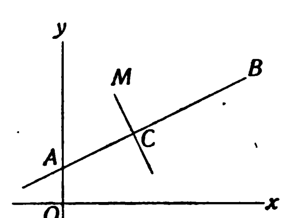
Исключивъ изъ двухъ послѣднихъ уравненій неизвѣстныя $A'$ и $B'$, получимъ уравненіе

$$(A - B\cos\theta)(y - y') - (B - A\cos\theta)(x - x') = 0$$

требуемой прямой.

VI. *Найти разстояніе данной точки отъ данной прямой.*

Пусть $M(x'\,y')$ будетъ данная точка, $(AB)\,y = ax + b$ данная прямая и $\delta = MC$ искомое разстояніе. Если положимъ, что въ уравненіи данной прямой координаты $x$ и $y$ принадлежатъ точкѣ $C$, въ которой прямая пересѣкается съ перпендикуляромъ, на нее опущеннымъ изъ $M$, и что $x - x' = p$, $y - y' = q$, то, по формулѣ для квадрата разстоянія двухъ точекъ въ случаѣ прямоугольныхъ осей координатъ, имѣемъ $\delta = \sqrt{p^2 + q^2}$.



Фиг. 45

Остается найти $p$ и $q$. Координаты $x$, $y$ точки $C$ должны удовлетворять уравненіямъ двухъ прямыхъ $AB$ и $MC$, а именно:

$y = ax + b$ и $a(y - y') + (x - x') = 0$ [см. уравненіе (2) предыдущей задачи]; но $x = p + x'$, $y = q + y'$, слѣдовательно,

$$q + y' = a(p + x') + b, \quad aq + p = 0;$$

изъ этихъ двухъ уравненій выводимъ:

$$p = \frac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2}, \quad q = -\frac{y' - ax - b}{1 + a^2};$$

слѣдовательно,

$$\delta = \sqrt{\frac{a^2(y' - ax' - b)^2}{(1 + a^2)^2} + \frac{(y' - ax' - b)^2}{(1 + a^2)^2}} = \frac{y' - ax' - b}{\pm\sqrt{1 + a^2}},$$

гдѣ при $\sqrt{\phantom{x}}$ должно взять $+$ или $-$, смотря по тому, будетъ ли числитель положительный или отрицательный.

**26.** Разстояніе $\delta$ можно получить въ общемъ видѣ слѣдующимъ образомъ:

Пусть $Ax + By + C = 0$ уравненіе данной прямой и положимъ, что оно по способу, изложенному въ **§ 23**, приведено къ виду

$$x \cos(lx) + y \cos(ly) = p.$$

Пусть еще

$$x \cos(lx) + y \cos(ly) = p' \tag{1}$$

будетъ уравненіе прямой, ей параллельной и проходящей чрезъ точку $(x', y')$. Такъ какъ $p$ и $p'$ суть перпендикуляры, опущенные изъ начала координатъ на эти прямыя и взятые съ $+$ и $-$, смотря по тому, падаетъ ли перпендикуляръ по направленію $l$, или противоположно, то $\delta = \pm(p' - p)$. Координаты данной точки $(x'\ y')$ должны удовлетворять уравненію (1); поэтому

$$x' \cos(lx) + y' \cos(ly) = p';$$

слѣдовательно,

$$\delta = \pm[x' \cos(lx) + y' \cos(ly) - p].$$

Подставивъ сюда вмѣсто $\cos(lx)$, $\cos(ly)$ и $p$ ихъ величины, опредѣляемыя формулами (3) **§ 23**, получимъ

$$\delta = \pm\frac{(Ax' + By' + C)\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}.$$

Можно согласиться взять здѣсь изъ двухъ знаковъ $\pm$ только одинъ $+$ и разсматривать $\delta$, какъ положительную или отрицательную величину; тогда

$$\delta = \frac{(Ax' + By' + C)\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}} \tag{2}$$

будетъ положительное, когда $Ax' + By' + C > 0$ и отрицательное, когда $Ax' + By' + C < 0$.

Пусть $(xy)$ будетъ какая-нибудь точка на данной прямой, $r$ прямая, проведенная изъ этой точки въ данную точку $(x'\ y')$ и $P$ прямая, проведенная также изъ точки $(xy)$, какъ начала, и опредѣленная проекціями на осяхъ координатъ, равными $A$ и $B$. По формулѣ (6) задачи IV, имѣемъ

$$Pr\cos(Pr) = A(x' - x) + B(y' - y),$$

или

$$Pr\cos(Pr) = Ax' + By' + C, \tag{3}$$

потому что $Ax + By + C = 0$.

Если возьмемъ точку $(x'\ y')$, также какъ $(xy)$, на данной прямой, то будемъ имѣть $Ax' + By' + C = 0$ и, слѣдовательно, $\cos(Pr) = 0$. Это показываетъ, что $P$ должна быть перпендикулярна къ направленію $r$, которое въ разсматриваемомъ случаѣ падаетъ на данную прямую. Слѣдовательно, направленіе $P$ перпендикулярно къ прямой $Ax + By + C = 0$.

Если координаты данной точки $(x'\ y')$ удовлетворяютъ условію $Ax' + By' + C > 0$, то $\cos(Pr) > 0$ и уголъ $Pr$ острый; для этого точка $(x'\ y')$ должна находиться относительно данной прямой съ той стороны, куда направлена $P$; въ случаѣ же $Ax' + By' + C < 0$ имѣемъ $\cos(Pr) < 0$, и уголъ $Pr$ тупой, а, слѣдовательно, точка $(x'\ y')$ находится со стороны, противоположной направленію $P$. Такимъ образомъ, зная направленіе $P$, опредѣляемое проекціями $A$ и $B$ на осяхъ, можно по знаку выраженія $Ax' + By' + C$ узнать, съ которой стороны находится данная точка $(x'\ y')$, относительно прямой $Ax + By + C = 0$.

Формулы (2) и (3) даютъ

$$Pr\cos(Pr) = \frac{\delta}{\sin\theta}\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}.$$

Если положимъ, что точка $(x'\ y')$ находится на прямой $P$ съ той стороны, куда направлено $P$, то $\cos(Pr) = 1$, и $r = \delta$; слѣдовательно,

$$P = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta} \tag{4}$$

и формула (2) можетъ быть замѣнена слѣдующею:

$$\delta = \frac{Ax' + By' + C}{P}. \tag{5}$$

Разсматриваемая здѣсь величина $P$ называется *параметромъ* линейной функціи $Ax + By + C$.

Коэффиціенты при перемѣнныхъ $x$ и $y$ суть проекціи параметра на осяхъ координатъ.

Опустивъ значки, находящіеся надъ $x'$ и $y'$ въ формулѣ (5), получимъ выраженіе

$$\delta = \frac{Ax + By + C}{P},$$

по которому можно узнать, будетъ ли произвольно взятая точка $(xy)$ находиться на данной прямой или внѣ и, если точка внѣ прямой, то съ которой именно стороны относительно прямой. Если $\delta = 0$, то $(xy)$ находится на прямой $Ax + By + C = 0$. Въ случаѣ $\delta > 0$, точка $(xy)$ находится внѣ прямой съ той стороны, куда направленъ параметръ $P$, а въ случаѣ $\delta < 0$, со стороны противоположной.

На основаніи этого замѣчанія можно выражать неравенствами геометрическія мѣста о двухъ измѣреніяхъ, а именно различныя части плоскости, ограниченныя прямыми линіями, подобно тому, какъ уравненіями выражаются линіи.

Неравенство $\delta > 0$, или равнозначущее съ нимъ

$$Ax + By + C > 0,$$

принадлежитъ всѣмъ точкамъ неопредѣленнаго пространства, находящагося съ той стороны прямой $Ax + By + C = 0$, куда направленъ параметръ $P$; неравенство $Ax + By + C < 0$ принадлежитъ точкамъ всего пространства, находящагося со стороны противоположной параметру.

Два неравенства:

$$Ax + By + C > 0 \text{ и } A'x + B'y + C' > 0, \tag{6}$$

вмѣстѣ взятые, т.-е. существующіе при одинаковыхъ величинахъ $x$ и $y$, принадлежатъ пространству, находящемуся въ углѣ, составляемомъ прямыми $Ax + By + C = 0$ и $A'x + B'y + C' = 0$, а именно въ томъ, въ которомъ находятся параметры двухъ функцій, выражающихъ первыя части неравенствъ (6).

Неравенства: $Ax + By + C < 0$ и $A'x + B'y + C' < 0$ принадлежатъ углу, противоположному съ первымъ.

Неравенства: $Ax + By + C > 0$ и $A'x + B'y + C' < 0$ принадлежатъ углу смежному съ первымъ со стороны параметра функціи $Ax + By + C$.

Наконецъ неравенства: $Ax + By + C < 0$ и $A'x + B'y + C' > 0$ принадлежатъ другому смежному углу.

Неравенство $Ax + By + C < 0$ можно замѣнить неравенствомъ

$$- Ax - By - C > 0;$$

при этомъ параметръ новой функціи $- Ax - By - C$ будетъ равенъ прежнему $P$, но будетъ имѣть съ нимъ противоположное направленіе, потому что проекціи на осяхъ координатъ новаго параметра суть величины: $- A$ и $- B$, равныя, но съ противоположными знаками, проекціямъ $A$ и $B$ прежняго параметра $P$.

Пусть будутъ три прямыя:

$$Ax + By + C = 0,\ A'x + B'y + C' = 0,\ A''x + B''y + C'' = 0.$$

Неравенства

$$Ax + By + C > 0,\ A'x + B'y + C' > 0,\ A''x + B''y + C'' > 0$$

представляютъ пространство, ограниченное этими прямыми, а именно то, которое относительно каждой прямой лежитъ со стороны параметра функціи, выражающей первую часть уравненія прямой. Если пересѣченіе двухъ прямыхъ находится со стороны параметра третьей прямой, то разсматриваемое пространство есть треугольникъ, составленный данными прямыми.

Подобнымъ образомъ можно выразить неравенствами пространство, ограниченное четырьмя или болѣе прямыми. —

Примѣръ: Найти неравенства, принадлежащія площади треугольника, котораго вершины, отнесенныя къ прямоугольнымъ осямъ координатъ, суть: (2, 3), (— 1, 2) и (5, — 2), и вычислить три высоты этого треугольника.

Рѣшеніе: Всякая точка $(xy)$, находящаяся въ площади треугольника, должна удовлетворять неравенствамъ:

$$2x + 3y - 4 > 0, \; -5x - 3y + 19 > 0, \; x - 3y + 7 > 0.$$

Высоты:

$$\frac{9}{\sqrt{13}}, \; \frac{18}{\sqrt{34}}, \; \frac{18}{\sqrt{10}}.$$

— * **27.** Пусть будутъ двѣ функціи:

$$Ax + By + C \quad \text{и} \quad A'x + B'y + C',$$

$P$ и $P'$ ихъ параметры. Положимъ по формулѣ (1) предыдущаго §:

$$\delta = \frac{Ax + By + C}{P}, \quad \delta' = \frac{A'x + B'y + C'}{P'},$$

или для краткости

$$\delta = ax + by + c, \quad \delta' = a'x + b'y + c', \tag{1}$$

гдѣ

$$\frac{A}{P} = a, \; \frac{B}{P} = b, \; \frac{C}{P} = c; \; \frac{A'}{P'} = a', \; \frac{B'}{P'} = b', \; \frac{C'}{P'} = c'.$$

Можно разсматривать величины $\delta$ и $\delta'$ какъ новыя, особеннаго рода, координаты точки $(xy)$, потому что помощью нихъ можно опредѣлить положеніе этой точки. Для этого построимъ прямыя, которымъ принадлежатъ уравненія (1), разсматривая при этомъ $\delta$ и $\delta'$, какъ постоянныя величины; пересѣченіе этихъ прямыхъ будетъ въ точкѣ $(xy)$. Построенныя такимъ образомъ прямыя параллельны прямымъ:

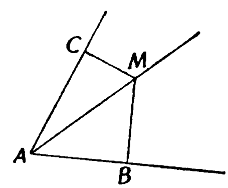
$$ax + by + c = 0, \quad \text{и} \quad a'x + b'y + c' = 0, \tag{2}$$

которыя можно разсматривать, какъ оси новыхъ координатъ: $\delta$ и $\delta'$. Замѣтимъ, что этимъ способомъ можно опредѣлить точку $(xy)$ или $(\delta\delta')$ въ такомъ только случаѣ, когда прямыя (2) не параллельны одна другой, т.-е., когда выраженіе $ab' - ba'$ не равно нулю. А такъ какъ уравненія (2) тожественны съ уравненіями:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{и} \quad A'x + B'y + C' = 0,$$

то $AB' - BA'$ не должно быть равно нулю.

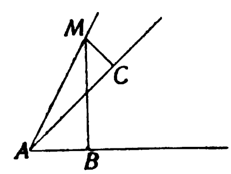
Принявъ этотъ новый способъ для опредѣленія точки, можемъ сказать: 1) что уравненія $\delta = 0$ и $\delta' = 0$ принадлежатъ осямъ новыхъ координатъ; 2) неравенства: $\delta > 0$ и $\delta' > 0$ принадлежатъ точкамъ внутри угла, составляемаго этими прямыми, со стороны параметра $P$ и со стороны параметра $P'$, а неравенства: ($\delta < 0$ и $\delta' < 0$), ($\delta > 0$ и $\delta' < 0$), ($\delta < 0$ и $\delta' > 0$) принадлежатъ тремъ прочимъ угламъ между осями; 3) уравненіе $\delta = \alpha$ принадлежитъ прямой, параллельной съ осью $\delta = 0$, въ пространствѣ $\delta > 0$, когда $\alpha$ положительное, и въ пространствѣ $\delta < 0$, когда $\alpha$ отрицательное. Также $\delta' = \beta$ принадлежитъ прямой параллельной оси $\delta' = 0$.


Фиг. 46

4) Уравненіе $\delta = m\delta'$, при $m$ постоянномъ, принадлежитъ прямой, проходящей чрезъ пересѣченіе осей $\delta = 0$ и $\delta' = 0$. Въ самомъ дѣлѣ: это уравненіе въ прежнихъ координатахъ $x$ и $y$ имѣетъ видъ

$$ax + by + c = m\,(a'x + b'y + c');$$

оно первой степени относительно $x$ и $y$, слѣдовательно, принадлежитъ прямой линіи; притомъ, очевидно, что ему удовлетворяютъ координаты точки пересѣченія прямыхъ (2).


Фиг. 47

Въ уравненіи прямой $\delta = m\delta'$ коэффиціентъ $m$, взятый независимо отъ знака, при немъ находящагося, равенъ отношенію между синусами угловъ, составляемыхъ этою прямою съ осями координатъ: $\delta = 0$ и $\delta' = 0$. Положимъ сперва, что $m$ положительное количество и возьмемъ $\delta > 0$, тогда и $\delta' > 0$. Пусть $AB$ (фиг. 46) представляетъ ось $\delta = 0$, $AC$ ось $\delta' = 0$, $MB = \delta$, $MC = \delta'$; тогда

$$\delta = AM \,.\, \sin(MAB), \quad \delta' = AM \,.\, \sin(MAC),$$

и слѣдовательно,

$$m = \frac{\delta'}{\delta} = \frac{\sin(MAC)}{\sin(MAB)}.$$

Положимъ теперь, что $m$ отрицательное (фиг. 47) и $\delta = MB$, $\delta' = -MC$; тогда

$$-m = \frac{MC}{MB} = \frac{AM \,.\, \sin(MAC)}{AM \,.\, \sin(MAB)} = \frac{\sin(MAC)}{\sin(MAB)}.$$

Вообще, если означимъ чрезъ $\theta$ уголъ между осями координатъ, а именно тотъ, который заключаетъ пространство ($\delta > 0$ и $\delta' > 0$), а чрезъ $\alpha$ уголъ, составляемый прямой $\delta = m\delta'$ съ осью $\delta$, то будемъ имѣть во всякомъ случаѣ $m = \dfrac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \alpha}$.

5) Всякое уравненіе первой степени относительно координатъ $\delta$ и $\delta'$

$$\lambda\delta + \mu\delta' + \nu = 0 \tag{3}$$

принадлежитъ прямой линіи, потому что оно будетъ первой степени относительно обыкновенныхъ координатъ $x$, $y$, когда подставимъ въ него вмѣсто $\delta$ и $\delta'$, ихъ выраженія (1).

При $\delta' = 0$, имѣемъ $\delta = -\dfrac{\nu}{\lambda}$; эта координата опредѣляетъ пересѣченіе разсматриваемой прямой съ осью $\delta' = 0$. А при $\delta = 0$, получимъ $\delta' = -\dfrac{\nu}{\mu}$, координату пересѣченія съ осью $\delta = 0$. Означая величины: $-\dfrac{\nu}{\lambda}$ и $-\dfrac{\nu}{\mu}$ чрезъ $p$ и $p'$, будемъ имѣть: $\lambda = -\dfrac{\nu}{p}$, $\mu = -\dfrac{\nu}{p'}$; отчего уравненіе прямой (3) можно представить подъ видомъ

$$\frac{\delta}{p} + \frac{\delta'}{p'} = 1,$$

сходнымъ съ тѣмъ, который мы нашли въ **§ 24** для уравненія прямой въ обыкновенныхъ координатахъ.

Обыкновенныя прямолинейныя координаты $x$ и $y$ называются *Декартовыми*, потому что онѣ введены въ Аналитическую Геометрію Декартомъ. Координаты $\delta$ и $\delta'$ не имѣютъ особеннаго названія. *Сальмонъ* *) предложилъ назвать способъ рѣшенія вопросовъ аналитической геометріи помощью этихъ координатъ *сокращеннымъ*. Такъ какъ $\delta$ и $\delta'$ представляютъ кратчайшія разстоянія опредѣляемой точки ($\delta$, $\delta'$) отъ осей $\delta = 0$ и $\delta' = 0$, то можно ихъ называть *кратчайшими координатами*.

Какъ Декартовы, такъ и кратчайшія координаты можно замѣнить координатами, называемыми *однородными*, и употребляемыми для того, чтобы получать формулы однороднаго вида, что доставляетъ большое удобство въ аналитическихъ изслѣдованіяхъ.

---

*) Коническія сѣченія и новѣйшіе алгебраическіе и геометрическіе методы для изслѣдованія свойствъ кривыхъ линій. Соч. *Сальмона*. (М. 1860 г.) перев. *М. Ващенко-Захарченко*.

Разсматривая Декартовы координаты $x$ и $y$ какъ числа, можно замѣнить ихъ отношеніями двухъ линій $x_1$ и $x_2$ къ одной $x_3$. Три линіи $x_1$, $x_2$, $x_3$ называются однородными координатами точки $(x, y)$. Положивъ $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ въ уравненіи прямой $Ax + By + C = 0$, получимъ однородное уравненіе

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$$

Также всякое уравненіе $f(x, y) = 0$ приметъ однородный видъ $f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = 0$ или $F(x_1, x_2, x_3) = 0$; потому что оно не нарушится отъ умноженія трехъ величинъ $x_1$, $x_2$, $x_3$ на произвольное количество $n$ (см. **§ 6**). Напримѣръ, уравненіе круга

$$x_2 + y^2 = r^2$$

беретъ видъ

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 x_3^2,$$

однородный относительно $x_1$, $x_2$, $x_3$. Вслѣдствіе этого свойства координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$ называются *однородными*.

Кратчайшія координаты $\delta$ и $\delta'$ также могутъ быть замѣнены однородными. Положивъ, что $\delta''$ означаетъ разстояніе точки $(\delta, \delta')$ отъ прямой

$$A''x + B''y + C'' = 0,$$

по формулѣ (5) **§ 26** имѣемъ

$$\delta'' = \frac{(A''x + B''y + C'')}{P''} = a''x + b''y + c'',$$

гдѣ $P''$ есть параметръ функціи $A''x + B''y + C''$ и $a'' = \frac{A''}{P''}$, $b'' = \frac{B''}{P''}$, $c'' = \frac{C''}{P''}$. Положеніе разсматриваемой точки будетъ извѣстно, когда даны будутъ отношенія: $\frac{\delta}{\delta''}$ и $\frac{\delta'}{\delta''}$; потому что первое отношеніе опредѣляетъ прямую, проходящую чрезъ точку $(\delta = 0, \delta'' = 0)$; а второе—прямую, проходящую чрезъ точку $(\delta' = 0, \delta'' = 0)$; слѣдовательно, оба отношенія вмѣстѣ опредѣляютъ пересѣченіе этихъ прямыхъ, которымъ и опредѣлится положеніе разсматриваемой точки. Если даны отношенія $\frac{\delta}{\delta''}$ и $\frac{\delta'}{\delta''}$, то извѣстно будетъ и отношеніе $\frac{\delta'}{\delta}$, которое опредѣлитъ прямую, проходящую чрезъ точку $(\delta = 0, \delta' = 0)$ и чрезъ разсматриваемую точку $(\delta, \delta')$, слѣдовательно, положеніе этой точки также опредѣлится отношеніями $\frac{\delta'}{\delta}$ и $\frac{\delta''}{\delta}$ или отношеніями $\frac{\delta}{\delta'}$ и $\frac{\delta''}{\delta'}$.*)

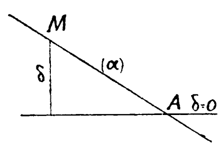
Три величины: $\delta'$, $\delta'$, $\delta''$ называются *трилинейными* координатами точки $(\delta\,\delta')$.

Всякое однородное уравненіе первой степени относительно координатъ $\delta$, $\delta'$, $\delta''$,

$$\lambda\delta + \mu\delta' + \nu\delta'' = 0,$$

принадлежитъ прямой линіи; потому что оно будетъ первой степени относительно Декартовыхъ координатъ $x$ и $y$, когда мы подставимъ въ него вмѣсто $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ ихъ выраженія въ этихъ координатахъ.

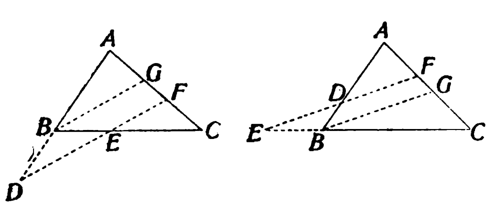
Положимъ, что прямая $(\alpha)$ пересѣкаетъ прямую $\delta = 0$ въ точкѣ $A$, и $\delta$ кратчайшая координата какой-нибудь точки $M$ прямой $(\alpha)$; тогда $\delta = \pm AM \sin(A)$, гдѣ должно взять знакъ $\pm$, смотря потому, будетъ ли $\delta > 0$ или $\delta < 0$. Означивъ положительный или




Фиг. 48

отрицательный отрѣзокъ $\pm AM$ чрезъ $\alpha$, будемъ имѣть вообще $\delta = \alpha \sin(A)$. Также для другой точки $M'$, на прямой $\alpha$ будемъ имѣть $\delta_1 = \alpha_1 \sin(A)$, гдѣ $\alpha_1$ есть отрѣзокъ $AM'$, взятый со знакомъ координаты $\delta_1$. Отсюда выводимъ $\delta : \delta_1 = \alpha : \alpha_1$, т.-е. *кратчайшія координаты $\delta$ и $\delta_1$ двухъ точекъ прямой $(\alpha)$ относительно оси $\delta = 0$, пропорціональны отрѣзкамъ на прямой $(\alpha)$, имѣющимъ начало въ точкѣ пересѣченія ея съ прямою $\delta = 0$, а концы въ точкахъ, которымъ принадлежатъ координаты $\delta$ и $\delta_1$; причемъ отрѣзки должны быть взяты съ тѣми знаками, какіе находятся при $\delta$ и $\delta_1$.*

**28.** Мы покажемъ нѣкоторыя приложенія способа кратчайшихъ и трилинейныхъ координатъ.




Фиг. 49

I. Положимъ, что три прямыя $BC$, $CA$ и $AB$, не проходящія чрезъ одну точку, пересѣкаются съ прямою $\delta = 0$ въ точкахъ $D$, $E$ и $F$; пусть: $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ будутъ кратчайшія координаты точекъ $A$, $B$, $C$ относительно

*) При этомъ требуется, чтобы прямыя

$$\delta = 0, \quad \delta' = 0, \quad \delta'' = 0$$

не пересѣкались въ одной точкѣ.

оси $\delta=0$, $\alpha$ и $\alpha'$ отрѣзки $AD$ и $AF$, взятые со знакомъ $\delta_1$, $\beta$ и $\beta'$ отрѣзки $BE$ и $BD$, взятые со знакомъ $\delta_2$, а $\gamma$ и $\gamma'$ отрѣзки $CF$ и $CE$, взятые со знакомъ $\delta_3$; тогда мы будемъ имѣть:

$$\delta_1 : \delta_2 = \alpha : \beta', \quad \delta_2 : \delta_3 = \beta : \gamma', \quad \delta_3 : \delta_1 = \gamma : \alpha'.$$

Составивъ изъ этихъ пропорцій одну сложную, получимъ

$$\delta_1\delta_2\delta_3 : \delta_2\delta_3\delta_1 = \alpha\beta\gamma : \alpha'\beta'\gamma';$$

слѣдовательно,

$$\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma',$$

или

$$AD \,.\, BE \,.\, CF = AF \,.\, BD \,.\, CE.$$

Въ этомъ равенствѣ заключается теорема Птоломея (см. § 7).

II. Пусть будутъ три прямыя: $\delta=0$, $\delta'=0$, $\delta''=0$, пересѣкающіяся въ точкахъ: $A\,(\delta'=0,\ \delta''=0)$, $B\,(\delta''=0,\ \delta=0)$, $C\,(\delta=0,\ \delta''=0)$, и три прямыя $AD$, $BF$, $CE$, пересѣкающіяся въ одной точкѣ $G$, и положимъ, что уравненія послѣднихъ суть:

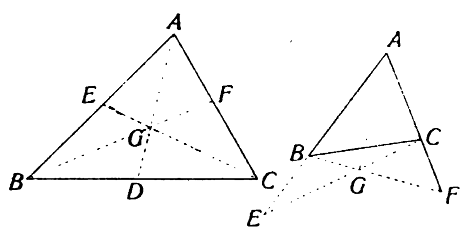
$$\delta' = \lambda\,\delta'',\ \ \delta'' = \mu\delta,\ \ \delta = \nu\delta'. \qquad (1)$$

Если $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ означаютъ трилинейныя координаты точки $G$, то уравненія (1) для этой точки существуютъ вмѣстѣ. Изъ нихъ выводимъ

$$\delta'\,\delta''\,\delta = \lambda\,\mu\,\nu\,\delta''\,\delta\,\delta'$$

или

$$\lambda\,\mu\,\nu = 1. \qquad (2)$$




Фиг. 50

Положимъ, что прямыя (1) пересѣкаютъ прямыя $\delta=0$, $\delta'=0$, $\delta''=0$ въ точкахъ:

$$D\,(\delta_1',\ \delta_1''), \qquad F\,(\delta_2'',\ \delta_2), \qquad E\,(\delta_3,\ \delta'_3)$$

и пусть $\alpha$, $\alpha'$ будутъ отрѣзки $DC$ и $DB$, взятые со знаками $\delta_1'$ и $\delta_1''$; $\beta$ и $\beta'$ отрѣзки $FA$ и $FC$, взятые со знаками $\delta_2''$ и $\delta_2$, а $\gamma$ и $\gamma'$ отрѣзки $EB$ и $EA$, взятые со знаками $\delta_3$ и $\delta_3'$; мы будемъ имѣть

$$\delta_1' = \lambda\delta_1'',\ \ \delta_2'' = \mu\delta_2,\ \ \delta_3 = \nu\delta'_3;$$

отсюда, принявъ во вниманіе уравненіе (2), выводимъ

$$\frac{\delta_1'}{\delta_1''}\frac{\delta_2''\,\delta_3}{\delta_2\,\delta_3'} = \lambda\,\mu\,\nu = 1;$$

но
$$\delta''_2 : \delta'_3 = \beta : \gamma', \ \delta_3 : \delta''_1 = \gamma : \alpha', \ \delta_1' : \delta_2 = \alpha : \beta';$$
слѣдовательно,
$$\frac{\alpha\,\beta\,\gamma}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'} = 1 \ \text{ или } \ \alpha\,\beta\,\gamma = \alpha'\,\beta'\,\gamma',$$
т.-е.
$$DC\,.\,FA\,.\,EB = DB\,.\,FC\,.\,EA.$$

Въ этомъ равенствѣ заключается теорема *Чевы* (см. **§ 7**).

Обратно, если условіе $\alpha\,\beta\,\gamma = \alpha'\,\beta'\,\gamma'$ удовлетворено, то
$$\frac{\delta_1'\,\delta_2''\,\delta_3}{\delta_1''\,\delta_2\,\delta_3'} = 1,$$
а потому $\lambda\,\mu\,\nu = 1$. При этомъ условіи уравненія (1) могутъ существовать вмѣстѣ и величины $\delta$, $\delta'$, $\delta''$, имъ удовлетворяющія, будутъ трилинейныя координаты точки, чрезъ которую должны проходить данныя прямыя.

Слѣдствія:

1) *Прямыя, проведенныя изъ вершинъ треугольника въ средины противоположныхъ сторонъ, пересѣкаются въ одной точкѣ;* потому что въ этомъ случаѣ $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ и условіе $\alpha\beta\gamma = \alpha'\,\beta'\,\gamma'$ удовлетворено.

2) *Прямыя, раздѣляющія пополамъ внутренніе углы треугольника, пересѣкаются въ одной точкѣ;* потому что въ этомъ случаѣ $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $\nu = 1$ и, слѣдовательно, условіе $\lambda\,\mu\,\nu = 1$ удовлетворено.

3) *Прямая, раздѣляющая пополамъ одинъ изъ внутреннихъ угловъ, $A$, и прямыя, раздѣляющія пополамъ два внѣшніе угла, при вершинахъ $B$ и $C$, пересѣкаются въ одной точкѣ;* потому что въ этомъ случаѣ $\lambda = 1$, $\mu = -1$, $\nu = -1$ и слѣдовательно, условіе (2) опять удовлетворено.

4) *Перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ треугольника на противоположныя стороны, пересѣкаются въ одной точкѣ;* потому что въ этомъ случаѣ имѣемъ: $\lambda = \dfrac{\cos C}{\cos B}$, $\mu = \dfrac{\cos A}{\cos C}$, $\nu = \dfrac{\cos B}{\cos A}$, и слѣдовательно, условіе (2) опять удовлетворено.

5) *Три прямыя, раздѣляющія пополамъ внѣшніе углы треугольника, не могутъ пересѣкаться въ одной точкѣ;* потому что въ этомъ случаѣ: $\lambda = -1$, $\mu = -1$, $\nu = -1$, и условіе (1) не удовлетворено.

Уравненія этихъ прямыхъ можно написать подъ видомъ:
$$\delta' + \delta'' = 0, \ \ \delta'' + \delta = 0, \ \ \delta + \delta' = 0. \tag{3}$$

Изъ нихъ чрезъ сложеніе получимъ уравненіе

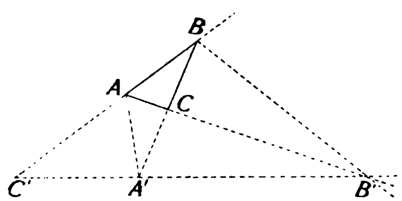
$$\delta + \delta' + \delta'' = 0, \tag{4}$$

принадлежащее прямой, проходящей чрезъ точки пересѣченія прямыхъ (3) съ прямыми:

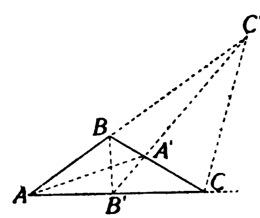
$$\delta = 0,\ \ \delta' = 0,\ \ \delta'' = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ: трилинейныя координаты точки пересѣченія прямой $\delta' + \delta'' = 0$ съ $\delta = 0$ очевидно удовлетворяютъ уравненію (4); также ему удовлетворяютъ координаты пересѣченія прямой $\delta'' + \delta = 0$ съ $\delta' = 0$ и координаты пересѣченія прямой $\delta + \delta' = 0$ съ $\delta'' = 0$.

Итакъ: *если $AA'$, $BB'$ и $CC'$ суть прямыя, раздѣляющія по-*




Фиг. 51




Фиг. 52

*поламъ внѣшніе углы треугольника $ABC$, и $A'$, $B'$, $C'$ точки ихъ пересѣченія съ прямыми $BC$, $CA$ и $AB$, то $A'$, $B'$, $C'$ лежатъ на одной прямой линіи.*

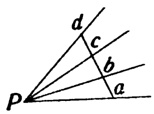
6) *Прямыя, раздѣляющія пополамъ два внутренніе угла $A$ и $B$ съ прямою, раздѣляющею пополамъ внѣшній уголъ $C$, также не могутъ пересѣкаться въ одной точкѣ*; потому что въ этомъ случаѣ $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $\nu = -1$ и условіе $\lambda\mu\nu = 1$ не удовлетворено.

Пересѣченія этихъ прямыхъ со сторонами треугольника: $\delta = 0$, $\delta' = 0$, $\delta'' = 0$ находятся на одной прямой

$$\delta + \delta' - \delta'' = 0;$$

потому что послѣднему уравненію удовлетворяютъ координаты пересѣченія прямыхъ $\delta' - \delta'' = 0$ и $\delta = 0$, координаты пересѣченія $\delta'' - \delta = 0$ съ $\delta' = 0$ и координаты пересѣченія $\delta + \delta' = 0$ съ $\delta'' = 0$. Итакъ: *Если $AA'$ и $BB'$ раздѣляютъ пополамъ внутренніе углы $A$ и $B$, а $CC'$ внѣшній уголъ $C$, то три точки $A'$, $B'$, $C'$,* *въ которыхъ эти прямыя встрѣчаютъ стороны треугольника, лежатъ на одной прямой $B'\,C'$.*

III. *Ангармоническій пучекъ.* Если четыре прямыя пересѣкаются въ точкѣ $P$ и притомъ пересѣчены какою-нибудь прямою въ точкахъ $a$, $b$, $c$, $d$, то отрѣзки, заключающіеся между этими точками, должны составлять ангармоническое отношеніе $\frac{ac}{bc}:\frac{ad}{bd}$, независящее отъ положенія пересѣкающей $ad$. Это предложеніе было уже доказано въ **§ 25,** задача 1. Можно доказать его еще слѣдующимъ образомъ:




Фиг. 53

Пусть $\delta=0$ будетъ уравненіе прямой $Pa$, $\delta'=0$ уравненіе прямой $Pb$, $\delta'=m\delta$ уравненіе прямой $Pc$, $\delta'=m'\delta$ уравненіе прямой $Pd$; $(\delta,\delta')$ координаты точки $c$, $(\delta_1,\delta_1')$ координаты точки $d$, $s$ и $s'$ отрѣзки $ac$ и $bc$, взятые со знаками $\delta$ и $\delta'$, а $s_1$ и $s_1'$ отрѣзки $ad$ и $bd$, взятые со знаками $\delta_1$ и $\delta_1'$. По доказанному выше мы будемъ имѣть:

$$\frac{\delta}{\delta_1}=\frac{s}{s_1},\quad \frac{\delta'}{\delta_1'}=\frac{s'}{s_1'};$$

поэтому

$$\frac{\delta}{\delta_1}:\frac{\delta'}{\delta_1'}=\frac{s}{s_1}:\frac{s'}{s_1'}$$

или

$$\frac{\delta_1'}{\delta_1}:\frac{\delta'}{\delta}=\frac{s}{s'}:\frac{s_1'}{s_1};$$

но $\delta_1'=m'\delta_1$ и $\delta'=m\delta$; слѣдовательно,

$$m':m=\frac{s}{s'}:\frac{s_1}{s_1'}. \tag{1}$$

Такъ какъ $m$ и $m'$ зависятъ только отъ угловъ, составленныхъ прямыми $Pc$ и $Pd$ съ $Pa$ и $Pb$, то найденное отношеніе не зависитъ отъ положенія прямой $ad$. Это и требовалось доказать.

Означивъ чрезъ $\theta$ уголъ $bPa$, чрезъ $\alpha$ уголъ $cPa$ и чрезъ $\alpha'$ уголъ $dPa$, имѣемъ

$$m=\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\alpha},\quad m'=\frac{\sin(\theta-\alpha')}{\sin\alpha'};$$

отъ этого пропорція (1) приведется къ слѣдующей:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}:\frac{\sin\alpha'}{\sin(\theta-\alpha')}=\frac{s}{s'}:\frac{s_1}{s_1{}'}, \tag{2}$$

т.-е.

$$\frac{\sin(aPc)}{\sin(bPc)}:\frac{\sin(aPd)}{\sin(bPd)}=\frac{ac}{bc}:\frac{ad}{bd}. \tag{3}$$

Четыре прямыя, пересѣкающіяся въ одной точкѣ $P$, называются *ангармоническимъ пучкомъ*, а найденное отношеніе (1) *ангармоническимъ отношеніемъ пучка*. Четыре точки $a$, $b$, $c$, $d$ образуютъ на пересѣкающей $ad$ *ангармоническое дѣленіе*. Ангармоническое отношеніе, для краткости означаютъ такъ $(abcd)$. Здѣсь буквы могутъ означать или точки, или прямыя, которыя соединяютъ эти точки съ $P$. Мы будемъ называть $P$ *полюсомъ* пучка, а прямыя $Pa$, $Pb$, $Pc$, $Pd$, — *лучами*.

Два луча $Pa$ и $Pb$, на которыхъ находятся точки $a$ и $b$, принимаемыя за начала отрѣзковъ $s$, $s'$, $s_1$, $s_1{}'$, разсматриваются какъ *основная пара* лучей, а два прочіе луча $Pc$ и $Pd$, на которыхъ находятся концы $c$ и $d$ тѣхъ же отрѣзковъ, какъ *сопряженная* пара съ первою; притомъ $Pc$ есть лучъ, сопряженный съ $Pa$, а $Pd$ — сопряженный съ $Pb$.

Ангармоническое отношеніе одного и того же пучка можетъ имѣть 6 разныхъ видовъ, смотря потому, которые изъ лучей берутся за основные и сопряженные, а именно:

$$(abcd),\ (abdc),\ (acdb),\ (acbd),\ (adbc),\ (adcb); \tag{4}$$

другіе же виды не представляютъ особенной величины ангармоническаго отношенія; такъ, напримѣръ

$$(badc)=(cdab)=(dcba)=(abcd);$$

потому что

$$\frac{bd}{ad}:\frac{bc}{ac}=\frac{ca}{da}:\frac{cb}{db}=\frac{db}{cb}:\frac{da}{ca}=\frac{ac}{bc}:\frac{ad}{bd}.$$

По одному изъ отношеній (4) легко найти прочія. Чтобы получить ангармоническое отношеніе пучка, надобно составить ангармоническое отношеніе изъ отрѣзковъ какой-нибудь пересѣкающей. Проще всего будетъ взять для этой цѣли пересѣкающую, параллельную одному изъ лучей. Положимъ напримѣръ, что пересѣкающая параллельна лучу $Pd$. Тогда точка $d$ будетъ безконечно удалена отъ $a$ и $b$; слѣдовательно, отрѣзки $s_1$ и $s'_1$ будутъ безконечны. Такъ какъ во всякомъ случаѣ $s_1 + s'_1 = ab$ *), то $\frac{s_1}{s'_1} + 1 = \frac{ab}{s'_1}$, что при $s'_1 = \infty$ даетъ $\frac{s_1}{s'_1} + 1 = 0$ и слѣдовательно, $\frac{s_1}{s'_1} = -1$. Означая для сокращенія $\frac{m'}{m}$ чрезъ $A$, по уравненію (1) будемъ имѣть:

$$A = -\frac{s}{s'} = \mp\frac{ac}{bc}, \tag{5}$$

гдѣ изъ двухъ знаковъ надобно взять —, когда лучъ $Pc$ проходитъ между $Pa$ и $Pb$ и $+$ въ противномъ случаѣ. Такимъ образомъ, зная величины отрѣзковъ $ac$ и $bc$ прямой, параллельной лучу $Pd$, легко найти ангармоническое отношеніе $A$. Алгебраическая сумма $s + s'$ во всякомъ случаѣ означаетъ отрѣзокъ $ab$, имѣющій начало въ $a$ и конецъ въ $b$. Отрѣзокъ $s'$ имѣетъ начало въ $b$, а конецъ въ $c$, а потому $-s'$ имѣетъ начало въ $c$, а конецъ въ $b$; слѣдовательно,

$$A' = \mp\frac{ab}{cb} = \frac{s + s'}{s'} \tag{6}$$

есть ангармоническое отношеніе $(acbd)$, 4-й изъ видовъ (4), гдѣ лучи $a$ и $c$ разсматриваются какъ основные, а $b$ и $d$ какъ съ ними сопряженные. Формулы (5) и (6) даютъ

$$A + A' = 1,$$

т.-е.

$$(abcd) + (acbd) = 1.$$

Замѣтимъ еще, что по формулѣ (1)

$$\frac{1}{A} = \frac{s_1}{s'_1} : \frac{s}{s'} = (abdc).$$

Итакъ, если $(abcd) = A$, то

$$(acbd) = 1 - A,\ (abdc) = \frac{1}{A},\ (acdb) = \frac{1}{1-A},\ (adbc) = \frac{A-1}{A},$$

$$(adcb) = \frac{A}{A-1}. \tag{7}$$

*) Здѣсь предполагается, что для точекъ въ углѣ $aPb$ разстоянія отъ $Pa$ и $Pb$ и соотвѣтственные отрѣзки пересѣкающей положительны.

Положимъ, что лучи пучка: $Pa$, $Pb$, $Pc$, $Pd$ отнесены къ какимъ-нибудь осямъ: $\delta = 0$, $\delta' = 0$, имѣющимъ начало въ $P$, и даны уравненіями:

$$\delta' = m\delta, \quad \delta' = m'\delta, \quad \delta' = n\delta, \quad \delta' = n'\delta. \tag{8}$$

Выразимъ ангармоническое отношеніе $A$ помощью величинъ: $m$, $m'$, $n$, $n'$. Для этого надобно найти отношеніе (5):

$$A = -\frac{s}{s'},$$

гдѣ $s$ и $s'$ суть отрѣзки на пересѣкающей, параллельной четвертому лучу. Пусть уравненіе этой пересѣкающей будетъ

$$\delta' = n'\delta + p, \tag{9}$$

а $(\delta_1 \delta_1')$, $(\delta_2 \delta_2')$, $(\delta_3 \delta_3')$ пересѣченія ея съ лучами $Pa$, $Pb$, $Pc$. На основаніи доказаннаго въ концѣ **§ 27** мы будемъ имѣть:

$$\frac{s}{s'} = \frac{\delta_3 - \delta_1}{\delta_2 - \delta_3};$$

слѣдовательно,

$$A = \frac{\delta_3 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_2}. \tag{10}$$

Координаты точки $(\delta_1 \delta_1')$ должны удовлетворять первому изъ уравненій (8) и уравненію пересѣкающей (9); поэтому

$$\delta_1' = m\delta_1, \quad \delta_1' = n'\delta_1 + p;$$

отсюда выводимъ $\delta_1 = \dfrac{p}{m - n'}$. Также найдемъ: $\delta_2 = \dfrac{p}{m' - n'}$, $\delta_3 = \dfrac{p}{n - n'}$. Вставивъ эти величины $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ въ выраженіе (10), получимъ

$$A = \frac{m - n}{m' - n} : \frac{m - n'}{m' - n'}. \tag{11}$$

Когда отношеніе пучка $P$ равно $-1$, тогда пучекъ называется *гармоническимъ*. Въ этомъ случаѣ формула (1) даетъ $m' = -m$ и слѣдовательно,

$$\frac{s}{s'} + \frac{s_1}{s_1'} = 0. \tag{12}$$

Для этого необходимо, чтобы одинъ изъ лучей $Pc$ и $Pd$, сопряженныхъ съ $Pa$ и $Pb$, проходилъ въ углѣ $aPb$, а другой внѣ угла. Если $m$ положительное количество, то $Pc$ лежитъ въ углѣ $aPb$, а потому $\frac{s}{s'} = \frac{ac}{bc}$, $\frac{s_1}{s_1'} = -\frac{ad}{bd}$, и по уравненію (12):

$$\frac{ac}{bc} = \frac{ad}{bd} = 0;$$

откуда

$$\frac{ad}{bd} = \frac{ac}{bc} \text{ и } \frac{ad}{ac} = \frac{ad - ab}{ab - ac}.$$

Эта пропорція *гармоническая* *); $ab$ есть среднiй гармоническiй отрѣзокъ между $ad$ и $ac$:

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ad} + \frac{1}{ac}\right) = \frac{ad + ac}{2ad \,.\, ac}.$$

$Pd$ и $Pc$ суть сопряженные гармоническiе съ $Pa$ и $Pb$. Точки $(abcd)$ составляютъ *гармоническое дѣленiе.*

Если прямыя (8) составляютъ гармоническiй пучекъ, то въ формулѣ (11) $A = -1$ и слѣдовательно,

$$\frac{m - n}{m' - n} + \frac{m - n'}{m' - n'} = 0$$

или

$$(m - n)\,(m' - n') + (m - n')\,(m' - n) = 0,$$

что приводится еще къ слѣдующему уравненiю

$$(m + m')\,(n + n') - 2\,(mm' + mn') = 0.$$

IV. *Полный четыреугольникъ.* Четыреугольникъ $ABCD$ съ продолженiями его сторонъ до встрѣчи въ $E$ и $F$ называется полнымъ. Прямыя $AC$, $BD$ и $EF$ называются его дiагоналями. Въ полномъ четыреугольникѣ двѣ противоположныя стороны съ дiагональю, проходящею чрезъ ихъ пересѣченiе, и прямою, соединяющею эту точку съ пересѣченiемъ двухъ другихъ дiагоналей, составляютъ

*) Три величины: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ составляютъ *гармоническую* пропорцiю, когда разность между первою и второю относится къ разности между второю и третьею, какъ первая къ третьей, т.-е. $\alpha - \beta : \beta - \gamma = \alpha : \gamma$. Вторая величина $\beta$ называется среднею гармоническою между $\alpha$ и $\gamma$. Изъ пропорцiи выводимъ

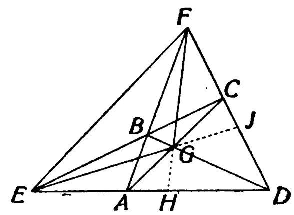
$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right).$$

гармоническій пучекъ, такъ что первыя двѣ прямыя суть сопряженныя гармоническія съ двумя другими, т.-е. ($ED$, $EC$, $EJ$, $EF$) и ($FD$, $FA$, $FH$, $FE$) составляютъ гармоническіе пучки. Для доказательства положимъ, что $\delta = 0$, $\delta' = 0$, $\delta'' = 0$ и $\lambda\delta + \mu\delta + \nu\delta = 0$ суть соотвѣтственно уравненія четырехъ прямыхъ: $ED$, $EC$, $FD$ и $AF$. Полагая послѣдовательно, что четвертое уравненіе совмѣстно съ первыми тремя, мы получимъ уравненія:

$$\mu\delta' + \nu\delta'' = 0,$$

$$\lambda\delta + \nu\delta'' = 0, \quad \lambda\delta + \mu\delta' = 0,$$

принадлежащія прямымъ: $AC$, $DB$ и $EF$. Вычтя первое изъ этихъ уравненій изъ втораго, получимъ уравненіе



Фиг. 54

$$\lambda\delta - \mu\delta' = 0,$$

принадлежащее прямой, проходящей чрезъ $G$, пересѣченіе прямыхъ $BD$ и $AC$; а такъ какъ ему удовлетворяютъ координаты точки $E$ ($\delta = 0$, $\delta' = 0$), то оно принадлежитъ прямой $EG$. Итакъ, уравненія лучей пучка ($ED$, $EC$, $EG$ и $EF$) суть:

$$\delta = 0, \ \delta' = 0, \quad \lambda\delta - \mu\delta' = 0, \quad \lambda\delta + \mu\delta' = 0;$$

отсюда получимъ отношеніе

$$\frac{-\lambda}{\mu} : \frac{\lambda}{\mu} = -1,$$

показывающее, что пучекъ — гармоническій.

Слѣдовательно, четыре точки $D$, $J$, $C$, $F$ составляютъ гармоническое дѣленіе, т.-е. $(DCJF) = -1$.

По формуламъ (7) мы будемъ имѣть:

$$(DJCF) = 2, \ (DCFJ) = -1, \ (DJFC) = \tfrac{1}{2}, \quad (DFCJ) = 2,$$

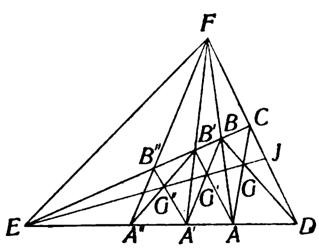
$$(DFJC) = \tfrac{1}{2}.$$

Сверхъ того $(FJCD) = 1 : (DCFJ) = -1$; слѣдовательно, $EC$ и $CD$ суть сопряженныя гармоническія съ $EF$ и $EJ$.

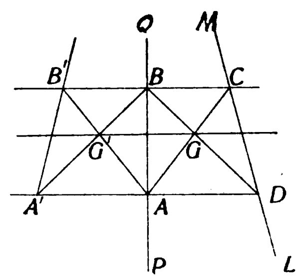
Все доказанное, очевидно, относится и къ пучку ($FD$, $FH$, $FA$ $FE$).

**Слѣдствіе.** Въ четыреугольникахъ: $ABCD$, $A'B'BA$, $A''B''B'A'$, составленныхъ двумя прямыми $ED$ и $EC$ и системою прямыхъ, сходящихся въ одной точкѣ $F$, діагонали пересѣкаются въ точкахъ $G$, $G'$, $G''$, находящихся на одной прямой, проходящей чрезъ точку $E$; потому что прямая, соединяющая точку $E$ съ какою-либо изъ точекъ $G$, $G'$, $G''$ вмѣстѣ съ $ED$, $EC$ и $EF$ должна составить гармоническій пучекъ и, слѣдовательно, должна проходить чрезъ опредѣленную точку $J$, положеніе которой опредѣляется условіемъ, что $FJ$ есть средняя гармоническая между $FD$ и $FC$. Если точка $E$ будетъ безконечно удалена отъ $D$, то $ED$, $EC$ и $EJ$ будутъ параллельны.

Задачи: a) Даны двѣ прямыя $PQ$, $LM$, пересѣченіе которыхъ не помѣщается на чертежѣ, и точка $A'$. Требуется провести прямую чрезъ данную точку и неизвѣстное пересѣченіе данныхъ пря-




Фиг. 55




Фиг. 56

мыхъ. Проведемъ чрезъ $A'$ прямую, пересѣкающую данныя прямыя, и пусть $A$ и $D$ будутъ точки пересѣченія; проведемъ еще прямую, параллельную $A'D$, и замѣтимъ точки $B$ и $C$ пересѣченій ея съ $PQ$ и $LM$. Послѣ того проведемъ прямыя $AC$, $DB$, $A'B$; замѣтимъ точку $G$, чрезъ которую проведемъ параллельную съ $DA'$, и замѣтимъ пересѣченіе ея съ $A'B$; потомъ проведемъ $AG'$ до встрѣчи съ $CB$ и замѣтимъ точку встрѣчи $B'$; наконецъ проведемъ прямую $A'B'$. Эта прямая, на основаніи предыдущей теоремы, должна проходить чрезъ пересѣченіе прямыхъ $AB$ и $DC$; слѣдовательно будетъ искомая.

b) По тремъ даннымъ прямымъ: $EF$, $EC$, $ED$ найти четвертую $EJ$, составляющую съ ними гармоническій пучекъ.

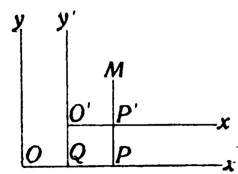
Проведемъ (фиг. 54) чрезъ точку $F$ первой прямой двѣ пересѣкающія такъ, чтобы образовался четыреугольникъ $ABCD$; проведемъ діагонали этого четыреугольника и замѣтимъ ихъ пересѣченіе $G$. Прямая $EG$ будетъ искомая. * —

### C. Перемѣна координатъ.

**29.** Уравненіе плоской линіи въ прямолинейныхъ координатахъ зависитъ отъ положенія координатныхъ осей; при нѣкоторыхъ осяхъ оно можетъ быть проще, чѣмъ при другихъ. Для удобнѣйшаго изслѣдованія линіи, должно стараться такъ выбирать оси, чтобы уравненіе, къ нимъ отнесенное, было по возможности простѣйшее. Съ этою цѣлью мы выведемъ формулы, служащія для перехода отъ одной системы прямолинейныхъ координатъ къ другой.

1) *Перемѣна координатныхъ осей въ другія, имъ параллельныя* (*перемѣна начала координатъ*).

Пусть будутъ $Ox$ и $Oy$ оси, къ которымъ первоначально была отнесена точка $M$ посредствомъ координатъ $x = OP$ и $y = MP$; $O'x'$ и $O'y'$ новыя оси, имъ параллельныя и въ одну сторону съ ними направленныя; $x' = O'P'$, $y' = MP'$ координаты точки $M$ относительно новыхъ осей, а $OQ = a$, $O'Q = b$ координаты новаго начала $O'$ относительно первыхъ осей.



Фиг. 57

Такъ какъ

$$OP = PQ + OQ, \quad MP = MP' + PP' = MP' + O'Q,$$

то

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \tag{1}$$

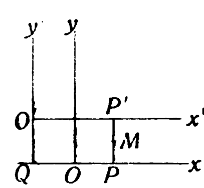
т.-е. *прежнія координаты равны новымъ, сложеннымъ съ координатами новаго начала.*

Легко повѣрить, что эти формулы справедливы при всякомъ положеніи новаго начала $O'$ и при всякомъ положеніи точки $M$, если только будемъ соблюдать правило знаковъ координатъ. Напримѣръ, въ фигурѣ 58 имѣемъ:

$$x = OP, \quad y = MP,$$

$$x' = O'P' = PQ, \quad y' = -MP',$$

$$a = -OQ, \quad b = O'Q = PP',$$



Фиг. 58

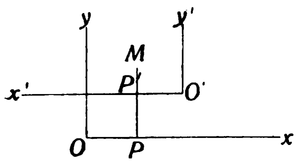
и формулы (1) даютъ:

$$OP = PQ - OQ, \quad MP = -MP' + PP' = PP' - MP'.$$

что согласно съ фигурою.

Если требуется откладывать положительныя величины $x'$ по направленію $Ox'$ (фиг. 59), противоположному положительнымъ величинамъ $x$, то въ формулѣ $x = x' + a$ надобно перемѣнить знакъ при $x'$, т.-е. взять $x = a - x'$. Если же положительныя $y'$ противоположны положительнымъ $y$, то должно вмѣсто $y = y' + b$ взять формулу

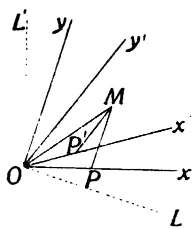
$$y = b - y'.$$



Фиг. 59

2) *Перемѣна направленій координатныхъ осей при томъ же началѣ.*

Пусть будутъ $x = OP$, $y = MP$ первоначальныя координаты точки $M$ относительно осей: $Ox$, $Oy$, а $x' = OP'$, $y' = MP'$ новыя координаты этой точки относительно осей: $Ox'$, $Oy'$. Выразимъ $x$ и $y$ функціями координатъ $x'$ и $y'$.



Фиг. 60

Такъ какъ разстояніе $OM$ съ координатами точки $M$ составляетъ треугольникъ, то проекція $OM$ на произвольной оси $l$ равна суммѣ проекцій координатъ на томъ же направленіи, т.-е.

$$OM \cos(l, OM) = x \cos(lx) + y \cos(ly)$$

$$OM \cos(l, OM) = x' \cos(lx') + y' \cos(ly');$$

слѣдовательно,

$$x \cos(lx) + y \cos(ly) = x' \cos(lx') + y' \cos(ly'). \qquad (2)$$

Положимъ, что первоначальныя координатныя оси $Ox$, $Oy$ прямоугольныя и возьмемъ для $l$ направленіе оси $Ox$; тогда

$$\cos(ly) = \cos(yOx) = \cos(90^\circ) = 0$$

$$\cos(lx) = 1, \quad \cos(lx') = \cos(xx'), \quad \cos(ly') = \cos(xy'),$$

а потому формула (2) даетъ

$$x = x' \cos(xx') + y' \cos(xy'). \qquad (3)$$

Если же возьмемъ для $l$ направленіе оси $Oy$, то получимъ:

$$\cos(lx) = \cos(yOx) = 0, \quad \cos(ly) = \cos(yy) = 1,$$

$$\cos(lx') = \cos(yx'), \quad \cos(ly') = \cos(yy'),$$

и по формулѣ (2),

$$y = x' \cos(yx') + y' \cos(yy'). \tag{4}$$

Здѣсь подъ направленіями осей должно подразумѣвать тѣ, которыя соотвѣтствуютъ положительнымъ координатамъ. Чтобы опредѣлить уголъ, составляемый одною изъ новыхъ осей съ какою-либо изъ прежнихъ, положимъ, что эти оси совпадаютъ и направлены въ одну сторону, потомъ представимъ себѣ, что вторая неподвижна, а первая вращается около начала координатъ до тѣхъ поръ, пока не приметъ даннаго положенія, и замѣтимъ уголъ, на который она при этомъ поворотится. Такъ какъ въ формулѣ (2) и (3) входятъ косинусы угловъ, притомъ $\cos a = \cos(360^\circ - a)$, то вращеніе можно производить въ ту или другую сторону.

Мы согласимся, для однообразія, производить вращеніе всегда въ одну сторону, а именно: отъ направленія положительнаго $x$ къ положительному $y$, отъ положительнаго $y$ къ отрицательному $x$, отъ отрицательнаго $x$ къ отрицательному $y$, и наконецъ, отъ отрицательнаго $y$ къ положительному $x$. Вмѣсто 4-хъ угловъ, входящихъ въ формулы (3) и (4), можно ввести только два, составленные новыми осями съ прежнею осью $Ox$. Положивъ $\angle xx' = \alpha$, $\angle xy' = \beta$, будемъ имѣть:

$$\angle yx' = 90^\circ - \alpha \quad \text{или} \quad \alpha - 90^\circ,$$

$$\angle yy' = 90^\circ - \beta \quad \text{или} \quad \beta - 90^\circ:$$

отчего формулы (3) и (4) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \cos\beta, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \sin\beta. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Эти формулы служатъ для перехода отъ прямоугольныхъ координатъ къ косоугольнымъ.

Когда оси $Oy'$ и $Ox'$ также прямоугольныя, тогда $\beta - \alpha = \pm 90^\circ$, слѣдовательно, $\cos\beta = \mp \sin\alpha$, $\sin\beta = \pm \cos\alpha$, и формулы (5) приведутся къ слѣдующимъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha \mp y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha \pm y' \cos\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

которыя служатъ для перемѣны прямоугольныхъ координатъ въ другія прямоугольныя.

Положимъ, что прежнія оси $Ox$ и $Oy$ составляютъ между собою какой-нибудь уголъ $\theta$. Для исключенія $y$ изъ уравненія (2) возьмемъ $l$ перпендикулярно къ $Oy$ и въ одну сторону съ $Ox$; тогда $(ly) = 90^\circ$, $(lx) = 90^\circ - \theta$ когда $\theta < 90^\circ$ и $(lx) = \theta - 90^\circ$ когда $\theta > 90^\circ$, а потому $\cos(ly) = 0$, $\cos(lx) = \sin\theta$ и по уравненію (2) получимъ

$$x = \frac{x'\cos(x'l) + y'\cos(y'l)}{\sin\theta}. \tag{7}$$

Для исключенія $x$ изъ уравненія (2) возьмемъ для $l$ направленіе $l'$ перпендикулярное къ $Ox$ и направленное въ одну сторону съ $Oy$; тогда по уравненію (2) получимъ

$$y = \frac{x'\cos(x'l') + y'\cos(y'l')}{\sin\theta}. \tag{8}$$

Четыре угла $(x'l)$, $(y'l)$, $(x'l')$, $(y'l')$ можно опредѣлить помощью трехъ: $(x'x) = \alpha$, $(y'x) = \beta$ и $\theta$, наблюдая при этомъ указанное выше правило для опредѣленія угловъ между новыми и прежними осями, а именно:

$$(x'l) = 90^\circ - \theta + \alpha, \quad (y'l) = 90^\circ - \theta + \beta,$$

$$(x'l') = 90^\circ - \alpha, \text{ когда } \alpha < 90^\circ, \text{ и } (x'l') = \alpha - 90^\circ, \text{ когда } \alpha > 90^\circ,$$

$$(x'l') = 90^\circ - \beta, \text{ когда } \beta < 90^\circ, \text{ и } (y'l') = \beta - 90^\circ, \text{ когда } \beta > 90^\circ;$$

поэтому формулы (7) и (8) приводятся къ слѣдующимъ общимъ формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x'\sin(\theta-\alpha) + y'\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}, \\ y &= \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\theta} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

для перемѣны какихъ-нибудь прямолинейныхъ координатъ въ другія.

Если новыя оси прямоугольныя, то

$$\beta - \alpha = \pm 90^\circ, \quad \sin\beta = \pm\cos\alpha, \quad \sin(\theta-\beta) = \mp\cos(\theta-\alpha).$$

а потому формулы (9) приведутся къ слѣдующимъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(\theta - \alpha) \mp y' \cos(\theta - \alpha)}{\sin\theta}, \\ y &= \frac{x' \sin\alpha \pm y' \cos\alpha}{\sin\theta}, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

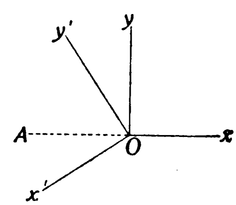
которыя служатъ для перемѣны косоугольныхъ координатъ въ прямоугольныя.

Изъ формулъ (10) можно также вывести формулы (6) для перемѣны прямоугольныхъ координатъ въ прямоугольныя, положивъ $\theta = 90^\circ$.

Примѣръ:

Перемѣнить прямоугольныя оси $Ox$, $Oy$ на другія прямоугольныя:

$$Ox',\ Oy' \text{ при } \angle yOy' = 45^\circ.$$



Фиг. 61

Въ такомъ случаѣ

$$\alpha = 180^\circ + \angle AOx' = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ,$$

$$\beta = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ, \quad \beta - \alpha = -90^\circ,$$

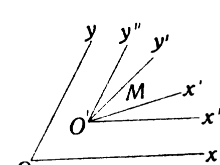
$$\sin\alpha = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\alpha = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

слѣдовательно, по формуламъ (5) имѣемъ:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(y' - x').$$

3) *Перемѣна начала и направленій координатныхъ осей.*



Фиг. 62

Пусть будутъ $Ox$, $Oy$ первоначальныя оси, $O'x'$, $O'y'$ новыя, имъ непараллельныя; $a$, $b$ координаты новаго начала $O'$ относительно осей $Ox$, $Oy$; $x$, $y$ прежнія и $x'$, $y'$ новыя координаты какой-либо точки $M$. Чтобы привести разсматриваемый случай перемѣны координатъ къ двумъ предыдущимъ, возьмемъ еще вспомогательныя координаты $x''$, $y''$ точки $M$, относительно осей $O'x''$, $O'y''$, параллельныхъ первоначальнымъ осямъ $Ox$, $Oy$, и при одномъ началѣ съ новыми осями $O'x'$, $O'y'$. По формуламъ для перемѣны начала координатъ имѣемъ:

$$x = x'' + a, \quad y = y'' + b, \tag{11}$$

а формулы для перемѣны координатъ $x''$, $y''$ въ $x'$, $y'$ берутъ видъ

$$x'' = a'x' + a''y', \quad y'' = b'x' + b''y', \tag{12}$$

гдѣ коеффиціенты: $a'$, $a''$, $b'$, $b''$, опредѣляются углами, составляемыми осями: $O'x'$, $O'y'$ съ осями: $O'x''$, $O'y''$ или съ параллельными имъ $Ox$, $Oy$.

Исключивъ изъ формулъ (11) и (12) вспомогательныя координаты $x''$, $y''$, получимъ:

$$x = a + a'x' + a''y', \quad y = b + b'x' + b''y'. \tag{13}$$

Разсмотрѣвъ всѣ выведенныя формулы для перемѣны прямолинейныхъ координатъ въ прямолинейныя находимъ, что *первоначальныя координаты выражаются всегда раціональными линейными функціями новыхъ координатъ.*

Задачи:

1) Данныя прямыя:

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0$$

взять за оси координатъ такъ, чтобы первая была осью новыхъ абсциссъ $x'$, а вторая осью новыхъ ординатъ $y'$; притомъ выразить $x'$ и $y'$ функціями $x$ и $y$, и обратно — $x$ и $y$ функціями $x'$ и $y'$.

Рѣшеніе. Означивъ чрезъ $\theta$ уголъ $yOx$, чрезъ $\theta'$ уголъ $y'Ox'$ и чрезъ $\delta$ и $\delta'$ кратчайшія разстоянія точки $(x, y)$ отъ данныхъ прямыхъ, будемъ имѣть:

$$x' = \frac{\delta'}{\sin\theta'}, \quad y' = \frac{\delta}{\sin\theta'},$$

что помощью формулъ (1) **§ 27** приведется къ слѣдующему:

$$y' = \frac{1}{P\sin\theta'}(Ax + By + C), \quad x' = \frac{1}{P'\sin\theta'}(A'x + B'y + C').$$

Помощью формулы (10), **§ 25** IV, легко найти, что

$$\sin\theta' = \frac{\pm(AB' - BA')}{PP'\sin\theta},$$

гдѣ должно взять $\pm$, смотря потому, будетъ ли $AB' - BA'$ положительная или отрицательная; слѣдовательно,

$$y' = \pm \frac{P'(Ax+By+C)\sin\theta}{AB'-BA'}, \quad x' = \pm \frac{P(A'x+B'y+C')\sin\theta}{AB'-BA'}.$$

Рѣшивъ эти уравненія относительно $x$ и $y$, получимъ

$$x = \frac{BC'-CB'}{AB'-BA'} \pm \left(\frac{B'}{P'}y' - \frac{B}{P}x'\right)\frac{1}{\sin\theta}$$

$$y = \frac{CA'-AC'}{AB'-BA'} \pm \left(\frac{A}{P}x' - \frac{A'}{P'}y'\right)\frac{1}{\sin\theta}.$$

2) Выразить площадь параллелограмма функціею косоугольныхъ координатъ трехъ смежныхъ вершинъ:

$$(0,\ 0), \quad (x_1y_1), \quad (x_2y_2).$$

Рѣшеніе. Возставимъ изъ начала координатъ $O$ прямую $Oy'$, перпендикулярную къ оси $Ox$, направленную въ одну сторону съ $Oy$ относительно $Ox$ и возьмемъ $Ox$ и $Oy'$ за новыя оси координатъ. Означая чрезъ $\theta$ уголъ $xOy$, чрезъ $(x'_1y'_1)$ новыя координаты точки $(x_1y_1)$, а чрезъ $(x'_2y'_2)$ новыя координаты точки $(x_2y_2)$ будемъ имѣть:

$$x'_1 = x_1 + y_1\cos\theta, \quad y'_1 = y_1\sin\theta$$

$$x'_2 = x_2 + y_2\cos\theta, \quad y'_2 = y_2\sin\theta.$$

Выраженіе площади параллелограмма въ прямоугольныхъ координатахъ, какъ доказано въ **§ 21**, есть

$$(x'_1y'_2 - y'_1x'_2),$$

и помощью предыдущихъ формулъ преобразуется въ слѣдующую:

$$(x_1y_2 - y_1x_2)\sin\theta.$$

### D. **О плоскихъ линіяхъ вообще. Линіи втораго порядка.**

**30.** Плоскія линіи раздѣляются на *алгебраическія* и *трансцендентныя*. Линія называется алгебраическою, если уравненіе ея относительно прямолинейныхъ координатъ, опредѣляющихъ ея точки, есть алгебраическое, и трансцендентной, когда ея уравненіе въ прямолинейныхъ координатахъ трансцендентное. Прямая и окружность круга суть алгебраическія линіи, а линіи, опредѣленныя уравненіями: $y = \log x$, $y = \sin x$, трансцендентныя.

Алгебраическія линіи раздѣляются на порядки, опредѣляемые степенями уравненій. Линія, у которой уравненіе алгебраическое степени $n$ и непонижаемо, называется алгебраическою порядка $n$. Всякая прямая есть линія перваго порядка и обратно всѣ линіи перваго порядка суть прямыя, а потому линіи высшихъ порядковъ суть кривыя. Окружность круга есть линія втораго порядка. Степенью алгебраическаго уравненія $F(x, y) = 0$ о двухъ перемѣнныхъ $x$ и $y$, означающихъ прямолинейныя координаты, называется наибольшая сумма показателей у $x$ и $y$ въ каждомъ членѣ. Этимъ числомъ опредѣляется и порядокъ линіи, которой принадлежитъ уравненіе $F(x, y) = 0$. При этомъ предполагается, что уравненіе линіи освобождено отъ знаменателей и радикаловъ. Такое уравненіе имѣетъ общій видъ

$$\begin{aligned} & Ax^n + Bx^{n-1}y + Cx^{n-2}y^2 + \ldots + Kx^2y^{n-2} + Lxy^{n-1} + My^n + \\ & + A_1x^{n-1} + B_1x^{n-2}y + C_1x^{n-3}y^2 + \ldots K_1xy^{n-2} + L_1y^{n-1} + \\ & + A_2x^{n-2} + B_2x^{n-3}y + C_2x^{n-4}y^2 + \ldots + K_2y^{n-2} + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + A_{n-1}x + B_{n-1}y + \\ & + A_n = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

гдѣ коэффиціенты: $A$, $B$, $C$, $\ldots A_1$, $B_1$, $\ldots A_n$ постоянныя, положительныя или отрицательныя количества. Нѣкоторые изъ нихъ могутъ быть равны нулю. Въ первой строкѣ находятся всѣ члены степени $n$, которыхъ число есть $n + 1$; во второй всѣ $n$ членовъ степени $n - 1$; въ третьей всѣ $n - 1$ членовъ степени $n - 2$, и т. д.; въ предпослѣдней два члена первой степени, а въ послѣдней одинъ постоянный членъ. Поэтому число всѣхъ членовъ есть сумма натуральныхъ чиселъ:

$$n + 1,\ n,\ n - 2, \ldots, 2,\ 1,$$

что составляетъ треугольное число $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Раздѣленіе линій на алгебраическія и трансцендентныя, а также алгебраическихъ на порядки, не зависитъ отъ положенія координатныхъ осей, т.-е. алгебраическая линія порядка $n$, при одномъ положеніи координатныхъ осей, остается алгебраическою и того же порядка при всякомъ другомъ положеніи осей, а трансцендентная линія остается трансцендентною. Пусть будетъ $F(x, y) = 0$ уравненіе алгебраической линіи порядка $n$, а $x'$, $y'$ новыя прямолинейныя координаты точки $(x, y)$. Прежнія координаты $x$, $y$, по формуламъ предыдущаго §, выразятся въ новыхъ линейными функціями, которыя изобразимъ чрезъ

$$x = a + a'x' + a''y', \quad y = b + b'x' + b''y';$$

поэтому уравненіе $F(x, y) = 0$ перемѣнится на

$$F(a + a'x' + a''y', \ b + b'x' + b''y') = 0, \tag{2}$$

которое будетъ алгебраическимъ относительно $x'$ и $y'$; каждый членъ даннаго уравненія $Nx^p y^q$ перемѣнится на

$$N(a + a'x' + a''y')^p \ (b + b'x' + b''y')^q$$

и можетъ произвести только алгебраическіе члены относительно $x'$ и $y'$ степени не выше $p + q$. А такъ какъ $(p + q) \leqq n$, то степень уравненія (2) будетъ не выше $n$; слѣдовательно, перемѣна координатъ не повышаетъ степени уравненія. Легко видѣть, что степень уравненія (2) не можетъ быть и ниже $n$; потому что, допустивъ противное, мы найдемъ, что степень уравненія повысится, при переходѣ отъ координатъ $x'$, $y'$ обратно къ координатамъ $x$, $y$, а это по доказанному невозможно. Итакъ, уравненіе линіи остается алгебраическимъ порядка $n$. Изъ этого также видно, что алгебраическое уравненіе не можетъ перейти въ трансцендентное, а слѣдовательно, обратно, трансцендентное не можетъ перейти въ алгебраическое.

**31.** Число членовъ въ уравненіи (1), $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, зависитъ отъ числа точекъ, необходимыхъ для опредѣленія линіи. Вообще наибольшее число точекъ, необходимыхъ для опредѣленія алгебраической линіи порядка $n$, есть $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$, если только нѣтъ еще другихъ условій для опредѣленія линіи. Это объясняется слѣдующимъ образомъ:

Чтобы опредѣлить линію порядка $n$, надобно опредѣлить коэффиціенты всѣхъ членовъ ея уравненія (1). Одинъ изъ этихъ коэффиціентовъ можно привести къ единицѣ, раздѣливъ все уравненіе на этотъ коэффиціентъ, такъ что число неизвѣстныхъ коэффиціентовъ будетъ единицею меньше числа членовъ, а именно: $\frac{n(n+3)}{2}$; столько же должно быть условій для ихъ опредѣленія. Можно получить эти условія, допустивъ, что линія проходитъ чрезъ столько данныхъ точекъ, сколько въ ея уравненіи неизвѣстныхъ коэффиціентовъ; потому что отъ подстановленія координатъ каждой данной точки въ уравненіе линіи мы получимъ условное линейное уравненіе между коэффиціентами.

Напр., для опредѣленія линіи 2-го порядка надобно $\frac{2(2+3)}{2}=5$ точекъ. Пусть будутъ: $A(0, 1)$, $B(0, 2)$, $C(2, 2)$, $D(2, 0)$, $E(1, 0)$ данныя точки, чрезъ которыя должна пройти линія 2-го порядка.

Уравненіе линіи 2-го порядка, по раздѣленіи на постоянный членъ, приметъ видъ

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+1=0.$$

Подставивъ въ него вмѣсто $x$ и $y$ координаты данныхъ точекъ, получимъ условныя уравненія:

$$c+e+1=0, \quad 4c+2e+1=0,$$
$$4a+4b+4c+2d+2e+1=0,$$
$$4a+2d+1=0, \quad a+d+1=0,$$

изъ которыхъ выводимъ:

$$c=\frac{1}{2}, \quad e=-\frac{3}{2}, \quad a=\frac{1}{2}, \quad d=-\frac{3}{2}, \quad b=\frac{1}{4};$$

слѣдовательно, уравненіе линіи 2-го порядка, проходящей чрезъ данныя точки, есть

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}xy+\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y+1=0.$$

или, по освобожденіи отъ знаменателей,

$$2x^2+xy+2y^2-6x-6y+4=0.$$

Если положимъ, что въ уравненіи линіи нѣкоторые коэффиціенты равны нулю, или, если возьмемъ для нихъ численныя значенія, то, для опредѣленія остальныхъ коэффиціентовъ, надобно взять меньше, чѣмъ $\frac{n(n+3)}{2}$ точекъ.

— * Можетъ случиться, что при опредѣленіи коэффиціентовъ по вышеизложенному способу мы найдемъ для нихъ безконечныя или неопредѣленныя значенія: это значитъ, что коэффиціентъ, на который было предварительно раздѣлено уравненіе, равенъ нулю, а также и тѣ, которые принимаютъ неопредѣленный видъ. Въ этомъ можно удостовѣриться слѣдующимъ образомъ:

Изобразимъ общее уравненіе линіи порядка $n$ (1), раздѣленное на коэффиціентъ одного члена, чрезъ

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots + l\lambda + \mu = 0, \tag{3}$$

гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu$ суть функціи координатъ вида $x^p y^q$, $a, b, c, \ldots, l$ неизвѣстные коэффиціенты, число которыхъ $\frac{n(n+3)}{2}$ означимъ для сокращенія чрезъ $m$.

Пусть будутъ $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $\ldots$, $(x_m, y_m)$ координаты данныхъ точекъ, чрезъ которыя должна проходить линія, и означимъ вообще чрезъ $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \ldots, \lambda_i, \mu_i$ выводы, полученные отъ подстановленія координатъ $x_i, y_i$, вмѣсто $x$, $y$ въ выраженія $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu$. Подставивъ поочереди координаты данныхъ точекъ вмѣсто $x$, $y$ въ уравненіе линіи (3), получимъ $m$ линейныхъ уравненій для опредѣленія $a, b, \ldots, l$.

$$\left.\begin{array}{l} a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 + \ldots + l\lambda_1 + \mu_1 = 0, \\ a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 + \ldots + l\lambda_2 + \mu_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a\alpha_m + b\beta_m + c\gamma_m + \ldots + l\lambda_m + \mu_m = 0, \end{array}\right\} \tag{4}$$

изъ которыхъ выведемъ величины:

$$a = \frac{A}{M}, \quad b = \frac{B}{M}, \quad c = \frac{C}{M}, \ldots, l = \frac{L}{M},$$

гдѣ знаменатель $M$ есть опредѣлитель [1]), составленный изъ величинъ: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, т.-е. $M = \Sigma \pm (\alpha_1, \beta_2, \gamma_3, \ldots, \lambda_m)$, а числитель $A$ выводится изъ $M$ чрезъ подстановленіе

$$-\mu_1, -\mu_2, \ldots, -\mu_m$$

соотвѣтственно вмѣсто $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; $B$ также выводится изъ $M$ чрезъ подстановленіе $-\mu_1, -\mu_2, \ldots, -\mu_m$ вмѣсто $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m$ и т. д. Внеся найденныя выраженія $a, b, c \ldots l$ въ уравненіе (3) и помноживъ потомъ все уравненіе на $M$, получимъ

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + \ldots + L\lambda + M\mu = 0. \tag{5}$$

---

[1]) См. объ опредѣлителяхъ: *Прибавленіе I.*

Это есть общій видъ уравненія линіи порядка $n$, проведенной чрезъ $m = \frac{n(n+3)}{2}$ произвольныхъ точекъ.

Если отъ подстановленія вмѣсто $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ..., $(x_m, y_m)$ частныхъ значеній выйдетъ $M = 0$, то выраженія: $a = \frac{A}{M}$, $b = \frac{B}{M}$, ..., $l = \frac{L}{M}$ обратятся или въ $\infty$, или въ $\frac{0}{0}$. Въ такомъ случаѣ уравненіе (5) приведется къ слѣдующему:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + \ldots + L\lambda = 0.$$

Кромѣ $M\mu$ здѣсь исчезаютъ тѣ члены, которые соотвѣтствуютъ неопредѣленнымъ выраженіямъ $a$, $b$ ...; напримѣръ, если $a = \frac{0}{0}$, то $A = 0$ и, слѣдовательно, членъ $A\alpha$ исчезаетъ. Можетъ случиться, что всѣ коэффиціенты $a$, $b$, $c$ ... принимаютъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$; тогда всѣ коэффиціенты $A$, $B$, $C$ ... $L$, $M$ равны нулю и уравненіе (5) становится тожественнымъ. Тогда данныхъ точекъ недостаточно для опредѣленія линіи; потому что одно или нѣсколько изъ условныхъ уравненій (4) будутъ слѣдствіями прочихъ, т.-е. данныя точки такъ расположены, что, если чрезъ нѣкоторыя изъ нихъ проведена будетъ линія порядка $n$, то на ней будутъ находиться прочія точки. Такое обстоятельство, какъ мы увидимъ послѣ, въ самомъ дѣлѣ встрѣчается.

**32.** *Число точекъ пересѣченій двухъ алгебраическихъ линій не можетъ превосходить произведенія чиселъ, означающихъ порядки, къ которымъ принадлежатъ линіи.*

Во-первыхъ, замѣтимъ, что данныя линіи всегда могутъ быть отнесены къ такимъ координатнымъ осямъ, что каждая изъ точекъ ихъ пересѣченій имѣетъ свою ординату и свою абсциссу, непринадлежащую другой точкѣ пересѣченія, т.-е. не будетъ двухъ или болѣе точекъ на одной прямой, параллельной координатной оси. Въ самомъ дѣлѣ: пусть будутъ $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ ... разсматриваемыя точки; соединимъ ихъ по двѣ прямыми: $M_1M_2$, $M_1M_3$, $M_2M_3$ ... и проведемъ чрезъ точку $O$ параллельныя этимъ прямымъ: $OA_1$, $OA_2$, $OA_3$ ... Очевидно, что двѣ оси: $Ox$, $Oy$, не совпадающія съ послѣдними, имѣютъ требуемое свойство, что прямыя: $M_1M_2$, $M_1M_3$, $M_2M_3$ ... не могутъ быть имъ параллельны, а потому точки $M_1$, $M_2$, $M_3$ ... будучи отнесены къ этимъ осямъ, не могутъ имѣть общихъ абсциссъ или общихъ ординатъ.

Допустивъ это, означимъ чрезъ $n$ и $n'$ порядки алгебраическихъ линій, пересѣкающихся въ точкахъ: $M_1$, $M_2$, $M_3\ldots$ а чрезъ $L=0$ и $L'=0$ ихъ уравненія относительно осей $Ox$, $Oy$. Абсциссы точекъ: $M_1$, $M_2$, $M_3\ldots$ суть корни уравненія, происходящаго отъ исключенія $y$ между уравненіями $L=0$ и $L'=0$, а число этихъ корней (по теоремѣ Безу) не можетъ быть больше $nn'$; слѣдовательно, и число абсциссъ не больше $nn'$; но каждая изъ точекъ: $M_1M_2M_3\ldots$ имѣетъ особенную абсциссу; слѣдовательно, число *этихъ* точекъ также не больше $nn'$.

Когда уравненія: $L=0$ и $L'=0$ неполныя, такъ, что высшая степень $y$ въ уравненіи $L=0$ есть $y^{n-p}$, а въ уравненіи $L'=0$, $y^{n'-p'}$, то степень уравненія, происходящаго отъ исключенія $y$, будетъ не выше $nn'-pp'$ *); слѣдовательно, въ этомъ случаѣ число точекъ пересѣченій линій: $L=0$ и $L'=0$ не больше $nn'-pp'$ Напримѣръ, линіи:

$$x^3y^2+x^2y-5=0,\quad x^2y+2x-y+5=0$$

могутъ пересѣкаться не болѣе какъ въ 9 точкахъ.

Изъ доказаннаго слѣдуетъ:

Двѣ прямыя могутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ. Чрезъ двѣ точки можно провести только одну прямую. Прямая пересѣкается съ кривою 2-го порядка не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ. Двѣ линіи втораго порядка могутъ пересѣкаться не больше, какъ въ 4-хъ точкахъ. Чрезъ 5 точекъ можно провести всегда только одну линію втораго порядка; потому что, если допустимъ, что чрезъ 5 точекъ могутъ проходить двѣ линіи 2-го порядка, то вышло бы, что двѣ линіи втораго порядка пересѣкаются въ пяти точкахъ.

Линіи 3-го порядка могутъ пересѣкаться не больше, какъ въ 9 точкахъ. Такъ какъ при $n=3$ будетъ $\frac{n(n+3)}{2}=9$, то по 9-ти даннымъ точкамъ можно опредѣлить линію 3-го порядка. Однакожъ можетъ случиться, что этихъ точекъ будетъ недостаточно для

---

*) Théorie générale des équations algébriques; par *M. Bézout* 1779. Paris; pag. 45.

Профессоръ *Миндингъ* далъ простой способъ находить съ точностью степень уравненія, происходящую отъ исключенія одного неизвѣстнаго изъ двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными. См. *Cours d'Algèbre supérieure*, par *Serret*.

опредѣленія линіи, вслѣдствіе особеннаго ихъ расположенія, по которому чрезъ эти 9 точекъ можно провести множество линій 3-го порядка. Подобное обстоятельство встрѣчается и въ опредѣленіи линій порядка выше 3-го. Это кажущееся противорѣчіе (называемое парадоксомъ Крамера) объясняется, какъ мы видѣли выше, тѣмъ, что могутъ сдѣлаться неопредѣленными условныя уравненія, служащія для вычисленія коэффиціентовъ уравненія линіи по координатамъ данныхъ точекъ, чрезъ которыя она должна пройти.

**33.** Докажемъ, что это обстоятельство въ самомъ дѣлѣ существуетъ. Для этого обратимся опять къ уравненію линіи порядка $n$,

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots + l\lambda + \mu = 0, \tag{3}$$

(см. **§ 31**), въ которомъ должно опредѣлить коэффиціенты по координатамъ данныхъ точекъ: $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ..., $(x_m, y_m)$. Найдемъ сперва уравненіе линіи, проходящей чрезъ $m - 1$ точекъ:

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots, (x_{m-1}, y_{m-1}).$$

Для этого получимъ условныя уравненія:

$$\begin{gathered}
a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 + \ldots + l\lambda_1 + \mu_1 = 0,\\
a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 + \ldots + l\lambda_2 + \mu_2 = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a\alpha_{m-1} + b\beta_{m-1} + c\gamma_{m-1} + \ldots + l\lambda_{m-1} + \mu_{m-1} = 0,
\end{gathered}$$

посредствомъ которыхъ мы можемъ выразить $m - 1$ изъ коэффиціентовъ: $a, b, c, \ldots, l$, функціями одного, напримѣръ $b, c, \ldots, l$ функціями коэффиціента $a$. По свойству рѣшеній линейныхъ уравненій, эти функціи будутъ линейныя относительно $a$. Пусть будутъ:

$$\begin{gathered}
b = b_1 + b_2 a\\
c = c_1 + c_2 a\\
\ldots\ldots\\
l = l_1 + l_2 a;
\end{gathered}$$

отъ этого уравненіе (3) приметъ видъ

$$a\alpha + (b_1 + b_2 a)\,\beta + (c_1 + c_2 a)\,\gamma + \ldots + (l_1 + l_2 a)\ \lambda + \mu = 0$$

или

$$L_1 + aL_2 = 0, \tag{6}$$

гдѣ для сокращенія положено:

$$L_1 = b_1\beta + c_1\gamma + \ldots + l_1\lambda + \mu$$

$$L_2 = \alpha + b_2\beta + c_2\gamma + \ldots + l_2\lambda.$$

Это уравненіе принадлежитъ всякой линіи порядка $n$, проходящей чрезъ данныя $m - 1$ точки: $(x_1, y_1), \ldots, (x_{m-1}, y_{m-1})$. Между такими линіями замѣчательны двѣ, опредѣляемыя уравненіями $L_1 = 0$, и $L_2 = 0$. Первое изъ этихъ уравненій мы получимъ, положивъ $a = 0$ въ уравненіи (6), а второе, вычтя уравненіе $L_1 = 0$ изъ $L_1 + aL_2 = 0$, что дастъ $aL_2 = 0$ или $L_2 = 0$.

Когда $n^2 \geqq m$, т.-е. $n^2 \geqq \frac{n(n+3)}{2}$ или $n \geqq 3$, тогда число точекъ пересѣченій линій: $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ можетъ быть больше числа данныхъ точекъ: $(x_1, y_1), \ldots, (x_{m-1}, y_{m-1})$, чрезъ которыя мы провели разсматриваемыя линіи, а именно: кромѣ этихъ точекъ, линіи $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$ могутъ пересѣкаться еще въ $n^2 - \frac{n(n+3)}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$ точкахъ, чрезъ которыя должна проходить также всякая линія, опредѣленная уравненіемъ (6); потому что координаты этихъ точекъ, будучи подставлены въ уравненіе (6), обращаютъ въ нуль величины $L_1$ и $L_2$ и, слѣдовательно, удовлетворяютъ уравненію (6) при всякой величинѣ $a$. Изъ этого заключаемъ, что, если послѣдняя изъ данныхъ точекъ, чрезъ которыя требуется провести линію порядка $n$, а именно: $(x_m, y_m)$, находится въ пересѣченіи линіи: $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$, то чрезъ данныя точки: $(x_1, y_1)$ $(x_2\ y_2), \ldots, (x_m, y_m)$ можно провести множество линій порядка $n$. *—

**34.** Алгебраическое уравненіе о двухъ перемѣнныхъ: $x$, $y$, разсматриваемыхъ, какъ прямолинейныя координаты, не всегда принадлежитъ отдѣльной линіи порядка, опредѣляемаго степенью уравненія, и можетъ представить слѣдующіе случаи:

*a)* Уравненіе можетъ ничего не выражать, напримѣръ, уравненіе

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

которому не могутъ удовлетворять никакія вещественныя величины $x$ и $y$.

*b)* Уравненіе можетъ принадлежать одной или нѣсколькимъ отдѣльнымъ точкамъ, напримѣръ

$$x^2 + y^2 = 0, \quad y^2(x - \alpha)^2 + x^2(y - \beta)^2 = 0;$$

первое удовлетворено только координатами начала: $x = 0$, $y = 0$, а второе координатами точекъ: $(0, 0)$ и $(\alpha, \beta)$.

*c*) Уравненіе можетъ разлагаться на нѣсколько другихъ уравненій, низшихъ степеней, принадлежащихъ или линіямъ низшихъ порядковъ, или представляющихъ два предыдущіе случая. Напримѣръ, уравненіе

$$y^2 - x^2 = 0 \quad \text{или} \quad (y + x)(y - x) = 0$$

можетъ быть удовлетворено величинами $x$ и $y$, обращающими въ нуль, или множитель $y + x$, или множитель $y - x$, т.-е. уравненію $y^2 - x^2 = 0$ удовлетворяютъ координаты точекъ двухъ прямыхъ линій: $y + x = 0$, $y - x = 0$, проходящихъ чрезъ начало координатъ и раздѣляющихъ пополамъ углы, составляемые координатными осями.

Уравненіе 3-й степени

$$(x^2 + y^2 + 1)(y - x) = 0,$$

принадлежитъ только прямой линіи $y - x = 0$, потому что вещественныя величины $x$ и $y$, ему удовлетворяющія, могутъ только обращать въ нуль множитель $y - x$.

Итакъ, уравненіе $F(x, y) = 0$ степени $n$ о двухъ перемѣнныхъ $x$, $y$, разсматриваемыхъ, какъ прямолинейныя координаты, тогда только принадлежитъ линіи порядка $n$, когда первая его часть $F(x, y)$ не разлагается на раціональные множители и когда ему удовлетворяютъ перемѣнныя вещественныя величины: $x$ и $y$.

—* Вотъ наиболѣе замѣчательные случаи, въ которыхъ функція о двухъ перемѣнныхъ $F(x, y)$ можетъ быть разложена на множители раціональные:

*a*) Когда $F(x, y)$ однородная функція относительно $x$ и $y$. Тогда, положивъ $y = ax$, получимъ

$$F(x, y) = F(1, a)\, x^n,$$

гдѣ $F(1, a)$, есть функція одной величины $a$ и можетъ быть разложена на линейные множители, подъ видомъ

$$A(a - a_1)(a - a_2), \ldots, (a - a_n),$$

причемъ $a_1$, $a_2, \ldots, a_n$ суть вещественные или мнимые корни функціи $F(1, a)$; слѣдовательно,

$$F(x, y) = A\,(a - a_1)\,(a - a_2), \ldots, (a - a_n)\,x^n =$$
$$= A\left(\frac{y}{x} - a_1\right)\left(\frac{y}{x} - a_2\right), \ldots, \left(\frac{y}{x} - a_n\right)x^n =$$
$$= A\,(y - a_1 x)\,(y - a_2 x), \ldots, (y - a_n x).$$

Поэтому уравненіе $F(x, y) = 0$ разложится на $n$ уравненій первой степени:

$$y - a_1 x = 0, \quad y - a_2 x = 0, \ldots, y - a_n x = 0.$$

Тѣ изъ нихъ, въ которые входятъ вещественныя величины $a_1$, $a_2 \ldots$ принадлежатъ прямымъ линіямъ.

Примѣръ: уравненіе $y^2 - 2xy - 3x^2 = 0$ принадлежатъ двумъ прямымъ:

$$y - 3x = 0, \quad y + x = 0.$$

$b$) Если цѣлая раціональная функція $f(x, y)$ степени ниже уравненія $F(x, y) = 0$ не разлагается на множители и если, по исключеніи $y$ изъ уравненій $F(x, y) = 0$ и $f(x, y) = 0$, получится тожественное уравненіе относительно $x$, то сама функція $f(x, y)$ будетъ множителемъ функціи $F(x, y)$ и, слѣдовательно, послѣдняя разложится по крайней мѣрѣ на два множителя. Въ самомъ дѣлѣ: если уравненіе, происходящее отъ исключенія $y$ изъ уравненій $F(x, y) = 0$ и $f(x, y) = 0$, тожественно относительно $x$, то это значитъ, что при всякой величинѣ $x$ эти уравненія будутъ удовлетворены общею величиною $y$, и, слѣдовательно, функціи $F(x, y)$ и $f(x, y)$ должны имѣть общимъ дѣлителемъ нѣкоторую функцію $x$, $y$. А такъ какъ по предположенію функція $f(x, y)$ не разлагается на множители, то она сама должна быть этимъ общимъ дѣлителемъ. Изъ этого предложенія вытекаетъ слѣдствіе:

Если $f(x, y) = 0$ есть уравненіе линіи порядка $p$, и координаты $pn + 1$ ея точекъ, имѣющихъ разныя абсциссы: $x_1, x_2, \ldots, x_{pn+1}$, удовлетворяютъ уравненію степени $n$

$$F(x, y) = 0,$$

то послѣднее не можетъ принадлежать линіи порядка $n$, а разлагается на два уравненія низшей степени: $f(x, y) = 0$ и $\dfrac{F(x, y)}{f(x, y)} = 0$. Въ самомъ дѣлѣ: уравненіе, происходящее отъ исключенія $y$ изъ уравеній $f(x, y) = 0$ и $F(x, y) = 0$, будетъ степени не выше $pn$, а между тѣмъ оно должно быть удовлетворено $pn + 1$ различными величинами: $x_1, x_2, \ldots, x_{pn+1}$, что тогда только возможно, когда уравненіе тожественно относительно $x$; слѣдовательно, по доказанному выше предложенію, $F(x, y)$ должна имѣть множителемъ $f(x, y)$. Напримѣръ, если координаты трехъ точекъ, находящихся на прямой линіи, удовлетворяютъ уравненію 2-й степени, то это уравненіе не принадлежитъ линіи 2-го порядка, а двумъ прямымъ, а именно: прямой, на которой взяты три точки, и другой прямой, которой уравненіе происходитъ отъ раздѣленія разсматриваемаго уравненія 2-й степени на уравненіе первой прямой.

**35.** *Когда линіи порядка $n$, $L = 0$ и $L' = 0$, пересѣкаются въ самомъ дѣлѣ въ $n^2$ точкахъ, между которыми $np$ точекъ лежатъ на линіи порядка $p$, то всѣ остальныя $n^2 - np = n(n-p)$ точки должны находиться на линіи порядка $n - p$.*

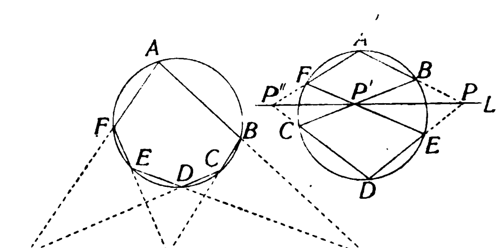
Пусть будетъ $P = 0$ уравненіе линіи порядка $p$, проходящей чрезъ $np$ точекъ, взятыхъ между точками пересѣченія линій $L = 0$ и $L' = 0$. Изъ остальныхъ $n^2 - np$ точекъ возьмемъ $\dfrac{(n-p)(n-p+3)}{2}$ и проведемъ чрезъ нихъ линію порядка $n - p$, которой уравненіе означимъ чрезъ $Q = 0$. Двѣ линіи $P = 0$ и $Q = 0$ вмѣстѣ составляютъ одну сложную линію, опредѣленную уравненіемъ степени $n$, $PQ = 0$, и проходящую чрезъ

$$np + \frac{(n-p)(n-p+3)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} + \frac{p(p-3)}{2}$$

точекъ. Число этихъ точекъ больше или равно числу $\dfrac{n(n+3)}{2} - 1$, потому что $\dfrac{p(p-3)}{2} \geqq -1$. Слѣдовательно, линія $PQ = 0$, имѣя $\dfrac{n(n+3)}{2} - 1$ общихъ точекъ съ линіями $L = 0$ и $L' = 0$, должна проходить (какъ было доказано въ **§ 33**) чрезъ остальныя точки пересѣченія линій $L = 0$ и $L' = 0$. Но линіи $P = 0$ не можетъ имѣть съ ними болѣе $np$ общихъ точекъ (по доказанному въ **§ 32**); поэтому остальныя $n^2 - np$ точки должны находиться на линіи $Q = 0$, что требовалось доказать.

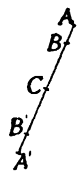
Если предположимъ, что каждое изъ уравненій: $L = 0$, $L' = 0$ представляетъ систему $n$ прямыхъ линій, то изъ доказаннаго предположенія выведемъ слѣдующее замѣчательное заключеніе: *когда между $n^2$ точками пересѣченій системы $n$ прямыхъ линій съ другою* *системою n прямыхъ имѣется np точекъ на линіи порядка p, то всѣ остальныя точки пересѣченій прямыхъ будутъ находиться на одной линіи порядка n — p. Напримѣръ, когда между 9-ю точками, въ которыхъ пересѣкаются три прямыя съ тремя другими прямыми имѣется 6 точекъ на линіи 2-го порядка, то остальныя три точки пересѣченія прямыхъ находятся на линіи порядка* 3 — 2, т.-е. *на одной прямой линіи.* Въ этомъ состоитъ замѣчательная теорема Паскалева *мистическаго гексаграмма*, которую можно еще выразить слѣдующимъ образомъ: *во всякомъ шестиугольникѣ $ABCDEF$, вписанномъ въ линію втораго порядка, пересѣченія $P$, $P'$, $P''$ противоположныхъ сторонъ: $AB$ и $DE$, $BC$ и $EF$, $CD$ и $FA$, находятся на одной прямой $L$.*

На основаніи этой теоремы легко начертить всякую линію втораго порядка по даннымъ пяти ея точкамъ: $A$, $B$, $C$, $D$, $E$. Для этого, опредѣливъ точку $P$ пересѣченія прямыхъ $AB$ и $ED$, проведемъ чрезъ нее произвольную прямую $LP$ и замѣтимъ точки $P'$ и $P''$ пересѣченія послѣдней прямой съ прямыми $BC$ и $CD$; потомъ проведемъ $P'E$ и $P''A$, въ пересѣченіи которыхъ получимъ точку $F$, принадлежащую линіи втораго порядка, проходящей чрезъ данныя точки. Перемѣнивъ положеніе прямой $PL$ и повторивъ предыдущія построенія, найдемъ еще точку искомой линіи, и т. д. При непрерывномъ обращеніи линіи $LE$ около неподвижной точки $P$, точки $P'$ и $P''$ будутъ двигаться по неподвижнымъ прямымъ $CB$ и $DC$, а прямыя $P'F$ и $P''A$ вращаться около неподвижныхъ точекъ $E$ и $A$, и точка $F$ начертитъ непрерывнымъ своимъ движеніемъ линію 2-го порядка. Слѣдовательно, *если три прямыя $PL$, $P'E$ и $P''A$ станутъ вращаться въ трехъ неподвижныхъ точкахъ $P$, $E$ и $A$, между тѣмъ какъ $P'$ и $P''$, пересѣченія двухъ прямыхъ: $P'E$ и $P''A$ съ $PL$, двигаются по неподвижнымъ прямымъ $CB$ и $CD$, то $F$, пересѣченіе прямыхъ $P'E$ и $P''A$, начертитъ линію втораго порядка.* * —



Фиг. 63

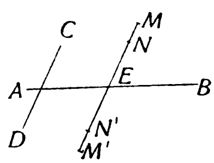
**36.** Въ плоскости разсматриваемой кривой линіи могутъ существовать точки и прямыя линіи, имѣющія особенныя свойства, которыми можно воспользоваться при изслѣдованіи линіи. Сюда принадлежатъ: *центры, діаметры и вершины.*




Фиг. 64

*Центромъ кривой линіи* называется точка, въ которой пересѣкаются пополамъ всѣ хорды, чрезъ нее проведенныя. Такъ, если $C$ есть центръ, $AA'$ прямая, чрезъ него проведенная, и $A$, $A'$, $B$, $B'$ пересѣченія этой прямой съ кривою, то $AC = A'C$, $BC = B'C$.

*Діаметромъ* кривой называется прямая, раздѣляющая пополамъ хорды, параллельныя данной прямой, называемой *сопряженною* съ діаметромъ. Такъ, если $AB$ есть діаметръ, $CD$ прямая, съ нимъ сопряженная, и $M$, $M'$, $N$, $N'$ точки, въ которыхъ кривая пересѣкается съ какою-нибудь прямою, параллельною $CD$, то $AB$ пересѣкаетъ пополамъ въ точкѣ $E$ хорды $MM'$, $NN'$, т.-е. должно быть: $ME = M'E$, $NE = N'E$. Хорды: $MM'$, $NN'$ называются сопряженными съ діаметромъ.



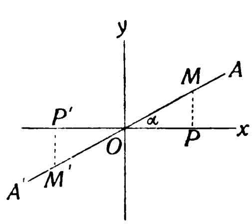

Фиг. 65

Діаметръ, перпендикулярный къ сопряженнымъ хордамъ, называется *главнымъ* или *осью кривой*, а пересѣченія его съ кривою, *вершинами*.

Два діаметра, служащіе одинъ другому сопряженною хордою, называются *сопряженными діаметрами.*

Взаимно-перпендикулярные сопряженные діаметры называются *главными.*

**37.** Если кривая имѣетъ центръ, и уравненіе кривой $F(x, y) = 0$ отнесено къ осямъ, имѣющимъ начало въ въ этой точкѣ, то уравненіе не должно нарушиться отъ перемѣны $x$ на $-x$ и $y$ на $-y$. Это легко доказать слѣдующимъ образомъ: допустимъ, что $O$ есть центръ кривой и $M$ какая нибудь ея точка, опредѣленная координатами $x = OP$ и $y = MP$, По свойству центра кривая должна имѣть на прямой $OM$ еще точку $M'$, симметрическую съ $M$, такъ что $OM' = OM$. Проведя $M'P'$ параллельную $Oy$, получимъ два равныхъ треугольника $OM'P'$ и $OMP$, въ которыхъ $OP' = OP$ и $M'P' = MP$; а потому координаты точки $M'$ суть: $-x$ и $-y$.




Фиг. 66

Такъ какъ $M'$ находится на кривой, то уравненіе $F(x, y) = 0$ должно быть удовлетворено величинами: $-x$, $-y$, т.-е. $F(-x, -y) = 0$.

Для этого надобно, чтобы при перемѣнѣ $x$ на $-x$ и $y$ на $-y$, всѣ члены уравненія $F(x, y) = 0$ оставались при тѣхъ же знакахъ, или всѣ перемѣнили бы свои знаки. Первое обстоятельство можетъ представиться только тогда, когда уравненіе $F(x, y) = 0$ и всѣ его члены будутъ четныхъ степеней (включая сюда и постоянный членъ), а второе, когда уравненіе и всѣ его члены будутъ нечетныхъ степеней. Напримѣръ:

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad x^3 + y^3 - x + y = 0.$$

Если уравненіе кривой имѣетъ члены четныхъ и нечетныхъ степеней, то начало координатъ не есть центръ кривой. Чтобы узнать, имѣетъ ли кривая центръ, надобно посмотрѣть, нельзя ли, чрезъ перенесеніе начала координатъ въ другую точку, преобразовать уравненіе кривой въ другое, въ которомъ всѣ члены были бы или четныхъ или нечетныхъ степеней. Если это преобразованіе возможно, то новое начало координатъ будетъ центръ кривой. Въ противномъ случаѣ кривая не имѣетъ центра.

**38.** Приложимъ этотъ способъ отыскивать центръ къ линіямъ второго порядка. Общій видъ уравненія таковой линіи есть

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{1}$$

Преобразуемъ его, перенеся начало координатъ $O$ въ другую точку $O'$. Означивъ чрезъ $\alpha$ и $\beta$ координаты новаго начала относительно первоначальныхъ осей, а чрезъ $x'$, $y'$ новыя координаты относительно осей $O'x'$, $O'y'$, параллельныхъ прежнимъ, будемъ имѣть:

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta$$

(см. **§ 29**); поэтому данное уравненіе преобразуется въ слѣдующее

$$A(x' + \alpha)^2 + B(x' + \alpha)(y' + \beta) + C(y' + \beta)^2 + D(x' + \alpha) +$$
$$+ E(y' + \beta) + F = 0$$

или

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + (2A\alpha + B\beta + D)x' + B\alpha + 2C\beta + E)y' +$$
$$+ A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F = 0. \tag{2}$$

Здѣсь не должно быть членовъ первой степени относительно $x'$, $y'$, для того, чтобы новое начало $O'$ было центромъ; слѣдовательно, координаты этой точки ($\alpha$, $\beta$) должны удовлетворять уравненіямъ:

$$\left.\begin{array}{l} 2A\alpha + B\beta + D = 0 \\ B\alpha + 2C\beta + E = 0, \end{array}\right\} \qquad (3)$$

изъ которыхъ получаются:

$$\alpha = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}, \quad \beta = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}. \qquad (4)$$

Эти величины вещественныя; но, сверхъ того, онѣ должны быть конечными. Это условіе будетъ удовлетворено, когда $B^2 - 4AC$ не равно нулю, т.-е. когда $B^2 - 4AC > 0$ или $< 0$. Въ такомъ случаѣ уничтоженіе членовъ первой степени въ уравненіи (2) возможно; послѣ чего уравненіе приметъ видъ

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Q = 0, \qquad (5)$$

гдѣ постоянный членъ $Q$ опредѣляется формулою

$$Q = A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F. \qquad (6)$$

Эту формулу можно упростить. Помноживъ уравненія (3) соотвѣтственно на $\alpha$ и $\beta$ и взявъ сумму, получимъ уравненіе

$$2A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + 2C\beta^2 + D\alpha + E\beta = 0,$$

помощію котораго можно исключить изъ выраженія (6) члены, содержащіе $\alpha^2$, $\alpha\beta$ и $\beta^2$; послѣ чего получимъ

$$Q = \frac{1}{2}(D\alpha + E\beta + 2F),$$

и, подставивъ сюда вмѣсто $\alpha$ и $\beta$ ихъ выраженія (4), будемъ имѣть

$$Q = \frac{CD^2 + AE^2 - BDE + F(B^2 - 4AC)}{B^2 - 4AC}. \qquad (7)$$

Каждое изъ уравненій (3), взятое отдѣльно, принадлежитъ прямой линіи, если разсматривать $\alpha$ и $\beta$ какъ перемѣнныя; двѣ прямыя (3) пересѣкаются, когда $B^2 - 4AC \gtrless 0$, и пересѣченіе ихъ опредѣляется координатами (4); слѣдовательно, оно есть центръ линіи (1).

Когда $B^2-4AC=0$, тогда формулы (4) даютъ для $\alpha$ и $\beta$ значенія или безконечныя, или неопредѣленныя. Если числители выраженія (4) не равны нулю, то обѣ величины $\alpha$ и $\beta$ безконечны. Въ этомъ случаѣ кривая (1) не имѣетъ центра и нельзя уравненіе (1) привести къ виду (5). Прямыя (3) тогда параллельны. Также у линіи (1) не будетъ центра, когда одно изъ выраженій (4) беретъ видъ $\frac{0}{0}$, а другое $\infty$. Это случится, когда $B$ и одна изъ величинъ: $A$ и $C$ равны нулю, и притомъ одна изъ величинъ $D$ и $E$ не равна нулю; напримѣръ, когда $B=0$, $A=0$, а $C$ и $D$ не равны нулю; тогда $\alpha=\infty$, $\beta=\frac{0}{0}$. Если же оба выраженія (4) берутъ видъ $\frac{0}{0}$, тогда $\alpha$ и $\beta$, какъ извѣстно, могутъ имѣть безчисленное множество значеній. Притомъ, если $B$ не равно нулю, то изъ двухъ равенствъ: $B^2-4AC=0$ и $2CD-BE=0$ вытекаетъ третье $2AE-BD=0$; такъ что вмѣстѣ съ $\alpha=\frac{0}{0}$ будетъ и $\beta=\frac{0}{0}$. Въ самомъ дѣлѣ: если $B$ не равно нулю, то равенство $B^2-4AC=0$ требуетъ, чтобы, ни $A$, ни $C$, не было равно нулю; приэтомъ можетъ случиться, что $D=0$, тогда и $E=0$ по условію $2CD-BE=0$, отчего оба выраженія (4) берутъ видъ $\frac{0}{0}$. Въ случаѣ же $D \gtrless 0$, и $E$ не равно нулю; тогда изъ равенствъ

$$B^2-4AC=0 \quad \text{и} \quad 2CD-BE=0$$

вытекаетъ равенство

$$2B^2CD=4ACBE,$$

которое, будучи раздѣлено на $2BC$, приводится къ слѣдующему $BD=2AE$ или $2AE-BD=0$, что и требовалось доказать. Три равенства:

$$B^2-4AC=0, \quad 2CD-BE=0, \quad 2AE-BD=0$$

могутъ быть замѣнены пропорціями:

$$\frac{2A}{B}=\frac{B}{2C}=\frac{D}{E}, \tag{8}$$

показывающими тожество уравненій (3); слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ прямыя (3) совпадаютъ въ одну, которая представляетъ общее мѣсто центровъ линіи (1). Пропорціи (8) даютъ

$$C=\frac{B^2}{4A}, \quad E=\frac{BD}{2A};$$

отчего уравненіе (1) можетъ быть представлено подъ видомъ:

$$Ax^2 + Bxy + \frac{B^2}{4A}y^2 + Dx + \frac{DB}{2A}y + F = 0$$

или

$$(2Ax + By)^2 + 2D(2Ax + By) + 4AF = 0,$$

откуда выводятся два уравненія первой степени

$$\left.\begin{aligned} 2Ax + By &= -D + \sqrt{D^2 - 4AF}, \\ 2Ax + By &= -D - \sqrt{D^2 - 4AF} \end{aligned}\right\}. \qquad (9)$$

Если $D^2 - 4AF > 0$, то вторыя части этихъ уравненій вещественны, и тогда уравненія принадлежатъ двумъ прямымъ, которыя, вслѣдствіе равенства коэффиціентовъ при $x$ и $y$, параллельны между собою и параллельны прямой центровъ:

$$2A\alpha + B\beta + D = 0.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $D^2 - 4AF = 0$, эти три прямыя совпадаютъ въ одну. Въ случаѣ же $D^2 - 4AF < 0$ уравненія (9) и, слѣдовательно, уравненія (1) не представляютъ никакого геометрическаго мѣста.

Въ случаѣ $B = 0$ выраженія (4) могутъ быть неопредѣленныя, когда одно изъ количествъ $A$ и $C$ и одно изъ количествъ $D$ и $E$ равны нулю, а именно: $A = 0$ и $D = 0$ или $C = 0$ или $E = 0$. Уравненіе (1) тогда беретъ одинъ изъ двухъ видовъ:

$$Cy^2 + Ey + F = 0, \quad Ax^2 + Dx + F = 0. \qquad (10)$$

Первое даетъ для $y$ два постоянныя значенія:

$$y = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C}.$$

Если эти значенія вещественныя и неравныя, то будемъ имѣть уравненія двухъ прямыхъ, параллельныхъ оси $Ox$; въ случаѣ равныхъ значеній эти прямыя совпадаютъ въ одну: $y = -\frac{E}{2C}$, а въ случаѣ мнимыхъ значеній первое изъ уравненій (10) не представляетъ никакого геометрическаго мѣста. Также найдемъ, что второе изъ уравненій (10) или принадлежитъ двумъ прямымъ, параллельнымъ оси $Oy$, или одной прямой, или ничего не выражаетъ.

Изъ всего разбора заключаемъ, что если уравненіе (1) представляетъ кривую линію, то эта кривая имѣетъ центръ, когда $B^2-4AC \gtrless 0$, и не имѣетъ центра, когда $B^2-4AC=0$; уравненіе можетъ принадлежать двумъ параллельнымъ прямымъ, совпадающимъ въ частномъ случаѣ въ одну прямую, и наконецъ, можетъ не представлять никакого геометрическаго мѣста.

Примѣры:

1) Уравненіе $5x^2-4xy+2y^2-4y-2x-4=0$ можетъ принадлежать линіи съ центромъ. Для опредѣленія координатъ этой точки, $\alpha$ и $\beta$, будемъ имѣть уравненія:

$$10\alpha-4\beta-2=0, \quad -4\alpha+4\beta-4=0;$$

откуда выходитъ:

$$\alpha=1, \quad \beta=2.$$

Данное уравненіе, при началѣ координатъ въ центрѣ, приведется къ слѣдующему:

$$5x'^2-4x'y'+2y'^2-9=0.$$

2) Уравненіе $2x^2-4xy-2y^2-4y-2x-3=0$ также можетъ принадлежать линіи съ центромъ. Координаты центра $\alpha$ и $\beta$ опредѣлятся изъ уравненій:

$$4\alpha-4\beta-2=0, \quad -4\alpha-4\beta-4=0,$$

а именно: $\alpha=-\frac{1}{4}, \quad \beta=-\frac{3}{4}$.

По перенесеніи начала координатъ въ центръ данное уравненіе преобразуется въ слѣдующее:

$$2x'^2-4x'y'^2-2y'^2-\tfrac{5}{4}=0.$$

3) Уравненіе $x^2-2xy+y^2-2x+3y-4=0$ не можетъ принадлежать линіи съ центромъ.

4) Уравненіе $x^2-2xy+y^2-2y+2x-3=0$ можетъ быть представлено подъ видомъ

$$(x-y)^2+2(x-y)-3=0,$$

и разложится на два первой степени:

$$x-y+3=0, \quad x-y-1=0,$$

принадлежащія двумъ прямымъ параллельнымъ, которыя имѣютъ безчисленное множество центровъ, находящихся на прямой

$$x - y + 1 = 0.$$

5) Уравненіе $x^2 - 2xy + y^2 + 2y - 2x + 1 = 0$ можетъ быть приведено къ виду

$$(x - y)^2 - 2(x - y) + 1 = 0$$

или

$$(x - y - 1)^2 = 0$$

и принадлежитъ одной прямой $x - y - 1 = 0$.

6) Уравненіе $x^2 - 2xy + y^2 + 2y - 2x + 3 = 0$ принимаетъ видъ

$$(x - y)^2 - 2(x - y) + 3 = 0;$$

откуда выходятъ два мнимыя уравненія:

$$x - y = 1 \pm \sqrt{-2};$$

слѣдовательно, данное уравненіе ничего не представляетъ.

**39.** Общее уравненіе кривой 2-го порядка съ центромъ, при началѣ координатъ въ этой точкѣ, имѣетъ видъ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Q = 0. \qquad (1)$$

Перемѣною направленій координатныхъ осей можно преобразовать его въ другое, простѣйшее, въ которомъ не будетъ члена съ произведеніемъ обѣихъ координатъ.

Пусть будутъ $Ox$, $Oy$ прямоугольныя координатныя оси, къ которымъ отнесено уравненіе (1); $Ox'$, $Oy'$ новыя прямоугольныя оси; $x'$, $y'$ новыя координаты точки $(x, y)$ и $\alpha$ уголъ, составленный осью $Ox'$ съ $Ox$; тогда $(y'Ox) = \alpha + 90°$. Формулы (6), **§ 29**, для перемѣны прямоугольныхъ координатъ въ прямоугольныя даютъ

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$$

$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha;$$

поэтому уравненіе (1) преобразуется въ слѣдующее:

$$(A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha)x'^2 +$$
$$+ [B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2(A - C)\sin\alpha\cos\alpha]x'y' +$$
$$+ (A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)y'^2 + Q = 0. \qquad (2)$$

Чтобы не было въ этомъ уравненіи члена съ произведеніемъ координатъ $x'y'$, должно положить

$$B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2(A - C)\sin\alpha\cos\alpha = 0. \tag{3}$$

Для удобнѣйшаго опредѣленія угла $\alpha$ по этому условію, введемъ $\sin(2\alpha)$ и $\cos(2\alpha)$ вмѣсто $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Такъ какъ

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha), \quad 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha),$$

то уравненіе (3) беретъ видъ:

$$B\cos(2\alpha) - (A - C)\sin(2\alpha) = 0 \tag{4}$$

или

$$\cos(2\alpha)\,[B - (A - C)\operatorname{tg}(2\alpha)] = 0.$$

Если $A - C$ не равно нулю, то, какъ видно изъ уравненія (4), $\cos(2\alpha)$ не можетъ быть равенъ нулю; слѣдовательно, должно въ такомъ случаѣ положить

$$B - (A - C)\operatorname{tg}2\alpha = 0;$$

откуда

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{B}{A - C}. \tag{5}$$

Въ случаѣ $A - C = 0$ должно положить $\cos(2\alpha) = 0$, какъ видно изъ уравненія (4); но тогда $\sin(2\alpha) = \pm 1$ и $\operatorname{tg}(2\alpha) = \infty$. Къ этому же заключенію ведетъ формула (5). Итакъ, эта формула во всякомъ случаѣ опредѣляетъ уголъ $2\alpha$; притомъ каковы бы ни были величины $A$, $B$, $C$, формула (5) даетъ для $2\alpha$ возможную величину, потому что тангенсъ способенъ получить всякое значеніе отъ $-\infty$ до $+\infty$. Изъ этого заключаемъ, что веседа можно уничтожить членъ съ $x'y'$ въ уравненіи (2). Послѣ того уравненіе приметъ видъ

$$Mx'^2 + Ny'^2 + Q = 0, \tag{6}$$

гдѣ положено для сокращенія:

$$\left.\begin{aligned} M &= A\cos^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha \\ N &= A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Формула (5) даетъ двѣ величины для $2\alpha$. Означивъ чрезъ $m$ меньшую изъ нихъ, можемъ положить $2\alpha = m$ или $2\alpha = m + 180°$, откуда выходитъ: $\alpha = \frac{m}{2}$, $\alpha = \frac{m}{2} + 90^\circ$; слѣдовательно, для оси $Ox'$ можно взять одно изъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ направленій, опредѣленныхъ этими углами. Изъ формулы (5) выводимъ еще

$$\left.\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= \frac{B}{\pm\sqrt{(A-C)^2+B^2}}, \\ \cos(2\alpha) &= \frac{A-C}{\pm\sqrt{(A-C)^2+B^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Двойной знакъ радикала $\pm$ соотвѣтствуетъ двумъ значеніямъ $\alpha$.

Если возьмемъ $2\alpha = m$, т.-е. $\alpha = \frac{m}{2}$, то $\sin(2\alpha) = \sin(m)$ положительная величина, потому что $m$ не больше $180^\circ$; тогда въ формулахъ (8) должно взять при $\sqrt{\phantom{x}}$ одинаковый знакъ съ $B$; если же возьмемъ $2\alpha = m + 180^\circ$, т.-е. $\alpha = \frac{m}{2} + 90^\circ$, то $\sin(2\alpha)$ отрицательный, а потому при $\sqrt{\phantom{x}}$ должно взять знакъ, противоположный знаку $B$. Итакъ, для осей $Ox'$, $Oy'$, при которыхъ въ уравненіи линіи не будетъ члена съ $x'y'$, можно найти двоякое положеніе. Каждое изъ этихъ положеній можно перемѣнить на другое, перемѣнивъ направленіе положительныхъ $x'$ или положительныхъ $y'$ на противоположное; потому что уравненіе (6) не нарушается отъ перемѣны $x'$ на $-x'$ и $y'$ на $-y'$.

Формулы (7) послужатъ для вычисленія коэффиціентовъ $M$ и $N$ по даннымъ коэффиціентамъ $A$, $B$, $C$ первоначальнаго уравненія (1). Взявъ сумму и разность этихъ выраженій найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} M+N &= A(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) + C(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = A + C \\ M-N &= A(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = 2B\sin\alpha\cos\alpha - C(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = \\ &= (A-C)\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Подставивъ во второе изъ выраженій (9) вмѣсто $\sin(2\alpha)$ и $\cos(2\alpha)$ величины (8), получимъ

$$M - N = \frac{(A-C)^2+B^2}{\pm\sqrt{(A-C)^2+B^2}} = \sqrt{(A-C)^2+B^2}.$$

Присоединивъ сюда уравненіе

$$M + N = A + C,$$

выведемъ:

$$M = \frac{A + C \pm \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{2},$$

$$N = \frac{A + C \mp \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{2}.$$

Для удобнѣйшаго опредѣленія знаковъ этихъ величинъ преобразуемъ подкоренное количество

$$(A - C)^2 + B^2 = A^2 - 2AC + C^2 + B^2.$$

Придавъ и вычтя $4AC$, получимъ

$$(A - C)^2 + B^2 = A^2 + 2AC + C^2 + B^2 - 4AC = (A + C)^2 + B^2 - 4AC$$

или

$$(A - C)^2 + B^2 = (A + C)^2 + n,$$

гдѣ для сокращенія положено $B^2 - 4AC = n$. Итакъ

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{A + C \pm \sqrt{(A + C)^2 + n}}{2} \\ N &= \frac{A + C \mp \sqrt{(A + C)^2 + n}}{2} \end{aligned}\right\}. \qquad (10)$$

По условію, что кривая 2-го порядка имѣетъ центръ, величина $n = B^2 - 4AC$ (см. § 38) не равна нулю: она *отрицательная* или *положительная*; отъ этого выходитъ два случая:

*a*) Когда $n = B^2 - 4AC$ отрицательная, тогда произведеніе $AC$ должно быть положительное, а потому $A$ и $C$ должны имѣть одинаковые знаки. Можно допустить, что $A$ положительная величина, потому что, если бы въ первоначальномъ уравненіи кривой

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Q = 0$$

коэффиціентъ перваго члена былъ отрицательный, то, перемѣною знаковъ во всемъ уравненіи, можно сдѣлать его положительнымъ. Если же $A$ положительное, то $C$ и сумма $A + C$ также положительныя, а по причинѣ $n$ отрицательнаго будетъ $A + C > \sqrt{(A + C)^2 + n}$; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ величины $M$ и $N$ обѣ положительныя.

*b*) При положительномъ $n = B^2 - 4AC$, величина $\sqrt{(A + C)^2 + n}$ больше численной величины $A + C$, каковы бы не были $A$ и $C$

слѣдовательно, въ этомъ случаѣ $M$ и $N$ имѣютъ противоположные знаки.

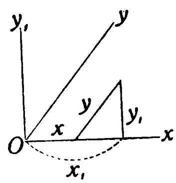
— * Мы предположили, что первоначальныя оси координатъ $Ox$ и $Oy$, къ которымъ отнесено уравненіе (1)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Q = 0, \tag{1}$$

прямоугольныя. Положимъ теперь, что онѣ косоугольныя и посмотримъ, какъ привести въ этомъ случаѣ уравненіе (1) къ виду

$$Mx'^2 + Ny'^2 + Q = 0. \tag{2}$$

Пусть $\angle xOy = \theta$. Перемѣнимъ сперва оси $Ox$ и $Oy$ на прямоугольныя $Ox$ и $Oy_1$, оставляя ту же ось абсциссъ $Ox$ и взявъ новую ось ординатъ $Oy_1$ перпендикулярно къ $Ox$. Означивъ чрезъ $x_1$ и $y_1$ новыя координаты точки $M(x, y)$, мы будемъ имѣть



Фиг. 67

$$x = \frac{x_1 \sin\theta - y_1 \cos\theta}{\sin\theta}, \quad y = \frac{y_1}{\sin\theta};$$

поэтому уравненіе (1) преобразуется въ слѣдующее:

$$Ax_1^2 + B'x_1y_1 + C'y_1^2 + Q = 0,$$

гдѣ

$$B' = \frac{B - 2A\cos\theta}{\sin\theta}, \quad C' = \frac{A\cos^2\theta + C - B\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Примѣняя къ этому уравненію предыдущее преобразованіе, чтобы привести его къ виду (2), мы получимъ по формуламъ (5) и (10):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{B'}{A - C'}, \quad M = \frac{A + C' \pm \sqrt{(A + C')^2 + n}}{2}$$

$$N = \frac{A + C' \mp \sqrt{(A + C')^2 + n}}{2}$$

Двѣ послѣднія формулы даютъ

$$M + N = A + C' = \frac{A + C - B\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

$$-4MN = n = B'^2 - 4AC' = \frac{B^2 - 4AC}{\sin^2\theta}.$$

Составивъ эти два выраженія по данному уравненію (1) и углу $\theta$

между осями, мы можемъ найти $M$ и $N$, рѣшивъ квадратное уравненіе

$$z^2 - \frac{A+C-B\cos\theta}{\sin^2\theta}\, z - \frac{B^2-4AC}{\sin^2\theta} = 0. \qquad (11)$$

Такъ какъ $M$ и $N$ не должны зависѣть отъ первоначальныхъ осей $Ox$, $Oy$ и, слѣдовательно, отъ величинъ $A$, $B$, $C$, $\theta$, соотвѣтствующихъ этимъ осямъ, то величины:

$$\frac{A+C-B\cos\theta}{\sin^2\theta},\quad \frac{B^2-4AC}{\sin^2\theta}$$

не должны измѣниться при перемѣнѣ осей $Ox$, $Oy$ на какія либо другія, хотя $A$, $B$, $C$, $\theta$ измѣняются. * —

Итакъ, кривыя втораго порядка съ центрами могутъ быть раздѣлены на два вида:

1) Кривыя, уравненія которыхъ имѣютъ видъ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Q = 0$$

при условіи $B^2 - 4AC < 0$, или видъ

$$Mx'^2 + Ny'^2 + Q = 0$$

при положительныхъ $M$ и $N$.

2) Кривыя, уравненія которыхъ имѣютъ видъ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Q = 0$$

при условіи $B^2 - 4AC > 0$, или видъ

$$Mx'^2 + Ny'^2 + Q = 0,$$

гдѣ $M$ и $N$ имѣютъ противоположные знаки.

Кривыя перваго вида называются *эллипсами*, а второго *гиперболами.*

Но кромѣ этихъ двухъ видовъ кривыхъ, уравненіе

$$Mx'^2 + Ny'^2 + Q = 0$$

можетъ или ничего не выражать, или представлять одну точку, или двѣ прямыя.

Когда $M$, $N$ и $Q$ положительныя, тогда уравненіе не можетъ быть удовлетворено вещественными величинами $x'$, $y'$ и, слѣдовательно, не выражаетъ никакого геометрическаго мѣста.

Если при положительныхъ $M$ и $N$ будетъ $Q = 0$, то уравненіе можетъ быть удовлетворено только величинами: $x'=0$, $y'=0$, и слѣдовательно, оно принадлежитъ одной точкѣ, находящейся въ началѣ координатъ.

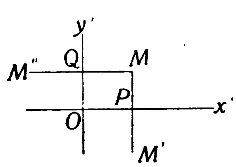
Когда $M$ и $N$ имѣютъ противоположные знаки, а $Q=0$, тогда уравненіе беретъ видъ $Mx'^2+Ny'^2=0$ и разлагается на два уравненія первой степени:

$$y'=x'\sqrt{-\frac{M}{N}}, \quad y'=-x'\sqrt{-\frac{M}{N}}.$$

Здѣсь величина $\sqrt{-\frac{M}{N}}$ вещественная, потому что $-\frac{M}{N}$ положительная; слѣдовательно, послѣднія уравненія принадлежатъ двумъ прямымъ, проходящимъ чрезъ начало координатъ и составляющимъ съ осью $Ox'$ равные углы, по ту и другую стороны этой оси.

Итакъ, уравненіе $Mx'^2+Ny'^2+Q=0$ можетъ принадлежать эллипсу тогда только, когда при положительныхъ $M$ и $N$ будетъ $Q$ отрицательное количество. Оно можетъ принадлежать гиперболѣ только въ случаѣ, когда $M$ и $N$ имѣютъ противоположные знаки и $Q$ не равно нулю.

**40.** Оси координатъ $Ox'$ и $Oy'$, къ которымъ отнесено уравненіе эллипса или гиперболы, суть главные сопряженные діаметры этихъ кривыхъ (**§ 36**); потому что каждому значенію $x'=OP$ соотвѣтствуютъ два значенія $y'=+MP$ и $y'=-PM'$, равныя и съ противоположными знаками, составляющія хорду $MM'$, параллельную оси $Oy'$ и раздѣленную въ точкѣ $P$ осью $Ox'$ пополамъ. Также всякому значенію $y'=OQ$ соотвѣтствуютъ двѣ величины $x'=+MQ$, $x'=-M''Q$, составляющія хорду $MM''$, параллельную оси $Ox'$ и раздѣленную въ точкѣ $Q$ осью $Oy'$ пополамъ.



Фиг. 68

**41.** Разсмотримъ теперь фигуры этихъ кривыхъ и способы начертанія ихъ по точкамъ.

Опустивъ для удобства знаки надъ координатами, изслѣдуемъ сперва уравненіе эллипса:

$$Mx^2+Ny^2+Q=0 \tag{1}$$

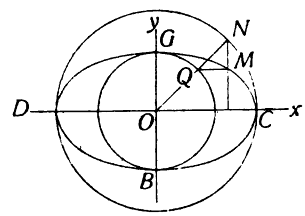
въ случаѣ $M>0$, $N>0$ и $Q<0$. Отыщемъ пересѣченія эллипса съ *осями*. Для пересѣченія съ осью $Ox$ должно положить $y = 0$ и, слѣдовательно,

$$Mx^2 + Q = 0;$$

откуда выходитъ $x = \pm\sqrt{\frac{-Q}{M}}$. Эти величины вещественныя и съ противоположными знаками; поэтому эллипсъ пересѣкаетъ ось $Ox$ въ двухъ точкахъ, на равныхъ разстояніяхъ отъ начала координатъ; слѣдовательно, по отложеніи $OC$ и $OD$ равныхъ $\sqrt{\frac{-Q}{M}}$, получимъ въ $C$ и $D$ эти точки, называемыя *вершинами* эллипса. Для пересѣченія съ осью $Oy$ надобно положить $x = 0$; отчего

$$Ny^2 + Q = 0$$

и $y = \pm\sqrt{\frac{-Q}{N}}$; слѣдовательно, эллипсъ также пересѣкаетъ ось $Oy$ въ двухъ точкахъ на равныхъ разстояніяхъ отъ начала координатъ. По отложеніи $OG$ и $OB$ равныхъ $\sqrt{\frac{-Q}{N}}$, получимъ эти точки $G$ и $B$, называемыя также вершинами эллипса. Величины $CD$ и $GB$ называются длинами осей эллипса; большая изъ нихъ *большою осью*, а меньшая *малою осью*; длины $CO$ и $GO$ называются *полуосями*. Положивъ $CO = a$ и $OG = b$, будемъ имѣть



Фиг. 69

$$\sqrt{-\frac{Q}{M}} = a, \quad \sqrt{-\frac{Q}{N}} = b,$$

или

$$-\frac{Q}{M} = a^2, \quad -\frac{Q}{N} = b^2;$$

откуда выходитъ

$$M = -\frac{Q}{a^2}, \quad N = -\frac{Q}{b^2} \tag{2}$$

и отъ подстановленія этихъ величинъ $M$ и $N$ въ уравненіе (1) получимъ

$$-\frac{Q}{a^2}x^2 - \frac{Q}{b^2}y^2 + Q = 0,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Это есть простѣйшее, наиболѣе употребительное уравненіе эллипса. Въ частномъ случаѣ, когда $a = b$, это уравненіе приводится къ слѣдующему:

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

которое принадлежитъ кругу радіуса $a$; слѣдовательно, эллипсъ съ осями равными есть кругъ. Формулы (2) въ этомъ случаѣ даютъ $M = N$, для чего по формуламъ (10) **§ 39** необходимо, чтобы

$$(A + C)^2 + n = 0 \quad \text{или} \quad (A - C)^2 + B^2 = 0,$$

а это можетъ быть только въ случаѣ

$$A = C \quad \text{и} \quad B = 0.$$

Поэтому, чтобы уравненіе (1) **§ 39**, отнесенное къ прямоугольнымъ осямъ координатъ, принадлежало кругу, надобно, чтобы въ немъ не было члена съ произведеніемъ координатъ $xy$ и чтобы коэффиціенты при $x^2$ и $y^2$ были между собою равны, а знаки ихъ были бы противоположны знаку $Q$.

Полагая, что въ эллипсѣ полуоси не равны, согласимся означать впослѣдствіи буквою $a$ бо́льшую полуось, а буквою $b$ меньшую, и брать ось абсциссъ $x$ по направленію большей полуоси.

Для изслѣдованія очертанія эллипса, выразимъ одну изъ координатъ функціею другой и изслѣдуемъ эту функцію. Уравненіе (3) даетъ:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

По этой формулѣ видно, что ордината $y$ будетъ вещественная только тогда, когда $x^2$ не больше $a^2$; для чего $x$ должна заключаться въ предѣлахъ $-a$ и $+a$, т.-е. длина положительной или отрицательной абсциссы не должна быть больше длины полуоси $a$. Изъ этого слѣдуетъ, что всѣ точки эллипса находятся между двумя перпендикулярами къ оси $(x)$, проведенными чрезъ вершины $C$ и $D$. При $x = 0$ будетъ $y = \pm b$; съ непрерывнымъ увеличеніемъ $x$ длина $y$ непрерывно уменьшается, такъ что точки $(x, y)$ опишутъ линію, непрерывно простирающуюся между точками $B$ и $G$, $C$ и $D$. Каждой величинѣ $x$, взятой въ предѣлахъ $-a$ и $+a$, соотвѣтствуютъ двѣ величины для $y$, равныя и съ противоположными знаками, которыя изображаются двумя ординатами $PM$ и $PM'$, равными по длинѣ, но противоположными; поэтому точки эллипса расположены симметрически относительно оси $CD$; слѣдовательно, эта ось есть главный діаметръ эллипса (**§ 40**). Эти величины ординатъ не перемѣнятся отъ перемѣны $x$ на $-x$; слѣдовательно, двумъ равнымъ и противоположнымъ абсциссамъ соотвѣтствуютъ равныя ординаты, а потому точки эллипса симметрически расположены относительно оси $BG$; слѣдовательно, эта ось есть также главный діаметръ.

Итакъ, эллипсъ раздѣляется своими осями на четыре тожественныя части, и всѣ свойства точекъ одной четверти могутъ быть отнесены къ точкамъ прочихъ четвертей. Найдемъ точку, принадлежащую четверти $CG$. Для этого должно построить ординату $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$ по данной абсциссѣ $x = OP$. Начертивъ окружность круга изъ центра $O$ радіусомъ $OC = a$, возставимъ изъ $P$ перпендикуляръ къ $CD$ до встрѣчи съ этою окружностью, и проведемъ $ON$; отъ этого выйдетъ треугольникъ $ONP$, въ которомъ $NP = \sqrt{(a^2 - x^2)}$; слѣдовательно, $y = \frac{b}{a} NP$, и для опредѣленія $y$ остается найти четвертую пропорціональную къ $a$, $b$ и $NP$. Начертивъ другую окружность радіусомъ $OB = b$ изъ центра $O$, получимъ $OQ = BO = b$; потомъ, проведя $QM$ параллельную $CD$, найдемъ

$$MP : NP = OQ : ON = b : a;$$

слѣдовательно,

$$MP = \frac{b}{a} NP = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Это есть искомая величина $y$, а потому точка $M$ принадлежитъ эллипсу. Подобнымъ образомъ найдемъ другія точки эллипса. Назначивъ достаточное количество близкихъ между собою точекъ и соединивъ ихъ непрерывною чертою, получимъ сомкнутую кривую, похожую на кругъ, растянутый по направленію $CD$ [1]).

**42.** *Эллипсъ, также какъ и кругъ, съ прямою линіею можетъ пересѣкаться не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ* (**§ 33**).

Пусть

$$y = \alpha x + \beta \qquad (1)$$

---

[1]) См. *Прибавленіе II.*

будетъ уравненіе какой-нибудь прямой. Если эта прямая пересѣкаетъ эллипсъ, то координаты точекъ пересѣченія должны удовлетворять уравненію прямой и уравненію эллипса:

$$y = \alpha x + \beta \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

слѣдовательно, величины $x$ и $y$, выведенныя изъ этихъ уравненій будутъ координаты точекъ пересѣченія. Исключивъ $y$, мы получимъ уравненіе второй степени

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2}{b^2} = 1$$

или

$$(a^2\alpha^2 + b^2)x^2 + 2a^2\alpha\beta x + a^2(\beta^2 - b^2) = 0, \tag{2}$$

которое имѣетъ не болѣе двухъ корней, и каждому корню соотвѣтствуетъ одна только величина для $y$, потому что уравненіе (1) первой степени; слѣдовательно, не больше двухъ паръ величинъ $x$ и $y$ могутъ вмѣстѣ удовлетворять уравненіямъ прямой и эллипса, а потому эти линіи могутъ имѣть небольше двухъ общихъ точекъ. Эти точки существуютъ на самомъ дѣлѣ тогда, когда корни уравненія (2) вещественны; для чего требуется условіе

$$4a^4\alpha^2\beta^2 - 4(a^2\alpha^2 + b^2)a^2(\beta^2 - b^2) \geqq 0,$$

которое, послѣ всѣхъ сокращеній, приводится къ слѣдующему:

$$a^2\alpha^2 + b^2 - \beta^2 \geqq 0.$$

Когда $a^2\alpha^2 + b^2 - \beta^2 = 0$, т.-е. $\beta^2 = a^2\alpha^2 + b^2$, тогда корни уравненія (2) равны и соотвѣтственныя имъ величины $y$ также равны, а потому въ этомъ случаѣ прямая имѣетъ только одну общую точку съ эллипсомъ, другими словами—касательна къ нему.

Примѣры:

1) Найти пересѣченіе прямой

$$y = x + 2$$

съ эллипсомъ

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 0.$$

Рѣшеніе. Двѣ точки: (0, 2) и $\left(-\frac{36}{13}, -\frac{10}{13}\right)$,

2) **Найти пересѣченіе прямой**

$$y = -x + 5$$

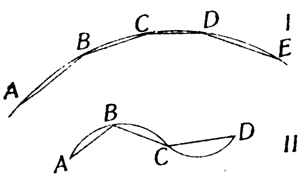
и эллипса

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

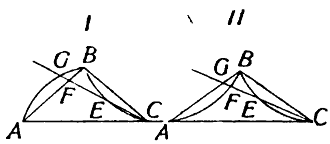
Рѣшеніе. Одна точка $\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

**43.** Легко удостовѣриться, что всякая дуга эллипса, подобно дугѣ круга, всегда вогнута къ центру, или выпукла въ сторону, противоположную центру.

Дуга непрерывной кривой $AE$ (фиг. 70, I) будетъ, подобно дугѣ круга, выпукла въ одну какую-либо сторону, если всякій многоугольникъ, въ нее вписанный и составленный хордами, соединяющими послѣдовательныя точки: $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, будетъ выпуклый, т. е., если у него нѣтъ вмѣстѣ выходящихъ и входящихъ угловъ,

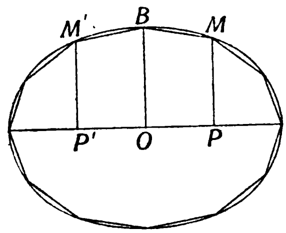



Фиг. 70




Фиг. 71

подобныхъ угламъ $ABC$ и $BDC$ (фиг. 37, II), сколько бы притомъ ни было сторонъ у многоугольника и какъ бы малы онѣ ни были. Докажемъ, что это свойство принадлежитъ всякой дугѣ эллипса. Оно есть слѣдствіе того свойства, что эллипсъ пересѣкается прямою только въ двухъ точкахъ. Допустивъ послѣднее, легко, во-первыхъ, доказать, что дуги, стянутыя двумя послѣдовательными хордами $AB$ и $BC$, не могутъ находиться внутри угла $ABC$, составленнаго этими хордами. Въ самомъ дѣлѣ, предположивъ, что дуга $BC$ (фиг. 71, I) лежитъ внутри угла, возьмемъ на ней точку $E$, находящуюся внутри треугольника $ABC$, и проведемъ прямую $EC$: эта прямая, выходя изъ треугольника $ABC$, пересѣчетъ хорду $AB$ въ нѣкоторой точкѣ $F$, а поэтому пересѣчетъ и дугу $AB$, въ нѣкоторой точкѣ $G$. А это невозможно, потому что тогда прямая $FC$ пересѣкла бы кривую въ трехъ точкахъ: $C$, $E$ и $G$. Слѣдовательно, дуги $AB$ и $BC$ (фиг. 70, I) лежатъ внѣ угла $ABC$, и то же самое докажется для прочихъ дугъ. Теперь легко видѣть, что уголъ $BCD$ долженъ быть обращенъ вершиною въ одну сторону съ угломъ $ABC$, потому что въ противномъ случаѣ мы нашли бы, что дуга $BC$ лежитъ внутри угла $BCD$, какъ въ фигурѣ 70, II. Итакъ, если дуга $ABCDE$ принадлежитъ эллипсу, то всѣ углы $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, обращены вершинами въ одну сторону. Такъ какъ въ эллипсѣ (фиг. 72) двѣ ординаты $MP$ и $M'P'$ меньше полуоси $OB$, то уголъ $MBM'$ обращенъ вершиною въ сторону, противоположную той, гдѣ центръ; а потому углы всякаго многоугольника, вписаннаго въ эллипсъ, будутъ выходящіе, точно такъ, какъ у многоугольника, вписаннаго въ кругъ. Отсюда ясно, что эллипсъ, подобно кругу, вездѣ въ своемъ очертаніи вогнутъ къ центру.



Фиг. 72

**44.** Изслѣдуемъ теперь уравненіе (1) **§ 41**,

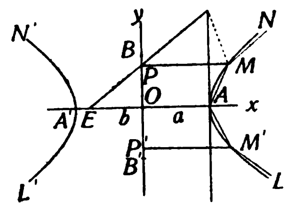
$$Mx^2 + Ny^2 + Q = 0, \tag{1}$$

когда $M$ и $N$ имѣютъ противоположные знаки, притомъ $Q$ не равно нулю; тогда, какъ мы сказали выше, линія, которой она можетъ принадлежать, называется *гиперболою.* При этомъ достаточно разсмотрѣть случай, въ которомъ $M$ и $Q$ имѣютъ противоположные знаки; потому что въ случаѣ противоложныхъ знаковъ при $N$ и $Q$ можно перемѣнить $x$ на $y$ и $y$ на $x$, отчего получится уравненіе, подходящее подъ первый случай.

Прежде всего найдемъ точки пересѣченія кривой съ осями координатъ. Чтобы найти пересѣченіе съ осью $Ox$, должно положить $y = 0$; тогда по уравненію (1) получимъ:

$$Mx^2 + Q = 0; \text{ откуда } x = \pm \sqrt{\frac{-Q}{M}}.$$

Такъ какъ $Q$ и $M$ имѣютъ противоположные знаки, то $-Q$ и $M$ имѣютъ одинаковые знаки; слѣдовательно, $\frac{-Q}{M}$ есть положительная величина, и найденныя два значенія для $x$ вещественны. Слѣдовательно, кривая пересѣкаетъ ось $Ox$ въ двухъ точкахъ $A$ и $A'$, отстоящихъ отъ начала координатъ $O$ на длину $\sqrt{\frac{-Q}{M}}$, которую означимъ чрезъ $a$. Для отысканія пересѣченія кривой съ осью $Oy$, должно положить въ уравненіе (1) $x = 0$; отъ этого получимъ $Ny^2 + Q = 0$ и $y = \sqrt{\frac{-Q}{N}}$. Такъ какъ $N$ и $Q$ имѣютъ одинаковые знаки, то знаки $-Q$ и $N$ противоположные; слѣдовательно, $\frac{-Q}{N}$ есть отрицательная величина, а найденное значеніе $y$ — мнимое. Изъ этого видно, что кривая не пересѣкаетъ оси $Oy$. Найденное мнимое значеніе $\sqrt{\frac{-Q}{N}}$ можетъ быть представлено подъ видомъ $\sqrt{\frac{Q}{N}} \cdot \sqrt{-1}$, гдѣ $\sqrt{\frac{Q}{N}}$ вещественное количество, которое означимъ чрезъ $b$.



Фиг. 73

Точки $A$ и $A'$ пересѣченія кривой съ осью $Ox$ называются *вершинами гиперболы*; длина $AA'$—*главною осью*, а $OA = a$ — *главною полуосью*. Отложивъ на оси $Oy$ длины $OB$ и $OB'$ равныя $b$, получимъ длину $BB' = 2b$, называемую *второю* или *мнимою осью* гиперболы, а длина $OB = b$ называется *второю* или *мнимою полуосью*.

Для удобнѣйшаго изслѣдованія уравненія (1) введемъ въ него величины $a$ и $b$ вмѣсто $M$, $N$ и $Q$. Изъ равенствъ $\sqrt{\frac{-Q}{M}} = a$ и $\sqrt{\frac{Q}{N}} = b$ выводимъ

$$M = \frac{-Q}{a^2}, \quad N = \frac{Q}{b^2};$$

вслѣдствіе чего уравненіе (1) приметъ видъ: $\frac{-Q}{a^2}x^2 + \frac{Qy^2}{b^2} + Q = 0$ или

$$\frac{x^2}{x^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Это уравненіе можетъ быть выведено изъ уравненія эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, перемѣною $b^2$ на $-b^2$ или $b$ на $b\sqrt{-1}$. Впослѣдствіи это свойство будетъ полезно для перехода отъ формулъ, принадлежащихъ эллипсу, къ формуламъ, относящимся къ гиперболѣ.

Уравненіе (2) даетъ:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{3}$$

Чтобы эта величина была вещественная, $x^2$ не долженъ быть меньше $a^2$, т.-е. абсцисса $x$ не должна заключаться въ предѣлахъ $-a$ и $+a$; слѣдовательно, гипербола не имѣетъ точекъ между прямыми, проведенными чрезъ вершины $A$ и $A'$ перпендикулярно къ $AA'$. Послѣдняя формула даетъ для всякой абсциссы, длина которой больше $a$, двѣ ординаты, равныя и противоположныя, а для двухъ равныхъ и противоположныхъ абсциссъ — двѣ равныя ординаты съ одинаковыми знаками; отъ этого точки гиперболы симметрически расположены относительно координатныхъ осей $Ox$, $Oy$; слѣдовательно, эти оси суть главные діаметры гиперболы (**§ 40**).

Нетрудно построить формулу (3) по данной абсциссѣ $x$; но удобнѣе построить абсциссу $x$ по данной ординатѣ $y$. Рѣшивъ уравненіе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ относительно $x$, найдемъ:

$$x=\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}.$$

Чтобы построить эту формулу, положимъ $y=OP$, отложимъ $OE=b$ и проведемъ прямую $EP$ до встрѣчи въ точкѣ $Q$ съ перпендикуляромъ къ $AA'$, возставленнымъ изъ вершины $A$; отъ этого получимъ $EP=\sqrt{y^2+b^2}$,

$$PQ:EP=AO:OE \quad \text{или} \quad PQ:\sqrt{y^2+b^2}=a:b;$$

слѣдовательно,

$$PQ=\frac{a\sqrt{y^2+b^2}}{b}$$

есть искомая величина абсциссы $x$; поэтому прямая $PM$, параллельная $Ox$ и равная $PQ$, опредѣлитъ точку $M$, принадлежащую гиперболѣ. Такимъ образомъ легко опредѣлить множество точекъ гиперболы, которыя, будучи соединены непрерывною чертою $LN$, покажутъ очертаніе кривой со стороны положительныхъ абсциссъ. Точно также опредѣлимъ по точкамъ очертаніе гиперболы $L'N'$ со стороны отрицательныхъ абсциссъ.

Изъ формулы $x=\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$ видно, что при неопредѣленномъ возрастаніи $y$, также $x$ неопредѣленно увеличиваются; поэтому точки гиперболы болѣе и болѣе удаляются отъ центра $O$ и четверть гиперболы $AN$, помѣщенная въ углѣ $yOx$, безконечна. То же заключеніе для прочихъ четвертей: $AL$, $A'N'$, $A'L'$. Двѣ четверти

$AN$ и $AL$ составляютъ одну непрерывную кривую $NAL$, называемую вѣтвью гиперболы. Четверти $A'N'$ и $A'L'$ составляютъ другую вѣтвь $N'A'L'$.

Легко доказать (**§ 32**), что гипербола съ прямою линіею можетъ пересѣкаться только въ двухъ точкахъ, а на основаніи этого свойства докажется, что всякій многоугольникъ, вписанный въ дугу гиперболы, обращенъ вершинами въ одну сторону. Абсциссы $MP$ и $M'P'$ больше полуоси $AO$; поэтому $\angle MAM'$ обращенъ вершиною къ центру; слѣдовательно, углы многоугольника, вписаннаго въ одну вѣтвь гиперболы $NAL$, обращены вершинами въ одну сторону съ угломъ $MAM'$, т.-е. многоугольникъ и самая вѣтвь гиперболы на всемъ протяженіи выпуклостью обращены къ центру. То же должно сказать и о вѣтви $N'A'L'$.

Гипербола, у которой полуоси $a$ и $b$ равны, называется *равносторонней*; уравненіе такой гиперболы имѣетъ видъ

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

**45.** Примѣры линій 2-го порядка, имѣющихъ центръ.

1) Уравненіе $5x^2 - 4xy + 2y^2 - 4y - 2x - 4 = 0$ (см. **§ 38** прим. 1-й), чрезъ перенесеніе начала координатъ въ центръ (1, 2), было приведено къ слѣдующему

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - 9 = 0.$$

Для уничтоженія въ немъ члена съ произведеніемъ $xy$ должно перемѣнить оси $Ox$, $Oy$ на другія $Ox'$, $Oy'$, опредѣливъ направленіе $Ox'$ по углу $\alpha$, для котораго формула (5) **§ 39** даетъ

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{-4}{3};$$

откуда выходитъ

$$2\alpha = 126^\circ 52' \quad \text{или} \quad 2\alpha = 306^\circ 52'$$

и

$$\alpha = 63^\circ 26' \quad \text{или} \quad \alpha = 153^\circ 26'.$$

По формуламъ (8) **§ 39**, если удержимъ знакъ + при радикалѣ, имѣемъ

$$\sin 2\alpha = -\tfrac{4}{5}, \quad \cos 2\alpha = \tfrac{3}{5}.$$

Здѣсь $\sin 2\alpha$ отрицательный, а $\cos 2\alpha$ положительный; поэтому

$$270^\circ < 2\alpha < 360^\circ;$$

слѣдовательно, должно взять

$$2\alpha = 306^\circ 52' \text{ и } \alpha = 153^\circ 26'.$$

Въ настоящемъ случаѣ $n = B^2 - 4AC = -24$, и формулы (10) даютъ $M = 6$, $N = 1$; поэтому уравненіе кривой, отнесенной къ осямъ $Ox'$ и $Oy'$, будетъ

$$6x'^2 + y'^2 - 9 = 0.$$

Оно принадлежитъ эллипсу, у котораго полуоси суть $\sqrt{\frac{3}{2}}$ и 3.

2) Уравненіе

$$2x^2 - 4xy - 2y^2 - 4y - 2x - 3 = 0$$

(см. 2-й прим. **§ 38**), чрезъ перенесеніе начала координатъ въ центръ $(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$, было приведено къ слѣдующему

$$2x^2 - 4xy - 2y^2 - \tfrac{5}{4} = 0. \qquad \text{(a)}$$

Для уничтоженія члена съ $xy$ должно перемѣнить оси $Ox$, $Oy$ на $Ox'$ и $Oy'$ такъ, чтобы уголъ $x'Ox = \alpha$ былъ опредѣленъ формулами (5) и (8) **§ 39**, которыя даютъ

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = -1, \quad \sin(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos(2\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

слѣдовательно, $2\alpha = 315^\circ$, $\alpha = 157^\circ 30'$. Здѣсь $n = B^2 - 4AC = 32$; поэтому, формулы (10) даютъ:

$$M = 2\sqrt{2}, \quad N = -2\sqrt{2};$$

отчего уравненіе (a) приведется къ слѣдующему

$$x'^2 - y'^2 - \frac{5}{8\sqrt{2}} = 0,$$

которое принадлежитъ равносторонней гиперболѣ. Полуоси этой кривой равны $\sqrt{\dfrac{5}{8\sqrt{2}}}$.

**46.** Разсмотримъ теперь линіи второго порядка, неимѣющія центра. Чтобы уравненіе второй степени

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

принадлежало линіи этого рода, коэффиціенты членовъ 2-й степени должны удовлетворять условію: $B^2 - 4AC = 0$ или $B^2 = 4AC$ (см. **§ 38**).

Если $B = 0$, то одинъ изъ коэффиціентовъ $A$, $C$ долженъ быть нулемъ. Положимъ, напримѣръ, $A = 0$. Въ такомъ случаѣ уравненіе приведется къ виду

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

и можетъ быть упрощено перенесеніемъ начала координатъ въ другую точку. Пусть будутъ $O'x'$, $O'y'$ новыя координатныя оси, параллельныя прежнимъ $Ox$, $Oy$; $\alpha$ и $\beta$ координаты новаго начала, а $x'$, $y'$ новыя координаты точки $(x, y)$. По формуламъ для перемѣны начала имѣемъ

$$x = \alpha + x', \quad y = \beta + y'.$$

Подставивъ эти выраженія $x$ и $y$ въ уравненіе (1), получимъ

$$C(\beta + y')^2 + D(\alpha + x') + E(\beta + y') + F = 0$$

или

$$Cy'^2 + Dx' + (2C\beta + E)\,y' + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F = 0.$$

Такъ какъ $\alpha$ и $\beta$ произвольны, то можно подчинить ихъ условіямъ:

$$2C\beta + E = 0, \quad C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F = 0; \qquad (2)$$

отчего уравненіе (1) приведется къ слѣдующему простѣйшему:

$$Cy'^2 + Dx' = 0.$$

Изъ уравненій (2) выходитъ:

$$\beta = -\frac{E}{2C}, \quad \alpha = \frac{E^2 - 4CF}{4CD}.$$

Коэффиціентъ $C$ не равенъ нулю, потому что въ противномъ случаѣ уравненіе (1) было бы первой степени и принадлежало бы прямой линіи; поэтому $\beta$ конечная величина. Если коэффиціентъ $D$ также не равенъ нулю, то $\alpha$ также конечная величина. Если же $D = 0$, то уравненіе (1) приведется къ слѣдующему:

$$Cy^2 + Ey + F = 0,$$

которое разлагается на два уравненія первой степени:

$$y = -\frac{E \pm \sqrt{(E^2 - 4CF)}}{2C}.$$

принадлежащія двумъ прямымъ параллельнымъ оси $Ox$, когда $E^2 > 4CF$, и ничего не выражающія въ случаѣ $E^2 < 4CF$, по причинѣ мнимаго радикала. Эти уравненія приводятся къ одному $y = -\frac{E}{2C}$, принадлежащему прямой, параллельной оси $Ox$, если $E^2 = 4CF$. Итакъ, уравненіе (1) можетъ принадлежать особенной линіи 2-го порядка, когда коэффиціенты $C$ и $D$ не равны нулю; тогда, чрезъ перенесеніе начала координатъ, можно привести его къ виду

$$Cy'^2 + Dx' = 0.$$

Къ этому виду можно привести и общее уравненіе

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (3)$$

когда $B$ не равно нулю, при условіи $B^2 - 4AC = 0$. Тогда $A$ и $C$ не равны нулю и должны имѣть одинаковые знаки, потому что $4AC = B^2$ есть положительная величина, и такъ какъ коэффиціентъ $A$ при $x^2$ можно всегда сдѣлать положительнымъ, то можно допустить, что $C$ также положительное. Условіе $B^2 - 4AC = 0$ даетъ $B = 2\sqrt{A}.\sqrt{C}$ или $B = 2\,ab$, если положимъ для сокращенія $\sqrt{A} = a$, $\sqrt{C} = b$, взявъ корни съ одинаковыми или противоположными знаками, смотря по тому, будетъ ли $B$ положительное или отрицательное. Отъ этого уравненіе кривой приметъ видъ

$$a^2x^2 + 2\,abxy + b^2y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

или

$$(ax + by)^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Легко теперь привести это уравненіе къ виду (1), перемѣнивъ направленія координатныхъ осей.

Допустивъ, что первоначальныя оси $Ox$, $Oy$, къ которымъ отнесено уравненіе, прямоугольныя, перемѣнимъ ихъ на другія прямоугольныя $Ox'$, $Oy'$. Положивъ $\angle x'Ox = \alpha$ и означивъ чрезъ $x'$, $y'$ новыя координаты точки $(x, y)$, имѣемъ:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

полагая при этомъ, что $y'Ox = x'Ox + 90^\circ$. Отъ подстановленія этихъ выраженій $x$ и $y$ въ уравненіе кривой, получимъ

$$[(a\cos\alpha + b\sin\alpha)x' + (b\cos\alpha - a\sin\alpha)y']^2 + (D\cos\alpha + E\sin\alpha)\,x' +$$
$$+ (E\cos\alpha - D\sin\alpha)\,y' + F = 0.$$

Это уравненіе приведется къ слѣдующему простѣйшему:

$$(b\cos\alpha - a\sin\alpha)^2 y'^2 + (D\cos\alpha + E\sin\alpha)\,x' + E\cos\alpha - D\sin\alpha)\,y' + \\ + F = 0 \qquad (4)$$

если положимъ

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = 0.$$

Послѣднее условіе можно написать подъ видомъ

$$\cos\alpha_{\lambda}(a + b\,tg\,\alpha) = 0.$$

Нельзя положить $\cos\alpha = 0$, потому что тогда было бы $b = 0$ и $B = 0$, что противно предположенію, сдѣланному выше; слѣдовательно, надобно положить $a + btg\,\alpha = 0$; откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a}{b} \qquad (5)$$

и для $a$ найдемъ всегда возможную величину. По углу $\alpha$ опредѣлимъ направленія осей $Ox'$, $Oy'$.

Изъ формулы (5) выводимъ

$$\sin\alpha = -\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}},\quad \cos\alpha = +\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

и подставивъ эти выраженія $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ въ уравненіе (4), получимъ

$$(b^2 + a^2)\,y'^2 + \frac{Db - Ea}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\,x' + \frac{Eb + Da}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\,y' + F = 0$$

или

$$C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0, \qquad (6)$$

гдѣ для сокращенія положено:

$$b^2 + a^2 = C',\quad \frac{Da - Ea}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = D',\quad \frac{Eb + Da}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = E'\,.$$

Уравненіе (6) имѣетъ одинаковый видъ съ уравненіемъ (1), а потому оно точно такъ же можетъ быть упрощено, т. е. перемѣною начала координатъ можетъ быть преобразовано въ другое, въ которомъ будутъ только два члена: членъ съ квадратомъ ординаты и членъ съ первою степенью абсциссы. Слѣдовательно, уравненіе линіи второго порядка, неимѣющей центра, всегда можетъ быть приведено къ виду

$$Cy^2 + Dx = 0,$$

или
$$y^2 = -\frac{D}{C}x,$$

гдѣ величина $-\frac{D}{C}$ можетъ быть положительная или отрицательная. Означивъ ее чрезъ $\pm 2p$, будемъ имѣть
$$y^2 = \pm 2px.$$

Но уравненіе $y^2 = -2px$ можетъ быть замѣнено уравненіемъ $y^2 = 2px$, если перемѣнимъ $x$ на $-x$, т. е., если согласимся отсчитывать положительныя абсциссы въ сторону, противоположную прежнимъ положительнымъ абсциссамъ. Поэтому
$$y^2 = 2px \tag{7}$$

есть общее уравненіе всѣхъ линій второго порядка, неимѣющихъ центра, которыя называются *параболами*. Величина $2p$ называется параметромъ параболы.

Примѣръ. Уравненіе
$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 3y - 4 = 0$$

(см. прим. 3-й **§ 38**) не можетъ принадлежать кривой съ центромъ, потому что $B^2 - 4AC = 4 - 4 = 0$. Первые три члена составляютъ полный квадратъ, а потому уравненіе можетъ быть представлено подъ видомъ
$$(x - y)^2 - 2x + 3y - 4 = 0.$$

Формула (5) даетъ
$$\operatorname{tg}\alpha = 1;\ \text{слѣдовательно}\ \alpha = 45^\circ\ \text{или}\ 225^\circ.$$

Взявъ $\alpha = 225^\circ$, имѣемъ $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, и данное уравненіе приведется къ слѣдующему
$$2y'^2 - \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{5y'}{\sqrt{2}} - 4 = 0$$
или
$$2y^2 - \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{5y}{\sqrt{2}} - 4 = 0,$$

если опустимъ значки надъ координатами, что позволительно, такъ какъ больше нѣтъ надобности въ прежнихъ координатахъ $x$ и $y$.

Приведемъ теперь это уравненіе къ виду (7). Подставивъ $\alpha + x'$ и $\beta + y'$ вмѣсто $x$ и $y$ и положивъ равными нулю: коэффиціентъ при $y'$ и постоянный членъ, получимъ:

$$4\beta - \frac{5}{\sqrt{2}} = 0\,, \quad 2\beta^2 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{5\beta}{\sqrt{2}} - 4 = 0\,;$$

откуда выходитъ:

$$\beta = \frac{5}{4\sqrt{2}}\,, \quad \alpha = -\frac{89\sqrt{2}}{16}$$

для координатъ новаго начала, и уравненіе кривой приведется къ слѣдующему

$$2y'^2 - \frac{x'}{\sqrt{2}} = 0$$

или окончательно

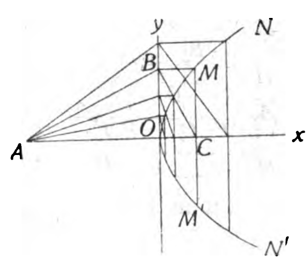
$$y'^2 - \frac{x'}{2\sqrt{2}}\,.$$

**47.** Разсмотримъ очертаніе параболы и построимъ ее по точкамъ.

Парабола $y^2 = 2px$ проходитъ чрезъ начало координатъ, потому что при $x = 0$ будетъ $y = 0$. Изъ уравненія $y^2 = 2px$ выходитъ

$$y = \pm\sqrt{2px};$$

эта формула показываетъ, что $y$ мнимое при отрицательномъ $x$; слѣдовательно, у параболы нѣтъ точекъ съ отрицательными абсциссами, т. е. всѣ ея точки лежатъ на сторонѣ положительныхъ $x$. Для всякой положительной абсциссы $x$ ордината $y$ имѣемъ двѣ равныя и противоположныя величины; поэтому ось $Ox$ раздѣляетъ параболу на двѣ симметрическія части; слѣдовательно, $Ox$ есть главный діаметръ или ось параболы.



Фиг. 74

Легко начертить параболу по точкамъ слѣдующимъ образомъ:

Отложимъ $AO = 2p$, проведемъ чрезъ точку $A$ произвольную прямую $AB$; замѣтимъ $B$ пересѣченіе этой прямой съ осью $Oy$, и возставимъ къ $AB$ перпендикуляръ $BC$; отъ этого получимъ прямоугольный треугольникъ $ABC$, въ которомъ

$$BO^2 = AO\,.\,OC = 2p\,.\,OC\,;$$

слѣдовательно, $OC$ и $BO$ можно разсматривать какъ координаты точки параболы. Эта точка $M$ будетъ въ пересѣченіи прямыхъ, параллельныхъ осямъ $Ox$, $Oy$, проведенныхъ чрезъ точки $B$ и $C$. Опредѣливъ такимъ образомъ рядъ точекъ, между собою весьма близкихъ, и соединивъ ихъ непрерывною чертою, получимъ часть параболы $ON$. Точки другой части $ON'$ найдемъ, откладывая каждую ординату въ противоположную сторону, такъ, напримѣръ, найдемъ $M'$, отложивъ $CM' = CM$. Обѣ части могутъ быть продолжены безконечно, потому что съ возрастаніемъ абсциссы $x$ ордината $y = \sqrt{2px}$ возрастаетъ и при $x = \infty$ будетъ $y = \infty$.

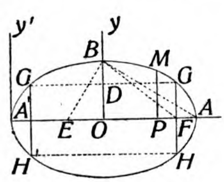
Легко доказать (**§ 32**), что парабола не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ, можетъ пересѣкаться съ прямою, а на основаніи этого, что всякій многоугольникъ, вписанный въ дугу параболы, обращенъ своими вершинами къ оси $Oy$; слѣдовательно, парабола на всемъ своемъ протяженіи обращена выпуклостью къ этой оси.

**48.** Уравненія трехъ линій втораго порядка можно соединить въ одно, отнеся ихъ къ прямоугольнымъ осямъ, имѣющимъ начало въ одной изъ вершинъ, принадлежащихъ главной оси, и взявъ эту ось за ось абсциссъ.

Пусть будетъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

уравненіе эллипса, отнесенное къ его осямъ $Ox$, $Oy$; $a = AO$ большая полуось и $b = OB$ малая. Выведемъ уравненіе эллипса относительно прямоугольныхъ осей $A'x$ и $A'y'$, имѣющихъ начало въ вершинѣ $A'$.




Фиг. 75

Очевидно, что здѣсь ордината $MP$ каждой точки $M$ та же для прежнихъ и новыхъ осей, а прежняя абсцисса $x = A'P - A'O$; слѣдовательно, означивъ чрезъ $x'$ новую абсциссу, имѣемъ $x = x' - a$, и уравненіе эллипса преобразуется въ слѣдующее:

$$\frac{(x'-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

или

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{2x'}{a} + 1 + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

отсюда выводимъ

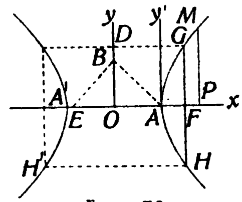
$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x' - \frac{b^2}{a^2}x'^2.$$

Положивъ для сокращенія $\frac{b^2}{a} = p$, будемъ имѣть $b^2 = ap$,

$$y^2 = 2px' - \frac{px'^2}{a}.$$

Преобразуемъ также уравненіе гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$



Фиг. 76

отнесенное къ своимъ осямъ $Ox$, $Oy$, перемѣнивъ эти оси на $Ax$ и $Ay'$. Ордината $MP$ остается та же, а абсцисса $x = OP$ перемѣнится на $x' = AP$ такъ, что $x = a + x'$; поэтому уравненіе кривой преобразуется въ слѣдующее:

$$\frac{(a + x')^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

или

$$\frac{2x'}{a} + \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0;$$

откуда выходитъ

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x' + \frac{b^2}{a^2}x'^2$$

или

$$y^2 = 2px' + \frac{px'^2}{a},$$

гдѣ

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Это уравненіе можетъ быть соединено съ уравненіемъ эллипса въ одно

$$y^2 = 2px' \pm \frac{px'^2}{a}, \qquad (1)$$

которое превращается въ уравненіе параболы

$$y^2 = 2px',$$

если положимъ $a = \infty$. Въ этомъ смыслѣ можно разсматривать параболу, какъ эллипсъ, или какъ вѣтвь гиперболы, съ безконечною главною осью. Величина $2p$, служащая коэффиціентомъ при первой степени абсциссы въ уравненіи (1), называется также, какъ и въ уравненіи параболы, *параметромъ.*

Уравненіе (1) показываетъ, что для эллипса

$$y^2 < 2px',$$

для гиперболы

$$y^2 > 2px',$$

а для параболы

$$y^2 = 2px',$$

т.-е. *въ эллипсѣ квадратъ, построенный на ординатѣ, меньше прямоугольника изъ параметра и абсциссы; въ гиперболѣ первая площадь больше второй, а въ параболѣ обѣ площади равны.*

Эти свойства были уже извѣстны древнимъ и по нимъ даны названія кривымъ втораго порядка: *эллипсъ* значитъ по-гречески (отъ слова ἐλλείπω) уменьшеніе, *гипербола* — преобладаніе (отъ ὑπερβάλλω), а *парабола* (отъ παραβάλλω) — равенство.

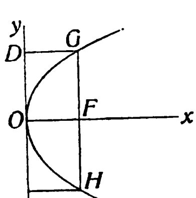
**49.** Легко построить параметры эллипса и гиперболы по даннымъ полуосямъ. Формула $p = \frac{b^2}{a}$ показываетъ, что *полупараметръ есть третья пропорціональная къ главной полуоси $a = OA$ и ко второй $b = OB$* (фиг. 75 и 76). Если проведемъ $BA$ и потомъ $BE$, перпендикулярную къ $BA$, то получимъ $OE = p$; потому что

$$BO^2 = AO \,.\, OE \quad \text{или} \quad b^2 = a \,.\, OE;$$

откуда

$$OE = \frac{b^2}{a} = p.$$

Параметръ обыкновенно изображается хордою, перпендикулярною къ главной оси. Отложивъ $OD = OE$, проведя потомъ чрезъ $D$ прямую $GG'$, параллельную главной оси $AA'$, и прямыя $GH$ и $G'H'$, перпендикулярныя къ $AA'$ получимъ двѣ хорды $GH$ и $G'H'$, равныя параметру. Также, если въ параболѣ отложимъ $OD = p$, проведемъ $DG$ параллельно $Ox$ и $GH$ перпендикуляръ на $Ox$, найдемъ $GH = 2p$.



Фиг. 77

Параметры, построенные такимъ образомъ, пересѣкаютъ главную ось $Ox$ въ точкахъ, называемыхъ *фокусами.* Эллипсъ и гипербола имѣютъ по два фокуса: $F$ и $E'$, а парабола только одинъ. Разстонія $FO$, $F'O$ фокусовъ эллипса или гиперболы отъ центра называются *эксцентрицитетами*, которые означимъ чрезъ $c$.

Легко найти длину $c = OF$, замѣтивъ, что она есть абсцисса точки $G$, у которой ордината $GF$ равна полупараметру $p = \frac{b^2}{a}$. Поэтому уравненіе эллипса или гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

должно быть удовлетворено величинами: $x = c$, $y = \frac{b^2}{a}$; слѣдовательно,

$$\frac{c^2}{a^2} \pm \frac{b^4}{a^4} = 1;$$

отсюда выходитъ

$$c^2 = a^2 \mp b^2.$$

Это уравненіе показываетъ, что эксцентрицитетъ эллипса есть катетъ прямоугольнаго треугольника, въ которомъ гипотенуза равна большой полуоси $a$, а другой катетъ малой полуоси $b$. Слѣдовательно, если изъ $B$ какъ центра радіусомъ $OA$ (фиг. 75) опишемъ дугу круга, то въ пересѣченіи этой дуги съ большою осью $AA'$ найдемъ фокусы $F$ и $F'$. Въ самомъ дѣлѣ: тогда въ треугольникѣ $OBF$ имѣемъ

$$OF^2 = BF^2 - OB^2 = a^2 - b^2.$$

Эксцентрицитетъ гиперболы есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника, у котораго катеты равны полуосямъ: $a$ и $b$; поэтому прямая $BA$ (фиг. 76) равна эксцентрицитету. Отложивъ $OF$ и $OF'$ равныя $BA$, найдемъ фокусы $F$ и $F'$ *).

Въ параболѣ *разстояніе фокуса отъ вершины равно четверти параметра;* потому что положивъ $y = p = FG$ (фиг. 77) въ уравненіи $y^2 = 2px$, найдемъ: $p^2 = 2px$, $x = \frac{p}{2} = OF$.

**50.** Разстоянія данной точки отъ точекъ, принадлежащихъ какой-либо линіи, называются *радіусами векторами*.

*Если ось абсциссъ взята по направленію главной оси линіи второго порядка, то радіусъ векторъ, проведенный изъ фокуса этой кривой въ какую-нибудь ея точку, выражается раціональною линейною функціею абсциссы точки, въ которую онъ проведенъ.*

*) Въ Астрономіи принято называть эксцентрицитетомъ отношеніе $\frac{c}{a}$; тогда $c$, въ отличіе отъ этого, называется *линейнымъ эксцентрицитетомъ* (см. **§ 86**).

Докажемъ сперва это свойство для эллипса, отнесеннаго къ его осямъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Пусть $F$ и $F'$ будутъ его фокусы, $c$ эксцентрицитетъ и $FM=r$ радіусъ векторъ, проведенный изъ фокуса $F$ $(c, O)$ въ точку $M$ $(x, y)$. По формулѣ для квадрата разстоянія между двумя точками имѣемъ

$$r^2=y^2+(x-c)^2=y^2+x^2-2cx+c^2,$$

а изъ уравненія эллипса выводимъ

$$y^2=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2};$$

слѣдовательно, по исключеніи $y^2$ изъ предыдущаго выраженія, получимъ

$$r^2=b^2+c^2-2cx+\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2.$$

Такъ какъ $b^2+c^2=a^2$ и $a^2-b^2=c^2$, то

$$r^2=a^2-2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}=\left(\frac{a^2-cx}{a}\right)^2;$$

а потому

$$r=\pm\frac{a^2-cx}{a}.$$

Подразумѣвая подъ $r$ абсолютную длину радіуса вектора, надобно здѣсь изъ двухъ знаковъ $\pm$ взять тотъ, который даетъ формулѣ положительное значеніе. А такъ какъ $c$ и $x$ абсолютно меньше $a$, то произведеніе $cx$ абсолютно меньше $a^2$; поэтому $a^2-cx$ имѣетъ положительное значеніе при всякомъ положеніи точки $(x, y)$ на эллипсѣ; слѣдовательно, должно взять

$$r=\frac{a^2-cx}{a}=a-\frac{cx}{a}. \qquad (1)$$

Такимъ же образомъ найдемъ выраженіе радіуса вектора $F'M=r'$, проведеннаго изъ фокуса $F'$ $(-c, 0)$ въ точку $M(x, y)$: но можно вывести его изъ формулы (1), перемѣнивъ $c$ на $-c$; отчего получимъ

$$r'=a+\frac{cx}{a}. \qquad (2)$$

Найдемъ теперь выраженія радіусовъ векторовъ гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

проведенныхъ изъ ея фокусовъ $F$ и $F'$ въ точку $M\,(x,\ y)$. Положивъ $FM = r$, имѣемъ

$$r^2 = y^2 + (x - c)^2 = y^2 + x^2 - 2cx + c^2,$$

а такъ какъ $y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$, $b^2 + a^2 = c^2$, $c^2 - b^2 = a^2$, то

$$r^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2 = \left(\frac{cx - a^2}{a}\right)^2;$$

слѣдовательно,

$$r = \pm\frac{cx - a^2}{a}. \tag{3}$$

Такъ какъ $c$ и $x$ абсолютно больше $a$, то произведеніе $cx$ абсолютно больше $a^2$; поэтому разность $cx - a^2$ имѣетъ положительное значеніе, когда $x$ положительная, и отрицательное, когда $x$ отрицательная; слѣдовательно, въ первомъ случаѣ должно взять

$$r = \frac{cx - a^2}{a} = \frac{cx}{a} - a, \tag{4}$$

а во второмъ

$$r = -\frac{cx - a^2}{a} = a - \frac{cx}{a}. \tag{5}$$

Для радіуса вектора $F'M = r'$, проведеннаго изъ фокуса $F'\,(-c,\ 0)$, найдемъ

$$r' = a + \frac{cx}{a}, \tag{6}$$

когда $x$ положительная, и

$$r' = -\frac{cx}{a} - a, \tag{7}$$

когда $x$ отрицательная.

Наконецъ выведемъ выраженіе радіуса вектора $r$, проведеннаго изъ фокуса $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ параболы

$$y^2 = 2px$$

въ точку $M$ $(x, y)$. По извѣстной формулѣ имѣемъ

$$r^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + x^2 - px + \frac{p^2}{4},$$

а по исключеніи $y^2$ помощью уравненія параболы, получимъ

$$r^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2;$$

слѣдовательно,

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{8}$$

Выведенныя нами формулы показываютъ, что въ самомъ дѣлѣ радіусъ векторъ, проведенный изъ фокуса линіи второго порядка въ какую-либо ея точку, выражается раціональною линейною функціею абсциссы послѣдней.

—* Это свойство не нарушится, если возьмемъ вмѣсто центра эллипса или гиперболы, или вмѣсто вершины параболы, другую какую-нибудь точку за начало координатъ, а направленіе оси новыхъ абсциссъ опять по главной оси или параллельно этой оси; потому что, означая чрезъ $\alpha$ абсциссу новаго начала и чрезъ $x'$ новую абсциссу точки, взятой на кривой, будетъ имѣть $x = \alpha + x'$, и, если это подставить въ найденныя выше выраженія радіусовъ векторовъ $r$ и $r'$, то получимъ раціональныя линейныя функціи относительно новой абсциссы $x'$.

Если же перемѣнимъ координатныя оси на какія-либо другія такъ, чтобы новая ось абсциссъ не была параллельна главной оси кривой линіи, то абсцисса $x$ выразится линейною функціею новой абсциссы $x'$ и новой ординаты $y'$; слѣдовательно, и радіусъ векторъ выразится линейною функціею обѣихъ координатъ.

Это свойство радіуса вектора принадлежитъ исключительно линіямъ 2-го порядка, т.-е., *всякая линія, имѣющая свойство, что радіусъ векторъ, проведенный изъ данной точки $F$ въ какую-нибудь точку $(x, y)$ этой линіи, выражается раціональною линейною функціею координатъ $x$ и $y$, есть линія 2-го порядка, а данная точка $F$ есть фокусъ этой кривой.*

Пусть функція

$$r = Ax + By + C, \tag{9}$$

гдѣ $A$, $B$, $C$ постоянныя количества, выражаетъ радіусъ векторъ. Означимъ чрезъ $P$ параметръ этой функціи (см. **§ 26**) и чрезъ $\delta$ разстояніе точки $(xy)$ отъ прямой

$$Ax + By + C = 0, \tag{10}$$

взятое съ $+$ или $-$, смотря по тому, находится ли точка $(xy)$ относительно этой прямой съ той стороны, куда направленъ параметръ $P$, или со стороны противоположной. По формулѣ (2) **§ 26** будемъ имѣть

$$\delta = \frac{Ax + By + C}{P},$$

помощью чего уравненіе (9) приведется къ слѣдующему:

$$r = P\delta. \tag{11}$$

Это уравненіе, независящее отъ положенія координатныхъ осей, выражаетъ замѣчательное свойство кривой: *радіусъ векторъ, проведенный изъ данной точки въ какую либо точку* $(xy)$ *разсматриваемой линіи и разстояніе точки* $(xy)$ *отъ данной прямой* (10) *имѣютъ постоянное отношеніе* $P$.

Если возьмемъ прямую (10) за ось ординатъ, и перпендикулярную къ ней $OF$, направленную въ одну сторону съ параметромъ $P$, за ось абсциссъ, то, означивъ чрезъ $\alpha$ абсциссу данной точки $F$, по уравненію (11) будемъ имѣть

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = P^2x^2$$

или

$$(1 - P^2)\, x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0. \tag{12}$$

Это уравненіе принадлежитъ: эллипсу, когда $P < 1$, *гиперболѣ*, когда $P > 1$, и *параболѣ*, когда $P = 1$.

Центръ кривой, въ первыхъ двухъ случаяхъ, находится въ точкѣ $\left(\frac{\alpha}{1 - P^2},\ 0\right)$. Перенеся начало координатъ въ эту точку, получимъ уравненіе

$$(1 - P^2)\, x^2 + y^2 - \frac{\alpha^2 P^2}{1 - P^2} = 0. \tag{13}$$

Положивъ $P < 1$ и означивъ чрезъ $a$, $b$ и $c$ полуоси и эксцентрицитетъ эллипса, которому принадлежитъ въ этомъ случаѣ уравненіе (13), легко найдемъ:

$$a = \frac{\alpha P}{1 - P^2}, \quad b = \frac{\alpha P}{\sqrt{1 - P^2}}, \quad c = \frac{\alpha P^2}{1 - P^2}. \tag{14}$$

Въ случаѣ $P > 1$, если означимъ чрезъ $a$, $b$ и $c$ полуоси и эксцентрицитетъ гиперболы, которой принадлежитъ уравненіе (13), то получимъ

$$a = \frac{\alpha P}{P^2 - 1}, \quad b = \frac{\alpha P}{\sqrt{P^2 - 1}}, \quad c = \frac{\alpha P^2}{P^2 - 1}.$$

Въ случаѣ $P = 1$, уравненіе (2) приведется къ слѣдующему:

$$y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0,$$

которое преобразуется въ

$$y^2 = 2\alpha x$$

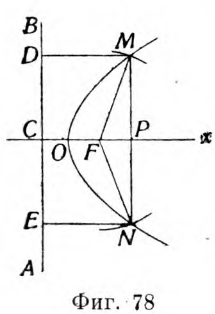
чрезъ перенесеніе начала координатъ въ точку $\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$. Величина $\pm 2\alpha$ есть параметръ параболы, которой принадлежитъ это уравненіе. * —

**51.** Изъ найденныхъ выраженій для радіусовъ векторовъ вытекаютъ примѣчательныя свойства линій второго порядка.

Разсмотримъ прежде всего выраженіе (8) радіуса вектора параболы

$$r = x + \frac{p}{2},$$

какъ простѣйшее. Оно показываетъ, что *радіусъ векторъ равенъ абсциссѣ, сложенной съ четвертью параметра.* Пусть будетъ $F$ фокусъ параболы, а $OP = x$, $MP = y$ координаты точки $M$. Такъ




Фиг. 78

какъ $OF = \frac{p}{2}$, то, отложивъ $OC = OF$, получимъ $CP = \frac{p}{2} + x$. А это есть выраженіе радіуса вектора $MF$; слѣдовательно,

$$CP = MF.$$

Проведя чрезъ $C$ прямую $AB$, перпендикулярную къ $Ox$, и $MD$, перпендикулярную къ $AB$, найдемъ

$$MD = CP = MF,$$

т.-е. *каждая точка параболы находится на равныхъ разстояніяхъ отъ фокуса $F$ и прямой $AB$, называемой директрисою или направляющею.*

Изъ выраженія (1) радіуса вектора эллипса

$$MF = r = a - \frac{cx}{a},$$

представленнаго подъ видомъ

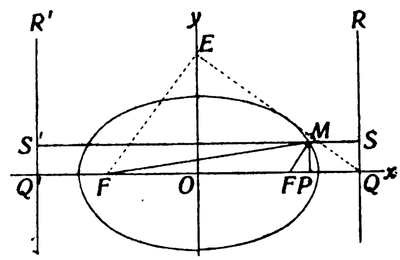
$$r = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right),$$

усматриваемъ, что, если проведемъ $QR$, перпендикулярную къ $Ox$, на разстояніи $OQ = \frac{a^2}{c}$ отъ центра, и $MP$ ординату точки $M$, то будемъ имѣть

$$\frac{a^2}{c} - x = PQ$$

и

$$MF = \frac{c}{a} PQ;$$




Фиг. 79

но $PQ$ равно $MS$, разстоянію точки $M$ отъ прямой $QR$; слѣдовательно,

$$MF = \frac{c}{a} MS \text{ или } \frac{MF}{MS} = \frac{c}{a},$$

т.-е. *отношеніе между разстояніями каждой точки эллипса отъ фокуса $F$ и прямой $QR$, называемой директрисою, постоянно и равно отношенію эксцентрицитета къ большой полуоси.* Это отношеніе меньше 1, потому что $c < a$. Такъ какъ $OQ = \frac{a^2}{c}$ больше полуоси $OA = a$, то директриса $QR$ не пересѣкаетъ эллипса. Разстояніе $OQ = \frac{a^2}{c}$ есть третья пропорціональная къ $a$ и $c$ и строится такъ: отложимъ по оси $Oy$ длину $OE = a$, проведемъ $F'E$ и возставимъ къ $F'E$ перпендикуляръ; въ пересѣченіи послѣдняго съ осью $Ox$ получимъ точку $Q$.

Другому фокусу $F'$ принадлежитъ другая директриса $Q'R'$, проведенная также на разстояніи $OQ' = \frac{a^2}{c}$ отъ центра.

Изъ выраженія радіуса вектора гиперболы (4):

$$MF = \frac{cx}{a} - a = \frac{c}{a}\left(x - \frac{a^2}{c}\right)$$

усматриваемъ, что, если проведена будетъ прямая $QR$, перпендикулярная къ $Ox$, на разстояніи $OQ = \frac{c^2}{a}$ отъ центра, и ордината $MP$, то

$$PQ = x - \frac{a^2}{c}$$

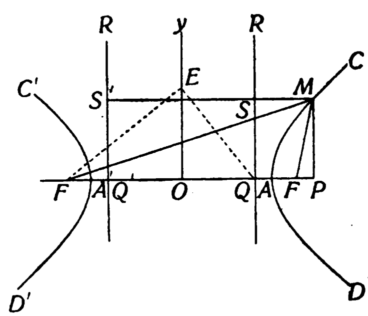
и, слѣдовательно,

$$MF = \frac{c}{a} PQ;$$

но $PQ = MS$, разстоянію точки $M$ отъ прямой $QR$, поэтому

$$MF = \frac{c}{a} MS \quad \text{или} \quad \frac{MF}{MS} = \frac{c}{a},$$

т.-е. *отношеніе между разстояніями каждой точки гиперболы отъ фокуса $F$ и прямой $QR$, называемой директрисою, постоянно и равно отношенію эксцентрицитета въ главной полуоси.*




Фиг. 80

Это отношеніе $> 1$, потому что $c > a$. Директриса $QR$ не пересѣкаетъ гиперболы, потому что $OQ = \frac{a^2}{c}$ меньше $OA = a$. Чтобы найти точку $Q$, отложимъ $OE = a$, проведемъ изъ второго фокуса $F'$ прямую $F'E$ и къ $F'E$ перпендикуляръ; въ пересѣченіи послѣдняго съ осью $Ox$ получимъ точку $Q$.

Другому фокусу $F'$ принадлежитъ другая директриса $Q'R'$, проведенная на разстояніи $OQ' = \frac{a^2}{c}$ отъ центра.

Точки вѣтви $C'D'$ имѣютъ такое же свойство относительно фокуса $F'$ и директрисы $Q'R'$, какое точка $M$ имѣетъ относительно фокуса $F$ и директрисы $QR$.

Легко видѣть, что отношеніе между разстояніями всякой точки $M$ вѣтви $CD$ отъ фокуса $F'$ и директрисы $Q'R'$, принадлежащихъ вѣтви $C'D'$, также постоянно и равно отношенію $\frac{c}{a}$. Такъ какъ

$$MF' = r' = \frac{cx}{a} + a = \frac{c}{a}\left(x + \frac{a^2}{c}\right)$$

и

$$x + \frac{a^2}{c} = PQ',$$

то

$$MF' = \frac{c}{a} PQ';$$

но $PQ'$ равно $MS'$, растоянію точки $M$ отъ второй директрисы $Q'R'$; слѣдовательно,

$$MF' = \frac{c}{a} MS' \quad \text{или} \quad \frac{MF'}{MS'} = \frac{c}{a}.$$

—* Вообще, если радіусъ векторъ выражается формулой (9)

$$r = Ax + By + C,$$

которая, какъ мы видѣли выше, приводится къ виду (11)

$$r = P\delta,$$

гдѣ $\delta$ есть разстояніе точки $M$ $(x, y)$ отъ прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

то эта прямая есть директриса линіи второго порядка, и отношеніе между радіусомъ векторомъ, проведеннымъ изъ фокуса въ точку $(x, y)$, и разстояніемъ этой точки отъ директрисы равно параметру $P$ линейной функціи координатъ, выражающей радіусъ векторъ. *—

Если сложимъ радіусы векторы (1) и (2), проведенные изъ фокусовъ эллипса $F$ и $F'$ въ какую-либо точку $M$,

$$r = a - \frac{cx}{a} \quad \text{и} \quad r' = a + \frac{cx}{a},$$

то получимъ

$$r + r' = 2a,$$

т.-е. *сумма радіусовъ векторовъ, проведенныхъ изъ фокусовъ эллипса въ какую-либо его точку, постоянна и равна длинѣ большой оси.*

Для точки $M'$, взятой внѣ площади, ограниченной эллипсомъ, имѣемъ

$$FM' + F'M' > 2a;$$

потому что, если проведемъ $F'M$ въ точку $M$ пересѣченія $FM'$ съ эллипсомъ, то найдемъ, что

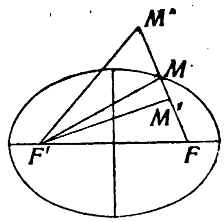
$$FM' + FM' > FM + F'M \quad \text{и} \quad FM + F'M = 2a,$$

а, слѣдовательно,

$$FM' + F'M' > 2a.$$

Для точки $M''$, взятой внутри площади, ограниченной эллипсомъ, имѣемъ

$$FM'' + F'M'' < 2a;$$




Фиг. 81

потому что, если проведемъ $F'M$ въ точку $M$ пересѣченія эллипса съ продолженіемъ $FM''$, то найдемъ, что

$$FM'' + F'M'' < FM + F'M$$

и

$$FM + F'M = 2a,$$

а, слѣдовательно,

$$FM'' + F'M'' < 2a.$$

Выраженія (4) и (6) радіусовъ векторовъ, проведенныхъ изъ фокусовъ гиперболы въ точку $M$,

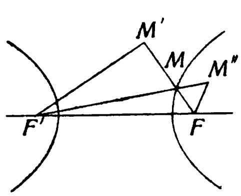
$$r = \frac{cx}{a} - a \quad \text{и} \quad r' = a + \frac{cx}{a}$$

даютъ въ разности

$$r' - r = 2a,$$

а выраженія (5) и (7) даютъ $r - r' = 2a$; слѣдовательно, *разность радіусовъ векторовъ, проведенныхъ изъ фокусовъ гиперболы въ какую-либо точку, взятую на той или другой вѣтви, равна длинѣ главной оси.*

Для точки $M'$, взятой внѣ гиперболы между ея вѣтвями, имѣемъ




Фиг. 82

$$F'M' - F'M' < 2a.$$

если

$$F'M' > FM',$$

и

$$FM' - F'M' < 2a.$$

если

$$FM' > F'M'.$$

Допустивъ первый случай, проведемъ прямую $F'M$ въ точку $M$ пересѣченія $FM'$ съ гиперболою; отъ этого составится треугольникъ $F'M'M$, въ которомъ

$$F'M' < M'M + F'M;$$

а такъ какъ $M'M = FM' - FM$, то

$$F'M' < FM' - FM + F'M;$$

откуда выходитъ, что

$$F'M' - FM' < F'M - FM;$$

но $F'M - FM = 2a$; слѣдовательно, $F'M' - FM' < 2a$. Такъ же докажется свойство, относящееся ко второму случаю.

Для точки $M''$, взятой внѣ гиперболы со стороны одного изъ фокусовъ $F$, имѣемъ

$$F'M'' - FM'' > 2a.$$

Для доказательства проведемъ $FM$ въ точку $M$ пересѣченія $F'M''$ съ гиперболою; отъ этого получимъ треугольникъ $MM''F$, въ которомъ

$$MM'' + FM > FM''$$

или

$$F'M'' - F'M + FM > FM'';$$

откуда выводимъ

$$F'M'' - FM'' > F'M - FM;$$

но $F'M - FM = 2a$; слѣдовательно, $F'M'' - FM'' > 2a$.

Не трудно доказать, что разстоянія отъ фокуса и директрисы всякой точки, не находящейся на параболѣ, не равны между собою; притомъ, если точка находится относительно параболы тамъ, куда парабола выпукла, то эта точка ближе къ директрисѣ, чѣмъ къ фокусу, а если точка лежитъ въ пространствѣ, куда парабола вогнута, то она ближе къ фокусу, чѣмъ къ директрисѣ.

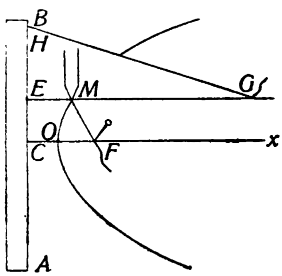
**52.** На доказанныхъ свойствахъ радіусовъ векторовъ линій 2-го порядка основаны способы для черченія этихъ линій.

1) *Черченіе параболы по данной директрисѣ $AB$ и данному фокусу $F$.*

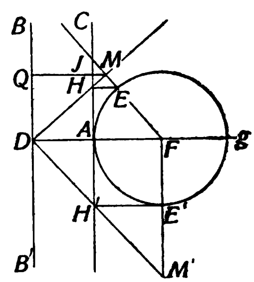
Проведемъ (фиг. 78) чрезъ фокусъ перпендикуляръ $Cx$ къ $AB$; прямая $Cx$ будетъ ось параболы. Раздѣлимъ $CF$ пополамъ; въ срединѣ $O$ получимъ вершину параболы. Послѣ того проведемъ прямую параллельную директрисѣ, отстоящую отъ послѣдней на длину $PC$ большую $OC$, и засѣчемъ эту прямую дугою круга, описанною изъ фокуса $F$, какъ центра, радіусомъ равнымъ $PC$; въ пересѣченіяхъ получимъ точки $M$ и $N$, принадлежащія параболѣ. Въ самомъ дѣлѣ: разстоянія $MD$ и $NE$ этихъ точекъ отъ директрисы равны $CP$, по параллельности $MN$ съ $AB$, и $CP = MF = NF$; слѣдовательно, $MD = MF$ и $NE = NF$, а это свойство принадлежитъ точкамъ параболы. Опредѣливъ такимъ образомъ рядъ точекъ, расположенныхъ симметрически относительно оси $Cx$ и соединивъ ихъ непрерывною чертою, получимъ очертаніе параболы.

Можно начертить параболу непрерывнымъ движеніемъ карандаша слѣдующимъ образомъ:

Приложивъ къ директрисѣ $AB$ линейку и катетъ $HE$ треугольника $HEG$, прикрѣпимъ къ концу $G$ другого катета нитку, а къ ниткѣ на разстояніи $EG$ булавку, которую воткнемъ въ фокусъ $F$.




Фиг. 83




Фиг. 84

Послѣ того натянемъ нитку остріемъ карандаша и, придерживая линейку неподвижно, станемъ по ней двигать треугольникъ, подвигая вмѣстѣ съ тѣмъ и карандашъ, не отводя его отъ катета $EG$ и натягивая нитку. Легко видѣть, что карандашъ начертитъ параболу, потому что при всякомъ его положеніи $M$ будетъ

$$MG + MF = EG$$

и, слѣдовательно,

$$MF = EG - MG = EM,$$

т.-е. остріе карандаша $M$ равно удалено отъ фокуса и директрисы.

— * 2) Всѣ три линіи второго порядка легко чертить однимъ способомъ, когда даны: фокусъ, директриса и постоянное отношеніе $P$ между разстояніями каждой точки кривой отъ фокуса и директрисы.

Пусть $F$ будетъ фокусъ и $BB'$ директриса. Проведя прямую $FD$, перпендикулярную къ $BB'$, получимъ главную ось кривой. Раздѣлимъ длину $DF$ на двѣ части $AF$ и $AD$ такъ, чтобы $AF : AD = P$; въ точкѣ дѣленія $A$ получимъ вершину кривой изъ этой точки возставимъ къ $DF$ перпендикуляръ $AC$ и начертимъ кругъ радіуса $FA$ изъ центра $F$. Послѣ этого, для опредѣленія какой либо точки кривой, проведемъ произвольный радіусъ $FE$, $EH$, параллельную $DF$, и прямую $DH$; въ пересѣченіи продолженія $DH$ съ продолженіемъ $FE$ получимъ точку $M$, принадлежащую кривой. Въ этомъ легко удостовѣриться слѣдующимъ образомъ:

Проведя $MQ$, перпендикулярную къ $BB'$ и замѣтивъ точку $J$ пересѣченія ея съ $AC$, получимъ

$$MF : FE = MD : HD = MQ : JQ,$$

а отсюда

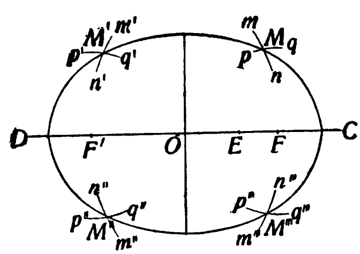
$$MF : MQ = FE : JQ = AF : AD = P,$$

т.-е. отношеніе разстояній точки $M$ отъ фокуса и директрисы равно данному отношенію $P$. Также найдемъ другія точки кривой.

Кривая будетъ, какъ мы видѣли выше, парабола, когда $P = 1$, эллипсъ въ случаѣ $P < 1$ и вѣтвь гиперболы въ случаѣ $P > 1$.*—

3) *Черченіе эллипса по даннымъ: большой оси и фокусамъ.*

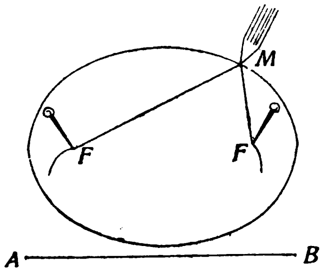
Пусть будетъ $DC = 2a$ большая ось эллипса, $F$ и $F'$ фокусы. Возьмемъ произвольную точку $E$ на большой оси между фокусами; потомъ, взявъ фокусы за центры, опишемъ радіусомъ $DE$ четыре дуги: $mn$, $m'n'$, $m''n''$, $m'''n'''$, и радіусомъ $CE$, взявъ опять фокусы за центры, засѣчемъ эти дуги другими: $pq$, $p'q'$, $p''q''$, $p'''q'''$. Въ пересѣченіяхъ мы получимъ четыре точки: $M$, $M'$, $M''$, $M'''$, принадлежащія эллипсу, потому что сумма разстояній каждой изъ нихъ отъ фокусовъ равна $CE + ED = DC$. Перемѣнивъ мѣсто точки $E$, получимъ новые радіусы векторы, помощью которыхъ найдемъ еще четыре точки эллипса. Такимъ образомъ можно получить рядъ точекъ, по которымъ составится очертаніе эллипса.



Фиг. 85

Основываясь на томъ же свойствѣ радіусовъ векторовъ, легко начертить эллипсъ непрерывнымъ движеніемъ карандаша.

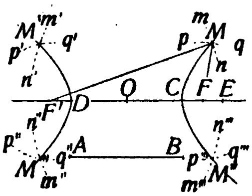
Привяжемъ къ двумъ булавкамъ нитку такъ, чтобы длина нитки между булавками была равна данной длинѣ $AB$ большой оси эллипса; укрѣпимъ булавки въ фокусахъ $F$ и $F'$; потомъ, натянувъ нитку остріемъ карандаша, станемъ двигать карандашъ въ ту или другую сторону. Такъ какъ, при всякомъ положеніи карандаша, сумма разстояній его отъ фокусовъ равна длинѣ нитки или большой оси, то карандашъ начертитъ эллипсъ.



Фиг. 86

4) *Черченіе гиперболы.*

Пусть будетъ дана главная ось гиперболы $AB$ и фокусы $F$ и $F'$. Раздѣливъ пополамъ прямую, соединяющую фокусы, получимъ центръ гиперболы; потомъ, отложивъ $OC$ и $OD$ равныя половинѣ $AB$, найдемъ вершины гиперболы, $C$ и $D$. Чтобы получить другія точки кривой, возьмемъ на главной оси $DC$ точку $E$, произвольную, но только не между $D$ и $C$; потомъ изъ фокусовъ $F$ и $F'$, взятыхъ за центры, опишемъ круговыя дуги:



Фиг. 87

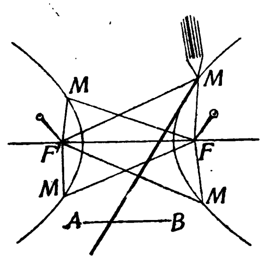
$$mn,\quad m'n',\quad m''n'',\quad m'''n'''$$

радіусомъ $DE$ и круговыя дуги

$$pq,\quad p'q',\quad p''q'',\quad p'''q'''$$

радіусомъ $CE$, засѣкающія первыя; въ пересѣченіяхъ получимъ точки: $M$, $M'$, $M''$, $M'''$, принадлежащія гиперболѣ; потому что разность между радіусами векторами каждой изъ этихъ точекъ равна длинѣ главной оси $AB$. Въ самомъ дѣлѣ, для точки $M$, напримѣръ, имѣемъ:

$$F'M - FM = DE - CE = DC = AB.$$



Фиг. 88

Опредѣливъ такимъ образомъ рядъ точекъ и соединивъ непрерывною чертою тѣ, которыя должны принадлежать одной вѣтви гиперболы, получимъ очертаніе гиперболы.

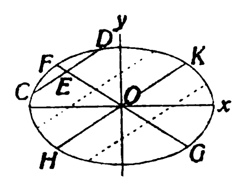
Можно начертить гиперболу непрерывнымъ движеніемъ карандаша слѣдующимъ образомъ. Укрѣпивъ булавки въ фокусахъ $F$ и $F'$ съ двумя нитками, къ нимъ привязанными, свяжемъ нитки такъ, чтобы разность между длинами ихъ между булавками и узломъ была равна главной оси $AB$; потомъ захватимъ нитки остріемъ карандаша такъ, чтобы можно было натянуть нитки, держа связанные концы нитокъ въ одной рукѣ, а карандашъ въ другой, упирая остріе въ бумагу. Если послѣ того станемъ двигать карандашъ по бумагѣ, то разстоянія его острія отъ булавокъ $F$ и $F'$ будутъ увеличиваться или уменьшаться на одну длину, а потому разность между этими разстояніями будетъ оставаться равною длинѣ главной оси $AB$; слѣдовательно, карандашъ начертитъ гиперболу. Такимъ образомъ можно начертить отдѣльно каждую вѣтвь гиперболы, смотря по тому, будетъ ли $MF' - MF = AB$ или $MF - MF' = AB$.

**53.** Направленія координатныхъ осей, къ которымъ отнесены уравненія эллипса и гиперболы,

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

суть главные сопряженные діаметры (**§ 40**). Кромѣ этихъ діаметровъ, у эллипса и гиперболы есть безчисленное множество другихъ, косоугольныхъ.

Докажемъ, что существуетъ діаметръ, сопряженный съ произвольною хордою $CD$, т.-е., что $E$, средина хорды $CD$ и средины всѣхъ хордъ, ей параллельныхъ, находятся на одной прямой, которая и будетъ діаметръ, сопряженный съ $CD$.

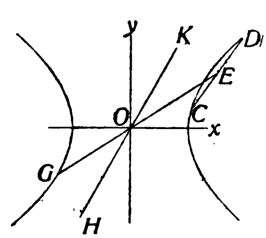


Фиг. 89

Пусть будетъ

$$y = \alpha x + \beta \tag{2}$$

уравненіе хорды $CD$, а $x'$, $x''$ и $X$ абсциссы точекъ $C$, $D$ и $E$.



Фиг. 90

Абсцисса средины прямой линіи есть полусумма абсциссъ крайнихъ точекъ; поэтому

$$X = \frac{x' + x''}{2};$$

такъ какъ координаты каждой изъ точекъ $C$ и $D$ должны удовлетворять вмѣстѣ уравненіямъ (1) и (2), то $x'$ и $x''$ суть корни того уравненія, которое получится отъ исключенія $y$ изъ этихъ уравненій, а именно корни уравненія

$$(a^2\alpha^2 \pm b^2)x^2 + 2a^2\alpha\beta x + \alpha^2\beta^2 = \pm a^2b^2.$$

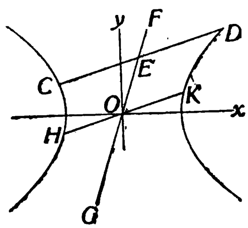
По свойству же корней уравненія 2-й степени имѣемъ

$$x' + x'' = -\frac{2a^2\alpha\beta}{a^2\alpha^2 \pm b^2};$$

слѣдовательно,

$$X = -\frac{a^2\alpha\beta}{a^2\alpha^2 \pm b^2}. \tag{3}$$

Подставивъ эту величину вмѣсто $x$ въ уравненіе (2), получимъ ординату точки $E$:




Фиг. 91

$$Y = \frac{\pm b^2\beta}{a^2\alpha^2 \pm b^2}. \tag{4}$$

Если же исключимъ $\beta$ изъ уравненій (3) и (4), то будемъ имѣть уравненіе

$$Y = \pm\frac{b^2}{a^2\alpha}X, \tag{5}$$

которому должны удовлетворять не только координаты средины хорды $CD$, но и координаты средины всякой другой хорды, параллельной $CD$; потому что въ этомъ уравненіи нѣтъ величины $\beta$, которая имѣетъ разныя значенія для прямыхъ параллельныхъ $CD$, а находится величина $\alpha$, имѣющая одно значеніе для всѣхъ этихъ прямыхъ. Итакъ, уравненіе (5) принадлежитъ линіи, проходящей чрезъ средины хорды $CD$ и всѣхъ хордъ, ей параллельныхъ. Оно относительно $X$ и $Y$ первой степени, а потому принадлежитъ прямой линіи; притомъ ему удовлетворяютъ координаты центра: $X = 0$, $Y = 0$; слѣдовательно, *линія втораго порядка, имѣющая центръ, имѣетъ безчисленное множество сопряженныхъ діаметровъ* (**§ 35**); *всѣ они проходятъ чрезъ центръ, и для всякой системы параллельныхъ хордъ есть сопряженный діаметръ, который получимъ, проведя прямую чрезъ центръ и средину одной изъ сопряженныхъ хордъ, или прямую чрезъ средины двухъ хордъ.*

Положивъ въ уравненіи (5)

$$\mp\frac{b^2}{a^2\alpha} = \alpha', \tag{6}$$

получимъ

$$Y = \alpha' X$$

для уравненія діаметра $GF$. Для діаметра $HK$, съ нимъ сопряженнаго, будемъ имѣть

$$Y = \mp\frac{b^2}{a^2\alpha'}X$$

или по уравненію (6)

$$Y = \alpha X.$$

Это уравненіе принадлежитъ прямой, параллельной $CD$; слѣдовательно, *діаметръ* $KH$, *сопряженный съ даннымъ* $GF$, *параллеленъ хордамъ, чрезъ средины которыхъ проходитъ данный.*

Здѣсь $\alpha$ и $\alpha'$ означаютъ тангенсы угловъ, составляемыхъ двумя сопряженными діаметрами $GF$ и $HK$ съ главною осью $Ox$ эллипса или гиперболы; они связаны уравненіемъ (6), которое можно представить подъ видомъ

$$\alpha\alpha' = \pm \frac{b^2}{a^2}. \tag{7}$$

Знакъ — относится къ эллипсу, а + къ гиперболѣ; поэтому для эллипса $\alpha$ и $\alpha'$ имѣютъ противоположные знаки, а слѣдовательно, одинъ изъ угловъ $FOx$ и $KOx$ острый, а другой тупой. Для гиперболы $\alpha$ и $\alpha'$ имѣютъ одинаковые знаки, а слѣдовательно, углы $FOx$ и $KOx$ одноименны, т.-е. оба острые или оба тупые.

Эллипсъ представляетъ сомкнутую кривую, а потому пересѣкается со всякимъ діаметромъ въ двухъ точкахъ; но гипербола не со всѣми своими діаметрами пересѣкается. Легко доказать, что діаметръ, составляющій съ главною осью уголъ, котораго тангенсъ больше $\frac{b}{a}$ или меньше $-\frac{b}{a}$, не можетъ пересѣкать гиперболу.

Чтобы найти пересѣченіе какого-либо діаметра

$$y = \alpha x$$

съ гиперболой

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

надобно допустить, что уравненія этихъ линій совмѣстны, и рѣшить ихъ относительно $x$ и $y$. Для первой изъ этихъ величинъ мы получимъ формулу

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2\alpha^2}},$$

которая показываетъ, что $x$ будетъ мнимое, когда $\alpha^2 > \frac{b^2}{a^2}$, т.-е. когда $\alpha > \frac{b}{a}$ или $\alpha < -\frac{b}{a}$; слѣдовательно, діаметръ въ такомъ случаѣ не пересѣкаетъ гиперболы.

Если $\alpha = \pm \frac{b}{a}$, то $x = \infty$; слѣдовательно, и въ этомъ случаѣ, діаметръ не пересѣкаетъ гиперболы. Такой діаметръ совпадаетъ съ своимъ сопряженнымъ; потому что при $\alpha = \pm \frac{b}{a}$, по уравненію (7), будетъ $\alpha' = \pm \frac{b}{a} = \alpha$.

Если въ эллипсѣ полуоси $a$ и $b$ равны, т.-е. эллипсъ есть кругъ, то уравненіе (7) приводится къ условію

$$\alpha \alpha' = -1$$

перпендикулярности сопряженныхъ діаметровъ: $Y = \alpha X$ и $Y = \alpha' X$. Слѣдовательно *въ кругѣ всѣ сопряженные діаметры взаимно-перпендикулярны.*

Если же полуоси $a$ и $b$ не равны, то эллипсъ, кромѣ осей, къ которымъ отнесено уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

не можетъ имѣть взаимно перпендикулярныхъ сопряженныхъ діаметровъ. Это было уже доказано въ **§ 39.** Къ этому же заключенію приводитъ уравненіе $\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$, которое, если $a$ не равно $b$, не можетъ существовать вмѣстѣ съ условіемъ перпендикулярности $\alpha\alpha' + 1 = 0$, когда $\alpha$ неравно 0 или $\infty$.

Гипербола также, кромѣ осей, къ которымъ отнесено уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

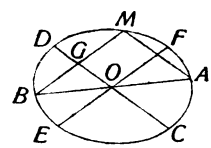
не можетъ имѣть перпендикулярныхъ сопряженныхъ діаметровъ; потому что, если $\alpha$ неравно 0 или $\infty$, то уравненіе $\alpha\alpha' = \frac{b^2}{a^2}$ не можетъ существовать вмѣстѣ съ условіемъ перпендикулярности $\alpha\alpha' + 1 = 0$.

**54.** Основываясь на доказанныхъ свойствахъ діаметровъ эллипса и гиперболы, легко рѣшить слѣдующую задачу: *по извѣстному очертанію линіи 2-го порядка, имѣющей центръ, найти центръ и оси.*

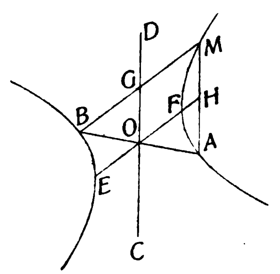
Проведемъ двѣ параллельныя хорды, раздѣлимъ каждую пополамъ и соединимъ средины прямою линіею; отъ этого получимъ одинъ изъ діаметровъ кривой. Если онъ пересѣкаетъ кривую, то раздѣлимъ пополамъ часть его, ограниченную кривою; въ срединѣ получимъ центръ кривой. Если же діаметръ не пересѣкаетъ кривой, то построимъ другой діаметръ по двумъ другимъ параллельнымъ хордамъ; въ пересѣченіи его съ первымъ получимъ центръ.

Когда извѣстны очертаніе кривой и центръ, то можно найти оси слѣдующимъ образомъ. Опишемъ изъ центра кривой окружность круга, пересѣкающую данную кривую; замѣтимъ двѣ послѣдовательныя точки пересѣченія; соединимъ ихъ хордою и опустимъ изъ центра на эту хорду перпендикуляръ. Этотъ перпендикуляръ раздѣлитъ хорду пополамъ, какъ хорду, принадлежащую кругу; слѣдовательно, онъ будетъ діаметръ для данной кривой, сопряженный съ этою хордою, притомъ главный или ось, по перпендикулярности его къ хордѣ. Прямая, къ нему перпендикулярная, проведенная чрезъ центръ, будетъ другая ось.

**55.** Хорды $AM$ и $BM$, проведенныя изъ концовъ произвольнаго діаметра $AB$ въ какую-нибудь точку кривой, называются *дополнительными хордами*. Онѣ имѣютъ то замѣчательное свойство, что всегда параллельны двумъ сопряженнымъ діаметрамъ. Пусть $CD$ параллельна $AM$ и $EF$ параллельна $BM$. Докажемъ, что эти двѣ прямыя суть сопряженные діаметры. Такъ какъ $O$ есть средина $AB$, то $CD$, по параллельности съ $AM$, пройдетъ чрезъ средину $G$ хорды $BM$, а потому $CD$ есть діаметръ, сопряженный съ $BM$; точно также увидимъ, что $EF$ есть діаметръ, сопряженный съ $AM$. Но здѣсь хорда, сопряженная съ однимъ діаметромъ, параллельна другому; поэтому, діаметры суть взаимно-сопряженные. Слѣдовательно, чтобы начертить два сопряженныхъ діаметра, надобно провести произвольный діаметръ $AB$, потомъ двѣ дополнительныя хорды $AM$ и $BM$ и чрезъ центръ двѣ прямыя $CD$ и $EF$, имъ параллельныя.



Фиг. 92

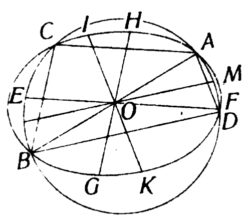


Фиг. 93

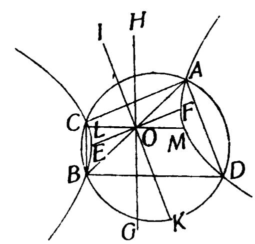
Основываясь на томъ же свойствѣ дополнительныхъ хордъ, легко рѣшить слѣдующую задачу: *построить два сопряженныхъ діаметра, составляющихъ данный уголъ* $\theta$.

Проведя произвольный діаметръ $AB$, начертимъ на немъ извѣстнымъ способомъ дугу круга, вмѣщающую данный уголъ $\theta$, замѣтимъ пересѣченія $C$ и $D$ этой дуги съ кривою и проведемъ къ нимъ дополнительныя хорды $AC$ и $BC$, $AD$ и $BD$; отъ этого получимъ $\angle ACB = \theta$, $\angle ADB = 180° - \theta$. Послѣ того проведемъ діаметры $EF$ и $GH$, параллельные хордамъ $AC$ и $BC$, и діаметры $IK$ и $LM$, параллельные хордамъ $AD$ и $BD$; такимъ образомъ получимъ двѣ пары сопряженныхъ діаметровъ, составляющихъ между собою уголъ $\theta$ или $180° - \theta$.

Такъ какъ окружность круга можетъ пересѣкать эллипсъ и гиперболу не болѣе какъ въ четырехъ точкахъ (см. § **32**), то дуга круга, проведенная чрезъ концы діаметра $AB$, кромѣ этихъ двухъ точекъ, можетъ пересѣчь эллипсъ или гиперболу еще не болѣе какъ въ двухъ точкахъ $C$ и $D$; слѣдовательно, продложенная задача не




Фиг. 94




Фиг. 95

можетъ имѣть болѣе двухъ рѣшеній. Она будетъ невозможна, когда точекъ $C$ и $D$ не существуетъ. Чтобы узнать, когда рѣшеніе задачи возможно, разсмотримъ, какія значенія можетъ имѣть уголъ $\theta$.

Пусть $GF$ и $HK$ будутъ сопряженные діаметры эллипса или гиперболы (фиг. 89 и 90)

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

и $\operatorname{tg}(KOx) = \alpha$, $\operatorname{tg}(FOx) = \alpha'$, $\operatorname{tg}(FOK) = \theta$; то

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\alpha' - \alpha}{1 + \alpha\alpha'}.$$

По уравненію же (6) § **53** имѣемъ $\alpha' = \mp \frac{b^2}{a^2\alpha}$; слѣдовательно,

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{a^2\alpha^2 \pm b^2}{(a^2 \mp b^2)\alpha},$$

или

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{a^2\alpha^2 \pm b^2}{c^2\alpha}, \tag{1}$$

такъ какъ $a^2 \mp b^2$ равно квадрату эксцентрицитета $c^2$.

Если означимъ черезъ $x$ и $y$ координаты точки $K$, въ которой діаметръ $HK$ пересѣкаетъ кривую, то будемъ имѣть

$$\alpha = \frac{y}{x} \quad \text{и} \quad a^2\alpha^2 \pm b^2 = \frac{a^2y^2 \pm b^2x^2}{x^2} = \pm\frac{a^2b^2}{x^2};$$

отъ этого формула (1) приведется къ слѣдующей:

$$\operatorname{tg} = \mp\frac{a^2b^2}{c^2xy}. \tag{2}$$

Для эллипса должно взять верхній знакъ, а потому, если $x$ и $y$ положительные, то $\operatorname{tg}\theta$ отрицательный, а слѣдовательно, уголъ $KOF = \theta$ тупой; дополнительный уголъ $FOH$ будетъ острый и

$$\operatorname{tg}(FOH) = \frac{a^2b^2}{c^2xy}.$$

По этой формулѣ видно, что уголъ $FOH$ будетъ имѣть наименьшее значеніе, когда произведеніе $xy$, т.-е. прямоугольникъ, построенный на координатахъ точки $F$, получитъ наибольшее значеніе. Это будетъ тогда, когда значеніе $x^2y^2$ наибольшее; но

$$x^2y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2(a^2 - x^2)$$

будетъ наибольшее, когда произведеніе $x^2(a^2 - x^2)$ будетъ наибольшее. А такъ какъ сумма множителей этого произведенія постоянна и равна $a^2$, то оно наибольшее, когда множители равны, т.-е. когда

$$x^2 = a^2 - x^2;$$

отсюда $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ и уравненіе эллипса даетъ $y = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$; слѣдовательно,

$$\operatorname{tg}(FOH) = \frac{2ab}{c^2}, \quad \alpha = \frac{b}{a}, \quad \alpha' = -\frac{b}{a}.$$

Двѣ послѣднія формулы показываютъ, что $\angle FOx = \angle HOx$.

Изъ доказаннаго заключаемъ, что *сопряженные діаметры эллипса, составляющіе наименьшій острый уголъ или наибольшій тупой, суть діагонали вписаннаго въ эллипсъ прямоугольника, у котораго стороны суть $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$ и соотвѣтственно параллельны осямъ эллипса. Притомъ площадь этого прямоугольника болѣе площади* *всякаго другого прямоугольника вписаннаго, со сторонами параллельными осямъ.*

Рѣшеніе предыдущей задачи,—построить сопряженные діаметры, составляющіе данный уголъ,—возможно въ такомъ только случаѣ, когда данный острый уголъ не меньше угла $\theta$, соотвѣтствующаго тангенсу $\frac{2ab}{c^2}$. Замѣтимъ еще, что *сопряженные діаметры эллипса, составляющіе наименьшій острый уголъ, имѣютъ равныя длины;* потому что они суть діагонали прямоугольника.

Для гиперболы формула (2) даетъ

$$\operatorname{tg}(FOK) = \frac{a^2b^2}{c^2xy}.$$

Здѣсь произведеніе $xy = \frac{b}{a} x \sqrt{x^2 - a^2}$ возрастаетъ вмѣстѣ съ $x$ отъ 0 до $\infty$; приэтомъ $\operatorname{tg}(FOK)$ уменьшается отъ $\infty$ до 0, а слѣдовательно, уголъ $FOK$ уменьшается отъ $90^\circ$ до $0^\circ$. Такъ что сопряженные діаметры гиперболы могутъ составлять всякій уголъ. При $x = \infty$ сопряженные діаметры совпадаютъ въ одну прямую. Этотъ случай мы уже разсматривали выше и нашли, что тогда

$$\alpha = \alpha' = \frac{b}{a}.$$

**56.** Если возьмемъ какіе-нибудь сопряженные діаметры эллипса или гиперболы: $OF$ и $OD$ (фиг. 92 и 93), составляющіе уголъ $\theta$, за оси координатъ $x, y$, то получимъ уравненіе вида

$$Ax^2 + Cy^2 + Q = 0, \tag{1}$$

гдѣ нѣтъ члена съ произведеніемъ координатъ $xy$; потому что каждой величинѣ $x = OH$ должны отвѣчать двѣ величины $y$, равныя и противоположныя, составляющія хорду $AM$, сопряженную съ діаметромъ $OF$, взятымъ за ось $x$-въ, и также каждой величинѣ $y = OG$ должны отвѣчать двѣ величины $x$, равныя и противоположныя, составляющія хорду $BM$, сопряженную съ діаметромъ $OD$, взятымъ за ось $y$-въ.

Когда мы разсматривали въ **§ 39** уравненіе кривой, имѣющей центръ,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Q = 0,$$

и отнесенной къ осямъ, составляющимъ уголъ $\theta$, то видѣли, что величины

$$\frac{A + C - B\cos\theta}{\sin^2\theta} \quad \text{и} \quad \frac{B^2 - 4AC}{\sin^2\theta}$$

не измѣняются, когда перемѣняются направленія координатныхъ осей; притомъ вторая величина отрицательная для эллипса и положительная для гиперболы. Прилагая это къ уравненію (1), находимъ, что величины:

$$\frac{A+C}{\sin^2\theta} \quad \text{и} \quad \frac{AC}{\sin^2\theta} \tag{2}$$

не зависятъ отъ системы сопряженныхъ діаметровъ, къ которымъ отнесено уравненіе (1), притомъ для эллипса $AC$ положительное количество, а для гиперболы отрицательное; слѣдовательно, $A$ и $C$ имѣютъ одинаковые знаки, когда уравненіе (1) принадлежитъ эллипсу, и разные, когда оно принадлежитъ гиперболѣ.

Положимъ, что уравненіе (1) принадлежитъ эллипсу и пусть $OF=a'$ и $OD=b'$; тогда будемъ имѣть:

$$x=\pm a', \quad \text{при} \quad y=0, \quad \text{и} \quad y=\pm b', \quad \text{при} \quad x=0,$$

слѣдовательно, уравненіе (1) даетъ:

$$Aa'^2+Q=0 \quad \text{и} \quad Cb'^2+Q=0;$$

откуда $A=-\dfrac{Q}{a'^2}$, $C=-\dfrac{Q}{b'^2}$.

Подставивъ эти величины $A$ и $C$ въ уравненіе (1), получимъ

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1,$$

уравненіе такого же вида, какой имѣетъ уравненіе эллипса, когда за оси координатъ взяты оси эллипса.

Прилагая къ этому уравненію формулы (2), получимъ

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}\right), \quad \frac{1}{a'^2b'^2\sin^2\theta}.$$

Эти величины не зависятъ отъ системы сопряженныхъ діаметровъ. Для главныхъ сопряженныхъ діаметровъ или осей эллипса эти выраженія приводятся къ слѣдующимъ:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{a^2b^2};$$

слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}\right) &= \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}, \\ \frac{1}{a'^2b'^2\sin\theta} &= \frac{1}{a^2b^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Раздѣливъ первое уравненіе на второе, получимъ

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2, \tag{4}$$

т.-е. *сумма квадратовъ сопряженныхъ полудіаметровъ равна суммѣ квадратовъ полуосей.*

Второе изъ уравненій (3) даетъ

$$a'b' \sin\theta = ab, \tag{5}$$

т.-е. *площадь параллелограмма, построеннаго на сопряженныхъ полудіаметрахъ, равна площади прямоугольника, построеннаго на полуосяхъ.*

Выше было доказано, что одинъ изъ сопряженныхъ діаметровъ пересѣкаетъ гиперболу, а другой нѣтъ. Если возьмемъ за ось $x$-въ первый изъ этихъ діаметровъ $OF$ (фиг. 93), за ось $y$-въ второй $OD$, и означимъ чрезъ $a'$ полудіаметръ $OF$, то при $y=0$ получимъ для $x$ вещественныя величины $\pm a'$, а при $x=0$ для $y$ мнимыя количества, которыя означимъ чрезъ $\pm b'\sqrt{-1}$. Длины $a'$ и $b'$ связаны съ величинами $A$, $C$, $Q$ уравненія (1) условіями:

$$Aa'^2 + Q = 0, \quad -Cb'^2 + Q = 0,$$

помощью которыхъ можно привести уравненіе (1) къ виду

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1, \tag{6}$$

такому же, какое имѣетъ уравненіе гиперболы, когда главные сопряженные діаметры взяты за оси координатъ. Формулы (2) даютъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{a'^2} - \frac{1}{b'^2}\right) &= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}, \\ \frac{1}{-a'^2 b'^2 \sin^2\theta} &= \frac{1}{-a^2 b^2}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Раздѣливъ первое изъ этихъ уравненій на второе, получимъ

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2, \tag{8}$$

т.-е. *разность квадратовъ сопряженныхъ полудіаметровъ равна разности квадратовъ полуосей.*

Второе изъ уравненій (7) даетъ

$$a'b' \sin\theta = ab, \tag{9}$$

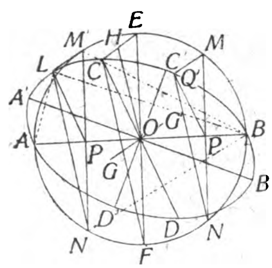
т.-е. *площадь параллелограмма, построеннаго на сопряженныхъ полудіаметрахъ, равна площади прямоугольника, построеннаго на полуосяхъ.*

Для равносторонней гиперболы будетъ $a = b$ и по уравненію (8) также $a' = b'$; слѣдовательно, *у равносторонней гиперболы всѣ сопряженные полудіаметры равны между собою.*

Уравненіе (5) въ этомъ случаѣ беретъ видъ

$$x'^2 - y'^2 = a'^2.$$

— * **57.** Легко начертить эллипсъ по даннымъ сопряженнымъ косоугольнымъ діаметрамъ: $AB$ и $CD$. Для этого начертимъ кругъ изъ центра $O$ радіусомъ $AO$, потомъ возставимъ радіусъ $EO$, перпендикулярный къ $AB$, и проведемъ прямую $EC$; послѣ того изъ произвольной точки $P$, взятой на $AB$, проведемъ $MP$, параллельную $EO$, до встрѣчи съ окружностью круга, потомъ $PQ$, параллельную $OC$ и $MQ$, параллельную $EC$; въ пересѣченіи $MQ$ съ $PQ$, получимъ точку $Q$, принадлежащую эллипсу.




Фиг. 96

Въ этомъ легко удостовѣриться слѣдующимъ образомъ:

Взявъ $OB$ и $OC$ за координатныя оси и положивъ $OP = x$, $PQ = y$, $BO = a$, $OC = b$, найдемъ

$$PQ : MP = OC : OE$$

или

$$y : MP = b : a;$$

но треугольникъ $OMP$ даетъ

$$MP = \sqrt{a^2 - x^2};$$

слѣдовательно,

$$y : \sqrt{a^2 - x^2} = b : a,$$

откуда выходитъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

а это есть уравненіе эллипса, отнесеннаго къ сопряженнымъ діаметрамъ. Можно опредѣлить точку $Q$ еще такъ: возставить $OF$, перпендикулярную къ $AB$, и провести прямую $CF$; потомъ возставивъ $PN$, перпендикулярную къ $AB$, провести $PQ$, параллельную $OC$, и прямую $NQ$, параллельную $FC$; въ пересѣченіи двухъ послѣднихъ получимъ точку $Q$. Опредѣливъ рядъ точекъ подобныхъ $Q$, по нимъ начертимъ эллипсъ.

По даннымъ косоугольнымъ сопряженнымъ діаметрамъ эллипса: $AB$ и $CD$ можно найти его оси, не зная очертанія эллипса. Для этого проведемъ $EF$, перпендикулярную къ $AB$ и равную этому діаметру; потомъ прямыя $CE$, $CF$ и параллельныя имъ $OH$ и $OG$; въ суммѣ и разности двухъ послѣднихъ найдемъ длины полуосей, а направленія осей будутъ прямыя, раздвояющія уголъ $HOG$ и его дополненіе $HOG'$; такъ что если отложимъ по этимъ прямымъ длины $OA'$ и $OB'$, равныя $HO+GO$, $OC'$ и $OD'$, равныя $HO=GO$, то получимъ прямую $A'B'$, представляющую длину и направленіе большой оси и прямую $C'D'$, представляющую длину и направленіе малой оси. Для доказательства положимъ: $OA=a'$, $CO=b'$, $\angle COA=\theta$ и означимъ чрезъ $a$ и $b$ искомыя длины полуосей. По свойствамъ сопряженныхъ діаметровъ эллипса, найденнымъ въ предыдущемъ §, имѣемъ:

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2,\quad ab=a'b'\sin\theta;$$

откуда легко вывести, что

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=a'^2+b'^2+2a'b'\sin\theta,$$

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=a'^2+b'^2-2a'b'\sin\theta;$$

по треугольникъ $COF$ даетъ

$$CF^2=a'^2+b'^2+2a'b'\sin\theta,$$

$$CE^2=a'^2+b'^2-2a'b'\sin\theta;$$

слѣдовательно,

$$(a+b)^2=CF^2;\quad (a-b)^2=CE^2$$

или

$$a+b=CF=2HO,\ a-b=CE=2GO;$$

откуда выходитъ, что

$$a=HO+GO,\ \ b=HO-GO.$$

Для доказательства, что прямыя, раздвояющія уголъ $HOG$ и его дополненіе $HOG'$, суть направленія осей, положимъ на время, что эллипсъ начерченъ по способу, изложенному въ этомъ §, и пусть будетъ $L$ одна изъ точекъ, въ которыхъ онъ пересѣкается съ окружностью круга $AFBE$. Проведя въ эту точку прямыя $AL$ и $BL$;

получимъ двѣ дополнительныя хорды, составляющія прямой уголъ $ALB$ (какъ вписанный въ полукругѣ), а потому діаметры, имъ параллельные, будутъ главные. Но легко видѣть, что направленія этихъ хордъ параллельны прямымъ, раздвояющимъ уголъ $HOG$ и его дополненіе $HOG'$. Такъ какъ точка $L$ опредѣляется по тому же способу, какъ и точка $Q$, то, проведя $LM'$ и $LN'$, параллельныя $CE$ и $CF$, до пересѣченія съ окружностью $AFBE$ и соединивъ пересѣченія хордою $M'N'$, найдемъ, что послѣдняя параллельна $EF$ и, слѣдовательно, перпендикулярна къ $AB$; поэтому $M'P' = N'P'$; вслѣдствіе чего: $M'B = N'B$ и углы $M'LB$ и $BLN$ равны, какъ опирающіеся на равныя хорды. Итакъ, хорда $LB$ раздѣляетъ пополамъ уголъ $M'LN'$, равный угламъ $ECF$ и $HOG$ по параллельности сторонъ, а хорда $AL$, перпендикулярная къ $LB$, параллельна прямой, раздѣляющей пополамъ дополнительный уголъ $HOG'$. * —

**58.** Разсмотримъ теперь діаметры параболы.

Возьмемъ начало прямоугольныхъ координатъ въ вершинѣ параболы и ось $Ox$ по направленію оси этой кривой. Пусть будетъ

$$y^2 = 2px \tag{1}$$

уравненіе параболы, а

$$x = \alpha y + \beta \tag{2}$$

уравненіе произвольной хорды $AB$. Нетрудно доказать, что парабола имѣетъ діаметръ, сопряженный съ этою хордою. Исключивъ $x$ изъ уравненій (1) и (2), получимъ уравненіе

$$x^2 - 2p\alpha y - 2p\beta = 0,$$

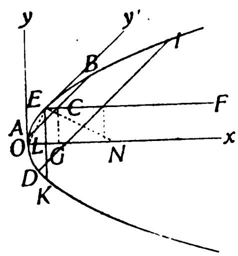
котораго корни будутъ ординаты точекъ $A$ и $B$. Означивъ эти корни чрезъ $y'$ и $y''$, будемъ имѣть

$$y' + y'' = 2p\alpha,$$

слѣдовательно, $\dfrac{y' + y''}{2} = p\alpha$ будетъ ордината $CG$ средины хорды $AB$. А какъ $\alpha$ то же для всѣхъ хордъ, параллельныхъ съ $AB$, то средины всѣхъ этихъ хордъ имѣютъ равныя ординаты; поэтому общее ихъ мѣсто есть прямая, параллельная оси $Ox$, проведенная чрезъ $C$. Итакъ, парабола имѣетъ діаметръ для всякой системы сопряженныхъ хордъ, и всѣ діаметры параболы между собою параллельны.

Легко найти діаметръ параболы, когда кривая уже начерчена.

Для этого проведемъ двѣ параллельныя хорды, $AB$ и $DL$, раздѣлимъ ихъ пополамъ и проведемъ чрезъ средины прямую $EF$; эта прямая будетъ діаметръ, сопряженный съ хордами $AB$ и $DI$. Послѣ того можно найти ось параболы слѣдующимъ образомъ:




Фиг. 97

чрезъ точку $E$, въ которой пересѣкается парабола съ найденнымъ діаметромъ, проведемъ хорду $EK$ перпендикулярную къ $EF$ и найдемъ ея средину $L$; прямая $Cx$, проведенная чрезъ $L$, параллельно $FE$ будетъ искомая ось параболы. Въ пересѣченіи $O$ параболы съ осью будетъ вершина.

Проведя прямую $EO$ и $EN$, къ ней перпендикулярную, до пересѣченія съ осью, получимъ длину $LN$, равную параметру $2p$. Въ самомъ дѣлѣ: въ прямоугольномъ треугольникѣ $OEN$ имѣемъ: $EL^2 = LN \,.\, OL$, а взявъ $Ox$ и перпендикулярную къ ней $Oy$ за оси координатъ, по уравненію параболы будемъ имѣть $EL^2 = 2p \,.\, OL$; сравнивъ это уравненіе съ предыдущимъ, получимъ

$$2p = LN.$$

**59.** Если діаметръ $EF$ и прямую, съ нимъ сопряженную $Ey'$, возьмемъ за координатныя оси и отнесемъ къ нимъ параболу, то получимъ для этой кривой уравненіе точно такого же вида, какъ въ томъ случаѣ, когда главный діаметръ $Ox$ съ прямою $Oy$, съ нимъ сопряженною, проведенною чрезъ вершину, взяты за координатныя оси, т.-е. какъ уравненіе

$$y^2 = 2px.$$

Пусть будетъ $OL = a$, $EL = b$ и $\angle y'Ex' = \varphi$, $x$, $y$ координаты относительно осей $Ox$ и $Oy$, а $x'$, $y'$ координаты относительно осей $Ex'$ и $Ey'$; тогда

$$x = x' + y' \cos\varphi + a, \quad y = y' \sin\varphi + b;$$

отъ этого уравненіе параболы, $y^2 - 2px = 0$, преобразуется въ слѣдующее:

$$y'^2 \sin^2\varphi + 2\,(b \sin\varphi - p\cos\varphi)\, y' - 2px' + b^2 - 2pa = 0.$$

Такъ какъ точка $E$ находится на параболѣ, то координаты ея $a$ и $b$ удовлетворяютъ прежнему уравненію $y^2 = 2px$, т.-е. $b^2 = 2pa$.

слѣдовательно, въ преобразованномъ уравненіи постоянный членъ $b^2 - 2pa$ равенъ нулю. Нетрудно удостовѣриться, что коеффиціентъ при $y'$ также равенъ нулю, т.-е.

$$b \sin \varphi - p \cos \varphi = 0.$$

Предположивъ, что $x = \alpha y + \beta$ есть уравненіе хорды $AB$, сопряженной съ діаметромъ $EF$, мы нашли выше $b = CG = p\alpha$; но $\alpha$ есть тангенсъ угла, составляемаго хордою $AB$ съ осью $Oy$ или $\cot \varphi$; слѣдовательно,

$$b = p \cot \varphi;$$

откуда

$$b \sin \varphi - p \cos \varphi = 0.$$

Итакъ, преобразованное уравненіе параболы приведется къ слѣдующему:

$$y'^2 \sin^2 \varphi - 2px' = 0$$

или

$$y'^2 = 2p'x',$$

гдѣ

$$p' = \frac{p}{\sin^2 \varphi}.$$

Такъ какъ

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = 1 + \cot^2 \varphi = 1 + \frac{b^2}{p^2} \quad \text{и} \quad b^2 = 2pa,$$

то

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = 1 + \frac{2a}{p},$$

а потому

$$2p' = 2p + 4a = 4\left(\frac{p}{2} + a\right).$$

Величина $\frac{p}{2} + a$ есть разстояніе точки $E$ отъ фокуса параболы или отъ директрисы (см. § 49). Итакъ, постоянное $2p'$, которое можно назвать параметромъ относительно діаметра $EF$, равно учетверенному разстоянію точки $E$ отъ фокуса.

### E. О касательныхъ вообще. Касательныя къ линіямъ 2-го порядка.

**60.** Если линія, пересѣкающая другую въ нѣсколькихъ точкахъ, станетъ измѣняться такъ, что двѣ или болѣе точекъ пересѣченія сближаются и наконецъ совпадаютъ въ одну, то линіи становятся касательными одна къ другой, и точка совпаденія пересѣченій называется точкою касанія. Въ этой статьѣ мы будемъ разсматривать прямыя, касательныя къ кривымъ, и которыя будемъ называть просто *касательными.*

По данному уравненію кривой линіи можно найти уравненіе касательной. Пусть $(x, y)$ и $(x', y')$ будутъ двѣ точки данной кривой и $(X, Y)$ какая-нибудь точка на прямой, чрезъ нихъ проходящей; по доказаному въ рѣшеніи задачи II **§ 25**, разности $X-x$ и $Y-y$ должны быть пропорціональны разностямъ $x'-x$ и $y'-y$; поэтому, положивъ

$$\frac{y'-y}{x'-x}=\alpha, \tag{1}$$

получимъ

$$Y-y=\alpha\,(X-x). \tag{2}$$

Это есть уравненіе прямой, пересѣкающей данную кривую въ точкахъ $(x, y)$ и $(x'\ y')$. Чтобы перейти къ касательной, положимъ $x'=x$ и $y'=y$, т.-е., что точки $(x, y)$ и $(x', y')$ совпадаютъ въ одну; тогда уравненіе (2) превратится въ уравненіе касательной. Чтобы получить это уравненіе, надобно только узнать, какое значеніе получаетъ величина $\alpha$, когда $x'=x$ и $y'=y$. Формула (1) дастъ тогда

$$\alpha=\frac{0}{0},$$

т.-е. беретъ неопредѣленный видъ; но по извѣстнымъ правиламъ (излагаемымъ въ дифференціальномъ исчисленіи) можно отыскать величину, которая скрыта подъ этимъ видомъ. Найдя эту величину и подставивъ въ уравненіе (2), получимъ уравненіе касательной.

Приложимъ этотъ способъ къ касательной къ линіи 2-го порядка и прежде всего выведемъ уравненіе касательной къ эллипсу или гиперболѣ, предположивъ, что уравненіе кривой отнесено къ осямъ.

Пусть

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$$

будетъ уравненіе кривой. Здѣсь $x$ и $y$ суть координаты одной изъ точекъ кривой. Для другой точки $(x', y')$ имѣемъ

$$\frac{x'^2}{a^2}\pm\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

Вычтя изъ этого уравненія предыдущее, получимъ

$$\frac{x'^2 - x^2}{a^2} \pm \frac{y'^2 - y^2}{b^2} = 0,$$

или

$$\frac{(x' - x)(x' + x)}{a^2} \pm \frac{(y' - y)(y' + y)}{b^2} = 0.$$

Вслѣдствіе уравненія (1) можно подставить сюда вмѣсто $y' - y$ произведеніе $\alpha(x' - x)$, потомъ раздѣлить уравненіе на разность $x' - x$; послѣ чего будемъ имѣть

$$\frac{x' + x}{a^2} \pm \frac{\alpha(y' + y)}{b^2} = 0,$$

откуда выводимъ

$$\alpha = \mp \frac{b^2(x' + x)}{a^2(y' + y)}.$$

Если теперь положимъ, что точки $(x, y)$ и $(x', y')$ совпадаютъ, то $x' = x$, $y' = y$, отчего получимъ

$$\alpha = \mp \frac{b^2 x}{a^2 y}. \tag{3}$$

Подставивъ эту величину $\alpha$ въ уравненіе (2), получимъ уравненіе

$$Y - y = \mp \frac{b^2 x}{a^2 y}(X - x), \tag{4}$$

принадлежащее касательной въ точкѣ $(x, y)$, къ эллипсу или гиперболѣ, смотря потому, будетъ ли взять во второй части равенства знакъ $-$ или $+$.

Это уравненіе можно упростить. Можно написать его подъ видомъ

$$\frac{xX}{a^2} \pm \frac{yY}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2};$$

а такъ какъ координаты точки касанія $x$ и $y$ удовлетворяютъ уравненію кривой, то

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

поэтому уравненіе касательной окончательно беретъ видъ

$$\frac{xX}{a^2} \pm \frac{yY}{b^2} = 1. \tag{5}$$

Замѣтимъ, что это уравненіе можно получить изъ уравненія кривой

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

перемѣнивъ $x^2$ на $xX$ и $y^2$ на $yY$.

Все здѣсь изложенное относится и къ тому случаю, когда оси координатъ суть косоугольные сопряженные діаметры эллипса или гиперболы, а $a$ и $b$ величины полудіаметровъ.

Выведемъ уравненіе касательной къ параболѣ

$$y^2 = 2px. \tag{6}$$

Полагая, что $(x, y)$ должна быть точкою касанія, возьмемъ еще точку $(x', y')$ на параболѣ. Мы будемъ имѣть

$$y'^2 = 2px'.$$

Вычтя отсюда предыдущее уравненіе, получимъ

$$y'^2 - y^2 = 2p\,(x' - x)$$

или

$$(y' - y)\,(y' + y) = 2p\,(x' - x).$$

А подставивъ $\alpha\,(x' - x)$ вмѣсто $y' - y$ и раздѣливъ все уравненіе на $x' - x$, будемъ имѣть

$$\alpha\,(y' + y) = 2p;$$

откуда

$$\alpha = \frac{2p}{y' + y'},$$

что при совпаденіи точекъ $(x, y)$ и $(x', y')$ обращается въ слѣдующее выраженіе:

$$\alpha = \frac{p}{y}. \tag{7}$$

Подставивъ это вмѣсто $\alpha$ въ уравненіе (2), получимъ

$$Y - y = \frac{p}{y}(X - x)$$

для уравненія искомой касательной. Это уравненіе можно написать подъ видомъ

$$Yy - y^2 = pX - px;$$

потомъ, обративъ вниманіе на уравненіе $y^2 = 2px$ и сдѣлавъ сокращеніе, будемъ имѣть

$$Yy = p\,(X + x). \tag{8}$$

Найдемъ еще уравненіе касательной къ линіи 2-го порядка, отнесенной къ осямъ, имѣющимъ какое ни есть положеніе, прямоугольнымъ или косоугольнымъ,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{9}$$

Для точки $(x', y')$ имѣемъ

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0.$$

Вычтя отсюда предыдущее уравненіе, получимъ

$$A\,(x'^2 - x^2) + B\,(x'y' - xy) + C\,(y'^2 - y^2) + D\,(x' - x) + \\ + E\,(y' - y) = 0,$$

раздѣливъ это на $x' - x$ и принявъ во вниманіе, что

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \alpha \quad \text{и} \quad \frac{x'y' - xy}{x' - x} = \frac{x'y' - x'y + x'y - xy}{x' - x} = x'\alpha + y,$$

будемъ имѣть

$$A\,(x' + x) + B\,(x'\alpha + y) + C\alpha\,(y' + y) + D + E\alpha = 0.$$

При совпаденіи точекъ $(x, y)$ и $(x', y')$ это уравненіе приведется къ слѣдующему:

$$2Ax + B\,(x\alpha + y) + 2C\alpha y + D + E\alpha = 0,$$

откуда выводимъ

$$\alpha = -\frac{2Ax + By + D}{Bx + 2Cy + E} \tag{10}$$

и, подставивъ это въ уравненіе (2), получимъ уравненіе касательной

$$Y - y = -\frac{2Ax + By + D}{Bx + 2Cy + E}(X - x)$$

или

$$(Bx + 2Cy + E)\,(Y - y) + (2Ax + By + D)\,(X - x) = 0. \tag{11}$$

Это уравненіе всегда возможно, каковы бы ни были величины $x$ и $y$; слѣдовательно чрезъ всякую точку $(x, y)$ кривой 2-го порядка можно провести касательную и притомъ только одну.

Уравненіе (11) можетъ быть упрощено слѣдующимъ образомъ: отдѣливъ члены, множимые на $X$ и $Y$, отъ прочихъ, получимъ

$$(2Ax + By + D)\,X + (Bx + 2Cy + E)\,Y - 2Ax^2 - 2Bxy - \\ - 2Cy^2 - Dx - Ey = 0,$$

а по уравненію кривой (9) имѣемъ

$$-2Ax^2 - 2Bxy - 2Cy^2 = 2Dx + 2Ey + 2F;$$

слѣдовательно, уравненіе касательной приметъ окончательно видъ

$$(2Ax + By + D)\,X + (Bx + 2By + E)\,Y + Dx + Ey + 2F = 0. \quad (12)$$

— * **61.** Если будемъ разсматривать $x$ какъ независимую перемѣнную, а $y$ какъ ея функцію, опредѣленную уравненіемъ кривой, то $x' - x$ и $y' - y$ будутъ приращенія этихъ перемѣнныхъ, а отношеніе этихъ приращеній $\alpha$ при $x' = x$ обратится въ производную функцію ординаты $y$ относительно абсциссы $x$, т.-е. $\alpha = \frac{dy}{dx}$; слѣдовательно, уравненіе касательной къ какой ни есть кривой имѣетъ общій видъ

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

или

$$\frac{Y-y}{dy} = \frac{X-x}{dx}. \quad (1)$$

Означимъ чрезъ $F(x, y) = 0$ уравненіе кривой, найдемъ по правиламъ дифференціальнаго исчисленія

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0.$$

Въ этомъ уравненіи, которое относительно $dx$ и $dy$ однородно, можно замѣнить послѣднія величины пропорціональными имъ разностями $X - x$ и $Y - y$; отчего получимъ уравненіе

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) = 0, \quad (2)$$

принадлежащее касательной.

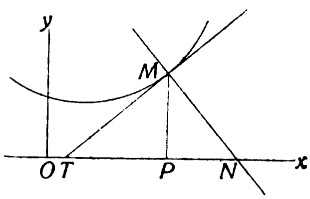
Для линіи второго порядка (9) **§ 60** имѣемъ

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2Ax + By + D, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Bx + 2Cy + E$$

и уравненіе (2) поэтому приведется къ уравненію (11) предыдущаго параграфа. * —

**62.** Величина $\alpha$ при косоугольныхъ координатныхъ осяхъ представляетъ отношеніе между синусами угловъ, составленныхъ касательною съ осями, а при осяхъ прямоугольныхъ *тангенсъ угла, составляемаго касательною съ осью абсциссъ* (см. **§ 23**).

Прямую $MN$, перпендикулярную къ касательной $MT$, называютъ *нормалью*; длину $MT$ *длиною касательной*; длину $MN$ *длиною нормали*; проекція $TP$ длины касательной на оси абсциссъ называется *подкасательною*, а проекція $PN$ длины нормали на той же оси *поднормалью*.



Фиг. 98

Уравненіе нормали, какъ прямой, проходящей чрезъ точку $(x\ y)$, имѣетъ видъ

$$Y - y = \alpha' (X - x);$$

по условію же перпендикулярности, въ случаѣ прямоугольныхъ осей координатъ, имѣемъ $\alpha\alpha' + 1 = 0$; откуда $\alpha' = -\frac{1}{\alpha}$; слѣдовательно, уравненіе нормали есть

$$Y - y = -\frac{1}{\alpha}(X - x).$$

Прямоугольные треугольники $TMP$ и $MNP$ даютъ:

$$\textit{подкасательная}\quad TP = \pm y : \operatorname{tg} T = \pm y : \alpha,$$

$$\textit{поднормаль}\quad PN = \pm y \,.\, \operatorname{tg} T = \pm y\,\alpha,$$

$$\textit{длина касательной}\ MT = \sqrt{y^2 + TP^2} = \pm y\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} = \pm\frac{y}{\sin T},$$

$$\textit{длина нормали}\ MN = \sqrt{y^2 + NP^2} = \pm y\sqrt{1+\alpha^2} = \pm\frac{y}{\cos T}.$$

Здѣсь должно брать величины $y$ и $\alpha$ со знаками $+$ или $-$ такъ, чтобы полученные выводы были положительные.

Для эллипса и гиперболы, отнесенныхъ къ осямъ,

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

по формулѣ (3) **§ 60** имѣемъ:

$$\operatorname{tg} T = \alpha = \mp \frac{b^2 x}{a^2 y}, \text{ слѣдовательно, } \alpha' = \pm \frac{a^2 y}{b^2 x},$$

гдѣ верхній знакъ относится къ эллипсу, а нижній къ гиперболѣ. Поэтому уравненіе нормали есть

$$Y - y = \pm \frac{a^2 y}{b^2 x}(X - x).$$

что легко привести къ слѣдующему:

$$a^2\left(\frac{X}{x}\right) \mp b^2\left(\frac{Y}{y}\right) = a^2 \mp b^2,$$

а такъ какъ $a^2 \mp b^2$ есть квадратъ эксцентрицитета, который означаемъ чрезъ $c$, то окончательно уравненіе нормали приметъ видъ

$$a^2\left(\frac{X}{x}\right) \mp b^2\left(\frac{Y}{y}\right) = c^2.$$

$$\textit{Подкасательная} = \pm y : \frac{b^2 x}{a^2 y} = \pm \frac{a^2 y^2}{b^2 x};$$

но по уравненію кривой имѣемъ

$$a^2 y^2 = \pm a^2 b^2 \pm b^2 x^2;$$

слѣдовательно,

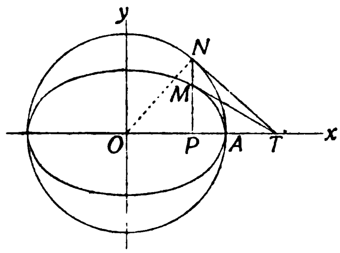
$$\textit{подкасательная} = \pm\left(\frac{a^2 - x^2}{x}\right),$$

$$\textit{поднормаль} = \pm y \frac{b^2 x}{a^2 y} = \pm \frac{b^2 x}{a^2}.$$

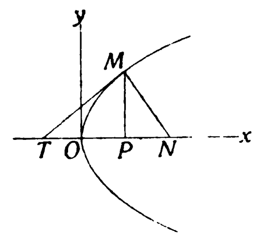
Выраженіе подкасательной не зависитъ отъ полуоси $b$, а потому оно не перемѣнится отъ перемѣны величины $b$; изъ этого вытекаетъ слѣдующее замѣчательное свойство касательныхъ, проведенныхъ къ двумъ эллипсамъ или къ двумъ гиперболамъ, имѣющимъ общую ось $2a$: *касательныя, проведенныя въ точкахъ, имѣющихъ общую абсциссу, пересѣкаются въ одной точкѣ $T$ на главной оси.*

Легко удостовѣриться, что это же свойство имѣютъ касательныя относительно второй оси, т.-е. *касательныя, проведенныя къ двумъ эллипсамъ, или къ двумъ гиперболамъ, имѣющимъ общую ось* $2b$, *пересѣкаютъ эту ось въ одной точкѣ, когда точки прикосновенія имѣютъ общую ординату.*

Эти свойства могутъ послужить для проведенія касательной къ эллипсу чрезъ данную на немъ точку $M$. Начертимъ радіусомъ, равнымъ $AO = a$, изъ центра $O$ окружность круга и продолжимъ ординату точки $M$ до пересѣченія съ этою окружностью; потомъ чрезъ точку пересѣченія $N$ проведемъ касательную къ кругу и




Фиг. 99




Фиг. 100

замѣтимъ пересѣченіе ея $T$ съ осью $Ox$; наконецъ проведемъ прямую $TM$, которая и будетъ искомая касательная.

Для параболы $y^2 = 2px$ по формулѣ (7) **§ 60** имѣемъ

$$\operatorname{tg} T = \alpha = \frac{p}{y}; \text{ поэтому } \alpha' = -\frac{y}{p};$$

слѣдовательно, уравненіе нормали будетъ

$$(Y - y)p + y(X - x) = 0.$$

$$\textit{Подкасательная} = y : \frac{p}{y} = \frac{y^2}{p} = 2x,$$

$$\textit{Поднормаль} \quad = y \cdot \frac{p}{y} = p.$$

*Подкасательная равна удвоенной абсциссѣ точки прикосновенія, а поднормаль половинѣ параметра.* На этихъ свойствахъ основаны способы проводить касательную и нормаль къ параболѣ по данной точкѣ прикосновенія $M$. Начертивъ координаты этой точки $OP$ и $MP$, отложимъ $TO = OP$; отъ этого получимъ длину $TP = 2\,OP$, равную подкасательной; слѣдовательно, прямая, соединяющая точку $T$ съ $M$, будетъ касательная. Отложивъ $NP = p$ и соединивъ прямою точки $N$ и $M$, получимъ нормаль $MN$.

Для линіи 2-го порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

отнесенной къ прямоугольнымъ осямъ, тангенсъ угла, составляемаго касательною съ осью $x$-въ, какъ мы видѣли выше, есть

$$\alpha = -\frac{2Ax + By + D}{Bx + 2Cy + E},$$

а тангенсъ угла, составляемаго нормалью съ осью $x$-въ, будетъ

$$\alpha' = -\frac{1}{\alpha} = \frac{Bx + 2Cy + E}{2Ax + By + D};$$

поэтому уравненіе нормали беретъ видъ

$$Y - y = \frac{Bx + 2Cy + E}{2Ax + By + D}(X - x)$$

или

$$(2Ax + By + D)\ (Y - y) - (Bx + 2Cy + E)\ (X - x) = 0.$$

— * Положимъ, что

$$F(x,\ y) = 0$$

есть уравненіе кривой, отнесенной къ осямъ, составляющимъ уголъ $\theta$, тогда, по доказанному выше,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial x}(Y - y) = 0 \tag{1}$$

будетъ уравненіе касательной, а слѣдовательно,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\cos\theta\right)(Y - y) - \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\cos\theta\right)(X - x) = 0 \tag{2}$$

уравненіе нормали (см. **§ 25**, $V$).

Чтобы получить величину подкасательной, надобно положить въ уравненіи (1) $Y = 0$, вывести соотвѣтственное значеніе разности $X - x$ и взять эту разность съ $+$ или $-$, смотря по тому будетъ **ли** она положительная или отрицательная. Такимъ же образомъ получимъ поднормаль изъ уравненія (2).

**63.** Направленіе нормали есть направленіе параметра $P$ функціи, линейной относительно $X$ и $Y$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}X + \frac{\partial F}{\partial y}Y - \frac{\partial F}{\partial x}x - \frac{\partial F}{\partial y}y,$$

представляющей первую часть въ уравненіи касательной (1) предыдущаго **§**.

Проекціи этого параметра на осяхъ координатъ $x$-въ и $y$-въ суть частныя производныя:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Выведя послѣднія изъ уравненія кривой, мы можемъ построить параметръ $P$ и тѣмъ самымъ опредѣлить направленіе нормали, а потомъ направленіе касательной.

Параметръ $P$ въ отношеніи къ функціи $F(x, y)$, представляющей первую часть уравненія кривой, называется *дифференціальнымъ параметромъ*. Величина его есть

$$P = \frac{1}{\sin\theta} \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\,\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\cos\theta}$$

(см. **§ 26**, форм. 4).

Разстояніе какой-нибудь точки $(X, Y)$ отъ касательной выражается формулою

$$\delta = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y)}{P}. \tag{1}$$

По знаку этой величины мы будемъ знать, съ какой стороны относительно касательной находится точка $(X, Y)$. Если точка $(X, Y)$ находится на кривой, то

$$F(X, Y) = 0.$$

Положивъ $X - x = h$, $Y - y = k$, будемъ имѣть $F(x + h, y + k) = 0$. Разложивъ это по степенямъ $h$ и $k$, получимъ

$$F(x, y) + \frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} k +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} h^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} k^2\right) + \varepsilon = 0$$

гдѣ $F(x, y) = 0$, а $\varepsilon$ совокупность членовъ 3-й и высшихъ степеней относительно $h$ и $k$; отсюда выводимъ

$$\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} k = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} h^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} kh + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} k^2\right) + \varepsilon;$$

слѣдовательно, по формулѣ (1) имѣемъ

$$\delta = -\frac{1}{2P}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}k^2 + 2\varepsilon\right).$$

При безконечно-маломъ разстояніи точки $(X, Y)$ отъ точки касанія $(x, y)$ величины $h$ и $k$ безконечно-малы; тогда знакъ $\delta$ зависитъ отъ знака выраженія

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}k^2 \tag{2}$$

и будетъ ему противоположенъ. Такимъ образомъ, по знаку выраженія (2) можно узнать, будетъ ли кривая, въ смежности съ точкою касанія, находиться со стороны параметра, или со стороны ему противоположной. Когда выраженіе (2) имѣетъ знакъ $+$, тогда кривая выпукла въ сторону параметра $P$; въ противномъ случаѣ она будетъ вогнута въ сторону параметра.

Если вмѣсто $h$ и $k$ подставимъ дифференціалы $dx$ и $dy$, то получимъ выраженіе

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2, \tag{3}$$

которое разнится отъ выраженія (2) на безконечную малую величину 3-го порядка, а потому имѣетъ съ нимъ одинаковый знакъ. Помощью же уравненія

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

можно преобразовать выраженіе (3) въ слѣдующее:

$$\frac{dx^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right],$$

которое имѣетъ одинаковый знакъ съ множителемъ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2. \tag{4}$$

Итакъ, для точекъ кривой, находящихся на безконечно-маломъ разстояніи отъ точки касанія, $\delta$ имѣетъ знакъ противоположный съ выраженіемъ (4); поэтому кривая выпукла къ параметру, когда выраженіе (4) положительное, и вогнута въ сторону параметра, когда выраженіе (4) отрицательное.

Не трудно удостовѣриться, что для линіи 2-го порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cx^2 + Dx + Ey + F = 0$$

выраженіе (4) приводится къ постоянному количеству

$$2[CD^2 - BDE + AE^2 + (B^2 - 4AC)F]. \tag{5}$$

Для эллипса, отнесеннаго къ осямъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

оно положительное, а именно: $\frac{8}{a^2b^2}$; слѣдовательно, эллипсъ въ смежности съ каждою точкою $(x, y)$ обращенъ выпуклостью въ сторону дифференціальнаго параметра. Проекціи же дифференціальнаго параметра на осяхъ координатъ суть: $\frac{2x}{a^2}$ и $\frac{2y}{b^2}$. По нимъ легко видѣть, что параметръ всегда направленъ въ сторону, противоположную центру, а потому эллипсъ на всемъ своемъ протяженіи вогнутъ къ центру.

Для гиперболы, отнесенной къ осямъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

выраженіе (5) приводится къ $-\frac{8}{a^2b^2}$ и показываетъ, что гипербола въ смежности съ каждою точкою $(x, y)$ вогнута въ сторону дифференціальнаго параметра. Проекціи же послѣдняго на осяхъ координатъ суть:

$$\frac{2x}{a^2} \quad \text{и} \quad -\frac{2y}{b^2}.$$

По нимъ видно, что параметръ всегда направленъ въ сторону, противоположную центру, а потому гипербола на всемъ своемъ протяженіи выпукла къ центру.

Наконецъ для параболы

$$y^2 - 2px = 0$$

выраженіе (5) даетъ положительную величину $8p^2$, а потому парабола въ смежности каждой точки $(x, y)$ выпукла въ сторону дифференціальнаго параметра; проекціи же послѣдняго на осяхъ $x$-въ и $y$-въ суть:

$$-2p \quad \text{и} \quad 2y.$$

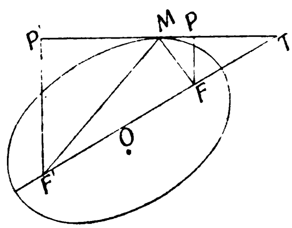
По нимъ видно, что параметръ направленъ всегда въ сторону, противоположную той, гдѣ фокусъ; слѣдовательно, парабола вездѣ вогнута къ фокусу. * —

**64.** Радіусы векторы, проведенные изъ фокусовъ эллипса или гиперболы въ точку касанія, имѣютъ замѣчательныя свойства: 1) *они пропорціональны растояніямъ фокусовъ отъ касательной и* 2) *составляютъ равные углы съ касательною.*

Пусть

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

будетъ эллипсъ, отнесенный къ осямъ, $F$ и $F'$ его фокусы, $MT$ касательная въ точкахъ $M\ (x, y)$ и $T$ пересѣченіе касательной съ осью $x$-въ. Уравненіе касательной $MT$ есть




Фиг. 101

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{a^2}=1.$$

Положивъ здѣсь $Y=0$, и выведя $X$, получимъ длину $OT$, а именно:

$$OT=\frac{a^2}{x}.$$

Вычтя и прибавивъ къ этому эксцентрицитетъ $c$, получимъ разстоянія фокусовъ отъ точки $T$:

$$FT=\frac{a^2}{x}-c,\quad F'T=\frac{a^2}{x}+c,$$

а отсюда выводимъ отношеніе

$$FT : F'T = a^2-cx : a^2+cx.$$

Это же отношеніе очевидно равно отношенію разстояній $FP$ и $F'P$ фокусовъ отъ касательной, потому что треугольники $FTP$ и $F'TP$, подобны. Итакъ,

$$FP : F'P' = a^2-cx : a^2+cx. \qquad (1)$$

Радіусы векторы $FM$ и $F'M$, какъ было доказано выше, выражаются формулами:

$$FM=a-\frac{cx}{a},\quad F'M=a+\frac{cx}{a}$$

и даютъ отношеніе

$$FM : F'M = a^2-cx : a^2+cx,$$

равное отношенію (1); слѣдовательно,

$$FM : F'M = FP : F'P',$$

что доказываетъ первое изъ приведенныхъ выше свойствъ.

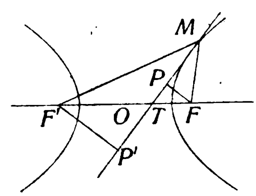
Изъ него вытекаетъ, какъ слѣдствіе, подобіе треугольниковъ $FMP$ и $F'MP'$. А отсюда заключаемъ, что $\angle FMP = \angle F'MP'$, т.-е. второе изъ упомянутыхъ выше свойствъ.

Пусть будетъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

уравненіе гиперболы, $F$ и $F'$ ея фокусы, $MT$ касательная въ точкѣ $M$ $(x, y)$ и $T$ пересѣченіе касательной съ осью $x$-въ. Изъ уравненія касательной

$$\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1,$$



Фиг. 102

положивъ $Y = 0$, выводимъ

$$X = OT = \frac{a^2}{x},$$

а потому

$$FT = c - \frac{a^2}{x}, \quad F'T = c + \frac{a^2}{x}$$

и

$$FT : F'T = cx - a^2 : cx + a^2.$$

Такъ какъ $FT$ и $F'T$ пропорціональны разстояніямъ $FP$ и $F'P'$, то

$$FP : F'P' = cx - a^2 : cx + a^2. \tag{1}$$

Изъ выраженій радіусовъ векторовъ

$$FM = \frac{cx}{a} - a, \quad FM = \frac{cx}{a} + a$$

выводимъ

$$FM : F'M = cx - a^2 : cx + a.$$

Это отношеніе равно (1); слѣдовательно,

$$FM : F'M = FP : F'P'.$$

А отсюда слѣдуетъ, что треугольники $FMP$ и $F'MP'$ подобны и потому

$$\angle FMP = \angle F'MP'.$$

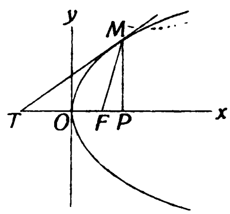
*Касательная къ параболѣ составляетъ равные углы съ осью па-*

*раболы и съ радіусомъ векторомъ, проведеннымъ изъ фокуса въ точку касанія.*

Пусть будетъ парабола

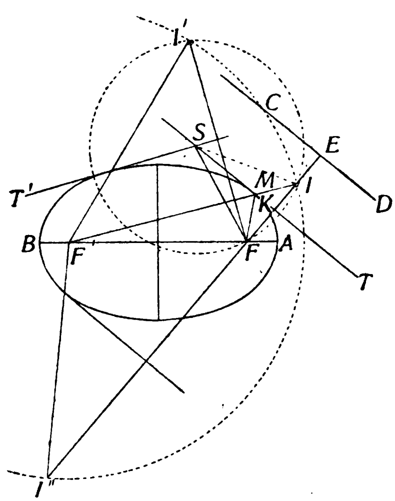
$$y^2 = 2px,$$

причемъ ось $x$-въ есть главный діаметръ, а ось $y$-въ къ нему перпендикулярна; $F$ фокусъ параболы, $FT$ касательная въ точкѣ $M(x, y)$, $T$ пересѣченіе касательной съ осью $x$-въ и $MP$ ордината точки $M$. Мы нашли, что подкасательная равна двойной абсциссѣ, т.-е. $TP = 2x$. а такъ какъ $OP = x$, то и $OT = x$. Разстояніе фокуса отъ вершины есть четверть параметра; поэтому $FO = \frac{p}{2}$; слѣдовательно, $FT = \frac{p}{2} + x$; но также $FM = \frac{p}{2} + x$; слѣдовательно, $FT = FM$ и треугольникъ $TFM$ равнобедренный; отсюда слѣдуетъ, что $\angle FTM = \angle TMF$.




Фиг. 103

**65.** Доказанныя свойства угловъ, составляемыхъ касательными съ радіусами векторами, могутъ служить къ построенію касательныхъ.




Фиг. 104

1) *Построить касательную къ эллипсу по данной точкѣ прикосновенія М.*

Такъ какъ касательная $ST$ составляетъ равные углы $TMF$ и $SMF'$ съ радіусами векторами $EM$ и $F'M$, то она раздѣляетъ пополамъ уголъ $IMF$, заключающійся между радіусомъ векторомъ $EM$ и продолженіемъ радіуса вектора $E'M$; потому что $\angle SMF' = \angle IMT$, какъ противоположные, а по равенству $\angle SMF'$ и $\angle TMF$, будетъ $\angle IMT = \angle TMF$; слѣдовательно, чтобы провести касательную въ точкѣ $M$, надобно раздѣлить пополамъ уголъ $IMF$; раздвояющая прямая $ST$ будетъ касательная.

2) *Провести касательную къ эллипсу чрезъ внѣшнюю точку $S$.*

Пусть будетъ $ST$ касательная и $M$ точка прикосновенія. Проведя въ эту точку радіусы векторы $FM$ и $F'M$, возьмемъ на продолженіи второго длину $IM = FM$ и проведемъ $IF$; послѣдняя будетъ перпендикулярна къ касательной $ST$ и раздѣлится ею пополамъ въ точкѣ $K$, по равенству треугольниковъ $IMK$ и $FMK$, въ которыхъ $\angle IMK = \angle FMK$, $IM = FM$, и сторона $MK$ общая; вслѣдствіе этого данная точка $S$ будетъ въ равныхъ разстояніяхъ отъ $I$ и $F$, такъ что окружность, описанная изъ центра $S$ радіусомъ $SF$, пройдетъ чрезъ точку $I$. Сверхъ того, по равенству $MI$ и $MF$, имѣемъ:

$$F'I = F'M + MI = F'M + FM,$$

т.-е. $F'I$ равна суммѣ радіусовъ векторовъ, которая равна большой оси $AB$; а потому окружность, описанная изъ центра $F'$ радіусомъ $AB$, пройдетъ также черезъ точку $I$. Итакъ, по данной точкѣ $S$ можно опредѣлить точку $I$ пересѣченіемъ двухъ окружностей: окружности радіуса $SF$, описанной изъ центра $S$, съ окружностью радіуса $AB$, описанною изъ центра $F'$. Найдя точку $I$, проведемъ прямую $IF$ и опустимъ на нее изъ $S$ перпендикуляръ $ST$, который будетъ искомая касательная. Точку прикосновенія $M$ найдемъ въ пересѣченіи касательной съ прямою $F'I$.

Окружности круговъ, опредѣляющія своимъ пересѣченіемъ точку $I$, пересѣкутся еще въ другой точкѣ $I'$, для которой можно провести такимъ образомъ чрезъ точку $S$ другую касательную $ST'$ къ эллипсу. Чтобы окружности, опредѣляющія точки $I$ и $I'$, могли пересѣкаться, разстояніе между ихъ центрами должно быть меньше суммы и больше разности ихъ радіусовъ, т.-е.

$$SF' < SF + AB \text{ и } SF' > AB - SF.$$

Первое условіе удовлетворено, потому что $SF' < SF + FF'$, а $FF' < AB$; слѣдовательно, $SF' < SF + AB$. Второе условіе можетъ быть представлено подъ видомъ

$$SF' + SF > AB$$

и также удовлетворено, когда точка $S$ внѣ эллипса, со стороны выпуклой.

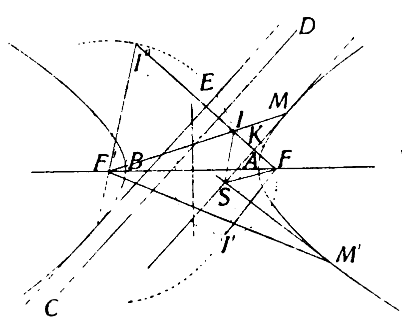
3) *Провести касательную къ эллипсу параллельно данной прямой $CD$.*

Допустивъ построеніе предыдущей задачи и что касательная параллельна прямой $CD$, найдемъ, что прямая $FI$, перпендикулярная къ касательной, также перпендикулярна къ $CD$; поэтому по данной $CD$ легко найти точку $I$, а именно: опустимъ изъ $F$ перпендикуляръ $FE$ къ $CD$ и засѣчемъ его радіусомъ $AB$, взявъ $F'$ за центръ; въ пересѣченіи найдемъ точку $I$. Послѣ того изъ средины $IF$ проведемъ $TS$ параллельно $CD$; эта прямая будетъ касательная. Точка прикосновенія опредѣлится пересѣченіемъ $TS$ съ прямою $IF'$.

Окружность радіуса $AB$, описанная изъ центра $F'$, пересѣчетъ прямую $FE$ еще въ другой точкѣ $I''$, по которой можно построить другую касательную къ эллипсу, параллельную $CD$.

Окружность радіуса $AB$, описанная изъ центра $F'$, всегда пересѣчетъ перпендикуляръ $FE$; потому что $FF' < AB$ и слѣдовательно, точка $F$ находится внутри окружности, а всякая прямая, проходящая чрезъ такую точку, пересѣкаетъ окружность. Итакъ, *можно провести къ эллипсу двѣ касательныхъ, параллельныхъ всякой данной прямой.*

4) *Построить касательную къ гиперболѣ по данной точкѣ прикосновенія $M$.*




Фиг. 105

Проведемъ въ данную точку радіусы векторы $FM$ и $F'M$ и раздѣлимъ пополамъ уголъ $FMF'$; раздвояющая прямая $SM$ будетъ искомая касательная.

5) *Провести касательную къ гиперболѣ чрезъ внѣшнюю точку $S$.*

Пусть $SM$ будетъ касательная и $M$ точка прикосновенія. Отложивъ $MI = MF$ и проведя $IF$, легко видѣть, по равенству угловъ $FMS$ и $F'MS$, что $SM$ перпендикулярна къ $IF$ и $IK = KF$, а потому $SF = SI$; слѣдовательно, окружность, описанная радіусомъ $SF$ изъ центра $S$, пройдетъ чрезъ $I$. Чрезъ эту точку пройдетъ также окружность, описанная изъ центра $F'$ радіусомъ, равнымъ главной оси $AB$; потому что

$$IF' = F'M - MI = F'M - MF = AB.$$

Слѣдовательно, чтобы провести касательную чрезъ точку $S$, опишемъ двѣ окружности: радіусомъ $SF$ изъ центра $S$ и радіусомъ $AB$ изъ центра $F'$; въ пересѣченіи ихъ найдемъ точку $I$; потомъ проведемъ прямую $IF$ и опустимъ на нее перпендикуляръ $SM$, который представитъ касательную. Точку прикосновенія $M$ найдемъ въ пересѣченіи касательной съ продолженіемъ $F'I$.

Окружности, опредѣляющія точку $I$, пересѣкутся еще въ другой точкѣ $I'$, по которой можно построить другую касательную, проходящую чрезъ $S$. Точка прикосновенія этой второй касательной можетъ быть на другой вѣтви гиперболы.

Чтобы рѣшеніе задачи было возможно, окружности, опредѣляющія точки $I$ и $I'$, должны пересѣкаться. Для этого требуются условія:

$$SF' < SF + AB \text{ и } SF' > SF - AB, \text{ когда } SF > AB,$$

или

$$SF' < SF + AB \text{ и } SF' > AB - SF, \text{ когда } AB > SF.$$

Въ первомъ случаѣ имѣемъ: $SF' - SF < AB$ и $AB > SF - SF'$; второе неравенство есть слѣдствіе перваго, когда $SF' > SF$, а первое будетъ слѣдствіемъ второго, когда $SF > SF'$. То или другое условіе будетъ удовлетворено, когда точка $S$ находится между вѣтвями гиперболы.

Въ случаѣ $AB > SF$ требуется, чтобы $SF' - SF < AB$ и $SF' + SF > AB$; второе, очевидно, всегда удовлетворено, а первое требуетъ, чтобы точка $S$ находилась между вѣтвями гиперболы.

6) *Провести касательную къ гиперболѣ параллельно данной прямой $CD$.*

Пусть будетъ $SM$ искомая касательная и $M$ точка прикосновенія. Отложивъ $MI = MF$ и проведя прямую $FI$, найдемъ, такъ же какъ и въ рѣшеніи предыдущей задачи, что $IF$ перпендикулярна къ $SM$, а потому она перпендикулярна и къ $CD$; притомъ $F'I = F'M - MI = F'M - MF = AB$; слѣдовательно, если проведемъ прямую $FE$, перпендикулярную къ $CD$, и засѣчемъ ее дугою круга, описаннаго изъ центра $F'$ радіусомъ $AB$, то найдемъ въ пересѣченіи точку $I$; послѣ того чрезъ $K$, средину $IF$, проведемъ $SM$ параллельно $CD$; прямая $SM$ будетъ касательная, а пересѣченіе ея съ продолженіемъ $F'I$ опредѣлитъ точку прикосновенія $M$.

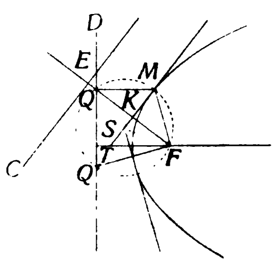
Окружность, описанная изъ $F'$ радіусомъ $AB$, пересѣчетъ прямую $IF$ въ другой точкѣ $I''$, которая также какъ $I$ послужитъ для опредѣленія другой касательной, параллельной $CD$.

7) *Построить касательную къ параболѣ по данной точкѣ прикосновенія $M$.*

Проведя въ данную точку $M$ радіусъ векторъ $FM$, отложимъ $TF = FM$ и точку $T$ соединимъ съ $M$ прямою $MT$, которая и будетъ искомая касательная; потому что она составляетъ съ радіусомъ векторомъ и осью равные углы $TMF$ и $MTF$.

8) *Провести касательную къ параболѣ чрезъ внѣшнюю точку $S$.*

Пусть $SM$ будетъ искомая касательная, $M$ точка прикосновенія и $DQ$ директрисса. Проведя $MQ$, перпендикулярную къ $DQ$, и потомъ прямую $QF$ въ фокусъ, будемъ имѣть: $QM = MF$ и $\angle QMT = \angle MTF$; а такъ какъ $\angle MTF = \angle TMF$, то $\angle QMT = \angle TMF$; слѣдовательно, $SM$ перпендикулярна къ $QF$ и раздѣляетъ ее пополамъ въ точкѣ $K$, а потому $SF = SQ$, и окружность круга, описанная изъ центра $S$ радіусомъ $SF$, пройдетъ чрезъ точку $Q$. Итакъ, по данной точкѣ $S$ точка $Q$ опредѣлится пересѣченіемъ директриссы съ окружностью круга, описаннаго изъ $S$ радіусомъ $SF$; найдя $Q$, проведемъ $QF$ и опустимъ на нее изъ $S$ перпендикуляръ, который и будетъ искомая касательная. Точка прикосновенія опредѣлится пересѣченіемъ касательной съ прямою $QM$, проведенною чрезъ $Q$ параллельно оси.



Фиг. 106

Окружность, опредѣляющая пересѣченіемъ своимъ съ директриссою точку $Q$, пересѣчетъ директриссу еще въ точкѣ $Q'$, помощью которой можно провести чрезъ точку $S$ другую касательную къ параболѣ. Рѣшеніе задачи возможно, когда окружность пересѣкаетъ директриссу; для этого надобно, чтобы разстояніе точки $S$ отъ директриссы было меньше радіуса $SF$, а это условіе будетъ удовлетворено, когда точка $S$ находится внѣ параболы, съ выпуклой стороны.

9) *Провести касательную къ параболѣ параллельно данной прямой $CE$.*

Пусть $MT$ будетъ искомая касательная и $M$ точка прикосновенія. Проведя $MF$, $MQ$, перпендикулярную къ директриссѣ, и потомъ прямую $QF$, найдемъ, что $FQ$ перпендикулярна къ $MT$, а. слѣдовательно, и къ $CE$. Поэтому легко найти точку $Q$, когда дана $EC$; она будетъ въ пересѣченіи директриссы съ перпендикуляромъ $EK$, опущеннымъ изъ фокуса на прямую $CE$. Опредѣливъ $Q$, проведемъ чрезъ $K$ *), средину $QF$, прямую $TM$, параллельную $CE$; эта прямая будетъ искомая касательная. Точка прикосновенія $M$ опредѣлится пересѣченіемъ $TM$ съ прямою, проведенною чрезъ $Q$ параллельно оси.

Такъ какъ директрисса съ прямою $FQ$ можетъ пересѣчься только въ одной точкѣ, то задача имѣетъ только одно рѣшеніе.

Рѣшеніе задачи невозможно, когда $CE$ параллельна оси параболы, потому что тогда $FK$ параллельна директриссѣ, а точка $Q$ въ безконечности.

**66.** Когда оси эллипса или гиперболы взяты за оси координатъ, тогда уравненіе кривой имѣетъ видъ

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

и тангенсъ $\alpha$ угла, составляемаго касательною съ осью $x$-въ, какъ мы нашли въ **§ 60**, опредѣляется формулою

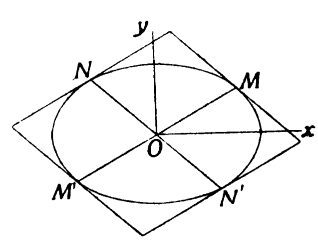
$$\alpha = \mp \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Пусть будетъ $\alpha'$ тангенсъ угла, составленнаго съ осью $x$ въ діаметромъ $M'M$, проведеннымъ въ точку касанія $M(x, y)$; тогда будемъ имѣть

$$\alpha' = \frac{y}{x}$$

и слѣдовательно,

$$\alpha\alpha' = \mp \frac{b^2}{a^2}.$$




Фиг. 107

А это (см. **§ 53**) есть условіе, связывающее тангенсы угловъ, составляемыхъ съ осью $x$-въ двумя сопряженными діаметрами; слѣдовательно, $\alpha$ есть тангенсъ угла, составляемаго съ осью $x$-въ діаметромъ $NN'$, сопряженнымъ съ $M'M$, а поэтому,

*) Точка $K$ находится въ пересѣченіи $FQ$ съ перпендикуляромъ, возставленнымъ изъ вершины къ оси параболы.

*касательная параллельна діаметру, сопряженному съ діаметромъ, проходящимъ чрезъ точку касанія.*

Касательныя въ концахъ діаметра $M'M$ между собою параллельны; потому что онѣ параллельны діаметру $NN'$, сопряженному съ $MM'$.

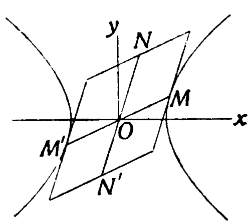
Въ эллипсѣ діаметръ $NN'$ пересѣкаетъ кривую, и касательныя въ точкахъ $N$ и $N'$ параллельны діаметру $M'M$; слѣдовательно, четыре касательныя въ концахъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ образуютъ параллелограммъ, описанный около эллипса.

Если обозначимъ чрезъ $a'$ и $b'$ половины сопряженныхъ діаметровъ и чрезъ $\theta$ уголъ этихъ діаметровъ, то площадь этого параллелограмма выразится произведеніемъ

$$4a'b' \sin\theta,$$

которое, какъ было доказано выше, равно $4ab$, т.-е. площади прямоугольника, построеннаго на осяхъ эллипса; слѣдовательно, *площадь параллелограмма, такъ описаннаго около эллипса, что стороны параллельны двумъ сопряженнымъ діаметрамъ, имѣетъ постоянную величину, т.-е. не зависитъ отъ угла сопряженныхъ діаметровъ.*

Въ гиперболѣ діаметръ $NN'$ не пересѣкаетъ кривую (см. **§ 53**); слѣдовательно, чтобы рѣшеніе задачи 6-й предыдущаго параграфа было возможно, надобно, чтобы діаметръ, параллельный прямой $CD$, съ которою должна быть параллельна требуемая касательная, не пересѣкалъ гиперболы, т.-е. проходилъ между вѣтвями гиперболы.



Фиг. 108

Если отложимъ $ON$ и $ON'$ равныя $b'$, половинѣ діаметра, сопряженнаго съ $MM' = 2a'$, и проведемъ въ точкахъ $N$ и $N'$ прямыя, параллельныя съ $MM'$, то эти прямыя съ касательными въ точкахъ $M$ и $M'$ образуютъ параллелограммъ, площадь, котораго есть $4a'b' \sin\theta$, гдѣ $\theta$ есть уголъ сопряженныхъ діаметровъ. *Эта величина не зависитъ отъ угла $\theta$ и равна прямоугольнику $4ab$, построенному на полуосяхъ.*

**67.** Задача о проведеніи касательной къ линіи второго порядка чрезъ внѣшнюю точку можетъ быть рѣшена вообще, аналитически, слѣдующимъ образомъ:

Пусть будетъ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

уравненіе линіи втораго порядка и $(\alpha, \beta)$ точка, чрезъ которую должно провести касательную къ этой кривой.

Уравненіе искомой касательной будетъ

$$(2Ax + By + D)\,X + (Bx + 2Cy + E)\,Y + Dx + Ey + 2F = 0,$$

и условіе, что она проходитъ чрезъ точку $(\alpha, \beta)$, даетъ

$$(2Ax + By + D)\alpha + (Bx + 2Cy + E)\beta + Dx + Ey + 2F = 0. \qquad (2)$$

Присоединивъ сюда уравненіе кривой (1), будемъ имѣть два уравненія, изъ которыхъ выведемъ координаты точки прикосновенія $(x, y)$. Такъ какъ одно изъ этихъ уравненій первой степени, а другое второй, то мы найдемъ двѣ пары величинъ $(x, y)$, которыя могутъ быть вещественныя или мнимыя; только въ первомъ случаѣ можно провести касательную къ кривой (1) чрезъ данную точку $(\alpha, \beta)$; притомъ получимъ двѣ касательныхъ.

Уравненіе (2), разсматриваемое отдѣльно, при перемѣнныхъ величинахъ $x$, $y$, очевидно, принадлежитъ прямой линіи, проходящей чрезъ точки прикосновенія двухъ касательныхъ, проведенныхъ къ кривой (1) изъ точки $(\alpha, \beta)$. Эта прямая называется *полярою* точки $(\alpha, \beta)$, а точка $(\alpha, \beta)$ ея *полюсомъ*.

Такъ какъ уравненіе (2) возможно при всякихъ вещественныхъ величинахъ $\alpha$ и $\beta$, то всякая точка имѣетъ поляру, даже въ томъ случаѣ, когда нельзя провести касательныхъ изъ этой точки къ кривой (1). Нетрудно также доказать, что всякую прямую можно разсматривать какъ поляру нѣкоторой точки. Пусть будетъ

$$ax + by + c = 0$$

уравненіе данной прямой. Чтобы оно представляло поляру точки $(\alpha, \beta)$, оно должно быть тожественно съ уравненіемъ (2); для этого должно положить

$$\frac{2A\alpha + B\beta + D}{a} = \frac{B\alpha + 2C\beta + E}{b} = \frac{D\alpha + E\beta + 2F}{c}. \qquad (3)$$

Здѣсь два уравненія первой степени относительно $\alpha$ и $\beta$, а потому выведенныя изъ нихъ величины $\alpha$ и $\beta$ будутъ вещественныя. Отсюда слѣдуетъ, что данная прямая имѣетъ вообще полюсъ. Но можетъ случиться, что для $\alpha$ и $\beta$ получаются безконечныя значенія, тогда полюсъ находится въ безконечности.

Если кривая (1) имѣетъ центръ, который взятъ за начало координатъ при осяхъ, направленныхъ по сопряженнымъ діаметрамъ, то $D = 0$, $E = 0$, $B = 0$; въ такомъ случаѣ уравненія (3) приведутся къ слѣдующимъ:

$$\frac{A\alpha}{a} = \frac{C\beta}{b} = \frac{F}{c};$$

откуда выходитъ

$$\alpha = \frac{Fa}{Ac}, \quad \beta = \frac{Fb}{Cc}.$$

Такъ какъ $A$ и $C$ не равны нулю, то $\alpha$ и $\beta$ будутъ конечныя, когда $c$ не равно нулю, а, слѣдовательно, всякая прямая, не проходящая чрезъ начало координатъ или центръ кривой, имѣетъ полюсъ на конечномъ разстояніи отъ центра. Когда данная прямая проходитъ чрезъ центръ, тогда $c = 0$, и, такъ какъ центръ вообще не находится на кривой, $F$ не равно нулю *), а потому, по крайней мѣрѣ, одна изъ величинъ $\alpha$, $\beta$ безконечна, т.-е. *полюсъ находится въ безконечности, когда поляра проходитъ чрезъ центръ кривой.*

Для кривой, не имѣющей центра, можно взять координатныя оси такъ, что въ уравненіи (1) будетъ:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad E = 0, \quad F = 0;$$

тогда $\alpha = \frac{c}{a}$, $\beta = \frac{bD}{2aC}$. Эти величины будутъ безконечныя, когда $a = 0$, т.-е., когда поляра параллельна оси кривой.

Когда главная ось линіи второго порядка взята за ось $x$-въ, а директрисса за ось $y$-въ, тогда уравненіе кривой беретъ видъ:

$$(1 - P^2)x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0$$

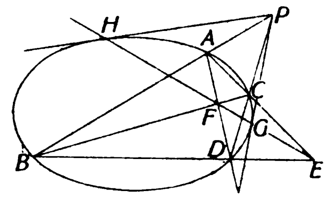
(см. уравненіе 12 **§ 50**), гдѣ $\alpha$ есть разстояніе фокуса отъ директриссы. Уравненіе поляры (2) въ такомъ случаѣ, при полюсѣ въ фокусѣ $(\alpha, 0)$, приведется къ слѣдующему

$$[(1 - P^2)\alpha - \alpha]\,\alpha - \alpha x + \alpha^2 = 0 \quad \text{или} \quad P^2\alpha x = 0.$$

*) Отсюда должно исключить случай, когда уравненіе (1) принадлежитъ двумъ пересѣкающимся прямымъ.

Такъ какъ $P$ и $\alpha$ не равны нулю, то должно положить $x = 0$, а это есть уравненіе директриссы; слѣдовательно, *если полюсъ въ фокусѣ, то поляра есть директрисса.*

—* **68.** Поляру данной точки $P$ можно построить слѣдующимъ образомъ: проведемъ чрезъ $P$ двѣ прямыя $AB$ и $CD$, пересѣкающія кривую (1); потомъ прямыя $BD$, $AC$, $AD$ и $BC$, соединяющія точки пересѣченій, и замѣтимъ точку $E$ пересѣченія $AC$ съ $BD$, и точку $F$ пересѣченія $AD$ съ $BC$; прямая $EF$, соединяющая двѣ послѣднія точки, есть поляра точки $P$. Для доказательства возьмемъ точку $P$ за начало координатъ, прямую $PC$ за ось $x$-въ, $PB$ за ось $y$-въ и пусть уравненіе кривой (1) будетъ отнесено къ этимъ осямъ. Означивъ чрезъ $\alpha$ и $\alpha'$ абсциссы точекъ $D$ и $C$, а чрезъ $\beta$ и $\beta'$ ординаты точекъ $A$ и $B$, по **§ 24** найдемъ:




Фиг. 109

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1 \text{ для уравненія прямой } AD,$$

$$\frac{x}{\alpha'} + \frac{y}{\beta'} = 1 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad BC,$$

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta'} = 1 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad BD,$$

$$\frac{x}{\alpha'} + \frac{y}{\beta} = 1 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad AC.$$

Въ суммѣ первыхъ двухъ уравненій получимъ уравненіе

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'}\right)x + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'}\right)y = 2, \tag{4}$$

которое должно принадлежать прямой линіи, проходящей чрезъ точку $F$; потому что координаты этой точки должны удовлетворять уравненіямъ прямыхъ $AD$ и $BC$, а, слѣдовательно, также уравненію (4), происходящему отъ ихъ сложенія. Но уравненіе (4) выходитъ также отъ сложенія уравненій прямыхъ $BD$ и $AC$, а потому ему должны удовлетворять координаты точки $E$, пересѣченія этихъ прямыхъ; слѣдовательно, уравненіе (4) принадлежитъ прямой $EF$. Величины $\alpha$ и $\alpha'$ суть корни уравненія

$$Ax^2 + Dx + F = 0,$$

полученнаго отъ положенія $y=0$ въ уравненіи кривой (1); поэтому

$$\alpha+\alpha'=-\frac{D}{A},\quad \alpha\alpha'=\frac{F}{A},\quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}=\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha\alpha'}=-\frac{D}{F}.$$

Величины $\beta$ и $\beta'$ суть корни уравненія

$$Cy^2+Ey+F=0,$$

къ которому приведется уравненіе (1) при $x=0$; слѣдовательно,

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta'}=-\frac{E}{F}.$$

Отъ этого уравненіе (4) приведется къ слѣдующему:

$$-\frac{D}{F}x-\frac{E}{F}y=2$$

или

$$Dx+Ey+2F=0.$$

Но къ тому же самому приведется уравненіе поляры (2) для точки $P$; потому что въ немъ надобно положить $\alpha=0$, $\beta=0$, такъ какъ точка $P$ взята за начало координатъ. Слѣдовательно, $EF$ есть поляра точки $P$.

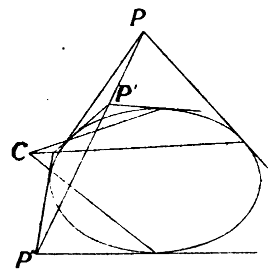
**69.** Общее уравненіе поляры (2) имѣетъ одинаковый видъ, какъ относительно $(x, y)$, такъ и относительно $(\alpha.\ \beta)$. Въ самомъ дѣлѣ: отдѣливъ члепы, содержащіе $x$ и $y$, отъ прочихъ, получимъ

$$(2A\alpha+B\beta+D)x+(B\alpha+2C\beta+E)y+D\alpha+E\beta+2F=0; \qquad (5)$$

но то же самое выходитъ изъ уравненія (2) отъ перемѣны $x$ на $\alpha$, $\alpha$ на $x$, $y$ на $\beta$ и $\beta$ на $y$. Слѣдовательно, если точку $(x, y)$ возьмемъ за полюсъ, то уравненіе (5) или (2) при перемѣнныхъ $\alpha$ и $\beta$ будетъ уравненіемъ поляры точки $(x, y)$. Изъ этого заключаемъ, что поляра всякой точки $(x, y)$, находящейся на полярѣ точки $(\alpha, \beta)$, проходитъ чрезъ послѣднюю точку. Пусть будетъ $p$ поляра точки $(\alpha, \beta)$, а $p'$ поляра точки $(x, y)$. При движеніи точки $(x, y)$ по прямой $p$, остающейся неподвижною, поляра $p'$ будетъ перемѣнять свое положеніе, и по доказанному она во всякомъ положеніи должна проходить чрезъ точку $(\alpha, \beta)$, которая остается вмѣстѣ съ $p$ неподвижною; слѣдовательно, поляра $p'$ вращается около точки $(\alpha, \beta)$; обратно, поляра $p$ станетъ вращаться около $(x, y)$, когда точка $(\alpha, \beta)$ двигается по прямой $p'$.

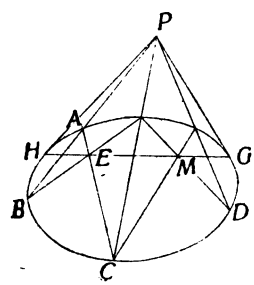
Прямыя $p$ и $p'$ называются *взаимными полярами*, а точки $(x, y)$ и $(\alpha\beta)$ — *взаимными полюсами*.

Поляры точекъ $P$, $P'$, $P''$, взятыхъ на одной прямой, пересѣкаются въ одной точкѣ $C$, которая есть полюсъ прямой $P$, $P'$, $P''$.



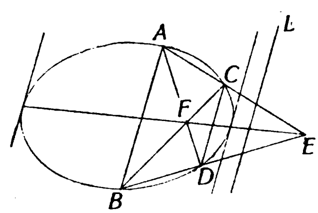
Фиг. 110

Можно построить поляру точки $P$ еще слѣдующимъ образомъ: проведемъ изъ $P$ три пересѣкающихъ, $PA$, $PC$, $PD$ (фиг. 111), соединимъ хордами точки пересѣченій съ кривою, и потомъ найдемъ точки пересѣченій этихъ хордъ $E$ и $M$. По доказанному выше точка $E$ должна быть на полярѣ точки $P$; по той же причинѣ и $M$ будетъ на этой полярѣ; слѣдовательно, прямая $EM$ есть поляра точки $P$. Легко видѣть, что, когда полюсъ находится на кривой, тогда поляра его касается кривой, и полюсъ есть точка прикосновенія.



Фиг. 111

Построеніе поляры ведетъ къ весьма простому способу для проведенія касательной къ линіи 2-го порядка чрезъ внѣшнюю точку $P$, а именно: построивъ поляру точки $P$ (фиг. 111), замѣтимъ пересѣченія ея $G$ и $H$ съ кривою; потомъ проведемъ прямыя $PG$ и $PH$, которыя и будутъ искомыя касательныя.



Фиг. 112

Когда полюсъ $P$ будетъ въ безконечности, тогда касательныя $PH$, $PG$ и пересѣкающія $PA$, $PD$ сдѣлаются параллельными, а отсюда выходитъ способъ для проведенія касательной параллельно данной прямой $L$. Проведемъ параллельно $L$ двѣ пересѣкающія $AB$ и $CD$, потомъ хорды $AD$, $BC$, $AC$, $BD$; замѣтимъ точки $F$ и $E$, соединимъ ихъ прямою $FE$ и найдемъ пересѣченія послѣдней съ кривою, а въ этихъ точкахъ проведемъ прямыя параллельно $L$.

Такъ какъ здѣсь полюсъ прямой $FE$ въ безконечности, то эта прямая, по доказанному выше, есть діаметръ. Для параболы одна изъ точекъ, въ которыхъ $FE$ пересѣкаетъ кривую, будетъ въ безконечности.*—

**70.** Разсмотримъ положенія касательной къ линіи второго порядка, соотвѣтствующія разнымъ положеніямъ точки прикосновенія.

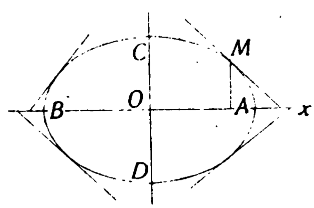
Для эллипса $ABCD$, отнесеннаго къ осямъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

тангенсъ угла $\varphi$, составляемаго касательною съ осью $Ox$, выражается формулою

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

(см. **§ 60**), которая даетъ отрицательную величину для $\operatorname{tg}\varphi$ и величину $\varphi>90^\circ$, когда координаты $x$ и $y$ имѣютъ одинаковые знаки, т.-е. когда точка прикосновенія находится въ первой четверти эллипса $AC$, гдѣ $x$ и $y$ положительные, или въ третьей $BD$, гдѣ $x$ и $y$ отрицательные. Для точки $(x, y)$, взятой во второй четверти $BC$ или четвертой $AD$, $\operatorname{tg}\varphi$ будетъ положительный и $\varphi<90^\circ$. При $x=\pm a$ будетъ $y=0$; отчего $\operatorname{tg}\varphi=\infty$ и слѣдовательно, $\varphi=90^\circ$, т.-е. касательныя въ концахъ большой оси перпендикулярны къ этой оси. При движеніи точки прикосновенія $M$ отъ $A$ къ $C$ величина $x$ уменьшается, а $y$ увеличивается; поэтому $\varphi$ увеличивается. При $x=0$ будетъ $y=\pm b$ и $\operatorname{tg}\varphi=0$; слѣдовательно, $\varphi=180^\circ$, т.-е. касательныя въ концахъ малой оси перпендикулярны къ этой оси, или параллельны большой оси.



Фиг. 113

Итакъ, касательная къ эллипсу можетъ имѣть всевозможныя наклоненія къ осямъ, что впрочемъ мы уже увидѣли въ **§ 65**, въ способѣ проводить касательную параллельно данной прямой. Эллипсъ есть сомкнутая кривая, по этому точка прикосновенія всегда находится на конечномъ разстояніи отъ центра.

Для параболы $AOB$,

$$y^2=2px,$$

тангенсъ угла $\varphi$, составляемаго касательною $MT$ съ осью $Ox$, выражается формулою

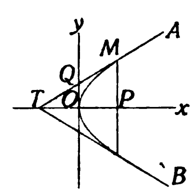
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{p}{y}$$

(см. **§ 60**). Когда точка прикосновенія $(x, y)$ принадлежитъ части $OA$, гдѣ $y$ положительная, тогда $\operatorname{tg}\varphi > 0$, и, слѣдовательно, $\angle\varphi$ острый. Для $y = 0$ будетъ $\operatorname{tg}\varphi = \infty$ и $\varphi = 90^\circ$, т.-е. касательная въ вершинѣ перпендикулярна къ оси параболы. При отрицательномъ $y$, т.-е. для точекъ части $OB$, $\operatorname{tg}\varphi$ отрицательный, а потому $\angle\varphi$ тупой. Съ возрастаніемъ $y$, величины $\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{y}$ и $\angle\varphi$ уменьшаются. Для $y = \infty$ будетъ $\operatorname{tg}\varphi = 0$ и $\varphi = 0$, т.-е. касательная при безконечномъ разстояніи точки прикосновенія отъ вершины становится параллельною оси $Ox$; но легко видѣть, что она тогда всѣми точками находится на безконечномъ удаленіи отъ оси. Въ самомъ дѣлѣ: величина $QO$, ордината точки пересѣченія касательной съ осью $Oy$, должна представлять разстояніе касательной отъ оси $Ox$, когда касательная становится параллельною оси $Ox$; но $QO = {}^1/_2\, MP = \frac{y}{2}$, потому что

$$TO = {}^1/_2\, TP = x$$

(см. **§ 62**); слѣдовательно,

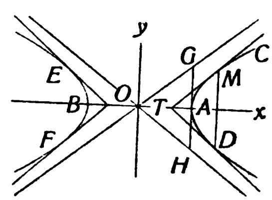
$$QO = \infty \text{ при } y = \infty.$$



Фиг. 114

Для гиперболы, отнесенной къ осямъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$



Фиг. 115

тангенсъ угла, составляемаго касательною съ осью $Ox$, есть

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b^2x}{a^2y}.$$

Онъ положительный для первой четверти $AC$ и третьей $BF$, гдѣ координаты точки прикосновенія имѣютъ одинаковые знаки, а потому здѣсь $\varphi < 90^\circ$. Напротивъ того, для второй четверти $AD$ и четвертой $BE$ найдемъ $\operatorname{tg}\varphi < 0$ и $\varphi > 90^\circ$. При $x = \pm a$ будетъ $y = 0$ и $\operatorname{tg}\varphi = \infty$, т.-е. касательныя въ концахъ главной оси $AB$ перпендикулярны къ этой оси.

Чтобы видѣть, какъ измѣняется уголъ $\varphi$ съ измѣненіемъ абсциссы $x$, выразимъ $\operatorname{tg}\varphi$ функціею одной этой перемѣнной. Уравненіе гиперболы даетъ

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

а потому

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b^2x}{a^2}:\pm\frac{b}{a}(x^2-a^2)=\pm\frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}=\pm\frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}.$$

Взявъ верхній знакъ, соотвѣтствующій четверти $AC$ или $BF$, усматриваемъ, что съ возрастаніемъ $x$, т.-е. съ удаленіемъ точки прикосновенія $M$ отъ центра, $\operatorname{tg}\varphi$ и, слѣдовательно, $\angle\varphi$ уменьшается. Самая меньшая величина, $\operatorname{tg}\varphi$ соотвѣтствуетъ $x=\pm\infty$, т.-е. безконечному удаленію точки прикосновенія отъ центра, а именно:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}.$$

Для четверти $AD$ или $BE$ при $x=\pm\infty$ получимъ $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{b}{a}$. Но касательная, при безконечномъ разстояніи точки прикосновенія отъ центра, не будетъ вся въ безконечности. Легко доказать, что въ разсматриваемомъ случаѣ касательная проходитъ чрезъ центръ. Въ самомъ дѣлѣ: изъ уравненія касательной

$$a^2Yy-b^2Xx=-a^2b^2,$$

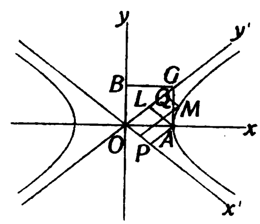
положивъ $Y=0$, выводимъ

$$X=\frac{a^2}{x}$$

для абсциссы точки $T$, гдѣ касательная пересѣкаетъ ось $Ox$; но эта величина равна нулю при $x=\infty$; слѣдовательно, тогда касательная пройдетъ чрезъ начало координатъ, взятое въ центрѣ гиперболы. Итакъ, при безконечномъ удаленіи точки прикосновенія отъ центра, касательная проходитъ чрезъ центръ и составляетъ съ главною осью гиперболы уголъ, опредѣленный тангенсомъ $\operatorname{tg}\varphi=\pm\frac{b}{a}$, а уравненіе касательной въ этомъ случаѣ принимаетъ видъ:

$$Y=\pm\frac{b}{a}X.$$

Знаки $\pm$ соотвѣтствуютъ двумъ прямымъ, составляющимъ равные углы съ осью $Ox$, по ту и другую ея сторону. Для построенія этихъ прямыхъ, найдемъ на нихъ точки, соотвѣтствующія абсциссѣ $X=a$, и соединимъ ихъ съ центромъ. Положивъ въ предыдущемъ уравненіи $X=a$, получимъ $Y=\pm b$; поэтому, если проведемъ чрезъ $A$ перпендикуляръ къ оси $Ox$ и отложимъ на немъ $AG = AH = b$, то найдемъ въ $G$ и $H$ точки искомыхъ прямыхъ, и, слѣдовательно, самыя прямыя будутъ $OG$ и $OH$. Эти прямыя называются *ассимптотами*. Для равносторонней гиперболы $a = b$; поэтому $\operatorname{tg} \varphi = \pm 1$, т.-е. $\angle GOA = 45^\circ$, а $\angle GOH = 90^\circ$; слѣдовательно, ассимптоты въ этомъ случаѣ взаимно-перпендикулярны.



Фиг. 116

**71.** Уравненіе гиперболы получаетъ самый простой видъ, когда ассимптоты ея взяты за координатныя оси.

Пусть будутъ $Ox'$ и $Oy'$ ассимптоты гиперболы, $x'$, $y'$ координаты точки, отнесенной къ этимъ осямъ, и $\varphi$ уголъ $AOx'$ или $AOy'$.

Прежнія координаты $x$, $y$, отнесенныя къ осямъ кривой $Ox$, $Oy$, выразятся въ новыхъ $x'$, $y'$ формулами:

$$x = x' \cos \varphi + y' \cos \varphi = (x' + y') \cos \varphi,$$

$$y = - x' \sin \varphi + y' \sin \varphi = (y' - x') \sin \varphi$$

(см. § 29 форм. 5). Такъ какъ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, то

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

поэтому

$$x = \frac{(x' + y')\, a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{(y' - x')\, b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Подставивъ эти величины $x$ и $y$ въ уравненіе гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

получимъ

$$x'y' = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Здѣсь $a^2 + b^2$ есть квадратъ эксцентрицитета, который мы означали выше чрезъ $c$, а потому

$$x'y' = \frac{c^2}{4} = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Означивъ $\frac{c}{2}$ для сокращенія чрезъ $m$, получимъ

$$x'y' = m^2$$

для уравненія гиперболы, отнесенной къ ассимптотамъ.

Помноживъ обѣ части этого уравненія на $\sin(2\varphi)$, будемъ имѣть

$$x'y' \sin(2\varphi) = m^2 \sin(2\varphi);$$

первая часть равенства выражаетъ площадь параллелограмма $QMPO$, составленнаго ассимптотами съ координатами какой-нибудь точки гиперболы ($M$), вторая часть приводится къ слѣдующему:

$$\frac{a^2+b^2}{4} \cdot 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{a^2+b^2}{4} \cdot \frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{2},$$

что составляетъ половину прямоугольника $OAGB$, построеннаго на полуосяхъ $a$ и $b$; слѣдовательно, площадь параллелограмма $PMQO$ постоянна, т.-е. не зависитъ отъ положенія точки $M$ на гиперболѣ.

Уравненіе $x'y' = m^2$ даетъ

$$x' = \frac{m^2}{y'};$$

эта величина непрерывно уменьшается съ возрастаніемъ $y'$ и становится безконечно-малою при безконечно-большомъ $y'$; слѣдовательно точка $M$, съ удаленіемъ отъ центра, приближается къ ассимптотѣ $Oy'$. Точно также по выраженію $y' = \frac{m^2}{x'}$ видно, что съ возрастаніемъ $x'$ точка $M$ перейдетъ другую сторону оси $OA$ и станетъ приближаться къ ассимптотѣ $Ox'$. Вторая вѣтвь гиперболы на своемъ продолженіи приближается также къ ассимптотамъ, никогда ихъ не достигая.

Вообще, если двѣ линіи при неопредѣленномъ продолженіи сближаются такъ, что разстояніе между ними становится безконечно-малымъ, то одна называется ассимптотою другой.

**72.** Отъ пересѣченія гиперболы и ассимптотъ произвольною прямою $PQ$ получимъ равные отрѣзки $MP$ и $NQ$, а также на прямой $MN'$, пересѣкающей обѣ вѣтви гиперболы, получимъ $MP' = N'Q'$. Это нетрудно доказать слѣдующимъ образомъ.

Пусть будетъ $xy = m^2$ уравненіе гиперболы, отнесенное къ ассимптотамъ, а

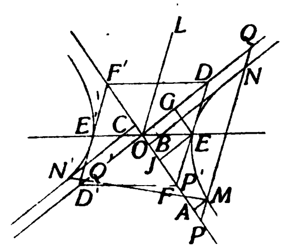
$$y = px + q$$

уравненіе пересѣкающей $PQ$. Координаты $x$ и $y$, удовлетворяющія обоимъ уравненіямъ, принадлежатъ точкамъ пересѣченій, $M$ и $N$, а потому, по исключеніи $y$, получимъ уравненіе

$$px^2 + qx = m^2,$$

котораго корни суть абсциссы этихъ точекъ: $OA$ и $OB$; поэтому

$$OA + OB = -\frac{q}{p};$$



Фиг. 117

съ другой стороны, положивъ $y = 0$ въ уравненіи $y = px + q$, найдемъ

$$x = -\frac{q}{p} = OP;$$

слѣдовательно,

$$OA + OB = OP;$$

и

$$OB = OP - AO = AP.$$

А такъ какъ $OB$ и $AP$ пропорціональны отрѣзкамъ $QN$ и $MP$, по параллельности ординатъ $MA$ и $NB$ съ $Oy$, то $QN = MP$. Если положимъ, что $y = px + q$ есть уравненіе пересѣкающей $MN'$, то корни уравненія

$$px^2 + qx = m^2$$

будутъ абсциссы точекъ $M$ и $N'$, а именно: $OA$ и $-OC$; поэтому

$$OA - OC = -\frac{q}{p}.$$

Но, положивъ $y = 0$ въ уравненіи $y = px + q$, найдемъ

$$x = -\frac{q}{p} = OP';$$

слѣдовательно,

$$OA - OC = OP';$$

откуда выходитъ

$$OC = OA - OP' = AP'.$$

А такъ какъ $OC$ и $AP'$ пропорціональны отрѣзкамъ $N'Q'$ и $MP'$, то

$$NQ' = MP'.$$

Итакъ, во всякомъ случаѣ *отрѣзки пересѣкающей, заключающіеся между гиперболою и ассимптотами, равны между собою.*

Когда пересѣкающая $PQ$ обратится въ касательную $DE$, тогда точки $M$ и $N$ совпадутъ съ точкою прикосновенія $E$, *которая будетъ срединою части касательной, заключающейся между ассимптотами.*

Основываясь на этомъ свойствѣ, легко провести касательную къ гиперболѣ, когда даны ассимтоты и точка прикосновенія $E$. Для этого проведемъ $EG$ параллельную одной изъ ассимтотъ, отложимъ $DG = GO$ и соединимъ прямою точки $D$ и $E$; эта прямая будетъ касательная.

Свойство отрѣзковъ пересѣкающей можетъ послужить для черченія кривой по точкамъ, когда даны ассимптоты и одна точка гиперболы.

Пусть $Ox$ и $Oy$ будутъ ассимптоты и $M$ точка гиперболы. Проведемъ произвольную прямую чрезъ $M$ и замѣтимъ точки $P$ и $Q$, въ которыхъ она пересѣкаетъ ассимптоты; потомъ отложимъ $QN = MP$; отъ этого получимъ точку $N$, принадлежащую гиперболѣ. Также найдемъ другія точки и составимъ по нимъ очертаніе гиперболы.

**73.** Касательныя $DF$ и $D'F'$, проведенныя въ концахъ діаметра $EE'$, параллельны діаметру $OL$, сопряженному съ $EE'$, какъ это было доказано въ **§ 66**. А части этихъ касательныхъ, заключающіяся между ассимптотами $Ox$ и $Oy$, равны длинѣ діаметра, сопряженнаго съ $EE'$, что можно доказать слѣдующимъ образомъ. Пусть $OE = a'$, $\angle LOE = \theta$, и означимъ чрезъ $b'$ половину діаметра, сопряженнаго съ $EE'$; по доказанному въ **§ 56** имѣемъ

$$a'b' \sin \theta = ab;$$

но площадь $ab$, построенная на полуосяхъ, вдвое больше параллелограмма $OGEJ$, составленнаго ассимптотами и координатами точки $E$ (**§ 71**); слѣдовательно,

$$a'b' \sin \theta = 2OGEJ.$$

Такъ какъ $E$ есть средина $DF$, то $G$ есть средина $OD$, а потому площадь $GDE =$ площади $OGE =$ площади $OJE$, отъ этого

$$OGEJ = ODE = {}^1/_2\, OE.DE.\sin OED = {}^1/_2\, a'.DE.\sin \theta;$$

слѣдовательно,

$$a'b' \sin \theta = a'\, DE.\sin \theta;$$

изъ чего выходитъ $DE = b'$ и $DF = 2b'$.

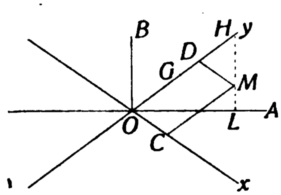
Здѣсь $DFD'F'$ есть параллелограммъ, построенный на сопряженныхъ діаметрахъ. Діагонали его имѣютъ постоянныя направленія ассимптотъ.

Задачи:

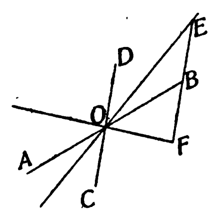
1) *По даннымъ ассимптотамъ $Ox$, $Oy$ и точкѣ $M$ на гиперболѣ опредѣлить направленіе и величины осей.*

Прямая $OA$, раздѣляющая пополамъ уголъ $yOx$, въ которомъ находится точка $M$, есть направленіе главной оси, а $BO$, перпендикулярная къ ней, направленіе второй оси.

Проведя координаты $MC$ и $MD$ данной точки, будемъ имѣть по уравненію гиперболы: $OD\,.\,OC = m^2$, а потому найдемъ $m$, построивъ среднюю пропорціональную между $OC$ и $OD$, которая пусть будетъ $OG$. Эта длина равна половинѣ эксцентрицитета; слѣдовательно, длина $OH = 2OG$ равна цѣлому эксцентрицитету.



Фиг. 118



Фиг. 119

Проведя $HL$, перпендикулярную къ $OA$, получимъ полуоси: $OL = a$ и $HL = b$.

2) *По даннымъ сопряженнымъ діаметрамъ гиперболы $AB$ и $DC$ найти ассимптоты и оси.*

Проведемъ чрезъ $B$ прямую, параллельную діаметру $CD$ и отложимъ $BF$ и $BE$ равныя полудіаметру $OC$; потомъ проведемъ прямыя $OF$ и $OE$, которыя и будутъ ассимптоты гиперболы. Зная ассимптоты и точку $B$ на гиперболѣ, найдемъ оси по способу, изложенному въ рѣшеніи предыдущей задачи.

## — * F. Уравненія линій 2-го порядка въ кратчайшихъ и трилинейныхъ координатахъ.

**74.** Пусть

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

представляетъ уравненіе линіи 2-го порядка въ обыкновенныхъ или декартовыхъ координатахъ $x$ и $y$, а

$$\delta = ax + by + c, \quad \delta' = a'x + b'y + c' \qquad (2)$$

кратчайшія координаты точки $(x, y)$ относительно двухъ пересѣкающихся осей $\delta = 0$ и $\delta' = 0$ (см. § 27). Чтобы ввести въ уравненіе (1) вмѣсто $x$ и $y$ координаты $\delta$ и $\delta'$, рѣшимъ уравненіе (2) относительно $x$ и $y$ и подставимъ полученныя выраженія въ уравненіе (1). Изъ уравненія (2) выводимъ

$$x = \frac{b'(\delta - c) - b(\delta' - c')}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{a(\delta' - c') - a'(\delta - c)}{ab' - ba'}.$$

Подставивъ эти выраженія вмѣсто $x$ и $y$ въ уравненіе (1), получимъ уравненіе вида

$$A'(\delta - c)^2 + B'(\delta - c)(\delta' - c') + C'(\delta' - c')^2 + \\ + D'(\delta - c) + E'(\delta' - c') + F = 0, \tag{3}$$

гдѣ

$$A' = \frac{Ab'^2 - Ba'b' + Ca'^2}{(ab' - ba')^2}, \quad B' = \frac{-2Abb' + B(ab' + ba') - 2Caa'}{(ab' - ba')^2}$$

$$C' = \frac{Ab^2 - Bab + Ca^2}{(ab' - ba')^2}, \quad D' = \frac{Db' - Ea'}{ab' - ba'}, \quad E' = \frac{Ea - Db}{ab' - ba'}.$$

Такъ какъ, по предположенію, прямыя $\delta = 0$ и $\delta' = 0$ пересѣкаются, то $ab' - ba'$ не равно нулю, а потому коэффиціенты уравненія (3) не могутъ быть безконечными или неопредѣленными. Изъ найденныхъ выраженій для этихъ коэффиціентовъ выводимъ уравненіе

$$(B'^2 - 4A'C')(ab' - ba')^2 = B^2 - 4AC,$$

показывающее, что выраженія $B^2 - 4AC$ и $B'^2 - 4A'C'$ могутъ только вмѣстѣ обратиться въ нуль, а если не равны нулю, то представляютъ величины, имѣющія одинаковые знаки; слѣдовательно, если уравненіе (3) принадлежитъ эллипсу, то $B'^2 - 4A'C' < 0$; въ случаѣ гиперболы $B'^2 - 4A'C' > 0$, а въ случаѣ параболы $B'^2 - 4A'C' = 0$.

Въ формулахъ (2) величины $c$ и $c'$ суть кратчайшія координаты точки ($x = 0$, $y = 0$) т. е. начала координатъ; слѣдовательно, $\delta - c = \xi$ и $\delta' - c' = \eta$ суть кратчайшія координаты точки $(x, y)$ относительно двухъ осей $\xi = 0$, $\eta = 0$, параллельныхъ осямъ $\delta = 0$ и $\delta' = 0$ и проходящихъ чрезъ начало координатъ: $x, y$. Уравненіе (3) въ новыхъ кратчайшихъ координатахъ приметъ видъ

$$A'\xi^2 + B'\xi\eta + C'\eta^2 + D'\xi + E'\eta + F = 0.$$

Если въ уравненіи (1) мы замѣнимъ координаты $x$ и $y$ отношеніями $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$, то получимъ однородное уравненіе

$$Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1x_3 + Ex_2x_3 + Fx_3^2 = 0. \qquad (4)$$

Три величины $x_1$, $x_2$, $x_3$ суть однородныя координаты (см. **§ 27**) точекъ линіи 2-го порядка, а однородное уравненіе (4) есть уравненіе этой линіи.

Уравненіе линіи 2-го порядка въ трилинейныхъ координатахъ также будетъ однородное 2-й степени. Пусть

$$\delta = ax + by + c, \quad \delta' = a'x + b'y + c', \quad \delta'' = a''x + b''y + c'' \quad (5)$$

представляютъ трилинейныя координаты точки $(x, y)$ (см. **§ 27**), т. е. разстоянія этой точки отъ трехъ прямыхъ: $\delta = 0$, $\delta' = 0$, $\delta'' = 0$. Изъ уравненія (5) выводимъ:

$$x : y : 1 = \begin{vmatrix} \delta & b & c \\ \delta' & b' & c' \\ \delta'' & b'' & c'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & \delta & c \\ a' & \delta' & c' \\ a'' & \delta'' & c'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b & \delta \\ a' & b' & \delta' \\ a'' & b'' & \delta'' \end{vmatrix} \text{ (см. приб. 1)}$$

или

$$x_1 : x_2 : x_3 = (\alpha\delta + \alpha'\delta' + \alpha''\delta'') : (\beta\delta + \beta'\delta' + \beta''\delta'') : (\gamma\delta + \gamma'\delta' + \gamma''\delta'')$$

гдѣ $\alpha, \alpha', \alpha''$ суть коэффиціенты при $a, a', a''$ въ опредѣлителѣ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix};$$

$\beta, \beta', \beta''$ коэффиціенты при $b, b', b''$, а $\gamma, \gamma', \gamma''$ коэффиціенты при $c, c', c''$. Помощью этихъ пропорцій уравненіе (4) преобразуется въ уравненіе вида

$$A_1\delta^2 + A_2\delta'^2 + A_3\delta''^2 + B_1\delta'\delta'' + B_2\delta\delta'' + B_3\delta\delta' = 0.$$

Вообще, какъ мы замѣтили уже на стр. 81, всякое уравненіе между координатами Декарта $x$ и $y$ преобразовывается въ однородное относительно координатъ $x_1$, $x_2$, $x_3$ и также въ однородное относительно трилинейныхъ координатъ $\delta$, $\delta'$, $\delta''$.

Если уравненія трехъ прямыхъ $\delta = 0$, $\delta' = 0$, $\delta'' = 0$ даны подъ видомъ:

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0, \quad A'x_1 + B'x_2 + C'x_3 = 0,$$
$$A''x_1 + B''x_2 + C''x_3 = 0,$$

то, означая чрезъ $\alpha, \alpha', \alpha''$ первыя части этихъ трехъ уравненій, можно, вмѣсто $\delta, \delta', \delta''$, разсматривать $\alpha, \alpha', \alpha''$ какъ трилинейныя координаты точки $(x_1, x_2, x_3)$. Опредѣливъ, какъ показано въ **§ 26**, параметры $P, P', P''$ трехъ функцій $\alpha, \alpha', \alpha''$, будемъ имѣть

$$\delta = \frac{\alpha}{Px_3}, \quad \delta' = \frac{\alpha'}{P'x_3}, \quad \delta'' = \frac{\alpha''}{P''x_3}$$

и уравненіе $f(\delta, \delta', \delta'') = 0$ преобразуется въ уравненіе вида

$$\varphi(\alpha, \alpha', \alpha'') = 0,$$

которое будетъ однородно относительно $\alpha, \alpha', \alpha''$.

**75.** Уравненіе касательной къ кривой $F(x, y) = 0$, какъ мы видѣли **§ 61**, имѣетъ общій видъ

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) = 0. \tag{1}$$

Введемъ въ него однородныя координаты $x_1, x_2, x_3$. Положимъ, что уравненіе $F(x, y) = 0$ преобразовывается въ

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

гдѣ

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3{}^n F\left(\frac{x_1}{x_3}, \quad \frac{x_2}{x_3}\right);$$

причемъ $n$ есть степень уравненія $F(x, y) = 0$. Отсюда выводимъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_3{}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_3{}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial y};$$

поэтому уравненіе касательной (1) можетъ быть приведено къ виду

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} Xx_3 + \frac{\partial f}{\partial x_2} Yx_3 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2\right) = 0; \tag{2}$$

по свойству же однородныхъ функцій имѣемъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} x_3 = nf(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

слѣдовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 = -\frac{\partial f}{\partial x_3} x_3;$$

отчего уравненіе (2) беретъ видъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} Xx_3 + \frac{\partial f}{\partial x_2} Yx_3 + \frac{\partial f}{\partial x_3} x_3 = 0$$

или окончательно

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \xi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \xi_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \xi_3 = 0, \tag{3}$$

гдѣ $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ суть величины, пропорціональныя $X$, $Y$, 1, которыя можно разсматривать какъ однородныя координаты какой-нибудь точки на касательной.

Положимъ еще, что $\varphi(\alpha, \alpha', \alpha'') = 0$ есть уравненіе кривой въ трилинейныхъ координатахъ $\alpha$, $\alpha'$ $\alpha''$. Разсматривая $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ какъ функціи отъ $x_1$, $x_2$, $x_3$, можно написать уравненіе касательной подъ видомъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \xi_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \xi_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \xi_3 = 0, \tag{4}$$

гдѣ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha'}\frac{\partial \alpha'}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha''}\frac{\partial \alpha''}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} A + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha'} A' + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha''} A''$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} B + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha'} B' + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha''} B''$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} C + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha'} C' + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha''} C''.$$

Положивъ

$$A\xi_1 + B\xi_2 + C\xi_3 = \beta$$

$$A'\xi_1 + B'\xi_2 + C'\xi_3 = \beta'$$

$$A''\xi_1 + B''\xi_2 + C''\xi_3 = \beta'',$$

вмѣсто уравненія (4) получимъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha'} \beta' + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha''} \beta'' = 0. \tag{5}$$

Здѣсь можно разсматривать $\beta$, $\beta'$, $\beta''$ какъ трилинейныя координаты какой-нибудь точки на касательной относительно системы осей: $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$, $\alpha'' = 0$. Изъ уравненій (4) и (5) видно, что для полученія уравненія касательной надобно взять дифференціалъ уравненія кривой и дифференціалы координатъ замѣнить координатами какой-нибудь точки на касательной. Для линіи 2-го порядка

$$a_1\alpha^2 + a_2\alpha'^2 + a_3\alpha''^2 + b_1\alpha'\alpha'' + b_2\alpha\alpha'' + b_3\alpha\alpha' = 0$$

уравненіе (5) приведется къ слѣдующему:

$$(2a_1\alpha + b_2\alpha'' + b_3\alpha')\beta + (2a_2\alpha' + b_1\alpha'' + b_3\alpha)\beta' +$$
$$+ (2a_3\alpha'' + b_1\alpha' + b_2\alpha)\beta'' = 0$$

или

$$(2a_1\beta + b_2\beta'' + b_3\beta')\alpha + (2a_2\beta' + b_1\beta'' + b_3\beta)\alpha' +$$
$$+ (2a_3\beta'' + b_1\beta' + b_2\beta)\alpha'' = 0,$$

что можно написать такъ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta'}\alpha' + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta''}\alpha'' = 0. \tag{6}$$

Если положимъ, что $\beta$, $\beta'$, $\beta''$ суть постоянныя количества, а $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ перемѣнныя, то это уравненіе будетъ принадлежать полярѣ, у которой полюсъ есть точка $(\beta, \beta', \beta'')$.

**76.** Мы разсмотримъ нѣкоторые частные виды уравненія линіи 2-го порядка, представляющіе замѣчательныя свойства этихъ линій.

Пусть

$$\delta = ax + by + c, \quad \delta' = a'x + b'y + c'$$

$$\delta'' = a''x + b''y + c'', \quad \delta''' = a'''x + b'''y + c'''$$

представляютъ разстоянія точки $(x, y)$ отъ четырехъ прямыхъ

$$\delta = 0, \quad \delta' = 0, \quad \delta'' = 0, \quad \delta''' = 0$$

и

$$\delta\delta' = k\delta''\delta''' \tag{1}$$

уравненіе, связывающее эти разстоянія, гдѣ $k$ постоянное количество. Это уравненіе относительно $x$ и $y$ будетъ 2-й степени. а потому принадлежитъ нѣкоторой линіи 2-го порядка, которая проходитъ чрезъ точки пересѣченія прямыхъ $\delta = 0$ и $\delta' = 0$ съ прямыми $\delta'' = 0$ и $\delta''' = 0$, такъ какъ уравненіе (1) удовлетворено величинами $x$ и $y$, обращающими въ нуль $\delta$ и $\delta''$, или $\delta$ и $\delta'''$, или $\delta'$ и $\delta''$, или $\delta'$ и $\delta'''$. Слѣдовательно, прямыя

$$\delta = 0, \quad \delta' = 0, \quad \delta'' = 0, \quad \delta''' = 0$$

образуютъ четыреугольникъ, вписанный въ линію второго порядка (1).

Легко удостовѣриться, что уравненіе всякой линіи второго порядка можетъ быть представлено подъ видомъ (1). Возьмемъ на данной линіи второго порядка пять точекъ: $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ и означимъ чрезъ $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ и $\delta'''$ разстоянія какой-нибудь шестой точки $M$ отъ прямыхъ:

$$AB,\ CD,\ AD \text{ и } BC,$$

а чрезъ $\delta_1$, $\delta'_1$, $\delta''_1$, $\delta'''_1$ величины этихъ разстояній для точки $E$. Если положимъ въ уравненіи (1), что

$$k = \frac{\delta_1\delta'_1}{\delta''_1\delta'''_1},$$

то получимъ уравненіе

$$\delta\delta' = \frac{\delta'\delta'_1}{\delta''_1\delta'''_1}\ \delta''\delta''', \tag{2}$$

которому удовлетворяютъ координаты пяти точекъ: $A$, $B$, $C$, $D$, $E$. А такъ какъ чрезъ эти пять точекъ, кромѣ данной, нельзя провести никакой другой линіи второго порядка (**§ 31**), то всякая точка $M$, координаты которой удовлетворяютъ уравненію (2), принадлежитъ данной линіи 2-го порядка; слѣдовательно, (2) есть уравненіе этой линіи. Такимъ образомъ мы имѣемъ легкій способъ составить уравненіе линіи 2-го порядка, проходящей чрезъ пять данныхъ точекъ.

Уравненіе (1), которое можетъ быть написано такъ:

$$\frac{\delta\delta'}{\delta''\delta'''} = k,$$

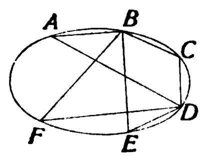
выражаетъ слѣдующее замѣчательное свойство точекъ линіи 2-го порядка: *если въ линію 2-го порядка вписанъ четыреугольникъ, то произведеніе изъ разстояній какой-нибудь точки, взятой на кривой отъ двухъ противоположныхъ сторонъ четыреугольника, и произведеніе ея разстояній отъ двухъ прочихъ сторонъ четыреугольника имѣютъ постоянное отношеніе.* Это предложеніе принадлежитъ одному изъ древнихъ геометровъ Папу.

Ели положимъ, что прямыя $\delta'' = 0$ и $\delta''' = 0$ совпадаютъ, то прямыя $\delta = 0$ и $\delta' = 0$ сдѣлаются касательными къ линіи 2-го порядка, а $\delta'' = 0$ пройдетъ чрезъ точки касанія; въ такомъ случаѣ уравненіе (6) обратится въ слѣдующее:

$$\delta\delta' = k\,\delta'^2. \tag{3}$$

Это есть уравненіе линіи 2-го порядка въ трилинейныхъ координатахъ, въ самомъ простомъ видѣ; оно выражаетъ слѣдующее свойство: *если къ линіи 2-го порядка проведены двѣ касательныя и точки касанія соединены хордою, то произведеніе разстояній какой-нибудь точки кривой отъ касательныхъ и квадратъ ея разстоянія отъ хорды имѣютъ постоянное отношеніе.*

**77.** Положимъ, что въ уравненіи (2), принадлежащемъ линіи второго порядка, проходящей чрезъ пять точекъ $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, разстоянія $\delta$, $\delta'$, $\delta''$, $\delta'''$, принадлежатъ 6-й точкѣ $F$. Уравненіе (2) можно написать подъ видомъ пропорціи




Фиг. 120

$$\frac{\delta}{\delta''} : \frac{\delta_1}{\delta''_1} = \frac{\delta'''}{\delta'} : \frac{\delta'''_1}{\delta'_1},$$

показывающей, что ангармоническое отношеніе пучка прямыхъ $BA$, $BF$, $BE$, $BC$ равно ангармоническому отношенію пучка прямыхъ $DA$, $DF$, $DE$, $DC$ (см. стр. 86, III); слѣдовательно, *два пучка, у которыхъ полюсы находятся на линіи 2-го порядка, а лучи пересѣкаются въ четырехъ другихъ точкахъ этой линіи, имѣютъ равныя ангармоническія отношенія.*

Пучки, имѣющіе равныя ангармоническія отношенія, называются *гомографическими*. Легко доказать, что *полюсы двухъ какихъ-нибудь гомографическихъ пучковъ и точки пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей лежатъ на одной линіи 2-го порядка.*

Если ($BA$, $BF$, $BE$, $BC$) и ($DA$, $DF$, $DE$, $DC$) представляютъ два какихъ-нибудь гомографическихъ пучка, то, означивъ чрезъ $\delta$ и $\delta''$ разстоянія точки $F$ отъ лучей $BA$ и $BC$, а чрезъ $\delta_1$ и $\delta''_1$ разстоянія точки $E$ отъ тѣхъ же прямыхъ, будемъ имѣть $\frac{\delta}{\delta''} : \frac{\delta_1}{\delta''_1}$ для ангармоническаго отношенія перваго пучка; также, означивъ чрезъ $\delta'''$ и $\delta'$ разстоянія точки $F$ отъ прямыхъ $DA$ и $DC$, а чрезъ $\delta'''_1$ и $\delta'_1$ разстоянія точки $E$ отъ этихъ же прямыхъ, будемъ имѣть $\frac{\delta'''}{\delta'} : \frac{\delta'''_1}{\delta'_1}$ для ангармоническаго отношенія 2-го пучка. По условію же, что пучки суть гомографическіе, имѣемъ

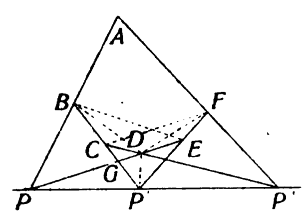
$$\frac{\delta}{\delta''} : \frac{\delta_1}{\delta''_1} = \frac{\delta'''}{\delta'} : \frac{\delta'''_1}{\delta'_1},$$

что приводится къ уравненію (2)

$$\delta\delta' = \frac{\delta_1\delta'_1}{\delta''_1\delta'''_1}\,\delta''\delta''',$$

показывающему, что точка $F$ находится на линіи 2-го порядка, проведенной чрезъ пять точекъ $A$, $B$, $C$, $D$, $E$.

Отсюда вытекаетъ теорема, называемая *гексаграммомъ Паскаля*, которая была уже доказана въ **§ 35.** Положимъ, что въ шестиугольникѣ $ABCDEF$ противоположныя стороны пересѣкаются на одной прямой $L$, т.-е. что на этой прямой находится точка $P$, пересѣченіе $AB$ съ $ED$, точка $P'$, пересѣченіе $BC$ съ $FE$, и точка $P''$, пересѣченіе $DC$ съ $AF$. Проведя прямыя $BE$, $BD$, $FD$, $FC$ и замѣтивъ $G$, пересѣченіе $BC$ съ $ED$, и $K$, пересѣченіе $DC$ съ $FE$, находимъ, что ангармоническое отношеніе пучка $B(ACDE)$ *) равно ангармоническому отношенію $(PGDE)$ отрѣзковъ пересѣкающей $PE$ (см. стр. 00, III), которое, очевидно, равно ангармоническому отношенію пучка $P'(PGDE)$; но послѣдній даетъ на пересѣкающей $P''C$ ангармоническое отношеніе $(P''CDK)$, которое равно ангармоническому отношенію пучка $F(ACDE)$; слѣдовательно, пучки $B(ACDE)$ и $F(ACDE)$ суть гомографическіе, а поэтому точки пересѣченія ихъ соотвѣтственныхъ лучей $A$, $C$, $D$, $E$ съ полюсами $B$ и $F$ находятся на одной линіи 2-го порядка. Итакъ, около всякаго шестиугольника, у котораго противоположныя стороны пересѣкаются на одной прямой, можно описать линію 2-го порядка. Легко доказать и обратное предложеніе: *противоположныя стороны всякаго шестиугольника, вписаннаго въ линію 2-го порядка, пересѣкаются на одной прямой линіи.* Положимъ, что $ABCDEF$ есть шестиугольникъ, вписанный въ линію 2-го порядка, а $P$, $P'$, $P''$ суть пересѣченія противоположныхъ сторонъ; тогда прямая, проведенная чрезъ $P$ и $P'$, должна пройти чрезъ $P''$. Допустивъ противное, положимъ, что прямая $PP'$ пересѣкаетъ $DC$ въ точкѣ $P'''$, а прямая $P'''F$ встрѣчаетъ прямую $AB$ въ точкѣ $A'$. По доказанному сейчасъ предложенію, точка $A'$ должна находиться на линіи



Фиг. 121

*) Здѣсь для удобства мы употребляемъ обозначеніе пучка, принятое *Сальмономъ:* $P(abcd)$, гдѣ $P$ полюсъ, $a$, $b$, $c$, $d$ точки на лучахъ.

2-го порядка, проходящей чрезъ точки $B$, $C$, $D$, $E$, $F$: но это невозможно, потому что тогда прямая $AB$ имѣла бы съ этою линіею три общія точки $A$, $A'$ и $B$.

Мы показали въ **§ 35** способъ черченія линіи 2-го порядка помощью 5-ти данныхъ точекъ, который основанъ на слѣдующей теоремѣ, найденной Маклореномъ: *если стороны перемѣннаго треугольника вращаются въ трехъ неподвижныхъ точкахъ и двѣ вершины двигаются по двумъ неподвижнымъ прямымъ, то третья вершина описываетъ линію 2-го порядка.* Эта теорема вытекаетъ непосредственно изъ доказаннаго выше свойства гомографическихъ пучковъ. Пусть $ABC$ треугольникъ, стороны котораго $AC$, $BC$, $AB$ вращаются въ неподвижныхъ точкахъ $P$, $P'$, $P''$, а двѣ вершины $A$ и $B$ двигаются по неподвижнымъ прямымъ $DE$ и $FG$. Разсмотримъ треугольникъ въ четырехъ положеніяхъ: $ABC$, $A'B'C'$, $A''B''C''$ и $A'''B'''C'''$. Неподвижная точка $P''$ есть полюсъ пучка, пересѣченнаго прямою $DE$ въ точкахъ $A$, $A'$, $A''$, $A'''$, а прямую $FG$ въ точкахъ $B$, $B'$, $B''$, $B'''$; слѣдовательно, ангармоническія отношенія $(AA'A''B''')$ и $(BB'B''B''')$ равны между собою (см. стр. 86); но первое отношеніе принадлежитъ пучку $P(AA'A''A''')$ или $P(CC'C''C''')$, а второе пучку $P'(BB'B''B''')$ или $P'(CC'C''C''')$; слѣдовательно, пучки: $P(CC'C''C''')$ и $P'(CC'C''C''')$ суть гомографическіе, а поэтому точки: $C$, $C'$, $C''$, $C'''$, $P$ и $P'$ находятся на одной линіи 2-го порядка; слѣдовательно, точка $C$ чертитъ линію 2-го порядка, проходящую чрезъ пять точекъ: $C'C''C'''$, $P$ и $P'$.

**78.** Всякій шестиугольникъ, описанный около линіи 2-го порядка, имѣетъ слѣдующее замѣчательное свойство, открытое Бріаншономъ: *діагонали, соединяющія противоположныя вершины, пересѣкаются въ одной точкѣ.* Пусть $ABCDEF$ будетъ шестиугольникъ, описанный около линіи 2-го порядка и $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, $F'$ точки касанія его сторонъ въ этой линіи. Соединивъ эти точки хордами, получимъ шестиугольникъ, вписанный въ данную линію 2-го порядка, у котораго противоположныя стороны встрѣчаются въ точкахъ $P$, $P'$, $P''$, лежащихъ на одной прямой. Точка $A$ есть полюсъ прямой $A'F'$, а $D$ полюсъ прямой $C'D'$; слѣдовательно, $P$, пересѣченіе $A'F'$ съ $C'D'$, есть полюсъ прямой $AD$; также найдемъ, что $P'$ есть полюсъ прямой $CF$ и $P''$ полюсъ прямой $BE$. Такъ какъ полюсы трехъ прямыхъ $AD$, $CF$ и $BE$ находятся на одной прямой, то эти прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ, что требовалось доказать.

**79.** Если уравненія прямыхъ $\delta = 0$, $\delta' = 0$, $\delta'' = 0$, $\delta''' = 0$ даны въ декартовыхъ координатахъ подъ видомъ:

$$Ax + By + C = 0,\ Ax' + B'y + C' = 0,\ A''x + B''y + C'' = 0,$$
$$Ax''' + B'''y + C''' = 0,$$

то, означивъ чрезъ $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, $\alpha'''$ первыя части этихъ уравненій, а чрезъ $P$, $P'$, $P''$, $P'''$ ихъ параметры, будемъ имѣть:

$$\delta = \frac{\alpha}{P},\ \delta' = \frac{\alpha'}{P'},\ \delta'' = \frac{\alpha''}{P''},\ \delta''' = \frac{\alpha'''}{P'''};$$

поэтому уравненіе (1) можетъ быть преобразовано въ слѣдующее:

$$\alpha\alpha' = m\alpha''\alpha''', \text{ гдѣ } m = k\frac{PP'}{P''P'''},$$

а уравненіе (3) приметъ видъ

$$\alpha\alpha' = m\alpha''^2, \text{ гдѣ } m = k\frac{PP'}{P''^2}.$$

Въ послѣднемъ уравненіи можно разсматривать величины $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ какъ новыя трилинейныя координаты. Ничто не мѣшаетъ въ каждую изъ величинъ $\alpha$, $\alpha'$ $\alpha''$, $\alpha'''$ ввести произвольный постоянный множитель и выбрать его такъ, чтобы въ уравненіяхъ

$$\alpha\alpha' = m\alpha''\alpha''' \quad \text{и} \quad \alpha' = m\alpha''^2$$

постоянное $m$ равнялось единицѣ.

Напримѣръ, положивъ, что $\delta_1$, $\delta_1'$, $\delta_1''$, $\delta_1'''$ суть разстоянія какой-нибудь опредѣленной точки линіи 2-го порядка отъ прямыхъ $\delta = 0$, $\delta' = 0$, $\delta'' = 0$, $\delta''' = 0$, мы можемъ для всякой другой точки взять

$$\alpha = \frac{\delta}{\delta_1},\ \alpha' = \frac{\delta'}{\delta_1'},\ \alpha'' = \frac{\delta''}{\delta_1''},\ \alpha''' = \frac{\delta'''}{\delta_1'''};$$

тогда уравненія (2) и (3) примутъ видъ

$$\alpha\alpha' = \alpha''\alpha''' \quad \text{и} \quad \alpha\alpha' = \alpha''^2.$$

Эти уравненія весьма удобны для рѣшенія многихъ вопросовъ, относящихся къ линіямъ 2-го порядка.

**80.** Разсмотримъ нѣкоторыя приложенія уравненія

$$\alpha\alpha' = \alpha''^2, \tag{1}$$

принадлежащаго линіи 2-го порядка, касательной къ прямымъ $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$ въ точкахъ пересѣченія этихъ прямыхъ съ прямою $\alpha'' = 0$. Всякую точку на кривой (1) можно опредѣлить пересѣченіемъ этой кривой съ прямою, проведенною чрезъ постоянную точку ($\alpha = 0$, $\alpha'' = 0$). Уравненіе такой прямой имѣетъ видъ

$$\alpha = \mu\alpha'', \tag{2}$$

гдѣ $\mu$ постоянное для всѣхъ точекъ прямой. Если дано $\mu$, то пересѣченіе этой прямой съ кривою (1) будетъ извѣстно; поэтому можно разсматривать $\mu$ какъ особеннаго рода координату точки на кривой. Точку кривой (1), которой принадлежитъ данная величина $\mu$, согласимся называть точкою ($\mu$). Исключивъ $\alpha$ изъ уравненія (1) и (2), получимъ уравненіе

$$\mu\alpha' = \alpha'',$$

принадлежащее прямой, соединяющей точку ($\mu$) съ точкою пересѣченія прямыхъ: $\alpha' = 0$ и $\alpha'' = 0$. А исключивъ $\alpha''$ изъ уравненія (1) и (2), получимъ уравненіе

$$\mu^2\alpha' = \alpha,$$

принадлежащее прямой, соединяющей точку ($\mu$) съ точкою пересѣченія прямыхъ: $\alpha = 0$ и $\alpha' = 0$. Слѣдовательно, точка ($\mu$) можетъ быть опредѣлена пересѣченіемъ кривой (1) съ одною изъ прямыхъ:

$$\alpha = \mu\alpha'', \quad \mu\alpha' = \alpha'', \quad \mu^2\alpha' = \alpha. \tag{3}$$

Послѣднее уравненіе не измѣняется отъ перемѣны $\mu$ на $-\mu$; поэтому прямая $\mu^2\alpha' = \alpha$ пересѣкаетъ кривую (1) въ двухъ точкахъ: ($\mu$) и ($-\mu$).

Два изъ уравненій (3) могутъ замѣнить уравненіе (1), которое выводится изъ нихъ чрезъ исключеніе $\mu$. Для памяти удобнѣе замѣнить уравненія (3) пропорціями:

$$\alpha : \alpha'' : \alpha' = \mu^2 : \mu : 1. \tag{4}$$

Уравненіе какой-нибудь прямой можетъ быть представлено подъ видомъ

$$a\alpha + b\alpha' + c\alpha'' = 0. \tag{5}$$

Если ($\mu$) есть точка пересѣченія этой прямой съ кривою (1), то вслѣдствіе пропорцій (4), мы должны имѣть

$$a\mu^2 + b + c\mu = 0.$$

Рѣшивъ это уравненіе относительно $\mu$, получимъ два корня: $\mu$ и $\mu'$. Когда эти корни вещественные и неравные, тогда прямая (5) пересѣкаетъ кривую (1) въ двухъ точкахъ: $(\mu)$ и $(\mu')$; въ случаѣ равныхъ корней прямая (5) касается кривой (1), въ случаѣ мнимыхъ корней прямая (5) не имѣетъ общихъ точекъ съ кривою (1); но тогда обыкновенно говорятъ, что прямая (5) пересѣкаетъ кривую (1) въ двухъ мнимыхъ точкахъ $(\mu)$ и $(\mu')$. По свойству корней уравненія 2-й степени имѣемъ:

$$\mu + \mu' = -\frac{c}{a} \text{ и } \mu\mu' = \frac{b}{a}.$$

Исключивъ помощью этихъ условій коэффиціенты $a$, $b$, $c$ изъ уравненія (5), получимъ уравненіе

$$\alpha + \mu\mu'\alpha' - (\mu + \mu')\,\alpha'' = 0, \tag{6}$$

принадлежащее прямой, проходящей чрезъ двѣ точки: $(\mu)$ и $(\mu')$, взятыя на кривой $\alpha\alpha' = \alpha''^2$.

Въ случаѣ $\mu = \mu'$ уравненіе (6) приведется къ слѣдующему:

$$\alpha + \mu^2\alpha' - 2\mu\alpha'' = 0.$$

Это есть уравненіе касательной къ линіи $\alpha\alpha' = \alpha''$ въ данной точкѣ $(\mu)$.

Пусть $\beta$, $\beta'$, $\beta''$ будутъ значенія координатъ $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ для какой-нибудь опредѣленной точки $P$. Подставивъ ихъ въ предыдущее уравненіе, получимъ уравненіе

$$\beta + \mu^2\beta' - 2\mu\beta'' = 0 \tag{7}$$

для опредѣленія точекъ касанія кривой $\alpha\alpha' = \alpha''^2$ съ прямою, проведенною чрезъ точку $P$. Два корня этого уравненія опредѣляютъ двѣ точки касанія $(\mu)$ и $(\mu')$. Прямая, ихъ соединяющая,

$$\alpha + \mu\mu'\alpha' - (\mu + \mu')\,\alpha'' = 0,$$

будетъ поляра точки $P$. Такъ какъ по уравненію (7) $\mu\mu' = \dfrac{\beta}{\beta'}$, $\mu + \mu' = \dfrac{2\beta''}{\beta'}$, то уравненіе поляры можетъ быть приведено къ виду

$$\beta'\alpha + \beta\alpha' - 2\beta''\alpha'' = 0. \tag{8}$$

Если $\beta = 0$, $\beta' = 0$, то полюсъ находится въ точкѣ ($\alpha = 0$, $\alpha' = 0$) и уравненіе поляры приводится къ $\alpha'' = 0$.

Уравненіе (8) можетъ быть получено по общему правилу, показанному въ **§ 75**. Оно представляетъ также касательную въ точкѣ ($\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$), если въ немъ разсматривать $\beta$, $\beta'$, $\beta''$ какъ перемѣнныя.

Мы видѣли выше, что можно положить

$$\alpha = \frac{\delta}{\delta_1}, \quad \alpha' = \frac{\delta'}{\delta'_1}, \quad \alpha'' = \frac{\delta''}{\delta''_1},$$

гдѣ $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ суть разстоянія какой-нибудь точки отъ трехъ прямыхъ $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$, $\alpha'' = 0$, а $\delta_1$, $\delta'_1$, $\delta''_1$ эти разстоянія для какой-либо опредѣленной точки, взятой на линіи 2-го порядка $\alpha\alpha' = \alpha''^2$. Въ такомъ случаѣ пропорціи (4) получаютъ видъ

$$\frac{\delta}{\delta_1} : \frac{\delta''}{\delta''_1} : \frac{\delta'}{\delta_1'} = \mu^2 : \mu : 1.$$

Для точки ($\delta_1$, $\delta_1'$, $\delta_1''$) очевидно имѣемъ $\mu = 1$; слѣдовательно, эту точку можно означить чрезъ (1). Для какой-нибудь другой точки ($\mu$) имѣемъ

$$\mu = \frac{\delta}{\delta''} : \frac{\delta_1}{\delta_1''} \quad \text{или} \quad \mu = \frac{\delta''}{\delta'} : \frac{\delta_1''}{\delta_1'},$$

т.-е. $\mu$ есть ангармоническое отношеніе пучка четырехъ прямыхъ: $\alpha = 0$, $\alpha'' = 0$, $\alpha = \alpha''$ и $\alpha = \mu\alpha''$, и также ангармоническое отношеніе пучка четырехъ прямыхъ:

$$\alpha'' = 0, \quad \alpha' = 0, \quad \alpha'' = \alpha' \quad \text{и} \quad \alpha'' = \mu\alpha'.$$

Слѣдовательно, эти два пучка суть гомографическіе.

Прямая $\alpha = \alpha'$, проходящая чрезъ точку (1), пересѣкаетъ кривую $\alpha\alpha' = \alpha''^2$ еще въ точкѣ (— 1); для этой точки имѣемъ

$$\frac{\delta}{\delta''} : \frac{\delta_1}{\delta_1''} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{\delta''}{\delta'} ; \frac{\delta_1''}{\delta_1'} = -1;$$

а потому разсматриваемые гомографическіе пучки въ этомъ случаѣ будутъ имѣть гармоническое отношеніе (см. стр. 89); слѣдовательно, точки (1) и (— 1) суть сопряженныя гармоническія относительно точки ($\alpha = 0$, $\alpha' = 0$) и точки пересѣченія прямой $\alpha = \alpha'$ съ $\alpha'' = 0$.

Изъ величинъ: $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$, опредѣляющихъ четыре точки на кривой $\alpha\alpha' = \alpha''^2$, легко составить ангармоническое отношеніе пучка прямыхъ, соединяющихъ эти точки съ пятою ($\mu$).

Уравненіе прямой, соединяющей точки $(\mu_1)$ и $(\mu)$, какъ мы видѣли выше, есть

$$\alpha + \mu\mu_1\alpha' - (\mu + \mu_1)\alpha'' = 0$$

или

$$\alpha - \mu\alpha'' = \mu_1 (\alpha'' - \mu\alpha').$$

Если означимъ чрезъ $d$ и $d'$ разстоянія точки $(\mu_1)$ отъ прямыхъ $\alpha - \mu\alpha'' = 0$ и $\alpha'' - \mu\alpha' = 0$, а чрезъ $p$ и $p'$ параметры двухъ функцій:

$$\alpha - \mu\alpha'' = (A - \mu A'')\, x + (B - \mu B'')\, y + C - \mu C''$$
$$\alpha'' - \mu\alpha' = (A'' - \mu A')\, x + (B'' - \mu B')\, y + C'' - \mu C',$$

то уравненіе прямой $(\mu\mu_1)$ можетъ быть написано подъ видомъ

$$d = \frac{\mu_1 p'}{p}\, d';$$

также получимъ уравненія

$$d = \frac{\mu_2 p'}{p}\, d', \quad d = \frac{\mu_3 p'}{p}\, d', \quad d = \frac{\mu_4 p'}{p}\, d'.$$

Ангармоническое отношеніе этихъ четырехъ прямыхъ или пучка $\mu\,(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)$ составится по формулѣ (11) ст. 89, а именно:

$$A = \frac{\mu_1 \frac{p'}{p} - \mu_3 \frac{p'}{p}}{\mu_2 \frac{p'}{p} - \mu_3 \frac{p'}{p}} : \frac{\mu_1 \frac{p'}{p} - \mu_4 \frac{p'}{p}}{\mu_2 \frac{p'}{p} - \mu_4 \frac{p'}{p}},$$

что приводится къ

$$A = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4}. \tag{1}$$

Эта величина называется ангармоническимъ отношеніемъ четырехъ точекъ $(\mu_1)\,(\mu_2)\,(\mu_3)\,(\mu_4)$ и очевидно не зависитъ отъ положенія точки $(\mu)$, что было уже доказано выше.

Прямыя, соединяющія точки $(\mu_1)$, $(\mu_2)$, $(\mu_3)$, $(\mu_4)$ съ точкою ($\alpha = 0$, $\alpha' = 0$), пересѣкаютъ кривую $\alpha\alpha' = \alpha''^2$ еще въ точкахъ: $(-\mu_1)$, $(-\mu_2)$, $(-\mu_3)$, $(-\mu_4)$, для которыхъ ангармоническое отношеніе (1) имѣетъ ту же самую величину $A$, потому что выраженіе (1) не перемѣнится отъ перемѣны знаковъ при $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$.

Легко доказать, что это же самое ангармоническое отношеніе принадлежитъ четыремъ точкамъ, въ которыхъ касательная, проведенная въ ($\mu$), пересѣкаетъ касательныя, проведенныя въ ($\mu_1$), ($\mu_2$), ($\mu_3$), ($\mu_4$). Уравненія касательныхъ въ точкахъ ($\mu$) и ($\mu_1$) суть:

$$\alpha + \mu^2\alpha' - 2\mu\alpha'' = 0, \quad \alpha + \mu^2_1\alpha' - 2\mu_1\alpha'' = 0$$

Исключивъ отсюда $\alpha''$, получимъ уравненіе

$$\alpha = \mu\mu_1\alpha',$$

принадлежащее прямой, проходящей чрезъ точку ($\alpha = 0$, $\alpha' = 0$) и чрезъ точку пересѣченія двухъ разсматриваемыхъ касательныхъ. Такъ же получимъ уравненія

$$\alpha = \mu\mu_2\, \alpha', \quad \alpha = \mu\mu_3\, \alpha', \quad \alpha = \mu\mu_4\, \alpha',$$

принадлежащія прямымъ, соединяющимъ точку ($\alpha = 0$, $\alpha' = 0$) съ точками, въ которыхъ касательная, проведенная въ ($\mu$), пересѣкаетъ касательныя, проведенныя въ ($\mu_2$), ($\mu_3$), ($\mu_4$). Эти четыре уравненія можно представить подъ видомъ

$$\delta = \mu\mu_1 \frac{\delta_1}{\delta'_1}\, \delta', \quad \delta = \mu\mu_2 \frac{\delta_1}{\delta'_1}\, \delta', \quad \delta = \mu\mu_3 \frac{\delta_1}{\delta'_1}\, \delta', \quad \delta = \mu\mu_4 \frac{\delta_1}{\delta'_1}\, \delta',$$

а потому ангармоническое отношеніе пучка, составленнаго прямыми, которымъ они принадлежатъ [см. форм. (11) стр. 89], есть

$$\frac{\mu\mu_1 \frac{\delta_1}{\delta'_1} - \mu\mu_3 \frac{\delta_1}{\delta'_1}}{\mu\mu_2 \frac{\delta_1}{\delta'_1} - \mu\mu_2 \frac{\delta_1}{\delta'_1}} : \frac{\mu\mu_1 \frac{\delta_1}{\delta'_1} - \mu\mu_4 \frac{\delta_1}{\delta'_1}}{\mu\mu_2 \frac{\delta_1}{\delta'_1} - \mu\mu_4 \frac{\delta_1}{\delta'_1}} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4} = A.$$

Это отношеніе принадлежитъ четыремъ точкамъ, въ которыхъ пучекъ встрѣчаетъ касательную, проведенную въ ($\mu$), или точкамъ пересѣченій касательной въ ($\mu$) съ касательными въ ($\mu_1$), ($\mu_2$), ($\mu_3$), и ($\mu_4$). Оно, какъ показываетъ выведенная формула, не зависитъ отъ ($\mu$), и равно ангармоническому отношенію четырехъ точекъ ($\mu_1$), ($\mu_2$), ($\mu_3$), ($\mu_4$). Что требовалось доказать. * —

### — * G. Обвертывающія линіи. Тангенціальныя координаты.

**81.** Если неизмѣняемая линія $AB$ касается линій: $ab$, $a'b'$ $a''b''$..., которыя представляютъ различныя положенія одной непрерывно-измѣняющейся линіи $ab$, то $AB$ называется *оберткою* линіи $ab$, а $ab$—*обертываемою*. Напримѣръ, всякая кривая есть обертка прямой, къ ней касательной.

Уравненіе обвертываемой линіи должно содержать, кромѣ координатъ, величины, называемыя *параметрами*, которыя остаются постоянными, когда разсматриваются точки одной и той же линіи $ab$, и перемѣняются при переходѣ линіи $ab$ въ другое положеніе $a'b'$. Эти параметры должны удовлетворять нѣкоторому условію для того, чтобы $ab$ касалась линіи $AB$. Пусть

$$f(x_1, x_2, x_3, A, B, C, \ldots) = 0 \qquad (1)$$

будетъ уравненіе обвертываемой линіи $ab$, а

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad (2)$$

уравненіе обвертки $AB$, гдѣ $x_1, x_2, x_3$ суть однородныя, обыкновенныя или трилинейныя координаты, а $A, B, C, \ldots$ перемѣнные параметры; притомъ функція $f$ однородна относительно $A, B, C, \ldots$ Полагая, что $x_1, x_2, x_3$ принадлежатъ точкѣ касанія линій $ab$ и $AB$, означимъ чрезъ $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ координаты какой-нибудь точки на общей касательной. Уравненія

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\xi_3 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3}\xi_3 = 0$$

должны принадлежать этой общей касательной (см. **§ 75**), а потому они должны быть тожественны. Для этого необходимо:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial x_2} : \frac{\partial F}{\partial x_3}. \qquad (3$$

Здѣсь двѣ пропорціи; но одна есть слѣдствіе другой. Въ самомъ дѣлѣ: изъ первой пропорціи

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial x_2}$$

выводимъ $\frac{\partial f}{\partial x_2} : \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2\right) = \frac{\partial F}{\partial x_2} : \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}x_2\right)$

а по однородности уравненій (1) и (2) относительно $x_1, x_2, x_3$ имѣемъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}x_3 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3}x_3 = 0; \qquad (4$$

слѣдовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} : -\frac{\partial f}{\partial x_3}x_3 = \frac{\partial F}{\partial x_2} : -\frac{\partial F}{\partial x_3}x_3$$

или $\frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial F}{\partial x_2} : \frac{\partial F}{\partial x_3}$, что представляетъ вторую изъ пропорцій (3); поэтому пропорціи (3) и уравненія (4), которыя тожественны съ уравненіями (1) и (2), даютъ только три различныхъ между собою уравненія. Исключивъ изъ этихъ трехъ уравненій $x_1, x_2, x_3$, т. е. отношенія $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$, получимъ одно уравненіе, связывающее параметры $A, B, C, \ldots$

$$\varphi(A, B, C, \ldots) = 0. \tag{5}$$

Оно также какъ и уравненіе (1) будетъ однородно относительно A, $B$, $C \ldots$, а потому представляетъ условіе, которому должны удовлетворять только отношенія между этими величинами, напримѣръ, $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \ldots$ Чтобы по данному положенію точки $(x_1. x_2, x_3)$ на оберткѣ $AB$ можно было совершенно опредѣлить положеніе обертываемой линіи, въ уравненіи послѣдней (1) должно быть только три параметра такихъ какъ $A, B, C \ldots$; въ противномъ случаѣ уравненіе (1) и (5) были бы недостаточны для опредѣленія отношеній между неизвѣстными параметрами. Мы положимъ, что уравненіе (1) содержитъ три параметра: $A, B, C$.

По данному уравненію (1) обертываемой линіи и уравненію (5), связывающему параметры $A, B, C$, можно найти уравненіе обертки.

Пусть $ab$ и $a'b'$ представляютъ обертываемую линію въ двухъ весьма близкихъ положеніяхъ и $m$—точку пересѣченія этихъ линій въ смежности съ точками касанія ихъ къ оберткѣ $AB$. Положимъ, что уравненіе

$$f(x_1, x_2, x_3. A, B, C) = 0,$$

принадлежитъ $ab$, а уравненіе

$$f(x_1, x_2, x_3, A + h, B + k, C + i) = 0$$

линіи $a'b'$. Координаты $x_1, x_2, x_3$ точки $m$ должны удовлетворять обоимъ уравненіямъ и слѣдовательно, также уравненію

$$f(x_1, x_2, x_3, A + h, B + k, C + i) - f(x_1, x_2, x_3, A, B, C) = 0,$$

которое изъ нихъ выводится чрезъ вычитаніе. Помощью Тейлоровой формулы послѣднее уравненіе можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\frac{\partial f}{\partial A} h + \frac{\partial f}{\partial B} k + \frac{\partial f}{\partial C} i + \varepsilon = 0. \tag{6}$$

гдѣ $\varepsilon$ есть совокупность членовъ съ высшими степенями $h, k, i$. Когда $a'b'$ совпадетъ съ $ab$, тогда точка $m$ придетъ на обвертку $AB$, а уравненіе (6) обратится въ дифференціальное уравненіе

$$\frac{\partial f}{\partial A} dA + \frac{\partial f}{\partial B} dB + \frac{\partial f}{\partial C} dC = 0, \tag{7}$$

гдѣ $dA, dB, dC$ должны быть связаны уравненіемъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial A} dA + \frac{\partial \varphi}{\partial B} dB + \frac{\partial \varphi}{\partial C} dC = 0, \tag{8}$$

которое получимъ, дифференцируя условное уравненіе (5) $\varphi(A, B, C) = 0$. По однородности же уравненій (1) и (5) имѣемъ

$$\frac{\partial f}{\partial A} A + \frac{\partial f}{\partial B} B + \frac{\partial f}{\partial C} C = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial A} A + \frac{\partial \varphi}{\partial B} B + \frac{\partial \varphi}{\partial C} C = 0. \tag{9}$$

Эти уравненія, вмѣстѣ съ (7) и (8), даютъ пропорціи:

$$\frac{\partial f}{\partial A} : \frac{\partial f}{\partial B} : \frac{\partial f}{\partial C} = \frac{\partial \varphi}{\partial A} : \frac{\partial \varphi}{\partial B} : \frac{\partial \varphi}{\partial C}. \tag{10}$$

Одна пропорція есть слѣдствіе другой и уравненій (9); такъ что всего имѣемъ три различныхъ уравненія между $A$, $B$, $C$, и можемъ исключить изъ нихъ эти величины. Выводъ исключенія будетъ уравненіе вида

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

которому должны удовлетворять координаты точки касанія линій $AB$ и $ab$ при всякомъ положеніи послѣдней, а потому оно есть уравненіе обвертки $AB$.

Можно разсматривать величины $A$, $B$, $C$ какъ особеннаго рода координаты, опредѣляющія положеніе обвертываемой линіи $ab$. Такого рода координаты называются *тангенціальными*. Условное уравненіе

$$\varphi(A, B, C) = 0$$

можно разсматривать какъ уравненіе обвертки въ тангенціальныхъ координатахъ.

Обыкновенно за тангенціальныя координаты берутъ коэффиціенты $A$, $B$, $C$ въ уравненіи прямой

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0. \tag{11}$$

Если уравненіе (5) въ этихъ координатахъ алгебраическое и степени $n$, то $n$ опредѣляетъ *классъ* тѣхъ линій, или вообще геометрическихъ мѣстъ, которымъ можетъ принадлежать это уравненіе. Къ первому классу принадлежитъ только точка; потому что, если уравненіе (5) имѣетъ видъ

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0,$$

гдѣ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ постоянныя количества, то пропорціи (10) даютъ

$$x_1 : x_2 : x_3 = \alpha : \beta : \gamma,$$

т.-е. постоянныя величины для отношеній $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$, а въ такомъ случаѣ $x_1$, $x_2$, $x_3$ принадлежитъ одной точкѣ.

Линіи 2-го класса суть линіи 2-го порядка. Для доказательства положимъ, что уравненіе (5) имѣетъ видъ

$$aA^2 + bB^2 + cC^2 + mBC + nCA + pAB = 0, \tag{12}$$

гдѣ $a, b, c, m, n, p$ постоянныя количества, и означимъ чрезъ $\lambda$ общее отношеніе $\frac{\partial\varphi}{\partial A} : \frac{\partial f}{\partial A}$ въ пропорціяхъ (10). Вслѣдствіе этихъ пропорцій будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} 2aA + pB + nC &= \lambda x_1 \\ pA + 2bB + mC &= \lambda x_2 \\ nA + mB + 2cC &= \lambda x_3 \end{aligned}\right\}; \tag{13}$$

отсюда выводимъ

$$A = \frac{\lambda}{\Delta}(\Delta_{1,1}x_1 + \Delta_{1,2}x_2 + \Delta_{1,3}x_3)$$

$$B = \frac{\lambda}{\Delta}(\Delta_{2,1}x_1 + \Delta_{2,2}x_2 + \Delta_{2,3}x_3)$$

$$C = \frac{\lambda}{\Delta}(\Delta_{3,1}x_1 + \Delta_{3,2}x_2 + \Delta_{3,3}x_3),$$

гдѣ $\Delta$ есть опредѣлитель системы линейныхъ уравненій (13), а $\Delta_{r,s}$ производная этого опредѣлителя относительно элемента, находящагося въ столбцѣ $r$ и строкѣ $s$; притомъ $\Delta_{r,s} = \Delta_{s,r}$, потому что опредѣлитель $\Delta$ симметрическій.

Помноживъ эти выраженія соотвѣтственно на $x_1$, $x_2$, $x_3$, возьмемъ сумму произведеній; въ первой части равенства получимъ

$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3$, что равно нулю вслѣдствіе уравненія (11); поэтому

$$\Delta_{1,1}x_1^2 + \Delta_{2,2}x_2^2 + \Delta_{3,3}x_3^2 + 2\Delta_{2,3}x_2x_3 + 2\Delta_{3,1}x_3x_1 + 2\Delta_{1,2}x_1x_2 = 0.$$

Это есть уравненіе линіи 2-го класса (12) въ координатахъ $x_1, x_2, x_3$. Такъ какъ оно 2-й степени, то линія 2-го класса есть линія 2-го порядка *).

**82.** Положимъ, что прямая (11) $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ есть поляра для линіи 2-го порядка

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + b_1x_2x_3 + b_2x_3x_1 + b_3x_1x_2 = 0$$

и $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ суть координаты ея полюса. Въ такомъ случаѣ

$$\left.\begin{aligned} A &= 2a_1\xi_1 + b_3\xi_2 + b_2\xi_3 \\ B &= b_3\xi_1 + 2a_2\xi_2 + b_1\xi_3 \\ C &= b_2\xi_1 + b_1\xi_2 + 2a_3\xi_3 \end{aligned}\right\}. \qquad (14)$$

Подставивъ эти выраженія $A, B, C$ въ уравненіе обвертки $\varphi(A, B, C) = 0$, которое, положимъ, степени $n$, получимъ уравненіе степени $n$ относительно $\xi_1, \xi_2, \xi_3$; отсюда заключаемъ, что, если линія класса $n$ обвертываетъ поляру, принадлежащую какой-либо линіи 2-го порядка, то полюсъ описываетъ линію порядка $n$. Обратно: если полюсъ $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ описываетъ линію порядка $n$, то поляра обвертывается линіею класса $n$; потому что, исключивъ помощью уравненія (14) координаты $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ изъ уравненія степени $n$, принадлежащаго линіи, описываемой полюсомъ, получимъ уравненіе степени $n$ относительно $A, B, C$ для обвертки поляры. Когда поляра вращается около неподвижной точки, тогда полюсъ описываетъ прямую, и обратно. Когда поляра обвертывается линіею 2-го порядка, тогда полюсъ описываетъ линію 2-го порядка, и обратно.

Точка $(x_1, x_2, x_3)$ касанія поляры къ ея оберткѣ есть полюсъ прямой, касательной въ точкѣ $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ къ линіи, описываемой послѣднею точкою; потому что, если $P$ и $P'$ суть два смежныхъ положенія точки $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, а $ab$ и $a'b'$ ихъ поляры, то пересѣченіе $m$ $(x_1, x_2, x_3)$ этихъ прямыхъ будетъ полюсомъ прямой $PP'$ и придетъ на обвертку $AB$, когда точки $P$ и $P'$ совпадутъ, т. е. когда $PP'$ обра-

*) Для линіи высшихъ порядковъ порядокъ и классъ не совпадаютъ. Линія порядка $n$ принадлежитъ вообще классу $n(n-1)$.

тится въ касательную къ линіи, описываемой точкою $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Слѣдовательно, линія, описываемая точкою $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, есть обвертка поляры, имѣющей полюсъ на линіи $AB$. Поэтому линія, описываемая полюсомъ, и обвертка поляры называются *взаимными линіями.*

**83.** Взаимность поляръ, доказанная въ **§ 69**, и взаимность линіи описываемой полюсомъ, съ обверткою поляры служатъ основаніемъ геометрическому началу, называемому *двойственностью.* На основаніи этого начала свойство, относящееся къ фигурѣ на плоскости, можно удвоить, присовокупивъ къ нему другое, которое изъ него выводится чрезъ перемѣну каждой *точки* на *прямую*, каждой *прямой* на *точку*, каждой кривой, разсматриваемой какъ *мѣсто точекъ*, на кривую, разсматриваемую какъ *обвертка прямыхъ*. Напримѣръ, такимъ образомъ изъ свойства, что *всякая линія* 2-го *порядка опредѣляется пятью точками, чрезъ которыя она должна проходить*, выводится свойство: *всякая линія 2-го порядка опредѣляется пятью прямыми, которыхъ она должна касаться.* Это второе предложеніе докажется слѣдующимъ образомъ: пусть $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ будутъ данныя прямыя. Взявъ какую-нибудь линію 2-го порядка $A$, построимъ полюсы $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, $e'$ данныхъ прямыхъ относительно $A$ и проведемъ чрезъ эти точки линію 2-го порядка $B$, которая этими пятью точками совершенно опредѣлится. Взаимная съ нею линія 2-го порядка $B'$ также будетъ вполнѣ опредѣлена и должна обвертывать поляры всѣхъ точекъ линіи $B$, а потому должна касаться данныхъ прямыхъ: $a$, $b$, $c$, $d$, $e$.

Подобнымъ образомъ можно вывести *гексаграммъ Бріаншона* изъ гексаграмма *Паскаля.* Положимъ, что $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, суть касательныя къ данной линіи 2-го порядка $A$, и $B$ какая-нибудь другая линія 2-го порядка, помощью которой опредѣлимъ полюсы данныхъ прямыхъ: $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, $e'$, $f'$. Эти полюсы будутъ принадлежать линіи 2-го порядка $B'$, взаимной съ $B$, и представятъ вершины шестиугольника, въ нее вписаннаго. По теоремѣ Паскаля точка $p$ пересѣченія $a'b'$ съ $d'e'$, точка $p'$ пересѣченія $b'c'$ съ $e'f'$ и точка $p''$ пересѣченія $c'd'$ съ $f'a'$ должны находиться на одной прямой $l$; но $p$ есть полюсъ прямой, соединяющей точку $ab$*) съ $de$, $p'$ есть полюсъ прямой, соединяющей $bc$ съ $ef$, и $p''$ полюсъ прямой, соединяющей $cd$ съ $fa$; эти три прямыя должны проходить

*) Здѣсь мы будемъ означать пересѣченіе двухъ прямыхъ буквами, означающими эти прямыя.

чрезъ полюсъ прямой $l$, слѣдовательно, должны пересѣкаться въ одной точкѣ, что и представляетъ теорему Бріаншона.

Изъ теоремъ Паскаля и Бріаншона вытекаютъ слѣдующія двойныя слѣдствія:

1) Во всякомъ пятиугольникѣ $abcde$, *вписанномъ* въ линію 2-го порядка, *пересѣченіе* $p$ двухъ несмежныхъ *сторонъ* $ab$ и $cd$, *пересѣченіе* $p'$ двухъ другихъ несмежныхъ *сторонъ* $bc$ и $de$ и *пересѣченіе* $p''$ пятой *стороны* $ae$ съ *касательною* въ противоположной *вершинѣ* $c$ *находятся на одной прямой линіи.*

Для доказательства надобно положить, что въ шестиугольникѣ *вписанномъ* двѣ вершины совпадаютъ въ одну точку.

2) Въ четыреугольникѣ $a\ b\ c\ d$, *вписанномъ* въ линію 2-го порядка, *пересѣченіе* $p$ двухъ противоположныхъ *сторонъ* $ab$ и $cd$, пересѣченіе $p'$ двухъ другихъ противоположныхъ *сторонъ* $bc$ и $ad$ и пересѣченіе $p''$ *касательныхъ* въ противоположныхъ *вершинахъ* $b$ и $d$ *находятся на одной прямой линіи.*

Для доказательства надобно положить, что въ шестиугольникѣ *вписанномъ* двѣ противоположныя *стороны* превращаются *въ касательныя* чрезъ *совмѣщеніе вершинъ*, находящихся на каждой изъ этихъ сторонъ.

3) Въ треугольникѣ $abc$, вписанномъ въ линію 2-го порядка, *пересѣченіе* $p$ *стороны* $ab$ съ *касательною* въ противоположной

1) Во всякомъ пятиугольникѣ $abcde$, *описанномъ* около линіи 2-го порядка, *прямая* $p$, соединяющая *вершины* $ab$ и $cd$ прямая $p'$, соединяющая $cb$ и $de$, и прямая $p''$, соединяющая пятую *вершину* $ae$ съ *точкою касанія* противоположной *стороны* $c$ съ линіею второго порядка, *пересѣкаются въ одной точкѣ.*

Для доказательства надобно положить, что въ шестиугольникѣ *описанномъ* двѣ стороны превращаются въ одну прямую.

2) Въ четыреугольникѣ $a\ b\ c\ d$, описанномъ около линіи 2-го порядка, *прямая* $p$, соединяющая противоположныя *вершины* $ac$ и $cd$, прямая $p'$, соединяющая противоположныя *вершины* $bc$ и $ad$, и *прямая* $p''$, соединяющая *точки касанія* двухъ противоположныхъ *сторонъ* $b$ и $d$, *пересѣкаются въ одной точкѣ.*

Для доказательства надобно положить, что въ шестиугольникѣ *описанномъ* двѣ противоположныя *вершины* становятся *точками касанія* чрезъ *совпаденіе* въ одну прямую *сторонъ*, проходящихъ чрезъ каждую изъ этихъ *вершинъ*.

3) Въ треугольникѣ $abc$, *описанномъ* около линіи 2-го порядка, *прямая* $p$, соединяющая *вершину* $ab$ *съ точкою касанія*

*вершинѣ* $c$, *пересѣченіе* $p'$ *стороны* $bc$ съ *касательною* въ противоположной *вершинѣ* $a$ и *пересѣченіе* $p''$ *стороны* $ac$ съ *касательною* въ противоположной *вершинѣ* $b$ *находятся на одной прямой*.

Для доказательства надобно положить, что въ шестиугольникѣ *вписанномъ стороны несмежныя* превращаются въ касательныя отъ совмѣщенія *вершинъ*, чрезъ которыя проходитъ сторона.

противоположной *стороны* $c$, *прямая* $p'$, соединяющая *вершину* $bc$ съ *точкою касанія* противоположной *стороны* $a$, и *точка* $p''$, соединяющая вершину $ca$ съ точкою касанія противоположной стороны $b$, *пересѣкаются въ одной точкѣ*.

Для доказательства надобно положить, что въ шестиугольникѣ описанномъ *вершины не смежныя* становятся *точками касанія* отъ совпаденія въ одну прямую *сторонъ*, пересѣкающихся въ вершинѣ.

## Задачи на построеніе линій 2-го порядка

1) По даннымъ пяти *точкамъ* $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ линіи 2-го порядка найти какую-нибудь шестую *точку* этой линіи и построить *касательную* въ этой точкѣ

Рѣшеніе. Чрезъ *пересѣченіе* $p$ *прямыхъ* $ab$ и $de$ проведемъ произвольную *прямую* $l$; найдемъ *пересѣченія* $p'$ и $p''$ этой прямой съ *прямыми* $bc$ и $cd$; потомъ проведемъ *прямыя* $p'e$ и $p''a$: въ *пересѣченіи* послѣднихъ получимъ искомую точку $f$.

Доказательство въ теоремѣ Паскаля.

Проведемъ *прямую* чрезъ $p'$ и *пересѣченіе* $q$ *прямыхъ* $bf$ и $ed$; замѣтимъ пересѣченіе $r$ прямыхъ $p'q$ и $cd$; потомъ проведемъ $rf$: эта *прямая* есть *касательная* въ точкѣ $f$.

1) По даннымъ пяти *касательнымъ* $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ линіи 2-го порядка построить шестую *касательную* къ этой линіи и найти *точку касанія*.

Рѣшеніе. На *прямой* $p$, соединяющей *вершины* $ab$ и $de$, возьмемъ произвольную *точку* $l$; соединимъ ее *прямыми* $p'$ и $p''$ съ *точками* $bc$ и $cd$; потомъ найдемъ *пересѣченія* $p'e$ и $p''a$: прямая $f$, соединяющая эти точки, есть искомая касательная.

Доказательство въ теоремѣ Бріаншона.

Найдемъ *пересѣченіе* прямой $p'$ съ *прямою* $q$, соединяющею *точки* $bf$ и $ed$, и проведемъ *прямую* $r$ чрезъ точки $p'q$ и $cd$; потомъ замѣтимъ точку $rf$: эта точка есть *точка касанія* прямой $f$ къ линіи 2-го порядка.

Доказательство вытекаетъ изъ слѣдствія 1-го теоремы Паскаля.

2) По даннымъ четыремъ *точкамъ: a, b, c, d* линіи 2-го порядка и *касательной e* въ одной изъ нихъ *a*, найти пятую *точку* линіи 2-го порядка и провести въ этой точкѣ касательную.

Рѣшеніе. Опредѣлимъ *пересѣченіе p* данной *касательной e* съ *прямою bc*; проведемъ чрезъ *p* произвольную *прямую l*; опредѣлимъ пересѣченіе *p'* *прямыхъ l* и *cd* и *пересѣченіе p''* *прямыхъ l* и *ad*; потомъ проведемъ *прямыя p'a* и *p''b*: въ *пересѣченіи* этихъ *прямыхъ* получимъ искомую *точку f*.

Замѣтимъ *q*, пересѣченіе *p'a* съ *bc*; проведемъ прямую *p''q*; замѣтимъ *пересѣченіе r прямыхъ p''q* и *cd* и проведемъ прямую *rf*: эта прямая есть *касательная* въ *точкѣ f*.

3) По даннымъ тремъ точкамъ *a, b, c* и двумъ касательнымъ *d* и *e* въ *точкахъ a* и *b*, опредѣлить четвертую *точку* и *касательную* въ этой точкѣ.

Рѣшеніе. Опредѣлимъ *точку p* пересѣченія данныхъ *касательныхъ d* и *e*; проведемъ чрезъ *p* произвольную *прямую l*; замѣтимъ *p'*, пересѣченіе *l* съ *bc* и *p''*, пересѣченіе *l* съ *ac*; потомъ проведемъ *прямыя p'a* и *p''b* и за-

Доказательство вытекаетъ изъ слѣдствія 1-го теоремы Бріаншона, или изъ соотвѣтственнаго на лѣвой сторонѣ по способу двойственности.

2) По даннымъ четыремъ *прямымъ: a, b, c, d*, касательнымъ къ линіи 2-го порядка, и точкѣ касанія *e* одной изъ нихъ *a*, найти пятую *касательную* и опредѣлить ея точку касанія.

Рѣшеніе. Соединимъ *прямою p* данную точку касанія *e* стороны *a* съ точкою *bc*; возьмемъ на *p* произвольную точку *l*; соединимъ *прямою p'* точку *l* съ *cd* и *прямою p''* *точку l* съ *ad*; потомъ опредѣлимъ *точки p'a* и *p''b*: прямая, соединяющая эти *точки*, есть искомая касательная *f*.

Проведемъ прямую *q* чрезъ *точки p'a* и *bc*; замѣтимъ *точку p''q*; соединимъ *прямою r точки p''q* и *cd* и замѣтимъ *пересѣченіе r* съ *прямою f*: это пересѣченіе есть *точка касанія* касательной *f*.

3) По даннымъ тремъ *касательнымъ a, b, c* и *точкамъ d* и *e* касанія прямыхъ *a* и *b* опредѣлить четвертую *касательную* и *точку* ея касанія.

Рѣшеніе. Проведемъ *прямую p* чрезъ данныя *точки d* и *e*; возьмемъ на *p* произвольную *точку l*; соединимъ прямою *p'* точки *l* и *bc* и прямою *p''* *точки l* и *ac*; потомъ замѣтимъ *точки p'a* и *p''b* и проведемъ чрезъ нихъ мѣтимъ ихъ пересѣченіе $f$: эта *точка* есть искомая.

Замѣтимъ *пересѣченіе* $q$ *прямыхъ* $p'a$ и $e$ и *пересѣченіе* $r$ *прямыхъ* $p''b$ и $d$; проведемъ *прямую* $qr$; найдемъ пересѣченіе $s$ прямыхъ $qr$ и $ab$ и проведемъ прямую $sf$: эта прямая есть *касательная* въ точкѣ $f$.

(Доказательство въ 3-мъ слѣдствіи теоремы Паскаля.)

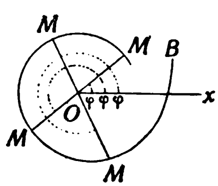
прямую $f$: эта *прямая* есть искомая касательная.

Соединимъ *прямою* $q$ *точки* $p'a$ и $e$ и *прямою* $r$ *точки* $p''b$ и $d$; *точку* $qr$ соединимъ *прямою* $s$ съ *точкою* $ab$ и замѣтимъ *пересѣченіе* $s$ съ $f$: эта точка пересѣченія $sf$ есть *точка касанія* на касательной $f$.

(Доказательство въ 3-мъ слѣдствіи теоремы Бріаншона и двойственности).

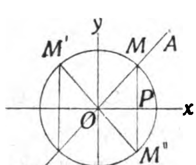
## H. Полярныя координаты.

**84.** Положеніе точки $M$ на плоскости можно опредѣлить по разстоянію ея отъ данной точки $O$ и по углу $MOx$, составленному направленіемъ этого разстоянія съ данною осью $Ox$. Такія двѣ величины, опредѣляющія положеніе точки $M$, называются *полярными координатами*. Точка $O$ называется *полюсомъ*, прямая $Ox$ *полярною осью*, длина $MO$ *радіусомъ векторомъ*, уголъ $MOx$ *аргументомъ*; въ Астрономіи углу $MOx$ даютъ обыкновенно названіе *долготы*. Разсматривая различныя точки на плоскости, условились отсчитывать число градусовъ въ долготѣ отъ оси къ радіусу всегда въ одну сторону, поэтому долгота можетъ имѣть всякую величину между $0^\circ$ и $360^\circ$, и даже величину больше $360^\circ$.



Фиг. 122

Если точки какой-либо линіи $MB$ станемъ опредѣлять полярными координатами, то найдемъ, что радіусъ векторъ вообще зависитъ отъ долготы, и обратно, долгота зависитъ отъ радіуса вектора; поэтому эти величины должны быть связаны уравненіемъ, которое называется *полярнымъ уравненіемъ* линіи. Означая чрезъ $r$ радіусъ векторъ $OM$ и чрезъ $\varphi$ долготу $MOx$, будемъ вообще имѣть уравненіе $f(r, \varphi) = 0$ между $r$ и $\varphi$ для полярнаго уравненія линіи $MB$. Однако въ частныхъ случаяхъ можетъ быть, что $r$ не зависитъ отъ $\varphi$, и обратно, $\varphi$ не зависитъ



Фиг. 123

отъ $r$. Для точекъ окружности круга, имѣющаго центръ въ полюсѣ и какой ни есть радіусъ $OM = a$, будетъ $r = a$ при произвольной долготѣ $\varphi$. Для прямой $AA'$, проходящей чрезъ полюсъ и составляющей съ осью уголъ $AOx = m$, имѣемъ

$$\varphi = m \quad \text{или} \quad \varphi = m + 180^\circ,$$

смотря по тому, будетъ-ли $\varphi$ принадлежать точкѣ $A$ или $A'$, при произвольной длинѣ $r$. Вмѣсто этихъ двухъ уравненій можно написать одно $\operatorname{tang} \varphi = m$ при $r$ произвольномъ.

**85.** Прямоугольныя координаты весьма просто преобразовываются въ полярныя, и обратно, полярныя въ прямоугольныя. Мы ограничимся разсмотрѣніемъ простѣйшаго и наиболѣе употребительнаго случая, когда координаты прямоугольныя имѣютъ начало въ полюсѣ и осью абсциссъ полярную ось.

Пусть будутъ $Ox$, $Oy$ прямоугольныя оси, $x$, $y$ координаты точки $M$ относительно этихъ осей, а $r = OM$, $\varphi = \angle MOx$ ея полярныя координаты. Такъ какъ $x$ и $y$ суть проекціи $r$ на осяхъ координатъ, то

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Эти формулы остаются справедливыми для всякой точки плоскости, если при употребленіи ихъ будетъ соблюдено правило знаковъ тригонометрическихъ линій. Знаки координатъ $x$ и $y$ опредѣляются знаками $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$. Для точки $M'$ долгота $\varphi > 90^\circ$ и $< 180^\circ$, а потому $\cos \varphi$ отрицательный, а $\sin \varphi$ положительный; слѣдовательно, $x$ величина отрицательная, а $y$ положительная. Для $M''$ имѣемъ $180^\circ < \varphi < 270^\circ$; слѣдовательно, $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $x$ и $y$ отрицательные. Для $M'''$ будетъ $270^\circ < \varphi < 360^\circ$, отчего $\cos \varphi$ и $x$ положительные, а $\sin \varphi$ и $y$ отрицательные.

Легко также выразить полярныя координаты $r$ и $\varphi$ помощью прямоугольныхъ, а именно: изъ формулъ

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

выводимъ слѣдующія:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

и сверхъ того

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{y}{x}.$$

**86.** Выразимъ уравненія эллипса, гиперболы и параболы въ полярныхъ координатахъ, взявъ полюсъ въ фокусѣ и полярную ось по направленію той изъ осей кривой, которая проходитъ чрезъ фокусъ.

Радіусъ векторъ эллипса (**§ 50**), проведенный изъ $F$ въ какую-либо точку $M$, выражается формулою

$$r = a - \frac{cx}{a},$$

гдѣ $a$ большая полуось, $c$ эксцентрицитетъ и $x$ абсцисса точки $M$. Положивъ $\angle MFA = \varphi$, получимъ $x - c = r\cos\varphi$; слѣдовательно,

$$x = c + r\cos\varphi$$

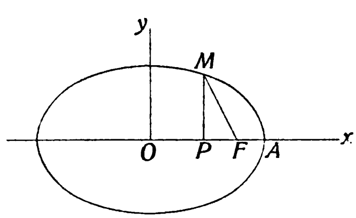
и

$$r = a - \frac{c^2}{a} - \frac{cr}{a}\cos\varphi;$$

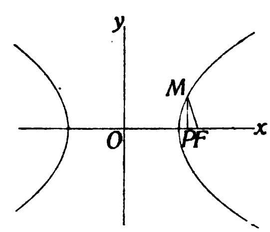
отсюда выходитъ

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a + c\cos\varphi}.$$

Въ Астрономіи эксцентрицитетомъ называютъ отношеніе $\frac{c}{a}$.




Фиг. 124




Фиг. 125

Означивъ его чрезъ $\varepsilon$, будемъ имѣть $c = a\varepsilon$; отъ этого полярное уравненіе эллипса принимаетъ видъ

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Здѣсь величина

$$a(1 - \varepsilon^2) = a - \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

есть половина параметра (**§ 48**), которую мы означали чрезъ $p$; слѣдовательно,

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Для точки $M$ на гиперболѣ, взявъ полюсъ въ фокусѣ $F$, имѣемъ

$$r = MF = \frac{cx}{a} - a$$

(**§ 50**, форм. 4), гдѣ $a$ главная полуось и $c$ эксцентрицитетъ. Положивъ $\angle MFO = \varphi$, найдемъ

$$x = c - r\cos\varphi;$$

слѣдовательно,

$$r = \frac{c^2}{a} - \frac{cr\cos\varphi}{a} - a,$$

откуда выходитъ

$$r = \frac{c^2 - a^2}{a + c\cos\varphi}$$

или

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon\cos\varphi},$$

гдѣ

$$\frac{c}{a} = \varepsilon.$$

Числитель выраженія $r$

$$a(\varepsilon^2 - 1) = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a},$$

есть $p$, половина параметра; слѣдовательно, полярное уравненіе одной вѣтви гиперболы окончательно будетъ

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi},$$

точно такое же какъ для эллипса, съ тою только разницею, что для эллипса $\varepsilon = \frac{c}{a}$ меньше единицы, а для гиперболы больше единицы.

Для другой вѣтви радіусъ векторъ выражается формулою (5) **§ 50**

$$r = a - \frac{cx}{a},$$

гдѣ опять $x = c - r\cos\varphi$; поэтому

$$r = a - \frac{c^2}{a} + \frac{cr}{a}\cos\varphi;$$

откуда выводимъ

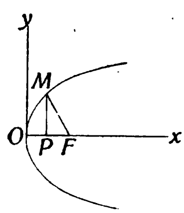
$$r = \frac{p}{\varepsilon\cos\varphi - 1}.$$

Эта формула выводится изъ предыдущей чрезъ перемѣну $\varphi$ на $\varphi + 180^\circ$ и $r$ на $-r$. Первая формула даетъ $r = \infty$, когда $\cos\varphi = -\frac{1}{\varepsilon} = -\frac{a}{c}$, а вторая, когда $\cos\varphi = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{a}{c}$. Эти два значенія $r$ принадлежатъ точкамъ безконечно-удаленнымъ отъ фокуса $F$. Направленіе радіуса вектора въ такомъ случаѣ параллельно ассимптотѣ.

Для радіуса вектора $FM$, проведеннаго изъ фокуса параболы въ какую-либо ея точку, было найдено, **§ 50**, форм. (8),

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Положивъ $\angle MFO = \varphi$, получимъ




Фиг. 126

$$x = \frac{p}{2} - r\cos\varphi;$$

слѣдовательно,

$$r = \frac{p}{2} - r\cos\varphi + \frac{p}{2} = p - r\cos\varphi,$$

откуда выходитъ

$$r = \frac{p}{1+\cos\varphi}$$

для полярнаго уравненія параболы. Его можно вывести изъ уравненія эллипса или гиперболы, положивъ $\varepsilon = 1$. Итакъ,

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

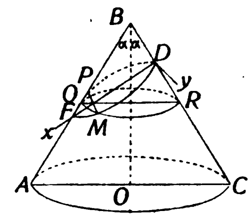
есть общее полярное уравненіе кривыхъ второго порядка. Для эллипса слѣдуетъ положить $\varepsilon < 1$, для гиперболы $\varepsilon > 1$, для параболы $\varepsilon = 1$.

## I. Коническія сѣченія.

**87.** Линіи второго порядка называются *коническими сѣченіями*, потому что можно ихъ произвести пересѣченіемъ конуса плоскостями.

Выведемъ уравненіе кривой $DMF$, происходящей отъ пересѣченія прямого кругового конуса $ABC$ какою-либо плоскостью, не проходящею чрезъ вершину.

Проведя чрезъ ось конуса $BO$ плоскость $ABC$, перпендикулярную къ плоскости $FDM$, пересѣченіе этихъ плоскостей $DF$ возьмемъ за ось абсциссъ $Dx$, а прямую $Dy$, къ нему перпендикулярную и проведенную по плоскости $DMF$, за ось ординатъ, и пусть $DP = x$, $MP = y$ будутъ координаты точки $M$, взятой на кривой. Конусъ опредѣлимъ угломъ $OBC$, который означимъ чрезъ $\alpha$, а положеніе пересѣкающей плоскости $DME$ длиною $DB = m$ и $\angle BDF = \beta$. Сверхъ того допустимъ на первый случай, что $Dx$ пересѣкаетъ $AB$ и положимъ $DF = 2a$; въ этомъ случаѣ $\beta + 2\alpha < 180°$.



Фиг. 127

Такъ какъ ордината $MP$ перпендикулярна къ плоскости $ABC$, то она параллельна плоскости основанія конуса, а потому можно провести чрезъ нее плоскость $QPRM$, параллельную основанію, которая пересѣчетъ конусъ по кругу. Прямая $QR$, пересѣченіе плоскости $QPRM$ съ плоскостью $ABC$, будетъ діаметромъ этого круга. По свойству ординаты круга имѣемъ

$$y^2 = PR \,.\, PQ;$$

потомъ въ треугольникахъ $PDR$ и $PFQ$ находимъ:

$$PR : x = \sin\beta : \cos\alpha, \quad PR = \frac{x \sin\beta}{\cos\alpha},$$

$$QP : FP = \sin(2\alpha + \beta) : \cos\alpha,$$

$$QP = \frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\cos\alpha} \,.\, FP = \frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\cos\alpha}(2a - x);$$

слѣдовательно,

$$y^2 = \frac{2a \sin\beta \,.\, \sin(2\alpha + \beta)}{\cos^2\alpha} \,.\, x - \frac{\sin\beta \,.\, \sin(2\alpha+\beta)}{\cos^2\alpha} x^2.$$

Положивъ для сокращенія

$$\frac{a \sin\beta \,.\, \sin(2\alpha + \beta)}{\cos^2\alpha} = p, \tag{1}$$

получимъ

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}. \tag{2}$$

**Это** уравненіе (см. **§ 48**) принадлежитъ эллипсу, у котораго **параметръ** есть $2p$, а большая ось $2a$. Итакъ, въ разсматриваемомъ **случаѣ,** т.-е. когда $2\alpha + \beta < 180°$, коническое сѣченіе $DMF$ есть ***эллипсъ.***

Въ треугольникѣ $BDF$ находимъ

$$ED : BD = \sin 2\alpha : \sin(2\alpha + \beta)$$

или

$$2a : m = \sin 2\alpha : \sin(2\alpha + \beta)$$

откуда

$$2a = \frac{m \sin 2\alpha}{\sin(2\alpha + \beta)}, \tag{3}$$

а поэтому

$$2p = \frac{m \sin 2\alpha \,.\, \sin\beta}{\cos^2\alpha} = 2m \operatorname{tg}\alpha \,.\, \sin\beta. \tag{4}$$

Эти формулы послужатъ для опредѣленія параметра и большой оси эллипса по даннымъ величинамъ $\alpha$, $\beta$ и $m$, опредѣляющимъ конусъ и положеніе плоскости коническаго сѣченія.

Когда $2\alpha + \beta = 180°$, т.-е. когда плоскость $DMF$ параллельна производящей $AB$, тогда $\sin(2\alpha + \beta) = 0$, $\sin\beta = \sin 2\alpha$, и формулы (3) и (4) даютъ: $2a = \infty$, $2p = 2m\operatorname{tg}\alpha \,.\, \sin(2\alpha)$ или $2p = 4m\sin^2\alpha$; слѣдовательно, уравненіе коническаго сѣченія (2) приметъ видъ

$$y^2 = 2px,$$

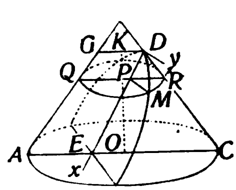
а это уравненіе принадлежитъ *параболѣ*.

Въ случаѣ $2\alpha + \beta > 180°$ будетъ $\sin(2\alpha + \beta) < 0$; отъ этого $2a$ отрицательная величина. Перемѣнивъ $a$ на $-a$, получимъ $2a = \dfrac{m\sin(2\alpha)}{-\sin(2\alpha + \beta)}$ и

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}; \tag{5}$$

это уравненіе принадлежитъ *гиперболѣ*.

Впрочемъ легко вывести непосредственно уравненія коническихъ сѣченій въ двухъ послѣднихъ случаяхъ: $2\alpha + \beta = 180°$ и $2\alpha + \beta > 180°$.




Фиг. 128

Положивъ $2\alpha + \beta = 180°$, найдемъ, что $Dx$ параллельна $AB$, а все прочее остается такъ же, какъ въ первомъ случаѣ, и будемъ имѣть

$$y^2 = QP \,.\, PR,$$

гдѣ

$$PR = \frac{x \sin 2\alpha}{\cos\alpha} = 2x \sin\alpha.$$

Проведя $DG$, параллельную $AC$, найдемъ

$$QP = DG = 2DK = 2m \sin\alpha;$$

слѣдовательно,

$$y^2 = 4m \sin^2 \alpha \,.\, x,$$

или

$$y^2 = 2px,$$

гдѣ

$$2p = 4m \sin^2 \alpha. \tag{6}$$

Когда $2\alpha + \beta > 180^\circ$, тогда плоскость коническаго сѣченія пересѣкаетъ не только конусъ, произведенный прямою $AB$ при обращеніи ея около оси $BO$, но также конусъ, происходящій отъ обращенія $A'B$, продолженія $AB$; отъ этого коническое пересѣченіе состоитъ изъ двухъ раздѣльныхъ вѣтвей: $FDG$ и $HEM'$. Докажемъ, что координаты точекъ $M$ и $M'$, той и другой вѣтви, удовлетворяютъ уравненію (5). Сдѣлавъ для точки $M$ такія же построенія, какъ въ первомъ случаѣ, будемъ имѣть

$$y^2 = PR \,.\, PQ,$$

гдѣ опять

$$PR = \frac{x \sin \beta}{\cos \alpha},$$

а

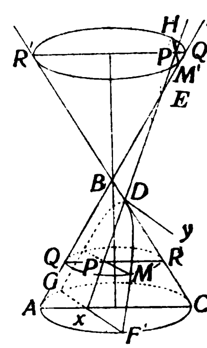
$$PQ : PE = \sin(QEP) : \sin(EQP)$$

или

$$PQ : (2a + x) = - \sin(2\alpha + \beta) : \cos \alpha;$$

слѣдовательно,

$$PQ = - \frac{\sin(2\alpha + \beta)(2a + x)}{\cos \alpha},$$



Фиг. 129

$$y^2 = - \frac{2a \sin \beta \sin(2\alpha + \beta)}{\cos^2 \alpha} x - \frac{\sin \beta \sin(2\alpha + \beta)}{\cos^2 \alpha} x^2. \tag{7}$$

Положивъ

$$- \frac{a \sin \beta \sin(2\alpha + \beta)}{\cos^2 \alpha} = p, \tag{8}$$

получимъ

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a},$$

уравненіе *гиперболы*.

Въ $\Delta\ DBE$ находимъ

$$ED : BD = \sin(2\alpha) : - \sin(2\alpha + \beta)$$

или

$$2a : m = \sin(2\alpha) : - \sin(2\alpha + \beta);$$

откуда выходитъ
$$2a = -\frac{m \sin(2\alpha)}{\sin(2\alpha + \beta)},$$
а слѣдовательно,
$$2p = \frac{m \sin 2\alpha \sin\beta}{\cos^2\alpha} = 2m \operatorname{tg}\alpha \,.\, \sin\beta,$$

что согласно съ формулою (4).

Легко удостовѣриться, что координаты точки $M'$, взятой на второй вѣтви, удовлетворяютъ уравненію (7).

Проведя $y = M'P'$, ординату точки $M'$, потомъ $Q'R'$, параллельную $AC$, и плоскость $Q'M'R'$, получимъ въ сѣченіи этой плоскости съ конусомъ кругъ, а потому
$$M'P'^2 = P'R' \,.\, P'Q'$$
или
$$y^2 = P'R' \,.\, P'Q';$$
послѣ того въ $\Delta\, P'DR'$ и $\Delta\, P'Q'E$ найдемъ:
$$P'R' = \frac{P'D \,.\, \sin\beta}{\cos\alpha},$$
$$P'Q' = -\frac{P'E \,.\, \sin(2\alpha + \beta)}{\cos\alpha}.$$

Означивъ чрезъ $x$ абсциссу точки $M'$, будемъ имѣть $x = -P'D$, $P'E = P'D - 2a = -(2a + x)$; слѣдовательно,
$$P'R' = -\frac{x \sin\beta}{\cos\alpha}, \quad P'Q' = \frac{(2a + x)\sin(2\alpha + \beta)}{\cos\alpha},$$
$$y^2 = -\frac{2a \sin\beta \sin(2\alpha + \beta)}{\cos^2\alpha}\, x - \frac{\sin\beta \sin(2\alpha + \beta)}{\cos^2\alpha}\, x^2,$$
уравненіе, тожественное съ уравненіемъ (7).

Итакъ, пересѣченіе всякаго прямаго кругового конуса какою ни есть плоскостью, не проходящею чрезъ вершину, есть линія втораго порядка.

**88.** Легко доказать обратное предложеніе: *всякую линію втораго порядка можно разсматривать какъ коническое сѣченіе.*

Докажемъ, во-первыхъ, что всякій эллипсъ можно произвести пересѣченіемъ даннаго конуса плоскостью.

Когда даны: конусъ и эллипсъ, то будутъ извѣстны: $\angle\,\alpha$, большая полуось $a$, малая полуось $b$ и параметръ $2p = \frac{2b^2}{a}$. Надобно по этимъ даннымъ найти: уголъ $\beta$ и длину $m$, по которымъ опредѣляется положеніе плоскости сѣченія. Формула (1) предыдущаго § даетъ

$$\sin\beta \,.\, \sin(2\alpha+\beta) = \frac{p}{a}\cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2}\cos^2\alpha;$$

но по извѣстной тригонометрической формулѣ имѣемъ

$$2\sin\beta\sin(2\alpha+\beta) = \cos 2\alpha - \cos(2\alpha+2\beta) = 2\cos^2\alpha - 2\cos^2(\alpha+\beta);$$

слѣдовательно,

$$\cos^2\alpha - \cos^2(\alpha+\beta) = \frac{b^2}{a^2}\cos^2\alpha;$$

откуда выходитъ

$$\cos^2(\alpha+\beta) = \frac{(a^2-b^2)\cos^2\alpha}{a^2} = \frac{c^2\cos^2\alpha}{a^2},$$

гдѣ $c$ означаетъ эксцентрицитетъ; наконецъ получимъ

$$\cos(\alpha+\beta) = \pm\frac{c\cos\alpha}{a}$$

для опредѣленія $\alpha+\beta$, а потомъ и $\beta$. Такъ какъ $c<a$, то $\frac{c}{a}\cos\alpha$ всегда меньше единицы, а потому опредѣленіе угла $\alpha+\beta$ всегда возможно; притомъ получимъ два рѣшенія. Означивъ чрезъ $\gamma$ наименьшій уголъ, котораго косинусъ равенъ $\frac{c}{a}\cos\alpha$, будемъ имѣть

$$\alpha+\beta=\gamma \quad \text{или} \quad \alpha+\beta = 180^\circ-\gamma;$$

откуда

$$\beta=\gamma-\alpha \quad \text{или} \quad \beta = 180^\circ-(\gamma+\alpha).$$

Легко видѣть, что $\gamma$ или $180^\circ-\gamma$ есть уголъ, составляемый плоскостью сѣченія съ осью конуса. Опредѣливъ $\beta$, по формулѣ (4) найдемъ

$$m = \frac{p}{\operatorname{tg}\alpha\sin\beta}.$$

Эта величина также всегда возможна; слѣдовательно, данный эллипсъ можно произвести пересѣченіемъ конуса плоскостью.

Также легко найти положеніе плоскости, который пересѣчетъ данный конусъ по данной параболѣ. Когда данъ уголъ $\alpha$ и параметръ параболы $p$, тогда по формулѣ (6) найдемъ

$$m = \frac{p}{2\sin^2\alpha}$$

для опредѣленія точки $D$, чрезъ которую должна проходить пересѣкающая плоскость, параллельная производящей $AB$.

Положимъ теперь, что даны полуоси гиперболы: главная $a$ и вторая $b$. По нимъ опредѣлимъ $p = \frac{b^2}{a}$, а потомъ по формулѣ (8) будемъ имѣть:

$$\sin\beta \,.\, \sin(2\alpha + \beta) = -\frac{b^2}{a^2}\cos^2\alpha$$

или

$$\cos^2\alpha - \cos^2(\alpha + \beta) = -\frac{b^2}{a^2}\cos^2\alpha;$$

откуда выводимъ

$$\cos^2(\alpha + \beta) = \frac{(a^2 + b^2)\cos^2\alpha}{a^2} = \frac{c^2\cos^2\alpha}{a^2}$$

и

$$\cos(\alpha + \beta) = \pm\frac{c\cos\alpha}{a},$$

гдѣ $c$ означаетъ эксцентрицитетъ. По этой формулѣ, также какъ и для эллипса, найдемъ сперва $\alpha + \beta$, а потомъ и $\beta$. Но чтобы $\cos(\alpha + \beta)$ имѣлъ возможную величину, должно быть удовлетворено условіе

$$\frac{c}{a}\cos\alpha < 1$$

или

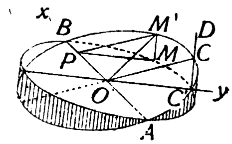
$$\cos a < \frac{a}{c}.$$

Величина $\frac{a}{c}$ есть косинусъ угла, составляемаго ассимптотою съ главною осью; поэтому раствореніе конуса $2\alpha$ должно быть больше угла, заключающагося между ассимптотами гиперболы. Слѣдовательно, данную гиперболу можно произвести пересѣченіемъ плоскостью такого конуса, у котораго раствореніе $2\alpha$ больше угла ассимптотъ. А такъ какъ $2\alpha$ можетъ имѣть всякое значеніе между 0 и $180^\circ$, то всякую гиперболу можно разсматривать какъ коническое сѣченіе. Опредѣливъ уголъ $\beta$, найдемъ длину $BD = m$ также, какъ и для эллипса, по формулѣ

$$m = \frac{p}{\operatorname{tg}\alpha\sin\beta}.$$

**89.** *Проекція круга на данную плоскость есть всегда эллипсъ.*

Для упрощенія доказательства этого предложенія, положимъ, что плоскость проекціи проходитъ чрезъ центръ круга; это позволительно, потому что проекція не перемѣнится отъ перемѣны плоскости проекціи на другую, ей параллельную. Пусть $AC'M'B$ будетъ проекція круга $ACMB$; $AB$ діаметръ, по которому плоскость круга пересѣкаетъ плоскость проекціи; $M'P$ проекція прямой $MP$, перпендикулярной къ $AB$, и $OC'$ проекція радіуса $OC$, перпендикулярнаго къ $AB$. Положимъ притомъ $AO = a$, и $OC' = b$. Возьмемъ начало координатъ въ центрѣ круга $O$, ось абсциссъ $Ox$ по направленію $AB$, а ось ординатъ $Oy$ въ плоскости проекціи перпендикулярно къ $Ox$, и положимъ, что $x = OP$, $y = M'P$ суть координаты точки $M'$. Проведя радіусъ $MO$, получимъ прямоугольный треугольникъ $MPO$, въ которомъ




Фиг. 130

$$OP^2 + MP^2 = a^2,$$

или

$$x^2 + MP^2 = a^2; \qquad (1)$$

а въ подобныхъ треугольникахъ $MPM'$ и $COC'$ имѣемъ

$$MP : M'P = CO : C'O$$

или

$$MP : y = a : b;$$

откуда

$$MP = \frac{ay}{b}.$$

Подставивъ эту величину $MP$ въ уравненіе (1), получимъ

$$x^2 + \frac{a^2y^2}{b^2} = a^2$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

а это уравненіе принадлежитъ эллипсу, у котораго полуоси суть: $a$ (радіусъ проектируемаго круга) и $b$ (проекція радіуса, перпендикулярнаго къ пересѣченію плоскости круга съ плоскостью проекцій).

Легко удостовѣриться, что обратно: всякій данный эллипсъ можно разсматривать какъ проекцію круга. Пусть будетъ $AC'B$ данный эллипсъ, а $AO$ и $OC'$ его полуоси. Кругъ, который будетъ имѣть проекціею этотъ эллипсъ, можно найти слѣдующимъ образомъ: возставимъ $C'D$, перпендикулярную къ плоскости эллипса; потомъ въ плоскости $DC'O$ опишемъ дугу круга радіусомъ, равнымъ большой полуоси $AO$ изъ центра $O$, и замѣтимъ точку $C$, гдѣ пересѣчетъ эта дуга перпендикуляръ $C'D$; получимъ $CO = AO$. Послѣ того проведемъ чрезъ $AB$ и $OC$ плоскость, въ которой начертимъ кругъ радіусомъ $AO$ изъ центра $O$, этотъ кругъ, очевидно, будетъ имѣть проекціею данный эллипсъ.

—* Конусъ, имѣющій основаніемъ какую-нибудь линію второго порядка $A$, начерченную въ плоскости $P$, и вершину въ какой-нибудь точкѣ $S$, пересѣкается всякою плоскостью $P'$, не проходящею чрезъ $S$, по линіи 2-го порядка $A'$. Можно притомъ разсматривать $A'$ какъ перспективное изображеніе на плоскости $P$ линіи $A$ при глазѣ, находящемся въ $S$, и также $A$ — какъ изображеніе $A'$ на плоскости $P$.

На основаніи свойства пучковъ, доказаннаго въ **§ 77**, легко доказать, что $A'$ есть линія 2-го порядка. Докажемъ прежде, что два пучка, служащіе одинъ другому перспективою при глазѣ въ $s$, суть *гомографическіе*. Пусть $E(ABCD)$ будетъ пучокъ въ плоскости $P$, $E$ полюсъ, а $EA$, $EB$, $EC$, $ED$ лучи. Проведемъ чрезъ эти лучи и вершину $s$ плоскости и положимъ, что въ пересѣченіи этихъ плоскостей съ плоскостью $P'$ получаются прямыя $E'A'$, $E'B'$, $E'C'$, $E'D'$: эти прямыя составятъ пучокъ $E'(A'B'C'D')$, гомографическій съ даннымъ. Для доказательства пересѣчемъ первый пучокъ какою-нибудь прямою $l$ и замѣтимъ точки пересѣченія $a$, $b$, $c$, $d$. Прямыя $sa$, $sb$, $sc$, $sd$ составятъ пучекъ и встрѣтятъ плоскость $P'$ въ точкахъ $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, находящихся на лучахъ второго пучка и на прямой $l'$, служащей перспективою прямой $l$. По свойству ангармоническаго отношенія, составленнаго изъ отрѣзковъ пересѣкающей, имѣемъ:

$$(abcd) = (a'b'c'd');$$

но

$$(abcd) = E(ABCD) \quad \text{и} \quad (a'b'c'd') = E'(A'B'C'D');$$

слѣдовательно,

$$E(ABCD) = E'(A'B'C'D'),$$

т.-е. пучки, которымъ принадлежатъ эти отношенія, суть гомографическіе.

Положимъ теперь, что 6 точекъ $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ принадлежатъ линіи 2-го порядка $A$; прямыя, соединяющія ихъ съ вершиною $s$, встрѣтятъ плоскость $P'$ въ точкахъ $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, $F'$, принадлежащихъ линіи $A'$. По доказанному сейчасъ имѣемъ

$$E(ABCD) = E'(A'B'C'D') \quad \text{и} \quad F(ABCD) = F'(A'B'C'D').$$

а по свойству линіи 2-го порядка, доказанному въ **§ 77**, имѣемъ

$$E(ABCD) = F(ABCD);$$

слѣдовательно, $E'(A'B'C'D') = F'(A'B'C'D')$. Это и показываетъ, что $A'$ есть линія 2-го порядка. * —

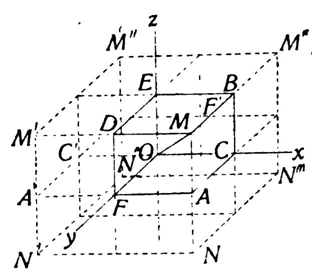
---

ОТДѢЛЪ III

## Геометрическія мѣста въ пространствѣ

### А. Опредѣленіе положенія точки въ пространствѣ. Уравненія поверхности и линіи. Разстояніе между двумя точками. Плоскость и прямая линія.

**90.** Положеніе точки въ пространствѣ можетъ быть опредѣлено ея проекціями на двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ. Пусть будутъ двѣ перпендикулярныя плоскости $xy$ и $xz$, пересѣкающіяся по прямой $Ox$, а $A$ и $B$ проекціи на нихъ точки $M$. Если даны мѣста точекъ $A$ и $B$, то найдемъ точку $M$ въ пересѣченіи перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ $A$ и $B$ къ соотвѣтственнымъ плоскостямъ проекцій. Такъ какъ проектирующіе перпендикуляры $MA$ и $MB$ лежатъ въ одной плоскости, которая пересѣкаетъ плоскости проекцій по прямымъ $AC$ и $BC$, перпендикулярнымъ къ $Ox$ и сходящимся въ одной точкѣ $C$, то, для опредѣленія проекцій $A$ и $B$, достаточно знать: мѣсто точки $C$, длины $AC$ и $BC$ и стороны, въ которыя онѣ отложены относительно точки $C$; самое же мѣсто точки $C$ можетъ быть опредѣлено разстояніемъ $OC$ отъ другой данной точки $O$. Слѣдовательно, мѣсто точки $M$ можетъ быть опредѣлено тремя длинами: $OC$, $CA$ и $CB$, которыя поэтому можно назвать координатами точки $M$. Здѣсь четыреугольникъ $AMBC$ есть прямоугольникъ, а потому $CA = MB$, а $CB = MA$. Пусть будетъ еще новая плоскость $yOz$, перпендикулярная къ первымъ двумъ плоскостямъ проекцій, пересѣкающая ихъ по прямымъ $Oy$ и $Oz$, а $D$ проекція на ней точки $M$: оче-




Фиг. 131

видно, что, по параллельности плоскостей $yOz$ и $AMB$, проектирующая прямая $MD$ равна $OC$; поэтому координаты точки $M$ равны разстояніямъ ея $MD$, $MB$ и $MA$ отъ трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей $yOz$, $zOx$ и $xOy$. Эти три плоскости называются *плоскостями координатъ*; точка $O$, пересѣченіе координатныхъ плоскостей, называется *началомъ*, а взаимно-перпендикулярныя прямыя $Ox$, $Oy$, $Oz$, по которымъ плоскости координатъ пересѣкаются, *осями координатъ*. Плоскости $AMB$, $AMD$ и $BMD$ параллельны соотвѣтственно плоскостямъ $yOz$, $zOx$ и $xOy$, а потому составляютъ съ ними параллелепипедъ, въ которомъ три смежные ребра $MD$, $MB$ и $MA$, или равные и параллельные имъ $OC$, $OF$ и $OE$, суть координаты точки $M$; поэтому, если отложимъ по осямъ координатъ длины: $OC$, $OF$, $OE$ и чрезъ концы ихъ проведемъ параллельно плоскостямъ координатъ три плоскости $ABC$, $AFD$ и $BED$, то въ пересѣченіи послѣднихъ найдемъ мѣсто точки $M$.

Замѣтимъ еще, что $OC$ и $AC$ можно разсматривать какъ координаты точки $A$ относительно осей $Ox$ и $Oy$; также $OC$ и $CB$— какъ координаты точки $B$ относительно $Ox$ и $Oz$, а $OF$ и $FD$— какъ координаты $D$ относительно $Oy$ и $Oz$. Слѣдовательно, *точка $M$ съ каждою изъ своихъ проекцій на координатныхъ плоскостяхъ имѣетъ двѣ общія координаты.* Основываясь на этомъ замѣчаніи, можно опредѣлить точку $M$ слѣдующимъ образомъ: *опредѣлить сперва помощью двухъ координатъ ея проекцію на одной изъ плоскостей координатъ, а потомъ возставить къ этой плоскости изъ найденной проекціи перпендикуляръ, равный третьей координатѣ.* Такъ напримѣръ, опредѣлимъ сперва извѣстнымъ образомъ проекцію $A$ помощью координатъ $OC$ и $AC$, потомъ возставимъ $MA$, перпендикулярную къ плоскости $xOy$ и равную $BC$; въ концѣ этого перпендикуляра найдемъ мѣсто точки $M$.

Означивъ вообще буквами: $x, y, z$ координаты какой ни есть точки, отложенныя соотвѣтственно по осямъ $Ox$, $Oy$, $Oz$, и чрезъ $a, b, c$, координаты $OC$, $OF$, $OE$, принадлежащія точкѣ $M$, можно изобразить тремя равенствами:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

условіе, что точка $M$ опредѣлена данными координатами $a$, $b$, $c$. Но здѣсь, такъ же, какъ при опредѣленіи положенія точки на плоскости, должно знать сторону, въ которую отложена каждая координата по соотвѣтственной оси относительно точки $O$, и въ вычисленіяхъ брать со знакомъ — тѣ, которыя имѣютъ положенія, обратныя относительно $OC$, $OF$ и $OE$, если послѣднія разсматриваются какъ положительныя. Знаки координатъ представляютъ восемь различныхъ сочетаній, соотвѣтствующихъ восьми точкамъ: $M$, $M'$, $M''$, $M'''$, $N$, $N'$, $N''$, $N'''$, помѣщеннымъ въ трегранныхъ углахъ, составленныхъ плоскостями координатъ.

Для точки $M'$, у которой проекція $A'$ падаетъ по лѣвую сторону оси $Oy$, координата $OC'=a$ противоположна $OC$, а прочія двѣ $OF$ и $CE$ тѣ же, что и для $M$; поэтому должно положить:

$$x=-a, \quad y=b, \quad z=c.$$

У точки $M''$ проекціи $A''$ имѣетъ двѣ координаты: $OC'=a$ и $OF'=b$, противоположныя координатамъ точки $M$, а третью $OE$ общую; слѣдовательно, точка $M''$ опредѣлена равенствами:

$$x=-a, \quad y=-b, \quad z=c.$$

Точка $M'''$ имѣетъ только одну координату $CF'=b$ противоположную координатѣ $OF$ точки $M$, а двѣ остальныя $OC$ и $OE$ общія; поэтому $M'''$ опредѣлена равенствами:

$$x=a, \quad y=-b, \quad z=c.$$

Для точки $N$, взятой подъ плоскостью $xOy$ на разстояніи $AN=c$, имѣемъ:

$$x=a, \quad y=b, \quad z=-c.$$

Точка $N'$ опредѣлена равенствами:

$$x=-a, \quad y=b, \quad z=-c.$$

Для $N''$ найдемъ:

$$x=-a, \quad y=-b, \quad z=-c$$

и наконецъ для $N'''$:

$$x=a, \quad y=-b, \quad z=-c$$

Для сокращенія мы будемъ означать точку $M$, опредѣленную координатами $x$, $y$, $z$, знакоположеніемъ $(x, y, z)$.

Примѣры: Опредѣлить мѣста точекъ:

$$(2, 3, 5), \quad (-2, 5, -7), \quad (-3, 0, 6), \quad (0, -7, 0).$$

Разсмотрѣнныя координаты называются *прямолинейными* и *прямоугольными*.

Вмѣсто трехъ взаимно-перпендикулярныхъ координатныхъ плоскостей можно взять три произвольныя плоскости $yOz$, $zOx$ и $xOy$, пересѣкающіяся въ одной точкѣ и составляющія углы непрямые, а вмѣсто перпендикулярныхъ координатъ—три прямыя: $MA$, $MB$ и $MD$ параллельныя осямъ: $Ox$, $Oy$, $Oz$; такого рода координаты называются *прямолинейными косоугольными*.

**91.** Прямоугольныя координаты точки $M(x, y, z)$ суть проекціи на осяхъ координатъ длины прямой $OM$, проведенной изъ начала координатъ въ точку $M$; такъ что, если положимъ $OM = r$, то

$$x = r\cos(rx), \quad y = r\cos(ry), \quad z = r\cos(rz);$$

при этомъ начало проектируемой линіи должно брать въ началѣ координатъ, а за направленія осей проекцій тѣ направленія осей координатъ, по которымъ откладываются положительныя координаты. Знаки координатъ опредѣляются знаками косинусовъ:

$$\cos(rx), \ \cos(ry), \ \cos(rz).$$

Положивъ $r = 1$, будемъ имѣть

$$x = \cos(rx), \quad y = \cos(ry), \quad z = \cos(rz).$$

Это показываетъ, что *косинусы угловъ, составляемыхъ какою-нибудь прямою $r$, проведенною изъ начала координатъ, съ осями координатъ, суть прямоугольныя координаты точки пересѣченія этой прямой съ поверхностью шара радіуса равнаго единицѣ и центръ имѣющаго въ началѣ координатъ.* Такимъ образомъ можно опредѣлить направленіе всякой прямой положеніемъ точки на поверхности шара.

Если точка

$$[\cos(rx), \ \cos(ry), \ \cos(rz)]$$

изображаетъ направленіе $r$, то діаметрально противоположная съ нею точка

$$[-\cos(rx), \ -\cos(ry), \ -\cos(rz)]$$

изобразитъ направленіе прямо противоположное $r$.

Направленіе прямой, не проходящей чрезъ начало координатъ, изображается точкою пересѣченія прямой, ей параллельной, проведенной изъ начала координатъ, съ поверхностью шара радіуса единицы и центръ имѣющаго въ началѣ координатъ; причемъ обѣ прямыя должны быть направлены въ одну сторону.

Двѣ прямыя параллельныя, въ одну сторону направленныя, изображаются одною и тою же точкою, а прямыя параллельныя и противоположныя—двумя точками діаметрально противоположными.

По формулѣ (4) **§ 11** для квадрата діагонали прямоугольнаго параллелепипеда имѣемъ

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{1}$$

т.-е. *квадратъ разстоянія какой-нибудь точки* $(x, y, z)$ *отъ начала координатъ равенъ суммѣ квадратовъ прямоугольныхъ координатъ точки.*

Для точки, изображающей направленіе $r$, имѣемъ

$$1 = \cos^2(rx) + \cos^2(ry) + \cos^2(rz),$$

что было уже доказано въ **§ 11**.

*Проекціи на осяхъ координатъ разстоянія между двумя точками* $M$ и $M'$ *выражаются разностями прямоугольныхъ соотвѣтственныхъ координатъ этихъ точекъ.* Пусть $x$, $y$, $z$ будутъ координаты точки $M$; а $x'$, $y'$, $z'$ координаты точки $M'$, и $M'M = r$, причемъ $M'$ разсматривается какъ начало $r$; тогда $x - x'$, разность между координатою конца и координатою начала, есть проекція $r$ на оси $x$, направленной въ сторону положительныхъ координатъ. Въ самомъ дѣлѣ: прямая $OM$ замыкаетъ ломанную линію $OM' + M'M$; поэтому

$$\text{проекц. } OM = \text{проекц. } OM' + \text{проекц. } M'M;$$

слѣдовательно,

$$\text{проекц. } M'M = \text{проекц. } OM - \text{проекц. } OM',$$

т.-е.

$$r\cos(rx) = x - x'.$$

Также докажется, что

$$r\cos(ry) = y - y', \quad r\cos(rz) = z - z'.$$

Сумма квадратовъ этихъ величинъ даетъ

$$r^2\,[\cos^2(rx) + \cos^2(ry) + \cos^2(rz)] = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

или

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \tag{2}$$

т.-е. *квадратъ разстоянія между двумя точками равенъ суммѣ квадратовъ разностей прямоугольныхъ соотвѣтственныхъ координатъ этихъ точекъ.* Формула (2) приводится къ формулѣ (1), когда $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$, т.-е. когда точка $M'$ въ началѣ координатъ.

Изъ способа опредѣленія мѣста точки $M$ помощью ея координатъ $x$, $y$, $z$ легко видѣть, что изъ координатъ, прямоугольныхъ или косоугольныхъ, можно составить ломанную линію, въ которой стороны суть длины координатъ, напримѣръ, такъ: первая сторона есть длина $x$, вторая длина $y$, третья длина $z$. Прямая $OM=r$, проведенная изъ начала координатъ въ точку $(x, y, z)$, замыкаетъ эту ломанную линію; поэтому проекція ея на какой-нибудь оси $l$ равна суммѣ проекцій сторонъ этой ломанной линіи; слѣдовательно, если $x$, $y$, $z$ положительныя, то можно написать

$$r \cos(rl) = x \cos(xl) + y \cos(yl) + z \cos(zl). \tag{3}$$

Эта формула справедлива и въ случаѣ отрицательныхъ значеній $x$, $y$, $z$. Въ самомъ дѣлѣ: если $x$ сдѣлается отрицательнымъ, то въ ломанной линіи будетъ сторона $-x$, составляющая съ направленіемъ $l$ уголъ дополнительный до $180°$ къ углу $(xl)$, т.-е. уголъ, у котораго косинусъ есть $-\cos(xl)$; такъ что въ формулѣ (3) вмѣсто $x\cos(xl)$ будетъ $-x \,.\, -\cos(xl)$, что опять составляетъ $x\cos(xl)$.

Формула (3) показываетъ, что *проекція на какой-нибудь оси $l$ прямой $r$, проведенной изъ начала координатъ въ какую-нибудь точку $M(x, y, z)$, равна суммѣ проекцій на оси $l$ координатъ этой точки, будутъ ли координаты прямоугольныя или косоугольныя.*

Положимъ, что $l$ есть длина, проведенная изъ начала координатъ. Взявъ ея направленіе за ось проекцій и помноживъ на $l$ уравненіе (3), получимъ

$$rl \cos(rl) = xl \cos(xl) + yl \cos(yl) + zl \cos(zl). \tag{4}$$

Здѣсь $l\cos(xl)$, $l\cos(yl)$, $l\cos(zl)$ суть проекціи длины $l$ на осяхъ координатъ; слѣдовательно, формула (4) показываетъ, что *произведеніе двухъ прямыхъ $r$ и $l$, проведенныхъ изъ начала координатъ, и косинуса угла, между ними заключающагося, равно суммѣ произведеній координатъ $x$, $y$, $z$ конца одной изъ нихъ и проекцій другой на соотвѣтственныхъ осяхъ.*

Когда координаты прямоугольныя, тогда $l\cos(lx)$, $l\cos(ly)$

$l\cos(lz)$ суть координаты конца $l$. Означивъ эти координаты чрезъ $x'$, $y'$, $z'$, будемъ имѣть

$$rl\cos(rl) = xx' + yy' + zz', \tag{5}$$

т.-е. *произведеніе двухъ прямолинейныхъ отрѣзковъ, проведенныхъ изъ начала координатъ, и косинуса угла, между ними заключающагося, равно суммѣ произведеній соотвѣтственныхъ координатъ концевъ этихъ отрѣзковъ или ихъ проекцій на осяхъ координатъ.*

Вмѣсто $r$ и $l$ можно взять отрѣзки, равные и параллельные имъ, какъ-нибудь помѣщенные въ пространствѣ, но въ одну сторону съ ними направленные; потому что проекціи отрѣзковъ равныхъ, параллельныхъ и въ одну сторону направленныхъ одинаковы.

Положивъ $r=1$ и $l=1$, мы получимъ на поверхности шара радіуса равнаго единицѣ, имѣющаго въ началѣ координатъ центръ, двѣ точки $m$ и $m'$, изображающія направленія прямыхъ $r$ и $l$; тогда

$$x = \cos(rx), \quad y = \cos(ry), \quad z = \cos(rz),$$
$$x' = \cos(lx), \quad y' = \cos(ly), \quad z' = \cos(lz)$$

и формула (5) даетъ

$$\cos(rl) = \cos(rx)\cos(lx) + \cos(ry)\cos(ly) + \cos(rz)\cos(lz), \tag{6}$$

т. е. *косинусъ угла между направленіями двухъ прямыхъ равенъ суммѣ произведеній косинусовъ угловъ, составляемыхъ прямыми съ прямоугольными осями координатъ.*

Въ случаѣ перпендикулярности прямыхъ $r$ и $l$ имѣемъ

$$\cos(rx)\cos(lx) + \cos(ry)\cos(ly) + \cos(rz)\cos(lz) = 0.$$

—* Въ случаѣ косоугольныхъ координатъ прямоугольныя проекціи на осяхъ координатъ прямой $r$, проведенной изъ начала координатъ въ точку $M(x, y, z)$, не равны координатамъ $x$, $y$, $z$; но онѣ могутъ быть легко опредѣлены, когда эти координаты даны и извѣстны углы $(yz)$, $(xz)$, $(xy)$ между осями координатъ.

Означая чрезъ $u$, $v$, $w$ проекціи $r$ на осяхъ, направленныхъ въ сторону положительныхъ координатъ, и чрезъ $\lambda$, $\mu$, $\nu$ косинусы угловъ $(yz)$, $(zx)$ и $(xy)$, составляемыхъ этими направленіями, по формулѣ (3), взявъ для $l$ направленія $Ox$, $Oy$, $Oz$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} u &= x + \nu y + \mu z \\ v &= \nu x + y + \lambda z \\ w &= \mu x + \lambda y + z \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Положивъ въ формулѣ (4), что $l$ равно и совпадаетъ съ $r$, будемъ имѣть

$$r^2 = xu + yv + zw, \tag{8}$$

а это помощью формулъ (7) приводится къ выраженію:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda yz + 2\mu zx + 2\nu xy, \tag{9}$$

что согласно съ формулою (3) § 11 для квадрата діагонали параллелепипеда.

Изъ формулы (9) легко вывести вообще выраженіе квадрата разстоянія $M'M$ между точками $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$. Проведемъ чрезъ начало координатъ прямую $r$, равную, параллельную $M'M$ и въ одну сторону съ ней направленную, предполагая, что $M'$ есть начало, а $M$ конецъ длины $M'M$. Тогда легко видѣть, что $x-x'$, $y-y'$ и $z-z'$ будутъ равны координатамъ конца $r$; слѣдовательно, по формулѣ (9) будемъ имѣть

$$\begin{aligned} M'M^2 = r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + 2\lambda(y-y')(z-z') + \\ + 2\mu(z-z')(x-x') + 2\nu(x-x')(y-y'). \end{aligned} \tag{10}$$

Не трудно выразить квадратъ прямой $r$ помощью проекцій ея $u, v, w$ на осяхъ координатъ. Полагая опять, что $x, y, z$ суть координаты конца $r$, будемъ имѣть формулы (7), изъ которыхъ выводимъ

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\Delta}[(1-\lambda^2)u + (\lambda\mu-\nu)v + (\lambda\nu-\mu)w] \\ y &= \frac{1}{\Delta}[(\lambda\mu-\nu)u + (1-\mu^2)v + (\mu\nu-\lambda)w] \\ z &= \frac{1}{\Delta}[(\lambda\nu-\mu)u + (\mu\nu-\lambda)v + (1-\nu^2)w] \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

гдѣ $\Delta = \begin{vmatrix} 1, & \mu, & \nu \\ \mu, & 1, & \lambda \\ \nu, & \lambda, & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\lambda\mu\nu.$

Подставивъ эти выраженія для $x$, $y$, $z$ въ формулу (8), получимъ

$$\begin{aligned} r^2 = \frac{1}{\Delta}[(1-\lambda^2)u^2 + (1-\mu^2)v^2 + (1-\nu^2)w^2 + 2(\mu\nu-\lambda)vw + \\ + 2(\lambda\nu-\mu)uw + 2(\lambda\mu-\nu)uv]. \end{aligned} \tag{12}$$

Если положимъ $r=1$, то будемъ имѣть

$$u = \cos(rx), \quad v = \cos(ry), \quad w = \cos(rz)$$

и формула (12) дастъ въ этомъ случаѣ

$$\Delta = (1 - \lambda^2)\cos^2(rx) + (1 - \mu^2)\cos^2(ry) + (1 - \nu^2)\cos^2(rz) +$$
$$+ 2(\mu\nu - \lambda)\cos(ry)\cos(rz) + 2(\lambda\nu - \mu)\cos(rz)\cos(rx) +$$
$$(\lambda\mu - \nu)\cos(rx)\cos(ry). \qquad (13)$$

Это уравненіе представляетъ условіе, которому должны удовлетворить косинусы угловъ, составляемыхъ какою-нибудь прямою $r$ съ осями координатъ. Въ случаѣ прямоугольныхъ осей будетъ: $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\Delta = 1$; отчего уравненіе (13) приводится къ уравненію, найденному выше:

$$\cos^2(rx) + \cos^2(ry) + \cos(rz) = 1.$$

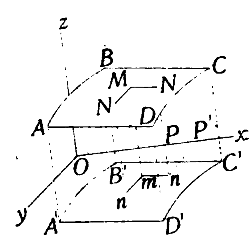
Замѣтимъ еще весьма простой способъ написать выраженія (7) и (11). Если означимъ чрезъ $2R$ выраженіе (9), то будемъ имѣть

$$u = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial R}{\partial z}, \qquad (14)$$

а означивъ чрезъ $2R'$ выраженіе (12) найдемъ, что

$$x = \frac{\partial R'}{\partial u}, \quad y = \frac{\partial R'}{\partial u}, \quad z = \frac{\partial R'}{\partial w}. \qquad (15)$$

**92.** *Уравненіе поверхности.* Пусть будетъ $ABCD$ какая-нибудь поверхность, $Ox$, $Oy$, $Oz$ три оси координатъ, $M$ точка, произвольно взятая на этой поверхности, и $x$, $y$, $z$ ея координаты. Проведя чрезъ точку $M$ прямую, параллельную оси $Oz$, замѣтимъ пересѣченіе $m$ этой прямой съ плоскостью $xOy$. Очевидно, что положеніе точки $M$ зависитъ отъ положенія точки $m$, такъ, что если дано положеніе $m$, то опредѣлится и положеніе $M$. Въ самомъ дѣлѣ, зная положеніе $m$, можемъ провести чрезъ $m$ прямую $mM$, параллельную оси $Oz$, до встрѣчи съ поверхностью; точка встрѣчи будетъ $M$; при этомъ опредѣлится длина $mM$, которая, будучи взята съ $+$ или $-$ смотря потому, какъ она направлена, даетъ координату $z$; слѣдовательно, $z$ будетъ опредѣлена, когда извѣстны координаты $x$ и $y$ точки $m$, которыя изображены чрезъ $OP$ и $Pm$. Изъ этого можемъ заключить, что $z$ есть функція отъ



Фиг. 132

$x$ и $y$, т.-е. *одна изъ координатъ* какой-нибудь точки поверхности $ABCD$ есть функія двухъ другихъ, такъ что можно положить

$$z = f(x, y).$$

При этомъ должно разсматривать $x$ и $y$ какъ независимыя перемѣнныя; потому что можно измѣнять $x$, не перемѣняя $y$, а также измѣнять $y$, не перемѣняя $x$. Въ самомъ дѣлѣ: вмѣсто $m$ можно взять точку $n$ на прямой $mn$, параллельной оси $Ox$; тогда $x$ перемѣнится, потому что $OP$ перемѣнится на $OP'$, а $y$ остается безъ перемѣны, такъ какъ $nP' = mP$; вмѣстѣ съ тѣмъ $z$ можетъ перемѣниться, оттого что $mM$ перемѣнится на $nN$. Можетъ случиться, что прямая, возставленная изъ $m$, встрѣчаетъ поверхность въ двухъ или болѣе точкахъ, тогда величинамъ $x$ и $y$ соотвѣтствуютъ нѣсколько значеній $z$; но каждое значеніе совершенно опредѣленно и можетъ быть разсматриваемо какъ функція $x$ и $y$.

Для того, чтобъ $z$ было функціею двухъ независимыхъ перемѣнныхъ $x$ и $y$, надобно, чтобы $x$, $y$, $z$ были связаны уравненіемъ вида

$$f(x, y, z) = 0.$$

Это уравненіе называется *уравненіемъ поверхности*. Напримѣръ, если означимъ чрезъ $x, y, z$ прямоугольныя координаты какой-нибудь точки на поверхности шара, у котораго центръ находится въ точкѣ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, а радіусъ равенъ $r$, то уравненіе шара будетъ

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2,$$

гдѣ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $r$ должно разсматривать какъ постоянныя, а $x$, $y$, $z$ какъ перемѣнныя. Это уравненіе выражаетъ общее свойство точекъ поверхности шара, а именно: разстоянія всѣхъ точекъ поверхности отъ центра равны одной и той же длинѣ $r$. При началѣ координатъ въ центрѣ это уравненіе беретъ видъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

—* Въ случаѣ косоугольныхъ осей координатъ, составляющихъ углы $(yz)$, $(zx)$ и $(xy)$, косинусы которыхъ суть $\lambda$, $\mu$, $\nu$, уравненіе поверхности шара, имѣющаго центръ въ точкѣ $(\alpha, \beta, \gamma)$ и радіусъ $r$, получится по формулѣ (10):

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 + 2\lambda(y-\beta)(z-\gamma) +$$
$$+ 2\mu(z-\gamma)(x-\alpha) + 2\nu(x-\alpha)(y-\beta) = r^2.$$

* —

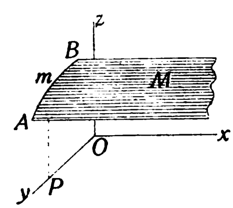
**93.** Можетъ случиться, что одна изъ координатъ $x$, $y$, $z$ точки поверхности имѣетъ постоянную величину и слѣдовательно, не зависитъ отъ двухъ прочихъ. Такъ, напримѣръ, для всѣхъ величинъ $x = OP$, $y = mP$ координата $z = mM$ можетъ имѣть постоянную величину; тогда очевидно поверхность $ABCD$ есть плоскость, параллельная плоскости $xOy$, и уравненіе ея будетъ вида $z = c$, гдѣ $c$ постоянное количество.

Уравненіе $z = 0$ принадлежитъ кординатной плоскости $xOy$; $x = 0$ есть уравненіе координатной плоскости $yOz$, а $x = a$ уравненіе плоскости, ей параллельной. Уравненіе $y = 0$ принадлежитъ плоскости $xOz$, а $y = b$ плоскости, ей параллельной.

Можетъ еще случиться, что одна координата точки $(x, y, z)$, взятой на поверхности, есть функція одной только изъ двухъ прочихъ координатъ, напримѣръ $z$ функція только $y$, т.-е. не зависитъ отъ $x$. Тогда поверхность есть цилиндръ съ производящею, параллельною оси $Ox$. Пусть дано:

$$z = f(y) \quad \text{или} \quad F(y, z) = 0.$$

Если положимъ $x = 0$, т.-е. станемъ разсматривать только точки, находящіяся на плоскости $yOz$, то $z = f(y)$ представитъ уравненіе нѣкоторой линіи $AB$ въ этой плоскости. Координаты $y = OP$ и $z = Pm$ одной изъ точекъ $m$ этой линіи принадлежатъ также всякой точкѣ $M$, взятой на прямой, проведенной чрезъ $m$ параллельно оси $Ox$, а потому уравненіе



Фиг. 133

$$z = f(y), \quad \text{или} \quad F(y, z) = 0$$

при всякомъ $x$ принадлежитъ точкамъ прямыхъ, параллельныхъ $Ox$, проведенныхъ чрезъ разныя точки линіи $AB$, т.-е., точкамъ цилиндра, на которомъ лежатъ всѣ эти прямыя.

Здѣсь $AB$ есть направляющая цилиндра или слѣдъ его на плоскости $yOz$. Когда уравненіе $z = f(y)$ первой степени, тогда $AB$ есть прямая линія, и вмѣсто цилиндра будетъ плоскость, параллельная оси $Ox$.

Точно также найдемъ, что уравненіе $f(x, z) = 0$ принадлежитъ цилиндру съ производящею, параллельною оси $Oy$, а $f(x, y) = 0$ цилиндру съ производящею, параллельною оси $Oz$.

Чтобы уравненіе $f(x, y, z) = 0$ могло принадлежать поверхности, надобно, чтобы оно могло быть удовлетворено вещественными величинами $x$, $y$, $z$, способными измѣняться непрерывно.

Уравненіе между $x$, $y$, $z$ можетъ не представлять никакого геометрическаго мѣста, напримѣръ

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0;$$

потому что оно не можетъ быть удовлетворено вещественными величинами $x$, $y$, $z$. Иногда уравненіе представляетъ отдѣльныя точки или отдѣльныя линіи. Напримѣръ уравненіе

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

принадлежитъ одной точкѣ, а именно началу координатъ; потому что ему удовлетворяютъ только величины $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Уравненіе

$$(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^2 + (z - a)^2 = 0. \qquad (a)$$

можетъ быть удовлетворено только величинами $x$, $y$, $z$, удовлетворяющими двумъ совокупнымъ уравненіямъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{и} \quad z = a \qquad (b)$$

Первое изъ этихъ уравненій (въ случаѣ координатъ прямоугольныхъ) принадлежитъ шару радіуса $r$, а второе плоскости параллельной съ плоскостью $xy$; поэтому величины $x$, $y$, $z$, удовлетворяющія обоимъ уравненіямъ, принадлежатъ пересѣченію шара съ плоскостью; слѣдовательно, и уравненіе $(a)$ удовлетворяется координатами точекъ не поверхности, а линіи.

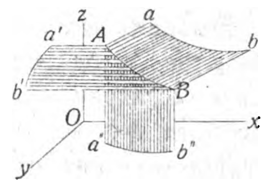
Всякую линію можно разсматривать какъ пересѣченіе двухъ поверхностей. Уравненія этихъ поверхностей принимаются за уравненія линіи. Такъ, напримѣръ, уравненія $(b)$ суть уравненія круга, происходящаго отъ пересѣченія шара, имѣющаго центръ въ началѣ координатъ, съ плоскостью, параллельною плоскости $xOy$.

Чаще всего линію въ пространствѣ разсматриваютъ какъ пересѣченіе двухъ цилиндровъ, проектирующихъ ее на двѣ плоскости координатъ, и уравненія этихъ цилиндровъ берутъ за уравненія линіи. Пусть будетъ $AabB$ цилиндръ, проектирующій линію $AB$ на плоскость $xOz$, $Aa'b'B$ цилиндръ, проектирующій ту же линію на плоскость $yOz$. Такъ какъ производящая у перваго цилиндра параллельна оси $Oy$, а у второго оси $Ox$, то уравненіе перваго цилиндра будетъ вида

$$f(x, z) = 0,$$

а второго
$$F(y, z) = 0.$$

Эти два уравненія, вмѣстѣ взятыя, представятъ линію $AB$. Уравненія $f(x, z) = 0$, $y = 0$ принадлежатъ проекціи ея $ab$, а $F(y, z) = 0$, $x = 0$ проекціи $a'b'$.



Фиг. 134

Изъ уравненій: $f(x, z) = 0$, $F(x, y) = 0$ легко вывести уравненіе третьяго цилиндра $ABa''b''$, проектирующаго линію $AB$ на плоскость $xOy$; для этого надобно только исключить изъ нихъ координату $z$. Въ самомъ дѣлѣ: уравненіе цилиндра $ABa''b''$ должно быть вида $\varphi(x, y) = 0$, и координаты $x$, $y$, ему удовлетворяющія, должны быть тѣ же, что въ уравненіяхъ: $f(x, z) = 0$, $F(y, z) = 0$, потому что онѣ принадлежатъ точкамъ линіи $AB$, а такое свойство можетъ имѣть только уравненіе, происшедшее отъ исключенія $z$ изъ уравненій $f(x, z) = 0$, $F(y, z) = 0$.

**94.** *Общее уравненіе плоскости.*

Пусть дана плоскость $P$; означимъ черезъ $\delta$ длину перпендикуляра, опущеннаго на нее изъ начала $O$ координатъ, прямоугольныхъ или косоугольныхъ. Если возьмемъ направленіе $\delta$ за ось проекцій, то $\delta$ будетъ проекція всякой прямой $OM$, проведенной изъ начала координатъ въ точку $M(x, y, z)$, произвольно взятую на плоскости $P$, а по формулѣ (3) **§ 91** проекція $OM$ равна суммѣ проекцій координатъ $x$, $y$, $z$; слѣдовательно,

$$x \cos(\delta x) + y \cos(\delta y) + z \cos(\delta z) = \delta. \qquad (1)$$

Этому уравненію удовлетворяютъ координаты всякой точки плоскости $P$ при постоянныхъ значеніяхъ $\cos(\delta x)$, $\cos(\delta y)$, $\cos(\delta z)$ и $\delta$; слѣдовательно, оно есть уравненіе плоскости $P$.

Въ случаѣ прямоугольныхъ осей координатъ углы $(\delta x)$, $(\delta y)$, $(\delta z)$ равны двуграннымъ угламъ, составляемымъ плоскостью $P$ съ плоскостями координатъ $yOz$, $xOz$, $xOy$, которыя для сокращенія будемъ означать такъ: $yz$, $xz$, $xy$. Въ самомъ дѣлѣ: извѣстно, что уголъ двухъ плоскостей измѣряется угломъ прямыхъ, къ нимъ перпендикулярныхъ, а такъ какъ $\delta$ перпендикулярна къ $P$ и $Ox$ перпендикулярна къ плоскости $yz$, то $\angle(\delta x) = \angle(P, yz)$; также найдемъ: $\angle(\delta y) = \angle(P, zx)$, $\angle(\delta z) = \angle(P, xy)$; слѣдовательно, уравненіе (1) можно представить подъ видомъ

$$x \cos(P, yz) + y \cos(P, zx) + z \cos(P, xy) = \delta.$$

*Всякое уравненіе первой степени относительно прямолинейныхъ координатъ $x$, $y$, $z$ принадлежитъ нѣкоторой плоскости.*

Такое уравненіе имѣетъ общій видъ

$$Ax + By + Cz = D. \tag{2}$$

Докажемъ, что, каковы бы ни были величины $A$, $B$, $C$, $D$, это уравненіе можно сдѣлать тожественнымъ съ уравненіемъ (1) и найти величины $(\delta x)$, $(\delta y)$, $(\delta z)$ и $\delta$, опредѣляющія положеніе плоскости, которой уравненіе принадлежитъ.

Для тожественности уравненій (1) и (2) необходимо:

$$\frac{\cos(\delta x)}{A} = \frac{\cos(\delta y)}{B} = \frac{\cos(\delta z)}{C} = \frac{\delta}{D}. \tag{3}$$

Присоединивъ къ этимъ условіямъ уравненіе, связывающее косинусы угловъ, составляемыхъ прямою $\delta$ съ осями координатъ, будемъ имѣть столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ величинъ: $\delta$, $\cos(\delta x)$, $\cos(\delta y)$, $\cos(\delta z)$ и можемъ изъ нихъ вывести величины послѣднихъ. Положимъ сперва, что оси координатъ прямоугольныя. Тогда

$$\cos^2(\delta x) + \cos^2(\delta y) + \cos^2(\delta z) = 1. \tag{4}$$

Исключивъ изъ этого уравненія помощью пропорцій (3) $\cos(\delta x)$, $\cos(\delta y)$, $\cos(\delta z)$, получимъ

$$\frac{\delta^2}{D^2}A^2 + \frac{\delta^2}{D^2}B^2 + \frac{\delta^2}{D^2}C^2 = 1;$$

откуда выводимъ

$$\delta = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \tag{5}$$

послѣ этого помощью пропорцій (3) получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\delta x) &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\\
\cos(\delta y) &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\\
\cos(\delta z) &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Такъ какъ $\delta$ должна быть положительною величиною, то въ формулѣ (5) при корнѣ должно взять тотъ знакъ, который имѣетъ величина $D$.

—* Если оси координатъ $x, y, z$ косоугольныя и составляютъ углы $yOz$, $zOx$, $xOy$, которыхъ косинусы суть $\lambda$, $\mu$, $\nu$, то для опредѣленія $\delta$, $\cos(\delta x)$, $\cos(\delta y)$, $\cos(\delta z)$ надобно къ пропорціямъ (1) присоединить уравненіе (13) **§ 91:**

$$\Delta = (1-\lambda^2)\cos^2(\delta x) + (1-\mu^2)\cos^2(\delta y) + (1-\nu^2)\cos^2(\delta z) +$$
$$+ 2(\mu\nu-\lambda)\cos(\delta y)\cos(\delta z) + 2(\nu\lambda-\mu)\cos(\delta z)\cos(\delta x)$$
$$+ 2(\lambda\mu-\nu)\cos(\delta x)\cos(\delta y).$$

Подставивъ въ него вмѣсто $\cos(\delta x)$, $\cos(\delta y)$, $\cos(\delta z)$ ихъ величины, выведенныя изъ пропорцій (3), получимъ уравненіе, которое даетъ

$$\delta = \frac{D\sqrt{\Delta}}{\pm\sqrt{[(1-\lambda^2)A^2+(1-\mu^2)B^2+(1-\nu^2)C^2+2(\mu\nu-\lambda)BC+ + 2(\nu\lambda-\mu)CA + 2(\lambda\mu-\nu)AB}}, \qquad (7)$$

гдѣ должно взять знакъ $+$ или $-$, смотря потому, будетъ ли $D$ положительное или отрицательное.

Положивъ для сокращенія

$$P = \sqrt{\frac{1}{\Delta}[(1-\lambda^2)A^2+(1-\mu^2)B^2+(1-\nu^2)C^2+2(\mu\nu-\lambda)BC+}$$
$$+ 2(\nu\lambda-\mu)CA + 2(\lambda\mu-\nu)AB].$$

будемъ имѣть

$$\delta = \pm\frac{D}{P};$$

потомъ изъ пропорцій (3) выводимъ

$$\left.\begin{aligned} \cos(\delta x) &= \pm\frac{A}{P} \\ \cos(\delta y) &= \pm\frac{B}{P} \\ \cos(\delta z) &= \pm\frac{C}{P} \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Величину $P$ можно разсматривать какъ длину, у которой проекціи на осяхъ координатъ суть $A$, $B$, $C$, коэффиціенты линейной функціи

$$Ax + By + Cz;$$

она называется *параметромъ* этой функціи. Формулы (8) даютъ

$$\cos(\delta x) = \pm\cos(Px), \quad \cos(\delta y) = \pm\cos(Py), \quad \cos(\delta z) = \pm\cos(Py).$$

Изъ этого видно, что $\delta$ имѣетъ направленіе $P$ или противоположное, смотря потому, будетъ ли $D$ положительное или отрицательное. * —

Изъ доказаннаго въ началѣ этого § заключаемъ, что уравненіе

$$Ax + By + Cz = D$$

всегда принадлежитъ нѣкоторой плоскости, которая опредѣляется слѣдующимъ образомъ: помощью проекцій на осяхъ координатъ

$$\delta \cos(\delta x), \quad \delta \cos(\delta y), \quad \delta \cos(\delta z)$$

построимъ прямую $\delta$, имѣющую начало въ началѣ координатъ, и чрезъ конецъ этой прямой проведемъ плоскость, къ ней перпендикулярную.

Частные случаи:

Уравненіе

$$Ax + By + Cz = 0$$

принадлежитъ плоскости, проходящей чрезъ начало координатъ; потому что $\delta = 0$, или потому, что ему удовлетворяютъ координаты начала $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Уравненіе $Ax + By = D$, не содержащее координаты $z$, принадлежитъ плоскости, параллельной оси $Oz$ (см. **§ 93**).

Уравненіе

$$Ax = D \quad \text{или} \quad x = \frac{D}{A}$$

принадлежитъ плоскости, параллельной плоскости координатъ $yz$.

**95.** Если уравненіе плоскости

$$Ax + By + Cz = D \tag{1}$$

полное, т.-е. въ немъ ни одинъ изъ коэффиціентовъ $A, B, C, D$ не равенъ нулю, то плоскость пересѣкаетъ координатныя оси $Ox$, $Oy$, $Oz$ въ трехъ различныхъ точкахъ $a, b, c$. Легко найти координаты этихъ точекъ, а именно: для точки $a$ имѣемъ $y = 0$, $z = 0$ и $x = \frac{D}{A}$; для $b$, $z = 0$, $x = 0$ и $y = \frac{D}{B}$, а для $c$, $x = 0$, $y = 0$ и $z = \frac{D}{C}$. Опредѣливъ такимъ образомъ точки $a, b, c$, можемъ провести чрезъ нихъ плоскость. Эта плоскость имѣетъ уравненіе (1). Обратно, по даннымъ точкамъ $a$, $b$, $c$, т.-е. по ихъ координатамъ

$$p = \frac{D}{A}, \quad q = \frac{D}{B}, \quad r = \frac{D}{C}$$

легко найти уравненіе плоскости, проведенной чрезъ эти точки. Послѣднія равенства даютъ

$$A = \frac{D}{p}, \quad B = \frac{D}{q}, \quad C = \frac{D}{r};$$

подставивъ эти величины $A$, $B$, $C$ въ уравненіе (1) и раздѣливъ уравненіе на $D$, получимъ уравненіе искомой плоскости

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

Здѣсь *сумма отношеній координатъ произвольной точки плоскости къ соотвѣтственнымъ координатамъ точекъ пересѣченій плоскости съ осями равна единицѣ.*

Всякую плоскость можно построить помощью ея слѣдовъ на двухъ плоскостяхъ координатъ.

Если положимъ въ уравненіи $Ax + By + Cz = D$, что $x = 0$, то получимъ уравненіе $By + Cz = D$, принадлежащее прямой въ плоскости $(yz)$, и по способу, показанному въ **§ 24**, мы можемъ начертить эту прямую; также, положивъ $y = 0$, получимъ прямую $Ax + Cz = D$ въ плоскости $xz$ и можемъ ее построить. Эти прямыя будутъ слѣды искомой плоскости на плоскости координатъ; по нимъ опредѣлится положеніе самой плоскости.

**96.** *Уравненія прямой.*

Уравненія прямой линіи суть уравненія двухъ плоскостей, чрезъ нее проведенныхъ, взятыя вмѣстѣ. Обыкновенно прямую опредѣляютъ двумя плоскостями, проектирующими ее на плоскостяхъ координатъ $xOz$ и $yOz$. Уравненіе первой плоскости имѣетъ видъ

$$x = az + p,$$

а уравненіе второй

$$y = bz + q;$$

слѣдовательно уравненія:

$$x = az + p, \quad y = bz + q, \tag{1}$$

вмѣстѣ взятыя, суть уравненія данной прямой. Уравненіе плоскости, проектирующей прямую на плоскости $xOy$, найдется, какъ было сказано въ **§ 93**, чрезъ исключеніе $z$ изъ предыдущихъ уравненій; это уравненіе есть

$$ay - bx = aq - bp.$$

Для построенія прямой по даннымъ ея уравненіямъ (1), надобно найти двѣ ея точки, напримѣръ ея слѣды на двухъ плоскостяхъ координатъ, и соединить эти точки прямою. Для слѣда $P$ на плоскости $xOy$ имѣемъ $z=0$ и слѣдовательно,

$$x=p, \quad y=q,$$

т.-е. *постоянные члены* $p$ *и* $q$ *въ уравненіяхъ прямой суть координаты слѣда прямой на плоскости* $xOy$. Для слѣда $Q$ на плоскости $zOx$, должно положить $y=0$, отчего получимъ

$$bz+q=0, \quad x=az+p;$$

и

$$z=-\frac{q}{b}, \quad x=-\frac{aq}{b}+p.$$

Опредѣливъ точки $P$ и $Q$, проведемъ чрезъ нихъ прямую, которая и будетъ искомая. Для повѣрки можно опредѣлить третій слѣдъ $R$ на плоскости $yOz$. Координаты его суть: $x=0$, $z=-\frac{p}{a}$, $y=-\frac{bp}{a}+q$.

Три слѣда $P, Q, R$ совпадаютъ въ одну точку съ началомъ координатъ, когда прямая проходитъ чрезъ это начало; тогда $p=0$, $q=0$ и уравненія прямой берутъ видъ: $x=az$, $y=bz$. Для проведенія прямой въ этомъ случаѣ, надобно найти какую-нибудь точку $C$, которой координаты удовлетворяли бы уравненіямъ:

$$x=az, \quad y=bz,$$

и соединить потомъ эту точку съ началомъ координатъ.

Постоянныя $a$ и $b$ въ уравненіяхъ прямой $L$,

$$x=az+p, \quad y=bz+q,$$

зависятъ отъ угловъ, составленныхъ прямою съ координатными осями, и могутъ послужить къ вычисленію этихъ угловъ. Для удобства мы замѣнимъ данную прямую $L$ другою, ей параллельною $L'$, проведенною чрезъ начало координатъ, и означимъ буквами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ углы, которые составляетъ послѣдняя съ осями $Ox$, $Oy$, $Oz$. Уравненія прямой $L'$ суть:

$$x=az, \quad y=bz,$$

гдѣ $a$ и $b$ тѣ же, что и въ уравненіяхъ прямой $L$. Въ самомъ дѣлѣ: такъ какъ прямая $L'$ проходитъ чрезъ начало координатъ, то въ уравненіяхъ ея не должно быть постоянныхъ членовъ $p$ и $q$, а по параллельности соотвѣтственныхъ проекцій двухъ параллельныхъ прямыхъ $L$ и $L'$ коэффиціенты при $z$ въ уравненіяхъ этихъ проекцій:

$$x = az \quad \text{и} \quad x = az + p,$$
$$y = bz \quad \text{и} \quad y = bz + q$$

должны быть равны (см. **§ 25** зад. I).

Полагая, что координаты прямоугольны, означимъ чрезъ $r$ разстояніе отъ начала координатъ точки $(x, y, z)$, взятой на прямой $L'$; по доказанному въ **§ 90**, имѣемъ

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma.$$

Подставивъ эти величины координатъ въ уравненія прямой $L' : x = az$, $y = bz$, получимъ

$$r\cos\alpha = a\,r\cos\gamma, \quad r\cos\beta = b\,r\cos\gamma;$$

откуда выходитъ

$$a = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad b = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Изъ этихъ уравненій, вмѣстѣ взятыхъ, и условія

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

легко вывести слѣдующія формулы:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+1}},$$
$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+1}}. \tag{1}$$

Здѣсь предъ корнемъ должно взять знакъ $+$ или $-$, смотря потому, будетъ ли $\gamma < 90^\circ$ или $\gamma > 90^\circ$, т. е. знакъ $+$ относится къ направленію прямой $L'$, составляющему острый уголъ съ $Oz$, а знакъ $-$ къ противоположному направленію.

—* Когда оси координатъ косоугольныя, тогда $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ опредѣляются слѣдующимъ образомъ: по формуламъ (7) **§ 91** для проекцій какой-нибудь прямой на осяхъ координатъ имѣемъ:

$$r\cos\alpha = x + \nu y + \mu z = (a + b\nu + \mu)\,z$$
$$r\cos\beta = \nu x + y + \lambda z = (a\nu + b + \lambda)\,z$$
$$r\cos\gamma = \mu x + \lambda y + z = (a\mu + b\lambda + 1)\,z,$$

а по формулѣ для разстоянія точки отъ начала координатъ найдемъ:

$$r = \pm z\sqrt{a^2 + b^2 + 1 + 2\lambda b + 2\mu a + 2\nu ab}\,;$$

поэтому

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a + b\nu + \mu}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + 1 + 2\lambda b + 2\mu a + 2\nu ab}} \\ \cos\beta &= \frac{a\nu + b + \lambda}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + 1 + 2\nu b + 2\mu a + 2\nu ab}} \\ \cos\gamma &= \frac{a\mu + b\lambda + 1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + 1 + 2\lambda b + 2\mu a + 2\nu ab}} \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

* —

**97.** Задачи:

I. *Найти координаты точки пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ.*

Пусть будутъ двѣ прямыя:

$$l\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \qquad l'\begin{cases} x = a'z + p' \\ y = b'z + q'\,. \end{cases}$$

Если онѣ пересѣкаются, то величины $x$, $y$, $z$, удовлетворяющія ихъ уравненіямъ, вмѣстѣ взятымъ, будутъ координатами точки ихъ пересѣченія. Слѣдовательно, для опредѣленія этой точки, надобно рѣшить данныя уравненія относительно $x$, $y$, $z$. Но здѣсь число уравненій превышаетъ число неизвѣстныхъ, а потому можно исключить всѣ три неизвѣстныя $x$, $y$, $z$; выводъ исключенія представитъ условіе, которому должны удовлетворять постоянныя уравненія $l$ и $l'$, для того, чтобы прямыя могли пересѣкаться. Это условіе есть

$$(p' - p)\,(b - b') = (q' - q)\,(a - a'). \qquad (1)$$

Когда оно удовлетворено, тогда для опредѣленія координатъ точки пересѣченія надобно вывести величины $x$, $y$, $z$ изъ трехъ уравненій, взятыхъ между 4-мя $l$ и $l'$. Такимъ образомъ получимъ:

$$x = \frac{ap' - pa'}{a - a'}\,, \quad y = \frac{bq' - qb'}{b - b'}\,, \quad z = \frac{p' - p}{a - a'} = \frac{q' - q}{b - b'}\,.$$

Уравненіе (1) удовлетворено также въ случаѣ параллельности прямыхъ $l$ и $l'$; потому что тогда $a = a'$ и $b = b'$. Слѣдовательно, оно выражаетъ вообще условіе, что прямыя $l$ и $l'$ лежатъ въ одной плоскости.

II. *Вычислить уголъ, составляемый двумя прямыми.*

$$l\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \qquad l'\begin{cases} x = a'z + p' \\ y = b'z + q' \end{cases}$$

По формулѣ (5) **§ 91** имѣемъ

$$\cos(ll') = \cos(lx)\cos(l'x) + \cos(ly)\cos(l'y) + \cos(lz)\cos(l'z),$$

а по формуламъ (1) **§ 96**

$$\cos(lx) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos(l'x) = \frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}$$

$$\cos(ly) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos(l'y) = \frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}$$

$$\cos(lz) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos(l'z) = \frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}};$$

поэтому

$$\cos(ll') = \frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\,\sqrt{a'^2+b'^2+1}}.$$

По выраженію $\cos(ll')$ легко найти выраженія другихъ тригонометрическихъ величинъ угла $(ll')$.

Въ случаѣ взаимной перпендикулярности прямыхъ $l$ и $l'$ имѣемъ $\angle(ll') = 90^\circ$ и слѣдовательно, $\cos(ll') = 0$, т.-е.

$$aa' + bb' + 1 = 0.$$

—* Пусть $A$ и $A'$ будутъ точки, изображающія прямыя $l$ и $l'$ на поверхности шара радіуса единицы и имѣющаго центръ въ началѣ координатъ; означимъ чрезъ $x$, $y$, $z$ координаты точки $A$, чрезъ $x'$ $y'$ $z'$ координаты точки $A'$ при осяхъ координатъ косоугольныхъ, и пусть $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ будутъ проекціи длины $OA'$ на осяхъ координатъ. По формулѣ (4) **§ 91** будемъ имѣть

$$\cos(ll') = \cos(AOA') = x\alpha + y\beta + z\gamma,$$

а по формуламъ (7) того же §

$$\begin{aligned} \alpha &= x' + \nu y' + \mu z' \\ \beta &= \nu x' + y' + \lambda z' \\ \gamma &= \mu x' + \lambda y' + z'; \end{aligned}$$

слѣдовательно,

$$\cos(ll') = x(x' + \nu y' + \mu z') + y(\nu x' + y' + \lambda z') + z(\mu x' + \lambda y' + z').$$

Уравненія прямыхъ $OA$ и $OA'$ выведутся изъ уравненій прямыхъ $l$ и $l'$, если положимъ $p = 0$, $p' = 0$, $q = 0$, $q' = 0$; поэтому уравненія этихъ прямыхъ будутъ:

$$x = az \quad x' = a'z'$$
$$y = bz \quad y' = b'z';$$

отчего предыдущая формула приметъ видъ

$$\cos(ll') = [a(a' + \nu b' + \mu) + b(\nu a' + b' + \lambda) + \mu a' + \lambda b' + 1]zz'.$$

По формулѣ для квадрата разстоянія точки отъ начала координатъ имѣемъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda yz + 2\mu xz + 2\nu xy = AO^2 = 1$$

или

$$(a^2 + b^2 + 1 + 2\lambda b + 2\mu a + 2\nu ab)z^2 = 1,$$

откуда

$$z = \frac{1}{\pm\sqrt{[a^2 + b^2 + 1 + 2\lambda b + 2\mu a + 2\nu ab]}};$$

также найдемъ

$$z' = \frac{1}{\pm\sqrt{[a'^2 + b'^2 + 1 + 2\lambda b' + 2\mu a' + 2\nu a'b']}};$$

слѣдовательно, окончательно

$$\cos(ll') =$$

$$= \frac{aa' + bb' + 1 + \lambda(b + b') + \mu(a + a') + \nu(ab' + ba')}{\sqrt{[a^2 - b^2 + 1 + 2\lambda b + 2\mu a + 2\nu ab]\,[a'^2 + b'^2 + 1 + 2\lambda b' + 2\mu a' + 2\nu a'b']}}.$$

Условіе перпендикулярности прямыхъ $l$ и $l'$ есть

$$aa' + bb' + 1 + \lambda(b + b') + \mu(a + a') + \nu(ab' + ba') = 0.$$

* —

III. *Вывести уравненія прямой, проведенной чрезъ двѣ данныя точки.*

Пусть будутъ $(x'\ y'\ z')$ и $(x'', y'', z'')$ данныя точки, чрезъ которыя должно провести прямую, а

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

уравненія искомой прямой, гдѣ $a$, $b$, $p$ и $q$ неизвѣстныя количества.

По условію, что прямая должна пройти чрезъ точку $M$, имѣемъ

$$x' = az' + p, \quad y' = bz' + q'.$$

Для исключенія неизвѣстныхъ $p$ и $q$, вычтемъ эти два уравненія изъ двухъ предыдущихъ; отъ этого получимъ:

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z'). \tag{1}$$

По неопредѣленности $a$ и $b$, эти уравненія принадлежатъ всякой прямой, проходящей чрезъ точку $(x', y', z')$. Чтобы они принадлежали искомой прямой, надобно, чтобы координаты точки $(x'', y'', z'')$ имъ удовлетворяли, т.-е.

$$x'' - x' = a(z'' - z'), \quad y'' - y' = b(z'' - z');$$

откуда выводимъ

$$a = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}, \quad b = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}.$$

Подставивъ эти величины $a$ и $b$ въ уравненіе (1), получимъ:

$$x - x' = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}(z - z')$$

для уравненій искомой прямой. Эти уравненія могутъ быть представлены подъ видомъ

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{z - z'}{z'' - z'} \tag{2}$$

и показываютъ, что *разности между координатами произвольной точки прямой и координатами одной изъ данныхъ точекъ пропорціональны разностямъ координатъ данныхъ точекъ.*

Помощью уравненія (2) можно доказать очень просто, что всякое уравненіе первой степени,

$$Ax + By + Cz = D, \tag{3}$$

принадлежитъ плоскости. Возьмемъ на поверхности, которой принадлежитъ уравненіе (3), произвольно двѣ точки: $(x', y', z')$, $(x'', y'', z'')$, проведемъ чрезъ нихъ прямую (2) и докажемъ, что каждая точка этой прямой находится на поверхности (3). Такъ какъ точки $(x', y', z')$, $(x'', y'', z'')$ находятся на поверхности (3), то

$$Ax' + By' + Cz' = D, \quad Ax'' + By'' + Cz'' = D;$$

отсюда выводимъ

$$A(x'' - x') + B(y'' - y') + C(z'' - z') = 0,$$

что, вслѣдствіе уравненія (2), даетъ

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0.$$

или

$$Ax+By+Cz=Ax'+By'+Cz'=D,$$

а это показываетъ, что координаты какой-нибудь точки $(x, y, z)$, взятой на прямой (2), удовлетворяютъ уравненію (3); слѣдовательно, прямая, проведенная чрезъ двѣ какія-нибудь точки поверхности (3), лежитъ на поверхности всѣми своими точками. А это свойство принадлежитъ только плоскости.

IV. *Найти уравненія прямой, проходящей чрезъ данную точку и параллельной данной прямой.*

Пусть $(x'\ y',\ z')$ будетъ данная точка, а

$$x=az+p,\quad y=bz+q$$

уравненія данной прямой.

Уравненія всякой прямой, проходящей чрезъ данную точку, какъ мы видѣли въ предыдущей задачѣ, имѣютъ видъ:

$$x-x'=a(z-z'),$$
$$y+y'=b(z-z').$$

Эти уравненія будутъ принадлежать искомой прямой, если положимъ, что въ нихъ $a$ и $b$ тѣ же, что и въ уравненіяхъ данной прямой, по условію параллельности.

V. *Найти уравненія прямой, проходящей чрезъ данную точку $(x', y', z')$ и перпендикулярной къ прямой:*

$$x=az+p,\quad y=bz+q.$$

Уравненіе всякой прямой, проходящей чрезъ данную точку, могутъ быть представлены подъ видомъ

$$x-x'=a'(z-z'),\quad y-y'=b'(z-z'),\tag{1}$$

гдѣ $a'$ и $b'$ неизвѣстны. По условію, что прямая должна быть перпендикулярна къ данной, имѣемъ (въ случаѣ прямоугольныхъ осей) для опредѣленія этихъ неизвѣстныхъ только одно уравненіе

$$aa'+bb'+1=0\quad \text{(см. задач. II)}.\tag{2}$$

Этого недостаточно для опредѣленія двухъ неизвѣстныхъ $a'$ и $b'$, а потому задача остается неопредѣленною. Въ самомъ дѣлѣ: чрезъ данную точку можно провести множество перпендикуляровъ къ данной прямой, находящихся въ одной плоскости, перпендикулярной къ этой прямой. Подставивъ величины $a'$ и $b'$, выведенныя изъ уравненій (1), въ условіе (2), получимъ уравненіе

$$\frac{a(x-x')}{z-z'}+\frac{b(y-y')}{z-z'}+1=0$$

или

$$a(x-x')+b(y-y')+(z-z')=0, \tag{3}$$

принадлежащее этой плоскости, въ чемъ легко удостовѣриться слѣдующимъ образомъ: уравненіе (3) первой степени относительно $x, y, z$, а потому оно принадлежитъ плоскости; ему удовлетворяютъ координаты данной точки: $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$, и также координаты всякой точки прямой (1), перпендикулярной къ данной; потому что, отъ подстановленія $a'(z-z')$, $b'(z-z')$ вмѣсто $x-x'$ и $y-y'$ въ первую часть уравненія, получимъ

$$aa'(z-z')+bb'(z-z')+(z-z')$$

или

$$(aa'+bb'+1)(z-z'),$$

что будетъ равно нулю по условію перпендикулярности прямой (1) къ данной:

$$aa'+bb'+1=0.$$

Чтобы прямая (1), проведенная чрезъ данную точку, пересѣкала данную прямую, должно быть удовлетворено условіе

$$(p'-p)(b-b')=(q'-q)(a-a'), \text{ (задача I)},$$

которое въ настоящемъ случаѣ приведется къ слѣдующему:

$$(x'-az'-p)(b-b')=(y'-bz'-q)(a-a'),$$

или

$$(y'-bz'-q)a'-(x'-az'-p)b'=(y'-q)a-(x'-p)b.$$

Подставивъ сюда вмѣсто $a'$ и $b'$ ихъ величины, выведенныя изъ уравненія (1), получимъ

$$(y'-bz'-q)(x-x')-(x'-az'-p)(y-y')=$$
$$=[(y'-q)a-(x'-p)b](z-z'). \tag{4}$$

Легко видѣть, что этому уравненію удовлетворяютъ координаты данной точки $(x', y', z')$ и координаты всякой точки данной прямой;

поэтому уравненіе принадлежитъ плоскости, проходящей чрезъ данную точку и данную прямую. Два уравненія (3) и (4), вмѣстѣ взятыя, принадлежатъ перпендикуляру, опущенному изъ данной точки на данную прямую и пересѣкающему эту прямую.

—* Въ случаѣ косоугольныхъ осей вмѣсто уравненія (3) имѣемъ

$$(a+\nu b+\mu)(x-x')+(\nu a+b+\lambda)(y-y')+$$
$$+(\mu a+\lambda b+1)(z-z')=0.$$

*—

VI. *Найти пересѣченіе прямой съ плоскостью.*

Пусть

$$x=az+p, \quad y=bz+q$$

будутъ уравненія данной прямой и

$$Ax+By+Cz=D$$

уравненіе данной плоскости.

Координаты точки пересѣченія прямой съ плоскостью должны удовлетворять всѣмъ тремъ уравненіямъ, а потому, по разрѣшеніи этихъ уравненій относительно $x$, $y$, $z$, найдемъ координаты искомой точки. Исключивъ $x$ и $y$, получимъ

$$(Aa+Bb+C)z+Ap+Bq=D; \tag{1}$$

откуда выходитъ

$$x=\frac{D-Ap-Bq}{Aa+Bb+C}.$$

Подставивъ эту величину $z$ въ уравненія данной прямой, найдемъ:

$$x=\frac{(D-Ap-Bq)a+(Aa+Bb+C)p}{Aa+Bb+C},$$

$$y=\frac{(D-Ap-Bq)b+(Aa+Bb+C)q}{Aa+Bb+C}.$$

Если случится, что

$$Aa+Bb+C=0,$$

но $D-Ap-Bq$ не равно нулю, то $z$ будетъ безконечно большая величина, и данная прямая не пересѣчетъ плоскость, т. е. будетъ ей параллельна.

Когда $Aa+Bb+C=0$ вмѣстѣ съ $D-Ap-Bq=0$, тогда величины $x$, $y$, $z$ неопредѣленны; слѣдовательно, плоскость и прямая будутъ имѣть безчисленное множество общихъ точекъ; для этого прямая должна лежать въ плоскости.

Итакъ,

$$Aa + Bb + C = 0$$

есть условіе параллельности прямой съ плоскостью, а

$$Aa + Bb + C = 0 \quad \text{и} \quad Ap + Bq = D$$

условія совмѣстимости прямой съ плоскостью.

VII. *Найти пересѣченіе двухъ плоскостей:*

$$Ax + By + Cz = D,$$
$$A'x + B'y + C'z = D'.$$

Эти уравненія, взятыя вмѣстѣ, опредѣляютъ уже пересѣченіе данныхъ плоскостей. Изъ нихъ легко вывести уравненія плоскостей, проектирующихъ это пересѣченіе на координатныя плоскости; для этого должно исключить изъ данныхъ уравненій по очереди $x$, $y$, $z$; такимъ образомъ найдемъ:

$$(BA' - AB')\,y + (CA' - AC')\,z = DA' - AD'$$

для плоскости, проектирующей прямую на плоскость $yOz$,

$$(AB' - BA')\,x + (CB' - BC')\,z = DB' - BD'$$

для плоскости, проектирующей на $xOz$, и

$$(AC' - CA')\,x + (BC' - CB')\,y = DC' - CD'$$

для плоскости, проектирующей на $xOy$. Эти три плоскости не существуютъ, когда

$$BA' - AB' = 0, \quad CA' - AC' = 0, \quad BC' - CB' = 0,$$

т.-е. когда

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'};$$

въ такомъ случаѣ данныя плоскости не пересѣкаются т.-е. онѣ параллельны. Слѣдовательно, послѣднія равенства выражаютъ условія параллельности двухъ плоскостей.

VIII. *Вычислить уголъ, составляемый двумя плоскостями:*

$$Ax + By + Cz = D,$$
$$A'x + B'y + C'z = D'.$$

Пусть будутъ $l$ и $l'$ перпендикуляры, опущенные на эти плоскости изъ начала кординатъ. Уголъ $(ll')$, составляемый этими прямыми, будетъ мѣрою двуграннаго угла, заключающагося между данными плоскостями. Въ случаѣ прямоугольныхъ осей по формулѣ (5) **§ 91** имѣемъ:

$$\cos(ll') = \cos(lx)\cos(l'x) + \cos(ly)\cos(l'y) + \cos(lz)\cos(l'z),$$

а по формуламъ **§ 94** для косинусовъ угловъ, составляемыхъ тою или другою плоскостью съ плоскостями координатъ:

$$\cos(lx) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos(l'x) = \frac{A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$
$$\cos(ly) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos(l'y) = \frac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$
$$\cos(lz) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos(l'z) = \frac{C'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

слѣдовательно,

$$\cos(ll') = \frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

По косинусу легко найти и другія тригонометрическія величины угла $(ll')$.

Въ случаѣ перпендикулярности двухъ плоскостей будетъ: $ll' = 90^\circ$ и $\cos(ll') = 0$; для этого должно быть удовлетворено условіе

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

— * Можно получить самое общее выраженіе $\cos(ll')$, при какихъ ни есть осяхъ координатъ, слѣдующимъ образомъ:

Означимъ чрезъ $P$ и $P'$ параметры функцій

$$Ax + By + Cz \quad \text{и} \quad A'x + B'y + C'z,$$

см. **§ 94**, и пусть $x$, $y$, $z$ будутъ координаты конца прямой $P$, полагая, что ея начало есть начало координатъ; мы будемъ имѣть

$$\cos(ll') = \cos(PP') = \frac{A'x + B'y + C'z}{PP'},$$

$$P^2 = \frac{1}{\Delta}\left[(1-\lambda^2)A^2 + (1-\mu^2)B^2 + (1-\nu^2)C^2 + 2(\mu\nu-\lambda)BC + \right.$$
$$\left. + 2(\lambda\nu-\mu)CA + 2(\lambda\mu-\nu)AB\right]$$

$$P'^2 = \frac{1}{\Delta}\left[(1-\lambda^2)A'^2 + (1-\mu^2)B'^2 + (1-\nu^2)C'^2 + 2(\mu\nu-\lambda)B'C' + \right.$$
$$\left. + 2(\lambda\nu-\mu)C'A' + 2(\lambda\mu-\nu)A'B'\right],$$

а положивъ $\frac{1}{2}P^2 = Q$, $\frac{1}{2}P'^2 = Q'$, по формуламъ (15) **§ 91** получимъ:

$$x = \frac{\partial Q}{\partial A}, \quad y = \frac{\partial Q}{\partial B}, \quad z = \frac{\partial Q}{\partial C};$$

слѣдовательно,

$$\cos(ll') = \cos(PP') = \frac{1}{\sqrt{2Q}\sqrt{2Q'}}\left[A'\frac{\partial Q}{\partial A} + B'\frac{\partial Q}{\partial B} + C'\frac{\partial Q}{\partial C}\right].$$

* —

IX. *Вычислить уголъ, составленный прямою*

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

*съ плоскостью*

$$Ax + By + Cz = D.$$

Пусть будетъ $N$ данная плоскость, $OA$ прямая, параллельная данной, проведенная чрезъ начало координатъ и встрѣчающая плоскость въ точкѣ $A$, а $OB$ перпендикуляръ, опущенный на данную плоскость изъ начала координатъ. Искомый уголъ будетъ $(OAB)$. Онъ служитъ дополненіемъ до $90°$ къ углу $AOB$; поэтому

$$\sin(OAB) = \cos(AOB).$$

Означивъ чрезъ $l$ и $l'$ направленія прямыхъ $OA$ и $OB$, имѣемъ при осяхъ прямоугольныхъ:

$$\sin(OAB) = \cos(AOB) = \cos(ll') =$$

$$= \cos(lx)\cos(l'x) + \cos(ly)\cos(l'y) + \cos(lz)\cos(l'z);$$

но

$$\cos(lx) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos(l'x) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos(ly) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos(l'y) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos(lz) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos(l'z) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

слѣдовательно,

$$\sin(OAB) = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

Когда данная прямая параллельна данной плоскости, тогда $\angle\, OAB = 0$, $\sin(OAB) = 0$ и слѣдовательно,

$$Aa + Bb + C = 0.$$

Это условіе параллельности прямой съ плоскостью было уже найдено въ рѣшеніи задачи VI.

—* Въ случаѣ косоугольныхъ координатъ, если $P$ параметръ функціи

$$Ax + By + Cz,$$

то уголъ прямой $l$ съ плоскостью будетъ дополненіемъ угла $Pl$. Легко найти, что

$$\sin(OAB) = \cos(Pl) = \frac{Aa + Bb + C}{P\sqrt{a^2 + b^2 + 1 + 2\lambda b + 2\mu a + 2\nu ab}},$$

и условіе параллельности прямой съ плоскостью будетъ вообще

$$Aa + Bb + C = 0.$$

*—

X. *Провести плоскость чрезъ три данныя точки:*

$$(x', y', z'), \quad (x'', y'', z'') \quad \text{и} \quad (x''', y''', z''').$$

Пусть $Ax + By + Cz = D$ будетъ уравненіе искомой плоскости.

Условіе, что плоскость должна пройти чрезъ точку $(x', y' z')$, даетъ:

$$Ax' + By' + Cz' = D;$$

вычтя это уравненіе изъ уравненія плоскости, для исключенія неизвѣстнаго $D$, получимъ уравненіе

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0, \tag{1}$$

принадлежащее всякой плоскости, проходящей чрезъ точку $(x', y', z')$. Чтобы точка $(x'', y'', z'')$ находилась также въ плоскости, должно быть удовлетворено условіе

$$A(x'' - x') + B(y'' - y') + C(z'' - z') = 0. \tag{2}$$

Исключивъ $C$ изъ уравненій (1) и (2), получимъ уравненіе

$$\begin{gathered} A[(z'' - z')(x - x') - (x'' - x')(z - z')] + \\ B[(z'' - z')(y - y') - (y'' - y')(z - z')] = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

принадлежащее всякой плоскости, проходящей чрезъ точки: $(x', y', z')$, $(x'', y'', z'')$. А чтобы плоскость проходила чрезъ третью точку, должно быть удовлетворено условіе

$$\begin{gathered} A[(z'' - z')(x''' - x') - (x'' - x')(z''' - z')] + \\ B[(z'' - z')(y''' - y') - (y'' - y')(z''' - z')] = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

Исключивъ неизвѣстныя $A$ и $B$ изъ уравненій (3) и (4), получимъ окончательное уравненіе

$$\frac{(z''-z')(x-x')-(x''-x')(z-z')}{(z''-z')(x'''-x')-(x''-x')(z'''-z')}=$$

$$=\frac{(z''-z')(y-y')-(y''-y')(z-z')}{(z''-z')(y'''-y')-(y''-y')(z'''-z')}, \tag{5}$$

принадлежащее искомой плоскости. Уравненіе (4) становится тожественнымъ, когда три данныя точки находятся на одной прямой; потому что тогда

$$\frac{x'''-x'}{x''-x'}=\frac{y'''-y'}{y''-y'}=\frac{z'''-z'}{z''-z'} \text{ (см. зад. III)}$$

или

$$(z''-z')(x'''-x')-(x''-x')(z'''-z')=0,$$

$$(z''-z')(y'''-y')-(y''-y')(z'''-z')=0.$$

Въ такомъ случаѣ въ уравненіи плоскости (3) величины $A$ и $B$ остаются неопредѣленными; слѣдовательно, можно провести множество плоскостей чрезъ три точки, находящіяся на одной прямой.

Можно вывести прямо уравненіе плоскости, проходящей чрезъ три данныя точки слѣдующимъ образомъ:

По условію, что плоскость

$$Ax+By+Cz=D$$

проходитъ чрезъ данныя точки, имѣемъ уравненія:

$$Ax'+By'+Cz'=D,$$
$$Ax''+By''+Cz''=D,$$
$$Ax'''+By'''+Cz'''=D,$$

изъ которыхъ, по общимъ формуламъ для рѣшенія уравненій первой степени, выводимъ:

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{y''z'''-z''y'''+y'z''-y''z'+z'y'''-z'''y'}{x'y''z'''-x'z''y'''+y'z''x'''-y'x''z'''+z'x''y'''-z'y''x'''}D\\
B&=\frac{x'z'''-x'''z'+z''x'''-x''z'''+z'x''-z''x'}{x'y''z'''-x'z''y'''+y'z''x'''-y'x''z'''+z'x''y'''-z'y''x'''}D\\
C&=\frac{x'y''-x''y'+y'x'''-y'''x'+x''y'''-y''x'''}{x'y''z'''-x'z''y'''+y'z''x'''-y'x''z'''+z'x''y'''-z'y''x'''}D
\end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Подставивъ эти величины въ уравненіе

$$Ax + By + Cz = D$$

и раздѣливъ уравненіе на $D$, получимъ искомое уравненіе плоскости. Это уравненіе отличается по виду отъ уравненія (5); но нетрудно удостовѣриться, что оба уравненія тожественны.

— * Формулы (6) могутъ быть представлены подъ видомъ

$$A:B:C:D = \begin{vmatrix} 1 & y' & z' \\ 1 & y'' & z'' \\ 1 & y''' & z''' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x' & 1 & z' \\ x'' & 1 & z'' \\ x''' & 1 & z''' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

(см. приб. I), а уравненіе искомой плоскости подъ видомъ

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x' & y' & z' \\ 1 & x'' & y'' & z'' \\ 1 & x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

или также подъ видомъ

$$\begin{vmatrix} x - x', & y - y', & z - z' \\ x'' - x', & y'' - y', & z'' - z' \\ x''' - x', & y''' - y', & z''' - z' \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

Когда $\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0$, тогда ур. (7) приводится къ слѣдующему:

$$\begin{vmatrix} 1 & y' & z' \\ 1 & y'' & z'' \\ 1 & y''' & z''' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x' & 1 & z' \\ x'' & 1 & z'' \\ x''' & 1 & z''' \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} z = 0,$$

принадлежащему плоскости, проходящей чрезъ начало координатъ. Поэтому, *если опредѣлитель, составленный изъ координатъ трехъ точекъ, равенъ нулю, то эти точки находятся въ одной плоскости съ началомъ координатъ.*

Если три данныя точки находятся на одной прямой, то

$$\begin{vmatrix} y'' - y', & z'' - z' \\ y''' - y', & z''' - z' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} z'' - z', & x'' - x' \\ z''' - z', & x''' - x' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x'' - x', & y'' - y' \\ x''' - x', & y''' - y' \end{vmatrix} = 0,$$

и уравненіе (8) беретъ неопредѣленный видъ

$$0 \,.\, (x - x') + 0 \,.\, (y - y') + 0 \,.\, (z - z') = 0.$$

XI. *Провести плоскость чрезъ данныя прямыя:*

* —

$$l \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases} \quad l' \begin{cases} x = a'z + p', \\ y = b'z + q'. \end{cases}$$

Пусть

$$Ax + By + Cz = D \tag{1}$$

будетъ уравненіе искомой плоскости. Условіе, что данныя прямыя лежатъ въ этой плоскости, выражается уравненіями:

$$Aa + Bb + C = 0, \tag{2}$$

$$Ap + Bq = D, \tag{3}$$

$$Aa' + Bb' + C = 0, \tag{4}$$

$$Ap' + Bq' = D. \tag{5}$$

Чрезъ исключеніе $A$, $B$, $C$, $D$ изъ этихъ уравненій, легко вывести условіе, найденное въ рѣшеніи задачи I,

$$(p' - p)\,(b - b') = (q' - q)\,(a - a'), \tag{6}$$

выражающее то, что прямыя лежатъ въ одной плоскости, слѣдовательно, одно изъ предыдущихъ уравненій есть слѣдствіе прочихъ. Помноживъ уравненіе (2) на $z$ и вычтя произведеніе изъ уравненія (1), для исключенія $C$, получимъ

$$A\,(x - az) + B\,(y - bz) = D,$$

а вычтя отсюда уравненіе (3) для исключенія $D$, найдемъ

$$A\,(x - az - p) + B\,(y - bz - q) = 0. \tag{7}$$

Исключивъ также $D$ изъ уравненій (3) и (5), будемъ имѣть

$$A\,(p - p') + B\,(q - q') = 0. \tag{8}$$

Исключивъ $A$ и $B$ изъ уравненій (7) и (8), получимъ

$$(x - az - p)\,(q - q') = (y - bz - q)\,(p - p') \tag{9}$$

для уравненія искомой плоскости. Этому уравненію можно дать видъ

$$(x - az - p)\,(b - b') = (y - bz - q)\,(a - a'), \tag{10}$$

исключивъ помощью уравненія (6) разности $p - p'$ и $q' - q'$. Въ случаѣ $p = p'$ и $q = q'$ уравненіе (9) становится неопредѣленнымъ; тогда должно взять уравненіе (10). А въ случаѣ $a = a'$ и $b = b'$, т.-е. когда данныя прямыя параллельны, уравненіе (10) становится неопредѣленнымъ, и тогда должно взять уравненіе (9).

XII. *Провести плоскость чрезъ точку* $(x', y', z')$ *и прямую*

$$x = az + p,$$

$$y = bz + q.$$

Пусть $Ax + By + Cz = D$ будетъ уравненіе искомой плоскости.

Условіе совмѣстимости прямой съ плоскостью даетъ

$$Aa + Bb + C = 0, \tag{1}$$

$$Ap + Bq = D \tag{2}$$

(задача VI). Такъ же, какъ въ предыдущей задачѣ, для исключенія $C$, помножимъ уравненіе (1) на $z$ и вычтемъ изъ уравненія плоскости; отъ этого получимъ

$$A(x - az) + B(y - bz) = D;$$

потомъ, для исключенія $D$, вычтемъ изъ послѣдняго уравненіе (2); отчего получимъ

$$A(x - az - p) + B(y - bz - q) = 0. \tag{3}$$

Этому уравненію должны удовлетворять координаты данной точки; слѣдовательно,

$$A(x' - az' - p) + B(y' - bz' - q) = 0. \tag{4}$$

Исключивъ $A$ и $B$ изъ уравненій (3) и (4), получимъ уравненіе

$$(y' - bz' - q)(x - az - p) - (x' - az' - p)(y - bz - q) = 0,$$

принадлежащее искомой плоскости.

XIII. *Провести плоскость чрезъ данную точку* $(x', y', z')$ *параллельно данной плоскости*

$$Ax + By + Cz = D.$$

Пусть будетъ

$$A'x + B'y + C'z = D'.$$

уравненіе искомой плоскости.

По условію, что эта плоскость должна проходить чрезъ данную точку, имѣемъ

$$A'x' + B'y' + C'z' = D'.$$

Вычтя это уравненіе изъ предыдущаго, для исключенія $D'$, получимъ

$$A'(x - x') + B'(y - y') + C'(z - z') = 0, \qquad (1)$$

уравненіе, принадлежащее всякой плоскости, проходящей чрезъ данную точку. По условію параллельности плоскостей, имѣемъ

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$$

(см. задачу VII). Такъ какъ уравненіе (1) не перемѣнится, если замѣнимъ $A'$, $B'$, $C'$ величинами, имъ пропорціональными, то можно подставить въ него вмѣсто $A'$, $B'$, $C'$ соотвѣтственно $A$, $B$, $C$; отчего получимъ

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0,$$

уравненіе, принадлежащее искомой плоскости.

XIV. *Провести плоскость чрезъ данную точку* $(x, y, z)$ *перпендикулярно къ данной прямой*

$$x = az + p, \quad y = bz + q.$$

Уравненіе всякой плоскости, проходящей чрезъ данную точку, имѣетъ видъ

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0. \qquad (1)$$

По условію перпендикулярности прямой къ плоскости, косинусы угловъ, составляемыхъ прямою съ осями координатъ, и косинусы угловъ, составляемыхъ плоскостью съ плоскостями координатъ, соотвѣтственно равны; слѣдовательно, при осяхъ прямоугольныхъ имѣемъ:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{b^2 + b^2 + 1}} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

отсюда

$$a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C}.$$

Раздѣливъ уравненіе (1) на $C$ и подставивъ $a$ и $b$ соотвѣтственно вмѣсто $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, получимъ уравненіе

$$a(x-x')+b(y-y')+(z-z')=0.$$

принадлежащее искомой плоскости *).

XV. *Провести чрезъ данную точку* $(x', y', z')$ *прямую, перпендикулярную къ данной плоскости*

$$Ax+By+Cz=D, \tag{1}$$

*и опредѣлить разстояніе точки отъ плоскости.*

Пусть будутъ

$$x=az+p, \quad y=bz+q \tag{2}$$

уравненія искомаго перпендикуляра. По условію, что онъ проходитъ чрезъ данную точку, имѣемъ

$$x'=az'+p, \quad y'=bz'+q.$$

Для исключенія неизвѣстныхъ $p$ и $q$, вычтемъ эти уравненія соотвѣтственно изъ уравненія (2); отъ этого получимъ

$$x-x'=a(z-z')$$
$$y-y'=b(z-z').$$

А условіе перпендикулярности прямой къ плоскости даетъ

$$a=\frac{A}{C}, \quad b=\frac{B}{C};$$

слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned} x-x'&=\frac{A}{C}(z-z') \\ y-y'&=\frac{B}{C}(z-z') \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

будутъ уравненія искомаго перпендикуляра. Величины $x$, $y$, $z$, удовлетворяющія уравненію (3) вмѣстѣ съ уравненіемъ данной плоскости, принадлежатъ точкѣ пересѣченія перпендикуляра съ пло-

---

*) Это уравненіе было уже выведено при рѣшеніи задачи V (ур. 3). Въ случаѣ косоугольныхъ осей оно беретъ видъ

$$(a+\nu b+\mu)(x-x')+(\nu a+b+\lambda)(y-y')+(\mu a+\lambda b+1)(z-z')=0.$$

скостью. Разстояніе этой точки отъ данной равно разстоянію данной точки отъ плоскости. Означивъ это разстояніе чрезъ $r$, имѣемъ

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

или

$$r^2 = u^2 + v^2 + w^2, \tag{4}$$

гдѣ для сокращенія положено:

$$x - x' = u, \quad y - y' = v, \quad z - z' = w.$$

Остается опредѣлить величины $u$, $v$, $w$, подставить ихъ въ выраженіе $r^2$ и извлечь корень квадратный.

По уравненію (3) имѣемъ

$$u = \frac{A}{C} w, \quad v = \frac{B}{C} w, \tag{5}$$

а отъ подстановленія въ уравненіе плоскости (1) величинъ $x = x' + u$, $y = y' + v$, $z = z' + w$, получимъ

$$Ax' + Au + By' + Bv + Cz' + Cw = D$$

или

$$Au + Bv + Cw = K, \tag{6}$$

гдѣ для сокращенія положено

$$D - Ax' - By' - Cz' = K.$$

Исключивъ $u$ и $v$ изъ уравненія (6) помощью уравненія (5), получимъ

$$\frac{A^2}{C} w + \frac{B^2}{C} w + Cw = K;$$

откуда выходитъ

$$w = \frac{KC}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Подставивъ эту величину $w$ въ уравненіе (5), найдемъ

$$u = \frac{AK}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad v = \frac{BK}{A^2 + B^2 + C^2};$$

поэтому

$$r^2 = u^2 + v^2 + w^2 = \frac{(A^2 + B^2 + C^2) K^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} = \frac{K^2}{A^2 + B^2 + C^2};$$

слѣдовательно, искомое разстояніе точки отъ плоскости есть

$$r = \frac{\pm K}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm \frac{Ax'+By'+Cz'-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Должно взять $+$ или $-$ предъ формулою, смотря по тому, будетъ-ли числитель положительный или отрицательный.

— *Эта задача рѣшается очень просто, какъ въ случаѣ прямоугольныхъ, такъ и косоугольныхъ осей, также слѣдующимъ образомъ.

Пусть $P$ будетъ параметръ линейной функціи, находящейся въ первой части уравненія (1), т.-е. прямая опредѣленной длины, у которой проекціи на осяхъ координатъ суть $A$, $B$, $C$ (**§ 94**); причемъ за начало этой прямой возьмемъ какую-нибудь точку $(x, y, z)$ на плоскости (1), и означимъ чрезъ $\rho$ разстояніе этой точки отъ данной $(x', y', z')$, разсматривая первую точку какъ начало отрѣзка $\rho$. По формулѣ (4) **§ 91** будемъ имѣть

$$P\rho\cos(P\rho) = A(x'-x) + B(y'-y) + C(z'-z) =$$
$$= Ax'+By'+Cz' - (Ax+By+Cz);$$

или, принявъ во вниманіе уравненіе (1),

$$P\rho\cos(P\rho) = Ax'+By'+Cz'-D.$$

Здѣсь $\rho\cos(P\rho)$ есть проекція $\rho$ на $P$, а она равна $\pm r$; слѣдовательно,

$$r = \pm\frac{1}{P}(Ax'+By'+Cz'-D), \qquad (7)$$

гдѣ

$$P = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sqrt{[(1-\lambda^2)A^2+(1-\mu^2)B^2+(1-\nu^2)C^2+ \overline{+2(\mu\nu-\lambda)BC+2(\lambda\nu-\mu)CA+2(\lambda\mu-\nu)AB]}}$$

и знакъ $\pm$ должно взять, смотря по тому, будетъ-ли точка $(x', y', z')$ находиться съ той стороны плоскости, куда направленъ параметръ, или со стороны противоположной.

XVI. *Найти кратчайшее разстояніе точки* $(x', y', z')$ *отъ прямой* $l$, *проходящей чрезъ данную точку* $(x'', y'', z'')$.

Пусть будетъ $r$ искомое разстояніе, $\rho$ разстояніе между данными точками, а $\rho'$ проекція $\rho$ на прямой $l$.

Очевидно, что $\rho$ есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника, въ которомъ катеты суть $r$ и длина $\rho'$; поэтому

$$r = \sqrt{\rho^2 - \rho'^2}. \qquad (1)$$

По формулѣ (10) **§ 91** для квадрата разстоянія между двумя точками имѣемъ:

$$\rho^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 + 2\lambda (y' - y'')(z' - z'') +$$
$$+ 2\mu (z' - z'')(x' - x'') + 2\nu (x' - x'')(y' - y''),$$

а по формулѣ (3) того же **§**:

$$\rho' = (x' - x'')\cos(lx) + (y' - y'')\cos(ly) + (z' - z'')\cos(lz).$$

Подставивъ эти выраженія въ формулу (1), выразимъ $r$ посредствомъ данныхъ величинъ. Если прямая $l$ дана уравненіями

$$x = az + p, \quad y = bz + q,$$

то для точки $(x''\,y''\,z'')$ можно взять слѣдъ прямой на плоскости $(xy)$; тогда $x'' = p$, $y'' = q$, $z'' = 0$. Для $\cos(lx)$, $\cos(ly)$, $\cos(lz)$ будемъ имѣть выраженія, выведенныя въ **§ 96**. При осяхъ прямоугольныхъ найдемъ

$$r = \sqrt{(x' - p)^2 + (y' - q)^2 + z'^2 - \frac{[a(x' - p) + b(y' - q) + z']^2}{a^2 + b^2 + 1}}.$$

XVII. *Найти разстояніе между двумя параллельными плоскостями*

$$Ax + By + Cz = D$$
$$A'x + B'y + C'z = D'.$$

Означивъ чрезъ $r$ искомое разстояніе, помощью разстояній плоскостей отъ начала координатъ, найдемъ

$$r = \pm \frac{1}{P}(D - D'),$$

гдѣ $P$ есть параметръ линейной функціи $Ax + By + Cz$.

XVIII. *Найти кратчайшее разстояніе между двумя прямыми* $l$ и $l'$. Проведемъ чрезъ прямую $l$ плоскость $P$, параллельную прямой $l'$, и чрезъ $l'$ плоскость $P'$, параллельную $l$, и найдемъ разстояніе между плоскостями: $P$ и $P'$.

Если уравненія прямыхъ суть:

$$l\begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases} \quad \text{и} \quad l'\begin{cases} x = a'z + p', \\ y = b'z + q', \end{cases}$$

и оси координатъ прямоугольныя, то искомое разстояніе есть

$$r = \pm \frac{(p-p')(b-b') - (q-q')(a-a')}{\sqrt{[(a-a')^2 + (b-b')^2 + (ab'-ba')^2]}}.$$

Числитель этого выраженія обращается въ нуль, когда прямыя пересѣкаются (см. зад. 1); слѣдовательно, тогда $r = 0$.

Выраженіе $r$ беретъ неопредѣленный видъ, когда прямыя параллельны. Въ такомъ случаѣ разстояніе между прямыми равно разстоянію какой-нибудь точки одной прямой отъ другой прямой; напримѣръ разстоянію $r$ слѣда $(p', q', 0)$ прямой $l'$ на плоскости $xy$ отъ прямой $l$. Это разстояніе мы найдемъ по формулѣ, выведенной въ рѣшеніи задачи XV, а именно:

$$r = \sqrt{(p'-p)^2 + (q'-q)^2 - \frac{[a(p'-p) + b(q'-q)]^2}{a^2+b^2+1}}.$$

**98.** По формулѣ, найденной выше [зад. XV, (7)], для разстоянія $\delta$ точки $(x, y, z)$ отъ плоскости $Ax + By + Cz = D$, имѣемъ

$$\delta = \frac{1}{P}(Ax + By + Cz - D), \tag{1}$$

гдѣ $P$ есть параметръ функціи $Ax + By + Cz$, а $\delta$ положительная или отрицательная величина, смотря по тому, находится ли точка $(x, y, z)$ относительно плоскости съ той стороны, куда направленъ параметръ $P$, или со стороны противоположной. Поэтому неравенство

$$Ax + By + Cz - D > 0$$

принадлежитъ пространству, находящемуся со стороны параметра, а неравенство

$$Ax + By + Cz - D < 0$$

остальному пространству.

Два неравенства

$$Ax + By + Cz - D > 0 \quad \text{и} \quad A'x + B'y + C'z - D' > 0$$

принадлежатъ пространству, находящемуся въ двугранномъ углѣ, составленномъ плоскостями:

$$Ax + By + Cz - D = 0, \quad A'x + B'y + C'z - D' = 0,$$

и находящемуся относительно каждой плоскости съ той стороны, куда направленъ параметръ функціи, представляющей первую часть неравенства.

Три неравенства

$$Ax + By + Cz - D > 0, \quad A'x + B'y + C'z - D' > 0,$$
$$A''x + B''y + C''z - D'' > 0$$

принадлежатъ пространству, находящемуся въ трехгранномъ углѣ, составленномъ плоскостями:

$$Ax + By + Cz - D = 0, \quad A'x + B'y + C'z - D' = 0,$$
$$A''x + B''y + C''z - D'' = 0, \tag{2}$$

если эти плоскости не имѣютъ общей прямой, для чего опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \tag{3}$$

не долженъ быть равенъ нулю.

Четыре неравенства

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz - D &> 0 \\ A'x + B'y + C'z - D' &> 0 \\ A''x + B''y + C''z - D'' &> 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z - D''' &> 0 \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

вообще принадлежитъ пространству между четырьмя плоскостями, и въ частномъ случаѣ пространству, заключающемуся въ трехгранной пирамидѣ. Если опредѣлитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix}$$

равенъ нулю, а младшіе опредѣлители 3-го порядка не равны нулю, то уравненія

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz - D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z - D' &= 0 \\ A''x + B''y + C''z - D'' &= 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z - D''' &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

совмѣстны; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ плоскости, которымъ эти уравненія принадлежатъ, пересѣкаются въ одной точкѣ, и неравенства (4) принадлежатъ четырехгранному углу. Подобнымъ образомъ можно выразить неравенствами всякое другое пространство, ограниченное, отчасти или совершенно, нѣсколькими плоскостями.

* — Пусть будутъ три плоскости (2), пересѣкающіяся въ одной точкѣ, $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ кратчайшія разстоянія какой-нибудь точки $x$, $y$, $z$ отъ этихъ плоскостей, $P$, $P'$, $P''$ параметры линейныхъ функцій, находящихся въ первыхъ частяхъ уравненія (2); тогда по формулѣ (1) будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{P}(Ax + By + Cz - D),\\ \delta' &= \frac{1}{P'}(A'x + B'y + C'z - D'),\\ \delta'' &= \frac{1}{P''}(A''x + B''y + C''z - D''),\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

и можно принять $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ за координаты точки $(x, y, z)$. Для всякой точки въ пространствѣ $(x, y, z)$ величины $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ имѣютъ опредѣленныя значенія, по которымъ можно найти положенія трехъ плоскостей, параллельныхъ плоскостямъ (2), пересѣкающихся въ одной только точкѣ, которая есть $(x, y, z)$; притомъ всякая система величинъ $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ принадлежитъ нѣкоторой точкѣ въ пространствѣ, которая опредѣлится пересѣченіемъ трехъ плоскостей, параллельныхъ плоскостямъ (2). Такъ какъ опредѣлитель (3) не обращается въ нуль, то, по даннымъ величинамъ $\delta$, $\delta'$, $\delta''$, мы выведемъ изъ уравненій (6) опредѣленныя значенія для $x$, $y$, $z$. Можно назвать координаты $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ *кратчайшими*, а плоскости (2) или $\delta = 0$, $\delta' = 0$, $\delta'' = 0$ плоскостями этихъ координатъ.

Всякое уравненіе первой степени относительно $\delta$, $\delta'$, $\delta''$,

$$a\delta + a'\delta' + a''\delta'' + a''' = 0$$

принадлежитъ нѣкоторой плоскости; потому что оно приводится къ уравненію первой степени относительно $x$, $y$, $z$. Чтобы получить уравненіе какой-либо данной плоскости въ координатахъ $\delta$, $\delta'$, $\delta''$, когда оно дано въ координатахъ $x$, $y$, $z$, стоитъ только вывести послѣднія величины изъ уравненій (6) и подставить въ уравненіе данной плоскости.

Уравненіе $\delta' = m\delta$ принадлежитъ плоскости, проходящей чрезъ пересѣченіе плоскостей $\delta = 0$ и $\delta' = 0$. Также $\delta'' = n\delta$ есть плоскость, проходящая чрезъ пересѣченіе плоскостей $\delta = 0$ и $\delta'' = 0$, а $\delta'' = p\delta'$ плоскость, проходящая чрезъ пересѣченіе плоскостей $\delta' = 0$ и $\delta'' = 0$.

Прямая линія въ пространствѣ можетъ быть опредѣлена двумя уравненіями въ координатахъ $\delta$, $\delta'$, $\delta''$, принадлежащими двумъ плоскостямъ, чрезъ нее проведеннымъ.

Пусть: $\delta$, $\delta'$, $\delta''$, $\delta'''$ представляютъ кратчайшія разстоянія точки $(x, y, z)$ отъ четырехъ плоскостей (5), образующихъ тетраэдръ. Отношенія: $\frac{\delta}{\delta'''}$, $\frac{\delta'}{\delta'''}$, $\frac{\delta''}{\delta'''}$ опредѣляютъ три плоскости, проходящія чрезъ ребра тетраэдра:

$$(\delta = 0, \quad \delta''' = 0), \quad (\delta' = 0, \quad \delta''' = 0), \quad (\delta'' = 0, \quad \delta''' = 0),$$

и пересѣкающіяся въ точкѣ $(x, y, z)$, а потому можно разсматривать эти отношенія, какъ особеннаго рода координаты точки. Четыре величины $\delta$, $\delta'$, $\delta''$, $\delta'''$, опредѣляющія эти отношенія, называются *тетраэдрическими* координатами точки. Онѣ представляютъ такую же выгоду въ анализѣ, какъ и *трилинейныя*, а именно ту, что уравненія поверхностей и линій въ этихъ координатахъ имѣютъ однородный видъ. Также называются тетраэдрическими координатами величины четырехъ линейныхъ функцій:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= Ax + By + Cz - D \\ \alpha' &= A'x + B'y + C'z - D' \\ \alpha'' &= A''x + B''y + C''z - D'' \\ \alpha''' &= A'''x + B'''y + C'''z - D'''. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Между $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, $\alpha'''$ и $\delta$, $\delta'$, $\delta''$, $\delta'''$ имѣемъ весьма простыя соотношенія:

$$\alpha = P\delta, \quad \alpha' = P'\delta', \quad \alpha'' = P''\delta', \quad \alpha''' = P'''\delta''',$$

гдѣ $P$, $P'$, $P''$, $P'''$ параметры линейныхъ функцій $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, $\alpha'''$.

Обыкновенныя координаты: $x$, $y$, $z$ также можно замѣнить однородными: $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, положивъ $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$. Если $f(x, y, z) = 0$ есть уравненіе какой-нибудь поверхности въ обыкновенныхъ координатахъ, то въ однородныхъ координатахъ оно приметъ видъ

$$f\left(\frac{x_1}{x_4}, \ \frac{x_2}{x_4}, \ \frac{x_3}{x_4}\right) = 0. \qquad (8)$$

Когда функція $f$ есть цѣлая алгебраическая функція степени $n$, тогда, помноживъ послѣднее уравненіе на $x_4^n$, получимъ уравненіе

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0, \tag{9}$$

въ которомъ первая часть есть цѣлая однородная функція степени $n$ относительно $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.

Означимъ чрезъ $\Delta$ опредѣлитель четырехъ функцій (7),

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C, & -D \\ A', & B', & C', & -D' \\ A'', & B'', & C'', & -D'' \\ A''', & B''', & C''', & -D''' \end{vmatrix}$$

а чрезъ $\Delta_{rs}$ тотъ младшій опредѣлитель 3-го порядка, который имѣетъ въ выраженіи $\Delta$ множителемъ элементъ строки $r$ и столбца $s$; тогда, на основаніи извѣстныхъ свойствъ опредѣлителей, изъ уравненій (7) выводимъ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \Delta_{11},\alpha + \Delta_{21},\alpha' + \Delta_{31},\alpha'' + \Delta_{41},\alpha''' \\ \Delta y &= \Delta_{12},\alpha + \Delta_{22},\alpha' + \Delta_{32},\alpha'' + \Delta_{42},\alpha''' \\ \Delta z &= \Delta_{13},\alpha + \Delta_{23},\alpha' + \Delta_{33},\alpha'' + \Delta_{43},\alpha''' \\ \Delta \;\; &= \Delta_{14},\alpha + \Delta_{24},\alpha' + \Delta_{34},\alpha'' + \Delta_{44},\alpha''' \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Если положимъ, что $\Delta$ не равенъ нулю, т.-е. что плоскости (5) не пересѣкаются въ одной точкѣ, то эти формулы даютъ для $x,\ y,\ z$ опредѣленныя значенія. Помощью этихъ формулъ можно перейти отъ координатъ обыкновенныхъ $x,\ y,\ z$ и однородныхъ $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ къ тетраэдрическимъ. Величины $x, y, z$, 1 или $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ будутъ пропорціональны линейнымъ функціямъ (10); поэтому можно эти функціи подставить сотвѣтственно вмѣсто $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ въ уравненіе (9); отчего получимъ уравненіе вида

$$\Phi(\alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \alpha''') = 0,$$

однородное относительно $\alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \alpha'''$, принадлежащее данной поверхности. * —

### B. Перемѣна прямолинейныхъ координатъ въ прямолинейныя. Полярныя координаты.

**99.** Пусть будутъ $(Ox, Oy, Oz)$ и $(O'x', O'y', O'z')$ двѣ системы осей прямолинейныхъ координатъ, соотвѣтственно параллельныхъ; $x$, $y$, $z$ координаты точки $M$ въ первой системѣ; $x'$, $y'$, $z'$ координаты той же точки во второй системѣ, а $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ координаты точки $O'$ въ первой системѣ. Положимъ сперва, что положительныя значенія соотвѣтственныхъ координатъ: $x$ и $x'$, $y$ и $y'$, $z$ и $z'$ откладываются въ одну сторону; въ такомъ случаѣ, при всякомъ положеніи точекъ $O'$ и $M$, будемъ имѣть:

$$x = \alpha + x', \quad y = \beta + y', \quad z = \gamma + z'. \tag{1}$$

Докажемъ, напримѣръ, первую формулу. Проведемъ чрезъ $M$ прямую, параллельную $Ox$, или $O'x'$, и замѣтимъ точки $A$ и $A'$, въ которыхъ эта прямая пересѣкаетъ плоскости $yOz$ и $y'O'z'$. Во всякомъ случаѣ можно разсматривать прямую $AM$ какъ замыкающую сложной линіи, составленной изъ $AA'$ и $A'M$; причемъ $A$ есть начало $AM$ и $AA'$, а $A'$ начало $A'M$; поэтому всегда проекція на оси $Ox$ длины $AM$ равна суммѣ проекцій: $AA'$ и $A'M$, а такъ какъ $x$ есть проекція $AM$, $\alpha$—проекція $AA'$ и $x'$—проекція $A'M$, то $x = \alpha + x'$. Такъ же докажутся и двѣ прочія формулы (1). Если направленіе положительныхъ $x'$ противоположно положительнымъ $x$, то будемъ имѣть $x = \alpha - x'$. Это же замѣчаніе относится и къ прочимъ координатамъ.

**100.** Разсмотримъ теперь двѣ системы прямолинейныхъ осей $(Ox, Oy, Oz)$ и $(Ox', Oy', Oz')$, имѣющихъ одно начало. Пусть будутъ $x$, $y$, $z$ координаты произвольной точки $M$ относительно первой системы, $x'$, $y'$, $z'$ координаты ея относительно второй, и $l$ произвольное направленіе. Прямая $OM$, проведенная изъ начала координатъ въ точку $M$, замыкаетъ ломанную линію, составленную изъ координатъ точки $M$; поэтому проекція $OM$ на $l$ равна суммѣ проекцій на томъ же направленіи координатъ точки $M$, т.-е.

$$OM\cos(OM, l) = x\cos(xl) + y\cos(yl) + z\cos(zl)$$
$$OM\cos(OM, l) = x'\cos(x'l) + y'\cos(y'l) + z'\cos(z'l);$$

слѣдовательно,

$$x\cos(xl) + y\cos(yl) + z\cos(zl) =$$
$$= x'\cos(x'l) + y'\cos(y'l) + z'\cos(z'l). \tag{1}$$

Помощью этой формулы можно выразить координаты $x$, $y$, $z$ посредствомъ $x'$, $y'$, $z'$. Чтобы получить выраженіе для $x$, выключимъ $y$ и $z$, взявъ для $l$ направленіе прямой $On$, перпендикулярной къ плоскости $yOz$; тогда:

$$\angle(yl) = \angle(yn) = 90^\circ,\ \angle(zl) = \angle(zn) = 90^\circ,\ \cos(yl) = 0,\ \cos(zl) = 0;$$

отъ этого получимъ:

$$x = \frac{x' \cos(x'n) + y' \cos(y'n) + z' \cos(z'n)}{\cos(xn)}. \qquad (2)$$

Взявъ для $l$ направленіе $On'$, перпендикулярное къ плоскости $xOz$, а потомъ направленіе $On''$, перпендикулярное плоскости $xOy$, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x' \cos(x,n') + y' \cos(y'n') + z' \cos(z'n')}{\cos(yn')} \\ z &= \frac{x' \cos(x'n'') + y' \cos(y'n'') + z' \cos(z'n'')}{\cos(zn'')} \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Когда прежнія оси $Ox$, $Oy$, $Oz$ прямоугольныя, тогда направленія $On$, $On'$ $On''$ совпадаютъ соотвѣтственно съ этими осями, а потому: $\angle(xn) = 0$, $\angle(yn') = 0$, $\angle(zn'') = 0$; $\cos(xn) = 1$, $\cos(yn') = 1$, $\cos(zn'') = 1$, и въ предыдущихъ формулахъ буквы $n, n', n''$ можно замѣнить буквами $x, y, z$; отъ этого формулы (3) приведутся къ слѣдующимъ:

$$x = x' \cos(x'x) + y' \cos(y'x) + z' \cos(z'x),$$

$$y = x' \cos(x'y) + y' \cos(y'y) + z' \cos(z'y),$$

$$z = x' \cos(x'z) + y' \cos(y'z) + z' \cos(z'z);$$

т.-е. *каждая изъ прежнихъ координатъ равна суммѣ проекцій на ней новыхъ координатъ*. Для сокращенія мы представимъ эти формулы подъ видомъ

$$\left.\begin{aligned} x &= ax' + by' + cz' \\ y &= a'x' + b'y' + c'z' \\ z &= a''x' + b''y' + c''z' \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Здѣсь каждая изъ 9-ти буквъ

$$a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c',\ a'',\ b'',\ c''$$

означаетъ косинусъ угла, составленнаго тою координатою, которой она служитъ коэффиціентомъ, съ координатою, которую выражаетъ формула, содержащая эту букву, напримѣръ $c'$ есть $\cos(z'y)$. Условія, связывающія косинусы угловъ, составленныхъ прямою съ тремя прямоугольными осями, даютъ:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned}\right\}. \qquad (5)$$

Когда оси координатъ даны, тогда углы $y'Oz'$, $z'Ox'$, $x'Oy'$, между ними заключающіеся, извѣстны. Означивъ косинусы этихъ угловъ соотвѣтственно чрезъ $\lambda$, $\mu$, $\nu$, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} bc + b'c' + b''c'' &= \lambda \\ ca + c'a' + c''a'' &= \mu \\ ab + a'b' + a''b'' &= \nu \end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

Помощью уравненія (5) и (6), зная три изъ 9-ти величинъ

$$a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c',\ a'',\ b'',\ c'',$$

можемъ найти остальныя.

Если вторыя оси, $Ox'$, $Oy'$, $Oz'$, также прямоугольныя, то углы $\angle y'Oz'$, $\angle z'Ox'$, $\angle x'Oy'$ прямые, а потому $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, и уравненія (6) приведутся къ слѣдующимъ:

$$\left.\begin{aligned} bc + b'c' + b''c'' &= 0 \\ ca + c'a' + c''a'' &= 0 \\ ab + a'b' + a''b'' &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (7)$$

Уравненія (5) и (7), выражающія условія, что обѣ системы координатныхъ осей ($Ox$, $Oy$, $Oz$) и ($Ox'$, $Oy'$, $Oz'$) прямоугольныя, могутъ быть преобразованы въ другія 6 уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, каждая изъ новыхъ координатъ $x'$, $y'$, $z'$ должна быть равна суммѣ проекцій на ней координатъ $x$, $y$, $z$; поэтому

$$x' = ax + a'y + a''z,$$
$$y' = bx + b'y + b''z,$$
$$z' = cx + c'y + c''z,$$

гдѣ косинусы угловъ, составленныхъ каждою изъ осей $Ox$, $Oy$, $Oz$ съ осями $Ox'$, $Oy'$, $Oz'$, связаны условіями:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

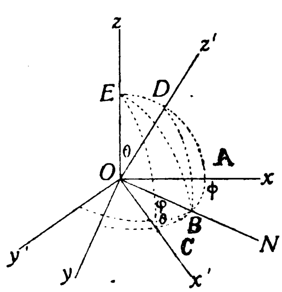
а взаимная перпендикулярность осей $Ox$. $Oy$, $Oz$ выражается условіями:

$$\left.\begin{aligned} a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' &= 0 \\ aa' + bb' + cc' &= 0 \end{aligned}\right\}; \tag{9}$$

слѣдовательно, уравненія (8) и (9), также какъ и уравненія (5) и (6), выражаютъ условія перпендикулярности двухъ системъ осей: ($Ox$, $Oy$, $Oz$) и ($Ox'$, $Oy'$, $Oz'$).

Такъ какъ шесть изъ девяти величинъ: $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$, $a''$, $b''$, $c''$ могутъ быть опредѣлены помощью трехъ остальныхъ, то достаточно знать только три изъ этихъ косинусовъ или ихъ углы, чтобы опредѣлить положеніе осей $Ox'$, $Oy'$, $Oz'$ относительно $Ox$, $Oy$, $Oz$.

**101.** Можно всѣ девять косинусовъ: $a$, $b$, $c\ldots$, выразить функціями трехъ угловъ, опредѣляющихъ положеніе системы прямоугольныхъ осей ($Ox'$, $Oy'$, $Oz'$) относительно прямоугольныхъ ($Ox$, $Oy$, $Oz$).



Фиг. 135

Пусть будетъ $ON$ пересѣченіе плоскостей $x'Oy'$ и $xOy$, $\angle NOx = \psi$, $\angle x'ON = \varphi$ и $\angle zOz' = \theta$. По даннымъ величинамъ: $\psi$, $\varphi$ и $\theta$ и положенію осей $Ox$, $Oy$, $Oz$ легко опредѣлить оси $Ox'$, $Oy'$, $Oz'$, а именно: въ плоскости $yOx$ начертимъ уголъ $xON = \psi$; сторона этого угла $ON$ будетъ пересѣченіе плоскостей $x'Oy'$ и $xOy$; потомъ въ плоскости $xOy$ начертимъ уголъ $x''Oy = \varphi$ и повернемъ плоскость его около $ON$ на столько, чтобы наклоненіе ея къ плоскости $xOy$ было равно углу $\theta$; тогда $Ox''$ приметъ требуемое положеніе $Ox'$; перпендикуляръ, проведенный чрезъ $O$ къ оси $Ox'$ въ плоскости $x'ON$, будетъ ось $Oy'$, а перпендикуляръ, возставленный изъ $O$ къ плоскости $x'ON$, представитъ ось $Oz'$. Легко видѣть, что для всякаго даннаго положенія осей $Ox'$, $Oy'$, $Oz'$ относительно $Ox$, $Oy$, $Oz$ можно найти соотвѣтствующія величины угловъ $\psi$ и $\varphi$, въ предѣлахъ $0^\circ$ и $360^\circ$, и угла $\theta$ въ предѣлахъ $0^\circ$ и $180^\circ$. Девять косинусовъ $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, входящіе въ формулы (4), могутъ быть выражены функціями угловъ $\varphi$, $\psi$ и $\theta$ помощью формулъ сферической тригонометріи. Представимъ себѣ сферу, имѣющую центръ въ $O$, и замѣтимъ пересѣченія ея съ плоскостями, проведенными чрезъ координатныя оси $Ox$ и $Ox'$ и прямую $ON$; отъ этого получимъ сферическій треугольникъ $ABC$, изъ котораго, по извѣстной формулѣ сферической тригонометріи, выводимъ:

$$a = \cos(x' x) = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos(ABC);$$

но такъ какъ сферическій уголъ $ABC$ служитъ дополненіемъ до $180^\circ$ углу $\theta$, то $\cos(ABC) = -\cos\theta$ и слѣдовательно,

$$a = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta. \qquad (10)$$

Изъ этой формулы можно вывести $b = \cos(y' x)$, замѣтивъ, что отъ перемѣны $Ox'$ на $Oy'$, уголъ $\varphi$ перемѣнится на $\varphi + 90^\circ$, а, слѣдовательно, $\cos\varphi$ на $\cos(\varphi + 90^\circ) = -\sin\varphi$ и $\sin\varphi$ на $\sin(\varphi + 90^\circ) = \cos\varphi$; поэтому

$$b = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta. \qquad (11)$$

Сферическій треугольникъ $ADB$ даетъ

$$c = \cos(z' x) = \cos(BD)\cos\psi + \sin(BD)\sin\psi\cos(ABD);$$

но $BD = 90^\circ$ по перпендикулярности $Oz'$ къ плоскости $NOy'$, а $\angle ABD = 90^\circ - \theta$; слѣдовательно,

$$c = \sin\psi\sin\theta. \qquad (12)$$

Изъ формулъ (10), (11) и (12) легко вывести величины: $a'$, $b'$, $c'$; для этого должно перемѣнить уголъ $xON = \psi$ на $yON = -(90^\circ - \psi)$; такимъ образомъ найдемъ:

$$\begin{aligned}
a' &= \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
b' &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,\\
c' &= -\cos\psi\sin\theta.
\end{aligned}$$

Въ сферическомъ треугольникѣ $EBC$ имѣемъ

$$a'' = \cos(x' z) = \cos(EB)\cos\varphi + \sin(EB)\sin\varphi\cos(EBC),$$

и такъ какъ $EB = 90^\circ$, $\angle EBC = 90^\circ - \theta$, то

$$a'' = \sin\varphi \sin\theta;$$

отсюда, перемѣнивъ $\varphi$ на $\varphi + 90^\circ$, получимъ

$$b'' = \cos\varphi \sin\theta.$$

Сверхъ того имѣемъ

$$c'' = \cos\theta.$$

Подставивъ найденныя выраженія для $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$, $a''$, $b''$, $c''$ въ формулы (4), мы выразимъ координаты $x$, $y$, $z$ функціями новыхъ координатъ: $x'$, $y'$, $z'$ и трехъ угловъ $\psi$, $\varphi$, $\theta$.

**102.** Разсмотримъ теперь двѣ системы не параллельныхъ координатныхъ осей: $(Ox)$, $(Oy)$, $(Oz)$, $(Ox')$, $(Oy')$, $(Oz')$, имѣющихъ разныя начала. Пусть будутъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ координаты новаго начала $O'$ относительно первой системы осей; $x$, $y$, $z$ координаты точки $M$ относительно той же системы, $x'$, $y'$, $z'$ координаты ея относительно второй системы, а $x''$, $y''$, $z''$ ея координаты относительно осей, проведенныхъ чрезъ точку $O'$ параллельно осямъ $Ox$, $Oy$, $Oz$. Для перехода отъ $x$, $y$, $z$ къ $x''$ $y''$ $z''$ имѣемъ:

$$x = \alpha + x'', \quad y = \beta + y'', \quad z = \gamma + z'',$$

а для перемѣны $x''$, $y''$, $z''$ на $x'$, $y'$ $z'$ получимъ формулы вида:

$$\begin{aligned} x'' &= a'x' + b'y' + cz' \\ y'' &= a'x' + b'y' + c'z' \\ z'' &= a''x' + b''y' + c''z'; \end{aligned}$$

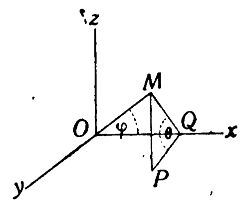
слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + ax' + by' + cz' \\ x &= \beta + a'x' + b'y' + c'z' \\ x &= \gamma + a''x' + b''y' + c''z' \end{aligned}\right\}. \qquad (13)$$

**103.** Положеніе точки $M$ можетъ быть опредѣлено: 1) разстояніемъ ея $OM = r$ отъ данной точки $O$, называемымъ *радіусомъ векторомъ*, 2) угломъ $MOx = \varphi$, составленнымъ радіусомъ векторомъ съ данною осью $Ox$ и 3) угломъ двуграннымъ, составленнымъ плоскостью $MOx$ съ другою, данною плоскостью $xOy$, и за мѣру котораго можно взять линейный уголъ $MQP = \theta$, происшедшій отъ пересѣченія двуграннаго угла плоскостью, перпендикулярною къ его ребру. Чтобы по этимъ даннымъ построить точку $M$, проведемъ сперва чрезъ $Ox$

плоскость, составляющую съ плоскостью $xOy$ уголъ $MQP$; потомъ въ этой плоскости начертимъ уголъ $MOx$ и на сторонѣ его отложимъ длину $OM = r$; конецъ этой длины будетъ точка $M$. Величины $OM = r$, $\angle MQP = \theta$ и $\angle MOx = \varphi$, опредѣляющія такимъ образомъ положеніе точки, называются *полярными координатами*.

Взявъ $Ox$ съ перпендикулярною къ ней $Oy$ и съ $Oz$, перпендикулярною къ плоскости $xOy$, за координатныя оси и означивъ чрезъ $x$, $y$, $z$ соотвѣтственныя координаты точки $M$, легко можемъ выразить послѣднія функціями полярныхъ координатъ $r$, $\varphi$ и $\theta$, и обратно полярныя координаты функціями прямоугольныхъ.



Фиг. 136

Треугольники $MOQ$ и $MQP$, составленные координатами, даютъ

$$x = r\cos\varphi, \quad MQ = r\sin\varphi$$
$$y = MQ\cos\theta = r\sin\varphi\cos\theta,$$
$$z = MQ\sin\theta = r\sin\varphi\sin\theta.$$

Эти формулы относятся ко всякому положенію точки $M$, если только соблюдено правило знаковъ для координатъ $x$, $y$, $z$ и если углы $\varphi$ и $\theta$ отсчитываются всегда въ одну сторону. При этомъ $\varphi$ можетъ измѣняться въ предѣлахъ $0^\circ$ и $180^\circ$, а $\theta$ въ предѣлахъ $0^\circ$ и $360^\circ$. Уголъ $\varphi$ будетъ $< 90^\circ$ при положительной $x$, а $> 90^\circ$ при отрицательной $x$; уголъ $\theta < 90^\circ$ при положительныхъ $y$ и $z$. При $y$ отрицательной и $z$ положительной имѣемъ: $90^\circ < \theta < 180^\circ$. Для отрицательныхъ $y$ и $z$ будетъ $180^\circ < \theta < 270^\circ$ и, наконецъ, $270^\circ < \theta < 360^\circ$, когда $y$ положительная, а $z$ отрицательная.

Формула для разстоянія точки отъ начала координатъ даетъ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

а изъ формулъ:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi\cos\theta, \quad z = r\sin\varphi\sin\theta$$

выводимъ

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \quad \sin\theta = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{z}{y}.$$

Эти формулы послужатъ для опредѣленія полярныхъ координатъ помощью прямоугольныхъ. Здѣсь при $\sqrt{}$ должно брать знакъ $+$, чтобы согласоваться со сказаннымъ выше о предѣлахъ угловъ $\varphi$ и $\theta$.

Задачи: 1) Опредѣлить прямоугольныя координаты точки по даннымъ полярнымъ:

$$r = 2, \quad \varphi = 54^\circ 27', \quad \theta = 213^\circ 26'.$$

2) Вычислить полярныя координаты точки: $(-2, +3, -5)$.

### C. О кривыхъ поверхностяхъ. Поверхности второго порядка.

**104.** Поверхности раздѣляются на *алгебраическія и трансцендентныя*. Поверхность называется алгебраическою или трансцендентною, смотря по тому, будетъ-ли ея уравненіе въ прямолинейныхъ координатахъ алгебраическое или трансцендентное. Плоскость и поверхность шара суть алгебраическія поверхности. Уравненіе $z = \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$, гдѣ $x$, $y$, $z$ означаютъ прямолинейныя координаты, принадлежитъ трансцендентной поверхности. Алгебраическія поверхности подраздѣляются на порядки по степенямъ ихъ уравненія. Поверхность, у которой уравненіе степени $n$ и не можетъ быть понижено или разложено на уравненія низшихъ степеней, принадлежитъ къ порядку $n$. Плоскость есть поверхность перваго порядка. Это раздѣленіе не зависитъ отъ координатныхъ осей, т.-е. если уравненіе поверхности $f(x, y, z) = 0$ степени $n$ относительно прямолинейныхъ координатъ $x, y, z$, то оно будетъ также алгебраическое степени $n$ относительно всякой другой системы того-же рода координатъ $x'$, $y'$, $z'$. Для доказательства покажемъ, что отъ перемѣны координатъ $x, y, z$ на $x', y', z'$ уравненіе $f(x, y, z) = 0$ не сдѣлается трансцендентнымъ и останется степени $n$. По общимъ формуламъ (13) § 102 для перемѣны координатъ имѣемъ:

$$x = \alpha + ax' + by' + cz',$$
$$y = \beta + a'x' + b'y' + c'z',$$
$$z = \gamma + a''x' + b''y' + c''z',$$

гдѣ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ суть координаты новаго начала, $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ величины, зависящія отъ угловъ, составляемыхъ новыми координатными осями съ прежними. Эти выраженія первой степени относительно $x', y', z'$; поэтому, будучи поставлены въ ур. $f(x, y, z) = 0$

вмѣсто $x, y, z$, они могутъ произвести только алгебраическіе члены степеней не выше $n$ относительно $x', y', z'$, и слѣдовательно, преобразованное уравненіе поверхности, которое означимъ чрезъ $F(x', y', z') = 0$, будетъ опять алгебраическое степени не выше $n$. Нельзя допустить, чтобы эта степень была ниже $n$, потому что въ противномъ случаѣ, при обратномъ переходѣ отъ координатъ $x', y', z'$ къ $x, y, z$, т.-е. отъ уравненія $F(x', y', z') = 0$ къ $f(x, y, z) = 0$, степень уравненія повысилась бы, что невозможно, потому что $x', y', z'$ суть функціи первой степени относительно $x, y, z$. Если уравненіе $f(x, y, z) = 0$ трансцендентное, то преобразованное, $F(x', y', z) = 0$, не можетъ быть алгебраическимъ: въ противномъ случаѣ, при обратномъ переходѣ отъ $x', y', z'$ къ $x, y, z$, алгебраическое уравненіе $F(x', y', z') = 0$ преобразовалось-бы въ трансцендентное, что невозможно по доказанному выше. Мы видѣли въ **§ 98**, что алгебраическое уравненіе степени $n$, $f(x, y, z) = 0$, отъ преобразованія координатъ $x, y, z$ въ однородныя $x_1, x_2, x_3, x_4$, или въ тетраэдрическія, превращается въ однородное алгебраическое степени $n$ относительно новыхъ координатъ; поэтому раздѣленіе поверхностей по виду уравненія на алгебраическія и трансцендентныя и алгебраическихъ на порядки относится къ какой ни есть системѣ однородныхъ, обыкновенныхъ или тетраэдрическихъ координатъ.

**105.** Уравненіе алгебраической поверхности можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\left.\begin{aligned} az^n &+ (b_1x + b_2y + b_3)z^{n-1} + \\ &+ (c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6)z^{n-2} + \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ &+ k_1x^n + k_2x^{n-1}y + \dots + k_{m-1}y + k_m = 0 \end{aligned}\right\} . \qquad (1)$$

Здѣсь число всѣхъ членовъ равно пирамидальному числу $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$, т.-е. суммѣ треугольныхъ чиселъ:

$$1 + 3 + 6 + \dots + \frac{(n+1)(n+2)}{2};$$

потому что *одинъ* членъ содержитъ $z^n$, *три* члена $z^{n-1}$, *шесть* членовъ $z^{n-2}$ и т. д. и наконецъ, $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ членовъ не содержатъ $z$.

Коэффиціентъ одного члена всегда можно привести къ единицѣ, раздѣливъ на него все уравненіе; число прочихъ коэффиціентовъ будетъ тогда

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} - 1,$$

и представляетъ число условій, необходимыхъ для опредѣленія поверхности порядка $n$, напримѣръ, число точекъ, которыми можно совершенно опредѣлить поверхность, т.-е. по которымъ можно опредѣлить всякую другую точку поверхности.

Пусть $(x_1, y_1, z_1)$ $(x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_p, y_n, z_p)$ будутъ координаты этихъ точекъ, гдѣ $p = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} - 1$. Отъ подстановленія ихъ въ общее уравненіе (1) мы получимъ $p$ уравненій линейныхъ относительно коэффиціентовъ: $a, b_1, b_2, \ldots, k_m$; откуда выведемъ величины коэффиціентовъ и такимъ образомъ опредѣлимъ уравненіе поверхности порядка $n$, проходящей чрезъ данныя точки. При этомъ могутъ представиться обстоятельства, подобныя тѣмъ, которыя встрѣтились въ **§ 31.**

**106.** Одно изъ отличительныхъ свойствъ поверхности порядка $n$ состоитъ въ томъ, что пересѣченіе ея съ плоскостью есть вообще линія алгебраическая порядка не выше $n$. Положимъ, что пересѣкающая плоскость взята за плоскость координатъ $xy$. Чтобы получить уравненіе пересѣченія ея съ поверхностью, должно въ уравненіи послѣдней (1) положить $z = 0$; отъ этого получимъ уравненіе

$$k_1 x^n + k_2 x^{n-1} y + \ldots k_{m-1} y + k_m = 0,$$

которое не выше степени $n$ относительно $x$ и $y$, а потому можетъ принадлежать линіи порядка не выше $n$.

Поверхность порядка $n$ съ прямою линіею пересѣкается не болѣе какъ въ $n$ точкахъ. Для доказательства допустимъ, что пересѣкающая прямая взята за ось $z$; тогда для точекъ пересѣченій ея съ поверхностью должно положить $x = 0$, $y = 0$; отъ этого уравненіе (1) приведется къ слѣдующему:

$$az^n + b_3 z^{n-1} + c_6 z^{n-2} + \ldots k_m = 0,$$

которое имѣетъ не болѣе $n$ вещественныхъ корей, представляющихъ координаты разсматриваемыхъ пересѣченій; слѣдовательно, этихъ точекъ не можетъ быть болѣе $n$.

**107.** Общій видъ уравненія поверхности 2-го порядка есть

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Byz + B'zx + B''xy +$$
$$+ Cx + C'y + C''z + D = 0. \qquad (1)$$

Здѣсь 10 коэффиціентовъ; одинъ изъ нихъ можетъ быть сдѣланъ равнымъ единицѣ; поэтому, чтобы совершенно опредѣлить уравненіе (1), надобно опредѣлить 9 неизвѣстныхъ. Это можно сдѣлать, подчинивъ поверхность условію, что она должна проходить чрезъ 9 данныхъ точекъ.

Поверхность (1) съ плоскостью можетъ пересѣкаться или по линіи 2-го порядка, или по двумъ прямымъ; сверхъ того можетъ случиться, что плоскость имѣетъ съ поверхностью одну общую точку, или вовсе не имѣетъ съ ней общихъ точекъ.

Прямая линія можетъ пересѣчь поверхность только въ двухъ точкахъ, которыя иногда совпадаютъ въ одну. Можетъ также случиться, что прямая не пересѣкаетъ поверхности (1).

Часть прямой между двумя точками, въ которыхъ прямая пересѣкаетъ поверхность, называется хордою. *Средины всѣхъ хордъ поверхности втораго порядка, параллельныхъ какой-нибудь прямой, находятся на одной плоскости, которая называется діаметральною.* Діаметральная плоскость и хорды, чрезъ средины которыхъ она проходитъ, называются *сопряженными*. Докажемъ, что для всякой системы параллельныхъ хордъ существуетъ сопряженная діаметральная плоскость и выведемъ уравненіе этой плоскости.

Пусть

$$x = az + p, \quad y = bz + q \qquad (2)$$

будутъ уравненія какой-нибудь прямой.

Величины $x$, $y$, $z$, удовлетворяющія уравненіямъ (1) и (2), принадлежатъ точкамъ пересѣченій этой прямой съ поверхностью; поэтому, исключивъ $x$ и $y$ изъ уравненій (1) и (2), получимъ уравненіе

$$Pz^2 + Qz + R = 0, \qquad (3)$$

котораго корни суть кординаты этихъ точекъ, параллельныя оси $Oz$. Нетрудно видѣть, что

$$P = Aa^2 + A'b^2 + A'' + Bb + B'a + B''ab$$
$$Q = 2Aap + 2A'bq + Bq + B'p + B''bp + B''aq + Ca + C'b + C''$$
$$R = Ap^2 + A'q^2 + B''pq + Cp + C'q + D.$$

Полусумма корней уравненія (3),

$$z = -\frac{Q}{2P}, \tag{4}$$

есть координата средины хорды, находящейся на прямой (2). Соотвѣтственныя величины $x$ и $y$ опредѣлятся изъ уравненія (2). Также найдемъ координаты средины всякой другой хорды. Когда хорда перемѣнится такъ, что останется параллельною прямой (2), то перемѣнятся только величины $p$ и $q$. По исключеніи послѣднихъ изъ уравненій (2) и (4), получимъ уравненіе, которому должны удовлетворять координаты срединъ всѣхъ хордъ, параллельныхъ прямой (2); это уравненіе послѣ всѣхъ сокращеній приведется къ слѣдующему:

$$\begin{gathered}(2Aa + B' + B''b)\,x + (2A'b + B + B'a)\,y + \\ + (2A'' + B'a + Bb)\,z + Ca + C'b + C'' = 0 \text{ *)}.\end{gathered} \tag{5}$$

Оно первой степени, слѣдовательно, принадлежитъ плоскости, которая и есть діаметральная, сопряженная съ хордою (2).

Если діаметральная плоскость перпендикулярна къ сопряженнымъ хордамъ, то она называется *главною*. Полагая, что оси координатъ прямоугольны, мы будемъ имѣть для перпендикулярности плоскости (5) къ прямой (2) условія:

$$\frac{2Aa + B' + B''b}{2A'' + B'a + Bb} = a, \quad \frac{2A'b + B + B''a}{2A'' + B'a + Bb} = b. \tag{6}$$

Величины $a$ и $b$, выведенныя изъ этихъ уравненій, опредѣлятъ

---

*) Означивъ для сокращенія чрезъ $f(x, y, z) = 0$ уравненіе (1), можно представить уравненіе (5) подъ видомъ

$$\frac{\partial f}{\partial x} b + \frac{\partial f}{\partial y} a + \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{a}$$

Дѣйствительно: уравненіе (4) или

$$2Pz + Q = 0$$

получается чрезъ дифференцированіе по $z$ уравненія (3) или $f(x, y, z) = 0$, если разсматривать при этомъ $x$ и $y$ какъ функціи $z$, опредѣленныя уравненіями (2); отъ этого, по правилу дифференцированія сложной функціи, получимъ $\frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$, куда должно подставить $az + p$ вмѣсто $x$ и $bz + q$ вмѣсто $y$; но такъ какъ потомъ надобно исключить $p$ и $q$, то нѣтъ надобности дѣлать эту подстановку.

направленіе прямой (2), сопряженной съ главною діаметральною плоскостью.

Уравненія (6) могутъ быть замѣнены слѣдующими:

$$\left.\begin{aligned} 2A'' + B'a + Bb &= s, \\ 2Aa + B' + B''b &= as, \\ 2A'b + B + B''a &= bs. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Изъ двухъ послѣднихъ выводимъ:

$$a = \frac{B'(s-2A') + BB''}{(s-2A)(s-2A') - B''^2}, \quad b = \frac{B(s-2A) + B'B''}{(s-2A)(s-2A') - B''^2}; \qquad (8)$$

подставивъ эти величины $a$ и $b$ въ первое изъ уравненій (7) и освободивъ его отъ знаменателей, получимъ

$$(s-2A)(s-2A')(s-2A'') - B^2(s-2A) - B'^2(s-2A') - \\ - B''^2(s-2A'') - 2BB'B'' = 0. \qquad (9)$$

Это уравненіе 3-й степени относительно $s$, а потому имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ вещественный корень. Вычисливъ этотъ корень и подставивъ его вмѣсто $s$ въ формулы (8), найдемъ величины $a$ и $b$, опредѣляющія направленіе хордъ, перпендикулярныхъ къ главной діаметральной плоскости; наконецъ, отъ подстановленія найденныхъ величинъ $a$ и $b$ въ уравненіе (5), получимъ уравненіе главной діаметральной плоскости. Въ частномъ случаѣ, когда коэффиціенты при $x, y, z$ равны нулю, а $Ca + C'b + C''$ не равно нулю, діаметральная плоскость будетъ въ безконечности.

Хорды, опредѣленныя такимъ образомъ, называются главными. Возьмемъ одну изъ нихъ за координатную ось $z$, а оси $x$ и $y$ въ какой-нибудь плоскости, къ ней перпендикулярной. При таковыхъ осяхъ будемъ имѣть: $a=0$, $b=0$; отъ чего, по второму и третьему уравненіямъ (7), получимъ: $B=0$, $B'=0$ *),

*) Въ разсматриваемомъ случаѣ уравненіе (8) приводится къ слѣдующему:

$$(s-2A)(s-2A')(s-2A'') - B''^2(s-A'') = 0$$

или

$$[(s-2A)(s-2A') - B''^2](s-2A'') = 0,$$

которое имѣетъ три вещественныхъ корня:

$$s = A + A' \pm \sqrt{(A-A')^2 + B''^2}, \quad s = 2A'';$$

слѣдовательно, поверхность второго порядка имѣетъ три системы главныхъ сопряженныхъ хордъ.

т. е. уравненіе поверхности (1) будетъ вида

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + B''xy + Cx + C'y + C''z + D = 0.$$

Положивъ $z = 0$, получимъ уравненіе

$$Ax^2 + A'y^2 + B''xy + Cx + C'y + D = 0,$$

принадлежащее сѣченію поверхности съ плоскостью $xy$. Какое бы не было это сѣченіе, всегда можно взять координатныя оси $x$ и $y$ такъ, что въ уравненіи не будетъ члена съ произведеніемъ $xy$ (см. **§§ 39** и **46**), т.-е. будетъ $B'' = 0$. Слѣдовательно, уравненіе поверхности второго порядка всегда можетъ быть приведено къ виду

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Cx + C'y + C''z + D = 0. \qquad (10)$$

**108.** Точка, служащая *срединою всякой хорды*, чрезъ нее проходящей, называется *центромъ поверхности*. Легко видѣть, что если начало координатъ въ центрѣ, то каждой точкѣ $(x, y, z)$ поверхности, соотвѣтствуетъ другая $(-x, -y, -z)$, а потому уравненіе поверхности не должно измѣниться отъ перемѣны $x, y, z$ соотвѣтственно на $-x$, $-y$, $-z$. Чтобы такое свойство имѣло уравненіе 2-й степени, въ немъ не должно быть членовъ первой степени относительно $x, y, z$. Если же уравненіе не имѣетъ этого свойства, то начало координатъ не находится въ центрѣ. Чтобы узнать, имѣетъ ли поверхность центръ, надобно посмотрѣть, нельзя ли чрезъ перемѣну начала координатъ преобразовать уравненіе такъ, чтобы въ немъ не было членовъ первой степени.

Посмотримъ теперь, имѣетъ ли поверхность (10) центръ.

Пусть будутъ $\alpha, \beta, \gamma$ координаты новаго начала, а $x', y', z'$ новыя координаты относительно осей, параллельныхъ прежнимъ. По формуламъ **§ 99** имѣемъ:

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma;$$

отъ подстановленія этихъ величинъ $x, y, z$ въ уравненіе (10), получимъ

$$Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + (2A\alpha + C)\,x' + (2A'\beta + C')\,y' + (2A''\gamma +$$
$$+ C'')\,z' + A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + C\alpha + C'\beta + C''\gamma + D = 0. \quad (11)$$

Чтобы новое начало координатъ было центромъ, въ этомъ уравненіи не должно быть членовъ первой степени; слѣдовательно.

$$2A\alpha + C = 0, \quad 2A'\beta + C' = C0, \quad 2A''\gamma + C'' = 0;$$

отсюда выводимъ:

$$\alpha = -\frac{C}{2A}, \quad \beta = -\frac{C'}{2A'}, \quad \gamma = -\frac{C''}{2A''}. \tag{12}$$

Поверхность будетъ имѣть одинъ опредѣленный центръ, когда $\alpha, \beta, \gamma$ конечныя величины, а для этого необходимо, чтобы ни одинъ изъ коэффиціентовъ $A, A', A''$ не былъ равенъ нулю; тогда уравненіе поверхности (11) беретъ видъ

$$Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + Q = 0, \tag{13}$$

гдѣ

$$Q = A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + C\alpha + C'\beta + C''\gamma + D = 0,$$

Если одна или двѣ изъ величинъ $\alpha, \beta, \gamma$ или всѣ три безконечныя, то поверхность не имѣетъ центра, и нельзя ея уравненію дать видъ (13).

Когда одна изъ величинъ $\alpha, \beta, \gamma$ неопредѣленная, а двѣ прочія конечныя, тогда поверхность имѣетъ безчисленное множество центровъ, находящихся на одной прямой, параллельной одной изъ осей координатъ. Напримѣръ если $A'' = 0$, $C'' = 0$, но $A$ и $A'$ не равны нулю, то $\gamma$ будетъ неопредѣленная величина, а $\alpha$ и $\beta$ конечныя и принадлежатъ множеству центровъ, находящихся на одной прямой, параллельной оси $z$; тогда уравненіе (11) беретъ видъ

$$Ax'^2 + A'y'^2 + Q = 0,$$

гдѣ

$$Q = A\alpha^2 + A'\beta^2 + C\alpha + C'\beta + D.$$

Оно можетъ принадлежать цилиндру съ производящею, параллельною оси $z$, пересѣкающему плоскость $xy$ по эллипсу или гиперболѣ и превращающемуся въ одну прямую, параллельную оси $z$, когда $Q = 0$, а $A$ и $A'$ положительныя; оно принадлежитъ двумъ плоскостямъ, проходящимъ чрезъ ось $z$, когда $Q = 0$, а $A$ и $A'$ имѣютъ противоположные знаки, наконецъ не представляетъ никакого геометрическаго мѣста, когда всѣ три величины $A, A', Q$ положительныя (см. § 93).

Если двѣ изъ величинъ $\alpha, \beta, \gamma$ неопредѣленныя, а третья конечная, то поверхность имѣетъ множество центровъ, находящихся въ одной плоскости. Напримѣръ если $A' = 0$, $A'' = 0$, $C = 0$, $C' = 0$, а $A$ не равно нулю, то величины $\beta$ и $\gamma$ неопредѣленны, а $\alpha$ конечная и принадлежитъ точкамъ, находящимся въ плоскости, параллельной плоскости $yz$. Тогда уравненіе (11) приведется къ слѣдующему:

$$Ax'^2 + Q = 0,$$

гдѣ

$$Q = A\alpha^2 + C\alpha + D.$$

Оно принадлежитъ двумъ плоскостямъ, параллельнымъ плоскости $yz$, когда $A$ и $Q$ имѣютъ противоположные знаки; въ противномъ случаѣ оно не представляетъ никакого геометрическаго мѣста.

Изъ предыдущихъ изслѣдованій заключаемъ, что поверхности второго порядка могутъ быть раздѣлены на два рода: 1) поверхности съ центрами и 2) поверхности безъ центровъ, и что общее уравненіе первыхъ, перенесеніемъ начала координатъ въ центръ, можетъ быть приведено въ виду

$$Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + Q = 0. \tag{14}$$

Это уравненіе содержитъ только квадраты координатъ; поэтому, взявъ двѣ координаты произвольно, найдемъ для третьей двѣ равныя и противоположныя величины; слѣдовательно, каждая координатная плоскость раздѣляетъ пополамъ хорды, къ ней перпендикулярныя, т.-е. представляетъ главную діаметральную плоскость, сопряженную съ пересѣченіемъ двухъ другихъ координатныхъ плоскостей. Легко видѣть, что сѣченія поверхности съ координатною плоскостью и со всѣми плоскостями, ей параллельными, имѣютъ центры, расположенные на пересѣченіи двухъ другихъ координатныхъ плоскостей. Прямая, на которой находятся центры всѣхъ сѣченій поверхности съ параллельными плоскостями, называется діаметромъ, сопряженнымъ съ плоскостями. Въ случаѣ перпендикулярности его къ плоскости онъ называется главнымъ. Изъ сказаннаго выше заключаемъ, что координатныя оси суть главные діаметры поверхности (14) *).

**109.** Разберемъ различные виды поверхностей съ центрами, устранивъ частные случаи, разсмотрѣнные выше, въ которыхъ одинъ или два изъ коэффиціентовъ: $A$, $A'$, $A''$ равны нулю.

Знаки коэффиціентовъ $A$, $A'$, $A''$ въ уравненіи

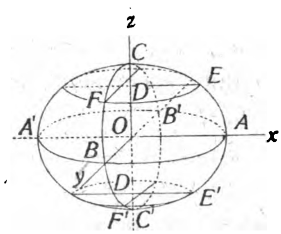
$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Q = 0 \tag{1}$$

представляютъ два главныхъ случая: 1) когда всѣ три коэффиціента положительные и 2) когда два положительные и одинъ отрицатель-

*) См. *Прибавленіе III.*

ный. Случай трехъ отрицательныхъ коэффиціентовъ приводится къ первому, перемѣною знаковъ во всѣхъ членахъ уравненія; такимъ же образомъ случай двухъ отрицательныхъ коэффиціентовъ и одного положительнаго приводится ко второму.

1) Если въ первомъ случаѣ постоянный членъ $Q$ будетъ положительный, то уравненіе (1) не представляетъ никакого геометрическаго мѣста; потому что не можетъ быть удовлетворено вещественными величинами $x$, $y$, $z$. Въ томъ же случаѣ при $Q=0$ уравненіе принадлежитъ одной точкѣ, находящейся въ началѣ координатъ; потому что ему удовлетворяютъ только величины: $x=0$, $y=0$, $z=0$. Въ первомъ же случаѣ, при отрицательномъ $Q$, уравненію (1) могутъ удовлетворять перемѣнныя вещественныя величины $x$, $y$, $z$, а потому уравненіе принадлежитъ поверхности, которую и изслѣдуемъ.



Фиг. 137.

Разсмотримъ прежде всего пересѣченія ея съ осями и плоскостями координатъ. Для пересѣченія съ осью $x$ должно положить $y=0$, $z=0$ и опредѣлить $x$ изъ уравненія (1); такимъ образомъ найдемъ

$$x=\pm\sqrt{\frac{-Q}{A}}.$$

Эти величины вещественныя, равныя и знако-противоположныя; поэтому ось $Ox$ пересѣкаетъ поверхность въ двухъ точкахъ $A$ и $A'$, равно отстоящихъ отъ начала координатъ. Также найдемъ, что ось $Oy$ пересѣкаетъ поверхность въ двухъ точкахъ $B$ и $B'$, удаленныхъ отъ начала на разстояніе равное $\sqrt{\frac{-Q}{A'}}$, а ось $Oz$ въ двухъ точкахъ $C$ и $C'$, удаленныхъ отъ начала на разстояніе равное $\sqrt{\frac{-Q}{A''}}$. Положивъ

$$\sqrt{\frac{-Q}{A}}=a,\quad \sqrt{\frac{-Q}{A'}}=b,\quad \sqrt{\frac{-Q}{A''}}=c,$$

введемъ эти величины, для удобства изслѣдованія, въ уравненіе поверхности (1).

Такъ какъ

$$A = -\frac{Q}{a^2}, \quad A' = -\frac{Q}{b^2}, \quad A'' = -\frac{Q}{c^2},$$

то уравненіе (1) принимаетъ видъ

$$-\frac{Q}{a^2}x^2 - \frac{Q}{b^2}y^2 - \frac{Q}{c^2}z^2 + Q = 0$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Для пересѣченія поверхности съ плоскостью $xOy$ имѣемъ

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Эти уравненія принадлежатъ эллипсу, построенному на полуосяхъ $OA = a$ и $OB = b$. Также найдемъ для пересѣченія съ плоскостью $xOz$ эллипсъ

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

построенный на полуосяхъ $OA = a$ и и $OC = c$, а для пересѣченія съ плоскостью $yOz$ эллипсъ

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

построенный на полуосяхъ $OB = b$, $OC = c$.

Разсмотримъ теперь пересѣченія поверхности съ плоскостями, параллельными координатнымъ плоскостямъ, напримѣръ, съ плоскостью $DEF$ или $D'E'F'$, параллельною плоскости $xOy$. Пусть $z = \pm h$ будетъ уравненіе плоскости. Подставивъ $\pm h$ вмѣсто $z$ въ уравненіе поверхности, получимъ уравненіе съ двумя перемѣнными $x$, $y$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2},$$

принадлежащее проекціи искомаго сѣченія на плоскости $xOy$ и самому сѣченію при $z = \pm h$; но чтобы оно могло быть удовлетворено вещественными величинами $x$, $y$, величина $\frac{h^2}{c^2}$ должна быть не больше 1, а, слѣдовательно, $h$ меньше или равно $c$, т.-е. плоскость сѣченія должна проходить между $O$ и $C$ или между $O$ и $C'$. При $h = c$ уравненіе принадлежитъ точкамъ $C$ и $C'$, а при $h < c$ эллипсу, у котораго полуоси суть:

$$DE = a' = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}},$$

$$DF = b' = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

Такъ какъ $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$, то у всѣхъ сѣченій, параллельныхъ плоскости $xOy$, оси пропорціональны. Такіе эллипсы называются подобными. Наибольшія величины полуосей $a'$ и $b'$ соотвѣтствуютъ $h = 0$, т.-е. принадлежатъ эллипсу $ABA'B'$ въ плоскости $xOy$.

Точно также найдемъ, что сѣченія поверхности съ плоскостями, параллельными плоскости $xOz$, будутъ эллипсы, подобные эллипсу

$$y = 0,\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

а сѣченія съ плоскостями, параллельными плоскости $yOz$, будутъ эллипсы, подобные эллипсу

$$x = 0,\quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Изъ этихъ изслѣдованій можно уже составить себѣ ясное понятіе о фигурѣ поверхности. Она, подобно шару, сомкнута со всѣхъ сторонъ. Ее назвали *эллипсоидомъ*. Всякое сѣченіе съ плоскостью есть эллипсъ; потому что оно есть линія второго порядка (см. **§ 106**) и сомкнутая. Впрочемъ легко въ этомъ удостовѣриться непосредственно слѣдующимъ образомъ: пусть

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma$$

будетъ уравненіе пересѣкающей плоскости. Исключивъ посредствомъ него $z$ изъ уравненія эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

получимъ уравненіе

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\alpha^2}{c^2}\right)x^2+\frac{2\alpha\beta}{c^2}xy+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{\beta^2}{c^2}\right)y^2+\ldots=0,$$

принадлежащее проекціи сѣченія на плоскости $xOy$. Здѣсь коэффиціенты членовъ второй степени удовлетворяютъ условію:

$$m=\frac{4\alpha^2\beta^2}{c^4}-4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\alpha^2}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{\beta^2}{c^2}\right)<0,$$

показывающему (см. **§ 39**), что проекція сѣченія есть эллипсъ, а поэтому и проектируемая кривая есть эллипсъ.

Величины $a$, $b$, $c$ называются полуосями эллипсоида, а точки $A$, $A'$, $B$, $B'$, $C$, $C'$ его вершинами. Въ случаѣ $a=b$, сѣченія съ плоскостью $xOy$ и съ плоскостями, ей параллельными, суть круги; слѣдовательно, поверхность можетъ быть произведена обращеніемъ полуэллипса $CAC'$ около оси $CC'$; поэтому

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

есть уравненіе эллипсоида вращенія около оси $Oz$. Если $a>c$, то эллипсоидъ вращенія будетъ сжатый при полюсахъ $C$ и $C'$; въ противномъ же случаѣ онъ растянутъ по оси $CC'$.

Въ случаѣ $a=b=c$ эллипсоидъ превращается въ шаръ

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

радіуса $OA=a$.

2) Разсмотримъ теперь случай, когда въ уравненіи

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+Q=0 \tag{1}$$

два изъ коэффиціентовъ $A$, $A'$, $A''$ положительные и одинъ отрицательный. Положимъ $A>0$, $A'>0$, $A''<0$. При этомъ можетъ быть: $Q=0$, $Q>0$ или $Q<0$.

Въ случаѣ $Q=0$ имѣемъ

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2=0. \tag{2}$$

Этому уравненію удовлетворяютъ величины $x=0$, $y=0$, $z=0$, а потому начало координатъ принадлежитъ разсматриваемому геометрическому мѣсту. Величина $z$, выведенная изъ этого уравненія

$$z=\pm\sqrt{\frac{Ax^2+A'y^2}{-A''}},$$

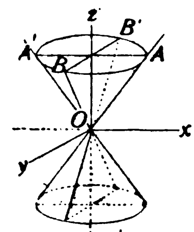
будетъ вещественная при всякихъ $x$ и $y$, потому что подкоренное количество положительно, и вмѣстѣ съ ними можетъ измѣняться непрерывно, а потому геометрическое мѣсто уравненія есть поверхность. Для пересѣченія этой поверхности съ плоскостью $xOz$ имѣемъ:

$$y = 0, \quad z = \pm x \sqrt{\frac{A}{-A''}};$$

эти уравненія принадлежатъ двумъ прямымъ $OA$ и $OA'$, проходящимъ чрезъ начало координатъ и составляющимъ равные углы съ осью $Ox$; также найдемъ для сѣченія поверхности съ плоскостью $zOy$ уравненія:

$$x = 0, \quad z = \pm y \sqrt{\frac{A'}{-A''}},$$

принадлежащія двумъ прямымъ $OB$ и $OB'$, проходящимъ чрезъ начало координатъ и составляющимъ равные углы съ осью $Oy$.



Фиг. 138

Для пересѣченія съ плоскостью $z = \pm c$, параллельною $xOy$, получимъ уравненіе

$$Ax^2 + A'y^2 = -A''c^2,$$

принадлежащее эллипсу $ABA'B'$, котораго полуоси суть:

$$a = c\sqrt{\frac{-A''}{A}}, \quad b = c\sqrt{\frac{-A''}{A'}}. \qquad (3)$$

Съ удаленіемъ плоскости $z = \pm c$ отъ начала координатъ, эти полуоси увеличиваются пропорціонально разстоянію плоскости отъ начала, и сохраняютъ при этомъ постоянное отношеніе: $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{A'}{A}}$; слѣдовательно, всѣ сѣченія, параллельныя плоскости $xOy$, суть подобные эллипсы, расширяющіеся съ удаленіемъ отъ начала.

Легко видѣть, что изслѣдуемая поверхность есть конусъ съ эллиптическимъ основаніемъ $ABA'B'$. Формулы (3) даютъ

$$A = -\frac{A''c^2}{a^2}, \quad A' = -\frac{A''c^2}{b^2};$$

отчего уравненіе конуса (2) принимаетъ видъ:

$$\frac{-A'' c^2}{a^2} x^2 - \frac{A'' c^2}{b^2} y^2 + A'' z^2 = 0$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{4}$$

Въ случаѣ $a = b$ основаніе конуса $ABA'B'$ будетъ кругъ, и конусъ можетъ быть произведенъ обращеніемъ прямой $OA$ около оси $Oz$.

Пересѣченіемъ конуса (4) плоскостью можно произвести всѣ три кривыя второго порядка. Пусть

$$Ax + By + Cz = D \tag{5}$$

будетъ уравненіе пересѣкающей плоскости. Исключивъ помощью него координату $z$ изъ уравненія (4), получимъ проекцію сѣченія на плоскости $xOy$:

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{A^2}{c^2 C^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{B^2}{c^2 C^2}\right) y^2 - \frac{2AB}{c^2 C^2} xy +$$

$$+ \frac{2D}{c^2 C^2}(Ax + By) - \frac{D^2}{c^2 C^2} = 0, \tag{6}$$

которая вообще есть линія второго порядка; проектируемая линія будетъ также 2-го порядка (см. **§ 106**) и, очевидно, одного свойства съ проекціею, т.-е. будетъ сомкнутая кривая или эллипсъ, когда проекція есть эллипсъ; она будетъ состоять изъ двухъ или одной безконечной вѣтви, когда проекція представляетъ двѣ или одну вѣтвь, т.-е. когда эта проекція есть гипербола или парабола.

Для опредѣленія вида линіи второго порядка (6), разсмотримъ выраженіе

$$m = \frac{4A^2B^2}{c^4C^4} - 4\left(\frac{1}{a^2} - \frac{A^2}{c^2C^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{B^2}{c^2C^2}\right) =$$

$$= 4\left(\frac{A^2}{b^2c^2C^2} + \frac{B^2}{a^2c^2C^2} - \frac{1}{a^2b^2}\right),$$

составленное изъ коэффиціентовъ при квадратахъ координатъ (**§ 39**). Очевидно, что при достаточно малыхъ величинахъ $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ это выраженіе будетъ отрицательное; при большихъ—положительное, а при нѣкоторыхъ другихъ—равно нулю; такъ что уравненіе (6) способно представить всякую линію второго порядка, когда $D$ не равно нулю, т.-е. когда плоскость не проходитъ чрезъ начало координатъ. Если же $D = 0$, то плоскость (5) проходитъ чрезъ начало координатъ и уравненіе (6) принадлежитъ: точкѣ при $m < 0$, двумъ прямымъ при $m > 0$ и одной прямой при $m = 0$. Для плоскости (6), параллельной плоскости (5), проведенной чрезъ вершину, выраженіе $m$ остается то же; потому что отношенія $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ тѣ же (см. **§ 97**); слѣдовательно, плоскость, не проходящая чрезъ вершину конуса, пересѣкаетъ конусъ по эллипсу, когда параллельная ей плоскость, проведенная чрезъ вершину, не имѣетъ, кромѣ этой точки, другихъ общихъ точекъ съ конусомъ, т.-е. когда она проходитъ между двумя вѣтвями конуса; плоскость пересѣчетъ конусъ по гиперболѣ, когда параллельная ей плоскость, проведенная чрезъ вершину, пересѣчетъ конусъ по двумъ прямымъ; наконецъ, плоскость въ пересѣченіи съ конусомъ произведетъ параболу, когда параллельная ей плоскость, проведенная чрезъ вершину, имѣетъ съ конусомъ общія точки на одной прямой линіи, т.-е. касается конуса по этой прямой.

Изслѣдуемъ теперь уравненіе

$$Ax + A'^2y^2 + A''z^2 + Q = 0 \tag{7}$$

въ случаѣ

$$A > 0,\ A' > 0,\ A'' < 0 \text{ и } Q > 0.$$

Легко видѣть, что величина $z$, выведенная изъ этого уравненія, будетъ вещественная для всѣхъ величинъ $x$ и $y$ и вмѣстѣ съ ними можетъ непрерывно измѣняться; поэтому уравненіе принадлежитъ поверхности.

Для пересѣченія этой поверхности съ осями $Ox$, $Oy$ находимъ мнимыя координаты:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-Q}{A}} = \pm\sqrt{\frac{Q}{A}}\sqrt{-1},$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{-Q}{A'}} = \pm\sqrt{\frac{Q}{A'}}\sqrt{-1},$$

а для пересѣченія съ осью $Oz$—вещественную

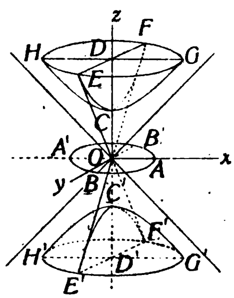
$$x = \pm\sqrt{\frac{-Q}{A''}};$$

слѣдовательно, поверхность пересѣкается съ одною только координатною осью $Oz$, и въ пересѣченіи выходятъ двѣ точки $C$ и $C'$, на равныхъ разстояніяхъ отъ начала, называемыя *вершинами* поверхности.

Положивъ

$$\sqrt{\frac{Q}{A}} = a, \quad \sqrt{\frac{Q}{A'}} = b, \quad \sqrt{\frac{-Q}{A''}} = c,$$

введемъ величины $a$, $b$, $c$, для удобства изслѣдованія поверхности, въ ея уравненіе (7). Такъ какъ



Фиг. 139

$$A = \frac{Q}{a^2}, \quad A' = \frac{Q}{b^2}, \quad A'' = -\frac{Q}{c^2},$$

то уравненіе (7) приведется къ слѣдующему:

$$\frac{Q}{a^2}x^2 + \frac{Q}{b^2}y^2 - \frac{Q}{c^2}z^2 + Q = 0$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

Въ пересѣченіи поверхности съ плоскостью $yOz$ найдемъ гиперболу:

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

которая пусть будетъ $ECFE'C'F'$; она расположена вѣтвями по оси $Oz$; главная ея полуось есть $c = OC$, а вторая $b = OB = OB'$,

Пересѣченіе поверхности съ плоскостью $xOz$ будетъ также гипербола:

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

которая пусть будетъ $GCHG'C'H'$; она такъ же, какъ предыдущая, расположена вѣтвями по оси $Oz$, и главная ея полуось есть опять $c = OC$, а вторая $a = OA = OA'$.

Съ плоскостью $xOy$ поверхность не пересѣкается; потому что при $z = 0$ получается уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0,$$

которое не можетъ быть удовлетворено вещественными величинами $x$ и $y$. Для сѣченія съ плоскостью $z = \pm h$, параллельною плоскости $xOy$, найдемъ

$$z = \pm h, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} + 1 = 0;$$

второе уравненіе ничего не представляетъ, когда $h < c$; оно даетъ двѣ точки $C$ и $C'$, когда $h = c$, и принадлежитъ эллипсу $EGFH$ или $E'G'F'H'$, когда $h > c$, т.-е. когда плоскость сѣченія не проходитъ между вершинами $C$ и $C'$. Полуоси этого эллипса, параллельныя осямъ $Ox$ и $Oy$, суть:

$$DG = a' = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad DE = b' = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

Съ непрерывнымъ возрастаніемъ $h$, эти полуоси непрерывно увеличиваются, сохраняя постоянное отношеніе $\frac{a}{b} = \frac{OA}{OB}$; слѣдовательно, сѣченія поверхности съ плоскостями, параллельными плоскости $xOy$, суть подобные эллипсы, расширяющіеся съ удаленіемъ отъ начала координатъ. Итакъ, поверхность состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ полъ, простирающихся неопредѣленно по оси $Oz$ въ обѣ стороны. Эта поверхность названа *гиперболоидомъ о двухъ полахъ*.

Величины $a$, $b$, $c$ называются полуосями поверхности. При $a = b$ сѣченія, параллельныя плоскости $xOy$, будутъ круги, и гиперболоидъ можетъ быть произведенъ обращеніемъ гиперболы $GCHG'C'H'$ около оси $CC'$.

Если положимъ, что въ уравненіи конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$a$, $b$, $c$ суть полуоси гиперболоида о двухъ полахъ, то конусъ относительно гиперболоида имѣетъ такое же свойство, какъ ассимптоты относительно гиперболы, т.-е. обѣ поверхности на своемъ безконечномъ протяженіи сближаются такъ, что разстояніе между ними становится безконечно малымъ. Для доказательства, найдемъ разность между координатами $z$ точекъ, взятыхъ на той и другой поверхности при одинаковыхъ $x$ и $y$. Означивъ чрезъ $z'$ координату конуса для отличія отъ координаты гиперболоида, имѣемъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0;$$

отсюда выводимъ

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{z'^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$z - z' = \frac{c^2}{z + z'}.$$

Когда $z$ и $z'$ имѣютъ одинаковые знаки, т.-е. направлены въ одну сторону, тогда $z + z'$ возрастаетъ безпредѣльно съ удаленіемъ соотвѣтственныхъ точекъ отъ начала координатъ, а потому разность $z - z'$ безпредѣльно уменьшается и становится безконечно-малою; слѣдовательно, разстояніе между точками $(x, y, z)$ и $(x, y, z')$ становится безконечно мало на безконечно-большомъ разстояніи отъ начала координатъ.

Положивъ $x = 0$ въ уравненіяхъ конуса и гиперболоида, получимъ:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0;$$

первое уравненіе принадлежитъ ассимптотамъ той гиперболы, которой принадлежитъ второе уравненіе; т.-е. пересѣченія конуса съ плоскостью $yOz$ суть ассимптоты гиперболы $ECFE'C'F'$. Такъ же найдемъ, что пересѣченія конуса съ плоскостью $xOz$ суть ассимптоты гиперболы $GCHG'C'H'$. Не трудно также доказать, что всякая плоскость, проведенная чрезъ точку $O$, пересѣкаетъ гиперболоидъ по гиперболѣ, у которой ассимптоты суть пересѣченія той же плоскости съ конусомъ; поэтому разсматриваемый конусъ называютъ *конусомъ ассимптотъ* гиперболоида.

Изслѣдуемъ наконецъ уравненіе

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Q = 0 \tag{8}$$

въ случаѣ $A > 0$, $A' > 0$, $A'' < 0$ и $Q < 0$.

Величина $z$ будетъ вещественная при вещественныхъ величинахъ $x$ и $y$, удовлетворяющихъ условію $Ax^2 + A'y^2 + Q > 0$, и вмѣстѣ съ ними можетъ непрерывно измѣняться; поэтому уравненіе принадлежитъ поверхности.

Для пересѣченія съ осями $Ox$ и $Oy$ найдемъ вещественныя координаты:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-Q}{A}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{-Q}{A'}};$$

слѣдовательно, поверхность пересѣкаетъ каждую изъ этихъ осей въ двухъ точкахъ, на равныхъ разстояніяхъ отъ начала координатъ. Пусть будутъ $A, A', B, B'$ эти точки; онѣ называются *вершинами*.

Ось $Oz$ не пересѣкаетъ поверхности; потому что при $x=0$ и $y=0$ получается мнимая величина

$$z=\sqrt{\frac{-Q}{A''}}=\sqrt{\frac{Q}{A''}}\sqrt{-1}.$$

Положивъ

$$AO=\sqrt{\frac{-Q}{A}}=a,\quad BO=\sqrt{\frac{-Q}{A'}}=b,\quad \sqrt{\frac{Q}{A''}}=$$
$$=c=OC=OC',$$

введемъ величины $a, b, c$ въ уравненіе поверхности. Такъ какъ

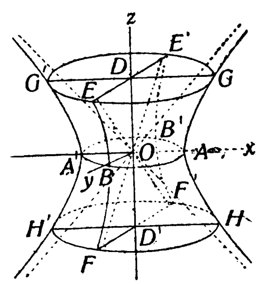
$$A=-\frac{Q}{a^2},\quad A'=-\frac{Q}{b^2},\quad A''=\frac{Q}{c^2}.$$

то уравненіе (8) беретъ видъ:

$$-\frac{Q}{a^2}x^2-\frac{Q}{b^2}y^2+\frac{Q}{c^2}z^2+Q=0$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (9)$$




Фиг. 140

Пересѣченіе поверхности съ плоскостью $yOz$ есть гипербола

$$x=0,\quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad (EBFE'B'F')$$

у которой $b$ есть главная полуось, а $c$ вторая. Пересѣченіе съ плоскостью $xOz$ есть гипербола

$$y=0,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad (GAHG'A'H'),$$

у которой $a$ есть главная полуось, а $c$ вторая. Плоскость $xOy$ пересѣкаетъ поверхность по эллипсу

$$z=0,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad (ABA'B'),$$

построенному на полуосяхъ $a$ и $b$. Сѣченіе съ плоскостью $z = \pm h$, параллельною $xOy$, есть эллипсъ

$$z = \pm h, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = 1, \quad (EGE'G' \quad \text{или} \quad FHF'H').$$

Полуоси его суть:

$$DG = a' = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad DE = b' = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}},$$

эти полуоси возрастаютъ съ возрастаніемъ $h$, т.-е. съ удаленіемъ плоскости сѣченія отъ начала координатъ, сохраняя постоянное отношеніе $\frac{a}{b} = \frac{AO}{BO}$. Наименьшія ихъ величины соотвѣтствуютъ $h = 0$, т.-е. принадлежитъ эллипсу $ABA'B'$, который называется *горломъ* поверхности. Изъ всѣхъ этихъ изслѣдованій видно, что поверхность представляетъ одну непрерывную полу, расширяющуюся по направленію оси $Oz$, въ ту и другую сторону. Эта поверхность называется *гиперболоидомъ объ одной полѣ*. Длины $AO = a$, $OB = b$ и $OC = c$ суть полуоси поверхности.

Горло $AB'A'B$ и сѣченія, ему параллельныя, превращаются въ круги, когда $a = b$; въ такомъ случаѣ гиперболоидъ можетъ быть произведенъ обращеніемъ гиперболы $GAHG'A'H'$ около оси $CC'$.

Конусъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

у котораго $a$, $b$, $c$ суть полуоси гиперболоида объ одной полѣ (8), есть ассимптота этой поверхности, въ чемъ легко удостовѣриться такъ же, какъ и для гиперболоида о двухъ полахъ. Для этого разсмотримъ опять разность между координатами $z$ двухъ точекъ, взятыхъ на конусѣ и на гиперболоидѣ при тѣхъ же $x$ и $y$. Означивъ чрезъ $z'$ координату первой, а чрезъ $z$ координату второй, будемъ имѣть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

отсюда выводимъ

$$\frac{z'^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

потомъ

$$z' - z = \frac{c^2}{z + z'}.$$

При $z$ и $z'$, имѣющихъ одинаковый знакъ, сумма $z + z'$ возрастаетъ безпредѣльно съ удаленіемъ точекъ отъ начала координатъ; поэтому разность $z' - z$ уменьшается и становится безконечномалою. Точно такъ же, какъ и для гиперболоида о двухъ полахъ, находимъ, что производящія конуса суть ассимптоты гиперболъ, по которымъ гиперболоидъ объ одной полѣ пересѣкается съ плоскостями, проведенными чрезъ эти производящія.

Изъ предыдущихъ изслѣдованій заключаемъ, что поверхности второго порядка съ центрами представляютъ три главныхъ вида:

*эллипсоидъ:* $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

*гиперболоидъ о двухъ полахъ:* $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

*и гиперболоидъ объ одной полѣ:* $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Конусъ есть частный видъ двухъ послѣднихъ; его можно разсматривать какъ гиперболоидъ, у котораго двѣ полуоси равны нулю. Въ самомъ дѣлѣ: если положимъ $a = \alpha c$, $b = \beta c$, то уравненія гиперболоидовъ примутъ видъ

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - z^2 = \mp c^2;$$

при $c = 0$ получимъ $a = 0$, $b = 0$ и

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - z^2 = 0,$$

а это уравненіе принадлежитъ конусу.

Когда одна изъ полуосей эллипсоида или гиперболоида объ одной полѣ, или одна изъ полуосей $a$ и $b$ гиперболоида о двухъ полахъ, сдѣлается безконечною, тогда разсматриваемая поверхность превращается въ цилиндръ.

Замѣтимъ еще, что изъ уравненія эллипсоида можно вывести уравненія гиперболоида о двухъ полахъ, перемѣною $a^2$ и $b^2$ на $-a^2$ и $-b^2$, а уравненіе гиперболоида объ одной полѣ перемѣною $c^2$ на $-c^2$.

**110.** Остается разсмотрѣть поверхности второго порядка, не имѣющія центровъ.

Уравненіе

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Cx + C'y + C''z + D = 0, \tag{1}$$

къ которому было приведено общее уравненіе поверхностей второго порядка [см. уравненіе (10) **§ 107**], принадлежитъ поверхности безъ центра, когда одинъ или два изъ коэффиціентовъ при квадратахъ координатъ равны нулю (см. **§ 108**), а коэффиціенты при первыхъ степеняхъ тѣхъ же координатъ не равны нулю.

Въ случаѣ двухъ коэффиціентовъ равныхъ нулю, напримѣръ $A = 0$, $A' = 0$, уравненіе (1) принадлежитъ цилиндру, въ чемъ легко удостовѣриться слѣдующимъ образомъ: для пересѣченія поверхности съ плоскостью $z = h$, параллельною $xOy$, получимъ

$$z = h, \quad A''h^2 + Cx + C'y' + C''h + D = 0;$$

эти уравненія принадлежатъ прямой линіи, и такъ какъ здѣсь коэффиціенты $C$ и $C'$ остаются тѣ же для всѣхъ величинъ $h$, то всѣ прямыя, происходящія отъ пересѣченія поверхности съ плоскостями, параллельными $xOy$, и съ этою самою плоскостью, составляютъ равные углы съ осями $Ox$ и $Oy$, а потому эти прямыя между собою параллельны. Такое свойство можетъ принадлежать только цилиндру. За направляющую цилиндра можно взять слѣдъ его на плоскости $xOz$:

$$y = 0, \quad A''z^2 + Cx + C''z + D = 0;$$

этотъ слѣдъ есть парабола (см. **§ 46**).

Положимъ теперь, что въ уравненіи (1) будетъ $A = 0$, но $A'$, $A''$ и $C$ не равны нулю. Для упрощенія уравненія, перенесемъ начало координатъ въ другую точку $(\alpha, \beta, \gamma)$, перемѣнивъ координаты $x$, $y$, $z$ на другія, имъ параллельныя, $x'$, $y'$, $z'$, и опредѣливъ новое начало такимъ образомъ, чтобы въ новомъ уравненіи

$$A'y'^2 + A''z'^2 + Cx' + (2A'\beta + C')\,y' + (2A''\gamma + C'')\,z' + A'\beta^2 + \\ + A''\gamma^2 + C\alpha + C'\beta + C''\gamma + D = 0$$

не было членовъ съ первыми степенями $y'$, $z'$ и постояннаго члена. Для этого должно положить

$$2A'\beta + C' = 0, \quad 2A''\gamma + C'' = 0,$$
$$A'\beta^2 + A''\gamma^2 + C\alpha + C'\beta + C''\gamma + D = 0;$$

откуда выходитъ

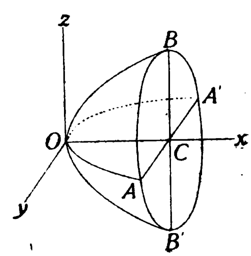
$$\beta = -\frac{C'}{2A'}; \quad \gamma = -\frac{C''}{2A''},$$
$$\alpha = \frac{C'^2}{4A'C} + \frac{C''^2}{4A''C} - \frac{D}{C}.$$

Такъ какъ $A'$, $A''$, $C$ не равны нулю, то величины $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ конечныя, и вышесказанное преобразованіе возможно; послѣ чего уравненіе поверхности приведется къ слѣдующему:

$$A'y'^2 + A''z'^2 + Cx' = 0. \tag{2}$$

Можно предположить, что здѣсь коэффиціентъ $A' > 0$; въ противномъ случаѣ можно привести къ этому условію перемѣною знаковъ во всѣхъ членахъ уравненія. При этомъ будетъ $A'' > 0$ или $A'' < 0$. Коэффиціентъ $C$ также можетъ быть положительный или отрицательный; но достаточно разсмотрѣть одинъ только изъ этихъ случаевъ, потому что другой случай приведется къ первому, если перемѣнить направленіе положительныхъ $z'$ на противоположное. Мы разсмотримъ случай $C < 0$ и положимъ $C = -Q$; отъ этого уравненіе (2) приметъ видъ

$$A'y^2 + A''z^2 = Qx. \tag{3}$$



Фиг. 141

1) Изслѣдуемъ сперва это уравненіе въ случаѣ $A'' > 0$.

Въ пересѣченіи съ плоскостью $xOy$ найдемъ параболу

$$z = 0, \quad A'y^2 = Qx, \quad (AOA'),$$

простирающуюся въ сторону положительныхъ $x$. Для пересѣченія съ плоскостью $zOx$ получимъ также параболу

$$y = 0, \quad A''z^2 = Qx, \quad (BOB'),$$

простирающуюся въ сторону положительныхъ $x$. Означивъ чрезъ $2p$ и $2p'$ параметры этихъ параболъ, будемъ имѣть

$$2p = \frac{Q}{A'}, \quad 2p' = \frac{Q}{2A''};$$

слѣдовательно,

$$A' = \frac{Q}{2p}, \quad A'' = \frac{Q}{2p'},$$

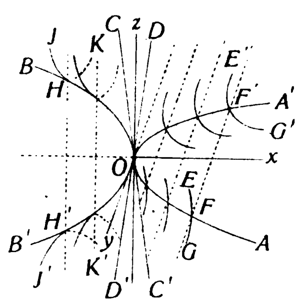
и уравненіе (3) приведется къ слѣдующему:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'^2} = 2x. \tag{4}$$

При $x = 0$ получимъ $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = 0$. Этому уравненію удовлетворяютъ только величины $y=0$, $z=0$; слѣдовательно, поверхность имѣетъ на плоскости $yOz$ только одну точку, начало координатъ. Для пересѣченія поверхности съ плоскостью $x=h$, параллельною $yOz$, найдемъ

$$x=h,\ \frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p'}=2h;$$

эти уравненія при $h<0$ ничего не представляютъ; поэтому поверхность не пересѣкается съ плоскостями, параллельными $yOz$, проведенными со стороны отрицательныхъ $x$. При $h>0$ сѣченіе будетъ эллипсъ съ полуосями: $CA=\sqrt{2hp}$ и $CB=\sqrt{2hp'}$, которыя неопредѣленно увеличиваются съ возрастаніемъ $h$, сохраняя постоянное отношеніе $\sqrt{\frac{p}{p'}}$. Изъ этихъ изслѣдованій видно, что поверхность представляетъ одну непрерывную полу, простирающуюся и расширяющуюся неопредѣленно въ сторону положительныхъ $x$. Эта поверхность названа *параболоидомъ эллиптическимъ*. Легко удостовѣриться такъ же, какъ въ **§ 109**, что плоскость можетъ ее пересѣчь только по эллипсу или параболѣ, но нельзя получить въ сѣченіи гиперболы. При $p=p'$ сѣченія, параллельныя плоскости $xOz$, будутъ круги; въ такомъ случаѣ параболоидъ можетъ быть произведенъ обращеніемъ параболы $AOA'$ около оси $Ox$.




Фиг. 142

2) Разсмотримъ наконецъ уравненіе

$$A'y^2+A''z^2=Qx$$

въ случаѣ $A'<0$. Въ пересѣченіи съ плоскостью $xOy$ получимъ параболу

$$z=0,\quad A'y^2=Qx,\quad (AOA'),$$

простирающуюся въ сторону положительныхъ $x$. Пересѣченіе съ плоскостью $xOz$ будетъ также парабола

$$y=0,\quad A''z^2=Qx,\quad (BOB'),$$

но простирающаяся въ сторону отрицательныхъ $x$; потому что $\sqrt{\frac{Qx}{A''}}$ будетъ вещественная только для отрицательныхъ $x$, такъ какъ $Q>0$, а $A''<0$. Означивъ чрезъ $2p$ и $2p'$ параметры параболъ $AOA'$ и $BOB'$, будемъ имѣть

$$2p=\frac{Q}{A'},\quad 2p'=-\frac{Q}{A''},$$

а потому $A' = \frac{Q}{2p}$, $A'' = -\frac{Q}{2p'}$, и уравненіе поверхности можетъ быть приведено къ виду

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x.$$

При $x = 0$ получимъ

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 0, \quad y = \pm z \sqrt{\frac{p}{p'}};$$

слѣдовательно, плоскость $zOy$ пересѣкаетъ поверхность по двумъ прямымъ $CC'$ и $DD'$, проведеннымъ чрезъ начало координатъ и составляющимъ съ осью $Oz$ равные углы, которыхъ тангенсъ равенъ $\sqrt{\frac{p}{p'}}$. Для пересѣченія съ плоскостью $x = h$ параллельною $zOy$, получимъ

$$x = h, \quad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2h,$$

уравненія, принадлежащія гиперболѣ. Легко видѣть, что при $h > 0$ главная ось этой гиперболы параллельна оси $Oy$ и слѣдовательно, вершины кривой расположены по прямой, параллельной $Oy$, какъ у $EFGE'F'G'$. При $h < 0$ главная ось параллельна $Oz$, какъ у $JHKJ'H'K'$. Ассимптоты всѣхъ этихъ гиперболъ параллельны прямымъ $CC'$ и $DD'$. Не трудно доказать, что поверхность въ сѣченіи съ плоскостью можетъ произвести только параболы, гиперболы и прямыя линіи, но никогда не даетъ эллипса. Разсматриваемая поверхность называется *параболоидомъ гиперболическимъ*.

Такимъ образомъ мы нашли двѣ поверхности втораго порядка, не имѣющія центровъ: параболоиды эллиптическій и гиперболическій; ихъ уравненія могутъ быть соединены въ одно:

$$\frac{y^2}{p} \pm \frac{z^2}{p'} = 2x.$$

Когда одинъ изъ параметровъ $2p$ и $2p'$ сдѣлается безконечнымъ, тогда параболоидъ превращается въ цилиндръ съ производящею, параллельною оси $Oy$ или $Oz$, и съ параболическимъ основаніемъ на плоскости $xOz$ или $yOx$.

**111.** Между поверхностями втораго порядка мы встрѣтили, какъ частные виды, конусъ, цилиндръ и плоскость, принадлежащія къ поверхностямъ, называемымъ *линейчатыми*, т.-е. къ такимъ, которыя могутъ быть произведены движеніемъ прямой линіи; но кромѣ того есть еще двѣ линейчатыя поверхности второго порядка, а именно: *гиперболоидъ объ одной полѣ* и *пароболоидъ гиперболическій.* Чтобы въ этомъ удостовѣриться, посмотримъ прежде, какъ вообще узнать, что данная поверхность принадлежитъ къ линейчатымъ.

Пусть $F(x, y, z) = 0$ будетъ уравненіе поверхности и

$$x = \alpha z + m, \quad y = \beta z + n \tag{1}$$

уравненія прямой, которую желаемъ положить на поверхность всѣми точками. Чтобы послѣднее условіе было удовлетворено, надобно, чтобы координаты $x$ и $y$ прямой удовлетворяли уравненію $F(x, y, z) = 0$ при всякой величинѣ $z$; для этого уравненіе

$$F(\alpha z + m, \quad \beta z + n, \quad z) = 0 \tag{2}$$

должно быть тождественно относительно $z$. Расположивъ его по степенямъ $z$ и положивъ равными нулю коэффиціенты всѣхъ членовъ, получимъ условія, что уравненіе (2) есть тожество. По этимъ условіямъ должно опредѣлить величины $\alpha$, $\beta$, $m$ и $n$. Если найдемъ для нихъ опредѣленныя вещественныя величины, то можно помѣстить прямую (1) на поверхности $F(x, y, z) = 0$ въ одномъ или нѣсколькихъ опредѣленныхъ положеніяхъ; но нельзя будетъ двигать прямую по поверхности, потому что $\alpha$, $\beta$, $m$ и $n$ постоянныя. Если же выведенныя условія даютъ такія вещественныя величины для $\alpha$, $\beta$, $m$ и $n$, что можно одну разсматривать какъ независимую перемѣнную, а прочія какъ ея функціи, то поверхность будетъ общимъ мѣстомъ множества прямыхъ и можетъ быть произведена непрерывнымъ движеніемъ прямой; слѣдовательно, поверхность будетъ линейчатая.

**112.** Приложимъ этотъ способъ розысканія линейчатыхъ поверхностей къ поверхностямъ второго порядка.

Разсмотримъ сперва поверхности, имѣющія центры. Уравненія ихъ могутъ быть представлены подъ общимъ видомъ

$$Px^2 + Qy^2 + Rz^2 = 1,$$

гдѣ

$$P = \pm \frac{1}{a^2}, \quad Q = \pm \frac{1}{b^2}, \quad R = \pm \frac{1}{c^2},$$

а $a$, $b$, $c$ полуоси.

Подставивъ сюда, вмѣсто $x$ и $y$, координаты прямой линіи

$$x = \alpha z + m, \quad y = \beta z + n, \tag{1}$$

получимъ

$$(P\alpha^2 + Q\beta^2 + R) z^2 + (2P\alpha m + 2Q\beta n) z + Pm^2 + Qn^2 = 1.$$

Чтобы это уравненіе было тожественно относительно $z$, надобно положить

$$\left.\begin{aligned} P\alpha^2 + Q\beta^2 + R &= 0 \\ 2P\alpha m + 2Q\beta n &= 0 \\ Pm^2 + Qn^2 &= 1 \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Въ случаѣ эллипсоида, величины $P$, $Q$ и $R$ положительныя; тогда первое изъ условій (2) не можетъ быть удовлетворено вещественными величинами $\alpha$ и $\beta$, и, слѣдовательно, нельзя уложить на эллипсоидѣ прямую линію. Для гиперболоида о двухъ полахъ $P$ и $Q$ отрицательныя, а $R$ положительное; тогда третье изъ уравненій (2) даетъ мнимыя величины для $m$ и $n$; слѣдовательно, на гиперболоидѣ о двухъ полахъ также нельзя уложить прямую линію. Остается разсмотрѣть гиперболоидъ объ одной полѣ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \tag{3}$$

въ такомъ случаѣ уравненія (2) приведутся къ слѣдующимъ:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\alpha m}{a^2} + \frac{\beta n}{b^2} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Уравненіе (4) показываетъ, что прямая, лежащая на гиперболоидѣ, должна быть параллельна одной изъ производящихъ *конуса ассимптотъ*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ: уравненія прямой, проходящей чрезъ вершину конуса и параллельной прямой (1), будутъ $x = \alpha z$, $y = \beta z$; подставивъ эти величины $x$ и $y$ въ уравненіе конуса, найдемъ

$$\frac{\alpha^2 z^2}{a^2} + \frac{\beta^2 z^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

или

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0.$$

Это уравненіе, выражающее условіе, что прямая $x = \alpha z$, $y = \beta z$ лежитъ на конусѣ, тожественно съ уравненіемъ (4).

Уравненіе (6) показываетъ, что координаты $m$ и $n$, принадлежащія слѣду прямой (1) на плоскости $xOy$, удовлетворяютъ уравненію горла гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

а потому этотъ слѣдъ $(m, n)$ есть одна изъ точекъ горла, что впрочемъ можно было бы предвидѣть; потому что горло, какъ слѣдъ гиперболоида на плоскости $xOy$ есть общее мѣсто слѣдовъ всѣхъ линій, прямыхъ или кривыхъ, проведенныхъ по гиперболоиду.

Помноживъ уравненіе (5) на $z$ и сложивъ его потомъ съ уравненіемъ (6), получимъ

$$\frac{m(\alpha z + m)}{a^2} + \frac{n(\beta z + n)}{b^2} = 1,$$

что вслѣдствіе уравненія (1) приводится къ уравненію первой степени

$$\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} = 1,$$

принадлежащему касательной къ горлу въ точкѣ $(m, n)$ (см. **§ 60**); слѣдовательно, проекція прямой (1) на плоскости $xOy$ должна быть касательна къ горлу. Легко доказать, что можно провести чрезъ всякую точку горла прямую (1), такъ что она будетъ лежать на гиперболоидѣ. Для этого надобно доказать, что при всѣхъ величинахъ $m$ и $n$, удовлетворяющихъ уравненію горла, т.-е. условію (6), уравненія (4) и (5) даютъ возможныя величины для $\alpha$ и $\beta$. Уравненіе (5) можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\frac{\alpha}{a} : \frac{n}{b} = -\frac{\beta}{b} : \frac{m}{a};$$

отсюда по извѣстному свойству пропорціи выводимъ

$$\frac{\alpha}{a}:\frac{n}{b}=-\frac{\beta}{b}:\frac{m}{a}=\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}}:\sqrt{\frac{n^2}{b^2}+\frac{m^2}{a^2}},$$

что, вслѣдствіе условія (4), даетъ

$$\frac{\alpha}{a}:\frac{n}{b}=-\frac{\beta}{b}:\frac{m}{a}=\pm\frac{1}{c};$$

слѣдовательно,

$$\alpha=\pm\frac{an}{bc},\quad \beta=\mp\frac{bm}{ac}.$$

Эти величины всегда возможны; поэтому существуетъ безчисленное множество положеній, въ которыхъ можно уложить прямую на гиперболоидѣ, и уравненія такой прямой берутъ видъ

$$x=\pm\frac{an}{bc}z+m,\quad y=\mp\frac{bm}{ac}z+n;$$

сюда должно присоединить уравненіе касательной къ горлу

$$\frac{mx}{a^2}+\frac{ny}{b^2}=1,$$

которое, впрочемъ, можетъ быть выведено непосредственно изъ двухъ предыдущихъ. Двойной знакъ при $z$ показываетъ, что можно чрезъ точку горла $(m, n)$ провести по гиперболоиду двѣ прямыя; слѣдовательно, *гиперболоидъ объ одной полѣ есть линейчатая поверхность, которую можно произвести двоякимъ образомъ:* 1) *движеніемъ прямой*

$$x=\frac{anz}{bc}+m,\quad y=-\frac{bmz}{ac}+n \tag{7}$$

*и* 2) *движеніемъ прямой*

$$x=-\frac{anz}{bc}+m,\quad y=+\frac{bmz}{ac}+n. \tag{8}$$

Не трудно построить эти двѣ прямыя, называемыя *прямолинейными производящими.* По доказанному выше, онѣ должны быть параллельны двумъ производящимъ конуса ассимптотъ

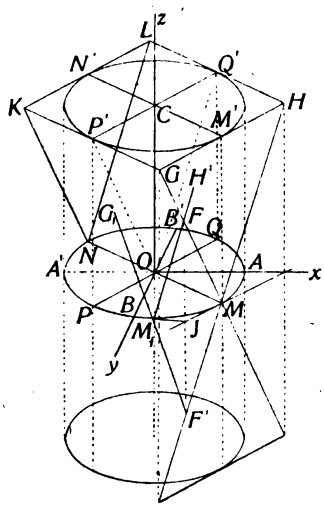
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;$$

слѣдовательно, плоскость

$$\frac{mx}{a^2}+\frac{ny}{b^2}=1,$$

въ которой онѣ находятся, параллельна плоскости, проходящей чрезъ соотвѣтственныя производящія конуса, а потому слѣды этихъ двухъ плоскостей между собою параллельны; отсюда выходитъ слѣдующее построеніе:

Пусть будутъ: $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ полуоси гиперболоида. Начертимъ помощью двухъ первыхъ горло $ABA'B'$; проведемъ къ нему касательную въ какой-нибудь точкѣ $M$ и діаметръ $PQ$, параллельный этой касательной, т.-е. сопряженный съ прямою $OM$ (см. § 66). Послѣ того проведемъ плоскость чрезъ $PQ$ и $OC$; въ пересѣченіи ея съ конусомъ ассимптотъ найдемъ прямыя $OP'$ и $OQ'$; наконецъ, проведемъ прямыя, параллельныя послѣднимъ, чрезъ точку $M$; такимъ образомъ получимъ $MG$ и $MH$, производящія гиперболоида.



Фиг. 143

Производящія конуса $OP'$ и $OQ'$ могутъ быть опредѣлены на основаніи слѣдующаго замѣчанія: плоскость, параллельная горлу, проведенная чрезъ вершину $C$, пересѣкаетъ конусъ ассимптотъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

по эллипсу $P'N'Q'M'$,

$$z=c,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

у котораго проекція на плоскости горла будетъ само горло; слѣдовательно, перпендикуляры, возставленные изъ $P$ и $Q$ къ плоскости горла, встрѣтятъ разсматриваемое сѣченіе конуса въ точкахъ $P'$ и $Q'$, чрезъ которыя должны проходить искомыя производящія конуса. Перпендикуляръ къ плоскости $AOB$, возстановленный изъ $M$, встрѣтитъ эллипсъ $P'N'Q'$ въ точкѣ $M'$; проведя чрезъ эту точку касательную къ этому эллипсу и отложивъ на ней длины $M'G=CP'$ и $M'H=CQ'$, получимъ двѣ точки $G$ и $H$, принадлежащія производящимъ гиперболоида, какъ это легко видѣть изъ треугольниковъ $OP'Q'$ и $MGH$, у которыхъ стороны соотвѣтственно равны и параллельны. Такъ какъ производящія конуса $OP'$ и $OQ'$ составляютъ равные углы съ осью $OC$, то и производящія гиперболоида, $MG$ и $MH$, будучи имъ параллельны, также составляютъ равные углы съ этою осью или съ прямою $MM'$. Производящія гиперболоида $NK$ и $NL$, проведенныя черезъ точку $N$, діаметрально противоположную съ $M$, параллельны прямымъ $OP'$ и $OQ'$, а, слѣдовательно, и прямымъ $MG$ и $MH$.

Легко видѣть, что два какія ни есть положенія производящей одного рода, напр. $MH$ и $M_1H_1$, не пересѣкаются. Пусть будетъ $J$ пересѣченіе проекцій этихъ производящихъ на плоскости горла; если бы эти прямыя пересѣкались, то пересѣченіе ихъ находилось бы на перпендикулярѣ $F'F$ къ плоскости горла, проведенномъ чрезъ точку $J$, а это невозможно, потому что $FF'$ встрѣчаетъ прямую $M_1H_1$ выше горла, а прямую $MH$—ниже горла. Но производящая $M_1H_1$ пересѣкаетъ производящую второго рода, $MG$. Въ самомъ дѣлѣ: перпендикуляръ $JF$ встрѣтитъ обѣ прямыя выше горла и при этомъ встрѣчается съ поверхностью гиперболоида; но, такъ какъ $FF'$ пересѣкаетъ гиперболоидъ только въ двухъ точкахъ (см. **§ 106**), которыя симметрически расположены относительно плоскости горла, то пересѣченія его съ прямыми $M_1H_1$ и $MG$ должны находиться въ одной точкѣ $F$. Прямыя $M_1G_1$ и $MH$ пересѣкаются въ точкѣ $F'$ симметрической съ $F$ относительно плоскости горла. Легко вывести эти заключенія изъ уравненій производящихъ. Можно притомъ доказать, что проекціи производящихъ гиперболоида на плоскости $zOx$ касаются гиперболы

$$y=0,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

а проекціи ихъ на плоскости $zOy$ касаются гиперболы

$$x=0,\quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Прямая (7), двигаясь по гиперболоиду, будетъ постоянно пересѣкать всѣ прямыя, представляющія различныя положенія прямой (8). Такъ какъ трехъ прямолинейныхъ направляющихъ, не находящихся по двѣ въ одной плоскости, совершенно достаточно для образованія поверхности движеніемъ прямой (см. Начертат. Геометрію), то, двигая прямую (7) по тремъ положеніямъ прямой (8), мы произведемъ гиперболоидъ объ одной полѣ; и также можно произвести тотъ же гиперболоидъ, двигая прямую (8) по тремъ положеніямъ прямой (7). Слѣдовательно, *гиперболоидъ объ одной полѣ есть линейчатая поверхность, происходящая отъ движенія прямой по тремъ прямолинейнымъ направляющимъ.*

**113.** Разсмотримъ теперь, могутъ ли параболоиды быть линейчатыми поверхностями. Общее уравненіе этихъ поверхностей есть

$$\frac{y^2}{p} \pm \frac{z^2}{p'} = 2x.$$

Исключивъ изъ него $x$ и $y$ помощью уравненій прямой,

$$x = \alpha z + m, \quad y = \beta z + n, \tag{1}$$

получимъ уравненіе

$$\left(\frac{\beta^2}{p} \pm \frac{1}{p'}\right) z^2 + 2\left(\frac{\beta n}{p} - \alpha\right) z + \frac{n^2}{p} - 2m = 0,$$

которое должно быть тождественно относительно $z$, чтобы можно было уложить прямую (1) на поверхности; отсюда выводимъ условія:

$$\frac{\beta^2}{p} \pm \frac{1}{p'} = 0, \quad \frac{\beta n}{p} - \alpha = 0, \quad \frac{n^2}{p} - 2m = 0.$$

Первое изъ нихъ не можетъ быть удовлетворено въ случаѣ эллиптическаго параболоида, потому что даетъ мнимую величину для $\beta$; слѣдовательно, эта поверхность не можетъ быть линейчатою, и даже нельзя на ней никакъ уложить прямую линію.

Остается разсмотрѣть гиперболическій параболоидъ, для котораго предыдущія условія приводятся къ слѣдующимъ:

$$\frac{\beta^2}{p} - \frac{1}{p'} = 0, \quad \beta n - \alpha p = 0, \quad n^2 - 2mp = 0;$$

откуда выходитъ:

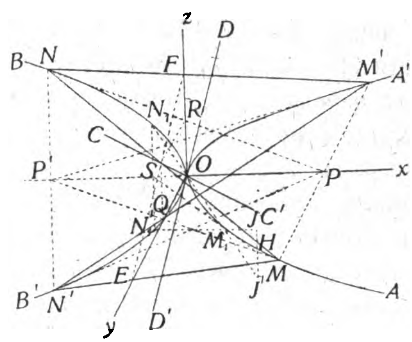
$$\beta^2 = \pm\sqrt{\frac{p}{p'}}, \quad n = \pm\sqrt{2mp}, \quad \alpha = \pm\sqrt{\frac{2m}{p'}}.$$

$\alpha$ положительная, когда $\beta$ и $n$ имѣютъ одинаковые знаки, въ противоположномъ случаѣ $\alpha$ отрицательная. Величина $\beta$ вещественная и постоянная; она равна тангенсу угла, составляемаго съ осью $Oz$

прямыми $CC'$ и $DD'$, по которымъ плоскость $yOz$ пересѣкаетъ параболоидъ; слѣдовательно, проекція на плоскости $yOz$ прямой (1) должна быть параллельна или $CC'$, или $DD'$. Величина $n = \pm\sqrt{2mp}$ будетъ вещественная только для $m > 0$, и показываетъ, что слѣдъ $(m, n)$ разсматриваемой прямой на плоскости $xOy$ находится на параболѣ $y = 2px$ $(AOA')$, по которой эта плоскость пересѣкаетъ параболоидъ. Величина $\alpha$ будетъ также вещественная при $m > 0$. Изъ этого слѣдуетъ, что можно уложить прямую (1) на параболоидѣ, и уравненія ея берутъ видъ

$$x = \pm z\sqrt{\frac{2m}{p'}} + m, \quad y = \pm z\sqrt{\frac{p}{p'}} \pm \sqrt{2mp}. \qquad (2)$$

Двойной знакъ при $\sqrt{\ }$ показываетъ, что можно чрезъ всякую точку $(m, n)$, взятую на параболѣ $AOA'$, провести по параболоиду двѣ прямыя. Съ непрерывнымъ измѣненіемъ положенія точки $(m, n)$, эти прямыя станутъ двигаться и произведутъ поверхность параболоида.



Фиг. 144

Для слѣда прямой (2) на плоскости $zOx$ найдемъ, взявъ $n = +\sqrt{2mp}$:

$$y = 0, \quad z = \mp\sqrt{2mp'},$$
$$x = -m;$$

эти координаты удовлетворяютъ уравненію параболы

$$y = 0, \quad z^2 = -2p'x, \quad (BOB'),$$

по которой плоскость $zOx$ пересѣкаетъ параболоидъ; поэтому разсматриваемая точка находится на этой параболѣ. Замѣтимъ притомъ, что координата $x = -m$ равна и противоположна координатѣ точки $(m, n)$. На основаніи этого легко построить прямую (2). Взявъ произвольную точку $M(m, n)$ на параболѣ $AOA'$ и проведя ея координаты $OP$ и $MP$, отложимъ $OP' = OP$ и возставимъ изъ $P'$ къ оси $Ox$ перпендикуляръ, который встрѣтитъ параболу $BOB'$ въ точкѣ $N$ или $N'$, представляющей слѣдъ прямой (2) на плоскости $zOx$; поэтому искомая прямая будетъ $MN$ или $MN'$. Здѣсь $PP' = 2m$ есть величина подкасательной параболы $AOA'$ при точкѣ касанія въ $M$ (см. **§ 62**); слѣдовательно,

$P'M$, проекція на плоскости $xOy$ прямой $MN$ или $MN'$, касается параболы $AOA'$. По той же причинѣ $NP$ или $N'P$, проекція той же прямой на плоскости $zOx$, касается параболы $BOB'$.

Координата $m = OP$ принадлежитъ еще точкѣ $M'$ $(m, -n)$ на параболѣ $AOA'$, чрезъ которую можно также провести двѣ прямыя $M'N$ и $M'N'$ на параболоидѣ, встрѣчающіяся съ двумя первыми въ точкахъ $N$ и $N'$.

Координаты $OQ = \frac{1}{2} MP$ и $OR = \frac{1}{2} P'N$ принадлежатъ точкѣ $S$, въ которой прямая $MN$ пересѣкаетъ плоскость $zOy$. Чрезъ эту точку проходитъ $EF$, проекція прямой на плоскости $zOy$. Вслѣдствіе доказаннаго выше, эта проекція параллельна прямой $DD'$; проекція на $zOy$ прямой $M'N'$ также параллельна $DD'$, а проекціи прямыхъ $MN'$ и $M'N$ параллельны $CC'$.

Всѣ положенія одной производящей, напримѣръ $MN$, имѣя проекціи на $zOy$ параллельныя $DD'$, находятся въ плоскостяхъ, между собою параллельныхъ; поэтому онѣ не пересѣкаются; онѣ не могутъ быть и параллельны, потому что проекціи ихъ на плоскости $xOy$, касаясь параболы $(AOA')$ въ разныхъ точкахъ, не могутъ быть параллельны. Итакъ, два положенія одной производящей не находятся въ одной плоскости. Но каждая производящая $MN$ пересѣкаетъ всѣ положенія производящей второго рода $MN'$. Разсмотримъ, напримѣръ, $MN$ и $M_1N_1'$: ихъ проекціи на плоскости $xOy$ пересѣкаются въ точкѣ $H$; перпендикуляръ $HJ$, возставленный изъ этой точки къ плоскости $xOy$, встрѣтитъ обѣ производящія по одну сторону этой плоскости и при этомъ пересѣчетъ параболоидъ; а такъ какъ онъ съ этой поверхностью можетъ пересѣчься только въ двухъ точкахъ $J$ и $J'$, симметрически расположенныхъ относительно $xOy$, то производящія $MN$ и $M_1N_1'$ должны пройти чрезъ точку $J$; слѣдовательно, эти прямыя пересѣкаются въ этой точкѣ. Такъ же найдемъ, что производящія $MN'$ и $M_1N_1$ пересѣкаются въ точкѣ $J'$.

Движеніе прямой, производящей поверхность, можно подчинить условію, что она лежитъ на двухъ данныхъ прямыхъ и параллельна данной плоскости, и эта прямая можетъ образовать только одну поверхность; поэтому параболоидъ можетъ быть произведенъ движеніемъ прямой $MN$, остающейся параллельною плоскости $xOD$, по двумъ прямолинейнымъ направляющимъ, представляющимъ два положенія прямой $MN'$ на параболоидѣ, или также движеніемъ прямой, остающейся параллельною плоскости $COx$, по двумъ положеніямъ прямой $MN$. Это образованіе параболоида гиперболическаго сходно съ образованіемъ плоскости движеніемъ прямой параллельно данной плоскости по двумъ параллельнымъ прямымъ; поэтому параболоидъ гиперболическій называется *косою плоскостью.*

### D. Касательныя плоскости и нормали къ поверхностямъ.

—* **114.** Если прямая, пересѣкающая поверхность въ нѣсколькихъ точкахъ, измѣняетъ свое положеніе такъ, что двѣ, или болѣе, точки пересѣченія сближаются и сходятся въ одну, то, при совпаденіи этихъ точекъ, прямая называется *касательною къ поверхности* въ точкѣ совпаденія. Опредѣлимъ условіе касанія прямой къ поверхности

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

въ точкѣ $(x, y, z)$.

Пусть будетъ $(x', y', z')$ другая точка на поверхности, смежная съ $(x, y, z)$, $r$ разстояніе между этими точками. Принимая $(x, y, z)$ за начало $r$, положимъ что $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ суть координаты конца прямой длины, равной единицѣ, проведенной изъ начала координатъ параллельно и въ одну сторону съ $r$. Въ случаѣ прямоугольныхъ координатъ величины $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ суть косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ $r$ съ осями координатъ. Во всякомъ случаѣ, каковы бы не были оси координатъ, мы будемъ имѣть

$$x' - x = r\alpha, \quad y' - y = r\beta, \quad z' - z = r\gamma,$$

$$x' = x + r\alpha, \quad y' = y + r\beta, \quad z' = z + r\gamma. \tag{2}$$

Условіе, что точка $(x', y', z')$ находится на поверхности (1), даетъ

$$F(x + r\alpha, \quad y + r\beta, \quad z + r\gamma) = 0.$$

Это уравненіе вообще можно расположить по степенямъ $r$; такъ что оно приметъ видъ

$$F(x, y, z) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\gamma\right) r + Qr^m = 0,$$

гдѣ $m > 1$ и $Q$ величина, не обращающаяся въ безконечность при $r = 0$. Вслѣдствіе условія же, что точка $(x, y, z)$ находится на поверхности (1), первый членъ этого уравненія равенъ нулю; уничтоживъ его и раздѣливъ все уравненіе на $r$, получимъ

$$\frac{\partial F}{\partial x}\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\gamma+Qr^{m-1}=0. \tag{3}$$

Если теперь положимъ, что точки $(x, y, z)$ и $(x', y', z')$ сходятся и совпадаютъ въ одну, то $r$ станетъ уменьшаться и обратится въ нуль; тогда уравненіе (3) приведется къ слѣдующему:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\gamma=0, \tag{4}$$

а прямая, проведенная изъ начала въ точку $(\alpha, \beta, \gamma)$, сдѣлается параллельною касательной, въ которую обратится прямая, проходящая чрезъ точки $(x, y, z)$ и $(x', y', z')$. Поэтому, если означимъ чрезъ $X$, $Y$, $Z$ координаты какой-нибудь точки на этой касательной, то будемъ имѣть

$$\frac{X-x}{\alpha}=\frac{Y-y}{\beta}=\frac{Z-z}{\gamma} \tag{5}$$

для уравненій касательной; при чемъ величины $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, и координаты точки касанія $x$, $y$, $z$ связаны уравненіемъ (4). Такъ какъ множество величинъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ удовлетворяютъ уравненію (4) при тѣхъ же величинахъ $x$, $y$, $z$, то можно провести безчисленное множество касательныхъ къ поверхности (1) чрезъ данную точку $(x, y, z)$.

Уравненіе (4) однородно относительно $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; поэтому въ немъ эти величины могутъ быть замѣнены разностями $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, которыя, по уравненію (5), имъ пропорціональны; отъ этого получимъ уравненіе

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0, \tag{6}$$

которому должны удовлетворять координаты $X$, $Y$, $Z$ каждой точки каждой прямой, касательной къ поверхности въ точкѣ $(x, y, z)$. Это уравненіе относительно $X$, $Y$, $Z$ первой степени, а потому принадлежитъ плоскости; слѣдовательно, *всѣ касательныя къ поверхности* (1) *въ точкѣ* $(x, y, z)$ *лежатъ въ одной плоскости*. Такая плоскость называется *плоскостью, касательною къ поверхности* *въ точкѣ* $(x, y, z)$. Уравненіе (6) есть общій видъ уравненія касательной плоскости *).

Перпендикуляръ къ касательной плоскости, проведенный чрезъ точку касанія $(x, y, z)$, называется *нормалью къ поверхности въ точкѣ* $(x, y, z)$. Направленіе нормали можно опредѣлить направленіемъ параметра $P$ линейной функціи относительно $X$, $Y$, $Z$, находящейся въ первой части уравненія касательной плоскости (6); потому что онъ также перпендикуляренъ къ касательной плоскости. Этотъ параметръ называется *дифференціальнымъ параметромъ* функціи $F(x, y, z)$, находящейся въ первой части уравненія поверхности (1); проекціи его на осяхъ кооординатъ суть частныя производныя этой функціи относительно $x$, $y$, $z$, а именно

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z},$$

такъ что

$$P\cos(Px) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad P\cos(Py) = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad P\cos(Pz) = \frac{\partial F}{\partial z} \tag{7}$$

и

$$P = \sqrt{\frac{1}{\Delta}\left\{(1-\lambda^2)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + (1-\mu^2)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + (1-\nu^2)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + 2(\mu\nu-\lambda)\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z} + 2(\lambda\nu-\mu)\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial x} + 2(\lambda\mu-\nu)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\right\}},$$

гдѣ $\lambda$, $\mu$, $\nu$ суть косинусы угловъ между осями координатъ. Въ случаѣ прямоугольныхъ осей имѣемъ

$$P = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Формулы (7) даютъ:

$$\cos(Px) = \frac{1}{P}\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \cos(Py) = \frac{1}{P}\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos(Pz) = \frac{1}{P}\frac{\partial F}{\partial z}$$

---

*) Уравненіе (5) беретъ неопредѣленный видъ, когда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0;$$

въ такомъ случаѣ касательная плоскость можетъ не существовать, и всѣ касательныя линіи въ точкѣ $(x, y, z)$ могутъ образовать конусъ.

для опредѣленія угловъ, составляемыхъ параметромъ или нормалью съ осями координатъ. Параметръ можно изобразить перпендикуляромъ опредѣленной длины, возставленнымъ къ касательной плоскости изъ точки касанія $(x, y, z)$.

Для разстоянія $\delta$ какой-нибудь точки $(x', y', z')$ отъ касательной плоскости мы будемъ имѣть формулу:

$$\delta = \frac{1}{P}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x'-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(y'-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(z'-z)\right]$$

или

$$\delta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial z}\zeta\right),$$

гдѣ для сокращенія положено

$$x'-x=\xi, \quad y'-y=\eta, \quad z'-z=\zeta.$$

При переходѣ отъ точки $(x, y, z)$ къ точкѣ $(x', y', z')$ функція $F(x, y, z)$ получаетъ приращеніе

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial z}\zeta + \varepsilon,$$

гдѣ $\varepsilon$ есть совокупность членовъ, содержащихъ высшія степени $\xi, \eta, \zeta$; отсюда

$$\frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial z}\zeta = \Delta F - \varepsilon$$

и

$$\delta = \frac{1}{P}\Delta F - \frac{\varepsilon}{P}. \tag{8}$$

Если точка $(x', y', z')$ внѣ поверхности (1), то $\Delta F$ не равно нулю, и при безконечно-маломъ разстояніи этой точки отъ точки $(x, y, z)$ знакъ всего выраженія (8) зависитъ отъ знака $\Delta F$; поэтому, когда $\Delta F < 0$, точка $(x', y', z')$ находится относительно поверхности съ той стороны, куда направленъ параметръ $P$, а когда $\Delta F < 0$, она находится со стороны противоположной. Если же точка $(x', y', z')$ находится на поверхности (1), то $\Delta F = 0$ и знакъ $\delta$ (8) зависитъ уже отъ знака выраженія $\varepsilon$, которое вообще можетъ быть представлено подъ видомъ:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(A\xi^2 + A'\eta^2 + A''\zeta^2 + B\eta\zeta + B'\zeta\xi + B''\xi\eta) + \varepsilon',$$

гдѣ $\varepsilon'$ есть совокупность членовъ 3-й и высшихъ степеней относительно $\xi$, $\eta$, $\zeta$, а

$$A = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad A' = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad A'' = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$

$$B = 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}, \quad B' = 2\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}, \quad B'' = 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

При безконечно-маломъ разстояніи точки $(x', y', z')$ отъ $(x, y, z)$, знакъ $\varepsilon$ зависитъ отъ знака выраженія 2-й степени

$$A\xi^2 + A'\eta^2 + A''\zeta^2 + B\zeta\eta + B'\zeta\xi + B''\xi\eta \qquad (9)$$

и съ нимъ одинаковъ; поэтому $\delta$ имѣетъ знакъ, противоположный съ выраженіемъ (9); слѣдовательно, когда выраженіе (9) отрицательное, точка $(x', y', z')$ находится относительно касательной плоскости съ той стороны, куда направленъ параметръ $P$, а когда выраженіе (9) положительное, точка $(x', y', z')$ находится на сторонѣ противоположной. Если выраженіе (9) имѣетъ одинъ и тотъ же знакъ для всѣхъ точекъ поверхности, смежныхъ съ точкою $(x, y, z)$, то всѣ эти точки, и слѣдовательно, сама поверхность, въ смежности съ $(x, y, z)$, лежатъ съ одной стороны касательной плоскости, а именно съ той стороны, куда направленъ параметръ $P$ въ случаѣ знака $-$, и съ противоположной стороны въ случаѣ знака $+$. Можно сказать, что въ первомъ случаѣ поверхность вогнута къ параметру, а во второмъ—выпукла къ параметру. Если же выраженіе (9) для нѣкоторыхъ точекъ, смежныхъ съ $(x, y, z)$, имѣетъ знакъ $+$, а для другихъ $-$, то на поверхности, въ смежности съ точкою $(x, y, z)$, есть точки, находящіяся съ той и другой стороны касательной плоскости; въ такомъ случаѣ касательная плоскость необходимо пересѣкаетъ поверхность по нѣкоторой линіи $C$, проходящей чрезъ точку $(x, y, z)$. Прямая $l$, соединяющая точки $(x, y, z)$ и $(x', y', z')$, встрѣтитъ поверхность со стороны, противоположной той, гдѣ точка $(x', y', z')$, и еще въ точкѣ $(x'', y'', z'')$, а при совпаденіи точекъ $(x, y, z)$ и $(x', y', z')$ эта прямая будетъ лежать на касательной плоскости, точка же $(x'', y'', z'')$ на линіи $C$. Если потомъ $l$ станетъ вращаться въ касательной плоскости до тѣхъ поръ, пока точка $(x'', y'', z'')$ также не совпадетъ съ $(x, y, z)$, то $l$ обратится въ касательную къ линіи $C$ въ точкѣ $(x, y, z)$. Такъ какъ эта точка представляетъ двойное совпаденіе съ нею точекъ $(x', y', z')$ и $(x'', y'', z'')$, то эта касательная $l$ называется *двойною касательною* къ поверхности.

Допустивъ опять формулы (2), мы будемъ имѣть

$$\xi = r\alpha, \quad \eta = r\beta, \quad \zeta = r\gamma,$$

$$\Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\gamma\right)r + \frac{1}{2}(A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + B\beta\gamma +$$

$$+ B'\gamma\alpha + B''\alpha\beta)r^2 + \varepsilon' = 0.$$

Положимъ, что $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ принадлежатъ какой-нибудь касательной $l$, а $\xi$, $\eta$, $\zeta$ точкѣ $(x'', y'', z'')$ пересѣченія этой касательной съ линіею $C$; тогда будемъ имѣть уравненіе (4) вмѣстѣ съ уравненіемъ

$$\frac{1}{2}(A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + B\beta\gamma + B'\gamma\alpha + B''\alpha\beta) + \frac{\varepsilon'}{r^2} = 0.$$

При совпаденіи точки $(x'', y'', z'')$ съ $(x, y, z)$, $r$ обратится въ нуль; тогда и $\frac{\varepsilon'}{r^2}$ обратится въ нуль, потому что степень $\varepsilon'$ выше второй относительно $r$; слѣдовательно, величины $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, соотвѣтствующія двойной касательной, должны удовлетворять двумъ совокупнымъ уравненіямъ:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\gamma = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\alpha^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\beta^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\gamma^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\beta\gamma + 2\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}\gamma\alpha + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\alpha\beta = 0. \tag{10}$$

Эти уравненія опредѣляютъ двѣ системы величинъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Если величины $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, выведенныя изъ нихъ, вещественны, то поверхность имѣетъ въ точкѣ $(x, y, z)$ двѣ двойныя касательныя, которыя въ частномъ случаѣ могутъ совпадать въ одну прямую; если же $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ мнимыя, то поверхность не имѣетъ двойныхъ касательныхъ, или, какъ говорятъ, имѣетъ мнимыя двойныя касательныя. Линія $C$ пересѣченія касательной плоскости съ поверхностью тогда становится также мнимою, потому что выраженіе (9) сохраняетъ свой знакъ, не обращаясь въ нуль, и поверхность въ смежности съ точкою $(x, y, z)$ лежитъ съ одной стороны касательной плоскости.

[1]) **115.** Приложимъ выведенное въ предыдущемъ § къ поверхностямъ 2-го порядка.

*Эллипсоидъ*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

Уравненіе касательной плоскости есть

$$\frac{2x}{a^2}(X-x)+\frac{2y}{b^2}(Y-y)+\frac{2z}{c^2}(Z-z)=0$$

и приводится помощью уравненія (1) къ слѣдующему:

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}-1=0. \tag{2}$$

Чтобы написать это уравненіе прямо, надобно перемѣнить въ уравненіи (1) квадраты координатъ $x^2$, $y^2$, $z^2$ на произведенія $xX$, $yY$, $zZ$, соотвѣтственно.

Проекціи дифференціальнаго параметра $P$ на осяхъ координатъ суть:

$$\frac{2x}{a^2},\quad \frac{2y}{b^2},\quad \frac{2z}{c^2};$$

слѣдовательно,

$$P=2\sqrt{\left[\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right]},$$

$$\cos(Px)=\frac{x}{a^2}:\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}},$$

$$\cos(Py)=\frac{y}{b^2}:\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}},$$

$$\cos(Pz)=\frac{z}{c^2}:\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}.$$

Для разстоянія $\delta$ какой-нибудь точки $(x', y', z')$ отъ касательной плоскости имѣемъ

$$\delta=\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}-1\right):\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}};$$

отсюда, для перпендикуляра, опущеннаго изъ центра эллипсоида на касательную плоскость, получимъ

$$\delta=-1:\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}=-2:P;$$

слѣдовательно, абсолютная величина этого перпендикуляра, которую означимъ чрезъ $h$, равна $\frac{2}{P}$. Знакъ $\delta$ показываетъ, что параметръ $P$, относительно касательной плоскости, всегда направленъ въ сторону, противоположную той, гдѣ находится центръ эллипсоида.

Выраженіе (9) **§ 114** приводится къ слѣдующему:

$$\frac{2\xi^2}{a^2}+\frac{2\eta^2}{b^2}+\frac{2\zeta^2}{c^2},$$

которое для всѣхъ значеній $\xi$, $\eta$, $\zeta$ сохраняетъ знакъ $+$; поэтому эллипсоидъ не пересѣкается съ касательною плоскостью и обращенъ выпуклостью къ параметру, т.-е. вогнутъ къ центру въ каждой точкѣ $(x, y, z)$.

2) *Гиперболоидъ о двухъ полахъ*:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Уравненіе касательной плоскости:

$$-\frac{xX}{a^2}-\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1. \tag{3}$$

Проекціи дифференціальнаго параметра $P$:

$$-\frac{2x}{a^2},\quad -\frac{2y}{b^2},\quad \frac{2z}{c^2}.$$

Параметръ

$$P=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}.$$

Разстояніе точки $(x', y', z')$ отъ касательной плоскости

$$\delta=\left(-\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}-1\right):\frac{P}{2}.$$

Перпендикуляръ, опущенный изъ центра на касательную плоскость равенъ $\delta=-\frac{2}{P}$. Эта величина отрицательная; поэтому центръ и параметръ $P$ находятся въ противоположныхъ сторонахъ относительной касательной плоскости.

Выраженіе (9) **§ 114** приводится къ

$$-\frac{2\xi^2}{a^2}-\frac{2\eta^2}{b^2}+\frac{2\zeta^2}{c^2}. \tag{4}$$

Здѣсь $\xi$, $\eta$, $\zeta$ связаны условіемъ

$$-\frac{(x+\xi)^2}{a^2}-\frac{(y+\eta)^2}{b^2}+\frac{(z+\zeta)^2}{c^2}=1,$$

изъ котораго выводимъ

$$\frac{z\zeta}{c^2}=\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\varepsilon, \tag{5}$$

гдѣ, при безконечно-малыхъ $\xi$, $\eta$, $\zeta$, величина $\varepsilon$ есть безконечно малая 2-го порядка. Помноживъ выраженіе (4) на $\frac{z^2}{c^2}$, исключивъ потомъ $\frac{z\zeta}{c^2}$ помощью формулы (5), а $\frac{z^2}{c^2}$ помощью уравненія гиперболоида, и отбросивъ безконечно-малыя 3-го и 4-го порядка, найдемъ выраженіе

$$-\left(\frac{y^2}{b^2}+1\right)\frac{\xi^2}{a^2}-\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{2xy\xi\eta}{a^2b^2},$$

которое должно имѣть одинаковый знакъ съ выраженіемъ (4). Такъ какъ

$$\frac{4x^2y^2}{a^2b^2}-4\left(\frac{y^2}{b^2}+1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)<0,$$

то выраженіе не можетъ перемѣнять знака, и этотъ знакъ есть —; слѣдовательно, выраженіе (4) всегда имѣетъ знакъ — , а потому гиперболоидъ о двухъ полахъ, въ смежности съ точкою касанія, вогнутъ къ параметру или обращенъ выпуклостью въ ту сторону, гдѣ центръ.

3) *Гиперболоидъ объ одной полѣ:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Касательная плоскость:

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-\frac{zZ}{c^2}=1.$$

Проекціи дифференціальнаго параметра:

$$\frac{2x}{a^2},\quad \frac{2y}{b^2},\quad -\frac{2z}{c^2}.$$

Параметръ

$$P=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}.$$

Разстояніе точки $(x', y', z')$ отъ касательной плоскости:

$$\delta = \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - \frac{zz'}{c^2} - 1\right) : \frac{P}{2}.$$

Перпендикуляръ, опущенный изъ центра на касательную плоскость, равенъ $\delta = -\frac{2}{P}$. Эта величина отрицательная; поэтому дифференціальный параметръ $P$ и центръ находятся на противоположныхъ сторонахъ относительно касательной плоскости.

Пересѣченіе $(C)$ касательной плоскостью съ поверхностью опредѣляется уравненіями:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} - \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

Отъ исключенія $Z$ изъ этихъ уравненій, получимъ уравненіе

$$\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} - 1\right)^2 = 1, \quad (6)$$

принадлежащее проекціи пересѣченія на плоскости $xy$. Эта проекція представляетъ двѣ прямыя:

$$Y - y = (xy + \sqrt{a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2})\,(X - x),$$

$$Y - y = (xy - \sqrt{a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2})\,(X - x);$$

слѣдовательно, само пересѣченіе $(C)$ состоитъ изъ двухъ прямыхъ, пересѣкающихся въ точкѣ $(x, y, z)$, которыя суть производящія гиперболоида, проходящія чрезъ эту точку. По уравненію (6) легко видѣть, что эти прямыя касательны къ горлу гиперболоида; потому что этому уравненію удовлетворяютъ координаты точекъ пересѣченія горла

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$$

съ полярою точки $(x, y)$:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1.$$

Прямолинейныя производящія, проходящія чрезъ точку $(x, y, z)$, суть двойныя касательныя.

4) *Параболоидъ эллиптическій:*

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0.$$

Касательная плоскость:

$$\frac{yY}{p} + \frac{zZ}{q} - X - x = 0.$$

Проекціи дифференціальнаго параметра:

$$-2, \quad \frac{2y}{p}, \quad \frac{2z}{q}.$$

Параметръ:

$$P = 2\sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2} + \frac{z^2}{q^2}}.$$

Разстояніе точки $(x', y', z')$ отъ касательной плоскости:

$$\delta = \left(\frac{yy'}{p} + \frac{zz'}{q} - x - x'\right) : \frac{P}{2}.$$

Для разстоянія начала координатъ отъ касательной плоскости находимъ отрицательную величину $\delta = -\frac{2x}{P}$; поэтому параметръ $P$ и начало координатъ находятся съ разныхъ сторонъ относительно касательной плоскости. Выраженіе (9) **§ 114** приводится къ слѣдующему:

$$\frac{2\eta^2}{p} + \frac{2\zeta^2}{q}.$$

Эта величина всегда имѣетъ знакъ $+$; поэтому параболоидъ выпуклъ къ параметру.

5) *Параболоидъ гиперболическій:*

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2x = 0.$$

Касательная плоскость:

$$\frac{yY}{p} - \frac{zZ}{q} - X - x = 0.$$

Проекціи дифференціальнаго параметра:

$$-2, \quad \frac{2y}{p}, \quad -\frac{2z}{q}.$$

Параметръ:

$$P = 2\sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2} + \frac{z^2}{p^2}}.$$

Пересѣченіе $(C)$ гиперболическаго параболоида съ касательною плоскостью опредѣляется уравненіями:

$$\frac{Y^2}{p} - \frac{Z^2}{q} - 2X = 0, \quad \frac{yY}{p} - \frac{zZ}{q} - X - x = 0.$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій $X$ и принявъ во вниманіе уравненіе

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2x = 0,$$

получимъ уравненіе проекціи пересѣченія $(C)$ на плоскости $yz$:

$$\frac{(Y-y)^2}{p} - \frac{(Z-z)^2}{q} = 0;$$

это уравненіе принадлежитъ двумъ прямымъ:

$$\frac{Y-y}{\sqrt{p}} = +\frac{Z-z}{\sqrt{q}}, \quad \frac{Y-y}{\sqrt{p}} = -\frac{Z-z}{\sqrt{q}};$$

слѣдовательно, само пересѣченіе $(C)$ состоитъ изъ двухъ прямыхъ, которыя суть прямолинейныя производящія гиперболоида. Эти же прямыя представляютъ двойныя касательныя въ точкѣ $(x, y, z)$.

**116.** Для поверхности 2-го порядка вообще,

$$\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Byz + B'zx + B''xy \\ + Cx + C'y + C''z + D = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

уравненіе касательной плоскости беретъ видъ:

$$\begin{aligned} &(2Ax + B''y + B'z + C)(X - x) + \\ &+ (B''x + 2A'y + Bz + C')(Y - y) + \\ &+ (B'x + By + 2A''z + C'')(Z - z) = 0. \end{aligned}$$

Помощью уравненія (1) можно исключить отсюда члены второй степени относительно $x$, $y$, $z$; отчего получимъ уравненіе:

$$\begin{aligned} &(2Ax + B''y + B'z + C)\ X + \\ &+ (B''x + 2A'y + Bz + C')\ Y + \\ &+ (B'x + By + 2A''z + C'')\ Z + \\ &+ (Cx + C'y + C''z + 2D) = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Если замѣнимъ координаты $x$, $y$, $z$ однородными такъ, что $x : y : z : 1 = x_1 : x_2 : x_3 : x_4$, то уравненіе (1) преобразуется въ однородное:

$$\begin{aligned} f\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = Ax_1^2 + A'x_2^2 + A''x_3^2 + Bx_2x_3 + B'x_3x_1 + B''x_1x_2 \\ + Cx_1x_4 + C'x_2x_4 + C''x_3x_4 + Dx_4^2 = 0, \end{aligned} \qquad (3)$$

а уравненіе касательной плоскости приметъ видъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\xi_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4}\xi_4 = 0, \qquad (4)$$

гдѣ $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$ суть однородныя координаты какой-нибудь точки касательной плоскости. Легко доказать, что такой же видъ имѣетъ уравненіе поверхности 2-го порядка и уравненіе касательной плоскости въ *тетраэдрическихъ координатахъ*.

Если касательная плоскость къ поверхности $F\ (x,\ y,\ z) = 0$ должна проходить чрезъ данную точку $(X,\ Y,\ Z)$, не лежащую на поверхности, то координаты $(x,\ y,\ z)$ неизвѣстной точки касанія должны удовлетворять только двумъ уравненіямъ:

$$F(x, y, z) = 0,\ \frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0; \qquad (5)$$

поэтому онѣ имѣютъ безчисленное множество значеній; слѣдовательно, чрезъ данную точку можно вообще провести безчисленное множество касательныхъ плоскостей. Точки касанія всѣхъ этихъ плоскостей находятся на линіи, которой принадлежатъ уравненія (5). Прямыя, проведенныя чрезъ эти точки и данную точку $(X,\ Y,\ Z)$, образуютъ коническую поверхность, касающуюся данной поверхности (1).

Для поверхности 2-го порядка линія, на которой находятся точки касанія плоскостей, проходящихъ чрезъ точку $(X,\ Y,\ Z)$, опредѣляется уравненіями (1) и (2). Уравненіе (2) первой степени относительно $x$, $y$, $z$; слѣдовательно, оно принадлежитъ плоскости, а потому разсматриваемая линія плоская; она есть линія 2-го порядка, происходящая отъ пересѣченія поверхности (1) съ плоскостью (2). Эта плоскость называется *полярою* данной точки $(X, Y, Z)$. Уравненіе (2) поляры можетъ быть представлено подъ видомъ

$$(2AX+B''Y+B'Z+C)x+(B''X+2A'Y+BZ+C)y+$$
$$+(B'X+BY+2A''Z+C'')z+(CX+C'Y+C''Z+2D)=0. \quad (6)$$

Когда уравненіе поверхности 2-го порядка дано подъ видомъ (3), то уравненіе поляры (4) можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_1}x_1+\frac{\partial f}{\partial \xi_2}x_2+\frac{\partial f}{\partial \xi_3}x_3+\frac{\partial f}{\partial \xi_4}x_4=0, \quad (7)$$

гдѣ $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, суть координаты полюса. Легко видѣть, что для всякаго положенія полюса есть поляра, и обратно, для всякой плоскости, какъ поляры, есть полюсъ. Только можетъ случиться, что полюсъ или поляра находятся въ безконечности. Если въ уравненіи (7) будемъ разсматривать $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ какъ постоянныя, а $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ какъ перемѣнныя, то уравненіе (7) представитъ плоскость, по которой будетъ двигаться точка $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, когда поляра этой точки вращается около неподвижной точки $(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

**117.** Можно разсматривать поверхность $(A)$ какъ обвертку другой поверхности $(C)$, измѣняющейся такъ, что во всякомъ своемъ положеніи она остается касательною къ поверхности $(A)$, т.-е. имѣетъ съ ней общую касательную плоскость съ общею точкою касанія. Всякую поверхность можно разсматривать какъ обвертку касательной плоскости. Уравненіе обвертываемой поверхности должно содержать перемѣнные параметры, которые должны удовлетворять условіямъ касанія обвертываемой и обвертки. Когда обвертываемая поверхность есть плоскость, тогда параметры въ ея уравненіи называются *тангенціальными* координатами плоскости, а уравненіе обвертки можетъ быть выражено въ координатахъ этого рода. Доказываемое въ статьѣ $E$ отдѣла II относительно обвертокъ линій и тангенціальныхъ координатъ на плоскости легко распространяется на обвертки поверхностей и тангенціальныя координаты въ пространствѣ. Мы ограничимся только поверхностью, обвертывающею поляру (7), когда полюсъ $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ двигается по данной поверхности

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0. \tag{8}$$

Если положимъ

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = a_1, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_2} = a_2, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_3} = a_3, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_4} = a_4, \tag{9}$$

то уравненіе поляры (7) приметъ видъ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0; \tag{10}$$

величины $a_1, a_2, a_3, a_4$ можно разсматривать какъ тангенціальныя координаты поляры. Рѣшивъ уравненія (9) относительно $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, получимъ линейныя функціи относительно $a_1, a_2, a_3, a_4$, и, подставивъ эти функціи въ уравненіе (8), найдемъ уравненіе вида

$$\psi(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0, \tag{11}$$

которое есть уравненіе въ тангенціальныхъ координатахъ поверхности, обвертывающей поляру (7). Если уравненіе (8) алгебрическое степени $n$, то и уравненіе (11) будетъ алгебрическимъ степени $n$ относительно $a_1, a_2, a_3, a_4$.

Когда уравненіе (8) первой степени и слѣдовательно принадлежитъ плоскости, тогда уравненіе (11) также первой степени и принадлежитъ точкѣ, которая есть полюсъ плоскости (8); потому что, какъ мы видѣли выше, если полюсъ двигается по плоскости, то поляра его вращается около полюса этой плоскости. Вообще точка $P'(x_1, x_2, x_3, x_4)$ касанія плоскости (10) къ оберткѣ (11) есть полюсъ плоскости, касательной къ поверхности (8) въ точкѣ $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$. Для доказательства представимъ себѣ три безконечно-близкихъ положенія послѣдней точки $P, P_1, P_2$, и поляры ихъ $p, p_1, p_2$, которыя касаются поверхности (11). Плоскость $p'$, проходящая чрезъ точки $P, P_1, P_2$, имѣетъ полюсъ $P'$, который долженъ находиться на каждой изъ плоскостей $p, p_1, p_2$, и, слѣдовательно, въ ихъ пересѣченіи. Положимъ, что три точки $P, P_1, P_2$ совпадаютъ въ одну $P$, тогда плоскость $p'$ сдѣлается касательною къ поверхности (8) въ точкѣ $P$; вмѣстѣ съ тѣмъ плоскости $p, p_1, p_2$ совпадутъ въ одну $p$, касательную къ поверхности (11) въ точкѣ $P'$. Вслѣдствіе этого поверхность (8) есть обвертка поляръ всѣхъ точекъ поверхности (11). По этому свойству поверхности (8) и (11) называются *взаимными*. Легко получить уравненіе поверхности (11) въ координатахъ $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$. Если послѣднія примемъ за координаты полюса, то уравненіе поляры приметъ видъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\xi_3 + \frac{\partial f}{\partial x^4}\xi_4 = 0;$$

и по условію касанія этой поляры къ поверхности (8) найдемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial f}{\partial x_3} : \frac{\partial f}{\partial x_4} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} : \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} : \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_3} : \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_4}.$$

Помощью этихъ пропорцій мы можемъ исключить величины $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$ изъ уравненія (8), отъ чего получимъ уравненіе вида

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \tag{12}$$

принадлежащее поверхности (11). Когда уравненіе (8) 2-й степени, тогда и уравненіе (12) второй степени; слѣдовательно, если полюсъ двигается по поверхности 2-го порядка, то поляра касается другой поверхности 2-го порядка. На основаніи доказанной взаимности точекъ, плоскостей и поверхностей вообще, можно распространить начало двойственности на пространство трехъ измѣреній. * —

### E. **Сопряженные діаметры поверхностей 2-го порядка.**

**118.** Поверхности 2-го порядка, имѣющія центръ, имѣютъ, кромѣ осей или главныхъ діаметровъ, безчисленное множество косоугольныхъ сопряженныхъ діаметровъ. Пусть

$$Px^2 + Qy^2 + Rz^2 = 1 \tag{1}$$

будетъ уравненіе одной изъ поверхностей 2-го порядка, имѣющей центръ $O$ и отнесенной къ главнымъ сопряженнымъ діаметрамъ. Возьмемъ произвольную прямую $Oz'$ за одну изъ новыхъ осей координатъ $x'$, $y'$, $z'$, опредѣлимъ по способу, изложенному въ **§ 107**, сопряженную съ нею діаметральную плоскость и возьмемъ въ этой плоскости оси координатъ $Ox'$, $Oy'$ по направленіямъ двухъ какихъ-нибудь сопряженныхъ діаметровъ пересѣченія ея съ поверхностью. Тогда уравненіе поверхности, отнесенной къ новымъ осямъ $Ox'$, $Oy'$, $Oz'$, должно принять видъ

$$P'x'^2 + Q'y'^2 + R'z'^2 = 1; \tag{2}$$

потому что уравненіе не должно перемѣниться, если въ немъ перемѣнимъ $z'$ на $-z'$, оставляя $x'$ и $y'$ безъ перемѣны; при томъ въ уравненіи пересѣченія поверхности съ плоскостью $z'=0$ не должно быть члена съ $x'y'$, потому что это сѣченіе отнесено къ сопряженнымъ діаметрамъ. Сверхъ того, легко удостовѣриться, что если $P$, $Q$, $R$ положительныя то $P'$, $Q'$, $R'$ также положительныя, и сколько между первыми тремя величинами есть отрицательныхъ, столько же должно быть отрицательныхъ и между вторыми.

Это вытекаетъ изъ общей теоріи преобразованія квадратичныхъ формъ посредствомъ линейныхъ ортогональныхъ подстановокъ *); но можно очень просто доказать это предложеніе, и не прибѣгая къ преобразованію уравненія (1).

Взявъ какую-нибудь точку $M$ на поверхности (1), которую означимъ чрезъ $A$, косоугольныя координаты этой точки, $x'$, $y'$, $z'$, примемъ за прямоугольныя координаты новой точки $M'$, относительно прежнихъ осей $Ox$, $Oy$, $Oz$. Общее мѣсто всѣхъ точекъ $M'$ будетъ нѣкоторая поверхность $A'$, у которой уравненіе въ прямоугольныхъ координатахъ будетъ (2). Легко видѣть, что поверхность $A'$ одного вида съ поверхностью $A$; потому что вещественнымъ величинамъ $x$, $y$, $z$ отвѣчаютъ вещественныя величины $x'$, $y'$, $z'$, конечному разстоянію $OM$ отвѣчаетъ конечное разстояніе $OM'$ и безконечному $OM$ безконечное $OM'$; слѣдовательно, если $A$ со всѣхъ сторонъ ограничена, то $A'$ также со всѣхъ сторонъ ограничена; сколько $A$ имѣетъ безконечныхъ полъ, столько же ихъ будетъ и у $A'$. Если поверхности $A$ и $A'$ суть эллипсоиды, то коэффиціенты, при квадратахъ какъ въ уравненіи (1), такъ и въ уравненіи (2) должны быть положительны; въ случаѣ гиперболоидовъ о двухъ полахъ, будутъ два отрицательныхъ коэффиціента какъ въ уравненіи (1), такъ и въ уравненіи (2); наконецъ, въ случаѣ гиперболоидовъ объ одной полѣ будетъ по одному отрицательному коэффиціенту въ уравненіи (1) и въ уравненіи (2). Такъ какъ выборъ буквъ $x'$, $y'$, $z'$ и $P'$, $Q'$, $R'$ для обозначенія косоугольныхъ координатъ и коэффиціентовъ въ уравненіи (2) произволенъ, то можемъ допустить, что $P$, $Q$, $R$ имѣютъ одинаковые знаки соотвѣтственно съ $P'$, $Q'$, $R'$; тогда, означая чрезъ $a$, $b$, $c$ величины или модули полуосей, а чрезъ

*) Theorie und Anwendung der Determinanten, *Baltzer*. — Algebra der linearen Transformationen von *Salmon*, deutsch von *W. Fiedler*.

$a'$, $b'$, $c'$ величины или модули полудіаметровъ косоугольныхъ, $Ox'$, $Oy'$, $Oz'$, мы будемъ имѣть:

$$P = \pm\frac{1}{a^2}, \quad Q = \pm\frac{1}{b^2}, \quad R = \pm\frac{1}{c^2},$$

$$P' = \pm\frac{1}{a'^2}, \quad Q' = \pm\frac{1}{b'^2}, \quad R' = \pm\frac{1}{c'^2};$$

причемъ должно брать соотвѣтственные знаки въ этихъ двухъ строкахъ.

Легко доказать, что

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R} = \frac{1}{P'} + \frac{1}{Q'} + \frac{1}{R'}.$$

Пусть $Ox''$ будетъ пересѣченіе плоскостей $xOy$ и $x'Oy'$, $Oy''$ діаметръ, сопряженный съ $Ox''$, принадлежащій пересѣченію поверхности $A$ съ плоскостью $xOy$, $Oy'''$ пересѣченіе плоскости $x'Oy'$ съ плоскостью $zOy''$ и $Oz''$ діаметръ, сопряженный съ $Oy'''$, принадлежащій пересѣченію поверхности $A$ съ плоскостью $zOy''$. Такъ какъ $Ox''$ и $Oy''$ лежатъ въ одной плоскости съ $Ox$ и $Oy$, то онѣ съ $Oz$ составляютъ систему сопряженныхъ діаметровъ; слѣдовательно, $zOy''$ есть діаметральная плоскость, сопряженная съ $Ox''$, а потому $Ox''$ съ $Oy'''$ и $Oz''$ должны составить систему сопряженныхъ діаметровъ, такъ что плоскость $x''Oy'''$ или $x'Oy'$ будетъ сопряженная съ $Oz''$; для этого $Oz''$ должно совпадать съ $Oz'$. Положимъ теперь, что $\frac{1}{P''}$ есть квадратъ вещественнаго или мнимаго полудіаметра по направленію $Ox''$, $\frac{1}{Q''}$ квадратъ вещественнаго или мнимаго полудіаметра $Oy''$, а $\frac{1}{Q'''}$ квадратъ вещественнаго или мнимаго полудіаметра $Oy'''$. По свойству полудіаметровъ линій 2-го порядка, доказанному въ **§ 56**, мы будемъ имѣть:

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = \frac{1}{P''} + \frac{1}{Q''}, \quad \frac{1}{Q''} + \frac{1}{R} = \frac{1}{Q'''} + \frac{1}{R'},$$

$$\frac{1}{P''} + \frac{1}{Q'''} = \frac{1}{P'} + \frac{1}{Q'};$$

отсюда, взявъ сумму, выводимъ

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R} = \frac{1}{P'} + \frac{1}{Q'} + \frac{1}{R'},$$

т.-е.

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2$$

для эллипсоида,

$$a^2 + b^2 - c^2 = a'^2 + b'^2 - c'^2$$

для гиперболоида о двухъ полахъ и одной полѣ.

Объемъ параллелепипеда, построеннаго на модуляхъ полусопряженныхъ діаметровъ $a'$, $b'$, $c'$, имѣетъ постоянную величину и равенъ прямоугольному параллелепипеду, построенному на полуосяхъ $abc$. Въ самомъ дѣлѣ, означимъ чрезъ $a''$, $b''$ и $b'''$ модули полудіаметровъ, направленныхъ по $Ox''$, $Oy''$ и $Oy'''$, находимъ, на основаніи доказаннаго въ **§ 56**, что въ параллелепипедѣ, построенномъ на ребрахъ $a$, $b$, $c$, можно, не измѣняя объема его, замѣнить сперва ребра $a$ и $b$ ребрами $a''$ и $b''$; потомъ ребра $b''$ и $c$ ребрами $b'''$ и $c'$, и наконецъ, ребра $a''$ и $b'''$ ребрами $a'$ и $b'$; послѣ чего получимъ параллелепипедъ съ ребрами $a'$, $b'$, $c'$, равный по объему параллелепипеду $abc$.

Замѣтимъ еще, что касательная плоскость, проведенная въ концѣ одного изъ діаметровъ поверхности 2-го порядка, параллельна діаметральной плоскости, сопряженной съ этимъ діаметромъ. Въ самомъ дѣлѣ: уравненіе касательной плоскости къ поверхности (1) есть

$$PxX + QyY + RzZ = 1,$$

будутъ ли сопряженные діаметры $Ox$, $Oy$, $Oz$ прямоугольные или косоугольные. Положивъ въ немъ $y = 0$, $z = 0$, получимъ уравненіе $PxX = 1$, принадлежащее плоскости, параллельной плоскости $yOz$, сопряженной съ діаметромъ $Ox$.

Вслѣдствіе этого свойства касательныхъ плоскостей въ концахъ діаметровъ параллелепипедъ, построенный на сопряженныхъ діаметрахъ, будетъ касаться поверхности своими гранями въ концахъ сопряженныхъ діаметровъ, т.-е. будетъ описанный или вписанный.

**119.** Поверхности 2-го порядка, не имѣющія центра, т.-е. параболоиды эллиптическій и гиперболическій, имѣютъ безчисленное множество діаметральныхъ плоскостей, которыя всѣ параллельны главной оси $Ox$. Пусть

$$Py^2 + Qz^2 = 2Rx \tag{1}$$

будетъ уравненіе того или другого параболоида; по общему уравненію (5) **§ 107** діаметральной плоскости, сопряженной съ хордою

$$x = az + p,\quad y = bz + q, \tag{2}$$

имѣемъ:

$$Pby + Qz = Ra. \tag{3}$$

Это уравненіе содержитъ только двѣ координаты $y$, $z$, слѣдовательно, принадлежитъ плоскости, параллельной оси $Ox$.

Представимъ себѣ плоскость, пересѣкающую параболоидъ по кривой, имѣющей центръ, и пусть $O'$ будетъ этотъ центръ, а $O'y'$ и $O'z'$ сопряженные діаметры кривой. Плоскость, сопряженная съ $O'y'$, должна проходить чрезъ $O'z'$, а плоскость, сопряженная съ $O'z'$, чрезъ $O'y'$; эти двѣ плоскости пересѣкутся по прямой $O'x'$, параллельной оси $Ox$. Прямую $O'x'$ можно разсматривать какъ діаметръ, сопряженный съ плоскостью $y'O'z'$. Діаметральная же плоскость, сопряженная съ $O'x'$, находится въ безконечности. Чтобы это доказать, означимъ чрезъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ углы, составляемые прямою (2) съ осями, и подставимъ въ уравненіи (3) вмѣсто $a$ и $b$ отношенія $\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$ (см. **§ 96**); отъ этого получимъ:

$$P\cos\beta\,.\,y + Q\cos\gamma\,.\,z = R\cos\alpha,$$

и разстояніе плоскости отъ начала координатъ выразится формулою

$$\frac{R\cos\alpha}{\sqrt{P^2\cos^2\beta + Q^2\cos^2\gamma}},$$

которая даетъ безконечно большую величину, когда $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ$ и $\alpha = 0$, т.-е. когда прямая (2) параллельна оси $Ox$.

КОНЕЦЪ

# ПРИБАВЛЕНІЕ I

## Опредѣлители и приложеніе ихъ къ рѣшенію совокупныхъ уравненій первой степени.

Если въ произведеніи $m$ множителей

$$a_1 b_2 c_3 \ldots k_{m-1} l_m$$

сдѣлаемъ всѣ возможныя перестановки буквъ $a, b, \ldots k, l$, оставляя значки: $1. 2, \ldots m$ на тѣхъ же мѣстахъ и перемѣняя знакъ произведенія каждый разъ, какъ переставовимъ двѣ буквы, то получимъ $1.2.3\ldots m$ членовъ, алгебраическая сумма которыхъ называется *опредѣлителемъ порядка m*. Всѣ величины, въ него входящія, заключаются въ слѣдующей таблицѣ:

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \ldots k_1 l_1 \\ a_2 b_2 c_2 \ldots k_2 l_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m b_m c_m \ldots k_m l_m \end{vmatrix} \qquad (1)$$

и называются *элементами* опредѣлителя. Число ихъ есть $m^2$. Первый или *основной* членъ есть произведеніе элементовъ діагонали: $a_1 b_2 c_3 \ldots l_m$. Сама таблица служитъ для обозначенія опредѣлителя. Напримѣръ,

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

есть опредѣлитель 2-го порядка. Для опредѣлителя 3-го порядка найдемъ

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + b_1 c_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3.$$

Онъ можетъ быть составленъ изъ опредѣлителей 2-го порядка слѣдующимъ образомъ: 1) въ основномъ членѣ $a_1b_2c_3$ сдѣлаемъ перестановку буквъ $b$ и $c$ и перемѣнимъ знакъ; отъ этого получимъ второй членъ, который съ первымъ составляетъ:

$$a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) = a_1\begin{vmatrix} b_2c_2 \\ b_3c_3 \end{vmatrix};$$

2) во второмъ членѣ сдѣлаемъ перестановку буквъ $a$ и $b$ и перемѣнимъ знакъ; отъ этого получимъ 3-й членъ $b_1c_2a_3$, а изъ него выведемъ 4-й чрезъ перестановку буквъ $c$ и $a$ и перемѣну знака; въ суммѣ этихъ двухъ членовъ получимъ

$$b_1c_2a_3 - b_1a_2c_3 = b_1(c_2a_3 - a_2c_3) = b_1\begin{vmatrix} c_2a_2 \\ c_3a_3 \end{vmatrix};$$

3) въ 4-мъ членѣ переставимъ буквы $b$ и $c$ и перемѣнимъ знакъ; отъ этого получимъ 5-й членъ $c_1a_2b_3$, изъ котораго выведемъ наконецъ 6-й членъ, переставивъ буквы $a$ и $b$ и перемѣнивъ знакъ; въ суммѣ двухъ послѣднихъ членовъ получимъ

$$c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 = c_1(a_2b_3 - b_2a_3) = c_1\begin{vmatrix} a_2b_2 \\ a_3b_3 \end{vmatrix};$$

слѣдовательно,

$$\begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2c_2 \\ b_3c_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} c_2a_2 \\ c_3a_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2b_2 \\ a_3b_3 \end{vmatrix}.$$

Вообще опредѣлитель (1) порядка $m$, который означимъ чрезъ $D$, составляется изъ опредѣлителей порядка $m-1$ слѣдующимъ образомъ: взявъ основной членъ $a_1\,b_2\,c_3\ldots l_m$, сдѣлаемъ въ немъ всѣ возможныя перестановки буквъ $b, c, \ldots l$, перемѣняя знакъ при каждой перестановкѣ двухъ буквъ; отъ этого получимъ всѣ члены опредѣлителя $D$, содержащіе элементъ $a_1$. Взявъ этотъ элементъ общимъ множителемъ за скобку, будемъ имѣть въ скобкахъ всѣ члены опредѣлителя порядка $m-1$:

$$\begin{vmatrix} b_2c_2\ldots\ldots l_2 \\ b_3c_3\ldots\ldots l_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_mc_m\ldots l_m \end{vmatrix}$$

который означимъ чрезъ $A_1$; поэтому $a_1A_1$ будетъ совокупность всѣхъ членовъ опредѣлителя $D$ съ элементомъ $a_1$. Между этими членами возьмемъ какой-нибудь изъ отрицательныхъ, сдѣлаемъ въ немъ перестановку буквъ $a$ и $b$ и перемѣнимъ знакъ; потомъ, разсматривая его какъ основной, сдѣлаемъ всѣ возможныя перестановки буквъ $a, c, \ldots l$, перемѣняя знакъ при каждой перестановкѣ двухъ буквъ; отъ этого получимъ всѣ члены опредѣлителя $D$, содержащіе элементъ $b_1$. Взявъ этотъ элементъ множителемъ за скобку, въ скобкахъ будемъ имѣть опредѣлитель порядка $m-1$, который означимъ чрезъ $B_1$. Также найдемъ члены съ элементами $c_1, d_1, \ldots l_1$. Послѣ чего опредѣлитель $D$ приметъ видъ

$$D = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + \ldots . + l_1 L_1,$$

гдѣ $A_1, B_1, C_1, \ldots L_1$ суть опредѣлители порядка $m-1$, которые, въ свою очередь, могутъ быть составлены изъ опредѣлителей порядка $m-2$, и т. д. Напримѣръ, если $D$ есть опредѣлитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \\ a_3 b_3 c_2 d_3 \\ a_4 b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix},$$

то $D = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + d_1 D_1$, гдѣ

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix}, \quad B_1 = \begin{vmatrix} c_2 a_2 d_2 \\ c_3 a_3 d_3 \\ c_4 a_4 d_4 \end{vmatrix}, \quad C_1 = \begin{vmatrix} a_2 b_2 d_2 \\ a_3 b_3 d_3 \\ a_4 b_4 d_4 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_2 a_2 c_2 \\ b_3 a_3 c_3 \\ b_4 a_4 c_4 \end{vmatrix}.$$

Можно также собрать въ опредѣлителѣ $D$ порядка $m$ сперва члены, содержащіе элементъ $a_n$, потомъ члены съ $b_n$, послѣ того члены съ $c_n$ и т. д.; отъ чего опредѣлитель приметъ видъ

$$D = a_n A_n + b_n B_n + c_n C_n + \ldots . l_n L_n \tag{2}$$

гдѣ $A_n, B_n, C_n, \ldots L_n$ суть опредѣлители порядка $m-1$, составленные изъ прочихъ элементовъ. Напримѣръ,

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_2 \begin{vmatrix} b_3 c_3 \\ b_1 c_1 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} c_3 a_3 \\ c_1 a_1 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 b_3 \\ a_1 b_1 \end{vmatrix}.$$

Вмѣсто того, чтобы въ основномъ членѣ $a_1 b_2 c_3 \ldots . l_m$ переставливать буквы $a, b, c, \ldots l$, можно переставлять значки: $1, 2, 3 \ldots m$, оставляя буквы на своихъ мѣстахъ, перемѣняя при этомъ знакъ члена каждый разъ, какъ перестановимъ два значка. Очевидно, что отъ этого мы получимъ прежнее выраженіе опредѣлителя $D$, съ тою только разницею, что элементы въ каждомъ членѣ будутъ расположены не по натуральному порядку значковъ. При такомъ способѣ составленія можно означить опредѣлитель такъ:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \dots a_m \\ b_1 b_2 b_3 \dots b_m \\ \dots\dots\dots\dots \\ l_1\, l_2\, l_3 \dots l_m \end{vmatrix}, \tag{3}$$

сдѣлавъ въ таблицѣ (1) горизонтальные ряды элементовъ вертикальными. Напримѣръ,

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1 b_2 - b_1 a_2 = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1,$$

что послѣ перемѣны порядка множителей въ каждомъ членѣ приведется къ слѣдующему:

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + c_1 a_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3,$$

а это есть прежнее выраженіе опредѣлителя $\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}$.

Собравъ въ опредѣлителѣ (3) члены съ $a_1$, потомъ члены съ $a_2$, члены съ $a_3$, и т. д., получимъ

$$D = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_n + \dots a_m A_m,$$

гдѣ $A_n$ есть опредѣлитель порядка $m-1$, тотъ самый, который находится множителемъ при $a_n$ въ выраженіи (2). Также найдемъ

$$D = b_1 B_1 + b_2 B_2 + \dots + b_m B_m.$$

Напримѣръ,

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 b_3 \\ c_2 c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 b_1 \\ c_3 c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 b_2 \\ c_1 c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 c_3 \\ b_1 c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix}.$$

*Опредѣлитель перемѣнитъ знакъ, не измѣняя своей величины, если сдѣлаемъ въ немъ перестановку двухъ вертикальныхъ рядовъ его элементовъ;* напримѣръ,

$$\begin{vmatrix} a_1b_1c_1\ldots l_1 \\ a_2b_2c_2\ldots l_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_mb_mc_m\ldots l_m \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1a_1c_1\ldots l_1 \\ b_2a_2c_2\ldots l_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_ma_mc_m\ldots l_m \end{vmatrix}.$$

Для доказательства разсмотримъ выраженія:

$$D = a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots a_mA_m$$

$$D = b_1B_1 + b_2B_2 + \ldots b_mB_m.$$

Отъ перестановки перваго и втораго вертикальнаго рядовъ таблицы (1) произойдетъ только перестановка буквъ $a$ и $b$ безъ перемѣны порядка значковъ; поэтому во всѣхъ членахъ выраженія $a_1A_1$ элементъ $a_1$ замѣнится элементомъ $b_1$ и всѣ члены перемѣнятъ знаки; слѣдовательно, $a_1A_1$ перемѣнится на $-b_1B_1$; также $a_2A_2$ перейдетъ въ $-b_2B_2$, и т. д.; такимъ образомъ

$$D = a_1A_1 + a_2A_2 \ldots + a_mA_m$$

перемѣнится на

$$-b_1B_1 - b_2B_2 \ldots - b_mB_m = -D.$$

Также легко доказать, что *опредѣлитель $D$ перемѣнитъ свой знакъ отъ перестановки двухъ горизонтальныхъ рядовъ;* напримѣръ, отъ перестановки перваго и втораго рядовъ выраженіе

$$D = a_1A_1 + b_1B_1 + \ldots l_1L_1$$

перемѣнится на

$$-a_2A_2 - b_2B_2 \ldots = -D.$$

Напримѣръ,

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 = -(b_1a_2 - a_1b_2) = - \begin{vmatrix} b_1a_1 \\ b_2a_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2b_2 \\ a_1b_1 \end{vmatrix}.$$

Также легко повѣрить, что

$$\begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1a_1c_1 \\ b_2a_2c_2 \\ b_3a_3c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1c_1b_1 \\ a_2c_2b_2 \\ a_3c_3b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1a_1b_1 \\ c_2a_2b_2 \\ c_3a_3b_3 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} a_2b_2c_2 \\ a_1b_1c_1 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_3b_3c_3 \\ a_2b_2c_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3b_3c_3 \\ a_2b_2c_2 \\ a_1b_1c_1 \end{vmatrix}.$$

*Если въ опредѣлитель элементы одного вертикальнаго ряда сдѣлаются соотвѣтственно равными элементамъ другаго ряда, или элементы двухъ горизонтальныхъ рядовъ сдѣлаются соотвѣтственно равными, то опредѣлитель обратится въ нуль.*

Допустивъ первый случай, перестановимъ въ таблицѣ (1) тѣ вертикальные ряды, въ которыхъ находятся равные элементы; отъ этого, по доказанному выше, опредѣлитель $D$ перейдетъ въ $-D$; но съ другой стороны очевидно, что отъ этого не произойдетъ никакой перемѣны въ $D$; слѣдовательно, $D=-D$ или $2D=0$ и $D=0$. То же доказательство относится и ко второму случаю; напримѣръ,

$$\begin{vmatrix} a_1 a_1 \\ a_2 a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_1 a_2 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}. = a_3 (b_1 c_1 - b_1 c_1) + b_3 (c_1 a_1 - a_1 c_1) + c_3 (a_1 b_1 - b_1 a_1) = 0.$$

По этому свойству опредѣлителя выраженіе

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_m A_m$$

обратится въ нуль, если перемѣнить букву $a$ на одну изъ буквъ $b, c, \ldots l$, т.-е.

$$\left.\begin{array}{r} b_1 A + b_2 A_2 + \ldots + b_m A_m = 0 \\ c_1 A + c_2 A_2 + \ldots + c_m A_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_1 A_1 + l_2 A_2 + \ldots + l_m A_m = 0 \end{array}\right\}. \qquad (4)$$

По той же причинѣ

$$\left.\begin{array}{r} a_2 A_1 + b_2 B_1 + \ldots + l_2 L_1 = 0 \\ a_3 A_1 + b_3 B_1 + \ldots + l_3 L_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m A_1 + b_m B_1 + \ldots + l_m L_1 = 0 \end{array}\right\}. \qquad (5)$$

*Опредѣлитель обратится въ нуль, когда всѣ элементы одного горизонтальнаго или вертикальнаго ряда будутъ нули.* Напримѣръ, если $a_1 = 0,\ b_1 = 0, \ldots l_1 = 0$, то

$$D = a_1 A_1 + b_1 B_1 + \ldots l_1 L_1 = 0;$$

также если $a_1 = 0$, $a_2 = 0, \ldots a_m = 0$, то

$$D = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots a_m A_m = 0.$$

Основываясь на доказанныхъ свойствахъ опредѣлителей, легко составить самыя общія формулы для рѣшенія совокупныхъ уравненій первой степени со столькими неизвѣстными, сколько уравненій. Такія уравненія, называемыя часто *линейными*, можно представить подъ общимъ видомъ

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + l_1 u = q_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + l_2 u = q_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m x + b_m y + c_m z + \ldots + l_m u = q_m \end{array}\right\}, \tag{6}$$

гдѣ $x, y, z, \ldots u$ суть неизвѣстныя.

Составимъ изъ коэффиціентовъ опредѣлитель порядка $m$:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \ldots l_1 \\ a_2 b_2 \ldots l_2 \\ \ldots\ldots \\ a_m b_m \ldots l_m \end{vmatrix}$$

и опредѣлители порядка $m - 1$:

$$\begin{array}{c} A_1,\ B_1,\ C_1 \ldots L_1, \\ A_2,\ B_2,\ C_2 \ldots L_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_m,\ B_m,\ C_m \ldots L_m; \end{array}$$

потомъ помножимъ уравненіе (6) соотвѣтственно на $A_1, A_2, \ldots A_m$ и возьмемъ сумму произведеній; отъ этого получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} (a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_m A_m)\, x + \\ + (b_1 A_1 + b_2 A_2 + \ldots + b_m A_m)\, y + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (l_1 A_1 + l_2 A_2 + \ldots + l_m A_m)\, u \end{array}\right\} = q_1 A_1 + q_2 A_2 + \ldots + q_m A_m \tag{7}$$

Вслѣдствіе уравненій (4) здѣсь выраженія въ скобкахъ, множимыя на $y, z, \ldots u$, равны нулю. Выраженіе въ скобкахъ, множимое на $x$, есть опредѣлитель $D$, а вторая часть уравненія очевидно есть не что другое, какъ опредѣлитель $D$, въ которомъ элементы $a_1\ a_2 \ldots a_m$ соотвѣтственно замѣнены вторыми частями данныхъ уравненій:

$q_1, q_2 \dots q_m$; слѣдовательно, послѣднее уравненіе приводится къ слѣдующему:

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots l_1 \\ a_2 b_2 \dots l_2 \\ \dots\dots \\ a_m b_m \dots l_m \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} q_1 b_1 \dots l_1 \\ q_2 b_2 \dots l_2 \\ \dots\dots \\ q_m b_m \dots l_m \end{vmatrix};$$

откуда

$$x = \begin{vmatrix} q_1 b_1 \dots l_1 \\ q_2 b_2 \dots l_2 \\ \dots\dots \\ q_m b_m \dots l_m \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots l_1 \\ a_2 b_2 \dots l_2 \\ \dots\dots \\ a_m b_m \dots l_m \end{vmatrix}.$$

Также найдемъ

$$y = \begin{vmatrix} a_1 q_1 \dots l_1 \\ a_2 q_2 \dots l_2 \\ \dots\dots \\ a_m q_m \dots l_m \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 b_1 \dots l_1 \\ a_2 b_2 \dots l_2 \\ \dots\dots \\ a_m b_m \dots l_m \end{vmatrix}.$$

Вообще, *чтобы получить выраженіе какого-либо неизвѣстнаго, надобно составить опредѣлитель $D$ изъ всѣхъ коэффиціентовъ всѣхъ неизвѣстныхъ; онъ будетъ знаменателемъ искомаго выраженія; числитель же получимъ, перемѣнивъ въ этомъ опредѣлителѣ элементы, означающіе коэффиціенты искомаго неизвѣстнаго, на извѣстныя количества, находящіяся во вторыхъ частяхъ уравненій.*

Примѣры:

1)
$$a_1x + b_1y = q_1,$$
$$a_2x + b_2y = q_2;$$

$$x = \begin{vmatrix} q_1 b_1 \\ q_2 b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = \frac{q_1 b_2 - b_1 q_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2},$$

$$y = \begin{vmatrix} a_1 q_1 \\ a_2 q_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = \frac{a_1 q_2 - q_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$$

или

$$x : y : 1 = \begin{vmatrix} q_1 b_1 \\ q_2 b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 q_1 \\ a_2 q_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}.$$

2)
$$a_1x + b_1y + c_1z = q_1,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = q_2,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = q_3;$$

$$x = \begin{vmatrix} q_1 b_1 c_1 \\ q_2 b_2 c_2 \\ q_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \frac{q_1(b_2c_3 - b_3c_2) + q_2(b_3c_1 - c_3b_1) + q_3(b_1c_2 - c_1b_2)}{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - c_3b_1) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2)},$$

$$y = \begin{vmatrix} a_1 q_1 c_1 \\ a_2 q_2 c_2 \\ a_3 q_3 c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \frac{q_1(c_2a_3 - a_2c_3) + q_2(c_3a_1 - a_3c_1) + q_3(c_1a_2 - a_1c_2)}{b_1(c_2a_3 - a_2c_3) + b_2(c_3a_1 - a_3c_1) + b_3(c_1a_2 - a_1c_2)},$$

$$z = \begin{vmatrix} a_1 b_1 q_1 \\ a_2 b_2 q_2 \\ a_3 b_3 q_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \frac{q_1(a_2b_3 - b_2a_3) + q_2(a_3b_1 - b_3a_1) + q_3(a_1b_2 - b_1a_2)}{c_1(a_2b_3 - b_2a_3) + c_2(a_3b_1 - b_3a_1) + c_3(a_1b^2 - b_1a_2)}.$$

Когда вторыя части данныхъ уравненій, $q_1, q_2 \ldots q_m$, равны нулю, т.-е. когда уравненія (6) берутъ видъ однородныхъ:

$$\left.\begin{array}{r} a_1x + b_1y + \ldots + l_1u = 0 \\ a_2x + b_2y + \ldots + l_2u = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_mx + b_my + \ldots + l_mu = 0 \end{array}\right\}, \tag{8}$$

тогда по уравненію (7) будемъ имѣть $Dx = 0$, и также найдемъ $Dy = 0$, $Dz = 0, \ldots, Du = 0$. Послѣднимъ уравненіямъ и вмѣстѣ уравненіямъ (8) можно удовлетворить, положивъ: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0, \ldots, u = 0$; другого рѣшенія быть не можетъ, если $D$ не равенъ нулю. Слѣдовательно, чтобы уравненія (8) были совмѣстны при такихъ величинахъ $x, y, z, \ldots, u$, которыя не всѣ совокупно равны нулю, требуется условіе $D = 0$. Оно представляетъ выводъ исключенія неизвѣстныхъ изъ уравненій (8). Напримѣръ, выводъ исключенія $x$ и $y$ изъ уравненій

$$a_1x + b_1y = 0, \quad a_2x + b_2y = 0$$

есть $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$. Уравненія

$$a_1x + a_2y = 0, \quad b_1x + b_2y = 0$$

даютъ то же самое условное уравненіе.

Выводъ исключенія $x$, $y$, $z$ изъ уравненій:

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z = 0, \quad a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

или изъ уравненій:

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0, \quad b_1x + b_2y + b_3z = 0, \quad c_1x + c_2y + c_3z = 0$$

есть

$$a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + b_1(c_2a_3 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3) = 0.$$

Когда $D = 0$, тогда

$$a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 + \ldots + l_1L_1 = D = 0$$

Кромѣ того имѣемъ уравненія (5):

$$\left.\begin{array}{l} a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 + \ldots + l_2L_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_mA_1 + b_mB_1 + c_mC_1 + \ldots + l_mL_1 = 0 \end{array}\right\}. \qquad (9)$$

Изъ сравненія этихъ уравненій съ уравненіями (8) видно, что можно удовлетворить послѣднимъ, положивъ

$$x = A_1, \quad y = B_1, \quad z = C_1, \ldots, u = L_1,$$

или такъ же

$$x = \lambda A_1, \quad y = \lambda B_1, \quad z = \lambda C_1, \ldots, u = \lambda L_1, \qquad (10)$$

гдѣ $\lambda$ произвольное количество; потому что отъ подстановленія послѣднихъ величинъ въ уравненія (8) получимъ уравненія (9), умноженныя на $\lambda$. Вмѣсто (10) можно написать пропорціи:

$$\frac{x}{A_1} = \frac{y}{B_1} = \frac{z}{C_1} = \ldots = \frac{u}{L_1}.$$

Такъ же докажемъ, что

$$\frac{x}{A_p} = \frac{y}{B_p} = \frac{z}{C_p} = \ldots = \frac{u}{L_p}.$$

Напримѣръ, уравненіямъ

$$a_1x + b_1y = 0, \quad a_2x + b_2y = 0,$$

при условіи $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$, можно удовлетворить, положивъ

$$x = \lambda b_2 \quad \text{и} \quad y = -\lambda a_2 \quad \text{или} \quad x = -b_1\lambda \quad \text{и} \quad y = a_1\lambda.$$

Уравненія

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z = 0, \quad a_3x + b_3y + c_3z = 0,$$

при условіи

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

удовлетворены величинами:

$$x = \lambda(b_2c_3 - c_2b_3), \quad y = \lambda(c_2a_3 - a_2c_3), \quad z = \lambda(a_2b_3 - b_2a_3),$$

и также величинами:

$$x = \lambda(b_3c_1 - c_3b_1), \quad y = \lambda(c_3a_1 - a_3c_1), \quad z = \lambda(a_3b_1 - b_3a_1)$$

$$x = \lambda(b_1c_2 - c_1b_2), \quad y = \lambda(c_1a_2 - a_1c_2), \quad z = \lambda(a_1b_2 - b_2a_1).$$

Разсмотримъ теперь дальнѣйшія свойства опредѣлителей.

*Опредѣлитель порядка $m$, въ которомъ 1-й элементъ есть единица, а прочіе элементы первой строки или перваго столбца суть нули, равенъ опредѣлителю порядка $m-1$, который получимъ, выбросивъ изъ даннаго опредѣлителя первую строку и первый столбецъ*, потому что при $a = 1$, $b_1 = c_1 = \ldots = l_1 = 0$ выраженіе

$$D = A_1a_1 + B_1b_1 + \ldots + L_1l_1$$

обращается въ $A_1$, точно такъ же, какъ и выраженіе

$$D = A_1a_1 + A_2a_2 + \ldots + A_ma_m$$

при $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_m = 0$.

Отсюда заключаемъ, что въ первомъ случаѣ величина $D$ не зависитъ отъ $a_2, a_3, \ldots, a_m$, такъ какъ эти элементы не входятъ въ $A_1$; а во второмъ случаѣ, по той же причинѣ, опредѣлитель $D$ не зависитъ отъ $b_1, c_1, \ldots, l_1$.

*Отъ умноженія всѣхъ элементовъ одной строки или одного столбца на одно и то же количество и опредѣлитель умножится на это количество.*

*Когда элементы одной строки получатъ произвольныя приращенія, то опредѣлитель получитъ приращеніе, которое найдемъ, замѣнивъ въ данномъ опредѣлителѣ измѣнившіеся элементы ихъ приращеніями.*

Для доказательства этихъ двухъ теоремъ достаточно замѣтить, что величины $A_n$, $B_n$, ..., $L_n$ (2) не заключаютъ въ себѣ элементовъ $n$-ой строки $a_n$, $b_n$, ..., $l_n$. Поэтому

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & \ldots, l_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ pa_n, & pb_n, & \ldots, pl_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m, & b_m, & \ldots, l_m \end{vmatrix} = A_n . pa_n + B_n . pb_n + \ldots + L_n . pl_n = p . D$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots l_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n + \alpha & b_n + \beta & \ldots l_n + \lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m & b_m & \ldots l_m \end{vmatrix} \begin{aligned} &= A_n(a_n + \alpha) + B_n(b_n + \beta) + \ldots + L_n(l_n + \lambda) \\ &= (A_n a_n + \ldots + L_n l_n) + (A_n \alpha + \ldots + L_n \lambda). \end{aligned}$$

Сумма первыхъ $n$ членовъ послѣдняго выраженія равна $D$, а сумма остальныхъ членовъ есть опредѣлитель $D$, въ которомъ только на мѣсто элементовъ $n$-ой строки подставлены ихъ приращенія, т.-е. приращеніе опредѣлителя $D$:

$$\Delta D = A_n\alpha + B_n\beta + \ldots + L_n\lambda = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & \ldots, l_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}, & b_{n-1}, & \ldots, l_{n-1} \\ \alpha, & \beta, & \ldots, \lambda \\ a_{n+1}, & b_{n+1}, & \ldots, l_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m, & b_m & \ldots, l_m \end{vmatrix}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $\alpha = pa_k$, $\beta = pb_k, \ldots, \lambda = pl_k$, гдѣ $k$ не равно $n$, находимъ

$$\Delta D = p(A_n a_k + B_n b_k + \ldots + L_n l_k) = 0,$$

потому-что выраженіе въ скобкахъ есть опредѣлитель, въ которомъ $k$-я и $n$-я строки состоятъ изъ однихъ и тѣхъ-же элементовъ. Слѣдовательно, *опредѣлитель не измѣнится, если къ элементамъ одной строки приложимъ элементы другой, помноженные на одно и то же количество.*

Напримѣръ, прибавивъ къ элементамъ 2-й и 3-й строкъ элементы первой, помноженные на — 1, находимъ

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & x' - x & y' - y \\ 0 & x'' - x & y'' - y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' - x & y' - y \\ x'' - x & y'' - y \end{vmatrix},$$

т.-е. данный опредѣлитель 3-го порядка выражаетъ двойную площадь треугольника, вершины котораго суть $(x, y)$, $(x', y')$, $(x'', y'')$ (см. § 21).

Разсмотримъ слѣдующее приложеніе предыдущаго. Если плоскость

$$Ax + By + Cz = D \tag{a}$$

проходитъ чрезъ три данныя точки $M'$ $(x', y', z')$, $M''$ $(x'', y'', z'')$, $M'''$ $(x''', y''', z''')$, то должно быть

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' &= D \\ Ax'' + By'' + Cz'' &= D \\ Ax''' + By''' + Cz''' &= D \end{aligned}$$

(см. § 97). Рѣшивъ эти 3 уравненія относительно $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, найдемъ

$$A : B : C : D := \begin{vmatrix} 1 & y' & z' \\ 1 & y'' & z'' \\ 1 & y''' & z''' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x' & 1 & z' \\ x'' & 1 & z'' \\ x''' & 1 & z''' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Поэтому уравненіе плоскости $(a)$ можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\begin{vmatrix} 1 & y' & z' \\ 1 & y'' & z'' \\ 1 & y''' & z''' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x' & 1 & z' \\ x'' & 1 & z'' \\ x''' & 1 & z''' \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Это уравненіе должно быть тожественно съ уравненіемъ

$$x\cos(\delta x) + y\cos(\delta y) + z\cos(\delta z) = \delta,$$

(§ 94), гдѣ $\delta$ означаетъ перпендикуляръ, опущенный на плоскость $(a)$ изъ начала координатъ; а для этого необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} 1 & y' & z' \\ 1 & y'' & z'' \\ 1 & y''' & z''' \end{vmatrix} = \lambda\cos(\delta x), \quad \begin{vmatrix} x' & 1 & z' \\ x'' & 1 & z'' \\ x''' & 1 & z''' \end{vmatrix} = \lambda\cos(\delta y), \quad \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} = \lambda\cos(\delta z),$$

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \lambda\delta \tag{b}$$

Первое изъ этихъ выраженій представляетъ удвоенную площадь треугольника, начерченнаго на плоскости $yOz$, вершины котораго суть $(y', z')$, $(y'', z'')$, $(y''', z''')$; треугольникъ этотъ есть проекція на плоскости $yOz$ треугольника $M'\,M''\,M'''$. Поэтому, означивъ площадь послѣдняго чрезъ $T$, имѣемъ

$$\lambda \cos(\delta x) = \pm 2T \cos(T, yz);$$

подобнымъ же образомъ найдемъ

$$\lambda \cos(\delta y) = \pm 2T \cos(T, xz),$$
$$\lambda \cos(\delta z) = \pm 2T \cos(T, xy).$$

Изъ этихъ трехъ уравненій выводимъ, взявъ сумму квадратовъ,

$$\lambda = \pm 2T.$$

Помноживъ это уравненіе на $\delta$ и замѣнивъ $\lambda\delta$ его величиною $(b)$, имѣемъ

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \pm 2T.\,\delta. \qquad (c)$$

Но $T.\dfrac{\delta}{3}$ есть объемъ пирамиды, у которой основаніе треугольникъ $M'\,M''\,M'''$, а вершина въ началѣ координатъ, и поэтому равняется $\dfrac{1}{6}$ параллелепипеда, въ которомъ три смежныя ребра суть $OM'$, $OM''$, $OM'''$. Поэтому, если изобразимъ чрезъ $R$ опредѣлитель $(c)$, то $\pm R$ *есть выраженіе объема этого параллелепипеда.*

Если вершина пирамиды не находится въ началѣ координатъ, а въ точкѣ $M\,(x, y, z)$, то объемъ параллелепипеда, построеннаго на 3 смежныхъ ребрахъ этой пирамиды, будетъ

$$\pm \begin{vmatrix} x'-x & y'-y & z'-z \\ x''-x & y''-y & z''-z \\ x'''-x & y'''-y & z'''-z \end{vmatrix}.$$

$$\pm \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & x'-x & y'-y & z'-z \\ 0 & x''-x & y''-y & z''-z \\ 0 & x'''-x & y'''-y & z'''+z \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x' & y' & z' \\ 1 & x'' & y'' & z'' \\ 1 & x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Когда всѣ четыре точки $M$, $M'$, $M''$, $M'''$ находятся въ одной плоскости, тогда объемъ пирамиды $M\,M'\,M''\,M'''$ равенъ нулю, а поэтому и

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x' & y' & z' \\ 1 & x'' & y'' & z'' \\ 1 & x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

Если въ этомъ уравненіи разсматривать $x$, $y$, $z$ какъ перемѣнныя, то оно представляетъ уравненіе плоскости (**§ 97**).

Опредѣлитель называется *симметрическимъ*, когда его столбцы одинаковы съ соотвѣтственными строками. Отсюда слѣдуетъ, что элементъ строки $r$ и столбца $s$ равенъ элементу строки $s$ и столбца $r$ и что коэффиціенты при этихъ элементахъ въ выраженіи опредѣлителя также равны. Таковы опредѣлители уравненій (13) **§ 81** и уравненій (7) **§ 91**.

---

# ПРИБАВЛЕНІЕ II

(къ **§ 41**)

Выраженіе ординаты $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, выведенное изъ уравненія эллипса

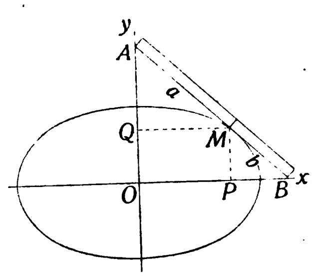
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

можно построить слѣдующимъ образомъ. На осяхъ эллипса $Ox$, $Oy$ построимъ прямоугольный треугольникъ $AOB$ съ гипотенузою $AB$, равною суммѣ полуосей $a+b$, такъ, чтобы $AM=a$ и $MB=b$; ордината точки $M$ будетъ требуемая величина $y$. Въ самомъ дѣлѣ: начертивъ координаты точки $M$, будемъ имѣть треугольники $AMQ$ и $BMP$, изъ которыхъ выводимъ:

$$MP:b=AQ:a=\sqrt{a^2-x^2}:a,$$

а отсюда

$$MP=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=y.$$




Фиг. 145

Слѣдовательно, если возьмемъ линейку, отложимъ на ней длины $a$ и $b$ полуосей эллипса, который желаемъ начертить, и помѣстимъ эту линейку въ углѣ, составляемомъ осями эллипса такъ, чтобы конецъ $A$ длины $AM$ равной $a$, находился на той оси, на которой должна лежать $b$, а конецъ $B$ длины $BM=b$ на другой оси, то точка дѣленія $M$ будетъ на эллипсѣ. Такимъ образомъ можно обозначить сколько угодно точекъ эллипса и по нимъ составить очертаніе этой кривой. На этомъ построеніи точекъ эллипса основано устройство инструмента, помощью котораго можно начертить эллипсъ непрерывнымъ движеніемъ.

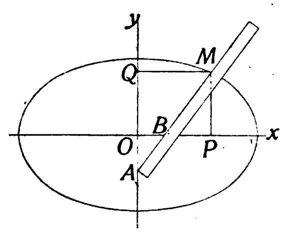
Можно такъ же опредѣлить точку эллипса слѣдующимъ образомъ: построимъ на осяхъ эллипса прямоугольный треугольникъ $AOB$, у котораго гипотенуза $AB$ равна разности полуосей $a - b$ и отложимъ на этой гипотенузѣ $BM = b$ или $AM = a$; точка $M$ будетъ на эллипсѣ. Въ самомъ дѣлѣ: начертивъ координаты точки $M$, будемъ имѣть

$$MP : MB = AQ : AM \quad \text{или} \quad MP : b = \sqrt{a^2 - x^2} : a,$$

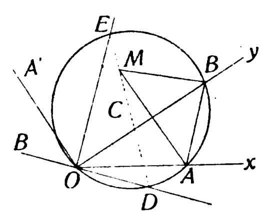
а отсюда

$$MP = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Слѣдовательно, если возьмемъ линейку, отложимъ на ней длины полуосей $AM$ и $MB$, потомъ помѣстимъ линейку между осями эллипса такъ, чтобы конецъ $A$ полуоси $AM$ лежалъ на $Oy$, а ко-




Фиг. 146




Фиг. 147

нецъ $B$ полуоси $BM$ на оси $Ox$, то $M$ будетъ на эллипсѣ. На основаніи этого построенія, можно по точкамъ или непрерывнымъ движеніемъ точки $M$ начертить эллипсъ.

Эти способы чертить эллипсъ вытекаютъ также изъ слѣдующей общей теоремы:

*Если неизмѣняемая плоская фигура двигается въ неподвижной плоскости такъ, что двѣ ея точки* $A$ и $B$ *чертятъ двѣ неподвижныя пересѣкающіяся прямыя* $Ox$ и $Oy$, *то всякая другая ея точка* $M$ *описываетъ или эллипсъ, или прямую.*

Для доказательства выведемъ уравненіе линіи, описываемой точкою $M(x, y)$, взявъ прямыя $Ox$ и $Oy$ за оси координатъ.

Пусть

$$\angle xOy = \theta, \quad BM = a, \quad AM = b,$$

принимая точки $A$ и $B$ за начала двухъ послѣднихъ прямыхъ, положимъ, что $OA'$ и $OB'$ суть прямыя, соотвѣтственно имъ параллельныя и въ одну сторону съ ними направленныя. Пусть

$$A'Ox = \alpha, \quad B'Oy = \beta \quad \text{и} \quad A'OB' = AMB = m.$$

Легко видѣть, что мы всегда будемъ имѣть:

$$\beta = \alpha \pm m - \theta, \tag{1}$$

$$\sin a = \pm \frac{y}{b} \sin \theta, \quad \sin \beta = \pm \frac{x}{a} \sin \theta.$$

Изъ двухъ послѣднихъ уравненій выводимъ

$$\pm\left(\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b}\right) \sin \theta = \sin \beta + \sin \alpha = 2 \sin\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right),$$

$$\pm\left(\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b}\right) \sin \theta = \sin \beta - \sin \alpha = 2 \cos\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right),$$

а отсюда, помноживъ 1-е уравненіе на $\sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)$, а 2-е на $\cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)$ и взявъ сумму квадратовъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \mp 2 \cos(\beta - \alpha) \frac{xy}{ab} = \frac{\sin^2(\beta - \alpha)}{\sin^2 \theta},$$

или, по уравненію (1),

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2 \cos(\theta \pm m) . \frac{xy}{ab} = \frac{\sin^2(\theta \pm m)}{\sin^2 \theta}. \tag{2}$$

Здѣсь квадратъ коэффиціента при $xy$ безъ учетвереннаго произведенія коэффиціентовъ при $x^2$ и $y^2$ есть величина отрицательная

$$\frac{4}{a^2 b^2} [\cos^2(\theta \pm m) - 1];$$

слѣдовательно, если $\sin^2(\theta \pm m)$ не равенъ нулю, то уравненіе принадлежитъ эллипсу.

Въ случаѣ $\sin(\theta \pm m) = 0$, т. е. когда $\theta + m = \pi$ или $\theta = m$, уравненіе (2) приводится къ

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0;$$

слѣдовательно, въ этомъ случаѣ точка $M$ чертитъ прямую, проходящую чрезъ начало координатъ $O$. Уравненіе $\theta + m = \pi$ или $\theta = m$ показываетъ, что окружность круга, описанная около треугольника $OAB$, проходитъ чрезъ точку $M$. Радіусъ этого круга есть постоянная величина, потому что круговой сегментъ $OAB$ отрѣзанъ хордою $AB$, имѣющею постоянную длину и вмѣщаетъ постоянный уголъ $\theta$. Итакъ, при движеніи точекъ $A$ и $B$ по прямымъ $Ox$ и $Oy$, всякая точка круга $OAB$ чертитъ прямую, проходящую чрезъ начало координатъ $O$. Пусть будетъ $C$ центръ разсматриваемаго круга и положимъ, что $M$ не находится на окружности круга. Прямая $MC$ пересѣкаетъ окружность круга въ точкахъ $D$ и $E$, которыя будутъ чертить двѣ прямыя $OD$ и $OE$, взаимно-перпендикулярныя. Слѣдовательно, эллипсъ, описываемый точкою $M$, можетъ быть произведенъ движеніемъ неизмѣняемой линейки $MD$, у которой опредѣленная часть $DE$ движется въ прямомъ углѣ $DOE$, т.-е. по одному изъ способовъ, показанныхъ выше. Прямыя $OD$ и $OE$ направлены по осямъ эллипса, а $MD$ и $ME$ суть длины полуосей.

---

# ПРИБАВЛЕНІЕ III

(къ **§§ 107** и **108**)

Если положимъ, что хорда (2) **§ 107**, сопряженная съ діаметральною плоскостью (5), проходитъ чрезъ начало координатъ, то ея уравненія примутъ видъ

$$x = az, \quad y = bz, \tag{$a$}$$

и условія (7) перпендикулярности ея къ діаметральной плоскости дадутъ уравненія:

$$\left.\begin{array}{l} (2A - s)\,x + B''y + B'z = 0 \\ B''x + (2A' - s)\,y + Bz = 0 \\ B'x + By + (2A'' - s)\,z + 0 \end{array}\right\}, \tag{$b$}$$

принадлежащія тремъ плоскостямъ, проходящимъ чрезъ начало координатъ; слѣдовательно, главная хорда ($a$) есть пересѣченіе трехъ плоскостей. Уравненіе (9) **§ 107** есть условіе, что плоскости ($b$) пересѣкаются по одной прямой. Оно есть выводъ исключенія $x$, $y$, $z$ изъ уравненія ($b$) и можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A - s, & B'', & B' \\ B'', & 2A' - s, & B \\ B', & B, & 2A'' - s \end{vmatrix} = 0. \tag{c}$$

Если означимъ чрезъ $\Delta_{mn}$ опредѣлитель 2-го порядка, служащій коэффиціентомъ въ $\Delta$ при элементѣ строки $m$ и столбца $n$, то, легко видѣть, будемъ имѣть $\Delta_{mn} = \Delta_{nm}$. По свойству рѣшенія однородныхъ линейныхъ уравненій (приб. I), мы получимъ пропорціи

$$x : y : z = \Delta_{m1} : \Delta_{m2} : \Delta_{m3},$$

которыя можно разсматривать какъ уравненіе хорды ($a$), и гдѣ для $m$ можно взять каждый изъ значковъ: 1, 2, 3; такъ что

$$x : y : z = \begin{Bmatrix} \Delta_{11} : \Delta_{12} : \Delta_{13} \\ \Delta_{21} : \Delta_{22} : \Delta_{23} \\ \Delta_{31} : \Delta_{32} : \Delta_{33} \end{Bmatrix}. \tag{d}$$

Если три опредѣлителя $\Delta_{11}$, $\Delta_{22}$, $\Delta_{33}$, не равны нулю, то и опредѣлители $\Delta_{12}$, $\Delta_{23}$, $\Delta_{31}$ не равны нулю; потому что

$$\Delta_{12}{}^2 = \Delta_{11}\,\Delta_{22}, \quad \Delta_{23}{}^2 = \Delta_{22}\,\Delta_{33}, \quad \Delta_{31}{}^2 = \Delta_{33}\,\Delta_{11}. \tag{e}$$

Если же опредѣлитель $\Delta_{mm} = 0$, то и $\Delta_{m1} = 0$, $\Delta_{m2} = 0$, $\Delta_{m3} = 0$. Положимъ напримѣръ, $\Delta_{11} = 0$, тогда $\Delta_{12} = 0$, $\Delta_{13} = 0$ и пропорціи даютъ

$$x = 0, \quad y : z = \begin{Bmatrix} \Delta_{22} : \Delta_{23} \\ \Delta_{32} : \Delta_{33} \end{Bmatrix};$$

слѣдовательно, въ этомъ случаѣ хорда ($a$) есть прямая, лежащая въ плоскости $yOz$. Когда $\Delta_{11} = 0$ и $\Delta_{22} = 0$, а $\Delta_{33}$ неравенъ нулю, тогда $x = 0$, $y = 0$, а $z$ остается совершенно неопредѣленною; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ ось $Oz$ есть главная хорда. Наконецъ, когда $\Delta_{11} = 0$, $\Delta_{22} = 0$, $\Delta_{33} = 0$, тогда всѣ отношенія ($d$) берутъ неопредѣленный видъ. Легко видѣть, что въ этомъ случаѣ

$$(2A - s) : B'' : B' = B'' : (2A' - s) : B = B' : B : (2A'' - s), \tag{f}$$

отчего уравненія ($b$) становятся тождественными между собою, такъ что $x, y, z$ должны удовлетворять одному только уравненію

$$(2A - s)\,x + B''y + B'z = 0$$

или

$$B'B''x + B''By + BB'z = 0; \qquad (g)$$

слѣдовательно, въ этомъ случаѣ поверхность имѣетъ безчисленное множество главныхъ хордъ, которыя всѣ лежатъ въ одной плоскости ($g$). Изъ пропорцій ($f$) выводимъ

$$s = 2A - \frac{B'B''}{B} = 2A' - \frac{B''B}{B'} = 2A'' - \frac{BB'}{B''}. \qquad (h)$$

Легко видѣть, что эта величина $s$ обращаетъ въ нуль не только $\Delta$, но и производную его по $s$,

$$\frac{\partial\Delta}{\partial s} = -\{(2A' - s)(2A'' - s) - B^2 + (2A'' - s)(2A - s) - B'^2 + \\ + (2A - s)(2A' - s) - B''^2\} = -(\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33});$$

а потому эта величина $s$ есть кратный корень уравненія $\Delta = 0$. Обратно: всякій разъ, какъ $s$ есть кратный корень уравненія $\Delta = 0$, мы будемъ имѣть пропорціи ($f$), и для $s$ значенія ($h$). Въ самомъ дѣлѣ: чтобы $s$ былъ кратный корень, должно быть $\dfrac{\partial\Delta}{\partial s} = 0$, т. е.

$$\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33} = 0;$$

а это вмѣстѣ съ уравненіемъ ($e$) даетъ

$$\Delta^2_{11} + \Delta^2_{12} + \Delta^2_{13} = 0, \quad \Delta^2_{21} + \Delta^2_{22} + \Delta^2_{23} = 0,$$
$$\Delta^2_{31} + \Delta^2_{32} + \Delta^2_{33} = 0:$$

слѣдовательно,

$$\Delta_{11} = 0, \quad \Delta_{22} = 0, \quad \Delta_{33} = 0,$$

что ведетъ къ формуламъ ($f$) и ($h$). Этотъ случай неопредѣленнаго направленія главной хорды очевидно можетъ встрѣтиться тогда только, когда поверхность есть одна изъ поверхностей вращенія. Впрочемъ это подтвердится ниже.

Если означимъ чрезъ $\varphi\,(x, y, z)$ совокупность членовъ 2-й степени въ уравненіи поверхности

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Byz + B'zx + B''xy + Cx + C'y + C''z + D = 0, \qquad (1)$$

то можемъ написать уравненіе ($b$) подъ видомъ

$$sx = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad sy = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad sz = \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{i}$$

Означивъ чрезъ $s'$ другой корень уравненія $\Delta = 0$ и чрезъ $x'$, $y'$, $z'$ соотвѣтственныя значенія $x$, $y$, $z$, мы будемъ имѣть

$$s'x' = \frac{\partial\varphi}{\partial x'}, \quad s'y' = \frac{\partial\varphi}{\partial y'}, \quad s'z' = \frac{\partial\varphi}{\partial z'}. \tag{k}$$

Изъ уравненій ($i$) и ($k$) выводимъ

$$(s - s')\ (xx' + yy' + zz') =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x} x' + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial\varphi}{\partial z} z' - \frac{\partial\varphi}{\partial x'} x - \frac{\partial\varphi}{\partial y'} y - \frac{\partial\varphi}{\partial z'} z = 0.$$

Легко удостовѣриться, что 2-я часть этого уравненія тожественно равна нулю; слѣдовательно, когда $s$ не равно $s'$, тогда

$$xx' + yy' + zz' = 0. \tag{l}$$

А это показываетъ, что главныя хорды, соотвѣтствующія двумъ неравнымъ корнямъ уравненія $\Delta = 0$, взаимно-перпендикулярны.

Уравненіе ($l$) можетъ послужить для доказательства, что уравненіе $\Delta = 0$ не можетъ имѣть мнимыхъ корней. Положимъ, что $s$ и $s'$ суть мнимые сопряженные корни; тогда значенія $\Delta_{mn}$, имъ соотвѣтствующія, суть также сопряженныя. Пусть будетъ

$$\Delta_{m1} = \alpha_1 + \beta_1 i, \quad \Delta_{m2} = \alpha_2 + \beta_2 i, \quad \Delta_{m3} = \alpha_3 + \beta_3 i \text{ для корня } s$$

$$\text{и } \Delta_{m2} = \alpha_1 + \beta_1 i, \quad \Delta_{m2} = \alpha_2 + \beta_2 i, \quad \Delta_{m3} = \alpha_3 + \beta_3 i \text{ для корня } s',$$

то по уравненію ($l$), принявъ во вниманіе пропорціи ($d$), получимъ

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \alpha_3^2 + \beta_3^2 = 0,$$

что невозможно, такъ какъ эта сумма состоитъ только изъ положительныхъ членовъ. Итакъ, всѣ корни уравненія $\Delta = 0$ вещественны, что уже мы видѣли при изслѣдованіи поверхностей 2-го порядка. Если между ними нѣтъ равныхъ, то поверхность имѣетъ три опредѣленныхъ главныхъ хорды, взаимно-перпендикулярныхъ.

Въ замѣчаніи на стр. 238 мы доказали, что, если $f(x, y, z) = 0$ есть уравненіе поверхности 2-го порядка, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b + \frac{\partial f}{\partial z} c = 0 \tag{m}$$

есть уравненіе діаметральной плоскости, сопряженной съ хордою

$$x = az + p, \quad y = bz + q.$$

Для діаметральной плоскости, сопряженной съ осью $Oz$, должно положить $a = 0$, $b = 0$; отчего уравненіе $(m)$ приведется къ $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$; также найдемъ, что уравненія

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

опредѣляютъ діаметральныя плоскости, сопряженныя съ осями координатъ $Ox$, $Oy$. Пересѣченіе этихъ трехъ плоскостей находится въ центрѣ поверхности, потому что это пересѣченіе есть средина трехъ хордъ. Слѣдовательно, координаты центра, которыя означимъ чрезъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, опредѣляются тремя уравненіями:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \alpha} &= 2A\alpha + B''\beta + B'\gamma + C = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial \beta} &= B''\alpha + 2A'\beta + B\gamma + C' = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial \gamma} &= B'\alpha + B\beta + 2A''\gamma + C'' = 0
\end{aligned}\right\}, \qquad (n)$$

и будутъ имѣть конечныя опредѣленныя значенія въ такомъ только случаѣ, когда опредѣлитель

$$K = \begin{vmatrix} 2A & B'' & B' \\ B'' & 2A' & B \\ B' & B & 2A'' \end{vmatrix}$$

не равенъ нулю. Означивъ чрезъ $K_{mn}$ коэффиціентъ выраженія $K$ при элементѣ, находящемся въ строкѣ $m$ и столбцѣ $n$, мы будемъ имѣть для координатъ центра общія выраженія:

$$\alpha = -\frac{1}{K}(CK_{11} + C'K_{12} + C''K_{13})$$

$$\beta = -\frac{1}{K}(CK_{21} + C'K_{22} + C''K_{23})$$

$$\gamma = -\frac{1}{K}(CK_{31} + C'K_{32} + C''K_{33}).$$

Перенеся начало координатъ въ центръ, мы приведемъ уравненіе поверхности 2-го порядка къ виду

$$\varphi(x, y, z) + f(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \qquad (p)$$

гдѣ $\varphi(x, y, z)$ есть совокупность членовъ 2-й степени въ уравненіи $f(x, y, z) = 0$. Что же касается до $f(\alpha, \beta, \gamma)$, то

$$f(\alpha, \beta, \gamma) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \beta}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \gamma}\gamma + \frac{1}{2}C\alpha + \frac{1}{2}C'\beta + \frac{1}{2}C''\gamma + D$$

$$= \frac{1}{2}C\alpha + \frac{1}{2}C'\beta + \frac{1}{2}C''\gamma + D;$$

потому что $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0$, вслѣдствіе уравненія $(n)$. Означивъ $f(\alpha, \beta, \gamma)$ чрезъ $Q$, получимъ вмѣсто $(p)$ уравненіе

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Byz + B'yx + B''yz + Q = 0 \qquad (q)$$

Опредѣлитель $K$ есть послѣдній членъ въ уравненіи $\Delta = 0$, т.-е. членъ, не содержащій $s$; потому что при $s = 0$ получимъ $\Delta = K$. Когда поверхность имѣетъ центръ, тогда $K$ не равенъ нулю, и уравненіе $\Delta = 0$ не можетъ имѣть корней, равныхъ нулю. Въ этомъ случаѣ корни уравненія $\Delta = 0$ находятся въ простой зависимости отъ полуосей поверхности. Помноживъ уравненіе $(i)$ соотвѣтственно на $x$, $y$, $z$ и взявъ сумму произведеній, получимъ

$$s(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}z = 2\varphi(x, y, z). \qquad (r)$$

Положимъ, что точка $(x, y, z)$ принадлежитъ пересѣченію главной хорды $(a)$, проведенной чрезъ начало координатъ, съ поверхностью; тогда $x$, $y$, $z$ удовлетворяютъ уравненію $(q)$, помощью котораго уравненіе $(r)$ приводится къ слѣдующему:

$$s(x^2 + y^2 + z^2) + 2Q = 0$$

или

$$sr^2 + 2Q = 0, \qquad (s)$$

если положить

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Означая чрезъ $s_1$, $s_2$, $s_3$ три корня уравненія $\Delta = 0$, опредѣлимъ, по вышеизложенному, направленія соотвѣтственныхъ главныхъ хордъ, и возьмемъ эти хорды за оси координатъ $Ox$, $Oy$, $Oz$; тогда уравненіе поверхности приметъ видъ

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 + Q = 0. \qquad (t)$$

Положивъ $y = 0$, $z = 0$, получимъ $Px^2 + Q = 0$; но по уравненію ($s$) имѣемъ $s_1x^2 + 2Q = 0$, слѣдовательно, $2P = s_1$; такъ же докажется, что $2P' = s_2$, $2P'' = s_3$; слѣдовательно, вмѣсто уравненія ($t$) будемъ имѣть

$$s_1x^2 + s_2y^2 + s_3z^2 + 2Q = 0. \qquad (t)$$

Изъ этого видно, что если три корня уравненія $\Delta = 0$ положительные, или всѣ три отрицательные, то уравненіе ($t$) принадлежитъ: или эллипсоиду, или точкѣ, или мнимому мѣсту. Въ случаѣ двухъ положительныхъ корней и одного отрицательнаго, или двухъ отрицательныхъ и одного положительнаго, уравненіе ($t$) принадлежитъ: или гиперболоиду о двухъ полахъ, или гиперболоиду объ одной полѣ, или конусу.

Модули выраженій:

$$\sqrt{\frac{-2Q}{s_1}}, \quad \sqrt{\frac{-2Q}{s_2}}, \quad \sqrt{\frac{-2Q}{s_3}}.$$

суть длины полуосей поверхности. Въ случаѣ двухъ равныхъ корней уравненія $\Delta = 0$ двѣ полуоси равны и, слѣдовательно, тогда получается поверхность вращенія. А когда всѣ три корня равны и знакъ ихъ противоположенъ знаку $Q$, тогда поверхность есть шаръ.

Въ случаѣ $K = 0$ выраженія $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, становятся безконечными или неопредѣленными; тогда уравненіе $\Delta = 0$ имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень, равный нулю. Для этого корня имѣемъ $\Delta_{mn} = K_{mn}$ и уравненія соотвѣтственной хорды ($d$) берутъ видъ

$$x : y : z = \left\{ \begin{array}{c} K_{11} : K_{12} : K_{13} \\ K_{21} : K_{22} : K_{23} \\ K_{31} : K_{32} : K_{33} \end{array} \right\}; \qquad (u)$$

при этомъ могутъ представиться тѣ же случаи, которые представляются вообще въ уравненіи ($d$).

Если коэффиціенты $C$, $C'$, $C''$ въ уравненіи $f(x, y, z) = 0$ при первыхъ степеняхъ $x$, $y$, $z$ удовлетворяютъ условіямъ:

$$CK_{11} + C'K_{12} + C''K_{13} = 0, \quad CK_{21} + C'K_{22} + C''K_{23} = 0,$$
$$CK_{31} + C'K_{32} + C''K_{33} = 0, \qquad (v)$$

то $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ берутъ неопредѣленный видъ; тогда уравненіе $f(x, y, z) = 0$ принадлежитъ геометрическому мѣсту, имѣющему безчисленное множество центровъ, и между прочимъ цилиндру или двумъ параллельнымъ плоскостямъ. Если же послѣднія уравненія не удовлетворены, то, по крайней мѣрѣ, одна изъ величинъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ безконечна. Въ такомъ случаѣ поверхность не имѣетъ центра. Главная діаметральная плоскость, соотвѣтствующая корню $s = 0$, безконечно удалена отъ начала координатъ, что легко доказать слѣдующимъ образомъ. Уравненіе діаметральной плоскости (5) **§ 107**, вслѣдствіе уравненія (7) или уравненія ($b$), беретъ видъ

$$sx\xi + sy\eta + sz\zeta + Cx + C'y + C''z = 0,$$

гдѣ $\xi$, $\eta$, $\zeta$ координаты какой-нибудь точки плоскости, а $x$, $y$, $z$ координаты одной изъ точекъ хорды ($a$). Положимъ, что онѣ принадлежатв точкѣ, находящейся на разстояніи единицы отъ начала координатъ; тогда

$$\mp \frac{1}{s}(Cx + C'y + C''z) \qquad (w)$$

будетъ разстояніе плоскости отъ начала координатъ. Когда $s = 0$, а уравненія ($v$) не удовлетворены, то $Cx + C'y + C''z$ не равно нулю, а потому выраженіе ($w$) становится безконечнымъ. Раздѣливъ уравненіе $\Delta = 0$ на $s$, получимъ уравненіе 2-й степени, корни котораго $s_1$ и $s_2$ опредѣляютъ направленія двухъ другихъ главныхъ хордъ, и если эти корни не равны нулю, то соотвѣтственныя діаметральныя плоскости будутъ на конечномъ разстояніи отъ начала координатъ.