



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

1

100

100

	Pages.
III. Assemblée générale du lundi 3 mai 1886	77
Rapport du Secrétaire	<i>ib.</i>
— du Trésorier	80
IV. Assemblée générale du mardi 4 mai 1886.	85
V. — — du mercredi 5 mai 1886.	85
VI. — — du jeudi 6 mai 1886	86
Liste des ouvrages offerts à la Société scientifique de Bruxelles	90

AUTEURS.

Bourgeat, 66, 68. — Brifaut, 80. — Buisseret, 58. — Carbonnelle, 47, 52, 77. — Jos. Carnoy, 52, 54. — Cuyliis, 72. — Delsaulx, 53. — Desplats, 60, 71, 72. — De Tilly, 53, 55. — Dollo, 58, 60, 66, 68. — D^r Dumont, 70, 71. — Étienne, 66, 67. — Gilbert, 46, 47, 53, 55. — Heymans, 71. — Kennis, 87. — Lagasse, 48, 52. — Lamey, 47. — A. de Lapparent, 66, 67, 68, 82. — A. de Limburg-Stirum, 61. — Mansion, 46, 47, 52. — M. d'Ocagne, 52, 54. — Pasquier, 53. — Proost, 60, 67, 75. — V^{te} de Salvert, 47. — Schneider, 69, 72. — Smets, 58, 60, 61, 68. — R. Storms, 68. — Thirion, 47. — Ch. de la Vallée Poussin, 61, 73. — Vanden Gheyn, 60, 66, 67. — Van Segvelt, 60. — Verriest, 70, 71. — Visart, 85. — Domet de Vorges, 67. — Warlomont, 72. — Witz, 83.

QUESTIONS AU CONCOURS.

1° *On demande des recherches nouvelles sur des combinaisons renfermant le noyau $C_n - C_2H_2$.*

2° *Des foyers à gaz au point de vue hygiénique.*

3° *Expliquer la dualité des deux types, l'un brun et l'autre blond, qui se constatent dans tous les grands rameaux de la race aryenne, en opposition avec l'unité linguistique.*

4° *Donner une théorie rigoureuse de la différentiation sous le signe dans les intégrales définies, en assignant les conditions précises qui limitent l'application de la règle de Leibnitz, principalement dans le cas de limites infinies ou de fonctions passant par l'infini. Faire l'application de ces principes à quelques intégrales définies célèbres.*

Le 1^{er} octobre 1887 est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

STATUTS

ARTICLE 1^{er}. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de Société scientifique de Bruxelles, avec la devise : « *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* (1). »

ART. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

ART. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres, et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche. Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (2).

ART. 4. — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

(1) Const. de Fid. cath. C. IV.

(2) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît, par livraisons trimestrielles, sous le titre de *Revue des questions scientifiques*. Elle forme chaque année deux volumes in-8° de 700 pages. Prix de l'abonnement : 20 francs par an pour tous les pays de l'Union postale. Les membres de la Société scientifique ont droit à une réduction de 25 pour cent.

ART. 5. — Elle est dirigée par un *Conseil* de vingt membres, élus annuellement dans son sein. Le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier font partie de ce Conseil. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles.

ART. 6. — Pour être admis dans l'association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission n'est prononcée qu'à la majorité des deux tiers des voix.

L'exclusion d'un membre ne pourra être prononcée que pour des motifs graves et à la majorité des deux tiers des membres du Conseil.

ART. 7. — Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*. Ces parts sont de 300 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 15 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 150 francs, versée une fois pour toutes.

Le Conseil peut nommer des *membres honoraires* parmi les savants étrangers à la Belgique.

Les noms des membres fondateurs figurent en tête des listes par ordre d'inscription, et ces membres reçoivent autant d'exemplaires des publications annuelles qu'ils ont souscrit de parts du capital social. Les membres ordinaires et les membres honoraires reçoivent un exemplaire de ces publications.

Tous les membres ont le même droit de vote dans les Assemblées générales.

ART. 8. — Chaque année, il y a trois sessions. La principale se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques, et pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels, et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante.

Les deux autres sessions se tiendront en octobre et en janvier.

Elles pourront durer deux jours, et auront pour objet principal de préparer la session de Pâques.

compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'Assemblée, lui donne décharge.

ART. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres votants, et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

ART. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'article 2.

7. — Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. — Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société; la publication n'aura lieu qu'en français.

9. — Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

10. — Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. — Les prix seront décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. — Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. — La Société n'a l'obligation de publier aucun travail couronné; les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. — Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de Pâques. Les rapports des jurys devront être remis au Conseil six semaines avant cette session. Le 1^{er} octobre de l'année précédente est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

15. — Pour être admis à demander un subside, il faut être membre de la Société depuis un an au moins.

LETTRE

DE

S. S. LE PAPE LÉON XIII

AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES.

*Dilectis Filiis Praesidi ac Membris Societatis Scientifical
Bruxellis constitutae.*

LEO PP. XIII.

DILECTI FILII, SALUTEM ET APOSTOLICAM BENEDICTIONEM.

Gratae Nobis advenerunt litterae vestrae una cum Annalibus et Quaestionibus a vobis editis, quas in obsequentissimum erga Nos et Apostolicam Sedem pietatis testimonium obtulistis. Libenter sane agnovimus Societatem vestram quae a scientiis sibi nomen fecit, et quae tribus tantum abhinc annis laetis auspiciis ac Iesu Christi Vicarii benedictione Bruxellis constituta est, magnum iam incrementum cepisse, et uberes fructus polliceri. Profecto cum infensissimi religionis ac veritatis hostes nunquam desistant, imo magis magisque studeant dissidium rationem inter ac fidem propugnare, opportunum est ut praestantes scientia ac pietate viri ubique exurgant, qui Ecclesiae doctrinis ac documentis ex animo obsequentes, in id contendant, ut demonstrent *nullam unquam inter fidem et rationem veram dissensionem esse posse*; quemadmodum Sacrosancta Vaticana Synodus, constantem Ecclesiae et Sanctorum Patrum doctrinam affirmans, declaravit Constitutione IV^a de fide catholica. Quapropter gratulamur quod Societas vestra hunc primo finem sibi proposuerit, itemque in statutis legem dederit, ne quid a sociis contra sanam christianae philosophiae doctrinam committatur; simulque omnes hortamur ut

L'Institut SAINT-IGNACE	Anvers.
Philippe GILBERT	Louvain.
Le R. P. PROVINCIAL de la Compagnie de Jésus en Belgique	Bruxelles.
Le Collège d'ALOST	Alost.
Le chanoine DE WOUTERS	Braine-le-Comte.
Antoine d'ABBADIE, membre de l'Institut	Paris.
S. E. le cardinal HAYNALD, archevêque de Kalocsa et Bàcs	Kalocsa (Hongrie).
S. E. le cardinal VANNUTELLI.	Vienne.
S. G. Mgr DU ROUSSAUX, évêque de	Tournay.
S. G. Mgr GOOSSENS, archevêque de	Malines.
R. BEDEL	Aix.
S. G. Mgr BELIN, évêque de.	Namur.

Liste des membres honoraires.

Le P ^{re} B. BONCOMPAGNI, de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei	Rome.
Antoine d'ABBADIE, membre de l'Institut	Paris.
Charles HERMITE, membre de l'Institut	Paris.
Le général NEWTON	New-York.
Le docteur FOERSTER	Aix-la-Chapelle.
Le R. P. PERRY, S. J., de la Société royale de Londres	Stonyhurst.
A. DE LAPPARENT	Paris.
A. BÉCHAMP	Lille.
Camille JORDAN, membre de l'Institut	Paris.
WOLF, membre de l'Institut	Paris.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut .	Paris.
Le vice-amiral DE JONQUIÈRES, membre de l'Institut.	Paris.

- BAPST** (Germain), 215, faubourg Saint-Honoré. — Paris.
- BARCIA CABALLERO** (Juan), Ayudante de Clases prácticas de Anatomía de la Universidad, Puerta de la Peña, 10. — Santiago (Espagne).
- BARDIN** (Abbé Louis), professeur de Géologie à la Faculté, 19, rue de la Préfecture. — Angers (Maine-et-Loire — France).
- BAULE** (Albert), lieutenant de vaisseau, 133, chemin de Magudas, — Caudéran, près Bordeaux (Gironde — France).
- BAUWENS** (Abbé), vicaire à Sainte-Anne, boulevard du Château. — Gand.
- BAYET** (Adrien), 30, nouveau marché aux Grains — Bruxelles.
- BAYET** (Ernest), 68, rue Joseph II. — Bruxelles.
- BEAUCOURT** (Abbé Léopold), curé des Écaussines d'Enghien.
- BÉCHAMP**, doyen de la Faculté catholique de médecine, 56, rue des Fossés. — Lille (Nord — France).
- BECKERS** (Auguste), avocat, rue Gérard. — Woluwe-Saint-Lambert.
- BEDÉL** (Abbé R.), prêtre de S^t-Sulpice, directeur au Grand-Séminaire d'Aix (Bouches-du-Rhône. — France).
- BELIN** (S. G. Mgr.), évêque de Namur.
- BELLEFROID** (Victor), 13, rue Hors-Château. — Liège.
- BELLEMANS** (Charles), comptable, marché aux OEufs. — Anvers.
- BELPAIRE** (Théodore), directeur du service provincial, 18, rue des Sœurs-Noires. — Gand.
- DE BENAZÉ**, S. J. (R. P.), 18, rue Lhomond. — Paris.
- DE BERGEYCK** (C^r), château de Beveren-Waes (Flandre-Orientale).
- BERLEUR** (Adolphe), ingénieur, 17, faubourg Saint-Laurent. — Liège.
- BERLINGIN** (Melchior), directeur de l'usine de la Vieille-Montagne. — Panchot (Aveyron — France).
- BERNALDEZ** (Fernando), inspector general del cuerpo de Ingenieros de minas de España, calle Ancha de S. Bernardo, 37, pral. izq. — Madrid (Espagne.)
- BERNARDIN** (Monsieur), conservateur du Musée commercial-industriel, au Pensionnat. — Melle (Flandre-Orientale).
- BERTRAND** (Dieudonné), docteur en médecine, 56, rue du Nord. — Bruxelles.
- BERTRAND** (Léon), 9, rue Crespel. — Bruxelles.
- BÉTHUNE-ELIAERT** (B^{re}), sénateur, rue du Pont. — Alost.
- BÉTHUNE** (Mgr Félix), rue d'Argent. — Bruges.
- BICHOT** (Abbé), professeur au Petit-Séminaire, 19, rue N.-D. des Champs. — Paris.
- BIVORT** (Alfred). — Fontaine-l'Évêque.

- BRUSSELMANS (Jules)**, docteur en médecine, 10, marché aux grains. — Malines.
- BRUYLANTS**, professeur à l'Université catholique, de l'Académie royale de médecine, rue de Malines. — Louvain.
- BUISSERET (Anatole)**, professeur au Collège communal, rue de Soignies. — Nivelles.
- DE BURLET (Constantin)**, ingénieur principal des ponts et chaussées, directeur général de la Société nationale des chemins de fer vicinaux, 35, rue de la Vanne. — Bruxelles.
- DE BUSSY (L.)**, inspecteur général des constructions navales, 7, rue de Jouy. — Paris.
- CAMBIER (Vital)**, industriel. — Morlanwelz (Hainaut).
- CAMPELO (Abbé)**, prof. de chimie à l'Université. — Séville (Espagne).
- DE CANNART D'HAMALE (François)**, 2, rue du Poivre. — Malines.
- CAPPELLEN (Guillaume)**, avocat, 4, place Marguerite. — Louvain.
- CARBONNELLE, S. J. (R. P.)**, docteur en sciences physiques et mathématiques, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.
- CARLIER (Joseph)**, ingénieur. — Thuin (Hainaut).
- CARNOY (Abbé J.-B.)**, professeur à l'Université, 11, place du marché aux Grains. — Louvain.
- CARNOY (Joseph)**, profess. à l'Université, place du Peuple. — Louvain.
- CARTUYVELS (Mgr)**, vice-recteur de l'Université. — Louvain.
- CARTUYVELS (Jules)**, professeur à l'Université, 12, place de l'Université. — Louvain.
- CASARÈS (Antonio)**, catedrático de Quimica y rector de la Universidad. — Santiago (Galice — Espagne).
- CASARÈS (Demetrio)**, farmacutico. — Santiago (Galice — Espagne).
- CASARÈS (Firmino)**, en la Coruña (Espagne).
- CÉSAR (Docteur)**, 14, rue Chaudronnerie. — Dijon (Côte-d'Or — France).
- DU CHASTEL (C^{te} Henri)**, 55, rue de Trèves. — Bruxelles.
- CHAUTARD**, doyen de la Faculté catholique des sciences, 3, rue Saint-Martin. — Lille (Nord — France).
- CHÉDAILLE (Abbé C.-A.)**, chanoine honoraire, supérieur de l'Institution Saint-Charles. — Chauny (Aisne — France).
- CHONÉ, S. J. (R. P.)**, 18, rue Lhomond. — Paris.
- CLAES (Paul)**, 79, boulevard de Tirlemont. — Louvain.
- COGELS (J.-B.-Henri)**, 58, longue rue de l'Hôpital. — Anvers.
- COLLÈGE D'ALOST**, 13, rue de Bruxelles. — Alost.
- COLLÈGE NOTRE-DAME DE LA PAIX**. — Namur.
- COLLÈGE SAINT-MICHEL**. — Bruxelles.

- DE JAER (Jules)**, ingénieur des mines, Vicux-Marchéaux Bêtes. — Mons.
- DE LANTSHEERE (Léon)**, docteur en droit, 17, rue Caroly. — Bruxelles.
- DELCOUR (Ch.)**, professeur émérite à l'Université, ancien ministre, rue Marie-Thérèse. — Louvain.
- DELEBECQUE-VERGAUWEN, 12**, rue aux Draps. — Gand.
- DE LEYN (Abbé A.)**, principal du Collège Saint-Louis. — Bruges.
- DELGEUR (D^r Louis)**, 15, rue Léopold. — Anvers.
- DE LORGE (Abbé J.)**, professeur au Séminaire. — Roulers.
- DELSAULX, S. J. (R. P.)**, docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.
- DELVIGNE (Chan. Adolphe)**, curé de Saint-Josse-ten-Noode, 14, rue de la Pacification. — Bruxelles.
- DE MARBAIX**, professeur à l'Université de Louvain. — Eynthout par Westerloo (Anvers).
- DE MEESTER (Augustin)**, propriétaire. — Saint-Nicolas.
- DEPEYRE (Octave)**, ancien ministre, 97, rue du Bac. — Paris.
- DE PRETER (Herman)**, ingénieur, 28, boulevard du Jardin Botanique. — Bruxelles.
- DEPREZ (Max)**, juge au tribunal de 1^{re} instance, 5, rue des Dominicains. — Mons.
- DE PRINS**, place du Peuple. — Louvain.
- DE RIDDER (Abbé J.-B.)**, curé-doyen de Saint-Pierre, 15, rue des Vaches. — Louvain.
- DE RIDDER (Paul)**, 68, chaussée de Haecht. — Bruxelles.
- DESCAMPS (Abbé A. J.)**, inspecteur des Écoles du canton de Mous, curé d'Acoz, par Châtelineau.
- DESCAMPS (É.)**, professeur à l'Université. — Louvain.
- DESPLATS (Docteur)**, professeur aux Facultés catholiques, 52, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
- DESSAIN (Charles)**, libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.
- DETIERRE (Abbé)**, aumônier de l'École vétérinaire, Institut Saint-Louis, 121, rue du Marais. — Bruxelles.
- DE TILLY (J.)**, lieutenant colonel d'artillerie, directeur de l'Arsenal de construction, de l'Académie royale de Belgique. — Anvers.
- DEVIVIER (A.)**, professeur à l'Université, rue de Namur. — Louvain.
- DEVOLDER (Joseph)**, ministre de la justice, 141, rue de Stassart. — Bruxelles.
- DEWALQUE (François)**, professeur à l'Université, 26, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

- FÉLICIEN (Monsieur)**, supérieur-général des Joséphites. — Grammont.
- FELIÙ Y PEREZ (Bartolomé)**, profesor en la Universidad, Ariban, 11. —
Barcelona (Espagne).
- FERNANDEZ SANCHEZ (José)**, catedrático de Historia universal, en la
Universidad. — Santiago (Galice. — Espagne).
- FERRAND DE MISSOL (Amédée)**, 40, boulevard Montparnasse. — Paris.
- DE FIERLANT (B^{on} Albert)**, ingénieur à la Société générale des chemins
de fer économiques, 10, rue d'Idalie. — Bruxelles.
- FINLAY (Carlos)**, medico. — Habana (Cuba).
- FITA Y COLOMÉ S. J. (R. P. Fidel)**, calle del Lobo, 34, pral. — Madrid
(Espagne).
- FLAHAULT (Charles)**, docteur ès sciences naturelles, chargé de cours à la
Faculté des sciences. — Montpellier (Hérault — France).
- FLOREN (Gustave)**, chez M. le D^r Floren. — Brecht (Anvers).
- FOCILLON (Ad.)**, professeur en retraite de l'Université de France,
15, rue Vauquelin — Paris.
- FOERSTER (D^r)**, professeur d'histoire naturelle. — Aix-la-Chapelle.
- FONTAINE (Théodore)**, professeur à l'Université de Louvain. —
Moustier-sur-Sambre (Namur).
- FORNI (C^o Paul)**. — Bozen (Tyrol — Autriche).
- DE FOVILLE (Abbé)**, Grand-Séminaire d'Issy-sur-Seine. — Paris.
- FRANC (Anatole)**, Villa Franc. — Saint-Raphaël (Var) ou 16, rue de
Montgolfier. — Lyon (Rhône — France).
- FRANÇOIS, S. J. (R. P. Alexis)**, professeur au Collège de la Paix, rue
de Bruxelles. — Namur.
- FRANCOTTE (Xavier)**, docteur en méd., 15, quai de l'Industrie. — Liège.
- GALLEZ (Louis)**, docteur en médecine, membre de l'Académie royale
de médecine. — Châtelet.
- GARBE (J.-B.)**, ingénieur aux usines de Bleyberg-Montzen. — Montzen
(Liège).
- DE GARCIA DE LA VEGA (B^{on} Victor)**, docteur en droit, 37, rue du Luxem-
bourg. — Bruxelles.
- GAUTHIER-VILLARS**, 55, quai des Augustins. — Paris.
- GAUTIER (Chanoine)**, 79, rue Notre-Dame. — Malines.
- GELIN (Abbé)**, professeur au collège Saint-Quirin. — Huy.
- GÉNARD (Léonard)**, ingénieur au charbonnage de Bracquagnies (Hainaut).
- DE GERANDO (B^{on} L.)**, chef de service de la marine de l'État, 1, rue
S'-Évroult. — Angers (Maine-et-Loire. — France).
- GÉRARD (Alphonse)**, ingénieur aux minières de Lamadelaine (Grand-
Duché de Luxembourg).

- LALÉU** (Abbé), curé de Loix, par La Couarde (Charente-Inférieure — France).
- LAMARCHE** (Émile), 81, rue Louvrex. — Liège.
- LAMBERT** (Camille), ingénieur, 29, rue Fabry. — Liège.
- LAMBIOTTE** (Victor), ingénieur, Oignies-Aiscau, par Tamines (Namur).
- LAMEY** (R. P. Dom Mayeul) O. S. B., prieuré de Saint-Jean, Grignon par Les Laumes (Côte-d'Or — France).
- LAMY** (Mgr.), président du collège Marie-Thérèse. — Louvain.
- DE LAPPARENT** (A.), membre correspondant de la Société géologique de Londres, professeur à l'Institut catholique, 5, rue de Tilsitt. — Paris.
- LATINE**, docteur en médecine. — Marbaix-Marbisoux (Brabant).
- LATINIS** (Victor), ingénieur, chef de service des forges et aciéries de la Société du Nord et de l'Est. — Trith-Saint-Léger (Nord — France).
- LAVA** (Jules), ingénieur honoraire des Ponts et Chaussées, 27, rue Gillon. — Bruxelles (Saint-Josse-ten-Noode).
- LAVAUD DE LESTRADE**, prêtre de Saint-Sulpice, professeur de sciences au Séminaire. — Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme — France).
- LEBESCONTE** (P.), pharmacien, 13, Bas de Lices. — Rennes (Ille-et-Vilaine — France).
- LEBON**, docteur en médecine, place Saint-Paul. — Nivelles.
- LEDRESSEUR** (Charles), docteur en médecine, professeur à l'Université, 75, voer des Capucins. — Louvain.
- LEFEBVRE**, docteur en médecine, professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 36, rue de Bériot. — Louvain.
- LEFEBVRE** (Abbé Bruno), professeur de sciences et de mathématiques, au Petit-Séminaire — Floreffe (Namur).
- LEFEBVRE** (Abbé Ferdinand), professeur à l'Université, 36, rue de Bériot. — Louvain.
- LEFEBVRE** (Paul), avocat, 7, rue du Pepin. — Bruxelles.
- LEGOUIS**, S. J. (R. P.), docteur ès-sciences, 98, rue de Vaugirard. — Paris.
- LEGRAND-BENOIT**, 51, rue de Bruxelles. — Namur.
- LE GRELLE** (C^{te} Ferdinand), 21, rue Van Bréc. — Anvers.
- LEIRENS-ÉLIAERT**, sénateur, rue du Pont. — Alost.
- LEJEUNE-SIMONIS**, château de Sohan par Pepinster (Liège).

- MARTINEZ Y SAEZ** (Francisco de Paula), professeur de zoologie au Musée d'histoire naturelle, plaza de ministerios, 5°, 3° izquierda. — Madrid (Espagne).
- MAS**, S. J. (R. P. Bartolomé), colegio de S. Ignacio. — Manresa.
- MASOIN** (E.), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 15, place Sainte-Anne. — Louvain.
- MASSALSKI** (U.), professeur à l'Université. — Louvain.
- MATAGNE** (Jules), docteur en médecine, 21, rue de la Fontaine — Bruxelles.
- DE MAUPEOU** (C^{te}), ingénieur de la marine, 50, rue Vital. — Passy (Paris).
- MAYER** (Henri), avocat, 51, rue Saint-Jacques. — Tournay.
- DE MEEUS** (C^{te} Henri), ingénieur, 72, rue du Vertbois. — Liège.
- MEEUS** (Eugène), membre de la Chambre des Représentants, 42, rue Houblonnière. — Anvers.
- MEEUS-HONNOREZ** (L.), distillateur. — Wyneghem par Anvers.
- MÉLINGE** (Abbé Calixte), docteur en théologie, 6, rue des Petites-Allées. — Rochefort-sur-Mer (Charente-Inférieure. — France).
- MELLO** (Rev. J. Magens), Rectory, Brampton. — Chesterfield (Angleterre).
- MENGELLE** (Bertrand), ingénieur de l'École centrale des arts et manufactures, 75, rue Royale. — Bruxelles.
- MERCIER** (Abbé D.), collègue du Saint-Esprit, rue de Namur. — Louvain.
- MERTENS** (Guil.), ingénieur, directeur de l'usine à gaz, 73, rue de Tourcoing. — Roubaix (Nord — France).
- MICHA**, professeur à l'Université, 8, place du Peuple. — Louvani.
- MICHAUX** (B^{en}), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine. — Louvain.
- MICHIELS** (Chanoine), inspecteur diocésain de l'enseignement moyen, longue rue Neuve. — Malines.
- MIRST** (Émile), ingénieur aux établissements de S^{te}-Marie d'Oignies. — Tamines.
- MIOT** (Léopold), docteur en médecine, de l'Académie royale de médecine, 15, rue de Beaumont. — Charleroi.
- MIR** (R. P. Michel), S. J. Membre de l'Académie Royale d'Espagne, 3, calle de dos Amigos. — Madrid (Espagne).
- MIRANDA BISTUER** (Julian), canónigo magistral de la catedral, canongia nueva, 18. — Segovia (Espagne).
- MISONNE** (Lucien), directeur-gérant des charbonnages du Hasard. — Tamines (Namur).

- ORTIZ (Juan-Miguel), Jefe superior de Administracion, Guanabacoa. — Habana (Cuba).
- ORTIZ (Il^{mo} Sr. Dr. D. Luis Felipe), obispo de Coria (Espagne).
- OSY DE WICHEM (B^{on}), longue rue de l'Hôpital. — Anvers.
- OTTO (Jean), 36, Marché-aux-Herbes. — Bruxelles.
- OUVERLEAUX (Félix), étudiant en droit, 112, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.
- PARDON (Gustave), ingénieur. — Maurage, par Bracquegnies (Hainaut).
- PASQUIER (Ern.), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse. — Louvain.
- DE PATIN DE LANGEMARCK (V^{te}), château de Langemarck (Flandre-Occidentale.)
- PATRONI (Monsign. Giuseppe), dott. in filosofia, in teologia ed in ambe le leggi, 47, piazza del Gesù. — Rome.
- PELLIGERO (Gonzalo), avocat, rédacteur en chef de la *Voz de Cuba*. — La Havane (Cuba).
- DE PEÑARANDA (Frédéric), 21, rue de la Science. — Bruxelles.
- PEPIN (R. P. Théophile), S. J., 14, rue du Juge-de-Paix. — Lyon (Rhône — France).
- PERRY, S. J. (R. P.), directeur de l'Observatoire de Stonyhurst, de la Société royale de Londres. — Stonyhurst near Blackburn (Angleterre).
- PETIT (Chanoine), rue de l'Arsenal. — Namur.
- PEYROT (Gérard), 33, rue Vieille-Bourse. — Anvers.
- PICHAULT (Stéphane), ingénieur, chef de section à la Société John Cockerill. — Tilleur (Liège).
- PIERROT (Abbé), vicaire à Rhinau (Basse-Alsace — Allemagne).
- DE PILLON DE S. PHILBERT (A.), 2, rue St-Thomas. — Douai (Nord — France).
- PINEDA (D^r Juan Miguel), Rosa, 50. — Cadix (Espagne).
- PIRARD (Abbé), vicaire général, 6, boulevard Léopold. — Namur.
- PIRET (Camille), ingénieur à Monceau-Fontaine. — Monceau-sur-Sambre (Hainaut).
- PISCÉ (Chanoine), rue des Bateaux. — Malines.
- PLANTÉ (Gaston), licencié-ès-sciences, 12, rue des Vosges. — Paris.
- POISOT (Maurice), avocat, 4, rue Buffon. — Dijon (Côte-d'Or — France).
- DE PONTIÈRE (Albert), propriétaire-agriculteur, 23, rue d'Archis. — Liège.

- ROLLIER (Émile), ingénieur, 57, rue Léopold. — Malines.
- ROMERO (Narciso), director del Colegio de 1^a y 2^a enseñanza de S. Francisco de Borja, calle del Desengaño, 27, pral. — Madrid (Espagne).
- DE ROUILLE (C^{te}), 44, avenue des Arts. — Bruxelles.
- ROUSSEL (Lucien), professeur à l'École forestière, 14, rue de la Ravinelle. — Nancy (Meurthe-et-Moselle — France).
- DE RUBEMPRÉ (P^{ce}), rue aux Laines. — Bruxelles; ou à Westerloo.
- SAEY (Henri), notaire. — Renaix.
- SAEY (Joseph), 18, avenue de la porte de Hal. — Bruxelles.
- SAEY (Abbé Pr.), vicaire à Saint-Étienne, 20, cour du Prince. — Gand.
- SALTERAIN (Pedro), ingénieur des mines. — La Havane (Cuba).
- DE SALVERT (V^{te}), professeur aux Facultés catholiques, 157, boulevard de la Liberté. — Lille (Nord — France).
- SANCHEZ, S. J. (R. P. Hilario), Colegio. — Carrion (Palencia — Espagne).
- DE SANTA CRUZ (Ivan Armada Hernandez de Cordova, M^{re}), 9, rua Nueva. — Santiago (Galice — Espagne).
- SANZ (Pelegrin), ingeniero civil. — Castellon de la Plana (Espagne).
- SANZ Y LOPEZ (Cesareo), profesor de matemáticas, calle del Colegio de Doncellas. — Toledo (Espagne).
- SCARSEZ DE LOCQUENEUILLE (Anatole), château de S^t-François — Farciennes (Hainaut); ou 153, chaussée de Vleurgat. — Ixelles.
- SCHMIDT (Henri), intendant de la maison de Croy. — Le Rœulx.
- SCHNEIDER, docteur en médecine, 26, rue Belliard. — Bruxelles.
- SCHOBENS, docteur en médecine, 49, longue rue Neuve. — Anvers.
- SCHOEMAKER (W.-J.), professeur à l'École moyenne. — Nimègue (Pays-Bas).
- DE SCHOUTHEETE DE TERVARENT (Ch^{er}), — Saint-Nicolas.
- SIMONIS (Alfred), sénateur. — Verviers.
- SIMONIS (Iwan), industriel. — Verviers.
- SIMONIS (Louis), industriel. — Verviers.
- SMEKENS (Théophile), président du tribunal de 1^{re} instance, 31, avenue Quentin Metsys. — Anvers.
- SMETS (Abbé Gérard), docteur en sciences naturelles, professeur de sciences au Collège S^t-Joseph. — Hasselt.
- SNYERS, docteur en médecine, 10, rue de l'Évêché. — Liège.
- DEL SOCORRO (José Maria Solano, M^{re}), professeur de géologie au Musée d'histoire naturelle, calle de Jacometrezo, 41-bajo. — Madrid (Espagne).

- TOUSSAINT (Charles)**, ingénieur, 54, rue Delocht. — Schaerbeek.
- TRAS, S. J. (R. P.)**, professeur au collège de la Paix. — Namur.
- DE TRAZEGNIES (M^{re})**. — Corroy-le-Château, par Gembloux.
- TROCH (Pierre)**, inspecteur provincial des écoles primaires. — Lierre.
- DE T'SERCLAES (M^r Charles)**, président du Collège belge. — Rome.
- DE T'SERCLAES (C^{ie} Jacques)**, capitaine au 1^{er} rég. d'artillerie, 37, rue Belliard. — Bruxelles.
- T'SERSTEVENS (Léon)**, 52, boulevard Bischoffsheim. — Bruxelles.
- TYKORT (Émile)**, ingénieur civil. — Perck, par Vilvorde.
- D'URSEL (C^{ie} Aymard)**, capitaine d'artillerie, 25, rue de la Science. — Bruxelles.
- D'URSEL (C^{ie} Charles)**, conseiller de légation, 22, rue du Luxembourg. — Bruxelles.
- DU VAL DE BEAULIEU (C^{ie})**, 53, avenue des Arts. — Bruxelles.
- DE LA VALLÉE POUSSIN (Charles)**, de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 190, rue de Namur. — Louvain.
- VAN AERTSELAER (Chanoine)**, directeur de l'Institut St-Louis, 121, rue du Marais. — Bruxelles.
- VAN BIERVLIET (Alb.)**, chargé de cours à l'Université catholique, 39, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
- VAN BIERVLIET (Joseph)**, professeur à l'Université, 1, rue Saint-Hubert. — Louvain.
- VANDEN BERG (Charles)**, notaire, place Saint-Paul. — Liège.
- VANDEN BRANDEN DE REETH (Mgr)**, Évêque d'Érythrée. — Malines.
- VANDEN BROECK (Arthur)**, 12, rue des Paroissiens. — Bruxelles.
- VANDEN GHEYN (R. P. Joseph) S. J.**, 11, rue des Récollets. — Louvain.
- VANDEN PEEREBOOM (E.)**, ingénieur, 13, rue d'Artois. — Liège.
- VANDEN PEEREBOOM (Jules)**, ministre des chemins de fer, postes et télégraphes. — Courtrai.
- VANDEN STEEN DE JEHAY (C^{ie} Hermann)**, capitaine d'état-major, 6, avenue Louise. — Bruxelles.
- VANDER BRUGGEN (B^{on} Maurice)**, rue du Gouvernement. — Gand.
- VAN DER ELST (Léon)**, avocat à la cour d'appel, 62, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
- VANDER HAEGHEN (William)**, avocat, 44, rue Berckmans. — Bruxelles.
- VANDER STRATEN-PONTHOZ (C^{ie} François)**, 13, rue de la Loi. — Bruxelles.
- VANDER VOORDT (Jules)**, ingénieur, 85, marché aux Chevaux. — Anvers.
- VAN DE WOESTYNE (Chanoine)**, professeur au Grand-Séminaire. — Bruges.

- VILAIN XIII** (V^{ic}), sénateur, 11, rue du Trône. — Bruxelles.
- VILLAFUERTE** (Eliodoro), presbitero, calle de las Delicias. — Santiago (Chili).
- DE VILLEGAS DE SAINT-PIERRE** (C^{ic}), 28, rue Marie de Bourgogne. — Bruxelles.
- DE VILLEGAS DE SAINT-PIERRE** (C^{ic} Ulric). — Ganshoren par Jette (Brabant), ou 1, rue de Spa. — Bruxelles.
- DE VILLERS-VERGAUWEN**, 12, marché au Lin. — Gand.
- VILLIÉ**, professeur aux Facultés catholiques, 78, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
- VIÑES** (R. P. Benito), director del Observatorio, colegio de Belen. — La Havane (Cuba).
- VISART** (C^{ic} Amédée), bourgmestre de Bruges.
- DE VOCHT** (Abbé), curé de Zeelst, par Eindhoven (Brabant-Septentrional. — Pays-Bas).
- DE VORGES** (E. Domet), 74, rue Miromesnil. — Paris.
- WALRAVENS** (Abbé Adelson), directeur du collège d'Enghien.
- WARD** (John), ingénieur civil, 73, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
- WARLOMONT** (René), docteur en médecine et en sciences naturelles, médecin de bataillon au 2^e chasseurs à cheval, 1, rue Longue. — Bruges.
- WASSEIGE** (Armand) banquier, 2^{bis}, rue Godefroid. — Namur.
- WAUTELET** (A), ingénieur à l'usine à gaz. — Roubaix (Nord — France).
- DE WAVRIN** (M^{ic}), 49, boulevard du Régent. — Bruxelles.
- DE WECK** (Abbé A.), missionnaire apostolique. — Fille-Dieu sous Romont (Canton de Fribourg — Suisse).
- WÉRY** (Vincent), président du tribunal de 1^{re} instance, 4, rue des Telliers. — Mons.
- WITTMANN** (Jules), docteur en médecine. — Malines.
- WITZ** (Aimé), professeur aux Facultés catholiques, 104, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
- WOLF**, membre de l'Institut, 93, rue des Feuillantines. — Paris.
- DE WOUTERS** (Chanoine). — Braine-le-Comte.
- DE WOUTERS** (Ch^{er} Lambert), Rotsclaer, par Wespelaer (Brabant).
- WOUTERS** (Abbé Louis), professeur de sciences naturelles au Collège Saint-Rombaut. — Malines.
- ZECH** (Guillaume), négociant. — Soignies.
-

MM. Goedseels.

Bⁿ G. Greindl.
de Grossouvre.
C^{te} François de Grunue.
Guyétand.
Haton de la Goupillière.
Charles Hermite.
Général Jacmart.
Jenner.
Jimeno.
Amiral de Jonquières.
Camille Jordan.
R. P. Joubert, S. J.
Lacor.
Lava.
R. P. Lafont, S. J.
Charles Lagasse.
Camille Lambert.
R. P. Dom Lamey.
Abbé Bruno Lefebvre.
C. Le Paige.
C^{te} Charles de Liedekerke.
de Lisieferme.
Léon de Locht.
Paul Mansion.
de Marsilly.
C^{te} de Maupeou.
Micha.
Général John Newton.

MM. Nisot.

J. Nyssens.
P. Nyssens.
d'Ocagne.
Pasquier.
R. P. Pepin, S. J.
R. P. Perry, S. J.
Chanoine Piscé.
V^{te} de Salvert.
Sanz y Lopez.
P. Sanz.
C^{te} de Sparre.
Stoffaes.
Suttor.
Teixeira.
Fernand Thiébaud.
R. P. Thirion, S. J.
François Timmermans.
C^{te} Jacques de T'Serclaes.
C^{te} Aymard d'Ursel.
Albert Van Biervliet.
E. Vandenpeereboom.
Abbé Van Zeebroeck.
Varquez Illá.
Vicaire.
Villafuerte.
Villié.
John Ward.
Aimé Witz.

2^e Section.

Physique. — Chimie. — Métallurgie. — Météorologie et Physique du Globe.

MM. Alfageme.

Aschman.
C^{te} Ch. d'Aspremont-Lynden.
A. Béchamp.
Charles Blas.
Alfred Blondel.
Bonamis.
Auguste Bonnevie.
Branly.
Alfred Brèmen.
Bruylants.
Antonio Casares.
Chautard.
R. P. Choné, S. J.
Pierre De Heen.
Abbé J. Delorge.
Herman De Preter.
A. Devivier.
François Dewalque.
Dincq-Jordan.
André Dumont.
R. P. Dumont, S. J.
Dutordoir.
Felib y Perez.
B^{ns} A. de Fierlant.
R. P. François, S. J.
L. de Gerando.
Gérard.
Gillet.
R. P. Granero, S. J.
Gravez.
Grisar.
Hector Henry.

MM. Louis Henry.

Kennis.
René Kerviler.
Jules Lagasse
Lambiotte.
Lemoine.
Malisoux.
Malou.
U. Massalski.
Mertens.
Chanoine Michiels.
Lucien Misonne.
Joseph Mullenders.
Oldenhove.
R. P. O'Malley, S. J.
Louis Nève.
Ouverleaux.
Pichault
Abbé Pirard.
G. Planté.
Abbé Raclot.
Abbé Ravain.
R. P. de Regnon, S. J.
Salterain.
de Souza Gonzalvès
Springael.
Auguste Theunis.
R. P. Tras, S. J.
Tykort.
Jules Vander Voorst.
R. P. Van Tricht, S. J.
R. P. Viñes, S. J.

3^e Section.

Géologie, Minéralogie. — Botanique. — Zoologie. — Paléontologie. — Anthropologie, Ethnographie, Science du langage. — Géographie.

Mgr Abbeleos.	MM. Max Dugniolle.
MM. d'Acy.	R. P. Étienne, O. P.
Fr. Alexis.	R. P. Fita, S. J.
Almera.	Flahault.
Arcelin.	Docteur Foerster.
C^{te} Alb. d'Auxy de Launois.	Fontaine.
Ch. Baguet.	Abbé de Foville.
Baillon.	Grand'Eury.
Bapst.	Grinda.
Abbé Bardin.	Abbé Hamard.
Abbé Bauwens.	C^{te} d'Hemricourt de Grunne.
Ern. Bayet.	Abbé Joseph Hervier.
Bernardin	R. P. Heude, S. J.
M^{is} de la Boëssière-Thiennes.	R. P. Kirsch.
Abbé Boulay.	Charles de Kirwan
Abbé Bourgeat	Godefroid Kürth.
C^{te} L. de Briey.	Abbé Laleu.
Buisseret.	A. de Lapparent.
Abbé Campelo.	Lebesconte.
Abbé Carnoy.	Abbé Ferdinand Lefebvre.
Firmino Casares.	C^{te} G. de Lichtervelde.
Chanoine Colson.	C^{te} Adolphe de Limburg Stirum.
Dassonville.	Abbé Lonneux.
Abbé De Brouwer.	Édouard Martens.
Docteur Louis Delgeur.	Martinez y Saez.
Chanoine Adolphe Delvigne.	Abbé Mélinge.
Max Deprez.	R. P. Mir, S. J.
Abbé Descamps.	Mello.
Abbé Detierre.	Abbé Monchamp.
Gustave Dewalque.	M^{is} de Nadaillac.
Dollo.	Abbé Noël.
Abbé Ducrost.	Oomen.

MM. Michaux.

Miot.
Møeller.
Obet.
Proost.
Reynaert.
Schneider.
Schobbens.
Snyers.

MM. Struelens.

Van Dorpe.
Van Goidsnoven.
Van Keerberghen.
Venneman.
Verriest.
Verstraeten.
R. Warlomont.
Wittmann.

5^e Section.

*Agronomie. — Économie sociale, Statistique. — Sciences commerciales.
Économie industrielle.*

MM. Auguste Beckers.

Adolphe Berleur.
Victor Bonnevie.
Armand Brifaut.
François de Cannart d'Hamale.
Jules Cartuyvels.
Davignon.
P^{er} Gustave de Croy.
P^{er} Juste de Croy.
Herman De Baets.
Tony De Bruyn.
Ernest De Hults.
Camille De Jaer.
De Lantsheere.
De Marbaix.
É. Descamps.
Ferdinand Dohet.
Focillon.
Paul de Gerlache.
Grandmont.
B^{on} de Haulleville.

MM. Victor Jacobs.

Claudio Jannet.
V^{er} Eugène de Kerckhove.
Paul Lefebvre.
Legrand-Benoit.
C^{te} Ferdinand Le Grelle.
C^{te} Édouard de Liedekerke.
Émile Limpens.
Henri Mayer.
Léon de Monge.
Ch^{er} de Moreau d'Andoy.
Otto.
Pelligero.
A. de Ponthière.
De Posch.
P^{er} de Rubempré.
Henri Saey.
Henri Schmidt.
Théophile Smekens.
Émile Stinghamber.
Charles Thiebauld.

MM. Léon t'Serstevens.

C^e Fr. vander Straten-Ponthoz.

Gustave Van Zuyleu-Orban.

V^e Vilain XIII.

C^e de Villegas de Saint-Pierre.

MM. Visart.

Abbé Adelson Walravens

Armand Wasseige.

Vincent Wéry.

On trouve, à la page 22 du *Traité théorique et pratique d'Armengaud aîné* (2^e édition), un tableau réunissant, en abrégé, les divers cas et les valeurs du coefficient qui y correspondent. Les orifices y sont supposés disposés de telle façon que la contre-action de la veine fluide soit complète.

Dans le même traité d'Armengaud se trouvent des tables donnant, pour diverses hauteurs d'orifices et diverses charges, le débit par une vannée de 1 mètre de largeur disposée pour que la contraction complète puisse s'y produire. Le coefficient de la dépense compris dans les cubes renseignés par ces tables est généralement égal à 0,602. Il est facile de les étendre. Ce sont ces tables, convenablement élargies, et c'est par conséquent le plus souvent ce coefficient 0,602, qui servent à calculer les débits par vannes au moulin d'Aa.

Il est vrai que les débits calculés de cette façon devraient, d'après Armengaud, être multipliés par 1,125, 1,072 et 1,035 respectivement dans les cas où la contraction se produirait seulement par un, deux et trois côtés.

Dans la pratique du service auquel ressortissent les expériences dont il s'agit, ces corrections ont été jugées trop faibles pour en tenir compte.

M. Lagasse résume les dispositions nouvelles qu'il a prises pour approprier à la situation des lieux la méthode employée par le capitaine Cunningham sur le canal du Gange, à Roorkee (Indes anglaises). Elles ont été publiées dès 1883 (*).

L'emploi de bâtons lestés comme flotteurs comporte une seule hypothèse, qui a été vérifiée par de très nombreuses expériences de Cunningham, sur le canal du Gange : la vitesse de ces bâtons, ayant une longueur égale aux $\frac{94}{100}$ de la profondeur d'eau au droit de laquelle ils sont lancés, est sensiblement égale à la vitesse moyenne suivant la verticale.

Le calcul du débit q , à travers une section du cours d'eau, peut s'opérer de deux façons. Étant données les vitesses moyennes u et u' suivant deux verticales ayant respectivement les hauteurs h

(*) *Revue des questions scientifiques*, juillet 1883.

développement aura pour expression une fonction dans laquelle le débit calculé par voie directe entrera au numérateur et le coefficient invariable 0,625, au dénominateur.

Lundi, 3 mai 1886. — Le R. P. Carbonnelle présente, au nom de M. Maurice d'Ocagne, un mémoire où l'auteur traite des propriétés de certaines suites de fractions irréductibles (voir 2^e partie, pp. 90-108); M. Mansion est nommé commissaire. M. Maurice d'Ocagne adresse également à la section une note sur les sous-invariants des formes binaires; sont désignés pour prendre connaissance de ce mémoire MM. Carnoy et Mansion (voir 2^e partie, pp. 75-78).

M. Lagasse donne ensuite quelques renseignements complémentaires au sujet de son travail sur le jaugeage des cours d'eau.

M. Lagasse fait observer que son savant collègue, M. le professeur Pasquier, lui avait signalé, dans la séance du 28 janvier dernier, l'ouvrage d'hydraulique de feu M. l'inspecteur général Graëff, comme renfermant des recherches expérimentales sur les coefficients de la dépense.

Après avoir complété la communication, qu'il a faite précédemment, des tableaux de comparaison de jaugeage par pertuis et par voie directe dressés en 1884 et 1885 pour la porte d'Aa, sur la Senne et sous Anderlecht, près de Bruxelles, l'auteur résume les remarquables travaux de Graëff sur le coefficient de la dépense que cet ingénieur appelle *coefficient du débit*.

Graëff, opérant sur une vanne d'un robinet-vanne dont est muni un tuyau de conduite aboutissant au réservoir du Furens, a pu vérifier la constance du coefficient du débit pour de petites levées, variant de 0^m,011 à 0^m,0385, et de hautes charges allant jusqu'à 40 mètres.

Les expériences auxquelles s'est livré l'auteur depuis plus de trois ans s'appliquent à des dispositifs usités dans un service ordinaire d'ingénieur. Ces expériences ne rentrent donc pas dans la catégorie de celles qui ont été opérées par Poncelet, Lesbros, Graëff, à l'aide de dispositifs spéciaux.

Mais la partie pratique ⁽¹⁾ du grand ouvrage de Graëff, publiée en 1883, confirme pleinement les doutes que M. Lagasse a soulevés, dès mai-juin de cette même année 1883, au sujet de l'emploi de coefficients de dépense invariables ou à peu près; elle prouve ainsi combien la section a eu raison d'appuyer, de son autorité, la mise en pratique des idées qui ont été exposées plus d'une fois devant elle par l'auteur des jaugeages comparatifs de la Senne, à Aa, sous Anderlecht, près de Bruxelles.

M. Pasquier expose brièvement les deux méthodes de Gauss et d'Oppolzer pour la détermination des orbites des planètes. M. Pasquier insiste sur les caractères distinctifs de chacune de ces méthodes et fait ressortir par cette analyse la supériorité du procédé Oppolzer.

Mardi, 4 mai 1886. — M. Gilbert présente un mémoire du R. P. Delsaulx sur l'hypothèse de la tension superficielle dans la théorie de la capillarité. Le R. P. Delsaulx démontre dans ce travail que la théorie de Laplace, laquelle ne considère que des actions mécaniques entre points à distance, suffit à rendre compte de tous les phénomènes capillaires; de plus, que cette théorie amène à considérer des forces identiques à celles qu'introduit l'hypothèse de la tension superficielle.

La section, se ralliant à l'avis de M. Gilbert, qui a examiné le travail du R. P. Delsaulx, propose d'insérer ce mémoire aux Annales de la Société (voir 2^e partie, pp. 43-74).

M. Gilbert présente un mémoire sur la forme du reste dans la série de Binet. La section renvoie ce travail à l'examen de M. De Tilly.

Plusieurs membres de la section sont amenés ensuite à discuter sur divers points de la théorie des infiniment petits, ainsi que sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres.

Enfin M. Gilbert fait connaître aux membres de la section le

⁽¹⁾ *Traité d'hydraulique, précédé d'une introduction sur les principes généraux de la mécanique*, par Graëff, ancien vice-président du conseil général des ponts et chaussées, lauréat de l'Institut, t. II, p. 49.

résultat de ses recherches sur les suraccélération des points d'un solide et sur la suraccélération angulaire.

Il est procédé ensuite au dépouillement du scrutin pour le renouvellement du bureau, qui se trouve ainsi constitué :

Président, MM. Général JACMART.
Vice-présidents, WITZ et GOEDSEELS.
Secrétaire, VAN BIERVLIET.

Rapport de M. J. Carney

sur une Note de M. Maurice d'Ocagne, intitulée :
Sur les sous-invariants des formes binaires.

Nous désignerons par a une fonction quelconque d'une variable indépendante; par a' , a'' , a''' , etc. ses dérivées successives; en employant la lettre D pour indiquer la dérivée, on sait que

$$D(l.a) = \frac{a'}{a}.$$

On en déduit pour les dérivées suivantes :

$$D^2(l.a) = \frac{aa'' - a'^2}{a^2},$$

$$D^3(l.a) = \frac{a^2a''' - 3aa'a'' + 2a'^3}{a^3},$$

etc.

Si, dans toutes ces dérivées, depuis la deuxième jusqu'à la $n^{\text{ième}}$, on remplace les lettres a , a' , a'' ... respectivement par les coefficients a_0 , a_1 , a_2 ... de la forme binaire

$$a_0x^n + na_1x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_ny^n,$$

chaque numérateur devient le coefficient du premier terme d'un covariant de cette dernière. Telle est la propriété que renferme la note de M. d'Ocagne.

Soit φ_p la fonction des coefficients $a_0, a_1, \text{etc.}$, tirée de la $p^{\text{ème}}$ dérivée; l'auteur regarde $a_0, a_1, \text{etc.}$, comme étant des fonctions d'une variable fictive ζ telles que :

$$\frac{da_0}{d\zeta} = a_1, \quad \frac{da_1}{d\zeta} = a_2, \quad \text{etc.}$$

Par suite, on a :

$$\varphi_p = a_0^{\zeta} \frac{d^p l. a_0}{d\zeta^p},$$

En différenciant cette équation, on trouve la relation

$$\varphi_{p+1} = a_0 \varphi_p' - p a_1 \varphi_p,$$

Au moyen de cette égalité on arrive sans peine à démontrer que φ_p satisfait à l'équation caractéristique d'un sous-invariant.

Le théorème de M. d'Ocagne est très curieux et mérite l'impression dans les Annales de la Société.

Sur le reste de la série de Binet, par Ph. GILBERT,
professeur à l'Université de Louvain.

Rapport de M. De Tilly

Dans le tome XLI des *Mémoires* de l'Académie royale de Belgique, M. Gilbert a publié des recherches étendues et importantes sur le développement de la fonction Γ et sur certaines intégrales définies qui en dépendent.

On y trouve, entre autres, une démonstration de la série de Binet :

$$\begin{aligned} \alpha(\mu) = & \frac{1}{\mu_0} \int_0^1 x \left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \frac{1}{2\mu(\mu+1)} \int_0^1 x(1-x) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \dots \\ & + \frac{1}{n\mu(\mu+1) \dots (\mu+n-1)} \int_0^1 x(1-x) \dots (n-1-x) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx + R_n, \end{aligned}$$

avec :

$$R_n = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)\dots(\mu+k+n)} \int_0^1 \frac{x(1-x)\dots(n-x)}{\mu+k+x} \left(x - \frac{1}{2}\right) dx.$$

$\varpi(\mu)$ est lié à l'intégrale eulérienne de seconde espèce $\Gamma(\mu)$ par la formule

$$l \cdot \Gamma(\mu) = \frac{1}{2} l \cdot 2\pi + \left(\mu - \frac{1}{2}\right) l \cdot \mu - \mu + \varpi(\mu).$$

Pour se rendre compte de l'erreur commise dans le calcul de $\varpi(\mu)$ en s'arrêtant au n° terme de la série, l'auteur a transformé le reste R_n et démontré que sa valeur absolue est inférieure à

$$\frac{1}{8\mu^2} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)\dots(\mu+n+1)} \dots \quad (A)$$

puis (par une transformation facile) que cette valeur est inférieure, à plus forte raison, à

$$\frac{1}{8\mu^2} \frac{1}{1 + \mu C + \mu l \cdot (n-1)}, \dots \dots \dots (B)$$

où $C = 0,577\dots$ (constante d'Euler ou de Mascheroni ?)

Dans le travail actuel, il démontre que la valeur absolue de R_n est même inférieure au huitième de ces limites, de manière que l'erreur commise en s'arrêtant au n° terme est inférieure aux deux valeurs suivantes :

$$\frac{1}{64\mu^2} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)\dots(\mu+n-1)} \dots \quad (A')$$

$$\frac{1}{64\mu^2} \frac{1}{1 + \mu C + \mu l \cdot (n-1)} \dots \dots \dots (B')$$

Les formules (B) et (B') démontrent la convergence de la série de Binet, quelle que soit la valeur (positive) de μ . En outre, elles seront plus commodes que (A) et (A'), pour déterminer la limite de l'erreur commise, si n est grand.

Si, au contraire, n est petit, (A) et (A') n'ont pas besoin d'être transformées.

Il va sans dire que les formules (A') et (B') seront toujours préférées, respectivement, à (A) et (B).

M. Gilbert indique d'autres valeurs limites de R_n , qui pourront être plus avantageuses dans des cas particuliers. Je citerai celles-ci :

$$\frac{1}{6^{\frac{1}{2}}(\mu - 1)(n + 1)} \frac{1}{1 + (\mu - 1)C + (\mu - 1)l \cdot n} \dots \quad (C)$$

$$\frac{\Gamma(\mu)}{6^{\frac{1}{2}} \mu} \frac{1}{n^\mu} e^{\frac{1}{2n}(\mu + \frac{1}{2})} \dots \dots \dots \quad (D)$$

(D) est vraie pour toutes les valeurs de μ et n ; (C) suppose $\mu > 1$; toutes deux seront avantageuses quand μ et $\frac{n}{\mu}$ seront assez grands.

Si μ est petit, il faut nécessairement recourir à (A') ou à (B') et de préférence à (B'), puisque l'on sera probablement obligé, pour obtenir une approximation convenable, de prendre n assez grand.

M. Gilbert dit à ce sujet: « Pour des valeurs de μ comprises entre zéro et l'unité, il nous paraît difficile d'obtenir une limite plus resserrée du *reste*, du moins en suivant cette marche ».

Je me rallie à cette appréciation et je ne vois pas quelle marche on pourrait suivre pour trouver une limite plus resserrée, du moment que l'on veut employer directement la série de Binet dans le calcul de $\pi(\mu)$ ou de $\Gamma(\mu)$, avec $\mu < 1$. Il est bien vrai que dans ce cas la série est désavantageuse, mais je dois rester dans les termes où le problème a été posé par M. Gilbert.

En sortant de ces termes, et en élargissant la question pour mon compte personnel, j'ai été amené à des réflexions, peut-être utiles, sur la théorie et le calcul des intégrales eulériennes; mais comme le temps me manque pour les développer, et qu'elles ne sauraient, en aucun cas, infirmer les résultats de M. Gilbert, je me borne, pour le moment, à proposer à la section de voter l'impression de la note, et d'adresser des remerciements à notre éminent collègue pour sa très intéressante communication. (Voir 2^e partie, pp. 191-200.)

Troisième section.

Jeudi, 29 octobre 1885. — M. l'abbé Smets, docteur en sciences naturelles, présente un travail sur trois testudinides de l'Afrique australe.

Cette communication provoque un échange d'observations entre l'auteur et M. Dollo.

La section propose l'impression aux *Annales* des notes de M. l'abbé Smets (voir 2^e partie, pp. 1-10).

M. Dollo montre une grenouille monstrueuse polymèle et fait l'histoire de ce cas tératologique chez les Amphibiens.

M. Dollo traite ensuite différents sujets d'anatomie comparée et de paléontologie; il signale notamment *la présence d'un anarcual ossifié dans l'atlas d'un jeune éléphant d'Afrique.*

Puis il démontre *l'homodynamie des hypapophyses vertébrales ou intervertébrales avec les os chevrons vertébraux ou intervertébraux.*

La section demande qu'un résumé des notices de M. Dollo soit inséré aux *Annales*.

M. Buisseret, docteur en sciences naturelles, signale la présence d'un pore génital supplémentaire sur un individu d'*Encope emarginata*.

La section propose l'insertion de cette note aux *Annales*.

Un pore génital supplémentaire sur un individu d'Encope emarginata.

En examinant les oursins actuels du Musée d'histoire naturelle de Belgique, j'ai remarqué une anomalie sur un individu d'*Encope emarginata*, espèce appartenant à l'ordre des Clypéastroïdes: un des espaces interambulacraires possède deux pores génitaux au lieu d'un seul (fig. 1 et 2.)

Cette anomalie mérite peut-être d'être signalée, car elle con-

cerne un appareil de la plus haute importance, l'appareil apical, qui est toujours et partout constitué très nettement.

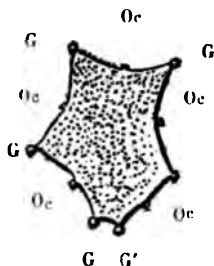


Fig. 1. — Appareil apical d'un *Encope emarginata*.

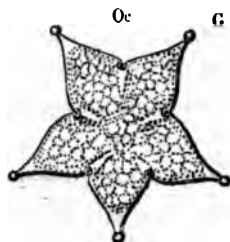


Fig. 2. — *Encope Valenciennesi*, Ag. Appareil apical régulier.

Oc, Pore ocellaire. — G, Pore génital.

G', G', Deux pores génitaux, au lieu d'un seul, dans l'un des espaces interambulacraires.

On sait qu'il se compose de trois parties constantes : 1° Les pièces ocellaires, toujours au nombre de cinq, situées au sommet de chaque ambulacre; 2° les plaques génitales qui terminent les espaces interambulacraires à leur côté apical; leur nombre habituel est aussi cinq, mais il est souvent réduit à quatre; 3° enfin, le disque central.

Or, dans ce système si bien défini, on n'a jamais signalé, à ma connaissance du moins, de malformation ressemblant à celle qui m'a frappé.

Ainsi S. Loven, qui a étudié si minutieusement, genre par genre, toutes les parties essentielles du test des Échinoidées (¹), ne parle jamais d'un seul pore génital dans chaque espace interambulacraire.

Son silence me paraît d'autant plus significatif qu'il se demande, au contraire, s'il n'y a jamais deux pores sur chacune des plaquettes ocellaires, ainsi qu'on en voit d'ailleurs chez plusieurs oursins paléozoïques tels que Palæchinus et Melonites.

Il note, à ce propos, que plusieurs genres présentent « une division de l'ouverture externe (du pore ocellaire), devenue trans-

(¹) *Études sur les Échinoidées*, 1875.

versale, en deux parties séparées par une cloison mitoyenne, faiblement indiquée dans le pore très petit de la *Diadema*, plus prononcée chez le *Temnopleurus*. Mais c'est dans le genre remarquable des *Echinocidaris* que l'on rencontre une disposition plus compliquée et en quelque sorte comparable à celle des mêmes parties chez les types paléozoïques » (1).

Mais, à aucune place, il ne soulève une question semblable à propos des pores génitaux.

On ne trouve pas davantage la moindre allusion à l'existence de deux ouvertures génitales dans un même espace interambulacraire, ni dans les traités de Zittel ou de Claus, ni dans la monumentale *Revision of the Echini* d'Alexandre Agassiz.

Quoi qu'il en soit des pores génitaux chez les Oursins actuels, on peut rappeler, sans vouloir tirer de ce rapprochement une signification quelconque, que les plaques génitales des Echinides paléozoïques possèdent normalement trois à cinq pores (fig. 3.)

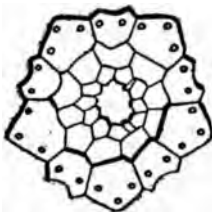


Fig. 3. — *Palaechinus elegans*, M^e Coy, du calcaire carbonifère. Appareil apical dont toutes les pièces, tant oculaires que génitales, possèdent plus d'un pore.

MM. Dollo, Proost, Smets et Van Segvelt discutent l'hypothèse de l'évolution. M. l'abbé Smets croit qu'il est possible de renverser la phylogénie de n'importe quel groupe, celle du cheval par exemple, telle qu'on l'établit parmi les darwinistes; on pourrait démontrer que la forme regardée comme la plus jeune dans les essais tentés jusqu'aujourd'hui peut être interprétée avec autant de raison comme la forme ancestrale du groupe, et cela en appliquant la méthode et les principes des naturalistes qui se sont livrés à ces essais.

Le R. P. Van den Gheyn expose l'origine des langues polyné-

(1) LOVEN, *loco citato*, p. 66.

siennes ; ce travail donne lieu à un échange d'observations entre MM. Delgeur, Dollo, Proost, Van den Gheyn et Van Segvelt.

(Voir les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. IX, 1884-1885, pp. 286 et suivantes.)

Jeudi, 28 janvier 1886. — M. l'abbé Smets décrit une tortue nouvelle du crétacé de Maestricht. A ce propos MM. de la Vallée Poussin et A. de Limburg-Stirum posent différentes questions à l'auteur.

M. l'abbé Smets fait ensuite une communication sur les tortues rupéliennes.

La section propose l'impression aux *Annales* des deux mémoires de M. l'abbé Smets (voir 2^e partie, pp. 11-25).

M. de la Vallée Poussin décrit un granite à deux micas :

Sur un galet de granite trouvé à Wépion.

Nous présentons à l'examen de nos confrères une portion d'un galet de granite, de 12 à 15 centimètres de longueur, lequel a été trouvé par un de nos amis à 6 kilomètres au sud de Namur, au Pairy-Bonnier (Wépion). Ce galet était dans un jardin en terrasse, à une centaine de mètres environ de la rive gauche de la Meuse, et on trouve à peu de distance du même point beaucoup d'autres galets faisant partie du diluvium du pays.

L'inspection des lieux rend éminemment probable que le fragment de granite appartient à la même formation. D'après cela, le granite serait au nombre des éléments lithologiques qui se rencontrent parmi les conglomérats amenés du sud dans la vallée de la Meuse à l'époque quaternaire.

Dans ces dernières années, des débris épars de roches cristallines étrangères aux terrains anciens connus dans le pays et le nord de la France ont été signalés sur beaucoup de points des alluvions anciennes des Flandres, de la Campine et même dans le Brabant. Plusieurs géologues, en tête desquels on doit nommer M. Delvaux, ont fait à cet égard des découvertes intéressantes, dont on peut voir l'exposé dans les *Annales de la Société géolo-*

gique de Belgique (1), mais on n'avait pas indiqué jusqu'à présent de débris de ce genre dans la région sud-est du pays.

M. Delvaux et les autres géologues qui se sont appliqués à ces recherches, inclinent à reconnaître à ces fragments cristallins sporadiques une origine septentrionale, et à les rattacher au dépôt erratique de la Scandinavie. Les découvertes de M. Delvaux ont prouvé qu'il en est ainsi pour certains spécimens ; car il a trouvé, à proximité de la frontière septentrionale de la province d'Anvers, un petit bloc de *Rhombenporphyr* dont l'authenticité est incontestable. Or le *Rhombenporphyr* n'est connu *in situ* que dans le fiord de Christiana. D'après cela, le dépôt erratique du Nord, que Dumont arrêta à la rive gauche du Rhin et au Zuiderzee, s'est étendu beaucoup plus loin au sud-ouest.

La plupart des roches granitiques reconnues dans le terrain quaternaire de Belgique ne possèdent pas des caractères lithologiques tels qu'on puisse assigner leur provenance avec certitude, et il est probable que beaucoup d'entre elles ont une tout autre patrie que la Scandinavie. En effet, dans ces derniers temps, M. Éd. Van Beneden a dragué, au large d'Ostende, un grand nombre de débris erratiques disséminés sur le fond de la mer du Nord. Ils ont été soumis à l'examen de M. l'abbé Renard(2). D'après ce savant lithologiste, une partie des fragments dragués appartiennent incontestablement aux assises jurassiques et infra-crétacées des falaises de Boulogne.

Les roches cristallines qui leur sont associées comprennent des spécimens qu'on ne saurait distinguer des granites à grains moyens, des granites porphyroïdes et des cornéennes métamorphiques, qu'on rencontre en Normandie, en Bretagne, aux îles Jersey et Guernesey, et notamment près de Cherbourg. Il en résulte que beaucoup de roches transportées par les glaces flottantes à l'époque quaternaire ont pu arriver du sud-ouest, et échouer sur les plaines et collines des Flandres, quand elles étaient abaissées au-dessous du niveau de la mer.

(1) Tomes XI, XII et XIII.

(2) Conf. *Bull. de l'Acad. royale de Belgique*, 1883, n° 41, p. 458, et 1886, n° 4, p. 289.

La présence de galets granitiques parmi les débris charriés de l'ancienne Meuse nous indique la région française du sud-est comme une troisième direction de transport possible pour les roches cristallines erratiques trouvées sur le sol belge. La Meuse et ses affluents ne traversent aujourd'hui qu'une seule région renfermant des roches granitiques : c'est l'Ardenne française, dont le terrain cambrien est accompagné, comme on sait, de microgranites porphyriques, de porphyroïdes, et de diorites dans le district de Deville et de Revin. — Mais je ne connais pas dans cette région de roche éruptive identique au galet de Wépion.

En effet, cet échantillon est formé par une roche d'un blanc grisâtre, parsemée de petites taches plus foncées et d'un noir bronzé. Elle est à grains fins ; la texture en est granitique. On y reconnaît à la loupe un agrégat cristallin de feldspath, où sont enchâssés de petits grains de quartz grisâtre, des lamelles de mica noir et des paillettes de mica blanc. La roche est massive et on n'y remarque pas d'alignement des éléments constitutifs.

En plaque mince au microscope, on observe des plages de cristaux d'orthose, en grande partie kaolinisés, ayant perdu ou peu s'en faut leur transparence. On y retrouve néanmoins, malgré cet état d'altération, la macle de Carlsbad et aussi des traces de micropertithe. Outre le mica noir, ces orthoses enveloppent de petits cristaux de plagioclase maclés, que les directions d'extinction rapprochent de l'oligoclase. D'autres plagioclases occupent une partie de l'espace qui sépare les orthoses. On y observe les macles de l'albite et du péricline. Leur contour est souvent plus nettement cristallin que celui de l'orthose, qui semble être postérieur et avoir fait à certains égards l'office de remplissage.

Les plagioclases, un peu moins altérés que l'orthose, sont néanmoins parsemés d'innombrables paillettes de mica secondaire.

Le quartz assez abondant offre dans cette roche des plages médiocrement étendues, mais ces plages sont formées généralement d'agrégats qui résultent certainement de la rupture en plusieurs fragments d'une masse homogène primitive. Cela ressort

de la grande proximité des directions d'extinction qu'on observe très souvent entre deux fragments voisins, ainsi que de la prolongation du même alignement d'inclusions d'un fragment dans l'autre. Mais le quartz se présente aussi dans la roche en grains à contours complexes, indépendants, mais engrenés les uns dans les autres : en un mot, on retrouve ici plus ou moins l'aspect du quartz granulitique. C'est pourquoi ce granite se rapproche des granulites. Outre des inclusions liquides avec bulles parfois mobiles, on rencontre souvent à l'intérieur du quartz le mica noir en lamelles ou en cristaux plus ou moins déformés, d'aspect assez semblable au mica noir, extérieur au quartz, dont il va être question. L'apatite en petites aiguilles a été enveloppée également par le quartz.

Le mica noir extérieur à cette dernière substance se rencontre en lamelles droites ou ployées, parfois brisées et généralement déchiquetées. Le polychroïsme y est intense, les sections donnant des nuances d'un brun jaunâtre très clair suivant α , et des nuances d'un brun foncé et même le noir suivant le plan $\beta\gamma$. On y constate fréquemment des noyaux beaucoup plus foncés que l'entourage et qui sont des points d'absorption *maximum*.

Dans le nombre, il est des plages de mica noir formées d'un certain nombre de bandes juxtaposées suivant le plan de clivage basique et qui sont très diversement colorées quand on les observe entre les nicols. Il faut attribuer à des groupements par hémitropie ces apparences, qu'on a assez rarement l'occasion de constater dans les roches éruptives. Les micas noirs du fragment de Wépion se montrent souvent affectés d'une altération qui, sans modifier leur forme, fait disparaître en grande partie leur forte coloration. Ils deviennent d'un jaunâtre très pâle et perdent leur dichroscopisme. Cette altération est généralement accompagnée d'un décollement partiel des plans de clivage, qui détermine à l'intérieur du mica un grand nombre de petites lignes parallèles qu'on pourrait prendre pour les prismes allongés de quelque microlithe, si aux forts grossissements ils ne présentaient les caractères d'une fente allongée. On remarque parfois la macle

généculée du rutile, qui se développe souvent à l'intérieur des biotites (1). Dans le cas présent, ces cristaux de rutile, n'apparaissant que dans les plages très pâlies de mica noir, doivent être considérés comme un produit secondaire formé aux dépens de ce dernier minéral. Il arrive aussi que le mica noir passe à des agrégats verdâtres faiblement dichroscopiques, polarisant en bleu-noirâtre très foncé entre les nicols. C'est la transformation en chlorite, qui est une des plus fréquentes.

Enfin on voit apparaître dans les préparations un minéral lamellaire ou fibreux, plus ou moins contourné, incolore à la lumière ordinaire et présentant les couleurs jaune et rouge très vives à la lumière polarisée. Ces caractères décèlent le mica blanc. Quelques grains polyédriques tout à fait opaques et de couleur noire doivent être de la magnétite.

D'après l'ensemble de ces caractères, la roche recueillie à Wépion appartient à un granite voisin du type granulitique, espèce lithologique que nous n'avons pas encore vue dans les Ardennes. Mais elle peut s'y trouver, car notre connaissance des roches cristallines de cette région est encore très imparfaite. Il est très probable qu'une partie des arkoses dites de Fepin dérivent de la désagrégation d'un granite qui se rapprochait des pegmatites ou des aplites (2); et on connaît la parenté des pegmatites et des granulites. Nous n'hésiterions pas à regarder l'Ardenne française comme patrie originaire du galet de Wépion, si nous ne savions que l'on trouve parfois en amont de Charleville dans le gravier de la Meuse des cailloux granitiques ou porphyriques provenant des Vosges (3), et si l'on n'avait déjà constaté l'extension du diluvium vosgien dans le bassin de la Meuse par l'intermédiaire du bassin de la Moselle.

(1) ROSENBUSCH, *Mikroskopische Physiographie*, 2^e Aufl., t. I, p. 484.

(2) RENARD, *Notice sur la composition minéralogique de l'arkose d'Haybes*. (BULL. DU MUSÉE ROYAL D'HIST. NAT., t. III, pp. 127-128.)

(3) CONF. SAUVAGE et BUVIGNIER, *Statistique minéralogique et géologique du département des Ardennes*, p. 422.

Lundi, 5 mai 1886. — Le R. P. Van den Gheyn lit un travail du R. P. Étienne sur les restes de la langue koushite conservés dans le sanscrit et dans l'hindoustani.

Après quelques observations de MM. de Vorges, Dollo et du R. P. Van den Gheyn, celui-ci est désigné pour examiner le mémoire du R. P. Étienne (voir 2^e partie, pp. 201-214).

M. Dollo parle de *Sphargis rupeliensis*.

La section demande qu'un résumé de sa note soit inséré aux *Annales*.

M. Dollo décrit ensuite un os particulier qu'il a trouvé dans la mandibule de l'Iguanodon ; il propose de le considérer comme un basi-mandibulaire ; cet os serait homodynamne du basi-hyoïde.

La section propose l'impression aux *Annales* de la communication de M. Dollo.

M. Dollo fait ensuite l'histoire :

- a) *Du Post-orbitaire des Lacertiliens,*
- b) *De l'os épitrique des Ichtyosaures et des Caméléons, et de la Columella cranii de ces derniers.*

La section propose l'insertion aux *Annales* de ces travaux de M. Dollo.

Mardi, 4 mai 1886. — M. de Lapparent expose son opinion sur l'origine du limon ; il signale ce point à l'attention des géologues belges.

La section propose l'insertion aux *Annales* de la note de M. de Lapparent.

Le R. P. Van den Gheyn expose ensuite ce qu'on connaît aujourd'hui du peuple des Hittites ; il signale, en terminant, l'importance que les recherches récentes qui concernent ce peuple possèdent au point de vue de la critique biblique. (Voir la *Revue des questions scientifiques*, 20 juillet 1886 et 20 avril 1887.)

M. Dollo décrit l'appareil du vol chez Ptéranodon ; il expose la signification de la crête occipitale osseuse de ce reptile.

M. l'abbé Bourgeat, professeur aux Facultés catholiques de Lille, envoie un mémoire sur les accidents orographiques du Jura (voir 2^e partie, pp. 215-250).

M. de Lapparent est désigné pour l'examiner.

La section procède à l'élection du bureau pour l'année 1886-1887.

Sont élus :

Président, MM. DE LAPPARENT.

Vice-Présidents, le D^r DELGEUR et le R. P. VAN DEN GHEYN.

Secrétaire, BUISSET.

Mercredi, 5 mai 1886. — M. de Vorges demande au R. P. Van den Gheyn si le peuple des Hitites ne peut pas être assimilé à celui des Gètes.

Le R. P. Van den Gheyn répond que cette opinion n'est plus acceptable après les récentes découvertes archéologiques.

Rapport du R. P. Van den Gheyn

sur le travail du R. P. Étienne, intitulé : *Les restes de la langue koushite conservés dans le sanscrit et dans l'hindoustani.*

« Je proposerai à la section l'impression dans les *Annales* du travail du R. P. Étienne sur les traces du koushite dans le sanscrit et l'hindoustani. Une seule réserve me paraît devoir être présentée, comme pour l'article du R. P. Étienne inséré dans le dernier volume des *Annales* : elle porte sur la thèse de l'auteur relativement à la parenté linguistique du koushite et du polynésien. Les objections que j'ai fait valoir sur cette identité n'ont rien perdu de leur force ; il faut donc abandonner ce côté de la question à la responsabilité de l'auteur. »

M. de Vorges discute les rapports de la vie et de la sensation.

Ce travail donne lieu à un échange d'observations entre l'auteur et MM. Mercier, Fontaine, Monchamp et Proost. Il a, depuis, été publié par les *Annales de philosophie chrétienne*, décembre 1886.

M. Proost fait hommage de l'*Année scientifique et agricole*.

Jeudi, 6 mai 1886. — M. R. Storms fait le récit de la pêche à la baleine à laquelle il a assisté

M. Dollo explique pourquoi les poules retournent leurs œufs.

M. l'abbé Smets, empêché, envoie une monographie de *Chelone van Benedenii*. M. Dollo est désigné pour l'examiner.

Une discussion sur l'évolution des Cétacés termine la séance.

Rapport de M. de Lapparent

Sur un travail de M. l'abbé Bourgeat, relatif à l'orographie du Jura.

Le travail de M. l'abbé Bourgeat traite de l'une des questions les plus intéressantes de la géologie européenne. La structure du Jura y est exposée avec méthode et sans détails inutiles. On peut se demander si, au point de vue bibliographique, l'auteur ne s'est pas arrêté un peu trop tôt dans ses citations. Les cartes et les notices explicatives de Besançon et de Lons-le-Saulnier, publiées par M. Bertrand pour le service de la carte géologique de France, sont des documents qui, ce nous semble, méritaient d'être mentionnés dans un travail sur le Jura. De même, à propos de la relation étroite qui unit le Jura aux Alpes, citer les noms de MM. Suess et Heim n'eût été que justice. Mais si ces oublis peuvent attirer à l'auteur quelques reproches ou des réclamations de priorité, ils n'enlèvent rien à l'intérêt de son travail, que nous croyons digne de figurer dans les *Annales*.

Nous avons une remarque à faire au sujet de la page 3. L'auteur y écrit que « les différences observées entre les épaisseurs des sédiments remontent à une époque fort ancienne, antérieure sans doute au modelé actuel du Jura ». Il nous semble que M. l'abbé Bourgeat doit avoir mal traduit sa pensée. L'épaisseur d'une assise se mesure toujours entre son couronnement et son substratum. Dès lors, elle résulte des conditions mêmes du dépôt, et c'est faire une *tautologie* que d'attribuer la décroissance des épaisseurs vers l'ouest à un phénomène ancien.

A la page 31, ligne 3 du haut, nous pensons que l'auteur a

se demande s'il est d'ailleurs toujours bon de guérir de vieux ulcères.

Le D^r Dumont rapporte ensuite un cas de vomissements incoercibles dans le cours de la grossesse. Il expose les moyens pharmaceutiques auxquels il recourut sans succès, et il estime que le régime alimentaire et la position horizontale peuvent exercer une influence considérable dans le traitement de cette pénible affection. Il a constaté que le régime sec, et en particulier les aliments salés, étaient le mieux tolérés et que souvent la position horizontale suffisait, à elle seule, à faire digérer les repas. Voulant se rendre compte d'une nutrition qui semblait compromise, le D^r Dumont analysa la quantité d'urée émise par les urines, et il obtint une moyenne de 18 à 20 grammes par jour. Il se demanda si pareille analyse ne peut en semblables circonstances permettre d'apprécier l'état d'une patiente et servir à décider l'opportunité d'une intervention.

M. le professeur Verriest parle ensuite des moyens antithermiques et hydrothérapiques à employer dans le cours de la fièvre typhoïde. Il passe en revue les bains froids, la quinine, la kaïrine, l'antipyrine et autres substances utilisées jusqu'ici. Les médicaments, dit-il, offrent divers inconvénients et n'influencent pas d'ailleurs la marche et la durée de la fièvre. Les bains à la température de 28° à 30° C. donnent de bons résultats, mais on ne les emploie pas volontiers dans notre pays. Agissent-ils uniquement en abaissant la température? On ne saurait l'admettre, car il est impossible de méconnaître la puissance des réflexes que le froid met en jeu en impressionnant le système nerveux périphérique. C'est même à cette influence qu'il faut rattacher la stimulation générale de l'organisme, le relèvement du cœur, l'ampleur de la respiration, la contraction des tuniques musculaires de l'intestin.

Mais, pour produire pareil résultat, le bain n'est pas nécessaire; les lotions froides suffisent. Quoi qu'on en ait dit, les typhiques ne succombent guère à l'élévation directe de la température, pas plus que les phisiques, dont le thermomètre révèle l'ardente fièvre pendant de longs mois.

M. le professeur Desplats profite de la communication de M. Verriest pour rappeler que, depuis l'usage des antithermiques et des antiseptiques, la fièvre typhoïde est devenue moins grave. On n'observe plus aujourd'hui comme autrefois ces vastes catharres, ces suppurations abondantes et toutes ces complications si justement redoutées de nos prédécesseurs.

A vrai dire, la marche de la fièvre typhoïde n'a guère été modifiée, mais il est très utile, d'après M. Desplats, de combattre une grande élévation de température, source pour lui de nombreuses complications.

Enfin, M. Desplats nous entretient de la compression hydraulique appliquée à la thérapeutique. Il a eu à s'en louer dans le traitement de l'hydarthrose.

Mercredi, 5 mai 1886. — Le secrétaire de la section lit un rapport fait au nom d'une Commission dont il a fait partie avec MM. Desplats et Møller et qui a été chargée de l'examen d'un travail présenté par M. Heymans, préparation du cours de physiologie, à Louvain. Ce travail, favorisé du concours pécuniaire de la Société scientifique, a pour titre : *Recherches expérimentales sur le curare et le manganèse*. Il expose toutes les particularités de l'intoxication curarique et conclut à l'inefficacité du manganèse dans le traitement du diabète causé par le curare. Sur la proposition du rapporteur, la section vote des remerciements à l'auteur et l'impression de son remarquable travail dans les *Annales* de la Société. Il est publié dans la seconde partie de ce volume (pp. 251-292).

M. le professeur Verriest présente une malade atteinte de myxœdème. Elle est âgée de cinquante-cinq ans. Les premières manifestations de son mal se sont montrées il y a six ans, c'est-à-dire deux ans avant la suppression du flux menstruel. Bien portante, cette personne était maigre; aujourd'hui elle paraît chargée d'embonpoint. Au palper, on éprouve la sensation d'une résistance élastique donnée par le tissu sous-cutané et rappelant celles du tissu muqueux. La peau est amincie et, en certaines régions, aux mains et aux avant-bras, elle offre un aspect écaillé rappelant la peau du crocodile. Au cuir chevelu, considérable-

ment épais, elle est parcourue par des sillons qui limitent çà et là des ilots plus ou moins volumineux. Au-dessus des clavicules, on constate d'épais coussinets de production myxœdémateuse. Aux talons et au coude, il existe des plaques de lichen. Nulle part la pression du doigt ne détermine aucun enfoncement.

La température est légèrement abaissée. La malade a toujours été intelligente; mais, depuis le début du mal, elle fait preuve d'une lenteur d'esprit qui se développe progressivement.

M. le Dr Schneider, sans nier l'existence du myxœdème, rapporterait volontiers le cas actuel à l'herpétisme. Il ne trouve pas le faux œdème assez généralisé chez la malade de M. Verriest, ni les facultés intellectuelles assez obscurcies pour admettre sans réserve le diagnostic de myxœdème.

M. Desplats traite ensuite la question de la vaccination pendant la période d'incubation de la variole, en vue de prévenir l'écllosion de cette dernière maladie. On sait que la vaccination consiste dans des inoculations successives de vaccin, à des intervalles de six à sept jours, jusqu'à ce que l'on n'obtienne plus que des résultats négatifs. Tout en inclinant à admettre l'influence de la vaccination comme mesure prophylactique de la variole, M. Desplats ne connaît pas un ensemble suffisant de faits pour trancher la question.

MM. Warlomont et Cuyllits communiquent à l'assemblée deux sujets qu'ils savent rendre très intéressants. Le premier expose *diverses innovations de la chirurgie oculaire*; le second, *un cas de canitie ab irato*.

Enfin, M. Schneider développe le cas curieux qu'il eut dernièrement l'occasion d'observer en donnant ses soins à un malade qui avait visité Panama, où il avait contracté une fièvre jaune très grave. Dans le cours de sa maladie, il fut à un certain moment couvert d'un essaim de mouches de toutes grandeurs et de toutes couleurs. M. Schneider constata chez son client une tumeur logée dans l'interstice qui sépare les deux premiers orteils et présentant un orifice fistuleux. Elle contenait un *dermatobia noxialis*, larve d'œstre, de la famille des taons, qui tourmente souvent nos animaux domestiques.

ASSEMBLÉES GÉNÉRALES

I

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 29 OCTOBRE 1885.

M. de la Vallée Poussin, professeur à l'Université catholique de Louvain, fait une conférence sur *Les excavations naturelles du Colorado*.

Il rappelle l'activité que les Anglo-Américains déploient dans le domaine de la science, activité qui n'est pas indigne de celle qu'ils montrent dans le commerce et l'industrie. Après avoir indiqué rapidement l'organisation des expéditions scientifiques patronnées par le gouvernement des États-Unis dans le *Far West* et signalé quelques-uns des travaux les plus remarquables auxquels elles ont donné naissance, M. de la Vallée choisit comme objet spécial de sa lecture les mémoires qui ont paru sur les contrées traversées par le Colorado. Ce fleuve est célèbre entre tous les fleuves du monde par la profondeur et le développement des sillons ou *cañons* au fond desquels il coule, dans le territoire d'Arizona.

On se faisait naguère encore une idée fautive de ces *cañons* à parois presque verticales descendant à 1,000 ou 2,000 mètres au-dessous des plateaux voisins. Le pays où ils existent est aride, désert et très difficilement abordable. Mais le gouvernement américain y a organisé depuis une dizaine d'années des stations scientifiques. Grâce à elles et aux publications splendides qui ont vu le jour, on peut aujourd'hui se faire une idée plus juste de cette contrée extraordinaire.

M. de la Vallée expose, d'après l'ouvrage de Clarence Dutton sur le district du *Grand Cañon*, les principaux caractères de ce pays, où le travail des eaux courantes, joint aux dégradations d'origine atmosphérique, a découpé en tous sens les assises du globe de manière à y sculpter de véritables monuments.

Il signale, d'après les Américains, le caractère architectural de ces monuments, la beauté de leurs teintes, et leur grandeur colossale, auprès de laquelle les plus grandes constructions humaines apparaissent comme un travail de Lilliputiens. Il met sous les yeux de l'auditoire les planches d'un grand atlas annexé au livre de Dutton, et qui représentent, en chromolithographies, quelques-unes des vues les plus remarquables du pays de Colorado. Il est telle de ces vues que les géologues américains mettent au-dessus de tout ce qu'ils ont jamais vu et déclarent être le plus sublime des spectacles terrestres.

Après quelques réserves, M. de la Vallée résume les doctrines géologiques qui permettent d'élucider le mode de formation de ces coupures et de ces entailles gigantesques. En se basant sur l'histoire géologique du plateau du Colorado et en même temps sur le pouvoir mécanique bien connu des eaux torrentielles, il établit la possibilité du creusement des *cañons* durant les dernières périodes du globe, et l'indépendance réciproque que l'on remarque souvent entre le trajet des rivières et le relief d'un pays. Il expose aussi dans le cas spécial du Colorado la raison d'être des escarpements taillés en murs verticaux et qui se poursuivent sur des centaines de kilomètres. Quant au temps précis nécessaire à l'accomplissement de cet immense travail de démolition, M. de la Vallée dit qu'il est impossible de le formuler, la nature étant encore muette pour nous dans cet ordre de problèmes géologiques.

La *Revue des Questions scientifiques* (janvier 1886) a publié, sous le même titre, un article de M. de la Vallée, où nos lecteurs trouveront la plus grande partie de la conférence précédente.

agricole de la Scine-Inférieure sur la question des champs d'expérience, campagnes auxquelles M. Proost a pris une part active, et dont les résultats ont été concluants dès la première année.

L'orateur a examiné tour à tour la question des champs d'expérience dont il fut le promoteur en Belgique, de l'utilisation des eaux d'égout, de la mise en valeur des terres sablonneuses, de la culture intensive dans les terres avec ou sans fumier de ferme, avec ou sans bétail. Il conclut à la substitution de la culture scientifique à la culture empirique.

Mais il estime que, pour obtenir ce résultat, le concours de l'État, des provinces et des communes est indispensable. M. Proost constate avec M. Risler, directeur de l'Institut agronomique de Paris, et M. Tisserand que la crise sévit surtout dans les pays à fermage et particulièrement dans les pays à grandes fermes et à culture intensive, parce que c'est dans ces pays que les fermiers riches et instruits sont les plus indispensables. Il faudrait modifier les rapports de propriétaire à fermier, et les associer. Ce serait revenir à peu près à l'ancien métayage; seulement, jadis l'association avait lieu entre un propriétaire et un fermier ignorants des progrès agricoles, aujourd'hui tous deux devraient pratiquer scientifiquement l'exploitation de la terre.

Le propriétaire doit devenir le banquier et le guide du fermier. Comme le dit M. Risler, « des baux longs, une entente cordiale du propriétaire et du fermier, dont les intérêts sont éminemment solidaires, *plus d'instruction de part et d'autre*, tel est le premier progrès à réaliser ». La science aidée du capital peut donc relever l'agriculture. L'exemple de l'étranger atteste éloquemment la possibilité de cette métamorphose.

La crise agricole est peu sensible dans tous les pays où le propriétaire fournit assez de capital pour bien exploiter ses terres, et où il donne lui-même à la culture une direction intelligente et bienveillante pour le métayer.

On n'a rien fait chez nous depuis un demi-siècle, pour l'enseignement professionnel des classes rurales, tandis que l'on créait partout des écoles industrielles.

L'intelligence et le travail, qui triomphent de tout lorsqu'ils

s'appuyent sur le savoir, sont impuissants aujourd'hui dans ce duel implacable avec les éléments qui s'appelle la culture intensive.

III

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU LUNDI 3 MAI 1886.

Le R. P. Carbonnelle, secrétaire de la Société scientifique, lit le rapport suivant :

MESSIEURS,

Dans les dix premières années de notre existence sociale, de 1875 à 1885, la mort a supprimé de nos listes, comme je vous le disais dans le dernier rapport, les noms de 102 membres. Elle n'en a effacé que six pendant la onzième année ; mais, parmi ces six noms, il en est un qui s'impose tout particulièrement à nos regrets. C'est le nom d'un savant illustre, dont la longue et brillante carrière a été une démonstration vivante de cette grande vérité qui nous a réunis et qu'exprime notre devise, à savoir qu'il n'y a pas la moindre opposition, qu'il y a plutôt un harmonieux accord entre l'esprit scientifique et l'esprit religieux. M. de Saint-Venant, mort le 6 janvier dernier dans sa 89^e année, a été pendant toute sa vie le type du savant chrétien. Il n'était pas savant à certaines heures, chrétien à d'autres heures, il fut toujours à la fois l'un et l'autre. Élève du lycée de Bruges sous le premier empire, admis à 15 ans à l'École polytechnique d'où il sortit le premier de sa division, élève et plus tard professeur à l'École des ponts et chaussées, membre de l'Académie des sciences, il fut réellement un ingénieur de premier ordre. C'est lui qui fut le créateur de la théorie générale de la *Torsion*. Comme le disait sur sa tombe un de ses disciples, également membre de l'Institut, « ses travaux de science pure, confirmés par de nombreuses observations, et que, d'une part, leur caractère rationnel et exact rend définitifs, tandis que, d'autre part, leur simplicité relative et leur élégance marquent leur place

dans les éléments mêmes de la mécanique appliquée, ont gravé à jamais son nom dans les annales de la science. Toujours la question générale des déformations des corps allongés, qui remplit en majeure partie le cours si important de la résistance des matériaux enseigné dans les écoles techniques, s'appellera le *Problème de Saint-Venant*, comme on le désigne en Allemagne, en Angleterre et en Italie, à la suite de Clebsch, Kirchhoff, William Thomson et Tait, et d'autres maîtres encore ». Si M. de Saint-Venant a ainsi attaché son nom à une vérité fondamentale destinée à traverser les siècles, il a mérité cet honneur, comme le remarque le même membre de l'Institut, « par son ardent dévouement à la vérité, par son travail de tous les instants pour la découvrir, qui a été la grande passion de sa vie, et qu'il regardait comme un devoir strict de sa vocation. Pour lui, en effet, l'étude des lois naturelles était la recherche, par les lumières de la raison, au sein du désordre apparent des choses, d'un ordre profond et simple, image et effet de l'intelligence souveraine que sa foi lui faisait adorer et aimer. Et il jugeait que l'obligation du savant, sa mission ici-bas, est de mettre dans tout leur jour ces belles lois, pour les faire, tout à la fois, admirer comme reflet de leur auteur et tourner à l'utilité commune. »

C'est à ces vues élevées sur le rôle de la science que nous devons en particulier les quatre-vingts pages consacrées par lui, dans le second volume de nos *Annales*, à la *constitution des atomes*. Dans ce beau travail, on peut voir « combien cet homme de foi croyait à la puissance de la raison », et quelle hardiesse il apportait à l'étude des plus difficiles problèmes de la nature ; mais ce que nous ne devons pas non plus oublier de signaler, c'est combien sa foi était simple et sincère. Il y a parmi ceux qui m'écoutent en ce moment plusieurs de ses amis, qui le reconnaîtront surtout à ce trait, et, pour ma part, en relisant dernièrement les nombreuses lettres qu'il m'a fait l'honneur de m'écrire, j'avoue que c'est là surtout ce qui m'a frappé. Comment n'être pas touché en voyant au bas de ces lettres, au lieu de ces formules banales qu'on ne prend plus la peine de lire, des phrases comme celle-ci : « Veuillez, mon révérend père, ne pas m'oublier

au saint sacrifice, pour que Dieu m'accorde toutes les grâces dont j'ai si grand besoin pour contribuer à sa gloire. » Aussi l'on a pu répéter sur son cercueil avec le savant géomètre que j'ai déjà cité : « Sa mort a été aussi édifiante et aussi sereine que sa vie. Il a eu le bonheur de s'endormir du dernier sommeil l'âme tout imprégnée d'immortelles espérances que le doute n'avait jamais ternies. »

En recevant la lettre de faire-part, je m'associai sans doute aux prières de sa famille et de ses amis ; mais en outre, vous ne le trouverez pas étrange, Messieurs, je songeai aussi à lui demander à lui-même sa protection pour notre Société scientifique, à laquelle il avait toujours été si sympathique et si dévoué ; il continuera, je n'en doute pas, au delà de la tombe, à contribuer à sa prospérité.

Les quelques renseignements que je dois maintenant vous donner suivant l'usage vous montreront, du reste, que cette prospérité n'est pas menacée.

Nous comptons aujourd'hui 582 membres, dont 394 Belges et 188 étrangers. Le faible mouvement de décroissance, qui s'était accusé les deux ou trois années précédentes, s'est donc arrêté cette année ; mais, il est peut-être utile de le constater, c'est parce que le gain fait à l'étranger a compensé la perte faite en Belgique.

Comme beaucoup d'autres revues sérieuses, mais à un moindre degré pourtant, la *Revue des Questions scientifiques* a perdu des abonnés à la fin de l'année 1885. Le 20 janvier 1886, en expédiant notre première livraison, nous avons constaté un déficit de 36 abonnés, comparativement à la même date de 1885 ; mais déjà au 20 avril suivant, ce déficit était réduit à 15 ; et nous avons bon espoir de le voir disparaître complètement.

Le rapport que vous allez entendre vous prouvera d'ailleurs que les finances de la Société sont dans un excellent état ; et le conseil a pu accorder cette année 1,500 francs de subsides pour travaux scientifiques.

Je me hâte donc de céder la parole à M. le Trésorier, afin de laisser ensuite plus de temps au brillant et sympathique conférencier que vous êtes venus écouter.

Ces propriétés appartiennent essentiellement aux composés azotés. Pourquoi? Parce qu'ils sont tous des composés endothermiques, formés avec absorption de chaleur; dans l'acte de la décomposition, ils restituent l'énergie qu'il a fallu accumuler pour leur constitution. Ce sont des édifices moléculaires instables, qui croulent quand on heurte leur base fragile. Les faits les plus étonnants peuvent être expliqués de la sorte et la mécanique nous livre le secret de ces corps étranges. C'est une des pages les plus curieuses de la science.

M. Witz montre alors à l'œuvre les agents explosifs dans les opérations de la guerre et dans les travaux de la paix. Il décrit les torpilles et les torpilleurs, et il retrace la lutte de ces engins nouveaux contre les forteresses flottantes auxquelles paraissait appartenir l'empire des mers. Les cuirasses et les filets ne sauvent pas les monitors; les bateaux Thornicroft et Nordenfeldt, les torpilles Berdan et autres ont raison presque toujours des plus formidables navires.

Voyons les ingénieurs à l'œuvre; en comparant les travaux du mont Cenis et du Saint-Gothard, on constate les progrès réalisés par l'emploi de la dynamite. On calcule aujourd'hui mathématiquement les charges nécessaires pour disloquer un massif; l'exposé des méthodes nouvelles présente le plus grand intérêt.

Quelle colossale réserve d'énergie dans les 15 millions de kilogrammes de dynamite qui se fabriquent annuellement! M. Witz développe ce sujet avec complaisance, et il montre que ce n'est pas une utopie de chercher à employer utilement cette énergie; le moteur à gaz dérive des moteurs à poudre, et l'homme a su discipliner déjà les mélanges tonnants les plus dangereux. Il a asservi la foudre; il domptera des agents qui sont l'œuvre de ses mains, et ces éléments de mort et de destruction deviendront des éléments de richesse et de progrès.

On trouvera dans la *Revue des Questions scientifiques* (avril 1887) un article de M. Witz, intitulé également *les agents explosifs*, où l'auteur reprend le même sujet et le traite d'une manière plus étendue.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MERCREDI 5 MAI 1886.

A la séance d'aujourd'hui M. Amédée Visart fait sur *La sylviculture et la crise agricole* une communication à laquelle les circonstances actuelles donnent beaucoup d'intérêt. Il rappelle d'abord les avantages que le boisement des terrains montagneux ou incultes et la conservation des forêts existantes présentent au point de vue des finances publiques et du bien-être général comme à celui de l'amélioration du climat et de la régularisation du régime des eaux.

Tous les hommes compétents sont d'accord à ce sujet, et aujourd'hui l'État et toutes les administrations publiques en Belgique et dans les pays voisins conservent les anciennes forêts et s'efforcent d'en créer de nouvelles, en se préoccupant plus de l'intérêt général et des résultats définitifs que des profits immédiats.

Cependant les améliorations les plus désirables ne peuvent se réaliser sans l'intervention des particuliers qui possèdent la plus grande partie du territoire. Il est donc très intéressant de rechercher si, dans bien des cas, les boisements ne peuvent donner des résultats rémunérateurs et permettre l'utilisation des terres abandonnées ou avilies à cause de la crise agricole.

De là trois questions à élucider : 1° Est-il probable que les produits forestiers soient moins exposés que les produits agricoles aux effets de la crise agricole et à la baisse excessive des prix ? 2° Y a-t-il encore en Belgique des terrains propres à être boisés dans des conditions telles qu'on puisse espérer des bénéfices supérieurs ou égaux à ceux de la culture ? 3° Les boisements présentent-ils des avantages spéciaux dont les particuliers peuvent tenir compte.

Le conférencier traite successivement ces points. Au moyen de renseignements statistiques et d'appréciations raisonnées, on peut démontrer que, dans un avenir prochain, ni la production natio-

nale, ni celle des pays pratiquement accessibles ne pourront suffire aux besoins.

La concurrence des contrées lointaines est impossible pour les bois ordinaires, qui forment la grande masse de la consommation. Le conférencier passe ensuite en revue les régions principales de la Belgique, et constate qu'il y a dans nos provinces de l'est, dans la Campine et même dans les parties les plus peuplées du pays, beaucoup de terres qu'il est peu lucratif de cultiver ou de défricher. Cependant les particuliers ne sauraient faire une opération avantageuse, si l'on tient compte de l'accumulation des intérêts des capitaux, en créant de véritables forêts où la futaie doit dominer. Ils sont condamnés par conséquent à faire seulement des plantations qui peuvent être exploitées au bout de trente ou trente-cinq ans au maximum. Les résineux, les taillis et les essences propres à des usages spéciaux constituent donc nécessairement pour les particuliers la première étape des boisements. Les pins sylvestres dans les terres sablonneuses de la Belgique inférieure, les épicéas et des essences analogues sur les plateaux élevés et froids des Ardennes peuvent donner assez promptement des produits rémunérateurs.

Le conférencier fait ressortir les avantages particuliers des boisements au point de vue de l'embellissement et de l'assainissement des domaines ruraux, du bon aménagement des travaux de la campagne dans les diverses saisons et de la certitude d'un bénéfice net ou d'une rente régulière.

Il termine en exprimant la conviction qu'ils sont nécessaires pour l'utilisation du sol en présence de la crise agricole.

Neu segnes jaceant terræ.

VI

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 6 MAI 1886.

Les deux commissaires, nommés lundi dernier, MM. Ch. Lagasse et Otto, proposent à l'assemblée d'approuver les comptes. Cette proposition est adoptée.

M. l'ingénieur G. Kennis fait ensuite une conférence sur *L'assainissement des villes*. En attendant qu'elle paraisse dans une des publications de la Société scientifique, nous la résumons ici brièvement :

L'assainissement des villes exige une bonne organisation des bureaux d'hygiène. Le bureau d'hygiène de la ville de Bruxelles a servi de type à la création des bureaux des villes du Havre, Nancy, Reims, Louvain et Amiens.

Le docteur Janssens, membre de l'Académie royale de médecine de Belgique, est le créateur de ces utiles institutions, qui établissent des relations entre les grands centres de population du monde civilisé.

Ces observatoires dans le domaine sanitaire permettent de surveiller la marche des maladies épidémiques et de prendre les mesures préventives nécessaires pour les arrêter.

Des graphiques empruntés aux publications des bureaux d'hygiène, affichés dans la salle des conférences, mettent sous les yeux des auditeurs la mortalité typhique de plusieurs grandes villes depuis l'époque de l'exécution des grands travaux d'assainissement. Ces tracés constatent que le tribut mortuaire prélevé par cette terrible maladie zymotique décroît partout en même temps que les grands travaux d'assainissement se sont développés et que l'on a éloigné, non seulement des maisons, mais encore de la ville, les déjections humaines, immédiatement, au fur et à mesure de leur production.

A Francfort et dans un grand nombre de villes d'Amérique, on a établi en tête de chaque tronçon d'égout des réservoirs de chasse fonctionnant automatiquement et rendant presque nuls les frais de curage. Un spécimen de ces intéressants appareils fonctionne devant l'assemblée. Il constitue une application du principe des fontaines intermittentes : de l'eau introduite lentement dans un réservoir s'est précipitée avec une grande vitesse dans une rigole aussitôt que l'eau eut atteint un niveau déterminé dans le réservoir. Et cela par une simple disposition donnée aux tubes d'évacuation, sans l'intervention d'aucune pièce mobile.

L'emploi de ces appareils évite la formation de dépôts autrement inévitables en tête des tronçons d'égouts.

Les égouts qui ne sont lavés que par l'admission des eaux pluviales présentent des causes d'insalubrité. Par des pluies non persistantes, les matières sont simplement délayées dans l'eau. Cette eau souillée s'élève le long des parois de l'égout et les laisse recouvertes de matières fermentescibles, lorsqu'après la pluie le niveau de l'eau a baissé dans l'égout. Cette circonstance et d'autres ont fait imaginer en Amérique par le colonel Waring, en Angleterre par l'ingénieur Griffith, en France par l'ingénieur Pontzen, un système de canalisation souterraine excluant de son régime les eaux pluviales et toutes celles dont le débit ne peut être réglé. On réduit ainsi à un minimum les variations dans la hauteur des liquides.

Des conduites souterraines à diamètre restreint, toujours parfaitement ventilées, amènent les eaux ménagères et les matières fécales de toute une localité vers une halle aux machines avec pompes spéciales pour conduire le tout vers des champs de culture par irrigation.

Traitant de la question des irrigations, M. Kennis rend compte d'expériences faites à l'instar de celles de Franckland en Angleterre. Il résulte de ces expériences que les eaux d'égout peuvent ou être simplement épurées par le sol, ou bien être affectées par leurs matières organiques à l'utilisation agricole, suivant la nature des terres et la quantité d'eau d'égout employée par hectare. Dans l'un et dans l'autre cas, il faut opérer par la méthode de déplacement, c'est-à-dire qu'il ne faut introduire dans le sol de nouvelles quantités d'eau qu'au fur et à mesure que des quantités proportionnelles ont trouvé leur évacuation par un drainage parfaitement assuré.

Dans ces conditions, toutes les matières organiques sont brûlées par l'air introduit dans le sol à la suite de l'eau et transformées en produits ne pouvant plus occasionner aucune pollution, ou bien en produits immédiatement assimilables par les plantes.

La ville de Paris irrigue 600 hectares dans la plaine de Gennevilliers. La valeur locative à l'hectare, constatée sur baux enregistrés, a été majorée de 400 francs l'hectare.

Cette plus-value du loyer de 240,000 francs par an pour la plaine, au denier 20, constitue une création de richesse de 4,800,000 francs. La ville de Paris a dépensé environ 3,000,000 de francs pour ces travaux. Bientôt elle augmentera les champs d'irrigation de 800 nouveaux hectares.

L'un des grands propriétaires de la Flandre-Occidentale, M. le sénateur van Ockerhout, fait depuis l'année dernière, avec succès complet, de la culture par irrigation à son château de Lophem.

M. Steinmetz, industriel à Bruges, par les soins de l'ingénieur Van Maldeghem, agronome de l'État pour la Flandre-Occidentale, cultive par irrigation plusieurs hectares entourant son usine.

Les journaux ont rendu compte des brillants résultats obtenus par M. Gillekens, agronome de l'État, dans l'utilisation des eaux d'égout de la ville de Bruxelles pour la culture des betteraves fourragères, des légumes, d'arbustes, dans les plaines de Haeren.

M. Kennis exprime le vœu que les autorités compétentes, donnant suite aux études faites par la Société centrale d'agriculture de Belgique, arrivent à organiser avec autant de soin le service de l'aménagement rationnel et de l'utilisation agricole des eaux d'égout que l'on en apporte au service et à l'aménagement des eaux destinées à la navigation.

M. le Président proclame ensuite le résultat des élections (voir page 43, la composition du bureau et du conseil), et déclare la session close.



LISTE DES OUVRAGES

OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES.

- Abdruck aus den *Comptes rendus der achten Sitzung des internationalen medicinischen Kongresses*. — Kopenhagen, 1884. Prof. Dr Albrecht : Ueber die Wirbelkörperperiphysen und Wirbelkörpergelenke zwischen dem Epistropheus, Atlas und Occipitale der Säugethiere.
- Professor Dr Paul Albrecht. (Erwiderung auf die Besprechung des Herrn Professors Dr Ph. Höhr : « P. Albrecht. Ueber die morphologische Bedeutung der Kiefer-, Lippen- und Gesichtsspalten. Archiv. für klinische Chirurgie. Band XXXI, Heft 2, in den Fortschritten der Medicin. » — Berlin, 1885.
- Sur la non-homologie des poumons des Vertébrés pulmonés avec la vessie natatoire des Poissons, par M. le professeur Paul Albrecht, docteur en médecine et en philosophie, suivi d'une annexe contenant une discussion sur ce sujet entre M. le Dr Renson, agrégé à la Faculté de médecine de l'Université de Bruxelles, et M. Albrecht. — Paris-Bruxelles, 1886.
- Extrait des comptes rendus de la 8^e session du Congrès périodique international des sciences médicales. — Copenhague, 1884. Communications du Dr Albrecht.
- Ungedruckte wissenschaftliche Correspondenz zwischen Johann Kepler und Herwart von Hohenburg, 1599. Ergänzung zu: Kepleri Opera omnia, ed. chr. frisch. nach den MSS. zu München und Pulkowa edirt von C. Anschütz (Separatabdruck aus den Sitzungsberichten der Königl. Böhw. Gesellschaft der Wissenschaften). — Prag, 1886.
- Rapports sur le Congrès d'histoire et d'archéologie tenu à Anvers, les 28-30 septembre 1885, et sur l'excursion à Beaumont et ses environs faite le 4 novembre 1886 par la Société archéologique de Charleroi, par le C^{ie} Albéric d'Auxy de Launoy. (Extrait des *Annales du Cercle archéologique de Mons*.) — Mons, 1887.
- Sur la provenance de l'étain dans le monde ancien, par M. Germain Bapst. (Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des inscriptions et belles-lettres*.) — Paris, 1886.
- De la plaine maritime depuis Boulogne jusqu'au Danemark. 1^{re} partie, Mémoire sur la plaine maritime depuis Anvers jusqu'à Boulogne, par M. Antoine Belpaire, membre de l'Académie royale de Belgique. 2^e partie, Étude sur la plaine maritime depuis Boulogne jusqu'au Danemark, par M. Alphonse Belpaire, ingénieur des Ponts et Chaussées de Belgique. — Anvers, 1855.
- Thèses présentées à la Faculté des sciences de Paris pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques, par l'abbé B. Berloty. 1^{re} thèse : théorie des quantités complexes à n unités principales; 2^e thèse : propositions données par la Faculté. — Paris, Gauthier-Villars, 1886.
- Conférences de Paris. La vie universelle et la rage, par Hubert Boëns, docteur en sciences. — Charleroi, 1886.
- Hommages rendus à la mémoire de M. Engelbert Cappuyns, curé de la paroisse des Minimes, à Bruxelles, à l'occasion de ses funérailles, les 2 et 3 mars 1886. Éloges funèbres prononcés par le B^{on} Victor de Garcia de la Vega, M. de Posch et le M^{re} de la Boessière-Thiennes. — Bruxelles, 1886.

- Étude sur la marche des bateaux dans les courants rapides, par M. du Boys, ingénieur des Ponts et Chaussées. (Extrait des *Annales des Ponts et Chaussées*.)
- Berichte von dem Erzbischöflich-Haynaldschen Observatorium zu Kalocsa in Ungarn über die daselbst in den ersten fünf Jahren ausgeführten Arbeiten, von Carl Braun, S. J. — Münster i. W., 1886.
- La chronologie des premiers âges de l'humanité, d'après la Bible et la science, par le P. J. Brucker, S. J. (Extrait de la « Controverse et le contemporain ».) — Lyon, 1886.
- Téléphonie et télégraphie simultanées. Exposé théorique et pratique du système de téléphonie à grande distance de M. P. Van Rysselberghe, dans ses rapports avec la télégraphie, précédés de notions préliminaires sur l'induction électrique, le téléphone et le microphone par E. Buels, fonctionnaire de l'Administration des Télégraphes de l'État belge. — Bruxelles, 1885.
- Notice sur les travaux et titres scientifiques de M. L. de Bussy, directeur des constructions navales, membre du Conseil d'amirauté. — Paris, 1885.
- El Eclipse de Sol del 5 de Marzo de 1886. — Observaciones practicadas en el observatorio del Colegio Catolico del Sacrado Corazon de Jesus, en Puebla, por Enrique Cappelletti, S. J. — Mexico, 1886.
- Antropología mexicana. — El hombre del Peñon. — Noticia sobre el hallazgo de un hombre prehistórico en el valle de México, por los profesores de geología Antonio del Castillo y Mariano Bárcena. — Mexico, 1885.
- Manuel de la Flore de Belgique, par François Crépin. — Bruxelles, 1860.
- Observatoire de Zi-ka-wey, près Chang-hai, Chine. — L'inclinaison des vents; un anémomètre pour observer cette inclinaison, avec un appendice sur les courants verticaux dans les cyclones. Deuxième note par le R. P. Marc Dechevrens, S. J., directeur de l'Observatoire. — 1886.
- Note sur la discordance du dévonien sur le silurien dans le bassin de Namur, par l'abbé H. de Drolodot. — Liège, 1885.
- Du Bien au point de vue ontologique et moral, par Léon De Lantsheere, docteur en droit. — Louvain, 1886.
- Les dernières découvertes en Afrique. — Voyage de Brito Capello et Ivens. — Descente du Kassai. — Problème du Wellé, par M. le Dr Louis Delgeur. (Extrait des *Bulletins de la Société royale de géographie d'Anvers*.) — Anvers, 1885.
- Mélanges géologiques par G. Dewalque, docteur en médecine. — Cinquième série. — Liège et Bruxelles, 1882-1885.
- Quelques observations au sujet de la note de M. É. Dupont sur le Poudingue de Wéris, par G. Dewalque, membre de l'Académie royale de Belgique. (Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*.) — Bruxelles, 1885.
- Discours prononcé au nom de l'Académie royale de Belgique, lors des funérailles de M. F.-L. Cornet, membre de l'Académie, par M. G. Dewalque, membre de l'Académie royale de Belgique. (Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*.) — Bruxelles.
- La constitution de l'Être, suivant la doctrine péripatéticienne, par E. Domet de Vorges. (Extrait des *Annales de philosophie chrétienne*.) — Paris, 1886.
- Biografía del Sr D. Jaime Arbós y Tor, Pbro, leida por Don B. Feliu y Perez. — Barcelona, 1885.
- L'année scientifique et industrielle, par Louis Figuier. — Paris, 1886.

- Petite climatologie de l'amateur et de l'agriculteur belges, par M. Folie, directeur de l'Observatoire royal. — Bruxelles, 1886.
- Un cas de paralysie cérébrale spastique de l'enfance, par le Dr X. Francotte. (Extrait des *Annales de la Société médico-chirurgicale de Liège.*) — Liège, 1886.
- Contribution à l'étude de la névrite multiple, par X. Francotte, assistant à l'Université de Liège. (Extrait de la *Revue de médecine.*) — Paris.
- Clinique de M. le professeur Masius. — Chylurie non parasitaire, par le Dr X. Francotte. (Extrait des *Annales de la Société médico-chirurgicale de Liège.*) — Liège, 1886.
- La France coloniale (Algérie, Tunisie, Congo, Madagascar, Tonkin, et autres colonies françaises) considérée au point de vue historique, géographique, ethnographique et commercial, par A.-M. G., membre de la Société de géographie de Paris. — Tours, 1886.
- Note sur l'iodol, dans le traitement de l'otite purulente chronique, par le Dr Ch. Goris. — Bruxelles, 1887.
- En Irlande. — Impressions et souvenirs, par M. l'abbé Hamard, de l'Oratoire de Rennes. (Extrait de la *Revue du Monde catholique.*) — Paris, 1887.
- Les sciences et l'apologétique chrétienne. — Bulletin scientifique (1886), par l'abbé Hamard, de l'Oratoire de Rennes. (Extrait de la *Controverses et le contemporain.*) Lyon, 1886.
- Cours de machines, par M. Haton de la Goupillière, t. 1^{er}, 1^{er} fascicule : hydraulique et moteurs hydrauliques. — Paris, 1886.
- Écoulement varié des gaz, par M. Haton de la Goupillière, membre de l'Institut. (Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences.*) — Paris, 1886.
- Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums, redigirt von Dr Franz Ritter von Hauer. Jahresbericht für 1885. — Wien, 1886.
- Projet d'une tour de 300 mètres en bois, par MM. Hennebique et Nève. — Bruxelles.
- La nouvelle cosmogonie. — Lecture faite à l'Académie delphinale, le 17 juillet 1885, par M. de Kirwan, membre correspondant. — Grenoble, 1886.
- Le climat de la Belgique, en 1886, par M. Lancaster, météorologiste inspecteur à l'Observatoire royal de Bruxelles. — Bruxelles, 1887.
- Le niveau de la mer, par M. A. de Lapparent. (Extrait du *Bulletin de la Société géologique de France*) — Lagny, 1886.
- Le niveau de la mer et ses variations, par Albert de Lapparent. (Extrait du *Correspondant.*) — Paris, 1886.
- La formation des combustibles minéraux, par Albert de Lapparent. (Extrait du *Correspondant.*) — Paris, 1886.
- La certitude dans les sciences, par M. A. de Lapparent. (Extrait des *Annales de philosophie chrétienne.*) — Paris, 1886.
- Abrégé de géologie, par Albert de Lapparent. — Paris, 1886.
- Un arbitrage pontifical au XVI^e siècle, par Méthode Lerpigny. — Bruxelles.
- Détermination du reste dans la formule de quadrature de Gauss, par P. Mansion, professeur ordinaire à l'Université de Gand, membre correspondant de l'Académie royale de Belgique. (Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique.*) — Bruxelles, 1886.
- Philosophie du surnaturel : thèse pour le doctorat présentée à la Faculté de théologie de Paris, par l'abbé Callixte Mélinge, docteur en théologie. — Surgères, 1876.

- L'électricité à l'Exposition universelle d'Anvers, par Charles Mourlon. — Bruxelles, 1885.
- La thermodynamique et ses principales applications, par J. Moutier, examinateur à l'École polytechnique. — Paris, Gauthier-Villars, 1885.
- The Chair of Peter, by John Nicolas Murphy. Burns and Oates, London-New-York.
- Les Pierres à cupules, par M. de Nadaillac. (Extrait de la *Revue d'anthropologie*.) — Paris.
- La Guadeloupe préhistorique, par M. le M^{re} de Nadaillac. (Extrait de la *Revue Matériaux pour l'histoire primitive de l'homme*.) — Paris.
- Découvertes dans la grotte de Spy, province de Namur, par M. le M^{re} de Nadaillac. (Extrait de la *Revue Matériaux pour l'histoire primitive de l'homme*.) — Paris, 1886.
- Mémoire sur les trépanations préhistoriques, par M. de Nadaillac. (Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des inscriptions et belles-lettres*.) — Paris, 1886.
- Géologie de Jersey, par le P. Ch. Noury, S. J. — Paris et Jersey, 1886.
- Sur une quartique unicursale, par M. Maurice d'Ocagne, ingénieur des Ponts et Chaussées. (Extrait du *Journal de mathématiques spéciales*.) — Paris, 1886.
- Sur l'algorithme $[abc... i]^{(n)}$, par M. Maurice d'Ocagne. (Extrait des *Nouvelles Annales de mathématiques*.) — Paris, 1886.
- Sur une suite récurrente, par M. Maurice d'Ocagne. (Extrait du *Bulletin de la Société mathématique de France*.) — Paris, 1886.
- Sur l'enveloppe de certaines droites variables (suite), par M. Maurice d'Ocagne. (Extrait des *Nouvelles annales de mathématiques*.) — Paris, 1886.
- Sur le cercle orthoptique, par M. Maurice d'Ocagne. (Extrait des *Nouvelles Annales de mathématiques*.) — Paris, 1886.
- Sur un problème de limite, par M. Maurice d'Ocagne, ingénieur des Ponts et Chaussées. (Extrait de *Mathesis*.) — Gand, 1886.
- Étude de géométrie segmentaire, par M. Maurice d'Ocagne, ingénieur des Ponts et Chaussées. (Extrait du *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas*.)
- Sur certaine classe de suites récurrentes, par M. Maurice d'Ocagne. — Paris.
- Lógica por don Juan Manuel Orti y Lara, catedrático de Metafísica de la Universidad de Madrid. — Madrid, 1885.
- Théodore d'Oppolzer, par Ern. Pasquier, professeur d'astronomie à l'Université de Louvain. (Extrait de la revue *Ciel et Terre*.)
- I Papi e le Università. Ragionamento letto nella Romana accademia degli arcadi da Mons. Giuseppe Patroni. — Roma, 1886.
- Le Encicliche di Leone XIII intorno al potere politico ed alla cristiana costituzione degli stati, per Mons. Giuseppe Patroni. — Roma, 1887.
- Théorie des fonctions homogènes : deuxième mémoire par le P. Th^{is} Pepin. S. J. (Extrait des *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei*.) — Rome, 1886.
- Étude sur quelques formules d'analyse utiles dans la théorie des nombres, par le P. Th^{is} Pepin, S. J. (Extrait des *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei*.) — Rome, 1885.
- Sur quelques congruences binômes. Extraits de lettres adressées par le P. Théophile Pepin, S. J. à D. D. B. Boncompagni. (Extraits des *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei*.) — Rome, 1885.

Sur trois théories de Gauss. Extrait d'une lettre adressée par le P. Théophile Pepin, S. J. à B. Boncompagni. (Extrait des *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei*.) — Rome, 1883.

Notions de géologie : accord de la cosmogonie scientifique avec la cosmogonie sacrée, par M. A. Raingeard, prêtre de Saint-Sulpice. — Rodez, 1886.

Commission météorologique de la Gironde. Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde de juin 1883 à mai 1884 et de juin 1884 à mai 1885. — Note de M. Rayet, vice-président de la Commission météorologique départementale. — Rapport sur les orages de 1885 et sur ceux de 1884, par M. Lespiault, secrétaire de la Commission météorologique. (Extrait des *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*.) — Bordeaux, 1884 et 1885.

Sténarithmie-Richard, ou l'art de calculer aussi vite que la pensée, par Léopold Richard. — Calcul mental. — Calcul écrit. — Paris, 1885.

Rapport triennal sur l'œuvre de l'apostolat des jeunes gens à Liège, lu en séance du conseil, le 7 mai 1886, par M. Amédée De Ryckel. — Liège, 1886.

S. Schack, major de l'armée danoise. — La physionomie chez l'homme et chez les animaux dans ses rapports avec l'expression des émotions et des sentiments; avec figures. — Paris, Baillière et fils, 1887.

Einheitliche Zeit, von Dr Robert Schram (Separatabdruck aus der « Wiener Zeitung ».) — Wien, 1886.

Sur la réduction aux fonctions elliptiques de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + F}};$$

par M. le C^e de Sparre, professeur aux Facultés catholiques de Lyon. (Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*.) — Bruxelles, 1885.

Sur l'herpolhodie dans le cas d'une surface du second degré quelconque, par M. le C^e de Sparre, professeur aux Facultés catholiques de Lyon. (Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*.) — Bruxelles, 1885.

Des Prairies, par E. Tykort, ingénieur-agronome. — Bruxelles, 1886.

Les excavations naturelles du Colorado, par C. de la Vallée Poussin, professeur à l'Université de Louvain. (Extrait de la *Revue des questions scientifiques*.) — Bruxelles, 1886.

L'homme préhistorique d'Anvers, par J. Van den Gheyn. (Extrait d'*Anvers à travers les âges*.) — Bruxelles, 1886.

Les livres saints et la critique rationaliste. Histoire et réfutation des objections des incrédules contre les saintes Écritures, par F. Vigouroux, prêtre de Saint-Sulpice. Vol. I et II. — Paris, 1886.

Vida de la Sierva de Dios sor Mercedes de Jesús, por el rdo. D. Eliodoro Villafuerte, pbro. — Barcelona, 1886.

Tägliche Veränderung des Luftdrucks in den Cyklonen, von Johann Vincent, in Auderghem (bei Brüssel).

Étude de quelques points de la structure des fibres, par R. Warlomont, docteur en médecine et en sciences. (Extrait du *Journal de l'anatomie et de la physiologie normales et pathologiques de l'homme et des animaux*.) — Paris.

- Éloge de saint Thomas d'Aquin, prononcé dans l'église du collège Saint-Michel, à Fribourg, par le R. P. Albert de Weck, M. A., le 7 mars 1885. (Extrait des *Monat-Rosen*.) — Lucerne, 1885.
- Intensité du champ magnétique terrestre dans les édifices, par M. Aimé Witz. (Extrait du *Journal de physique*.) — Paris, 1887.
- Société industrielle du Nord de la France. — Réponse à quelques objections contre l'action de paroi dans les moteurs à gaz, par M. Aimé Witz. — Lille, 1886.
- Les hypothèses cosmogoniques. — Examen des théories scientifiques modernes sur l'origine des mondes, suivi de la traduction de la théorie du ciel de Kant, par C. Wolf, membre de l'Institut. — Paris, 1886.
- What the church has done for science. — A lecture, by the Rev. John A. Zahn, C. S. C., of the University of Notre-Dame. — Notre-Dame, Indiana.
- The catholic church and modern science. A lecture by the Rev. J.-A. Zahn, C. S. C. — Notre-Dame, Indiana, 1885.
- American Journal of mathematics. — Volume VII, number 4. — Baltimore, 1885.
- Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles, par F. Folie, 1887, 54^e année. — Bruxelles, 1886.
- Annual report of the Board of regents of the Smithsonian Institution for the year 1884. — Washington, 1885.
- Idem for the year 1885.
- Archives italiennes de Biologie. — Revues, résumés, reproductions des travaux scientifiques italiens. Tome I, fasc. I. — Paris, 1882.
- Archivos do Museu nacional do Rio de Janeiro; vol. VI, 1885.
- Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma. Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle biblioteche pubbliche governative del regno d'Italia, n^o 1 et 2. — Roma, 1886.
- Bulletin of the California Academy of sciences, n^o 4. January, 1886 et vol. 2, n^o 5, september, 1886. — San Francisco.
- Bijdragen tot de taal- land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië, uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal- land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië, vijfde volgrees, eerste deel, derde aflevering. — s' Gravenhage, 1886.
- Catalogue de la Bibliothèque de l'École polytechnique. — Paris, Gauthier-Villars, 1881.
- Discursos leídos ante la Real Academia Española en la recepción pública del R. P. Miguel Mir, el día 9 de Mayo de 1886. — Madrid, 1886.
- Giornale della Società di Letture e conversazioni scientifiche di Genova, anno IX, dicembre, fasc. VI. — Genova, 1885.
- The Irish Ecclesiastical Record, a monthly Journal, under Episcopal Sanction. Third series, vol. VI, n^o 7, 8, 10 et 11. — Dublin, 1885.
- Journal de l'École polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement, 55^e cahier. — Paris, Gauthier-Villars, 1885.
- Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 3^e série, tome I. — Paris, Gauthier-Villars. — Bordeaux, 1884.
- Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 3^e série, tome II, 1^{er} cahier. — Paris, Gauthier-Villars. — Bordeaux, 1885.
- Memorias de la Sociedad científica « Antonio Alzate ». Tomo I, cuaderno num 2. — Mexico, 1887.

- Le mouvement colonial. — Missions, émigrations, prises de possession, voyages, exploration, n^{os} 1 à 7. — Marseille, 1885-1886.
- Den norske Nordhavs-Expedition 1876-1878, XV. — Zoologie. — Crustacea, II. Ved G. O. Sars. — Christiania, 1886.
- Notarisia, commentarium phycologicum. — Rivista trimestrale consacrata allo studio delle Alghe. Anno I, n^{os} 1 et 2. — Padova, 1886.
- Observaciones meteorológicas del Colegio catolico del Sagrado Corazon de Jesus, en Puebla. — Año de 1883.
- Observaciones meteorológicas del Colegio catolico del Sagrado Corazon de Jesus, en Puebla. — Año de 1884.
- Observaciones astronomicas del Colegio catolico del Sagrado Corazon de Jesus, en Puebla. — Año de 1884. — Puebla, 1884.
- Observaciones magnéticas y meteorológicas del real Colegio de Belen de la Compañia de Jesus, en la Habana. 1^{er} trimestre, Enero-Marzo, 1885; 2^o trimestre, Abril-Junio, 1885, et 3^o trimestre, Julio-Setiembre, 1885. — Habana, 1885.
- Observaciones meteorologicas. Colegio de San Juan Nepomuceno. Saltillo. Post-graduate course of lectures. In abstract, third year, 1884-1882; fourth year, 1882-1883; fifth year, 1883-1884; sixth year, 1884-1885; seventh year, 1885-1886. St-Louis University, St-Louis, Mo.
- Revista contemporanea. Año XII, tomo LXIII, vol. III et IV. 15-30 de Agosto 1886. — Madrid.
- Revue internationale de l'électricité et de ses applications. 1^{re} année, n^{os} 2, 3 et 4. — Paris-Bruxelles, 1885.
- St-Xavier's college observatory. Observations météorologiques; juillet-décembre 1885.
- La section d'apologétique au Congrès de Rouen. (Extrait des *Annales de philosophie chrétienne*.) — Paris, 1886.
- Société d'encouragement pour l'industrie nationale, rue de Rennes, 44, à Paris. Séance du 26 mars 1886.
- Société géologique de Belgique. Procès-verbaux de l'assemblée générale du 24 novembre 1886. — Liège, 1887.
- Société royale malacologique de Belgique. Procès-verbaux des séances des 1^{er} août, 5 septembre, 3 octobre, 7 novembre et 5 décembre 1885.
- Sodalité des étudiants de l'Université catholique, érigée à Louvain, sous le titre de la Purification de la T. S. Vierge. Année 1885-1886. — Louvain, 1886.
- Science and Education. December, 1886. Volume I, n^o 2.

SECONDE PARTIE

M É M O I R E S

NOTES

SUR

TROIS TESTUDINIDES

DE L'AFRIQUE AUSTRALE

PAR

l'abbé G. SMETS

Docteur en sciences,
Professeur au Collège épiscopal de Hasselt.

A son retour en Europe, le R. P. Croonenberghs, l'intrépide missionnaire de l'Afrique australe, apportait du pays des Métabélés et des environs du Zambèse moyen un assez grand nombre de tortues terrestres, appartenant, d'après le savant jésuite, à sept espèces différentes. Nous avons pu étudier des individus de trois de ces espèces. Ayant eu le plaisir d'observer ces animaux vivants et d'avoir ensuite deux individus morts de *Chersina angulata*, Dum., et de *Homopus areolatus*, Thunb., nous avons pu faire quelques observations intéressantes, qui font le sujet de cette communication. C'est d'abord un fait important à noter que ces trois espèces s'étendent au moins jusqu'au Zambèse et probablement encore au delà de ce fleuve.

I

Chersina angulata ⁽¹⁾, C. DUMERIL.Diagnose d'après Dumeril et Bibron ⁽²⁾ :

Test ovale, oblong, très convexe en arrière, échancré antérieurement, une plaque nuchale, la suscaudale simple; écailles du disque jaunâtres, bordées de noir; sternum étroit en avant, plus long que la carapace, recouvert de 11 plaques.

Le R. P. Croonenberghs en avait rapporté deux couples, dont les individus mâles différaient des femelles par les mêmes caractères de coloration. Les auteurs ne sont pas complètement d'accord sur la coloration de ce chélonien : Strauch ⁽³⁾ et d'autres ont signalé vaguement des différences entre le mâle et la femelle, mais aucun n'a signalé les caractères de coloration qui distinguent nettement les deux sexes. L'illustre savant russe, comme la plupart de ceux qui se sont occupés de cette espèce, n'avait à sa disposition que des individus conservés dans l'alcool ou morts depuis longtemps.

Chez le mâle, les plaques ⁽⁴⁾ du disque, les neurales et les

⁽¹⁾ GRAY, *Catal. of shield reptiles*, App., p. 14, et *On the skull and alveolar surfaces of Land Tortoises*; from the *Proceedings of the zoological Society of London*, 1873, p. 722.

Dans ce dernier travail, l'illustre savant caractérise comme suit le genre *Chersina* :
 « Intergular plates united together and produced forwards. Alveolar process of the upper
 » jaw simple, with a slight groove on the hinder part of the lateral margin. The internal
 » nostrils in the front of a deep concavity that is very slightly contracted on the sides
 » behind. Lower jaw sharp-edged and concave on the inner surface in front, and with a
 » prominent inner edge on the hinder part of the side fitting into a groove in the upper
 » jaw. Front of beak rounded, with a groove on the lower side of each nostril towards
 » the margin, which is marked with three close teeth. »

⁽²⁾ DUMERIL et BIBRON, *Erpétologie*, t. II, p. 130.

⁽³⁾ Dr ALEXANDER STRAUCH, *Chelonologische Studien*. St-Petersbourg, 1862, p. 94.

⁽⁴⁾ Les plaques cornées des chéloniens sont d'origine ectodermique. Comme les écailles des poissons, des gymnophiones et de beaucoup de reptiles sont d'origine mésodermique, nous réserverons le terme de *plaques* aux parties durcies de l'ectoderme, tandis que les éléments constitutifs de l'exosquelette, homologues des *écailles* des poissons, etc., porteront exclusivement le nom d'écailles.

costales sont jaunes au centre, noires ou plutôt noir-brun dans leur pourtour : le noir forme une sorte de bordure au jaune; dans les dernières plaques costales, la base de la bordure est interrompue en un et parfois même en deux points; mais ce dernier caractère est loin d'être constant (1).

L'étendue relative de la partie centrale jaune est variable et semble diminuer avec l'âge et, en tout cas, elle n'occupe qu'une faible partie des plaques. On ne peut pas dire que le disque est jaunâtre; pris dans son ensemble, il est plutôt noir et il porte des taches jaunes.

Si on enlève les plaques des écailles dermiques, leur partie centrale jaune ou jaunâtre est translucide et parfois même transparente. Nous verrons plus loin à quoi est due la coloration particulière du centre des plaques.

Les plaques marginales portent chacune une bande jaune centrale verticale et deux raies noires latérales également verticales. La base de ces plaques recourbées sous le plastron est entièrement blanc jaunâtre.

La plaque caudale porte trois raies noires, la raie jaune étant divisée en deux par une bande verticale noire, incomplète dans un individu. En tenant compte de la distribution des raies dans les autres plaques marginales, on peut conclure que la plaque caudale provient de la fusion de deux marginales et que primitivement elle était double. « Wie es scheint, dit Strauch (2), haben die Analplatte eine entschiedene Neigung zu verschmelzen. » Dans une des femelles, la plaque caudale est partiellement divisée à sa partie supérieure, au milieu de la bande noire médiane. Nous verrons plus loin que ce n'est ni un caractère embryonnaire, ni un caractère atavistique.

Le plastron présente aussi les deux colorations jaune et noire; cette dernière domine autour de la *linea alba*, sans atteindre l'extrémité antérieure de la plaque gulaire; elle n'est pas uniforme, des raies plus pâles, jaunâtres dans le mâle, prenant leur

(1) Cf. STRAUCH, *op. cit.*, p. 95.

(2) *Op. cit.*, p. 37.

origine sur la ligne médiane, l'interrompent. Une bande jaune, dont la largeur est variable, circonscrit tout le plastron. Ainsi chaque plaque du plastron, prise isolément, est noire dans sa moitié intérieure et jaunâtre dans sa partie extérieure; si on la détache, cette dernière partie est également translucide.

Entre les écailles noires qui recouvrent le corps, la peau du mâle est aussi jaune.

La femelle présente cette différence notable que le *rouge* remplace partout le *jaune* du mâle, tant sur le disque que sur le plastron et la peau. Le centre des plaques costales paraît plus blanc, tout en conservant une teinte rougeâtre.

Ce caractère de coloration permet de distinguer aisément les sexes. Cette différence est exprimée nettement dans les deux couples qui ont été en vie à Hasselt; le savant jésuite qui les a apportés la dit générale.

Au premier abord nous avons cru, malgré les grandes affinités des individus *rouges* avec les individus *jaunes*, avoir affaire à une forme nouvelle, tellement ce caractère différenciel est tranché.

A la mort de notre individu femelle, nous avons détaché une plaque costale et une plaque abdominale. Entre celles-ci et l'os dermique s'étend une mince membrane presque complètement rouge. Le microscope y constatait le sang coagulé en assez grande abondance. Les autres plaques restèrent en place: après quelques jours, la coloration primitive disparaissait lentement, virait au jaune et, au bout de quelques semaines, la carapace présentait ces caractères vagues de coloration tels que Strauch et Dumeril les décrivent.

Outre des lignes concentriques anguleuses, la plaque gulaire présente à sa partie inférieure et supérieure des lignes longitudinales profondes, suivant lesquelles elle se déchire aisément. Cette division des plaques se produit même spontanément dans l'animal vivant. Ainsi, dans notre individu adulte, deux de ces sillons longitudinaux, prenant leur origine à l'extrémité antérieure et se poursuivant sur toute la longueur de la plaque, ont détaché une bande large de la partie supérieure. Si cette division

se fût continuée jusqu'à l'extrémité antérieure, on aurait pu croire à l'existence d'une plaque gulaire supplémentaire. C'est par le même procédé que la plaque caudale a été partiellement divisée. Il est fortement probable que la division anormale des plaques dans divers chéloniens s'effectue de la même manière.

Les plaques correspondantes du côté droit et du côté gauche, comme celles des deux individus, ne présentent pas rigoureusement la même forme ni la même coloration. On a évidemment exagéré l'importance des caractères tirés des plaques et de leur coloration pour la distinction des espèces.

La forme extérieure de la boîte osseuse correspond, presque dans tous ses détails, avec celle décrite par les auteurs de l'erpétologie et par Strauch. A la réunion des écailles I et II, sur la ligne médiane, la carapace présente une arête longitudinale saillante, arête qui s'imprime au milieu de la première plaque dorsale.

La carapace, disent Dumeril et Bibron, est très convexe en arrière, le pourtour est complètement vertical sur les côtés et à l'extrémité postérieure du corps, mais il est fort incliné au-dessus des pieds de derrière. Un de nos individus s'écarte de cette description, en ce que sa convexité est la plus forte au $\frac{5}{6}$ de la carapace et que ses écailles margino-caudales sont également inclinées : ce n'est, sans aucun doute, qu'un caractère dû au plus grand développement de cet individu.

Nos exemplaires ne présentent pas « einen an der Vereinigungstelle der Abdominal- und Femoralplatten stark gehöhlten Brustschild » (1). Notre femelle présente, au contraire, une dépression longitudinale le long de la *linea alba*.

Dans ce même individu, le plastron est plus long que la carapace et il ne laisse d'autre passage à son extrémité que pour la queue et les pieds ; dans les individus jeunes, le plastron, plus court que la carapace, n'a pas encore atteint les écailles marginales du disque.

(1) STRAUCH, *op. cit.*, p. 93.

Le plastron a 16 centimètres dans une femelle, la carapace 15 ; dans un jeune mâle, celle-ci a 13 centimètres, celui-là 11 centimètres de longueur.

Dans le premier individu, nous avons observé une légère mobilité du xiphiplastron. On retrouve encore ce caractère dans *Testudo mauritanica*, Dum. et Bib., et *T. marginata* ⁽¹⁾, Schœpf., que Wagler ⁽²⁾, pour cette raison, avait réunies dans son genre *Chersus*. Ce nouveau cas de mobilité du xiphiplastron confirme ce que les auteurs de l'erpétologie pensaient de cette mobilité : « Il y a ⁽³⁾ plusieurs chersites chez lesquelles le plastron est doué de mobilité, soit dans ses pièces antérieures, soit dans la région postérieure. Le genre *Pyxis* de Bell est dans le premier cas ; celui que Wagler avait proposé sous le nom de *Chersus* nous offrirait la seconde disposition. Nous avons déjà dit que nous n'avions pas cru devoir séparer cette espèce, désignée sous le nom de *Bordée*, du genre *Tortue*, où elle avait été inscrite : d'abord, parce que cette mobilité, qui en ferait le caractère essentiel, est bien peu sensible, puisqu'il n'y a pas de véritable charnière ligamenteuse, comme dans les *Pyxis* et les *Cinyxis* ; ensuite on a dit qu'on avait rencontré, parmi les tortues proprement dites, des individus femelles qui, à l'époque où elles pondent, n'ont pas cette portion postérieure du sternum tellement sondée à l'antérieure qu'elle ne puisse un peu s'écarter de la carapace et offrir un léger mouvement. Il résulte de là que la mobilité de la portion postérieure du sternum, chez la tortue *Moresque* et *Bordée*, ne peut véritablement être considérée comme un véritable caractère de genre. »

Chersina angulata possède des ongles longs, pointus et peu usés ; « elle s'écarter en cela de toutes les autres chersites » ⁽⁴⁾. On ne peut nullement comparer ses extrémités aux pieds des

⁽¹⁾ Strauch a adopté pour ces deux espèces les noms spécifiques de *Pusilla*, Shaw, et de *Campanulata*, Walb.

⁽²⁾ Dr J. WAGLER, *Naturalischer System der Amphibien*. Munich, 1830, p. 138.

⁽³⁾ *Op. cit.*, t. II, p. 16.

⁽⁴⁾ *Erpétologie*, t. II, p. 180.

éléphants et des ongulés, d'autant plus que les doigts nous ont paru doués d'une certaine mobilité.

« Ses bras sont plus comprimés que chez aucune autre tortue terrestre », disent les mêmes auteurs. Cette tortue nage aisément, comme nous avons pu nous en assurer. Si l'on tient compte de la somme de tous ces caractères, on voit que *Ch. angulata* commence déjà à établir la transition des *Chersites* aux tortues paludines et l'on ne peut qu'approuver Strauch d'avoir modifié la classification trop artificielle des erpétologistes français.

Les auteurs (1) disent communément que les vertèbres dorsales des chéloniens sont dépourvues d'apophyses transverses. Cependant voici ce que nous observons dans les deux squelettes que nous avons sous les yeux : les quatre premières côtes sont normales et se réunissent à deux corps vertébraux. La cinquième côte s'unit principalement à la cinquième vertèbre et à partir de là les neurapophyses des dernières vertèbres dorsales, parfaitement coossifiées avec les écailles neurales, portent des diapophyses bien accentuées, atteignant 6 et 7 millimètres de longueur et s'articulant avec les côtes. Celles-ci s'unissent aux vertèbres, non plus à la réunion de deux corps vertébraux, mais au milieu de la vertèbre. Ailleurs « das proximale Ende der Wirbeln entspringt ungegabelt auf die Grenze zwischen Wirbelkörper und bogen, meistens zwischen zwei Wirbeln » (2).

Ce caractère semble être en rapport avec l'état cartilagineux que conservent longtemps les corps des vertèbres dorsales. Car, dans le mâle non encore complètement adulte, toutes les vertèbres dorsales avaient conservé ce caractère embryonnaire, tandis que toutes les autres vertèbres étaient parfaitement ossifiées.

Cette tortue habite Madagascar et toute l'Afrique australe ; elle n'est pas rare sur les bords du Zambèze.

D'après ces observations, nous croyons devoir modifier la diagnose de cette espèce comme suit :

(1) Cf. HUXLEY, *Anatomie comparée* (édition française), p. 209. — DUM. et BIB., t. I, p. 369, etc.

(2) WIEDERSHEIM, *Lehrbuch der Vergleichenden Anatomie*.

Chersina (Gray) ⁽¹⁾ : tortues terrestres à carapace fortement bombée, légèrement comprimée dans sa partie antérieure, plastron recouvert de onze plaques ⁽²⁾.

Chersina angulata (C. Dumeril) : test ovale, oblong, très convexe vers son extrémité postérieure, échancré antérieurement, une plaque nuchale, la suscaudale simple ou incomplètement divisée, centre des plaques neurales et costales jaune dans le mâle, rouge dans la femelle et bordé de noir ; plaques marginales avec trois raies verticales ; plastron étroit en avant, plus long que la carapace dans l'animal adulte, noir-brun au centre et, dans son pourtour, jaune dans le mâle, rouge dans la femelle.

II

Testudo sulcata, MILLEN. (Tortue alloumée.)

Diagnose d'après Dumeril et Bibron :

Test fauve, ovale, convexe, déprimé, profondément strié, dentelé devant et derrière, point de plaque nuchale, la suscaudale simple, bras hérissés de tubercules coniques.

Cette remarquable espèce est représentée par un individu de grande taille, actuellement en vie à Hasselt. Ses caractères concordent, presque dans tous leurs détails, avec la description des auteurs.

La carapace de ce bel animal a une longueur de 43 centimètres et une largeur de 30 centimètres, vers la région fémorale ; l'animal debout atteint 27 centimètres de hauteur.

Ses mâchoires sont très puissantes et fortement denticulées. Au-dessus des membres postérieurs, les écailles marginales, fortement obliques, se recourbent en dehors en formant une gouttière.

⁽¹⁾ GRAY, *Catal. of shield reptiles*, p. 4.

⁽²⁾ Il est très probable que la présence de diapophyses aux vertèbres dorsales est un caractère générique ; car *Ch. Vosmaeri* (Fitz.), nous assure-t-on, en possède également.

Les plaques axillaires sont très développées. Les ongles des membres antérieurs sont massifs et fortement usés ; le cinquième est très réduit ; ceux des pieds sont plus longs, moins usés, mais moins robustes.

La force de notre individu est remarquable : il traîne aisément un poids dépassant 50 kilogrammes, attaché au moyen d'une corde passant par un orifice pratiqué dans l'écaille caudale.

Ses allures, au moment de son arrivée et au commencement de son séjour en Europe, étaient très vives, n'ayant rien de commun avec la démarche lourde et nonchalante des tortues malades de nos jardins zoologiques. Il ne se traîne nullement, il n'avance pas non plus, comme les auteurs se plaisent à le répéter, en traînant son plastron sur le sol ; mais il se soulève alertement, il est parfaitement équilibré sur ses quatre pattes et sa démarche est assez élégante. Notre climat est délétère pour ces animaux ; aussi notre individu perd de jour en jour de sa vivacité.

Quand on l'inquiète, il pousse un cri rauque et il lance une bave fétide.

Il mange indifféremment de toutes les herbes ; il les saisit dans sa mandibule et, selon leur consistance, il soulève brusquement la tête pour les couper, ou il appuie un pied sur la feuille de chou qu'il doit déchirer.

Cette tortue habite presque tout le continent africain : on la connaît en Abyssinie, au Cap, au Sénégal, au Sennaar et, comme nous l'apprenons par les missionnaires, elle pénètre au cœur du continent.

D'Orbigny s'est trompé très probablement en supposant qu'il avait apporté, de la Patagonie (*), un individu de cette espèce, ou, si le fait est exact, cet individu y avait été introduit. Outre qu'il est très difficile de supposer qu'une et même espèce habite le continent africain et américain, il serait plus étonnant encore que depuis d'Orbigny on n'ait plus signalé un seul individu de cette grande espèce en Amérique.

(*) Cf. STRAUCH, *op. cit.*, p. 79.

III

Homopus areolatus, THUNBERG.

Homopus (Dum. et Bibron) : tortues terrestres à quatre doigts seulement et tous onguiculés à chaque patte, carapace et sternum d'une seule pièce.

H. areolatus (Thunb.) : carapace ovale, oblongue, déprimée, à limbe relevé en gouttière le long des flancs et en arrière; la suscaudale simple; écailles de la carapace à aréoles larges, enfoncées et à stries concentriques et fortement prononcées (1).

Nous maintenons le genre *Homopus*, créé par les erpétologistes français et abandonné par Strauch (2). Le chélonographe russe adopte le genre *Chersina*, proposé par Gray (3) et fondé sur la présence d'une plaque gulaire impaire; il rejette le genre *Homopus* établi sur la présence de quatre doigts seulement aux membres antérieurs et sur la dépression du disque. En faisant abstraction de ce dernier caractère, la présence de quatre doigts seulement aux extrémités antérieures est évidemment un caractère plus important que la présence d'une plaque gulaire impaire. S'il fallait rechercher l'enchaînement des chéloniens, on dirait que les *Homopus* représentent une étape de leur évolution; ils établissent évidemment une liaison, une transition et, par conséquent, offrent une importance suffisante pour être classés dans un genre à part. Qu'importe si la *T. græca* (4) présente, comme anomalie, ce caractère; tient-on compte, dans la même mesure, des caractères atavistiques que présentent d'autres animaux, comme le cheval? Ces animaux présentent, dans leur organisation interne, quelques caractères particuliers qui, étudiés de plus près, pourront décider définitivement.

Un couple de cette belle espèce a été apporté par le mission-

(1) DUM. et BIB., t. II, pp. 146 et suiv.

(2) *Op cit.*, p. 21.

(3) GRAY, *Catal. of shield reptiles*, p. 12.

(4) STRAUCH, *op cit.*, p. 21.

naire. Leurs ongles minces, allongés et pointus sont à signaler, de même que les plaques inguinales et axillaires petites et triangulaires. Nous espérons revenir sur cette tortue; quand des matériaux plus amples, que nous attendons de l'Afrique, seront à notre disposition.

LES TORTUES RUPÉLIENNES

PAR

l'abbé G. SMETS

Docteur en sciences,
Professeur au Collège épiscopal de Hasselt.

L'argile rupélienne renferme un grand nombre de tortues, dont jusqu'ici une seule espèce a été décrite, c'est le *Sphargis rupeliensis* ⁽¹⁾, Van Beneden.

Déjà en 1843, M. de Koninck ⁽²⁾ annonçait, à l'Académie de Belgique, que l'on avait trouvé, dans ces terrains, des fragments d'une chélonée. En 1869, M. Van Beneden ⁽³⁾, en faisant la revision des reptiles fossiles de la Belgique, désignait une tortue nouvelle de l'argile de Boom, et dont il possédait divers fragments, sous le nom de *Bryochelys Waterkeyni*, Van Beneden.

Plus tard, le même savant en a reconnu une seconde espèce, à laquelle il donnait dans ses cours le nom de *Chelyopsis litto-reus*, Van Beneden.

D'autres travaux ont détourné l'attention de notre éminent paléontologiste, qui espérait faire un jour la monographie de ces reptiles fossiles, dont il continuait à recueillir les ossements.

Par une générosité dont nous ne saurions assez le remercier, notre illustre maître a confié à un de ses élèves le riche trésor

(1) VAN BENEDEN, *Bullet. de l'Académie royale de Belgique*, sér. III, t. VI, n° 42, 1883.

(2) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, t. X, 1^{re} partie, p. 32.

(3) VAN BENEDEN, *Patria Belgica*, 1^{re} partie, p. 375. — *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, t. XXXI, p. 42.

qu'il était parvenu à réunir et il l'engageait, en même temps, à faire la monographie de ces intéressants animaux.

En attendant l'achèvement de ce travail, je ne ferai qu'indiquer brièvement, dans cette notice, les tortues des couches rupéliennes, autres que *Sphargis rupeliensis*, Van Beneden.

***Bryochelys Waterkeynii*, VAN BEN.**

C'est une petite tortue marine, dont la face intérieure des écailles costales se fait remarquer par « des expansions foliacées qui les font ressembler à une mousse pétrifiée » (1).

De plus toutes les écailles costales sont légèrement concaves à leur face supérieure.

Outre des écailles costales, nous possédons diverses écailles vertébrales, des vertèbres dorsales, un fragment d'humérus, un fémur, un tibia et divers os du bassin, etc.

Par sa taille, comme par divers autres caractères, elle se rapproche de certaines tortues marines du London-Clay décrites par M. R. Owen (2).

***Chelyopsis littoreus*, VAN BEN.**

Cette tortue, dont nous n'avons que de rares fragments, devait être de grande taille à en juger par un ilion de 17 centimètres de long, un corps d'une vertèbre dorsale de plus de 10 centimètres et un fragment d'écaille costale qui a près de 2 centimètres d'épaisseur. Nous en possédons également un fragment d'humérus et, probablement, il faut encore attribuer à cet animal un autre humérus presque complet dont la longueur est de 13 1/2 centimètres.

(1) VAN BENEDEN, *loc. cit.*, p. 12.

(2) *Monograph of the fossil reptilia of the London Clay.* (PALEONTOGRAPHICAL SOCIETY, 1849.)

Chelone Van Benedenii, SMETS.

Cette nouvelle espèce était de taille moyenne, mais elle dépassait en longueur toutes les tortues décrites par M. Owen. Nous en possédons d'intéressants fragments de la tête, qui la rapprochent du *Dermatochelys*. Ses vertèbres cervicales sont remarquables par la longueur du talon, qui passe sous le corps de la vertèbre suivante. Nous en avons en outre plusieurs écailles costales, un humérus, divers os du bassin et du plastron, etc.; en sorte qu'il sera possible de faire la restauration complète de cette espèce.

Heureusement nous possédons, de ces trois espèces, des parties du membre antérieur et du bassin. De *Sphargis rupéliensis* on connaît également un os du bassin. La comparaison de tous ces restes permet de démontrer à l'évidence que, dans la mer rupélienne, vivaient, outre l'intéressant *Sphargis*, au moins trois autres espèces de chéloniens.

Ajoutons encore que nous sommes en possession d'un fragment d'une écaille costale, que nous ne pouvons rapporter à aucune de ces trois espèces, et qui porte un de ces « runden Knöpfchen », que Von Meyer signale, en si grand nombre, dans son genre *Helochelys* (1).

(1) VON MEYER, *Jahrbuch*, etc., 1854, p. 575.

UNE TORTUE NOUVELLE DU CRÉTACÉ DE MAESTRICHT

PAR

l'abbé G. SMETS

Docteur en sciences,
Professeur au Collège épiscopal de Hasselt.

« Un des faits les plus remarquables de la distribution géographique des chéloniens, dit M. Pictet ⁽¹⁾, est le mélange qui existe souvent entre les tortues de mer et celles d'eau douce ; tandis que de nos jours les chélonées sont toujours exclusivement marines et que les émydes et les trionyx n'habitent que les fleuves, les lacs ou les marais d'eau douce.

» On trouve, par exemple, quelques chélonées ou tortues marines fossilisées dans les terrains jurassiques et néocomiens, dans le grès vert et dans la craie, qui sont des dépôts formés par la mer, tandis que d'autres espèces ont leurs ossements dans le calcaire de Purbeck ou dans les terrains wéaldiens, qui ont été formés par les eaux douces.

» Ainsi on trouve des émydes dans diverses localités marines des terrains jurassiques, et d'autres dans des terrains d'eau douce, tels que le wéaldien, les molasses, les schistes d'Oeningen, etc. Les trionyx présentent le même mélange.

» Il en résulte que quelquefois un même gisement renferme des débris confondus de tortues de mer et de tortues d'eau douce. Ainsi les terrains wéaldiens ont des émydes et des chélonées et les argiles de Sheppy renferment, en quantité considérable, ces deux genres réunis avec des trionyx. »

(1) PICTET, *Traité de paléontologie*, t. I, p. 439-4833.

Ce curieux mélange de tortues marines et d'eau douce, au lieu de constituer une exception, semble devenir règle, à mesure que les découvertes se multiplient.

Ainsi M. Preudhomme de Borre ⁽¹⁾ signale dans les terrains tertiaires des environs de Bruxelles (système bruxellien et laekénien), outre *Trionyx bruxellensis*, Winkler ⁽²⁾, *Emys Camperi*, Gray ⁽³⁾ (= *Emys Cuvieri*, Gal. ⁽⁴⁾), des débris d'une tortue marine et encore une seconde espèce de la famille des potamites.

En 1870, M. Delfortrie ⁽⁵⁾ a décrit des thalassites (*Chelonia Gerundica*, Delf.) et des potamites (*Trionyx aquitanicus*, Delf., et *Trachyaspis miocœnus*, Delf.) provenant de la molasse falunienne des environs de Bordeaux (miocène supérieure de la Gironde).

De même Leidy ⁽⁶⁾ a décrit une écaille costale de *Trionyx priscus*, Leidy, provenant du crétacé de New-Jersey, etc.

Nous avons trouvé dans le rupélien marin de la basse Belgique une écaille costale que nous attribuons à une émyde.

Jusqu'à présent, l'on ne connaissait, dans le crétacé de Maestricht, que la célèbre *Chelonia Hoffmanni*, Gray, et *Chelonia Suykerbuykii*, Ubaghs ⁽⁷⁾.

Nous venons de recevoir du tuffeau de Maestricht, par l'intermédiaire de M. P.-J. Van Beneden, notre illustre maître, deux fragments d'une tortue, dont les affinités sont assez multiples, mais qui dénotent certainement l'existence d'une troisième tortue, appartenant au groupe actuel des tortues d'eau douce.

La coloration et les caractères de la gangue qui enveloppait ces fossiles indiquent qu'ils sont sortis du maestrichtien moyen.

Nous avons vu, au musée de M. Ubaghs, à Maestricht, des

⁽¹⁾ *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 2^e série, t. XXVII, p. 420. 1869.

⁽²⁾ WINKLER, *Des tortues fossiles conservées dans le Musée Teyler*, Harlem, 1869, p. 135.

⁽³⁾ GRAY, *Synopsis reptilium*, p. 33.

⁽⁴⁾ GALEOTTI, *Mémoire sur la constitution géognostique de la province de Brabant*, 1837. (Tome XII des Mémoires couronnés par l'Académie royale de Belgique.)

⁽⁵⁾ *Actes de la Société linnéenne de Bordeaux*, t. XXVII.

⁽⁶⁾ *Crétac. Rept.*, p. 113.

⁽⁷⁾ *Description géologique et paléontologique du sol du Limbourg*, 1879.

fragments ⁽¹⁾ d'une tortue inconnue, provenant également du maestrichtien moyen et de Ciplý. Ils portent le n° 1547 du catalogue et la rubrique : « Ossements d'un *Chelonia*, espèce inconnue, du maestrichtien moyen et de Ciplý, trois pièces » ⁽²⁾. Il est possible que ces restes appartiennent à la même espèce que celle dont nous allons décrire deux fragments.

Le premier, figures 1 et 2, est une portion d'une vertèbre cervicale, que nous croyons être la partie antérieure de la septième de cette région. La longueur du fragment conservé est de 18 millimètres, en sorte que la longueur totale, présumée, de la vertèbre est au moins de 40 millimètres.

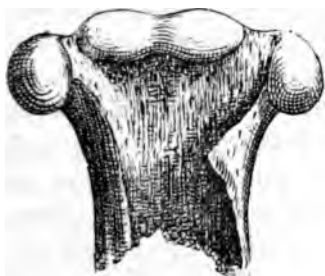


FIG. 1.
Face dorsale.

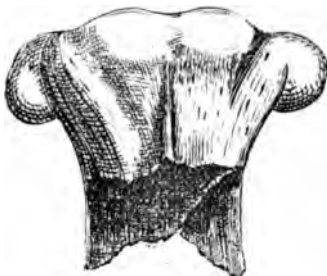


FIG. 2.
Face ventrale.

La largeur de la vertèbre à sa face céphalique, les prézygapophyses y comprises, est de 32 millimètres.

Le condyle du corps est divisé nettement en deux cotyles articulaires, caractère inconnu dans les tortues marines tant vivantes que fossiles, excepté pour l'articulation de la dernière vertèbre cervicale avec la première dorsale. La largeur du condyle est de 15 millimètres. Les prézygapophyses sont assez élevées et placées très obliquement par rapport à l'axe de la vertèbre. La suture neuro-centrale les sépare d'un tubercule assez volumineux placé obliquement sur le corps de la vertèbre et dépassant la base de ce dernier.

⁽¹⁾ Le Musée royal d'histoire naturelle de Belgique a acquis récemment ces fossiles.

⁽²⁾ *Catalogue des collections, etc., du Musée Ubaghs*. Liège, 1883, p. 24.

Le canal rachidien est large et arrondi à sa face inférieure.

La face ventrale de la vertèbre se distingue d'abord par l'absence de la crête énorme, caractéristique des tortues marines, et par les deux tubercules proéminents dont nous avons déjà parlé. A peu de distance du condyle naît une légère crête, qui s'élève insensiblement jusqu'à la cassure.

En comparant ce fragment avec des vertèbres cervicales de trionyx, par exemple avec celles de *Trionyx incassatus* d'Owen (1), on est frappé de leur grande ressemblance et l'on n'hésiterait pas longtemps à attribuer ce fragment à un *Trionychida*, si l'écaille (2) vertébrale qui a été trouvée avec cette portion de vertèbre ne s'y opposait. Si l'affinité est grande, surtout avec les tortues fluviatiles, cependant ce type de vertèbre cervicale se rencontre également dans les tortues paludines.

Le second fragment que nous possédons est assurément la première des écailles vertébrales; elle est heureusement conservée intégralement, sauf les neurapophyses qui ont été brisées et une légère partie de la pointe antérieure. Les figures 3 et 4 donneront une idée complète de sa forme extérieure. Sa longueur est de 56 millimètres; sa plus grande largeur de 24. Au delà des trois quarts de sa longueur, elle donne, de chaque côté, une pointe correspondant aux sutures postérieures des écailles costales. Il est très intéressant à noter que les écailles costales du second rang venaient se souder à la première écaille vertébrale, comme on l'observe également dans les trionyx. Sur les bords on remarque encore les dentelures qui servaient à l'enchevêtrer dans les écailles costales, en sorte que nous sommes certain de l'intégrité de la pièce.

A sa face supérieure on observe d'abord un petit sillon transversal vers la pointe antérieure. Ce sillon a dû exister durant la vie de l'animal; si on l'examine à la loupe, on voit des lignes bien

(1) OWEN et BELL, *Monograph on the fossil Reptilia of the London-clay*, p 54, tab. XIX.

(2) Comme nous l'avons dit dans notre *Notice sur trois Testudinides de l'Afrique australe*, nous réservons le terme *plaques* aux parties durcies de l'ectoderme, tandis que les éléments constitutifs de l'exosquelette, d'origine mésodermique, portent exclusivement le nom d'*écailles*.

régulières s'avancer vers le bord du sillon et se réunir là au moyen d'une courbe avec la ligne voisine. Que si le sillon était dû à l'action d'un corps étranger, il est infiniment probable que ces lignes eussent été brisées en ce point.

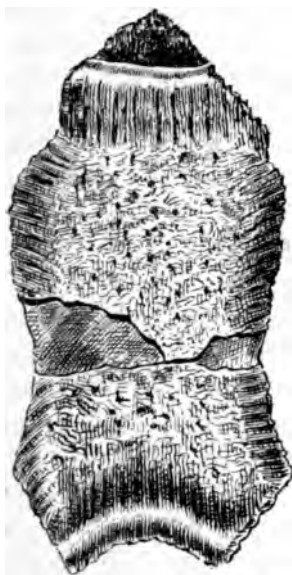


FIG. 3.
Face supérieure.

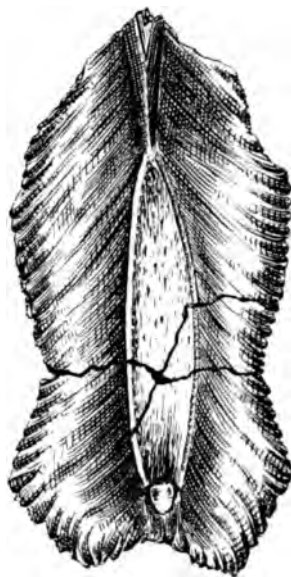


FIG. 4.
Face inférieure.

Ce sillon représente-t-il la trace de la séparation de plaques épidermiques? D'abord, il ne ressemble pas au second sillon, placé à l'extrémité postérieure de la pièce et qui est dû certainement à l'impression de la réunion de plaques épidermiques.

Si le dessin d'une tortue — *Pleurosternon ovatum*, Owen — qui présente avec la nôtre d'étroites affinités, si ce dessin de M. Winkler (1) est exact, nous pourrions dire que nos deux sillons sont effectivement deux *Grenzeindrucke*, comme dit von Meyer. M. Winkler dit, en effet, page 116, que dans sa figure « les lignes doubles nous présentent les bords des plaques ». Il

(1) *Op. cit.*, planche XXIII, fig. 67 et 67^a.

indique donc un premier sillon à la pointe de la première écaille vertébrale et un second au tiers de sa longueur. Dans ce cas, les deux tortues devaient avoir une plaque nuchale impaire, si le rang attribué par le savant directeur du Musée Teyler aux plaques vertébrales est le vrai; et la plaque que M. Winkler indique comme « plaque nuchale » (*pn*) n'est pas la plaque nuchale proprement dite. Cependant *Pleurosternon ovatum*, Owen, représenté par R. Owen (¹), n'a pas de plaque nuchale impaire.

Si réellement ce sillon indique la réunion de deux plaques épidermiques, ne faudrait-il pas dire qu'il indique la séparation des deux premières vertébrales, dont l'antérieure s'avance toujours notablement sur l'écaille nuchale ?

Le sillon postérieur, plus large, décrit une légère courbe, dont la convexité est tournée en avant.

La surface de cet os est plus ou moins granuleuse, un peu ponctuée, excepté dans ses contours, où elle est striée perpendiculairement aux bords. La partie centrale, examinée à la loupe, ne représente pas le relief des os dermiques des émydes, mais elle a plus ou moins d'analogie avec les os dermiques des trionyx.

A la face inférieure, on note surtout la partie antérieure, relevée en dos d'âne, sur la ligne médiane. Les neurapophyses sont brisées et du canal rachidien ne reste qu'une légère trace à la partie postérieure de la pièce.

Sur ses bords, la face inférieure est striée tantôt perpendiculairement, tantôt obliquement aux bords et ressemble encore, sous ce rapport, à s'y méprendre, à la première écaille vertébrale de trionyx.

Quand il s'agissait de déterminer ces ossements, notre attention fut d'abord portée vers les *Tretosternon* d'Owen et les *Trachyaspis* de von Meyer, ces trionyx qui portent des plaques épidermiques, mais l'analogie faisait défaut.

(¹) R. OWEN, *A monograph of the fossil Chelonian Reptiles of the Wealden-clay and Purbeck Limestones*, pl. VII 18 3.

En 1835, sir Richard Owen (1) a décrit un genre remarquable de tortues, qu'il range dans les tortues paludines, auquel il a donné le nom de *Pleurosternon* et qu'il définit comme suit, page 2 : « Testa depressa lata, complanata; sternum integrum, ossibus undecim compositum, ossiculis marginalibus cum testa conjunctum; scutis submarginalibus inter scuta axillaria et inguinalia positis. »

En 1869, M. Winkler a décrit, comme nous l'avons déjà dit, un individu de ce genre, qui se rapproche beaucoup de notre tortue. Malheureusement ni l'un ni l'autre de ces paléontologistes n'ont connu des vertèbres de ces reptiles.

Sir Richard Owen dit, page 4 : « The exterior surface of all the above described elements of the carapace is minutely wrinkled and granulated; except near the sutural borders, where it is impressed by numerous close set fine lines, directed at right angles, or nearly so, with those borders. »

M. Winkler, page 112 : « La peau (?) de l'échantillon est d'une couleur brune, tachetée de noir. Elle est un peu rude au toucher, à cause d'une multitude de petites cavités rondes et de petits sillons peu profonds, qui ornent la surface supérieure. Ces petits sillons se voient surtout aux bords des pièces du bouclier, tandis que les petites cavités se montrent principalement sur le milieu des pièces et par conséquent aux bords des plaques. »

Décrivant la première écaille vertébrale, il dit : « La première... est longue de 0,06 et large à son bord antérieur de 0,02. Plus en arrière, aux trois quarts de sa longueur, elle devient plus large et forme de chaque côté une pointe correspondant aux sutures postérieures des premières pièces costales, et pour redevenir ensuite moins large et s'unir avec la deuxième pièce. »

Ainsi, la dimension de la pièce, son étroitesse, les caractères de sa surface, comme la disposition des écailles costales, que l'on peut inférer des pointes suturales de l'écaille vertébrale, même la

(1) R. OWEN, *A monograph of the fossil Chelonian Reptiles of the Wealden-clay and Purbeck Limestones*. London, 1833. — PALEONTOGRAPHICAL SOCIETY, *Fossil Reptilia of Great Britain*, part IV, pl. 1, 1853.

dispositon des plaques épidermiques, tout semble faire attribuer ces ossements à un *Pleurosternon*.

Les individus décrits par l'illustre paléontologiste anglais sortent du purbeckien (dépôt d'eau saumâtre et d'eau douce) et du wéaldien (eau douce). M. Winkler n'indique pas l'origine de son individu et il semble l'ignorer.

Si nos débris ont été rencontrés dans un dépôt marin, on peut répondre que, à maintes reprises, on a trouvé cette anomalie — si c'en est une — dans la distribution géographique des chéloniens.

Notre chélonien se distingue :

1° De *Pl. concinnum*, en ce que celui-ci a la première écaille vertébrale double, par la disposition des écailles costales et celle des plaques vertébrales;

2° De *Pl. emarginatum*. Celui-ci a la première écaille vertébrale double; la disposition relative des plaques vertébrales et des écailles costales diffère également;

3° De *Pl. ovatum*, de M. Owen, par la forme de la première écaille vertébrale et par la place du sillon des plaques épidermiques;

Du *Pl. ovatum*, décrit par M. Winkler, par la place du sillon postérieur des plaques épidermiques. La première plaque vertébrale dans notre exemplaire a dû s'avancer sur les écailles costales du second rang, ce qui n'a pas lieu dans l'exemplaire du Musée Teyler;

4° De *P. latiscutatum*, par la forme de la première écaille vertébrale, par la disposition des écailles costales du second rang, qui ne se réunissaient pas à la première écaille vertébrale, et encore par la place du sillon.

En somme, notre exemplaire se rapproche le plus de l'individu décrit par le paléontologiste hollandais et attribué par lui à *P. ovatum*.

Malgré ces affinités et malgré ces différences, ce serait téméraire que de vouloir dès aujourd'hui désigner cet animal sous un nom quelconque. Nous croyons seulement avoir établi qu'il existe dans le maestrichtien des débris d'une tortue paludine, qu'il faut, peut-être, attribuer au genre *Pleurosternon*.

Nous avons vu que l'association de chéloniens marins et d'eau douce est très fréquente dans les diverses couches géologiques et que, au lieu de constituer une exception, cette association se montrait de plus en plus générale.

• Doit-on conclure de ces faits, se demande Pictet (¹), que les tortues du monde ancien avaient une habitation moins stricte que celles du monde actuel, et que les émydes pouvaient vivre dans la mer et les chélonées dans l'eau douce? Cette supposition n'est pas absolument impossible, car l'étude de ces espèces montre des transitions qui manquent aujourd'hui, et l'on connaît quelques émydes fossiles plus thalassines de formes qu'elles ne le sont actuellement, et surtout quelques chélonées qui présentent des transitions aux émydes. »

Cette première interprétation du phénomène dont il s'agit s'applique parfaitement à la famille (²) des thalassémydes, si bien décrits par MM. Rutimeyer et Zittel et dont un représentant nouveau a été trouvé dans les charbonnages de Bernissart. Mais outre des thalassémydes rencontrés à la fois dans des dépôts marins et d'eau douce, on rencontre des émydes et des trionyx véritables dans les mêmes conditions.

• Il est possible aussi, continue M. Pictet, que des inondations subites, en augmentant les fleuves et en accélérant leur cours, aient transporté dans la mer les animaux qui les peuplaient et les aient mélangés avec des êtres exclusivement marins...

• Il est possible aussi que la différence de salure entre les diverses eaux du globe n'ait pas été toujours aussi prononcée qu'aujourd'hui. Nous verrons, dans l'histoire des poissons, des faits qui semblent montrer qu'aux époques géologiques anciennes, les eaux qui recouvraient la surface du globe n'offraient pas des différences aussi tranchées que celles qui distinguent de nos jours les eaux pélagiques des eaux terrestres.

• On peut enfin remarquer que quelques-unes de ces loca-

(¹) *Op cit.*, t. I, p. 440.

(²) L. DOLLO, *Première note sur les Chéloniens de Bernissart* (BULLETIN DU MUSE ROYAL, t. III, p. 73.)

lités, où sont réunies des tortues d'eau douce et de mer, ont des caractères paléontologiques mixtes qui peuvent faire penser que ces terrains ont été formés dans des estuaires, auprès des embouchures des grands fleuves. Ainsi les argiles de Sheppy renferment des coquilles marines et des coquilles fluviatiles, dont la réunion a été expliquée en supposant qu'elles aient été déposées naturellement, les unes par la mer, les autres par un grand fleuve qui y versait ses eaux. Il peut s'être passé quelque chose de pareil pour les tortues. Je dois toutefois faire remarquer que cette explication ne paraît plausible que pour quelques localités. »

Ces différentes causes ne peuvent rendre compte que de quelques découvertes de chéloniens, actuellement d'eau douce, dans les dépôts marins, mais non pas de l'ensemble des faits. Quant au degré de salure de l'eau de la mer, les dépôts immenses de sel gemme, qui se sont effectués durant l'ère secondaire et tertiaire, attestent une salure des eaux peut-être supérieure encore à celle d'aujourd'hui.

Une autre cause peut rendre compte de ces faits : on sait qu'aujourd'hui les eaux continentales sont généralement beaucoup plus chaudes que les eaux des mers. Les récentes explorations scientifiques ont montré avec quelle rapidité la température de l'eau des mers s'abaisse avec la profondeur. Cette différence n'était pas si grande aux âges géologiques et les eaux chaudes des océans permettaient aux reptiles gigantesques, comme aux tortues, de vivre et de se développer au sein de la mer. Mais avec l'abaissement graduel de la température, les grands reptiles se sont successivement éteints, les crocodiles se sont réfugiés à l'embouchure des fleuves et les chéloniens ont été, pour la plupart, refoulés dans les eaux intérieures possédant une température plus élevée. Seuls quelques rares thalassites ont pu s'habituer aux eaux froides de l'Océan. A l'abondance et à la variété des débris de chéloniens marins, dans les diverses assises géologiques, on remarque que ce groupe est à son déclin. Les autres groupes de chéloniens ont pu se perpétuer et conserver encore une grande richesse, grâce à leur acclimatation dans les eaux continentales. On pourrait donc dire que les émydes, les chélydes et les trionyx

sont actuellement d'eau douce, mais que primitivement ces animaux, en grande partie du moins, étaient marins.

Si cette interprétation de faits géologiques est vraie, on pourrait mieux se rendre compte de la distribution des chéloniens à la surface du globe. Ainsi l'hémisphère boréal (1) est habité presque exclusivement par des *émydes*, tandis que l'hémisphère austral n'a que des *chélydes* : si les premières habitaient de préférence les mers boréales, les autres les mers australes, elles ont dû se répandre, au moment du refroidissement de notre planète, sur les terres avoisinantes.

(1) Dr ALB. STRAUCH, *Die Vertheilung des Schildkröten über den Erdball*, p. 197. — St-Pétersbourg, 1865.

MÉMOIRE

SUR LES

MONTAGNES CRATÉRIFORMES

DE LA PLANÈTE VÉNUS

OBSERVÉES EN 1884

par Dom LAMEY

L'observation des taches de Vénus présente certaines difficultés très propres à décourager au premier abord, surtout si l'on n'use pas de quelques moyens de confrontation capables de nous renseigner sur la valeur des apparences perçues ou soupçonnées. L'éclat scintillant de la planète et l'aspect houleux que son disque présente presque toujours rendent les détails que l'on y observe trop souvent vacillants, incertains et instables. Ils disparaissent au bout d'un instant, il faut les épier pour les revoir et saisir parfois d'un clin d'œil leur configuration. Quelques taches cependant sont plus particulièrement persistantes, mais encore faut-il, du lieu où l'on observe, jouir d'une atmosphère favorable. Dominique Cassini ne put jamais revoir à Paris les grandes taches rondes, claires ou obscures, qu'il avait observées sous le beau ciel de l'Italie, en 1666 et 1667. Bianchini les revit à Rome en 1726 et 1727, au nombre de sept principales, et la carte topographique qu'il a publiée a fait, jusqu'à ces derniers temps, les frais principaux des publications d'astronomie populaire.

1. Les premiers essais que je fis, peu après le passage de Vénus sur le soleil en 1882, m'ont prouvé qu'il était possible d'obtenir avec les instruments de notre observatoire quelques résultats nouveaux et intéressants. Aussi, dès le 3 janvier 1884, je commençais avec trois de mes confrères une série d'obser-

vations formant jusqu'à la date du 2 novembre un total de 78 dessins ou croquis. La comparaison de toutes ces observations, faites dans des conditions très différentes d'instrument, d'organe visuel et, si l'on veut, de préoccupation intellectuelle, permettent, grâce à la concordance des résultats, de formuler avec une entière certitude les conclusions que voici : 1° les grandes taches claires de Vénus affectent en règle générale une forme arrondie ; 2° elles sont ordinairement entourées d'une bordure étroite et brillante cratériforme, souvent suivie d'une deuxième et troisième bordure, toutes parallèles entre elles et formant des circonvallations concentriques ; 3° la corne australe paraît fréquemment plus large que la corne boréale ; 4° de hautes montagnes contrastant avec des vallées très profondes existent au voisinage des calottes polaires, sur l'hémisphère austral principalement.

3. La première de ces conclusions concorde avec tous les dessins publiés jusqu'à ce jour, depuis Cassini en 1666 jusqu'au Dr Terby en 1880 ; il n'y a que la *généralité* de cette conclusion qui pourrait être contestée, à cause de l'irrégularité de certaines taches vues trop de biais pour paraître arrondies de contour.

La deuxième constitue la partie la plus nouvelle de ce travail. L'aspect si particulièrement *cratériforme* des taches de Vénus semble avoir échappé jusqu'à ce jour à l'attention des astronomes. Il y a pourtant plus d'un demi-siècle que le P. de Vico avait signalé l'analogie de configuration que la surface de Vénus offre avec celle de la lune et il est étrange que cette analogie une fois signalée n'ait pas engagé les observateurs à constater au moins le fait. Pour moi, lorsque j'annonçais à l'Académie des sciences de Paris l'existence de ces formations cratériformes, que j'étais en train d'étudier alors ⁽¹⁾, j'ignorais complètement que cette constatation avait déjà été faite autrefois à Rome à l'observatoire des Pères Jésuites. Comme les mémoires de cette époque de l'observatoire du Collège romain sont devenus très rares et diffi-

(1) *Comptes rendus*, t. LXXXXVIII, pp. 1533-1534.

ciles à trouver, M. le Dr F. Terby, de Louvain, a bien voulu, en m'annonçant le fait, m'adresser l'analyse des travaux de de Vico sur ce point particulier. Qu'il reçoive ici mes meilleurs remerciements. La valeur de ce document est trop grande pour ne pas le transcrire intégralement. Le voici donc :

« Le P. de Vico a publié plusieurs mémoires sur Vénus et ils sont de la plus haute importance.

Le premier mémoire a paru dans : *Memoria intorno a parecchie osservazioni fatte nella specola dell' Università Gregoriana nel Collegio Romano, l'anno 1859*, p. 42. *Rotazione di Venere sul proprio asse*. Ce mémoire est accompagné de 52 dessins exécutés en 1859; ceux-ci représentent les taches sombres de Vénus; l'auteur ne voit pas encore de cratères; il reconnaît les taches de *Bianchini*, confirme les observations de ce dernier astronome, les explique en montrant comment *Bianchini* a pu déduire de ses observations une durée de rotation de 24 jours, tandis que la durée réelle est de 25 heures.... De Vico confirme donc la durée de rotation donnée par Schröter. L'auteur s'occupe aussi accessoirement de la position de l'axe de Vénus.

La réapparition des taches de *Bianchini* dans les dessins de de Vico est un fait excessivement intéressant. »

« Le second mémoire se trouve dans la même collection *negli anni 1840-1841*, page 32. *Rotazione di Venere*. Celui-ci est accompagné de 91 dessins faits en 1840; nous y voyons encore les taches de *Bianchini* et pas de cratères, dans les figures du moins; mais les dernières pages du *texte* contiennent les observations de cratères auxquelles je faisais allusion. Ce mémoire confirme les résultats précédents, précise davantage la durée de rotation et la position de l'axe; c'est une œuvre capitale. »

Voici les observations de cratères (je copie textuellement mes notes) :

1841, 12 avril, 6^h soir. « Près de la pointe de la corne boréale », « e propriamente mezzo della parte illuminata si vedeva molto nettamente una macchia nera bislunga. Sembrava un corto e sottile filo di seta nera, posto agiacere su quella parte. »

1841, 19 avril, 6^h soir. Mêmes apparences que le 12.

1841, 21 avril, 6^h soir. « La tache de la corne boréale est plus près de la limite de l'ombre » e forse in parte già era immersa nella penumbra; « gross. de 241. » — « A 6^h23^m » si vedeva circondata di luce piu viva; « avec 824 fois, elle était tout à fait semblable à un cratère lunaire » quando le sue più alte sponde sono illuminate, dal vertice ai due terzi in giù.

1841, 22 et 23 avril. Le stesse apparenze del giorno innanzi. « La tache » sembra alquanto ingrandita in ampiezza.

1841, 30 avril, 7^h30^m soir. « Tache très noire et » chiara a vederla « entourée » da un ellissi lucida « comme » le sponde di un cratere lunare visto obliquamente. « La limite de l'ombre » benchè già molto inoltrato dentro alla macchia, pure non copriva ancora la suddetta sponda, la quale colla sua metà luminosa compariva assai bene dentro la parte oscura; « gross. 824 ». A la corne opposée l'on commence aussi à voir quelque chose de semblable.

1841, 2 mai. « D'autres observateurs curieux de voir le cratère se joignent aux premiers » ed ebbero agio di remaner soddisfatti; « à 6^h43^m soir, on voyait nettement tout le globe de Vénus ⁽¹⁾ » e per quanto l'ombra paresse avanzata, pure non copriva nessuna porzione delle sponda illuminata che circondava la macchia. « Grossissement 241 et 824. »

1841, 3 mai, 6^h40^m soir. La sommità del contorno lucido della macchia verso la parte oscura di Venere non si vedeva più. « Gross. 240 », « avec 824 se voyait à peine ». « Avec gross. moindres » appariva dentellata in quel punto l'ombra sul disco.

1841, 4 mai, même heure. « L'ombre a couvert entièrement » metà della sponda ellittica del cratere; e ne appariva il corno boreale terminato in una triplici punta. Due di tali punte erano l'effetto che produceva il taglio dell'ombra sulla sponda del cratere, la quale con due bracci lucidi vedevasi penetrare nella parte oscura. « Gross. 824 et 1128. »

De Vico conclut de la position de Vénus par rapport à la terre

(1) Ce mémoire renferme encore beaucoup d'observations de la lumière secondaire, cendrée, de Vénus.

que la tache de la corne boréale était la tache polaire nord de Bianchini; celle-ci est donc formée, dit-il, de chaînes très élevées de montagnes entourant de profondes vallées. La longueur totale de la tache soutendait, le 21 avril, un angle de $4^{\circ},5$ au moins.

Un troisième mémoire figure dans l'année 1842 du même recueil; en voici le sujet : étant donné un globe de Vénus représentant toutes les taches observées, voyons comment se présenteraient ces taches : 1° dans l'hypothèse de l'inclination de l'axe d'après Bianchini; 2° dans l'hypothèse de celle de de Vico, aux époques des observations de Mädler en 1833, et cherchons dans laquelle des deux hypothèses les taches rendent le mieux compte des inégalités que Mädler a observées au terminateur. De Vico met en regard dans sa planche les phases observées par Mädler et les aspects des taches selon Bianchini et selon lui-même *aux mêmes instants* (aspects théoriques, résultant du calcul évidemment). Bianchini donnait à l'obliquité de l'écliptique pour Vénus une valeur de 75° ; de Vico a trouvé 53° ; il conclut de ces dernières comparaisons que la valeur de 75° est trop forte, que 53° est un minimum, qu'une valeur plus grande que 65° n'est pas admissible.

Presque toutes les observations de de Vico et de ses collaborateurs ont été faites *en plein jour*. Objectif de Cauchoix de 6 pouces.

Dans ces derniers temps on a beaucoup parlé des taches brillantes vues aux pôles de Vénus, aux pôles apparents du moins; des observations très suivies de ces taches ont été faites dès 1813 par *Gruithuisen*.

Les mémoires de de Vico forment un ensemble de 78 pages environ. — Tel est le résumé du D^r Terby.

Je suis bien aise d'avoir été précédé dans cette voie par un observateur d'une notoriété aussi grande que celle du P. de Vico. Au moins je n'ai pas à craindre le *væ soli* si facile à encourir en pareil cas.

3. En jetant un regard sur les deux planches ci-jointes, le lecteur remarquera : 1° que les formations annulaires sont une

règle générale; 2° que certaines de ces formations présentent plusieurs circonvallations concentriques; 3° que des traces lumineuses de cirques, comparables aux susdits cratères, se voient dans la partie non directement illuminée; je les ai marquées au pointillé. Ces arcs de cercles sont-ils les sommets devenus visibles de cratères de Vénus? C'est là une question que l'on peut se faire, mais à laquelle il serait prématuré de répondre affirmativement (1).

Pour compléter ces données, j'aurais pu entreprendre un travail de recensement de toutes les taches et chercher à identifier celles qui se sont présentées deux ou plusieurs fois à l'observation. Mais, réflexion faite, j'ai préféré attendre une plus grande abondance de documents avant d'aborder utilement ce travail.

4. La troisième conclusion qui ressort de l'ensemble de ces observations est relative à la grande inégalité de largeur des cornes du croissant. Il est facile de constater, sur la plupart des dessins que je publie, une prépondérance très marquée, en faveur de l'hémisphère austral, de la largeur du croissant. Ce fait démontre que les montagnes de l'hémisphère austral sont à un niveau généralement supérieur. Cette remarque relie la troisième conclusion à la quatrième. Cette dernière est aujourd'hui mise hors de doute par les mesures si rigoureuses auxquelles les photographies du dernier passage de Vénus ont été soumises par MM. Bouquet de la Grye et Arago. Ces savants ont trouvé que la plus haute montagne qui s'est présentée en silhouette sur le soleil pendant la durée du passage appartenait à l'hémisphère sud et que sa hauteur atteignait 116 kilomètres (2). Cette conclusion a été confirmée peu après par M. E.-L. Trou-

(1) Je me souviens d'avoir vu à Paris, sur une plaque photographique du dernier passage de Vénus, un cratère parfaitement marqué et visible à la loupe; il répondait, je crois, à la tache α des planches de ce mémoire. Il a donc été photographié grâce à la lumière cendrée de la planète. M. Bouquet de la Grye, auquel j'indiquai le fait, l'a parfaitement reconnu.

(2) *Étude sur le contour apparent de Vénus*, COMPTES RENDUS, t. LXXXVIII, p. 1406 et suiv.

velot ⁽¹⁾ et par moi ⁽²⁾ ; en calculant la hauteur d'après les dessins qui accompagnent ce mémoire, j'ai trouvé 290 kilomètres, valeur peut-être exagérée, mais qui indique néanmoins des surélévations énormes.

Tels sont les faits généraux et les plus saillants qui résultent des observations dont je vais maintenant donner le détail pour ce que j'ai vu moi-même.

5. La première de ces observations date du 27 mars 1884. De 6^h30^m à 6^h50^m, temps moyen de Grignon, je dessinaï Vénus à l'aide de notre équatorial de 6 pouces d'ouverture, le grossissement étant de 250 fois. A ma souvenance, je n'avais jamais vu une image de la planète aussi calme que ce soir-là. La corne supérieure (voir fig. 1) était arrondie, et les ombres, évidemment parsemées de petites taches claires, étaient très difficiles à exprimer. Malgré moi et même en faisant des efforts, je voyais plusieurs cirques sombres et lumineux, comme j'en ai vu sur Mars. Ces apparences analogues me causèrent tant de surprise que je craignais une illusion d'optique. Réflexion faite, je pris le parti de marquer ceux que je verrais, mais sans les chercher. Celui en *ab* a été vu plusieurs fois, celui du milieu aussi. La teinte lilacée de Vénus m'a frappé dès que j'ai vu la planète dans le champ de la lunette.

6. Le 28 mars 1884, de 6^h26^m à 6^h46^m je dessine l'aspect, en employant deux oculaires, n^o V et III ⁽³⁾. (Je mets entre guillemets les phrases transcrites mot à mot de mes notes d'observation et entre crochets les mots nécessaires pour suppléer à la brièveté de la rédaction.) « Atmosphère très agitée, au commencement surtout. En α (fig. 2), une petite tache brillante déborde. En β une [autre] tache brillante. Au-dessous de α , les cercles

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, t. LXXXXVIII, p. 1481.

⁽²⁾ *Ib.*, p. 1531.

⁽³⁾ Pour plus de brièveté, je désigne les grossissements par des numéros de convention des oculaires employés. Ainsi le n^o III désigne un oculaire grossissant au 6-pouces 110 fois ; n^o V grossit 250 fois, n^o VI 332 fois.

concentriques sont certains quant à leur parallélisme, non quant au degré de courbure. Au bord de l'ombre, au milieu du disque, deux cirques brillants, vus plusieurs fois »; une fois, ils paraissent concentriques et accolés comme le montre la figure 2. « Le reste est moins certain. Sur la limite de la phase, on voyait des ondulations, sombres, selon l'agitation de l'image, lesquelles étaient plus accentuées vers β que vers le bas. »

7. Le 29 mars 1884, de 6^h47^m à 7^h22^m; oc. V, figure 3. « Atmosphère agitée. En α portion plus étendue que hier, peut-être proéminente, mais peu. En dessous, des circonvallations parallèles comme hier, mais moins accentuées. En β et β' segments plus clairs. Sur l'ourlet lumineux [de la circonférence du disque] les petits arcs [que j'ai dessinés] foncés ne le sont pas plus que le reste des parties obscures. » J'ai constaté avec une certitude assez grande que l'ombre, très accentuée sur le pourtour de l'arc, va en s'atténuant vers le centre du disque.

8. Le 31 mars 1884, de 6^h23^m à 6^h47^m; oc. V, figure 4. « Les cirques m'ont paru assez enchevêtrés et rendus très irréguliers par le nombre considérable de petits cratères accumulés les uns sur les autres. Un aspect des plus remarquables et que je n'ai vu qu'à un moment, mais avec une netteté admirable, est représenté en $\delta\delta'\delta''$. Ce sont deux cirques tangents en δ . En dehors, tout était beaucoup plus clair qu'en dedans. Désespérant d'arriver à quelque chose d'exact, j'ai préféré recommencer une autre figure. »

9. Le 31 mars 1884, de 6^h48^m à 7^h18^m; oc. V, fig. 5. « Cette figure a été faite en partie en enfumant l'oculaire avec une bougie. En α on voyait au travers du bouillonnement des bords une partie plus lumineuse. Parmi les cirques les plus persistants, il y avait celui marqué $\gamma\gamma'$ qui était sombre dans son pourtour, et déchiqueté, comme si une foule de petits cratères ou cirques y existaient. Dans ce dessin (un peu plus pourtant que dans le précédent), je n'ai pas porté une grande attention à la disposition des ombres. Atmosphère assez bonne, mais le mouvement d'horlogerie ne marchait pas. »

Un petit croquis fait à l'oc. III montrait que la région voisine de la partie non illuminée du disque était ce qu'il y avait de plus foncé sur la planète.

10. Le 2 avril 1884, de 7^h35^m à 8^h29^m; oc. V, fig. 6. « Image agitée par le vent, mais pas trop mauvaise. En α , vers 8 heures, partie lumineuse vacillante au bord, débordant peut-être. En β , segment circulaire, blanc lumineux; en β' aussi, mais moins. Traces de cirques lumineux, plus ou moins concentriques à α pris pour centre. En $\delta\delta'$ arc sombre assez persistant vers la fin de l'observation. Les cirques vus au premier abord ne sont plus visibles ensuite. »

11. Le 11 avril 1884, de 6^h46^m à 7^h5^m; oc. V, fig. 7. « En α partie plus brillante. L'image est bonne. En d la région est embrouillée et assez difficile. » Les régions les plus sombres se voient vers la bordure lumineuse du limbe.

12. Le 11 avril 1884, de 8^h28^m à 8^h43^m; oc. V, fig. 8. « Je ne vois plus bien net, car l'image est très vacillante. En b et b' portions très lumineuses; en α aussi, où il y a un peu proéminence aplatie. »

13. Le 12 avril 1884, de 8^h24^m à 8^h34^m; oc. V, fig. 9. « Image médiocre. En γ le cirque est blanc, bordé d'un cirque sombre sans brillant. En β cirque clair (cratéiforme?). En α proéminence lumineuse. En δ deux cirques clairs, assez sûrs; le reste douteux. J'ai été un peu lestement dans ce dessin, plus que d'habitude. »

14. Le 19 avril 1884, de 7^h à 7^h25^m; oc. III, fig. 10. Oc. V, fig. 11, de 7^h25^m à 7^h35^m, t. m. de G. « J'ai commencé par observer avec l'oculaire III. Un liséré brillant se voyait très bien sur le contour du disque. En α j'ai soupçonné souvent une éminence. La tache ronde β était bien accentuée et l'arc obscur $\gamma\gamma'$ était assez prononcé. Les apparences avec l'oculaire V laissaient présumer plusieurs formations annulaires. J'ai

marqué les plus prononcées, mais je n'ai pu voir positivement des cirques lumineux. »

15. Le 21 avril 1884, de 6^h45^m à 7^h10^m, t. m. de Grignon; oc. V, fig. 12. « L'atmosphère n'était pas fameuse. En regardant fixement je ne pouvais voir aucun cirque, mais bien en jetant de temps à autre un simple coup d'œil. L'arc $\delta\delta'$ était le seul présentant un trait lumineux. Je me suis assez convaincu, en marquant tout ce que je voyais comme formations annulaires, qu'elles se superposaient et s'entrecoupaient. Il y avait vers la partie supérieure une légère tendance à une proéminence, mais si faible et si incertaine que je ne l'ai pas marquée. Il en est de même des zones parallèles et concentriques à ce point; je les ai soupçonnées deux à trois fois, mais je ne les ai pas dessinées avec assurance. » Avec l'oculaire III, j'ai marqué les régions où la teinte était plus foncée; c'était vers le limbe du haut de l'image.

16. Le 26 avril 1884, de 7^h6^m à 7^h18^m; oc. V, fig. 13. « J'ai été un peu vite en faisant cette figure; les détails empêchaient de voir la configuration générale des cirques. Ces cirques paraissaient un peu polygonaux, tant ils étaient accolés les uns contre les autres, en sorte que la surface présentait l'aspect d'un madrépore. Dans le commencement j'avais remarqué des cirques concentriques vers ce que je crois le pôle, mais les ombres subséquentes ont dissipé cette apparence. Image médiocre. »

17. Le 26 avril 1884, de 9^h21^m à 9^h38^m; oc. V, fig. 14. « Je n'ai pu observer longtemps *bien*, car les nuages d'abord tenus sont devenus bientôt trop épais. La décroissance d'ombre paraissait alors » bien mieux, la région la plus foncée se trouvant vers le centre du disque. « La figure est donc inachevée. En β c'était brillant. »

18. Le 22 mai 1884, de 9^h29^m à 9^h49^m; oc. V et III, fig. 15. « La tache β brillante, bordée de noir, est persistante. En α il y a comme un enfoncement, avec cirques concentriques, mais très

peu marqués. Les autres cirques dessinés n'ont été vus que vaguement; l'image était fort troublée par l'horizon. La partie en δ était très vacillante. Les deux cornes sont certaines. Quant aux cratères que j'ai marqués, ils paraissaient par moments très vagues et estompés; je les ai vus dans le commencement de ces observations beaucoup plus distinctement. Celui au-dessus de δ me semblait posséder de nombreuses circonvallations concentriques. »

19. Le 23 mai 1884, de 9^h30^m à 9^h50^m; oc. V, fig. 16. « Atmosphère détestable; image vacillante au possible. Cependant, malgré les vagues lumineuses, on distinguait parfaitement les formes des cratères, fort semblables à ceux de la lune. Il n'y a rien de bien certain; tout est à peu près. »

20. Le 26 mai 1884; oc. V, fig. 17. « Image assez agitée, mais cependant je crois distinguer les cratères comme je l'ai marqué et je les crois assez exacts en position, car voici la double concordance obtenue : la démarcation d'ombre et de lumière a d'abord été tracée, puis les cratères ont été dessinés; or il se trouve qu'ils correspondent avec la susdite démarcation. Enfin, en examinant la partie obscure, avoisinant la lumière, j'y ai reconnu les traces (indubitables) de cratères; j'étais occupé à dessiner les deux plus visibles c et c' quand les nuages sont arrivés. Entre c et c' il y en avait trois ou quatre petits. En β partie très brillante et constante. En i point lumineux isolé dans les ténèbres. Liséré lumineux (1). En α inégalité soupçonnée un instant, mais peu certaine. La partie éclairée de Vénus était un peu plus large que le dessin ne l'indique. »

21. Le 27 mai 1884, de 8^h18^m à 8^h40^m; oc. V, fig. 18. « L'image est très satisfaisante comme calme, et malgré cela je ne puis bien saisir les détails. La démarcation d'ombre et de

(1) J'entends par *liséré lumineux* la bordure brillante du disque; j'emprunte cette expression au docteur Terby.

lumière est peu accidentée. Les traces de cirques lumineux dans la partie obscure varient et sont de diamètre plus grand en bas qu'en haut. »

23. Le 5 juin 1884, de 8^h20^m à 8^h38; oc. VI, fig. 19.
 « Image très vacillante; les ondes lumineuses vont dans le sens de la flèche *ab*, laissant paraître des ombres cratériformes charriées comme par ces ondes. En β rempart lumineux d'un cratère. En α portion élevée. A la limite d'ombre et de lumière, les deux cornes étaient creusées par deux cratères, d'une façon très nette. Les intermédiaires ne présentaient que des irrégularités. L'agitation (outre les nuages) était trop grande pour voir les traces de cratères dans l'ombre. J'en ai aperçu un seul. J'ai été gêné par les nuages qui m'ont forcé de terminer promptement. »

23. Le 11 juin 1884, de 8^h18^m à 8^h33^m; oc. V, fig. 20.
 « Atmosphère très agitée dans le sens de la flèche *v*. Tout est incertain dans la partie lumineuse, sauf les contours du côté de l'ombre. En α je soupçonne *très vaguement*, très douteusement, la trace de la tache habituelle à cette région. Les cirques que j'ai marqués sont à peine soupçonnés. A l'intérieur du croissant, vestiges confus de cirques lumineux. » La flèche allant à gauche indique le sens apparent du mouvement diurne.

24. Le 12 juin 1884, de 9^h4^m, à 9^h29^m; oc. V, fig. 21.
 « J'ai essayé d'un diaphragme de 4 pouces [pour l'objectif], ce qui rend l'observation bien plus facile que hier. Le cirque lumineux β frappe de suite le regard et cela d'une manière quasi constante; cependant il disparaît de temps à autre et laisse voir la tache lumineuse β' . En α tache peu accentuée. Je n'ai pas vu d'arc lumineux dans la partie obscure. En résumé, le diaphragme m'a donné une image beaucoup plus calme, exempte de ces vagues lumineuses si gênantes. Cette figure vaut bien mieux que celle de hier, n° 20. »

25. Le 13 juin 1884, de 8^h16^m à 8^h29^m; oc. V, fig. 22.
 « Diaphragmé à 4 pouces d'ouverture. La tache β est brillante

et certaine d'une manière absolue. Celle en α est vague quant à sa forme, mais presque certaine quant à son existence; elle est bien moins brillante que la tache β , laquelle, par moment, semblait cratériforme. A la limite d'ombre et de lumière, les renfoncements obscurs δ et δ' sont bien accentués, mais les petits détails entre ces deux points ne sont que à *peu près*. Les autres portions du contour sont plus exactement dessinées et présentent bien les formes arrondies observées. La pointe de la corne inférieure était très aiguë par moment. Vent, nuages, image assez bonne. Le bord du disque était moins brillant que la partie médiane, où j'ai marqué des ronds brillants, se présentant tels comme aspect, non comme position, nombre et dimension. »

26. Le 18 juin 1884, de 8^h23^m à 8^h45; objectif diaphragmé à 4 pouces, oc. V, fig. 23. « Bonne atmosphère. En α soupçons assez fondés de la tache habituelle à cette région. Vers le centre, j'ai aperçu quelques cratères dont j'ai marqué l'aspect plutôt que la position. En β tache brillante, débordant légèrement en dehors du disque et en dedans, ainsi qu'en β' , quoique moins. Petites éminences entre β et β' . Les arcs lumineux dans la pénombre sont bien visibles; certains sont très persistants, surtout ζ et ξ . La pénombre envahit presque tout le disque obscur. »

27. Le 19 juin 1884, de 8^h19^m à 8^h45^m; objectif diaphragmé à 4 pouces, oc. V, fig. 24. « Bonne image télescopique. En α pas de proéminences ni de taches bien visibles. En β tache blanche brillante, cratériforme par moment. Au-dessus cratère ombiliqué. En δ série de pics proéminents, de 0^{mm},3 environ. Les cirques lumineux de l'intérieur [obscur] sont assez visibles mais inconstants, sauf ceux du bord. La corne supérieure était plus épaisse que celle du dessous, c'est-à-dire de l'hémisphère nord. »

28. Le 22 juin 1884, de 8^h15^m à 8^h30^m, t. m. de Grignon; objectif diaphragmé à 4 pouces, oc. V, fig. 25. « Assez bonne image. En β tache brillante, indécise de position. En dessous, point émergeant de chaque côté. En α légères taches claires. Le limbe de ce côté est *rosé* et les vagues lumineuses descendent

comme l'indique la flèche F. Les cirques lumineux dans l'ombre me paraissent être un pur phénomène d'optique. En dehors du disque je ne vois pas des ronds, mais des traits lumineux *analogues*. Les cirques intérieurs, dans le disque, seraient-ils illusoires? En π pics nombreux. »

29. Le 24 juin 1884, de 8^h29^m à 8^h59^m; objectif diaphragmé à 3 pouces; oc. V, fig. 26. « Image houleuse même avec le diaphragme de 3 pouces. Le croissant ne forme plus un demi-arc de cercle, mais un peu moins. En ϵ' affaissement et en ϵ surélévation mais très légère. En c cirque *souçonné*. En ap aplatissement *évident*. La corne du haut m'a paru plus large que celle du bas, mais peu; de plus, l'extrémité australe était arrondie. En ϵ ou vers ce point, tache claire (ϵ sans doute). » La corne australe était encore plus qu'hier teintée de rouge, la boréale était bleu-verdâtre. La planète était trop près de l'horizon.

30. Le 26 juin 1884, de 8^h10^m à 8^h18^m; objectif diaphragmé à 3 pouces; oc. V, fig. 27. « Image agitée avec le diaphragme de 3 pouces. A l'intérieur du croissant [dans la région non éclairée directement], une bordure noire ou très obscure. En β tache claire mais peu. A la pointe australe, partie saillante, mais moins que les soirées précédentes. Le rouge de la corne supérieure est moins intense [que hier]. Bordure verte à la limite supérieure d'ombre et de lumière. En δ se trouve la sinuosité la plus nettement prononcée. Le sommet de la corne australe est comme aplati et la pointe plus aiguë que la boréale. Cercles lumineux à l'intérieur du croissant, trop pâles pour les marquer. Corne boréale brillante plus que l'australe. » La flèche ascendante à gauche marque le sens apparent du mouvement diurne.

31. Le 27 juin 1884, de 8^h12^m à 8^h20^m; oc. V, fig. 28. « Image agitée, houleuse. Des proéminences sont soupçonnées en β' et β . En δ , δ' , δ'' concavités assez certaines; les autres moins. A l'intérieur de la corne boréale, teinte rouge cramoisi comme à l'extérieur de l'australe, laquelle va jusqu'à β . Les couleurs sont plus intenses parce que je n'ai pas mis de diaphragme. Arc noirâtre en N. »

33. Le 22 août 1884, de 17^h0^m à 17^h26^m; oc. V (VIII et III), fig. 29. « La figure est faite au jour. Je suis frappé de ne pas mieux voir les cirques malgré la netteté de l'image. Cependant ce que j'ai vu, je l'ai vu très nettement, en particulier γ et δ . La corne supérieure (sud) est plus large que celle de la région nord. La limite d'ombre et de lumière est bordée par une bande plus sombre que le reste. Cirques lumineux soupçonnés dans l'intérieur du disque. »

33. Pour l'intelligence des deux planches où j'ai dû condenser les 29 figures, je dois dire tout d'abord que, si j'ai souvent désigné par une même lettre une même région *apparente* du disque, je suis très éloigné de vouloir en inférer qu'elle répond en réalité à une portion identique de la planète. Ainsi, par exemple, la proéminence marquée α ne saurait être la même tache, à moins d'être située au pôle même. Or, en confrontant chaque figure, il est clair que, si elle n'en est pas très éloignée, elle l'est du moins assez pour osciller, à droite et à gauche de sa position moyenne, d'une manière très sensible.

Je prierai encore le lecteur de vouloir bien remarquer que les notes accompagnant la description de chaque figure sont la reproduction fidèle du journal d'observations que je rédigeais sous l'impression du moment. Or, cette impression du moment ne saurait s'entendre au pied de la lettre, sans tenir compte des observations subséquentes. Ainsi, par exemple, la première fois que la tache α m'a paru proéminente, elle a dû l'être beaucoup plus que les autres soirées, alors que, l'attention une fois éveillée sur ce sujet, les apparences même moins prononcées n'ont pu sans doute parvenir à m'échapper.

C'est encore ainsi qu'il faut juger les termes dont je me suis servi pour exprimer les apparences faiblement lumineuses observées dans la région obscure du disque; elles étaient plus ou moins circulaires et, le 22 juin (n° 28), j'en vis d'analogues en *dehors* du disque. Il y avait certes là de quoi faire douter de la réalité du phénomène. Or, ces apparences ont été revues plus tard par l'un de mes collaborateurs, et celles décrites par

M. O. Callandreau, d'après ses observations faites à Haïti en 1882, avec un instrument de puissance égale à celui de Grignon, semblent indiquer un même ordre de phénomènes bien réels. Outre le croissant principal, « l'arc central », l'observateur distinguait deux autres arcs plus faibles, nommés par lui « l'arc interne » et « l'arc externe » (1). La description et les figures répondent assez bien à l'observation du 23 juin et confirment donc d'une certaine façon la réalité du phénomène observé par moi.

Dans les deux planches de ce mémoire, les flèches descendantes et barbées qui accompagnent le numéro d'ordre des figures représentent la direction de la verticale du lieu d'observation, par rapport à l'image télescopique renversée. Dans la figure 25, la flèche F indique à la fois la direction de la verticale et le sens du mouvement ondulatoire de l'image lumineuse. Dans les figures 20, 23, 27 et 29, les flèches ascendantes de droite à gauche indiquent le sens du mouvement diurne apparent.

24. Je termine ce mémoire sans avoir pu recueillir jusqu'à ce jour (16 décembre 1885) qu'un petit nombre de nouveaux aspects de Vénus. Les taches les plus saillantes ont été revues, mais il y a lieu d'augmenter encore de beaucoup le nombre des dessins avant d'entreprendre une discussion utile et une identification complète des taches. Un autre problème me semble devoir être résolu auparavant: c'est la détermination très précise de l'angle et de la direction de l'axe de rotation de la planète par rapport à notre orbite. En procédant autrement, en se guidant seulement sur les apparences comparables, on risque de commettre de graves erreurs; les cratères lunaires nous avertissent assez de quelles énormes variations d'aspect de pareils objets peuvent être susceptibles, selon qu'ils sont éclairés; là nous voyons que certaines formations circulaires très déprimées ne se révèlent que dans des conditions d'éclairement très tangentiel. Mais pour Vénus le travail d'identification des taches se complique, non

(1) *Bulletin astronomique*. Paris, 1884, in-8°, t. I, pp. 221-223. Voir les figures.

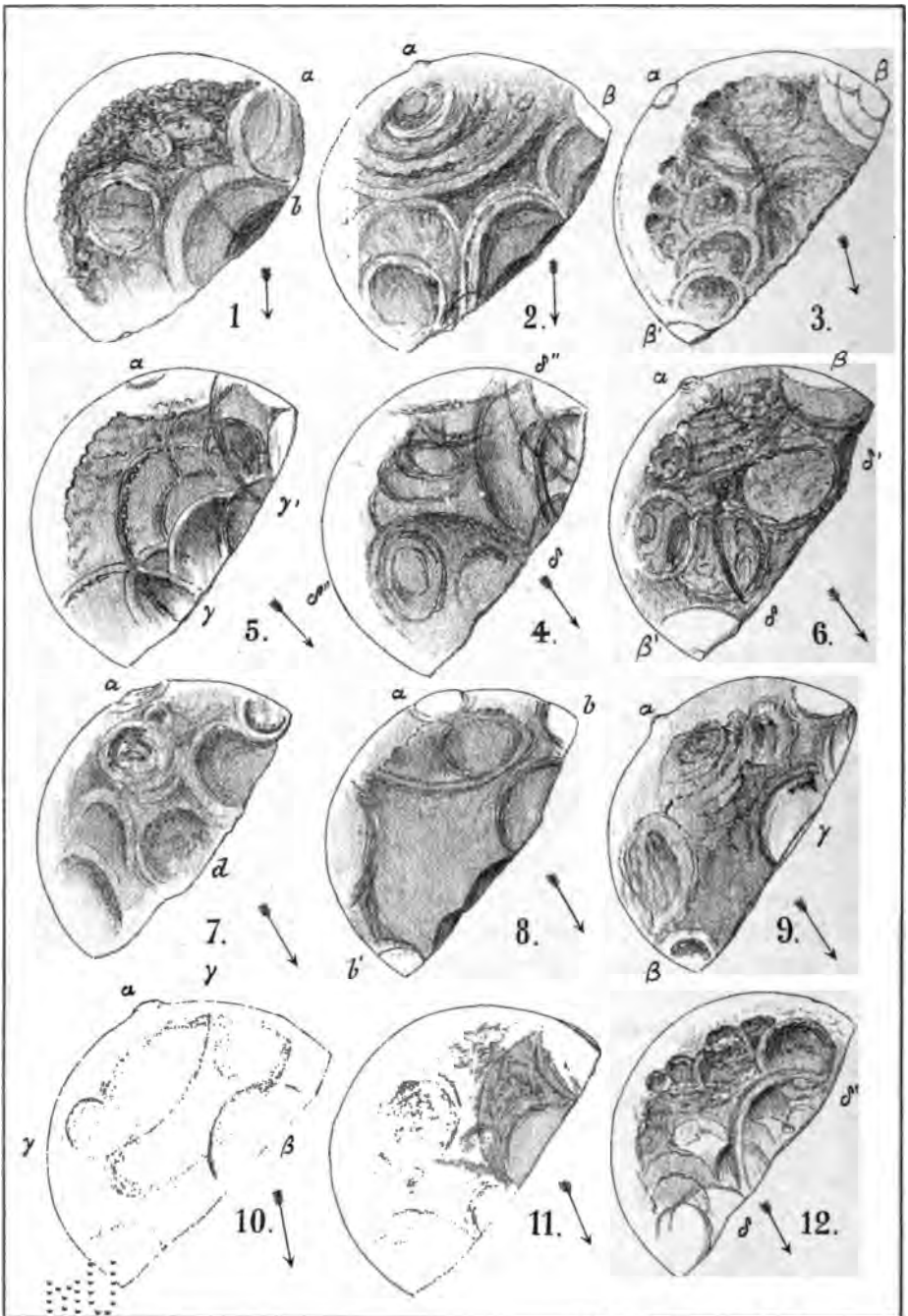
pas seulement parce que ses cratères se présentent éclairés dans des positions toujours diverses, mais encore parce que l'alignement des taches ne peut se faire ordinairement que sur une petite échelle, en raison des phases toujours restreintes aux époques où la planète est bien visible pour nous. Mais ce qui donne surtout de grandes difficultés à ce travail de réduction, c'est la nature éminemment volcanique de la surface. Vénus ne semble pas offrir dans ses grandes lignes orographiques la présence de vastes plaines facilement reconnaissables par leur uniformité comme celles de la lune. Toute la surface parait criblée d'éruptions volcaniques, aussi étendues peut-être que celles de notre satellite, mais plus profondes assurément; il en résulte un enchevêtrement pour ainsi dire inextricable. Le lecteur pourra en juger par la confrontation des dessins et en tenant compte de mes efforts et des difficultés vaincues; il voudra bien, j'espère, excuser avec indulgence les imperfections, sans doute nombreuses, des configurations représentées.

Prieuré de S. Jean, à Grignon (Côte-d'Or).

Ce 16 décembre 1885.

FR. MAYEUL LAMEY, O. S. B.

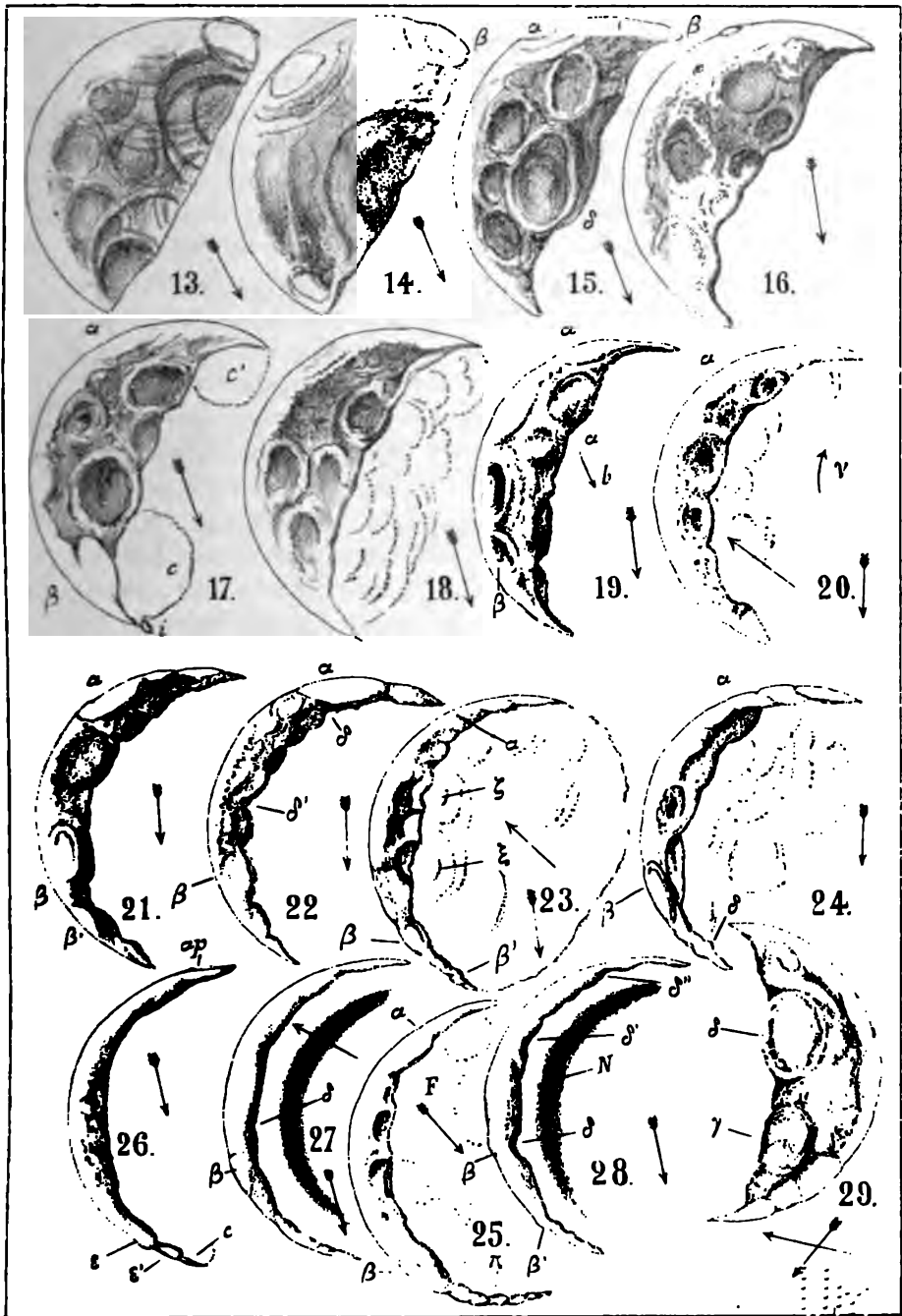
11



Lamey *ed. nat. del*

Lith. V. Persenaire à Brux^g

Montagnes cratériformes de Vénus
 dessinées à l'observatoire de Grignon (Côte d'Or) en 1884.



Lamey ad. nat. del

Lith. V. Persenaire à Brux^{es}

Montagnes crateriformes de Vénus
dessinées à l'observatoire de Grignon (Cote d'Or) en 1884.



SUR LA TENSION SUPERFICIELLE

DANS

LA THÉORIE DE LA CAPILLARITÉ

PAR

le P. Joseph DELSAULX

Professeur au Collège de la Compagnie de Jésus,
à Louvain.

Les physiciens sont fort partagés au sujet de la tension superficielle considérée dans ses rapports avec la théorie mathématique de la capillarité. Les uns, comme M. Pellat (*), croient pouvoir rattacher cette tension à la théorie de Gauss, par voie de déduction; les autres, comme M. Violle (**), y voient un élément complètement étranger à cette théorie. Quelques-uns, comme M. Duhem (***), n'aperçoivent dans l'hypothèse de la tension superficielle qu'un principe non justifié par la mécanique rationnelle; d'autres, comme M. Groméka (iv), et, avant lui, Lamarle (v), prétendent y trouver une conséquence rigoureuse des théorèmes de la statique.

Dans le conflit de ces opinions contradictoires, il nous a paru tout à la fois convenable et opportun de chercher à faire la part

(*) *Cours de physique*, t. II, p. 162. 1885.

(**) *Cours de physique*, t. I, p. 603. 1884.

(***) *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 3^e série, t. II, p. 210. 1885.

(iv) *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 2^e série, t. III, p. 467. 1879.

(v) MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, *Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces*, pp. 18 et 19. — *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, t. LXIV, p. 739.

de la vérité. Développant, à cette fin, une idée déjà énoncée en substance par M. Moutier (*), et lui donnant toute la portée dont elle est susceptible, nous montrerons que le système des tensions superficielles est un système de forces fictives équivalant au système des forces moléculaires dans tous les phénomènes d'équilibre capillaire. Nous ferons voir ensuite que la considération de ces forces est souvent très avantageuse; car elle est de nature à simplifier, en maintes circonstances, l'interprétation des phénomènes capillaires, et à servir de fil de conduite dans les recherches expérimentales.

Nous démontrons ces propositions en nous mettant successivement au double point de vue de la théorie de Gauss et de la théorie de Laplace. En établissant ainsi un lien entre la doctrine de la tension superficielle des liquides et la théorie de Laplace, nous exprimons, croyons-nous, une idée nouvelle.

Notre intention a aussi un côté pratique : nous serions heureux que ces quelques pages pussent être utiles aux jeunes géomètres abordant pour la première fois l'étude mathématique de la capillarité. C'est pourquoi nous joindrons, à la démonstration des propositions indiquées ci-dessus, l'exposé d'un certain nombre d'observations qu'un examen attentif de la théorie nous a amené à faire et que nous croyons pouvoir être lues avec fruit.

Ce dernier but a décidé de la forme de notre travail : une série de réflexions suivie, en guise de résumé, de l'énoncé des principales conséquences que ces réflexions nous paraissent entraîner, voilà notre plan.

La théorie de la capillarité dont nous nous sommes occupé, nous l'avons déjà dit, est celle que Laplace et Gauss ont fondée. Les liquides y sont regardés comme des fluides incompressibles (**), et leurs éléments, en dehors des actions moléculaires proprement dites, y sont soumis à l'action de forces de liaison capables de transmettre les pressions au sein de la masse, conformément au

(*) *Journal de physique théorique et appliquée*, t. II, p. 29.

(**) Cette supposition est légitime, en toute théorie, à titre d'approximation très voisine de la réalité.

principe d'Euler. De plus, ces forces de liaison sont censées telles que leurs travaux disparaissent dans l'équation des vitesses virtuelles.

La nature de notre exposé exigeait que nous signalions quelques-unes des propriétés que l'analyse est parvenue à reconnaître dans les phénomènes capillaires. Notre dessein n'a pas été de reproduire, à cette occasion, des démonstrations connues; nous nous sommes contenté de simples renvois aux sources les plus autorisées. Le lecteur trouvera dans les ouvrages que nous citons, en même temps que d'excellentes démonstrations, tous les renseignements qu'il eût été en droit d'attendre de nous, si nous avions eu en vue de faire un traité de la capillarité.

I

Dans les phénomènes capillaires où un seul liquide intervient, nous convenons des notations suivantes :

ρ est l'expression de la densité du liquide ;

ρ' celle de la densité de la paroi solide avec laquelle le liquide est en contact ;

dv et dv' sont des éléments de volume de la masse liquide ;

dV est un élément de volume de la paroi ;

$f(r)$ désigne l'intensité, fonction de la distance r , de la force attractive qui sollicite mutuellement les éléments ρdv et $\rho' dv'$;

$F(R)$ représente l'intensité, fonction de la distance R , de la force attractive qui agit entre les éléments $\rho' dV$ et ρdv ;

z est l'ordonnée verticale de l'élément de volume dv comptée en sens contraire du sens d'action de la pesanteur.

Cela posé, dans une déformation infiniment petite quelconque de la masse liquide, on a, pour la somme des travaux virtuels des forces qui sollicitent l'élément ρdv , jointe à celle des travaux des réactions corrélatives, l'expression

$$- \rho dv [gz + \rho \int dv' f(r) dr + \rho' \int dV F(R) dR], \dots \quad (1)$$

et, pour la fonction de forces correspondante,

$$- \rho dv [gz - \rho \int dv' \varphi(r) - \rho' \int dV \Phi(R)], \dots \quad (2)$$

en désignant par $\varphi(r)$ et par $\Phi(R)$ des fonctions de r et de R telles que les dérivées de ces fonctions par rapport à r et à R soient égales respectivement aux fonctions $f(r)$ et $F(R)$ changées de signe.

L'expression (2) est la fonction de forces de la masse liquide dans l'hypothèse, peu réalisable, il est vrai, que la déformation consiste uniquement dans un déplacement relatif de l'élément ρdv par rapport au reste de la masse.

En posant

$$s = \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} \iint dv dv' \varphi(r) \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{2} \frac{\rho'}{g} \iint dv dv' \Phi(R),$$

la fonction de forces de la masse liquide est déterminée, dans son expression générale (*), par l'égalité

$$\Omega = -g\rho \left(\int z dv - s - 2S \right) (3)$$

Toutes les fois que la masse liquide est en équilibre stable, ce qui a lieu dans presque tous les phénomènes capillaires, la fonction de forces Ω est maximum (**).

II

L'expression analytique des fonctions de forces (2) et (3) se compose de deux parties : l'une qui se rapporte à l'action de la pesanteur, et l'autre qui a trait à l'action des forces moléculaires.

Lorsqu'on suppose que les actions moléculaires deviennent insensibles à partir d'une certaine distance-limite, appelée communément rayon d'activité moléculaire, la masse liquide se partage naturellement en trois portions : deux couches dites superficielles et une partie centrale ou intérieure.

(*) MOUTIER, *Théorie des phénomènes capillaires* : 3^e volume de la 2^e série des *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, pp. 71 et 72. — *Cours de physique*, t. I, pp. 69 et 70.

(**) RÉSAI, *Traité de mécanique générale*, t. I, pp. 237, 242 et 261.

L'épaisseur de la couche superficielle libre est égale au rayon d'activité du liquide agissant sur lui-même; celle de la couche superficielle adjacente à la paroi est égale au rayon d'activité de la paroi dans son action sur le liquide, quand ce rayon surpasse le rayon d'activité du liquide; sinon, elle est égale au rayon d'activité du liquide agissant sur lui-même. Au reste, l'expérience montre que ces rayons d'activité ont très sensiblement une valeur commune (*).

Au sein de la masse intérieure, la partie de la fonction de forces (2) qui se rapporte aux actions moléculaires se réduit à une constante; par suite, le travail virtuel de déplacement y est égal au travail de la pesanteur.

Dans les petites déformations de la masse liquide, le travail moléculaire effectif résulte des variations d'étendue des couches superficielles. Une partie notable de ce travail est déterminée par le passage des molécules liquides des couches terminales dans la masse intérieure ou réciproquement.

Dans l'estime du travail moléculaire, on néglige d'ordinaire, comme quantités très petites d'ordre supérieur, les travaux moléculaires qui accompagneraient, le cas échéant, les altérations de la ligne de bord.

On appelle ligne de bord, la ligne qui sépare la surface libre du liquide de la surface de contact de ce liquide avec la paroi.

Représentons la surface libre de la masse liquide par t ; la surface de contact de cette masse avec la paroi par T ; les variations d'étendue que ces surfaces éprouvent dans une déformation virtuelle très petite de la masse liquide par δt et δT , et posons, en outre, comme définitions, les égalités

$$\delta t = \Sigma dt \quad \text{et} \quad \delta T = \Sigma dT.$$

Cette dernière convention signifie que nous décomposons les variations δt et δT en éléments infinitésimaux plus petits.

Construisons ensuite dans la couche superficielle terminée

(*) VIOLLE, *Cours de physique*, t. 1. p. 665.

par la surface t , et normalement à cette surface, les divers cylindres qui ont pour bases les éléments dt et dont la hauteur est égale au rayon d'activité du liquide agissant sur lui-même. Les éléments dt peuvent d'ailleurs être juxtaposés ou séparés les uns des autres. Faisons aussi les mêmes constructions dans la couche superficielle terminée par la surface T .

Le travail moléculaire des déformations virtuelles de la masse liquide se compose, en grande partie, ainsi que nous l'avons dit et comme la plupart des auteurs de physique le font remarquer (*), du travail des molécules passant des couches terminales dans la partie intérieure du liquide, ou réciproquement. Toutefois on se tromperait si l'on prétendait mesurer le travail moléculaire qu'entraînent les variations de surface δt et δT , en évaluant seulement, d'après l'expression (1), le travail développé par les forces moléculaires dans le passage des cylindres, ayant pour bases dt ou dT , de la couche superficielle à laquelle ils appartiennent dans la partie intérieure de la masse liquide, ou inversement; car, en agissant ainsi, on négligerait le travail des couches superficielles s'ouvrant ou se refermant pour maintenir la continuité de leur étendue et se disposant, au besoin, suivant les exigences des variations de volume de la masse intérieure, toutes choses physiquement nécessaires.

Pour tenir compte de tous les travaux moléculaires, il faut substituer à la considération de l'expression (1) celle des fonctions de forces.

Dans ce nouvel ordre d'idées, il ne suffit pas néanmoins d'étendre la fonction de forces élémentaire (2) aux deux couches superficielles limitées par les surfaces t et T , et d'exprimer la valeur de la partie de cette fonction qui a trait aux forces moléculaires par le moyen des variables t et T . Il est bien vrai que la variation de la fonction de forces ainsi étendue est de la forme

$$A\delta t + B\delta T,$$

(*) JAMIN et BOUTY, *Cours de physique de l'École polytechnique*, t. 1, 2^e fascicule, pp. 12 et 13.

A et B représentant des constantes, et que cette variation exprime une somme de travaux corrélatifs aux variations de surface δt et δT ; mais cette somme ne coïncide pas encore complètement avec la somme intégrale des travaux moléculaires.

En effet, dans la déformation de la masse liquide, la fonction de forces étendue à la partie intérieure subit, elle aussi, une variation : cette variation est égale au produit de la variation du volume de la partie intérieure dont il s'agit par une constante. Or, eu égard à l'invariabilité du volume de la masse entière du liquide, l'expression de cette variation peut également se mettre sous la forme

$$a\delta t + b\delta T,$$

a et b désignant des constantes algébriques.

Pour obtenir une évaluation exacte des travaux moléculaires, dans les petites déformations de la masse liquide, il est indispensable d'étendre la fonction de forces élémentaire (2) à la masse entière, conformément à l'égalité (3), et d'exprimer les quantités s et S en fonction du volume de la masse liquide et des surfaces t et T .

Ces opérations se font aisément; elles donnent pour l'expression de la fonction de forces de la masse liquide

$$\Omega = C - g\rho \left[\int z dv + (\alpha^2 - 2\beta^2) T + \alpha^2 t \right] \dots (4)$$

Dans cette égalité α^2 , β^2 et C désignent des constantes. α^2 est une constante qui ne dépend que de la nature du liquide; β^2 dépend à la fois de la nature du liquide et de la nature de la paroi (*). La constante C s'introduit dans l'équation (4), par la considération de l'invariabilité du volume de la masse liquide, et aussi par l'exigence de l'intégration.

L'équilibre de la masse liquide dans les phénomènes capillaires est un équilibre stable. Par suite, la fonction de forces Ω relative à cet équilibre est maximum, et la variation $\delta\Omega$ est nulle, pour

(*) MOUTIER, *Cours de physique*, t. I, pp. 70 à 73.

toutes les petites déformations de la masse liquide dans lesquelles les directions des normales à la surface libre varient infiniment peu durant le cours de la déformation (*).

Cette restriction tient à la nature de la déformation infiniment petite envisagée d'après les usages du calcul des variations.

L'équation

$$\delta\Omega = 0. \quad \dots \dots \dots (4^{bis})$$

n'est pas autre chose que l'équation des vitesses virtuelles, et la quantité

$$-g\rho \left[\delta \int z dv + (\alpha^2 - 2\beta^2) \delta T + \alpha^2 \delta t \right] \quad \dots \dots (5)$$

exprime le travail de la pesanteur et des forces moléculaires dans le phénomène de la déformation de la masse liquide.

III

Les termes de l'expression (5)

$$-g\rho (\alpha^2 - 2\beta^2) \delta T \quad \text{et} \quad -g\rho \alpha^2 \delta t \quad \dots \dots (6)$$

peuvent recevoir une interprétation très propre à faciliter les raisonnements en maintes circonstances.

Supposons que la couche superficielle, terminée par la surface t , soit plane et assimilons-la à une membrane tendue également dans tous les sens.

Soient λ l'épaisseur de la membrane et l le périmètre de l'une quelconque des bases. L'intensité de la tension sur l'élément dl sera représentée par $\mathfrak{E} \lambda dl$ et, pour une extension δn , normale à dl et tangente à la surface de la membrane, le travail correspondant sera exprimé par le produit

$$- \mathfrak{E} \lambda dl \delta n.$$

Si on fait la somme de ces travaux pour toute l'étendue du contour l , on obtient, comme expression du travail total,

$$- \mathfrak{E} \lambda \delta t,$$

(*) ÉMILE MATHIEU, *Théorie de la capillarité*, p. 20.

attendu que l'on a

$$dt = \int dl \delta n.$$

Le produit $\mathcal{E}l$ s'appelle la tension de la membrane.

On arriverait au même résultat, dans le cas d'une membrane courbe, étendue sur un corps solide et tirée tout le long de son contour par des forces normales au contour et tangentes à la membrane. Il suffirait de diviser cette membrane en éléments plans et d'appliquer à chacun d'eux ce qui vient d'être dit, en tenant compte, dans la sommation finale, des réductions que les travaux égaux et de signes contraires y introduisent nécessairement.

A la suite de cette remarque, il devient manifeste que dans la seconde des expressions (6), par exemple, la quantité $g\rho\alpha^2$ est analogue à une tension de membrane.

Il en est de même de la quantité $g\rho(\alpha^2 - 2\beta^2)$ dans la première des expressions (6), si ce n'est que cette dernière quantité peut parfois être négative, comme nous le ferons voir plus bas. Lorsque cela a lieu, la quantité $g\rho(\alpha^2 - 2\beta^2)$ n'est plus analogue à une tension, mais bien à une force d'extension (*).

Cela admis, rien ne s'oppose assurément à ce que, dans les phénomènes capillaires, on assimile les couches superficielles terminées par les surfaces t et T , à des membranes tendues, ni que l'on regarde les expressions (6) comme représentant, dans cette hypothèse, le travail des forces de tension. Mais cette assimilation, bien que légitime, n'est nullement nécessaire. Les petites déformations de la masse liquide, au sein des tubes capillaires, sont des phénomènes fort différents de la contraction ou de l'extension d'une membrane tendue; l'analyse que nous avons faite dans le paragraphe précédent le montre surabondamment. Que le travail moléculaire résultant des déformations de la masse liquide puisse s'exprimer par les quantités algébriques (6), c'est une propriété des forces moléculaires, quand l'action de ces forces est supposée ne pas s'étendre au delà de la distance dite rayon de la sphère d'activité.

(*) ÉMILE MATHIEU, *Théorie de la capillarité*, p. 24.

Toutefois, nous l'avons déjà dit, l'assimilation des couches superficielles terminées par les surfaces t et T à des membranes tendues est légitime, pourvu que les forces de tension que l'on introduit au sein des couches superficielles, en remplacement des forces moléculaires, aient partout la même intensité, et que cette intensité reste invariable dans les variations d'étendue des couches.

Ces conditions sont exigées par la constance des coefficients α^2 et $(\alpha^2 - 2\beta^2)$. La dernière exprime une propriété qui ne se rencontre pas dans les membranes tendues : à mesure que celles-ci se rapetissent, l'intensité de la tension diminue. Cette différence tient à la nature fictive des forces de tension dans les liquides.

L'introduction de ces forces dans les couches superficielles de la masse liquide doit se faire, en outre, sans altération du système des forces de liaison, afin que les pressions exercées sur la surface du liquide par les forces de tension puissent se propager à l'intérieur de la masse, comme elles le faisaient sous l'action des forces moléculaires.

Dans ces conditions l'introduction des forces de tension dans les couches superficielles, à la place des forces moléculaires, ne trouble en aucune façon l'équilibre de la masse liquide. Cela résulte du principe des vitesses virtuelles et de la propriété donnée aux forces de tension d'avoir, dans les petites réformations de la masse liquide, des travaux virtuels exprimés par les quantités (6).

On sait, en effet, que le principe des vitesses virtuelles s'énonce comme suit : pour que l'équilibre ait lieu entre plusieurs forces dont les points d'application sont assujettis à des liaisons quelconques, il est nécessaire et il suffit que la somme des travaux virtuels de ces différentes forces soit égale à zéro, dans tous les mouvements virtuels compatibles avec les liaisons (*).

(*) CAUCHY, *Exercices de mathématiques*, seconde année, p. 16. Les liaisons quelconques dont parle Cauchy sont soumises, en réalité, à certaines restrictions. Dans la théorie de la capillarité, ces restrictions se trouvent vérifiées, ainsi que nous l'avons dit en commençant ce travail. On peut consulter, au sujet de ces restrictions, le *Cours de mécanique analytique*, par M. Gilbert, pp. 87 à 89.

Or, il est évident que la condition imposée aux forces d'un système par le principe des vitesses virtuelles est vérifiée, dans les phénomènes capillaires, par le système des forces de tension et de la pesanteur, attendu que l'expression (5) est égale à zéro dans le système primitif des forces, et que les travaux virtuels des tensions sont exprimés, comme il vient d'être dit, par les quantités (6). Cela étant, on peut parfaitement, sans altérer l'équilibre des colonnes capillaires, substituer les forces de tension aux forces moléculaires.

Cette substitution, que le principe des vitesses virtuelles légitime, permet de résoudre, dans le domaine de la capillarité, un grand nombre de questions relatives à l'équilibre dont la solution serait certainement beaucoup plus laborieuse par les autres procédés. Nous le ferons voir ci-après.

IV

De l'équation (4)^{bis} on tire successivement, par des procédés connus, d'abord l'équation de la surface capillaire, c'est-à-dire l'équation générale de la surface libre de la masse liquide dans les phénomènes de la capillarité. Cette équation est

$$z = \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) + m. \dots \dots \dots (7)$$

Dans cette égalité z représente l'ordonnée verticale d'un point quelconque de la surface, R et R' les rayons de courbure principaux de la surface en ce point, et m une constante dont la valeur est nulle quand on prend la partie plane de la surface du liquide pour origine des ordonnées.

On tire ensuite de la même équation (4)^{bis} la valeur de l'angle de raccordement i ; cette valeur est donnée par la formule

$$\cos i = \frac{2\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2} \dots \dots \dots (8)$$

Puis on obtient également, à l'aide de la même équation, l'expression, si remarquable, du volume du liquide soulevé dans un tube capillaire vertical, ou entre deux lames, ou autour d'un cylindre plein, ou même contre une simple lame (*).

Cette expression est

$$V = \alpha^2 L \cos i. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Dans l'expression (9), L désigne le périmètre de la section droite de la colonne soulevée.

La formule (8) montre que dans l'équation (4) et dans toutes les expressions qui en dérivent, le facteur $(\alpha^2 - 2\beta^2)$ est négatif toutes les fois que l'angle i est aigu; on dit alors que le liquide mouille la paroi. Ce même facteur est positif toutes les fois que l'angle de raccordement est obtus. Enfin, sa valeur devient nulle quand l'angle de raccordement est égal à un droit.

V

Dans son *Traité de la capillarité*, M. Émile Mathieu considère une lame plane faisant partie du système des parois d'un vase. Cette lame est mobile. Dans ces conditions, l'auteur se propose de déterminer la force produite par la capillarité sur la lame dont il s'agit. Par une application du principe des vitesses virtuelles, il arrive à cette conclusion que la paroi plane est sollicitée par une force normale à la ligne de bord, tangente à la surface du liquide et égale en intensité à $g\rho\alpha^2$ par unité de largeur (**).

Cette propriété peut être établie fort simplement par la considération des tensions des couches superficielles de la manière suivante (***) :

(*) MOUTIER, *Cours de physique*, t. I, pp. 74 à 82. — ÉMILE MATHIEU, *Théorie de la capillarité*, pp. 16 et 17; *item*, pp. 28 et suivantes.

(**) ÉMILE MATHIEU, *Théorie de la capillarité*, pp. 22 et 23.

(***) Les tensions des couches superficielles ne s'exercent pas simplement à la surface; leur action s'étend jusqu'à une profondeur très petite. Néanmoins, cette profondeur est si faible que les résultats ne sont pas altérés lorsqu'on en fait abstraction. De plus, on aurait pu très bien, dans l'hypothèse, si on l'avait voulu, n'appliquer les forces de tension qu'à la surface du liquide.

Lorsqu'une masse liquide prend une forme différente de sa forme naturelle, c'est-à-dire différente de la forme sphérique que cette masse prend quand elle est abandonnée à la seule action de ses forces moléculaires, il est évident qu'elle ne le fait, en partie du moins, que par l'influence déterminante de forces extérieures.

La considération des tensions des couches superficielles permet, dans la plupart des cas, de déterminer la direction et l'intensité de ces forces.

Dans le cas étudié par M. Émile Mathieu, par exemple, l'action de la paroi plane doit nécessairement neutraliser la tension de la couche superficielle, terminée par la surface t , tout le long de la ligne de bord. La force trouvée par M. Émile Mathieu n'est, dans cet ordre d'idées, que la réaction du liquide sur la paroi.

Quant à la couche superficielle terminée par la surface T , elle fait corps avec la paroi dans les mouvements de cette dernière : sa tension n'imprime aucune sollicitation dont il faille tenir compte ici.

La légitimité du raisonnement précédent, que j'ai présenté, à dessein, en raccourci, est fondée sur l'équivalence, dans l'état d'équilibre de la masse liquide, des tensions des couches superficielles et du système des forces moléculaires, équivalence qui a été établie ci-dessus par la considération du principe des vitesses virtuelles.

En effet, cette équivalence n'est pas seulement une propriété de l'équilibre de la masse liquide considérée à part, ainsi qu'il a été fait au § III, c'est de plus une propriété du système de la masse liquide et des parois solides. Car, quand on forme l'équation des vitesses virtuelles relative au système de la masse liquide et du corps solide, le premier membre de l'équation se compose uniquement de l'expression (3) jointe à l'expression du travail virtuel des forces extérieures appliquées au corps solide pour le maintenir en équilibre.

Eu égard à son importance, je vais donner au raisonnement dont il s'agit un peu plus de développement.

L'exactitude des propositions suivantes ne peut pas être mise en doute :

Premièrement, c'est à l'aide des conditions d'équilibre des forces agissant sur le système de la masse liquide et de la paroi mobile que l'on peut et que l'on doit déterminer la direction et l'intensité des forces spéciales qu'il faut appliquer à la paroi pour maintenir celle-ci au repos, nonobstant les pressions qui la sollicitent.

Deuxièmement, ces pressions du liquide sur la paroi s'exercent par le moyen des forces de liaison, ainsi que cela a lieu pour les pressions au sein du liquide.

Troisièmement, les forces qui sollicitent le système sont, outre les forces de liaison, la pesanteur, les forces moléculaires et les forces inconnues dont il vient d'être question.

Quatrièmement, dans le système de points formant la masse liquide et la paroi, points reliés entre eux par les forces de liaison, il est permis de substituer aux forces moléculaires les tensions des couches superficielles : l'équilibre n'est nullement altéré par cette substitution, attendu que, dans les petits mouvements du système, l'expression (5), jointe à l'expression du travail des forces extérieures appliquées à la paroi, représente, après comme avant la substitution, le travail virtuel total de déformation.

Nous ne cherchons pas à évaluer en ce moment les pressions normales exercées sur la paroi en pleine couche superficielle T : cette recherche ne présente pas de difficulté. Ce qu'il faut déterminer, c'est l'action exercée sur la paroi, le long de la ligne de bord, par les forces de liaison.

Pour limiter la question, supposons que la paroi soit la surface de révolution d'un corps flottant. La tension de la couche superficielle t peut être décomposée, pour chaque élément de la ligne de bord, en deux composantes rectangulaires, perpendiculaires à l'élément, l'une tangente, l'autre normale au corps. Chacune des premières, eu égard à l'équation (8), est neutralisée par la force d'extension de la couche superficielle T ; tandis que les secondes transmettent leurs sollicitations au corps, par le

moyen des forces de liaison. De plus, la couche superficielle T est le siège de forces d'extension d'intensité constante dont l'action détermine sur le corps des tractions que Poisson et M. Émile Mathieu ont démontrées équivaloir au système des composantes tangentielles dont il vient d'être question (*). Il résulte de cet examen que la sollicitation du corps peut être attribuée légitimement aux tensions de la couche superficielle t le long de la ligne de bord. Or, c'est précisément cette conclusion qu'il s'agissait d'établir.

VI

La sollicitation de la paroi, normale à la ligne de bord et tangente à la surface du liquide, rend raison d'un grand nombre de phénomènes : entendue de la façon que nous venons d'indiquer, elle apporte dans les raisonnements la simplicité et la clarté des conceptions synthétiques.

Lorsqu'un corps, par exemple, est immergé en partie dans un liquide qui le mouille et que la forme de ce corps est celle d'un cylindre vertical, du moins dans le voisinage de la ligne de bord, la force qu'il faut lui appliquer pour le maintenir en équilibre est égale, d'après le calcul analytique, au poids du corps diminué de la poussée, telle qu'on l'estime habituellement, et augmenté du poids du liquide soulevé autour de la partie cylindrique (**).

Or, dans ces conditions, en représentant par L la longueur de la ligne de bord et par i l'angle de raccordement, on a, comme il a été dit, pour l'expression du volume du liquide soulevé, le produit (9), c'est-à-dire

$$\alpha^2 L \cos i.$$

D'autre part, la composante verticale de l'action tangentielle du liquide sur le corps est égale au produit

$$g\alpha^2 L \cos i.$$

(*) ÉMILE MATHIEU, *Théorie de la capillarité*, pp. 118 et suivantes.

(**) MOUTIER, *Cours de physique*, t. I, p. 87.

Cette composante, qui agit dans le sens de la pesanteur, est donc égale au poids du liquide soulevé et, dans l'ordre d'idées que nous développons, pour maintenir le corps immergé en équilibre, il est nécessaire de la neutraliser par une action égale et contraire.

Cette conclusion est précisément, comme on le voit, celle de l'analyse.

Quand la forme du corps immergé n'est pas celle d'un cylindre vertical, dans le voisinage de la ligne de bord, l'action tangentielle du liquide intervient encore, pour une part notable, dans l'intensité de la poussée vraie (*).

Cette force intervient aussi dans l'équilibre d'un petit corps placé à la surface d'un liquide moins dense que lui; elle intervient de même, comme Poisson l'a remarqué le premier, dans l'attraction et la répulsion de deux lames verticales flottant à la surface d'un liquide (**).

Bref, il faut avoir égard à cette action tangentielle toutes les fois que l'on doit considérer, dans l'interprétation des phénomènes, l'action d'un liquide sur le corps solide avec lequel il est en contact.

VII

Puisque l'équilibre n'est pas troublé, dans les phénomènes capillaires, par la substitution du système des tensions des couches superficielles de la masse liquide au système des forces moléculaires, toute propriété établie à l'aide de cette substitution doit être considérée comme une propriété légitimement démontrée et la réalité objective de cette propriété, toutes les fois qu'elle n'implique pas celle des tensions, ne doit pas être révoquée en doute; de même qu'en statique, on ne suspecte pas la réalité objective d'un grand nombre de propriétés de l'équilibre, par cela que ces propriétés ont été établies par la considération des forces fictives, dites forces résultantes.

(*) ÉMILE MATHIEU, *Théorie de la capillarité*, pp. 106 et suivantes.

(**) *Ibid.*, p. 113 et p. 104.

C'est ainsi, par exemple, que le système des tensions de la couche superficielle terminée par la surface libre t , donnant naissance, par voie de composition de forces (*), à un système de forces normales dont l'intensité est, par unité de surface,

$$g\rho z^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right), \dots \dots \dots (10)$$

on peut substituer légitimement ce système à celui des tensions composantes.

Laplace a fondé son explication théorique des phénomènes capillaires sur la considération de ces forces normales; il les fait dériver des forces moléculaires par voie de composition, de sorte que leur réalité dans l'ordre objectif est, au point de vue de l'illustre géomètre, la réalité d'équivalence des forces résultantes. La manière dont nous venons de les obtenir par la composition de forces fictives n'introduit pas un point de vue nouveau en opposition avec le premier, attendu qu'il est toujours possible de donner naissance par voie de composition à un système de forces, d'une infinité de façons différentes.

L'introduction des forces normales (10), dans les raisonnements relatifs aux phénomènes capillaires, conduit à des conséquences extrêmement intéressantes. On démontre par leur moyen, entre autres théorèmes, que les pressions normales aux parois sont, à l'intérieur des colonnes soulevées, des pressions négatives, quand on ne tient pas compte de la pression atmosphérique. Le rôle de cette propriété dans l'interprétation des phénomènes de l'équilibre et du mouvement des corps flottants est fort important (**).

(*) BRIOT, *Théorie mécanique de la chaleur*, 2^e édition, pp. 174 et suivantes. — *Journal de physique théorique et appliquée*, t. I, p. 354, et t. IV, p. 333.

(**) ÉMILE MATHIEU, *Théorie de la capillarité*, pp. 103, 108 et suivantes.

VIII

L'action tangentielle de la masse liquide sur les parois se rattache, comme corollaire, à la théorie de Laplace aussi bien qu'à celle de Gauss.

Dans la théorie de Laplace, les pressions moléculaires normales à la surface libre t ont pour valeur, par unité de surface,

$$K + \frac{1}{2}H \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right). \dots \dots \dots (11)$$

Dans l'expression (11), K et H représentent des constantes qui dépendent uniquement de la nature du liquide. Laplace a exprimé la valeur de ces constantes par le moyen d'intégrales définies (*).

La partie de ces pressions dépendante de la courbure de la surface libre forme, sur l'étendue de cette surface, un premier système de pressions normales; la partie indépendante de la courbure en forme un second.

Le premier système de ces pressions normales peut être décomposé en tensions superficielles ayant, sur toute l'étendue de la surface libre, la valeur constante $\frac{1}{2}H$. Le second système ne peut pas subir cette décomposition, toutes les fois du moins que la courbure de la surface libre est variable.

Le système des tensions $\frac{1}{2}H$ requiert, dans l'état d'équilibre, une action tangentielle du liquide sur la paroi et une action réciproque, égale et contraire à la première de la paroi sur le liquide : le raisonnement développé dans le § V et appliqué au cas présent le montre (**).

(*) *Traité de mécanique céleste*, t. IV, pp. 366 et 361.

(**) Ce raisonnement, dans le cas présent, est le suivant : tout le long de la ligne de bord, les composantes des tensions $\frac{1}{2}H$, normales à la paroi, sont neutralisées par les liaisons du liquide à la paroi; cette neutralisation est une condition obligée de l'équilibre. Partant, la neutralisation des composantes des mêmes tensions parallèles à la paroi demande, dans la couche superficielle adjacente à la paroi, une nouvelle tension, semblable de tout point à celle dont il est question dans le § V. L'angle de raccordement est déterminé dans sa valeur par l'égalité exprimant cette seconde neutralisation et toutes les conséquences énoncées au § V demeurent applicables à la théorie de Laplace.

Par suite, si les théories de Laplace et de Gauss sont exactes, il est nécessaire que les constantes $g\rho a^2$ et $\frac{1}{2}H$ des expressions (10) et (11) aient même valeur numérique.

Poisson, dans sa théorie de l'action capillaire, a fait plusieurs objections à la théorie de Laplace. Il est reconnu aujourd'hui que ces objections reposent sur une inadvertance : l'éminent contradicteur de l'auteur de la *Mécanique céleste* n'a pas tenu compte dans ses raisonnements des forces de liaison (*). Quand on introduit ces forces de liaison dans le calcul, toute contradiction disparaît.

IX

Les faits apportés par quelques physiciens pour prouver que les forces de tension des couches superficielles ont dans les phénomènes capillaires une réalité formelle et non une réalité de simple équivalence peuvent être interprétés facilement sans qu'il soit nécessaire de recourir à une hypothèse que, pour me servir des expressions de M. Duhem, la mécanique rationnelle ne justifie pas.

En effet, nous l'avons dit, l'action de forces extérieures est requise toutes les fois que la forme de la masse liquide est différente de la forme naturelle. La détermination de ces forces extérieures peut se faire fort simplement par la considération du système des tensions des couches superficielles. Bien que ces tensions soient des forces fictives, la détermination dont il s'agit n'en est pas moins légitime; nous l'avons prouvé.

Or, les faits apportés en faveur de la réalité formelle des tensions superficielles s'expliquent, les uns par la présence de ces forces extérieures, les autres par le retrait plus ou moins subit des mêmes forces.

Dans ce dernier cas, les forces moléculaires tendent à donner à la masse liquide une forme d'équilibre nouvelle et on les voit

(*) *Rapport sur les progrès de l'électricité, du magnétisme et de la capillarité*, par M. Quet, p. 253.

naturellement imprimer aux molécules des mouvements corrélatifs proportionnés.

Dans le procédé proposé par Athanase Dupré pour évaluer l'intensité des tensions superficielles (**), procédé qui est regardé comme le plus exact, on mesure en réalité l'action tangentielle du liquide sur le disque, c'est-à-dire qu'on détermine la valeur numérique de la constante capillaire $g\rho\alpha^2$. Dans le procédé classique de M. Van der Mensbrugghe (**), on mesure la composante verticale de cette action tangentielle. Les autres procédés donnent lieu à des remarques analogues.

La méthode de détermination relative des tensions superficielles, dite du compte-gouttes, méthode employée pour la première fois par Hagen, est fondée sur ce principe, admis comme évident, que les poids de deux gouttes de liquides différents sont, dans le procédé, proportionnels aux tensions superficielles de ces mêmes liquides (***)).

Ce principe n'est pas tout à fait exact. Avant de se détacher du tube, les gouttes se creusent tout le long du cercle de gorge, et c'est à l'endroit où se trouve ce cercle que la séparation se fait. Or, les volumes compris entre le sommet et le cercle de gorge des gouttes sont sensiblement proportionnels aux constantes capillaires α^2 , ainsi que le calcul analytique le fait voir; mais la proportionnalité rigoureuse n'existe pas (iv).

Quant à l'expérience de M. Pasteur (v), elle montre la réaction de la paroi dans l'action tangentielle du liquide et l'adhérence de la couche superficielle de ce dernier à la matière du tube quand celui-ci se trouve au sein de la masse fluide.

L'équilibre des lames liquides, dans le phénomène des bulles, équilibre que l'on invoque aussi très souvent pour appuyer l'hypothèse de l'existence réelle des tensions superficielles, est dû à

(*) *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 246.

(**) *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 2^e série, t. XXII, p. 324.

(***) VIOLLE, *Cours de physique*, t. I, pp. 657 et 658.

(iv) ÉMILE MATHIEU, *Théorie de la capillarité*, p. 186.

(v) VIOLLE, *Cours de physique*, t. I, p. 608.

l'action des forces normales considérées par Laplace dans l'explication des phénomènes capillaires.

Athanase Dupré a fait à la théorie de Laplace une objection tirée de l'impossibilité du mouvement perpétuel (*). Cette objection s'évanouit d'elle-même dès qu'il est démontré, comme je l'ai fait ci-dessus, que la théorie de Laplace comporte, tout aussi bien que celle de Gauss, les actions tangentielle de la masse liquide sur la paroi. Cette action tangentielle ne disparaît pas dans le cas d'une surface libre sensiblement plane et horizontale, attendu que la tension $\frac{1}{2} H$ est indépendante de la courbure de la surface.

X

La théorie de Gauss s'applique également aux phénomènes capillaires des liquides superposés.

En conservant les notations adoptées dans le paragraphe premier, sauf à y introduire l'indice 1, toutes les fois que, sans changement de définition, elles se rapportent au deuxième liquide, et en désignant par U la surface commune aux deux liquides, par γ^2 et γ_1^2 deux constantes, analogues à β^2 , reliées entre elles par la relation

$$\rho\gamma^2 = \rho_1\gamma_1^2,$$

on a (**), pour l'expression de la fonction de forces, dans le cas des liquides superposés,

$$\begin{aligned} \Omega = & -g\rho \left[\int z dv + (\alpha^2 - 2\beta^2) T + \alpha^2 t + (\alpha^2 - \gamma^2) U \right] \\ & -g\rho_1 \left[\int z dv_1 + (\alpha_1^2 - 2\beta_1^2) T_1 + \alpha_1^2 t_1 + (\alpha_1^2 - \gamma_1^2) U \right] \\ & + C, \end{aligned}$$

(*) *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 398.

(**) MOUTIER, *Théorie des phénomènes capillaires*, dans les *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 2^e série, t. III, pp. 75 et 76. — *Cours de physique*, t. I, p. 89.

et, pour l'expression du travail virtuel de la pesanteur et des forces moléculaires, dans les petites déformations des masses liquides, comptées à partir du système des positions d'équilibre des points matériels qui constituent ces masses, la somme des deux quantités

$$\left. \begin{aligned} & - g_{\rho} \left[\delta \int z dv + (\alpha^2 - 2\beta^2) \delta T + \alpha^2 \delta t + (\alpha^2 - \gamma^2) \delta U \right] \\ \text{et} & - g_{\rho_1} \left[\delta \int z dv_1 + (\alpha_1^2 - 2\beta_1^2) \delta T_1 + \alpha_1^2 \delta t_1 + (\alpha_1^2 - \gamma_1^2) \delta U \right]. \end{aligned} \right\} (12)$$

Rien ne s'oppose à ce que l'on considère de nouveau, dans la somme des quantités (12), les termes

$$\left. \begin{aligned} & - g_{\rho} (\alpha^2 - 2\beta^2) \delta T, \\ & - g_{\rho_1} (\alpha_1^2 - 2\beta_1^2) \delta T_1, \\ & - g_{\rho} \alpha^2 \delta t, \\ & - g_{\rho_1} \alpha_1^2 \delta t_1, \\ \text{et} & - [g_{\rho} (\alpha^2 - \gamma^2) + g_{\rho_1} (\alpha_1^2 - \gamma_1^2)] \delta U \end{aligned} \right\} . . . (13)$$

comme exprimant des travaux de forces de tension.

Il suffit, pour cela, que l'on convienne d'introduire dans les couches superficielles terminées par les surfaces T , t , T_1 , t_1 et U , à la place des forces moléculaires, des systèmes de tensions, d'intensité constante, ayant respectivement pour valeur, par unité de longueur, les coefficients des variations de surface dans les expressions (13), changés de signe. Cette substitution doit se faire d'ailleurs avec les restrictions déjà mentionnées et sans altération du système des forces de liaison.

Il y a avantage à faire ce changement, car il devient alors beaucoup plus facile de déterminer les sollicitations tangentielles des masses liquides sur les solides avec lesquels elles sont en contact. Nous entrerons tout à l'heure dans quelques développements à ce sujet.

XI

Dans le voisinage de la position d'équilibre, la somme des travaux virtuels représentés par les quantités (12) est nulle. L'équation qui exprime cette propriété est l'équation des vitesses virtuelles pour le cas des liquides superposés.

Appliquons cette équation à un exemple.

Lorsqu'un tube capillaire vertical plonge dans un liquide et qu'on introduit dans le tube, par la partie supérieure, un liquide différent du premier, il est aisé de déterminer, par l'équation des vitesses virtuelles, la forme et l'angle de raccordement des surfaces terminales dans le tube (*).

En désignant par l'indice 1 les constantes capillaires du liquide dans lequel le tube est plongé, l'équation de la surface terminale du liquide supérieur est donnée, comme dans le cas d'un seul liquide, par la formule (7), et la valeur de l'angle de raccordement par l'égalité (8).

L'équation de la surface terminale du liquide inférieur dans le tube est donnée de même par la formule

$$z = \frac{\rho(\alpha^2 - \gamma^2) + \rho_1(\alpha_1^2 - \gamma_1^2)}{\rho_1 - \rho} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) + m_1, \quad (14)$$

et l'angle de raccordement par l'égalité

$$\cos i' = \frac{\rho_1(2\beta_1^2 - \alpha_1^2) - \rho(2\beta^2 - \alpha^2)}{\rho_1(\alpha_1^2 - \gamma_1^2) + \rho(\alpha^2 - \gamma^2)}. \quad (15)$$

J'indiquerai plus bas la méthode à suivre dans la détermination de la valeur de la constante m_1 (**).

(*) MOUTIER, *Théorie des phénomènes capillaires*, dans les *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 2^e série, t. III, pp. 77 et 78; *idem*, pp. 85 et 86. — ÉMILE MATHIEU, *Théorie de la capillarité*, pp. 61 et 62.

(**) Les formules (14) et (15) coïncident avec celles trouvées par M. Émile Mathieu; elles sont indépendantes de la manière dont M. Moutier prétend expliquer les faits observés par Young et M. Quincke. Cette explication a été reconnue défectueuse par l'auteur.

XII

Le cas de deux liquides superposés dans un tube capillaire présente une propriété remarquable.

Il est aisé de montrer, à l'aide de l'équation des vitesses virtuelles, que la somme des poids des liquides soulevés au-dessus du niveau dans le vase ne dépend que de la nature du tube et de celle du liquide inférieur, et qu'elle est égale au poids de la colonne soulevée, alors que le liquide inférieur est seul dans le tube (*). Ce théorème a été énoncé pour la première fois par Laplace. Gauss et Poisson ont trouvé qu'il découlait également de leurs principes.

Eu égard à l'équation (9) et au théorème dont il s'agit, la somme des poids des liquides soulevés est donnée par l'expression

$$g\rho_1\alpha_1^2L \cos i_1, \quad (16)$$

L représentant le périmètre de la section droite du tube, et i_1 l'angle de raccordement propre au liquide inférieur.

D'autre part, la somme des composantes verticales des tensions de la surface t , tout le long de la ligne de bord, est

$$g_2\alpha^2L \cos i,$$

ou, par la formule (8),

$$g_2L (2\zeta^2 - \alpha^2); \quad (17)$$

celle des composantes verticales des tensions de la surface U est de même

$$[g\rho (\alpha^2 - \gamma^2) + g\rho_1 (\alpha_1^2 - \gamma_1^2)] L \cos i',$$

ou, en vertu de la formule (15),

$$[\rho_1 (2\zeta_1^2 - \alpha_1^2) - \rho (\zeta^2 - \alpha^2)] gL. \quad (18)$$

(*) BERTRAND, *Mémoire sur la théorie des phénomènes capillaires*, § VIII. — ÉMILE MATHIEU, *Théorie de la capillarité*, p. 81.

Or, on peut voir facilement que la somme des expressions (17) et (18) se réduit à la quantité (16). Il faut en conclure que les tensions des couches superficielles le long des lignes de bord, dans le cas de deux liquides superposés, aussi bien que dans le cas d'un seul liquide, peuvent être considérées comme soutenant par leur action les colonnes liquides au-dessus du niveau dans le vase.

XIII

Dans un mémoire justement remarqué (*), M. Van der Mensbrugghe a signalé des écarts notables entre les faits et la loi de Laplace mentionnée au § XII. L'existence de semblables écarts n'a rien qui doive étonner. L'auteur lui-même en convient.

Les déterminations numériques que nous possédons, au sujet des constantes capillaires des liquides, sont peu nombreuses et fort imparfaites. Ces constantes capillaires sont, pour chaque liquide, la constante α^2 et l'angle de raccordement dans les diverses circonstances de contact du liquide avec des parois solides.

De plus, il est des liquides pour lesquels l'angle de raccordement, donné par la formule (8), est imaginaire. Cela arrive toutes les fois que la constante β^2 est numériquement supérieure à la constante α^2 ; alors la valeur de $\cos i$ est positive et plus grande que l'unité.

Dans ces conditions, l'équilibre de la masse liquide, tel que nous l'avons envisagé jusqu'ici, est impossible; le liquide monte le long de la paroi et forme, à la surface de celle-ci, une gaine adhérente au tube. C'est dans cette gaine que se fait l'ascension capillaire.

Lorsque la gaine liquide ne se forme pas spontanément, par les exigences mêmes de la nature du liquide, on peut la produire d'une façon accidentelle en faisant osciller légèrement, de haut en bas et de bas en haut, la colonne liquide dans le tube.

(*) *Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie royale de Belgique*, t. XLI.

Dans les deux cas, si l'épaisseur de la gaine liquide est égale au rayon d'activité du liquide agissant sur lui-même, les constantes β^2 et α^2 des formules (7) et (8) ont une valeur commune et l'angle de raccordement du liquide avec la gaine est nul. Si, au contraire, l'épaisseur de la gaine est inférieure au rayon d'activité du liquide agissant sur lui-même, la constante α^2 conserve la valeur qu'elle avait dans les conditions précédentes, mais l'angle de raccordement du liquide avec la gaine n'est plus égal à zéro.

Cela étant, toutes les fois que dans le phénomène des liquides superposés, à l'intérieur d'un tube capillaire, l'ascension des colonnes liquides se fait dans la gaine du liquide inférieur, la vérification de la loi de Laplace devient à peu près impossible par l'ignorance où nous sommes de la valeur exacte de l'angle de raccordement du liquide inférieur dans son contact avec la gaine.

Quand l'ascension des colonnes liquides se fait en partie dans la gaine du liquide inférieur et en partie dans la gaine du liquide supérieur, il y a lieu d'ordinaire de faire entrer en ligne de compte, dans la vérification de la loi de Laplace, un résultat théorique assez important. La théorie fait connaître, en effet, ce que devient la loi de Laplace dans le cas où le tube capillaire est formé de deux parties hétérogènes séparées par une section droite.

Si le liquide supérieur se trouve tout entier au-dessus de cette section, le théorème de Laplace doit s'interpréter comme il suit : la somme des poids des colonnes soulevées au-dessus du niveau du liquide dans le vase est égale au poids de la colonne soulevée lorsque le liquide inférieur est seul dans le tube et que l'extrémité supérieure de la colonne est censée atteindre la partie supérieure de la paroi. Si le liquide supérieur est en partie au-dessus et en partie au-dessous de cette section, le théorème de Laplace passe par un énoncé compliqué où la considération du liquide supérieur s'ajoute à celle du liquide inférieur. Dans ce cas, les vérifications expérimentales pourraient fort bien être défectueuses par le défaut du raisonnement (*).

(*) ÉMILE MATHIEU, *Théorie de la capillarité*, pp. 82 et 83.

Lorsque les liquides ne peuvent pas se superposer dans le tube capillaire sans se mêler, il est fort douteux, pour ne rien dire de plus, que les conclusions de la théorie soient applicables à des conditions aussi anormales, attendu que les hypothèses fondamentales du calcul ne s'accordent pas avec ce mode de constitution physique.

XIV

Il est facile de trouver la valeur des constantes m et m_1 des équations (7) et (14) dans le cas des liquides superposés, lorsqu'on fait connaître la hauteur moyenne de la colonne supérieure.

Le théorème de Laplace donne une première relation entre ces constantes et les densités des deux liquides; la hauteur moyenne de la colonne supérieure, déterminée par l'expérience, comme je le suppose, donne une seconde relation entre les mêmes constantes, les densités des liquides et les hauteurs moyennes des colonnes soulevées, alors que chacun des liquides est seul à l'intérieur et à l'extérieur du tube. De ces deux relations, qui sont des équations algébriques du premier degré, on tire les valeurs de m et m_1 .

XV

La plupart des remarques que nous avons faites au sujet des liquides superposés dans les tubes capillaires peuvent être appliquées aux liquides superposés compris entre deux lames parallèles.

Dans les deux cas, la démonstration de l'existence et la détermination de l'intensité des actions tangentielles du liquide sur les lames, dans la sollicitation de ces dernières au mouvement, se font, soit par le procédé analytique employé par M. Émile Mathieu dans le cas d'un seul liquide, soit par la considération des tensions des couches superficielles.

Dans l'équilibre de la colonne liquide renfermée entre deux lames solides, la substitution du système des tensions des couches

superficielles, au système des forces moléculaires, est légitime, pour les raisons alléguées au § III.

Dès lors, dans la détermination des causes qui influent sur la sollicitation des lames au mouvement, il devient évident que l'on doit tenir compte, non seulement des pressions normales exercées sur les différents éléments de la surface des lames, dans la partie baignée par les liquides, mais encore des actions tangentielles des liquides sur les lames, le long des lignes de bord. Cette dernière considération avait été omise par Laplace. Poisson fit remarquer, le premier, la nécessité d'y avoir égard.

XVI

Du moment qu'il est légitime, dans toutes les questions d'équilibre des liquides superposés, de substituer au système des forces moléculaires le système des tensions des couches superficielles dont les travaux virtuels sont exprimés par les quantités (13), le problème de la goutte liquide déposée sur un autre liquide plus dense peut être résolu fort simplement.

Les tensions des surfaces libres t , t_1 , et celle de la surface U commune aux deux liquides, dont les intensités respectives sont :

$$g\rho\alpha^2, \quad g\rho_1\alpha_1^2, \quad g\rho(\alpha^2 - \gamma^2) + g\rho_1(\alpha_1^2 - \gamma_1^2),$$

doivent s'équilibrer tout le long de la ligne de bord de la goutte.

Cela exige que la plus grande des trois tensions soit plus petite que la somme des deux autres. Les tensions au contact de deux liquides sont généralement, comme on sait, peu considérables.

Pour que le liquide le plus léger se rassemble en goutte à la surface du liquide le plus dense, il faut donc que la tension du liquide le plus dense soit inférieure à la somme de la tension du liquide le plus léger et de la tension qui s'exerce à la surface de séparation des deux liquides (*). Dans le cas contraire, le liquide le plus léger s'étale à la surface du liquide le plus dense.

(*) La condition énoncée est nécessaire, mais elle n'est pas toujours suffisante.

Si une lame liquide s'appuie sur un contour horizontal et qu'un second liquide forme une lame mince à l'intérieur du premier, cette dernière lame s'étendra jusqu'à ce que la tension du second liquide n'ait plus à équilibrer qu'une composante de la tension du premier liquide, toutes les fois que la tension du premier liquide est supérieure à celle du second. Dans la supposition contraire, on observera le phénomène inverse : la lame du premier liquide s'étendra et le second liquide se rassemblera en goutte.

Lorsqu'une goutte de liquide est déposée à l'intérieur d'un autre liquide de même densité et que la tension au contact des deux liquides, exprimée par le coefficient de la dernière des quantités (13), est positive, la goutte se concentre sur elle-même et prend la forme sphérique ; c'est le cas des célèbres expériences de Joseph Plateau. Dans l'hypothèse contraire, la goutte se désagrège et entre en diffusion dans le liquide ambiant.

XVII

Les conclusions suivantes ressortent, si je ne me trompe, des observations qui précèdent. C'est par ces conclusions que je terminerai ce travail.

PREMIÈRE CONCLUSION. — La théorie de la capillarité, telle qu'elle a été inaugurée par Laplace et perfectionnée par Gauss, ne s'oppose nullement à ce que, dans la recherche des conditions d'équilibre des phénomènes capillaires, on introduise la considération des tensions des couches superficielles.

DEUXIÈME CONCLUSION. — Pour être légitime, la substitution du système des tensions des couches superficielles aux forces moléculaires doit se faire sans altération du système des forces de liaison. Les travaux de ces forces doivent disparaître, en effet, de l'équation des vitesses virtuelles après la substitution comme avant, et l'aptitude que ces forces confèrent au liquide, pour propager au sein de la masse les pressions exercées à la surface,

ne peut subir aucune modification. Il faut, de plus, que l'intensité de ces tensions soit indépendante de la forme et de l'étendue des surfaces.

TROISIÈME CONCLUSION. — Il est souvent avantageux, dans l'étude des phénomènes capillaires, de faire intervenir la considération des tensions des couches superficielles de la masse liquide.

D'une part, en effet, cette considération est légitime, puisque le système des forces moléculaires et le système des tensions des couches superficielles sont deux systèmes de forces équivalents (*). Cette équivalence résulte du principe des vitesses virtuelles et de la forme de l'expression (5).

D'autre part, maintes déterminations que le calcul analytique n'exécute qu'avec peine se font avec une facilité extrême et presque immédiatement par la considération des tensions des couches superficielles.

QUATRIÈME CONCLUSION. — Ces tensions, par cela qu'elles n'existent pas réellement au sein des couches superficielles, forment évidemment, dans la théorie mathématique de la capillarité, un système de forces fictives. Si on veut les appeler forces réelles, il faut dire, dans ce cas, que leur réalité est une réalité de simple équivalence et non une réalité formelle.

L'absence de réalité formelle est commune aux forces de tension des couches superficielles des masses liquides et aux forces résultantes, dont on fait un si grand usage dans les questions de mécanique : celles-ci n'existent pas réellement au sein des corps et leur réalité est aussi une réalité de simple équivalence.

Il y a toutefois des différences très marquées entre les forces résultantes de la mécanique et les tensions des couches superficielles des masses liquides. Je n'en veux signaler que deux.

D'abord dans la suite logique des idées, le concept de la force résultante est beaucoup plus immédiat que celui des tensions des couches superficielles : le premier se présente, dès le début, dans

(*) Deux systèmes de forces sont équivalents, quand ils peuvent être substitués l'un à l'autre, dans un système de points matériels en équilibre, sans que l'équilibre soit troublé

l'étude de l'équilibre, tandis que pour aboutir au second, dans l'étude de la capillarité, il faut faire un long circuit de raisonnements. En outre, la portée objective des forces résultantes est plus considérable, même dans le domaine des phénomènes capillaires, que celle des tensions. Les forces résultantes régissent à la fois les phénomènes de l'équilibre et les phénomènes du mouvement, tandis que les tensions des couches superficielles ne dépassent guère, dans leur portée, les phénomènes de l'équilibre.

CINQUIÈME CONCLUSION. — Les mesures expérimentales destinées à apprécier l'intensité des tensions des couches superficielles ne peuvent pas être invoquées en faveur de la réalité formelle de ces forces.

Ces mesures, en effet, ne font que déterminer l'intensité des forces extérieures qu'il faut appliquer aux masses liquides pour leur donner des formes d'équilibre autres que leur forme naturelle, ou pour les y maintenir, en même temps qu'elles font connaître la valeur numérique de ce qu'on est convenu d'appeler les constantes capillaires des liquides.

J'ajouterai à ces conclusions une observation finale.

La constitution physique des liquides, aussi bien que celle des solides, est aujourd'hui encore fort peu connue. La division des masses en éléments distincts et les attractions mutuelles de ces éléments forment, de l'aveu de tous, la partie la moins douteuse de nos croyances à ce sujet. Mais, cela admis, comment se fait dans l'état d'équilibre, réel ou apparent, des masses liquides, la neutralisation de la résultante des forces attractives en chacun des éléments, soit de la couche superficielle, soit même de la partie intérieure? Faut-il, dans l'hypothèse de l'immobilité relative des éléments, imaginer une force, égale et contraire à la première, résultant des actions répulsives que les éléments les plus rapprochés de l'élément que l'on considère exercent sur celui-ci? Ou bien, comme le suppose la théorie cinétique des liquides, la neutralisation se fait-elle par les chocs incessants des éléments (*)?

(*) Les chocs maintiennent les positions moyennes des éléments à des distances où l'action mutuelle de ces éléments peut être considérée comme attractive. Il n'en est pas

Voilà des questions qu'il est facile de poser, mais auxquelles, même à l'heure présente, il est fort difficile de répondre.

Laplace et Gauss n'ont pas cru devoir attendre la solution de ces questions pour asseoir sur ses bases véritables la théorie des phénomènes capillaires. A la cause ignorée dont l'action produit, avec celle des forces attractives, l'équilibre de chaque point matériel d'une masse liquide quelconque et permet la propagation des pressions, au sein de la masse, ils substituèrent la causalité fictive et équivalente des forces de liaison. L'événement montra la justesse de coup d'œil dont les deux illustres géomètres firent preuve en cette circonstance.

La théorie de la capillarité est, sans contredit, un des plus beaux chapitres de la physique mathématique. On ne sait ce qu'il faut le plus y admirer, de l'élégance des formules, de la fécondité de la méthode ou de l'accord des faits avec les conséquences des raisonnements. Vienne donc, à la suite des recherches habilement conduites et patiemment poursuivies des physiciens, la connaissance de la constitution vraie des liquides : les forces de liaison disparaîtront de la théorie de la capillarité; la réalité prendra la place de la fiction; mais, on peut le croire, l'édifice élevé par Laplace et Gauss n'en sera pas ébranlé; il restera debout, à côté de la théorie de la gravitation, fort de la solidité de ses principes et de la parfaite cohérence de sa doctrine.

moins vrai cependant que l'action répulsive s'exerçant entre les mêmes éléments, lorsque ceux-ci sont placés à de très petites distances l'un de l'autre, intervient dans le phénomène du choc et en constitue une partie essentielle.

SUR

LES SOUS-INVARIANTS

DES FORMES BINAIRES

PAR

M. Maurice d'OCAGNE,
INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSEES.

Le théorème qui fait l'objet de la présente Note a été communiqué à l'Académie des sciences de Paris, dans la séance du 19 avril 1886. C'est M. Halphen qui nous fit l'honneur de le présenter à l'Académie (voir *Comptes rendus*, t. CII, p. 916). Nous nous contentâmes d'en indiquer la démonstration, sans la développer; c'est ce que nous allons maintenant faire ici.

Voici d'abord l'énoncé de notre théorème :

Si dans l'expression de la p^{ème} dérivée du logarithme d'une fonction quelconque a d'une variable indépendante, on remplace les accents de dérivation par des indices correspondants, de façon que a, a', a'', a''', ... soient remplacés par a₀, a₁, a₂, a₃, ... l'expression ainsi formée, pour toutes les valeurs de p, depuis 2 jusqu'à n, est un sous-invariant () de la forme binaire*

$$a_0 x^n + \frac{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_n y^n.$$

(*) On sait que les fonctions des coefficients d'une forme, appelées par M. Sylvester des *sous-invariants* de cette forme, sont *identiques* avec ce que M. Roberts a nommé des *sources de covariants* de cette forme. Chaque sous-invariant est, en effet, le coefficient du premier terme d'un covariant de la forme, dont, comme on sait, se déduisent les coefficients de tous les autres termes.

Il va sans dire que l'on rendra cette expression entière en la multipliant par a_0^2 . Ainsi les dérivées seconde, troisième et quatrième donnent les sous-invariants

$$\begin{aligned} a_0 a_2 - a_1^2 \\ a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3 \\ a_0^3 a_4 - 4 a_0^2 a_1 a_3 - 3 a_0 a_1^2 a_2 + 12 a_0 a_1^2 a_2 - 6 a_1^4. \end{aligned}$$

Représentant par φ_p le sous-invariant, rendu entier, fourni par la dérivée $p^{\text{ième}}$, il faudra, pour que le théorème soit démontré, faire voir que φ_p satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \dots \quad a_0 \frac{d\varphi_p}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi_p}{da_2} + \dots + pa_{p-1} \frac{d\varphi_p}{da_p} = 0.$$

Or, dans le cas de $p = 2$, on voit immédiatement que cette condition est satisfaite par $\varphi_2 = a_0 a_2 - a_1^2$. Tout se réduit donc à démontrer que si la propriété a lieu pour l'indice p , elle a lieu aussi pour l'indice $p + 1$, c'est-à-dire que, si l'on suppose la condition (1) vérifiée, on a aussi

$$(2) \quad a_0 \frac{d\varphi_{p+1}}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi_{p+1}}{da_2} + \dots + pa_p \frac{d\varphi_{p+1}}{da_p} + (p+1) a_p \frac{d\varphi_{p+1}}{da_{p+1}} = 0.$$

Remarquons d'abord que, pour cette démonstration, on peut considérer a_0, a_1, a_2, \dots comme des fonctions d'une variable fictive ζ , telles que

$$\frac{da_0}{d\zeta} = a_1, \quad \frac{da_1}{d\zeta} = a_2, \quad \frac{da_2}{d\zeta} = a_3, \dots$$

On a alors

$$\varphi_p = a_0^p \frac{d^p a_0}{d\zeta^p},$$

fonction homogène, du degré p , en $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$. Nous utilisons plus loin cette remarque.

Puisque

$$\frac{d^p a_0}{d\zeta^p} = \frac{\varphi_p}{a_0^p},$$

on a

$$\frac{d^{p+1} a_0}{d\zeta^{p+1}} = \frac{a_0^p \varphi'_p - p a_0^{p-1} a_1 \varphi_p}{a_0^{2p}},$$

d'où

$$\varphi_{p+1} = a_0 \varphi'_p - p a_1 \varphi_p.$$

De là découle que

$$\frac{d\varphi_{p+1}}{da_1} = a_0 \frac{d\varphi'_p}{da_1} - p a_1 \frac{d\varphi_p}{da_1} - p \varphi_p,$$

$$\frac{d\varphi_{p+1}}{da_2} = a_0 \frac{d\varphi'_p}{da_2} - p a_1 \frac{d\varphi_p}{da_2},$$

$$\dots$$

$$\frac{d\varphi_{p+1}}{da_p} = a_0 \frac{d\varphi'_p}{da_p} - p a_1 \frac{d\varphi_p}{da_p},$$

enfin

$$\frac{d\varphi_{p+1}}{da_{p+1}} = a_0 \frac{d\varphi'_p}{da_{p+1}},$$

car φ_p ne contient pas a_{p+1} . Multipliant ces égalités respectivement par $a_0, 2a_1, \dots, p a_{p-1}, (p+1) a_p$, faisant la somme, et tenant compte de (1), on voit que l'équation (2) peut être remplacée par

$$(3) \quad a_0 \frac{d\varphi'_p}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi'_p}{da_2} + \dots + (p+1) a_p \frac{d\varphi'_p}{da_{p+1}} = p \varphi_p.$$

Or

$$\varphi'_p = \frac{d\varphi_p}{da_0} a_1 + \frac{d\varphi_p}{da_1} a_2 + \dots + \frac{d\varphi_p}{da_p} a_{p+1}.$$

L'équation (3) deviendra donc

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 \frac{d\varphi_p}{da_0} + 2a_1 \frac{d\varphi_p}{da_2} + \dots + (p+1) a_p \frac{d\varphi_p}{da_p} \\ + a_1 \left(a_0 \frac{d^2\varphi_p}{da_0 da_2} + 2a_1 \frac{d^2\varphi_p}{da_0 da_2} + \dots + p a_{p-1} \frac{d^2\varphi_p}{da_0 da_p} \right) \\ \dots \\ + a_{p+1} \left(a_0 \frac{d^2\varphi_p}{da_p da_1} + 2a_1 \frac{d^2\varphi_p}{da_p da_2} + \dots + p a_{p-1} \frac{d^2\varphi_p}{da_p^2} \right) \end{array} \right. = p \varphi_p.$$

Mais, l'équation (1) étant supposée satisfaite par la fonction φ_p , on a, en dérivant le premier membre de cette équation par rapport à ζ ,

$$\begin{aligned} & a_1 \frac{d\varphi_p}{du_1} + 2a_2 \frac{d\varphi_p}{da_2} + \dots + pa_p \frac{d\varphi_p}{da^p} \\ & + a_0 \left(a_1 \frac{d^2\varphi_p}{da_0 da_1} + a_2 \frac{d^2\varphi_p}{da_1^2} + \dots + a_{p+1} \frac{d^2\varphi_p}{da_p da_1} \right) \\ & + 2a_1 \left(a_1 \frac{d^2\varphi_p}{da_0 da_2} + a_2 \frac{d^2\varphi_p}{da_1 da_2} + \dots + a_{p+1} \frac{d^2\varphi_p}{da_p da_2} \right) \\ & + \dots \\ & + pa_{p-1} \left(a_1 \frac{d^2\varphi_p}{da_0 da_p} + a_2 \frac{d^2\varphi_p}{da_1 da_p} + \dots + a_{p+1} \frac{d^2\varphi_p}{da_p^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

D'ailleurs, le théorème des fonctions homogènes, applicable en vertu de la remarque faite plus haut, donne

$$a_0 \frac{d\varphi_p}{da_0} + a_1 \frac{d\varphi_p}{da_1} + \dots + a_p \frac{d\varphi_p}{da_p} = p\varphi_p.$$

Ajoutant membre à membre les deux dernières égalités, on voit que l'on tombe précisément sur l'égalité (4) qu'il s'agit d'établir. Le théorème est donc complètement démontré.

Il est digne de remarque que les sous-invariants représentés, avec les notations précédentes, par φ_2 et φ_3 , jouent un rôle dans le problème de l'inversion des intégrales elliptiques traité par le moyen de la fonction p de M. Weierstrass (*).

(*) Voir HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. 1, p. 120, formules (54).

NOTE

sur

LE LOESS ET LE LIMON

DES PLATEAUX

par

A. DE LAPPARENT.

Il est peu de formations dont l'origine ait été plus discutée que celle du *limon*, cette terre brune, à grain impalpable, qui couvre de si grands espaces, sur les plateaux comme dans les plaines basses et sur les flancs des vallées, particulièrement dans le nord de la France, la Westphalie, la Belgique, etc. Ce n'est pas que personne hésite à y voir de la *boue*, tout à fait semblable à celle qui se dépose dans la dernière phase du débordement des rivières, ou qui demeure en suspension, lors des grandes pluies, dans les eaux qui ruissellent à la surface d'un sol quelconque. Mais quelle cause a pu étaler cette boue sur les étendues considérables qu'elle couvre aujourd'hui? Comment expliquer sa présence à des altitudes de 200 mètres et plus, sur des plateaux que rien ne domine?

Les uns ont imaginé des inondations gigantesques, des nappes d'eau énormes, submergeant d'un coup toute l'Europe et laissant le limon comme résidu. C'est la théorie *diluvienne*. D'autres, se fondant sur l'ancienne extension, aujourd'hui mise hors de doute, des glaces septentrionales, ont pensé que le limon représentait le produit du remaniement, par les eaux, de la moraine profonde ou terminale des anciens champs de glace. Aussi l'ont-ils qualifié de *boue glaciaire*. Enfin, à la suite de ses voyages en Chine, où le phénomène revêt une ampleur qu'il n'atteint nulle

terait sur le sol ou se déposerait à la partie inférieure des rigoles de ruissellement.

Cette observation se fait sans peine sur les sables jaunes tongriens des environs de Paris. Mais elle est encore plus nette avec les sables éocènes, soit avec ceux du suessonien inférieur, comme les sables que nous citions tout à l'heure sur le prolongement de la faille du Bray, soit, mieux encore, avec les sables nummulitiques du Soissonnais, à grain si fin, à teinte déjà brune ou jaune et si souvent mélangés de petites veines argileuses. Enfin on peut dire que les sables qui sont le mieux prédisposés à cette transformation, par la nature de leur grain, sont les sables yprésiens de la Flandre et de la Belgique, lorsque l'action de l'air a oxydé la glauconie dont ils sont chargés.

Les marnes, les calcaires mélangés d'éléments siliceux ou argileux, la craie elle-même donnent par altération un produit limoneux. Certains calcaires oolithiques et ferrugineux, un peu mélangés de marne et de sable, y sont éminemment propres, au point que les géologues habitués à l'affleurement de ces calcaires ont pu soutenir que le loess résultait toujours de l'altération *sur place* des roches sous-jacentes. Il en est de même de certaines roches éruptives, telles que les basaltes et beaucoup de tufs. Au contraire, le granite fournit, par sa décomposition, un mélange d'argile tenace, kaolinique et de sable grossier ou arène, impropres à la transformation en loess, ce qui suffit à expliquer l'absence habituelle de ce dépôt dans les régions purement granitiques. En revanche, certaines variétés de micaschistes, dites micaschistes *pourris*, s'y prêtent parfaitement, ainsi que bon nombre de schistes argileux et terreux sans consistance.

En un mot, nous le répétons, toute roche qui, au contact de l'air et de l'eau, est susceptible de donner une boue jaunâtre, a dû fournir, aux abondants ruissellements de l'époque quaternaire, la matière première du loess et ainsi ce produit ne saurait être le privilège exclusif d'aucune région. Partout où la nature du sol n'était pas récalcitrante à la formation de ses éléments, à la fois meubles et impalpables, il a dû prendre naissance et s'accumuler, d'autant mieux que l'abondance des pluies était plus

grande et la disposition topographique du terrain plus favorable à l'étalement ainsi qu'à la stagnation momentanée des eaux boueuses.

C'est ainsi, par exemple, qu'il nous paraît très facile de concevoir la formation de la couche si régulière de limon qui, dans la région parisienne, couvre les plateaux du Valois et de la Brie. La Brie est une plate-forme consistante, formée de travertin siliceux, originairement recouvert par une épaisseur de 40 à 50 mètres de sables fins, jaunâtres, appartenant à l'étage tongrien (*sables de Fontainebleau*). De ces sables il n'est resté que des chaînes plus ou moins discontinues, parfois des mamelons tout à fait isolés. Ce morcellement de la nappe tongrienne a disposé, pour s'accomplir, de toute la durée des temps miocènes et pliocènes, puisque le bassin de Paris s'est définitivement asséché à la fin de l'époque aquitanienne. On comprend donc que, dès le début du quaternaire et même avant, l'action combinée de l'air et des pluies, alors si abondantes, ait suffi pour étaler fréquemment, sur la plate-forme de travertin et de meulières, des nappes d'eau chargées de limon.

Le même fait s'est produit dans le Valois et le Soissonnais, et par la même cause, sur la plate-forme de calcaire grossier ou de travertin éocène (calcaires de Ducy et de S^t-Ouen). Les éléments du limon ont été fournis, en partie par les sables fins de l'étage de Beauchamp, plus encore par les sables tongriens. Car si ces derniers ne se trouvent plus aujourd'hui au delà du Mont-Pagnotte et de la chaîne qui domine Villers-Cotterets, on ne peut douter qu'ils n'aient couvert toute la contrée, établissant sa jonction avec le Limbourg, et c'est à leur disparition progressive que doit être attribuée la formation du loess.

De fait — et c'est à nos yeux un argument de la plus grande portée, — il est aisé de constater, dans la Brie comme dans le Valois ou le Soissonnais, que *le limon des plaines est d'autant plus sableux qu'on se rapproche des chaînes de sables demeurées en place*. Nous citerons, comme particulièrement démonstratifs à ce point de vue, les plateaux qui s'étendent de Pierrefonds à Villers-Cotterets, où le sable fin et jaunâtre de l'étage de Beau-

champ forme des buttes importantes. Nous rappellerons aussi que le plateau de calcaire grossier supérieur des forêts de Coye et de Chantilly est recouvert d'une mince couche, d'ailleurs irrégulière, de limon sableux, contenant assez souvent, à sa base, des blocs de grès rubéfiés, seuls restes de l'étage de Beauchamp, autrefois superposé aux caillasses et enlevé par les agents d'érosion.

Ces exemples et bien d'autres qu'il serait facile d'y joindre prouvent à quel point, sur les plateaux dominés par des chaînes de matériaux meubles, la nature du limon est dépendante de celle des matériaux en question et rien n'atteste mieux le caractère local des formations limoneuses.

Il convient maintenant de passer à l'étude des régions de plaines, à la surface desquelles les buttes de matériaux meubles font aujourd'hui défaut. De ce nombre sont les plaines qui s'étendent de St-Quentin à la frontière belge, et où la craie est recouverte par un manteau à peu près continu de loess, capable d'atteindre par endroits une puissance de 15 mètres. Or cette contrée est précisément celle sur laquelle devait s'étendre la mer tertiaire franco-belge, qui, aussi bien pendant les temps éocènes qu'à l'époque tongrienne, y déposait partout des sables argileux à grain fin, sables glauconieux du suessonien inférieur, sables yprésiens et nummulitiques, sables bruxelliens et laekeniens, sables tongriens, etc. Ces sables ont été presque partout enlevés, à la suite du mouvement qui, les portant dans le nord à de grandes altitudes, a déversé au sud-ouest les eaux du grand lac de la Beauce. Mais leur résidu impalpable est demeuré sur les plateaux capables d'amortir la vitesse des eaux boueuses et c'est ce résidu qui forme aujourd'hui l'épais limon de la Flandre et de la frontière franco-belge.

La même explication convient au limon de Picardie; car la contrée a été couverte de dépôts tertiaires et notamment de sables suessonien; presque partout le limon renferme, à sa base, des blocs de grès de l'étage de l'argile plastique (landénien supérieur), et même dans les endroits où ces formations en place ont aujourd'hui complètement disparu, on a la preuve de

leur ancienne existence par des poches, disséminées dans la craie, et où les sables éocènes sont tombés par effondrement. Il n'est donc pas nécessaire, pour expliquer le loess, d'aller chercher, comme l'ont fait certains auteurs, des inondations diluviennes ou glaciaires venant du nord. Ce limon que nous voyons aujourd'hui n'est que le dernier résidu des dépôts tertiaires que la craie portait autrefois sur sa surface et que les érosions miocènes et pliocènes ont fait disparaître.

Ce que nous venons de dire de la Picardie convient mieux encore à la Normandie, où abondent, en mille endroits, les lambeaux de sables et de grès éocènes, souvent entremêlés d'argile. Là aussi une nappe continue de dépôts tertiaires a couvert la craie, laissant comme résidu un limon avec blocs de grès. Ainsi partout l'origine locale du loess est facile à reconnaître si l'on veut bien reconstituer, par la pensée, l'état de la région à l'ouverture de la période miocène.

La Champagne donne lieu à des observations analogues. L'épaisseur du limon, sur les plateaux crayeux, est assez grande au nord-ouest, c'est-à-dire au voisinage immédiat de l'ancien détroit tertiaire franco-belge. Mais elle va sans cesse en diminuant quand on s'avance vers le sud. Entre Rethel et Reims, le loess ne forme plus que des taches, éparses çà et là sur le sol crayeux. Encore ces taches se relient-elles sans difficulté aux dépôts tertiaires de l'Île de France, et des monticules isolés, tels que ceux des environs de Reims, notamment le Mont de Berru, montrent assez que les sables éocènes dépassaient un peu, vers l'est, les limites actuelles du plateau tertiaire; de telle sorte que les taches en question peuvent facilement s'expliquer par la disparition des îlots tertiaires correspondants. Au delà de Reims et de Châlons, sur ces plaines de la Champagne pouilleuse, où la formation tertiaire sableuse ne s'est certainement pas étendue, on chercherait vainement une trace quelconque du limon; cependant l'altitude de ces plaines est plutôt inférieure à celle des plateaux plus septentrionaux, et, si le dépôt du loess était dû à une cause générale, il n'aurait certainement pas manqué de les recouvrir. Mais l'apport local des matériaux meubles silico-

alumineux a fait défaut, et ainsi le seul dépôt qui se soit formé sur cette partie de la Champagne, par l'action du ruissellement, est la *groise*, c'est-à-dire une boue crayeuse à grain variable, de couleur blanche et dont on fait, dans le pays, des briques séchées au soleil. C'est l'équivalent géologique du loess; mais au point de vue minéralogique comme à celui de l'aspect ou de la culture, la différence est considérable.

Dans tous les cas qui viennent d'être examinés, la présence du limon, étalé en nappes régulières sur de grandes surfaces, ne paraît pas difficile à expliquer, parce que, à proximité de ces surfaces, il existe ou il a certainement existé des massifs de formations meubles, dont le limon représente le résidu. Il n'en est plus de même à l'égard du limon qui couvre les plaines de la Beauce. Car cette contrée, depuis la disparition du lac qui la couvrait, n'a reçu de dépôts que dans sa partie tout à fait méridionale. Encore ces dépôts, sables et argiles de la Sologne, sont-ils impropres à fournir du limon. Le fond de l'ancien lac de la Beauce est donc resté à découvert depuis son émergence et il est difficile de supposer que la dégradation des bancs marneux subordonnés au travertin ait suffi pour constituer la couche de loess. La chose n'est cependant pas tout à fait impossible. En effet, d'une part, le limon de la Beauce est toujours très peu épais et, d'autre part, la transformation qui, en beaucoup de points, a donné naissance aux meulière, est le fait d'une action destructive qui a dû faire disparaître une portion des couches lacustres originairement existantes.

Cependant nous inclinons à croire qu'il y a lieu, dans ce cas particulier, de faire appel à la théorie *éolienne* de M. de Richthofen. Il est à remarquer que, si le plateau de la Beauce proprement dite est *géologiquement* supérieur à toutes les autres formations tertiaires du bassin de Paris, il est, au contraire, *topographiquement* dominé par bon nombre d'entre elles. Ainsi le bord septentrional, le plus élevé, du plateau, atteint auprès d'Étampes 145 mètres d'altitude, tandis qu'on le retrouve à environ 100 mètres sur la Loire. Or l'altitude du sommet des collines ton-griennes est de 200 mètres entre Paris et Creil, de 220 mètres au

Mont-Pagnotte, de 250 mètres au delà de Villers-Cotterets. Lors donc que l'érosion du massif tertiaire a commencé, dans le nord, où cette érosion s'est exercée avec le plus d'intensité, des sables éocènes se sont trouvés à découvert à des altitudes notablement supérieures à celles de la Beauce. Il est très admissible que les vents du nord et du nord-est, se saisissant de ces sables à grain fin, les aient transportés au loin et étalés en couches minces sur la Beauce. Remaniés par les pluies à mesure qu'ils s'accumulaient, ces sables impalpables seraient devenus du limon. Mais si le vent a pu être l'agent du transport, la source du loess devrait être cherchée dans les sédiments tertiaires du nord et l'on pourrait trouver une confirmation de cette hypothèse dans le fait que l'épaisseur et l'importance du loess de la Beauce diminuent à mesure qu'on se rapproche de la vallée de la Loire, c'est-à-dire à mesure qu'on s'éloigne de l'ancien massif tertiaire.

En résumé, le loess est un produit dont l'origine première peut être essentiellement variable, mais où se manifeste, par-dessus tout, l'influence du *ruissellement à l'air libre*.

SUR

CERTAINES SUITES DE FRACTIONS IRRÉDUCTIBLES

PAR

M. Maurice d'OCAGNE

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES.

1. Lorsqu'on se propose — par exemple dans certains calculs de statistique ou de probabilités — d'approcher le plus possible d'un nombre fractionnaire donné au moyen d'une fraction ordinaire dont le dénominateur ne surpasse pas un nombre donné, on se trouve amené à effectuer l'opération suivante :

Ranger par ordre de grandeur les fractions irréductibles dont le dénominateur n'excède pas un nombre donné,

afin de reconnaître quelles sont les fractions de cette suite qui comprennent le nombre donné, et en fournissent l'expression la plus approchée soit par défaut, soit par excès, sous la condition qu'on s'est imposée.

C'est peut-être une question de ce genre qui amena le mathématicien Farey, vivant au commencement de ce siècle, à faire la très curieuse remarque que voici (*) :

Si l'on prend, dans la suite qui vient d'être définie, deux fractions distantes de deux rangs, et que l'on compose une nouvelle fraction ayant pour numérateur la somme des numérateurs des deux précédentes, pour dénominateur la somme de leurs dénominateurs, on obtient une fraction égale à celle qui, dans la suite, est placée entre les deux fractions considérées.

(*) *Bulletin des sciences* (1816):

Ce fut Cauchy qui apporta la démonstration de cette singulière propriété (*) ; elle se déduit immédiatement du théorème suivant découvert par l'illustre géomètre :

Le numérateur de la différence de deux fractions consécutives de la suite est égal à l'unité.

Comme corollaire immédiat de ce théorème, on voit que *les dénominateurs, de même que les numérateurs, de deux fractions consécutives de la suite sont premiers entre eux.*

Les suites de Farey ne sont pas les seules qui jouissent de ces curieuses propriétés. M. Halphen, dans une remarquable étude sur ce sujet (**), a, en effet, démontré le théorème vraiment extraordinaire que voici :

Soit une suite de nombres commensurables réduits à leurs plus simples expressions, rangés par ordre de grandeur, et choisis suivant une loi telle que, si un nombre en est exclu, tous les nombres dont les deux termes sont au moins égaux respectivement aux termes de ce dernier en soient aussi exclus : cette suite jouit des propriétés qui viennent d'être énoncées pour celle de Farey.

En particulier, si $f(a, b)$ représente un polynôme entier, à coefficients positifs, et que l'on astreigne $f(a, b)$ à ne pas dépasser une limite assignée, les nombres $\frac{a}{b}$ forment une suite qui vérifie le théorème précédent.

Mais, ce théorème lui-même ne comprend pas toutes les suites qui jouissent de la propriété énoncée.

M. Halphen a remarqué, en effet, qu'elle a lieu à l'égard des suites dans lesquelles l'excès du dénominateur sur le numérateur ne dépasse pas une limite donnée, et ces suites ne présentent pas le caractère requis par le théorème qui vient d'être énoncé.

Il serait intéressant de trouver la définition générale des suites

(*) *Bulletin des sciences* (1816).

(**) *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. V, 1877, p. 170).

qui jouissent des mêmes propriétés que celles de Farey, mais cette recherche présente de grosses difficultés.

Nous allons seulement, dans le présent mémoire, exposer quelques résultats que nous avons obtenus au sujet de certaines suites qui généralisent celles de Farey, espérant ainsi provoquer de nouvelles recherches sur ce sujet très curieux.

2. Nous rappellerons tout d'abord certaines remarques qui ont été faites relativement aux suites de Farey par M. Stouvenel (*), remarques qui simplifient la formation de ces suites.

M. Stouvenel, comme Farey, ne considère que les fractions proprement dites, c'est-à-dire celles qui sont inférieures à l'unité; dès lors, il trouve que :

1° Toute suite de Farey a un nombre impair de termes, le terme du milieu étant $\frac{1}{2}$;

2° Les termes équidistants des extrêmes sont complémentaires, c'est-à-dire que leur somme est égale à l'unité;

3° Les premiers termes de la suite sont $\frac{1}{N}$, $\frac{1}{N-1}$, $\frac{1}{N-2}$, ... jusqu'à $\frac{1}{\frac{N+1}{2}}$ si N est impair, $\frac{1}{\frac{N}{2}}$ si N est pair. Dans le premier cas, le terme suivant est $\frac{2}{N}$; dans le second, il est $\frac{2}{N-1}$. N est le nombre que ne doivent pas dépasser les dénominateurs des fractions de la suite.

3. Il n'y a aucune raison pour limiter, comme l'ont fait les auteurs précédents, ces suites aux fractions proprement dites.

Si on les prolonge au delà — et c'est ce que nous ferons pour notre part, — on voit d'abord que le premier terme qui viendra après celui auquel s'arrêtait Farey (qui est la plus grande fraction proprement dite satisfaisant à la condition de définition) sera égal à $\frac{1}{4}$.

Soit p le rang de ce terme égal à l'unité. Ce nombre p sera pair, en vertu de la première des remarques faites ci-dessus. Il est d'ailleurs bien aisé de le voir directement. En effet, les déno-

(*) *Journal de mathématiques de Liouville* (t. V, 1840).

minateurs des fractions qui figurent dans les p premiers termes de la suite sont les N premiers nombres entiers. Chacun d'eux donne naissance à autant de fractions qu'il y a de nombres premiers avec lui et qui ne lui soient pas supérieurs. Donc, en faisant usage de la notation bien connue, on a

$$p = \sum_{k=1}^{k=N} \varphi(k).$$

Or, $\varphi(k)$ est, comme on sait, un nombre pair, sauf pour $k = 1$ et $k = 2$; par suite p est pair.

Nous appellerons l'ensemble des p premiers termes qui viennent d'être définis la *première phalange* de la suite. Les p suivants formeront la *deuxième phalange*; encore les p suivants, la *troisième phalange*, etc.

On voit immédiatement qu'une *phalange quelconque s'obtient en ajoutant l'unité à tous les termes de la phalange précédente.*

Pour s'en rendre compte, il suffit d'observer que si $\frac{a_m}{b_m}$ et $\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}$ sont deux termes consécutifs de la suite, $\frac{a_m + b_m}{b_m}$ et $\frac{a_{m+1} + b_{m+1}}{b_{m+1}}$ en sont aussi deux termes consécutifs. En effet, ces deux fractions satisfont aux conditions requises; d'ailleurs, s'il existait entre elles un autre terme de la suite $\frac{\alpha}{\beta}$, α et β seraient premiers entre eux et on aurait

$$\beta \leq N \quad \text{et} \quad \frac{a_m + b_m}{b_m} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{a_{m+1} + b_{m+1}}{b_{m+1}}$$

ou

$$\beta \leq N \quad \text{et} \quad \frac{a_m}{b_m} < \frac{\alpha - \beta}{\beta} < \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}.$$

Ces dernières inégalités jointes à la remarque que, de même que α et β , $\alpha - \beta$ et β sont premiers entre eux, montrent qu'il existerait alors dans la suite un terme $\frac{\alpha - \beta}{\beta}$ compris entre $\frac{a_m}{b_m}$ et $\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Les fractions $\frac{a_m + b_m}{b_m}$ et $\frac{a_{m+1} + b_{m+1}}{b_{m+1}}$ constituent donc bien deux termes consécutifs de la suite et la proposition est établie.

4. Soit

$$\frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2} \dots \frac{a_m}{b_m} \dots$$

une suite de Farey indéfiniment prolongée, telle que $b_m \leq N$ pour toute valeur de m .

Formons la suite

$$\frac{a_1}{b'_1} \frac{a_2}{b'_2} \dots \frac{a_m}{b'_m} \dots$$

telle que

$$b'_m = b_m - \alpha a_m,$$

la constante α étant un nombre entier positif ou négatif.

Tous les termes de la suite ainsi formée sont irréductibles, car, a_m et b_m étant premiers entre eux, a_m et $b_m - \alpha a_m$ le sont aussi.

Puisque $b'_m = b_m - \alpha a_m$, on a pour chaque fraction de la seconde suite

$$b'_m + \alpha a_m \leq N.$$

Les termes de cette suite sont rangés par ordre de grandeur, car, si $\frac{a_m}{b_m} < \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}$,

$$\frac{a_m}{b_m - \alpha a_m} < \frac{a_{m+1}}{b_{m+1} - \alpha a_{m+1}}.$$

Enfin, il ne saurait exister d'autre fraction irréductible satisfaisant à la condition $b'_m + \alpha a_m \leq N$ que celles qui figurent dans la seconde suite. Pour le voir, il suffit de supposer qu'entre $\frac{a_m}{b'_m}$ et $\frac{a_{m+1}}{b'_{m+1}}$ il existe une autre fraction irréductible répondant à cette condition. On en conclut alors, par le même raisonnement que celui qui a été fait au numéro précédent, qu'il y aurait nécessairement, dans la première suite, un terme intercalé entre $\frac{a_m}{b_m}$ et $\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}$, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Représentons par

$$\frac{a_1(\alpha, N)}{b_1(\alpha, N)}, \frac{a_2(\alpha, N)}{b_2(\alpha, N)}, \dots, \frac{a_m(\alpha, N)}{b_m(\alpha, N)}, \dots$$

la suite des fractions irréductibles rangées par ordre de grandeur qui satisfont à la condition

$$b_m + \alpha a_m \leq N,$$

α étant un nombre entier positif, nul ou négatif, N un entier positif, différent de l'unité (*)

Abréviativement nous désignerons une telle suite par la notation $\mathfrak{S}(\alpha, N)$, et nous dirons que α est la *caractéristique* et N la *base* de la suite.

Dès lors, le résultat qui vient d'être obtenu pourra s'énoncer ainsi :

THÉORÈME I. — *Toutes les suites $\mathfrak{S}(\alpha, N)$ répondant à une base N donnée se ramènent immédiatement à la suite de Farey $\mathfrak{S}(0, N)$ de même base, par les formules*

$$(1). \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} a_m(\alpha, N) = a_m(0, N), \\ b_m(\alpha, N) = b_m(0, N) - \alpha \cdot a_m(0, N). \end{array} \right.$$

COROLLAIRE. — *On a*

$$(2) \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} a_m(\alpha, N) = a_m(\alpha - 1, N) \\ b_m(\alpha, N) = b_m(\alpha - 1, N) - a_m(\alpha - 1, N). \end{array} \right.$$

5. Nous placerons ici une observation importante. A partir du $p + 1^{\text{ème}}$ terme de la suite $\mathfrak{S}(0, N)$, c'est-à-dire à partir du premier terme de la seconde phalange de cette suite, tous les termes ont leur numérateur supérieur à leur dénominateur ; il en résulte, par application des formules (2), que les dénominateurs des termes correspondants de la suite $\mathfrak{S}(1, N)$ seraient négatifs. Pour rester sur le terrain de l'arithmétique ces termes doivent être exclus. Il en est de même du terme qui correspondrait au $p^{\text{ème}}$ terme, $\frac{1}{1}$, de $\mathfrak{S}(0, N)$, et qui serait $\frac{1}{0}$. En somme, au

(*) Nous laissons de côté les suites pour lesquelles $N = 1$, qui constituent, à certains égards, un cas exceptionnel.

point de vue arithmétique, la suite $\mathfrak{S}(1, N)$ est limitée, et possède $p - 1$ termes, ou, en se reportant à l'expression précédemment donnée du nombre p ,

$$\sum_{k=2}^{k=N} \varphi(k) \text{ termes.}$$

La même observation s'applique quand on passe, par le moyen des formules (2), de la suite $\mathfrak{S}(1, N)$ à la suite $\mathfrak{S}(2, N)$, de la suite $\mathfrak{S}(2, N)$ à la suite $\mathfrak{S}(3, N)$, etc. On peut donc dire d'une manière générale que *les suites $\mathfrak{S}(\alpha, N)$, pour les valeurs positives de α , sont ARITHMÉTIQUEMENT limitées.*

Le problème qui consiste à trouver le nombre des termes de la suite $\mathfrak{S}(\alpha, N)$ entendue comme il vient d'être dit, pour une valeur positive de α , présente quelques difficultés (*). Ce problème revient à celui-ci :

Combien une suite \mathfrak{S} à caractéristique positive a-t-elle de termes inférieurs à l'unité ?

En effet, le nombre des termes de la suite $\mathfrak{S}(\alpha, N)$ est égal au nombre des termes de la suite $\mathfrak{S}(\alpha - 1, N)$ inférieurs à l'unité. Dans le cas où $\alpha = 2$, le problème se résout ainsi :

Au terme de la suite $\mathfrak{S}(0, N)$ égal à $\frac{1}{2}$ correspond, dans la suite $\mathfrak{S}(1, N)$, en vertu du théorème I, le terme $\frac{1}{4}$. Donc, le nombre des termes de la suite $\mathfrak{S}(1, N)$ inférieurs à l'unité est égal au nombre des termes de la suite $\mathfrak{S}(0, N)$ inférieurs à $\frac{1}{2}$.

Or, les dénominateurs de ces termes sont les nombres 3, 4, 5, ..., N et chacun d'eux donne évidemment au groupe qui nous occupe autant de fractions qu'il y a de nombres premiers avec lui et inférieurs à leur moitié, c'est-à-dire, en vertu d'un théorème bien connu, $\frac{\varphi(m)}{2}$ pour le nombre m . On voit ainsi que le nombre des termes de la suite $\mathfrak{S}(2, N)$ est donné par

$$\frac{1}{2} \sum_{k=3}^{k=N} \varphi(k).$$

(*) Voir la Note additionnelle qui fait suite à ce mémoire.

Le problème devient plus compliqué pour les valeurs de α supérieures à 2.

Quant aux suites de caractéristique négative, elles sont illimitées et les formules (1) montrent que tous leurs termes sont inférieurs à l'unité.

6. On a, par application des formules (1),

$$\begin{aligned} & a_m(\alpha, N) \cdot b_{m-1}(\alpha, N) - a_{m-1}(\alpha, N) \cdot b_m(\alpha, N) \\ &= a_m(0, N) [b_{m-1}(0, N) - \alpha a_{m-1}(0, N)] \\ & - a_{m-1}(0, N) [b_m(0, N) - \alpha a_m(0, N)] \\ &= a_m(0, N) \cdot b_{m-1}(0, N) - a_{m-1}(0, N) \cdot b_m(0, N). \end{aligned}$$

Donc, en vertu de la propriété fondamentale des suites de Farey démontrée par Cauchy et rappelée au début de ce mémoire,

$$(3) \quad a_m(\alpha, N) \cdot b_{m-1}(\alpha, N) - a_{m-1}(\alpha, N) \cdot b_m(\alpha, N) = 1,$$

et l'on voit ainsi que la suite $\mathfrak{S}(\alpha, N)$ jouit de la même propriété fondamentale que la suite $\mathfrak{S}(0, N)$.

Dans le cas où α est positif ce théorème rentre dans le théorème général de M. Halphen énoncé plus haut, mais il n'en est pas de même dans le cas où α est négatif.

7. *Loi d'enchaînement des termes successifs de la suite $\mathfrak{S}(\alpha, N)$.*
— Cette loi se déduit de la formule (3) comme on va le voir.

Remarquons d'abord que le premier terme de la suite $\frac{a_1(\alpha, N)}{b_1(\alpha, N)}$ est égal à $\frac{1}{N-\alpha}$. En effet, pour chaque valeur du dénominateur, la plus petite des fractions correspondantes est celle qui a pour numérateur l'unité. La première fraction de la suite aura donc forcément pour numérateur l'unité

$$a_1(\alpha, N) = 1,$$

et son dénominateur aura évidemment la plus grande valeur qui puisse accompagner cette valeur spéciale du numérateur en satisfaisant à la condition de définition

$$b + \alpha a \leq N.$$

Ce dénominateur $b_1(\alpha, N)$ sera donc donné par

$$b_1(\alpha, N) + \alpha = N,$$

et le premier point est établi.

Cherchons maintenant le second terme.

Pour un numérateur donné a , le dénominateur maximum b correspondant est donné par

$$b + \alpha a = N$$

ou

$$b = N - \alpha a.$$

Le second terme ne saurait donc être que $\frac{1}{N-\alpha-1}$, ou la plus petite *irréductible* des fractions $\frac{2}{N-2\alpha}$, $\frac{3}{N-3\alpha}$, $\frac{4}{N-4\alpha}$, ... qui vont évidemment en croissant. Nous désignerons cette plus petite fraction irréductible par $\frac{k}{N-k\alpha}$.

k étant au moins égal à 2, on a

$$\frac{k}{k-1} \leq 2.$$

Mais dans notre définition (voir au n° 4) nous avons supposé N au moins égal à 2. Donc

$$\frac{k}{k-1} \leq N,$$

ou

$$k \leq N(k-1),$$

ou encore

$$N \leq Nk - k,$$

ou enfin

$$N - \alpha k \leq k(N - \alpha - 1),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{N - \alpha - 1} \leq \frac{k}{N - \alpha k}.$$

Mais, puisque nous avons supposé $\frac{k}{N - \alpha k}$ irréductible, l'égalité ne saurait avoir lieu. Donc, finalement

$$\frac{1}{N - \alpha - 1} < \frac{k}{N - \alpha k}.$$

On voit ainsi que le second terme ne saurait être que $\frac{1}{N - \alpha - 1}$, c'est-à-dire que

$$a_2(\alpha, N) = 1$$

$$b_2(\alpha, N) = N - \alpha - 1.$$

C'est sur ce point que les suites de base égale à 1 font exception à la règle générale.

Considérons maintenant, dans la suite, trois termes consécutifs quelconques

$$\frac{a_{m-2}}{b_{m-2}}, \quad \frac{a_{m-1}}{b_{m-1}}, \quad \frac{a_m}{b_m}.$$

Puisque l'on a, en vertu de la remarque faite au n° 6,

$$\frac{a_{m-1}}{b_{m-1}} = \frac{a_{m-2} + a_m}{b_{m-2} + b_m},$$

il en résulte que

$$a_m = \lambda a_{m-1} - a_{m-2}$$

$$b_m = \lambda b_{m-1} - b_{m-2},$$

λ étant un coefficient que nous allons déterminer. A cet effet, considérons les fractions

$$\frac{a_{m-1} - a_{m-2}}{b_{m-1} - b_{m-2}}, \quad \frac{2a_{m-1} - a_{m-2}}{2b_{m-1} - b_{m-2}}, \quad \frac{3a_{m-1} - a_{m-2}}{3b_{m-1} - b_{m-2}}, \dots, \frac{ka_{m-1} - a_{m-2}}{kb_{m-1} - b_{m-2}}, \dots$$

En vertu d'un théorème bien connu, la première est supérieure à $\frac{a_{m-1}}{b_{m-1}}$, et chacune des autres est comprise entre celle qui la



précède et $\frac{a_{m-1}}{b_{m-1}}$. D'ailleurs, toutes ces fractions sont irréductibles puisque l'on a

$$(ka_{m-1} - a_{m-2})b_{m-1} - (kb_{m-1} - b_{m-2})a_{m-1} = a_{m-1}b_{m-2} - a_{m-2}b_{m-1} = 1,$$

d'après la formule (3).

Elles appartiennent donc toutes, jusqu'à un certain rang, à la suite considérée, et la fraction $\frac{a_m}{b_m}$ est, par suite, égale à la plus petite des fractions de ce groupe, c'est-à-dire à celle, $\frac{\lambda a_{m-1} - a_{m-2}}{\lambda b_{m-1} - b_{m-2}}$, où λ a la plus grande valeur compatible avec la condition requise, c'est-à-dire

$$\lambda b_{m-1} - b_{m-2} + \alpha (\lambda a_{m-1} - a_{m-2}) \leq N.$$

Cette valeur est évidemment donnée par

$$\lambda = E\left(\frac{N + b_{m-2} + \alpha a_{m-2}}{b_{m-1} + \alpha a_{m-1}}\right),$$

la notation $E(x)$ désignant, suivant l'usage, la partie entière de la quantité x .

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *La loi de formation de la suite $\mathfrak{S}(\alpha, N)$ est donnée par*

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 & a_2 &= 1 \\ b_1 &= N - \alpha & b_2 &= N - \alpha - 1 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} a_m &= \lambda a_{m-1} - a_{m-2} \\ b_m &= \lambda b_{m-1} - b_{m-2} \end{aligned} \right| \text{ avec } \lambda = E\left(\frac{N + b_{m-2} + \alpha a_{m-2}}{b_{m-1} + \alpha a_{m-1}}\right).$$

§. Loi d'enchaînement des phalanges. — Le théorème qui vient d'être établi montre comment les termes d'une suite \mathfrak{S} s'enchaînent les uns aux autres, c'est-à-dire comment chacun d'eux se déduit de celui qui le précède.

Or, nous avons, lorsque la suite \mathfrak{S} est illimitée, ce qui a lieu si la caractéristique est négative, introduit la notion de *phalanges* successives. Nous allons faire voir comment chaque phalange se déduit de celle qui la précède.

Rappelons d'abord que les phalanges sont les groupes successifs de p termes pris dans la suite à partir de son origine, p étant le rang du terme $\frac{1}{i}$ dans la suite $\mathfrak{S}(0, N)$.

Le $p^{\text{ème}}$ terme de la suite $\mathfrak{S}(\alpha, N)$ sera, par application des formules (1),

$$\frac{1}{1 - \alpha}.$$

Puisque nous supposons ici la caractéristique α négative, mettons son signe en évidence en posant

$$\alpha = -\beta.$$

Nous pourrions dire alors que la première phalange de la suite $\mathfrak{S}(-\beta, N)$ se ferme avec la fraction $\frac{1}{1+\beta}$.

D'après ce qui a été dit au sujet des suites de Farcy prolongées (voir au n° 3), si $\frac{a}{b}$ est un terme d'une telle suite, le terme correspondant de la phalange suivante, c'est-à-dire le terme qui occupe le $p^{\text{ème}}$ rang après celui-ci, est $\frac{a+b}{b}$.

On peut donc écrire que

$$\begin{aligned} a_{m+p}(0, N) &= a_m(0, N) + b_m(0, N) \\ b_{m+p}(0, N) &= b_m(0, N). \end{aligned}$$

Transformant ces formules au moyen des formules (1), où on a remplacé α par $-\beta$, on obtient

$$(4) \quad \begin{cases} a_{m+p}(-\beta, N) = b_m(-\beta, N) - (\beta - 1) \cdot a_m(-\beta, N) \\ b_{m+p}(-\beta, N) = (\beta + 1) \cdot b_m(-\beta, N) - \beta^2 \cdot a_m(-\beta, N). \end{cases}$$

Ces formules, permettant de déduire un terme quelconque de celui qui le précède de p rangs, contiennent la loi d'enchaînement des phalanges successives de la suite $\mathfrak{S}(-\beta, N)$.

Remarque I. — Les coefficients des formules (4) étant indépendants de N , si l'on prend dans des suites ayant toutes même caractéristique négative avec des bases différentes, une fraction qui leur soit commune, les fractions correspondant à

celle-ci dans les phalanges successives seront les mêmes pour ces diverses suites.

Remarque II. — On déduit des formules (4)

$$(5) \quad b_{m+p}(-\beta, N) - \beta \cdot a_{m+p}(-\beta, N) = b_m(-\beta, N) - \beta \cdot a_m(-\beta, N).$$

Pour les termes qui se correspondent dans les phalanges successives la somme du dénominateur et du produit du numérateur par la caractéristique est constante.

Remarque III. — Les formules (4) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} a_{m+p} - a_m &= h_m - \beta a_m \\ b_{m+p} - b_m &= \beta(h_m - \beta a_m). \end{aligned}$$

Par suite, de même

$$\begin{aligned} a_{m+2p} - a_{m+p} &= b_{m+p} - \beta a_{m+p} \\ b_{m+2p} - b_{m+p} &= \beta(h_{m+p} - \beta a_{m+p}). \end{aligned}$$

Donc, si on se reporte à la formule (5), on voit que

$$\begin{aligned} a_{m+2p} - a_{m+p} &= a_{m+p} - a_m \\ b_{m+2p} - b_{m+p} &= b_{m+p} - b_m. \end{aligned}$$

Les numérateurs et les dénominateurs des termes qui se correspondent dans les phalanges successives forment des progressions arithmétiques.

On déduit de là que

$$\begin{aligned} a_{m+p} &= a_m + k(b_m - \beta a_m) \\ b_{m+p} &= b_m + k\beta(b_m - \beta a_m). \end{aligned}$$

⑤. *Représentation géométrique.* — Toutes ces remarques, et d'autres encore, prennent une forme particulièrement parlante à l'esprit, lorsqu'on fait usage du mode de représentation géométrique que nous allons indiquer.

Portons sur deux axes rectangulaires Ox et Oy des divisions

égales, et par les points de division numérotés sur chaque axe 1, 2, 3, 4, ... menons des parallèles aux axes. Nous formons ainsi dans l'angle droit xOy un réseau à mailles carrées (fig. 1). Cela fait, nous conviendrons de représenter la fraction $\frac{a}{b}$ par le point dont les coordonnées sont

$$x = b \quad y = a.$$

Dans ces conditions, chaque sommet du réseau représente un

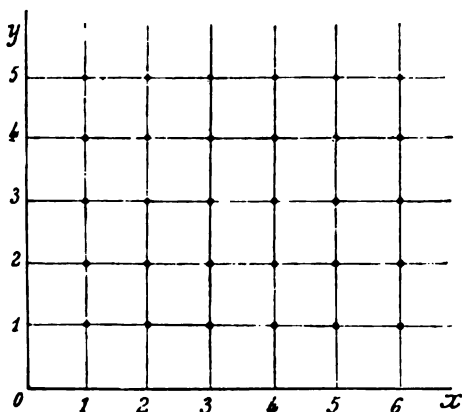


Fig. 1.

nombre commensurable. Ce nombre a pour numérateur le numéro de la parallèle à Ox qui passe par le point représentatif, pour dénominateur le numéro de la parallèle à Oy .

La grandeur de la fraction est donnée par la tangente de l'angle que fait avec Ox la droite qui

joint l'origine O au point représentatif de cette fraction.

Si une droite menée par O passe par un point du réseau, elle passe par une infinité de points de ce réseau définis par

$$x = m\beta \quad y = m\alpha,$$

α et β étant deux entiers premiers entre eux, m un coefficient qui prend successivement toutes les valeurs entières 1, 2, 3, 4, ... Toutes les fractions représentées par ces points ont même grandeur, et celle qui correspond à $m = 1$, c'est-à-dire celle qui est irréductible, est représentée par celui de ces points qui est le plus près de l'origine. Nous appellerons ce point le point irréductible du nombre auquel sont égales toutes ses fractions.

En résumé, un sommet du réseau est irréductible si le segment

de droite qui unit ce point à l'origine ne contient pas d'autre sommet du réseau.

Nous placerons ici une petite observation.

A un nombre incommensurable correspond, dans ce mode de représentation, une droite issue de l'origine et ne passant par aucun sommet du réseau. De chaque côté de cette droite, on peut prendre des sommets du réseau qui s'en approchent de plus en plus au fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'origine mais sans jamais venir se placer sur cette droite. On peut donc dire que ces points tendent vers une limite située à l'infini sur la droite considérée. Pour abrégé le discours on dira que cette droite n'a de point commun avec le réseau (réduit à ses sommets) qu'à l'infini, ou encore que *le point irréductible d'un nombre incommensurable est à l'infini*. Tel est dans ce mode de représentation le caractère géométrique des nombres incommensurables.

Revenons à l'objet spécial qui nous occupe.

Imposer à la fraction $\frac{a}{b}$ une condition telle que

$$f(b, a) \leq 0,$$

c'est astreindre le point représentatif de cette fraction à être compris dans une certaine région du plan, limitée par la courbe

$$f(x, y) = 0,$$

ou situé sur cette courbe elle-même.

Déterminer les fractions irréductibles répondant à la condition précédente, cela revient à déterminer les points irréductibles compris dans cette région ou situés sur cette courbe.

Ranger ces fractions irréductibles par ordre de grandeur croissante, cela consiste à prendre ces fractions dans l'ordre où les points irréductibles correspondants sont successivement atteints par une droite pivotant d'un mouvement continu autour du point O , dans le sens de Ox vers Oy .

En particulier, si la condition imposée est de la forme

$$b + \alpha a \leq N,$$

l'opération qui vient d'être indiquée devra être étendue à la région comprise entre les axes Ox et Oy et la droite dont l'équation est

$$x + \alpha y - N = 0.$$

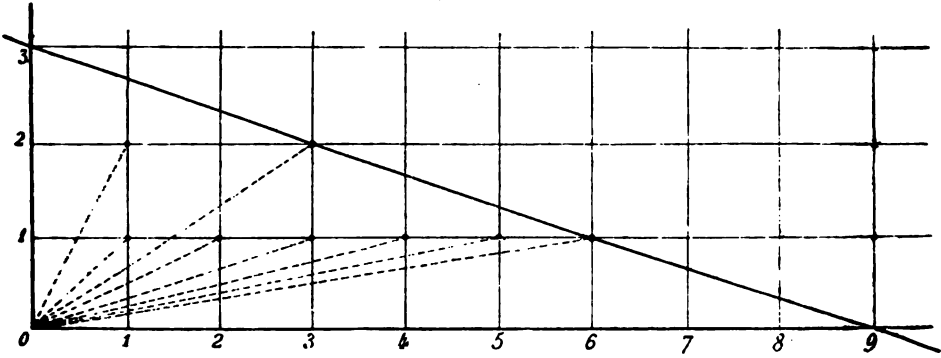


Fig. 2.

Si l'on donne à α l'une des valeurs 1, 2, 3, ... cette région est fermée; si l'on donne à α l'une des valeurs 0, -1, -2, -3, ... elle est ouverte. Cela montre clairement pourquoi les suites à caractéristique positive sont limitées quand les autres ne le sont pas.

La figure 2 montre que la suite $\mathfrak{S}(3, 9)$ se compose de

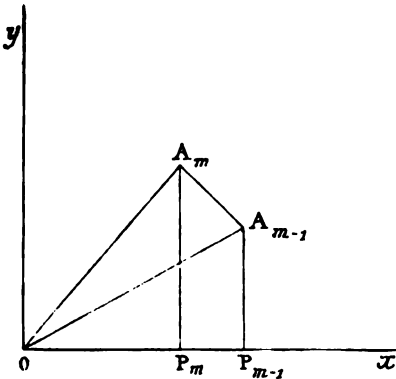


Fig. 3.

$$\frac{1}{6} \frac{1}{5} \frac{1}{4} \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{1} \frac{2}{3} \frac{1}{1} \frac{2}{1}$$

C'est ce que donne le calcul direct au moyen du théorème II.

On aperçoit bien aisément la traduction géométrique de la propriété fondamentale des suites envisagées dans ce mémoire, à savoir :

$$a_m b_{m-1} - a_{m-1} b_m = 1.$$

En effet, soient A_{m-1} et A_m les points représentatifs des termes consécutifs $\frac{a_{m-1}}{b_{m-1}}$ et $\frac{a_m}{b_m}$ (fig. 3).

On a

$$\begin{aligned} \text{Aire } OA_m A_{m-1} &= \text{aire } OA_m P_m + \text{aire } P_m A_m A_{m-1} P_{m-1} - \text{aire } OA_{m-1} P_{m-1} \\ &= \frac{a_m b_m}{2} + \frac{(b_{m-1} - b_m)(a_m + a_{m-1})}{2} - \frac{a_{m-1} b_{m-1}}{2} \\ &= \frac{a_m b_{m-1} - a_{m-1} b_m}{2}. \end{aligned}$$

La propriété fondamentale des suites que nous considérons consiste donc en ce que le triangle formé par l'origine avec les points représentatifs de deux fractions consécutives d'une de ces suites a une aire constante, égale à $\frac{1}{2}$.

Le théorème I, on le voit sans peine, se traduit graphiquement comme suit :

Les points représentatifs des termes de même rang, dans toutes les suites de même base, sont régulièrement espacés sur une parallèle à l'axe Ox ; l'équidistance de ces points comprend autant de divisions qu'il y en a entre cette parallèle et l'axe Ox.

La formule (b), jointe à une remarque faite au cours du n° 8, montre que :

p étant le rang du terme $\frac{1}{\beta+1}$ dans la suite $\mathfrak{S}(-\beta, N)$, si l'on prend, dans cette suite, tous les termes de p en p, à partir d'un terme quelconque, les points représentatifs de ces termes sont régulièrement espacés sur une droite dont le coefficient angulaire est égal $\frac{1}{\beta}$.

NOTE

**sur le nombre des termes de la suite $\mathfrak{S}(\alpha, N)$ lorsque
la caractéristique α est positive.**

Nous venons de retrouver une formule, due à M. Minine (*), et qui permet de donner une expression de ce nombre.

Cette formule fait connaître la quantité $\varphi_r(N)$ des nombres premiers avec N , compris dans la suite $1, 2, 3, \dots, P$, où P est un entier quelconque.

$E\left(\frac{m}{n}\right)$ désignant suivant l'usage la partie entière de la quantité $\frac{m}{n}$, si l'on convient de poser *symboliquement*

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = mE\frac{(1)}{n},$$

ainsi que

$$E\frac{(1)}{m} \cdot E\frac{(1)}{n} \dots E\frac{(1)}{q} = E\frac{(1)}{mn \dots q},$$

la formule de M. Minine s'écrit, sous forme symbolique, de la manière suivante :

a, b, c, \dots, l étant les facteurs premiers de N , de telle sorte que $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots l^\lambda$, on a

$$(1) \quad \varphi_r(N) = P \left(1 - E\frac{(1)}{a}\right) \left(1 - E\frac{(1)}{b}\right) \dots \left(1 - E\frac{(1)}{l}\right).$$

Or, dans la suite $\mathfrak{S}(\alpha, N)$ figurent les dénominateurs

$$1, 2, 3, \dots, b, \dots, N - \alpha,$$

(*) *Société mathématique de Moscou*, séance du 15 janvier 1880. (Voir le *Journal de mathématique, élémentaires et spéciales*, 1880, p. 278.)

et chacun d'eux, b , donne à la suite autant de fractions qu'il y a de nombres premiers avec b et compatibles avec la condition

$$b + \alpha a \leq N,$$

c'est-à-dire compris dans la suite

$$1, 2, 3, \dots, E\left(\frac{N-b}{\alpha}\right).$$

Le nombre des fractions données par le dénominateur b sera donc

$$\varphi_E\left(\frac{N-b}{\alpha}\right)(b),$$

et le nombre total des termes de la suite $\mathfrak{S}(\alpha, N)$, α étant positive,

$$\sum_{b=1}^{N-\alpha} \varphi_E\left(\frac{N-b}{\alpha}\right)(b),$$

expression que la formule symbolique (1) permet de calculer.



CHELONE VAN BENEDENII

PAR

l'abbé G. SMETS

Docteur en sciences naturelles,
Professeur au Collège épiscopal de Hasselt.

Dans une communication ⁽¹⁾ faite récemment à la *Société scientifique de Bruxelles*, nous avons énuméré les trois espèces de tortues, autres que *Sphargis rupeliensis* ⁽²⁾, Van Ben., dont les couches rupeliennes (oligocène moyen) ⁽³⁾ de la basse Belgique renferment de nombreux débris.

Nous commençons la description détaillée de ces animaux par l'espèce nouvelle dédiée par nous à l'illustre paléontologiste qui a bien voulu nous charger de l'étude de ces intéressants reptiles.

Chelone Van Benedenii est évidemment une tortue marine, comme l'attestent les caractères tirés du crâne, des écailles costales, la crête ventrale énorme des vertèbres cervicales, la nature de l'humérus et du plastron, etc. La disposition des plaques cornées épidermiques est la même que dans les *Cheloniidæ*, qui n'ont que huit paires d'écailles osseuses costales. Nous pouvons en inférer que cette tortue ne possédait que ce nombre d'écailles et que, par conséquent, elle se distingue des genres *Catapleura*, *Osteopygis*, *Lytoloma*, *Propleura* et *Peritresius* de Cope ⁽⁴⁾.

⁽¹⁾ L'abbé SMETS, *Les Tortues rupeliennes*, t. X, 2^e partie, p. 12, des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*.

⁽²⁾ VAN BENEDEN, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, série III, t. VI, n^o 12, 1883.

⁽³⁾ MOURLON, *Géologie de la Belgique*. Bruxelles, 1881, t. I, p. 249.

⁽⁴⁾ E.-D. COPE, *Contributions to the History of the Vertebrata of the Lower Eocene*, etc. (From the Proceed. Am. Philos. Soc., 1881, p. 143.)

Les xiphiplastrons n'étaient pas réunis par suture sur la ligne médiane, comme dans le genre *Puppigerus* (1), Cope.

Elle vient donc se placer dans le genre *Chelone*, Brongniart (2).

Elle présente un ensemble de caractères qui pourraient peut-être justifier la création d'un genre nouveau; mais, à l'exemple de la plupart des naturalistes qui ont décrit des tortues marines fossiles, nous conserverons le nom générique *Chelone*. Il est très probable qu'une étude comparée des nombreuses formes fossiles amènera la division du genre *Chelone*.

La plupart de nos fossiles sont dans un parfait état de conservation. Les arêtes les plus vives ont été conservées; malheureusement la pyrite encroûte d'autres pièces de notre collection.

Ils proviennent tous de l'argile de Boom et de Basele et appartiennent à la couche marine du rupélien. C'est de la même assise que sont sortis les ossements de *Crassitherium* (3) (*Hali-therium*) *robustum*, Van Ben.

Les portions du crâne que nous possédons, ainsi que l'ilion, ont été trouvées à part; comme nous sommes en possession d'os du bassin de *Bryochelys Waterkeynii* (4), Van Ben., et de *Chelyopsis littoreus* (5), Van Ben., nous avons pu attribuer ces restes à l'espèce qui nous occupe; ils concordent d'ailleurs par leur taille, comme par d'autres caractères, avec les ossements trouvés ailleurs. Nous avons reconnu, parmi les fossiles rupéliens conservés au Musée royal de Bruxelles, d'autres ossements de cet animal, notamment des vertèbres dorsales.

(1) E.-D. COPE, *loc. cit.*, p. 144.

(2) Pour la raison donnée par Strauch (*Chelonologische Studien*, p. 59), nous préférons le nom générique *Chelone* au terme *Chelonia*, introduit postérieurement.

(3) VAN BENEDEN, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, t. XXXII, 1874, p. 164. — MOURLON, *Géologie de la Belgique*, t. II, p. 193.

(4) VAN BENEDEN, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, t. XXXI, p. 12, 1869. — *Patria Belgica*, 1^{re} partie, p. 375.

(5) SMETS, *loc. cit.*, p. 12.

Description des ossements.

Les figures I et II représentent la partie antérieure du rostre. Celle-ci indique une tête allongée, peu étendue dans le sens transversal. Sous ce rapport *Chelone Van Benedenii* s'éloigne notablement des tortues actuelles, notamment de *Chelone Mydas*; elle présente, comme *Chelone longiceps* (¹), Owen, « a prolonged pointed muzzle ».



Fig. I.



Fig. II.

Les prémaxillaires dépassent de 9 millimètres les maxillaires supérieurs. On distingue, dans l'intérieur des fosses nasales, les deux apophyses de ces os qui se soudent au vomer par suture dentelée et entre lesquelles se termine le canal vomérien. Si ce n'est à la suite d'une cassure, les prémaxillaires présentent entre eux une échancrure médiane, comme on en observe une profonde dans le *Sphargis coriacea* (²). Mais là s'arrêterait la ressemblance. Il n'y a pas d'échancrures latérales.

Un peu au delà de sa jonction avec les prémaxillaires, le vomer se relève subitement, en formant un angle droit, comme d'ailleurs chez les chélonées vivantes, mais à un moindre degré.

(¹) OWEN and BELL, *Monograph of the fossil Reptilia of the London Clay*. London, 1849, p. 16.

(²) PAUL GERVAIS, *Ostéologie du Sphargis Luth.* (NOUVELLES ARCHIVES DU MUSÉUM, t. VIII, p. 201, et planche V, fig. 5.)

Dans la courbure, le canal vomérien est fortement rétréci et il disparaît au delà.

Tous les os de cette partie du rostre sont remarquables par leur solidité. Leur épaisseur est plus considérable que celle des mêmes os d'une tête adulte de *Chelone Mydas*, de 24 centimètres de longueur, que nous avons sous les yeux.

Les maxillaires supérieurs présentent la forme caractéristique des tortues marines. L'apophyse montante qui s'articule au frontal antérieur et limite latéralement les fosses nasales est conservée du côté gauche.

Les choanes sont très larges, le vomer antérieurement et les maxillaires latéralement, et en arrière les palatins les limitent. Comme dans le *Sphargis* (1) des temps actuels, les palatins ne bordent pas antérieurement les choanes, ainsi que c'est le cas des thalassites actuels à un degré variable. La tête que nous décrivons est adulte, et par conséquent ce caractère est spécifique. La présence d'un vrai canal conduisant de l'orbite dans les fosses nasales atteste un âge avancé : nous avons affaire à un canal, long de 8 millimètres, à bords épais et arrondis, tandis que dans les jeunes individus, ce conduit prend plutôt l'aspect d'une fontanelle à bords minces. Ce canal est pour ainsi dire percé dans les palatins; il n'est que très faiblement limité latéralement par le sus-maxillaire.

A la face palatine, on observe une cavité creusée dans les intermaxillaires attestant que la mandibule était terminée en une pointe saillante.

Les palatins, par suite de la forte courbure du vomer, sont surtout étendus dans le sens vertical. Ils présentent l'aspect de lames assez épaisses s'engrenant d'un côté avec le maxillaire supérieur et de l'autre venant s'appliquer sur la face dorsale du vomer. Ainsi, par sa face palatine, *Ch. Van Benedenii* diffère de toutes les chélonées que nous connaissons. Il existe néanmoins une certaine ressemblance avec *Ch. Cuneiceps* (2) d'Owen; mais

(1) PAUL GERVAIS, *Op. cit.*, tab. VIII, fig. 2.

(2) OWEN and BELL, *Op. cit.*, tab. XV.

dans cette tortue du London-Clay, les palatins s'avancent notablement au delà des choanes, sans les limiter antérieurement, et ils sont plus élargis dans le sens transversal.

Par ce qui est conservé des orbites, on peut juger qu'ils étaient allongés; ils devaient se rapprocher de la forme orbitaire de *Chelone longiceps* (1) et de *Chelone cuneiceps* (2).

Un simple coup d'œil jeté sur les figures de l'éminent paléontologiste anglais démontre que toute identification avec notre espèce est impossible; ce qui est confirmé encore par les dimensions des ossements.

Longueur totale du fossile décrit : 7 centimètres.

Largeur de 2 centimètres à l'extrémité antérieure, de 7 à la postérieure.

PARIÉTAL. — Nous possédons le pariétal gauche (fig. III). Il présente par ses contours et par la bosse, située au milieu de sa région antérieure, une certaine ressemblance avec le même os de *Sphargis coriacea* (3); mais la présence de sillons démontre qu'il a appartenu à un *Aspedochelyida* (4).



Fig. III

Si nous le comparons avec le pariétal des différentes chélonées tertiaires, nous trouvons la plus grande analogie avec *Chelone longiceps* (5) d'Owen. Ils ont de commun l'allongement de l'os dans le sens antéro-postérieur, le bord antérieur arrondi, la même disposition des plaques cornées de la tête, la présence d'une plaque *interoccipitale* (inter-

(1) OWEN and BELL, *Op. cit.*, tab. III.

(2) *Idem*, tab. XV.

(3) PAUL GERVAIS, *C stéologie de Sphargis Luth.* (NOUVELLES ARCHIVES DU MUSÉUM, t. VIII, pl. V.)

(4) Professeur H.-G. SEELY, *Note on PSEPHOPHORUS POLYGONUS.* *From the quarterly Journal of the geological Society*, august, 1880, p. 412.

(5) OWEN and BELL, *Op. cit.*, tab. III.

occipital scute, Owen). L'état imparfait de notre échantillon ne permet pas de constater *de visu* si *Chelone Van Benedenti* possédait un angle rentrant dans le pariétal, ce qui est si caractéristique de la tortue de l'éocène de Sheppey. Nous croyons, vu la minceur de l'os à son bord postéro-latéral, justifier la restauration telle que nous la proposons dans la figure III par les lignes pointillées.

Cinq plaques céphaliques recouvraient le pariétal; ce sont, d'après la terminologie de R. Owen : 1° antérieurement et au bord interne, la plaque *sincipitale*; 2° au bord externe, la plaque *supraorbitale*; 3° postérieurement et au bord sagittal, la plaque *interoccipitale*, touchant 4° à la plaque *occipitale*, qui occupe le milieu de la pièce osseuse à sa partie postérieure; enfin 5° la plaque *pariétale* recouvre l'os au bord latéral.

A la face interne du pariétal, un reste de l'apophyse descendante de cet os est conservé, ainsi qu'une partie de la cavité cérébrale. Le cerveau paraît avoir été assez allongé, mais rétréci et moins volumineux que dans les chélonées de nos jours.

L'os est très épais et atteste un crâne très solide.

A voir la solidité de cet os, ainsi que le peu d'étendue de la cavité cérébrale, on ne peut s'empêcher de se ressouvenir d'un fait analogue observé dans les mammifères.

Le professeur Marsh, pour les mammifères de l'Amérique du Nord, le professeur Lemoine, pour les mammifères tertiaires du Nouveau Monde, comme M. Van Beneden, pour les cétacés tertiaires du crag d'Anvers, observent que le cerveau, petit d'abord, s'accroît dans la suite des âges géologiques, à mesure que le cervelet et les lobes olfactifs diminuent. « Les os qui forment la boîte des espèces vivantes ne sont plus que des lames minces et écailleuses comparativement aux parois des espèces fossiles. » (1)

Dimensions : longueur maxima, au bord interne, 9 centimètres.

(1) VAN BENEDEN, *Annales du Musée royal d'histoire naturelle de Belgique*, t. IX, p. 9, genre *Plesiocetus*.

Largeur : à l'extrémité antérieure, 2 1/2 centimètres.

Largeur maxima : 4 1/2 centimètres.

OS DE L'OREILLE. — Nous possédons un complexe osseux très intéressant, bien qu'il soit fortement mutilé et corrodé. Il appartient à la région temporale gauche (fig. IV).

Le *quadratum* est solide et allongé; il est creusé peu profondément à sa face interne, mais la dépression temporale est étendue dans le sens de la longueur du crâne. La surface articulaire pour la mandibule, d'après l'inspection de la partie conservée, a été concave.



Fig. IV.

Chelone Van Benedenti se rapproche, par la région temporale et par la surface articulaire du quadratum, plutôt de *Chelone imbricata* que de *Chelone Mydas* et de *Chelone caounna*.

L'opisthotique est perdu.

Le prootique est soudé avec le quadratum, mais sur une plus grande étendue que dans *Chelone Mydas*. Entre ces deux os et percé dans le tympanique surtout, passe le canal postérieur qui débouche dans la fosse supra-latéro-temporale entre le quadratum, le prootique et l'opisthotique.

Les deux autres canaux sont également conservés.

En dessous et en avant de la capsule auditive, se trouve une masse osseuse corrodée, néanmoins encore d'une épaisseur de plus de 12 millimètres. Ce peuvent être le corps du sphénoïde et le ptérygoïdien unis sans laisser de trace de suture. Cependant cette partie présente un caractère si anormal, si irrégulier que nous croyons avoir affaire à une anomalie ou à un accident de fossilisation. Dans les tortues actuelles on ne rencontre rien de semblable.

A l'entrée du conduit auditif dans la capsule, il y a un os appuyé sur le quadratum et tapissant le méat auditif ainsi que la partie postérieure de la cavité périotique.

La signification de cet os nous échappe et, à moins d'avoir un crâne plus complet, on ne pourra décider si cet os dépend de

l'opisthotique, du ptérygoïdien ou même de l'exoccipital, ou si c'est un os autonome, un *ptérotique*. Dans les espèces actuellement vivantes, l'opisthotique, le ptérygoïdien, tantôt aussi l'exoccipital s'étendent plus ou moins dans la capsule périotique. A considérer cette ossification en elle-même, nous croyons plutôt avoir affaire à un os autonome.

Ainsi, *Chelone Van Benedenii* aurait un *ptérotique*, d'après le diagramme des os de l'oreille, tel que le donne Huxley, dans son Anatomie comparée (1).

Longueur totale de l'os conservé : 75 millimètres.

Pour compléter la description de la région temporale, il nous reste à décrire un squamosal droit, ainsi que la partie supérieure d'un quadratum du même côté (fig. V). Le squamosal est court et rétréci, mais par contre il a gagné en hauteur. La surface pour l'articulation de l'opisthotique est perdue, la surface quadratique est large, ce que confirme l'extrémité du quadratum. Le développement des apophyses post-quadratique et squamoso-opisthotique indique un animal parfaitement adulte.



Fig. V.

Le développement des apophyses post-quadratique et squamoso-opisthotique indique un animal parfaitement adulte.

Si la relation du squamosal avec le quadratum est telle que nous la comprenons, ce que l'on ne peut suffisamment constater, vu la corrosion du second os, le premier prenait peu part à la formation de la voûte du crâne et occupait presque exclusivement la région dorsale de celui-ci.

RÉGION CERVICALE. — La première vertèbre que nous figurons est un axis (fig. VI). Le corps est opisthocœlique ; la surface articulaire antérieure pour l'odontoïde est large comme dans les chélonées actuelles. Les prézygapophysies ont leur surface articulaire plus oblique que dans *Ch. Mydas*. La suture neurocentrale traverse les apophyses transverses volumineuses et larges et s'étendant en dehors en ligne droite. Le canal rachidien, élargi en avant, se rétrécit un peu vers le milieu du corps de la ver-

(1) HUXLEY, *Anatomie comparée des animaux vertébrés*, p. 26, édition française.

tèbre, où il est parfaitement rond. La partie supérieure des neurapophysés est perdue.

La crête ventrale est très développée et le talon de la vertèbre, également très allongé, passait notablement sous le corps de la vertèbre suivante. Ce talon est subdivisé à son extrémité par une gouttière.

On peut se demander si ce talon est un développement exagéré du corps de la vertèbre ou un élément étranger à cet os. L'anatomie du *Luth* permettra, peut-être, de résoudre cette question. Paul Gervais⁽¹⁾ représente, entre les quatre premières vertèbres du *Sphargis coriacea*, un petit os terminé par deux prolongements latéraux, qui semblent vouloir embrasser la crête ventrale de la vertèbre suivante. Il fait allusion à ces os dans son beau travail; nous sommes obligé de donner une citation assez longue pour

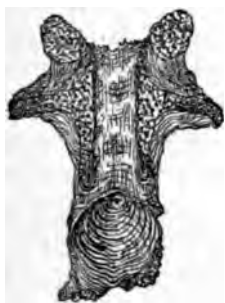


Fig. VI.

l'intelligence du contexte⁽²⁾ : « L'atlas est formé d'un arc supérieur... dont les deux moitiés ossifiées sont disjointes, et il est complété inférieurement par une bande répondant à celle qui existe à l'état osseux dans les mammifères et les oiseaux..., il y a au-dessous d'elle une pièce accessoire de consistance osseuse, semblable à celle que Cuvier signale dans la *Chélonée Mydas*, comme ayant une apparence rotuliforme.... une masse en partie ossifiée, analogue à celle dont il est ici question, se remarque en arrière de la partie inférieure du corps de plusieurs des vertèbres suivantes; ... il en existe même une, celle-ci entièrement osseuse, sous la masse odontoïde. »

Ces os sont évidemment les *hypapophysés* de M. Albrecht.

Remarquons, en passant, que M. Albrecht considère⁽³⁾ l'arc

⁽¹⁾ *Ostéologie du Sphargis Luth*, planche VI, fig. 1.

⁽²⁾ *Op. cit.*, p. 209 et 210.

⁽³⁾ P. ALBRECHT, *Note sur le proatlas chez un MACACUS ARCTOÏDES*. (*Bulletin du Musée royal d'histoire naturelle de Belgique*, t. II, p. 292)

ventral ou le pseudo-centre de l'atlas comme une hypapophyse proatlanto-atlantique; il ne pourrait donc plus y avoir d'hypapophyse sous cet arc. Cependant M. Gervais (1) en distingue et en figure une; de plus une seconde « sous la masse odontoïde ». La première serait alors la proatlanto-atlantique, la seconde l'atlanto-axoïdienne; mais aussi le pseudo-centre ne pourrait être une hypapophyse. Une observation ultérieure permettra de décider cette question.

Revenons à nos fossiles.

Nous possédons deux vertèbres cervicales, l'axis et la troisième, terminées par un talon volumineux portant une échancrure médiane : ce talon ne serait-il pas formé, en partie du moins, par les hypapophyses soudées au corps de la vertèbre? Effectivement, quand on l'examine attentivement on *croit* observer les traces d'une suture presque complètement oblitérée. L'hypapophyse soudée au corps de la vertèbre servirait à augmenter la cavité de réception de la tête articulaire convexe de la troisième vertèbre cervicale pour faciliter les mouvements de rotation de la tête. L'échancrure que nous signalions à l'extrémité du talon livrait très probablement passage aux vaisseaux nourriciers.

Longueur de la vertèbre : 4 centimètres; le talon conservé atteint 13 millimètres; s'il était intégralement conservé, il en atteindrait au moins 15.

TROISIÈME VERTÈBRE CERVICALE (fig. VII). — Corps opisthocœlique; tête articulaire très développée et en rapport avec la cavité articulaire de l'axis; suture neuro-centrale traversant les diapophyses; neurapophyses très développées et limitant même partiellement la base du canal rachidien. Postzygapophyse droite conservée et très élevée.



Fig. VII.

La crête ventrale est enlevée, mais nous l'avons retrouvée avec

(1) *Ostéologie du Sphargis Luthi*, pp. 200 et 210, planche VI, fig. 1, 3, 4 et 5.

son talon moins volumineux que celui de l'axis ; nous avons fait dessiner le talon en place. La trace d'une suture de l'hypapophyse avec le corps vertébral semble exister, mais nous ne pouvons en acquérir la certitude. L'échancre du talon est presque transformée en un canal.

Dimensions : longueur 38 millimètres ; celle du talon est de 9 millimètres.

La collection de M. Van Beneden renferme encore une partie de la huitième vertèbre cervicale, d'après notre détermination. Son corps est légèrement concave à la face antérieure.

De la région dorsale nous possédons un corps de vertèbre assez mutilé. La partie conservée, longue de 5 centimètres, donne une longueur de 7 centimètres pour la pièce entière, ce qui est en rapport avec la largeur des écailles costales. Volumineux à sa surface articulaire conservée, ce corps se rétrécit notablement au milieu.

Au Musée royal de Bruxelles, nous avons vu une vertèbre complète de cet animal ; elle présente les mêmes caractères.

Malgré la rareté des vertèbres dorsales des tortues rupe-liennes conservées, nous pouvons dire dès à présent que ces os présentent dans chaque espèce un facies à part, que l'on saisit du premier coup d'œil. Nous espérons revenir sur ces particularités, quand nous aurons fait connaître les deux autres espèces.

HUMÉRUS (fig. VIII et IX). — Un humérus droit parfaitement conservé atteint 13 $\frac{1}{2}$ centimètres. Le grand trochanter dépassant notablement la tête articulaire et fortement incliné vers la région postaxiale accuse les habitudes franchement marines de cette espèce. La petite tubérosité, confondue ni avec la tête, ni avec la crête deltoïdienne, est placée obliquement sur l'axe de l'humérus et se projette en dehors.

La diaphyse s'aplatit et se dilate assez brusquement, conservant sa plus grande épaisseur au bord interne, et de l'autre s'amincit en une crête supinatrice fortement développée. Cette dernière indique un grand développement de l'huméro-radial,

ce que confirme le grand développement de l'entépicondyle, comme de l'ectépicondyle.

L'extrémité distale est très intéressante ; elle est fortement



Fig. VIII.



Fig. IX.

oblique à l'axe de la diaphyse. Celle-ci est percée, pour le passage du nerf radial, par un canal ectépicondylien très bien formé ; ce dernier commence à la face postaxiale par une gouttière très longue.

L'ectépicondyle dépasse tous les autres condyles ; il est séparé nettement de l'ectocondyle. Celui-ci, également bien distinct des deux condyles voisins, est surmonté, à la face pré-

axiale, par une dépression *suscondylienne*, comme au-dessus de l'entocondyle on observe la fosse *coronoïdienne* ; mais ces deux dépressions sont faiblement séparées par une crête à peine visible sur l'os pétrifié. A la face postaxiale, une dépression sépare l'entocondyle de l'entépicondyle. Nous n'avons jamais observé un humérus de chélonée vivante aussi complet.

Au-dessus de l'entépicondyle et presque sur la face postaxiale, on observe une crête allongée et saillante, qu'on ne retrouve pas sur les humérus des espèces vivantes.

Cet os trahit un animal bon nageur : une tête allongée, peu large, une carapace déprimée et relativement beaucoup plus longue que large permettaient à l'animal de fendre rapidement les flots, sans essayer trop de résistance.

MAIN (fig. X, XI et XII). — Nous avons retrouvé trois os de la main, d'abord le métacarpien et la première phalange du doigt

médian. L'extrémité antérieure arrondie du premier présente une surface articulaire concave pour le troisième carpe (1). Le diamètre de l'os diminue jusque vers le milieu de sa largeur pour reprendre une épaisseur plus considérable au delà. L'extrémité distale est faiblement convexe; ce métacarpien a 5 centimètres de largeur.

Fig. X.



Fig. XI.



Fig. XII.

La première phalange n'a que 4 centimètres; son extrémité proximale offre une surface articulaire concave et allongée transversalement. Le corps de l'os s'arrondit vers le milieu de sa longueur et s'étend en largeur, en reprenant un diamètre plus considérable, à l'extrémité distale.

Un troisième os de la main est brisé; il me paraît appartenir au métacarpe; mais nous ne trouvons nulle part une extrémité aussi élargie dans les chelonées vivantes. La surface articulaire de l'extrémité proximale est concave et simple; ce ne peut donc être le métacarpien des doigts I et II, mais celui du doigt IV; la longueur de la partie conservée, près de 4 centimètres, ne permet pas de le rapporter au cinquième doigt.

ILION (fig. XIII). — Cet os a été rencontré avec les ossements de la tête. Nous n'en possédons que l'extrémité distale ayant conservé la surface glénoïde pour le fémur et les deux surfaces suturales pour le pubis et l'ischion. La grande épaisseur de cette partie proximale et la diminution rapide du volume de l'os, ainsi que son aplatissement, au delà de sa tête, caractérisent l'ilion de *Chelone Van Benedenii*. Il

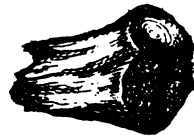


Fig. XIII.

(1) GEGENBAUER, *Untersuchungen zur vergleichenden Anatomie der Wirbelthiere. Carpus und Tarsus*, pp. 49 et suivantes, planche II, fig. 2.

se distingue par là du même os des chélonées actuelles, de celui de *Chelyopsis littoreus*, Van Ben., de celui de *Bryochelys Waterkeynii*, Van Ben., ainsi que de celui du *Sphargis* des mêmes couches rupéliennes.

Nous lui trouvons le plus de ressemblance avec l'ilion de *Chelonia Gerundica* (1), Delfortrie. Ces deux chélonées se ressemblent encore par d'autres caractères, quoique toute identification soit impossible; la chélonée du miocène de la Gironde atteignait 2 mètres.

La cassure montre que la surface de l'os a une texture très compacte et que le centre est tout à fait spongieux.

PIED (fig. XIV et XV). — De l'extrémité des membres postérieurs nous n'avons retrouvé que deux phalanges, qui nous semblent être la première et la deuxième du doigt II; elles ont respectivement 23 et 26 millimètres de longueur. Leurs surfaces articulaires sont tellement nettes que, si on trouvait ces ossements seuls, on hésiterait à les rapporter à une chélonée. Elles permettent de constater que le membre postérieur est réduit relativement au membre antérieur.



DERMATOSQUELETTE. — De la série des écailles vertébrales notre collection ne renferme que la dernière sus-caudale. Elle affecte une forme grossièrement triangulaire; le sommet de l'angle postérieur est arrondi. Elle n'atteint que 28 millimètres de longueur sur 26 de large, dimensions trop faibles pour l'attribuer à un individu adulte.

ÉCAILLES COSTALES. — Pour assigner leur rang aux écailles costales (2) des *Chelone*, on s'appuie d'abord sur ce fait constant que le sillon longitudinal, tracé par les plaques costales ou

(1) DELFORTRIE, *Les Chéloniens du miocène supérieur de la Gironde*. (ACTES DE LA SOCIÉTÉ LINNÉENNE DE BORDEAUX, t. XXVII, planche XXVI, fig. 48.)

(2) DELFORTRIE, *Op. cit.*, p. 8.

par les plaques vertébrales, est toujours plus rapproché du bord postérieur que du bord antérieur.

Les écailles costales de rang impair — il faut en excepter assez souvent la septième — portent deux sillons se coupant sous un angle dont le sommet est tourné vers le bord vertébral et de ce sommet part, vers le bord vertébral, un troisième sillon séparant deux plaques cornées vertébrales. Les écailles costales de rang pair présentent, au contraire, un angle, formé par deux sillons, dont le sommet est tourné vers le bord marginal et d'où part un sillon, séparant deux plaques dorsales, vers le bord marginal.

Les écailles costales du milieu de la carapace ont leurs bords sensiblement parallèles; les autres ont leurs bords obliques. De plus, la première écaille dorsale se reconnaît en ce qu'elle porte presque toujours une impression faite par la première côte dorsale, qui reste petite, un *peu au-devant* de la seconde côte soudée à la première écaille costale. Cette seconde côte est généralement considérée comme étant la première. De même la huitième écaille costale se distingue par une impression semblable faite par une côte analogue *derrière* la côte soudée à la carapace. Il y a donc en réalité dix côtes dorsales dans les tortues (1).

Malgré ces règles, des difficultés surgissent encore, quand les sillons sont effacés, comme c'est le cas pour la première écaille que nous représentons et à laquelle nous assignons le premier rang à *droite*, à cause d'une impression causée très probablement par la première côte dorsale : la courbure de la seconde côte, soudée à la carapace, concourt à lui assigner cette place.

Nous possédons sept écailles dorsales, dont quatre sont suffisamment conservées pour nous donner une idée du dermato-squelette de ces reptiles. Elles se distinguent aisément des mêmes os de *Bryochelys* par l'absence des *expansions foliacées* (2) carac-

(1) DELFORTRIE, *Les Chéloniens du miocène supérieur de la Gironde*, p. 6.

(2) VAN BENEDEEN, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, t. XXXI, p. 12, et *Patria Belgica*, 1^{re} partie, p. 375.

téristiques de cette dernière espèce et aussi en ce que les écailles — connues de cette dernière — sont toutes légèrement concaves à leur face dorsale.

PREMIÈRE ÉCAILLE DORSALE DROITE (fig. XVI et XVII). — Cette pièce semble s'écarter un peu de la forme habituelle des premières écailles costales. Le bord vertébral est brisé; les sillons des plaques cornées sont effacés; au milieu de la longueur de l'écaille et au bord antérieur se trouve un sillon semi-circulaire, qui ne peut être dû à l'impression d'une plaque cornée. A la face inférieure, l'os y présente un arrêt dans son développement, il y est comme excavé.



Fig. XVI.



Fig. XVII.

La face ventrale de l'os conserve une légère empreinte de la première vraie côte dorsale, tandis que la seconde est complètement coossifiée avec l'os dermique et est peu apparente. La forme de cette écaille est grossièrement triangulaire.

Longueur : 12 centimètres.

Largeur : 7 centimètres.

Épaisseur : au bord vertébral de 13 millimètres, elle diminue sensiblement vers le bord marginal, excepté là où l'écaille est soudée à la côte.

Deux autres écailles prennent le rang III et IV gauche (fig. XVIII et XIX), comme le démontrent les sillons des plaques, leurs bords sensiblement parallèles et la position des côtes au milieu des écailles.

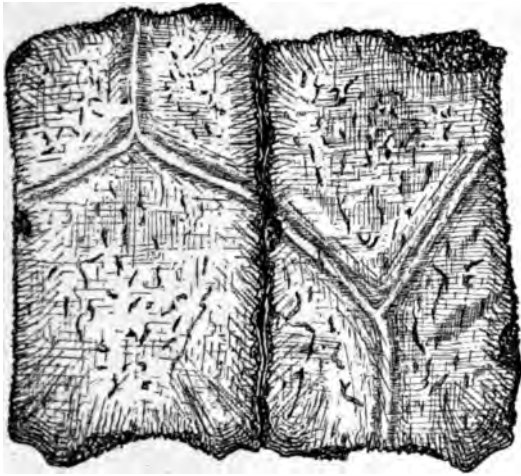


Fig. XVIII.

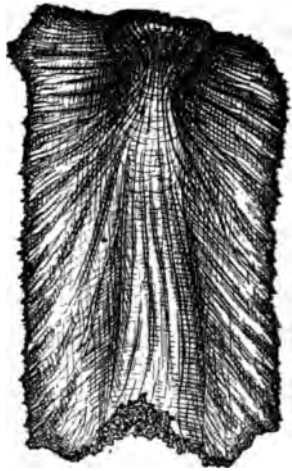


Fig. XIX.

Les sillons des plaques cornées sont assez profonds; leur disposition indique de grandes plaques vertébrales. Les côtes sont comme écrasées, très larges, peu distinctes de l'os dermique : *Chelone Van Benedenii* est donc sous ce rapport nettement distinct de *Chelonia Gerundica* ⁽¹⁾, Delfortrie.

TROISIÈME COSTALE GAUCHE. — Longueur de la partie conservée, 11 1/2 centimètres; largeur moyenne, 7 centimètres; épaisseur constante de près de 1 centimètre.

(¹) DELFORTRIE, *Les Chéloniens du miocène supérieur de la Gironde*, planches XXI, XXII, etc.

La pièce était partiellement ossifiée et la côte se prolongeait librement au delà pour se réunir aux écailles marginales.

La tubérosité de la côte est étendue en longueur et elle atteste par sa faible courbure, comme celle de l'écaille suivante, une carapace déprimée. Au bord vertébral, à la face dorsale, quelques rides s'étendent de la côte aux bords; au delà quelques autres suivent obliquement la direction de la côte.

QUATRIÈME DORSALE GAUCHE. — Elle a, à peu près, les mêmes dimensions et les mêmes caractères que la précédente.

SIXIÈME DORSALE GAUCHE (fig. XX). — Cette écaille est plus large vers le bord marginal qu'au bord vertébral.

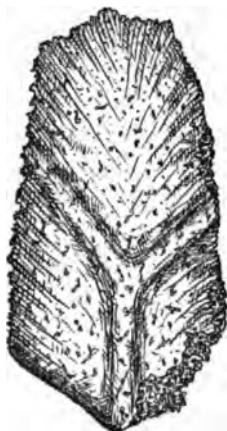


Fig. XX.

Longueur : 10 $\frac{1}{2}$ centimètres.

Largeur, au bord vertébral : 4 $\frac{1}{2}$ centimètres et atteignant 6 centimètres.

Épaisseur de près de 1 centimètre.

La côte, plus rapprochée du bord postérieur, est aplatie et large, mais son prolongement au delà de l'écaille semble avoir été peu large.

Outre ces quatre écailles, nous possédons encore trois autres trop mutilées pour que nous puissions leur assigner leur place.

La carapace de cette tortue devait donc être solide, quoique incomplète dans ses écailles costales, déprimée, relativement longue et peu large. Elle pouvait atteindre 80 centimètres de longueur; nous estimons sa plus grande largeur à 50 centimètres.

PLASTRON (fig. XXI et XXII). — Nous ne possédons que deux pièces du plastron; elles ont été attribuées au *Bryochelys Water-*

keynii, alors ⁽¹⁾ qu'on ne possédait encore que de rares débris des chélonées rupéliennes. Mais les découvertes ultérieures ont montré qu'il existait plus d'une forme fossile de tortues dans ces dépôts; ces deux pièces du plastron ont dû être attribuées, avec une pièce costale exhumée en même temps, à l'espèce qui nous occupe. Nous sommes en possession aujourd'hui du xiphiplastron de *Bryochelys*.

Le plastron était conformé d'après le type thalassite actuel, et s'écartait, par conséquent, notablement du plastron de la plupart des chélonées de l'éocène d'Angleterre, décrites par R. Owen.



Fig. XXI.

Une première pièce (fig. XXI) est une partie de l'hypoplastron, dilatée, avec des stries et des rayons brisés.

Le xiphiplastron (fig. XXII), dont une partie de l'extrémité distale est perdue, atteint encore 12 centimètres de longueur. Il a 2 centimètres d'épaisseur à son extrémité proximale; au delà, l'épaisseur diminue, mais l'os s'élargit notablement, atteignant 4 1/2 centimètres.



Fig. XXII.

L'extrémité antérieure montre à sa face interne deux gouttières pour loger les prolongements rayonnants de l'hypoplastron. Sa pointe est brisée. Le bord extérieur est dentelé.

L'épaisseur de la plupart des os de *Chelone Van Benedenii* semble être un caractère particulier de cette espèce, si l'on tient compte de la taille moyenne

qu'elle devait atteindre.

(1) VAN BENEDEN, *Les Reptiles fossiles en Belgique*. (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 2^e série, t. XXXI, p. 12.)

A l'instant où nous corrigeons les épreuves de ce travail, nous recevons le mémoire (1) de M. Dollo sur les Chéloniens landéniens, dans lequel le naturaliste du Musée de Bruxelles divise les espèces du genre *Chelone* en deux genres : *Chelone* et *Pachyrhynchus*. L'espèce qui nous occupe doit rester dans le premier de ces genres.

(1) L. DOLLO, *Chéloniens landéniens de la Belgique*. (BULLETIN DU MUSÉE ROYAL, etc. t. IV, p. 129.)

COURS SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PROFESSÉ

A LA FACULTÉ CATHOLIQUE DES SCIENCES DE LYON PENDANT L'ANNÉE 1886

PAR

M. le C^{te} de SPARRE

Professeur aux Facultés catholiques de Lyon.

Je me propose, dans les pages qui vont suivre, de reproduire les parties principales d'un cours sur les fonctions elliptiques que j'ai professé dans l'année qui vient de finir devant quelques élèves qui se proposaient de pousser leurs études au delà du programme de la licence. J'en retrancherai toutefois certaines parties, en particulier celles relatives au pendule conique et à l'intégration par les fonctions elliptiques, parce que ces points ont été traités précédemment par moi dans ce recueil.

I. — *Quelques propriétés des fonctions doublement périodiques* (*).

1° Si l'on considère les zéros et les infinis d'une fonction doublement périodique qui sont situés dans un même parallélogramme élémentaire, la somme des zéros ne diffère de celle des infinis que par un multiple des périodes.

Soit $a_1 a_2 \dots a_n$ le zéro de la fonction doublement périodique $f(z)$ $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ ses infinis, compris dans un parallélo-

(*) Ce premier paragraphe est extrait de l'ouvrage de MM. Briot et Bouquet.

gramme élémentaire, $2K$ et $2iK'$ les périodes de $f(z)$, prenons a'_n de façon que l'on ait

$$(1) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a'_n) = 2m'K + 2miK'$$

où m et m' sont des nombres entiers et où a'_n est situé dans le parallélogramme élémentaire considéré (condition toujours possible et qui détermine m et m').

La fonction

$$\varphi(z) = e^{\frac{m\pi z i}{K}} \frac{H(z - a_1) \dots H(z - a_{n-1}) H(z - a'_n)}{H(z - \alpha_1) \dots H(z - \alpha_n)}$$

est doublement périodique, ainsi qu'on le voit tout de suite en se rappelant les relations

$$H(z + 2K) = -H(z), \quad H(z + 2iK') = -e^{-\frac{\pi i}{K}(z + iK')} H(z)$$

et tenant compte de l'équation (1).

Le rapport $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ est aussi doublement périodique, et comme il n'aurait dans le parallélogramme qu'un seul infini a'_n il se réduit à une constante, et on a $a'_n = a_n$, donc

$$\sum \alpha_n - \sum a_n = 2miK' + 2m'K;$$

2° La somme des n valeurs de la variable qui dans un même parallélogramme correspondent à une même valeur de la fonction est constante, abstraction faite des multiples de périodes.

Soit $\alpha_1 \dots \alpha_n$ les n infinis de la fonction doublement périodique $f(z)$ la fonction

$$f(z) - u$$

où u est constant a les mêmes infinis, elle a aussi n zéros $z_1 z_2 \dots z_n$ et d'après ce qui a été dit plus haut on a

$$\sum \alpha_n - \sum z_n = 2miK' + 2m'K.$$

Donc la somme $z_1 + z_2 + \dots + z_n$ des n valeurs de la variable

qui correspondent à une valeur donnée de la fonction est donc constante aux multiples de périodes près;

3° Une fonction doublement périodique du deuxième ordre dont les infinis sont α et β satisfait à la relation

$$f(\alpha + \beta - z) = f(z),$$

$f(z)$ est du deuxième ordre et a les infinis α et β . A une valeur u de $f(z)$ correspondent dans le parallélogramme deux valeurs de z , z_1 et z_2 et l'on a d'après ce qui précède

$$z_1 + z_2 = \alpha + \beta + 2miK' + 2m'K$$

d'où

$$z_2 = \alpha + \beta - z_1 + 2miK' + 2m'K$$

et par suite

$$f(\alpha + \beta - z_1) = f(z_2) = f(z_1),$$

puisque par hypothèse z_1 et z_2 sont les deux valeurs de z qui correspondent à une valeur u de $f(z)$;

4° La dérivée d'une fonction doublement périodique du deuxième ordre aux périodes $2K$ et $2iK'$ et ayant deux infinis simples α et β admet les quatre zéros

$$\frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \frac{\alpha + \beta}{2} + K, \quad \frac{\alpha + \beta}{2} + iK', \quad \frac{\alpha + \beta}{2} + K + iK'.$$

Soit d'abord une fonction doublement périodique telle que $f(c - z) = -f(z)$.

On aura en faisant :

$$z = \frac{c}{2}, \quad f\left(\frac{c}{2}\right) = -f\left(\frac{c}{2}\right) = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases} \text{ ou,}$$

en faisant

$$z = \frac{c}{2} + K, \quad f\left(\frac{c}{2} + K\right) = -f\left(\frac{c}{2} + K\right) = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases} \text{ ou,}$$

en faisant

$$z = \frac{c}{2} + iK', \quad f\left(\frac{c}{2} + iK'\right) = -f\left(\frac{c}{2} + iK'\right) = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases},$$

en faisant

$$z = \frac{c}{2} + K + iK', \quad f\left(\frac{c}{2} + K + iK'\right) = -f\left(\frac{c}{2} + K + iK'\right) = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}.$$

La somme des autres zéros deux à deux et de même celle des infinis est égale à c , car les deux fonctions $f(z)$ et $f(c-z)$ admettent les mêmes zéros et les mêmes infinis, par suite si a est un zéro $c-a$ en est aussi un, si α est un infini $c-\alpha$ en est aussi un.

Soit en second lieu une fonction telle que $f(c-z) = f(z)$ (les zéros et les infinis de cette fonction ont encore deux à deux une somme égale à c), on aura alors pour cette fonction $f'(c-z) = -f'(z)$; donc les quatre valeurs $\frac{c}{2}$, $\frac{c}{2} + K$, $\frac{c}{2} + iK'$, $\frac{c}{2} + K + iK'$ sont des zéros ou des infinis de $f'(z)$.

Pour une fonction doublement périodique du deuxième ordre on a d'après ce que nous avons vu

$$f(\alpha + \beta - z) = f(z).$$

Donc les quatre valeurs

$$\frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \frac{\alpha + \beta}{2} + K, \quad \frac{\alpha + \beta}{2} + iK', \quad \frac{\alpha + \beta}{2} + K + iK'$$

rendent $f'(z)$ nul ou infini.

Si la fonction $f(z)$ a deux infinis simples α et β la dérivée ayant les deux infinis doubles, α et β est du quatrième ordre, ses quatre zéros sont les quatre valeurs précédentes.

Si la fonction a un infini double α , la dérivée ayant l'infini triple α est du troisième ordre et ses trois zéros sont

$$\alpha + K, \quad \alpha + iK', \quad \alpha + K + iK';$$

3° Une fonction méromorphe doublement périodique $u=f(z)$, du deuxième ordre, satisfait à une équation différentielle de la forme

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Fu^4}.$$

Le polynôme sous le radical étant du troisième et du quatrième degré.

Lorsque u a deux infinis simples α et β , sa dérivée u' est du quatrième ordre et u'^2 du huitième avec quatre zéros doubles et deux infinis quadruples.

Soit

$$\varphi(z) = \left[f(z) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right] \left[f(z) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + K\right) \right] \\ \left[f(z) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + iK'\right) \right] \left[f(z) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + K + iK'\right) \right],$$

qui admet les mêmes infinis quadruples et les mêmes zéros doubles (puisque $\frac{\alpha + \beta}{2}$, par exemple, annule le premier facteur et aussi sa dérivée $f'(z)$), donc u'^2 et $\varphi(z)$ avant les mêmes zéros et les mêmes infinis sont dans un rapport constant. Le polynôme sous le radical est donc dans ce cas (ou u a deux infinis simples α et β) du quatrième degré.

Lorsque u a un infini double α , u' ayant un infini triple est du troisième ordre, ses trois zéros sont $\alpha + K$, $\alpha + iK'$, $\alpha + K + iK'$, u'^2 est du sixième ordre avec un infini sextuple α et les zéros de u' seulement au deuxième ordre, donc

$$\varphi(z) = [(z) - f(\alpha + K)][f(z) - f(\alpha + iK')][f(z) - f(\alpha + K + iK')],$$

ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis que u'^2 et au même degré ($\alpha + K$, par exemple, annule le premier facteur et aussi sa dérivée $f'(z)$), sera dans un rapport constant avec cette fonction. Le polynôme placé sous le radical est dans ce cas du troisième degré.

II. — *Identité des fonctions elliptiques définies au moyen de l'inversion des intégrales et de celles définies par les fonctions H et Θ .*

Considérons la formule

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)} \quad \text{où} \quad \sqrt{k} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)},$$

$\operatorname{sn} u$ étant la fonction définie par l'inversion de l'intégrale

$$u = \int_0^{\operatorname{sn} u} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

cette première formule ne sera pas exacte si l'on prend pour $H(u)$ et $\Theta(u)$ deux fonctions formées avec les constantes K et iK' assujetties à la seule condition que la partie réelle dans le rapport $\frac{K'}{K}$ soit positive, et sans cela quelconques.

En effet, dans $\operatorname{sn} u$ défini au moyen de l'intégrale considérée plus haut, on a

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$iK' = \int_1^{i^{\frac{1}{2}}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

pour K' , d'ailleurs la dernière équation se transforme en posant

$$k^2x^2 + k'^2z^2 = 1, \quad \text{d'où} \quad x^2 = \frac{1-k'^2z^2}{k^2},$$

dans la suivante

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}.$$

Ces deux constantes K et K' ne dépendent donc que d'un seul paramètre k et par suite il n'y en a qu'une seule d'arbitraire.

Posons maintenant dans le cas général où K et K' sont assujettis à la seule condition que la partie réelle soit positive dans le rapport $\frac{K'}{K}$

$$\lambda(u) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H_1(u)}{\Theta(u)} \quad \sqrt{k} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)}.$$

Il résulte des propriétés des fonctions H et Θ que $\lambda(u)$ est une fonction doublement périodique aux périodes $4K$ et $2iK'$ avec les deux infinis simples iK' et $2K + iK'$.

D'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent, sa dérivée admettra les quatre zéros simples

$$K + iK', \quad 3K + iK', \quad K + 2iK', \quad 3K + 2iK'$$

et on aura, comme nous l'avons fait voir,

$$\lambda'^2(u) = A \left[\lambda^2(u) - \frac{1}{k^2} \right] \left[\lambda^2(u) - 1 \right].$$

A désignant une constante. On a en effet en vertu des propriétés des fonctions Θ et H ,

$$\lambda(K + iK') = -\lambda(3K + iK') = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\Theta_1(0)}{H_1'(0)} = \frac{1}{k},$$

$$\lambda(K + 2iK') = -\lambda(3K + 2iK') = \lambda(K) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)} = 1.$$

Si donc nous désignons par g la valeur de $\lambda'(u)$ pour $u = 0$ nous pourrons écrire

$$\lambda'^2(u) = g^2 [1 - \lambda^2(u)] [1 - k^2 \lambda^2(u)].$$

Cette équation différentielle est évidemment celle à laquelle satisfait la fonction doublement périodique $\operatorname{sn} gu$ et comme d'ailleurs $\operatorname{sn} gu$ et $\lambda(u)$ sont tous deux nuls pour $u = 0$ on en conclut

$$\lambda(u) = \operatorname{sn} gu.$$

La quantité constante g est ce que l'on appelle le multiplicateur, et on a alors pour déterminer K et g les deux équations

$$gK = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = K_1,$$

$$gK' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} = K'_1,$$

car les périodes de $\operatorname{sn} gu$ étant $4K$ et $2iK'$ celles de $\operatorname{sn} z$ sont

$$4gK = K_1 \quad \text{et} \quad 2giK' = 2iK'_1.$$

D'ailleurs g étant, d'après ce que nous avons vu, la valeur de la dérivée de $\operatorname{sn} gu$ pour $u = 0$ on déduit de la formule

$$\operatorname{sn} gu = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)},$$

$$g = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H'(0)}{\Theta(0)}.$$

Puisque l'on a

$$\operatorname{sn} gu = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)},$$

on en déduit (*)

$$\operatorname{cn} gu = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(u)}{\Theta(u)},$$

$$\operatorname{dn} gu = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)},$$

ou

$$\sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)};$$

il suffit, pour s'en convaincre, de remarquer que dans chacune

(*) En supposant $\operatorname{cn} z$ et $\operatorname{dn} z$ définis par les équations $\operatorname{cn}^2 z = 1 - \operatorname{sn}^2 z$, $\operatorname{dn}^2 z = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z$ auxquelles on joint la condition $\operatorname{cn} 0 = \operatorname{dn} 0 = +1$, ce qui les détermine complètement. Il résulte de là que les zéros de $\operatorname{cn} z$ sont K_1 et $-K_1$ ses infinis iK'_1 et $-iK'_1$, que les zéros de $\operatorname{dn} z$ sont $K_1 + iK'_1$ et $-K_1 - iK'_1$, ses infinis iK'_1 et $-iK'_1$.

des deux équations écrites ci-dessus les deux membres sont des fonctions doublement périodiques aux mêmes périodes admettant les mêmes zéros et les mêmes infinis et que de plus ces deux membres se réduisent à l'unité pour $u = 0$.

Nous allons maintenant faire voir que réciproquement si l'on considère la fonction $\operatorname{sn} u$ comme provenant de l'inversion de l'intégrale

$$u = \int_0^{\operatorname{sn} u} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

cette fonction $\operatorname{sn} u$ peut être exprimée au moyen des fonctions Θ et H . Il suffit pour cela de faire voir que les deux constantes K et K' définies par les deux équations

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},$$

sont telles que la partie réelle dans le rapport $\frac{K'}{K}$ est positive, c'est en effet la seule condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse former avec elles des fonctions Θ et H .

Voici pour ce fait la démonstration de Riemann (*).

Posons

$$k^2 = a + bi.$$

Nous aurons, les deux intégrales étant supposées rectilignes

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(a+bi)\sin^2\varphi}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-a-bi)\sin^2\varphi}}.$$

Soit encore K_0 la quantité imaginaire conjuguée de K

$$K_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(a-bi)\sin^2\varphi}}.$$

(*) Donnée par M. Hermite dans son cours lithographié de la Sorbonne.

Nous envisagerons le produit K_0K' en le mettant sous la forme d'une intégrale double

$$K_0K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi d\psi}{\sqrt{1 - (1 - a - bi)\sin^2\varphi} \sqrt{1 - (a - bi)\sin^2\psi}}.$$

Nous ferons en supposant $b \leq 0$

$$\sqrt{1 - (1 - a - bi)\sin^2\varphi} \sqrt{1 - (a - bi)\sin^2\psi} = X + iY,$$

de là on tire en élevant un carré et égalant les coefficients de i

$$[1 - (1 - a)\sin^2\varphi]\sin^2\psi + (1 - a\sin^2\psi)\sin^2\varphi = 2XY,$$

ou bien

$$\sin^2\psi \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 2XY,$$

et l'on voit que le produit XY est toujours positif et ne s'annule que pour $\varphi = 0$ et $\psi = 0$. Mais dans ce cas c'est le facteur Y qui s'évanouit, tandis que X a la valeur initiale du produit des radicaux, c'est-à-dire l'unité positive. Par suite lorsque les angles φ et ψ croissent de zéro à $\frac{\pi}{2}$, X , qui ne passe jamais par zéro, garde son signe et reste toujours positif. Cela étant, il suffit d'écrire

$$K_0K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi d\psi}{X + iY} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{X d\varphi d\psi}{X^2 + b^2Y^2} - ib \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Y d\varphi d\psi}{X^2 + b^2Y^2}.$$

et l'on reconnaît que la partie réelle de K_0K' est positive, il en est par conséquent de même pour celle de $\frac{K'K_0}{KK_0} = \frac{K'}{K}$, car KK_0 produit de deux imaginaires conjuguées est réel et positif.

Lorsque b est nul et a supérieur à l'unité ou bien négatif, une des quantités K et K' est réelle et positive et l'autre imaginaire. Dans le premier cas, par exemple, le radical $\sqrt{1 - a\sin^2\varphi}$ passe

du réel à l'imaginaire pour une certaine valeur φ_0 de φ de sorte que K est imaginaire, mais sa partie réelle étant exprimée par l'intégrale

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a \sin^2 \varphi}}$$

est essentiellement positive, de sorte que le quotient $\frac{K'}{K}$ a aussi sa partie réelle positive. Lorsque l'on suppose au lieu de cela a négatif K est réel, et le radical $\sqrt{1 - (1 - a) \sin^2 \varphi}$ passe du réel à l'imaginaire pour une valeur φ_1 de φ , par suite K' est imaginaire, mais sa partie réelle est positive puisqu'elle est exprimée par l'intégrale

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - a) \sin^2 \varphi}}.$$

III. — *Rappel de quelques formules supposées connues sur les fonctions elliptiques.*

Ces fonctions sont définies par les séries suivantes :

$$H(u) = 2 \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi u}{2K},$$

$$H_1(u) = 2 \sum_1^{\infty} q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi u}{2K},$$

$$\Theta(u) = 1 + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos \frac{n\pi u}{K},$$

$$\Theta_1(u) = 1 + 2 \sum_1^{\infty} q^{n^2} \cos \frac{n\pi u}{K},$$

ou

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}.$$

Elles jouissent d'ailleurs des propriétés données par les relations suivantes (*) :

$$\begin{aligned} H(x + K) &= H_1(x), & \Theta(x + K) &= \Theta_1(x), \\ H_1(x + K) &= -H(x), & \Theta_1(x + K) &= \Theta(x), \\ H(x + iK') &= ie^{-\frac{i\pi}{4K'}(2x+iK')} \Theta(x), & \Theta(x + iK') &= ie^{-\frac{i\pi}{4K'}(2x+iK')} H(x), \\ H_1(x + iK') &= e^{-\frac{i\pi}{4K'}(2x+iK')} \Theta_1(x), & \Theta_1(x + iK') &= e^{-\frac{i\pi}{4K'}(2x+iK')} H_1(x), \end{aligned}$$

formules dont on déduit les suivantes :

$$\begin{aligned} H(x + 2K) &= -H(x), & H_1(x + 2K) &= -H_1(x), \\ \Theta(x + 2K) &= \Theta(x), & \Theta_1(x + 2K) &= \Theta_1(x), \\ H(x + 2iK') &= -e^{-\frac{i\pi}{K'}(x+iK')} H(x), & \Theta(x + 2iK') &= -e^{-\frac{i\pi}{K'}(x+iK')} \Theta(x), \\ H_1(x + 2iK') &= e^{-\frac{i\pi}{K'}(x+iK')} H_1(x), & \Theta_1(x + 2iK') &= e^{-\frac{i\pi}{K'}(x+iK')} \Theta_1(x), \end{aligned}$$

En supposant le multiplicateur égal à l'unité, on a

$$\operatorname{sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\Theta(x)}, \quad \operatorname{cn} x = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(x)}{\Theta(x)}, \quad \operatorname{dn} x = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)},$$

ou

$$\sqrt{k} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)},$$

et l'on déduit des formules précédentes

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(x + K) &= \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}, & \operatorname{cn}(x + K) &= -k' \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x}, & \operatorname{dn}(x + K) &= \frac{k'}{\operatorname{dn} x}, \\ \operatorname{sn}(x + iK') &= \frac{1}{k} \frac{1}{\operatorname{sn} x}, & \operatorname{cn}(x + iK') &= -\frac{i}{k} \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x}, & \operatorname{dn}(x + iK') &= -i \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x}, \\ \operatorname{sn}(x + K + iK') &= \frac{1}{k} \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x}, & \operatorname{cn}(x + K + iK') &= -\frac{ik'}{k} \frac{1}{\operatorname{cn} x}, & \operatorname{dn}(x + K + iK') &= ik' \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x}, \end{aligned}$$

(*) J'ai cru utile de réunir en un même tableau les formules précédentes, que je suppose connues, et dont l'emploi est constant.

et aussi

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(x + 2K) &= -\operatorname{sn} x, & \operatorname{sn}(x + 2iK') &= \operatorname{sn} x, \\ \operatorname{cn}(x + 2K) &= -\operatorname{cn} x, & \operatorname{cn}(x + 2iK') &= -\operatorname{cn} x, \\ \operatorname{dn}(x + 2K) &= \operatorname{dn} x, & \operatorname{dn}(x + 2iK') &= -\operatorname{dn} x. \end{aligned}$$

IV. — *Fonctions doublement périodiques de deuxième espèce.*

Soit une fonction $F(x)$ satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} F(x + 2K) &= \mu F(x), \\ F(x + 2iK') &= \mu' F(x), \end{aligned}$$

où K, K', μ et μ' sont des constantes, cette fonction est, d'après une définition donnée par M. Hermite, dite doublement périodique de deuxième espèce aux périodes $2K$ et $2iK'$. μ et μ' sont les multiplicateurs correspondants à ces deux périodes.

Cette fonction F peut s'exprimer au moyen des quantités Θ et H . Soit A désignant un facteur constant

$$f(x) = A \frac{H(x + \omega)}{H(x)} e^{\lambda x}.$$

Les relations rappelées plus haut

$$\begin{aligned} H(x + 2K) &= -H(x), \\ H(x + 2iK') &= -H(x) e^{-\frac{i\pi}{K}(x + iK')}, \end{aligned}$$

donnent celles-ci

$$\begin{aligned} f(x + 2K) &= f(x) e^{2\lambda K}, \\ f(x + 2iK') &= f(x) e^{-\frac{i\pi\omega}{K} + 2i\lambda K'}, \end{aligned}$$

disposons donc de ω et λ de manière à avoir

$$\mu = e^{2\lambda K}, \quad \mu' = e^{-\frac{i\pi\omega}{K} + 2i\lambda K'}.$$

on voit que le quotient $\frac{F(x)}{f(x)}$ est ramené aux fonctions doublement périodiques ordinaires, d'où cette première formule générale

$$F(x) = f(x)\Phi(x),$$

$\Phi(x)$ étant une fonction doublement périodique ordinaire ou de première espèce.

Mais des relations

$$f(x + 2K) = \mu f(x)$$

$$f(x + 2iK') = \mu' f(x),$$

on déduit

$$f(x - 2K) = \frac{1}{\mu} f(x),$$

$$f(x - 2iK') = \frac{1}{\mu'} f(x),$$

de sorte que le produit

$$\Phi(z) = F(z)f(x - z)$$

sera quel que soit x , une fonction doublement périodique, ordinaire ou de première espèce de z .

On a en effet par hypothèse

$$F(z + 2K) = \mu F(z), \quad F(z + 2iK') = \mu' F(z),$$

et, d'après ce que nous avons dit à l'instant,

$$f(x - z - 2K) = \frac{1}{\mu} f(x - z), \quad f(x - z - 2iK') = \frac{1}{\mu'} f(x - z).$$

Cela étant, nous allons calculer les résidus de $\Phi(z)$ par les diverses valeurs de z qui le rendent infini dans l'intérieur du rectangle des périodes, et nous égalons leur somme à zéro.

Remarquons à cet effet que $f(x)$ ne devient infini qu'une fois dans le rectangle pour $x = 0$ et que son résidu a pour valeur

$$\frac{AH(\omega)}{H'(0)},$$

On peut disposer de A de façon à le faire égal à l'unité, il suffira de prendre

$$A = \frac{H'(0)}{H(\omega)}.$$

Nous poserons donc en adoptant cette détermination

$$f(x) = \frac{H'(0)H(x + \omega)}{H(\omega)H(x)} e^{\lambda x}.$$

De cette façon le résidu de $\Phi(z)$ correspondant à $z = x$ sera $-F(x)$, car le résidu de $f(x)$ pour $x = 0$ étant 1, celui de $f(x - z)$ pour $z = x$ sera -1 .

Nous aurons les résidus qui proviennent des pôles de $F(z)$ de la façon suivante :

Soit $z = a$ un de ces pôles, et posons en conséquence, ε étant infiniment petit,

$$\begin{aligned} F(a + \varepsilon) &= A\varepsilon^{-1} + A_1 D_\varepsilon \varepsilon^{-1} + A_2 D_\varepsilon^2 \varepsilon^{-1} + \dots + A_\alpha D_\varepsilon^\alpha \varepsilon^{-1} + a_0 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \dots, \\ f(x - a - \varepsilon) &= f(x - a) - \frac{\varepsilon}{1} D_x f(x - a) + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} D_x^2 f(x - a) + \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^\alpha \varepsilon^\alpha}{1 \cdot 2 \dots \alpha} D_x^\alpha f(x - a). \end{aligned}$$

Ce qui est possible puisque a est un pôle de $F(z)$ et un point ordinaire pour $f(x - z)$.

Le coefficient du terme en $\frac{1}{\varepsilon}$ dans le produit des seconds membres se trouve tout de suite en remarquant que

$$D_\varepsilon^n \varepsilon^{-1} = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \dots n}{\varepsilon^{n+1}},$$

ce coefficient aura pour expression

$$Af(x - a) + A_1 D_x f(x - a) + \dots + A_\alpha D_x^\alpha f(x - a).$$

La somme des résidus de la fonction $\Phi(z)$ égale à zéro nous conduit donc à la relation

$$F(x) = \sum [Af(x - a) + A_1 D_x f(x - a) + \dots + A_\alpha D_x^\alpha f(x - a)],$$

puisque $-F(x)$ est, ainsi que nous l'avons dit, le résidu de $\Phi(z)$ relatif au pôle $z = x$.

Telle est la formule très importante obtenue par M. Hermite pour la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de deuxième espèce ; la démonstration précédente est d'ailleurs celle qui a été donnée par l'éminent géomètre.

Dans cette formule le signe Σ se rapporte, comme il a été dit, à tous les pôles de $F(z)$ qui sont à l'intérieur du rectangle des périodes.

REMARQUE IMPORTANTE. — La fonction $f(x)$, qui sert d'élément simple dans la décomposition, est, ainsi que cela résulte de la démonstration, assujettie aux seules conditions : d'avoir les mêmes périodes et les mêmes multiplicateurs que $F(x)$, un seul infini simple dans le parallélogramme correspondant à $x = 0$ et le résidu correspondant égal à l'unité. On peut évidemment s'affranchir des deux dernières conditions (c'est-à-dire que l'infini corresponde à $x = 0$ et que le résidu correspondant soit égal à 1).

Soit en effet $\varphi(x)$ une fonction ayant les mêmes périodes et les mêmes multiplicateurs que $F(x)$ et un seul infini simple dans le parallélogramme correspondant à $x = c$ et R pour résidu correspondant, on n'aura qu'à poser $f(x) = \frac{\varphi(x+c)}{R}$, $f(x)$ remplira alors toutes les conditions primitives et l'on aura pour la formule donnant la décomposition en éléments simples

$$F(x) = \sum \left[\frac{A}{R} \varphi(x+c-a) + \frac{A_1}{R} D_x \varphi(x+c-a) + \dots + \frac{A_\alpha}{R} D_x^\alpha \varphi(x+c-a) \right];$$

sous cette forme la formule sera parfois plus avantageuse, parce qu'il arrivera assez souvent que l'on pourra trouver tout de suite une fonction $\varphi(x)$ ayant les mêmes périodes que $F(x)$ avec les mêmes multiplicateurs et un seul zéro dans le parallélogramme.

Il est souvent utile pour l'application du théorème précédent d'avoir le développement suivant les puissances croissantes de x , de $\sin x$ et de $\frac{1}{\sin x}$. Il existe des procédés particuliers pour obtenir ces développements, mais lorsque l'on n'a besoin que de quelques termes, on peut les obtenir par le procédé suivant.

Posons

$$\operatorname{sn} x = A_1 x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + A_7 x^7 + \dots$$

on a d'ailleurs

$$\frac{d \operatorname{sn} x}{dx} = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

$$\frac{d^2 \operatorname{sn} x}{dx^2} = -(1 + k^2) \operatorname{sn} x + 2k^2 \operatorname{sn}^3 x,$$

et remplaçant $\operatorname{sn} x$ par son développement dans les deux membres de cette égalité, on aura

$$5 \cdot 2A_3 x + 5 \cdot 4A_5 x^3 + 7 \cdot 6A_7 x^5 + \dots$$

$$= -(1 + k^2)A_1 x + [2k^2 A_1^2 - (1 + k^2)A_3]x^3 + [6k^2 A_1 A_3 - (1 + k^2)A_5]x^5 + \dots$$

Comme d'ailleurs pour $x = 0$, $\frac{d \operatorname{sn} x}{dx}$ est égal à 1, on a $A_1 = 1$, tenant compte de cette relation et égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, on obtient

$$A_3 = -\frac{1 + k^2}{2 \cdot 3}, \quad A_5 = \frac{1 + 14k^2 + k^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

$$A_7 = -\frac{1 + 135k^2 + 135k^4 + k^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \dots$$

Posons ensuite

$$\frac{x}{\operatorname{sn} x} = 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots$$

Nous aurons, en multipliant les deux membres par $\operatorname{sn} x$ et remplaçant dans le résultat $\operatorname{sn} x$ par le développement que l'on vient d'obtenir,

$$x = x + (a_2 + A_3) x^3 + (a_4 + a_2 A_3 + A_5) x^5 \dots$$

D'où l'on déduit en tenant compte des valeurs de $A_3, A_5 \dots$

$$a_2 = \frac{1 + k^2}{2 \cdot 3}, \quad a_4 = \frac{7 - 22k^2 + 7k^4}{5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Proposons-nous comme application du théorème précédent de retrouver l'expression de $\operatorname{sn}(x + a)$.

Remarquons pour cela que cette fonction devient infinie pour $x = -a + iK'$ et $x = -a + 2K + iK'$, de sorte que l'expression

$$\operatorname{sn}(x + a) [\operatorname{sn} x - \operatorname{sn}(iK' - a)] [\operatorname{sn} x - \operatorname{sn}(2K + iK' - a)],$$

qui peut s'écrire en la multipliant par $k^2 \operatorname{sn}^2 a$

$$f(x) = \operatorname{sn}(x + a) [k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 a - 1],$$

peut être considérée comme une fonction doublement périodique de deuxième espèce aux périodes $2K$ et $2iK'$ admettant le seul infini $x = iK'$ qui est un infini double et ayant pour multiplicateurs ceux de $\operatorname{sn} x$, -1 et 1 .

Comme d'ailleurs $\operatorname{sn} x$ n'a qu'un infini dans le parallélogramme qui est précisément iK' , c'est $\frac{\operatorname{sn} x}{R}$ qui servira d'élément simple en désignant par R le résidu de $\operatorname{sn} x$ correspondant à $x = iK'$, d'après une remarque faite plus haut.

Mais

$$\operatorname{sn}(x + iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} x}, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{1}{k},$$

la quantité qui servira d'élément simple sera donc $k \operatorname{sn} x$.

Reste à trouver la partie principale du développement de $f(x)$ pour $x = iK' + \varepsilon$. On aura

$$f(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{k \operatorname{sn}(a + \varepsilon)} \left[\frac{\operatorname{sn}^2 a}{\operatorname{sn}^2 \varepsilon} - 1 \right].$$

Mais en se bornant aux termes qui contiennent des puissances négatives de ε on pourra remplacer $\frac{1}{\operatorname{sn}^2 \varepsilon}$ par $\frac{1}{\varepsilon^2}$, car cette fonction étant paire ne contiendra pas de terme en $\frac{1}{\varepsilon}$ dans son développement.

On aura ensuite

$$\frac{1}{k \operatorname{sn}(a + \varepsilon)} = \frac{1}{k \operatorname{sn} a} - \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{k \operatorname{sn}^3 a} \varepsilon.$$

Donc

$$f(iK' + \epsilon) = \frac{\operatorname{sn} a}{k} \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{k} \frac{1}{\epsilon} = -\frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{k} \epsilon^{-1} - \frac{\operatorname{sn} a}{k} D\epsilon^{-1}.$$

Par suite

$$f(x) = -\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} x - \frac{\operatorname{sn} a}{k} D_x \operatorname{sn} x$$

ou

$$f(x) = -\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} x - \operatorname{sn} a \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x.$$

On retrouve donc la formule connue

$$\operatorname{sn}(x + a) = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x}.$$

M. Mittag Leffler a fait remarquer que le théorème de M. Hermite était en défaut lorsque l'on a

$$(1) \quad \omega = \pm 2mK \pm 2niK',$$

où m et n sont des nombres entiers positifs.

En effet, dans ce cas la valeur de la fonction $f(x)$ qui sert d'élément simple se présente sous une forme illusoire, $H(\omega)$ étant nul.

On pourrait déduire la formule pour ce cas de celle donnée par M. Hermite, mais nous allons l'établir directement en donnant la démonstration de M. Mittag-Leffler.

Nous remarquerons d'abord que si ω a la forme (1), on peut mettre les deux constantes μ et μ' sous la forme suivante

$$(2) \quad \mu = e^{2\lambda\lambda'}, \quad \mu' = e^{2\kappa\lambda'}.$$

On a en effet, dans le cas général,

$$\mu = e^{2\lambda\kappa}, \quad \mu' = e^{-\frac{i\pi\omega}{k} + 2i\lambda\kappa},$$

et remplaçant ω par sa valeur (1) on a

$$\mu = e^{+2mi\pi + 2\lambda\kappa} \left(i \mp \frac{ni\pi}{k} \right), \quad \mu' = e^{2i\kappa\lambda'} \left(i \mp \frac{ni\pi}{k} \right).$$

Mais la valeur de μ peut évidemment s'écrire aussi

$$\mu = e^{\pi \left(i \mp \frac{n i \pi}{k} \right)},$$

puisque n est entier.

La condition nécessaire et suffisante pour que la formule donnée précédemment soit en défaut est par conséquent que les deux constantes μ et μ' puissent être mises sous la forme (2).

Ceci posé :

Soit $F(z)$ une fonction uniforme quelconque avec le seul point singulier essentiel (*) $z = \frac{1}{0}$ et soit Δ la somme des résidus des différents pôles de cette fonction qui sont situés dans l'intérieur du parallélogramme $p + \xi 2K + \eta 2iK'$ (on entend par là le parallélogramme qui contient tous les points que l'on obtient en donnant à ξ et η des valeurs réelles quelconques comprises entre 0 et 1). Nous supposons de plus qu'il n'y a pas de pôles sur le contour du parallélogramme.

On a alors

$$(3) \quad \begin{cases} 2\pi i \Delta = 2K \int_0^1 [F(p + 2Kt) - F(p + 2iK' + 2Kt)] dt \\ - 2iK' \int_0^1 [F(p + 2iK't) - F(p + 2K + 2iK't)] dt. \end{cases}$$

Soit maintenant $F(x)$ une fonction doublement périodique de seconde espèce pour laquelle les deux constantes μ et μ' ont la forme (2) et mettons en supprimant l'indice de λ

$$f(z) = \frac{H'(z)}{H(z)} e^{jz}$$

et

$$F(z) = F(z) f(x - z),$$

on a alors

$$F(z + 2K) = F(z),$$

$$F(z + 2iK') = F(z), + \frac{i\pi}{K} e^{j(x-z)} F(z).$$

(*) Un point singulier essentiel $z = a$ est un point où la fonction présente si l'on pose $z = a + \varepsilon$ un développement qui contient des puissances indéfiniment croissantes de ε . Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point.

En effet, la formule

$$H(z + 2iK') = -e^{-\frac{i\pi}{K}(z + iK')} H(z)$$

donne si on en prend la dérivée logarithmique

$$\frac{H'(z + 2iK')}{H(z + 2iK')} = -\frac{i\pi}{K} + \frac{H'(z)}{H(z)},$$

et en changeant z en $z - 2iK'$

$$\frac{H'(z - 2iK')}{H(z - 2iK')} = \frac{i\pi}{K} + \frac{H'(z)}{H(z)},$$

et on a par suite

$$f(x - z - 2K) = \frac{H'(x - z)}{H(x - z)} e^{\lambda(x - z - 2K)} = \frac{1}{\mu} f(z),$$

$$f(x - z - 2iK') = \left[\frac{H'(x - z)}{H(x - z)} + \frac{i\pi}{K} \right] e^{\lambda(x - z - 2iK')} = \frac{1}{\mu'} f(z) + \frac{i\pi}{\mu' K} e^{\lambda(x - z)}.$$

En employant la formule (3) on aura alors

$$(4) \quad \Delta = -e^{\lambda x} \int_0^1 e^{-\lambda(p + 2Kt)} F(p + 2Kt) dt.$$

Supposons maintenant que a soit un des pôles de $F(z)$ situés à l'intérieur du parallélogramme et que

$$(5) \quad F(a + \varepsilon) = A\varepsilon^{-1} + A_1 D\varepsilon^{-1} + \dots + A_n D^n \varepsilon^{-1} + b + b_1 \varepsilon + \dots$$

ε étant très petit.

Comme d'ailleurs

$$f(x - a - \varepsilon) = f(x - a) - \frac{\varepsilon}{1} D_x f(x - a) + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} D_x^2 f(x - a) + \dots + \frac{(-1)^x \varepsilon^x}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot x} D_x^x f(x - a).$$

Comme

$$D^n \varepsilon^{-1} = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{\varepsilon^{n+1}},$$

le résidu de $F(z)$ relatif au pôle a sera

$$Af(x - a) + A_1 D_x f(x - a) + \dots + A_n D_x^n f(x - a).$$

Mais le résidu de $F(z)$ relatif au pôle $z = x$ sera $-F(x)$, puisque celui de $f(x - z)$ pour $z = x$ est évidemment -1 .

La formule (4) donnera alors

$$(6) \quad F(x) = A_0 e^{\lambda x} + \sum [Af(x - a) + A_1 Df(x - a) + \dots + A_n D^n(x - a)],$$

où

$$(7) \quad \dots \quad A_0 = \int_0^1 e^{-\lambda(p + 2\pi kt)} F(p + 2\pi kt) dt,$$

et la sommation embrasse tous les pôles de $F(x)$ qui sont situés en dedans du parallélogramme des périodes.

En mettant dans (6) $x + 2iK'$ au lieu de x on obtient immédiatement

$$F(x + 2iK') = e^{2\lambda iK'} F(x) - \frac{i\pi}{K} e^{\lambda x + 2\lambda iK'} \sum (A + A_1 \lambda + \dots + A_n \lambda^n) e^{-\lambda x}.$$

En effet la formule

$$\frac{H'(z + 2iK')}{H(z + 2iK')} = -\frac{i\pi}{K} + \frac{H'(z)}{H(z)}$$

donne

$$f(z + 2iK') = \mu' f(z) - \frac{i\pi}{K} \mu' e^{\lambda z}$$

(puisque $\mu' = e^{2\lambda iK'}$), en différentiant plusieurs fois cette équation, on a ensuite

$$Df(z + 2iK') = \mu' Df(z) - \frac{i\pi}{K} \lambda \mu' e^{\lambda z},$$

$$D^2 f(z + 2iK') = \mu' D^2 f(z) - \frac{i\pi}{K} \lambda^2 \mu' e^{\lambda z},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$D^n f(z + 2iK') = \mu' D^n f(z) - \frac{i\pi}{K} \lambda^n \mu' e^{\lambda z},$$

et remplaçant z par $x - a$ on tombe sur la formule donnée plus haut.

On doit donc avoir

$$(8) \quad \sum (A + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + \dots + A_n \lambda^n) e^{-\lambda a} = 0.$$

La formule (6) avec les formules adjointes (7) et (8) donnent ainsi la représentation de $F(x)$ dans tous les cas où la formule de M. Hermite est en défaut; A_0 est une constante ainsi que cela résulte de la formule (7).

Si $\lambda = 0$ $F(x)$ devient une fonction doublement périodique ordinaire ou de première espèce et la formule (6) se réduit alors à la formule très importante donnée par M. Hermite, dans la note publiée par ce géomètre éminent à la fin de la 6^e édition du *Calcul différentiel et intégral* de Lacroix.

On a donc dans le cas des fonctions doublement périodiques ordinaires ou de première espèce

$$(9) \quad F(x) = A_0 + \sum \left[A \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + A_1 D \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \dots + A_n D^n \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} \right],$$

A_0 étant, comme nous l'avons dit, une constante donnée par la formule

$$A_0 = \int_0^1 F(p + 2Kt) dt,$$

mais que l'on déterminera habituellement en donnant dans l'équation (9) une valeur particulière à x .

De plus dans ce cas l'équation (8) se réduit à

$$\sum A = 0,$$

qui donne ce résultat bien connu que dans une fonction doublement périodique ordinaire la somme des résidus, relatifs au pôles compris dans un parallélogramme élémentaire est égale à zéro.

V. — *Formule importante due à M. Halphen.*

Nous allons donner maintenant une formule donnée par M. Halphen et qui est souvent fort utile pour l'application des théorèmes de M. Hermite.

Soit $f(u)$ une fonction quelconque, et soit aussi a et v deux constantes.

Posons

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = F(u), \quad a = x - F(v),$$

et envisageons le développement suivant

$$\begin{aligned} & e^{\frac{u^2}{2} F'(v) + \frac{u^3}{3} F''(v) + \frac{u^4}{4} F'''(v)} \\ &= 1 + P_2 \frac{u^2}{1.2} + P_3 \frac{u^3}{1.2.3} + P_4 \frac{u^4}{1.2.3.4} + \dots \end{aligned}$$

en fonction des coefficients de ce développement, on obtient celui de $e^{uv} f(u+v)$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(v)} e^{uv} f(u+v) &= 1 + x \frac{u}{1} + (x^2 + P_2) \frac{u^2}{1.2} + (x^3 + 3P_2 x + P_3) \frac{u^3}{1.2.3} + \dots \\ &+ (x + P)^{(m)} \frac{u^m}{1.2 \dots m} + \dots \end{aligned}$$

Le symbole $(x + P)^{(m)}$ désigne

$$x^m + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} P_2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{m-3} P_3 + \dots$$

Cette formule se prouve très aisément ainsi :

Mettons pour un instant

$$F(u) = \varphi'(u),$$

alors

$$f(u) = e^{\varphi(u)}, \quad \frac{1}{f(u)} = e^{-\varphi(u)},$$

en conséquence on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(v)} e^{-F(v)} f(u + v) &= e^{F(u+v) - F(v) - uF'(v)} = e^{\frac{u^2}{2} F'(v) + \frac{u^3}{3} F''(v) + \dots} \\ &= 1 + P_2 \frac{u^2}{1.2} + P_3 \frac{u^3}{1.2.3} + \dots \end{aligned}$$

D'où l'on déduit, en remplaçant $F(v)$ par sa valeur $(x - a)$

$$\frac{1}{f(v)} e^{av} f(u + v) = e^{av} \left(1 + P_2 \frac{u^2}{1.2} + P_3 \frac{u^3}{1.2.3} + \dots \right).$$

ce qui en remplaçant e^{av} par son développement

$$e^{av} = 1 + \frac{xu}{1} + \frac{x^2 u^2}{1.2} + \frac{x^3 u^3}{1.2.3} + \dots$$

prouve la formule en question dans sa généralité.

L'avantage qu'on a à employer cette formule consiste en ce qu'elle amène immédiatement des fonctions doublement périodiques ordinaires dans les coefficients du développement, lorsque $f(u)$ est une fonction doublement périodique de deuxième espèce, car alors $\frac{f'(u)}{f(u)}$ est doublement périodique de première espèce.

VI. — Application de la formule précédente et du théorème de M. Hermite.

Nous avons obtenu dans une note publiée dans ce recueil, tome IX, 2^e partie, pour les coordonnées horizontales du pendule conique (en prenant pour unité la longueur du pendule),

$$x + iy = - e^{i u} \frac{\sqrt{1 - b^2} \Theta^2(0)}{H(\alpha i) \Theta_1(\beta i)} \frac{H(u - \alpha i) \Theta_1(u + \beta i)}{\Theta^2(u)}.$$

Proposons-nous de décomposer le second membre en éléments simples, il est doublement périodique de deuxième espèce aux périodes $2K$ et $2iK'$ avec les multiplicateurs correspondants

$$- e^{2iK} \quad \text{et} \quad - e^{2iK' - \frac{\pi}{K}(x - \beta)},$$

il a de plus le seul infini double $u = iK'$. On prendra donc comme élément simple

$$\frac{H(u - iK' + \omega) H'(o)}{H(\omega) H(u - iK')} e^{\mu(u - iK')} = \frac{\Theta(u + \omega) H'(o)}{H(\omega) \Theta(u)} e^{\mu u + \frac{i\pi\omega}{K} - \mu iK'},$$

et on aura pour déterminer les deux constantes μ et ω les deux équations

$$\begin{aligned} - e^{2\lambda K i} &= e^{\pi i + 2\lambda K i} = e^{2\lambda K i}, \\ - e^{-2\lambda K' - \frac{\pi}{K}(\alpha - \beta)} &= e^{\pi i - 2\lambda K' - \frac{\pi}{K}(\alpha - \beta)} = e^{2\mu K' - \frac{i\pi}{K}\omega}. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\pi i}{2K} + \lambda i, \\ \omega &= -K + iK' - (\alpha - \beta) i. \end{aligned}$$

La quantité qui servira d'élément simple sera donc

$$\frac{iH'(o) H_1(u - \alpha i + \beta i)}{\Theta(u) \Theta_1(\alpha i - \beta i)} e^{\lambda i u - \frac{\pi}{2K}(\beta - \alpha) + \lambda K'}.$$

Reste maintenant à calculer la partie du développement de

$$- e^{\lambda u i} \frac{\sqrt{1 - b^2} \Theta^2(o)}{H(\alpha i) \Theta_1(\beta i)} \frac{H(u - \alpha i) \Theta_1(u + \beta i)}{\Theta^2(u)},$$

qui, pour $u = iK' + \varepsilon$, contient des puissances négatives de ε , ce que l'on appelle *la partie principale* de ce développement.

En faisant $u = iK' + \varepsilon$ cette expression devient

$$i e^{\lambda \varepsilon i - \lambda K'} \frac{\sqrt{1 - b^2} \Theta^2(o)}{H(\alpha i) \Theta_1(\beta i)} \frac{\Theta(\varepsilon - \alpha i) H_1(\varepsilon + \beta i)}{H^2(\varepsilon)} e^{\frac{\pi}{2K}(\beta - \alpha)}.$$

Mais $\frac{1}{H^2(\varepsilon)}$ étant une fonction paire de ε , la partie principale de son développement se réduit à

$$\frac{1}{H^2(o) \varepsilon^2}.$$

On a d'ailleurs

$$\lambda i = \frac{\Theta'(xi)}{\Theta(xi)} - \frac{H_1'(\beta i)}{H_1(\beta i)}.$$

Nous aurons donc à chercher la partie principale du développement de

$$\frac{ie^{-\lambda K' + \frac{\pi}{2k}(\alpha - \beta)\sqrt{1 - b^2}} \Theta^2(o)}{H(\alpha i) \Theta_1(\beta i) H'^2(o)} \frac{1}{\epsilon^2} \cdot e^{\frac{\Theta'(xi)}{\Theta(xi)} \epsilon} \Theta(\epsilon - \alpha i) e^{-\frac{H_1'(\beta i)}{H_1(\beta i)} \epsilon} H_1(\epsilon + \beta i).$$

Considérons pour cela les deux expressions

$$e^{\frac{\Theta'(xi)}{\Theta(xi)} \epsilon} \Theta(\epsilon - \alpha i) \quad \text{et} \quad e^{-\frac{H_1'(\beta i)}{H_1(\beta i)} \epsilon} H_1(\epsilon + \beta i),$$

et appliquons-leur la formule de M. Halphen.

Pour la première on prendra

$$f(u) = \Theta(u), \quad u = \frac{\Theta'(xi)}{\Theta(xi)}, \quad v = -\alpha i,$$

d'où l'on déduit

$$F(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}, \quad x = u + F(v) = \frac{\Theta'(xi)}{\Theta(xi)} - \frac{\Theta'(\alpha i)}{\Theta(\alpha i)} = 0,$$

et l'on en conclut tout de suite que le développement de

$$e^{\frac{\Theta'(xi)}{\Theta(xi)} \epsilon} \Theta(\epsilon - \alpha i)$$

n'aura pas de terme en ϵ .

Il en sera de même pour la seconde expression et on aura en définitive pour la partie principale cherchée

$$\begin{aligned} & \frac{ie^{-\lambda K' + \frac{\pi}{2k}(\beta - \alpha)\sqrt{1 - b^2}} \Theta^2(o)}{H(\alpha i) \Theta_1(\beta i) H'^2(o)} \frac{\Theta(\alpha i) H_1(\beta i)}{\epsilon^2} \\ &= \frac{ie^{-\lambda K' + \frac{\pi}{2k}(\beta - \alpha)\sqrt{1 - b^2}}}{\epsilon^2 k \operatorname{sn} \alpha i \operatorname{dn} \beta i} \operatorname{cn} \beta i \\ &= \frac{ie^{-\lambda K' + \frac{\pi}{2k}(\beta - \alpha)\sqrt{1 - b^2}}}{k^2 \operatorname{sn} \alpha i \operatorname{sn}(K + iK' - \beta i)} D\epsilon^{-1}, \end{aligned}$$

ou bien en se reportant aux valeurs données

$$\operatorname{sn}(K + iK' - \beta i) = \sqrt{\frac{1+b}{b-a}}, \quad \operatorname{sn} \alpha i = i \sqrt{\frac{1-b}{b-a}},$$

$$k^2 = \frac{b^2 - a^2}{1 + 2ab + b^2}, \quad - \frac{1 + 2ab + b^2}{b + a} e^{-iK' + \frac{\pi}{2K}(\beta - \alpha)} D\epsilon^{-1}.$$

On aura donc enfin

$$x + iy = -i \frac{1 + 2ab + b^2}{b + a} \frac{H'(0)}{\Theta_1(\alpha i - \beta i)} D_* \left[\frac{H_1(u - \alpha i + \beta i)}{\Theta(u)} e^{\lambda i u} \right].$$

Lorsque l'on est arrivé à une expression de cette nature, si l'on veut calculer effectivement les coordonnées à un instant quelconque, on est conduit à développer en série trigonométrique la quantité périodique $\frac{H_1(u - \alpha i + \beta i)}{\Theta(u)}$, c'est le problème dont nous allons nous occuper

VII. — Développement en sens trigonométrique des quatre fonctions

$$\frac{H'(0) \Theta(x + \omega)}{H(\omega) \Theta(x)}, \quad \frac{H'(0) H'(x + \omega)}{\Theta(\omega) \Theta(x)},$$

$$\frac{H'(0) \Theta_1(x + \omega)}{H_1(\omega) \Theta(x)}, \quad \frac{H'(0) H_1(x + \omega)}{\Theta_1(\omega) \Theta(x)}.$$

Nous allons, pour atteindre ce but, suivre une marche donnée par M. Hermite.

Considérons la formule suivante qui résulte du théorème de Cauchy

$$\int_0^{2K} F(x_0 + x) dx + \int_0^{2iK'} F(x_0 + 2K + x) dx$$

$$- \int_0^{2K} F(x_0 + 2iK' + x) dx - \int_0^{2iK'} F(x_0 + x) dx = 2i\pi\rho,$$

où, les quatre intégrales étant rectilignes, ρ représente la somme

des résidus de la fonction $F(x)$ qui correspondent aux pôles situés à l'intérieur du rectangle dont les sommets ont pour affixes les quantités $x_0, x_0 + 2K, x_0 + 2K + 2iK', x_0 + 2iK'$.

Supposons que l'on ait

$$F(x + 2K) = \mu F(x), \quad F(x + 2iK') = \mu' F(x),$$

on obtiendra la relation

$$(1 - \mu') \int_0^{2K} F(x_0 + x) dx - (1 - \mu) \int_0^{2iK'} F(x_0 + x) dx = 2i\pi\rho.$$

Si l'on admet, en outre, que le multiplicateur μ soit égal à l'unité, on en conclura le résultat suivant

$$\int_0^{2K} F(x_0 + x) dx = \frac{2i\pi\rho}{1 - \mu'}.$$

Cela posé, soit en désignant par n un nombre entier quelconque

$$F(x) = \frac{H'(0) \Theta(x + \omega)}{H(\omega) \Theta(x)} e^{-\frac{i\pi nx}{k}}.$$

On aura

$$\mu = 1, \quad \mu' = e^{-\frac{i\pi}{k}(\omega + 2niK')},$$

et en limitant la constante x_0 de telle sorte que le pôle unique qui est à l'intérieur du rectangle soit $x = iK'$, nous obtiendrons pour le résidu correspondant, et par conséquent par ρ la valeur

$$\rho = e^{-\frac{i\pi}{2k}(\omega + 2niK')};$$

de là résulte pour l'intégrale définie l'expression suivante

$$\int_0^{2K} F(x_0 + x) dx = \frac{2i\pi e^{-\frac{i\pi}{2k}(\omega + 2niK')}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{k}(\omega + 2niK')}} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2K}(\omega + 2niK')}.$$

Si nous posons donc

$$\frac{H'(o) \Theta(x_0 + x + \omega)}{H(\omega) \Theta(x_0 + x)} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{n i \pi (x_0 + x)}{k}} \quad (*).$$

Le second membre représentant le développement en série trigonométrique de la fonction qui figure dans le premier.

Pour déterminer A_n on n'aura qu'à multiplier les deux membres par $e^{-\frac{n i \pi (x_0 + x)}{k}}$ et à intégrer de 0 à $2K$.

Dans l'intégrale du second membre tous les termes sont nuls, sauf celui en A_n , qui sera égal à $2KA_n$, et on aura

$$2KA_n = \int_0^{2K} F(x_0 + x) dx,$$

et par suite

$$\frac{2K}{\pi} A_n = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2K} (\omega + 2niK')}.$$

La constante x_0 , introduite pour éviter que le pôle de $F(x)$ se trouve sur le contour d'intégration, peut maintenant, sans difficulté, être supposée nulle. Nous parvenons ainsi à une première formule de développement

$$\frac{2K}{\pi} \frac{H'(o) \Theta(x + \omega)}{H(\omega) \Theta(x)} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{i \pi n x}{k}}}{\sin \frac{\pi}{2K} (\omega + 2niK')},$$

dont les trois autres résultent, comme on va le voir.

Qu'on change ω en $\omega + iK'$ on aura d'abord

$$\frac{2K}{\pi} \frac{H'(o) H(x + \omega) e^{-\frac{i \pi}{2k} x}}{\Theta(\omega) \Theta(x)} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{i \pi n x}{k}}}{\sin \frac{\pi}{2K} [\omega + (2n + 1) iK']}$$

(*) La sommation doit être étendue de $-\infty$ à ∞ pour que les coefficients des cosinus et des sinus des multiples de l'arc puissent prendre les uns et les autres des valeurs quelconques.

et par suite

$$\frac{2K}{\pi} \frac{H'(0) H(x + \omega)}{\Theta(\omega) \Theta(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{i\pi}{K}(2n+1)x}}{\sin \frac{\pi}{2K} [x + (2n+1) iK]}$$

Mettons enfin, dans les deux formules que nous venons d'établir $\omega + K$ à la place de ω , on obtiendra les suivantes qui nous restaient à trouver

$$\frac{2K}{\pi} \frac{H'(0) \Theta_1(x + \omega)}{H_1(\omega) \Theta(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{i\pi nx}{K}}}{\cos \frac{\pi}{2K} (\omega + 2niK')}$$

$$\frac{2K}{\pi} \frac{H'(0) H_1(x + \omega)}{\Theta_1(\omega) \Theta(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{i\pi}{2K}(2n+1)x}}{\cos \frac{\pi}{2K} [\omega + (2n+1) iK]}$$

On peut ensuite, ainsi que l'a également fait voir M. Hermite, déduire de ces formules celles données par Jacobi.

Pour cela réunissons les termes qui correspondent à des valeurs de l'indice égales et de signes contraires. Il vient en désignant par m un nombre qu'on fera successivement pair et impair

$$\begin{aligned} & \frac{e^{\frac{i\pi mx}{2K}}}{\sin \frac{\pi}{2K} (\omega + miK')} + \frac{e^{-\frac{i\pi mx}{2K}}}{\sin \frac{\pi}{2K} (\omega - miK')} \\ &= \frac{2 \cos \frac{m\pi x}{2K} \cos \frac{m\pi iK'}{2K} \sin \frac{\pi \omega}{2K}}{\sin \frac{\pi}{2K} (\omega + miK') \sin \frac{\pi}{2K} (\omega - miK')} \\ &= i \frac{2 \sin \frac{m\pi x}{2K} \sin \frac{m\pi iK'}{2K} \cos \frac{\pi \omega}{2K}}{\sin \frac{\pi}{2K} (\omega + miK') \sin \frac{\pi}{2K} (\omega - miK')} \end{aligned}$$

Mais si l'on pose

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$$

$$\cos \frac{m\pi i K'}{2K} = \frac{e^{-\frac{m\pi K'}{2K}} + e^{\frac{m\pi K'}{2K}}}{2} = \frac{1 + e^{-\frac{m\pi K'}{K}}}{2\sqrt{e^{-\frac{m\pi K'}{K}}}} = \frac{1 + q^m}{2\sqrt{q^m}}$$

$$\sin \frac{m\pi i K'}{2K} = \frac{e^{-\frac{m\pi K'}{2K}} - e^{\frac{m\pi K'}{2K}}}{2i} = i \frac{1 - e^{-\frac{m\pi K'}{K}}}{2\sqrt{e^{-\frac{m\pi K'}{K}}}} = i \frac{1 - q^m}{2\sqrt{q^m}}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2K}(\omega + miK') \sin \frac{\pi}{2K}(\omega - miK') &= \frac{1}{2} \cos \frac{miK'\pi}{K} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi\omega}{K} \\ &= \frac{e^{-\frac{m\pi K'}{K}} + e^{\frac{m\pi K'}{K}}}{4} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi\omega}{K} = \frac{1 - 2q^m \cos \frac{\pi\omega}{K} + q^{2m}}{4q^m}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} &\frac{e^{\frac{i\pi mx}{2K}}}{\sin \frac{\pi}{2K}(\omega + miK')} + \frac{e^{-\frac{i\pi mx}{2K}}}{\sin \frac{\pi}{2K}(\omega - miK')} \\ &= \frac{4\sqrt{q^m}(1 + q^m) \sin \frac{\pi\omega}{2K}}{1 - 2q^m \cos \frac{\pi\omega}{K} + q^{2m}} \cos \frac{m\pi x}{2K} \\ &+ \frac{4\sqrt{q^m}(1 - q^m) \cos \frac{\pi\omega}{2K}}{1 - 2q^m \cos \frac{\pi\omega}{K} + q^{2m}} \sin \frac{m\pi x}{2K}, \end{aligned}$$

et en changeant ω en $\omega + K$ on aura enfin

$$\begin{aligned} & \frac{e^{\frac{i\pi m x}{2K}}}{\cos \frac{\pi}{2K}(\omega + miK')} + \frac{e^{-\frac{i\pi m x}{2K}}}{\cos \frac{\pi}{2K}(\omega - miK')} \\ &= \frac{4\sqrt{q^m}(1+q^m)\cos \frac{\pi\omega}{2K} \cos \frac{m\pi\omega}{2K}}{1 + 2q^m \cos \frac{\pi\omega}{K} + q^{2m}} \\ &+ \frac{4\sqrt{q^m}(1-q^m)\sin \frac{\pi\omega}{2K} \sin \frac{m\pi\omega}{2K}}{1 + 2q^m \cos \frac{\pi\omega}{K} + q^{2m}}, \end{aligned}$$

en faisant $\omega = 0$ on obtiendrait le développement en série trigonométrique des fonctions elliptiques (*).

VIII. — De la fonction $Z(u)$.

La fonction $Z(u)$ est définie par l'équation suivante

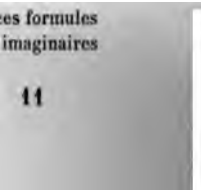
$$Z(u) = \int_0^u k^2 \operatorname{sn}^2 u \, du.$$

Considérons la fonction $k^2 \operatorname{sn}^2 u$, elle est doublement périodique avec les périodes $2K$ et $2iK'$ et a le seul infini double $u = iK'$. Cherchons la partie principale de son développement pour $u = iK' + \epsilon$, on a

$$k^2 \operatorname{sn}^2(iK' + \epsilon) = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \epsilon} = \frac{1}{\epsilon^2} + \dots$$

(le développement n'a pas de terme en $\frac{1}{\epsilon}$ puisque $\frac{1}{\operatorname{sn}^2 \epsilon}$ est une

(*) Remarquons que, d'après la manière même dont elles ont été établies, ces formules s'appliquent à toutes les valeurs réelles de x , mais seulement aux valeurs imaginaires dont le coefficient de i est compris entre $-K'$ et $+K'$.



is si l'on pose

fon. $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$
 réd

On aura $\frac{\pi i K'}{2} = \frac{e^{-\frac{\pi K'}{K}} + e^{\frac{\pi K'}{K}}}{2} = \frac{1 + e^{-\frac{\pi K'}{K}}}{2\sqrt{e^{-\frac{\pi K'}{K}}}} = \frac{1 + q^m}{2\sqrt{q^m}}$

$k^2 \operatorname{sn}^2 u = C - 1 \frac{1 - e^{-\frac{\pi K'}{K}}}{1 + e^{-\frac{\pi K'}{K}}}$
 C désignant une constante, on a

Posons $\frac{\cos \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi b}{2} + \frac{K}{\omega x} \cos \frac{m\pi b}{2} + 1}{\cos \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi b}{2} + 1} = \frac{\frac{2K}{\omega x} \cos \frac{m\pi b}{2}}{\cos \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi b}{2} + 1}$

$\frac{(\frac{2K}{\omega x} \cos \frac{m\pi b}{2} - \omega) \cos \frac{m\pi}{2}}{e^{-\frac{\pi K'}{K}}} + \frac{(\frac{2K}{\omega x} \cos \frac{m\pi b}{2} + \omega) \cos \frac{m\pi}{2}}{e^{\frac{\pi K'}{K}}}$

J et qu'un cela et en changeant ω en $\omega + K$ on aura enfin

J e: Si, en effet, on pose dans la (1) $z = \alpha i$ deviendra, en divisant par i ,

$$J' = \int_0^{K'} k^2 \operatorname{sn}^2 (K + iz) dz = \int_0^{K'} \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 iz}{\operatorname{dn}^2 iz} dz.$$

Or en iz et $\operatorname{dn} iz$ sont deux quantités réelles lorsque z est réel (on sait en effet que z variant de 0 à K' $\operatorname{sn} iz$ est de la forme αi où α est réel et croit de 0 à ∞ et que $\operatorname{cn} iz$ et $\operatorname{dn} iz$ sont deux quantités réelles et positives qui croissent de 1 à ∞).

Ou faisant $u = K$ dans la formule obtenue plus haut

$$Z(u) = Cu - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

on aura

$$J = CK, \text{ d'où } C = \frac{J}{K}.$$

On a donc enfin

$$(1) \dots\dots\dots Z(u) = \frac{J}{K} u - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

Si l'on change u en $u + 2K$, $Z(u)$ est augmenté de $2J$, si l'on change u en $u + 2iK'$, $Z(u)$ est augmenté de $\frac{2JiK'}{K} + \frac{i\pi}{K}$.

En effet, la formule

$$\Theta(x + 2iK') = - e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')} \Theta(x)$$

donne, en en prenant la dérivée logarithmique,

$$\frac{\Theta'(x + 2iK')}{\Theta(x + 2iK')} = -\frac{i\pi}{K} + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.$$

Mais si dans la formule (1) on fait $u = K + iK'$, le premier membre sera égal à $J + iJ'$ d'après la définition même de J et J' et on aura

$$(2) \quad J + iJ' = \frac{J}{K}(K + iK') - \frac{\Theta'(K + iK')}{\Theta(K + iK')} = J + \frac{iJK'}{K} + \frac{i\pi}{2K}.$$

car la formule

$$\Theta(x + K + iK') = \Theta_1(x + iK') = e^{-\frac{i\pi}{iK'}(x+iK')} \Pi_1(x)$$

donne

$$\frac{\Theta'(x + K + iK')}{\Theta(x + K + iK')} = -\frac{i\pi}{2K} + \frac{\Pi_1'(x)}{\Pi_1(x)},$$

d'où

$$\frac{\Theta'(K + iK')}{\Theta(K + iK')} = -\frac{i\pi}{2K}.$$

Mais en réduisant la formule (2) on obtient

$$KJ' - K'J = \frac{\pi}{2},$$

et on conclut de cette formule

$$\frac{2JiK'}{K} + \frac{\pi i}{K} = 2iJ';$$

si donc on change u en $u + 2iK'$, $Z(u)$ augmente de $2iJ'$.

Addition de l'argument dans les fonctions $Z(u)$.

Considérons l'expression

$$Z(u + a) - Z(u) - Z(a),$$

en appliquant aux différents termes la formule (1), on aura

$$(5) \quad Z(u + a) - Z(u) - Z(a) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} - \frac{\Theta'(u + a)}{\Theta(u + a)}.$$

Or on voit tout de suite que le second membre est une fonction doublement périodique de u , décomposée en éléments simples et qui admet les infinis iK' et $iK' - a$ et les zéros 0 et $-a$, on a donc C désignant une constante

$$Z(u + a) - Z(u) - Z(a) = C \operatorname{sn}(u + a) \operatorname{sn} u.$$

Mais en vertu de la formule (3) le résidu du second membre pour $u = iK'$ doit être égal à 1; faisons donc $u = iK' + \varepsilon$, le second membre deviendra

$$\frac{C}{k^2 \operatorname{sn}(a + \varepsilon)} \frac{1}{\operatorname{sn} \varepsilon} = \frac{C}{k^2} \frac{1}{\operatorname{sn} a} \frac{1}{\varepsilon} + \dots$$

on doit donc avoir

$$C = k^2 \operatorname{sn} a.$$

D'où la formule pour l'addition des arguments

$$Z(u + a) = Z(u) + Z(a) + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u + a).$$

Nous avons vu que lorsque le multiplicateur est quelconque, on a

$$\operatorname{sn} gu = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)}, \quad \operatorname{cn} gu = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(u)}{\Theta(u)}, \quad \operatorname{dn} gu = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}.$$

Les constantes K et K' relatives à ces fonctions étant liées à celles pour lesquelles le multiplicateur est égal à l'unité par la relation

$$K = \frac{K_1}{g} \quad K' = \frac{K'_1}{g}.$$

Mais si nous nous reportons aux séries qui définissent les fonctions Θ et H (que nous écrivons comme il suit pour indiquer que le multiplicateur g est quelconque),

$$H(z, g) = 2 \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} q^{\left(\frac{2n-1}{4}\right)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2K},$$

$$H_1(z, g) = 2 \sum_1^{\infty} q^{\left(\frac{2n-1}{4}\right)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi z}{2K},$$

$$\Theta(z, g) = 1 + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos \frac{n\pi z}{K},$$

$$\Theta_1(z, g) = 1 + 2 \sum_1^{\infty} q^{n^2} \cos \frac{n\pi z}{K},$$

où l'on a, comme on sait,

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}.$$

On voit tout de suite que ces fonctions sont liées à celles dont le multiplicateur est égal à l'unité par les relations suivantes

$$H(z, g) = H(gz), \quad H_1(z, g) = H_1(gz),$$

$$\Theta(z, g) = \Theta(gz), \quad \Theta_1(z, g) = \Theta_1(gz),$$

car les séries écrites plus haut ne changent évidemment pas si l'on remplace en même temps z par gz , K par $gK = K_1$ et K' par $gK' = K'_1$.

Or comme nous l'avons fait remarquer, les séries formées avec les constantes K_1 et K'_1 ont leur multiplicateur égal à l'unité.

Ceci posé, considérons la formule (1) que nous avons obtenue plus haut

$$(1) \quad \dots \quad Z(u) = \frac{J}{K} u - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$$

où

$$Z(u) = \int_0^u k^2 \operatorname{sn}^2 u \, du, \quad K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$J = \int_0^K k^2 \operatorname{sn}^2 u \, du = k^2 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

En différentiant cette formule (1), on en déduit

$$D_u \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{J}{K} - k^2 \operatorname{sn}^2 u.$$

Cette formule est très importante pour les applications des fonctions elliptiques, mais elle suppose, d'après la manière même dont elle a été obtenue, que le multiplicateur correspondant aux constantes K et K' est égal à 1.

Supposons au lieu de cela qu'il soit quelconque et égal à g .

Posons

$$gK = K_1, \quad gK' = K'_1,$$

le multiplicateur correspondant à K_1 et K'_1 étant alors égal à 1.

On a

$$\Theta(u, g) = \Theta'(gu),$$

et en différentiant cette équation

$$\Theta'(u, g) = g\Theta'(gu).$$

Donc

$$\frac{\Theta'(u, g)}{\Theta(u, g)} = g \frac{\Theta'(gu)}{\Theta(gu)}.$$

Puis en différentiant de nouveau

$$D_u \frac{\Theta'(u, g)}{\Theta(u, g)} = g^2 D_{gu} \frac{\Theta'(gu)}{\Theta(gu)}.$$

Mais, en posant

$$gu = z,$$

on aura

$$D_{gu} \frac{\Theta'(gu)}{\Theta(gu)} = D_z \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} = \frac{J_1}{K_1} - k^2 \operatorname{sn}^2 z,$$

où

$$K_1 = gK, \quad J_1 = \int_0^{K_1} k^2 \operatorname{sn}^2 z dz = g \int_0^K k^2 \operatorname{sn}^2(gu) du.$$

Si donc on pose

$$J = \int_0^K k^2 \operatorname{sn}^2(gu) du = \frac{k^2}{g} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

on aura

$$J_1 = gJ,$$

et aussi

$$J'_1 = gJ'$$

en posant

$$iJ' = \int_K^{K+\alpha'} k^2 \operatorname{sn}^2(gu) du.$$

Donc lorsque le multiplicateur est quelconque on a la formule très importante

$$D_u \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = g^2 \left[\frac{J}{K} - k^2 \operatorname{sn}^2(gu) \right].$$

D'après ce qui précède, la formule

$$K_1 J'_1 - K'_1 J_1 = \frac{\pi}{2}$$

devient, dans le cas où le multiplicateur est quelconque,

$$g^2 [KJ' - JK'] = \frac{\pi}{2};$$

car pour obtenir cette formule il suffit de remplacer K_1 , K'_1 , J_1 et J'_1 par leur valeurs données plus haut en fonction de K , K' , J et J' .

IX. — *Des fonctions Al de M. Weierstrass.*

Les fonctions Al de M. Weierstrass sont définies par les équations suivantes, où je suppose le multiplicateur égal à l'unité.

Posons

$$\zeta = \frac{J}{K},$$

on aura

$$Al(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2} \Theta(x)}{\Theta(o)},$$

$$Al_1(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2} H(x)}{H'(o)},$$

$$Al_2(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2} H_1(x)}{H_1(o)},$$

$$Al_3(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2} \Theta_1(x)}{\Theta_1(o)};$$

on déduit de là

$$\operatorname{sn} x = \frac{Al_1(x)}{Al(x)}, \quad \operatorname{cn} x = \frac{Al_2(x)}{Al(x)}, \quad \operatorname{dn} x = \frac{Al_3(x)}{Al(x)}.$$

Ces quatre nouvelles fonctions étant uniformes et ne devenant infinies pour aucune valeur finie de x sont holomorphes et développables en séries convergentes pour toute valeur de x . Elles sont aussi des fonctions holomorphes de k et les coefficients des séries sont des fonctions entières de k ; cela résulte de ce fait que les séries doivent être convergentes pour toute valeur de k ; on le voit également en remarquant que l'on a, en vertu de l'équation (1) du paragraphe précédent,

$$\int_0^x Z(u) du = \frac{1}{2} \zeta u^2 - L \frac{\Theta(x)}{\Theta(o)}$$

et par suite

$$Al(x) = e^{-\int_0^x dx \int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 u dx} = e^{-k^2 \frac{x^4}{3 \cdot 4} + (k^2 + k^4) \frac{x^6}{3 \cdot 5 \cdot 6}}$$

puis

$$Al_1(x) = \operatorname{sn} x Al(x), \quad Al_2(x) = \operatorname{cn} x Al(x), \quad Al_3(x) = \operatorname{dn} x Al(x).$$

Les coefficients des développements sont les suivants :

$$Al(x) = 1 - \frac{k^2}{3 \cdot 4} x^4 + \frac{k^2 + k^4}{3 \cdot 5 \cdot 6} x^6,$$

$$Al_1(x) = x - \frac{1 + k^2}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 + 4k^2 + k^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \frac{1 + 9k^2 + 9k^4 + k^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} x^7,$$

$$Al_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1 + 2k^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \frac{1 + 6k^2 + 8k^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6,$$

$$Al_3(x) = 1 - \frac{k^2}{2} x^2 + \frac{2k^2 + k^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \frac{8k^2 + 6k^4 + k^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6.$$

Ces coefficients pourraient se calculer en suivant la marche que nous venons d'indiquer à l'instant, mais on les obtient beaucoup plus simplement au moyen d'équations aux dérivées partielles par rapport à x et k que vérifient ces fonctions; nous n'établirons pas toutefois ces équations aux dérivées partielles, nous réservant de traiter une question analogue pour les fonctions σ de M. Weierstrass. Lorsque l'on ne veut obtenir que quelques coefficients des développements on peut aussi suivre une marche que nous allons indiquer plus loin.

Équations différentielles que vérifient les fonctions Al .

L'équation

$$Z(u) = \zeta u - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$$

peut s'écrire

$$\int_0^u k^2 \operatorname{sn}^2 u \, du = -D \zeta Al(u),$$

et on en déduit

$$(1) \quad \dots \quad D^2 \zeta Al(u) + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 0.$$

On a d'ailleurs

$$D^2 \zeta^{\rho} A l(u) = -\zeta + D \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

et en changeant dans cette dernière équation u en $u + K$,
 $u + iK'$, $u + K + iK'$, on en déduit

$$D^2 \zeta^{\rho} A l(u + K) = -\zeta + D \frac{\Theta_1'(u)}{\Theta_1(u)} = D^2 \zeta^{\rho} A l_3(u),$$

$$D^2 \zeta^{\rho} A l(u + iK') = -\zeta + D \frac{H'(u)}{H(u)} = D^2 \zeta^{\rho} A l_1(u),$$

$$D^2 \zeta^{\rho} A l(u + K + iK') = -\zeta + D \frac{H_1'(u)}{H_1(u)} = D^2 \zeta^{\rho} A l_2(u).$$

Ces résultats se déduisent tout de suite des relations

$$D \frac{\Theta'(u + K)}{\Theta(u + K)} = D \frac{\Theta_1'(u)}{\Theta_1(u)}, \quad D \frac{\Theta'(u + iK')}{\Theta(u + iK')} = D \frac{H'(u)}{H(u)},$$

$$D \frac{\Theta'(u + K + iK')}{\Theta(u + K + iK')} = D \frac{H_1'(u)}{H_1(u)},$$

qui sont, elles, une conséquence immédiate des formules rappelées
dans le tableau donné précédemment.

Comme d'ailleurs

$$\operatorname{sn}^2(u + iK') = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 u}, \quad \operatorname{sn}^2(u + K) = \frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u},$$

$$\operatorname{sn}^2(u + K + iK') = \frac{1}{k^2} \frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u},$$

on déduira de l'équation (1) les suivantes :

$$(2) \quad \dots \dots \dots D^2 \zeta^{\rho} A l_3(u) + \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u} = 0,$$

$$(3) \quad \dots \dots \dots D^2 \zeta^{\rho} A l_1(u) + \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} = 0,$$

$$(4) \quad \dots \dots \dots D^2 \zeta^{\rho} A l_2(u) + \frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u} = 0;$$

en remplaçant dans ces formules (1), (2), (3) et (4), $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, par leurs valeurs exprimées par les fonctions *alle* on aurait les quatre équations différentielles simultanées auxquelles satisfont ces fonctions.

Nous allons maintenant faire voir comment ces équations peuvent au besoin servir au calcul des coefficients des développements en nous bornant à la fonction $Al_1(u)$.

Posons

$$Al_1(u) = a_1 u + a_2 u^3 + a_3 u^5 + \dots$$

Nous avons obtenu précédemment

$$\frac{1}{\operatorname{sn} u} = \frac{1}{u} + \frac{1+k^2}{2 \cdot 5} u + \frac{7-22k^2+7k^4}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} u^3 + \dots$$

D'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} &= \frac{1}{u^2} + \frac{1+k^2}{5} + \frac{1-k^2+k^4}{5 \cdot 5} u^2 + \dots, \\ \int \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u} &= C - \frac{1}{u} + \frac{1+k^2}{5} u + \frac{1-k^2+k^4}{3 \cdot 5 \cdot 5} u^3 + \dots, \end{aligned}$$

C désignant une constante.

L'équation (5), intégrée une fois et où l'on remplace $Al_1(u)$ par son développement, devient donc

$$\frac{a_1 + 5a_2 u^2 + 5a_3 u^4}{a_1 u + a_2 u^3 + a_3 u^5} + C - \frac{1}{u} + \frac{1+k^2}{5} u + \frac{1-k^2+k^4}{5 \cdot 5 \cdot 5} u^3 = 0.$$

On doit d'ailleurs prendre $C = 0$ puisque tous les autres termes sont des fonctions impaires de u ; de plus, l'équation qui définit Al_1 fait voir tout de suite que $a_1 = 1$, tenant compte de ces valeurs et chassant les dénominateurs, on aura

$$5a_2 u^2 + 5a_3 u^4 + \left(\frac{1+k^2}{5} - a_2 \right) u^2 + \left(-a_3 + \frac{1+k^2}{5} a^2 + \frac{1-k^2+k^4}{5 \cdot 3 \cdot 5} \right) u^4 = 0,$$

d'où

$$a_2 = -\frac{1+k^2}{2 \cdot 5}, \quad a_3 = \frac{1+4k^2+k^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Comme nous l'avons dit, s'il s'agissait d'obtenir un nombre considérable de coefficients, il faudrait recourir à l'équation aux dérivées partielles, mais le procédé précédent peut être employé lorsqu'on n'en a besoin que d'un petit nombre.

Les fonctions A_l appartiennent comme les fonctions Θ et H à la classe des fonctions appelées par MM. Briot et Bouquet fonctions intermédiaires.

En effet, si l'on change x en $x + 2K$, elles se reproduisent multipliées par

$$\pm e^{-2i(x+K)}$$

et si l'on change x en $x + 2iK'$, elles se reproduisent multipliées par

$$\pm e^{-2i(x+iK')}$$

à cause de la solution

$$KJ' - K'J = \frac{\pi}{2}.$$

Nous avons, dans tout ce qui concerne les fonctions A_l , supposé le multiplicateur égal à l'unité; on passe tout de suite au cas du multiplicateur quelconque en remplaçant x par gx .

X. — Des fonctions p et σ de M. Weierstrass.

Les fonctions p de M. Weierstrass peuvent être définies par l'équation suivante :

$$u = \int_{\infty}^{p(u)} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2s - g_3}}.$$

Par suite de cette définition, la fonction $p(u)$ a pour $u = 0$ un infini, qui, d'après ce que nous avons vu dans le premier paragraphe, est un infini double puisque la quantité sous le radical est du 3^e degré. Comme d'ailleurs la fonction est du second ordre, elle n'a pas d'autre infini dans le parallélogramme et le résidu correspondant à $u = 0$ est nul.

Appliquons à la fonction $p(u)$ le théorème de M. Hermite pour la décomposer en éléments simples.

Pour trouver la partie principale du développement correspondant à $u = 0$, il suffit, puisque le résidu est nul, de trouver la limite de $u^2 p(u)$ pour $u = 0$, ou, ce qui revient au même, celle de

$$u \sqrt{p(u)} = \frac{\int^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}}{\frac{1}{\sqrt{z}}}$$

pour z infini.

En prenant le rapport des dérivées, on aura à trouver la limite pour z infini de

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}}{-\frac{1}{2\sqrt{z^3}}}$$

limite qui est évidemment -1 , celle de $u^2 p(u)$ est donc 1 , et l'on a pour la partie principale du développement de $p(u)$

$$\frac{1}{u^2} = -D\epsilon^{-1}.$$

Le théorème de M. Hermite nous donnera donc

$$p(u) = C - D_u \frac{H'(u)}{H(u)}.$$

Mais si le multiplicateur est quelconque et égal à γ , on a, comme nous l'avons établi,

$$D_u \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \gamma^2 \left[\frac{J}{K} - k^2 \operatorname{sn}^2(\gamma u) \right],$$

et, en changeant u en $u + iK'$,

$$D_u \frac{H'(u)}{H(u)} = \gamma^2 \left[\frac{J}{K} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2(\gamma u)} \right];$$

en tenant compte de cette relation on aura donc

$$(1) \quad \dots \quad p(u) = \frac{\gamma^2}{\operatorname{sn}^2 \gamma u} + C_1,$$

C_1 désignant une nouvelle constante.

Mais désignons par e_1, e_2 et e_3 les trois racines de l'équation

$$(2) \quad \dots \quad 4x^3 - g_2x - g_3 = 0,$$

et par $2K$ et $2iK'$ les périodes de $p(u)$, ces racines e_1, e_2 et e_3 sont les valeurs de $p(u)$ pour lesquelles la dérivée $p'(u)$ est nulle; or, d'après ce que nous avons vu dans le premier paragraphe, la fonction ayant un infini double $u = 0$, les valeurs de u qui rendent sa dérivée nulle sont

$$K, \quad iK', \quad \text{et} \quad K + iK'.$$

On a donc

$$e_1 = p(K), \quad e_2 = p(iK'), \quad e_3 = p(K + iK').$$

Comme d'ailleurs l'équation (2) donne

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

on a

$$p(K) + p(iK') + p(K + iK') = 0.$$

Mais si nous remplaçons $p(u)$ par sa valeur (1), cette dernière équation donne

$$5C_1 + \gamma^2 + \gamma^2 k^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$C_1 = -\gamma^2 \frac{1 + k^2}{5},$$

et enfin

$$(3) \quad \dots \quad p(u) = \gamma^2 \left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2 \gamma u} - \frac{1 + k^2}{5} \right].$$

On déduit tout de suite de cette équation

$$p(u, \gamma) = \gamma^2 p(\gamma u).$$

Nous remarquerons d'ailleurs que l'équation de définition

$$u = \int_{\infty}^{z^p(u)} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}$$

peut s'écrire

$$du = \frac{c^3 dz}{\sqrt{c^6} \sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}},$$

ou en posant

$$z_1 = c^2 z, \quad u_1 = \frac{u}{c},$$

$$\frac{dz_1}{\sqrt{4z_1^3 - g_2 c^4 z_1 - g_3 c^6}} = du_1,$$

d'où

$$z_1 = p(u_1, c^4 g_2, c^6 g_3).$$

Mais

$$z = \frac{z_1}{c^2} = p(u, g_2, g_3),$$

on a donc

$$c^2 p(u, g_2, g_3) = p\left(\frac{u}{c}, c^4 g_2, c^6 g_3\right).$$

Cherchons maintenant l'expression de k^2 et γ en fonction de g_2 et g_3 .

Nous avons

$$e_1 = p(K), \quad e_2 = p(iK'), \quad e_3 = p(K + iK'),$$

et, à cause de la relation $e_1 + e_2 + e_3 = 0$,

$$g_2 = -4(e_2 e_3 + e_1 e_3 + e_1 e_2) = 4(e_3^2 - e_1 e_2);$$

mais en remplaçant e_1, e_2, e_3 par leurs valeurs déduites de l'équation (3),

$$g_2 = 4\gamma^4 \left[\frac{(1 + k^2)^2}{9} - \frac{(2 - k^2)(2k^2 - 1)}{9} \right].$$

ou enfin

$$g_2 = \frac{4}{3} \gamma^4 (1 - k^2 + k^4);$$

de même

$$g_3 = 4e_1e_2e_3,$$

c'est-à-dire en remplaçant e_1 , e_2 et e_3 par leurs valeurs

$$g_3 = -\frac{4\gamma^3}{27} (1 + k^3) (2 - k^3) (2k^2 - 1).$$

Ces valeurs obtenues, il y a à trouver le développement de $p(u)$ suivant les puissances croissantes de u .

Posons

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + a_1u^2 + a_3u^4 + a_5u^6 + \dots$$

Le terme constant faisant défaut ainsi que cela résulte immédiatement de la formule (3) et du développement connu

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} = \frac{1}{u^2} + \frac{1+k^2}{3} + \dots$$

on déduit du développement écrit pour $p(u)$

$$p'(u) = -\frac{2}{u^3} + 2a_1u + 4a_3u^3 + 6a_5u^5.$$

On a d'ailleurs en vertu de l'équation de définition

$$p''(u) = 4p^3(u) - g_2p(u) - g_3;$$

en remplaçant dans cette équation les fonctions par leur développement, on aura

$$\begin{aligned} & \frac{4}{u^6} - \frac{8a_1}{u^2} - 16a_2 + (4a_1^2 - 24a_3)u^2 \\ &= \frac{4}{u^6} + \frac{12a_1}{u^2} + 12a_2 + (12a_1^2 + 12a_3)u^2 - g_2\frac{1}{u^2} - g_2a_1u^2 - g_3, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit en identifiant

$$a_1 = \frac{g_2}{20},$$

$$a_2 = \frac{g_3}{28},$$

$$a_3 = \frac{g_2^2}{1200}.$$

On a donc

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \frac{g_2^2}{1200} u^6 + \dots$$

De la fonction $\sigma(u)$ de M. Weierstrass.

Cette fonction peut être définie par l'équation

$$\frac{d^2 \zeta \sigma(u)}{du^2} = -p(u)$$

en astreignant de plus la fonction $\sigma(u)$ à être nulle et sa dérivée égale à 1 pour $u = 0$.

Partant de cette définition il sera facile d'obtenir l'expression de $\sigma(u)$ au moyen de la fonction $H(u)$.

On a, en effet,

$$p(u) = \gamma^2 \left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2 \gamma u} - \frac{1 + k^2}{5} \right]$$

Mais de la formule établie plus haut (le multiplicateur étant ici désigné par γ),

$$D \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \gamma^2 \left[\frac{J}{K} - k^2 \operatorname{sn}^2(\gamma u) \right]$$

on déduit en changeant u en $u + iK'$ et remarquant que

$$k^2 \operatorname{sn}^2 \gamma [u + iK'] = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \gamma u}$$

$$D \frac{H'(u)}{H(u)} = \gamma^2 \left[\frac{J}{K} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \gamma u} \right].$$

On aura donc

$$p(u) = \gamma^2 \frac{J}{K} - D \frac{H'(u)}{H(u)} - \gamma^2 \frac{1+k^2}{3}.$$

Donc

$$\mathcal{L} \sigma(u) = \frac{\gamma^2}{2} \left(\frac{1+k^2}{3} - \frac{J}{K} \right) u^2 + \mathcal{L} CH(u),$$

C désignant une constante.

On en déduit

$$\sigma(u) = CH(u) e^{\frac{\gamma^2}{2} \left[\frac{1+k^2}{3} - \frac{J}{K} \right] u^2}.$$

Comme, d'ailleurs, on doit avoir

$$\sigma'(0) = 1,$$

on en conclut

$$C = \frac{1}{H'(0)}$$

et on a enfin

$$\sigma(u) = \frac{H(u)}{H'(0)} e^{\left(\frac{1+k^2}{6} - \frac{J}{2K} \right) \gamma^2 u^2},$$

dans cette formule le multiplicateur de la fonction $H(u)$ est supposé, ainsi que cela résulte de ce qui précède, égal à γ ; si l'on voulait employer une fonction H dont le multiplicateur fût égal à 1, il suffirait de se servir de la relation

$$H(u, \gamma) = H(\gamma u),$$

d'où l'on déduit

$$H'(0, \gamma) = \gamma H'(0),$$

et on aurait pour $\sigma(u)$ l'expression suivante :

$$\sigma(u) = \frac{H(\gamma u)}{\gamma H'(0)} e^{\left(\frac{1+k^2}{6} - \frac{J}{2K} \right) \gamma^2 u^2}.$$

De la relation

$$Al_1(x) = e^{-\frac{J}{2K} x^2} \frac{H(x)}{H'(0)},$$

où le multiplicateur est supposé égal à 1 comme dans la

fonction H de la formule précédente, on déduit encore celle-ci,

$$\sigma(u) = \frac{1}{\gamma} e^{\frac{1+4^2}{6}\gamma^2 u^3} \text{Al}_1(\gamma \cdot u).$$

Nous donnerons plus tard une équation aux dérivées partielles, par rapport à u , g_2 et g_3 , à laquelle satisfait la fonction $\sigma(u, g_2, g_3)$ et qui est due à M. Weierstrass.

Cette équation permet de calculer très simplement les coefficients du développement de $\sigma(u)$ suivant les puissances croissantes de u , mais comme l'établissement de cette équation exige quelques développements, nous donnerons pour le moment une méthode différente pour calculer ces coefficients.

Considérons pour cela l'équation

$$\frac{d^2 \zeta^2 \sigma(u)}{du^2} = -p(u),$$

et posons $\sigma(u)$ étant impaire d'après les formules établies plus haut,

$$\sigma(u) = u + a_1 u^3 + a_2 u^5 + a_3 u^7.$$

Mais, d'après ce que nous avons vu,

$$-p(u) = -\frac{1}{u^2} - \frac{g_2}{20} u^2 - \frac{g_3}{28} u^4,$$

on aura donc

$$\begin{aligned} \frac{d \zeta^2 \sigma(u)}{du} &= \frac{1 + 5a_1 u^2 + 5a_2 u^4 + 7a_3 u^6}{u + a_1 u^3 + a_2 u^5 + a_3 u^7} \\ &= -\int p(u) du = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{5 \cdot 20} u^3 - \frac{g_3}{5 \cdot 28} u^5, \end{aligned}$$

sans qu'il y ait à introduire de constante puisque $\frac{d \zeta^2 \sigma(u)}{du}$ est impair.

On aura donc en chassant le dénominateur

$$\begin{aligned} &1 + 5a_1 u^2 + 5a_2 u^4 + 7a_3 u^6 \\ &= 1 + a_1 u^2 + \left(a_2 - \frac{g_2}{5 \cdot 20}\right) u^4 + \left(a_3 - \frac{g_3 u^2}{5 \cdot 20} - \frac{g_3}{5 \cdot 28}\right) u^6. \end{aligned}$$

En identifiant on en déduit

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{2} \frac{g_2}{5!}, \quad a_3 = -\frac{6g_3}{7!},$$

en désignant, ainsi qu'on le fait souvent, le produit $1, 2, \dots, n$ par $n!$

On a donc

$$\sigma(u) = u - \frac{1}{2} \frac{g_2}{5!} u^5 - \frac{6g_3}{7!} u^7.$$

Dans l'application des deux théorèmes de M. Hermite pour la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de 1^{re} et 2^o espèces, on peut substituer les fonctions σ aux fonctions Π , ce qui est utile dans certains cas.

Occupons-nous d'abord des fonctions doublement périodiques de 1^{re} espèce.

De la formule

$$\sigma(u) = \frac{\mathbf{H}(u)}{\mathbf{H}'(0)} e^{\left(\frac{1+k^2}{5} - \frac{1}{\mathbf{K}}\right) \gamma^2 u^2}$$

on déduit

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{\mathbf{H}'(u)}{\mathbf{H}(u)} + \left(\frac{1+k^2}{5} - \frac{1}{\mathbf{K}}\right) \gamma^2 u,$$

puis

$$D_u^n \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = D_u^n \frac{\mathbf{H}'(u)}{\mathbf{H}(u)} + \left(\frac{1+k^2}{5} - \frac{1}{\mathbf{K}}\right) \gamma^2,$$

.....

$$D_u^n \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = D_u^n \frac{\mathbf{H}'(u)}{\mathbf{H}(u)}.$$

Mais si $\mathbf{F}(u)$ est une fonction doublement périodique ordinaire le théorème de M. Hermite sous la forme où nous l'avons établi (comme cas particulier de celui de M. Mittag Leffler) donne

$$\mathbf{F}(u) = A_0 + \sum \left[A_1 \frac{\mathbf{H}'(u-a)}{\mathbf{H}(u-a)} + A_2 D \frac{\mathbf{H}'(u-a)}{\mathbf{H}(u-a)} + \dots + A_n D^n \frac{\mathbf{H}'(u-a)}{\mathbf{H}(u-a)} \right].$$

Mais si l'on remplace $\frac{H'(u-a)}{H(u-a)}$ et ses dérivées par leurs valeurs en fonction de $\frac{\sigma'(u-a)}{\sigma(u-a)}$ et de ces dérivées, on aura en tenant compte de la relation

$$\sum \Lambda = 0,$$

$$F(u) = C_1 + \sum \left[\Lambda \frac{\sigma'(u-a)}{\sigma(u-a)} + \Lambda_1 D \frac{\sigma'(u-a)}{\sigma(u-a)} + \dots + \Lambda_n D^n \frac{\sigma'(u-a)}{\sigma(u-a)} \right],$$

C_1 désignant une nouvelle constante liée à la première par la relation

$$A_0 = C_1 + \gamma^2 \left(\frac{1+k^2}{3} - \frac{j}{k} \right) \sum [A_1 - \Lambda a].$$

Le théorème s'applique donc sans changement lorsque l'on remplace les fonctions H par les fonctions σ (seulement la valeur de la constante n'est pas la même dans les deux cas).

Occupons-nous maintenant des fonctions doublement périodiques de 2^e espèce; il est évident ici que l'on peut substituer la fonction

$$\frac{\sigma(x+\omega)}{\sigma(\omega)\sigma(x)} e^{\lambda x}$$

à la fonction

$$\frac{H'(0)H(x+\omega)}{H(\omega)H(x)},$$

puisque, d'après une remarque que nous avons faite, la fonction prise pour élément simple est assujettie aux seules conditions d'avoir pour $x=0$ un infini simple qui doit être le seul dans le parallélogramme et le résidu correspondant égal à 1; or la première fonction vérifie cette condition aussi bien que la seconde.

Nous ferons remarquer que les multiplicateurs de la fonction

$$\frac{\sigma(x+\omega)}{\sigma(\omega)\sigma(x)} e^{\lambda x}$$

sont

$$\mu = e^{\gamma^2 \omega \left[\frac{1+k^2}{3} k - 1 \right] + 2j k}$$

et

$$\mu' = e^{2\gamma^2 \omega i \left[\frac{1+i^2}{3} h' - j' \right] + 2\lambda i K'}$$

en tenant compte de la relation

$$\gamma^2 [J'K - JK'] = \frac{\pi}{2},$$

μ et μ' étant les multiplicateurs de la fonction que l'on considère, on aura alors pour déterminer ω et λ les deux équations

$$\mu = e^{2\gamma^2 \omega \left[\frac{1+i^2}{3} k - j \right] + 2\lambda k}, \quad \mu' = e^{2\gamma^2 \omega i \left[\frac{1+i^2}{3} h' - j' \right] + 2\lambda i K'}$$

Transformation du premier degré dans les fonctions $p(u)$.

Supposons que l'on forme une fonction $p(u, \omega, \omega'i)$ ayant pour périodes au lieu de $2K$ et $2iK'$ les périodes 2ω et $2\omega'i$ liées aux premières par les relations

$$K = a\omega + b\omega'i, \quad iK' = c\omega + d\omega'i,$$

où les constantes a, b et c vérifient la relation

$$ad - bc = 1,$$

et cherchons l'expression de la nouvelle fonction $p(u, \omega, \omega'i)$ en fonction de l'ancienne $p(u)$.

La fonction $p(u, \omega, \omega'i)$ admet aussi les périodes $2K$ et $2iK'$, en vertu des relations qui lient K et iK' à ω et $\omega'i$. Comme d'ailleurs à cause de la relation $ad - bc = 1$ les deux parallélogrammes élémentaires ont même surface, la fonction $p(u, \omega, \omega'i)$ n'admettra qu'un seul infini double $u \equiv 0$ (*) dans le parallélogramme des périodes, en la considérant comme doublement périodique de 1^{re} espèce aux périodes $2K$ et $2iK'$. Si donc on la décompose en éléments simples en introduisant les fonctions σ au lieu des fonctions H (ces fonctions σ que l'on introduit ici

(*) $u \equiv 0$ signifie que la fonction a pour zéro $u = 0$ augmenté au besoin d'un nombre entier de périodes.

étant construites par hypothèse avec les périodes $2K$ et $2iK'$), on aura

$$p(u, \omega, \omega'i) = C - D_u \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = c + p(u)$$

puisque nous avons vu que la partie principale du développement d'une fonction $p(u, \omega, \omega'i)$ pour $u = \varepsilon$ est

$$p(\varepsilon, \omega, \omega'i) = \frac{1}{\varepsilon^2} = -D\varepsilon^{-1}.$$

Mais l'on doit avoir $C = 0$ par le développement de $p(\varepsilon)$ ne doit pas contenir de terme constant tout aussi bien que celui de $p(\varepsilon, \omega, \omega'i)$. On a donc

$$p(u, \omega, \omega'i) = p(u),$$

c'est-à-dire que la fonction $p(u)$ n'est pas altérée par une transformation du premier degré quelconque.

Lorsque nous aurons vu les transformations du premier degré dans les fonctions elliptiques ordinaires, on pourra vérifier facilement que l'expression

$$\gamma^2 \left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2 \gamma u} - \frac{1+k^2}{5} \right]$$

reste, en effet, invariable lorsque l'on y effectue une transformation du premier degré quelconque.

Détermination de k et γ en fonction de g_2 et g_3 .

Si nous nous reportons aux deux équations qui donnent g_2 et g_3 en fonction de k^2 et γ^2

$$g_2 = \frac{4}{5} \gamma^4 (1 - k^2 + k^4),$$

$$g_3 = -\frac{4\gamma^6}{27} (1 + k^2) (2 - k^2) (2k^2 - 1),$$

en éliminant γ entre ces deux relations, nous aurons pour l'équation qui détermine k^2 en fonction de g_2 et g_3

$$108g_2^3 (1 - k^2 + k^4)^5 - (1 + k^2)^2 (2 - k^2)^3 (2k^2 - 1)^3 g_3^2 = 0.$$

Cette équation est du 6^e degré en k^2 , mais elle ne change pas si l'on remplace k^2 par l'une des quantités suivantes :

$$\frac{1}{k^2}, \quad 1 - k^2, \quad \frac{1}{1 - k^2}, \quad \frac{k^2 - 1}{k^2}, \quad \frac{k^2}{k^2 - 1};$$

il résulte de là que si l'une des racines de cette équation est $k^2 = k_1^2$, les cinq autres seront

$$\frac{1}{k_1^2}, \quad 1 - k_1^2, \quad \frac{1}{1 - k_1^2}, \quad \frac{k_1^2 - 1}{k_1^2}, \quad \frac{k_1^2}{k_1^2 - 1}.$$

Il devait en être ainsi, car nous verrons que les cinq quantités que nous venons d'écrire sont les valeurs du carré des modules qui se déduisent d'un module donné k_1 par les six transformations du 1^{er} degré.

On conclut de ce que nous venons de dire que si l'équation en k^2 a une racine réelle, elles le seront toutes les six et qu'il y en aura une et une seule dans chacun des six intervalles compris entre les sept quantités suivantes :

$$-\infty, \quad -1, \quad 0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad 2, \quad +\infty.$$

En effet, si les racines sont réelles, en vertu des propriétés données plus haut, il y aura une comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$; si nous désignons pour un instant celle-là par k^2 , on aura, puisque par hypothèse $0 < k^2 < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{k^2 - 1}{k^2} &= -\frac{1}{k^2} + 1 < -1 < -\frac{1}{1 - k^2} + 1 \\ &= \frac{k^2}{k^2 - 1} < 0 < k^2 < \frac{1}{2} < 1 - k^2 < 1 < \frac{1}{1 - k^2} < 2 < \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Or, en substituant dans le premier membre de notre équation que je désigne par $f(k^2)$, -1 , $\frac{1}{2}$ et 2 on a

$$\begin{aligned} f(-1) &= 108g_3^2 > 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 108g_3^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^3 > 0, \\ f(2) &= 108g_3^2 (5)^3 > 0 \end{aligned}$$

et en substituant 0 et 1, on a

$$f(0) = 4(27g_3^2 - g_2^3) = f(1).$$

De plus pour $-\infty$ et $+\infty$ $f(k^2)$ aura aussi le signe de

$$27g_3^2 - g_2^3.$$

Les valeurs de k^2 seront donc toutes réelles et il y en aura bien une dans chacun des intervalles indiqués si l'on a

$$g_2^3 - 27g_3^2 > 0.$$

C'est-à-dire si l'équation

$$4z^3 - g_2z - g_3 = 0,$$

dont le premier membre est la quantité qui figure sous le radical dans l'intégrale qui a servi à définir $\mu(u)$, a elle-même ses racines réelles.

Donc si l'on veut pouvoir prendre pour k une valeur réelle il faudra que la réduction de l'intégrale à la forme type soit faite de façon que les racines de la quantité sous le radical soient réelles.

Les valeurs de k^2 étant réelles, il y en a, d'après ce que nous avons vu, deux qui seront comprises l'une entre 0 et $\frac{1}{2}$ et l'autre entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Mais si l'on se reporte aux valeurs de g_2 et g_3

$$g_2 = \frac{4\gamma^4}{5}(1 - k^2 + k^4),$$

$$g_3 = -\frac{4\gamma^6}{27}(1 + k^2)(2 - k^2)(2k^2 - 1),$$

on voit, à cause de la relation $g_2^3 > 27g_3^2$ que nous supposons remplie, que g_2 sera positif et par suite aussi γ^4 , puisque $1 - k^2 + k^4$ est positif pour toute valeur réelle de k^2 . Quant à γ^2 , la valeur de g_3 fait voir qu'il sera également réel mais positif pour l'une des valeurs de k^2 comprise entre 0 et 1 et négatif pour l'autre, puisque $(1 + k^2)(2 - k^2)$ est positif pour ces deux racines, et que $2k^2 - 1$ sera positif pour l'une et négatif pour l'autre.

On voit donc que si les racines de la quantité sous le radical sont réelles, on aura toujours pour k une valeur réelle et plus petite que 1 qui donnera pour γ une valeur également réelle.

L'équation qui donne k^2 en fonction de g_2 et g_3 est du 6° degré, mais comme ses racines sont réciproques, sa résolution peut se ramener à celle d'une équation du 3° degré.

Posons en effet

$$k + \frac{1}{k} = x,$$

cette équation deviendra

$$108g_3^2(x^2 - 5)^3 - x^2(2x^2 - 9)^2g_2^3 = 0,$$

ou en faisant $x^2 = y$,

$$108g_3^2(y - 5)^3 - y(2y - 9)^2g_2^3 = 0.$$

Il resterait à faire voir comment on peut réduire les intégrales dépendant des fonctions elliptiques à la forme

$$\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}.$$

Mais cette question nous entrainerait un peu loin et nous supposons que l'intégrale ait été préalablement réduite par l'une des méthodes que nous avons exposées dans ce recueil à la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

où k est réel et plus petit que 1.

Si l'on pose ensuite

$$x^2 = m(z + a),$$

l'intégrale deviendra

$$\int \frac{dz}{\sqrt{4(z+a)\left(z+a-\frac{1}{m}\right)(mk^2z + mk^2a - 1)}}.$$

On posera ensuite

$$mk^2 = 1, \quad 5a = 1 + k^2,$$

on aura par suite

$$x^2 = \frac{z}{k^2} + \frac{1+k^2}{5k^2}$$

et l'intégrale deviendra

$$\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}},$$

où

$$g_2 = \frac{4}{3}(1 - k^2 + k^4), \quad g_3 = \frac{4}{27}(2 - k^2)(1 + k^2)(1 - 2k^2).$$

Résultats qui coïncident, ainsi que cela devait être, avec ceux donnés plus haut lorsque l'on fait dans ceux-ci $\gamma = 1$.

Remarquons que lorsque les racines sont en évidence il y a souvent avantage à suivre cette voie, parce que si l'on avait ramené directement l'intégrale à la forme

$$\int \frac{dz}{\sqrt{kz^3 - g_2z - g_3}},$$

on aurait dû déduire la valeur de k^2 d'une équation du 6° degré (réductible, il est vrai, au 5°) au lieu de l'obtenir directement et d'en déduire ensuite g_2 et g_3 par des équations du premier degré (*).

XI. — Théorème de l'addition de fonctions $p(u)$.

Pour terminer ce que nous proposons de dire pour l'instant au sujet des fonctions $p(u)$ nous allons donner l'expression de $p(u + v)$ en fonction de $p(u)$, $p(v)$ et leurs dérivées.

Considérons pour cela l'expression

$$f(u) = p(u + v)[p(u) - p(v)]^2,$$

qui est une fonction doublement périodique de u aux périodes $2K$ et $2iK'$, elle admet dans le parallélogramme un seul infini $u \equiv 0$ qui est un infini quadruple, car $u = -v$ qui est un infini double pour le premier facteur est un zéro double pour le second.

(*) On trouvera plus loin dans une note la réduction directe aux fonctions $p(u)$ et l'examen du cas où $g_2^3 - 27g_3^2 < 0$.

Posons donc $u = \varepsilon$ et cherchons la partie principale du développement de $f(\varepsilon)$, on aura

$$f(\varepsilon) = \left[p(v) + \varepsilon p'(v) + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} p''(v) + \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} p'''(v) \right] \left[\frac{1}{\varepsilon^2} - p(v) \right]^2,$$

ou

$$f(\varepsilon) = \frac{p(v)}{\varepsilon^4} + \frac{p'(v)}{\varepsilon^3} + \frac{p''(v) - 4p^2(v)}{2\varepsilon^2} + \frac{p'''(v) - 12p(v)p'(v)}{6\varepsilon}.$$

Mais si l'on différentie plusieurs fois l'équation

$$p'^2(v) = 4p^3(v) - g_2 p(v) - g_3,$$

on obtient

$$2p''(v) = 12p^2(v) - g_2,$$

$$p'''(v) = 12p'(v)p(v);$$

en tenant compte de ces relations on a donc

$$f(\varepsilon) = \frac{p(v)}{\varepsilon^4} + \frac{p'(v)}{\varepsilon^3} + \frac{2p^2(v) - \frac{1}{2}g_2}{2\varepsilon^2} + \dots$$

ou

$$f(\varepsilon) = -\frac{1}{6} p(v) D^3 \varepsilon^{-1} + \frac{p'(v)}{2} D^2 \varepsilon^{-1} - \left[p^2(v) - \frac{1}{4} g_2 \right] D \varepsilon^{-1}.$$

Donc, en appliquant le théorème de M. Hermite sous la dernière forme que nous lui avons donnée, nous aurons

$$\begin{aligned} f(u) &= -\frac{p(v)}{6} D^3 \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} \\ &+ \frac{1}{2} p'(v) D^2 \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} - \left[p^2(v) - \frac{1}{4} g_2 \right] D \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + C. \end{aligned}$$

Mais l'équation qui nous a servi à définir $\sigma(u)$ donne

$$D \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = -p(u),$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} D^2 \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} &= -p'(u), \\ D^3 \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} &= -p''(u) = -6p^2(u) + \frac{1}{2} g_2 \end{aligned}$$

On aura donc

$$f(u) = p^2(u)p(v) - \frac{1}{12}g_2p(v) - \frac{1}{2}p'(v)p'(u) + p^2(v)p(u) - \frac{1}{4}g_2p(u) + C.$$

Mais $f(u)$ doit être nul pour $u = v$; on a donc

$$C = -2p^3(v) + \frac{1}{5}g_2p(v) + \frac{1}{2}p'^2(v),$$

ou à cause de

$$p'^2(v) = 4p^3(v) - g_2p(v) - g_3,$$

$$C = -\frac{1}{6}g_2p(v) - \frac{1}{2}g_3.$$

Donc enfin

$$p(u+v) = \frac{|p(u) + p(v)| \left[2p(u)p(v) - \frac{1}{2}g^2 \right] - p'(v)p'(u) - g_3}{2[p(u) - p(v)]^2}.$$

Cette formule est en défaut dans le cas où $u = v$, mais nous aurons occasion de revenir sur ce point lorsque dans la seconde partie du cours nous nous occuperons de la multiplication de l'argument dans les fonctions $p(u)$.

Si l'on changeait v en $-v$, il suffirait dans le second membre de remplacer $p'(v)$ par $-p'(v)$, car $p(u)$ est pair et par suite $p'(u)$ impair.

Un des avantages des fonctions p et σ c'est que ces fonctions présentent une lacune dans leur développement suivant les puissances croissantes de u ; cette lacune simplifie notablement le calcul des parties principales des développements, ainsi que cela a eu lieu, par exemple, dans la recherche de la formule précédente où on a pu remplacer dans $[p(\varepsilon) - p(v)]^2$, $p(\varepsilon)$ par $\frac{1}{\varepsilon^2}$, ce qui n'aurait pas été permis s'il y avait eu un terme constant dans le développement de $p(\varepsilon)$.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE PARTIE DU COURS.

Quelques propriétés des fonctions doublement périodiques	4
Identité des fonctions elliptiques définies par l'inversion des intégrales et par les fonctions H et Θ	6
Rappel de quelques formules supposées connues sur les fonctions elliptiques	11
Fonctions doublement périodiques de deuxième espèce. — Théorèmes de M. Hermite et Mittag Leffler	15
Formule importante due à M. Halphen	24
Application de la formule précédente et du théorème de M. Hermite	25
Développement en série trigonométrique des quatre fonctions	
$\frac{H'(0)\Theta(x+\omega)}{H(\omega)\Theta(x)}, \frac{H'(0)H(x+\omega)}{\Theta(\omega)\Theta(x)}, \frac{H'(0)\Theta_1(x+\omega)}{H_1(\omega)\Theta(x)}, \frac{H'(0)H_1(x+\omega)}{\Theta_1(\omega)\Theta(x)}$	28
De la fonction $Z(u)$	35
Des fonctions A_l de M. Weierstrass	40
Des fonctions p et σ de M. Weierstrass	44
Théorème de l'addition dans les fonctions p	59

SUR LES PRODUITS COMPOSÉS

D'UN GRAND NOMBRE DE FACTEURS

ET SUR LE RESTE DE LA SÉRIE DE BINET

PAR

Ph. GILBERT

Professeur à l'Université de Louvain.

1. La formule connue, dans laquelle μ est une qualité positive quelconque et n un nombre entier,

$$\mu(\mu + 1) \dots (\mu + n - 1) = \frac{\Gamma(\mu + n)}{\Gamma(\mu)},$$

peut être combinée avec la relation de Stirling

$$\begin{aligned} \Gamma(\mu + n) &= \sqrt{2\pi} (\mu + n)^{\mu+n-\frac{1}{2}} e^{-(\mu+n)} e^{\frac{1}{24(\mu+n)}} \\ &= \sqrt{2\pi} n^{\mu+n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{\mu+n-\frac{1}{2}} e^{-(\mu+n)} e^{\frac{1}{24(\mu+n)}}, \end{aligned}$$

$\varpi(\mu)$ désignant la fonction connue qui se développe par la série de Binet. Mais si l'on suppose $\mu < n$, on a

$$l.\left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{\mu+n-\frac{1}{2}} = \left(\mu + n - \frac{1}{2}\right) l.\left(1 + \frac{\mu}{n}\right),$$

et comme on a

$$l.\left(1 + \frac{\mu}{n}\right) < \frac{\mu}{n}, \quad l.\left(1 + \frac{\mu}{n}\right) > \frac{\mu}{n} - \frac{\mu^2}{2n^2},$$

il s'ensuit que l'expression

$$\left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{\mu+n-\frac{1}{2}}$$

sera comprise entre les deux suivantes :

$$e^{\mu + (\mu - \frac{1}{2})\frac{\mu}{n}}, \quad e^{\mu + (\mu - 1)\frac{\mu}{2n} - (\mu - \frac{1}{2})\frac{\mu^2}{2n^2}}$$

D'un autre côté, on sait que la valeur de la fonction $\varpi(\mu)$ est comprise entre zéro et $\frac{1}{12\mu}$, donc on a

$$0 < \varpi(\mu + n) < \frac{1}{12(\mu + n)},$$

et par des substitutions convenables, on aura

$$\Gamma(\mu + n) < \sqrt{2\pi} n^{\mu+n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{(\mu - \frac{1}{2})\frac{\mu}{n} + \frac{1}{12(\mu+n)}}$$

$$\Gamma(\mu + n) > \sqrt{2\pi} n^{\mu+n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{(\mu-1)\frac{\mu}{2n} - (\mu - \frac{1}{2})\frac{\mu^2}{2n^2}}$$

De là résultent les deux limites suivantes pour le produit considéré d'abord :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu(\mu+1)\dots(\mu+n-1) < \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\mu)} n^{\mu+n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{(\mu - \frac{1}{2})\frac{\mu}{n} + \frac{1}{12(\mu+n)}} \\ \mu(\mu+1)\dots(\mu+n-1) > \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\mu)} n^{\mu+n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{(\mu-1)\frac{\mu}{2n} - (\mu - \frac{1}{2})\frac{\mu^2}{2n^2}} \end{array} \right.$$

Lorsque n devient très grand par rapport à μ , le dernier facteur de chacune de ces expressions diffère très peu de l'unité, et l'on a approximativement

$$(2) \quad \mu(\mu+1)\dots(\mu+n-1) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\mu)} n^{\mu+n-\frac{1}{2}} e^{-n},$$

résultat que j'ai donné dans le § 1 de mon mémoire sur la fonction Γ (*Mém. de l'Acad. royale de Belgique*, t. XLI.)

Dans l'hypothèse $\mu < n$ on peut simplifier les limites ci-dessus, et écrire

$$(3) \quad \begin{cases} \mu(\mu+1)\dots(\mu+n-1) < \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\mu)} n^{\mu+n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{2n}(\mu^2-\mu+\frac{1}{6})}, \\ \mu(\mu+1)\dots(\mu+n-1) > \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\mu)} n^{\mu+n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{-\frac{\mu}{2n}}. \end{cases}$$

car les expressions $\frac{\mu^2}{2n} - \frac{\mu^3}{2n^2} = \frac{\mu^2}{2n} (1 - \frac{\mu}{n})$, $\frac{\mu^2}{4n^2}$ sont positives, de sorte qu'en supprimant ces termes dans l'exposant de e nous diminuons encore la limite inférieure (*).

2. On sait que, dans la série de Binet

$$\sigma(\mu) = \frac{1}{\mu} \int_0^1 x \left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \frac{1}{2\mu(\mu+1)} \int_0^1 x(1-x) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \frac{1}{3\mu(\mu+1)(\mu+2)} \int_0^1 x(1-x)(2-x) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \dots,$$

le reste R_n après le $n^{i\text{me}}$ terme peut être mis sous la forme

$$R_n = \sum_{k=0}^{i-\infty} \frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)\dots(\mu+k+n)} \int_0^1 \frac{x(1-x)\dots(n-x)}{\mu+k+x} \left(x - \frac{1}{2}\right) dx,$$

et j'ai donné une limite supérieure de cette quantité qui suffit pour établir la convergence de la série (**). Je me propose ici d'assigner des limites plus resserrées et d'un calcul également facile.

Désignons par S l'intégrale qui figure sous le signe Σ ; nous aurons

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x(1-x)\dots(n-x)}{\mu+k+x} \left(x - \frac{1}{2}\right) dx,$$

(*) Sur diverses expressions moins simples du produit $\mu(\mu+1)\dots(\mu+n-1)$, on peut voir JACOBI, *Journal de Crelle*, t. XII, pp. 263 et suiv.; MINDING, *Integraltafel*, p. 162; HELMLING, *Transf. und Ausmittlung best. Integr.*, pp. 1-4.

(**) Voir mon mémoire rappelé ci-dessus, § IV.

et en remplaçant dans la seconde x par $1 - x$, on trouvera sans peine

$$S = - \int_0^{\frac{1}{2}} x(1-x) \left(\frac{1}{2} - x\right) \left[\frac{(2-x) \dots (n-x)}{\mu+k+x} - \frac{(1+x)(2+x) \dots (n-1+x)}{\mu+k+1-x} \right] dx.$$

Mais, x étant, sous le signe \int , compris entre zéro et $\frac{1}{2}$, on aura

$$2-x \geq (1+x), \quad (5-x) \geq (2+x), \quad \dots, \quad (n-x) \geq n-1+x$$

$$\mu+k+x \leq \mu+k+1-x,$$

donc, des deux fractions positives qui figurent sous le signe \int , la première est supérieure à la seconde pour toutes les valeurs de x entre 0 et $\frac{1}{2}$, et par suite S a une valeur *négative*, plus petite numériquement que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-x) \left(\frac{1}{2} - x\right) \frac{(2-x) \dots (n-x)}{\mu+k+x} dx.$$

On a donc

$$(4) \quad \text{V.A. } R_n < \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1) \dots (\mu+k+n)}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-x) \left(\frac{1}{2} - x\right) \frac{(2-x) \dots (n-x)}{\mu+k+x} dx.$$

On a évidemment, *a fortiori*,

$$\text{V.A. } R_n < \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1 \cdot 2 \dots n}{(\mu+k)^2 (\mu+k+1) \dots (\mu+k+n)} \int_0^{\frac{1}{2}} x(1-x) \left(\frac{1}{2} - x\right) dx,$$

et comme cette intégrale a pour valeur $\frac{1}{4}$, on aura

$$\text{V.A. } R_n < \frac{1 \cdot 2 \dots n}{64\mu} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1) \dots (\mu+k+n)},$$

ce qui, d'après une formule de Stirling bien connue, est égal à

$$(5) \quad \text{V.A. } R_n < \frac{1}{64\mu} \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{\mu(\mu+1) \dots (\mu+n-1)}.$$

Cette inégalité peut s'écrire encore

$$\begin{aligned} \text{A. R.}_n &< \frac{1}{64\mu^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu}{1}\right)\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{\mu}{n-1}\right)} \\ &< \frac{1}{64\mu^2} \frac{1}{1 + \mu\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right)}, \end{aligned}$$

et comme on sait, d'ailleurs, que l'on a

$$(6) \quad \dots \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} > C + l.(n-1),$$

C étant la constante de Mascheroni et l. un logarithme népérien, on conclura enfin que l'on a

$$\text{A. R.}_n < \frac{1}{64\mu^2} \cdot \frac{1}{1 + C\mu + \mu l.(n-1)}.$$

Le second membre tend vers zéro lorsque n croit à l'infini, ce qui suffit pour établir la convergence. Pour des valeurs de μ comprises entre zéro et l'unité, il nous paraît difficile d'obtenir une limite supérieure plus resserrée du *Reste*, du moins en suivant cette marche. Mais si μ est > 1 , ce qui est le cas ordinaire pour l'application de la série de Binet qui convient surtout aux grandes valeurs de μ , on peut procéder autrement.

3. On peut d'abord, suivant une marche analogue à celle de M. De Tilly (*), mettre l'inégalité (4) sous la forme

$$\begin{aligned} \text{A. R.}_n &< \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(\mu + k)^2(\mu + k + n)} \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} x(1-x) \frac{\left(\frac{1}{2}-x\right) (2-x) \dots (n-x) dx}{(2+\mu+k-1)(3+\mu+k-1)\dots(n+\mu+k-1)} \end{aligned}$$

et à fortiori

$$\begin{aligned} \forall R_n &< \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(\mu+k)^2(\mu+k+n)} \int_0^{\frac{1}{2}} x(1-x) \left(\frac{1}{2}-x\right) dx \\ &< \frac{1}{64(\mu+n)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(\mu+k)^2}. \end{aligned}$$

La série est convergente et a une somme finie, donc R_n tend vers zéro lorsque n croit indéfiniment.

Ou bien, ce qui conduira à une limite plus petite et plus facile à calculer, on écrira

$$\begin{aligned} \forall R_n &< \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 2 \dots n}{(\mu+k)(\mu+k+1) \dots (\mu+k+n)} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x(1-x) \left(\frac{1}{2}-x\right) dx}{\mu+k+x} \\ &< \frac{1}{64} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 2 \dots n}{(\mu+k-1)(\mu+k) \dots (\mu+k+n)} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \dots n}{64} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(\mu-1+k)(\mu-1+k+1) \dots (\mu-1+k+n+1)} \\ &= \frac{1}{64} \cdot \frac{1 \cdot 2 \dots n}{(n+1)(\mu-1)\mu(\mu+1) \dots (\mu+n-1)}, \end{aligned}$$

toujours en vertu de la formule de Stirling déjà rappelée.

On aura donc

$$\begin{aligned} \forall R_n &< \frac{1}{64(\mu-1)(n+1)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu-1}{1}\right) \left(1 + \frac{\mu-1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{\mu-1}{n}\right)} \\ &< \frac{1}{64(\mu-1)(n+1)} \cdot \frac{1}{1 + (\mu-1) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)}, \end{aligned}$$

ou enfin, en faisant usage de la formule (6),

$$(7) \quad \forall R_n < \frac{1}{64(\mu-1)(n+1)} \cdot \frac{1}{1 + (\mu-1)C + (\mu-1)I.n}$$

Cette limite supérieure du Reste sera très commode pour des valeurs considérables de μ et de n .

4. La limite supérieure de R_n que j'avais donnée dans le mémoire cité plus haut,

$$R_n < \frac{1}{8\mu^2} \frac{1}{1 + C\mu + \mu \cdot 1 \cdot (n-1)},$$

avait été trouvée trop élevée par le savant rapporteur, qui avait proposé (*) la suivante :

$$R_n < \frac{1}{8\mu^2} \frac{\Gamma(\mu)}{(n-1)^\mu}.$$

Mais, à part une faute de calcul ($8\mu^2$ au lieu de 8μ), cette limite a le double inconvénient 1° de n'offrir aucune sécurité; 2° de supposer dans l'application μ assez petit et n très grand, ce qui est précisément l'inverse de ce qui convient, la série de Binet s'appliquant surtout pour de grandes valeurs de μ , et le nombre n des termes de la série devant être aussi petit que possible.

En effet, l'auteur, pour arriver à ce résultat, part de la formule

$$R_n < \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{8\mu^2 (\mu+1)(\mu+2) \dots (\mu+n-1)},$$

et applique à l'évaluation du numérateur et du dénominateur les formules *approchées*

$$1 \cdot 2 \dots (n-1) = \sqrt{2\pi} (n-1)^{n-\frac{1}{2}} e^{-(n-1)}$$

$$(\mu+1) \dots (\mu+n-1) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\mu \Gamma(\mu)} (n-1)^{\mu+n-\frac{1}{2}} e^{-(n-1)}.$$

Or, ces égalités ne sont approchées que si n est un très grand nombre, et dans la première on a négligé au second membre le facteur $e^{-(n-1)}$ qui est > 1 , tandis que dans la seconde on a négligé un facteur qui *peut* être moindre que l'unité. Il n'est donc pas sûr que le sens de l'inégalité ne soit pas renversé.

(*) Bull. de l'Acad. royale de Belg., 2^e série, t. XXXVI, pp. 8 et 15.

Mais on peut, en profitant d'une remarque faite plus haut, arriver par cette voie à une limite supérieure sûre et commode de la valeur absolue de R_n .

Reprenons, en effet, l'inégalité (5) et rappelons que l'on a, d'après la formule de Stirling,

$$1 \cdot 2 \dots (n-1) = \Gamma(n) = \sqrt{2\pi} n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n}},$$

d'où, $\varpi(n)$ étant $< \frac{1}{12n}$,

$$1 \cdot 2 \dots (n-1) < \sqrt{2\pi} n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n}}.$$

D'autre part, d'après la seconde des formules (5), on a

$$\mu(\mu+1) \dots (\mu+n-1) > \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\mu)} n^{\mu+n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{-\frac{\mu}{2n}};$$

on aura donc, *à fortiori*,

$$(8) \quad \dots \quad \text{VAR}_n < \frac{\Gamma(\mu)}{64\mu} \cdot \frac{1}{n^\mu} e^{\frac{1}{2n}(\mu+\frac{1}{6})}.$$

Cette formule sera vraie pour toute valeur de μ et de n , mais elle donnera une limite d'autant plus resserrée que μ et n seront plus grands, le rapport $\frac{\mu}{n}$ étant d'ailleurs assez petit. Dans l'exemple cité par le savant rapporteur, on aurait $\mu = 1$, $n = 101$,

$$\text{VAR}_n < \frac{1}{6464} e^{0,0006} = \frac{1,0006}{6464}.$$

5. La série plus générale que j'ai donnée au n° 13 du mémoire déjà cité comporte une étude du même genre. On a trouvé

$$R_n = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(\mu + \beta + k)(\mu + \beta + k + p) \dots (\mu + \beta + k + np)} \int_0^1 \frac{(\beta - x)(\beta + p - x) \dots (\beta + np - x)}{\mu + k + x} \left(\frac{1}{2} - x\right) dx.$$

β est une quantité positive arbitraire, p un nombre entier arbitraire. Les seuls facteurs qui puissent devenir négatifs sous le signe \int sont $(\frac{1}{2} - x)$ et, si $\beta < 1$, $\beta - x$. Comme d'ailleurs la valeur absolue du facteur $(\beta - x)(\frac{1}{2} - x)$ ne peut jamais surpasser celle de $\frac{1}{2}(\beta + x)$ entre $x = 0$ et $x = 1$, et que les autres facteurs sont tous positifs, on aura nécessairement

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A} \int_0^1 \frac{(\beta - x)(\beta + p - x) \dots (\beta + np - x)}{\mu + k + x} \left(\frac{1}{2} - x\right) dx \\ & < \frac{1}{2} \frac{(\beta + p)(\beta + 2p) \dots (\beta + np)}{\mu + k} \int_0^1 (\beta + x) dx \\ & = \frac{1}{2} \frac{(\beta + p)(\beta + 2p) \dots (\beta + np)}{\mu + k} \left(\beta + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

d'où

$$\mathfrak{A} R_n < \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\beta + p)(\beta + 2p) \dots (\beta + np)}{(\mu + k)(\mu + \beta + k)(\mu + \beta + k + p) \dots (\mu + \beta + k + np)},$$

et à fortiori

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} R_n & < \frac{1}{2\mu} \left(\beta + \frac{1}{2}\right) (\beta + p)(\beta + 2p) \dots (\beta + np) \\ & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(\mu + \beta + k)(\mu + \beta + k + p) \dots (\mu + \beta + k + np)}. \end{aligned}$$

Mais, d'après une formule donnée dans mon mémoire, cette inégalité revient à

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} R_n & < \frac{1}{2\mu} \left(\beta + \frac{1}{2}\right) \frac{(\beta + p)(\beta + 2p) \dots (\beta + np)}{np} \\ & \sum_{k=0}^{n-p-1} \frac{1}{(\mu + \beta + k)(\mu + \beta + k + p) \dots (\mu + \beta + k + n - 1p)}. \end{aligned}$$

d'où l'on aura, enfin,

$$\mathbf{V}R_n < \frac{1}{2\mu(\mu + \beta)} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \left(\beta + \frac{\beta}{np} \right) \\ \sum_{k=0}^{k=p-1} \frac{1}{1 + (\mu + k) \left(\frac{1}{\beta + p} + \frac{1}{\beta + 2p} + \dots + \frac{1}{\beta + n - 1p} \right)}$$

Or, on sait que la série

$$\frac{1}{\beta + p} + \frac{1}{\beta + 2p} + \dots + \frac{1}{\beta + n - 1p} + \dots$$

est divergente et a pour somme l'infini, donc la limite supérieure de R_n tend vers zéro lorsque n croit indéfiniment, ce qui suffit pour prouver la convergence de la série générale.

SUR
LA PRÉSENCE DU KOUSHITE

DANS LE SANSKRIT ET DANS L'HINDOUSTANI ⁽¹⁾

PAR

le R. P. ÉTIENNE, O. P.,

Missionnaire au *Lepers Asylum*, Cocorite (Trinidad).

Une grande méprise a maintenu l'obscurité sur la famille koushite et sur l'origine des illustres empires qui lui doivent naissance, c'est que la langue koushite n'a pas été reconnue dans un de ses premiers sièges, les Indes primitives, et que, par le plus inconcevable anachronisme, on a voulu retrouver aux premiers âges de ces contrées le *sanskrit*, le sanscrit qui n'y aborda cependant qu'avec les Aryas, et resta longtemps restreint à leur usage, et seulement dans un angle des Indes septentrionales. Pour ne citer qu'un exemple, cherchait-on le berceau des populations égyptiennes; c'est avec le sanscrit, venu près de vingt siècles après la fondation de l'empire du Nil, que l'on prétendait confronter l'égyptien ⁽²⁾. Comme de juste ces idiomes offraient peu d'analogie; et l'on en concluait que les Égyptiens n'avaient rien à faire avec les Indes, tandis que c'était cependant une langue apparentée à la leur qui, avant les Aryas, dominait sur une large portion de la péninsule. Ainsi faisait-on à l'égard des Polynésiens et d'autres peuples encore.

(1) Ce travail en suppose un autre antérieur sur l'occupation des Indes par les Koushites avant l'arrivée des Aryas. Il fait partie d'un ouvrage en voie d'achèvement sur la famille de Koush.

(2) KENRICK, *Ancient Egypt.*, t. 1, p. 107.

Dans les Indes anté-aryennes on parlait *koushite*, le primitif koushite (le dravidien du Sud et les idiomes de quelques autres populations secondaires mis à part), comme le prouvent surabondamment, non seulement le parler de toutes les colonies koushites, mais les échantillons très nombreux qui sont restés sur place, bien plus, comme le prouve la composition du sanscrit lui-même. Tard venu, le sanscrit ne fut même jamais la langue du pays, comme on a toujours l'air de le supposer. Il fut celle des Aryas restés en dehors de toute fusion avec les anciens habitants, la langue des castes supérieures, la langue savante, mais en aucun temps celle de la foule, qui dans sa grande majorité appartenait à la race autochtone. Le *prâcrit*, qui aussitôt commença à se former, ne fut pas un fils légitime du sanscrit, mais un enfant de *couleur*, un *métis*.

Les Koushites ayant occupé un immense espace dans ce pays de nombreux siècles avant les Aryas, et même, dans le principe, dominateurs de ces nouveaux venus, ne pouvaient facilement abandonner leur patrie. Ils y étaient attachés par mille liens, par ses richesses abondantes et de nature variée, que seuls ils savaient faire valoir, qu'ils échangeaient toujours avec les nations étrangères et avec les Aryas eux-mêmes, attachés par leur agriculture et les travaux accomplis sur le sol, par les avantages de leurs grandes villes, par des vaisseaux, qui leur créaient d'autres patries, de larges débouchés, sources d'opulence. On ne les aperçoit pas, et ils sont partout : on ignore s'ils furent et, cent fois plus nombreux que les Aryas, à l'heure actuelle ils forment toujours la grande masse de la population. Il était donc inévitable que leur langue se maintint longtemps et pénétrât celle des vainqueurs. C'est ce qui arriva. Le sanscrit cessa de bonne heure d'être une langue courante. Il y a là un fait capital de linguistique, sans lequel on ne se rend compte du sanscrit et des idiomes actuels de l'Inde que d'une manière très imparfaite.

Tout parsemé de koushite, ou de ce que l'on nomme à tort sémitique, le sanscrit est donc souvent inexplicable par le sanscrit lui-même, par la raison très simple qu'un certain nombre de termes ne lui appartiennent point en propre. Il n'est pas jusqu'au

Rig, dont la composition s'étend sur une longue période, en partie écoulée dans les Indes, qui ne renferme son contingent de l'idiome des *Dasyous*. Déjà les Aryas sont en rapports d'amitié avec beaucoup d'entre eux; ils les ont admis dans leurs rangs, accueillis même dans leur sacerdoce, comme ce Viçvamitra, qui se fait gloire d'être un *kauçika*, et n'en compose pas moins de beaux hymnes insérés dans le *Rig*; on commence à accepter leurs dieux, et, sur une large échelle (nous le ferons voir), leurs traditions religieuses, on achète, on vend, on emprunte de ces prêteurs « qui ne connaissent que les jours d'échéance », on imite leur industrie; ainsi devait-on, bon gré, mal gré, laisser s'infiltrer dans le sanscrit leur langue, inséparable des choses et des idées du pays.

Après avoir dépassé l'Hindou-Koush, les Aryas tombèrent dans un monde tout nouveau. La géographie et les peuples étaient nouveaux, *Hindou-Kush*, *Kapila*, *Kusa*, *Nishânas*, *Nâgas*, fils de *Kadrôu*, *Anou*, *Takshasila*, et ainsi jusqu'aux bouches de l'Indus, à *Potala*, *Abhira*, *Kusosthalî*, même jusqu'aux dernières limites, à *Kumâri* (le cap Comorin). Nouveaux dieux, nouveaux rites, nouvelles traditions, nouveaux usages, nature nouvelle, avec ses métaux à peine connus, ses pierres précieuses, ses plantes et leurs parfums, le *nard*, le *mhendi*, le *missi*, le *cinnamomum*, le *bdellium*, ses animaux, comme l'éléphant, *ibha*, qui déjà joue un grand rôle dans le *Rig*, et sert de monture aux rois (1), les paons, les singes, les serpents divins. Tout cela, c'est-à-dire les mille et mille éléments de cette sphère ignorée, avait un nom, qui n'était pas, qui ne pouvait pas être sanscrit, un nom indigène, un nom koushite. Il fallut apprendre ces noms, qui n'étaient pas seulement des noms propres, mais souvent des noms communs; on les répéta, on les adopta, et à la seconde ou troisième génération on s'imagina de bonne foi qu'ils avaient toujours été aryens. Ils eurent leur place dans les Védas, et les lexiques qui les inscrivent traitent ces mots évidemment koushites comme s'ils étaient du

(1) *Rig*, Sect. III, L. V, Hym. XI, 4.

plus pur sanscrit. Alors on s'évertua à tourmenter l'idiome pour lui faire rendre l'étymologie de noms comme *nishānas*, *nāgas*, *nala*, *ibha*, qui lui étaient totalement étrangers, et que Memphis ou Tahiti eussent bien mieux expliqués que les savants de Benarès.

Et si la langue des castes privilégiées subit un tel mélange, que l'on juge ce que fut le langage d'un vulgaire composé en très grande partie des anciens habitants.

Afin de constater que les *Koushites* des Indes parlèrent la langue *koushite* (!) et la firent partiellement accepter aux Aryas, nous n'allons pas suivre d'un bout à l'autre le sanscrit, puis l'hindoustani, l'hindoui, le bengali, etc., pour en dégager ce qu'ils renferment de la parole de Koush; nous nous contenterons de prélever un certain nombre de termes, soit dans le sanscrit, soit dans l'hindoustani, soit dans les dialectes modernes de l'Himalaya.

Faute d'apercevoir cette incorporation de l'ancienne langue dans la nouvelle, on tombe en de grandes erreurs. F. Lenormant va nous fournir un cas (¹). L'illustre archéologue pense que dès le temps de Salomon (1019-978) les Aryas avaient établi leur domination jusqu'aux bouches de l'Indus, « lorsque les flottes équipées à frais communs par le roi d'Israël et Hiram, roi de Tyr, vinrent aborder à la côte d'Ophir. » Il se fonde sur ce fait que « dans la liste des objets que la flotte de Salomon rapportait d'Ophir, l'ivoire et les singes sont désignés dans le texte hébreu de la Bible *par leur nom sanscrit*, l'ivoire étant appelé *habbi*, sanscrit *ibha* « éléphant », et le singe *koph*, sanscrit *kapi*. » Or *ibha* et *kapi* sont des locutions essentiellement koushites et qui ne devinrent sanscrites que par adoption. Lenormant, qui connaissait parfaitement les Koushites *Kapisi*, homonymes et adorateurs du singe *kapi*, établis dans les Indes occidentales bien des siècles avant l'arrivée des Aryas, aurait pu soupçonner que le nom du *kapi* relevait de la langue des *Kapisi*.

En outre, comme on embarquait à Ophir du bois de sandal

(¹) F. LENORMANT, *Histoire anc. de l'Or.*, t. III, p. 439.

et des paons, que l'auteur pense venus du Malabar, il en conclut qu'à la même date les Aryas « n'étaient pas seulement en possession des côtes, mais qu'ils avaient un commerce maritime régulier avec le Malabar. » Mais, en premier lieu, ces objets, achetés à Ophir, l'étaient, comme les précédents, des mêmes hommes; ensuite les noms du sandal et des paons, *algoummim* et *tuki*, reproduits par la Bible, sont encore koushites.

Cette origine des mots fait donc tomber toutes les conclusions. On n'est autorisé à dire, ni que les Aryas étaient descendus jusqu'aux bouches de l'Indus, ni qu'ils occupaient les côtes, ni qu'ils commerçaient avec le Malabar, ni qu'ils le faisaient avec l'Asie antérieure à l'époque de Salomon. Ce qui paraît à peu près certain, c'est qu'alors les choses persistaient dans l'état où elles avaient été de temps immémorial, c'est-à-dire que les Koushites occupaient les mêmes ports et se livraient avec leurs anciens compatriotes, les Phéniciens, aux mêmes navigations et au même négoce que par le passé, navigations et négoce qui étaient dans le génie de leur race et nullement dans celui des Aryas.

Venons à l'examen particulier de quelques termes dits sanscrits, qui ne sont pas sanscrits et ne peuvent pas l'être, mais qui sont koushites et ne peuvent pas ne pas l'être (1).

(1) C'est au lexique sanscrit de Monier Williams que vont se référer nos observations.

SANSCRIT.

1. *Gosâin*, la divinité, un saint homme. — On range ce terme sous la rubrique *go*, bœuf ou vache, pour y avoir un *go-svâmin* « possesseur de vaches ». Les vaches arrivent presque invariablement quand on traite des Aryas, mais les Aryas pas plus que leurs vaches ne sont ici absolument pour rien.

Gosâin (*Gosainyâ*, *Gosaiyân*) est uniquement appliqué à l'Être suprême, et par extension à une personne honorable, comme notre *Dominus*. Extrêmement en usage parmi les Hindous, tous les jours nous l'entendons proférer avec ce sens, sans qu'il soit jamais fait la moindre allusion à un propriétaire de bestiaux.

La nature véritable est parfaitement reproduite et élucidée par le copte et l'éthiopien, tous deux koushites.

Le copte dit : *Ghs* pour *Ghois*, *Ghoeis*, *Joeis*, *Dominus*, *Deus*, *Altissimus*. Aussi en usage pour l'homme.

La racine est *ghisi*, *jise*, extollere, exaltare, extolli, exaltari (*ghasi-hêt*, elatus corde, superbus), etc.

De son côté l'éthiopien a le verbe *geza* dominari, dont un composé, *agezea-beher* « maître du monde », reçoit le sens de *Dominus Deus*, que l'on identifie avec ὁ Κύριος et Adonai.

Privé du *g* et du *s*, le polynésien d'Hawaï est descendu à *Kei*, être élevé, glorieux.

2. *Ibha*, éléphant. — On veut tirer son nom de *i*, aller.

Quand les Aryas pénétrèrent dans les Indes, ils y trouvèrent l'éléphant, qui leur était inconnu, mais qui depuis des siècles portait déjà le nom que l'on croit sanscrit. Nous sommes assurés de ce dernier fait par les noms égyptiens et éthiopiens. La ville d'*Ab* ou *Ebo* (Éléphantine), avec cette même appellation, existait sous l'Ancien Empire, 1500 ou 2000 ans avant que les Aryas eussent vu un éléphant. Naturellement le nom de l'animal, identique à celui de la ville (*âb*, *âbu*), est aussi vieux que celui-ci en Égypte, et bien plus vieux encore dans les Indes.

Mais ce qui est à considérer, c'est que le terme égyptien, explicatif du nom du pachyderme, signifie aussi dent, ivoire, corne, ongle, ce que la Polynésie va répéter.

Les pauvres insulaires de l'océan Pacifique, n'ayant plus ni éléphant ni ivoire à désigner, et, en outre, dépourvus du *b*, sont réduits à dire :

ivi, os, corne, écaille, arête de poisson.

Dans le nom de l'os, qui s'étend à la dent et aux défenses, est l'origine du nom de l'éléphant, le *dentu*, comme l'appelle encore le sanscrit, le « père aux dents » (*fa-gnik*) suivant les Sérères (Afrique).

5. *Nāga* signifie en sanscrit, serpent, crocodile, éléphant; cheville, clou, crochet implanté dans un mur pour supporter des objets. On le donne comme dérivé du sanscrit *dah*, brûler, ce qui n'est pas admissible.

La population des *Nāgas* ou du peuple-serpent faisait partie des *Dasyous* ou ennemis qui barrèrent la route aux Aryas, et par conséquent ne pouvait être aryenne ni de nom ni de fait, mais était koushite. Encore une fois donc le mot proposé appartient à cette dernière famille et ne saurait être sanscrit.

L'étymologie se tire d'une autre appellation koushite de la *dent*, qui se porte ensuite sur les clous, crocs et chevilles, sur le crocodile, le serpent et l'éléphant.

Ég. : *najhe*, dent, *jekh*, mordre; *agô*, *akô*, destruction; *ajô*, vipère.

Pol. : *nīho* mht, *nīfo* s, dent; *nahu* mh, mordre, déchirer; *niga* s, *naheka*, *nahelo* h, serpent.

Héb. : *nāyah*, *feriil*, *vulneravit*; *nāhash*, serpent (que Gesenius, à tort, pense à sibilando dictus).

BATAK (Malaisie) : *ngigi*, malais, *gigi*, dent; *gigit*, mordre (1).

On passe naturellement de la dent aux chevilles et porte-manteaux du temps, qui paraissent avoir été demandés quelquefois aux défenses d'éléphant.

(1) Dans ce *gigi* on reconnaît le *gnik* (*fa-gnik*) du Sérère, indiqué plus haut.

L'éléphant *nāga*, comme ci-dessus pour *ibha*, se réclame de ses défenses pour trouver ici une place. L'éthiopien, qui est d'origine koushite, et n'a pas été prendre ses significations dans le sanscrit, dit tout à fait de même, *nagé* dent, ivoire, éléphant.

Que dans le terme de *nāga* on considère le serpent, ou le crocodile, ou l'éléphant, ou la dent, ou la cheville, ou encore mieux la population *pré-aryenne* des *Nāgas*, il n'y a donc rien qui puisse venir du sanscrit, et qui ne vienne directement du koushite-indien.

4. *Kadru*, brun. — On le donne comme venu du sanscrit *kav*, teindre.

Kadru était une déesse regardée comme la mère des *Nāgas* ; son nom, ainsi que celui de son peuple, les *Kadraveyas*, était donc encore pré-aryen, et la famille de Koush doit le réclamer.

Héb. : *kedar*, peau noire, de *kādar* sordidus. De là les Arabes *Kedar*, les *Cedrei*.

Rien par conséquent aux Aryas.

5. *Kapi*, singe, brun. — On le prétend issu du sansc. *kamp*, trembler (!).

Les singes *kapi*, qui pullulent dans les Indes, y furent adorés de tout temps par les Koushites. Le *kapi* avait donné son nom à une multitude d'individus, d'objets, et même au peuple des *Kapilās*.

Le mot, qui signifie brun, a son correspondant dans le pol. *kefu*, éthiop. *kehe* roux. A ce sens se rattache le nom de la Phénicie (également koushite) *kefa* ou *keft*.

La racine première doit être comme l'égyptien *kap* (hébr. *kaphar*) couvrir, cacher; hawaïen *kapulu*. On retombe dans le sens de *kadru*.

Le sanscrit n'a encore rien à voir là-dedans.

6. *Kaseru*, épine dorsale. — On le dit dérivé de *sri* blesser, avec *ka* préfixé (!).

L'égyptien *kas*, os, suivi d'un préfixe, semble bien préférable.

7. *Kumára*, enfant prince. — Prétendu venir de *ku-mára*, qui meurt facilement (!).

En polyn., suivant les dialectes, *káma* ou *táma* signifie enfant. Les chefs et pères sont (avec la pesante déplacée) *kamá*, *tamá*, du verbe *kumu*, *tumu*, engendrer. Le premier est l'engendré, le second le générateur.

En égypt., *tam*, *tamu*, jeunes gens, jeunesse, de *tamio*, engendrer.

De là les *thum*, gouverneurs actuels dans l'Hindou-Koush. Nouveau mot évidemment koushite.

8. *Kumári*, le cap Comorin. — On le rattache au précédent (!). Le polynésien est autrement vrai : *komala* agréable. Tel est en effet ce fort beau cap.

9. *Kúbara*, agréable, beau. — Sans indication d'étymologie. Ce n'est qu'une variante du précédent terme koushite.

10. *Kota*, forteresse. — Est dit venir de *kut*, courber.

Kót, en égyptien veut dire aussi forteresse; mais son étymologie est certaine, puisque le même *kót* signifie construire.

Ce sont les forteresses koushites qui à l'entrée du *Sapta-Sindhou* arrêterent les arias, et n'y ont encore aujourd'hui pas plus abandonné leur nom que leur site.

11. *Mangala*, bonheur. — Dit de *mang*, se mouvoir (!).

Il est plutôt, suivant le polynés., de *magalo*, *ma'aro*, doux, frais, agréable, assyr. *magiru*, bonheur, heureux; *magaru*, être heureux.

12. *Nala*, odeur, parfum, nard indien, lotus. — Il est rapporté au sanscrit *nada*, roseau.

Le premier sens, dont les autres ne sont que des applications, est celui d'odeur; or, le mot est précisément (avec un *n* préfixé, dont le souvenir subsiste dans la double voyelle polynésienne),

le *aala*, *ala*, d'Hawaï, odeur, parfum, odoriférant; sentir. Une foule de rois et de héros koushites ont porté ce nom du nard, inséparable de la qualification d'*indien*.

A la langue antique de l'Inde, à celle de ces rois ou héros koushites appartient donc le vocable ; et son étymologie est prise évidemment de *aala*, sentir, odeur, parfum ; car ni le nard ni le lotus ne sont des roseaux, mais bien des plantes aux plus suaves aromes.

Les lexiques sanscrits donnent aussi un *nal*, sentir, et courber ; mais ce double sens montre qu'il y a eu confusion de deux homonymes provenus de deux langues différentes.

13. *Náman*, dans le composé *kapi-náman*, encens.

Le sanscrit *náman*, qui signifie nom, n'a pas ici de sens. Mais le polynésien dit *námu s*, odeur (et *kapi*, brun), très convenable à l'encens, et à un encens probablement de couleur brune.

14. *Nida*, nid. — Indiqué de *ni* et *sad*, se reposer.

Nous préférons les rapprochements suivants, qui ont une origine koushite :

Pol. : *nofo sf*, *noho mht*, s'asseoir, siéger, nid.

Éc. : *něj*, jacere, accumbere; *ni-t*, demeure, salle.

Ass : *nadú*, poser, placer.

15. *Pota*, bateau. — Dit de *pu*, *pú*, produire (!)

La ville koushite de *Potala* « cité des vaisseaux », vers l'embouchure de l'Indus, a de beaucoup précédé les Aryas.

Pol. : *poti mt*, bateau ; sans doute de *potee*, *potaa t*. rond, ovale, d'autres dénominations étant appliquées à d'autres formes d'embarcations.

16. *Shiva* est un dieu trop particulier aux Koushites, quoique introduit postérieurement dans le brahmanisme, pour qu'il soit nécessaire de montrer que son nom n'appartient pas au sanscrit, où cependant on lui donne et une place et une étymologie de fantaisie.

17. *Savan* est le nom d'un mois, qui ne peut être que le mois koushite de *sivan*, dénommé du *shiva* qui précède.

18. *Taksh*, couper. — La ville fameuse de *Taksha-shilá* se trouvait comme place koushite sur la route des Aryas, et par conséquent ne tenait d'eux ni son nom ni la racine de ce nom (1), malgré la désinence qu'ils y ont ajoutée. Cette racine *taksh*, couper, tailler, façonner, n'est donc pas sanscrite : c'est le *tuki*, frapper, des Polynésiens, le *tekh*, frapper, des Égyptiens.

Le grand dieu artisan. égypt. *Thotou*, *Tekh*, polyn. *Tiki*, eut sans doute *Taksha-shilá* pour berceau.

Tous les dérivés du verbe *taksh* réclament naturellement la même origine, comme *takshaka* ou *takshana* ou *takshan*, etc., charpentier, forgeron, etc.

19. *Tira*, *tivra*, étain. — Rapporté à *tij*, être aigu (1).

L'étain ayant été trouvé, le bronze fabriqué, et leur commerce en activité aux mines de l'Hindou-Koush, alors que les empires de Memphis et de Babylone n'existaient pas encore, les Koushites de ces montagnes ne pouvaient manquer de leur avoir imposé un nom, lequel se répandit et avec les métaux et avec les inventeurs. Le nom de l'étain était *kas-tira*, où le premier terme *kas* s'appliquait au cuivre.

Dans un autre travail nous avons montré que l'étain, désigné comme alliage et *mélange* du cuivre dans la production importante du bronze, prenait son nom du langage koushite :

Pol. : *tara*, *tira t*, *tarare t*, mêler, remuer.

Ég. : *sterter*.

20. *Valguka*, bois de sandal. — On le dit venir de *valgu*, beau. Le bois de sandal recherché et dans le négoce des Indes, long-

(1) *La* est une terminaison samoane indiquant le lieu, comme dans *Pota-la* « le lieu des vaisseaux »; en sorte que le nom de la ville dut être fort semblable à celui que donne Ptolémée, Τάξιλα.

temps avant les Aryas, dut avoir un nom indigène préaryen. Ce qui lui donnait du prix était non sa beauté, mais son parfum, l'étymologie proposée ne peut donc être vraie. Elle a dû être fabriquée après coup pour être adaptée au sanscrit.

Malabar, *valgum*, sandal; très probablement d'une racine répondant au malais *wāngi* (samoan et futuxien *manogi*), odoriférant.

HINDOUSTANI.

Le fonds de l'Hindoustani est aussi bien koushite que sanscrit; et si l'on voulait extraire ce qui appartient à la première de ces langues, c'est un dictionnaire qu'il faudrait composer.

Nous en prendrons au hasard quelques termes.

HINDOUSTANI.	KOUSHITO-SÉMITIQUE.
<i>baithnā</i> , s'asseoir, <i>baithak</i> , siège, place.	Ég. <i>baith</i> , <i>baita</i> , et tout le sémitique; poly. <i>vai mht</i> .
<i>banānā</i> , faire, construire	Héb. (et autres lang. sémit.) <i>banah</i> , ædificavit.
<i>bo</i> , odeur	Pol. <i>po h</i> ; ég. <i>behi</i> .
<i>dār</i> , <i>dār</i> , branche	Ég. <i>tar</i> .
<i>dhi</i> , <i>dhiyā</i> , fille	Pol. <i>tei</i> , <i>teine s</i> , le plus jeune, frère ou sœur.
<i>erī</i> , talon	Ég. <i>teri</i> .
<i>ghar</i> , maison	Pol. <i>fare t</i> , <i>hale h</i> .
<i>ghatnā</i> , décroître, tomber.	» <i>gase s</i> , décroître, mourir.
<i>godnā</i> , percer, piquer	Ég. <i>ghōth</i> , <i>jōth</i> .
<i>gosāin</i> , l'Être suprême, un saint homme	» <i>Ghoeis</i> .
<i>gung</i> , <i>gūngā</i> muet	Pol. <i>gugu s</i> ; ar. 'aggun.
<i>harnī</i> , biche	Héb. <i>aran</i> , chèvre sauvage.
<i>kachlār</i> , terre basse et humide; <i>kach</i> , lie.	Pol. <i>kutao m</i> , mouiller.
<i>kātnā</i> , couper.	» <i>koti m</i> ; ar. <i>kata'</i> ; ég. <i>shat</i> .
<i>kasnā</i> , serrer, lier	Ég. <i>kōs</i> , fasciis obvolvere; pol. <i>kahe</i> , <i>kahai h</i> , ceindre, réunir.
<i>kaprā</i> , étoffe, vêtement	Pol. <i>kapela h</i> , se vêtir; <i>kapa h</i> , <i>tapa m</i> , <i>latape</i> ; ég. <i>kap</i> , couvrir.

HINDOUSTANI.

KOUSSITO-SÉMITIQUE.

<i>khoj</i> , recherche	POL.	<i>koho</i> h.
<i>koi</i> , quelqu'un	»	<i>kahi</i> h.
<i>kosh</i> , qui s'efforce	ÉC.	<i>kesas</i> .
<i>malnā</i> , frotter, oindre	POL.	<i>malī</i> h, flatter, adouci.
<i>markā</i> , couvrir	ÉC.	<i>mor</i> , <i>mour</i> .
<i>mat</i> , ne (prohibitif)	POL.	<i>mai</i> mh; ég. <i>em</i> .
<i>mot</i> , <i>moṭh</i> , faisceau	ÉC.	<i>mote</i> , <i>mout</i> , lien.
<i>moṭā</i> , gros, épais	POL.	<i>molou</i> m.
<i>mū</i> , poils	»	<i>umi</i> th, barbe.
<i>muhrā</i> , l'avant, proue	»	<i>rei mua</i> t, <i>tau mua</i> sf, proue (de <i>mua</i> , avant, et <i>rei</i> ou <i>tau</i> , bout).
<i>nahānā</i> , laver	»	<i>natu</i> m.
<i>nākā</i> , crocodile		C'est le nom du serpent <i>ndga</i> , en pol. <i>nahēka</i> h.
<i>nahnā</i> , petit	»	<i>noni</i> t.
<i>naṭ</i> , pilier, obélisque	»	<i>atii</i> m; héb. <i>ndta'</i> , dresser.
<i>nātā</i> , parenté.	»	<i>nati</i> , tribu; <i>nati moe</i> , parenté.
<i>nāṭnā</i> , fuir	»	<i>natu</i> f, partir; éth. <i>natea</i> ; ar. <i>nat</i> , héb. <i>nod</i> , fuite, d'où la terre de <i>Nod</i> où s'enfuit Caïn.
<i>pakkā</i> , mûr	ÉC.	<i>peku</i> .
<i>pakhān</i> , pierre	POL.	<i>pakea</i> mb.
<i>pāl</i> , voile	»	<i>pale</i> h.
<i>pankh</i> , alle.	»	<i>pekehu</i> m; ég. <i>tenkh</i> .
<i>par</i> , alle	»	<i>pererau</i> t.
<i>paṭakna</i> , briser	»	<i>patai</i> m, <i>puteete</i> t.
<i>paṭāk</i> , explosion	»	<i>patatu</i> s.
<i>per</i> , plante, arbre	ÉC.	<i>per</i> .
<i>pusā</i> , chat	»	<i>pasht</i> , <i>bast</i> (devenu déesse).
<i>rom</i> , homme (langue des Tziganes).	»	<i>rome</i> .
<i>ronā</i> , pleurer	POL.	<i>roi mata</i> t (<i>mata</i> , yeux).
<i>sāf</i> , pur	ÉC.	<i>sef</i> , <i>sef</i> ; ar. <i>sāf</i> .
<i>sāns</i> , respiration	»	<i>ses</i> , <i>sesi</i> .
<i>sar</i> , chef	»	<i>sar</i> , chef (dans l'Ancien Empire).
<i>singh</i> , lion	»	<i>shend</i> .
<i>sis</i> , cheveux	»	<i>ses</i> ; pol. <i>soesa</i> s, barbe.
<i>sūnghnā</i> , adorer	POL.	<i>sogi</i> s.
<i>taknā</i> , regarder	ÉC.	<i>teka</i> .
<i>thālā</i> , grand plat	POL.	<i>tanoa</i> s.
<i>thaṭṭhā</i> , jeu, plaisanterie	»	<i>tatiti</i> t.
<i>thūknā</i> , cracher	»	<i>tuha</i> m.

HINDOUSTANI.

KOUSHITO-SÉMITIQUE.

<i>thokna</i> , battre, marteler	POL.	<i>tuki</i> m.
<i>thorā</i> , un peu.	»	<i>taruri</i> t.
<i>tar</i> , partie, division	ÉG.	<i>tere</i> .
<i>tār</i> , fil	AR.	<i>tarr</i> , cordeau.
<i>ār</i> , mât.	POL.	<i>tira</i> t.
<i>ṭop</i> , couverture, <i>tapnā</i> , couvrir.	»	<i>tapoi</i> t, couverture, couvrir.
<i>tyūn</i> , coutume	»	<i>tiai</i> m.
<i>urnā</i> , voler	ÉG.	<i>her</i> ; pol. <i>rere</i> t.
<i>uṭhnā</i> , s'élever	»	<i>uthes</i> ; pol. <i>hotu</i> t.

APERÇU SOMMAIRE
SUR LES
PRINCIPAUX ACCIDENTS OROGRAPHIQUES
DE LA RÉGION DU JURA

COMPRISE ENTRE LA FAUCILLE ET LA BRESSE

PAR

l'abbé BOURGEAT.

Parmi les chaînes de montagnes de l'Europe, il en est peu dont l'orographie ait plus attiré l'attention que celle du Jura. De Saussure s'en occupe déjà dans le récit de ses voyages, Thurman en fait ensuite l'objet d'un remarquable travail, puis viennent Studer, Marcou, Parandier, Gresly, Étallon, Pidancet, Lory, Vézian, Jaccard et Favre, qui tantôt sur un point, tantôt sur un autre s'appliquent à compléter l'ébauche tracée par cet éminent géologue.

Toutefois, malgré de si nombreuses recherches il est plus d'une région de la chaîne qui n'a encore été qu'imparfaitement décrite, et de ce nombre se trouvait il y a quelques années la bande de terrain qui s'étend en forme de parallélogramme de la Faucille à la Bresse, entre les deux grandes cassures de S^t-Gergues et de Nantua. Lorsque j'en commençai l'étude, cette lacune me frappa tellement que, tout en m'occupant de sa stratigraphie, je ne négligeai rien de ce qui pouvait m'en faire mieux connaître les caractères orographiques. Aussi, bien que mes recherches sur ce dernier sujet soient encore incomplètes, j'espère que l'exposé sommaire que je vais en faire ici et que les conclusions que j'en déduis seront favorablement accueillis de la part de la Société scientifique (1).

(1) Ce petit travail était achevé et je venais d'en donner un résumé succinct à l'Académie des sciences, lorsque j'eus connaissance des remarquables travaux de M. Bertrand sur le

La région dont il s'agit mesure à peu près une cinquantaine de kilomètres de large sur 80 de long transversalement à la direction de la chaîne. Lorsqu'on l'aborde par l'ouest, on quitte le tertiaire bressan pour atteindre d'étroites bandes de Trias ou de Lias, surmontées çà et là de calcaires jurassiques, dont les plus récents n'arrivent pas au Portlandien. On arrive de là à un grand escarpement que beaucoup de géologues désignent sous le nom de falaise bressane parce qu'il domine comme une falaise élevée toute la région basse de la Bresse depuis Salins jusque plus loin que St-Amour. Son pied est presque partout formé de Lias et son entablement des couches jurassiques inférieures du Bajocien et du Bathonien sans aucune trace de dépôts sédimentaires plus récents. Lorsqu'on l'a gravi, on se trouve sur ce que l'on appelle le premier plateau et l'on peut marcher pendant 8 à 10 kilomètres normalement à la falaise sans rencontrer de Lons-le-Saunier à Salins autre chose que du jurassique inférieur. Vient alors la chaîne de l'Heute, dont quelques couches sont oxfordiennes, puis la Combe d'Ain et puis enfin toute la région des sapins, des pâturages et des lacs, où l'on s'élève par degrés de 600 à 1,600 mètres d'altitude, passant des premières assises du jurassique supérieur aux plus récentes, et du néocomien qui forme taches au fond des vallées à quelques légers nids de mollasse répandues çà et là dans la région.

C'est, comme on le voit, dans la partie la plus élevée de la chaîne que les formations sont le plus complètes; en sorte que, si de là on redescend vers la plaine en sens inverse de la marche que nous venons de suivre, le revêtement sédimentaire apparaît de

Jura bisontin et des savantes études de M Heem sur les liaisons qui existent entre les Alpes et le Jura. Des circonstances que je n'ai pas à faire connaître ici ne m'ayant pas permis de le publier alors, on a vu les connaissances orographiques de la région qui en fait l'objet s'accroître encore des intéressantes notes dont M. Bertrand a accompagné sa carte géologique de Besançon et des savants aperçus que M de Lapparent a formulés dans son *Traité de Géologie*; si bien qu'il aurait fallu en modifier sensiblement la rédaction pour tenir compte de toutes ces découvertes. Je ne l'ai pas fait néanmoins afin de conserver au travail son caractère d'originalité; mais je me réserve de le compléter et de le corriger même dans une nouvelle étude, où je ferai connaître mes recherches et où j'analyserai les travaux en question.

plus en plus aminci. Ici c'est le Portlandien qui cesse; plus à l'ouest c'est le Virgulien, plus à l'ouest encore, le Séquanien, l'Oxfordien et le Kellovien jusqu'au moment où l'on atteint les dépôts de la Grande Oolithe, du Bajocien et du Lias. Quelques observateurs ont cru ne voir là que le résultat d'une ablation qui aurait agi plus puissamment qu'ailleurs sur les assises les plus voisines de la falaise; mais il paraît difficile d'expliquer les particularités qui s'y présentent sans admettre que, très peu de temps après le dépôt de la Grande Oolithe, cette partie du Jura ne fût à l'état d'ilot ou de sel sous-marin. S'il est au moins une chose certaine, c'est que les différences observées entre les épaisseurs des sédiments y remontent à une époque fort ancienne, antérieure sans doute au modelé actuel du Jura.

Les divers accidents qui se présentent dans l'ensemble de la région se ramènent à trois groupes : les failles, les soulèvements en voûte (1) et les cassures transversales. Les failles sont plus spéciales à la plaine et au premier plateau, les soulèvements en voûte à la montagne et les cassures transversales ont le privilège de s'étendre par tronçons discontinus et parallèles de la montagne aux extrémités de la plaine (voir planche I).

Nous allons d'abord les passer en revue en faisant ressortir les caractères qui leur sont propres à chacun, puis nous examinerons les rapports qu'ils ont entre eux, et nous chercherons enfin comment on peut en expliquer l'origine.

I. — ÉTUDE DES FAILLES.

Sans parler des cassures secondaires qui masquent souvent les grandes failles et qui n'en sont qu'une dépendance, on peut compter sept failles principales dans la région qui nous occupe. Elles se succèdent à des distances graduellement décroissantes

(1) Le mot de *soulèvements* en voûte devrait être remplacé par celui de *plissements*; je le maintiens néanmoins pour ne pas changer les locutions admises. On verra plus loin que je n'admetts pas de *soulèvements verticaux*.

depuis les escarpements qui dominent la courbe d'Ain vers l'E. jusqu'aux formations tertiaires de la Bresse. Quatre d'entre elles s'observent au couchant de la grande falaise et sont propres au Bas-Jura; les trois autres appartiennent au premier plateau. Je commencerai par celles du Bas-Jura, en prenant pour ligne de repère la falaise elle-même, et j'indiquerai ensuite leurs principaux caractères.

AILLES DU BAS-JURA.

Première faille. — La plus orientale des failles du Bas-Jura s'observe au pied même de la falaise. Elle en suit la direction générale et se fait remarquer par les curieux glissements et par les ruptures multiples auxquelles elle a donné lieu. C'est en effet par suite de cette faille que quelques lambeaux d'Oolithe inférieure et de Bathonien, qui se trouvaient sur le front de la falaise, ont été projetés vers l'ouest beaucoup plus bas que les formations du Bajocien et du Lias. Telle est en particulier la pointe rocheuse sur laquelle s'élevait, au nord de Poligny, l'ancien château de Grimont. Les traces de glissements sont tellement visibles sur ce rocher, et la ligne de séparation des couches fait un angle si grand avec celle du front de la falaise, qu'il est impossible d'y voir un simple phénomène d'érosion. Ajoutons qu'en dehors des lignes de stratification vraie, on y rencontre comme sous toutes les roches qui ont subi une puissante action mécanique des lignes de faux joints, capables de tromper le géologue non prévenu. Tel est aussi le monticule qui domine Pupillien et qui est formé de Bathonien projeté sur les marnes du Lias.

Mais la partie de la falaise où ces glissements sont le mieux accusés est celle qui s'étend de Poligny vers Plasne. C'est dans cette direction en effet que se trouve la curieuse disposition du Bathonien que Pidancet a signalée depuis longtemps dans une note à la Société d'Agriculture de Poligny. Elle consiste en ce que ce terrain qui recouvre le Bajocien au voisinage de Barretaine paraît au contraire presque recouvert par lui dans les escar-

pements qui dominent le territoire de Montevillards et de Miery. Quant aux cassures, elles sont tellement nombreuses dans cette faille que souvent celle-ci se perd au milieu d'elles. Pidancet nous a représenté celles qu'il a pu observer dans le bois de Vaivre entre Poligny et S^t-Lothain. Elles sont au nombre de cinq et l'on ne saurait dire quelle est celle d'entre elles qui est la plus importante. Mais à partir de là, elles diminuent de nombre; on n'en compte plus que deux, tant au nord de Buville qu'au sud de S^t-Lothain; après quoi, dans l'une comme dans l'autre direction, la faille reprend son unité et s'accuse très bien soit au levant de Villette, soit au levant de S^t-Lamain. De grandes sources, telles que celles de la Glantine, de l'Orhain, de la Seille, etc., la jalonnent de Poligny jusque vers Lons-le-Saunier.

Seconde faille. — La pointe nord-est de la seconde faille commence à se montrer dans le voisinage de Villeneuve, où elle met en contact le Trias avec les formations supérieures du Lias; puis elle se suit parallèlement à la précédente par les bois de S^t-Cyr, le territoire de l'Abergement-le-Petit et les granges Longin, dans la direction de Montchauvier vers le S.-O. On la reconnaît à quelques sources, mais surtout à la grande bande d'Infra-Lias qui la borde au levant et qui, impropre à la culture, à raison de sa texture gréseuse, forme le sous-sol des principales forêts de la plaine.

Troisième faille. — La troisième faille s'observe très bien vers le S.-O., près du village de Monchauvrot, où l'on voit les marnes de Keuper en contact avec les calcaires à Gryphées. Elle passe ensuite au levant de Toulouse et de Montholier, puis à l'Abergement-le-Grand, et se poursuit par Vadans jusqu'à S^t-Cyr. La bande de terrain qu'elle soulève est notablement réduite à Montchauvrot; elle s'élargit en vue de Monay et de l'Abergement-le-Grand et s'atténue de nouveau vis-à-vis Vadans. Sur cette bande, les forêts ne se succèdent pas comme sur la précédente, parce que l'Infra-Lias y est notablement moins visible. Mais en retour les formations liasiques affleurent largement et se trouvent aussi

complètes qu'elles peuvent l'être dans la plaine ; il n'y a pas seulement du calcaire à Gryphées comme dans la bande précédente, mais on y rencontre encore les marnes du Lias moyen et peut-être un peu de Lias supérieur. Il s'ensuit une plus grande fertilité du sol ; aussi voit-on reparaitre déjà près de Vadans et de l'Abergement les vignes devenues si rares au nord de Grozon. Les sources qui s'en échappent ont un plus fort débit que sur la précédente ; mais elles ne se transforment pas toutes en ruisseaux ; quelques-unes donnent des eaux croupissantes ; et c'est ainsi que s'expliquent les deux petits marais que l'on rencontre l'un au sud de l'Abergement-le-Grand, l'autre au couchant de Brainans.

Quatrième faille. — La quatrième faille se montre sous la forme d'un soulèvement en voûte, qui se serait brisé avec dénivellation en faveur de la lèvre qui regarde le couchant. L'action mécanique n'y a donc pas affecté une seule, mais deux bandes de terrain, dont la plus orientale est dans les conditions des précédentes, tandis que la plus occidentale est très étrangement contournée. Elle atteint le Keuper, le Lias, le Bajocien, le Bathonien et jusqu'aux formations coralliennes du voisinage de Sellières. L'axe suivant lequel la voûte s'est rompue passerait au couchant de Toulouse, à Monay, à Montholier et à St-Pierre les Mathenay. Mais comme la première faille, cette dernière se résout vers son milieu en cassures parallèles qui donnent un relief extrêmement varié à la région comprise entre Montholier et Molamboz.

Les couches atteintes dans la partie méridionale de cette faille appartiennent surtout aux formations du Lias et du Jurassique. Les eaux pluviales, trouvant là des couches perméables, s'engagent dans le sol jusqu'à la nappe aquifère des marnes liasiques d'où elles jaillissent en sources régulières. Telle est l'explication qu'il faut donner des ruisseaux qu'on voit naître à Toulouse, à Monay et au sud de Montholier. Plus au nord les formations keupériennes et liasiques deviennent prédominantes, l'eau pluviale ne produit plus que des marais. C'est également dans la région la plus méridionale que la culture offre le plus de variétés. Toulouse et Monay se distinguent facilement sous ce rapport de Montholier et de l'Abergement.

FAILLES DE L'EST DE LA FALAISE.

Première faille. — La plus occidentale des failles de l'est de la falaise est très nettement accusée dans la vallée de Baume, où l'on voit le Lias d'un des flancs de la vallée porté à la hauteur du Bajocien. Elle se continue de là vers le nord-est par derrière Château-Châlon, Champvaux, Combe-Froide, les Grands-Molevaux et la Châtelaine, ramenant sur plusieurs points du premier plateau les assises du Bajocien au niveau de la Grande Oolithe et donnant lieu près de Molain à un puissant escarpement. Vers le S.-O. sa trace se perd quelque temps, mais on la retrouve dans le voisinage de Macornay où elle donne lieu aux ruptures multiples signalées là par le frère Ogérien. Le point où elle est le mieux visible est le bourg de Château-Châlon. Un simple coup d'œil suffit en effet pour voir que le Bajocien qui supporte le Bourg et le Château est sensiblement plus bas que celui de la montagne voisine. C'est à elle qu'on doit les sources de Frontenay, de Champvaux et quelques-uns des filets d'eau qui alimentent la Cuisance près d'Arbois.

Seconde faille. — La faille qui vient ensuite est la grande faille de l'Heute. Celle-ci se suit très facilement de Pont-de-Poitte, à Pont d'Héry, par Mirebel, Besain, Monrond et Valempoulières. On sait qu'elle correspond à une longue arête qui sépare le premier plateau de la vallée de l'Ain et dont l'existence est généralement due à la surélévation de sa lèvre orientale. Toutefois elle ne présente pas partout la même dénivellation. Celle-ci est généralement plus grande vers le sud-ouest que du côté de Salins. On la trouve divisée vers son extrémité méridionale en deux branches très raccourcies qu'il est facile d'observer au chemin de la Doye. C'est dans ce chemin à 1 1/2 kilomètre de Nogna, lorsque l'on descend vers Pont-de-Poitte qu'apparaissent les marnes irisées mises en contact avec du Bajocien et du Lias. De là jusqu'à Montrond, la faille s'accuse en portant le Lias supérieur de la lèvre orientale au niveau des formations inférieures de l'Oxfordien. Il s'ensuit une barrière infranchis-

sable pour les eaux du côté de la faille ; et comme les formations diverses du premier plateau présentent vers cette faille une légère déclivité, l'eau devient stagnante ainsi qu'on le remarque à Besain, ou bien se creuse péniblement un chemin à travers les formations calcaires du Bathonien et du Bajocien. Cette eau recouvre forcément une partie des prairies au moment des grandes pluies et transforme en marécages toute la langue de terre adossée à l'Heute. Au voisinage d'Andelot, la faille perd à nouveau son unité et se résout en cassures multiples qu'on peut observer à la tranchée du chemin de fer allant sur Monchard.

Troisième faille. — La troisième grande faille court de Moirans au Frasnais et se continue avec un léger changement de direction vers la vallée des Nanes. A l'encontre de la précédente, c'est vers le nord-est qu'elle donne lieu à la plus forte dénivellation et met au jour les marnes irisées, en s'atténuant ensuite de plus en plus à mesure qu'on se dirige vers le sud. Au couchant de Chaux-du-Dombief elle met en contact l'Oolithe inférieure (Bajocien et Bathonien), avec les formations portlandiennes ou néocomiennes. A la Crochère, le contact a lieu entre le Bathonien qui s'étend jusqu'à Prénoval, d'une part, et le Portlandien qui s'infléchit vers la vallée d'Étival, de l'autre. Aux Crozets c'est le Jurassique supérieur qui bute contre les formations moyennes du Lias dans le lit du petit ruisseau qui traverse la route de S'-Lupicin pour aller vers la ferme du Copet. C'est là qu'on trouve dans le Jura le plus beau développement des schistes bitumineux de Boll avec nombreuses Posidonies. A partir de ce point, la faille n'offre plus rien d'intéressant à noter.

CARACTÈRES PRINCIPAUX DES FAILLES.

Les caractères principaux des failles peuvent être étudiés sous les titres suivants :

- 1° Direction ;
- 2° Distance ;
- 3° Dénivellation ;
- 4° Influence sur l'hydrographie.

1° *Direction.* — La direction des failles est généralement celle de la grande falaise occidentale, c'est-à-dire N. 40° E. Les failles supérieures à la falaise n'en dévient que fort peu. Pour celle qui passe par la Crochère et Hay, cette direction se poursuit très régulièrement sur une longueur d'à peu près 30 kilomètres, depuis Grand-Châtel jusqu'au Pont-de-la-Chaux ; seulement, à partir de ce dernier village, elle subit l'influence de la Cluse-de-la-Laine qui la rejette un peu vers le N. ; mais c'est un accident purement local, car elle reprend ensuite sa marche régulière dans la forêt de la Joux. La faille de l'Heute échappe à l'influence de la Cluse et on la suit sans discontinuité de l'autre côté de la vallée de Salins, à Pont-d'Héry, à Dournon et à Nans-sur-Sainte-Anne. Quant à la faille la plus proche de la falaise, elle s'infléchit un peu vers l'E. à partir de Salins ; mais vers le S., elle continue sa direction générale, donnant lieu aux affleurements liasiques de Beaufort et de Gizia.

Des quatre failles de la plaine, deux sont très régulières : ce sont les deux du milieu. Quant à celle qui jalonne la falaise et celle qui se trouve sur les confins de la Bresse, leur division en cassures secondaires ayant pour effet d'élargir la bande de terrain qu'elles affectent, il s'ensuit que chacune de ces dernières cassures n'a plus exactement la direction des failles plus simples. Il arrive souvent qu'une de ces cassures vient mourir à angle aigu sur sa voisine, mais la direction moyenne n'en est pas sensiblement modifiée. La loi générale se retrouve au milieu des petits accidents qui tendent à la masquer. Il est à noter néanmoins qu'au N. de la vallée de la Cuisance toutes subissent un infléchissement vers l'E. et qu'ensuite elles viennent mourir brusquement sur les formations jurassiques de Mouchard et d'Aiglepierre. Il n'y a donc pas dans ces dernières failles la régularité de marche et la longue continuité que présentent les failles plus orientales.

2° *Distance.* — Ce qui frappe surtout à la première inspection d'une carte représentant les failles du Jura, c'est leur inégalité de distance. Cette distance décroît progressivement des

hautes régions vers la plaine. Si l'on représente par 5 la distance qui sépare la faille des Crozets de la forêt de l'Heute, $2 \frac{1}{2}$ sera à peu près celle de cette dernière faille à celle de Champvaux, et 1 celle de la faille de Champvaux à la direction moyenne de la faille de la falaise. A partir de là, la distance diminue encore jusqu'aux dernières failles qui se pressent l'une contre l'autre sur un espace très restreint. En comparant ces résultats avec ce que nous savons de l'épaisseur des couches visibles, on voit que plus celles-ci ont de puissance, plus les failles sont distantes. Bien que le rapport de l'épaisseur aux distances ne soit pas toujours rigoureusement le même, on remarque cependant qu'il présente peu de variations. Ainsi le rapport entre les couches visibles affectées par la première et la deuxième faille est à peu près de 1270 mètres à 549 mètres, ce qui donne 2. Celui des couches atteintes par la deuxième et la troisième est de 549 mètres à 340 mètres, c'est-à-dire donnant à peu près 2. Or les distances 5, $2 \frac{1}{2}$ et 1 suivent une progression géométrique dont la raison serait à peu près 2. Nous n'attachons pas trop d'importance à ces rapprochements, car il peut bien se faire, et nous croyons même que c'est le cas, qu'il n'y ait pas seulement les couches visibles qui soient atteintes par les failles ; cependant les conséquences auxquelles vont nous conduire les considérations sur la dénivellation ne seraient pas favorables à la théorie qui ferait descendre les cassures jusqu'à la pyrosphère. Notre avis est donc que, si elles dépassent les couches observables, elles ne vont pas sensiblement plus bas. Nous pourrions bien ajouter en faveur de cette opinion le fait des petits plissements dont le Néocomien est affecté au-dessus des couches portlandiennes restées en place à Montépile; mais ces considérations viendront en leur temps.

5° *Dénivellation.* — La dénivellation des failles n'a pas partout la même amplitude, c'est-à-dire que les deux lèvres ne sont ni sur le trajet d'une même faille, ni sur des failles différentes distantes verticalement de la même longueur métrique. Pour une même faille, la dénivellation est d'abord presque toujours plus forte qu'ailleurs aux points où le sol est disloqué par des cassures trans-

versales. Ainsi, la faille de Prénovel, qui met le Ptérocérien en contact avec le Bathonien dans les bois qui surmontent la ferme de la Crochère, accuse dans la cluse des Crozets une dénivellation telle que c'est le Lias qui vient buter contre le Néocomien. Même phénomène dans la vallée de la Laine, où l'on passe brusquement de l'Oxfordien au Crétacé. La faille de l'Heute présente sa plus grande dénivellation au ravin de la Doye, qui correspond à une cluse. Il en est de même pour celle de Champvaux, au voisinage de Voiteur. Quoique cette influence des cassures soit moins visible dans la plaine, elle se manifeste cependant très bien près de la vallée de la Cuisance, à Vodans, où des lambeaux d'Oxfordien sont mis en contact avec le Trias. L'unité d'une faille joue aussi un rôle important dans la dénivellation; toutes les fois qu'elle se dédouble, la dénivellation de chaque faille secondaire devient plus faible, comme s'il fallait faire la somme de l'effet produit par les petites cassures pour retrouver l'effet de la grande faille qui leur a donné naissance. Le phénomène est surtout visible au pied de la falaise et l'on peut s'en rendre compte en jetant les yeux sur la coupe du Trias de Poligny, donnée par Pidancet, où l'on voit que ces failles n'ont eu généralement pour résultat que de mettre les couches inférieures du Keuper en contact avec d'autres plus élevées de la même formation.

D'une faille à l'autre la dénivellation change aussi d'amplitude et l'on peut dire que celle-ci est d'autant plus prononcée que l'épaisseur des couches disloquées est plus forte. Nous venons de voir que la faille des Crozets avait porté le Lias et les formations jurassiques inférieures au niveau du Crétacé. La dénivellation y atteint ainsi une valeur très voisine de 600 mètres. A la faille de l'Heute, c'est presque toujours le Kellovien ou l'Oxfordien inférieur qui bute contre le Lias, ce qui suppose une moyenne de 200 à 250 mètres de dénivellation. Au pied de la grande falaise, à l'endroit où l'on peut le mieux saisir le déplacement subi par la lèvre en regard vers l'occident, les formations du gypse et du sel marin sont apportées au niveau des Dolomies supérieures du Keuper, ce qui suppose 120 ou 130 mètres de dénivellation. Dans les failles de la plaine, la dénivellation ne

dépasse pas 100 mètres. Elle met les marnes irisées en contact avec les formations liasiques au bajociennes.

Or, si l'on rapproche ces particularités de dénivellation des rapports que nous avons signalés entre les épaisseurs des terrains visibles et les distances des failles, on ne pourra s'empêcher de conclure que les faits se passent comme si, dans leurs distances respectives et leurs dislocations, les failles avaient voulu respecter aussi la progression des épaisseurs relatives des terrains. Une coïncidence de ce genre ne saurait être tout à fait fortuite, et voilà une des raisons pour lesquelles nous inclinons à croire que les cassures des failles ne pénètrent pas très profondément dans le sol au-dessous des couches observables.

Quoi qu'il en soit de cette coïncidence, les failles, dans leur dénivellation, présentent toutes un caractère que les coupes de la planche III font parfaitement ressortir. En les suivant, on n'a pas de peine à saisir que, des deux lèvres, c'est celle tournée vers l'occident qui est la plus relevée. Il peut y avoir des exceptions particulières à cette loi lorsque, surtout une faille simple, se réduit en cassures secondaires et la coupe de la Bocale à Aumont, donnée par le frère Ogérien, en offre un exemple. Mais lorsque la faille maintient son unité, on trouve presque toujours réalisée la disposition qui vient d'être indiquée. Les coupes de Pidancet sur le Jura bisontin offrent aussi le même caractère, en sorte qu'on peut dire que le Jura dans ses ruptures rappelle assez bien la disposition du massif de la Grande-Chartreuse, telle qu'elle a été figurée par M. Lory. (Voir M. Lory, *Bull. Soc. géol.*, 1851, IX, planche I.)

4° *Influence sur l'hydrographie.* — Dans la description qui a été faite de la marche des failles et des moyens de les reconnaître, il a été assez souvent question des sources et des prairies marécageuses auxquelles elles donnent lieu. De fait, dans la plaine, comme les failles mettent en contact les marnes du Keuper avec celles du Lias, elles doivent jouer le rôle d'un fossé de drainage. Les eaux qui tombent sur le pan relevé d'une faille s'écoulent vers l'orient, en vertu de l'inclinaison des couches, jusqu'à la faille suivante et

ainsi de suite, tant qu'on n'a pas dépassé la falaise occidentale. A partir de là, les couches en contact ne sont plus toutes de nature marneuse ; à l'Heute, c'est le Kellovien ou la Dalle nacrée qui touchent le Lias ; à la faille de Combe-Froide, ce sont les marnes vésuliennes qui touchent le Bajocien. Dans les deux cas, tantôt l'eau devient stagnante, tantôt elle parvient à s'écouler, soit contre les bords de la cuvette, soit par les fissures du fond. La faille des Crozets présente alternativement sur sa longueur les caractères de la faille de l'Heute et de celle de Combe-Froide, et donne encore lieu aux mêmes phénomènes. Lorsque les eaux du fond de la cuvette ne peuvent pas s'infiltrer, elles produisent de petits lacs ou des plaines marécageuses. Ainsi sont nés les lacs des Ronchauds, d'Étival et du Maclus.

Je n'ai pas à signaler ici le rôle des failles dans les phénomènes d'affaissement, si communs au voisinage de Lans-le-Saunier et dans les autres régions salifères. Fournet et Boyer ont traité complètement la question. Ils ont montré que les affaissements avaient lieu suivant des lignes déterminées qui sont précisément des lignes de fracture et qu'ils étaient dus à la dissolution du sel marin suivant ces mêmes lignes de moindre résistance.

Pour résumer maintenant en quelques mots ce qui concerne les failles, disons qu'elles sont parallèles à la direction générale de la chaîne, progressivement rapprochées avec une dénivellation de plus en plus faible à mesure que l'on descend du Haut-Jura vers la Bresse et que c'est d'elles que dépend le régime des sources sur le premier plateau et dans la plaine occidentale.

II. — SOULÈVEMENTS EN VOÛTE.

Les soulèvements en voûte affectent surtout, comme nous le savons déjà, la partie la plus montagneuse de la région qui est aussi celle où les dépôts sédimentaires sont le plus nombreux. Les uns n'ont qu'une étendue très limitée et peuvent varier beaucoup dans leur orientation. Les autres, au contraire, se développent sur une grande longueur et présentent à peu près la même orientation. C'est de ces derniers seulement qu'il sera

question dans l'exposé qui suit. Ils sont au nombre de cinq, que nous allons passer en revue en marchant de l'O. vers l'E. ou de la faille des Crozets vers les arêtes dominant la plaine suisse.

Premier soulèvement. — Le premier soulèvement commence au nord-est à la forêt de la Joux-Devant et rejette de part et d'autre de son axe les couches portlandiennes vers Taucua et vers la vallée du Grandvaux. Il se continue suivant la même direction par Château des Prés, les Crozets et les Prés de Valfin. Sur tout ce dernier parcours, son arête est rompue, et il met au jour l'Oxfordien et les autres formations jurassiques jusqu'à l'Oolithe inférieure inclusivement. L'axe stratigraphique forme alors le fond de la vallée de la Loure. A partir de là, sa direction qui était N. 50° E, s'infléchit un peu et se redresse vers le N. de 15° à 20°. En même temps, sa voûte se referme et on le suit facilement à la ferme des Saumoires entre Leschères et Valfin, où de part et d'autre on voit s'incliner en forme de toit des calcaires dolomitiques exploités comme dalles et renfermant quelques débris de poissons. Il se poursuit ensuite par le bois de Cuttura toujours constitué par le Portlandien, mais à partir de là il se divise en trois rameaux, dont le premier court au S.-E. de la direction générale vers Ponthoux et le pont de Lizon. Le second continue cette direction, et bien qu'il soit masqué par le Néocomien sur une grande partie de son parcours, on peut cependant le suivre à travers les boutonnières qui mettent au jour le Portlandien entre Ravilloles et Cuttura, et entre Saint-Lupicin et Bief-d'Etraz. Quant au troisième, il s'accuse assez par les petits soulèvements jurassiques que l'on observe au levant de Ravilloles, derrière Saint-Lupicin et dans le voisinage de Champ-André. Sa direction est au N.-O. du soulèvement principal ce que celle du premier est au S.-E.; l'angle d'écart est à peu près 10° pour l'un comme pour l'autre. Tous les deux disparaissent à égale distance de la bifurcation, après 20 à 30 kilomètres de parcours, et lorsqu'on arrive à Molinges, l'unité du soulèvement reparait pour se continuer vers Rogna et la forêt d'Arbent.

Second soulèvement. — Le second soulèvement en voûte constitue la crête orientale de la vallée de la Bienne. On le suit facilement de Morez à Cinquétral le long des abrupts de la Mouille; à Cinquétral il est coupé par la Bienne, et se continue de là dans la forêt d'Avignon, au S.-O. de laquelle il est traversé une seconde fois par la même rivière. Très près de cette dernière section, la voûte s'entr'ouvre et met au jour le Bajocien que l'on observe à Chevry, Ranchette et Choux.

De Morez à la forêt d'Avignon, il se dirige du N. 30° E. vers le S. 50° O.; à partir de là, il devient sensiblement parallèle à la partie méridionale du soulèvement précédent. Il ne présente pas, comme ce dernier dans la région qui nous occupe, le Néocomien sur son arête; mais son flanc oriental en porte de larges bandes à la Mouille, à Longchaumois, à Cinquétral, etc.

Près de Morez, son axe se dédouble en deux branches, dont l'une passe par le bois de Chinceval et se continue par Entre-Roches, vers le levant de Bellefontaine, et dont l'autre coupée par la Bienne entre Morez et Morbier forme l'escarpement qui limite à l'O. la vallée de Bellefontaine.

Troisième soulèvement. — Le troisième soulèvement est celui de la forêt du Fremois.

Il s'accuse nettement au mont Fier par une voûte rompue qui met au jour l'Oxfordien et se poursuit vers le S.-E. dans la forêt du Fresnois, où il se résoud en plusieurs petits soulèvements parallèles à crête corallienne. Vis-à-vis Cinquétral, ces soulèvements se ramènent à deux : un grand soulèvement dont l'ouverture donne lieu à la Combe de Tressus et un petit soulèvement parasite qui passe par la vallée de Vaucluse et se termine au Chabot. Plus au S., il s'ouvre pour constituer la grande vallée de Villars-Saint-Sauveur, dans laquelle coulent le Tacon et le ruisseau de la Queue de Cheval. Ce soulèvement se présente ainsi tour à tour en forme de toit, de plateau ondulé et de vallée profonde.

Quatrième soulèvement. — L'arête du quatrième soulèvement se prolonge du Noirmont par la forêt de la Frasse vers la

Joux et le Crêt au Merle. Elle est généralement néocomienne dans la vallée des Dappes et devient portlandienne de Prémouillon au voisinage de Belle-Combe; à partir de là, la voûte s'ouvre comme dans les trois premiers soulèvements, pour laisser paraître, à mesure qu'on s'avance vers le S.-O., l'Oxfordien et les formations inférieures du Jurassique jusqu'au Lias qu'on observe au crêt de Chalame. On retrouve dans ce quatrième soulèvement l'unité qui caractérisait le premier et quelque chose de semblable dans la disposition des sédiments de part et d'autre de l'arête, et de même que la vallée du Grandvaux se prolongeant par Chau des Prés est plus élevée que la vallée de la Bienne, de même la courbe du Lac et celle de Moussières sont à une altitude plus grande que la dépression de la Valserine. Rien d'autre à noter quant à la direction générale; c'est absolument celle des soulèvements précédents. Le point à partir duquel l'orientation vers le N. devient plus grande correspond à peu près au village de Belle-Combe, où la voûte s'ouvre largement pour laisser apparaître l'Oxfordien.

Cinquième soulèvement. — Le cinquième soulèvement a pour axe la partie la plus élevée de la chaîne. On le suit de la Dôle au Reculet par le Colombier de Gex et le Crêt de la neige. A la Dôle son arête est portlandienne avec flanquements néocomiens; à partir de là, il est principalement constitué par le Virgulien coralligène. Dans son développement longitudinal vers le S.-O., il présente assez d'inflexions pour avoir fait dire à M. Benoit que c'est une chaîne tordue avec cirque à l'E., celui de Gex, et cirque à l'O., celui de Chézery. Cependant, en examinant de loin la direction générale, on voit qu'elle est à peu près celle des autres soulèvements.

CARACTÈRES PRINCIPAUX DES GRANDS SOULÈVEMENTS EN VOÛTE.

Ces grands soulèvements connus, il nous reste à traiter pour en faire connaître les caractères :

1° De la largeur de chacun d'eux ;

- 2° De leurs rapports de direction et de distance;
- 3° Des particularités que présentent leurs pentes et leurs sommets;
- 4° De l'influence qu'ils exercent sur l'hydrographie du Jura.

1° *De leur largeur.* — La première chose qui frappe le géologue dans l'étude générale des soulèvements en voûte, c'est l'inégalité de surface soulevée par chacun d'eux dans son parcours longitudinal. Généralement parlant, elle est plus grande du côté de la Suisse et du département du Doubs que du côté du département de l'Ain. Il en résulte ainsi une différence sensible dans le relief. Vers le N.-E., les vallées sont plus resserrées et ont des pentes plus voisines de la verticale. Vers le S.-O., elles s'élargissent davantage et se relèvent plus doucement vers les chaînes qui les encadrent. Ce fait est surtout sensible pour les deux principales vallées du Haut-Jura, celle de la Bienne et celle de la Valserine. De Morez à Lézat, la Bienne coule resserrée entre des escarpements pittoresques qui la dominent en surplomb d'une hauteur de 300 mètres. A partir de là, la vallée double au moins de largeur, et l'on voit succéder aux pentes raides de Tancua et des Mouillez les pentes régulières et relativement douces de la Rixouse et de Valfin. A partir de ce dernier village, la Bienne quitte sa vallée d'origine pour descendre à Saint-Claude par une cluse transversale; mais la vallée n'en conserve pas moins son caractère à Grand-Essart et au S.-E. de Lavans. Elle se perd momentanément par le fait d'un brouillage local entre Molinges et Arbent. Mais à partir de là, on la retrouve dans la dépression largement ouverte qui suit la route d'Oyonnax à la Cluse.

Quant à la Valserine, on peut dire qu'à part le petit cirque de Lavatay qui élargit un peu sa vallée dans le voisinage de Mijoux, elle coule jusqu'auprès de Chevry dans une dépression étroite et profonde. Ce n'est qu'à partir de là que les pentes deviennent moins raides et que les chaînons s'écartent.

Le même rétrécissement de la partie septentrionale se présente dans la vallée de Septmonel qui se continue vers Prémanon par la combe étroite de la Chaux-Berthaud et de la Sambine, et

dans la vallée Cinquétral qui se poursuit vers la Doye, réduite à la petite combe des Adrets.

Il n'y a d'exception que pour la vallée de Villards-Saint-Sauveur. Mais comme elle correspond à la rupture d'une voûte, elle n'est plus dans les conditions des vallées précédentes et sa largeur dépend d'un coefficient spécial dont nous n'avons pas à nous occuper pour le moment.

Passons maintenant en revue d'une façon rapide chacun des soulèvements.

Le premier présente son maximum de surface exhaussée dans la forêt de la Joux-Devant et à la Combe des Prés, où la largeur totale est de 3 kilomètres ; son minimum est entre les Combes et les chères, où il se réduit à 1 kilomètre au plus.

Le second présente deux renflements, l'un au bois de Chincheval (largeur 2 1/2 kil.), l'autre dans la forêt d'Avignon (largeur 3 kil.).

Le troisième offre surtout une grande largeur au levant de Longchaumois, où il se résout en petits soulèvements parallèles. Il n'est plus que de 2 kilomètres à Saint-Claude et se réduit encore davantage au voisinage de Bouchoux.

Le quatrième, déjà fort élargi entre la forêt de la Frasse et le bois de Bonc le devient plus encore auprès des Hautes-Molunes et de Belle-Combe, où il produit sur son regard occidental les plissements secondaires du Flumen. Il s'amincit ensuite progressivement vers le Crêt de Cholom et le cirque de Champformies.

Le cinquième diminue peu à peu de largeur de la Dôle au Reculet. Cette largeur est à peu près (base comprise) de 6 1/2 kilomètres vis-à-vis Lelex.

Chose importante à noter, partout où la largeur augmente sensiblement, on voit se multiplier les plissements de second ordre parallèles au soulèvement principal. Nous venons de les signaler au Frasnois et aux cascades de Flument. La forêt de la Joux-Devant n'en est pas exempte, non plus que la montagne d'Avignon. Pour nous en tenir à cette dernière, elle présente entre Saint-Claude et Valfin des ondulations qui ramènent à deux reprises l'Oolithe corallienne au niveau du chemin.

En résumé donc, on voit que les soulèvements en voûte ont exhaussé des surfaces inégalement larges et que généralement la largeur du bombement est plus considérable vers le N.-E. Il s'ensuit que les vallées y sont plus étroites et plus raides et qu'en même temps les soulèvements s'y résolvent plus facilement en soulèvements secondaires, comme si l'individualité d'un soulèvement variait en raison inverse de sa largeur. Il y a là entre les soulèvements en voûte et les failles un rapport facile à remarquer.

2° *Rapports de direction et de distance.* — Mais quelles que soient les variations de largeur de nos cinq soulèvements, ils présentent tous un remarquable parallélisme. Le premier et le second, par exemple, ont beau s'élargir vers le N.-E., leurs deux axes de stratigraphie n'en conservent pas moins la même direction, qui est celle de la Combe-des-Prés et des rochers de Noire-Combe. Dans le premier, cet axe se laisse suivre de la forêt du Rivon, au Crêt-des-Bois dans la forêt de la Joux-Devant, par la petite vallée de la Loutre et les escarpements de Pré-Marchais et dans le second, il se continue du bois de Chinceval aux côtes de la Mouille et à la ferme de la Montagne, près d'Avignon. L'axe du troisième apparaît au crêt des Arcets, à 6 kilomètres au S. de Morez sur le chemin de Prémanon et, après s'être perdu un instant dans le brouillage de Fresnois, se retrouve à la combe de Tressus et à la vallée de Villars-Saint-Sauveur. Celui du quatrième est jalonné par la forêt de la Frasse, les affleurements oxfordiens du Manon et le pointement liasique du crêt de Chalame. Quant au cinquième soulèvement, bien qu'il soit une chaîne tordue, sa direction est encore celle des précédents. Ainsi sous le désordre apparent produit par les élargissements se révèle la disposition la plus simple, et l'on finit par retrouver dans les soulèvements en voûte les rapports de direction signalés dans les failles.

Ce n'est cependant pas qu'il y ait similitude complète entre ces deux sortes d'accidents. Les failles ne présentent pas d'inflexions sensibles dans toute l'étendue longitudinale des terrains

où nous avons pu les suivre. Il n'en est pas de même des grands soulèvements en voûte. Tous se brisent à peu près suivant une ligne orientée du S.-E. au N. 35° O. et dont le milieu se trouverait dans le voisinage de Saint-Claude. Cette ligne correspond à peu près à la direction des cluses du Flumen, de Saint-Maurice et de la vallée de Poligny, dont nous aurons bientôt à parler. A partir de là, la direction des soulèvements qui était N. 45° E. se rapproche du méridien et devient N. 30° E., avec léger rapprochement des axes stratigraphiques. Il est intéressant de noter que ce changement de direction correspond pour les cinq soulèvements aux points où le Néocomien se présente aminci.

Quant à la distance des axes stratigraphiques, elle est sensiblement la même d'un soulèvement au suivant. Elle est environ de 4 1/2 à 5 kilomètres, excepté pour le deuxième et le troisième soulèvements qui sont légèrement plus rapprochés.

5° *Particularités que présentent le sommet et les pentes.* — La première des particularités à signaler pour les sommets des soulèvements en voûte est leur passage à des failles. Nous avons vu que ce caractère se présente généralement au S. de la ligne de commune inflexion à partir du moment où les axes stratigraphiques se rapprochent l'un de l'autre. Il n'y a guère que le cinquième soulèvement qui échappe à cette loi commune; car dans le troisième on trouve la faille du Tacon, et dans le quatrième la rupture de voûte de Belle-Combe met en contact au voisinage des Moussières l'Oxfordien avec les assises inférieures du crétacé. Ces failles accidentelles obéissent assez bien à la loi de dénivellation des failles de la plaine; la lèvre qui regarde la France est presque toujours portée plus haut que la lèvre opposée.

Je citerai comme exemple de ce fait la combe oxfordienne des Prés qui constitue un de ces cirques si communs dans la Suisse. Dans la coupe CD de son *Esquisse géologique*, Étallon suppose bien que l'Oxfordien y est brisé, mais il semble ignorer que la grande Oolithe s'est fait jour à travers la cassure. La dénivellation qu'il indique n'est pas la vraie. Quiconque voudra bien observer le petit chaînon qui limite à l'E. la vallée de la Loutre

verra qu'il est composé de Jurassique inférieur, en regard de l'Oxfordien et du Corallien formant les escarpements opposés. La coupe A de la planche III représente assez bien cette disposition (voir la planche III, fig. 7).

On doit conclure de là qu'il n'y a pas de différence essentielle entre les failles qui continuent vers le midi nos soulèvements et les cirques que présentent leurs voûtes entr'ouvertes. D'un côté comme de l'autre, il y a rupture avec dénivellation; seulement dans les cirques la dénivellation lorsqu'elle se produit est généralement plus faible que dans les failles proprement dites.

La même dyssymétrie se remarque sur les pentes des soulèvements étudiés. Thurmann avait dit que sur cent et vingt chaînes dont il connaissait les escarpements, quatre-vingt-dix faisaient face à la France. Je ne sais comment Roger avait pu écrire ensuite que les flexions particulières sont toutes du côté des Alpes (d'Archiac., vol. VII, p. 25). Le fait est qu'on ne peut suivre longtemps un soulèvement en voûte sans être frappé de l'excès de pente qu'il présente du côté de l'O. Ce n'est que par suite d'exceptions fort rares que le contraire a lieu.

Je citerai comme exemple le bombement de la Joux-Devant dont les pentes vis-à-vis de Lézat sont tout aussi inclinées vers l'E. que vers l'O. Mais le soulèvement longitudinal dont ce bombement fait partie retombe dans la loi commune sur tous les autres points de son parcours, à la Combe-des-Prés, au bois de Cuttura et jusqu'aux petits chainons qui en sont la continuation dans le voisinage de Saint-Lupicin. La pente vers Chaux-des-Prés et vers Ravilloles est presque double de ce qu'elle est dans la direction de la Rixouse et de Valfin.

Dans le second, le troisième et le quatrième soulèvement, la loi se vérifie aussi presque toujours.

Quant au cinquième, il mérite une mention spéciale. Ce n'est pas à proprement parler un vrai soulèvement en voûte. Lorsqu'on voit ses calcaires passer à l'état bréchiforme et ses couches plonger de part et d'autre vers le centre de la chaîne, on n'a pas de peine à comprendre avec M. Favre qu'il répond à un plissement en éventail analogue à celui de M. Blanc. Mais alors il ne

peut rien y avoir d'étrange à ce que, sortant de la loi commune, il ne présente plus les dispositions des autres chaînons et qu'assez souvent les pentes les plus prononcées soient en regard des Alpes.

La pente vers l'O. est tellement accusée sur les autres qu'il en est résulté des fractures partielles, des glissements et des renversements analogues à ceux que présentent les Alpes et les Ardennes.

Les ruptures partielles se remarquent bien sur les pentes occidentales des deux premiers soulèvements en voûte. Elles ont atteint surtout les couches supérieures du Portlandien, comme on peut s'en rendre compte en visitant les escarpements qui s'étendent de l'Abbaye à Saint Lupicin, ou en étudiant les monts de Bienne et la forêt d'Avignon. Partout on voit les couches supérieures disjointes, à la façon des fibres ligneuses d'une branche d'arbre à laquelle on aurait fait subir une poussée trop grande contre un obstacle immobile, présenter un bâillement d'autant plus fort que l'abrupt est plus accusé.

Celles qui sont orientales s'avancent jusqu'au sommet de l'anticlinal tandis que celles qui sont occidentales semblent, au contraire, s'être disposées en retrait sur les pentes, comme l'indique la figure schématique (pl. III, fig. 4). Cette figure est presque la reproduction de ce que l'on observe du sentier de la Chaumette et au chemin qui descend de Cinquétral à Noire-Combe.

De ces ruptures partielles on passe sans peine à des glissements sur la plus forte pente. Quelles que puissent être les causes de ces glissements, il n'en est pas moins vrai qu'ils existent et qu'on trouve tous les intermédiaires entre les simples ruptures et les glissements les plus compliqués. Ainsi sur le bord oriental de la Bienne, tout près du coude qu'elle forme avant de s'engager dans la Cluse de Saint-Claude, on observe du Portlandien qui est descendu d'au moins un huitième de la longueur totale de l'escarpement vers le lit de la rivière. La figure 6, planche III, en représente l'aspect.

Le même fait se reproduit au levant de la Combe de la

Landoz, au couchant de la forêt d'Avignon, et entre le bois de Cuttura et le village de Ravilloles. On comprend que plus le glissement est considérable, plus les couches doivent être forcées de se loger dans des espaces restreints. De là les plissements si curieux de Cuttura et de Grand-Essart que nous reproduisons planche III, figure 5, et qui affectent surtout la dolomie portlandienne.

On en rencontre de semblables à Ilay, sur la lèvre occidentale de la dernière falaise, ainsi que sur le chemin du Pontet dans le massif du Bayart qui domine Saint-Claude.

Mais ce qui confirme encore la loi de plus grande pente vers l'O., ce sont les renversements dont le Jura offre tant d'exemples et sur lesquels M. Lory insistait en 1860. On sait que si une couche relevée dépasse la verticale, elle va progressivement par un mouvement de rotation sur sa tranche recouvrir les couches qu'elle devait supporter. Un renversement n'est donc qu'un phénomène exagéré de surplomb qui n'est pas inconnu dans les autres parties de la chaîne, car on peut en avoir un exemple dans les *Esquisses orographiques sur la chaîne du Jura*, de Thumann. La treizième coupe, qui va de l'Aar au Rhin par Effingen, représente à quelque distance de l'Aar les couches jurassiques repliées sur elles-mêmes en forme de V horizontal, dont l'ouverture regarderait le nord, c'est-à-dire dans la direction opposée aux Alpes. Même disposition dans la coupe de Besançon à la Vèze, donnée par Pidancet. Mais ce qui paraît n'être qu'un fait particulier dans le Jura bernois et le Jura bisontin devient presque la loi commune en tous les endroits où le Néocomien s'amène en pointe. Il est alors renversé sur lui-même et comme écrasé entre les puissantes pinces du Portlandien. Il en résulte une stratification confuse, un appauvrissement dans la faune, un développement sensible de la structure bréchiforme, indice certain d'une forte compression.

La première observation qui me mit sur la voie fut celle du Néocomien du Rivon. Je l'avais parcouru bien des fois et toujours avec étonnement, remarquant que du Valenginien je passais à l'Urgonien, puis de l'Urgonien au Valenginien sans apparence de

faulle. Le terrain jurassique que je trouvais ensuite était trop bouleversé et trop brisé pour pouvoir me donner quelques indications. Je cherchai longtemps, jusqu'au moment où je découvris sur le chemin du Rivon à La Landoz quelques couches néocomiennes inclinées tout autrement qu'elles ne devaient l'être dans le cas d'une stratification en fond de cuvette; j'eus dès lors la clef de l'énigme. Depuis cette époque, j'ai retrouvé le Néocomien renversé à Cuttura, à Grand-Essard, aux moulins de Montépile, à Ponthoux, à Etival, à la combe du Lac, sur le chemin qui va de Saint-Claude à Cinquétral et en beaucoup d'autres points. C'est par exemple à un renversement de ce genre qu'il faut attribuer le plongement vers le S. que présente le Néocomien aux abrupts du lac de l'Abbaye et la stratification confuse qu'il offre près du lac d'Ilay.

Les coupes du Rivon, de Cinquétral et de Montépile surtout ne laissent aucun doute sur ces phénomènes de renversement. Je reproduirai seulement ici celle du Rivon et celle de Cinquétral qui me paraissent les plus simples (pl. III, fig. 1, 2 et 3).

A celle du Rivon, on remarque que les marnes nacrées du Purbeckien se trouvent de part et d'autre du Néocomien avec pendage vers le S.-E. Il en est de même des marnes à *Ostrea couloni* et des calcaires chloriteux toujours subordonnés à l'Urgonien; quant à ce dernier, ses assises se touchent, mais elles sont tellement rompues qu'elles passent aux calcaires bréchiformes.

Sur la lèvre occidentale du bassin, les couches portlandiennes ont leur allure normale. Sur la lèvre orientale, les cassures qu'elles ont subies ne permettent pas de constater leur inclinaison; mais on peut facilement s'en rendre compte de l'autre côté de la Montagne de Sur-les-Roz. La tranchée du chemin qui va du Rivon aux Prés-de-Valfin montre ces couches portlandiennes redressées visiblement suivant la verticale et passant progressivement à un pendage justement contraire à celui qu'indiquerait un simple exhaussement.

Vers le S.-O. du Rivon, le Néocomien s'élargit sensiblement et ses couches reprennent peu à peu leur allure régulière. Elles

sont très nettement disposées en fond de bateau vis-à-vis Leschères ainsi que le montre la coupe (pl. III, fig. 2^{bu}).

Lorsqu'on s'avance vers le nord-est, la lèvre orientale reste encore quelque temps perpendiculaire à l'horizon, elle retombe dans son inclinaison normale lorsqu'on s'avance vers la couche du Grandvaux, pour se renverser à nouveau près du lac de l'Abbaye.

Quant aux abords de Cinquétral, le renversement y est visible de loin, lorsqu'on observe le massif du Pain de sucre en gravissant le chemin du Pontet. On voit très bien que ses assises se dirigent vers le ruisseau de Vaucluse au lieu de plonger vers la Bienne, comme elles devraient le faire s'il n'y avait pas renversement. A l'O. de ce pic élevé, le Néocomien se montre comme une tache prise entre deux nappes blanches de calcaire jurassique. De près le renversement est accusé par deux horizons marneux identiquement les mêmes, où l'on trouve abondamment la *Pholadomya elongata*. C'est grâce à ce renversement qu'on voit le ruisseau de Cinquétral, qui a reçu les eaux pluviales du bassin néocomien, dévier de sa direction et se précipiter vers la Bienne en petites cascades étagées. A S'-Claude, l'amincissement du Néocomien est tel et le renversement si fort que les couches portlandiennes viennent presque au contact. C'est à peine si l'on trouve entre elles 10 à 12 mètres de marnes et calcaires renfermant la *Pholadomya elongata*.

En voyant combien ces phénomènes de renversement sont communs dans le Jura, je suis surpris qu'ils n'aient pas encore fait l'objet d'un travail spécial. Ils semblent avoir échappé à la sagacité d'Étallon. Car, ni dans sa coupe de l'Ain du M^t-Rond, ni dans celle d'Étival à Longchaumois, le lecteur ne pourra saisir quelque chose qui ressemble à un renversement. Dans la première, il multiplie les failles sans raison, et dans la seconde, il oublie même de représenter le Néocomien de Leschères, bien qu'il l'ait signalé sur sa carte.

Le caractère le plus remarquable de ces plissements néocomiens est l'orientation du V; car l'ouverture en est presque toujours tournée vers l'O., dans le sens général des abrupts. Il y a là une coïncidence importante à noter.

4° *Influence des soulèvements en voûte sur l'Hydrographie du Jura.* — Cette influence se fait surtout sentir dans la distribution des sources et des puits perdus que l'on désigne dans le pays sous le nom d'embossieux. On comprend que, si le Jura formait un plateau continu, l'eau des pluies s'engageant à travers les couches perméables des calcaires pour aller constituer des nappes souterraines, soit sur les marnes à *Ostrea Couloni* du Néocomien, soit sur l'Oxfordien et le Lias, qui sont les nappes aquifères par excellence, la région ressemblerait au Karst et aux Causses de la Lozère ; ce serait un pays affreusement desséché. Le premier effet des soulèvements en voûte a été de diviser la région en une succession de cuvettes penchées, où les eaux s'écoulent et d'où elles peuvent trouver une issue vers le dehors. C'est évidemment sur la partie la plus bouleversée que cette issue doit se rencontrer communément. On comprend dès lors que, puisque les soulèvements en voûte ont plissé plus violemment les couches en regard vers la France que celles qui sont tournées vers la Suisse, c'est de ce côté que les sources doivent apparaître en plus grand nombre. Aussi, quelques courses dans le Jura suffisent-elles pour montrer qu'il en est ainsi soit dans la vallée du Grand-Vaux, soit dans celle de la Bienne, soit surtout dans celle de la Valserine. Dans cette dernière en particulier, les sources sont si abondantes au revers occidental de la Faucille qu'on ne saurait faire dix pas sans en rencontrer quelques-unes. Quant aux puits perdus, leur répartition est à peu près soumise aux mêmes lois que celle des sources, elle tient encore à l'irrégularité des soulèvements. Lorsque, en effet, l'un de ces derniers vient à s'ouvrir pour constituer ces boutonnières en forme de cirque que l'on désigne dans le pays sous le nom de Combe, l'eau qui tombe sur ces dépressions ne peut trouver une issue qu'en suivant l'inclinaison des couches imperméables qui forment le fond du cirque. Et comme celles-ci ont leur plus long pendage vers l'est, c'est de ce côté que le drainage doit se faire ; ce qui revient à dire que c'est encore à la base occidentale d'un abrupt que l'eau disparaît.

Inutile d'ajouter ici que la répartition des lacs et des marais

tient encore à la même cause. Les lacs du Jura, et en particulier ceux des hautes chaînes, ont pour fond de cuvette des couches imperméables plissées en forme de V. Puisque ces plissements abondent sur le revers occidental des soulèvements en voûte, c'est naturellement là que les lacs doivent se montrer. Quant aux marais, leur position ne peut être qu'identique, puisque la plupart d'entre eux proviennent d'anciens lacs desséchés.

III. — CASSURES TRANSVERSALES.

Les cassures transversales du Jura ont attiré déjà en 1852 l'attention de Thurmann. Mais, soit que leur étude parût trop difficile, soit qu'on ne les comptât que comme des quantités négligeables dans l'orographie de la chaîne, les géologues qui suivirent cet éminent observateur négligèrent généralement d'en parler.

Celles qui s'observent dans la région dont il s'agit ici présentent une remarquable simplicité de direction et se suivent facilement de la plaine vers le Haut-Jura. J'en compte cinq, y compris celles de Lons-le-Saulnier vers Conliège et de Salins vers Campagnole.

Cette dernière, qui est la plus septentrionale, se suit sans peine de la vallée de Salins au col de S^t-Cergues en passant par Pont d'Héry, Champagnole, le col de la Savine et la cluse de Morez. Elle exagère sur son passage la dénivellation des failles longitudinales et présente dans la vallée de Salins les caractères d'une faille transversale. Les principales particularités à signaler sur son trajet sont sa bifurcation par Morillon et Syam, la déviation qu'elle fait subir vers le nord à la faille des Crozets et le déplacement qu'éprouvent sous sa direction les formations jurassiques supérieures à Morillon (1). C'est elle qui donne nais-

(1) Cette déviation a été très bien mise en lumière par M. Bertrand dans sa carte de Lons-le-Saulnier, et l'on sait qu'en 1883 la Société géologique de France a pu la constater sous la direction de cet éminent observateur.

sance aux vallées de la Furieuse, de la Laine et à l'affluent de la Bienne qui descend de la Doye près de Morez.

A 5 kilomètres plus au S. vient la seconde cassure, dont l'origine est au couchant d'Arbois et dont l'extrémité est au col de la Faucille. Elle se suit par la cassure de Montrond, la vallée de Balermes, le cirque de Chaux-du-Dombief, le col de Château-des-Prés et les cascades de la Chaumette jusqu'au-dessus de Gex. C'est la moins accusée de toutes. Souvent elle ne donne lieu qu'à des fractures insignifiantes ou à de légers contournements en forme de voûte.

La troisième cassure naît vis-à-vis la petite vallée de Vaux, près de Poligny, et va mourir au col de Crozet entre les deux Colombiers. Elle donne naissance au bassin du lac de Chalin, au col de Combe-Raillard, à ceux de Piards et de la Landoz, à la cluse de la Bienne, entre Vallin et Saint-Claude et, enfin, au ruz du Flumen jusqu'à Montépile. C'est dans sa partie centrale que ses effets s'accusent le mieux. Elle y exagère l'inflexion des soulèvements en voûte et favorise les renversements du Néocomien. De plus, elle produit à la Combe-des-Prés une faille dont la dénivellation est en faveur de la lèvre méridionale. Une faille se remarque encore dans la vallée de Vaux, mais la dénivellation y est en sens opposé. A Saint-Claude, il semble que le passage de cette cassure ait contribué à donner naissance aux contournements des couches portlandiennes du Mont-Bayard.

La quatrième commence vers la vallée de Baume par une faille dont le frère Ogérien a publié la coupe. Elle passe ensuite à la Doye, où elle accroît la faille de l'Heute et produit elle-même une faille presque perpendiculaire à cette dernière. Puis elle se dirige par les lacs de Clairvaux, le ruz des Crozets et le défilé Pont-du-Lizon, vers le voisinage du Crêt-de-Chalame. Elle n'est pas étrangère à l'apparition du Lias dans la vallée de Belle-Combe et répète aux Crozets la déviation des formations jurassiques produite par la première à Morillon.

La cinquième enfin va du S.-O. de Conliège vers Marnézia et Vaucluse, où elle produit l'inflexion du cours de l'Ain. De là elle se continue par Molinges vers Chézery, où elle détermine encore une déviation du cours de la Valserine.

Si l'on jette les yeux sur la carte qui représente ces cassures, on voit qu'elles sont toutes sensiblement parallèles et qu'elles font avec le méridien un angle d'à peu près 20° vers l'O. ou de 70° avec les accidents longitudinaux. Il faut noter cependant que, si elles se présentent le plus souvent à l'état de déchirures très nettes passant même aux failles, elles se réduisent parfois à une alternance de cassures complètes et de plissements secondaires qu'on a de la peine à suivre. Lorsqu'elles constituent des failles, la dénivellation s'effectue tantôt sur une des lèvres et tantôt sur l'autre, sans obéir à aucune loi.

Les rejets que les cassures font subir aux divers accidents longitudinaux établissent entre elles et les déchirures transversales des Alpes une remarquable analogie. Cette analogie paraît plus étroite encore lorsque l'on constate que la ligne de cassure de Lons-le-Saulnier vers Orgelet se continue près du lac d'Annecy, que celle de Salins à S^t-Cergues va jusqu'à la déchirure de Sallanches, et que plus au N. les grandes déchirures de Martigny et du lac de Thun dans la Suisse ont leur pendant dans la vallée de la Loue, près d'Ornans, et dans la cassure par laquelle le Doubs s'échappe vers Saint-Hippolyte.

Quel est maintenant l'âge de ces cassures? Sont-elles contemporaines, plus anciennes ou plus récentes que les failles et les grands soulèvements en voûte? Elles sont incontestablement postérieures au dépôt du Néocomien qui a subi leur contre-coup et même au tertiaire qu'elles affectent. Elles ne sont donc pas antérieures aux accidents longitudinaux.

A voir les rejets qu'elles ont produits sur ces accidents, les accroissements de pente et de dénivellation auxquels elles ont donné lieu, on serait tenté de les croire postérieures. Mais lorsqu'on les étudie attentivement, on voit qu'elles ont subi à leur tour le contre-coup des failles et des grands soulèvements. Ainsi la première présente une bifurcation sur le trajet de la plus orientale des failles et subit un rejet visible qui reporte à 4 kilomètres de la direction générale le plus méridional de ses tronçons. Même rejet, mais en sens inverse, au village des Rousses, à la rencontre du soulèvement de la forêt du Fresnois. La deuxième

velée dans ces derniers temps par M. Vezean dans ses *Études géologiques sur le Jura Franc-Comtois*.

La seconde est celle que M. Marcou formula en 1846 dans un travail sur le relief du Mont Jura. Il admit alors que la chaîne avait obéi à deux actions distinctes : l'une, postérieure au dépôt du Portlandien, qui se serait transmise par un mouvement ondulatoire du N.-E. vers le S.-O. en produisant ses plus grands effets dans le voisinage de Soleure; l'autre, postérieure au dépôt de la Molasse, qui aurait fait sentir surtout son influence sur la partie S.-E. du Jura jusqu'à la vallée de l'Ain. Dans la première, les forces verticales auraient prédominé; la seconde aurait eu le caractère d'un refoulement latéral.

La troisième hypothèse n'admet plus que des forces latérales; elle a été soutenue successivement par MM. Thurmann, Studer, Favre, Lory et Pidancet.

« L'ensemble des lois exposées, disait Thurmann en 1853, me conduit à éliminer toute action soulevante appliquée verticalement...; au contraire, les faits s'interprètent en tout point par l'hypothèse d'une action latérale procédant du côté suisse vers le côté français. » M. Studer admettait déjà en 1837 que le massif du Jura était une dépendance des Alpes, et il en donnait pour preuve « l'absence des caractères éruptifs, le peu d'altération des roches, la hauteur croissante des chaînes vers les Alpes et enfin la tendance qu'auraient les couches soulevées du Jura à venir buter contre les Alpes si elles étaient rétablies sur un plan horizontal. » Dans un travail plus récent publié dans les *Archives des sciences physiques et naturelles*, il est d'avis que « tous les faits nous portent à reconnaître une action latérale immense, qui se serait propagée de l'axe des Alpes sur les bords de la chaîne ». MM. Lory et Favre se sont moins prononcés que M. Studer sur l'origine de l'action latérale; mais tous les deux ont fait remarquer les rapports qu'il y avait entre les accidents des Alpes (disposition en éventail et ruptures transversales) et ceux du Jura; et, comme aux Alpes les traces d'une action latérale sont évidentes, on doit croire qu'il faut attribuer à la même action les accidents de la chaîne jurassienne. Quant à Pidancet, il con-

naissait trop bien le Jura pour ne pas voir dans les soulèvements en voûte la preuve d'une action latérale. Aussi est-il très explicite sur ce sujet lorsqu'il dit à la page 21 de sa remarquable note de 1848 : « Les ploiments en voûte semblent avoir été formés par une force latérale agissant normalement à la direction actuelle de la chaîne et dont l'intensité, ayant son maximum sur le bord du bassin helvétique, allait en diminuant rapidement à partir de là vers la Haute-Saône où elle paraît avoir été à peu près nulle ». Malheureusement ces idées si justes étaient mêlées de conceptions fausses sur l'âge et l'origine des failles, que Pidancet regardait comme antérieures aux soulèvements en voûte et dues à une tout autre cause. C'était à l'expérimentation à fournir les éléments nécessaires à la complète solution du problème, et ce n'est pas un des moindres titres de gloire de M. Daubrée d'avoir comblé cette lacune.

Rappelons d'abord sommairement les résultats auxquels il est parvenu.

1° Si l'on place dans un châssis des feuilles de plomb et qu'on exerce contre leur tranche une poussée horizontale, les feuilles présentent une série de plissements rappelant en tout les soulèvements en voûte;

2° Si les feuilles ont partout la même épaisseur et si elles sont homogènes, les plissements sont à peu près équidistants (fig. 75 à 77, p. 293);

3° Si les feuilles ne sont pas homogènes et de même épaisseur ou bien si la pression du châssis est moins grande en un point qu'en un autre, c'est au point de plus faible épaisseur, de plus faible résistance ou de plus faible pression que les ploiments s'accusent le plus et se rapprochent davantage les uns des autres (fig. 78 à 83);

4° Dans les expériences de ploiment qui viennent d'être rapportées, lorsque la poussée latérale continue d'agir on voit les figures sinusoïdales se déformer graduellement et passer à des ploiments avec surplomb ou renversement de couches. Le surplomb a généralement lieu du côté de la moindre épaisseur;

5° Si la poussée continue, le surplomb fait place à une rupture avec dénivellation dans le sens du surplomb (fig. 97 à 98);

6° Tous ces accidents sont sensiblement parallèles lorsque l'action se réduit à un simple refoulement latéral ;

7° Si ce refoulement latéral est accompagné de torsion, la torsion par elle-même tend à produire des cassures orientées suivant deux directions croisées et la pression transforme ces cassures en failles.

Voilà les faits, tels que l'expérimentation les produit. Or, ne semble-t-il pas que, d'après la description faite plus haut des failles et des soulèvements en voûte, notre région du Jura réalise dans ses traits généraux cette simplicité des résultats de l'expérimentation ? Et d'abord le parallélisme des grandes failles et le sens de leur dénivellation ne s'expliquent-ils pas facilement par une poussée latérale énergique venue des régions alpines et qui aurait diminué progressivement d'effet en s'avancant vers la Serre ? Et, puisque les couches sédimentaires s'amincissent à mesure que l'on descend des régions élevées vers la plaine bressane, n'est-il pas naturel de voir sous cette poussée les failles se répéter d'autant plus nombreuses que l'épaisseur devient moindre ? C'était donc sur l'ilot que nous supposons émergé depuis le dépôt du Bathonien que les cassures devaient être le plus nombreuses, et reproduire en grand les ruptures multiples des lames amincies dont se servait M. Daubrée.

Pour ce qui est des soulèvements en voûte, l'orientation des abrupts, les ruptures partielles, les glissements vers l'O. et le repliement des couches sur elles-mêmes n'ont plus rien d'énigmatique dans cette idée d'un refoulement venant du S.-E. Tous ces accidents divers ne sont que des manifestations différentes de la même force. L'épaisseur des couches sédimentaires étant à peu près la même dans tous les points du Haut-Jura, on comprend que les soulèvements en voûte se soient disposés parallèlement entre eux, et à peu près à la même distance l'un de l'autre, comme cela a lieu pour les plaques d'épaisseur uniforme.

Le passage enfin des soulèvements en voûte aux failles devait s'effectuer aux endroits où les strates devenaient sensiblement plus réduites, c'est-à-dire dans le voisinage de la Combe d'Ain ; mais il ne pouvait pas, vu les variations d'élasticité d'une même couche et les accidents locaux, présenter ce degré de

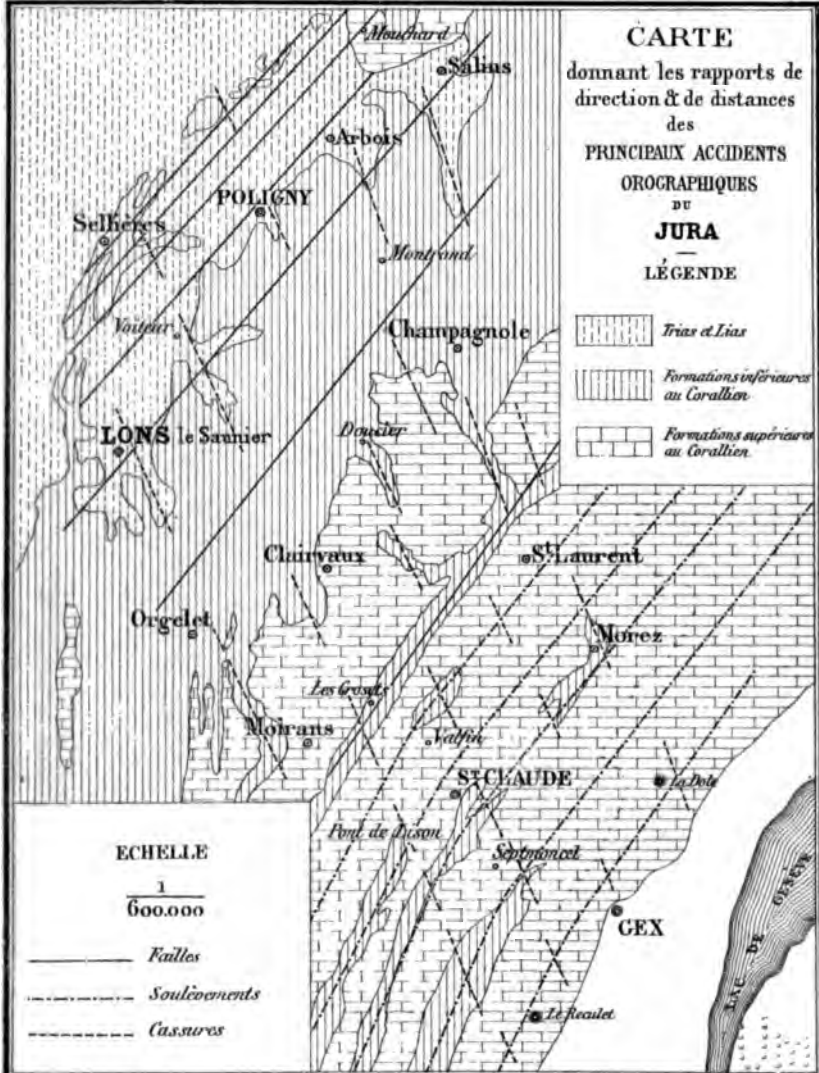
simplicité que les expériences de M. Daubrée réalisent. Il n'est donc pas surprenant que le soulèvement en voûte reparaisse parfois sur quelques-unes des failles et que des failles se montrent sur le trajet des soulèvements en voûte.

Quant à cette particularité que les soulèvements en voûte sont plus rapprochés l'un de l'autre que ne le sont les deux dernières failles, il me semble qu'elle n'a rien d'étrange dans l'idée d'une poussée latérale venant de la Suisse, car dans les expériences de M. Daubrée sur une même épaisseur de feuilles c'est près du point de poussée que les courbes sont moins distantes. Il serait plus difficile de rendre compte du défaut de parallélisme rigoureux entre les failles et les soulèvements en voûte si les moyennes que nous avons prises ne ramenaient à ce parallélisme. Il a très bien pu se faire, en effet, que l'homogénéité des couches ou leur épaisseur n'aient pas été en décroissant graduellement comme dans les feuilles de plomb de M. Daubrée. Un point de plus grande ou de plus faible résistance suffisait soit pour provoquer le dédoublement d'un plissement, soit pour modifier légèrement sa direction. C'est généralement lorsque les soulèvements passent à l'état de failles ou que leurs voûtes s'ouvrent largement que le changement de direction devient sensible.

L'idée d'un refoulement latéral, malgré ce qu'elle a de fécond, ne suffirait pas à elle seule pour expliquer les petits soulèvements en voûte, les failles transversales et les ruz dont le Jura offre tant d'exemples ; mais il est difficile de supposer que pendant leur pression les couches aient trouvé partout le même appui contre l'obstacle fixe où elles butaient, et de là l'origine des torsions d'où sont nées les vallées d'Arbois, de Poligny, de Voiteur et la magnifique cluse de la Laimé. On arrive ainsi par des procédés plus rigoureux aux conclusions que formulait Marcou. L'action soulevante du N.-E. au S.-O. de cet éminent géologue serait l'action de torsion ; et l'action ondulatoire du S.-E. au N.-O. ne serait pas autre chose que la pression latérale. Mais entre les conclusions de Marcou et les nôtres il y aurait une différence considérable. Pour le géologue salinois, les deux phénomènes auraient été successifs ; pour nous, ils ont été simultanés et intimement liés l'un à l'autre.

Avant de finir cette étude, je dois répondre à une objection qu'ont faite et que peuvent renouveler les partisans des actions verticales multiples. Elle se formule ainsi : « Puisque les différences de distance que présentent entre eux les soulèvements et les failles tiennent principalement aux inégalités d'épaisseur des couches refoulées et que les soulèvements en voûte se transforment seulement en failles dans les points où l'épaisseur devient sensiblement plus faible, le Jura ne doit pas présenter deux espèces d'accidents de ce genre, ni des variations de distance aussi sensibles; car c'est tout au plus si, de la plaine à la montagne, la différence entre les couches sédimentaires visibles est de 1200 mètres. Or, qu'est-ce qu'une différence de 1200 mètres prise sur l'ensemble de l'écorce terrestre? » J'avoue que l'objection aurait une grande valeur, s'il était impossible de démontrer que ce sont les couches sédimentaires visibles, et principalement les plus récentes, qui ont subi la pression latérale. Mais la preuve de cette action que j'appellerai presque tangentielle se rencontre à chaque pas dans le Jura. Elle est donnée par nos petits soulèvements en voûte qui affectent les couches supérieures sans atteindre les formations plus anciennes : le Néocomien de Septmoncel en offre un bel exemple précédemment cité. On la retrouve dans les phénomènes de glissement du Corallien et des autres formations jurassiques supérieures par-dessus les marnes oxfordiennes; spécialement dans l'affaiblissement en épaisseur vers l'O. des marnes du Pontet, par suite d'un glissement de ce genre. On la retrouve enfin dans les inflexions et les glissements du Bathonien dans de la grande falaise sur les couches bajo-ciennes à peine dérangées. Aussi un observateur qui étudie sérieusement quelques jours les environs de Septmoncel, de Valfin, de Morez, de la Faucille et de Clairvaux constate-t-il que l'action latérale plus forte sur le Néocomien que sur le Portlandien s'est fait sentir de moins en moins jusqu'au Keuper. Dès lors, l'inégalité des couches visibles conserve son importance et la théorie des refoulements latéraux se trouve moins embarrassée qu'il ne paraît par l'objection.

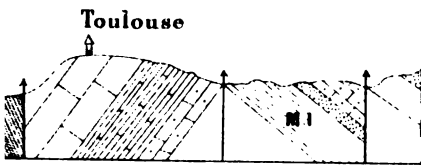
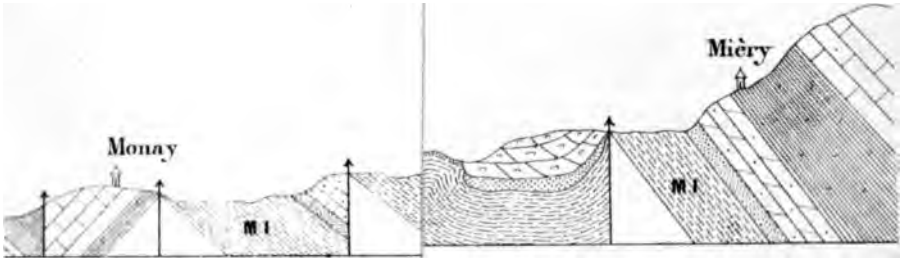
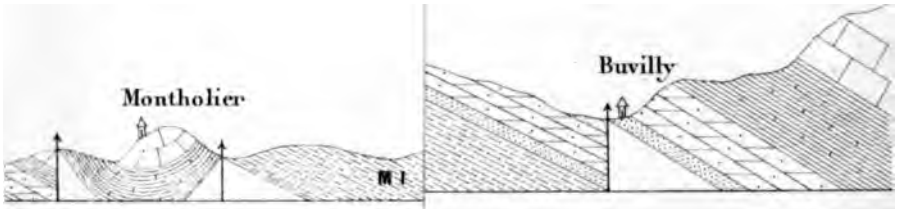
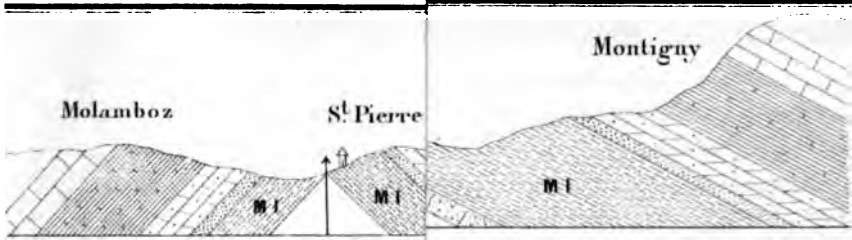
PL. I



Lith. V. Pevensee, Bruxelles

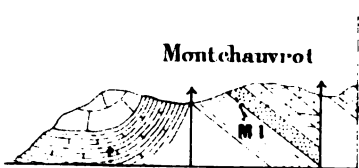
Bourgeat, Région du Jura.

4



DES FAILLES DE LA PLAINE
 section générale SE au NO

TERRAINS

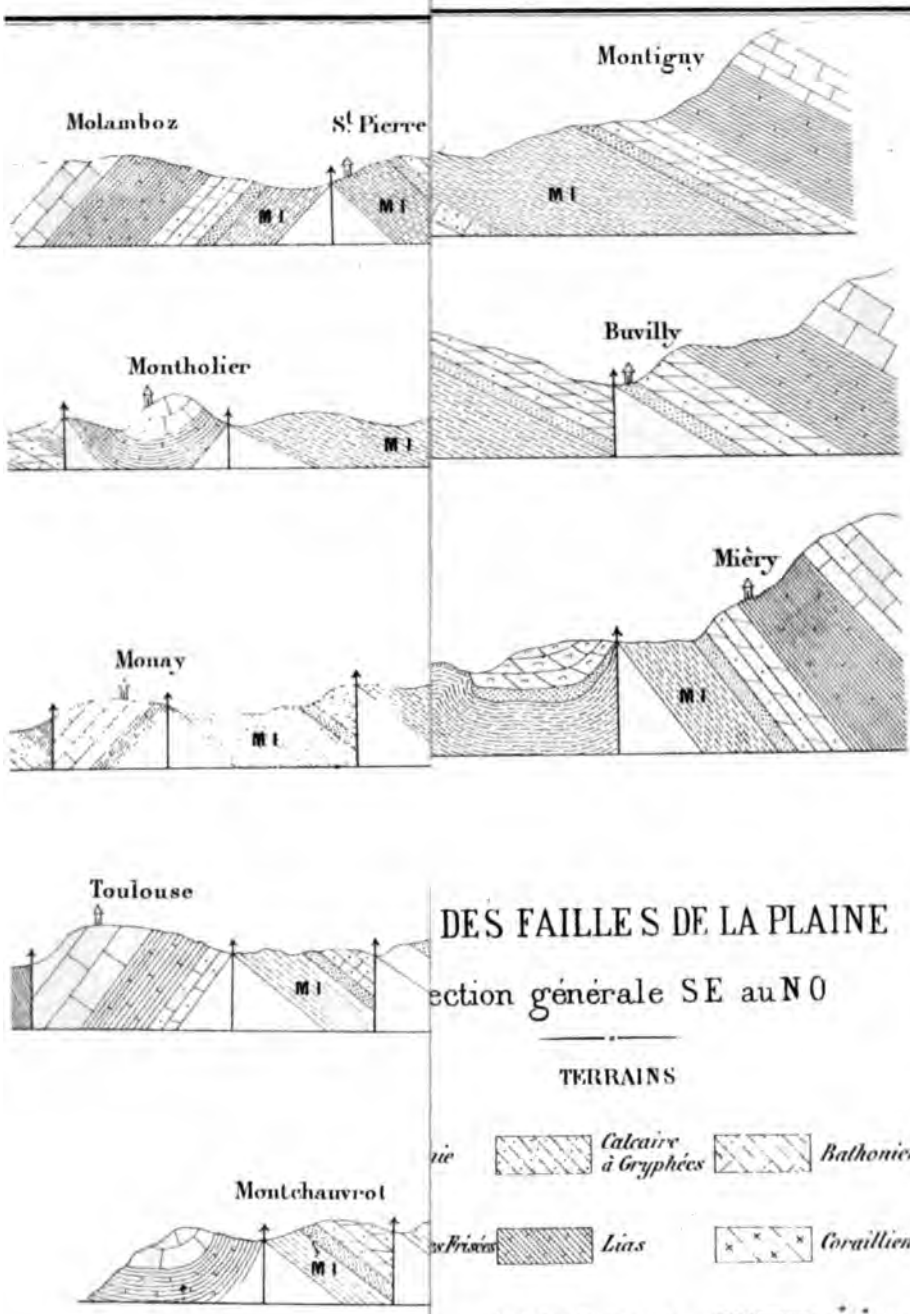


- Calcaire à Gryphées* (diagonal lines /)
- Bathonien* (diagonal lines \)
- Lias* (horizontal lines)
- Corailien* (crosses)
- Bajocien* (diagonal lines X)
- Orfèvrilien* (vertical lines)

maire. Bruxelles


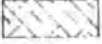




Bourgeat Région du J

•••••
•••••
•••••
•••••
•••••
•••••
•••••
•••••
•••••
•••••

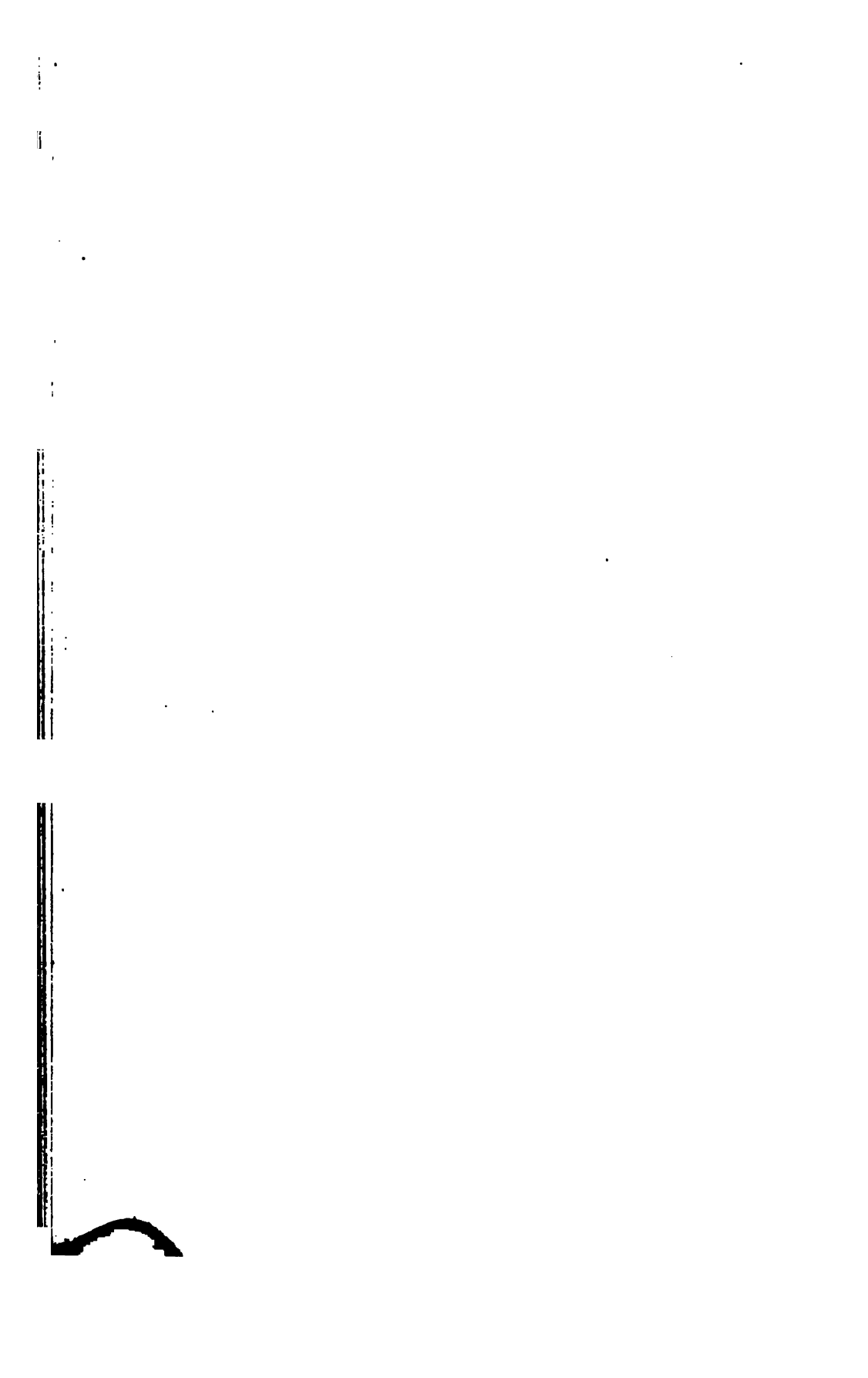


DES FAILLES DE LA PLAINE
 section générale SE au NO

TERRAINS

<i>ie</i>		Calcaire à Gryphées		Bathonien
<i>Frison</i>		Lias		Corailien
<i>Liasique</i>		Bayacien		Oxfordien

SI



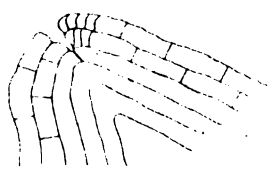
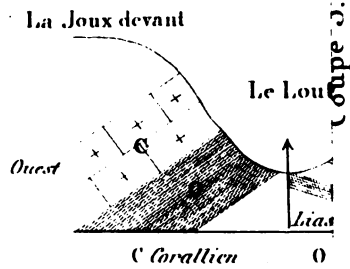
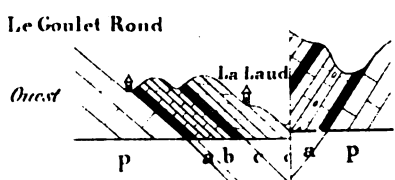


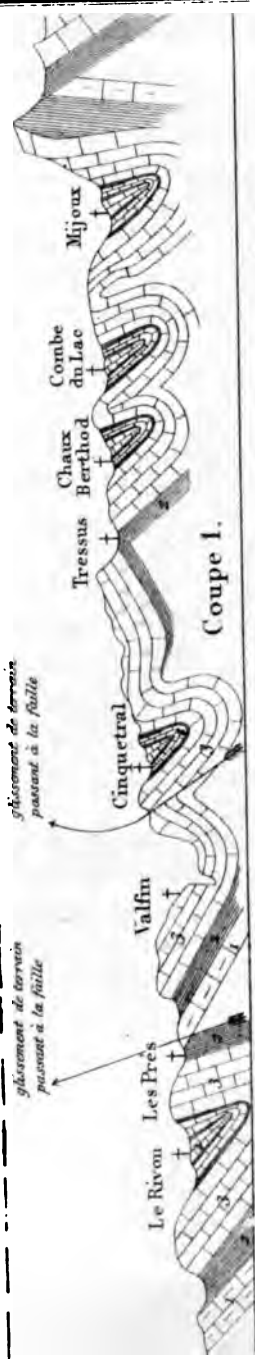
Fig. 4.



pe du Rivon . Cette coupe est prise de la p



Coupe 2.



Coupe générale du Jurassique à travers la partie des hautes chaînes du Jura ou les renversements de couches sont le plus prononcés

Echelle } des longueurs $\frac{1}{25000}$



ÉTUDES EXPÉRIMENTALES
SUR
LE CURARE ET LE MANGANÈSE

PAR

M. J.-F. HEYMANS

Docteur en sciences naturelles.

Introduction.

• Lorsqu'on se place au point de vue de la thérapeutique, dit Dujardin-Beaumetz ⁽¹⁾, les théories du diabète, qui sont si nombreuses, peuvent se ramener à trois principales : la théorie hépato-intestinale, ou si l'on aime mieux, la théorie alimentaire; la théorie hépatique proprement dite, et enfin la théorie nerveuse. Toutes ces hypothèses ont eu, en effet, une consécration thérapeutique. Pour la théorie alimentaire, nous avons le merveilleux ensemble de moyens diététiques conseillés par le professeur Bouchardat.

• La théorie nerveuse peut invoquer les médicaments nervins et à leur tête le bromure de potassium.

• Enfin la théorie hépatique proprement dite peut revendiquer les médicaments qui agissent directement sur le foie, comme l'arsenic, le manganèse. »

L'influence thérapeutique de l'arsenic s'est trouvée confirmée par l'expérimentation physiologique : les recherches de Saikowsky ⁽²⁾, de Quinquaud ⁽³⁾ et de M. le professeur

(1) DUJARDIN-BEAUMETZ, *Bulletin de l'Académie de médecine de Paris*, 1863, 2^e série, t. XII, p. 1006.

(2) SAIKOWSKY, *Centralblatt für die medicinischen Wissenschaften*, 1868, p. 769.

(3) QUINQUAUD, *Bulletin général de thérapeutique médicale et chirurgicale*, 1882, p. 241. *Comptes rendus des séances et mémoires de la Société de biologie*, séance du 15 juillet 1882.

Masoin ⁽¹⁾, tendent à prouver que l'acide arsénieux prévient ou atténue le diabète artificiel, par exemple celui que détermine le curare.

Le manganèse, entré dans la thérapeutique du diabète, n'a pour lui que les recommandations des cliniciens; à notre connaissance aucune expérience sur des animaux n'a ni justifié, ni infirmé l'emploi de ce médicament. Nous avons entrepris cette étude encore vierge et institué dès l'été de l'année 1884 des séries d'expériences dont nous analyserons plus loin les principales. Ces recherches ont été faites au laboratoire de physiologie de l'Université de Louvain, sous la direction bienveillante de M. le professeur Masoin. Qu'il reçoive ici l'expression de notre reconnaissance pour les nombreux conseils qu'il n'a cessé de nous donner.

Ce travail a pour but de déterminer si l'intoxication chronique par le manganèse préserve du diabète curarique. Il se divise en deux parties : la première comprend la technique expérimentale et l'étude des modifications fonctionnelles déterminées par le curare; la seconde, la description et l'analyse des expériences faites sur des animaux soumis d'abord au manganèse, curarisés ensuite.

(1) MASOIN, *Revue médicale de Louvain*, 1884; p. 97.

PREMIÈRE PARTIE.

TECHNIQUE EXPÉRIMENTALE.

Animaux mis en expérience. — Les animaux dont nous nous sommes servi sont des chiens et principalement des lapins. Les chiens devraient être préférés, mais il est assez difficile de se les procurer dans un état comparable, c'est-à-dire ayant même âge, même constitution, etc., toutes conditions qui sont autant d'états organiques capables d'influencer la marche des phénomènes et de masquer les légères différences.

Quant aux lapins, nous pouvons nous résumer en un mot et dire que nous avons opéré sur une seule et même catégorie, sur des lapins pris par séries successives, de même nichée, âgés d'au moins huit mois, et pesant de 1800 à 2500 grammes; de préférence nous prenions même les femelles. Les lapins de même descendance, gardés séparément dans des garennes voisines, recevaient une nourriture identique. Les garennes sont d'un type spécial lorsque l'urine doit être recueillie, des cages en zinc où les lapins reposent sur un treillis en fil de fer, le fond forme un plan incliné et la partie centrale est percée de trous pour éconduire les urines. Celles-ci sont reçues sur un fin tamis placé dans un entonnoir en verre et se déversent de là dans des vases à goulot étroit. Nous atteignons de la sorte plusieurs avantages : les excréments tombent à travers le treillis, et s'amassent sur le fond en zinc, d'où ils sont enlevés journellement. Les urines coulent sur le plan incliné, passent par le fond troué, filtrent par le tamis et se réunissent dans les vases, dépouillées de toute impureté : elles n'attendent que l'analyse journalière. Le lapin est conservé ainsi dans une grande propreté, d'autant plus que sa nourriture est déposée en petits morceaux dans une crèche qu'on a fixée à la paroi de la cage de zinc. Dans des garennes semblables nous mettions en observation parallèle des lapins de même nichée : dans les uns des lapins soumis au carbonate de manganèse, dans les autres des lapins ingérant journellement

une certaine quantité de permanganate de potassium ; dans d'autres enfin, des lapins dits de contrôle, qui, soumis au régime alimentaire des deux premières catégories, ne recevaient aucune dose de manganèse.

Nourriture. — Les chiens ont eu comme nourriture du pain, des pommes de terre et de la viande ; ces aliments se donnent d'une manière variable. Les lapins, qui ne sont pas mis en ration d'équilibre, reçoivent alternativement et successivement des feuilles de chou, des feuilles et des racines de carotte, du son et du pain. Certaines expériences exigeaient pour plus d'exactitude de mesurer les ingesta afin de juger sûrement des modifications journalières des ingestas : à cet effet la ration était pesée journellement et répétée identiquement tous les matins. Prenant régulièrement la même quantité d'aliments, le lapin arrive au bout de deux à six semaines à consommer autant qu'il absorbe et conserve alors un poids fixe ; il est en *ration d'équilibre*. De tels animaux, qui mangent journellement la même nourriture et en même quantité, nous ont servi de pierre de touche pour juger de l'influence qu'exercent sur leur organisme le carbonate de manganèse, le permanganate de potassium et l'intoxication par le curare.

La ration d'équilibre que nous avons adoptée consiste en pain et en feuilles de carotte, quand la saison l'a permis, sinon, en racines. La carotte, dit Gossin (1), est un précieux légume qui plaît à tous les animaux de nos fermes ; ceux qui en mangent s'entretiennent dans un excellent état de santé. Les feuilles de carottes, toujours fraîches quand elles étaient données, provenaient d'un même champ ; les racines aussi étaient de même provenance. On peut dire que le pain a été identique durant tout le temps ; c'était du pain de munition, fourni par le même boulanger. Pain et feuilles de carotte, ou pain et racines de carotte constituaient ainsi la ration d'entretien ; nous indiquerons à l'occasion la proportion et la quantité de chacun de ces éléments. Nous ne

(1) GOSSIN, *Encyclopédie de l'agriculture de Mo Gayot*, 1876, t. IV p. 842. •

pourrions dire de cette alimentation qu'elle est parfaite sous tous les rapports, mais l'expérience nous autorise à la considérer comme très convenable : nous avons pu en effet tenir en observation durant le long espace de huit mois deux lapins recevant exclusivement tous les jours 300 grammes de carotte et 30 grammes de pain. Ils étaient tous deux bien portants et le poids de l'un oscillait régulièrement entre 2300 et 2400 grammes, celui de l'autre entre 2100 et 2200 grammes. Nous finissons ainsi les généralités concernant les animaux mis en observation; nous indiquerons les particularités à l'occasion de chaque expérience.

Procédé analytique des urines. — Au cours de nos expériences nous avons examiné et analysé un nombre considérable d'urines. Nous y avons observé les préceptes de la chimie analytique, tels qu'ils sont consignés, surtout dans Frésenius (1), et en même temps nous avons strictement suivi les règles indiquées par Hoppe-Seyler (2), Neubauer et Vogel (3). La réaction fut déterminée à l'aide du papier de tournesol rouge et bleu, la densité par l'uromètre en amenant souvent l'urine à la température de 15° C. (4).

Le dosage courant de l'azote et concurremment de l'urée était pour nous d'une grande importance. Cependant nous n'avons suivi ni la méthode de Liebig, généralement en usage en Allemagne, ni la méthode indiquée par Pflüger (5). De bonne heure nous nous étions habitué au dosage à l'hypobromite de sodium, procédé de Knop-Esbach, nous l'exécutions à l'aide de l'appareil de M. Depaire (6). Des dosages de contrôle nous ont appris que le volume de l'azote varie à peine d'un demi-centi-

(1) R. FRÉSÉNIUS, *Traité d'analyse chimique qualitative*. Paris, 1879; *Traité de chimie quantitative*. Paris, 1885.

(2) HOPPE-SEYLER, *Traité d'analyse chimique appliquée à la physiologie et à la pathologie*. Paris, 1877.

(3) NEUBAUER et VOGEL, *De l'urine et des sédiments urinaires*. Paris, 1877.

(4) Dans les autres cas nous nous sommes servi des tables construites par A. BOUCHARDAT, *De la glycosurie*. Paris, 1875, p. XIX.

(5) PFLÜGER et BOHLAND, *Eine einfache Methode zur Bestimmung des Stickstoffs im Harn*. ARCHIV FÜR PHYSIOLOGIE, 1884, Bd XXXV, p. 454

(6) DEPAIRE, *Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique*, 1876, 3^e série, t. X, p. 898.

mètre cube, ce qui peut donner une erreur de 0,2 pour mille. L'expérience acquise par des milliers de dosages faits avec cet appareil, nous a donné une grande confiance dans ce procédé si simple, si rapide et, nous semble-t-il, suffisamment exact pour nos recherches. Nous pouvions nous y fier d'autant plus que nous travaillions toujours sur des urines très analogues.

Faisons ici une remarque importante : dans les chiffres que nous citerons plus loin, il n'est jamais défalqué le volume d'azote dû à la décomposition de l'acide urique et de la créatinine. Nous n'avons point cherché à calculer la quantité de ces substances, car pour nous il était seulement important de savoir combien de substances azotées étaient éliminées par jour.

La recherche du sucre s'est faite à l'aide de la liqueur cupro-potassique, composée d'après la formule Fehling ; dans des cas douteux, nous avons eu recours au réactif de Bötger et au polarimètre Laurent. Ce dernier appareil nous servit encore au dosage, lorsque les chiffres fournis par la liqueur de Fehling nous parurent sujets à caution. Le dosage au polarimètre se fait avec des urines traitées à l'acétate de plomb ; cette clarification préalable est encore exigée parfois quand on veut titrer par la solution cuivrique ; on précipite alors l'acétate de plomb par le carbonate de potassium. Quand il existe seulement des traces de glycose, il est toujours difficile de la déceler ; nous ne pouvons croire le docteur Lutz ⁽¹⁾ qui dit que la solution cupro-potassique décèle un cent millième et même un millionième de glycose. Pour les urines douteuses nous en prenions une grande quantité, par exemple 200 centimètres cubes, et nous la réduisions au bain-marie au dixième de son volume : le sucre y était ensuite recherché et dosé d'après les méthodes indiquées ci-dessus. On découvre ainsi plus sûrement la présence des traces de glycose. Nous n'avons pas mis en usage la méthode à alcool de Brücke. Pour nous assurer davantage de la nature des précipités, nous les avons au besoin examinés au microscope.

⁽¹⁾ LUTZ, *Dictionnaire encyclopédique des sciences médicales de Dechambre*, 4^e série, t. IX, p. 418. « Une solution, dit-il, qui ne contiendrait que 0,00004 de glucose donne encore un précipité rouge sensible ; une solution de 0,000004 produit encore une coloration sensible suivant la position dans laquelle on la tient contre la lumière. »

Sels de manganèse. — Ceux que nous avons employés sont le permanganate de potassium et le carbonate de manganèse. Le permanganate est en prismes volumineux ; pour en peser de petites quantités, il est pilé dans un mortier de porcelaine. Le carbonate est en poudre blanche, terreuse, contenant 7 à 13 % d'eau ; il est purifié des traces de fer. Les modes d'administration des deux sels diffèrent entre eux. La dose de la poudre de carbonate était mêlée intimement dans la crèche à la ration journalière de pain ; en même temps que cet aliment, elle était ainsi soigneusement absorbée par les lapins. Nous avons d'abord tâtonné pour l'administration du permanganate. Le donnerait-on en solution ? Cette solution, mise en contact avec les tissus organiques, se décompose et exerce avant tout une action oxydante et par cela même désinfectante ; à cette propriété est dû son emploi fréquent en chimie et en thérapeutique externe. La solution de permanganate, introduite dans le tube digestif, y exerce sur son passage dans la bouche, le pharynx, l'œsophage et l'estomac cette action oxydante, s'y décompose et s'engage dans des combinaisons nouvelles pour entrer ainsi dans le torrent circulatoire : « l'action du permanganate, comme le dit J. W. Jordan (1), doit dépendre d'un autre sel de ce métal. »

Cependant les médecins, qui prescrivent le permanganate, soit en solution, soit en pilules avec une poudre inerte comme le kaolin, cherchent à obtenir un double effet, l'action immédiate d'oxydation déterminée par le permanganate qui se décompose, ensuite l'action médiate exercée sur la nutrition générale par le manganèse devenu basique. Dans la thérapeutique du diabète pourrait-on juger de la valeur du manganèse en donnant indifféremment soit son sel, soit le permanganate ? Nous pensons que non, car nous connaissons trop imparfaitement d'un côté la nature du diabète, d'un autre côté l'action intime de n'importe quel agent thérapeutique, pour pouvoir nous permettre légitimement de négliger l'action première

(1) JORDAN, *British medical Journal*, 1885, p. 820.

du permanganate. Aussi nous avons essayé de le donner en solution ; cependant pour les lapins nous avons dû y renoncer, leur digestion est troublée par l'ingestion de la quantité de liquide nécessaire ici pour enlever la causticité à la solution du permanganate ; ils meurent même, si l'administration se prolonge. Quatre chiens ont été soumis au permanganate en solution ; ils n'ont pas présenté de phénomènes différant de ceux qui l'ont pris sous la forme suivante. Le permanganate à donner aux chiens est mis au centre d'un morceau de pain d'une vingtaine de grammes, il vient partiellement du moins en contact avec la muqueuse digestive et agit sur elle, lorsque le chien écrase et avale cet aliment. L'administration aux lapins s'est faite d'une manière analogue. Au voisinage de la croûte du pain, nous découpons de petits cubes d'environ cinq millimètres de côté, puis sur une des faces nous extrayons un cône allongé. Un centigramme de la poudre du permanganate est pesé, puis divisé en dix parties d'un milligramme chacune, nous faisons tomber un milligramme dans la cavité de chaque cube et la refermons ensuite par le petit cône extrait. De tels morceaux, déposés le matin dans la crèche, sont immédiatement pris d'une pièce par les lapins à jeun. Le permanganate, lors de la mastication et de la déglutition, agit encore partiellement sur la muqueuse de la bouche, du pharynx et de l'œsophage ; l'estomac du lapin étant continuellement rempli de nourriture, nous croyons que l'action caustique du permanganate est nulle sur la muqueuse gastrique : à ce point de vue, il y a une différence d'action chez les herbivores et les carnivores. A part ces imperfections inévitables, nous croyons avoir administré les composés manganiques d'une manière très analogue à celle qui sert chez l'homme ; leur influence sur les organismes des animaux sera donc aussi analogue. Si d'une part ils ont, comme le prétendent certains cliniciens, une action favorable sur la maladie du diabète pathologique, et que d'autre part ils n'en ont point sur le diabète artificiel du curare, on devra conclure à une différence de nature entre ces deux diabètes, et refuser à la thérapeutique de chercher confirmation dans l'expérimentation physiologique pour le cas en question.

Curare et son action sur l'organisme. — Presque toutes nos expériences se terminent par des curarisations; les animaux, ayant été soumis ou non au manganèse, étaient curarisés, et nous observions le jeu des fonctions organiques, principalement celle de l'excrétion urinaire. La curarisation constitue ainsi une des bases de notre expérimentation. Nous avons pris connaissance des règles d'administration du curare telles qu'elles sont consignées dans les auteurs; nous avons constaté et contrôlé leurs observations un grand nombre de fois. On nous permettra donc d'émettre nos idées concernant l'action de ce poison que nous avons concurremment étudié avec quelque attention.

On sait que les observations contraires faites par divers auteurs s'expliquent en partie par la composition variable du curare (1); afin que nos expériences fussent comparables, nous n'avons employé, durant toute la durée de l'expérimentation, qu'un même échantillon de curare. Nous en faisons dans l'eau distillée une solution extemporanée au centième, nous l'injections à l'aide de la seringue de Pravaz dans le même endroit de l'animal, toujours dans un des gastro-cnémiens, en passant dans une même séance de celui de droite à celui de gauche.

Dock a dit sans doute avec raison que « l'empoisonnement curarique détermine l'apparition de sucre dans les urines, même chez des animaux depuis plusieurs jours à jeun (2) »; cependant, il ressort de nos observations que l'état de jeûne ou de digestion influe dans une certaine mesure d'abord sur le moment d'apparition de la glycosurie, ensuite sur son degré d'intensité. Nous ajouterons que, selon nous, la qualité de la nourriture influe de même sur la glycosurie. Pour échapper à toutes ces causes d'erreur, nous avons donné à tous nos lapins une nourriture très analogue, si pas identique; ceux d'une même série étaient toujours soumis à un régime exactement le même. Donnons ici d'une manière générale le dispositif de la journée : le matin vers huit heures les animaux reçoivent leur ration quo-

(1) COUTY et LACERDA, *Archives de physiologie normale et pathologique*, 1880, t. XII, pp. 555 et 697.

(2) DOCK, *Archiv für Physiologie*, 1872, Bd V, p. 583.

tidienne; s'ils sont en ration d'équilibre, ils sont pesés chaque fois. A la nourriture est ajoutée la dose de sel de manganèse; nous déversons les urines et les analysons ensuite.

Sans rien changer au régime les jours de curarisation, nous procédons vers midi aux injections de curare et les continuons dans l'après-midi et même jusqu'au soir. Les animaux sont ainsi curarisés durant la digestion; ils ont mangé avant, et si durant la nuit ils consomment le restant de la ration ils en sont au même point au lendemain matin que la veille; toutes les modifications survenues dans les sécrétions doivent être imputées au curare.

Dans les annotations du temps nous avons fait après coup une transposition: par elle nous en arrivons à ne plus marquer ni date, ni jour, ni heure ordinaires; pour toutes les expériences indistinctement nous tenons comme premier jour celui d'où date l'observation; pour les curarisations nous comptons l'heure du moment de la première injection; pour la sécrétion urinaire nous prenons comme point de départ le moment où l'animal entre en résolution musculaire; nous cherchions en effet à déterminer quelle est l'influence de la résolution sur l'excrétion et la sécrétion de l'urine. Cette modification fait ressortir l'uniformité des expériences, elle nous permet actuellement d'embrasser d'un seul coup d'œil les différents tableaux, de les comparer ensemble et enfin d'en tirer des conclusions. Dans les tableaux publiés par les auteurs sur des questions analogues, la comparaison des différentes expériences demande toujours un certain calcul qui empêche la lecture courante des travaux. Nous croyons donc utile la modification faite par nous.

Pour servir de base à l'étude des modifications produites dans l'organisme par le curare, donnons ici l'histoire de deux animaux mis en expérience.

EXPÉRIENCE I. — Grande lapine, âgée d'un an, recevant journellement le matin à huit heures 300 grammes de feuilles de carotte et 100 grammes de pain.

1 ^{er} jour, poids	2310	grammes.
13 ^e » »	2458	»
21 ^e » »	2550	»
24 ^e » »	2500	»

Curarisation vers midi.

0 h. 0 m. — 4,5 milligr. de curare.	
0 h. 25 m. — 1,5 " "	
0 h. 30 m. — Résolution musculaire.	0 h. 0 m. — La vessie est vidée; urine trouble, jaunâtre, alcaline.
0 h. 50 m. — 0,6 milligr. de curare.	
1 h. 10 m. — 1 " "	4 h. 0 m. — 25 centim. cubes d'urine plus claire; D = 1.010; traces de sucre.
1 h. 30 m. — 0,5 " "	
1 h. 40 m. — 1 " "	
1 h. 55 m. — 1 " "	5 h. 40 m. — 45 centim. cubes d'urine légèrement acide; D = 1,014; 2,5 ‰ de sucre.
2 h. 5 m. — 1 " "	
2 h. 55 m. — 1 " "	7 h. 30 m. — 20 centim. cubes d'urine acide; 5 ‰ de sucre.
3 h. 20 m. — 1 " "	
4 h. 10 m. — 1 " "	
4 h. 20 m. — 1 " "	
5 h. 0 m. — 1 " "	
6 h. 10 m. — 1 " "	

—
Total d'urine 90 centim. cubes.

Total de curare 17,1 milligr.

25^e jour, poids 2448 grammes, urine presque ordinaire, sans sucre, seulement un peu plus trouble.

EXPÉRIENCE II. — Petite chienne fauve, bien nourrie au pain, aux pommes de terre et à la viande.

1^{er} jour, poids 3002 grammes.

Curarisation A, vers midi.

0 h. 0 m. — 7 milligr. de curare.	
0 h. 15 m. — Résolution musculaire.	0 h. 0 m. — Urine nulle.
0 h. 35 m. — 1,5 milligr. de curare.	0 h. 15 m. — 2 centim. cubes d'urine claire, incolore, alcaline et sans sucre.
1 h. 3 m. — 1 " "	
1 h. 20 m. — 0,5 " "	2 h. 0 m. — 8 centim. cubes d'urine jaunâtre, alcaline, sans sucre.
1 h. 30 m. — 1 " "	
3 h. 5 m. — 1 " "	2 h. 50 m. — 5 centim. cubes d'urine jaunâtre, alcaline, sans sucre.
4 h. 5 m. — 2 " "	
5 h. 10 m. — 1 " "	6 h. 45 m. — 9 centim. cubes d'urine claire presque incolore, alcaline sans sucre.
6 h. 0 m. — 2 " "	
6 h. 30 m. — 0,5 " "	7 h. 30 m. — 6 centim. cubes d'urine claire, légèrement jaunâtre, alcaline sans sucre.
7 h. 20 m. — 2 " "	

—
Total de curare 19,5 milligr.

—
Total d'urine 30 centim. cubes.

5^e jour.

Curarisation B, vers midi.

0 h. 0 m. — 6 milligr. de curare.	
0 h. 12 m. — 0,5 » »	
0 h. 18 m. — Résolution musculaire.	0 h. 0 m. — Pas d'urine.
1 h. 0 m. — 1 milligr. de curare.	0 h. 32 m. — 5 centimètres cubes d'urine
1 h. 15 m. — 1,5 » »	claire, incolore, neutre(?),
1 h. 25 m. — 1 » »	sans sucre.
1 h. 55 m. — 1 » »	1 h. 52 m. — 10 centimètres cubes d'urine
2 h. 5 m. — 0,5 » »	claire, incolore, légèrement
2 h. 25 m. — 1 » »	alcal., sucre 0,75 ‰.
2 h. 45 m. — 1 » »	2 h. 29 m. — 13 centimètres cubes d'urine
3 h. 7 m. — 1,5 » »	claire, incolore, légèrement
3 h. 15 m. — 1 » »	acide, sucre 2,5 ‰.
3 h. 30 m. — 1 » »	2 h. 37 m. — 4 centimètres cubes d'urine
3 h. 40 m. — 1 » »	claire, incolore, acide,
4 h. 0 m. — 0,5 » »	sans sucre.
4 h. 10 m. — 2 » »	4 h. 52 m. — 6,5 centimètres cubes d'urine
4 h. 30 m. — 1 » »	claire, incolore, acide,
	sans sucre.
<hr/> Total de curare 22,5 milligr.	<hr/> Total d'urine 38,5 centimètres cubes.

10^e jour, poids 2830 grammes.

Curarisation C, vers midi.

0 h. 0 m. — 7 milligr. de curare.	0 h. 0 m. — Pas d'urine.
0 h. 30 m. — Résolution musculaire.	7 h. 0 m. — 15 centimètres cubes d'urine
0 h. 45 m. — 1,5 milligr. de curare.	claire, incolore, légèrement
1 h. 25 m. — 1 » »	acide; D = 1,020;
1 h. 40 m. — 1 » »	sucres 6,66 ‰.
3 h. 20 m. — 1 » »	12 h. 0 m. — L'animal mourait; lors de
3 h. 45 m. — 1 » »	l'autopsie nous recueillions
5 h. 15 m. — 1 » »	dans la vessie seulement
6 h. 0 m. — 1 » »	2,5 centim. cubes
7 h. 10 m. — 1 » »	d'urine sucrée.
8 h. 35 m. — 1 » »	
<hr/> Total de curare 18,5 milligr.	<hr/> Total d'urine 17,5 centim. cubes.

Analysons l'histoire de ces deux animaux. Les quatre séances de curarisation indiquent suffisamment notre mode d'administration de ce poison. La dose classique pour mettre les animaux en résolution est de deux milligrammes de curare par kilogramme; cette quantité est généralement suffisante pour les animaux à jeun. Nous l'avons reconnu par des expériences non

signalées ici. Par celles qui sont décrites plus haut et où les animaux sont en digestion, on voit que la dose de deux milligrammes a dû être dépassée. Si la quantité nécessaire pour la résolution est injectée du premier coup, l'animal tombe généralement au bout de quinze minutes; si après ce laps de temps il n'est pas pris, on peut généralement dire que la dose est insuffisante et que tout passera sans paralysie.

Toutes choses égales d'ailleurs, il semble découler de nos expériences qu'une seule dose de curare, injectée à deux animaux semblables, l'un à jeun, l'autre en digestion, produit un effet plus rapide et plus intense sur le premier que sur le second. Cette différence s'explique par l'absorption plus rapide qui se fait chez l'animal à jeun, par une action toxique plus profonde exercée sur celui-ci, enfin par une élimination plus lente. Ce fait trouve d'ailleurs son application dans l'absorption de toute substance toxique, soit par la voie hypodermique, soit par la voie digestive.

Qu'entendons-nous ici par résolution musculaire? — Nous regardons comme tel l'état toxique où les muscles de la vie animale sont paralysés complètement, tandis que ceux de la vie végétative, comme les muscles cardiaques et respiratoires conservent leur fonctionnement régulier. Il s'agit principalement de conserver intacts ceux de la respiration. Durant la résolution, l'animal est impuissant à faire des mouvements volontaires, il ne répond à aucune excitation venant du dehors, il est flasque, incapable de se soutenir et se trouve couché sur le flanc. Cependant la respiration se fait régulièrement et largement; le thorax et l'abdomen se dilatent en même temps durant l'inspiration. Un tel état ne se prolonge pas longtemps: le curare, qui a atteint son maximum d'effet, s'élimine bientôt en quantité plus grande qu'il ne s'absorbe; il arrive alors un moment où l'animal, excité par un bruit soudain, par une impression cutanée, réagit partiellement, contracte certains muscles et s'agite comme pour fuir. En ce moment il faut intervenir par une nouvelle injection de curare pour le maintenir en résolution. A notre point de vue, nous considérons la curarisation comme parfaite, lorsque, durant toute la durée de la séance, l'animal n'a pu se relever et qu'en même temps la respiration n'a pas été gênée.

Pour bien conduire une telle curarisation il faut une parfaite connaissance du curare dont on se sert, de l'animal sur lequel on opère et enfin de la marche de la sécrétion urinaire. Ce qui frappe dans l'expérience II, curarisation C, c'est la résolution musculaire prolongée (12 heures de temps), par une dose relativement plus petite de curare, 18,5 milligrammes; lors de la curarisation A, 19,5 milligrammes n'avaient déterminé qu'une résolution de 7 à 8 heures, et principalement à la curarisation B, 22 milligrammes, qu'une résolution de 4 à 5 heures. Nous trouvons l'explication de ce fait dans l'élimination urinaire de cette chienne durant les trois séances. Lors de la curarisation A, elle élimine régulièrement de l'urine jusqu'à concurrence de 30 centimètres cubes en 7 heures 30 minutes; à la curarisation B, elle élimine 38,5 centimètres cubes en 4 heures 52 minutes; au contraire, durant la curarisation C, en comprimant la vessie pendant les deux premières heures, nous n'obtenons aucune urine; de la 6^e à la 7^e heure, il y a sécrétion assez rapide et nous recueillons 15 centimètres cubes. Après cette élimination, l'animal étant revenu peu à peu à lui, nous lui injectons encore à deux reprises un milligramme de curare: il rentre dans une résolution musculaire d'où il ne devait plus sortir. Vainement nous agissons sur la vessie par la compression abdominale, nous n'obtenons plus aucune urine; vers la douzième heure il succombe à l'action toxique du curare; sa vessie contenait à peine, comme nous l'indiquons plus haut, 2 à 3 centimètres cubes d'urine, quantité insignifiante pour l'espace de 5 heures. L'animal, n'ayant pas éliminé d'urine, n'avait pu se débarrasser du poison qui le paralysait de plus en plus, et il y succomba.

Des exemples analogues, où les phénomènes toxiques ont succédé à l'arrêt de l'élimination urinaire du curare, se sont présentés cinq fois durant le cours de nos recherches. Nous nous souvenons entre autres d'un chien à éctromélie bithoracique (1) que M. le professeur Masoin avait mis à notre disposition pour recher-

(1) Cas analogue à celui publié par BOCHFONTAINE, *Éctromélie bithoracique chez une chienne*. ARCHIVES DE PHYSIOLOGIE NORMALE ET PATHOLOGIQUE, 1881, 2^e série, t. VIII, p. 236.

cher l'atrophie médullaire et cérébrale; en attendant nous croyions l'utiliser et étudier sur lui l'influence du curare : nous le perdions malheureusement dans la première séance. L'animal se montrait d'abord assez récalcitrant aux doses classiques, nous faisons de nouvelles injections et il entrait en résolution; au bout d'une heure, pas d'urine, et l'animal, loin de se relever, commençait à être pris de troubles respiratoires. On pratique artificiellement la respiration, on applique l'électricité, on excite la muqueuse nasale par l'ammoniaque; rien n'y fait, l'animal ne revient pas à lui, les battements du cœur diminuent en nombre, et il se meurt. A l'autopsie la vessie était fortement contractée et complètement vide. Durant les trois heures qu'avait duré la curarisation, il n'y avait eu ni élimination d'urine ni élimination de curare. Celui-ci absorbé continuellement dans les muscles gastro-cnémiens où il avait été injecté, s'était accumulé dans le sang, de là était allé empoisonner le système nerveux tout entier et produire ainsi la mort de l'animal. D'une manière générale ces expériences nous semblent apprendre que *le curare injecté en même quantité dans deux animaux semblables ne déterminera chez l'un aucun phénomène toxique lorsque l'excrétion urinaire continue régulièrement, tandis qu'il tuera l'autre, si elle est arrêtée.* La cause de cet arrêt dans la fonction urinaire, nous ne pourrions la nommer. Les nerfs vasomoteurs des artères rénales interviennent-ils ? Faut-il mettre en cause la tension générale du sang et par suite l'activité fonctionnelle du cœur ? Une modification dans la nutrition générale arrête-t-elle toute exosmose rénale ? — Nous ne savons répondre à ces questions pour le moment.

Le curare paralyse en agissant sur le bout périphérique des fibres nerveuses, Cl. Bernard l'a démontré; de plus, quand on étudie son action sur l'animal entier, on remarque que cette action paralysante est progressive et débute par les muscles les plus éloignés du centre, par les muscles qui reçoivent les fibres nerveuses les plus longues. Cependant il paraît rationnel d'admettre, et rien ne l'infirmé sur le terrain expérimental, que le curare agit d'une manière égale et simultanée sur toutes les fibres motrices de la vie animale; mais comment mettre ces

deux données en accord avec la loi de l'avalanche de Pflüger? D'après cette loi, si toutes les fibres sont également empoisonnées, les muscles de la jambe et de l'avant-bras devraient se contracter les derniers de tous, ce qui est contraire à l'expérience puisqu'ils sont atteints les premiers. Ainsi la loi de Pflüger, dont la démonstration péremptoire nous paraît encore à faire, ne trouve pas d'application dans le cas présent. D'ailleurs, on sait que Vulpian ⁽¹⁾ vient de la combattre par des expériences directes qui tendent à faire admettre que l'influx nerveux, rentrant sous la loi générale qui règle l'action des puissances, diminuerait d'intensité en proportion du chemin parcouru. Si une telle règle régit la propagation du courant nerveux moteur, nous comprendrons pourquoi la paralysie déterminée par le curare est progressive, quoique en réalité il agit uniformément sur toutes les fibres, nous comprendrons pourquoi les muscles et particulièrement ceux de leurs extrémités sont paralysés les premiers; c'est qu'une même incitation nerveuse, partie du cerveau et de la moelle, perdant en route de son énergie, lutte encore avec avantage contre l'empoisonnement du curare dans les muscles du tronc, tandis qu'elle devient impuissante quand il s'agit d'organes plus éloignés.

L'action progressive du curare nous met en main le moyen d'immobiliser l'animal en expérience, en même temps que les mouvements respiratoires restent réguliers; aucun mouvement volontaire ne lui est impossible et pourtant les muscles, préposés à la respiration, se contractent d'une manière rythmique et déterminent la dilatation parallèle du thorax et de l'abdomen. Cependant si l'intoxication devient plus intense, les mouvements respiratoires s'altèrent. Les muscles scalènes, intercostaux et autres sont paralysés à leur tour; il ne reste intact que le diaphragme, car, comme le dit H. Chouppe « c'est sur le muscle animé par le nerf phrénique que l'action du curare paraît agir en dernier lieu ⁽²⁾. » Ce fait est exact, nous l'avons observé bien

⁽¹⁾ VULPIAN, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 1888, t. C, p. 1038.

⁽²⁾ CHOUPPE, *Dictionnaire encyclopédique des sciences médicales*, 1^{re} série, t. XXIV, p. 397.

des fois, il se caractérise par un mouvement respiratoire particulier dont nous voulons dire un mot. Le thorax et l'abdomen au lieu de présenter, comme à l'état normal, des mouvements parallèles dans l'inspiration et dans l'expiration, exécutent respectivement des mouvements opposés : l'abdomen se soulève encore durant l'inspiration parce que le diaphragme en se contractant refoule les viscères, mais en même temps la poitrine se déprime durant cette première période respiratoire. Dans la deuxième période, c'est le phénomène inverse qui se présente. Ce mouvement respiratoire est signalé par Lukjanow : « il n'est pas rare, dit-il, d'observer chez les lapins, pendant l'inspiration, une dépression de l'ensemble du thorax (1). » L'auteur n'indique point dans quelles circonstances. Comme nous l'avons observé, c'est quand le muscle diaphragmatique se contracte tout seul. Un vide tend à se former par cette contraction dans la cavité thoracique et la pression atmosphérique y répond de deux manières, l'air s'y précipite par les voies respiratoires, puis il agit en même temps sur les parois externes du thorax et détermine la dépression inspiratoire que nous avons signalée. Ce mouvement respiratoire, artificiel et passager ici, s'établit définitivement dans certains cas de pleurésie chronique et de tuberculose. M. le professeur Desplats (2) a appelé dernièrement l'attention sur cette altération pathologique et cherché à en déterminer la cause. Elle serait, d'après lui, d'origine nerveuse; les fibres qui président à la contraction des muscles intercostaux seraient atteintes primitivement par le processus inflammatoire et de là laisseraient dans l'inaction ces mêmes muscles. Ceux-ci permettent ainsi, comme dans la paralysie curarique, la dépression inspiratoire de la paroi du thorax; ce n'est que durant cette période d'inactivité qu'ils se dégénèrent. Cette priorité, accordée aux altérations nerveuses, trouverait nécessairement son indication thérapeu-

(1) LUKJANOW, *Ueber die Veränderungen der Intercostalräume bei der Respiration, als Beitrag zur Lehre von der Function der Intercostalmuskeln*. ARCHIV FÜR PHYSIOLOGIE, 1883, Bd. XXXIII, p. 82.

(2) DESPLATS, *Journal de médecine de Lille*, 1885, p. 240

tique. D'après l'interprétation de M. Desplats, ce phénomène respiratoire aurait donc une cause tout à fait analogue à celle déterminée par le curare.

Il est prouvé que le curare agit directement sur les fibres nerveuses motrices et produit ainsi l'immobilité du système locomoteur. Agit-il encore sur les autres fibres nerveuses, sur les vaso-motrices et les sécrétoires, si tant est que ces dernières existent? On pourrait difficilement dire s'il agit d'une manière directe sur elles; seulement nous voyons les fonctions auxquelles elles président subir des modifications assez profondes: les sécrétions, la calorification et sans doute la circulation s'écartent de leur marche normale.

Depuis Cl. Bernard on a décrit un grand nombre de perturbations survenant dans l'animal curarisé, on paraît même les multiplier outre mesure. Sont-elles toutes dues à l'action immédiate du curare? Il est difficile de le dire et impossible de faire le triage complet. Ailleurs nous trouvons des auteurs qui, dans le but expérimental qu'ils poursuivent, ont cherché à atténuer et à couvrir ces modifications par les circonstances où ils opèrent: ils prétendent même les supprimer complètement. Ainsi Zuntz se croit autorisé à dire « qu'on peut, durant des heures, déterminer la résolution musculaire par le curare, sans que la circulation et les autres fonctions de l'organisme, à l'exception du mouvement volontaire, en souffre d'une manière sensible »⁽¹⁾. Cette affirmation nous paraît trop absolue; nous serions plus catégorique si nous avions expérimenté dans des circonstances identiques, mais nous n'avons pu que les rendre très analogues. Nous avons immobilisé les animaux en évitant de les rendre dyspnéiques, au besoin nous les avons mis dans une atmosphère de 55° à 40° C. Cependant des modifications fonctionnelles sont toujours survenues; nous allons les signaler en nous arrêtant particulièrement sur la sécrétion urinaire qui a surtout fixé notre attention.

(1) ZUNTZ, *Ueber die Benutzung curarisirter Thiere zu Stoffwechseluntersuchungen*. ARCHIV FÜR ANATOMIE UND PHYSIOLOGIE. PHYSIOLOGISCHE ABTHEILUNG, 1884, p. 382.

Le premier effet du curare c'est de déterminer une hyperexcitabilité nerveuse, accompagnée d'une exaltation des autres fonctions organiques. L'animal réagit fortement contre la moindre impression, en même temps il est très agité. Les battements du cœur se précipitent, les mouvements respiratoires s'accélèrent, la température s'élève. Ce dernier phénomène avait échappé à Cl. Bernard (1), parce qu'il injectait des doses trop fortes du curare, la période d'hyperexcitabilité étant alors trop courte pour avoir son écho sur la température. Plus tard Tscheschichin (2), Fleischer (3), Hogyes (4) et Falck (5) ont cité des expériences où une élévation d'un degré s'était produite; dans quelques-unes de nos séances de curarisation, elle a même été plus forte. Nous avons observé chez des lapins la température rectale de 40°2, lorsque la période d'hyperexcitabilité a eu une durée plus longue. Si la dose de curare a été insuffisante, tous les phénomènes de la curarisation peuvent se borner à ceux de la première période; on peut même prolonger indéfiniment celle-ci en injectant à nouveau des quantités trop faibles pour produire la résolution: l'animal persiste alors dans un état d'intoxication que nous qualifions de *curarisation insuffisante*. L'hyperthermie est manifeste. Ce stade de la curarisation correspond à celui indiqué chez l'homme par A. Voisin (6). Avec cet auteur on pourrait dire que le curare administré à de telles doses détermine la fièvre en produisant l'accélération du cœur, la précipitation de la respira-

(1) CL. BERNARD, Cours de médecine, *Leçons sur les substances toxiques*, 1837, p. 368. L'expérience citée par l'illustre physiologiste n'a duré que dix minutes depuis le moment de l'injection du curare jusqu'au moment de la mort de l'animal. Il paraît naturel que ni l'élévation ni l'abaissement de la température n'aient pu être observés alors.

(2) TSCHESCHICHIN, *Zur Lehre von der thierischen Wärme*. ARCHIV FÜR ANATOMIE UND PHYSIOLOGIE, 1866, p. 151.

(3) FLEISCHER, *Die Wirkung der Blausäure auf die Eigenwärme der Säugethiere*. ARCHIV FÜR PHYSIOLOGIE, 1869, Bd II, p. 432.

(4) HOGYES, *Archiv für experimentelle Pathologie und Pharmakologie*, Bd XIV, p. 143.

(5) FALCK, *Die Wirkung einiger Alkaloide auf die Körpertemperatur*. ARCHIV FÜR PHYSIOLOGIE, 1881, Bd XXV, p. 863.

(6) VOISIN et LIOUVILLE, *Recherches cliniques sur l'action du curare, emploi de cette substance dans le traitement de l'épilepsie*. Paris, 1865. — VOISIN, Article curare. *Dictionnaire des sciences médicales de Jaccoud*, 1872, vol. X, p. 572.

tion, l'élévation de la température; nous verrons plus loin ce qu'il faut penser de l'excrétion de l'urée.

Dans nos expériences, cette période ne durait généralement qu'une quinzaine de minutes; puis survient la résolution musculaire, la circulation et la respiration descendent alors à leur rythme normal; la température baisse de même, revient à la moyenne, puis passe en dessous si l'animal n'est pas conservé dans un milieu de 37° à 40°. Fleischer⁽¹⁾, dont les observations nous ont paru exactes, indique dans ses tableaux 34 degrés centigrades comme la température la plus basse observée; durant les longues curarisations auxquelles nos lapins ont été parfois soumis, nous avons observé des températures bien inférieures, nous avons vu la température de 36°2, prise dans les oreilles, descendre à 26°. On comprend de là ce fait que le curare, comme le dit M. le professeur Fredericq⁽²⁾, peut tuer par le froid⁽³⁾.

Passons aux sécrétions, question capitale dans le sujet qui nous occupe. Nous ne dirons qu'un mot de la sécrétion salivaire. Chez les lapins nous n'avons jamais observé de modifications dans la fonction de ces glandes, jamais la salive ne découle de leur bouche. Chez les chiens, au contraire, il y a presque toujours hypersécrétion salivaire; ainsi chez la chienne de l'expérience II, un liquide clair et abondant a découlé lentement entre les lèvres durant tout le temps de la curarisation. La présence de cette hypersécrétion chez le chien et son absence chez le lapin s'explique par les différences anatomiques et fonctionnelles des glandes salivaires chez ces animaux.

L'urine excrétée durant les séances de curarisation varie-t-elle soit en quantité, soit en qualité? La qualité se modifie sûrement; il paraît en être de même pour la quantité. Nous allons confirmer ces assertions par des expériences instituées sur des lapins mis en ration d'équilibre.

(1) FLEISCHER, *l. c.*, p. 443.

(2) FREDERICQ et NUEL, *Éléments de physiologie*, 1885, p. 69.

(3) L'effet du curare sur la calorification se traduit ainsi par une élévation et un abaissement de température en rapport exact avec la durée et l'intensité de l'hyperexcitabilité et de la résolution curariques. Comparez FALCK, *l. c.*, p. 591.

EXPÉRIENCE III. — Lapine de huit mois, bien portante.

1^{er} jour, poids 1835 grammes, ration 460 gr. de feuilles de carotte et 30 gr. de pain.

2 ^e	»	»	»	ration indiquée.
3 ^e	»	»	»	id.
4 ^e	»	»	»	id.
5 ^e	»	»	»	id.
6 ^e	»	»	1855 grammes,	id.
7 ^e	»	»	»	id.
8 ^e	»	»	»	id.
9 ^e	»	»	»	id.
10 ^e	»	»	»	id.

Depuis le 11^e jour l'analyse des urines est faite.

	Poids.	Quantité d'urine.	Densité.	Matières azotées pour mille.	Poids total des matières azotées.	Ration indiquée.
11 ^e jour,	1874 gr.	260 centim. c.	1,022	7,63	1,98 gr.	id.
12 ^e »	1903	250	1,024	6	1,5	id.
13 ^e »	1903	305	1,023	5,3	1,02	id.
14 ^e »	1955	265	1,023	5,8	1,54	id.
15 ^e »	1945	365	1,022	5,8	2,12	id.
16 ^e »	2030	310	1,024	5,53	1,71	id.
17 ^e »	2020	340	1,024	5,8	1,97	id.
18 ^e »	2050	325	1,021	4,5	1,45	id.
19 ^e »	2075	325	1,022	4,5	1,45	id.
20 ^e »	2055	370	1,022	4,2	1,55	id.
21 ^e »	2100	335	1,023	4,5	1,5	id.
22 ^e »	2070	350	1,022	4	1,38	id.
23 ^e »	2085	310	1,021	6,3	1,97	id.
24 ^e »	2060	345	1,021	5,3	1,81	id.
25 ^e »	2070	340	1,020	4,5	1,42	rien.
26 ^e »	1945	80	1,018	13,4	1,07	ration indiquée.
27 ^e »	2055	420	1,022	5,8	2,43	id.
28 ^e »	2075	290	1,021	4,21	1,22	id.
29 ^e »	2045	365	1,020	5,53	2,09	id.
30 ^e »	2070	360	1,020	5	1,6	id.
31 ^e »	2090	360	1,022	5,53	2,09	id.
32 ^e »	2120	325	1,023	7,11	2,31	id.
33 ^e »	2122	275	1,023	6,84	1,88	id.
34 ^e »	2140	325	1,022	6,31	2,06	id.
35 ^e »	2140	340	1,021	5,26	1,79	id.
36 ^e »	2125	375	1,020	5,26	1,97	id.

Curarisation de ce lapin à 10 heures.

0 h. 0 m	—	4	milligr. de curare.
0 h. 25 m.	—	1,2	»
0 h. 35 m.	—	0,8	»
0 h. 55 m.	—	1	»

1 h 40 m. —	Résolution musculaire.	0 h. 0 m. —	La vessie est vidée, on obtient
1 h. 20 m. —	0,8 milligr. de curare.		quelques centimètres cubes
1 h. 30 m. —	0,5 » »		d'urine semblable à celle
1 h. 40 m. —	1 » »		des jours précédents.
1 h. 55 m. —	1 » »	2 h. 30 m. —	40 centimètres cubes d'urine
2 h. 5 m. —	1 » »		jaune, peu trouble; D. =
2 h. 25 m. —	1 » »		1,020; 10,53 pour mille
2 h. 55 m. —	1 » »		de matières azotées, total
3 h. 20 m. —	0,5 » »		0,42 grammes; sans sucre.
4 h. 10 m. —	2 » »	5 h. 5 m. —	75 centimètres cubes d'urine
4 h. 30 m. —	1 » »		jaune, moins trouble; D. =
5 h. 00 m. —	1 » »		1,017; 10,53 pour mille
5 h. 35 m. —	1 » »		de matières azotées, total
6 h. 10 m. —	1 » »		0,79 grammes; sans sucre.
6 h. 40 m. —	1 » »	8 h. 15 m. —	45 centimètres cubes d'urine
7 h. 5 m. —	1 » »		jaune rougeâtre, un peu
7 h. 35 m. —	1 » »		claire; D. = 1,015; 14,21
8 h. 10 m. —	1 » »		pour mille de matières azo-
8 h. 20 m. —	1 » »		tées; total 0,64 gr.; sucre ?
8 h. 55 m. —	1 » »		

Total de curare 25,8 milligr.

Total d'urine 160 centim. cubes.

Total de matières azotées 1,85 grammes.

La résolution musculaire n'a pas été continuée, le lapin a pu se relever à plusieurs reprises. Il est remis dans la garenne à 7^h 25^m du soir; il mange la nuit la plus grande partie de sa ration, excepté 50 grammes de feuilles environ.

37^e jour, poids 2128 grammes; urine de la nuit 100 centimètres cubes, très trouble; D. = 1,040; 12,7 pour mille de substances azotées: total, 1,27 grammes. Ainsi du 36^e au 37^e jour le lapin avait excrété 260 centimètres cubes d'urine, renfermant 3,12 grammes de matières azotées.

	Poids.	Quantité d'urine.	Densité.	Matières azotées pour mille.	Poids total des matières azotées.	Ration indiquée.
38 ^e jour,	2155 gr.	340 centim. c.	1,023	5,26	1,79 gr.	id.
39 ^e »	2195	320	1,021	5,26	1,68	id.
40 ^e »	2170	340	1,021	6,42	2,15	id.
41 ^e »	2160	370	1,020	4,73	1,73	id.

Analysons cette expérience. Elle nous montre à nouveau que les animaux en digestion résistent davantage à l'action toxique du curare. La dose initiale et classique a dû être augmentée, puis la quantité totale de curare a été considérable. Cependant

malgré elle la résolution musculaire n'a pas été complète, l'immobilisation n'a pas été constante et nous considérons la curarisation comme insuffisante.

L'expérience suivante est de même ordre et démontre encore la résistance au curare des animaux bien nourris et en digestion.

EXPÉRIENCE IV. — Un lapin analogue au précédent a été en observation durant 62 jours, recevant tous les matins à huit heures la ration de 480 grammes de feuilles de carotte et de 72 grammes de pain. Avant de déposer cette nourriture dans la cage, nous pesions l'animal et prenions les urines; on déterminait ensuite leur volume, leur densité et la quantité de substances azotées qui y étaient contenues. Pour abrégé nous ne citerons l'observation qu'à partir du cinquième jour qui précède la curarisation.

	Poids.	Quantité d'urine.	Densité.	Matières azotées pour mille.	Poids total des matières azotées.	Ration indiquée.
58 ^e jour,	2480 gr.	270 centim. c.	1,027	7,63	2,16 gr.	id.
59 ^e »	2435	285	1,024	7,11	2,05	id.
60 ^e »	2485	270	1,027	7,9	2,03	id.
61 ^e »	2475	320	1,024	6,31	2,02	id.
62 ^e »	2485	315	1,023	7,11	2,24	id.

Curarisation à 10 heures, le même jour que l'expérience III.

0 h. 0 m.	— 4,5 milligr. de curare.				
0 h. 25 m.	— 1,5 » »				
0 h. 35 m.	— 0,8 » »				
0 h. 50 m.	— 1 » »				
0 h. 55 m.	— 1 » »				
1 h. 0 m.	— Résolution musculaire. 0 h., 0 m. — Pas d'urine.				
1 h. 10 m.	— 1 milligr. de curare.				
1 h. 20 m.	— 0,8 » »				
1 h. 30 m.	— 0,5 » »			2 h. 35 m. — 35 centimètres cubes d'urine	
1 h. 40 m.	— 1 » »			jaune, trouble; D. = 1,023;	
1 h. 55 m.	— 1 » »			substances azotées 14,47	
2 h. 5 m.	— 1 » »			pour mille, total 0,51 gram-	
2 h. 25 m.	— 1 » »			mes; sans sucre.	
2 h. 55 m.	— 1 » »			5 h. 15 m. — 25 centimètres cubes d'urine	
3 h. 20 m.	— 0,5 » »			jaune, presque claire; D. =	
4 h. 10 m.	— 2 » »			1,018; substances azotées	
4 h. 30 m.	— 1 » »			16,31 pour mille, total 0.41	
5 h. 0 m.	— 1 » »			grammes; sans sucre.	

5 h. 20 m. — 1 milligr. de curare.	8 h. 25 m. — 18 centimètres cubes d'urine
5 h. 55 m. — 1 » »	jaune rougeâtre; D. = 1,046;
6 h. 15 m. — 1 » »	substances azotées 17,37
6 h. 45 m. — 1 » »	pour mille, total 0,31 gram-
7 h. 5 m. — 1 » »	mes; sans sucre.
7 h. 40 m. — 1 » »	—
8 h. 30 m. — 1 » »	Total d'urine 78 centim. cubes.
8 h. 40 m. — 1 » »	Total de substances azotées 1,23 grammes.

Total de curare 28,6 milligr.

Comme dans la séance de curarisation de l'expérience III, la résolution n'a pas été complète et l'animal s'est relevé à plusieurs reprises.

63^e jour, poids 2508 grammes, urines 100 centimètres cubes; D=1,042, substances azotées pour mille 17,37, total 1,74 grammes. La quantité d'urine émise du 62^e au 63^e jour est donc de 178 centimètres cubes, renfermant 2,97 grammes de substances azotées. La ration donnée est celle indiquée plus haut.

64^e jour, poids 2545 grammes, urine 300 centimètres cubes; D=1,025, substances azotées 6,05 pour mille, total 1,82 grammes.

Reprenons les expériences citées, en portant notre attention sur la quantité d'urine sécrétée pendant que les animaux sont sous l'influence du curare. L'urine n'est augmentée d'une manière absolue que dans l'expérience III; là le fait est patent : durant le temps de la curarisation, c'est-à-dire l'espace de 8 h. 15 m., il y a élimination de 160 centimètres cubes d'urine, ce qui ferait 465 centimètres cubes pendant 24 heures; or, la moyenne de la quantité d'urine éliminée en ce laps de temps est d'environ 325 centimètres cubes. De plus, il faut tenir compte de cette circonstance que le lapin, qui mange presque constamment, a été tenu, par le fait même de l'expérience, dans l'abstinence complète durant 9 heures; par là on aurait, en l'absence de la curarisation, une diminution considérable dans l'élimination de l'urine. Cela ressort très bien de l'observation de ce même lapin au 26^e jour; nous appelons l'attention sur elle pour signaler la sensibilité organique de l'animal en expérience. Le 25^e jour il

n'avait reçu aucune nourriture, et voyez comment cette abstinence de 24 heures retentit sur l'élimination urinaire : la quantité d'urine tombe de 340 centimètres cubes à 80 centimètres cubes, la densité n'est plus que 1,018, et au lieu de 1,42 gramme de matières azotées, 1,07 gramme seulement est contenu dans ces urines. Celles ci diminuent donc par un jeûne de 24 heures; il en sera de même par le jeûne de 9 heures, et la quantité de 465 centimètres cubes indiquée pour le jour de la curarisation serait encore plus considérable si l'on pouvait opérer dans les circonstances habituelles. Il découle ainsi de l'expérience III que l'excrétion urinaire a été augmentée par la curarisation, qu'il y a eu polyurie; ajoutons qu'elle n'est point due à la glycosurie concomitante, car cette dernière s'est tout au plus montrée vers la fin de la séance. Les curarisations des expériences I, II et IV sont-elles également accompagnées de polyurie? Le fait n'y est pas très évident, cependant nous croyons que, si nous tenons compte de l'influence exercée par le jeûne, la sécrétion rénale y était aussi accélérée. D'une manière générale nous inclinons à dire que *la sécrétion urinaire est augmentée chez les animaux soumis à l'intoxication par le curare*. Cette conclusion trouvera encore sa confirmation dans les expériences que nous citons plus loin à propos de l'action du manganèse.

Quelles sont les causes de la polyurie curarique? — Elles peuvent être de deux ordres : d'abord on pourrait songer à la circulation sanguine dont la rapidité ou la tension augmenterait localement et temporairement dans les artères rénales; par ce phénomène l'exosmose et la filtration y deviendraient plus rapides et donneraient ainsi dans le même temps une quantité plus considérable de liquide urinaire. Nous ne savons rien sur l'existence de cette cause ni sur l'importance qu'on pourrait lui attribuer. Le second ordre de causes consisterait dans les variations de la composition même du sang et consécutivement de l'urine éliminée. Injectons, par exemple, de la glycose dans une veine, elle sortira du torrent sanguin par l'émonctoire rénal et entraînera pour son compte une certaine quantité d'eau. L'animal présentera une glycosurie passagère, accompagnée de

polyurie. Il en est de même pour les animaux curarisés : s'ils deviennent diabétiques, ils sont en même temps polyuriques et l'on peut invoquer l'influence de la glycosurie pour expliquer l'augmentation de la quantité d'urine. Dans la maladie du diabète la glycosurie serait antérieure à la polyurie, ou plutôt serait la cause de cette dernière. L'observation suivante confirme cette manière de voir. Nous avons en observation depuis six mois deux lapins, tenus en ration d'équilibre au moyen de pain et de carottes; à deux semaines d'intervalle, l'un et l'autre ont présenté une glycosurie passagère assez intense, allant jusqu'à 21,2 pour mille de sucre. Nous en ignorons encore la cause, mais quelle qu'elle soit, nous avons observé que la quantité d'urine à sucre sécrétée en 24 heures était supérieure à la quantité d'urine sans sucre. La glycosurie s'accompagne donc ici encore de polyurie.

Cependant dans l'expérience où la quantité d'urine éliminée durant l'état curarique est manifestement supérieure à la normale, il n'existait point de glycosurie : un autre élément paraît y avoir stimulé la fonction rénale, c'est l'urée, c'est l'azoturie. Nous y voyons, en effet, que les substances azotées contenues dans l'urine des animaux curarisés sont plus que doublées, et comme il est probable que l'excrétion plus abondante d'urée détermine aussi des urines plus copieuses, nous pouvons lui imputer la polyurie signalée dans nos expériences. Nous reviendrons bientôt d'ailleurs sur l'azoturie curarique.

Durant les curarisations, comment la densité se comporte-t-elle? Nous parlons surtout ici des urines de lapins. Assez souvent la première urine recueillie est plus trouble et plus dense que l'urine ordinaire; dans quelques expériences elle était de plus d'une blancheur de lait de chaux, due effectivement aux carbonates comme l'acide chlorhydrique le démontre. Par exemple, la première urine de l'expérience IV était plus trouble que d'ordinaire et en même temps plus dense. Peu à peu le trouble et la densité diminuent parallèlement; témoin, entre autres, l'expérience III, densité 1,020; 1,017; 1,015, et l'expérience IV, densité, 1,028; 1,018; 1,016. Les sels basiques comme les phosphates, sulfates et carbonates y disparaissent presque entiè-

rement et l'urine acquiert une transparence assez complète; elle a pris les caractères de celle d'un carnivore.

Dans l'étude des urines il nous reste deux questions importantes encore à traiter, celle de l'azoturie et celle de la glycosurie. Abordons la première.

D'après Voit (1), il n'y aurait point, durant la curarisation, de modification dans l'élimination des substances azotées; Penzoldt et Fleischer (2) ont trouvé une légère augmentation. Zuntz (3) n'admet point cette augmentation et a promis de confirmer par des expériences nouvelles les conclusions de Voit; elles n'ont pas encore été publiées. A notre connaissance, aucun autre auteur n'a étudié l'élimination de l'urée durant les curarisations prolongées.

Par les chiffres cités dans les expériences III et IV, il est démontré que les substances azotées oxydables par l'hypobromite de Na augmentent considérablement pendant les curarisations faites dans ces circonstances. Analysons à ce point de vue ces deux observations. Dans l'expérience III, à part quelques oscillations plus larges, le pour mille des substances azotées est compris avant la curarisation entre 5 et 6; la première urine recueillie pendant la curarisation en contient 10,55, la deuxième encore 10,53, la troisième 14,21, enfin celle de la nuit 12,7 pour mille. Dans l'expérience IV, la moyenne est de 6 à 7 pour mille: or, la première urine éliminée par l'animal curarisé renferme 14,47 pour mille, la deuxième 16,31, la troisième 17,37, enfin celle de la nuit encore 17,37. Ainsi le pour mille a plus que doublé dans ces deux expériences.

Il en est de même pour le total des matières azotées éliminées par jour. Le lapin de l'expérience III donnait journellement environ 2 grammes, jamais il n'a dépassé 2,45 grammes: le jour de l'expérimentation cette quantité s'élève à 3,12 grammes. Pour le lapin de l'expérience IV, il existe de même une différence

(1) VOIT, *Zeitschrift für Biologie*, Bd XIV, p. 147.

(2) PENZOLDT et FLEISCHER, *Archiv für experimentelle Pathologie und Pharmacologie*, 1882, Bd LXXXVII, p. 210.

(3) ZUNTZ, *l. c.*, p. 388.

notable : les jours qui précèdent la curarisation, 2 à 2,24 grammes de substances azotées, le jour même 2,97 grammes. Le fait de l'azoturie devient encore plus évident, si nous ne considérons que le temps de la résolution musculaire. Le lapin de l'expérience III a sécrété 78 centimètres cubes d'urine en 7 h. 15 m., contenant 1,23 grammes de substances azotées; ce qui fait en 24 heures, la quantité de 3,58 grammes, donc presque le double de la normale.

Dans les expériences citées, il y a donc eu azoturie très marquée. Si nous remontons le cours des phénomènes, nous pouvons dire que l'azoturie est due à l'hypéurémie, comme la glycosurie est déterminée par l'hyperglycémie; mais d'où provient cette urée du sang? D'où est-elle déversée dans le torrent circulatoire? Pour ceux qui n'admettent point la suractivité de la fonction glycogénique du foie durant les curarisations, la glycosurie des urines est due à un non-emploi, soit d'origine musculaire et cellulaire, soit d'origine respiratoire; la glycosurie s'accumule dans le sang, soit que les muscles immobilisés ne la détruisent plus, soit que l'oxygène arrivant moins abondamment dans les poumons ne la brûle plus. Pour l'interprétation de l'azoturie, rien de tel n'est admissible. La molécule urée est le dernier terme de la dialyse de la molécule albuminoïde; si donc l'urée augmente durant la curarisation, c'est que cette fonction dialytique est devenue plus grande : de là urémie plus intense, de là azoturie.

On a cherché depuis longtemps à localiser la formation de l'urée. Il paraît que l'exercice musculaire ne l'augmente point, les expériences de Pettenkofer, Voit (¹), etc., tendent à le prouver. Mais dans quel organe et par quel tissu la décomposition des matières azotées se fait-elle? — D'après une idée émise d'abord par Meissner et confirmée expérimentalement ensuite par v. Schröder (²), ce serait le foie. Sigrist a vu l'élimination de

(¹) PETTENKOFER et VOIT, *Zeitschrift für Biologie*, 1866, Bd II, p. 538.

(²) V. SCHRÖDER, *Ueber die Bildungsstätte des Harnstoffs*. ARCHIV FÜR EXPERIMENTELLE PATHOLOGIE UND PHARMAKOLOGIE, 1882, Bd LXXXVIII, p. 364. *Id.* INAUG. DISS. Strassburg, 1882.

l'urée devenir plus abondante par l'électrisation de cette glande. Cette théorie tend à gagner du terrain. Cependant la molécule albuminoïde en se scindant dans le foie et en donnant d'un côté de l'urée, que donne-t-elle de l'autre? quel est le nom à donner à l'autre fragment? Seegen dit à ce propos « *die Endprodukte der Spaltung sind wahrscheinlich Harnstoff und Zucker* (1) ». Peut-être nous nous trouvons ici devant un fait apportant une certaine probabilité à l'hypothèse de l'auteur. Le curare détermine l'azoturie, phénomène qui devance même la glycosurie; le curare détermine la glycosurie — nous en parlerons à l'instant — et ces deux phénomènes, peut-être parallèles dans une certaine mesure, auraient comme organe commun la glande hépatique. Malheureusement notre attention a été jusqu'ici trop attirée sur l'élimination du sucre, et nous ne possédons pas des données suffisantes sur la dépendance qui pourrait exister entre la glycosurie et l'azoturie. Cette question demande des recherches nouvelles.

La dernière question que nous avons encore à traiter avant de finir cette première partie de notre travail, c'est la glycosurie curarique. Cl. Bernard signala le premier ce phénomène, et depuis lors ce fait a été constaté de toutes parts; citons seulement Winogradoff (2), Schiff (3), Dock (4), etc. Cependant certains auteurs, tels que Penzoldt et Fleischer (5), citent des expériences où le curare n'a point fait apparaître la glycose dans les urines; Zuntz dit même: « j'ai tenu pendant une série d'heures, *eine Reihe von Stunden*, en paralysie curarique plusieurs lapins dont la ventilation pulmonaire était faite artificiellement, en même temps que je les conservais soigneusement à la température normale. L'urine restait complètement dépourvue de sucre, *der Urin blieb vollkommen frei von Zucker* (6). »

(1) SEEGEN, *Zucker im Blute, seine Quelle und seine Bedeutung*, ARCHIV FOR PHYSIOLOGIE, 1884, Bd XXXIV, p. 445.

(2) WINOGRADOFF, *Archiv für experimentelle Pathologie und Pharmakologie*, Bd XXVII, p. 533.

(3) SCHIFF, *Monographie über den Diabetes*.

(4) DOCK, *Archiv für Physiologie*, Bd V, p. 574.

(5) *Loc. cit.*

(6) *Loc. cit.*, p. 387.

D'après l'opinion de cet auteur une respiration artificielle, pratiquée d'une manière régulière, préviendrait la glycosurie tant de fois signalée chez les animaux curarisés. Nous ne disposions pas d'un appareil perfectionné pour la respiration artificielle; celui qui nous a servi est le soufflet de Ludwig; ainsi nous n'avons pu contrôler assez directement les assertions du physiologiste Zuntz. Si les lapins, curarisés au même degré que ceux des expériences VIII-XI, pouvaient être tenus 4 à 6 heures sous l'influence paralysante de ce poison, sans présenter de la glycosurie dans les urines, alors nous serions convaincu du fait qu'il y a eu défaut d'oxygène dans nos expériences et que, ce défaut a pu déterminer l'hyperglycémie et la glycosurie. Mais ce fait ne ressort point du travail de Zuntz : aucune expérience n'y est citée en détails, puis son affirmation est malheureusement trop vague. Quels sont les lapins employés? Quelle est la dose de curare? Enfin, un dernier point très important, que devons-nous comprendre par une série d'heures, *eine Reihe von Stunden*? Une durée de quatre heures mérite amplement cette dénomination, et d'après nos expériences on voit que cette curarisation est insuffisante pour la glycosurie, même sans respiration artificielle. Zuntz est donc loin de nous avoir donné la conviction que ceux-là ont raison « qui rapportent la glycosurie curarique au trouble des mouvements respiratoires, aux symptômes asphyxiques, au défaut de combustion du sucre par insuffisance de l'apport d'oxygène (1) ».

« D'autres, dit M. Masoin, attribuent la glycosurie à la paralysie générale qui laisserait s'accumuler sans usage dans les masses musculaires la glycosurie en circulation. » Par les travaux de Lavoisier, Séguin, Pettenkofer et Voit, Smith, Speck, etc., l'on sait, d'une part, que le travail musculaire s'accompagne d'un dégagement plus abondant d'anhydride carbonique; d'autre part, il paraît assez bien établi que ce même travail musculaire ne s'accompagne pas d'une élimination plus abondante de matières

(1) MASOIN, *Diabète artificiel*, REVUE MÉDICALE DE LOUVAIN, 1884, p. 98.

azotées : on paraît ainsi autorisé à admettre que les mouvements consomment la glycose, que le repos, la résolution musculaire par exemple, la laissent non utilisée dans le torrent circulatoire. Mais le repos, est-ce assez pour produire la glycosurie? — Évidemment non. Le sommeil, la paralysie anesthésique devraient alors s'accompagner au même degré d'un diabète passager. Cette absence ne s'explique bien que par la fonction glycogénique du foie. D'après les expériences faites par Cl. Bernard, confirmées par un grand nombre d'auteurs et dernièrement encore par Seegen, la glande hépatique exercerait sur le sucre une action double, mais en même temps opposée : elle fabriquerait du sucre et le déverserait dans le torrent circulatoire, elle absorberait le sucre alimentaire et le transformerait en glycogène. Dans l'intervalle des digestions la première fonction aurait la prépondérance ; pendant les digestions, ce serait la seconde. Si les deux fonctions s'équivalent durant une immobilité musculaire quelconque, nous comprenons pourquoi elle ne détermine ni hyperglycémie ni glycosurie ; nous comprenons pourquoi le sommeil, la paralysie chloroformique ne déterminent point l'apparition dans l'urine de cette quantité de sucre qui aurait été consommée durant un même espace d'activité musculaire ; en même temps nous croyons pouvoir en inférer qu'un non-emploi de glycose durant la curarisation n'entraîne point la glycosurie : le foie peut la prévenir de la même manière qu'il prévient celle d'origine alimentaire. Elle pourrait survenir si la glande hépatique devenait impuissante à conserver l'équilibre glycémique ou si de plus la fonction glycogénique était augmentée.

« D'autres enfin, dit encore M. Masoin, l'interprètent par la dilatation neuro-paralytique du foie (paralysie des vaso-moteurs), d'où résulterait une fabrication plus abondante de glycose dans l'organe. » La théorie de la glycogénie hépatique de Cl. Bernard paraît de jour en jour, malgré les assauts périodiques des Allemands, s'asseoir sur des bases de plus en plus solides : durant l'intoxication curarique le sucre se formerait plus abondamment, soit aux dépens du glycogène, soit aux dépens d'une substance plus complexe, la matière albuminoïde. La fragmentation de la

molécule azotée nous expliquerait l'hypersécrétion de l'urée signalée plus haut. Nous inclinons à comprendre de la sorte le mécanisme de la glycosurie curarique. Les auteurs qui regardent l'arsenic comme un agent inhibitif de ce diabète artificiel doivent sûrement adopter cette théorie; c'est leur unique planche de salut; jamais en effet on ne comprendrait l'action de cet agent thérapeutique contre une glycosurie effectivement d'origine asphyxique ou musculaire.

SECONDE PARTIE.

INFLUENCE DU MANGANÈSE SUR LA GLYCOSURIE CURARIQUE.

Le cadre de ce travail ne demande pas que nous écrivions ici l'histoire de l'emploi thérapeutique du manganèse, ce serait même sortir de notre sujet; nous renvoyons à cet effet aux monographies. Il nous suffira de dire qu'il est prescrit, quoique assez rarement, contre le diabète par les auteurs qui localisent cette maladie dans le foie. Si nous tenons compte des expériences déjà anciennes de Gmelin ⁽¹⁾, Hünefeld ⁽²⁾ et Goolden ⁽³⁾ qui tous reconnaissent au manganèse une action stimulante sur les fonctions du foie et principalement sur la sécrétion biliaire, nous croyons pouvoir en déduire que ce sont ces expériences qui ont amené Sampson ⁽⁴⁾, Turner ⁽⁵⁾, M. Masoin ⁽⁶⁾, etc., à diriger ce métal vers cette même glande dans certains cas de diabète. Ces auteurs paraissent avoir eu pour guide une idée *a priori*. Nous n'analyserons pas les succès et les cures qu'ils signalent; seulement nous avons institué une thérapeutique expérimentale en administrant le manganèse à des animaux et en observant ensuite s'ils avaient acquis l'immunité contre le phénomène pathologique de la glycosurie curarique. Ces recherches ajouteront quelque chose à l'histoire de l'action physiologique et pharmacodynamique de ce médicament. Parmi les nombreux travaux dont il a été l'objet, aucun n'a été fait à notre point de vue; tout au plus trouvons-nous dans le mémoire très complet de Kobert ⁽⁷⁾ deux expériences où l'auteur a recherché si l'intoxication par le manganèse fait

(1) GMELIN, *Versuche über die Wirkungen des Baryts*, etc. Tubingen, 1824.

(2) HÜNEFELD, *Effets physiologiques de quelques poisons non examinés jusqu'ici*. ARCHIVES GÉNÉRALES DE MÉDECINE DE PARIS, 1832, t. XXVIII, p. 128.

(3) GOOLDEN, *Ueber den Nutzen des Mangan sulphuricum in verschiednen Krankheiten*. LOND. GAZ., 1845, febr.

(4) SAMPSON, *The Lancet*. 1853.

(5) TURNER, *Edimb. med. Journ.*, 1864, t. VI, p. 903.

(6) E. MASOIN, *Traitement du diabète par le permanganate de potassium*. BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE MÉDECINE DE BELGIQUE. 1882, 3^e série, t. XVI, p. 1099.

(7) KOBERT, *Zur Pharmakologie des Mangans und Eisens*. ARCHIV F. EXPERIMENTELLE PATHOLOGIE UND PHARMAKOLOGIE, 1883, Bd XVI, p. 364.

disparaître le glycogène du foie; il conclut en disant : « Il est donc certain que le glycogène ne disparaît du foie ni par l'intoxication aiguë ni par l'intoxication chronique du manganèse aussi rapidement qu'il l'est dans l'empoisonnement phosphorique, comme l'a démontré Rosenbaum (1). » Si parmi les lecteurs il y en a qui désirent connaître les auteurs ayant expérimenté avec le manganèse, nous leur signalons la bibliographie très complète de Kobert (2); depuis lors ont paru les travaux de Cahn (3), Schulz (4) et Maumené (5). Sans nous arrêter à d'autres considérations, nous entamons l'étude et l'exposé de nos expériences.

EXPÉRIENCE V. — Deux lapins, l'un de 1711 grammes, l'autre de 2333 grammes, sont soumis au carbonate de manganèse; journellement ils en reçoivent 60 centigrammes en trois prises : une à huit heures du matin, une à deux heures et une à six heures de l'après-midi. L'administration dura 14 jours, et cela sans produire aucun phénomène anormal. Le 13^e jour ils pesaient l'un 1940 grammes et l'autre 2380 grammes; ils sont sacrifiés. A l'autopsie tout l'intestin grêle présentait l'aspect blanc terreux de la poudre du carbonate; cependant ni les tissus ni les urines ne présentaient aucune trace de la bile; de plus, les foies de l'un et de l'autre nous ont paru normaux. Celui du premier lapin pesait 77 grammes, celui du second 86 grammes; le tissu hépatique observé soit à l'œil nu, soit au microscope, ne laissait voir aucun signe de dégénérescence. Sans avoir fait des dosages précis, nous pouvons dire que le glycogène y existait encore en quantité notable.

EXPÉRIENCE VI. — Lapin du poids de 2225 grammes, recevant journellement comme ration 300 grammes de racines de carotte

(1) *L. c.*, p. 388.

(2) *L. c.*, *Literarischer Nachweis*, p. 394.

(3) CAHN, *Ueber die Resorptions und Ausscheidungsverhältnisse des Mangans im Organismus*. ARCHIV F. EXPERIMENTELLE PATHOLOGIE UND PHARMAKOLOGIE, 1884, Bd XVIII, p. 129.

(4) SCHULZ, *Ueber die Giftigkeit der Phosphor-Sauerstoffverbindungen und ueber den Chemismus der Wirkung unorganischer Gifte*. ARCHIV F. EXPER. PATHOLOGIE UND PHARMAKOLOGIE, 1884, Bd XVIII, p. 174.

(5) MAUMENÉ, *Sur l'existence du manganèse dans les plantes et les animaux et sur son rôle dans la vie animale*. JOURNAL DE PHARMACIE ET DE CHIMIE, 1884, p. 152.

foie, peut-il quand même être regardé comme un agent efficace contre le diabète artificiel du curare? L'expérimentation nous permettra de répondre.

EXPÉRIENCE VIII. — Lapin du poids de 1820 grammes, recevant journellement 30 centigrammes de carbonate de manganèse en trois fois : à huit heures du matin, à deux heures et à six heures de l'après-dîner, et cela durant huit jours, absorbant ainsi avant d'être soumis à l'intoxication curarique la quantité de 240 centigrammes.

Curarisation au 9^e jour.

0 h. 0 m. — 3 milligr. de curare.	
0 h. 20 m. — Résolution musculaire.	0 h. 0 m.
0 h. 50 m. — 1 milligr. de curare.	4 h. 0 m. — Urine claire, jaune; sans sucre.
1 h. 20 m. — 1 » »	4 h. 45 m. — Urine claire, jaune, acide; sans sucre.
1 h. 45 m. — 1 » »	2 h. 40 m. — Urine claire, incolore, acide; sans sucre.
3 h. 0 m. — 1 » »	5 h. 45 m. — Urine claire, incolore, acide; traces de sucre.
3 h. 10 m. — 1 » »	
—	
Total de curare 8 milligr.	L'urine des 12 heures qui suivent est rougeâtre, sirupeuse, acide et légèrement sucrée.

Du dixième au seizième jour le lapin est à nouveau soumis au carbonate de manganèse, il en absorbe ainsi 180 centigrammes.

Curarisation au 17^e jour.

0 h. 0 m. — 3 milligr. de curare.	
0 h. 40 m. — Résolution musculaire.	0 h. 0 m.
0 h. 45 m. — 0,5 milligr. de curare.	1 h. 25 m. — Urine rouge, franchement acide; sans sucre.
1 h. 35 m. — 0,5 » »	3 h. 15 m. — Urine jaune, épaisse, acide; traces de sucre.
2 h. 20 m. — 0,5 » »	4 h. 25 m. — Urine claire, jaune, acide; 15 pour mille de sucre.
2 h. 55 m. — 0,5 » »	6 h. 25 m. — Urine claire, jaune, acide; 16,66 pour mille de sucre.
3 h. 10 m. — 0,5 » »	9 h. 0 m. — Urine claire, jaune, acide; 22,7 pour mille de sucre.
4 h. 5 m. — 1 » »	
4 h. 45 m. — 1 » »	
5 h. 55 m. — 1 » »	
6 h. 45 m. — 1 » »	
7 h. 40 m. — 1 » »	
—	
Total de curare 40,5 milligr.	

D'après la première séance de curarisation on pourrait croire à une absence ou à un retard considérable de la glycosurie, nous l'attribuons plutôt à la résolution musculaire un peu incomplète; la seconde séance confirme pleinement cette opinion. Le

carbonate eût-il été réellement actif, alors l'apparition d'urine sucrée aurait dû y être plus tardive encore ou ne pas se faire du tout; mais ce phénomène ne se produit point, au contraire la curarisation à peine plus forte détermine une glycosurie plus hâtive, plus intense, allant jusqu'à 22,7 pour mille. L'expérience IX montre encore mieux que le manganèse, employé ici sous forme de permanganate, ne retarde pas le moment de l'apparition du diabète artificiel. Comme on verra, la dose de curare est relativement plus faible dans la seconde séance, et cependant la glycosurie y apparaît et même un peu plus tôt.

EXPÉRIENCE IX. — Lapin du poids de 1640 grammes, recevant journellement 3 centigrammes de permanganate de potassium, en trois fois, aux heures indiquées pour le lapin précédent. Au bout de huit jours il avait ingéré 24 centigrammes.

Curarisation au 9^e jour.

0 h. 0 m. — 3 milligr. de curare.	0 h. 0 m.
0 h. 20 m. — Résolution musculaire.	0 h. 30 m. — Urine jaune orange.
1 h. 40 m. — 1 milligr. de curare.	1 h. 20 m. — Urine encore ordinaire.
1 h. 35 m. — 1 » »	2 h. 40 m. — Urine claire, acide; sans sucre.
2 h. 20 m. — 1 » »	3 h. 45 m. — Urine claire, acide; sans sucre.
2 h. 55 m. — 1 » »	L'urine des 12 heures qui suivent est rou-
3 h. 30 m. — 1 » »	geâtre, acide, sirupeuse; la présence de
—	glycose y est douteuse.
Total de curare 8 milligr.	

Du dixième au seizième jour il est soumis à nouveau à la même dose de permanganate et curarisé le dix-septième jour.

Curarisation au 17^e jour.

0 h. 0 m. — 3 milligr. de curare.	0 h. 0 m.
0 h. 40 m. — Résolution musculaire.	1 h. 40 m. — Urine assez épaisse, claire, fran-
0 h. 45 m. — 0,5 milligr. de curare.	chement acide; sans sucre.
1 h. 45 m. — 0,5 » »	3 h. 45 m. — Urine jaune claire, acide; fai-
3 h. 45 m. — 0,5 » »	blement sucrée.
4 h. 45 m. — 1 » »	4 h. 35 m. — 8 centimètres cubes d'urine
5 h. 55 m. — 1 » »	acide; 11,90 pour mille de
6 h. 25 m. — 1 » »	sucre.
7 h. 25 m. — 1 » »	6 h. 35 m. — 17 centimètres cubes d'urine
7 h. 55 m. — 1 » »	claire, jaune, acide; 33,20
—	pour mille de sucre.
Total de curare 9,5 milligr.	7 h. 45 m. — 20 centimètres cubes d'urine
	claire, jaune, acide; 37,50
	pour mille de sucre.

Par l'expérience VII, où l'on voit en même temps combien la curarisation accompagnée de phénomènes asphyxiques précipite l'apparition de la glycosurie et par les expériences VIII et IX il est donc démontré que *le manganèse ne prévient pas la glycosurie curarique.*

S'il ne la prévient, ne diminue-t-il pas son intensité? Ou bien n'a-t-il point parfois une action inverse et au lieu d'atténuer ce phénomène pathologique, ne peut-il le rendre plus durable et plus profond? Car il arrive aux expérimentateurs d'obtenir un résultat tout opposé à celui qui paraissait indiqué. Ou bien enfin n'a-t-il aucune influence sur la marche ordinaire de ce phénomène? — Les expériences suivantes nous permettront d'élucider cette question; elles comprennent l'histoire de deux lapins de même nichée, à peu près de même poids, et qui ont présenté une série de phénomènes tout à fait analogues; on peut s'en convaincre par la comparaison des deux tableaux qui résument cette histoire.

EXPÉRIENCE X. — Lapin du poids de 2350 grammes.

1^{er} jour. — Première curarisation vers midi.

0 h. 0 m. — 5 milligr. de curare.

0 h. 20 m. — 1 » »

0 h. 40 m. — 1 » »

1 h. 5 m. — 1 » »

1 h. 10 m. — Résolution musculaire. 0 h. 0 m.

1 h. 35 m. — 1 milligr. de curare. 0 h. 15 m. — 46 centimètres cubes d'urine

1 h. 55 m. — 1 » » jaune, trouble, alcaline; sans sucre.

2 h. 15 m. — 0,5 » » 4 h. 54 m. — 40 centimètres cubes d'urine

2 h. 20 m. — 0,5 » » jaune, trouble, alcaline; sans sucre.

3 h. 4 m. — 1 » » 2 h. 50 m. — 5 centimètres cubes d'urine

3 h. 15 m. — 1 » » jaune, trouble, alcaline; sans sucre.

3 h. 30 m. — 1 » » 4 h. 0 m. — 2 centimètres cubes d'urine

4 h. 10 m. — 1 » » jaune, trouble, alcaline; sans sucre.

Total de curare 15 milligr.

Total d'urine 63 centim. cubes.

2^e jour.

3^e »

4^e »

5^e » Seconde curarisation vers midi.

0 h. 0 m. — 6 milligr. de curare.	
0 h. 45 m. — Résolution musculaire.	0 h. 0 m. — Urine ordinaire.
0 h. 45 m. — 1 milligr. de curare.	0 h. 30 m. — 3 centimètres cubes d'urine
0 h. 55 m. — 1 » »	jaune, un peu trouble,
1 h. 58 m. — 1 » »	acide; sans sucre.
2 h. 45 m. — 1 » »	2 h. 45 m. — 29 centimètres cubes d'urine
2 h. 22 m. — 0,5 » »	claire, jaune brunâtre,
2 h. 50 m. — 1 » »	acide; sans sucre.
3 h. 47 m. — 0,5 » »	5 h. 20 m. — 14 centimètres cubes d'urine
4 h. 55 m. — 1 » »	claire, jaunâtre, acide;
5 h. 35 m. — 1 » »	14,56 pour mille de sucre.
6 h. 28 m. — 1 » »	7 h. 0 m. — 37 centimètres cubes d'urine
7 h. 45 m. — 1 » »	claire, presque incolore,
	encore un peu jaune, acide;
	D. = 1,023; 29,23 pour
	mille de sucre.
	7 h. 30 m. — 48 centimètres cubes d'urine
	claire avec teinte jaunâtre,
	acide; D. = 1,024;
	31,43 pour mille de sucre.

Total de curare 46 milligr.

Total d'urine 404 centimètres cubes.
Total de sucre 4,804 gramme.

- 6^e jour.
7^e jour, 10 centigrammes de carbonate de manganèse à 6 h. du soir.
8^e » 30 » » » à 8 h. à 2 h. et à 6 h.
9^e » 60 » » » " " " "
10^e » 20 » » » " " " "

Total 120 centigrammes de carbonate.

10^e jour. — Troisième curarisation vers midi.

0 h. 0 m. — 6 milligr. de curare.	
0 h. 10 m. — Résolution musculaire.	0 h. 0 m. — Urine ordinaire.
0 h. 47 m. — 1 milligr. de curare.	1 h. 42 m. — 10 centimètres cubes d'urine
1 h. 20 m. — 1 » »	jaune brune, très trouble,
1 h. 25 m. — 1 » »	alcaline; D. = 1,042; sans
2 h. 15 m. — 1 » »	sucre.
3 h. 20 m. — 1 » »	4 h. 0 m. — 8 centimètres cubes d'urine
3 h. 35 m. — 1 » »	un peu moins épaisse, trouble,
4 h. 30 m. — 1 » »	jaune, neutre; D. =
6 h. 37 m. — 1 » »	1,034; sans sucre.
7 h. 10 m. — 1 » »	6 h. 15 m. — 48 centimètres cubes d'urine
	très légèrement trouble,
	jaune, neutre; D. = 1,048;
	9,8 pour mille de glycose.
	7 h. 0 m. — 47 centimètres cubes d'urine
	claire, incolore, alcaline;
	D. = 1,019; 46,6 pour mille
	de sucre.
	9 h. 30 m. — 29 centimètres cubes d'urine
	claire, incolore; D. = 1,020;
	25 pour mille de sucre.

Total de curare 45 milligr.

Total d'urine 82 centimètres cubes.
Total de sucre 4,184 gramme.

EXPÉRIENCE XI. — Lapin du poids de 2160 grammes.

1^{er} jour. — Première curarisation vers midi.

0 h. 0 m. — 4 milligr. de curare.	
0 h. 7 m. — Résolution musculaire.	0 h. 0 m. —
0 h. 25 m. — 1 milligr. de curare.	0 h. 52 m. — 3 centimètres cubes d'urine
0 h. 40 m. — 1 » »	jaune, alcaline, trouble
1 h. 15 m. — 1 » »	sans sucre.
1 h. 35 m. — 1 » »	2 h. 40 m. — 44 centimètres cubes d'urine
1 h. 51 m. — 0,5 » »	moins trouble, jaune, alcaline;
1 h. 58 m. — 0,5 » »	sans sucre.
2 h. 15 m. — 0,5 » »	2 h. 47 m. — 10 centimètres cubes d'urine
2 h. 21 m. — 0,5 » »	encore moins trouble, légèrement
2 h. 35 m. — 0,5 » »	alcaline; sucre (?).
3 h. 1 m. — 0,5 » »	5 h. 2 m. — 16 centimètres cubes d'urine
3 h. 15 m. — 0,5 » »	claire, incolore, alcaline;
3 h. 30 m. — 1 » »	3,28 pour mille de sucre.
4 h. 10 m. — 1 » »	

Total d'urine 33 centimètres cubes.

Total de curare 13,5 milligr.

2^e jour.

3^e »

4^e »

5^e » Seconde curarisation vers midi.

0 h. 0 m. — 5 milligr. de curare.	
0 h. 20 m. — Résolution musculaire.	0 h. 0 m. — Urine ordinaire.
0 h. 35 m. — 2 milligr. de curare.	0 h. 25 m. — 3 centimètres cubes d'urine
0 h. 55 m. — 1 » »	jaune, acide, peu trouble;
1 h. 30 m. — 1 » »	sans sucre.
2 h. 0 m. — 0,5 » »	3 h. 5 m. — 60 centimètres cubes d'urine
2 h. 15 m. — 0,5 » »	presque incolore, avec
2 h. 50 m. — 1 » »	teinte jaunâtre, claire,
3 h. 27 m. — 1 » »	acide; D. = 1,023; 0,856
3 h. 45 m. — 1,5 » »	pour mille de sucre.
4 h. 55 m. — 1 » »	5 h. 5 m. — 55 centimètres cubes d'urine
6 h. 15 m. — 1 » »	claire, incolore, acide;
7 h. 15 m. — 1 » »	D. = 1,044; 10,88 pour
	mille de sucre.
	6 h. 50 m. — 15 centimètres cubes d'urine
	claire, jaunâtre, acide;
	D. = 1,046; 10,89 pour
	mille de sucre.
	7 h. 25 m. — 6 centimètres cubes d'urine
	claire, jaunâtre, acide;
	7 pour mille de sucre.

Total d'urine 139 centimètres cubes.

Total de sucre 0,855 gramme.

6^e jour.

7^e jour, 10 centigrammes de carbonate de manganèse à 6 h. du soir.

8^e » 30 » » » à 8 h. à 2 h. et à 6 h.

9^e » 60 » » » » » » »

10^e » 20 » » » » »

Total 120 centigrammes de carbonate de manganèse.

10^e jour. Troisième curarisation vers midi.

0 h. 0 m. — 5 milligrammes de curare.

0 h. 27 m. — 4 » »

0 h. 30 m. — Résolution musculaire. 0 h. 0 m. — Urine ordinaire.

0 h. 47 m. — 4 milligramme de curare. 0 h. 55 m. — 2 centimètres d'urine jaune

1 h. 20 m. — 1 » » rouge, peu trouble, alcaline; sans sucre.

3 h. 20 m. — 1 » »

4 h. 30 m. — 1 » » 3 h. 35 m. — 10 centimètres cubes d'urine

7 h. 40 m. — 1 » » jaune, rougeâtre; moins

trouble; légèrement acide;

D. = 1,025; 14,8 pour

mille de sucre.

Total de curare 14 milligrammes.

6 h. 0 m. — 18 centimètres cubes d'urine

claire, jaune, légèrement

acide; D. = 1,029; 32,26

pour mille de sucre.

6 h. 40 m. — 5 centimètres cubes d'urine

clair, incolore, neutre;

D. = 1,028; 23,12 pour

mille de sucre.

Total d'urine 35 centimètres cubes.

Total de sucre 0,869 gramme.

Cette série d'expériences nous présente de beaux exemples à examiner pour l'excrétion des urines, leur coloration, leur réaction, leur densité, leur abondance. Voyez, par exemple, quelle forte polyurie lors de la seconde curarisation préliminaire de l'expérience XI; mais passons à l'étude de la modification la plus importante qui nous occupe, c'est-à-dire la glycosurie. Le carbonate de manganèse a-t-il retardé le moment de son apparition? Si nous comparons dans chacune des deux expériences les deux curarisations préliminaires avec la curarisation faite après intoxication par le manganèse, les annotations horaires nous montrent que dans aucun cas la glycosurie n'a été plus tardive. Ne s'est-elle pas montrée plus tôt et le manganèse n'a-t-il pas accéléré l'élimination du sucre? Les chiffres ne l'indiquent guère non plus; toutes ces différences de temps rentrent en effet dans les limites

des variations possibles à chaque curarisation. Quant à l'intensité de la glycosurie, la troisième curarisation de l'expérience X indique que le sucre a été sécrété en moindre quantité que dans la séance précédente; mais nous ne pouvons attribuer cette diminution à l'influence du manganèse; elle provient sans doute d'une résolution musculaire qui a été moins intense par suite de la dose plus faible de curare. L'expérience XI semble le démontrer : là nous avons approximativement produit des intoxications de même degré, là le sucre s'est éliminé en quantité presque égale. Ainsi nous sommes amené à n'attribuer au manganèse aucune action soit sur le moment d'apparition, soit sur l'intensité de la glycosurie curarique. Telles sont nos opinions d'aujourd'hui; elles sont basées sur les expériences analysées dans ce travail et encore sur d'autres tout aussi nombreuses que nous ne citons point; disons seulement que dans toutes, les animaux curarisés d'une manière suffisante pour devenir diabétiques normalement, le sont devenus encore lorsqu'ils avaient été soumis préalablement au manganèse. Cependant n'exagérons pas la portée du résultat négatif donné par nos recherches; si elles tendent à prouver que le manganèse n'influe pas sur le diabète curarique, elles ne permettent pas non plus de conclure qu'il est sans action dans les cas de diabète pathologique, car il existe en effet une différence profonde, quelquefois essentielle même, entre cette redoutable maladie et le phénomène de la glycosurie curarique.

En terminant ici l'exposé de nos recherches, nous résumons les résultats par les deux propositions suivantes :

I. Le curare, injecté dans l'organisme, détermine une élévation suivie d'un abaissement de la température avec azoturie et glycosurie.

II. Le manganèse, soit sous forme de carbonate, soit sous forme de permanganate de potassium, ne peut prévenir ni atténuer la glycosurie curarique.

Louvain, 22 octobre 1885.

MÉMOIRE

SUR L'EMPLOI

DES COORDONNÉES CURVILIGNES

DANS LES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE

ET LES LIGNES GÉODÉSQUES DES SURFACES ISOTHERMES

PAR

M. le V^o de SALVERT

DOCTEUR ÈS SCIENCES,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ LIBRE DES SCIENCES
DE LILLE.

Dans un mémoire assez étendu *Sur la théorie de la courbure des surfaces*, publié il y a quelques années dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (3^e année, 1881), nous avons été amené à établir à nouveau par des procédés plus simples, et à l'aide d'une autre notation plus claire et plus expressive, les formules générales que Lamé a données pour l'emploi des coordonnées curvilignes; mais les bornes nécessairement imposées à ce travail, déjà trop long peut-être eu égard au peu de nouveauté du sujet, nous ont empêché de présenter aucune application de ces formules, en sorte que le lecteur qui n'eût pas connu les travaux originaux sur la matière aurait pu être amené à penser que ces formules n'ont qu'un intérêt purement théorique, et à juger comme conséquence que l'utilité qu'elles peuvent offrir ne vaut pas la peine encore assez sérieuse que l'on s'est donnée pour les établir.

Nous voudrions aujourd'hui combler cette lacune, à laquelle nous ne nous étions résigné qu'à regret dans notre précédent travail, et nous nous proposons, dans celui-ci, de reprendre de même à nouveau, avec les notations et à l'aide des procédés dont nous avons fait usage pour l'étude de la courbure des surfaces,

l'une des trois questions principales que Lamé présente comme application de sa théorie, savoir la détermination directe du mouvement d'un point matériel par le moyen de ses coordonnées curvilignes, nous réservant de revenir un autre jour sur les deux autres questions, savoir le problème de l'équilibre de température dans un corps homogène et la recherche d'un système orthogonal triplement isotherme.

Après avoir passé en revue dans un premier chapitre les formes diverses que l'on peut donner aux équations du mouvement d'un point en coordonnées curvilignes, nous nous en servirons dans le second chapitre, pour traiter l'important problème du mouvement d'un point matériel assujéti à rester sur une surface donnée, et dans le troisième et dernier chapitre pour faire une étude détaillée des lignes géodésiques des différentes surfaces, que l'on a le plus souvent l'occasion de considérer.

Ce nouveau travail formant donc la suite naturelle et comme le prolongement de notre *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces*, nous lui emprunterons avec les notations (*) et les

(*) Pour le cas où le lecteur n'aurait pas ce travail à sa disposition, et afin de permettre néanmoins l'intelligence du présent mémoire, nous rappelons que nous faisons usage pour les *dérivées partielles* relatives aux variables x, y, z , d'une notation abrégée qui consiste à supprimer partout, haut et bas, dans les symboles ordinaires de ces dérivées, la caractéristique d , mais en laissant subsister l'exposant dont elle est affectée, en sorte que, quelle que soit la quantité φ , les symboles

$$\frac{\varphi}{x}, \frac{\varphi}{y}, \frac{\varphi}{z}, \frac{\varphi^2}{x^2}, \frac{\varphi^2}{y^2}, \dots, \frac{\varphi^2}{yz}, \dots, \frac{\varphi^3}{x^3}, \dots, \frac{\varphi^3}{xyz}, \dots$$

représenteront pour nous respectivement les dérivées

$$\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}, \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \frac{d^2\varphi}{dy^2}, \dots, \frac{d^2\varphi}{dydz}, \dots, \frac{d^3\varphi}{dx^3}, \dots, \frac{d^3\varphi}{dxdy^2}, \frac{d^3\varphi}{dxdydz},$$

tandis que nous aurons soin de dénoter par

$$\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2, \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2, \dots, \frac{\varphi}{y} \frac{\varphi}{z}, \dots, \left(\frac{\varphi}{x}\right)^3, \dots, \frac{\varphi}{x} \left(\frac{\varphi}{y}\right)^2, \dots, \frac{\varphi}{x} \frac{\varphi}{y} \frac{\varphi}{z}$$

les puissances ou produits

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2, \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2, \dots, \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\varphi}{dz}, \dots, \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^3, \dots, \frac{d\varphi}{dx} \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2, \dots, \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\varphi}{dz}, \dots$$

Nous prévenons également que nous ferons un usage très fréquent de la notation des

conventions originaires, les résultats et les formules qui nous serviront aujourd'hui de point de départ. Nous demanderons en conséquence expressément au lecteur de vouloir bien s'y reporter, principalement au paragraphe IV de ce mémoire, qui a rapport aux propriétés du système triple orthogonal.

paramètres différentiels des premier et second ordre de Lamé, c'est-à-dire des symboles

$$\Delta_1 \varphi = \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}, \quad \Delta_2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2},$$

le radical du premier étant toujours supposé *essentiellement positif*.

I

Équations du mouvement d'un point matériel en coordonnées curvilignes. — Formes signalées par Lamé. — Formes nouvelles. — Rayon de courbure d'une courbe donnée en coordonnées curvilignes.

BUT ET OBJET DE CE CHAPITRE. — Toutes les fois que dans l'étude du mouvement d'un point matériel ce point est assujéti à rester sur une certaine surface fixe, il y aura évidemment avantage, si cela est possible, à prendre un système de coordonnées telles que cette surface puisse être considérée comme une surface individuelle de l'une des familles qui composent ce système, parce qu'alors l'une des coordonnées du point devant conserver ainsi une valeur constante et connue à l'avance, on n'aura plus que deux coordonnées au lieu de trois à déterminer en fonction du temps. C'est ainsi que, si l'on considère le mouvement d'un point matériel astreint à rester sur un cylindre de révolution, il faudra évidemment prendre des coordonnées semi-polaires ou cylindriques, parce qu'alors la coordonnée r conservant une valeur constante, on n'aura plus à déterminer que la hauteur z et l'azimut θ , qui sont *a priori* les inconnues naturelles de la question. De même dans le cas d'un point pesant assujéti à demeurer sur une sphère, la distance r à l'origine étant fixe et donnée, les inconnues naturelles de la question sont l'azimut ψ et l'angle d'écart θ du rayon vecteur avec la verticale, qui déterminent la direction de ce rayon, et le système des coordonnées sphériques ou polaires se trouve pour ainsi dire imposé de lui-même à l'avance par la nature de la question; car on ne sort pas au fond de ce système, en prenant, comme on le fait dans les formules classiques relatives au problème du pendule conique, au lieu de l'angle θ , son cosinus que l'on appelle z , et il en serait de même dans tout autre cas analogue.

Mais les équations du mouvement, telles qu'on les considère

habituellement, étant exprimées en coordonnées rectilignes, cette simplification ultérieure dans l'intégration exige au début du calcul un changement de variables, c'est-à-dire en fait l'élimination des neuf quantités

$$x, y, z, \quad \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2},$$

entre les équations différentielles du mouvement, l'équation de la surface donnée, les formules de transformation de coordonnées, et les deux premières équations qu'on en tirera par la différentiation.

C'est précisément cette élimination préalable que l'on devra opérer dans chaque cas particulier, et qui, énoncée dans ces termes généraux, ne manque pas d'une certaine complication, que nous nous proposons de donner le moyen d'éviter, en présentant à l'avance et une fois pour toutes le résultat de cette opération pour un système de coordonnées curvilignes quelconque. — En d'autres termes, nous voulons former le système d'équations différentielles du second ordre, entre les inconnues φ , ψ et ω , qui par l'intégration fournirait directement la valeur de ces coordonnées en fonction du temps, en effectuant l'élimination des neuf quantités que nous venons d'énumérer, entre les trois équations différentielles du mouvement, les trois équations des surfaces coordonnées et celles qui en proviendraient par la différentiation (*).

(*) Nous résoudrons tout d'abord la question ainsi posée, en nous servant pour cet objet, à l'exemple de LAMÉ et de GUIRAUDET (qui les a produites le premier), des formules relatives à la courbure du système orthogonal, que nous avons établies dans notre *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces*; mais le lecteur trouvera un peu plus loin une exposition de la même question indépendante de ces formules, qui aura le mérite de ne supposer en aucune façon l'existence d'un système triple orthogonal, avantage précieux qui permettra de faire usage dans tous les cas de cette théorie, pour la détermination du mouvement d'un point sur une surface donnée.

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT EN FONCTION DES VITESSES. — Le but que nous avons en vue étant ainsi nettement formulé, soient donc u, v, w les trois composantes de la vitesse du point matériel suivant les normales aux trois surfaces coordonnées φ, ψ et ω , et U, V, W les trois composantes, suivant les mêmes directions, de la force extérieure qui le sollicite, rapportées à l'unité de masse, ses composantes suivant les axes de coordonnées rectilignes étant toujours désignées par X, Y, Z . Nous aurons à la fois, en projetant d'une part la vitesse successivement sur ces trois axes coordonnés, puis d'autre part la force sur les trois normales précitées,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \lambda u + \lambda' v + \lambda'' w, \quad U = \lambda X + \mu Y + \nu Z, \\ \frac{dy}{dt} = \mu u + \mu' v + \mu'' w, \quad V = \lambda' X + \mu' Y + \nu' Z, \\ \frac{dz}{dt} = \nu u + \nu' v + \nu'' w, \quad W = \lambda'' X + \mu'' Y + \nu'' Z, \end{array} \right.$$

$\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu', \lambda'', \mu'', \nu''$ désignant toujours les neuf cosinus directeurs des trois normales aux surfaces φ, ψ et ω .

Les équations du mouvement du même point étant en coordonnées rectilignes

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

les trois équations de droite précédentes deviendront d'une part

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \lambda \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{d^2y}{dt^2} + \nu \frac{d^2z}{dt^2}, \\ V = \lambda' \frac{d^2x}{dt^2} + \mu' \frac{d^2y}{dt^2} + \nu' \frac{d^2z}{dt^2}, \\ W = \lambda'' \frac{d^2x}{dt^2} + \mu'' \frac{d^2y}{dt^2} + \nu'' \frac{d^2z}{dt^2}, \end{array} \right.$$

tandis que les trois équations de gauche étant différenciées donneront d'autre part

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda \frac{du}{dt} + \lambda' \frac{dv}{dt} + \lambda'' \frac{dw}{dt} + u \frac{d\lambda}{dt} + v \frac{d\lambda'}{dt} + w \frac{d\lambda''}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \mu \frac{du}{dt} + \mu' \frac{dv}{dt} + \mu'' \frac{dw}{dt} + u \frac{d\mu}{dt} + v \frac{d\mu'}{dt} + w \frac{d\mu''}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \nu \frac{du}{dt} + \nu' \frac{dv}{dt} + \nu'' \frac{dw}{dt} + u \frac{d\nu}{dt} + v \frac{d\nu'}{dt} + w \frac{d\nu''}{dt}; \end{array} \right.$$

en sorte que si l'on substitue ces valeurs des dérivées secondes dans les équations immédiatement précédentes, celles-ci deviendront, en ayant égard aux formules (42) de notre *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces* (p. 49), c'est-à-dire aux relations connues entre les neuf cosinus directeurs de trois droites rectangulaires :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} U = \frac{du}{dt} + v \left(\lambda \frac{d\lambda'}{dt} + \mu \frac{d\mu'}{dt} + \nu \frac{d\nu'}{dt} \right) + w \left(\lambda \frac{d\lambda''}{dt} + \mu \frac{d\mu''}{dt} + \nu \frac{d\nu''}{dt} \right) \\ V = \frac{dv}{dt} + w \left(\lambda' \frac{d\lambda''}{dt} + \mu' \frac{d\mu''}{dt} + \nu' \frac{d\nu''}{dt} \right) + u \left(\lambda' \frac{d\lambda}{dt} + \mu' \frac{d\mu}{dt} + \nu' \frac{d\nu}{dt} \right) \\ W = \frac{dw}{dt} + u \left(\lambda'' \frac{d\lambda}{dt} + \mu'' \frac{d\mu}{dt} + \nu'' \frac{d\nu}{dt} \right) + v \left(\lambda'' \frac{d\lambda'}{dt} + \mu'' \frac{d\mu'}{dt} + \nu'' \frac{d\nu'}{dt} \right). \end{array} \right.$$

Cela posé, il nous sera facile d'obtenir l'expression des dérivées relatives au temps des neuf cosinus qui figurent dans ces équations, en fonction des dérivées de φ , ψ et ω , car ayant pour l'un d'eux par exemple

$$(2) \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\lambda}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\lambda}{\psi} \frac{d\psi}{dt} + \frac{\lambda}{\omega} \frac{d\omega}{dt},$$

le tableau (63) de notre *Mémoire* (p. 76) nous fournit immédiatement la valeur de leurs vingt-sept dérivées partielles, relatives aux coordonnées curvilignes, exprimées en fonction de ces cosinus eux-mêmes, et des six courbures principales du système que l'on peut supposer remplacées par leurs valeurs (59). Mais aupa-

ravant nous observerons qu'en vertu de la formule (40^{bis}) (p. 44) du même travail, si l'on désigne par dn , dn' , dn'' les éléments des trois normales aux surfaces coordonnées, on aura

$$(3) \quad u = \frac{dn}{dt} = \frac{1}{\Delta_1 \gamma} \frac{d\gamma}{dt}, \quad v = \frac{dn'}{dt} = \frac{1}{\Delta_1 \psi} \frac{d\psi}{dt}, \quad w = \frac{1}{\Delta_1 \sigma} \frac{d\sigma}{dt},$$

d'où l'on tirera :

$$(4) \quad \frac{d\gamma}{dt} = \Delta_1 \gamma \cdot u, \quad \frac{d\psi}{dt} = \Delta_1 \psi \cdot v, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \Delta_1 \sigma \cdot w.$$

Or, si nous reportons ces valeurs dans l'expression (2), ce qui la transformera dans la suivante

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\lambda}{\gamma} \Delta_1 \gamma \cdot u + \frac{\lambda}{\psi} \Delta_1 \psi \cdot v + \frac{\lambda}{\sigma} \Delta_1 \sigma \cdot w,$$

puis que nous remplaçons les coefficients de u , v , w par leurs valeurs tirées du tableau (63) du *Mémoire* précité, nous obtiendrons la première des trois expressions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\lambda}{dt} = - \left(\frac{\lambda''}{R_1'} + \frac{\lambda'}{R_2'} \right) u + \frac{\lambda'}{R_1} v + \frac{\lambda''}{R_2} w, \\ \frac{d\mu}{dt} = - \left(\frac{\mu''}{R_1''} + \frac{\mu'}{R_2''} \right) u + \frac{\mu'}{R_1} v + \frac{\mu''}{R_2} w, \\ \frac{d\nu}{dt} = - \left(\frac{\nu''}{R_1''} + \frac{\nu'}{R_2''} \right) u + \frac{\nu'}{R_1} v + \frac{\nu''}{R_2} w, \end{array} \right.$$

les deux autres résultant de la permutation circulaire des trois axes de coordonnées rectilignes, laquelle revient à permuter simplement entre elles les trois lettres λ , μ , ν , sans modifier leur accentuation.

De ce premier groupe nous concluons immédiatement deux autres qui s'en déduiront par la permutation des trois surfaces coordonnées, ou ce qui est la même chose des trois normales, opération qui revient dans le cas actuel à permuter les trois

lettres u, v, w , et simplement les accentuations des autres lettres, savoir :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\lambda'}{dt} &= -\left(\frac{\lambda}{R_1} + \frac{\lambda''}{R_2}\right)v + \frac{\lambda''}{R_1}w + \frac{\lambda}{R_2}u, \\ \frac{d\mu'}{dt} &= -\left(\frac{\mu}{R_1} + \frac{\mu''}{R_2}\right)v + \frac{\mu''}{R_1}w + \frac{\mu}{R_2}u, \\ \frac{d\nu'}{dt} &= -\left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{\nu''}{R_2}\right)v + \frac{\nu''}{R_1}w + \frac{\nu}{R_2}u. \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\lambda''}{dt} &= -\left(\frac{\lambda'}{R_1} + \frac{\lambda}{R_2}\right)w + \frac{\lambda}{R_1}u + \frac{\lambda'}{R_2}v, \\ \frac{d\mu''}{dt} &= -\left(\frac{\mu'}{R_1} + \frac{\mu}{R_2}\right)w + \frac{\mu}{R_1}u + \frac{\mu'}{R_2}v, \\ \frac{d\nu''}{dt} &= -\left(\frac{\nu'}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)w + \frac{\nu}{R_1}u + \frac{\nu'}{R_2}v. \end{aligned} \right.$$

Nous concluons dès lors de ces valeurs, en ayant égard aux mêmes équations (42) déjà citées,

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda' \frac{d\lambda''}{dt} + \mu' \frac{d\mu''}{dt} + \nu' \frac{d\nu''}{dt} &= -\left(\lambda'' \frac{d\lambda'}{dt} + \mu'' \frac{d\mu'}{dt} + \nu'' \frac{d\nu'}{dt}\right) = \frac{v}{R_2} - \frac{w}{R_1}, \\ \lambda'' \frac{d\lambda}{dt} + \mu'' \frac{d\mu}{dt} + \nu'' \frac{d\nu}{dt} &= -\left(\lambda \frac{d\lambda''}{dt} + \mu \frac{d\mu''}{dt} + \nu \frac{d\nu''}{dt}\right) = \frac{w}{R_2} - \frac{u}{R_1}, \\ \lambda \frac{d\lambda'}{dt} + \mu \frac{d\mu'}{dt} + \nu \frac{d\nu'}{dt} &= -\left(\lambda' \frac{d\lambda}{dt} + \mu' \frac{d\mu}{dt} + \nu' \frac{d\nu}{dt}\right) = \frac{u}{R_2} - \frac{v}{R_1}; \end{aligned} \right.$$

et en reportant ces dernières expressions dans les équations (1)

$$\left\{ \begin{aligned} U &= \frac{du}{dt} + v \left(\frac{u}{R_2} - \frac{v}{R_1}\right) + w \left(\frac{u}{R_1} - \frac{w}{R_2}\right), \\ V &= \frac{dv}{dt} + w \left(\frac{v}{R_2} - \frac{w}{R_1}\right) + u \left(\frac{v}{R_1} - \frac{u}{R_2}\right), \\ W &= \frac{dw}{dt} + u \left(\frac{w}{R_2} - \frac{u}{R_1}\right) + v \left(\frac{w}{R_1} - \frac{v}{R_2}\right), \end{aligned} \right.$$

ou encore en intervertissant les deux membres :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} + u \left(\frac{v}{R_2''} + \frac{w}{R_1'} \right) - \frac{v^2}{R_1} - \frac{w^2}{R_2} = U, \\ \frac{dv}{dt} + v \left(\frac{w}{R_2''} + \frac{u}{R_1} \right) - \frac{w^2}{R_1'} - \frac{u^2}{R_2} = V, \\ \frac{dw}{dt} + w \left(\frac{u}{R_2} + \frac{v}{R_1'} \right) - \frac{u^2}{R_1'} - \frac{v^2}{R_2''} = W. \end{array} \right.$$

C'est la troisième forme donnée par Lamé aux équations du mouvement, et présentée par lui au § XC de ses *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (p. 165).

Nous n'adopterons pas cette forme qui se présente ainsi à nous la première, à cause de son défaut absolu de symétrie, mais nous la transformerons de manière à en déduire une seconde qui se rapproche beaucoup plus d'une autre forme notablement plus élégante également donnée par Lamé, quelques pages auparavant. Pour effectuer cette transformation sur la première équation, par exemple, il suffira de développer la dérivée de la vitesse qui figure dans le premier membre de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\Delta_{1\varphi} \cdot \frac{u}{\Delta_{1\varphi}} \right) = \Delta_{1\varphi} \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\Delta_{1\varphi}} \right) + \frac{u}{\Delta_{1\varphi}} \frac{d\Delta_{1\varphi}}{dt} \\ &= \Delta_{1\varphi} \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\Delta_{1\varphi}} \right) + u \frac{d.l\Delta_{1\varphi}}{dt}. \end{aligned}$$

Or, comme nous avons, en vertu des valeurs (4),

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d.l\Delta_{1\varphi}}{dt} = \frac{l\Delta_{1\varphi}}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{l\Delta_{1\varphi}}{\psi} \frac{d\psi}{dt} + \frac{l\Delta_{1\varphi}}{\varpi} \frac{d\varpi}{dt} \\ = \Delta_{1\varphi} \frac{l\Delta_{1\varphi}}{\varphi} \cdot u + \Delta_{1\psi} \frac{l\Delta_{1\varphi}}{\psi} \cdot v + \Delta_{1\varpi} \frac{l\Delta_{1\varphi}}{\varpi} \cdot w, \end{array} \right.$$

nous aurons en reportant cette expression dans la précédente :

$$\frac{du}{dt} = \Delta_{1\varphi} \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\Delta_{1\varphi}} \right) + u \left(\Delta_{1\varphi} \frac{l\Delta_{1\varphi}}{\varphi} u + \Delta_{1\psi} \frac{l\Delta_{1\varphi}}{\psi} v + \Delta_{1\varpi} \frac{l\Delta_{1\varphi}}{\varpi} w \right).$$

Si maintenant nous substituons à son tour cette dernière expression dans la première équation (5), et que nous y remettons en même temps à la place des rayons de courbure qui y figurent leurs valeurs fournies par le tableau (59) de notre *Mémoire* (p. 70), elle deviendra par ces substitutions

$$\Delta_1\varphi \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\Delta_1\varphi} \right) + u \left(\Delta_1\varphi \frac{l\Delta_1\varphi}{\varphi} u + \Delta_1\psi \frac{l\Delta_1\varphi}{\psi} v + \Delta_1\sigma \frac{l\Delta_1\varphi}{\sigma} w \right) \\ + u \left(-\Delta_1\psi \frac{l\Delta_1\varphi}{\psi} v - \Delta_1\sigma \frac{l\Delta_1\varphi}{\sigma} w \right) + \Delta_1\varphi \frac{l\Delta_1\psi}{\varphi} v^2 + \Delta_1\varphi \frac{l\Delta_1\sigma}{\varphi} w^2 = U,$$

et, par conséquent, en réduisant et divisant tous les termes par le facteur $\Delta_1\varphi$, nous aurons définitivement la première des trois équations suivantes

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\Delta_1\varphi} \right) + \frac{l\Delta_1\varphi}{\varphi} u^2 + \frac{l\Delta_1\psi}{\varphi} v^2 + \frac{l\Delta_1\sigma}{\varphi} w^2 = \frac{U}{\Delta_1\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\Delta_1\psi} \right) + \frac{l\Delta_1\varphi}{\psi} u^2 + \frac{l\Delta_1\psi}{\psi} v^2 + \frac{l\Delta_1\sigma}{\psi} w^2 = \frac{V}{\Delta_1\psi}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{w}{\Delta_1\sigma} \right) + \frac{l\Delta_1\varphi}{\sigma} u^2 + \frac{l\Delta_1\psi}{\sigma} v^2 + \frac{l\Delta_1\sigma}{\sigma} w^2 = \frac{W}{\Delta_1\sigma}, \end{array} \right.$$

les deux autres se déduisant de la première (sauf interversion des termes) par la simple permutation des trois surfaces coordonnées, puisque les trois équations (5), ainsi que les différentes formules dont nous avons fait usage pour les transformer, se déduisent elles-mêmes suivant cette loi.

Telle est la forme simple et élégante, que nous proposerons d'adopter dans le cas le plus général, pour les équations du mouvement d'un point matériel en coordonnées curvilignes, exprimées en fonction des vitesses et de leurs dérivées par rapport au temps, de préférence à toute autre à cause de sa parfaite symétrie, qui la rend assez facile à retenir. Mais nous croyons néanmoins devoir faire connaître encore les deux autres formes que Lamé donne aussi à ces mêmes équations, et qui peuvent se déduire également assez facilement des deux formes précédentes.

Tout d'abord nous développerons de nouveau la dérivée $\frac{du}{dt}$, d'après la valeur (3) de u , ainsi qu'il suit

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\Delta_{\bar{r}^{-1}\bar{\varphi}} \cdot \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \right) = \Delta_{\bar{r}^{-1}\bar{\varphi}} \frac{d^2\bar{\varphi}}{dt^2} + \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \frac{d\Delta_{\bar{r}^{-1}\bar{\varphi}}}{dt} \\ &= \Delta_{\bar{r}^{-1}\bar{\varphi}} \cdot \frac{d^2\bar{\varphi}}{dt^2} + \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \cdot \Delta_{\bar{r}^{-1}\bar{\varphi}} \frac{d\Delta_{\bar{r}^{-1}\bar{\varphi}}}{dt}, \end{aligned}$$

et par conséquent, en ayant égard à la même valeur de u et à l'expression (6),

$$\frac{du}{dt} = \Delta_{\bar{r}^{-1}\bar{\varphi}} \frac{d^2\bar{\varphi}}{dt^2} - u \left(\Delta_{\bar{r}^{-1}\bar{\varphi}} \frac{l\Delta_{\bar{r}^{-1}\bar{\varphi}}}{\bar{\varphi}} u + \Delta_{\bar{r}^{-1}\psi} \frac{l\Delta_{\bar{r}^{-1}\bar{\varphi}}}{\psi} v + \Delta_{\bar{r}^{-1}\varpi} \frac{l\Delta_{\bar{r}^{-1}\bar{\varphi}}}{\varpi} w \right),$$

expression que nous pourrons encore écrire, si nous supposons les trois surfaces coordonnées isothermes, ce qui est le cas le plus fréquemment considéré, en vertu des formules (79), (71) et (59) de notre *Mémoire* :

$$\frac{du}{dt} = \Delta_{\bar{r}^{-1}\bar{\varphi}} \frac{d^2\bar{\varphi}}{dt^2} + u \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u + \frac{1}{R_2'} v + \frac{1}{R_1''} w \right].$$

Dès lors, en reportant cette valeur dans la première des équations (5), elle deviendra

$$\frac{1}{\Delta_{\bar{r}^{-1}\bar{\varphi}}} \frac{d^2\bar{\varphi}}{dt^2} + u \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u + \frac{1}{R_2'} v + \frac{1}{R_1''} w \right] + u \left(\frac{v}{R_2'} + \frac{w}{R_1''} \right) - \frac{v^2}{R_1} - \frac{w^2}{R_2} = U,$$

et en ordonnant, nous aurons définitivement la première des trois suivantes

$$(7^{bis}) \begin{cases} \frac{1}{\Delta_{\bar{r}^{-1}\bar{\varphi}}} \frac{d^2\bar{\varphi}}{dt^2} - \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u^2 + \frac{v^2}{R_1} + \frac{w^2}{R_2} \right] + 2u \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u + \frac{v}{R_2'} + \frac{w}{R_1''} \right] = U, \\ \frac{1}{\Delta_{\bar{r}^{-1}\psi}} \frac{d^2\psi}{dt^2} - \left[\left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} \right) v^2 + \frac{w^2}{R_1'} + \frac{u^2}{R_2'} \right] + 2v \left[\left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} \right) v + \frac{w}{R_2''} + \frac{u}{R_1} \right] = V, \\ \frac{1}{\Delta_{\bar{r}^{-1}\varpi}} \frac{d^2\varpi}{dt^2} - \left[\left(\frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2''} \right) w^2 + \frac{u^2}{R_1''} + \frac{v^2}{R_2''} \right] + 2w \left[\left(\frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2''} \right) w + \frac{u}{R_2} + \frac{v}{R_1'} \right] = W, \end{cases}$$

qui ne sont, sauf interversion des termes et introduction pour la symétrie d'un terme ajouté et retranché à chaque équation, autre chose que la première forme des équations de Lamé, c'est-à-dire les équations (6) du § LXXIX des *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (p. 143).

Si, enfin, dans la même hypothèse des trois surfaces coordonnées isothermes, nous multiplions les trois équations (7) respectivement par $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\varpi$, puis que nous remplacions dès lors les coefficients des carrés des vitesses par leurs valeurs tirées des formules (79), (71) et (59) du *Mémoire* (pp. 90, 83, et 70), elles se transformeront immédiatement dans les suivantes :

$$(7^{ter}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1\varphi \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\Delta_1\varphi} \right) - \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u^2 + \frac{1}{R_1} v^2 + \frac{1}{R_2} w^2 \right] = U, \\ \Delta_1\psi \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\Delta_1\psi} \right) - \left[\left(\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} \right) v^2 + \frac{1}{R'_1} w^2 + \frac{1}{R'_2} u^2 \right] = V, \\ \Delta_1\varpi \frac{d}{dt} \left(\frac{w}{\Delta_1\varpi} \right) - \left[\left(\frac{1}{R''_1} + \frac{1}{R''_2} \right) w^2 + \frac{1}{R''_1} u^2 + \frac{1}{R''_2} v^2 \right] = W, \end{array} \right.$$

qui sont de même, sauf interversion des termes, celles que Lamé présente comme seconde forme, sous le numéro (19), au § LXXXIX de l'ouvrage déjà cité (p. 162).

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT EN FONCTION DES COORDONNÉES ELLES-MÊMES. — Mais replaçons-nous de nouveau dans le cas le plus général, c'est-à-dire ne supposons plus que les surfaces coordonnées appartiennent toutes trois à la catégorie des surfaces isothermes, et poussons maintenant jusqu'au bout la solution de la question que nous avons entreprise.

En effet, bien que les équations (7) que nous avons présentées nous paraissent préférables à celles de Lamé, principalement au point de vue mnémonique, elles ne remplissent pas encore complètement le but que nous nous étions proposé, à savoir de former trois équations différentielles du second ordre entre les trois inconnues φ , ψ , ϖ seulement, et le temps comme variable

indépendante. Il reste donc encore, pour achever la solution, à remplacer dans ces équations u , v , w par leurs valeurs (3), et à développer ensuite les trois dérivées qui figurent dans leurs premiers membres. Celle de ces dérivées qui entre dans la première équation se développera ainsi de la façon suivante, eu égard à la valeur (3) de u :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\Delta_{1\varphi}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\Delta_{1\varphi}^{-2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) = \Delta_{1\varphi}^{-2} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d \Delta_{1\varphi}^{-2}}{dt} \\ &= \Delta_{1\varphi}^{-2} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} \left(\frac{\Delta_{1\varphi}^{-2}}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\Delta_{1\varphi}^{-2}}{\psi} \frac{d\psi}{dt} + \frac{\Delta_{1\varphi}^{-2}}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} \right). \end{aligned}$$

D'autre part les termes, qui contiennent les carrés des vitesses dans la même équation, peuvent eux-mêmes être transformés par la substitution des valeurs (3) de la façon suivante

$$\begin{aligned} \frac{l\Delta_{1\varphi}}{\varphi} u^2 + \frac{l\Delta_{1\psi}}{\psi} v^2 + \frac{l\Delta_{1\sigma}}{\sigma} w^2 &= \Delta_{1\varphi}^{-2} \frac{l\Delta_{1\varphi}}{\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \Delta_{1\psi}^{-2} \frac{l\Delta_{1\psi}}{\psi} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \Delta_{1\sigma}^{-2} \frac{l\Delta_{1\sigma}}{\sigma} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \\ &= \Delta_{1\varphi}^{-2} \frac{\Delta_{1\varphi}}{\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \Delta_{1\psi}^{-2} \frac{\Delta_{1\psi}}{\psi} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \Delta_{1\sigma}^{-2} \frac{\Delta_{1\sigma}}{\sigma} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\Delta_{1\varphi}^{-2}}{\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{\Delta_{1\psi}^{-2}}{\psi} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \frac{\Delta_{1\sigma}^{-2}}{\sigma} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \right]; \end{aligned}$$

en sorte que, par la substitution de ces deux dernières expressions, la première équation (7) se transformera définitivement dans celle-ci :

$$\begin{aligned} \Delta_{1\varphi}^{-2} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} \left(\frac{\Delta_{1\varphi}^{-2}}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\Delta_{1\varphi}^{-2}}{\psi} \frac{d\psi}{dt} + \frac{\Delta_{1\varphi}^{-2}}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} \right) \\ - \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta_{1\varphi}^{-2}}{\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{\Delta_{1\psi}^{-2}}{\psi} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \frac{\Delta_{1\sigma}^{-2}}{\sigma} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \right] = \frac{U}{\Delta_{1\varphi}}. \end{aligned}$$

Pour écrire ces trois équations, nous poserons donc, en vue seulement de simplifier l'écriture,

$$(8) \quad H = \Delta_{1\varphi}^{-2}, \quad K = \Delta_{1\psi}^{-2}, \quad J = \Delta_{1\sigma}^{-2},$$

et avec ces notations, les équations différentielles du mouvement d'un point sous leur forme définitive seront les suivantes :

$$(9) \left\{ \begin{aligned} H \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} \left(\frac{H}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{H}{\psi} \frac{d\psi}{dt} + \frac{H}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{H}{\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{K}{\psi} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \frac{J}{\sigma} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \right] &= H^{\frac{1}{2}} \cdot U, \\ K \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{d\psi}{dt} \left(\frac{K}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{K}{\psi} \frac{d\psi}{dt} + \frac{K}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{H}{\psi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{K}{\psi} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \frac{J}{\sigma} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \right] &= K^{\frac{1}{2}} \cdot V, \\ J \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \frac{d\sigma}{dt} \left(\frac{J}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{J}{\psi} \frac{d\psi}{dt} + \frac{J}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{H}{\sigma} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{K}{\sigma} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \frac{J}{\sigma} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \right] &= J^{\frac{1}{2}} \cdot W. \end{aligned} \right.$$

Telle est la forme d'équations du mouvement que nous proposerons donc de substituer aux différentes équations de Lamé, que nous venons successivement de passer en revue ; la question importante que nous allons traiter dans le paragraphe suivant suffira à montrer combien cette forme est d'un emploi facile et se prête commodément aux applications qu'on en veut faire. Mais auparavant, à titre de vérifications des calculs qui précèdent, nous allons nous proposer de retrouver par le moyen de ces équations l'intégrale des forces vives.

Pour cela il suffira de multiplier respectivement ces trois équations par $d\varphi$, $d\psi$, $d\sigma$ et d'ajouter, en remarquant que les premières parenthèses de chaque équation sont respectivement les dérivées totales $\frac{dH}{dt}$, $\frac{dK}{dt}$, $\frac{dJ}{dt}$, et réunissant par colonnes verticales les termes contenus dans les secondes parenthèses, car l'on obtiendra en opérant ainsi

$$\left[H \frac{d\varphi}{dt} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \frac{dH}{dt} \right] dt + \left[K \frac{d\psi}{dt} \frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \frac{dK}{dt} \right] dt + \left[J \frac{d\sigma}{dt} \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \frac{dJ}{dt} \right] dt - \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \frac{dH}{dt} dt - \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \frac{dK}{dt} dt - \frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \frac{dJ}{dt} dt = U \frac{d\varphi}{\Delta_1\varphi} + V \frac{d\psi}{\Delta_1\psi} + W \frac{d\sigma}{\Delta_1\sigma},$$

c'est-à-dire simplement en réduisant :

$$(10) \quad \left[H \frac{d\varphi}{dt} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \frac{dH}{dt} + K \frac{d\psi}{dt} \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \frac{dK}{dt} + J \frac{d\sigma}{dt} \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \frac{dJ}{dt} \right] dt = Udn + Vdn' + Wdn''.$$

Or le second membre représente évidemment, d'après les théorèmes connus de la Mécanique, le travail élémentaire de la force qui sollicite le point, travail qui aurait pour expression en coordonnées planes

$$Xdx + Ydy + Zdz = dF(x, y, z),$$

en admettant qu'il existe une fonction des forces. Si l'on imagine ce même travail élémentaire exprimé en coordonnées quelconques, on aura donc de même

$$(10^{bis}) \quad Udn + Vdn' + Wdn'' = d\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi),$$

la fonction \mathcal{F} procédant de la fonction F par la simple substitution à la place des variables x, y, z de leurs valeurs données en φ, ψ et ϖ . Dans ces conditions les deux membres de l'équation (10) sont bien ainsi des différentielles exactes, et l'on a en intégrant

$$(11) \quad \frac{1}{2} \left[H \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + K \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + J \left(\frac{d\varpi}{dt} \right)^2 \right] = \mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C,$$

équation dont le premier membre peut s'écrire successivement, eu égard aux définitions (8) des symboles H, K, J et aux valeurs (3)

$$\frac{1}{2} \left[H \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + K \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + J \left(\frac{d\varpi}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{2dt^2} \left[\left(\frac{d\varphi}{\Delta_1\varphi} \right)^2 + \left(\frac{d\psi}{\Delta_1\psi} \right)^2 + \left(\frac{d\varpi}{\Delta_1\varpi} \right)^2 \right] = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2),$$

ce qui donne bien, en reportant cette valeur et supposant la constante C déterminée par l'état initial, l'équation connue des forces vives

$$(12) \quad \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C,$$

car tel est bien le résultat auquel on fût arrivé en calculant d'abord cette intégrale en coordonnées rectilignes, et la transformant ensuite en coordonnées quelconques.

AUTRE PROCÉDÉ DIRECT POUR ÉTABLIR LES MÊMES ÉQUATIONS. — Nous avons cru devoir, avant d'établir la forme d'équation précédente que nous proposons d'adopter pour les équations du mouvement, et dans le but d'exposer loyalement l'état de la question, faire connaître les différentes formes que Lamé leur avait antérieurement données, et la moitié du chemin se trouvant ainsi faite, partir de celles-là pour arriver dès lors rapidement à celles qui nous appartiennent en propre. Mais nous eussions pu tout aussi facilement établir directement celles-ci, sans passer par aucune des équations de Lamé, et cette voie nous eût permis d'obtenir du même coup deux autres formules importantes, qui ne se trouvent pas dans Lamé, à savoir celles qui font connaître la grandeur et la direction du rayon de courbure d'une courbe quelconque, dont l'équation est supposée donnée en coordonnées curvilignes.

A cet effet, rappelons d'abord quelques formules que l'on trouve dans tous les traités d'analyse, relativement au système orthogonal considéré; savoir, en premier lieu, celles-ci :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\varphi} = H \frac{\varphi}{x}, \quad \frac{y}{\psi} = H \frac{\psi}{y}, \quad \frac{z}{\sigma} = H \frac{\sigma}{z}, \\ \frac{x}{\psi} = K \frac{\psi}{x}, \quad \frac{y}{\varphi} = K \frac{\varphi}{y}, \quad \frac{z}{\sigma} = K \frac{\sigma}{z}, \\ \frac{x}{\sigma} = J \frac{\sigma}{x}, \quad \frac{y}{\varphi} = J \frac{\varphi}{y}, \quad \frac{z}{\psi} = J \frac{\psi}{z}, \end{array} \right.$$

qui résultent immédiatement des neuf relations

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\varphi} \frac{\varphi}{x} + \frac{x}{\psi} \frac{\psi}{x} + \frac{x}{\sigma} \frac{\sigma}{x} = 1, \quad \frac{y}{\varphi} \frac{\varphi}{y} + \frac{y}{\psi} \frac{\psi}{y} + \frac{y}{\sigma} \frac{\sigma}{y} = 0, \quad \frac{z}{\varphi} \frac{\varphi}{z} + \frac{z}{\psi} \frac{\psi}{z} + \frac{z}{\sigma} \frac{\sigma}{z} = 0, \\ \frac{x}{\varphi} \frac{\varphi}{y} + \frac{x}{\psi} \frac{\psi}{y} + \frac{x}{\sigma} \frac{\sigma}{y} = 0, \quad \frac{y}{\varphi} \frac{\varphi}{y} + \frac{y}{\psi} \frac{\psi}{y} + \frac{y}{\sigma} \frac{\sigma}{y} = 1, \quad \frac{z}{\varphi} \frac{\varphi}{y} + \frac{z}{\psi} \frac{\psi}{y} + \frac{z}{\sigma} \frac{\sigma}{y} = 0, \\ \frac{x}{\varphi} \frac{\varphi}{z} + \frac{x}{\psi} \frac{\psi}{z} + \frac{x}{\sigma} \frac{\sigma}{z} = 0, \quad \frac{y}{\varphi} \frac{\varphi}{z} + \frac{y}{\psi} \frac{\psi}{z} + \frac{y}{\sigma} \frac{\sigma}{z} = 0, \quad \frac{z}{\varphi} \frac{\varphi}{z} + \frac{z}{\psi} \frac{\psi}{z} + \frac{z}{\sigma} \frac{\sigma}{z} = 1, \end{array} \right.$$

que l'on obtient elles-mêmes en différentiant les trois équations

$$(15) \quad x = f_1(\varphi, \psi, \varpi), \quad y = f_2(\varphi, \psi, \varpi), \quad z = f_3(\varphi, \psi, \varpi),$$

qui définissent le système en coordonnées curvilignes, puis substituant aux différentielles $d\varphi$, $d\psi$, $d\varpi$ leurs valeurs

$$d\varphi = \frac{\varphi}{x} dx + \frac{\varphi}{y} dy + \frac{\varphi}{z} dz, \quad d\psi = \frac{\psi}{x} dx + \frac{\psi}{y} dy + \frac{\psi}{z} dz,$$

$$d\varpi = \frac{\varpi}{x} dx + \frac{\varpi}{y} dy + \frac{\varpi}{z} dz,$$

et identifiant enfin les coefficients des différentielles arbitraires dx , dy , dz . En effet, si l'on ajoute les trois équations de la première colonne de ce dernier système, multipliées respectivement d'abord par $\frac{\varphi}{x}$, $\frac{\varphi}{y}$, $\frac{\varphi}{z}$, puis par $\frac{\psi}{x}$, $\frac{\psi}{y}$, $\frac{\psi}{z}$, puis enfin par $\frac{\varpi}{x}$, $\frac{\varpi}{y}$, $\frac{\varpi}{z}$, en ayant égard aux conditions connues d'orthogonalité du système, qui figurent sous le numéro (48) dans notre *Mémoire* sur la courbure des surfaces, il viendra simplement :

$$(16) \quad \frac{x}{\varphi} \Delta_1^2 \varphi = \frac{\varphi}{x}, \quad \frac{x}{\psi} \Delta_1^2 \psi = \frac{\psi}{x}, \quad \frac{x}{\varpi} \Delta_1^2 \varpi = \frac{\varpi}{x},$$

équations qui, en ayant égard à notre définition (8) des quantités H , K , J , sont précisément celles de la première colonne (13), et l'on obtiendrait celle des deux autres colonnes par un procédé analogue.

Rappelons en second lieu ces autres formules, qui se déduisent immédiatement des précédentes, savoir

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \left(\frac{x}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varphi}\right)^2, \quad \frac{x}{\psi} \frac{x}{\varpi} + \frac{y}{\psi} \frac{y}{\varpi} + \frac{z}{\psi} \frac{z}{\varpi} = 0, \\ K = \left(\frac{x}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\psi}\right)^2, \quad \frac{x}{\varpi} \frac{x}{\varphi} + \frac{y}{\varpi} \frac{y}{\varphi} + \frac{z}{\varpi} \frac{z}{\varphi} = 0, \\ J = \left(\frac{x}{\varpi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varpi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varpi}\right)^2, \quad \frac{x}{\varphi} \frac{x}{\psi} + \frac{y}{\varphi} \frac{y}{\psi} + \frac{z}{\varphi} \frac{z}{\psi} = 0, \end{array} \right.$$

dont les trois premières s'obtiennent en élevant au carré et ajoutant les trois équations de chaque ligne horizontale (13), et les trois autres en prenant deux à deux les différentes lignes horizontales, multipliant entre elles les équations de même colonne, et ajoutant en ayant égard aux conditions d'orthogonalité précitées (48) du *Mémoire*.

On obtiendrait également les mêmes formules, en remarquant que les trois équations (16) que nous venons d'obtenir permettent d'écrire l'expression des trois cosinus λ , λ' , λ'' , sous la forme

$$\lambda = \frac{1}{\Delta_1\varphi} \frac{\varphi}{x} = \Delta_1\varphi \frac{x}{\varphi}, \quad \lambda' = \frac{1}{\Delta_1\psi} \frac{\psi}{x} = \Delta_1\psi \frac{x}{\psi}, \quad \lambda'' = \frac{1}{\Delta_1\sigma} \frac{\sigma}{x} = \Delta_1\sigma \frac{x}{\sigma},$$

et agissant de même pour les six autres, on aura pour les neuf cosinus les nouvelles expressions

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \lambda = \Delta_1\varphi \frac{x}{\varphi}, & \mu = \Delta_1\varphi \frac{y}{\varphi}, & \nu = \Delta_1\varphi \frac{z}{\varphi}, \\ \lambda' = \Delta_1\psi \frac{x}{\psi}, & \mu' = \Delta_1\psi \frac{y}{\psi}, & \nu' = \Delta_1\psi \frac{z}{\psi}, \\ \lambda'' = \Delta_1\sigma \frac{x}{\sigma}, & \mu'' = \Delta_1\sigma \frac{y}{\sigma}, & \nu'' = \Delta_1\sigma \frac{z}{\sigma}, \end{array} \right.$$

lesquelles étant substituées dans les six relations

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, & \lambda \lambda'' + \mu' \mu'' + \nu' \nu'' = 0, \\ \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = 1, & \lambda'' \lambda + \mu'' \mu + \nu'' \nu = 0, \\ \lambda''^2 + \mu''^2 + \nu''^2 = 1, & \lambda \lambda' + \mu \mu' + \nu \nu' = 0, \end{array} \right.$$

fourniront précisément les relations ci-dessus (17), que nous venons de rappeler. De ces deux séries de relations, celles de la colonne de gauche peuvent être substituées, comme nouvelle définition, à celles précédemment admises pour les quantités H, K, J, et celles de la seconde colonne aux relations (48), de notre *Mémoire*, comme conditions d'orthogonalité du système.

Ces préliminaires admis, considérons un point mobile, dont les coordonnées, de quelque nature qu'elles soient, seront supposées

des fonctions déterminées d'une variable indépendante que nous appellerons s , sans lui attribuer pour l'instant de signification concrète; puis, envisageant les dérivées secondes $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$ comme représentant en grandeur et en signe les composantes suivant les axes rectilignes des x , des y et des z , d'une certaine droite définie de cette façon en grandeur, direction et sens, formons l'expression des composantes de cette même droite suivant les normales aux trois surfaces coordonnées φ , ψ et ϖ . Si l'on convient de désigner U , V , W ces nouvelles composantes, il est clair qu'elles auront pour expression

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \lambda \frac{d^2x}{ds^2} + \mu \frac{d^2y}{ds^2} + \nu \frac{d^2z}{ds^2}, \quad V = \lambda' \frac{d^2x}{ds^2} + \mu' \frac{d^2y}{ds^2} + \nu' \frac{d^2z}{ds^2}, \\ W = \lambda'' \frac{d^2x}{ds^2} + \mu'' \frac{d^2y}{ds^2} + \nu'' \frac{d^2z}{ds^2}. \end{array} \right.$$

c'est-à-dire, en remplaçant les neuf cosinus $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu', \lambda'', \mu'', \nu''$, par leurs valeurs ci-dessus (18) :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \Delta_{1\varphi} \left(\frac{x}{\varphi} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{y}{\varphi} \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{z}{\varphi} \frac{d^2z}{ds^2} \right), \\ V = \Delta_{1\psi} \left(\frac{x}{\psi} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{y}{\psi} \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{z}{\psi} \frac{d^2z}{ds^2} \right), \\ W = \Delta_{1\varpi} \left(\frac{x}{\varpi} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{y}{\varpi} \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{z}{\varpi} \frac{d^2z}{ds^2} \right). \end{array} \right.$$

Or, si l'on suppose résolu par rapport à x, y, z le système des trois équations

$$\varphi(x, y, z) = \varphi, \quad \psi(x, y, z) = \psi, \quad \varpi(x, y, z) = \varpi,$$

qui définit le système des coordonnées curvilignes, c'est-à-dire si l'on part des formules de transformation inverses

$$x = f_1(\varphi, \psi, \varpi), \quad y = f_2(\varphi, \psi, \varpi), \quad z = f_3(\varphi, \psi, \varpi),$$

et qu'on les différentie par rapport à la variable indépendante s , l'on aura par une première différentiation

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x}{\varphi} \varphi' + \frac{x}{\psi} \psi' + \frac{x}{\varpi} \varpi', \quad \frac{dy}{ds} = \frac{y}{\varphi} \varphi' + \frac{y}{\psi} \psi' + \frac{y}{\varpi} \varpi', \quad \frac{dz}{ds} = \frac{z}{\varphi} \varphi' + \frac{z}{\psi} \psi' + \frac{z}{\varpi} \varpi',$$

φ' , ψ' , ω' désignant les dérivées des trois coordonnées φ , ψ , ω , par rapport à s ; puis une seconde différentiation nous donnera, pour la première de ces trois dernières équations en particulier

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{x}{\varphi} \varphi'' + \frac{x}{\psi} \psi'' + \frac{x}{\omega} \omega'' + \left(\frac{x^2}{\varphi^2} \varphi' + \frac{x^2}{\varphi \psi} \psi' + \frac{x^2}{\varphi \omega} \omega' \right) \varphi' + \left(\frac{x^2}{\psi \varphi} \varphi' + \frac{x^2}{\psi^2} \psi' + \frac{x^2}{\psi \omega} \omega' \right) \psi' + \left(\frac{x^2}{\omega \varphi} \varphi' + \frac{x^2}{\omega \psi} \psi' + \frac{x^2}{\omega^2} \omega' \right) \omega';$$

et, par conséquent, en calculant de même pour les deux autres équations, et réduisant, on aura les trois expressions :

$$(21) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} &= \frac{x}{\varphi} \varphi'' + \frac{x}{\psi} \psi'' + \frac{x}{\omega} \omega'' + \frac{x^2}{\varphi^2} \varphi'^2 + \frac{x^2}{\psi^2} \psi'^2 + \frac{x^2}{\omega^2} \omega'^2 + 2 \frac{x^2}{\psi \omega} \psi' \omega' + 2 \frac{x^2}{\omega \varphi} \omega' \varphi' + 2 \frac{x^2}{\psi \varphi} \psi' \varphi', \\ \frac{d^2y}{ds^2} &= \frac{y}{\varphi} \varphi'' + \frac{y}{\psi} \psi'' + \frac{y}{\omega} \omega'' + \frac{y^2}{\varphi^2} \varphi'^2 + \frac{y^2}{\psi^2} \psi'^2 + \frac{y^2}{\omega^2} \omega'^2 + 2 \frac{y^2}{\psi \omega} \psi' \omega' + 2 \frac{y^2}{\omega \varphi} \omega' \varphi' + 2 \frac{y^2}{\psi \varphi} \psi' \varphi', \\ \frac{d^2z}{ds^2} &= \frac{z}{\varphi} \varphi'' + \frac{z}{\psi} \psi'' + \frac{z}{\omega} \omega'' + \frac{z^2}{\varphi^2} \varphi'^2 + \frac{z^2}{\psi^2} \psi'^2 + \frac{z^2}{\omega^2} \omega'^2 + 2 \frac{z^2}{\psi \omega} \psi' \omega' + 2 \frac{z^2}{\omega \varphi} \omega' \varphi' + 2 \frac{z^2}{\psi \varphi} \psi' \varphi', \end{aligned} \right.$$

lesquelles étant multipliées toutes par $\Delta_1 \varphi$ et respectivement par $\frac{x}{\varphi}$, $\frac{y}{\psi}$, $\frac{z}{\omega}$, puis ajoutées, donneront, en ayant égard aux relations (17), pour la première des expressions (20) :

$$(22) \left\{ \begin{aligned} U &= \Delta_1 \varphi \left[H \varphi'' + \left(\frac{x x^2}{\varphi \varphi^2} + \frac{y y^2}{\varphi \varphi^2} + \frac{z z^2}{\varphi \varphi^2} \right) \varphi'^2 + \left(\frac{x x^2}{\varphi \psi^2} + \frac{y y^2}{\varphi \psi^2} + \frac{z z^2}{\varphi \psi^2} \right) \psi'^2 \right. \\ &\quad + \left(\frac{x x^2}{\varphi \omega^2} + \frac{y y^2}{\varphi \omega^2} + \frac{z z^2}{\varphi \omega^2} \right) \omega'^2 + 2 \left(\frac{x x^2}{\varphi \psi \omega} + \frac{y y^2}{\varphi \psi \omega} + \frac{z z^2}{\varphi \psi \omega} \right) \psi' \omega' \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{x x^2}{\varphi \omega \varphi} + \frac{y y^2}{\varphi \omega \varphi} + \frac{z z^2}{\varphi \omega \varphi} \right) \omega' \varphi' + 2 \left(\frac{x x^2}{\varphi \varphi \psi} + \frac{y y^2}{\varphi \varphi \psi} + \frac{z z^2}{\varphi \varphi \psi} \right) \varphi' \psi' \right]. \end{aligned} \right.$$

Or, de ces six relations (17), d'une part, la première de la colonne de gauche étant différenciée successivement par rapport à φ , ψ , ω , donnera

$$(25) \left\{ \begin{aligned} \frac{H}{\varphi} &= 2 \left(\frac{x x^2}{\varphi \varphi^2} + \frac{y y^2}{\varphi \varphi^2} + \frac{z z^2}{\varphi \varphi^2} \right), & \frac{H}{\psi} &= 2 \left(\frac{x x^2}{\varphi \varphi \psi} + \frac{y y^2}{\varphi \varphi \psi} + \frac{z z^2}{\varphi \varphi \psi} \right), \\ \frac{H}{\omega} &= 2 \left(\frac{x x^2}{\varphi \varphi \omega} + \frac{y y^2}{\varphi \varphi \omega} + \frac{z z^2}{\varphi \varphi \omega} \right), \end{aligned} \right.$$

tandis que les deux autres de la même colonne, étant différenciées par rapport à φ , donneront :

$$\frac{K}{\varphi} = 2 \left(\frac{x x^2}{\psi \psi \varphi} + \frac{y y^2}{\psi \psi \varphi} + \frac{z z^2}{\psi \psi \varphi} \right), \quad \frac{J}{\varphi} = 2 \left(\frac{x x^2}{\varpi \varpi \varphi} + \frac{y y^2}{\varpi \varpi \varphi} + \frac{z z^2}{\varpi \varpi \varphi} \right).$$

D'autre part, la seconde équation de la colonne de droite étant différenciée par rapport à ϖ , et la troisième de la même colonne par rapport à ψ , donneront

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x x^2}{\varphi \varpi^2} + \frac{y y^2}{\varphi \varpi^2} + \frac{z z^2}{\varphi \varpi^2} + \frac{x x^2}{\varpi \varphi \varpi} + \frac{y y^2}{\varpi \varphi \varpi} + \frac{z z^2}{\varpi \varphi \varpi} = 0, \\ \frac{x x^2}{\varphi \psi^2} + \frac{y y^2}{\varphi \psi^2} + \frac{z z^2}{\varphi \psi^2} + \frac{x x^2}{\psi \varphi \psi} + \frac{y y^2}{\psi \varphi \psi} + \frac{z z^2}{\psi \varphi \psi} = 0, \end{array} \right.$$

ou, en multipliant par 2 et ayant égard aux deux précédentes :

$$(24) \quad 2 \left(\frac{x x^2}{\varphi \varpi^2} + \frac{y y^2}{\varphi \varpi^2} + \frac{z z^2}{\varphi \varpi^2} \right) + \frac{J}{\varphi} = 0, \quad 2 \left(\frac{x x^2}{\varphi \psi^2} + \frac{y y^2}{\varphi \psi^2} + \frac{z z^2}{\varphi \psi^2} \right) + \frac{K}{\varphi} = 0.$$

Enfin, si l'on pose un instant pour abrégé

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \frac{x x^2}{\varphi \psi \varpi} + \frac{y y^2}{\varphi \psi \varpi} + \frac{z z^2}{\varphi \psi \varpi}, \\ M = \frac{x x^2}{\psi \varpi \varphi} + \frac{y y^2}{\psi \varpi \varphi} + \frac{z z^2}{\psi \varpi \varphi}, \\ N = \frac{x x^2}{\varpi \varphi \psi} + \frac{y y^2}{\varpi \varphi \psi} + \frac{z z^2}{\varpi \varphi \psi}, \end{array} \right.$$

et que l'on différencie les trois équations de la colonne de droite (17) respectivement par rapport à φ , ψ et ϖ , il est clair que l'on obtiendra pour résultat

$$M + N = 0, \quad N + L = 0, \quad L + M = 0,$$

équations, qui, en retranchant chacune de la somme des deux autres, équivalent évidemment à celles-ci :

$$(26) \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Dès lors, en tenant compte des égalités (23), (24), (25) et (26), l'expression (22) de la composante U deviendra

$$(27) \quad U = \Delta_1 \varphi \left[H\varphi'' + \frac{1}{2} \frac{H}{\varphi} \varphi'^2 - \frac{1}{2} \frac{K}{\psi} \psi'^2 - \frac{1}{2} \frac{J}{\sigma} \sigma'^2 + \frac{H}{\sigma} \sigma' \varphi' + \frac{H}{\varphi} \varphi' \psi' \right],$$

ou en ajoutant et retranchant pour la symétrie le terme $\frac{1}{2} \frac{H}{\varphi} \varphi'^2$, et remplaçant $\Delta_1 \varphi$ par sa valeur en fonction de H, on aura la première des trois formules suivantes

$$(28) \quad \begin{cases} U = H^{-\frac{1}{2}} \left[H\varphi'' + \left(\frac{H}{\varphi} \varphi' + \frac{H}{\psi} \psi' + \frac{H}{\sigma} \sigma' \right) \varphi' - \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\varphi} \varphi'^2 + \frac{K}{\psi} \psi'^2 + \frac{J}{\sigma} \sigma'^2 \right) \right], \\ V = K^{-\frac{1}{2}} \left[K\psi'' + \left(\frac{K}{\varphi} \varphi' + \frac{K}{\psi} \psi' + \frac{K}{\sigma} \sigma' \right) \psi' - \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\varphi} \varphi'^2 + \frac{K}{\psi} \psi'^2 + \frac{J}{\sigma} \sigma'^2 \right) \right], \\ W = J^{-\frac{1}{2}} \left[J\sigma'' + \left(\frac{J}{\varphi} \varphi' + \frac{J}{\psi} \psi' + \frac{J}{\sigma} \sigma' \right) \sigma' - \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\varphi} \varphi'^2 + \frac{K}{\psi} \psi'^2 + \frac{J}{\sigma} \sigma'^2 \right) \right]. \end{cases}$$

les deux autres se déduisant de la première par la simple permutation circulaire des trois groupes (U, V, W), (H, K, J), (φ , ψ , σ), du moment que toutes les formules sans exception, dont nous avons fait usage pour y arriver, subsistent en s'échangeant simplement entre elles par cette triple permutation.

Si l'on remarque que l'on a évidemment, en désignant par H', K', J' les dérivées de H, K, J par rapport à la variable s

$$H' = \frac{H}{\varphi} \varphi' + \frac{H}{\psi} \psi' + \frac{H}{\sigma} \sigma', \quad K' = \frac{K}{\varphi} \varphi' + \frac{K}{\psi} \psi' + \frac{K}{\sigma} \sigma', \\ J' = \frac{J}{\varphi} \varphi' + \frac{J}{\psi} \psi' + \frac{J}{\sigma} \sigma',$$

on pourra écrire les trois formules qui précèdent sous la forme abrégée :

$$(29) \quad \begin{cases} U = H^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{d(H\varphi')}{ds} - \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\varphi} \varphi'^2 + \frac{K}{\psi} \psi'^2 + \frac{J}{\sigma} \sigma'^2 \right) \right], \\ V = K^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{d(K\psi')}{ds} - \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\varphi} \varphi'^2 + \frac{K}{\psi} \psi'^2 + \frac{J}{\sigma} \sigma'^2 \right) \right], \\ W = J^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{d(J\sigma')}{ds} - \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\varphi} \varphi'^2 + \frac{K}{\psi} \psi'^2 + \frac{J}{\sigma} \sigma'^2 \right) \right]. \end{cases}$$

Le résultat purement analytique que nous venons d'obtenir est susceptible d'une double interprétation, mécanique d'une part, ou simplement géométrique d'autre part.

Pour la première, imaginant que le point mobile considéré est un point matériel, c'est-à-dire une masse soumise à l'action de forces données, on remarquera qu'en prenant le temps pour la variable indépendante s , les valeurs (19) des U , V , W sont précisément celles des composantes de son accélération suivant les normales aux trois surfaces coordonnées. Les expressions (28) ou (29) que nous venons d'obtenir seront donc celles de ces mêmes composantes, exprimées à l'aide des coordonnées curvilignes φ , ψ , ω du point matériel et de leurs dérivées par rapport au temps, et conséquemment il suffira, conformément aux théorèmes fondamentaux de la dynamique, de supposer que dans ces mêmes équations (28) ou (29), U , V , W soient remplacées par les composantes données suivant les mêmes directions de la force qui sollicite le point matériel, rapportée à l'unité de masse, en y écrivant en même temps t à la place de s , pour avoir précisément les équations différentielles du mouvement de ce point en coordonnées curvilignes. On retrouve bien ainsi, en multipliant les trois équations (28) respectivement par H , K , J , notre système d'équations (9), que nous nous étions proposé d'établir directement, sans passer par les formes antérieures dues à Lamé; et en traitant de même les trois équations (29), et substituant en même temps u , v , w à leurs valeurs (3) et à H , K , J leurs valeurs (8), on retrouve semblablement les équations (7).

EXPRESSION DU RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE DONNÉE EN COORDONNÉES CURVILIGNES. — THÉORÈMES DE LAMÉ. — Pour la seconde interprétation, nous envisagerons le point mobile dont les coordonnées sont φ , ψ , ω , comme un simple point géométrique, destiné à engendrer par son mouvement, indépendamment de toute considération de temps ou de force, une courbe déterminée, supposée définie, à l'aide de la variable auxiliaire s , par trois équations de la forme :

$$(30) \quad \varphi = \varphi(s), \quad \psi = \psi(s), \quad \omega = \omega(s).$$

Si maintenant nous choisissons expressément pour cette variable auxiliaire s l'arc de la courbe elle-même, compté à partir d'une origine fixe sur cette courbe, et que nous convenions de représenter la courbure en chaque point de la courbe par une droite dirigée suivant le rayon de courbure et égale en grandeur à l'inverse de ce rayon, les trois composantes de cette droite représentative suivant les trois axes rectilignes des x , des y et des z auront, comme l'on sait, pour expression respectivement $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$, et conséquemment les valeurs (19) de U , V , W exprimeront les trois composantes de la même droite suivant les normales aux trois surfaces coordonnées. Si donc l'on suppose les équations d'une courbe quelconque mises sous la forme (30), les expressions (29) seront celles des composantes de la courbure suivant les normales aux trois surfaces coordonnées, et par conséquent, les trois cosinus directeurs de la normale principale à la courbe, ou du rayon de courbure, et la grandeur de la courbure auront respectivement pour valeurs

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}, \quad \cos \beta = \frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{W}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}, \\ \frac{1}{R} &= \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}, \end{aligned} \right.$$

formules dans lesquelles U , V , W représentent pour abrégé les expressions (29).

Telles sont donc les formules qui donneront le moyen de déterminer directement, sans être obligé de revenir aux coordonnées rectilignes, la grandeur et la direction du rayon de courbure d'une courbe, dont l'équation sera donnée en coordonnées curvilignes. Ces formules correspondent donc exactement aux formules usuelles relatives aux coordonnées rectilignes

$$U = \frac{d^2x}{ds^2}, \quad V = \frac{d^2y}{ds^2}, \quad W = \frac{d^2z}{ds^2},$$

qui nous ont servi de point de départ pour arriver à celles-ci, et avec lesquelles elles se confondent visiblement, lorsque le système des coordonnées considéré se réduit aux coordonnées

rectilignes, c'est-à-dire lorsque l'on fait $\varphi = x$, $\psi = y$, $\varpi = z$, puisque l'on a dans ce cas, comme l'on sait, $H = K = J = 1$. Nous verrons dans le paragraphe III une importante application de ces formules.

Pour l'instant, nous ne voulons, comme exemple de leur utilité, qu'en envisager trois cas très particuliers, qui nous conduiront immédiatement à deux théorèmes élégants formulés par Lamé, au sujet des courbures d'un système orthogonal, et démontrés par lui au moyen d'une méthode toute différente.

Considérons dans ce but, pour leur faire l'application des formules qui précèdent, les courbes d'intersection des trois surfaces coordonnées entre elles, lesquelles, d'après le théorème de Dupin, ne sont autre chose que les lignes de courbure de ces mêmes surfaces, et désignons respectivement par (U), (V), (W); (U'), (V'), (W'); (U''), (V''), (W''), les expressions particulières des fonctions U, V, W, qui sont relatives à ces trois courbes. Les équations (50) qui correspondent à la première intersection, c'est-à-dire celle des surfaces ψ et ϖ , sur laquelle la coordonnée φ seule varie, étant de la forme

$$\varphi = \varphi(\delta), \quad \psi = \text{const}, \quad \varpi = \text{const},$$

d'où l'on conclura, par la formule déjà rappelée (40^{bis}) de notre mémoire,

$$ds = dn = \frac{d\varphi}{\Delta_1 \varphi} = H^{\frac{1}{2}} d\varphi,$$

donneront par conséquent

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{ds} = H^{-\frac{1}{2}}, \quad \psi' = 0, \quad \varpi' = 0,$$

et par suite les expressions (29) de U, V, W seront pour cette courbe

$$\left\{ \begin{array}{l} (U) = H^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{d(H^{\frac{1}{2}})}{ds} - \frac{1}{2} \frac{H}{\varphi} H^{-1} \right] = H^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} H^{-\frac{1}{2}} \frac{H}{\varphi} \frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{2} H^{-1} \frac{H}{\varphi} \right] = 0, \\ (V) = K^{-\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2} \frac{H}{\psi} \varphi'^2 \right] = -\frac{1}{2} K^{-\frac{1}{2}} H^{-1} \frac{H}{\psi} = -\frac{1}{2} K^{-\frac{1}{2}} \frac{H}{\psi}, \\ (W) = J^{-\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2} \frac{H}{\varpi} \varphi'^2 \right] = -\frac{1}{2} J^{-\frac{1}{2}} H^{-1} \frac{H}{\varpi} = -\frac{1}{2} J^{-\frac{1}{2}} \frac{H}{\varpi}. \end{array} \right.$$

La première de ces valeurs exprime, comme cela doit être, que le rayon de courbure est situé dans le plan normal de la courbe, et les deux autres déterminent la grandeur et la direction de ce rayon dans ce plan, en exprimant dès lors que la courbure proposée est simplement la résultante des deux composantes (V) et (W), dont nous venons d'écrire les valeurs. Or, si l'on se reporte à l'expression des six courbures principales du système orthogonal, dont nous avons déjà fait usage, et que nous avons donnée après Lamé sous le numéro (59), (page 70) de notre *Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces*, et si l'on remplace dans ces expressions les trois paramètres $\Delta_1\varphi$, $\Delta_1\psi$, $\Delta_1\omega$ par leurs valeurs $H^{-\frac{1}{2}}$, $K^{-\frac{1}{2}}$, $J^{-\frac{1}{2}}$, ces mêmes expressions devenant alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R_1} = \frac{1}{2} H^{-\frac{1}{2}} \frac{JK}{\varphi}, \quad \frac{1}{R'_1} = \frac{1}{2} K^{-\frac{1}{2}} \frac{J}{\psi}, \quad \frac{1}{R''_1} = \frac{1}{2} J^{-\frac{1}{2}} \frac{H}{\omega}, \\ \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2} H^{-\frac{1}{2}} \frac{J}{\varphi}, \quad \frac{1}{R'_2} = \frac{1}{2} K^{-\frac{1}{2}} \frac{H}{\psi}, \quad \frac{1}{R''_2} = \frac{1}{2} J^{-\frac{1}{2}} \frac{JK}{\omega}, \end{array} \right.$$

on voit que l'on aura en particulier, en désignant par R le rayon de courbure de la première courbe :

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} (U) = 0, \quad (V) = -\frac{1}{R'_2}, \quad (W) = -\frac{1}{R''_1}, \\ \left(\frac{1}{R}\right)^2 = (V)^2 + (W)^2 = \left(\frac{1}{R'_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R''_1}\right)^2. \end{array} \right.$$

On trouverait exactement de même pour l'arc d'intersection des surfaces ω et φ , et son rayon de courbure R',

$$(53) \quad (V') = 0, \quad (W') = -\frac{1}{R'_2}, \quad (U') = -\frac{1}{R''_1}, \\ \left(\frac{1}{R'}\right)^2 = (W')^2 + (U')^2 = \left(\frac{1}{R'_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R''_1}\right)^2;$$

et enfin pour le troisième arc, intersection des surfaces φ et ψ et son rayon de courbure R'' :

$$(54) \quad (W'') = 0, \quad (U'') = -\frac{1}{R'_2}, \quad (V'') = -\frac{1}{R''_1}, \\ \left(\frac{1}{R''}\right)^2 = (U'')^2 + (V'')^2 = \left(\frac{1}{R'_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R''_1}\right)^2,$$

de laquelle on conclura immédiatement ce second théorème également formulé par Lamé :

THÉORÈME II. « Lorsque deux des trois normales principales des arcs d'intersection des surfaces du système deux-à-deux feront entre elles un angle droit, une des six courbures principales du système sera nécessairement nulle, ou réciproquement, lorsque l'une des six courbures principales du système sera nulle, si en même temps l'une des trois arcs d'intersection n'a pas son rayon de courbure infini, deux des trois normales principales de ces mêmes arcs feront entre elles un angle droit » (*).

Un dernier mot avant de revenir au mouvement d'un point en coordonnées curvilignes.

Le procédé de double interprétation, mécanique et géométrique, qui nous a permis de tirer des mêmes formules (28) et (29), à la fois une expression des composantes de la courbure d'une courbe quelconque, et une forme corrélatrice des équations du mouvement d'un point matériel, peut évidemment être appliqué à l'une quelconque des formes de ces dernières équations que nous avons successivement passées en revue, et fournira pour chacune une forme correspondante des composantes de la courbure, à la seule condition d'y remplacer t par s , et par conséquent, en vertu des formules (3), u , v , w , respectivement par

$$\frac{1}{\Delta_{1\varphi}} \frac{d\varphi}{ds} = H^{\frac{1}{2}} \varphi', \quad \frac{1}{\Delta_{1\psi}} \frac{d\psi}{ds} = K^{\frac{1}{2}} \psi', \quad \frac{1}{\Delta_{1\sigma}} \frac{d\sigma}{ds} = J^{\frac{1}{2}} \sigma'.$$

En particulier les équations (7^{ter}) de Lamé, que nous avons établies pour le cas du système triplement isotherme, fourniront

(*) LAMÉ, *ibidem*, § XLI, page 70. — L'énoncé réciproque que nous formulons ne se trouve pas, nous ne savons pourquoi, dans Lamé, bien qu'il constitue exactement, au même titre que le précédent, l'interprétation en langage ordinaire de la formule ci-dessus.

ainsi dans ce même cas, pour l'expression des composantes de la courbure d'une courbe quelconque, définie par les équations (30), cette nouvelle forme très symétrique, dans laquelle figurent les six courbures principales du système coordonné,

$$\left\{ \begin{array}{l} U = H^{\frac{1}{2}} \frac{d}{ds} (H\varphi') - \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) H\varphi'^2 + \frac{1}{R_1} K\psi'^2 + \frac{1}{R_2} J\varpi'^2 \right], \\ V = K^{\frac{1}{2}} \frac{d}{ds} (K\psi') - \left[\left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} \right) K\psi'^2 + \frac{1}{R_1'} J\varpi'^2 + \frac{1}{R_2'} H\varphi'^2 \right], \\ W = J^{\frac{1}{2}} \frac{d}{ds} (J\varpi') - \left[\left(\frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2''} \right) J\varpi'^2 + \frac{1}{R_1''} H\varphi'^2 + \frac{1}{R_2''} K\psi'^2 \right], \end{array} \right.$$

et les formes (5) et (7^{bis}) donneraient naissance à des expressions analogues, mais moins simples. C'est pourquoi nous ne les réécrivons pas ici.

EXTENSION DES MÊMES FORMULES A UN SYSTÈME DE DEUX COORDONNÉES SUR UNE SURFACE QUELCONQUE. — Les formules qui précèdent seront très commodes pour résoudre les deux questions connexes du mouvement d'un point matériel sur une surface donnée, ou de la détermination du rayon de courbure d'une courbe située sur une surface donnée, toutes les fois que cette surface sera susceptible de faire partie d'un système triple orthogonal, car on n'aura pour cela qu'à prendre ce système orthogonal pour système coordonné, de telle sorte que la surface donnée devienne celle de la famille au paramètre ϖ qui correspond à une valeur particulière ϖ_0 de ce paramètre. La troisième coordonnée étant ainsi constante et donnée, la solution de l'un ou l'autre problème sera dès lors fournie, suivant le mode de double interprétation que nous avons indiqué, par les trois équations (29), dans lesquelles on aura fait à la fois

$$\varpi = \varpi_0, \quad \varpi' = \frac{d\varpi}{dt} = 0,$$

et dont les deux premières se réduiront par conséquent dans le cas actuel simplement aux suivantes :

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = H^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{d(H\varphi')}{ds} - \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\varphi} \varphi'^2 + \frac{K}{\varphi} \psi'^2 \right) \right], \\ V = K^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{d(K\psi')}{ds} - \frac{1}{2} \left(\frac{K}{\psi} \psi'^2 + \frac{K}{\psi} \varphi'^2 \right) \right]. \end{array} \right.$$

Il nous reste à montrer que ces deux dernières formules subsistent indépendamment de l'existence du système triple orthogonal, en sorte qu'elles fourniront toujours la solution des mêmes problèmes (*) pour une surface donnée *absolument quelconque*, sans qu'on ait besoin de connaître un système triple orthogonal auquel on puisse la rattacher, ni même qu'on soit astreint à la supposer susceptible de faire partie d'un pareil système, condition qui exige, comme l'on sait, d'après un théorème important dû à M. Ossian Bonnet, la vérification d'une certaine équation aux dérivées partielles du troisième ordre.

En effet, quelle que soit la surface donnée que nous représenterons encore par analogie par $\omega(x, y, z) = 0$, on pourra toujours supposer tracées sur cette surface deux séries de courbes orthogonales entre elles, comme le seront par exemple les deux systèmes de ligne de courbure, et prendre les paramètres φ et ψ de ces deux systèmes pour coordonnées d'un point quelconque situé sur cette surface. Ayant ainsi entre les trois coordonnées rectilignes de l'un de ces points et ces nouvelles coordonnées les trois relations

$$\omega(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = \varphi, \quad \psi(x, y, z) = \psi,$$

dont la première n'est autre par hypothèse que l'équation même de la surface donnée, et les deux autres les équations correspondant isolément à chacune des deux familles de courbes

(*) En y joignant, pour le second problème, l'expression de la troisième composante W , que nous indiquons un peu plus loin.

choisies, on pourra toujours en résolvant le système de ces trois équations par rapport à x, y, z , le supposer mis sous la forme

$$(36) \quad x = f_1(\varphi, \psi), \quad y = f_2(\varphi, \psi), \quad z = f_3(\varphi, \psi),$$

laquelle ne diffère pas de celle que l'on avait à considérer tout à l'heure, dans l'hypothèse d'un système triple orthogonal dont la surface donnée fit partie, en attribuant dans le système (15) à la coordonnée w la valeur constante donnée w_0 .

Dès lors on voit d'une part, qu'en partant de ce dernier système (36), les équations (14) subsisteront encore, sauf que les termes qui contiennent les dérivées relatives à w n'y figureront plus. On en déduira donc exactement comme tout à l'heure les deux premières équations (16) et leurs homologues, c'est-à-dire les deux premières lignes horizontales (15), desquelles on déduira encore exactement de la même façon les trois suivantes, empruntées au groupe (17), savoir :

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \Delta_{\varphi}^{-2} = \left(\frac{x}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varphi}\right)^2, \quad K = \Delta_{\psi}^{-2} = \left(\frac{x}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\psi}\right)^2, \\ \frac{x}{\varphi} \frac{x}{\psi} + \frac{y}{\varphi} \frac{y}{\psi} + \frac{z}{\varphi} \frac{z}{\psi} = 0. \end{array} \right.$$

D'autre part, on pourra envisager les trois équations (36) que nous venons d'écrire comme représentant isolément à volonté l'une ou l'autre des deux familles de courbes considérées sur la surface, à la condition d'y regarder comme une constante celui des deux paramètres φ ou ψ qui lui est relatif, et l'autre comme une variable auxiliaire, analogue au temps ou à l'arc de courbe, en fonction de laquelle les coordonnées d'un point quelconque à la courbe sont exprimées, et qu'il y aura avantage, dès lors, par une raison évidente de symétrie, à prendre pour variable indépendante dans tous les calculs relatifs à cette courbe.

Avec ce mode d'interprétation, il est clair qu'en un point quelconque situé sur la surface, les deux tangentes aux deux courbes coordonnées qui s'y rencontrent, auront des cosinus directeurs proportionnels respectivement à $\frac{x}{\psi}, \frac{y}{\psi}, \frac{z}{\psi}$ pour la pre-

mière courbe, pour laquelle, φ recevant une valeur constante, ψ joue le rôle de variable indépendante, et de même des cosinus directeurs proportionnels à $\frac{x}{\gamma}, \frac{y}{\gamma}, \frac{z}{\gamma}$ pour la seconde courbe au paramètre ψ , pour laquelle la variable indépendante est φ . Il suit de là, et des valeurs ci-dessus (37) de H et K, que si nous désignons encore par λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale (située dans le plan tangent à la surface donnée) à la première courbe dont le paramètre est φ , normale qui n'est autre chose que la tangente à la seconde courbe dont le paramètre est ψ ; et de même par λ', μ', ν' ceux de la normale (également située dans le plan tangent à la surface) à la seconde courbe au paramètre ψ , ou de la tangente à la première, ces cosinus auront encore, comme dans le tableau (18), respectivement pour expressions :

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = H \frac{x}{\gamma} - \Delta_1 \frac{x}{\gamma}, \quad \mu = H \frac{y}{\gamma} - \Delta_1 \frac{y}{\gamma}, \quad \nu = H \frac{z}{\gamma} - \Delta_1 \frac{z}{\gamma}, \\ \lambda' = K \frac{x}{\psi} - \Delta_1 \frac{x}{\psi}, \quad \mu' = K \frac{y}{\psi} - \Delta_1 \frac{y}{\psi}, \quad \nu' = K \frac{z}{\psi} - \Delta_1 \frac{z}{\psi}. \end{array} \right.$$

Ces formules préliminaires demeurant donc les mêmes que dans le cas du système orthogonal, les deux premières formules (19) et (20) subsisteront également, pendant que les expressions (21) se réduiront, en raison de l'absence de la variable ω dans les fonctions (36), simplement aux suivantes :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{x}{\gamma^2} \gamma'' + \frac{x}{\psi^2} \psi'' + \frac{x^2}{\gamma^2 \psi'^2} + \frac{x^2}{\psi^2 \gamma'^2} + 2 \frac{x^2}{\gamma \psi} \gamma' \psi', \\ \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{y}{\gamma^2} \gamma'' + \frac{y}{\psi^2} \psi'' + \frac{y^2}{\gamma^2 \psi'^2} + \frac{y^2}{\psi^2 \gamma'^2} + 2 \frac{y^2}{\gamma \psi} \gamma' \psi', \\ \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{z}{\gamma^2} \gamma'' + \frac{z}{\psi^2} \psi'' + \frac{z^2}{\gamma^2 \psi'^2} + \frac{z^2}{\psi^2 \gamma'^2} + 2 \frac{z^2}{\gamma \psi} \gamma' \psi'. \end{array} \right.$$

L'équation (22) se réduira par suite semblablement à celle-ci

$$U = \Delta_1 \left[H \gamma'' + \left(\frac{x x^2}{\gamma \psi^2} + \frac{y y^2}{\psi \gamma^2} + \frac{z z^2}{\gamma \psi^2} \right) \gamma'' + \left(\frac{x x^2}{\psi \gamma^2} + \frac{y y^2}{\gamma \psi^2} + \frac{z z^2}{\psi \gamma^2} \right) \psi'' + 2 \left(\frac{x x^2}{\gamma \psi} + \frac{y y^2}{\psi \gamma} + \frac{z z^2}{\gamma \psi} \right) \gamma' \psi' \right],$$

dans laquelle les coefficients qui multiplient φ'^2 et $\varphi'\psi'$ conservent évidemment les valeurs (23), à savoir $\frac{1}{2} \frac{H}{\varphi}$ et $\frac{H}{\psi}$, puisque H a conservé sa même valeur; et de même, le coefficient de ψ'^2 aura encore sa valeur fournie par la seconde équation (24), et sera par conséquent égal à $-\frac{1}{2} \frac{K}{\varphi}$, puisque cette seconde équation (24) provient uniquement de la combinaison algébrique de deux équations fournies par la différentiation des deux dernières équations (37), dont nous venons d'établir la persistance dans l'hypothèse actuelle. On arrivera donc ainsi, par la substitution dans la dernière équation qui précède, à la formule

$$U = \Delta_1 \varphi \left[H \varphi'' + \frac{1}{2} \frac{H}{\varphi} \varphi'^2 - \frac{1}{2} \frac{K}{\varphi} \psi'^2 + \frac{H}{\psi} \varphi' \psi' \right],$$

qui, en ajoutant et retranchant encore le terme $\frac{1}{2} \frac{H}{\varphi} \varphi'^2$ et remplaçant $\Delta_1 \varphi$ par sa valeur $H^{-\frac{1}{2}}$, fournira définitivement la première des deux formules ci-dessus (35), que nous nous proposons d'établir dans cette nouvelle hypothèse; la seconde se déduisant de la première en y changeant à la fois U en V, H en K, et φ en ψ , changement qui laisse subsister toutes les formules dont nous venons de faire usage pour arriver à cette dernière, en les échangeant seulement parfois avec d'autres analogues appartenant au même type.

Les deux formules (35) suffiront dans tous les cas pour déterminer le mouvement d'un point soumis à des forces quelconques sur une surface donnée, puisqu'il n'y a alors que deux inconnues; mais pour le problème connexe de la détermination de la courbure d'une courbe située sur une surface donnée, il sera nécessaire de posséder, outre les deux composantes U et V parallèles à la surface, l'expression de la troisième composante W normale à la surface, à savoir

$$W = \lambda'' \frac{d^2 x}{ds^2} + \mu'' \frac{d^2 y}{ds^2} + \nu'' \frac{d^2 z}{ds^2},$$

λ'' , μ'' , ν'' désignant encore les cosinus directeurs de la normale

à la surface donnée, expression qui s'obtiendra de même en remplaçant les dérivées secondes $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$ par leurs valeurs (39), ce qui donnera en ordonnant par rapport aux dérivées φ' , ψ' , φ'' , ψ'' :

$$\begin{aligned} W = & \left(\lambda'' \frac{x}{\varphi} + \mu'' \frac{y}{\varphi} + \nu'' \frac{z}{\varphi} \right) \varphi'' + \left(\lambda'' \frac{x}{\psi} + \mu'' \frac{y}{\psi} + \nu'' \frac{z}{\psi} \right) \psi'' \\ & + \left(\lambda'' \frac{x^2}{\varphi^2} + \mu'' \frac{y^2}{\varphi^2} + \nu'' \frac{z^2}{\varphi^2} \right) \varphi'^2 + \left(\lambda'' \frac{x^2}{\psi^2} + \mu'' \frac{y^2}{\psi^2} + \nu'' \frac{z^2}{\psi^2} \right) \psi'^2 \\ & + 2 \left(\lambda'' \frac{x^2}{\varphi\psi} + \mu'' \frac{y^2}{\varphi\psi} + \nu'' \frac{z^2}{\varphi\psi} \right) \varphi'\psi'. \end{aligned}$$

Or, ayant évidemment entre les cosinus $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ et les cosinus (λ, μ, ν) , (λ', μ', ν') , qui correspondent par hypothèse à des directions situées dans le plan tangent de la surface, les relations connues

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda''\lambda + \mu''\mu + \nu''\nu = 0, \quad \lambda''\lambda' + \mu''\mu' + \nu''\nu' = 0, \\ \lambda'' = \mu\nu' - \nu\mu', \quad \mu' = \nu\lambda' - \lambda\nu', \quad \nu'' = \lambda\mu' - \mu\lambda', \end{array} \right.$$

lesquelles deviennent dans le cas actuel, en remettant à la place $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$, leurs valeurs (38),

$$\begin{aligned} \lambda'' \frac{x}{\varphi} + \mu'' \frac{y}{\varphi} + \nu'' \frac{z}{\varphi} = 0, \quad \lambda'' \frac{x}{\psi} + \mu'' \frac{y}{\psi} + \nu'' \frac{z}{\psi} = 0, \\ \lambda'' = (\text{HK})^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{yz}{\varphi\psi} - \frac{zy}{\varphi\psi} \right), \quad \mu'' = (\text{HK})^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{zx}{\varphi\psi} - \frac{xz}{\varphi\psi} \right), \quad \nu'' = (\text{HK})^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{xy}{\varphi\psi} - \frac{yx}{\varphi\psi} \right), \end{aligned}$$

on voit qu'en remettant ces dernières valeurs dans l'expression qui précède de W , les dérivées secondes φ'' et ψ'' disparaîtront, et qu'elle prendra la forme simple

$$(40) \quad W = A\varphi'^2 + B\psi'^2 + 2C\varphi'\psi',$$

dans laquelle les coefficients A, B, C ayant respectivement pour valeurs

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = (HK)^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{yz}{\varphi\psi} - \frac{zy}{\varphi\psi} \right) \frac{x^2}{\varphi^2} + \left(\frac{zx}{\varphi\psi} - \frac{xz}{\varphi\psi} \right) \frac{y^2}{\varphi^2} + \left(\frac{xy}{\varphi\psi} - \frac{yx}{\varphi\psi} \right) \frac{z^2}{\varphi^2} \right], \\ B = (HK)^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{yz}{\varphi\psi} - \frac{zy}{\varphi\psi} \right) \frac{x^2}{\psi^2} + \left(\frac{zx}{\varphi\psi} - \frac{xz}{\varphi\psi} \right) \frac{y^2}{\psi^2} + \left(\frac{xy}{\varphi\psi} - \frac{yx}{\varphi\psi} \right) \frac{z^2}{\psi^2} \right], \\ C = (HK)^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{yz}{\varphi\psi} - \frac{zy}{\varphi\psi} \right) \frac{x^2}{\varphi\psi} + \left(\frac{zx}{\varphi\psi} - \frac{xz}{\varphi\psi} \right) \frac{y^2}{\varphi\psi} + \left(\frac{xy}{\varphi\psi} - \frac{yx}{\varphi\psi} \right) \frac{z^2}{\varphi\psi} \right], \end{array} \right.$$

ne dépendent, par suite, que de la surface donnée, et nullement de la courbe considérée, qui n'intervient dans cette formule (40) que par les deux dérivées φ' et ψ' .

Il est facile de déduire de cette dernière remarque une interprétation simple de ces coefficients, dans le cas où l'on aura fait choix pour les lignes coordonnées des deux systèmes de lignes de courbure de la surface, et d'en conclure que dans ce cas le troisième coefficient C est encore identiquement nul, tout comme dans l'hypothèse particulière du système triple orthogonal, car il suffira dès lors de montrer que pour une courbe individuelle, choisie à volonté, ce coefficient s'évanouit.

Or, considérons dans ce but, ainsi que nous allons le faire en détail dans notre troisième chapitre, une des lignes géodésiques de la surface. En un point quelconque d'une pareille ligne, d'après sa définition même, le rayon de courbure se confond avec la normale à la surface, et par suite notre droite représentative de la courbure se réduit à sa seule composante W, en sorte que l'on a alors $W = \frac{1}{\rho}$, ρ désignant le rayon de courbure de cette ligne. En vertu de cette même définition le plan osculateur de cette courbe étant une section normale de la surface, le rayon de courbure de cette section normale se confondra évidemment avec celui de la courbe elle-même, en sorte que l'on aura alors par la formule classique d'Euler

$$(42) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R'} \cos^2 \nu + \frac{1}{R''} \sin^2 \nu.$$

R' et R'' désignant les deux rayons de courbure principaux de la surface au même point, et ν l'angle formé par la ligne géodésique avec l'une des lignes de courbure, par exemple celle dont le paramètre est φ . Ayant alors dans le triangle infinitésimal MM_1M' , dont le côté MM' figure l'élément ds de cette ligne (fig. 1), d'une part

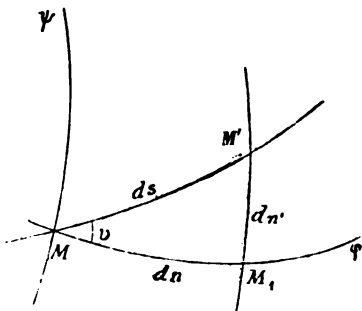


Fig. 1.

$$MM_1 = dn = ds \cos \nu, \quad MM' = dn' = ds \sin \nu;$$

et, d'autre part, dn et dn' représentant par hypothèse la distance de deux points infiniment voisins pour lesquels soit φ , soit ψ reste constant, d'où il suit que l'on a par les valeurs (37)

$$\left\{ \begin{aligned} dn^2 &= \left(\frac{x}{\rho} d\varphi\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho} d\varphi\right)^2 + \left(\frac{z}{\rho} d\varphi\right)^2 = \left[\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{z}{\rho}\right)^2\right] d\varphi^2 = H d\varphi^2 \\ dn'^2 &= \left(\frac{x}{\psi} d\psi\right)^2 + \left(\frac{y}{\psi} d\psi\right)^2 + \left(\frac{z}{\psi} d\psi\right)^2 = \left[\left(\frac{x}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\psi}\right)^2 + \left(\frac{z}{\psi}\right)^2\right] d\psi^2 = K d\psi^2 \end{aligned} \right.$$

ou en extrayant les racines

$$(45) \quad dn = \sqrt{H} d\varphi, \quad dn' = \sqrt{K} d\psi,$$

on voit qu'on aura en égalant respectivement ces deux valeurs de dn et dn' , et divisant ensuite par ds :

$$\cos \nu = \sqrt{H} \frac{d\varphi}{ds} = \sqrt{H} \varphi', \quad \sin \nu = \sqrt{K} \frac{d\psi}{ds} = \sqrt{K} \psi',$$

et dès lors, en remettant ces dernières valeurs dans l'expression (42) de $\frac{1}{\rho}$, on aura définitivement pour la ligne géodésique en question

$$(44) \quad W = \frac{1}{\rho} = \frac{H}{R'} \varphi'^2 + \frac{K}{R''} \psi'^2.$$

La comparaison de cette dernière expression de W pour cette ligne avec celle fournie par notre formule générale (40) montre, les coefficients A, B, C étant, avons-nous dit, indépendants de la ligne considérée, que l'on a alors

$$(45) \quad A = \frac{H}{R'}, \quad B = \frac{K}{R''}, \quad C = 0;$$

et, par suite, sous la seule condition de prendre les lignes de courbure de la surface pour système coordonné, l'expression de la troisième composante cherchée de la courbure d'une courbe quelconque située sur cette surface sera dans tous les cas

$$(46) \quad W = \frac{H}{R'} \varphi'^2 + \frac{K}{R''} \psi'^2,$$

les coefficients $\frac{1}{R'}$ et $\frac{1}{R''}$, qui représentent les courbures principales de la surface, résultant de l'identification des valeurs (41) et (45), c'est-à-dire étant définis par les égalités suivantes (*) :

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R'} = \frac{1}{H\sqrt{HK}} \left[\left(\frac{yz}{\varphi\psi} - \frac{zy}{\varphi\psi} \right) \frac{x^2}{\varphi^2} + \left(\frac{zx}{\varphi\psi} - \frac{xz}{\varphi\psi} \right) \frac{y^2}{\varphi^2} + \left(\frac{xy}{\varphi\psi} - \frac{yx}{\varphi\psi} \right) \frac{z^2}{\varphi^2} \right], \\ \frac{1}{R''} = \frac{1}{K\sqrt{HK}} \left[\left(\frac{yz}{\varphi\psi} - \frac{zy}{\varphi\psi} \right) \frac{x^2}{\psi^2} + \left(\frac{zx}{\varphi\psi} - \frac{xz}{\varphi\psi} \right) \frac{y^2}{\psi^2} + \left(\frac{xy}{\varphi\psi} - \frac{yx}{\varphi\psi} \right) \frac{z^2}{\psi^2} \right]. \end{array} \right.$$

(*) L'expression de ces rayons de courbure principaux R' et R'' , en fonction des coordonnées curvilignes φ et ψ , ne se trouve nulle part dans les *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de Gauss, mais il est facile néanmoins de constater l'accord de notre théorie avec celle de Gauss, en déduisant de l'expression ci-dessus (47) que nous donnons pour les deux courbures principales, l'expression inverse de leur produit $k = \frac{1}{R'R''}$, que l'illustre géomètre adopte pour mesure de la courbure de la surface en un point quelconque (*loc. cit.*, § 8, théorème V).

En effet, d'une part nos formules (37) permettent d'écrire le produit HK sous la forme

$$\begin{aligned} HK &= \left[\left(\frac{x}{\varphi} \right)^2 + \left(\frac{y}{\varphi} \right)^2 + \left(\frac{z}{\varphi} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{x}{\psi} \right)^2 + \left(\frac{y}{\psi} \right)^2 + \left(\frac{z}{\psi} \right)^2 \right] - \left(\frac{xx}{\varphi\psi} + \frac{yy}{\varphi\psi} + \frac{zz}{\varphi\psi} \right)^2 \\ &= \left(\frac{yz}{\varphi\psi} - \frac{zy}{\varphi\psi} \right)^2 + \left(\frac{zx}{\varphi\psi} - \frac{xz}{\varphi\psi} \right)^2 + \left(\frac{xy}{\varphi\psi} - \frac{yx}{\varphi\psi} \right)^2; \end{aligned}$$

Les formules (35) et (46) déterminent complètement la grandeur et la direction du rayon de courbure d'une courbe située sur la surface donnée et supposée définie par les équations de la forme (30). Dès lors pour appliquer ces formules à une courbe quelconque tracée sur la surface donnée $\omega(x, y, z) = 0$, et qu'on suppose, en conséquence, définie par une équation telle que

$$F(\varphi, \psi) = 0, \quad \text{ou} \quad \psi = f(\varphi),$$

entre les deux coordonnées φ et ψ relatives aux deux lignes de courbure de cette surface, ayant encore, en vertu des formules ci-dessus (43), pour l'expression de l'élément ds de cette ligne

$$(48) \quad ds^2 = dn^2 + dn'^2 = H d\varphi^2 + K d\psi^2,$$

on écrira cette dernière équation, en y remettant à la place de ψ et $d\psi$ leurs valeurs $f(\varphi)$ et $f'(\varphi) d\varphi$, puis extrayant la racine, sous la forme

$$ds = \mathcal{F}(\varphi) d\varphi \quad \text{d'où} \quad s + C = \int \mathcal{F}(\varphi) d\varphi;$$

puis joignant cette dernière équation intégrale à l'équation donnée de la courbe, et les résolvant par rapport à φ et ψ , on aura finalement les deux autres équivalentes

$$\varphi = \varphi(s), \quad \psi = \psi(s),$$

d'autre part, si nous récrivons dans ce but nos formules (41) et (47), ainsi qu'il suit :

$$(HK)^{\frac{1}{2}} = \frac{A}{\mathcal{A}} = \frac{B}{\mathcal{B}} = \frac{C}{\mathcal{C}}, \quad \frac{1}{R'} = \frac{\mathcal{A}}{H\sqrt{HK}}, \quad \frac{1}{R''} = \frac{\mathcal{B}}{K\sqrt{HK}},$$

il sera visible que les quantités appelées par Gauss D, D'', D' seront précisément ces nouvelles quantités $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, et que, par suite, la dernière, D' ou \mathcal{C} , sera nulle si l'on prend les lignes de courbure pour système coordonné, en vertu de notre troisième équation (45).

Dès lors il est manifeste que l'expression du produit $k = \frac{1}{R'R''} = \frac{\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}}{(HK)^2}$, qui résulte des valeurs précédentes, coïncidera exactement avec celle que donne l'illustre Gauss, à la fin du § 40 de l'ouvrage cité. (GAUSS WERCKE, Bd. IV, pp. 234.)

qui, conjointement avec l'équation de la surface supposée mise sous la forme (36), et les expressions (37) qui en résulteront, permettront alors l'application immédiate de nos formules (35), (46) et (47), et fourniront l'expression des composantes de la courbure cherchée en fonction des seules coordonnées curvilignes φ et ψ du point considéré.

Dans le problème du mouvement d'un point sur une surface donnée, cette dernière formule (46) que nous venons d'établir, bien qu'inutile à la détermination du mouvement, c'est-à-dire de l'expression des coordonnées du point mobile en fonction du temps, fera connaître la réaction normale de la surface ou, ce qui est la même chose au sens près, la pression exercée par le point mobile sur la surface.

Remarquons enfin en terminant que l'expression de la troisième composante W , donnée par les formules (29) dans l'hypothèse d'un système triple orthogonal, se réduit elle aussi à la même valeur (46), lorsqu'on y fait $\varkappa = \text{const.}$, et que l'on a égard à l'expression (31) des deux rayons principaux R'_1 et R'_2 de cette surface \varkappa : coïncidence qui était nécessaire *a priori*, du moment que cette hypothèse de l'existence du système triple orthogonal peut être envisagée comme un cas particulier du problème plus général, que nous venons de traiter en dernier lieu.

Les trois formules (35) et (46) fourniront donc dans tous les cas la solution de ces deux problèmes connexes et en quelque sorte parallèles que nous venons d'envisager, lors même qu'il n'existerait aucun système triple orthogonal auquel on la supposât rattachée. Cette généralisation, bien qu'assez facile à présenter, n'était d'ailleurs nullement évidente *a priori*, et devait de toute nécessité être établie rigoureusement, pour donner aux méthodes et aux formules, qui vont faire l'objet des deux paragraphes suivants, toute leur portée, sans quoi ces méthodes et ces calculs perdraient beaucoup de leur intérêt par suite de l'étendue trop restreinte de leur champ d'application.

II

Mouvement d'un point matériel assujéti à rester sur une surface donnée. — Cas de réduction du problème aux quadratures. — Exemples relatifs à l'ellipsoïde, au cône du second ordre, à la sphère et au paraboléide.

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA TRAJECTOIRE. — Les équations (9), que nous avons établies dans le paragraphe précédent, très remarquables par leur symétrie, permettent de ramener dans tous les cas à la détermination de la trajectoire, c'est-à-dire en fait à l'intégration d'une seule équation différentielle du second ordre, la détermination complète du mouvement d'un point matériel soumis à des forces quelconques et assujéti à rester sur une surface donnée quelconque.

En effet, si on la suppose d'abord susceptible de faire partie d'un système triple orthogonal, prenons pour système coordonné un système tel que la surface donnée puisse être considérée comme une surface individuelle de la famille au paramètre ω . Il suffira dans ce cas d'imaginer que la coordonnée ω du point matériel conserve à toute époque la valeur particulière de ce paramètre qui caractérise la surface donnée, et dès lors la solution cherchée devra consister dans une certaine relation entre chacune des variables φ et ψ et le temps.

Si nous désignons toujours par U, V, W les composantes de la force extérieure donnée suivant les normales aux trois surfaces coordonnées, les équations (9) définiront le mouvement du point, à la condition d'adjoindre à la troisième composante W la réaction N de la surface sur le point, laquelle est par hypothèse toujours normale à la surface, c'est-à-dire en d'autres termes d'écrire simplement $W + N$ au lieu de W dans la troisième de ces équations, et de supposer, en outre, la variable ω remplacée partout dans ces équations par la valeur de ce paramètre relative à la surface donnée, c'est-à-dire d'y faire à

la fois $\varpi = \varpi_0 = \text{const.}$, $\frac{d\varpi}{dt} = 0$ et $\frac{d^2\varpi}{dt^2} = 0$. Avec ces hypothèses la troisième équation (9) se réduira à

$$-\frac{1}{2} \left[\frac{H}{\varpi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{K}{\varpi} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] = J^{\frac{1}{2}} (W + N),$$

ou

$$N = -W - \frac{1}{2\sqrt{J}} \left[\frac{H}{\varpi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{K}{\varpi} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right],$$

et n'aura d'autre utilité que de déterminer la grandeur de la réaction inconnue *a priori* N, lorsqu'on aura déterminé à l'aide des deux premières équations les coordonnées φ et ψ du point en fonction du temps. Mais les deux premières équations, qui deviennent dans les mêmes circonstances

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} H \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} \left(\frac{H}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{H}{\psi} \frac{d\psi}{dt} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{H}{\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{K}{\varphi} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] = H^{\frac{1}{2}} U, \\ K \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{d\psi}{dt} \left(\frac{K}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{K}{\psi} \frac{d\psi}{dt} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{H}{\psi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{K}{\psi} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] = K^{\frac{1}{2}} V, \end{array} \right.$$

fourniront l'expression cherchée des coordonnées φ et ψ en fonction du temps, en opérant de la façon que nous allons indiquer.

Si, au contraire, on ne suppose pas que la surface donnée fasse partie d'un système triple orthogonal, on se souvient que ces mêmes équations (49) subsisteront encore, en prenant un système de deux coordonnées orthogonales φ et ψ sur la surface, comme par exemple les lignes de courbure, et fourniront par conséquent de nouveau la solution du problème proposé.

Dans ce dernier cas la grandeur de la réaction inconnue N de la surface sera de même fournie par l'équation (46), dans laquelle on aura encore écrit $W + N$ à la place de W (ainsi que t comme variable indépendante au lieu de s), et aura par conséquent pour expression

$$N = -W + \left[\frac{H}{R'} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{K}{R''} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right].$$

Dès lors, dans l'un et l'autre cas, pour déterminer φ et ψ en fonction du temps, on remarquera tout d'abord, ainsi que nous l'avons déjà dit à l'occasion du théorème des forces vives, que les premières parenthèses de chacune de ces deux équations ne sont autre chose que les dérivées totales $\frac{dH}{dt}$ et $\frac{dK}{dt}$, attendu que, ω étant par hypothèse constant, on a simplement dans le cas actuel

$$dH = \frac{H}{\varphi} d\varphi + \frac{H}{\psi} d\psi, \quad dK = \frac{K}{\varphi} d\varphi + \frac{K}{\psi} d\psi;$$

en second lieu, qu'en se reportant à la définition de la fonction $\mathcal{F}(\varphi, \psi, \omega)$, qui consiste dans l'équation (10^{bis}) ou, ce qui est la même chose, en remplaçant les trois éléments de normales dn, dn', dn'' par leurs valeurs, dans celle-ci

$$U \cdot H^{\frac{1}{2}} d\varphi + V \cdot K^{\frac{1}{2}} d\psi + W \cdot J^{\frac{1}{2}} d\omega = d\mathcal{F}(\varphi, \psi, \omega) = \frac{d\mathcal{F}}{d\varphi} d\varphi + \frac{d\mathcal{F}}{d\psi} d\psi + \frac{d\mathcal{F}}{d\omega} d\omega,$$

les seconds membres de ces deux mêmes équations (49) peuvent être écrits sous la forme plus simple et plus expressive :

$$(50) \quad UH^{\frac{1}{2}} = \frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}, \quad VK^{\frac{1}{2}} = \frac{d\mathcal{F}}{d\psi}.$$

A l'aide de ces remarques, nous commencerons par écrire ces deux équations (49), après réduction, sous la forme plus concise

$$\left\{ \begin{array}{l} H \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dt} \frac{dH}{dt} + \frac{1}{2} \left[\frac{H}{\psi} \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\psi}{dt} - \frac{K}{\varphi} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}, \\ K \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{d\psi}{dt} \frac{dK}{dt} + \frac{1}{2} \left[\frac{K}{\varphi} \frac{d\psi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - \frac{H}{\psi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d\mathcal{F}}{d\psi}, \end{array} \right.$$

ou, en les multipliant respectivement par $2 \frac{d\varphi}{dt}$ et $2 \frac{d\psi}{dt}$, sous celle-ci

$$\left\{ \begin{array}{l} H \cdot 2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \frac{dH}{dt} + \frac{H}{\psi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \frac{d\psi}{dt} - \frac{K}{\varphi} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \frac{d\varphi}{dt} = 2 \frac{d\mathcal{F}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}, \\ K \cdot 2 \frac{d\psi}{dt} \frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \frac{dK}{dt} + \frac{K}{\varphi} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \frac{d\varphi}{dt} - \frac{H}{\psi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \frac{d\psi}{dt} = 2 \frac{d\mathcal{F}}{d\psi} \frac{d\psi}{dt}, \end{array} \right.$$

ou enfin, en mettant en évidence des quantités faciles à apercevoir,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[H \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{H} \frac{H}{\psi} \cdot H \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \cdot \frac{d\psi}{dt} - \left[\frac{1}{K} \frac{K}{\varphi} \cdot K \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d\mathcal{F}}{d\varphi} \right] \frac{d\varphi}{dt} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left[K \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{K} \frac{K}{\varphi} \cdot K \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \left[\frac{1}{H} \frac{H}{\psi} \cdot H \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d\mathcal{F}}{d\psi} \right] \frac{d\psi}{dt} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Or, si l'on se reporte aux équations (3) et aux définitions (8) des deux quantités H et K, on voit que les deux expressions $H \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$ et $K \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2$, que nous venons de faire apparaître ainsi dans ces équations, ne sont autre chose que u^2 et v^2 ; en multipliant donc les deux équations par dt , on pourra les écrire plus simplement encore, ainsi qu'il suit :

$$\left\{ \begin{aligned} d \cdot u^2 + u^2 \frac{lH}{\psi} d\psi - \left(v^2 \frac{lK}{\varphi} + 2 \frac{d\mathcal{F}}{d\varphi} \right) d\varphi &= 0, \\ d \cdot v^2 + v^2 \frac{lK}{\varphi} d\varphi - \left(u^2 \frac{lH}{\psi} + 2 \frac{d\mathcal{F}}{d\psi} \right) d\psi &= 0. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, pour obtenir l'équation différentielle de la trajectoire du point matériel, nous multiplierons ces deux dernières équations respectivement par v^2 et u^2 , et nous retrancherons la première de la seconde, ce qui nous donnera

$$\begin{aligned} u^2 d \cdot v^2 - v^2 d \cdot u^2 - u^2 d\psi \left[(u^2 + v^2) \frac{lH}{\psi} + 2 \frac{d\mathcal{F}}{d\psi} \right] \\ + v^2 d\varphi \left[(u^2 + v^2) \frac{lK}{\varphi} + 2 \frac{d\mathcal{F}}{d\varphi} \right] &= 0, \end{aligned}$$

résultat que nous écrirons ainsi :

$$(51) \left\{ \begin{aligned} u^2 d \cdot v^2 - v^2 d \cdot u^2 - (u^2 + v^2) \left[\left(\frac{lH}{\psi} + \frac{2}{u^2 + v^2} \frac{d\mathcal{F}}{d\psi} \right) u^2 d\psi \right. \\ \left. - \left(\frac{lK}{\varphi} + \frac{2}{u^2 + v^2} \frac{d\mathcal{F}}{d\varphi} \right) v^2 d\varphi \right] &= 0. \end{aligned} \right.$$

Or, l'équation des forces vives (12) nous donnant

$$\frac{2}{u^2 + v^2} = \frac{1}{\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C},$$

si nous reportons cette valeur dans l'équation qui précède, on voit que les coefficients de $u^2 d\psi$ et $v^2 d\varphi$ sous les crochets pourront s'écrire simplement

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{lH}{\psi} + \frac{2}{u^2 + v^2} \frac{d\mathcal{F}}{d\psi} &= \frac{lH}{\psi} + \frac{\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}}{\mathcal{F} + C} = \frac{d}{d\psi} l \cdot H(\mathcal{F} + C) = \frac{lH_1}{\psi}, \\ \frac{lK}{\varphi} + \frac{2}{u^2 + v^2} \frac{d\mathcal{F}}{d\varphi} &= \frac{lK}{\varphi} + \frac{\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}}{\mathcal{F} + C} = \frac{d}{d\varphi} l \cdot K(\mathcal{F} + C) = \frac{lK_1}{\varphi}, \end{aligned} \right.$$

en convenant de représenter dorénavant par H_1 et K_1 les deux fonctions données

$$(52) \quad H_1 = H(\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C), \quad K_1 = K(\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C),$$

en sorte qu'avec ces notations, en séparant en deux membres, l'équation précédente (51) prendra la forme très simple :

$$(55) \quad u^2 d.v^2 - v^2 d.u^2 = (u^2 + v^2) \left(u^2 \frac{lH_1}{\psi} d\psi - v^2 \frac{lK_1}{\varphi} d\varphi \right).$$

Si l'on fait attention qu'en divisant, soit par $(u^2)^2$, soit par $(v^2)^2$, cette équation ne contiendra plus u^2 et v^2 que par le rapport $\frac{u^2}{v^2}$ ou $\frac{v^2}{u^2}$ et la différentielle de ces rapports, et que par conséquent la différentielle dt se trouvera éliminée, on reconnaîtra que l'équation que nous venons d'écrire équivaut à une relation différentielle entre les coordonnées φ et ψ seulement à l'exclusion du temps, et que par conséquent elle peut être considérée comme l'équation différentielle de la trajectoire, écrite avec une certaine notation conventionnelle.

Pour l'obtenir sous forme explicite analogue, d'une équation

différentielle entre φ et ψ , il n'y aura d'ailleurs qu'à la multiplier par dt^4 , et, en se rappelant que, le temps étant par hypothèse la variable indépendante, dt doit être considéré comme constant, l'écrire sous cette forme

$$\begin{aligned} (udt)^2 d.(vdt)^2 - (vdt)^2 d.(udt)^2 \\ = [(udt)^2 + (vdt)^2] \left[(udt)^2 \frac{dH_1}{\psi} d\psi - (vdt)^2 \frac{dK_1}{\varphi} d\varphi \right], \end{aligned}$$

puis y remplacer $(udt)^2$ et $(vdt)^2$ par leurs valeurs respectives $Hd\varphi^2$ et $Kd\psi^2$, ce qui donnera définitivement l'équation :

$$(54) \left\{ \begin{aligned} Hd\varphi^2 \cdot d(Kd\psi^2) - Kd\psi^2 \cdot d(Hd\varphi^2) \\ = (Hd\varphi^2 + Kd\psi^2) \left[Hd\varphi^2 \cdot \frac{dH_1}{\psi} d\psi - Kd\psi^2 \cdot \frac{dK_1}{\varphi} d\varphi \right]. \end{aligned} \right.$$

Telle sera donc en réalité pour nous l'équation différentielle de la trajectoire d'un point matériel soumis à des forces données et astreint à demeurer sur une surface donnée, exprimée au moyen des coordonnées φ et ψ , qui déterminent la position de chaque point sur cette surface. Mais il est évident que, pour la clarté et la simplicité des calculs, il y aura grand avantage à conserver pour cette même équation la forme simplifiée (53), qu'on peut d'ailleurs considérer, non seulement comme équivalente, mais comme adéquate à cette dernière, en entendant que u^2 et v^2 y désignent non plus les carrés des vitesses elles-mêmes, mais les quantités proportionnelles $Hd\varphi^2 = u^2 dt^2$ et $Kd\psi^2 = v^2 dt^2$; et nous emploierons ainsi cette forme (53) dans tout ce qui va suivre, en attribuant à u^2 et v^2 tantôt leur sens réel, tantôt le sens conventionnel que nous venons de dire, suivant qu'il nous sera plus commode pour le raisonnement ou plus avantageux pour le calcul.

La connaissance de la trajectoire, en supposant que l'on parvienne à intégrer cette équation du second ordre, suffira d'ailleurs pour achever ensuite complètement la détermination du mouvement du point, car ayant ainsi obtenu pour équation de cette courbe la relation $\psi = f(\varphi)$, qui donnera $d\psi = f'(\varphi)d\varphi$, si

l'on reporte cette valeur de ψ dans les expressions de H et de K , l'équation (11) étant résolue par rapport à dt^2 deviendra, en extrayant les racines et y faisant $\frac{d\omega}{dt} = 0$,

$$(55) \quad dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{H + Kf'(\varphi)^2}{\mathcal{F}(\varphi, f(\varphi), \omega) + C} \right)^{\frac{1}{2}} d\varphi,$$

et fournira dès lors par une simple quadrature une nouvelle relation de la forme $t = F(\varphi)$, qui résolue par rapport à φ deviendra $\varphi = \Phi(t)$, et donnera en substituant dans l'équation de la trajectoire la nouvelle relation $\psi = \Psi(t)$, qui, jointe à la précédente, constitue la solution complète du problème. La question est donc ainsi ramenée tout entière, comme on le voit, à l'intégration de l'équation (53) ou (54), laquelle introduira deux constantes arbitraires. Ces deux constantes, jointes à la constante C , qui figure dans l'équation des forces vives, et à celle introduite par la quadrature de l'expression (55), se détermineront simultanément, en se donnant les valeurs

$$\varphi_0, \quad \psi_0, \quad \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_0 = u_0(\Delta_1 \varphi)_0, \quad \left(\frac{d\psi}{dt} \right)_0 = v_0(\Delta_1 \psi)_0,$$

qui définissent la position du point matériel et sa vitesse sur la surface donnée à l'origine du mouvement.

CAS D'INTÉGRATION DE CETTE ÉQUATION. — La forme simple et remarquable (53), que nous avons obtenue pour l'équation différentielle de la trajectoire, permet d'apercevoir facilement plusieurs cas assez étendus, dans lesquels il est possible d'en former l'intégrale générale à l'aide de simples quadratures.

On est conduit en effet tout naturellement, par cette forme même, à examiner successivement les trois cas suivants :

I° Supposons en premier lieu que l'on ait à la fois $\frac{dH_1}{d\psi} = 0$ et $\frac{dK_1}{d\varphi} = 0$, ou, en d'autres termes, que l'on ait simultanément

$$(56) \quad H_1 = \Phi(\varphi), \quad K_1 = \Psi(\psi),$$

Φ et Ψ étant deux fonctions entièrement arbitraires d'une seule variable. L'équation (33) de la trajectoire se réduisant alors à

$$u^2 d.v^2 - v^2 d.u^2 = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, en divisant par $(u^2)^2$ à $d\left(\frac{v^2}{u^2}\right) = 0$, admet pour intégrale première

$$\frac{v^2}{u^2} = C_1.$$

Or, si l'on remplace u^2 et v^2 par leurs valeurs, soit réelles, soit conventionnelles, on aura, en se rappelant les définitions (32) de H_1 et K_1 :

$$(37) \quad \frac{v^2}{u^2} = \frac{K d\psi^2}{H d\varphi^2} = \frac{K(\mathcal{F} + C) \cdot d\psi^2}{H(\mathcal{F} + C) \cdot d\varphi^2} = \frac{K_1 d\psi^2}{H_1 d\varphi^2}.$$

Si l'on tient compte des hypothèses (36), l'intégrale première qu'on vient d'obtenir pourra donc s'écrire

$$\frac{\Psi(\psi) d\psi^2}{\Phi(\varphi) d\varphi^2} = C_1^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{\Psi(\psi)} d\psi}{\sqrt{\Phi(\varphi)} d\varphi} = C_1,$$

ou encore, en séparant les variables,

$$\sqrt{\Psi(\psi)} d\psi = C_1 \sqrt{\Phi(\varphi)} d\varphi,$$

et donnera par conséquent pour intégrale générale

$$(38) \quad \int \sqrt{\Psi(\psi)} d\psi - C_1 \int \sqrt{\Phi(\varphi)} d\varphi = C'.$$

Il est inutile d'écrire le double signe introduit par l'extraction des racines devant le coefficient C_1 , puisque cette constante est complètement arbitraire : la solution dans ce cas sera donc toujours renfermée dans le type unique (38).

III° Supposons en second lieu que l'une des deux dérivées $\frac{\partial H_1}{\partial \psi}$ ou $\frac{\partial K_1}{\partial \varphi}$ seulement étant nulle à présent, $\frac{\partial H_1}{\partial \varphi}$ par exemple, l'autre

dérivée ne soit, comme la quantité H_1 , fonction que de la variable φ seule; en d'autres termes, nos hypothèses sont pour ce cas

$$(59) \quad \frac{lH_1}{\psi} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{d}{d\psi} \left(\frac{lK_1}{\varphi} \right) = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(60) \quad H_1 = F(\varphi), \quad K_1 = \Phi(\varphi) \Psi(\psi),$$

les symboles F , Φ , Ψ désignant des fonctions entièrement arbitraires d'une seule variable. En introduisant les hypothèses (59) dans l'équation de la trajectoire (55), et divisant tous les termes par $(v^2)^2$, cette équation pourra s'écrire dans ce cas

$$\frac{u^2 d.v^2 - v^2 d.u^2}{(v^2)^2} = \frac{u^2 + v^2}{v^2} \left(-\frac{lK_1}{\varphi} d\varphi \right),$$

ou sous forme plus simple

$$-d \left(\frac{u^2}{v^2} \right) = \left(1 + \frac{u^2}{v^2} \right) \left(-\frac{lK_1}{\varphi} d\varphi \right),$$

ou encore, en changeant tous les signes et ayant égard aux hypothèses (60),

$$\frac{d \left(\frac{u^2}{v^2} \right)}{1 + \frac{u^2}{v^2}} = \frac{d}{d\varphi} l\Phi(\varphi) \cdot d\varphi,$$

équation immédiatement intégrable par quadrature, qui donne pour intégrale première :

$$l \left(1 + \frac{u^2}{v^2} \right) = l\Phi(\varphi) + l.C_1^2 \quad \text{ou} \quad 1 + \frac{u^2}{v^2} = C_1^2 \Phi(\varphi).$$

Or si l'on substitue au rapport $\frac{u^2}{v^2}$ sa valeur, inverse de celle

du rapport (57), et qui sera par conséquent dans le cas actuel, en tenant compte des hypothèses (60),

$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{H_1 d\gamma^2}{K_1 d\psi^2} = \frac{F(\varphi) d\varphi^2}{\Phi(\varphi) \Psi(\psi) d\psi^2},$$

cette intégrale première pourra s'écrire

$$\frac{F(\varphi) d\varphi^2}{\Phi(\varphi) \Psi(\psi) d\psi^2} = C_1^2 \Phi(\varphi) - 1,$$

équation dans laquelle les variables se séparent immédiatement, en l'écrivant ainsi, après avoir extrait les racines,

$$\sqrt{\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{C_1^2 \Phi(\varphi) - 1}} = \pm \sqrt{\Psi(\psi)} d\psi,$$

et qui donnera par conséquent, au moyen de simples quadratures, l'une ou l'autre des deux solutions renfermées dans la formule :

$$(61) \quad \int \sqrt{\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{C_1^2 \Phi(\varphi) - 1}} \pm \int \sqrt{\Psi(\psi)} d\psi = C'.$$

Il est bien clair que si nous eussions admis inversement les hypothèses

$$\frac{dK_1}{d\varphi} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dH_1}{d\psi} \right) = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(62) \quad K_1 = F(\psi), \quad H_1 = \Phi(\varphi) \Psi(\psi),$$

qui se déduisent des précédentes par la simple permutation de H_1 et de K_1 , ou ce qui est la même chose de H et K , de φ et de ψ , et des symboles correspondants Φ et Ψ , pendant que l'équation différentielle elle-même (54) n'est pas atteinte par cette permutation, nous eussions obtenu pour solution l'équation

$$(63) \quad \int \sqrt{\frac{F(\psi)}{\Psi(\psi)}} \frac{d\psi}{\sqrt{C_1^2 \Psi(\psi) - 1}} \mp \int \sqrt{\Phi(\varphi)} d\varphi = C'$$

déduite de la formule (61), en y effectuant les mêmes permutations.

La solution dans ce second cas appartiendra donc à deux types différents, suivant le signe que l'on devra adopter devant la seconde intégrale.

III^o Examinons enfin le cas où les dérivées $\frac{lH_1}{\psi}$ et $\frac{lK_1}{\varphi}$ n'étant nulles ni l'une ni l'autre, ces dérivées sont proportionnelles à deux fonctions quelconques l'une de ψ et l'autre de φ , c'est-à-dire, en d'autres termes, le cas où l'on a

$$(64) \quad \frac{\frac{lH_1}{\psi}}{\Psi'_1(\psi)} = \frac{\frac{lK_1}{\varphi}}{-\Phi'_1(\varphi)} = \frac{1}{\omega},$$

en désignant par Φ'_1 et Ψ'_1 deux fonctions complètement arbitraires d'une seule variable, et représentant provisoirement par ω la valeur inverse de ces rapports dont nous réservons de préciser un peu plus loin l'expression. Tirant alors de ces relations (64) les valeurs

$$\frac{lH_1}{\psi} = \frac{1}{\omega} \Psi'_1(\psi), \quad \frac{lK_1}{\varphi} = -\frac{1}{\omega} \Phi'_1(\varphi),$$

et la reportant dans l'équation proposée (53), elle deviendra, en multipliant en même temps par ω :

$$\omega(u^2 d.v^2 - v^2 d.u^2) = (u^2 + v^2)[u^2 \Psi'_1(\psi) d\psi + v^2 \Phi'_1(\varphi) d\varphi].$$

Sous cette forme, reconnaissant dans le second facteur du second membre la moitié des termes de la différentielle de l'expression $\Psi_1(\psi) u^2 + \Phi_1(\varphi) v^2$, à la seule condition de poser

$$\int \Psi'_1(\psi) d\psi = \Psi_1(\psi) \quad \text{et} \quad \int \Phi'_1(\varphi) d\varphi = \Phi_1(\varphi),$$

on est amené à compléter cette différentielle en ajoutant aux

deux membres le produit $(u^2 + v^2) [\Psi_1(\psi) d.u^2 + \Phi_1(\varphi) d.v^2]$,
ce qui permettra d'écrire ainsi l'équation :

$$\begin{aligned} & (u^2 + v^2) [\Psi_1(\psi) d.u^2 + \Phi_1(\varphi) d.v^2] + \omega(u^2 d.v^2 - v^2 d.u^2) \\ & = (u^2 + v^2) [\Psi_1(\psi) d.u^2 + \Phi_1(\varphi) d.v^2 + u^2 \Psi_1'(\psi) d\psi + v^2 \Phi_1'(\varphi) d\varphi], \end{aligned}$$

ou en ordonnant, et rapprochant les termes convenables :

$$\begin{aligned} & [\Psi_1(\psi) u^2 + (\Psi_1(\psi) - \omega) v^2] d.u^2 + [(\Phi_1(\varphi) + \omega) u^2 + \Phi_1(\varphi) v^2] d.v^2 \\ & = (u^2 + v^2) d[\Psi_1(\psi) u^2 + \Phi_1(\varphi) v^2]. \end{aligned}$$

Dès lors on voit qu'il suffira de poser

$$(65) \quad \omega = \Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)$$

d'où

$$\Psi_1(\psi) - \omega = \Phi_1(\varphi) \quad \text{et} \quad \Phi_1(\varphi) + \omega = \Psi_1(\psi),$$

pour que cette dernière équation puisse s'écrire, en faisant passer
tous les termes dans le premier membre,

$$[\Psi_1(\psi) u^2 + \Phi_1(\varphi) v^2] \cdot d(u^2 + v^2) - (u^2 + v^2) \cdot d[\Psi_1(\psi) u^2 + \Phi_1(\varphi) v^2] = 0,$$

et son premier membre ayant dès lors la forme simple $UdV - VdU$,
elle deviendra immédiatement intégrable en la divisant simple-
ment par V^2 ou $(u^2 + v^2)^2$, et conduira ainsi à l'intégrale pre-
mière

$$(66) \quad \frac{\Psi_1(\psi) u^2 + \Phi_1(\varphi) v^2}{u^2 + v^2} = -C_1,$$

ou en chassant le dénominateur, ordonnant, et remplaçant u^2
et v^2 par leurs valeurs réelles ou conventionnelles :

$$(67) \quad [\Psi_1(\psi) + C_1] H d\varphi^2 = -[\Phi_1(\varphi) + C_1] K d\psi^2.$$

Donc en résumé, toutes les fois que l'on aura entre les quan-
tités H_1 et K_1 les relations (64), où ω a la valeur (65), ou bien,

en d'autres termes, toutes les fois que H_1 et K_1 vérifieront simultanément les conditions

$$\frac{H_1}{\psi} = \frac{K_1}{\varphi} = \frac{1}{\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)},$$

c'est-à-dire chacune séparément les équations

$$\frac{H_1}{\psi} = \frac{\Psi_1'(\psi)}{\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)}, \quad \frac{K_1}{\varphi} = \frac{\Phi_1'(\varphi)}{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)},$$

ou, ce qui est la même chose, en intégrant,

$$(68) \quad H_1 = \Phi_2(\varphi) [\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)], \quad K_1 = \Psi_1(\psi) [\Psi_1(\psi) - \Phi_1(\varphi)],$$

Φ_2 et Ψ_2 désignant deux nouvelles fonctions arbitraires, toutes les fois, disons-nous, que ces conditions seront remplies, ou, en d'autres termes, que H_1 et K_1 seront réductibles à la forme (68), l'équation différentielle proposée admettra pour intégrale première l'équation (66) ou (67), que nous venons d'obtenir.

Admettant donc qu'il en soit ainsi, c'est-à-dire supposant que les quantités H_1 et K_1 aient des expressions de la forme (68), l'intégrale première (67), qui, multipliée par $\mathcal{F} + C$, peut s'écrire, en ayant égard aux définitions (52) de H_1 et K_1 ,

$$[\Psi_1(\psi) + C_1] H_1 d\varphi^2 = - [\Phi_1(\varphi) + C_1] K_1 d\psi^2,$$

deviendra, en y substituant à la place de H_1 et K_1 ces expressions (68), et supprimant le facteur commun $\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)$,

$$[\Psi_1(\psi) + C_1] \Phi_2(\varphi) d\varphi^2 = [\Phi_1(\varphi) + C_1] \Psi_2(\psi) d\psi^2,$$

ou, en séparant les variables, et extrayant les racines,

$$(69) \quad \sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi) + C_1}} d\varphi = \mp \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi) + C_1}} d\psi,$$

et donnera, par conséquent, à l'aide de simples quadratures, pour

intégrale générale l'une ou l'autre des deux solutions renfermées dans la formule

$$(70) \quad \int \sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi) + C_1}} d\varphi \pm \int \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi) + C_1}} d\psi = C',$$

suivant le signe que l'on sera conduit à adopter pour le second radical, dans l'équation immédiatement précédente. La solution dans ce cas encore appartiendra donc à deux types distincts, correspondant chacun à l'un des signes de ce radical.

On aperçoit sans peine que le résultat que nous venons d'obtenir pour ce troisième cas, et les hypothèses (68) qui nous y ont conduits, comprennent, comme cas particuliers, respectivement les résultats et les hypothèses correspondantes relatives aux deux premiers cas, savoir ceux du cas II en supposant que l'une des deux fonctions Φ_1 ou Ψ_1 se réduise à une constante, et ceux du cas I en supposant qu'elles s'y réduisent toutes les deux simultanément. On pourrait donc se contenter de conserver seulement ces dernières formules (68) et (70), en faisant abstraction des formules relatives aux deux cas précédents. Nous avons dû toutefois établir celles-ci séparément, attendu que les raisonnements, dont nous avons fait usage pour arriver à la solution (70), ne subsistent plus avec les hypothèses des cas I et II. Les calculs relatifs aux deux premiers cas préparent d'ailleurs par une gradation naturelle des difficultés, les calculs plus compliqués qui nous ont fourni la solution relative à ce troisième cas.

CONDITIONS ET FORMULES DE RÉDUCTION DU PROBLÈME AUX QUADRATURES. — Nous présenterons, dans le paragraphe suivant, un grand nombre d'exemples de ces méthodes d'intégration, pour le cas particulier où la force est supposée nulle; avant d'en donner également quatre exemples relatifs au cas général, savoir celui où il y a une force extérieure donnée, il importe de bien préciser l'étendue de leur champ d'application, c'est-à-dire de spécifier nettement les conditions qui devront être remplies

séparément par la surface donnée d'une part, et par la force extérieure de l'autre, pour que ces méthodes soient applicables.

A cet effet nous remarquerons en premier lieu que les hypothèses du cas III, qui comprennent celles des deux cas précédents, comme nous venons de le dire, exigent tout d'abord une condition qui devra être satisfaite par la surface donnée, quelle que soit la force que l'on suppose appliquée au point matériel; à savoir que les quantités H et K relatives à cette surface, qu'on pourra toujours calculer par les formules (37), en partant soit des équations (15), soit des équations (36), soient proportionnelles à deux fonctions arbitraires l'une de φ , l'autre de ψ , car les conditions (68), en y remplaçant H_1 et K_1 par leurs valeurs de définition (52), peuvent évidemment être mises sous la forme :

$$(71) \quad \frac{H}{\Phi_2(\varphi)} = \frac{K}{-\Psi_2(\psi)} = \frac{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)}{\mathcal{F}(\varphi, \psi, \alpha) + C}.$$

Il y a lieu dès lors d'examiner successivement les deux cas subsidiaires suivants :

1° *Surfaces isothermes.* — Cette première condition (71), qu'on pourrait croire assez restrictive, laisse par le fait une fort grande latitude pour le choix de la surface, attendu qu'elle sera toujours remplie pour toute surface isotherme susceptible de faire partie d'un système orthogonal, et l'on sait combien est vaste la catégorie de ces dernières surfaces. Nous verrons, en effet, à la fin du paragraphe suivant, que pour tout système triplement isotherme, l'expression des quantités H et K relatives à la surface considérée sera de la forme

$$(72) \quad H = \Phi_2(\varphi)[\Phi(\psi) - \Psi(\psi)], \quad K = \Psi_2(\psi)[\Psi(\psi) - \Phi(\varphi)],$$

et satisfera par conséquent à la condition que nous venons de dire.

Admettant donc cette première condition comme remplie, et supposant dès lors que les fonctions Φ_2 et Ψ_2 qui entrent dans l'expression (68) des quantités H_1 et K_1 soient précisément celles-

là mêmes qui figurent dans l'expression de H et de K qui précède, on voit, en substituant ces valeurs (72) dans l'équation précédente (71), que la fonction des forces \mathcal{F} devra satisfaire en outre à la condition suivante, dans laquelle, les fonctions Φ et Ψ étant déterminées par la constitution du système, les fonctions Φ_1 et Ψ_1 restent, elles, complètement arbitraires, savoir

$$\Phi(\varphi) - \Psi(\psi) = \frac{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)}{\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C}$$

ou

$$(73) \quad \mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C = \frac{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)}{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)},$$

condition que l'on peut écrire encore sous forme plus simple

$$\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) = \frac{\Phi_3(\varphi) - \Psi_3(\psi)}{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)},$$

en représentant par $\Phi_3(\varphi)$ et $\Psi_3(\psi)$ les deux fonctions arbitraires $\Phi_1(\varphi) + C\Phi(\varphi)$ et $\Psi_1(\psi) + C\Psi(\psi)$.

Cette dernière condition sera d'ailleurs seule suffisante, lorsque la surface donnée sera susceptible de faire partie d'un système orthogonal triplement isotherme, car les conditions (72) étant alors remplies, comme nous l'avons dit, l'ensemble des valeurs (72) et (73) redonnent pour H_1 et K_1 , d'après les définitions (52), précisément les expressions (68).

Nous plaçant donc en ce moment dans ce cas particulier d'une surface isotherme donnée, pour intégrer l'équation des forces vives (41), ou

$$dt^2 = \frac{1}{2} \frac{Hd\varphi^2 + Kd\psi^2}{\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C},$$

laquelle peut s'écrire alors, en multipliant au second membre haut et bas par $\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C$, et tenant compte des valeurs (68) de H_1 et K_1 ,

$$(74) \quad dt^2 = \frac{1}{2} \frac{H_1 d\varphi^2 + K_1 d\psi^2}{[\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C]^2} = \frac{1}{2} \frac{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)}{[\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C]^2} [\Phi_3(\varphi) d\varphi^2 - \Psi_3(\psi) d\psi^2],$$

nous introduirons pour un instant une variable auxiliaire u (que nous aurons soin de ne pas confondre avec la composante de la vitesse désignée jusqu'ici par la même lettre), en égalant à du chacun des deux membres de l'intégrale première (69), c'est-à-dire en posant

$$(75) \quad \sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi) + C_1}} d\varphi = \mp \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi) + C_1}} d\psi = du,$$

puis nous tirerons de là successivement

$$(75^{bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_2(\varphi)d\varphi^2 = [\Phi_1(\varphi) + C_1] du^2, \quad \Psi_2(\psi)d\psi^2 = [\Psi_1(\psi) + C_1] du^2, \\ \Phi_2(\varphi)d\varphi^2 - \Psi_2(\psi)d\psi^2 = [\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)] du^2, \end{array} \right.$$

et en substituant ensuite dans l'équation précédente (74), elle deviendra simplement

$$dt^2 = \frac{1}{2} \frac{[\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)]^2}{[\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C]^2} du^2,$$

ou en extrayant les racines, puis ayant égard à notre hypothèse (73),

$$(75^{ter}) \quad dt = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)}{\mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C} du = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)] du,$$

ou enfin, en remplaçant du dans chacun des termes du dernier membre successivement par ses deux valeurs de définition (75),

$$dt = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi) + C_1}} \Phi(\varphi) d\varphi \pm \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi) + C_1}} \Psi(\psi) d\psi \right],$$

équation qui s'intégrera comme l'intégrale première (69) à l'aide de simple quadrature, en ayant soin de se rappeler que, le double signe qui figure dans l'intérieur de la parenthèse étant introduit par l'équation (75) ou (69), les signes que l'on devra prendre dans l'équation intégrale pour chacun des deux radicaux correspondront exactement à ceux de l'équation (70), le signe qu'il

faudra prendre ensuite devant la parenthèse étant alors déterminé par la condition primordiale que la valeur de t qui en résultera soit positive.

En résumé donc pour ce premier sous-cas, lorsque les fonctions H_1 , K_1 , et $\mathcal{F} + C$, auront des expressions de la forme

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \Phi_2(\varphi)[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)], \quad K = \Psi_2(\psi)[\Psi(\psi) - \Phi(\varphi)] \\ \mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C = \frac{\Phi_1(\varphi) - \Psi_1(\psi)}{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}, \end{array} \right.$$

lesquelles satisfont elles-mêmes pour H_1 et K_1 aux conditions (68), les inconnues φ et ψ seront déterminées complètement en fonction du temps par les deux équations

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi) + C_1}} d\varphi \pm \int \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi) + C_1}} d\psi = C' \\ \int \sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi) + C_1}} \Phi(\varphi) d\varphi \pm \int \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi) + C_1}} \Psi(\psi) d\psi = \pm \sqrt{2}(t + C'') \end{array} \right.$$

(le choix qu'il faudra faire pour chacun des doubles signes étant subordonné aux conditions que nous venons de dire), après toutefois que l'on aura exprimé en fonction des données initiales φ_0 , ψ_0 , u_0 , v_0 , les quatre constantes C , C_1 , C' , C'' , car la constante C figure implicitement dans ces équations par les fonctions Φ_1 et Ψ_1 , ainsi qu'il résulte nécessairement de l'hypothèse (73).

Cette détermination peut d'ailleurs s'opérer très simplement en général de la façon suivante. Pour obtenir tout d'abord les valeurs des constantes C et C_1 , il suffira de se reporter aux équations qui les définissent, c'est-à-dire à l'équation des forces vives (12), et à l'intégrale première (66), lesquelles étant prises l'une et l'autre pour l'instant initial, donnent séparément, pour la valeur de C

$$(78) \quad C = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) - \mathcal{F}(\varphi_0, \psi_0, \varpi),$$

et pour la valeur de C_1 :

$$(79) \quad C_1 = - \frac{\Psi_1(\psi_0)u_0^2 + \Phi_1(\varphi_0)v_0^2}{u_0^2 + v_0^2} (*)$$

(*) Dans le cas particulier où l'on supposerait nulle la vitesse initiale, cette expression de C_1 prendrait la forme $\frac{0}{0}$. Il faut alors opérer comme il suit :

Différentiant deux fois de suite par rapport au temps la première équation (77), ou ce qui revient au même, une fois l'intégrale première (69), préalablement divisée par dt , et y faisant ensuite $t = 0$, on trouvera

$$\sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi_0)}{\Phi_1(\varphi_0) + C_1} \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0} \pm \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi_0)}{\Psi_1(\psi_0) + C_1} \left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)_0} = 0,$$

car les termes qui contiennent les dérivées premières $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$ disparaîtront lorsqu'on fera $t = 0$, en vertu des valeurs (4) qui donnent $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = (\Delta_1 \dot{\varphi})_0 u_0 = 0$, et $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = (\Delta_1 \dot{\psi})_0 v_0 = 0$; séparant donc en deux membres, et élevant au carré, ce qui donne

$$\frac{\Phi_2(\varphi_0)}{\Phi_1(\varphi_0) + C_1} \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0^2 = \frac{\Psi_2(\psi_0)}{\Psi_1(\psi_0) + C_1} \left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)_0^2,$$

nous y remplacerons $\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0^2$ et $\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)_0^2$ par leurs valeurs tirées des deux premières équations du mouvement (9), lesquelles se réduisent pour $t = 0$, à

$$H_0 \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0 = \left(H^{\frac{1}{2}}U\right)_0 = \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0, \quad K_0 \left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)_0 = \left(K^{\frac{1}{2}}V\right)_0 = \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0,$$

en ayant égard aux valeurs (50), et donneront par conséquent, en tenant compte des expressions (72) de H et de K :

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0^2 = \frac{\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2}{H_0^2} = \frac{\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2}{\Phi_2(\varphi_0)^2 [\Phi(\varphi_0) - \Psi(\psi_0)]^2},$$

$$\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)_0^2 = \frac{\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2}{K_0^2} = \frac{\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2}{\Psi_2(\psi_0)^2 [\Phi(\varphi_0) - \Psi(\psi_0)]^2}.$$

Par cette substitution, l'équation qui précède deviendra, en simplifiant, chassant les dénominateurs, et supprimant le facteur $[\Phi(\varphi_0) - \Psi(\psi_0)]^2$,

$$\Psi_2(\psi_0) [\Psi_1(\psi_0) + C_1] \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2 = \Phi_2(\varphi_0) [\Phi_1(\varphi_0) + C_1] \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2,$$

d'où l'on tirera par conséquent dans ce cas particulier, pour C_1 la valeur :

$$(A) \quad C_1 = - \frac{\Psi_2(\psi_0) \Psi_1(\psi_0) \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2 - \Phi_2(\varphi_0) \Phi_1(\varphi_0) \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2}{\Psi_2(\psi_0) \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2 - \Phi_2(\varphi_0) \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2}$$

Toutefois la dernière de ces deux expressions contenant en général la constante C par les fonctions Φ_1 et Ψ_1 , ainsi que nous venons de le faire observer, ne fournira l'expression définitive de C_1 en fonction des données initiales, qu'après que l'on y aura remis à la place de C la valeur (78) que l'on vient de trouver.

Puis les valeurs de C et C_1 ainsi obtenues étant supposées reportées dans les équations (77), pour déterminer les deux autres constantes C' et C'' , il n'y aura qu'à faire $t = 0$, dans les deux équations (77), et les deux valeurs ainsi obtenues devront être remises à la place de C' et C'' dans les mêmes équations, opération qui revient dès lors à éliminer ces deux arbitraires par soustraction, et dont le résultat peut s'indiquer à l'aide de la notation des intégrales définies ainsi qu'il suit

$$(80) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi) + C_1}} d\varphi \pm \int_{\psi_0}^{\psi} \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi) + C_1}} d\psi = 0, \\ \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\frac{\Phi_2(\varphi)}{\Phi_1(\varphi) + C_1}} \Phi(\varphi) d\varphi \pm \int_{\psi_0}^{\psi} \sqrt{\frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi) + C_1}} \Psi(\psi) d\psi = \pm \sqrt{2} \cdot t, \end{array} \right.$$

équations qui constitueront dès lors, C et C_1 représentant les valeurs (78) et (79), la solution complète et définitive du problème proposé.

Remarquons enfin, avant de passer au cas suivant, que l'équation de la trajectoire étant ainsi supposée obtenue, à l'aide de simples quadratures, sous forme d'une équation finie entre les deux coordonnées φ et ψ , nos formules (29) dans l'hypothèse d'un système orthogonal, ou plus généralement nos formules (35), (46) et (47), nous permettront aisément la détermination en grandeur et direction du rayon de courbure de cette trajectoire, à l'aide de simples différentiations, c'est-à-dire par le moyen de formules dans lesquelles n'entreront que les seules fonctions Φ , Ψ , Φ_1 , Ψ_1 , Φ_2 , Ψ_2 , qui figurent dans les hypothèses (86), et leurs dérivées, sans aucune intégration. Cette détermination étant

toutefois d'importance secondaire, nous nous contenterons d'en indiquer ici les résultats, qui consistent dans les formules suivantes : à savoir, pour les deux premières composantes U et V de la courbure

$$(80^{bis}) \left\{ \begin{aligned} \frac{U}{\sqrt{-(\varphi_1 + C_1)}} = \frac{V}{\sqrt{\varphi_1 + C_1}} = \frac{1}{2(\varphi_1 - \varphi_1)'} \left[H^{-\frac{1}{2}} \left\{ \varphi_1' + (\varphi_1 - \varphi_1) \frac{IK}{\varphi} \right\} \sqrt{-(\varphi_1 + C_1)} \right. \\ \left. + K^{-\frac{1}{2}} \left\{ \varphi_1' + (\varphi_1 - \varphi_1) \frac{IH}{\psi} \right\} \sqrt{\varphi_1 + C_1} \right], \end{aligned} \right.$$

et pour la troisième composante W

$$(80^{ter}) \quad W = -\frac{1}{2} \frac{J^{-\frac{1}{2}}}{\varphi_1 - \varphi_1} \left[\frac{IH}{\sigma} (\varphi_1 + C_1) - \frac{IK}{\sigma} (\varphi_1 + C_1) \right],$$

dans l'hypothèse d'un système orthogonal, ou plus généralement

$$W = \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_1} \left[\frac{1}{R'} (\varphi_1 + C_1) - \frac{1}{R''} (\varphi_1 + C_1) \right],$$

R' et R'' désignant toujours les deux rayons de courbure principaux de la surface donnée, si l'on n'impose aucune condition à cette surface; et nous reporterons en appendice (voir la note III) à la fin du Mémoire, les calculs simples et faciles qui conduisent à ces formules.

Nous donnerons tout à l'heure quelques exemples d'application de ces formules, en résolvant par leur moyen notamment deux problèmes simples, absolument rebelles à l'emploi des coordonnées classiques.

2° *Surfaces non isothermes.* — Dans le cas où la surface donnée n'étant pas isotherme ne pourrait être rattachée à un système triplement isotherme, supposons que les quantités H et K relatives à cette surface aient des expressions de la forme

$$(81) \quad H = \phi_1(\varphi) \psi_1(\psi) \Omega, \quad K = \phi_2(\varphi) \psi_2(\psi) \Omega,$$

(en désignant par Ω une fonction quelconque des deux variables φ et ψ , $\Omega = f(\varphi, \psi)$) lesquelles expressions satisfont encore à la

condition sus-énoncée qu'exprime la première des équations (71) (où les fonctions Φ_2 et Ψ_2 représentant deux fonctions arbitraires quelconques, ne sont pas par hypothèse les mêmes qui figurent dans l'expression (81) de K), car on a de même avec ces valeurs :

$$\frac{H}{K} = \frac{\Phi_1(\varphi) \Psi_1(\psi)}{\Phi_2(\varphi) \Psi_3(\psi)} = \frac{\left(\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\right)}{\left(\frac{\Psi_3(\psi)}{\Psi_1(\psi)}\right)} \quad \text{ou} \quad \frac{H}{\left(\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}\right)} = \frac{K}{\left(\frac{\Psi_3(\psi)}{\Psi_1(\psi)}\right)}.$$

Pour que les conditions d'intégration exprimées par les équations (68) soient vérifiées, c'est-à-dire pour que les quantités H_1 et K_1 aient des expressions de la forme

$$(82) \quad H_1 = \Phi_3(\varphi)[\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)], \quad K_1 = \Psi_3(\psi)[\Psi(\psi) - \Phi(\varphi)]$$

(en écrivant Φ et Ψ à la place de Φ_1 et Ψ_1 , et Φ_3 et Ψ_3 au lieu de Φ_2 et Ψ_2 , afin de prévenir la confusion des notations), ayant alors par les hypothèses (81)

$$\begin{cases} H_1 = H(\mathcal{F} + C) = \Phi_1(\varphi) \Psi_1(\psi) \Omega(\mathcal{F} + C), \\ K_1 = K(\mathcal{F} + C) = \Phi_2(\varphi) \Psi_3(\psi) \Omega(\mathcal{F} + C), \end{cases}$$

il faudra que l'on ait

$$\begin{cases} \Phi_1(\varphi) \Psi_1(\psi) \Omega(\mathcal{F} + C) = \Phi_3(\varphi) [\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)], \\ \Phi_2(\varphi) \Psi_3(\psi) \Omega(\mathcal{F} + C) = \Psi_3(\psi) [\Psi(\psi) - \Phi(\varphi)], \end{cases}$$

ou

$$(83) \quad \frac{\Phi_1(\varphi) \Psi_1(\psi)}{\Phi_3(\varphi)} = \frac{\Phi_2(\varphi) \Psi_3(\psi)}{-\Psi_3(\psi)} = \frac{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}{\Omega(\mathcal{F} + C)}.$$

Or la première de ces conditions équivalant à l'égalité des deux rapports

$$\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi) \Phi_3(\varphi)} = \frac{-\Psi_3(\psi)}{\Psi_1(\psi) \Psi_3(\psi)} = c,$$

dont le premier ne contient que φ , pendant que le second ne contient que ψ , montre que la valeur commune c de ces deux rapports est une constante.

Tirant donc de là

$$(84) \quad \phi_3(\varphi) = \frac{1}{c} \frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}, \quad \psi_3(\psi) = \frac{1}{c} \frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)},$$

et substituant dans les égalités (83), elles se réduiront à la seule condition

$$c\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi) = \frac{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}{\Omega(\mathcal{F} + C)} \quad \text{ou} \quad \mathcal{F} + C = \frac{\frac{1}{c} [\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)]}{\Omega\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi)},$$

ou simplement

$$(85) \quad \mathcal{F}(\varphi, \psi, \omega) + C = \frac{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}{\Omega\Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi)},$$

en écrivant $c\Phi$ et $c\Psi$ à la place de Φ et de Ψ , condition qui sera ainsi la seule nécessaire et suffisante, étant données les hypothèses (81), pour que les conditions d'intégration (68) ou (82) soient satisfaites.

Supposant donc cette condition remplie, l'intégrale première (69), qui est avec le changement de notation dont nous sommes convenus un peu plus haut (page précédente *in medio*)

$$\sqrt{\frac{\Phi_3(\varphi)}{\Phi(\varphi) + C_1}} d\varphi = \mp \sqrt{\frac{\Psi_3(\psi)}{\Psi(\psi) + C_1}} d\psi,$$

deviendra par les valeurs (84)

$$(86) \quad \sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi) + C_1}} = \mp \sqrt{\frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}} \frac{d\psi}{\sqrt{\Psi(\psi) + C_1}},$$

et fournira par conséquent, pour équation de la trajectoire dans le cas actuel :

$$(87) \quad \int \sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi) + C_1}} \pm \int \sqrt{\frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}} \frac{d\psi}{\sqrt{\Psi(\psi) + C_1}} = C'.$$

Dans les mêmes circonstances, l'intégration de l'équation des forces vives pourra également être ramenée aux quadratures de

la façon suivante. L'ayant mise comme tout à l'heure, sous la forme

$$dt^2 = \frac{1}{2} \frac{H_1 d\tau^2 + K_1 d\psi^2}{[\mathcal{F}(\tau, \psi, \sigma) + C]^2},$$

et substituant les valeurs de H_1 et de K_1 , qui sont dans le cas actuel, en introduisant les hypothèses (81) et (85) dans les expressions (82),

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = \Phi_1(\tau) \Psi_1(\psi) \Omega \frac{\Phi(\tau) - \Psi(\psi)}{\Omega \Psi_1(\psi) \Phi_2(\tau)} = \frac{\Phi_1(\tau)}{\Phi_2(\tau)} [\Phi(\tau) - \Psi(\psi)] \\ K_1 = \Phi_2(\tau) \Psi_2(\psi) \Omega \frac{\Phi(\tau) - \Psi(\psi)}{\Omega \Psi_1(\psi) \Phi_2(\tau)} = \frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)} [\Phi(\tau) - \Psi(\psi)], \end{array} \right.$$

cette équation deviendra :

$$(88) \quad dt^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi(\tau) - \Psi(\psi)}{(\mathcal{F} + C)^2} \left[\frac{\Phi_1(\tau)}{\Phi_2(\tau)} d\tau^2 + \frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)} d\psi^2 \right].$$

Or si nous égalons comme tout à l'heure à du chacun des membres de l'intégrale première (86), c'est-à-dire si nous posons

$$(89) \quad \sqrt{\frac{\Phi_1(\tau)}{\Phi_2(\tau)}} \frac{d\tau}{\sqrt{\Phi(\tau) + C_1}} = \mp \sqrt{\frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}} \frac{d\psi}{\sqrt{\Psi(\psi) + C_1}} = du,$$

nous en tirerons de même

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Phi_1(\tau)}{\Phi_2(\tau)} d\tau^2 = (\Phi(\tau) + C_1) du^2, \quad \frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)} d\psi^2 = (\Psi(\psi) + C_1) du^2, \\ \frac{\Phi_2(\tau)}{\Phi_1(\tau)} d\tau^2 + \frac{\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)} d\psi^2 = [\Phi(\tau) - \Psi(\psi)] du^2, \end{array} \right.$$

et en substituant dans l'équation des forces vives (88), celle-ci deviendra simplement

$$dt^2 = \frac{1}{2} \frac{[\Phi(\tau) - \Psi(\psi)]^2}{(\mathcal{F} + C)^2} du^2,$$

ou en extrayant les racines, puis ayant égard à l'hypothèse (85),

$$dt = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Phi(\tau) - \Psi(\psi)}{\mathcal{F}(\tau, \psi, \sigma) + C} du = \pm \frac{\Omega}{\sqrt{2}} \Psi_1(\psi) \Phi_2(\tau) du;$$

équation qui pourra s'écrire, en remplaçant du successivement par ses deux valeurs de définition (89), sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\left\{ \begin{aligned} dt &= \pm \frac{\Omega}{\sqrt{2}} \Psi_1(\psi) \Phi_2(\varphi) \sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi) + C_1}} = \pm \frac{\Omega}{\sqrt{2}} \Psi_1(\psi) \sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi)\Phi_2(\varphi)}{\Phi(\varphi) + C_1}} d\varphi \\ dt &= \mp \frac{\Omega}{\sqrt{2}} \Phi_2(\varphi) \Psi_1(\psi) \sqrt{\frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}} \frac{d\psi}{\sqrt{\Psi(\psi) + C_1}} = \mp \frac{\Omega}{\sqrt{2}} \Phi_2(\varphi) \sqrt{\frac{-\Psi_1(\psi)\Psi_2(\psi)}{\Psi(\psi) + C_1}} d\psi, \end{aligned} \right.$$

lesquelles s'intégreront l'une et l'autre par quadrature, après que l'on aura remplacé simplement, pour la première, dans $\Omega\Psi_1$, ψ par sa valeur en fonction de φ tirée de l'équation de la trajectoire (87), ou pour la seconde, dans $\Omega\Phi_2$, φ par sa valeur en fonction de ψ , tirée de cette même équation.

Si pour symboliser cette opération, nous convenons de représenter par $(\Omega\Psi_1)_\varphi$, $(\Omega\Phi_2)_\psi$ le résultat de ces substitutions, on voit ainsi pour le second sous-cas, qu'en résumé, lorsque les trois quantités H , K , et $\mathcal{F} + C$, auront des expressions de la forme

$$(90) \quad \left\{ \begin{aligned} H &= \Phi_1(\varphi)\Psi_1(\psi)\Omega, & K &= \Phi_2(\varphi)\Psi_2(\psi)\Omega \\ \mathcal{F}(\varphi, \psi, \omega) + C &= \frac{\Phi(\varphi) - \Psi(\psi)}{\Omega \Psi_1(\psi)\Phi_2(\varphi)}, \end{aligned} \right.$$

Ω , Φ , Ψ , Φ_1 , Ψ_1 , Φ_2 , Ψ_2 , représentant sept fonctions arbitraires quelconques, la solution complète du problème sera fournie par les deux équations

$$(91) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi)}{\Phi_2(\varphi)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi) + C_1}} \pm \int \sqrt{\frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}} \frac{d\psi}{\sqrt{\Psi(\psi) + C_1}} = C, \\ \text{et} & \\ &\pm \int (\Omega\Psi_1)_\varphi \sqrt{\frac{\Phi_1(\varphi)\Phi_2(\varphi)}{\Phi(\varphi) + C_1}} d\varphi = \sqrt{2}(t + C''), \\ \text{ou bien} & \\ &\mp \int (\Omega\Phi_2)_\psi \sqrt{\frac{-\Psi_1(\psi)\Psi_2(\psi)}{\Psi(\psi) + C_1}} d\psi = \sqrt{2}(t + C''), \end{aligned} \right.$$

en tenant compte des mêmes observations pour les doubles signes et pour les constantes que dans le cas précédent.

La détermination des constantes C et C_1 s'effectuera d'ailleurs exactement de la même manière que dans ce premier cas, à l'aide de l'équation des forces vives (12), et de l'intégrale première (66), sauf qu'il faut se souvenir que nous avons changé de notation, pour traiter le cas actuel, et que nous sommes convenus d'écrire dans les formules du cas III, partout Φ et Ψ à la place de Φ_1 , et Ψ_1 , d'où par conséquent pour C et C_1 , encore les deux valeurs :

$$(92) \quad C = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) - \mathcal{F}(\varphi_0, \psi_0, \varpi), \quad C_1 = - \frac{\Psi(\psi_0)u_0^2 + \Phi(\varphi_0)v_0^2}{u_0^2 + v_0^2}. \quad (*)$$

Puis ces valeurs de C et de C_1 étant supposées reportées dans les équations (91), les deux autres constantes C' et C'' se détermineront encore en faisant simplement $t = 0$, dans les mêmes équations.

Enfin, comme dans le cas précédent, si l'on applique à l'équation de la trajectoire que nous venons d'obtenir (la première équation (91)) nos formules (29), ou (35) et (46), en même temps

(*) On déduira également la valeur de C_1 , pour le cas particulier où la vitesse initiale est supposée nulle, de celle (A) obtenue dans le cas précédent, pour la même hypothèse, en se souvenant que pour traiter le cas actuel, nous avons d'abord écrit Φ et Ψ à la place de Φ_1 , Ψ_1 , et Φ_2 , Ψ_2 au lieu de Φ_1 , Ψ_1 dans les formules du cas III, ce qui change tout d'abord cette valeur (page 59, en note, *in fine*) dans celle-ci

$$C_1 = - \frac{\Psi(\psi_0) \Psi_2(\psi_0) \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2 - \Phi(\varphi_0) \Phi_2(\varphi_0) \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2}{\Psi_2(\psi_0) \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2 - \Phi_2(\varphi_0) \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2},$$

puis remplaçant ensuite les fonctions Φ_2 et Ψ_2 par les expressions (84) que nous leur avons substituées dans le cas actuel, nous aurons définitivement, en multipliant haut et bas par $\Psi_1(\psi_0) \Phi_2(\varphi_0)$ pour les valeurs de C_1 dans l'hypothèse précitée :

$$(B) \quad C_1 = - \frac{\Psi(\psi_0) \Phi_2(\varphi_0) \Psi_1(\psi_0) \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2 + \Phi(\varphi_0) \Phi_1(\varphi_0) \Psi_1(\psi_0) \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2}{\Phi_2(\varphi_0) \Psi_1(\psi_0) \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varphi}\right)_0^2 + \Phi_1(\varphi_0) \Psi_1(\psi_0) \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\psi}\right)_0^2}.$$

que les formules (47) à l'équation de la surface, supposée mise sous la forme (36), on arrivera sans peine pour déterminer en grandeur et en direction le rayon de courbure de cette trajectoire en un point quelconque, aux formules suivantes, qui ne diffèrent des formules (80^{bis}) et (80^{ter}) que par le changement de Φ_1, Ψ_1 en Φ et Ψ , et pour la démonstration desquelles nous renverrons encore à la note III de l'appendice qui termine ce Mémoire; savoir, pour les deux premières composantes de la courbure

$$(92^{bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{U}{\sqrt{-(\Psi+C_1)}} = \frac{V}{\sqrt{\Phi+C_1}} = \frac{1}{2(\Phi-\Psi)^2} & \left[H^{-\frac{1}{2}} \left\{ \Phi' + (\Psi-\Phi) \frac{IK}{\rho} \right\} \sqrt{-(\Psi+C_1)} \right. \\ & \left. + K^{-\frac{1}{2}} \left\{ \Psi' + (\Phi-\Psi) \frac{IH}{\psi} \right\} \sqrt{\Phi+C_1} \right], \end{aligned} \right.$$

et pour la troisième composante l'une ou l'autre des deux suivantes

$$(92^{ter}) \quad \left\{ \begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} \frac{J^{-\frac{1}{2}}}{\Phi-\Psi} \left[\frac{IH}{\sigma} (\Phi+C_1) - \frac{IK}{\sigma} (\Psi+C_1) \right], \\ \text{ou bien} \\ W &= \frac{1}{\Phi-\Psi} \left[\frac{1}{R'} (\Phi+C_1) - \frac{1}{R''} (\Psi+C_1) \right], \end{aligned} \right.$$

suivant que l'on supposera ou non la surface donnée rattachée à un système triple orthogonal.

Nous présenterons également un exemple de ce second type de calcul, à propos d'un nouveau problème, que nous croyons encore complètement impossible d'aborder avec les coordonnées usuelles.

Les formules (90) et (91) relatives à ce second cas subsidiaire sont beaucoup plus générales que celles (76) et (77) relatives au cas précédent, et les comprennent en réalité à titre de cas particulier.

On reconnaît aisément en effet que les hypothèses (90) coïncident exactement comme forme avec les hypothèses (76),

en y faisant simplement $\Psi_1(\psi) = \text{const.}$, $\Phi_2(\varphi) = \text{const.}$, $\Omega = \Phi(\varphi) - \Psi(\psi)$, et les solutions (77) se déduiraient de même des solutions (91) en y faisant les changements de notation correspondant à ces hypothèses particulières (*). Nous eussions donc pu, à la rigueur, nous contenter d'établir ces dernières seulement, sans prendre la peine de formuler auparavant celles relatives au cas spécial des surfaces isothermes, qu'elles comprennent ainsi comme cas particulier. Nous avons néanmoins jugé utile de le faire pour ces deux motifs : d'abord parce que ce dernier cas est de beaucoup plus fréquent, presque toutes les surfaces que l'on considère habituellement appartenant à la catégorie des surfaces isothermes; puis en second lieu, et surtout, parce que les formules (77) relatives à ce cas sont immédiatement applicables, tandis que les formules générales (91) ne le deviennent qu'après l'une ou l'autre des substitutions préalables, que nous avons indiquées par les symboles $(\Omega\Psi_1)_\varphi$ et $(\Omega\Phi_2)_\psi$.

Nous exposerons en appendice à la fin du Mémoire (voir la note I), un autre mode d'arriver directement aux mêmes formules générales (91), pour en déduire ensuite les formules (68) et (70) du cas III, procédé qui peut être considéré comme la généralisation de ceux employés pour les cas I et II.

EXEMPLE RELATIF A L'ELLIPSOÏDE. — Comme premier exemple d'application des méthodes que nous venons d'exposer, proposons-nous de déterminer le mouvement d'un point matériel, astreint à rester sur un ellipsoïde donné, et soumis à une force d'attraction ou de répulsion, émanant du centre de cet ellipsoïde, et proportionnelle à la distance.

Pour traiter cette question, nous adopterons le système des coordonnées elliptiques introduit en analyse par Lamé et Jacobi, lequel se compose de trois familles de surfaces du second ordre homofocales, appartenant, la première au genre hyperboloïde à deux nappes, la seconde au genre hyperboloïde à une nappe, et

(*) Au sujet de la concordance de ces résultats, voir en *appendice*, les deux dernières pages à la fin de la note I.

la troisième au genre ellipsoïde, surfaces que l'on démontre aisément être orthogonales entre elles. Si l'on désigne par a^2, b^2, c^2 , trois constantes réelles, supposées rangées dans l'ordre de grandeur $a^2 > b^2 > c^2$, et par λ, μ, ν , les paramètres des trois surfaces, c'est-à-dire les coordonnées elliptiques elles-mêmes, astreintes essentiellement par définition à varier entre les limites suivantes

$$(93) \quad -a^2 < \lambda < -b^2 < \mu < -c^2 < \nu < +\infty,$$

ce système de coordonnées sera défini par l'un ou l'autre des deux systèmes de formules

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1, \quad x^2 = \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ \frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1, \quad y^2 = \frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ \frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{c^2+\nu} = 1, \quad z^2 = \frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}, \end{array} \right.$$

qui permettent de passer des coordonnées elliptiques aux coordonnées rectilignes, ou inversement, et que l'on trouve établies (par voie de généralisation, pour un nombre n de variables) dans les 26^e et 27^e des *Vorlesungen über Dynamick* de Jacobi. A ces deux séries de formules nous joindrons celle qu'il donne également pour l'élément d'arc, et qui est la suivante

$$(95) \quad \left\{ \begin{array}{l} ds^2 = \Delta_1^{-2} \lambda \cdot d\lambda^2 + \Delta_1^{-2} \mu \cdot d\mu^2 + \Delta_1^{-2} \nu \cdot d\nu^2 \\ = \frac{1}{4} \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{f(\lambda)} d\lambda^2 + \frac{1}{4} \frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{f(\mu)} d\mu^2 + \frac{1}{4} \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{f(\nu)} d\nu^2, \end{array} \right.$$

en faisant pour abrégé quel que soit ρ :

$$(96) \quad f(\rho) = (a^2 + \rho)(b^2 + \rho)(c^2 + \rho).$$

Cela posé, faisant pour appliquer littéralement nos formules

$\lambda = \varphi$, $\mu = \psi$, $\nu = \varpi$, dans ces équations, et récrivant à cet effet les six premières ainsi qu'il suit

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2 + \varphi} + \frac{y^2}{b^2 + \varphi} + \frac{z^2}{c^2 + \varphi} = 1, \\ \frac{x^2}{a^2 + \psi} + \frac{y^2}{b^2 + \psi} + \frac{z^2}{c^2 + \psi} = 1, \\ \frac{x^2}{a^2 + \varpi} + \frac{y^2}{b^2 + \varpi} + \frac{z^2}{c^2 + \varpi} = 1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 = \frac{(a^2 + \varphi)(a^2 + \psi)(a^2 + \varpi)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \\ y^2 = \frac{(b^2 + \varphi)(b^2 + \psi)(b^2 + \varpi)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}, \\ z^2 = \frac{(c^2 + \varphi)(c^2 + \psi)(c^2 + \varpi)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}, \end{array} \right.$$

ce système comprendra la surface donnée parmi celles de la troisième famille pour une certaine valeur du paramètre ϖ , que nous supposerons dès lors constant dans tout ce qui va suivre, et nous aurons en outre, pour la surface donnée, par les formules (95), pour H et K les valeurs :

$$(98) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \Delta_1^{-2} \lambda = \frac{1}{4} \frac{(\varphi - \psi)(\varphi - \varpi)}{f(\varphi)}, \quad K = \Delta_1^{-2} \mu = \frac{1}{4} \frac{(\psi - \varpi)(\psi - \varphi)}{f(\psi)}, \\ J = \Delta_1^{-2} \nu = \frac{1}{4} \frac{(\varpi - \varphi)(\varpi - \psi)}{f(\varpi)}. \end{array} \right.$$

D'autre part, si nous convenons de désigner par $2k$ l'attraction exercée sur l'unité de masse à l'unité de distance, nous aurons pour expression du travail élémentaire

$$Xdx + Ydy + Zdz = 2k(xdx + ydy + zdz) = d.kr^2,$$

(la constante k étant positive ou négative, suivant qu'il s'agira d'une répulsion ou d'une attraction) et par conséquent pour celle du travail total ou de la fonction des forces

$$(99) \quad F(x, y, z) = \int (Xdx + Ydy + Zdz) = kr^2,$$

expression qui transformée en coordonnées elliptiques nous donnera par définition la fonction \mathcal{F} .

Pour faire cette transformation, nous observerons que les trois

équations de gauche (97) expriment que φ, ψ, ϖ sont les trois racines de l'équation du 3^{me} degré en ρ

$$(99^{bis}) \quad \frac{x^2}{a^2 + \rho} + \frac{y^2}{b^2 + \rho} + \frac{c^2}{c^2 + \rho} = 1,$$

ou ce qui est la même chose, en chassant les dénominateurs,

$$\begin{aligned} x^2(b^2 + \rho)(c^2 + \rho) + y^2(c^2 + \rho)(a^2 + \rho) + z^2(a^2 + \rho)(b^2 + \rho) \\ = (a^2 + \rho)(b^2 + \rho)(c^2 + \rho), \end{aligned}$$

ou encore, en développant, faisant passer tous les termes dans le second membre, puis ordonnant par rapport à ρ :

$$\rho^3 + [a^2 + b^2 + c^2 - (x^2 + y^2 + z^2)]\rho^2 + \dots + a^2b^2c^2 = 0.$$

On aura donc, en particulier, entre les coefficients et les racines la relation

$$\varphi + \psi + \varpi = -[a^2 + b^2 + c^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] = r^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

d'où l'on tirera immédiatement

$$r^2 = \varphi + \psi + \varpi + a^2 + b^2 + c^2 = \tau + \psi + D,$$

en convenant de poser, pour abrégier l'écriture,

$$(99^{ter}) \quad D = \varpi + a^2 + b^2 + c^2,$$

et par conséquent, en substituant dans l'expression (99) de F, nous aurons pour celle de la fonction \mathcal{F}

$$(100) \quad \mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) = k(\varphi + \psi) + kD.$$

Or cette dernière expression étant écrite ainsi, en lui ajoutant la constante C,

$$(101) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{F}(\varphi, \psi, \varpi) + C &= \frac{1}{\varphi - \psi} [k(\varphi^2 - \psi^2) + (kD + C)(\varphi - \psi)] \\ &= \frac{1}{\varphi - \psi} [k\varphi^2 + (kD + C)\varphi - \{k\psi^2 + (kD + C)\psi\}], \end{aligned} \right.$$

et étant rapprochée des expressions (98) de H et de K, montre que les conditions (76) du cas III, 1°, spéciales aux surfaces isothermes, sont satisfaites dans le cas actuel, en faisant simplement :

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi(\varphi) = \varphi, & \Psi(\psi) = \psi, \\ \Phi_1(\varphi) = k\varphi^2 + (kD + C)\varphi, & \Psi_1(\psi) = k\psi^2 + (kD + C)\psi, \\ \Phi_2(\varphi) = \frac{1}{4} \frac{\varphi - \alpha}{f(\varphi)}, & \Psi_2(\psi) = \frac{1}{4} \frac{\psi - \alpha}{f(\psi)}. \end{array} \right.$$

La solution complète du problème est dès lors fournie par les deux équations (77), qui sont, avec les valeurs qui précèdent (en multipliant par 2, et écrivant C' à la place de 2C' au second membre de la première)

$$(103) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \sqrt{\frac{\varphi - \alpha}{f(\varphi)[k\varphi^2 + (kD + C)\varphi + C_1]}} d\varphi \\ \pm \int \sqrt{\frac{\psi - \alpha}{f(\psi)[k\psi^2 + (kD + C)\psi + C_1]}} d\psi = C', \quad (*) \\ \int \sqrt{\frac{\varphi - \alpha}{f(\varphi)[k\varphi^2 + (kD + C)\varphi + C_1]}} \varphi d\varphi \\ \pm \int \sqrt{\frac{\psi - \alpha}{f(\psi)[k\psi^2 + (kD + C)\psi + C_1]}} \psi d\psi = \pm 2\sqrt{2}(t + C''), \end{array} \right.$$

(*) Longtemps après que ce mémoire était composé et rédigé, nous avons eu connaissance que la première de ces deux équations (celle de la trajectoire) avait déjà été rencontrée à l'aide d'un procédé absolument spécial à l'ellipsoïde, et incapable de généralisation, par M. SCHELLBACH, et signalée par lui sous le numéro (28), dans une courte note, insérée à la fin du 54^e volume du *Journal de Crelle* (1857) (page 380). Mais pour déterminer les coordonnées du point mobile en fonction du temps, au lieu de notre seconde équation, qui est exprimée à l'aide de deux intégrales analogues à celles qui figurent dans la première.

dans lesquelles les valeurs des constantes C et C₁ sont celles fournies par les formules (78) et (79), c'est-à-dire pour la première d'abord, eu égard à l'expression (100) de la fonction \mathcal{F} ,

$$(104) \quad C = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) - k(\varphi_0 + \psi_0) - kD.$$

Or cette première valeur donnant

$$(104^{bis}) \quad kD + C = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2) - k(\varphi_0 + \psi_0),$$

on en déduira séparément, en ayant égard aux expressions (102) de Φ_1 , et Ψ_1 ,

$$(105) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(\varphi_0) = k\varphi_0^2 + (kD + C)\varphi_0 \\ \quad = k\varphi_0^2 + \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2)\varphi_0 - k(\varphi_0 + \psi_0)\varphi_0 = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2)\varphi_0 - k\varphi_0\psi_0, \\ \Psi_1(\psi_0) = k\psi_0^2 + (kD + C)\psi_0 \\ \quad = k\psi_0^2 + \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2)\psi_0 - k(\varphi_0 + \psi_0)\psi_0 = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2)\psi_0 - k\varphi_0\psi_0, \end{array} \right.$$

et par conséquent, en reportant ces deux expressions dans la valeur (79) de C₁, on aura de même pour celle-ci

$$C_1 = -\frac{1}{u_0^2 + v_0^2} \left[\left\{ \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2)\psi_0 - k\varphi_0\psi_0 \right\} u_0^2 + \left\{ \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2)\varphi_0 - k\varphi_0\psi_0 \right\} v_0^2 \right],$$

et calculables chacune sans aucune opération préalable, son équation (26) qu'il indique par cet objet (page 385) n'est autre chose que notre équation ci-dessus (74), dans laquelle les fonctions Φ_1 , Ψ_1 , Φ_2 , Ψ_2 , et la fonction des forces \mathcal{F} seraient remplacées par leurs valeurs relatives à la question actuelle, c'est-à-dire par les expressions (102) et (100), et sous cette forme on voit alors qu'elle n'est intégrable par quadrature qu'à la condition d'y supposer l'une des deux inconnues φ ou ψ remplacée par sa valeur en fonction de l'autre, tirée de l'équation de la trajectoire supposée calculée et résolue explicitement par rapport à l'une des variables. Or cette dernière opération n'étant pas réalisable *effectivement* dans le cas actuel, vu la nature des fonctions hyperelliptiques qui entrent dans cette équation, on ne peut pas dire que pour cette seconde partie du problème la solution ainsi présentée soit réellement, de même que pour la première, ramenée, comme nous le faisons, à de simples quadratures.

c'est-à-dire simplement :

$$(106) \quad C_1 = k\varphi_0\psi_0 - \frac{1}{2}(\psi_0 u_0^2 + \varphi_0 v_0^2). \quad (*)$$

Si maintenant on fait attention qu'avec les expressions (102) des fonctions $\Phi_1(\varphi)$ et $\Psi_1(\psi)$, et les deux valeurs (104^{bis}) et (106) de $(kD + C)$ et de C_1 , les deux quantités $\Phi_1 + C_1$ et $\Psi_1 + C_1$ peuvent s'écrire ainsi

$$(106^{bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(\varphi) + C_1 = \frac{1}{4k} [\{ 2k(\varphi - \varphi_0) + u_0^2 \} \{ 2k(\varphi - \psi_0) + v_0^2 \} - u_0^2 v_0^2], \\ \Psi_1(\psi) + C_1 = \frac{1}{4k} [\{ 2k(\psi - \varphi_0) + u_0^2 \} \{ 2k(\psi - \psi_0) + v_0^2 \} - u_0^2 v_0^2], \end{array} \right.$$

puis, qu'ayant remis dans les équations (80) à la place de φ, ψ, ω , les coordonnées λ, μ, ν , qu'elles étaient censées représenter, on convienne ensuite, pour plus de simplicité, de faire la constante arbitraire ν égale à zéro, c'est-à-dire en fait de prendre pour les constantes a, b, c précisément les demi-axes de l'ellipsoïde donné, on obtiendra, en divisant par \sqrt{k} ces deux équations (80), tenant compte des valeurs (106^{bis}) qui précèdent, et supposant que chaque radical emporte avec lui son signe, pour solution complète et définitive du problème, les deux équations

$$(106^{ter}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda f(\lambda)} \Lambda} + \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu f(\mu)} M} = 0, \\ \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda f(\lambda)} \Lambda} + \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{\mu f(\mu)} M} = \pm \sqrt{\frac{2}{k}} t, \end{array} \right.$$

(*) On s'assure immédiatement que, pour le cas particulier où l'on suppose nulle la vitesse initiale, la valeur de C_1 fournie par cette formule est bien celle que donnerait la formule (A) que nous avons établie pour cette hypothèse, dans le même cas 1^o (page 59 en note, *in fine*); car les valeurs (105) ci-dessus de $\Phi_1(\varphi_0)$ et $\Psi_1(\psi_0)$ se réduisent dans ce cas particulier à $\Phi_1(\varphi_0) = \Psi_1(\psi_0) = -k\varphi_0\psi_0$, on voit que la valeur de C_1 fournie par cette formule (A) peut s'écrire alors :

$$C_1 = - \frac{(-k\varphi_0\psi_0) \left[\Psi_2(\varphi_0) \left(\frac{d\sqrt{f}}{d\varphi} \right)_0^2 - \Phi_2(\varphi_0) \left(\frac{d\sqrt{f}}{d\varphi} \right)_0^2 \right]}{\Psi_2(\psi_0) \left(\frac{d\sqrt{f}}{d\psi} \right)_0^2 - \Phi_2(\psi_0) \left(\frac{d\sqrt{f}}{d\psi} \right)_0^2} = k\varphi_0\psi_0.$$

dans lesquelles les symboles Λ et M représentent, pour abrégér l'écriture, les deux polynômes du 4^e degré

$$\begin{cases} \Lambda = [2k(\lambda - \lambda_0) + u_0^2][2k(\lambda - \mu_0) + v_0^2] - u_0^2 v_0^2 \\ M = [2k(\mu - \lambda_0) + u_0^2][2k(\mu - \mu_0) + v_0^2] - u_0^2 v_0^2 \end{cases}$$

la fonction $f(\rho)$ désignent toujours celui du 3^e degré

$$f(\rho) = (a^2 + \rho)(b^2 + \rho)(c^2 + \rho),$$

et qui dépendent en conséquence des fonctions hyperelliptiques.

Dans l'hypothèse de la force attractive, la constante k affectant alors une valeur négative, il sera nécessaire, pour avoir des expressions réelles, de multiplier par $\sqrt{-1}$ les deux membres de chacune des équations (106^{ur}), ce qui revient à introduire le facteur -1 sous chacun des radicaux qui y figurent, et qui sont par hypothèse les mêmes dans les deux équations.

Dans les mêmes circonstances nos formules (80^{bu}) et (80^{ur}) nous donneront, pour définir en grandeur et en direction le rayon de courbure, en un point quelconque de la trajectoire représentée par la première de ces deux équations, les expressions suivantes des trois composantes U, V, W de la courbure

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{U}{\sqrt{\frac{M}{(\lambda - \mu)^3}}} &= \frac{V}{\sqrt{\frac{\Lambda}{(\mu - \lambda)^3}}} = \frac{\sqrt{\frac{f(\mu)}{\mu}} \Lambda + \sqrt{\frac{f(\lambda)}{\lambda}} M}{[2k(\lambda - \lambda_0 + \mu - \mu_0) + u_0^2 + v_0^2]^2} \\ W &= \frac{abc}{2k} \frac{\mu\Lambda - \lambda M}{(\lambda - \mu)[2k(\lambda - \lambda_0 + \mu - \mu_0) + u_0^2 + v_0^2](\lambda\mu)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \right.$$

pour le calcul desquelles nous prions encore le lecteur de se reporter à la note III de l'appendice, à la suite de ce Mémoire.

Le signe qu'il faudra prendre devant la seconde intégrale de chacune des équations (103) ou (106^{ur}) sera évidemment, d'après l'intégrale première (69), le signe contraire du rapport $\frac{d\varphi}{d\psi}$, lequel

est déterminé pour l'instant initial, eu égard aux valeurs (4), par celui de la quantité donnée

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = \frac{(\Delta_1\varphi \cdot u dt)_0}{(\Delta_1\psi \cdot v dt)_0} = \frac{(\Delta_1\varphi)_0 u_0}{(\Delta_1\psi)_0 v_0},$$

et se décidera ensuite d'une façon analogue, chaque fois qu'il y aura lieu, à l'aide d'une discussion pareille à celle que l'on fait pour chaque problème avec les coordonnées classiques.

La solution contenue dans les formules (103), où C et C_1 sont censées représenter les valeurs (104) et (106), comprend comme cas particulier en y faisant $k = 0$, c'est-à-dire en supposant nulle la force d'attraction, celle que l'illustre Jacobi donne sous les numéros (3) et (4) dans la 28^e de ses *Vorlesungen über Dynamik* (page 214), pour le problème du mouvement d'un point matériel astreint à rester sur un ellipsoïde sans être soumis à l'action d'aucune force extérieure, solution qu'il présente comme application de sa belle méthode d'intégration des équations de la Dynamique, basée sur les travaux de Hamilton, laquelle paraissait ainsi indispensable pour traiter ce genre de problèmes (*). Il n'était donc pas sans intérêt, croyons-nous, de montrer que l'em-

(*) Pour faire coïncider nos résultats avec ceux de Jacobi, il faut substituer à notre seconde équation (103) celle que l'on obtient en ajoutant à cette seconde équation la première multipliée par $\frac{C_1}{C}$, équation qu'on peut écrire, en faisant passer le facteur $\varphi + \frac{C_1}{C}$ sous le radical, et écrivant dans le second membre C''_1 à la place de la constante $C'' \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{C_1 C}{C}$:

$$\int \sqrt{\frac{(\varphi - \varpi) \left(\varphi + \frac{C_1}{C}\right)^2}{f(\varphi) [k\varphi^2 + (kD + C)\varphi + C_1]}} d\varphi$$

$$\pm \int \sqrt{\frac{(\psi - \varpi) \left(\psi + \frac{C_1}{C}\right)^2}{f(\psi) [k\psi^2 + (kD + C)\psi + C_1]}} d\psi = \pm 2\sqrt{2}(t + C''_1);$$

ploi seul des coordonnées curvilignes, introduit en analyse par Lamé, suffisait, à l'aide de procédés usuels et purement classiques, pour traiter les mêmes questions, ou même d'autres d'une complication plus grande encore, sans être obligé d'avoir recours aux profondes méthodes du Maître de Königsberg, qui par leur étendue, leur fécondité, et le jour nouveau dont elles ont éclairé toute la théorie des équations aux dérivées partielles, constituent, à proprement parler, un chapitre à part de l'analyse moderne.

EXEMPLES RELATIFS AU CÔNE DU SECOND ORDRE, ET A LA SPHÈRE.

1° *Cône*. — Comme seconde application de nos méthodes d'intégration, proposons-nous de déterminer le mouvement d'un point matériel astreint à rester sur un cône du second ordre (non de révolution), et soumis à deux forces d'attraction, l'une émanant du sommet et variant en raison inverse du carré de la distance, et l'autre émanant de l'axe réel (ou intérieur) de ce cône, et variant en raison inverse du cube de la distance à cet axe.

Pour traiter cette question par notre méthode, la première chose à faire est d'adopter un système de coordonnées auquel on puisse rattacher la surface donnée, c'est-à-dire qui comprenne parmi ses trois surfaces une famille de cônes du second ordre.

A cet effet, bien que le système des coordonnées elliptiques, défini par les équations (94), que nous avons employé pour traiter l'exemple précédent, ne comprenne jamais comme surfaces coordonnées que des ellipsoïdes et des hyperboloïdes, quelles que soient les valeurs des constantes a^2 , b^2 , c^2 , qui entrent dans sa définition, on peut néanmoins s'en servir pour traiter les

et dès lors en faisant dans cette dernière équation, et dans notre première (103) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \lambda_2, \quad \psi = \lambda_3, \quad \pi = \lambda_1, \\ f(\lambda) = (a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda)(a_3 + \lambda), \\ k = 0, \quad C = h, \quad C_1 = C_2, \quad \sqrt{CC'} = \text{const}, \quad C_1'' = -\tau, \end{array} \right.$$

on retrouve littéralement les équations (3) et (4) sus-indiquées de Jacobi. (Au sujet de la concordance des résultats de notre méthode avec ceux fournis par la méthode de Jacobi, voir la note II, en appendice, à la fin du Mémoire.)

questions relatives au cône du second ordre, en le modifiant légèrement de la façon que nous allons expliquer (*).

Pour cela nous remplacerons dans ces deux systèmes d'équations (94) $a, b, c, \lambda, \mu, \nu$, respectivement par $ka, kb, kc, k^2\lambda, k^2\mu$, et r^2 (changement qui laisse subsister sans modification, quel que soit k , les quatre premières inégalités de définition (93)), ce qui transformera d'abord ces deux systèmes dans les suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = k^2, \quad x^2 = \frac{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} (k^2 a^2 + r^2), \\ \frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} + \frac{z^2}{c^2 + \mu} = k^2, \quad y^2 = \frac{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} (k^2 b^2 + r^2), \\ \frac{x^2}{k^2 a^2 + r^2} + \frac{y^2}{k^2 b^2 + r^2} + \frac{z^2}{k^2 c^2 + r^2} = 1, \quad z^2 = \frac{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} (k^2 c^2 + r^2), \end{array} \right.$$

et les trois surfaces coordonnées, représentées en coordonnées rectilignes par le premier de ces systèmes, ne cessant évidemment pas d'être orthogonales entre elles après ce changement de notation, quelle que soit la valeur attribuée au coefficient k , nous y ferons $k = 0$, ce qui nous donnera définitivement les deux nouveaux systèmes équivalents entre eux

$$(107) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 0, \quad x^2 = \frac{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} r^2 \\ \frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} + \frac{z^2}{c^2 + \mu} = 0, \quad y^2 = \frac{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} r^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad z^2 = \frac{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} r^2 \end{array} \right.$$

(*) Le système des coordonnées coniques, dont nous donnons ci-après les formules, a déjà été employé par plusieurs auteurs, notamment par M. G. NEUMANN, dans un très curieux et intéressant mémoire, dont nous retrouvons les résultats par notre méthode quelques pages plus bas, intitulé *De problemate quodam mechanico, quod ad primam integratum ultra-ellipticarum classem revocatur*, et inséré au tome LVI du *Journal de Crelle* (1858, pages 46-63; voir formules (3), page 48). Mais comme ce système de coordonnées, ainsi que celui formé de trois familles de paraboloides, dont nous faisons usage un peu plus loin, sont en somme fort peu connus (nous avouons, pour notre part, ne les avoir encore jamais rencontrés, lorsque nous avons composé ce mémoire), nous croyons accomplir une œuvre qui ne sera peut-être pas sans utilité pour le lecteur, en indiquant dans ce travail même, avant d'en faire emploi, comment on peut les obtenir l'un et l'autre, comme limites du système des coordonnées elliptiques.

qui définissent un système coordonné, composé d'une famille de sphères concentriques au paramètre r , et de deux familles de cônes du second ordre aux paramètres λ et μ , ayant leur sommet commun au centre de la sphère, et dont il est facile de vérifier immédiatement l'orthogonalité, car les trois équations du second système donnent par une combinaison facile

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)} \\ = \frac{[(b^2 - c^2) + (c^2 - a^2) + (a^2 - b^2)]}{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)} r^2 = 0, \end{aligned}$$

ce qui est précisément, comme on le reconnaît de suite, la condition de perpendicularité des deux surfaces en chacun de leurs points communs.

Enfin l'expression (95) de l'élément d'arc en coordonnées elliptiques, devenant par les mêmes substitutions

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{1}{4} \frac{k^2(\lambda - \mu)(k^2\lambda - r^2)}{k^2 f(\lambda)} (k^2 d\lambda)^2 + \frac{1}{4} \frac{(k^2\mu - r^2)k^2(\mu - \lambda)}{k^2 f(\mu)} (k^2 d\mu)^2 \\ + \frac{1}{4} \frac{(r^2 - k^2\lambda)(r^2 - k^2\mu)}{(k^2 a^2 + r^2)(k^2 b^2 + r^2)(k^2 c^2 + r^2)} (d \cdot r^2)^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire en simplifiant

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{1}{4} \frac{(\lambda - \mu)}{f(\lambda)} (k^2\lambda - r^2) \cdot d\lambda^2 + \frac{1}{4} \frac{\mu - \lambda}{f(\mu)} (k^2\mu - r^2) \cdot d\mu^2 \\ + \frac{r^2(r^2 - k^2\lambda)(r^2 - k^2\mu)}{(k^2 a^2 + r^2)(k^2 b^2 + r^2)(k^2 c^2 + r^2)} \cdot dr^2, \end{aligned}$$

et se réduisant par suite lorsqu'on y fera $k = 0$, à

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{1}{4} \frac{\mu - \lambda}{f(\lambda)} r^2 \cdot d\lambda^2 + \frac{1}{4} \frac{\lambda - \mu}{f(\mu)} r^2 \cdot d\mu^2 + dr^2 \\ = \Delta_1^{-2}\lambda \cdot d\lambda^2 + \Delta_1^{-2}\mu \cdot d\mu^2 + \Delta_1^{-2}r \cdot dr^2, \end{aligned}$$

montre que l'on a dans le système des coordonnées coniques, λ, μ, r :

$$(108) \quad \Delta_1^{-2}\lambda = \frac{1}{4} \frac{\mu - \lambda}{f(\lambda)} r^2, \quad \Delta_1^{-2}\mu = \frac{1}{4} \frac{\lambda - \mu}{f(\mu)} r^2, \quad \Delta_1^{-2}r = 1.$$

Cela posé, pour faire emploi de ces formules dans la question proposée, nous prendrons pour axe des z l'axe réel (ou intérieur) du cône donné, et pour axe des x le plus grand des deux autres axes, de telle sorte que l'équation de ce cône sera alors nécessairement de la forme

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 0,$$

A, B, C étant réels, et remplissant la condition $A > B$. On voit dès lors sans peine que cette surface pourra être considérée comme l'une de celles de la famille des cônes au paramètre μ , car les constantes a^2, b^2, c^2 , et μ , étant assujetties par définition simplement aux conditions

$$-a^2 < -b^2 < \mu < -c^2,$$

ou ce qui est la même chose

$$a^2 > b^2, \quad a^2 + \mu > 0, \quad b^2 + \mu > 0, \quad c^2 + \mu < 0,$$

on reconnaît de suite qu'on y satisfera en prenant :

$$a^2 = A^2, \quad b^2 = B^2, \quad c^2 = -C^2, \quad \mu = 0.$$

Convenant donc d'attribuer, dans tout le calcul qui va suivre, aux constantes a^2, b^2, c^2 , et μ ces valeurs, il suffira pour pouvoir appliquer littéralement nos formules d'intégration de faire de même

$$(108^{bis}) \quad r = \tilde{r}, \quad \lambda = \tilde{\lambda}, \quad \mu = \tilde{\mu} = 0,$$

et avec ces nouvelles notations, les formules (108) nous donne-

ront, en ne supposant pas tout d'abord la coordonnée ϖ égale à zéro, pour les quantités H, K, J, les valeurs

$$(108^{\text{ter}}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{H} = \Delta r^{-2} r = 1, \quad \text{K} = \Delta r^{-2} \lambda = \frac{1}{4} \frac{\varpi - \psi}{f(\psi)} r^2, \\ \text{J} = \Delta r^{-2} \mu = \frac{1}{4} \frac{\psi - \varpi}{f(\varpi)} r^2, \end{array} \right.$$

et en particulier pour la surface donnée, pour laquelle on a $\varpi = 0$,

$$(109) \quad \text{H} = 1, \quad \text{K} = - \frac{\psi}{4f(\psi)} r^2, \quad \text{J} = \frac{\psi}{4f(0)} r^2.$$

D'autre part, si nous convenons de désigner par k et k_1 les constantes d'attraction correspondant aux deux forces données, supposées inversement proportionnelles, la première au carré de la distance r au sommet, et la seconde au cube de la distance ρ à l'axe intérieur du cône, que nous avons pris pour axe des z , la fonction des forces F sera par définition :

$$F = - \int \frac{k dr}{r^2} - \int \frac{k_1 d\rho}{\rho^3} = \frac{k}{r} + \frac{1}{2} \frac{k_1}{\rho^2}.$$

Or, la troisième des formules de droite (107) donnant avec l'hypothèse $\mu = \varpi = 0$

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 = r^2 - z^2 = r^2 \left[1 - \frac{(c^2 + \lambda) c^2}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \right] \\ &= r^2 \frac{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2) - c^2(c^2 + \lambda)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} = \frac{a^2 b^2 - c^2(a^2 + b^2 + \lambda)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} r^2, \end{aligned}$$

on aura, en substituant cette valeur de ρ^2 dans celle de F qui précède, pour l'expression de la fonction \mathcal{F} la suivante

$$(109^{\text{bis}}) \quad \mathcal{F}(r, \lambda, \mu) = \frac{k}{r} + \frac{1}{2} \frac{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2) k_1}{a^2 b^2 - c^2(a^2 + b^2 + \lambda)} \frac{1}{r^2},$$

ou bien, en effectuant pareillement le changement de notation

(108^{bis}), et faisant pour simplifier l'écriture $k' = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)k_1$, pour celle de la fonction $\mathcal{F} + C$, celle-ci :

$$(110) \quad \mathcal{F}(\varphi, \psi) + C = \frac{k}{\varphi} + \frac{k'}{a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2 + \psi)} \frac{1}{\varphi^2} + C.$$

Ces préliminaires étant admis, la question que nous nous sommes proposée peut être résolue par la méthode d'intégration du cas III, soit à l'aide de formules du sous-cas 1°, soit par le moyen de celles du sous-cas 2°, ainsi qu'il est nécessaire, la surface étant encore isotherme d'une part, et d'autre part du moment que nous avons reconnu que les premières sont plus générales, et comprennent en réalité les secondes comme cas particulier. En effet les expressions (109) et (110), que nous avons trouvées pour la question actuelle, coïncideront avec les expressions (76) du cas 1°, en faisant

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Phi(\varphi) = \varphi^2, & \Phi_1(\varphi) = k\varphi + C\varphi^2, & \Phi_2(\varphi) = \frac{1}{\varphi^2} \\ \Psi(\psi) = 0, & \Psi_1(\psi) = \frac{-k'}{a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2 + \psi)}, & \Psi_2(\psi) = \frac{1}{4} \frac{\psi}{f(\psi)}, \end{array} \right.$$

et elles coïncideront également avec les expressions (90) du sous-cas 2°, en faisant pareillement :

$$(110^{\text{bis}}) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \Omega = \text{const.} = 1, \\ \Phi(\varphi) = k\varphi + C\varphi^2, & \Phi_1(\varphi) = 1, & \Phi_2(\varphi) = \varphi^2, \\ \Psi(\psi) = \frac{-k'}{a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2 + \psi)}, & \Psi_1(\psi) = 1, & \Psi_2(\psi) = -\frac{1}{4} \frac{\psi}{f(\psi)}. \end{array} \right.$$

Ayant ainsi le choix des deux procédés de calcul, comme nous avons déjà présenté par l'exemple précédent une application du calcul relatif au cas 1°, nous traiterons en conséquence le problème actuel par les formules du cas 2°, afin d'en montrer également une application.

Nous plaçant donc au point de vue des hypothèses (90), c'est-

à-dire admettant pour les sept fonctions $\Phi, \Psi, \Phi_1, \Psi_1, \Phi_2, \Psi_2$, et Ω , ces dernières valeurs (110^{bis}), la solution du problème sera dès lors fournie intégralement par les équations (91), dont la seconde, qui est susceptible d'une double forme, sera, en choisissant le premier type, immédiatement intégrable par quadrature sans substitution préalable, attendu que l'on a par les valeurs (110^{bis}) $(\Omega\Psi_1)_\varphi = \Omega\Psi_1 = 1$.

Ayant donc, avec ces valeurs (110^{bis}),

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{\Psi_1(\varphi)}{\Psi_2(\varphi)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi) + C_1}} &= \frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{C_1 + k\varphi + C\varphi^2}}, \\ (\Omega\Psi_1)_\varphi \sqrt{\frac{\Psi_1(\varphi)\Psi_2(\varphi)}{\Phi(\varphi) + C_1}} d\varphi &= \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{C_1 + k\varphi + C\varphi^2}}, \\ \sqrt{\frac{-\Psi_2(\psi)}{\Psi_1(\psi)}} \frac{d\psi}{\sqrt{\Psi(\psi) + C_1}} &= \sqrt{\frac{1-\psi}{4f(\psi)}} \frac{d\psi}{\sqrt{C_1 - \frac{k'}{a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2 + \psi)}}}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\psi \{ a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2 + \psi) \}}{f(\psi) \{ a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2 + \psi) \} C_1 - k'}} d\psi \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\psi(D - c^2\psi)}{f(\psi)(G - c^2C_1\psi)}} d\psi, \end{aligned} \right\}$$

en désignant pour abrégé par D et G les constantes

$$(111) \quad D = a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2), \quad G = \{ a^2b^2 - c^2(a^2 + b^2) \} C_1 - k',$$

la solution du problème consistera d'après les formules (91) dans les deux équations

$$111^{bis} \left\{ \begin{aligned} \int \frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{C_1 + k\varphi + C\varphi^2}} \pm \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{\psi(D - c^2\psi)}{f(\psi)(G - c^2C_1\psi)}} d\psi &= G', \\ \int \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{C_1 + k\varphi + C\varphi^2}} &= \pm \sqrt{2}(t + C''), \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles les deux intégrales en φ sont de celles que l'on

peut obtenir aisément à l'aide des procédés classiques, l'intégrale en ψ dépendant seule des fonctions hyperelliptiques.

La forme des deux expressions que donnent ces deux quadratures en φ dépendra du signe des constantes C et C_1 , dont les valeurs fournies par les formules (92) sont dans le cas actuel : savoir pour C , eu égard à l'expression (110) de la fonction \mathcal{F} ,

$$(112) \quad C = \frac{1}{2} (u_0^2 + v_0^2) - \left[\frac{k}{\varphi_0} + \frac{k'}{a^2 b^2 - c^2 (a^2 + b^2 + \psi_0)} \frac{1}{\varphi_0^2} \right],$$

et pour C_1 , en ayant égard aux expressions (110^{bis}) des fonctions Φ, Ψ :

$$C_1 = - \frac{1}{u_0^2 + v_0^2} \left[k \varphi_0 + C \varphi_0^2 v_0^2 - \frac{k' u_0^2}{a^2 b^2 - c^2 (a^2 + b^2 + \psi_0)} \right].$$

Mais cette dernière expression doit être amenée à sa forme définitive, en y remettant à la place de C sa valeur qui précède. A cet effet, ayant par cette valeur (112), en multipliant par $v_0^2 \varphi_0^2$,

$$(k \varphi_0 + C \varphi_0^2) v_0^2 = \frac{1}{2} (u_0^2 + v_0^2) v_0^2 \varphi_0^2 - \frac{k' v_0^2}{a^2 b^2 - c^2 (a^2 + b^2 + \psi_0)},$$

la valeur de C_1 deviendra, en y reportant cette dernière expression,

$$C_1 = - \frac{1}{u_0^2 + v_0^2} \left[\frac{1}{2} (u_0^2 + v_0^2) v_0^2 \varphi_0^2 - \frac{k' (u_0^2 + v_0^2)}{a^2 b^2 - c^2 (a^2 + b^2 + \psi_0)} \right],$$

c'est-à-dire simplement :

$$(112^{bis}) \quad C_1 = \frac{k'}{a^2 b^2 - c^2 (a^2 + b^2 + \psi_0)} - \frac{1}{2} v_0^2 \varphi_0^2 \quad (*).$$

(*) On voit de suite encore que la valeur particulière

$$C_1 = \frac{k'}{a^2 b^2 - c^2 (a^2 + b^2 + \psi_0)} = - \Psi(\varphi_0),$$

à laquelle se réduit cette expression de C_1 , dans l'hypothèse de la vitesse initiale nulle, est bien la même que fournit la formule (B) que nous avons donnée pour cette hypothèse

Les expressions de ces quadratures seront, en effet, savoir :

1° a) pour la première, dans l'hypothèse de $C_1 > 0$,

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi \sqrt{C_1 + k\varphi + C\varphi^2}} = -\frac{1}{\sqrt{C_1}} l \left[\frac{1}{\varphi} \left(\sqrt{C_1} + \frac{k\varphi}{2\sqrt{C_1}} + \sqrt{C_1 + k\varphi + C\varphi^2} \right) \right].$$

b) et dans le cas contraire de $C_1 < 0$

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi \sqrt{C_1 + k\varphi + C\varphi^2}} = \frac{1}{\sqrt{-C_1}} \operatorname{arc} \cos \frac{k\varphi + 2C_1}{\varphi \sqrt{k^2 - 4CC_1}};$$

2° c) pour la seconde, dans l'hypothèse de $C > 0$

(115)
$$\int \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{C_1 + k\varphi + C\varphi^2}} = \frac{1}{C} \sqrt{C_1 + k\varphi + C\varphi^2} - \frac{k}{2C\sqrt{C}} l \left(\varphi \sqrt{C} + \frac{k}{2\sqrt{C}} + \sqrt{C_1 + k\varphi + C\varphi^2} \right),$$

d) et dans l'hypothèse contraire de $C < 0$,

$$\int \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{C_1 + k\varphi + C\varphi^2}} = \frac{1}{C} \sqrt{C_1 + k\varphi + C\varphi^2} + \frac{k}{2C\sqrt{-C}} \operatorname{arc} \cos \frac{2C\varphi + k}{\sqrt{k^2 - 4CC_1}}$$

dans le même cas 2° (voir page 86) en note, *in fine*); car l'équation (112) étant multipliée par φ^2 , et traitée comme plus haut, donnera en général pour résultat :

$$\Phi(\varphi_0) = \frac{1}{2} (u_0^2 + v_0^2) \varphi_0^2 + \Psi(\psi_0),$$

et se réduira par conséquent dans le cas particulier en question à

$$\Phi(\varphi_0) = \Psi(\psi_0),$$

d'où il suit que la valeur de C_1 fournie par cette formule (B) sera alors :

$$C_1 = - \frac{\Psi(\psi_0) \left[\Phi_2(\varphi_0) \Psi_2(\psi_0) \left(\frac{d\bar{\varphi}}{d\varphi} \right)_0^2 + \Phi_1(\varphi_0) \Psi_1(\psi_0) \left(\frac{d\bar{\varphi}}{d\psi} \right)_0^2 \right]}{\Phi_2(\varphi_0) \Psi_2(\psi_0) \left(\frac{d\bar{\varphi}}{d\varphi} \right)_0^2 + \Phi_1(\varphi_0) \Psi_1(\psi_0) \left(\frac{d\bar{\varphi}}{d\psi} \right)_0^2} = - \Psi(\psi_0).$$

Si l'on convient donc de représenter pour abrégé par $F(\psi)$ l'intégrale hyperelliptique

$$(115^{bis}) \left\{ \begin{aligned} F(\psi) &= \int_{\psi_0}^{\psi} \sqrt{\frac{\psi(D - c^2\psi)}{f(\psi)(G - C_1c^2\psi)}} d\psi \\ &= \int_{\psi_0}^{\psi} \sqrt{\frac{\psi(D - c^2\psi)}{(a^2 + \psi)(b^2 + \psi)(c^2 + \psi)(G - C_1c^2\psi)}} d\psi, \end{aligned} \right.$$

où D et G représentent les constantes (111), et qu'on remette à la place des variables φ et ψ les coordonnées coniques r et λ qu'elles représentent par définition dans les calculs qui précèdent, la première équation (91), ou équation de la trajectoire du point matériel, sera en conséquence, d'après le tableau (113) :

a) pour le cas de $C_1 > 0$

$$-\frac{1}{\sqrt{C_1}} l \left[\frac{1}{r} \left(\sqrt{C_1} + \frac{kr}{2\sqrt{C_1}} + \sqrt{C_1 + kr + Cr^2} \right) \right] \pm \frac{1}{2} F(\lambda) = C',$$

d'où, par conséquent, en faisant $t = 0$, pour C' la valeur

$$-\frac{1}{\sqrt{C_1}} l \left[\frac{1}{r_0} \left(\sqrt{C_1} + \frac{kr_0}{2\sqrt{C_1}} + \sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2} \right) \right] = C',$$

et, en retranchant la première équation de la seconde, puis multipliant par $\sqrt{C_1}$,

$$\begin{aligned} & l \left[\frac{1}{r} \left(\sqrt{C_1} + \frac{kr}{2\sqrt{C_1}} + \sqrt{C_1 + kr + Cr^2} \right) \right] \\ & - l \left[\frac{1}{r_0} \left(\sqrt{C_1} + \frac{kr_0}{2\sqrt{C_1}} + \sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2} \right) \right] = \pm \frac{1}{2} \sqrt{C_1} F(\lambda), \end{aligned}$$

et finalement, en repassant des logarithmes aux nombres, on aura entre r et λ l'équation

$$(113^{ter}) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{r} \left(\sqrt{C_1} + \frac{kr}{2\sqrt{C_1}} + \sqrt{C_1 + kr + Cr^2} \right) \\ & = \frac{1}{r_0} \left(\sqrt{C_1} + \frac{kr_0}{2\sqrt{C_1}} + \sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2} \right) e^{\pm \frac{1}{2} \sqrt{C_1} F(\lambda)}; \end{aligned} \right.$$

b) pour le cas de $C_1 < 0$

$$\frac{1}{\sqrt{-C}} \operatorname{arc} \cos \frac{kr + 2C_1}{r\sqrt{k^2 - 4CC_1}} \pm \frac{1}{2} F(\lambda) = C',$$

d'où par conséquent dans cet autre cas, en faisant $t = 0$, les valeurs

$$\left\{ \begin{aligned} C' &= \frac{1}{\sqrt{-C_1}} \operatorname{arc} \cos \frac{kr_0 + 2C_1}{r_0\sqrt{k^2 - 4CC_1}}, \\ \cos C' \sqrt{-C_1} &= \frac{kr_0 + 2C_1}{r_0\sqrt{k^2 - 4CC_1}}, \\ \sin C' \sqrt{-C_1} &= \pm \frac{2\sqrt{-C_1}\sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2}}{r_0\sqrt{k^2 - 4CC_1}}; \end{aligned} \right.$$

or, en supposant cette valeur de C' remise dans l'équation qui précède, et multipliant par $\sqrt{-C_1}$, cette équation deviendra

$$\operatorname{arc} \cos \frac{kr + 2C_1}{r\sqrt{k^2 - 4CC_1}} = \sqrt{-C_1} \left[C' \mp \frac{1}{2} F(\lambda) \right],$$

ou, en prenant les cosinus des deux membres,

$$\begin{aligned} \frac{2C_1}{r} &= -k + \sqrt{k^2 - 4CC_1} \cos \left[\sqrt{-C_1} \left(\frac{1}{2} F(\lambda) - C' \right) \right] \\ &= -k + \sqrt{k^2 - 4CC_1} \left[\cos \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{-C_1} F(\lambda) \right) \cos C' \sqrt{-C_1} \right. \\ &\quad \left. + \sin \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{-C_1} F(\lambda) \right) \sin C' \sqrt{-C_1} \right] \\ &= -k + \frac{kr_0 + 2C_1}{r_0} \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{-C_1} F(\lambda) \right) \\ &\quad \pm \frac{2\sqrt{-C_1}}{r_0} \sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2} \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{-C_1} F(\lambda) \right), \end{aligned}$$

d'où finalement l'équation simple pour déterminer r en fonction de λ

$$(114) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{r_0}{r} = -\frac{kr_0}{2C_1} + \left(1 + \frac{kr_0}{2C_1}\right) \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-C_1}F(\lambda)\right) \\ \pm \frac{1}{\sqrt{-C_1}}\sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-C_1}F(\lambda)\right). \end{array} \right.$$

De même la seconde équation (91), qui donne l'expression de φ ou r en fonction du temps, sera, en effectuant le même changement de notation dans les expressions du tableau (115) :

c) pour le cas de $C > 0$

$$(114^{bis}) \quad \frac{1}{C}\sqrt{C_1 + kr + Cr^2} - \frac{k}{2C\sqrt{C}}t \left(r_0\sqrt{C} + \frac{k}{2\sqrt{C}} + \sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2} \right) = \pm\sqrt{2}(t + C''),$$

d'où par conséquent pour C'' la valeur

$$C'' = \pm \frac{1}{\sqrt{2C}} \left[\sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2} - \frac{k}{2\sqrt{C}}t \left(r_0\sqrt{C} + \frac{k}{2\sqrt{C}} + \sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2} \right) \right],$$

qu'il faut supposer remise à la place de C'' dans l'équation qui précède; et de même

d) pour le cas de $C < 0$

$$(115) \quad \frac{1}{C}\sqrt{C_1 + kr + Cr^2} + \frac{k}{2C\sqrt{-C}} \arccos \frac{2Cr + k}{\sqrt{k^2 - 4CC_1}} = \pm\sqrt{2}(t + C'')$$

d'où dans ce cas pour C'' la valeur

$$C'' = \pm \frac{1}{\sqrt{2C}} \left[\sqrt{C_1 + kr_0 + Cr_0^2} + \frac{k}{2\sqrt{-C}} \arccos \frac{2Cr_0 + k}{\sqrt{k^2 - 4CC_1}} \right],$$

qu'il faudra encore remettre à la place de C'' dans l'équation précédente : et par conséquent dans tous les cas la coordonnée r sera déterminée en fonction du temps, par une équation transcendante où n'entreront que les seules transcendentes classiques *log*, *sin*, et *cos*.

Si l'on remarque que les deux formes (113^{ur}) et (114) de l'équation de la trajectoire sont algébriques en r , et fournissent l'expression de r en fonction de λ par une équation du premier ou du second degré seulement, en résolvant cette équation, et reportant cette valeur de r dans la seconde équation (114^{bi}) ou (115), on aura de même la relation entre la coordonnée λ et le temps, exprimée à l'aide des seules transcendentes classiques, et de la transcendente hyperelliptique $F(\lambda)$, qu'on peut toujours supposer calculée, à défaut d'autres moyens, à l'aide des procédés de quadrature approximative.

Comme problème plus simple, dont la solution peut être déduite à titre de cas particulier de celle que nous venons d'obtenir, supposons en terminant que la seconde force d'attraction, c'est-à-dire celle émanant de l'axe du cône devienne nulle, en sorte que le mobile soit simplement attiré par le sommet, en raison inverse du carré de la distance.

L'hypothèse $k_1 = 0$ ou $k' = 0$, introduite dans les formules (112), (112^{bi}), (111) et (115^{bi}), donnent successivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \frac{1}{2}(u_0^2 + r_0^2) - \frac{k}{r_0}, \quad C_1 = -\frac{1}{2}v_0^2 r_0^2, \quad G = DC_1, \\ G - c^2 C_1 \psi = DC_1 - c^2 C_1 \psi = C_1(D - c^2 \psi), \\ F(\psi) = \int_{\psi_0}^{\psi} \sqrt{\frac{\psi(D - c^2 \psi)}{f(\psi)C_1(D - c^2 \psi)}} d\psi = \frac{1}{\sqrt{-C_1}} \int_{\psi_0}^{\psi} \sqrt{\frac{\psi}{-f(\psi)}} d\psi, \end{array} \right.$$

nous en déduisons en récrivant encore dans ces dernières valeurs r et λ à la place de φ et ψ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 + kr_0 + Cr_0^2 = -\frac{1}{2}v_0^2 r_0^2 + kr_0 + \left[\frac{1}{2}(u_0 + r_0^2) - \frac{k}{r_0} \right] r_0^2 = \frac{1}{2}u_0^2 r_0^2 \\ \sqrt{-C_1 F(\lambda)} = \int_{\lambda}^{\cdot} \sqrt{\frac{\lambda}{-f(\lambda)}} d\lambda = \int_{\lambda}^{\cdot} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{-\lambda(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}, \end{array} \right.$$

et dès lors la trajectoire, qui sera toujours dans ce cas exclusive-

ment représentée par l'équation (114), vu la valeur toujours négative de C_1 qui précède, deviendra dans ce nouveau problème

$$(115^{bis}) \left\{ \begin{aligned} \frac{r}{r_0} &= \frac{k}{v_0^2 r_0} + \left(1 - \frac{k}{v_0^2 r_0}\right) \cos \left(\frac{1}{2} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{-\lambda(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \right) \\ &\pm \frac{u_0}{v_0} \sin \left(\frac{1}{2} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{-\lambda(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \right), \end{aligned} \right.$$

et ne dépendra plus alors, comme l'on voit, de même que la relation (114^{bis}) ou (115) entre λ et t , que des fonctions elliptiques seulement. Et alors nos formules (92^{bis}) et (92^{ter}) nous donneront presque immédiatement, pour la grandeur du rayon de courbure en un point quelconque de cette trajectoire, l'expression suivante, où C représente la valeur que nous venons de spécifier pour ce cas :

$$R = \pm \frac{2^{\frac{5}{2}} r^2 (k + Cr)^{\frac{5}{2}} \lambda^{\frac{3}{2}}}{v_0 r_0 \sqrt{k^2 r \lambda^3 + 2a^2 b^2 c^2 v_0^2 r_0^2 (k + Cr)}}. \quad (*)$$

Les deux équations (113^{ter}) ou (114), et (114^{bis}) ou (115) résolvent la question que nous nous étions posée en premier lieu aussi complètement qu'on peut le demander, à l'aide des coordonnées coniques r , λ , et μ , définies par nos équations (107), et qui seules, croyons-nous, permettent de pousser jusqu'au bout la solution d'un semblable problème. Elles nous rendront de nouveau un précieux service dans le paragraphe suivant, à l'occasion d'un problème important, en nous en fournissant encore une solution plus simple et plus complète que tout autre système de coordonnées.

(*) Le lecteur trouvera le calcul de cette expression, ainsi que la description exacte du mouvement correspondant à ce problème restreint, déduite de la discussion des équations intégrales ainsi obtenues, à la fin de la Note III de l'Appendice qui termine ce mémoire, sous la rubrique : *Il° Cône du second ordre ; mouvement d'un point attiré par le sommet, en raison inverse du carré de la distance.*

2° *Sphère*. — Mais auparavant nous voulons encore faire ressortir l'utilité de ce nouveau système de coordonnées, et en même temps présenter un nouvel exemple de l'application de notre méthode, en traitant avec ce système, à la suite de M. C. NEUMANN, un intéressant problème, dont l'éminent géomètre fournit une solution simple et élégante, par le moyen des équations d'Hamilton et Jacobi (*).

Le problème en question consiste à déterminer le mouvement d'un point matériel astreint à demeurer sur une sphère, et soumis à l'attraction exercée, suivant la loi newtonienne, par la masse entière d'un ellipsoïde homogène immobile, dont le centre coïncide avec celui de la sphère, et qu'on suppose renfermer dans son intérieur le volume entier de ladite sphère.

A cet effet observons tout d'abord qu'en prenant les axes des coordonnées rectilignes dirigés suivant les axes mêmes de l'ellipsoïde en question, le point attiré étant par hypothèse constamment intérieur à la masse attirante, les composantes de la force qui le sollicite auront des expressions de la forme

$$X = -2a^2x, \quad Y = -2b^2y, \quad Z = -2c^2z,$$

et par suite la fonction des forces correspondante sera exprimée en coordonnées planes par

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \int (Xdx + Ydy + Zdz) \\ &= -\int 2(a^2x dx + b^2y dy + c^2z dz) = -(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2), \end{aligned}$$

les constantes a^2 , b^2 , c^2 , étant exprimées en fonction des axes de l'ellipsoïde attirant par des intégrales elliptiques que l'on trouve indiquées dans tous les traités de mécanique.

Cela posé, nous adopterons pour traiter ce problème le système des coordonnées coniques défini par nos formules (107), en ayant soin de prendre pour les constantes a^2 , b^2 , c^2 , qui y figurent,

(*) « De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultra-ellipticarum classem revocatur. » (JOURNAL DE CRELLE, t. LVI, pp. 46-63, 1858.)

précisément les mêmes valeurs qui entrent dans l'expression des composantes ci-dessus X, Y, Z. Dès lors, pour transformer dans ce système de coordonnées l'expression qui précède de la fonction des forces F, il suffira d'observer que, les deux premières de ces équations (107) exprimant que λ et μ sont les deux racines de l'équation du second degré

$$\frac{x^2}{a^2 + \rho} + \frac{y^2}{b^2 + \rho} + \frac{z^2}{c^2 + \rho} = 0,$$

ou ce qui est la même chose, en chassant les dénominateurs, réduisant et ordonnant,

$$(x^2 + y^2 + z^2)\rho^2 + [x^2(b^2 + c^2) + y^2(c^2 + a^2) + z^2(a^2 + b^2)]\rho + x^2b^2c^2 + y^2c^2a^2 + z^2a^2b^2 = 0,$$

donne immédiatement la relation, en faisant toujours $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= -\frac{1}{r^2} [x^2(b^2 + c^2) + y^2(c^2 + a^2) + z^2(a^2 + b^2)] \\ &= -\frac{1}{r^2} [r^2(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)], \end{aligned}$$

d'où l'on tire aisément

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = r^2(\lambda + \mu + a^2 + b^2 + c^2).$$

Par suite l'on aura en substituant dans l'expression ci-dessus de la fonction des forces F, pour celle de la fonction \mathcal{F}

$$(115^{bis}) \quad \mathcal{F}(\lambda, \mu, r) = -r^2(\lambda + \mu + a^2 + b^2 + c^2),$$

et par conséquent enfin pour l'expression de $\mathcal{F} + C$, en posant encore, comme dans l'équation (99^{bis}), $D = a^2 + b^2 + c^2$,

$$\mathcal{F}(\lambda, \mu, r) + C = -r^2(\lambda + \mu) - r^2D + C.$$

Convenant donc, pour faire l'application de notre méthode à la question proposée, de prendre dans cette dernière expression,

comme dans toutes les équations dont nous allons faire usage, pour unité de longueur le rayon de la sphère donnée, et récrivant en conséquence pour plus de clarté cette expression de $\mathcal{F} + C$, ainsi que celles (108) de H et K, en y faisant $\lambda = \varphi$, et $\mu = \psi$, $r = 1$, ainsi qu'il suit

$$\left\{ \begin{aligned} H &= \Delta_1^{-2} = \frac{-1}{4f(\varphi)}(\varphi - \psi), & K &= \Delta_1^{-2} = \frac{-1}{4f(\psi)}(\psi - \varphi), \\ \mathcal{F} + C &= -[\varphi + \psi + D - C] \\ &= -\frac{\varphi^2 + (D - C)\varphi - [\psi^2 + (D - C)\psi]}{\varphi - \psi}, \end{aligned} \right.$$

on voit, en comparant ces dernières valeurs avec celles exprimées par les formules (76), que les conditions exigées seront encore remplies, en prenant simplement

$$(116) \quad \left\{ \begin{aligned} \phi(\varphi) &= \varphi, & \psi(\psi) &= \psi, \\ \phi_1(\varphi) &= -[\varphi^2 + (D - C)\varphi], & \psi_1(\psi) &= -[\psi^2 + (D - C)\psi], \\ \phi_2(\varphi) &= \frac{-1}{4f(\varphi)}, & \psi_2(\psi) &= \frac{-1}{4f(\psi)}. \end{aligned} \right.$$

Par conséquent, nos formules intégrales (80) nous fourniront immédiatement, en remettant λ et μ à la place de φ et ψ , et multipliant par 2 chaque équation, pour solution du problème les deux équations

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)[\lambda^2 + (D - C)\lambda - C_1]}} \\ \pm &\int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)[\mu^2 + (D - C)\mu - C_1]}} = 0, \\ &\int_0^\lambda \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)[\lambda^2 + (D - C)\lambda - C_1]}} \\ \pm &\int_0^\mu \frac{\mu d\mu}{\sqrt{f(\mu)[\mu^2 + (D - C)\mu - C_1]}} = \pm 2\sqrt{2} \cdot t, \end{aligned} \right.$$

X. 25

dans lesquelles les valeurs des coefficients des trinômes sous les radicaux s'obtiendront très aisément, en calculant celles des constantes C et C₁ par le moyen de nos formules (78) et (79), en tenant compte des expressions (115^{ur}) et (116) des fonctions \mathcal{F} , Φ_1 , Ψ_1 , et seront alors les suivantes :

$$D - C = -(\lambda_0 + \mu_0) - \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2),$$

$$-C_1 = -\lambda_0\mu_0 - \frac{1}{2} \frac{\mu_0 u_0^2 + \lambda_0 v_0^2}{u_0^2 + v_0^2}.$$

Les équations, auxquelles nous venons de parvenir, ne diffèrent que par un simple changement de notation de celles qu'obtient comme résultat M. NEUMANN (*loc. cit.*, formules (6), page 49), et dont il déduit ensuite, à l'aide d'une discussion savante et approfondie, la connaissance détaillée de toutes les circonstances du mouvement.

EXEMPLE RELATIF AU PARABOLOÏDE; DISCUSSION, ET DESCRIPTION COMPLÈTE DU MOUVEMENT. — Proposons-nous enfin, comme dernier exemple, et pour terminer ce chapitre, de connaître le mouvement d'un point matériel, astreint à rester sur un parabolôïde donné (elliptique ou hyperbolique, mais non de révolution), et soumis, sans vitesse initiale, à la seule action de la pesanteur, dont on suppose la direction coïncider avec l'axe de figure de cette surface.

Pour traiter cette question, nous déduirons encore du système ellipsoïdal (94), à l'aide de considérations de limites analogues à celles qui nous ont fourni le système des coordonnées coniques employé pour les deux exemples précédents, nous déduirons encore, disons-nous, un nouveau système orthogonal, formé celui-là de trois parabolôïdes homofocaux, dont deux elliptiques, et le troisième hyperbolique, système auquel il sera toujours possible, comme nous allons le voir, de rattacher la surface donnée, et dont nous ferons usage pour appliquer nos formules.

Dans ce but, contrairement à ce que nous avons fait dans les exemples précédents, nous supposerons dans le système ellip-

soïdal (94) les trois constantes a^2, b^2, c^2 , rangées par grandeur dans l'ordre suivant $a^2 < b^2 < c^2$, cette dernière étant supposée expressément positive (hypothèse nouvelle, qui ne change évidemment rien à l'exactitude des raisonnements et des calculs basés sur ce système, du moment que les trois équations de ce système sont parfaitement symétriques par rapport à ces trois quantités a^2, b^2, c^2), en supposant alors, bien entendu, au lieu des inégalités (93), les trois coordonnées elliptiques λ, μ, ν , renfermées de même respectivement entre les limites suivantes :

$$-c^2 < \lambda < -b^2 < \mu < -a^2 < -\nu < \infty.$$

Dès lors, pour obtenir le système orthogonal formé de trois paraboloides dont nous parlons, convenant de désigner pour un instant par ρ l'une quelconque des trois coordonnées λ, μ, ν , en sorte que chacune des équations du système (94) puisse être représentée par

$$\frac{x^2}{a^2 + \rho} + \frac{y^2}{b^2 + \rho} + \frac{z^2}{c^2 + \rho} = 1,$$

puis changeant d'abord dans cette équation a^2, b^2, ρ , et z , respectivement en $cp, cq, c\rho$, et $z - c$, ce qui la transformera dans la suivante

$$\frac{x^2}{c(p + \rho)} + \frac{y^2}{c(q + \rho)} + \frac{(z - c)^2}{c(c + \rho)} = 1,$$

équation qui peut encore être écrite en réduisant, puis multipliant par c ,

$$\frac{x^2}{p + \rho} + \frac{y^2}{q + \rho} + \frac{z^2}{c + \rho} = \frac{2z + \rho}{1 + \frac{\rho}{c}},$$

nous y ferons ensuite $c = \infty$, hypothèse qui la réduira simplement à :

$$(116^{bis}) \quad \frac{x^2}{p + \rho} + \frac{y^2}{q + \rho} = 2z + \rho.$$

D'où l'on voit que les trois surfaces qui composaient le système ellipsoïdal (94), lesquelles par cette transformation n'ont évidemment pas cessé à un instant quelconque d'être

orthogonales entre elles, sont devenues trois paraboloides dont les sections principales ont toutes leurs foyers sur l'axe des z , et situés quel que soit ρ , c'est-à-dire λ , μ , ν , aux deux points, $z' = \frac{\rho}{2}$ pour les sections principales situées dans le plan des zx , et $z'' = \frac{\rho}{2}$ pour celles situées dans le plan des yz .

Pour voir d'ailleurs à quel genre appartient séparément ces trois familles de paraboloides, il suffit d'introduire les mêmes changements de notation et hypothèses dans les inégalités de définition (93), lesquelles devenant alors

$$-c^2 < c\lambda < -cq < c\mu < -cp < c\nu,$$

ou en divisant d'abord par $c = +\sqrt{c^2}$ (c^2 étant supposé pris positif), puis faisant ensuite $c = \infty$,

$$(117) \quad -\infty < \lambda < -q < \mu < -p < \nu < +\infty,$$

donnent respectivement pour chacune des trois surfaces

$$\begin{cases} p + \lambda < 0, & p + \mu < 0, & p + \nu > 0, \\ q + \lambda < 0, & q + \mu > 0, & q + \nu > 0; \end{cases}$$

d'où il suit que la seconde surface, au paramètre μ , seule, est un paraboloides hyperbolique, et que les deux autres sont elliptiques, ayant bien tous deux pour axe de figure l'axe des z , mais leur concavité tournée chacun en sens contraire l'un de l'autre.

En opérant les mêmes changements dans les trois formules de droite (94), elles deviendront semblablement :

$$\left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{(cp + c\lambda)(cp + c\mu)(cp + c\nu)}{(cp - cq)(cp - c^2)} = \frac{(p + \lambda)(p + \mu)(p + \nu)}{(p - q)\left(\frac{p}{c} - 1\right)}, \\ y^2 &= \frac{(cq + c\lambda)(cq + c\mu)(cq + c\nu)}{(cq - c^2)(cq - cp)} = \frac{(q + \lambda)(q + \mu)(q + \nu)}{\left(\frac{q}{c} - 1\right)(q - p)}, \\ (z - c)^2 &= \frac{(c^2 + c\lambda)(c^2 + c\mu)(c^2 + c\nu)}{(c^2 - cp)(c^2 - cq)} = \frac{c^2(c + \lambda)(c + \mu)(c + \nu)}{c^2\left(1 - \frac{p}{c}\right)\left(1 - \frac{q}{c}\right)}. \end{aligned} \right.$$

Les deux premières donneront donc immédiatement pour $c = \infty$:

$$(117^{bis}) \quad x^2 = -\frac{(p+\lambda)(p+\mu)(p+\nu)}{p-q}, \quad y^2 = -\frac{(q+\lambda)(q+\mu)(q+\nu)}{q-p}.$$

Quant à la troisième, si après l'avoir développée ainsi qu'il suit

$$z^2 - 2cz + c^2 = \frac{(c+\lambda)(c+\mu)(c+\nu)}{c \left[1 - \frac{p+q}{c} + \frac{pq}{c^2} \right]},$$

on chasse le dénominateur, et qu'on fasse attention dans le développement des deux membres aux seuls termes en c^2 (les termes en c^3 disparaissant d'eux-mêmes), ce qui donnera

$$-(2z + p + q)c^2 + (\dots)c + \dots = (\lambda + \mu + \nu)c^2 + (\dots)c + \dots,$$

il est clair qu'en divisant alors par c^2 , puis faisant ensuite $c = \infty$, ces mêmes termes subsisteront seuls, et l'équation se réduira par suite à

$$-(2z + p + q) = \lambda + \mu + \nu,$$

ou

$$(118) \quad z = -\frac{1}{2}(\lambda + \mu + \nu + p + q),$$

ces valeurs (117^{bis}) et (118) de x^2 , y^2 , et z coïncidant, bien entendu, avec celles que l'on eût obtenu directement en résolvant le système des trois équations (116^{bis}).

Enfin, le même changement de notation opéré de nouveau sur la formule (95), nous donnera, en n'écrivant pour abrégé que le premier terme,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{4} \frac{(c\lambda - c\mu)(c\lambda - c\nu)}{(cp + c\lambda)(cq + c\lambda)(c^2 + c\lambda)} (cd\lambda)^2 + \dots + \dots \\ &= \frac{1}{4} \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{(p + \lambda)(q + \lambda) \left(1 + \frac{\lambda}{c} \right)} d\lambda^2 + \dots + \dots, \end{aligned}$$

valeur zéro du paramètre, soit à la deuxième, soit à la troisième famille du système des trois surfaces (116^{bis}). Car les quatre quantités p , q , μ et ν , n'étant assujetties par définition, d'après les inégalités (117), seulement qu'aux trois conditions

$$-q < \mu < -p < \nu,$$

ou bien

$$\left\{ \begin{array}{lll} p < q, & p + \mu < 0, & q + \mu > 0, \\ & p + \nu > 0, & q + \nu > 0, \end{array} \right.$$

on voit de suite, d'après ce que nous venons de dire, que ces diverses conditions seront bien remplies en prenant simplement $p = P$ et $q = Q$ en même temps que $\mu = 0$, si la surface (119) est un parabolôïde hyperbolique, ou que $\nu = 0$, si c'est un parabolôïde elliptique.

Plaçons-nous donc, pour fixer les idées, dans cette dernière hypothèse, et supposons également que l'action de la pesanteur s'exerce en sens contraire de l'axe des z que nous avons choisi sans ambiguïté dans ce cas, ainsi que nous venons de le dire, les composantes de la force accélératrice qui sollicite le mobile étant alors $X=0, Y=0, Z=-g$ (dans l'hypothèse contraire relative au sens de la pesanteur, il suffirait évidemment d'attribuer à la constante g une valeur négative) la fonction des forces correspondante $F(x, y, z)$ aura pour expression, dans les mêmes circonstances, en coordonnées rectilignes — gz , ou ce qui est la même chose, en coordonnées paraboliques, par suite de la valeur (118) de z :

$$(119^{\text{bis}}) \quad \mathcal{F}(\lambda, \mu, \nu) = \frac{1}{2}g(\lambda + \mu + \nu + p + q),$$

et par conséquent pour tous les points de la surface $\nu = 0$, sur laquelle le mobile est astreint à rester, l'on aura :

$$\mathcal{F}(\lambda, \mu, 0) + C = \frac{1}{2}g(\lambda + \mu + p + q) + C.$$

Récrivant donc cette dernière valeur, ainsi que celles (118^{bis}) que nous venons de trouver pour H et K dans ce système de coor-

données, en y faisant à la fois $\lambda = \varphi$, $\mu = \psi$, $\nu = 0$, les expressions

$$\left\{ \begin{aligned} H &= \Delta_1^{-1} \varphi = \frac{1}{4} \frac{\varphi}{(p + \varphi)(q + \varphi)} (\varphi - \psi), \\ K &= \Delta_1^{-1} \psi = \frac{1}{4} \frac{\psi}{(p + \psi)(q + \psi)} (\psi - \varphi), \\ \mathcal{F} + C &= \frac{1}{2} g \left(\varphi + \psi + p + q + \frac{2C}{g} \right) \\ &= \frac{1}{2} g \cdot \frac{\varphi^2 + \left(p + q + \frac{2C}{g} \right) \varphi - \left[\psi^2 + \left(p + q + \frac{2C}{g} \right) \psi \right]}{\varphi - \psi}, \end{aligned} \right.$$

étant rapprochées des formules (76), montrent qu'il suffira encore pour appliquer notre théorie de faire comme plus haut

$$(120) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(\varphi) &= \varphi, & \Psi(\psi) &= \psi, \\ \Phi_1(\varphi) &= \frac{1}{2} g \left[\varphi^2 + \left(p + q + \frac{2C}{g} \right) \varphi \right], & \Psi_1(\psi) &= \frac{1}{2} g \left[\psi^2 + \left(p + q + \frac{2C}{g} \right) \psi \right], \\ \Phi_2(\varphi) &= \frac{1}{4} \frac{\varphi}{(p + \varphi)(q + \varphi)}, & \Psi_2(\psi) &= \frac{1}{2} \frac{\psi}{(p + \psi)(q + \psi)}, \end{aligned} \right.$$

moyennant quoi nos formules (77) ou (80) nous fourniront encore immédiatement la solution du problème.

Mais pour obtenir ces résultats sous une forme simple et facile à interpréter, il convient de déterminer préalablement la valeur des constantes C et C_1 , à l'aide des formules (78) et (A) (note de la page 59, *in fine*), cette dernière tenant lieu de la formule (79), à cause de l'hypothèse admise de la vitesse initiale nulle. A cet effet, la première de ces deux formules nous donnant, en ayant égard à la valeur ci-dessus (119^{bis}) de la fonction \mathcal{F} ,

$$C = -\mathcal{F}(\varphi_0, \psi_0, 0) = -\frac{1}{2} g (\varphi_0 + \psi_0 + p + q),$$

valeur, d'où nous concluerons successivement

$$\frac{2C}{g} = -(\varphi_0 + \psi_0 + p + q) \quad \text{et} \quad p + q + \frac{2C}{g} = -(\varphi_0 + \psi_0),$$

les expressions ci-dessus (120) des fonctions $\Phi_1(\varphi)$ et $\Psi_1(\psi)$ deviendront, en substituant cette valeur, les suivantes

$$\Phi_1(\varphi) = \frac{1}{2}g[\varphi^2 - (\varphi_0 + \psi_0)\varphi], \quad \Psi_1(\psi) = \frac{1}{2}g[\psi^2 - (\varphi_0 + \psi_0)\psi],$$

lesquelles donnant à leur tour

$$\Phi_1(\varphi_0) = \Psi_1(\psi_0) = \frac{1}{2}g(-\varphi_0\psi_0),$$

réduiront à première vue la valeur de C_1 fournie par la formule (A) précitée (le dénominateur apparaissant alors comme l'un des facteurs du numérateur), à l'expression simple,

$$C_1 = -\left[\frac{1}{2}g(-\varphi_0\psi_0)\right] = \frac{1}{2}g\varphi_0\psi_0;$$

et par suite l'on aura enfin, en se reportant aux valeurs des fonctions $\Phi_1(\varphi)$ et $\Psi_1(\psi)$ que nous venons d'écrire,

$$(120^{bis}) \begin{cases} \Phi_1(\varphi) + C_1 = \frac{1}{2}g[\varphi^2 - (\varphi_0 + \psi_0)\varphi + \varphi_0\psi_0] = \frac{1}{2}g(\varphi_0 - \varphi)(\psi_0 - \varphi), \\ \Psi_1(\psi) + C_1 = \frac{1}{2}g[\psi^2 - (\varphi_0 + \psi_0)\psi + \varphi_0\psi_0] = \frac{1}{2}g(\varphi_0 - \psi)(\psi_0 - \psi). \end{cases}$$

Avec ces expressions ainsi calculées, et celles écrites plus haut (120) des fonctions $\Phi(\varphi)$, $\Psi(\psi)$, $\Phi_2(\varphi)$, $\Psi_2(\psi)$, nos formules (80) nous donneront pour solution complète du problème les deux équations

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\frac{\varphi}{4(p+\varphi)(q+\varphi)(\frac{1}{2}g)(\varphi_0-\varphi)(\psi_0-\varphi)}} d\varphi \\ & \pm \int_{\psi_0}^{\psi} \sqrt{\frac{\psi}{4(p+\psi)(q+\psi)(\frac{1}{2}g)(\varphi_0-\psi)(\psi_0-\psi)}} d\psi = 0, \\ & \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\frac{\varphi}{4(p+\varphi)(q+\varphi)(\frac{1}{2}g)(\varphi_0-\varphi)(\psi_0-\varphi)}} \varphi d\varphi \\ & \pm \int_{\psi_0}^{\psi} \sqrt{\frac{\psi}{4(p+\psi)(q+\psi)(\frac{1}{2}g)(\varphi_0-\psi)(\psi_0-\psi)}} \psi d\psi = \pm \sqrt{2} \cdot t; \end{aligned} \right\}$$

ou définitivement, en multipliant tous les termes par $\sqrt{2g}$, et remettant ensuite à la place des lettres φ et ψ , les coordonnées λ et μ , qu'elles étaient censées représenter, puis convenant, pour plus de simplicité, que chaque radical emporte avec lui son signe, ces deux autres équations

$$(121) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}} \\ - \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}} = 0, (*) \\ \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}} \\ - \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{\mu(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}} = \pm 2\sqrt{g} \cdot t; \end{array} \right.$$

et en même temps nos formules (80^{bis}) et (80^{ter}) fourniront aisément pour les composantes de la courbure, en un point quelconque de la trajectoire représentée par la première de

(*) Il semble à première vue, la constante g (dont le signe spécifie, ainsi que nous l'avons dit, le sens de la pesanteur) n'apparaissant pas en évidence dans la première de ces deux équations, que la trajectoire ne dépende en rien du sens de son action relativement à la surface, résultat évidemment absurde; mais ce n'est là qu'une illusion, attendu les limites absolument différentes, entre lesquelles chacune des coordonnées λ et μ est astreinte à varier dans les deux cas, comme nous allons le montrer. Mais sans aborder même cette discussion, on peut également réduire à néant cette apparente contradiction, en se rappelant que c'est par hypothèse le même radical qui entre dans les deux intégrales relatives à chaque coordonnée λ ou μ , dans les deux équations. Or, la seconde équation (121) fait voir que lorsque g est négatif, il y a nécessité de multiplier tous les termes de la seconde équation par $\sqrt{-1}$, ou ce qui est la même chose, d'introduire le facteur -1 sous chaque radical, pour que l'équation ait lieu entre quantités réelles. Si donc on se borne à considérer les points réels de la trajectoire, qui offrent seuls un intérêt au point de vue du problème mécanique, on voit ainsi que ce ne sont pas en réalité les mêmes intégrales qui figurent dans la première équation (121) pour les deux hypothèses de $g > 0$ et $g < 0$, ou en d'autres termes que l'équation de la trajectoire est bien véritablement différente dans les deux cas.

ces deux équations, les expressions (voir la note III de l'appendice)

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{U}{\sqrt{\frac{(\lambda_0 - \mu)(\mu_0 - \mu)}{(\lambda - \mu)^3}}} = \frac{V}{\sqrt{\frac{(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda)}{(\mu - \lambda)^3}}} \\
 & = \frac{\sqrt{\frac{1}{\lambda}(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0 - \mu)(\mu_0 - \mu)} + \sqrt{\frac{1}{\mu}(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda)}}{(\lambda - \lambda_0 + \mu - \mu_0)^2} \\
 & W = \frac{\sqrt{\frac{pq}{\lambda\mu} \left[\frac{1}{\lambda}(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda) - \frac{1}{\mu}(\lambda_0 - \mu)(\mu_0 - \mu) \right]}}{(\lambda - \mu)(\lambda_0 - \lambda + \mu_0 - \mu)}.
 \end{aligned} \right\}$$

Ces formules, qui résolvent complètement la question, permettent de se rendre compte, à l'aide de considérations purement élémentaires, de toutes les principales circonstances du mouvement.

Pour faire cette discussion d'une façon complète, il conviendra d'examiner séparément les trois cas suivants.

1° Le parabolôide étant supposé elliptique, et la pesanteur attirant le mobile vers le sommet, c'est-à-dire la constante g étant positive, comme il résulte immédiatement des inégalités de définition (117) que, parmi les cinq facteurs qui entrent sous le radical dans la première des intégrales de chacune de ces deux équations, les trois premiers c'est-à-dire λ , $p + \lambda$, $q + \lambda$ sont négatifs, le dernier $\mu_0 - \lambda$ étant au contraire positif, le facteur restant $\lambda_0 - \lambda$ devra donc être aussi négatif pour que l'intégrale reste réelle, c'est-à-dire que λ sera astreint à varier entre λ_0 comme limite inférieure et $-q$ comme limite supérieure. Et de même, parmi les cinq facteurs qui entrent sous le radical de la seconde intégrale, trois sont encore négatifs, savoir μ , $p + \mu$, $\lambda_0 - \mu$, et un positif, savoir $q + \mu$; il faudra donc encore que le facteur restant, à savoir $\mu_0 - \mu$, soit aussi négatif, ce qui signifie

que la coordonnée μ sera astreinte à varier entre μ_0 comme limite inférieure, et $-p$ comme limite supérieure. (*)

(*) Lorsque la valeur initiale donnée λ_0 sera précisément égale à l'autre limite que nous venons de reconnaître pour la coordonnée λ , à savoir la valeur $-q$, le champ assigné à sa variation se réduisant alors à zéro, il suit de là nécessairement que cette coordonnée restera alors pendant toute la durée du mouvement constamment égale à cette valeur $\lambda_0 = -q$. L'équation $\lambda = -q$ sera donc dans ce cas l'équation même de la trajectoire, en remplacement de la première équation (121), qui est alors indéterminée, en raison de ce que la première intégrale le devient également. Or la seconde équation (117^{bis}), qui pour $\lambda = -q$ donne $y^2 = 0$, quelle que soit la valeur finie attribuée à μ , montre que cette trajectoire ne sera autre que la section principale des xz , à laquelle on suppose alors qu'appartient la position initiale. Semblablement si la valeur initiale de la coordonnée μ est supposée égale à l'autre limite $-p$, assignée à la variation de μ , on aura forcément à toute époque $\mu = \mu_0 = -p$, et la trajectoire représentée alors par cette équation au lieu et place de la première équation (121) qui perd encore toute signification déterminée, sera de même l'autre section principale ou des yz , attendu que la première équation (117^{bis}) donne constamment $x^2 = 0$, pour $\mu = -p$, quelle que soit la valeur finie attribuée à λ . Ces deux résultats étaient d'ailleurs évidents *a priori*, la vitesse initiale étant supposée nulle et la force constamment parallèle à l'axe de figure de la surface, par une simple considération de symétrie (qui se produirait quelle que soit la position initiale, si l'on supposait la surface de révolution), aucune raison d'aucun genre n'intervenant alors pour faire sortir le mobile à un instant quelconque de la section principale sur laquelle on le suppose placé à l'origine de son mouvement.

Dans ces deux hypothèses, la trajectoire du mobile passera donc par le sommet du parabolôïde; mais il est facile de voir que, hormis ces deux cas simples qui étaient aisés à reconnaître *a priori*, et une autre hypothèse particulière plus complexe que nous allons indiquer tout à l'heure, en général le point mobile ne se trouvera à aucune époque du mouvement au sommet du parabolôïde; car pour que le sommet fût un des points de la trajectoire, il faudrait que ses deux coordonnées, savoir $\lambda = -q$ et $\mu = -p$, vérifiasent simultanément la première équation (121), c'est-à-dire que l'on eût en séparant en deux membres :

$$\int_{\lambda_0}^{-q} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda(\mu + \lambda)(q + \lambda)(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda)}} = \int_{\mu_0}^{-p} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu(p + \mu)(q + \mu)(\lambda_0 - \mu)(\mu_0 - \mu)}}.$$

Or, il est évident que ces deux intégrales qui sont des fonctions différentes de λ_0 et μ_0 , et des mêmes constantes p et q , ne représenteront des quantités égales, que si l'on suppose que les coordonnées initiales λ_0 et μ_0 vérifient une certaine condition, à savoir celle exprimée par cette dernière égalité elle-même.

On se rendra compte d'ailleurs également sans difficulté, par voie intuitive, de cette conclusion (dont l'énoncé pourra peut-être au premier abord causer quelque étonnement, en raison de ce que le sommet du parabolôïde est par hypothèse le point le plus bas de la surface), en réfléchissant qu'en général le motif de symétrie que nous signalions tout à l'heure n'existe pas, quant au point de vue géométrique, relativement à la section verticale menée par l'axe de la surface et la position initiale du mobile; qu'il n'y a donc plus aucune raison

Ce premier point acquis, il est facile de voir que chacune de ces deux coordonnées λ et μ parcourra effectivement d'une façon continue tout l'intervalle que nous venons de lui assigner, et que la loi de sa variation consistera dès lors en une succession d'oscillations entre les deux limites correspondantes.

En effet nos deux équations (73) et (73^{ur}) (dans laquelle on fera abstraction du membre intermédiaire), étant dans le cas actuel, en y introduisant à la place des fonctions $\Phi, \Psi, \Phi_2, \Psi_2, \Phi_1 + C_1, \Psi_1 + C_1$, les valeurs qui précèdent (120) et (120^{bi}), dans lesquelles on aura remis λ et μ au lieu de φ et ψ ,

$$(121^{bi}) \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{\frac{\lambda}{4(p + \lambda)(q + \lambda) \cdot \frac{1}{2} g (\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda)}} d\lambda \\ & = \mp \sqrt{\frac{\mu}{4(p + \mu)(q + \mu) \cdot \frac{1}{2} g (\lambda_0 - \mu)(\mu_0 - \mu)}} d\mu = du, \\ & dt = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda - \mu) du, \end{aligned} \right.$$

on aura en les divisant membre à membre, après les avoir élevées au carré,

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{2g(p + \lambda)(q + \lambda)(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda)} \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \\ & = \frac{\mu}{2g(p + \mu)(q + \mu)(\lambda_0 - \mu)(\mu_0 - \mu)} \left(\frac{d\mu}{dt} \right)^2 = \frac{1}{\frac{1}{2}(\lambda - \mu)^2}, \end{aligned}$$

ou séparément

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 &= \frac{4g}{\lambda(\lambda - \mu)^2} (p + \lambda)(q + \lambda)(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda), \\ \left(\frac{d\mu}{dt} \right)^2 &= \frac{4g}{\mu(\mu - \lambda)^2} (p + \mu)(q + \mu)(\lambda_0 - \mu)(\mu_0 - \mu), \end{aligned} \right.$$

de penser que cette section sera précisément la trajectoire; et que dès lors, une fois sorti de cette section, les vitesses normales relativement à ce plan dont il sera alors animé constituent en général une raison suffisante pour qu'il ne passe plus par le point le plus bas de la surface, de même que dans le problème du pendule conique le mobile ne passe pas non plus pour cette même cause par la verticale du point de suspension, qui est dans ce cas le point le plus bas de la sphère.

valeurs qui montreront, eu égard aux limites de définition (117), que les dérivées $\frac{d\lambda}{dt}$ et $\frac{d\mu}{dt}$ ne peuvent s'annuler, et par conséquent aussi changer de signe, que pour les seules valeurs $\lambda = \lambda_0$ ou $\lambda = -q$ pour la première, et $\mu = \mu_0$ ou $\mu = -p$ pour la seconde, d'où il suit que les valeurs des coordonnées λ et μ oscilleront bien indéfiniment entre les mêmes limites.

En outre la dernière des équations ci-dessus (121^{bu}), que l'on peut adopter comme définition de la variable auxiliaire u (avec la condition $u = 0$ pour $t = 0$), en prenant arbitrairement une fois pour toutes l'un des doubles signes qui y figurent, montre également, le facteur $\lambda - \mu$ restant constamment de même signe en vertu toujours des mêmes inégalités de définition (117), que la variable auxiliaire u variera constamment, soit dans le même sens que t , soit en sens contraire, suivant le signe que l'on aura adopté. D'où l'on peut conclure immédiatement qu'elle prendra successivement, de même que t , tous les états de grandeur en valeur absolue depuis zéro jusqu'à l'infini, car si après l'avoir intégrée de 0 à u , ce qui donnera

$$(121^{ur}) \quad \int_0^u \lambda du - \int_0^u \mu du = \pm \sqrt{2} \cdot t,$$

l'on fait ensuite $t = \infty$, il faudra nécessairement que l'une au moins des deux intégrales du premier membre soit infinie, ce qui ne pourra arriver, l'élément de cette intégrale λdu où μdu restant constamment fini, que moyennant que la limite supérieure u sera elle-même infinie. On pourra donc dès lors la prendre pour variable indépendante à la place de t , en vue de faciliter la discussion des résultats qui précèdent.

Cela posé, les deux premières équations (121^{bu}), que l'on peut écrire séparément, en entendant encore que chaque radical emporte avec lui son signe,

$$(122) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{2g} \sqrt{\lambda(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}} \\ = \frac{\mu d\mu}{\sqrt{2g} \sqrt{\mu(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}} = du, \end{array} \right.$$

ou ce qui est la même chose, leurs intégrales

$$(122^{bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}} = u, \\ \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}} = u, \end{array} \right.$$

montreront de nouveau que chaque fois que l'une des variables λ ou μ passera par l'une de ses limites, il faudra en même temps changer le signe du radical qui y figure, car dans les mêmes circonstances la différentielle $d\lambda$ ou $d\mu$ changeant à chaque fois de signe, c'est le seul moyen que le second membre du de ces mêmes équations conserve indéfiniment le même signe, ainsi que cela est nécessaire, d'après ce que nous venons de dire.

On déduira immédiatement de l'ensemble de ces conditions, à l'aide d'un mode de raisonnement très connu, que si l'on considère les deux coordonnées λ et μ comme deux fonctions de la variable auxiliaire u , définies séparément par ces deux dernières équations intégrales (122^{bis}), et même en se bornant à considérer simplement les valeurs réelles de cette variable indépendante u , ces deux coordonnées seront des fonctions périodiques de cette variable, dont les périodes seront respectivement $2u_1$ et $2u_2$, u_1 et u_2 désignant les deux quantités de même signe (*)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\lambda_0}^{-\lambda} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda(p+\lambda)(q+\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}}, \\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\mu_0}^{-\mu} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}} \end{array} \right.$$

(*) En effet, supposons que dans la dernière équation (121^{bis}) nous ayons fait choix du signe + de manière que, le facteur $\lambda - \mu$ étant par définition constamment négatif, du sera toujours de signe contraire à dt , c'est-à-dire négatif. Alors, pour ce qui est de la coordonnée λ par exemple, dans les premiers instants du mouvement λ partant de λ_0 comme limite inférieure, $d\lambda$ est positif, et par ailleurs λ étant lui-même négatif par définition, le numérateur de la première valeur (122) de du , à savoir $\lambda d\lambda$ est donc négatif, et

(le radical étant supposé pris avec le même signe dans les deux expressions) quantités qui seront toujours finies, attendu que l'ordre d'infinité (*) de la fonction sous le signe \int est pour l'une

par conséquent tant que λ n'aura pas atteint sa limite supérieure $-q$, il faudra prendre au dénominateur de la même expression le radical avec le signe $+$. Cela posé, désignons pour plus de clarté par (u) la valeur de la première intégrale (122^{bis}), correspondant dans ce premier intervalle à la valeur particulière (λ) de la coordonnée λ , et examinons pour les époques successives la loi de variation de cette intégrale u , considérée comme fonction de λ . Lorsque λ atteindra sa première limite $-q$, la fonction u aura acquis la valeur que nous désignons dans le texte par u_1 (en entendant pour le raisonnement présent que le radical y soit pris avec le signe $+$). A partir de cet instant, et pour toute la durée pendant laquelle λ varie de $-q$ à λ_0 , il faudra, comme nous l'avons expliqué, changer le signe du radical qui entre dans les équations (122), c'est-à-dire sous le signe \int dans l'expression de la fonction u . Il s'ensuit que l'accroissement de cette fonction u correspondant à cet intervalle sera

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{-q}^{\lambda_0} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda(p + \lambda)(q + \lambda)(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\lambda_0}^{-q} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda(p + \lambda)(q + \lambda)(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda)}} = u_1, \end{aligned}$$

et sa valeur au bout de cette période, lorsque λ est revenu à sa valeur initiale λ_0 , sera ainsi $2u_1$. A partir de cet instant, et jusqu'à ce que λ atteigne de nouveau la valeur $-q$, le radical de l'intégrale reprend le signe $+$, comme dans le premier intervalle, et par conséquent l'accroissement de la fonction u à partir de cet instant, jusqu'à ce que la coordonnée λ repasse de nouveau par la valeur (λ) sera encore (u) ; d'où il suit que sa valeur totale acquise depuis l'origine du mouvement, c'est-à-dire sa valeur effective à ce dernier instant sera $2u_1 + (u)$; résultat qui suffit pour établir la périodicité de la coordonnée λ , considérée comme fonction de u , du moment que l'on peut continuer indéfiniment ce même mode de raisonnement, et l'on reconnaîtrait exactement de la même façon la périodicité de la fonction μ définie par la seconde équation intégrale (122^{bis}).

SERRET dans son excellent *Cours de calcul différentiel et intégral* (tome II, § 509-514, pp. 156-168) prétend établir par ce seul raisonnement, et sans avoir égard à la considération des valeurs imaginaires de la variable, le caractère fondamental de la périodicité dans les fonctions circulaires ou elliptiques, les fonctions $x = \sin u$, ou $x = \sin am u$ étant définies comme les fonctions inverses des intégrales que l'on sait. A la vérité, dans cette question d'analyse pure, même pour l'objet restreint qu'il se propose, ce mode de raisonnement paraîtra sans doute à tout le monde tout à fait insuffisant, attendu qu'en se bornant, comme il le fait, à considérer les seules valeurs réelles de la variable x , rien ne montre qu'il faille nécessairement changer le signe du radical, toutes les fois que cette variable atteint l'une de ses limites. Mais l'on ne saurait adresser le même reproche au raisonnement qui précède, du moment que nous avons fait voir expressément que cette nécessité résultait clairement dans le cas actuel des équations antérieures de la théorie, c'est-à-dire en fait des conditions mécaniques de la question elle-même.

(*) Voir JORDAN, *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, t. II, § 76, p. 85.

et l'autre intégrale égale à $\frac{1}{2}$; et l'on reconnaîtra en même temps qu'aux époques successives correspondant aux valeurs $0, u_1, 2u_1, 3u_1, \dots$ de la variable u , les valeurs de la coordonnée λ seront alternativement λ_0 et $-q$, et de même qu'aux époques correspondant aux valeurs $0, u_2, 2u_2, 3u_2, \dots$ de la même variable, les valeurs de μ seront alternativement μ_0 et $-p$.

En conséquence, sauf le cas où les deux quantités u_1 et u_2 seraient deux nombres incommensurables entre eux, comme on pourra toujours trouver deux nombres entiers positifs, m et n , tels que l'on ait :

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{n}{m} \quad \text{ou} \quad mu_1 = nu_2,$$

il est clair que lorsque la variable u se sera accrue de la quantité

$$U = 2mu_1 = 2nu_2 = mu_1 + nu_2,$$

les deux coordonnées λ et μ reprendront simultanément la même valeur, et par conséquent en général (sauf la restriction que nous venons de dire), le mouvement sera périodique relativement à la variable auxiliaire u .

Ce premier résultat acquis, on reconnaîtra sans peine que l'intervalle de temps T correspondant à des accroissements successifs égaux à U de la variable u , est bien aussi une quantité constante, en sorte que le mouvement sera également périodique relativement au temps, et la durée T sera précisément ce que l'on appelle la période du mouvement.

Pour s'en assurer il suffira d'intégrer entre les limites kU et $(k+1)U$, k désignant un nombre entier quelconque, la dernière équation (121^{bis}) qui définit u en fonction de t , ou ce qui revient au même, qui exprime t en fonction de u , opération qui fournira, comme on va le voir, un résultat indépendant du nombre entier k qui particularise le rang de l'accroissement U donné à la variable u .

En effet, ayant posé par définition

$$T = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\lambda u}^{\lambda + 1 u} (\lambda - \mu) du = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_{\lambda u}^{(\lambda + 1)u} \lambda du - \int_{\lambda u}^{(\lambda + 1)u} \mu du \right],$$

pour calculer chacune des deux intégrales qui figurent dans cette expression, nous partagerons le champ d'intégration de la première, à savoir $U = 2mu_1$ en $2m$ parties égales chacune à u_1 , et de même le champ d'intégration de la seconde, qui est semblablement $U = 2nu_2$, en $2n$ parties égales chacune à u_2 , ce qui permettra d'écrire ainsi cette même expression :

$$T = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_{2m u_1}^{(2m+1)u_1} \lambda du + \int_{(2m+1)u_1}^{(2m+2)u_1} \lambda du + \dots + \int_{(2m+2m-1)u_1}^{(2m+2m)u_1} \lambda du \right. \\ \left. - \left(\int_{2n u_2}^{(2n+1)u_2} \mu du + \int_{(2n+1)u_2}^{(2n+2)u_2} \mu du + \dots + \int_{(2n+2n-1)u_2}^{(2n+2n)u_2} \mu du \right) \right].$$

Or, sous cette dernière forme, si l'on remplace dans les $2m$ intégrales de la première ligne la différentielle du par la première de ses valeurs (122), ce qui les transformera chacune en une intégrale relative à λ , et de même dans les $2n$ intégrales de la deuxième ligne du par sa seconde valeur (122), ce qui les transformera toutes en intégrales relatives à μ , puis qu'on se rappelle les valeurs que nous avons reconnues séparément à chacune des coordonnées λ et μ , pour chacune des valeurs de la variable u qui forment les limites de ces intégrales, on reconnaîtra tout d'abord que les deux premières intégrales dans chaque ligne seront égales entre elles, car pour la première ligne, par exemple, elles seront respectivement

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + \lambda} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda(p + \lambda)(q + \lambda)(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda)}}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{-\mu}^{-\mu_0} \frac{\lambda^2 d\lambda}{-\sqrt{\lambda(p + \lambda)(q + \lambda)(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda)}}$$

attendu que, lorsque λ varie de $-q$ à λ_0 , le signe du radical dans l'expression (122) de du n'est plus le même, avons-nous dit, pour ce second intervalle que pour le premier, dans lequel λ variait de λ_0 à $-q$. Et comme ensuite chacun des groupes de deux intégrales qui suivent les deux premières, dans chaque ligne, reproduisent exactement les mêmes circonstances, il est clair que les $2m$ intégrales de la première ligne deviendront par cette transformation toutes égales entre elles, et semblablement toutes les $2n$ intégrales de la seconde ligne égales aussi entre elles. D'où il suit que l'expression précédente de T donnera, en opérant ainsi, et supprimant haut et bas le facteur 2, pour la durée de la période du mouvement, la valeur

$$T = \pm \frac{1}{\sqrt{g}} \left[m \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda(p + \lambda)(q + \lambda)(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda)}} - n \int_{\mu}^{\mu_0} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{\mu(p + \mu)(q + \mu)(\lambda_0 - \mu)(\mu_0 - \mu)}} \right],$$

résultat qui est bien, indépendant, comme nous l'avions annoncé du rang de l'accroissement U donné à la variable u , et qui concorde exactement d'ailleurs avec celui donné par M. NEUMANN, à propos des équations analogues rencontrées dans l'exemple précédent, en invoquant implicitement la théorie supposée connue des transcendentes hyperelliptiques. (*Journal de Crelle*, t. LVI, *loc. cit.*, § 10, p. 59.)

Comme dernière indication propre à renseigner sur la nature du mouvement, remarquons enfin que, d'après les formules de transformation (117^{bis}), la valeur limite $\lambda = -q$ donnant $y = 0$ quelle que soit la coordonnée μ , pourvu qu'elle soit finie, ce qui est le cas, et de même la valeur limite $\mu = -p$ donnant semblablement $x = 0$, quelle que soit la valeur finie attribuée à la coordonnée λ , il résulte de la périodicité que nous avons reconnue séparément aux deux coordonnées λ et μ par rapport à la variable u , qu'aux époques successives correspondant aux valeurs $u_1, 3u_1, 5u_1, \dots (2m - 1)u_1$ de cette variable, le point

mobile se retrouvera dans la section principale des xz , qui est par hypothèse celle qui correspond au plus petit paramètre, et de même qu'aux différentes époques correspondant aux valeurs $u_2, 3u_2, 5u_2, \dots (2n - 1)u_2$ de la même variable, il se trouvera dans la section principale des yz , c'est-à-dire celle dont le paramètre est le plus grand. Mais il importe de bien remarquer que la périodicité relative à la variable u que nous constatons dans ces phénomènes, se produisant pour chaque coordonnée indépendamment de l'autre, n'engendrera pas comme conséquence une périodicité correspondante relativement au temps pour la succession de ces mêmes phénomènes, ou en termes plus précis qu'aucune indication ne permet de penser que dans chacune de ces deux séries, les différentes époques qui ramènent le même phénomène soient en réalité équidistantes, de même qu'aucun moyen élémentaire ne s'offre plus pour calculer effectivement par l'intégration la durée de leurs intervalles, sans passer par l'intermédiaire des transcendentes hyperelliptiques elles-mêmes. Le seul fait précis à retenir au sujet de cette dernière observation, et sur lequel nous voulions appeler l'attention, consiste donc en ce que, dans l'intervalle d'une période T , le point mobile se retrouvera m fois dans la section principale des xz , et n fois dans la section principale des yz .

2° Le parabolôide donné étant toujours elliptique, si l'on suppose au contraire que la pesanteur s'exerce dans le sens même de l'axe des z , comme tous les raisonnements et les calculs, qui nous ont fourni nos équations intégrales (121), subsisteront encore dans ce cas à la seule condition d'y considérer la constante g comme négative, ce qui obligera pour avoir des quantités réelles à multiplier par $\sqrt{-1}$ tous les termes de la seconde équation, ou à introduire le facteur -1 sous chacun des radicaux qui figurent dans ces deux équations, on voit, en reprenant le même mode de raisonnement que nous avons employé tout à l'heure, qu'il faudra pour la réalité des intégrales qui entrent dans ces formules, que les deux mêmes facteurs $\lambda_0 - \lambda$ et $\mu_0 - \mu$ soient au contraire positifs, c'est-à-dire que les deux coordonnées

λ et μ seront astreintes à varier entre les limites λ_0 et $-\infty$ d'une part, et μ_0 et $-q$ d'autre part; et l'on verrait exactement de même qu'elles parcourront d'une manière continue, toujours dans le même sens d'une limite à l'autre, chacun de ces intervalles. Le champ assigné de cette façon à la variation de la coordonnée λ fait voir que dans tous les cas le point s'en ira à l'infini, car les formules de transformation (117^{bis}) et (118) donnent également $x = \infty$, $y = \infty$, $z = \infty$, pour $\lambda = -\infty$. Quant à la coordonnée μ , elle sera comme tout à l'heure une fonction périodique de la variable u , définie par la seconde équation intégrale (122^{bis}) (ou plutôt par cette même équation multipliée par $\sqrt{-1}$, afin de n'avoir encore dans les deux membres que des quantités réelles), fonction dont la période relative à cette variable u sera cette fois $2u_3$, en désignant de même par u_3 la quantité

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{-2g}} \int_{\mu_0}^{-q} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{-\mu(p+\mu)(q+\mu)(\lambda_0-\mu)(\mu_0-\mu)}}$$

qui sera toujours finie de même que les quantités analogues u_1 et u_2 , et pour la même raison. Mais il importe d'observer que, dans le cas actuel, on ne pourra plus affirmer comme tout à l'heure que cette même variable u , bien que variant toujours dans le même sens, de même que t , prendra encore tous les états de grandeur absolue depuis zéro jusqu'à l'infini, attendu que dans l'équation (121^{ter}) la première intégrale, dont l'élément λdu peut alors devenir infini, pourra être infinie elle-même avec une limite supérieure finie. Désignant alors par $u = U_1$ la limite, quelle qu'elle soit, finie ou infinie, vers laquelle tendra u pour $t = \infty$ (valeur dont le calcul exact exigerait l'intégration effective figurée par l'équation (121^{ter}), en supposant qu'on y ait remis sous les deux signes \int , à la place de λ et μ , les fonctions hyperelliptiques qui expriment leurs valeurs en u , d'après les deux équations (122^{bis})); et si, de plus, on désigne par $(2m-1)$ le plus grand nombre entier impair compris dans la valeur numérique du rapport $\frac{U_1}{u_3}$, si ce rapport est plus grand que l'unité, ou $u_3 < U_1$ en valeur absolue, la dernière équation ci-dessus, qui

