



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### **Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### **About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

NYPL RESEARCH LIBRARIES



3 3433 06630754 1





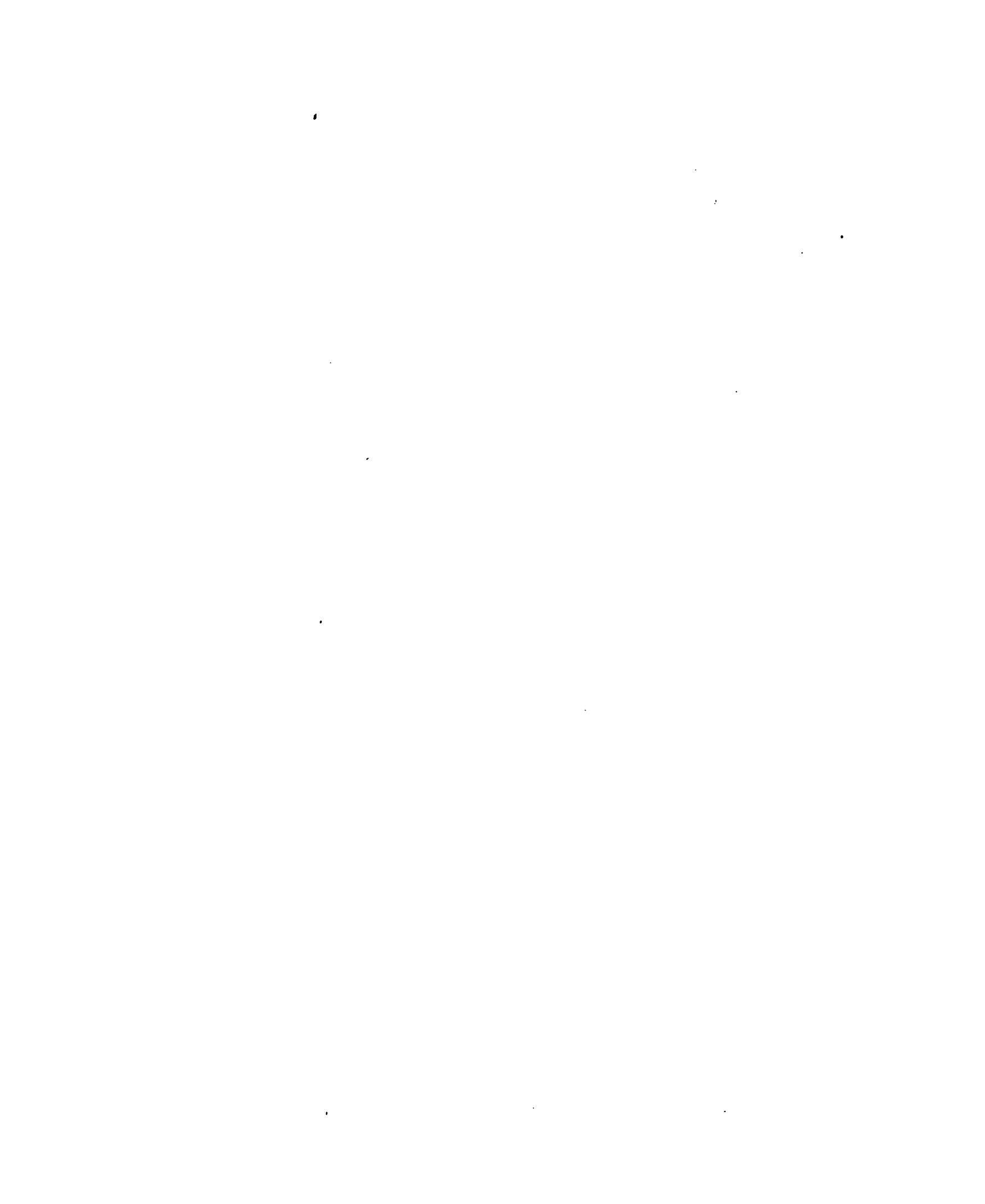
OEA  
FRANCE  
Ecole







France



**ANNALES**

**SCIENTIFIQUES**

**DE**

**L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.**

L'Éditeur de cet Ouvrage se réserve le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Il poursuivra, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de ses droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le cours de 1875, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

---

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.





# ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

## L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR

UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

---

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME QUATRIÈME — ANNÉE 1875.

---

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,  
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1875

(Tous droits réservés.)

1900  
1901  
1902  
1903

## COMITÉ DE RÉDACTION

COMPOSÉ DES MAÎTRES DES CONFÉRENCES SCIENTIFIQUES.

### Sciences mathématiques.

MM.  
BERTRAND, de l'Institut.  
BONNET, de l'Institut.  
BOUQUET, Prof. à la Sorbonne.  
BOURGET, Directeur des Études  
(Sainte-Barbe).  
BRIOT, Prof. à la Sorbonne.  
DARBOUX, Suppl. à la Sorbonne.  
HERMITE, de l'Institut.  
PUISEUX, de l'Institut.

### Sciences physiques.

MM.  
BALARD, de l'Institut.  
BERTIN, Sous-Direct. de l'École  
Normale.  
FRIEDEL, de l'École des Mines.  
GERNEZ, Professeur au Lycée  
Louis-le-Grand.  
SAINTE-CLAIRE DEVILLE (Henri),  
de l'Institut.  
TROOST, Suppl. à la Sorbonne.

### Sciences naturelles.

MM.  
DELAFOSSÉ, de l'Institut.  
DELESSE, Ingénieur en chef des  
Mines.  
DES CLOIZEAUX, de l'Institut.  
DE LACAZE-DUTHIERS, de l'In-  
stitut.  
PASTEUR, de l'Institut.  
PERRIER.  
VAN TIECHEM.

---

## ADMINISTRATION.

MM. H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE ..... *Directeur.*  
BOURGET, Directeur des Études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe. *Secrétaire.*  
GERNEZ, Professeur au Lycée Louis-le-Grand ..... *Secrétaire-Adjoint.*

---



# ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

## L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

---

### ÉTUDES SUR LE MAGNÉTISME,

PAR M. E. BOUTY,  
PROFESSEUR DE PHYSIQUE AU LYCÉE DE REIMS.

---

#### INTRODUCTION.

Il n'existe jusqu'ici aucune théorie complète des aimants. Malgré la simplicité relative des phénomènes présentés par le fer doux, on ne saurait espérer d'expliquer ceux-ci à part, et l'étude des aimants d'acier est encore trop peu avancée pour fournir les éléments d'une théorie physique satisfaisante.

J'ai pensé que, dans cette situation, il ne serait pas sans intérêt d'étudier expérimentalement et de très-près quelques-uns des phénomènes les plus simples que présentent les aimants d'acier, tels que ceux qui accompagnent leur production, leur réunion ou leur séparation. Ce travail est un premier essai dans cette voie. Les questions qui en font l'objet, fort peu étudiées jusqu'ici, offriraient pourtant des vérifications numériques nombreuses à toute théorie exacte du magnétisme, et cela suffirait pour attacher un intérêt sérieux aux recherches du genre de celles que nous avons entreprises.

La plupart des études dont l'aimantation par les courants a été l'objet se rapportent au fer doux. Lenz et Jacobi (<sup>1</sup>), Joule (<sup>2</sup>), Müller (<sup>3</sup>),

---

(<sup>1</sup>) LENZ et JACOBI, *Annales de Poggendorff*, t. XLVII; 1839.

(<sup>2</sup>) JOULE, *Philosophical Magazine* [4], t. II; 1839.

(<sup>3</sup>) MÜLLER, *Annales de Poggendorff*, t. LXXIX et LXXXII; 1850-1851.

Wiedemann (1) surtout, et plus récemment de Quintus-Icilius (2), Stoletow (3) et Rowland (4) se sont préoccupés de déterminer les moments magnétiques, soit temporaires, soit permanents, qu'un courant d'intensité donnée développe dans un barreau placé dans l'axe d'une spirale animée par le courant. Plusieurs d'entre ces physiciens traitent aussi subsidiairement la même question pour l'acier. Quant aux phénomènes accessoires qui accompagnent l'aimantation, ils sont si nombreux et si variés qu'ils constituent une mine vraiment inépuisable, et à laquelle, malgré de nombreux travaux, on a encore à peine touché. Nous nous bornerons à citer les Mémoires qui ont le plus de rapport avec l'objet de ce travail.

Quetelet (5) a étudié l'aimantation produite dans un barreau d'acier par la friction d'un aimant. Il a établi que l'aimantation croît vers une certaine limite avec le nombre des frictions, d'après des lois précises sur lesquelles nous reviendrons par la suite. Herrmann (6) et Scholz (7), sous la direction de Frankenheim (8), ont constaté une augmentation analogue quand on approche un barreau d'acier du pôle libre ou couvert de papier d'un électro-aimant, ou quand on introduit à plusieurs reprises un barreau d'acier dans une spirale traversée par un courant.

Coulomb (9) et plus tard Lamont (10), dans leurs nombreuses études sur toutes les parties du magnétisme, ont enrichi la science d'observations sur l'influence de la trempe sur le moment de saturation de l'acier, et sur les phénomènes qui accompagnent la réunion ou la séparation des lames aimantées superposées. Villari (11), et longtemps

(1) WIEDEMANN, *Annales de Poggendorff*, t. C, CVI et CXVII; 1857-1862.

(2) DE QUINTUS ICILIUS, *Ibid.*, t. CXXI; 1864.

(3) STOLETOW, *Philosophical Magazine*; janvier 1873.

(4) ROWLAND, *Ibid.*; août 1873.

(5) QUETELET, *Annales de Chimie et de Physique*, 2<sup>e</sup> série, t. LIII.

(6) HERRMANN, *De naturali magnetismo in Chalybem inducendo quanto momento sit tempus*. Vratisl., 1865.

(7) SCHOLZ, *Quanti sit momenti tempus in magnetismo inducendo, certa quadam fluidi galvanici intensitate adhibita*. Vratisl., 1863.

(8) FRANKENHEIM, *Annales de Poggendorff*, t. CXXIII.

(9) COULOMB, *Mémoires de l'Académie*, *passim*.

(10) LAMONT, *Magnetismus*.

(11) VILLARI, *Annales de Poggendorff*; 1873.

auparavant Abria (<sup>1</sup>), ont fait quelques expériences sur la durée très-courte du phénomène de l'aimantation.

L'aimantation temporaire de l'acier, observée pour la première fois par Musschenbroek et OEpinus, a été l'objet de travaux intéressants de Poggendorff (<sup>2</sup>) et de Wiedemann (<sup>3</sup>).

Mais l'étude la plus complète que nous possédions sur les aimants d'acier se trouve dans les récents travaux de M. Jamin (<sup>4</sup>). Ces recherches, qu'il ne nous appartient pas d'apprécier ici, ouvrent aux physiciens une voie en quelque sorte toute nouvelle, et dans laquelle nous serions heureux d'avoir fait un pas.

---

## CHAPITRE I.

### MÉTHODES DE MESURE.

---

La détermination du moment magnétique d'un aimant s'opère le plus souvent à l'aide de l'une des deux méthodes indiquées et appliquées par Coulomb : la méthode de la torsion et celle des oscillations. La première méthode s'applique surtout aux barreaux; la seconde s'étend aux petites aiguilles, mais perd beaucoup de sa précision quand les aimants sont de dimension très-faible.

Divers physiciens, entre autres Wiedemann (<sup>5</sup>), ont calculé le moment magnétique d'une aiguille aimantée, à l'aide de la déviation qu'elle produit sur une aiguille aimantée très-courte, munie d'un miroir, et mobile autour d'un axe vertical. Ce procédé est particulièrement commode quand il s'agit de comparer les moments magnétiques d'une même aiguille diversement aimantée, pourvu que les moments magnétiques à comparer ne soient pas trop faibles.

---

(<sup>1</sup>) ABRIA, *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. I.

(<sup>2</sup>) POGGENDORFF, *Annales de Poggendorff*, t. XLV.

(<sup>3</sup>) WIEDEMANN, *Galvanismus*, t. II.

(<sup>4</sup>) M. JAMIN, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1873-1874.

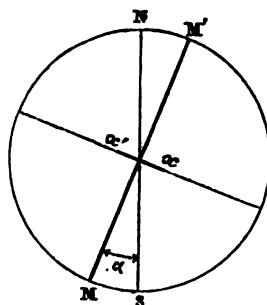
(<sup>5</sup>) WIEDEMANN, *Galvanismus*.

Dans ce cas, l'aiguille A, dont on veut déterminer le moment magnétique, se place à poste fixe dans une rainure horizontale dont la direction est sensiblement perpendiculaire au méridien magnétique. La distance du centre de l'aiguille A au centre de l'aiguille B déviée doit être assez grande par rapport à la longueur de A pour éviter qu'un faible déplacement des pôles de A, résultat d'une aimantation plus ou moins considérable, n'altère notablement les résultats. On peut choisir arbitrairement l'azimut de la ligne des centres de A et de B, et, pourvu que l'aiguille A reçoive la même position dans toutes les expériences, les déviations observées seront proportionnelles au moment qu'elle possède. Si l'aiguille est régulière, ainsi que nous le supposons, on peut la retourner bout pour bout dans sa rainure et prendre la moyenne des déviations.

J'ai employé très-fréquemment ce procédé de mesure dans l'étude de l'aimantation par les courants; mais le plus souvent, comme dans l'étude de la rupture, j'ai eu à mesurer le rapport des moments magnétiques d'aiguilles de très-petite dimension, de longueur et de diamètre différents. J'ai fait usage alors d'une disposition particulière, que je vais décrire en détail.

*Principe de la méthode.* — Concevons un support rigide mobile autour d'un axe vertical. Fixons sur ce support : 1° une aiguille horizontale dont le moment magnétique  $M$  est connu; 2° l'aiguille dont on veut

Fig. 1.



déterminer le moment magnétique  $\alpha$ . Les deux aiguilles sont placées l'une au-dessus de l'autre, de telle façon que leurs axes soient rectan-



gulaires, et à une distance suffisante pour que leur action réciproque n'altère pas la distribution du magnétisme dans chacune d'elles.

Le système ainsi formé prend, sous l'influence du magnétisme terrestre, une position d'équilibre déterminée, et telle que l'axe magnétique de l'aiguille M (*fig. 1*) fasse, avec le plan du méridien magnétique NS, un angle  $\alpha$  déterminé par l'équation

$$(1) \quad x = M \operatorname{tang} \alpha.$$

Si le moment  $x$  est assez petit par rapport à M, l'angle  $\alpha$  pourra être déterminé par la méthode optique de Poggendorff (<sup>1</sup>). A cet effet, le support des aiguilles porte un petit miroir argenté vertical, dans lequel on observe, à l'aide d'une lunette, l'image d'une règle divisée horizontale, placée au-dessous et très-près de l'objectif, et perpendiculaire à l'axe optique de la lunette.

On est libre de faire le moment M de l'aiguille directrice aussi faible qu'on voudra. Il en résulte qu'on pourra, par ce procédé, mesurer le moment magnétique d'aiguilles très-petites, comparables par leurs dimensions à des grains de limaille. J'ai pu effectuer des mesures relatives à des aiguilles de 2 millimètres de longueur et de 0<sup>mm</sup>, 2 de diamètre.

Quand on veut se borner à comparer entre eux les moments magnétiques  $x$ ,  $x'$  de plusieurs petites aiguilles, il n'est pas nécessaire de connaître le moment M de l'aiguille directrice; on a en effet, en désignant par  $\alpha$ ,  $\alpha'$  les déviations qu'elles produisent,

$$\frac{x'}{x} = \frac{\operatorname{tang} \alpha'}{\operatorname{tang} \alpha}$$

et, à cause de la petitesse des angles  $\alpha$  et  $\alpha'$ ,

$$(2) \quad \frac{x'}{x} = \frac{\operatorname{tang} \alpha'}{\operatorname{tang} \alpha} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\operatorname{tang} 2\alpha'}{\operatorname{tang} 2\alpha} = \frac{n'}{n},$$

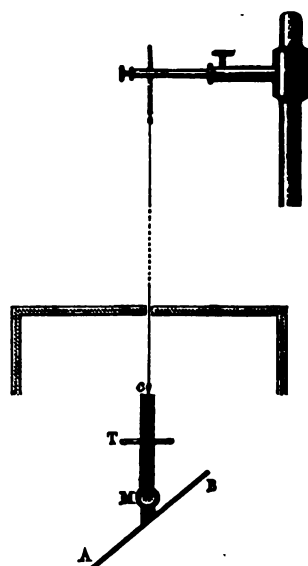
où  $n$  et  $n'$  sont les deux lectures faites sur la règle, dont le zéro est supposé dans le plan du méridien magnétique.

---

(<sup>1</sup>) POGGENDORFF, *Methode der Spiegelablesung* (*Ann. Pogg.*, t. VII, 1826); employée par Gauss (*Göttingue Gelehrte Anz.*, 1833, n<sup>o</sup> 205 à 207), à qui l'on en attribue le plus souvent l'invention.

*Appareil.* — Le support des aiguilles est un simple bâtonnet mince et léger en cire à cacheter dure et peu fusible. L'aiguille directrice AB (*fig. 2*) est collée au-dessous du bâtonnet, et un tube de verre très-étroit T traverse le bâtonnet vers sa partie supérieure, de telle sorte que son axe soit horizontal et perpendiculaire à l'axe de l'aiguille directrice. Le système est suspendu par une pince ou par un crochet de cuivre à un seul fil de cocon, et enfermé dans une boîte en bois, noircie à l'intérieur, et fermée en avant par une glace plane. Le fil de cocon passe par un trou pratiqué à la face supérieure de la boîte, et est saisi par une pince en laiton. Enfin un disque en cuivre rouge est placé au-dessous et très-près de l'aiguille directrice, dont il amortit les oscillations.

Fig. 2.



Voici les dimensions de l'un des appareils que j'ai employés :

<i>Aiguille AB</i> .....	{	Longueur, 0 <sup>m</sup> ,06;
		Diamètre, 0 <sup>mm</sup> ,2.
<i>Miroir M</i> .....		Diamètre, 0 <sup>m</sup> ,008.
<i>Tube T</i> .....	{	Longueur, 0 <sup>m</sup> ,02;
		Diamètre, 0 <sup>mm</sup> ,5.
<i>Bâtonnet</i> .....		Prisme carré de 0 <sup>m</sup> ,004 de côté et 0 <sup>m</sup> ,05 de longueur.

La construction n'offre aucune difficulté. La condition qu'on doit surtout chercher à réaliser, c'est de rendre l'axe du tube T sensiblement perpendiculaire à l'axe de l'aiguille AB. Pour cela on emploie un cercle de papier divisé en degrés; on pose au centre du cercle le bâtonnet, sous lequel on a déjà collé l'aiguille AB, et l'on fait coïncider l'axe de l'aiguille avec la ligne 0-180°. On pose ensuite sur la face supérieure du bâtonnet le tube T, dans l'intérieur duquel on a mis un fil d'acier long et roide, et l'on dirige l'axe du tube de façon que l'œil, placé sur le prolongement du bâtonnet, voie le fil d'acier se projeter sur la ligne 90°-270°. Il suffit alors d'approcher une allumette enflammée de la base du tube pour fondre légèrement la cire et la fixer. On adapte enfin un autre morceau de cire qui se termine par la pince *c*.

Quant au miroir, on le rend perpendiculaire à AB, en cherchant à placer l'image de AB sur le prolongement de sa direction.

*Installation.* — L'installation de la lunette et de la règle se fait à la manière ordinaire (1); la distance du miroir à la règle a été choisie égale à 4 mètres dans la plupart des expériences, et à 7 mètres dans quelques-unes.

Pour le réglage de l'appareil on ajoute, suivant le besoin, quelques gouttes de cire en avant ou en arrière de AB, de manière à amener l'image de la règle dans le champ. La règle est suspendue par un système de cordons et de contre-poids, de manière à pouvoir être élevée ou abaissée à volonté par un simple mouvement de la main, et sans que l'œil ait besoin de quitter l'oculaire de la lunette. Il devient ainsi très-facile, après quelques tâtonnements, d'amener le miroir M à être rigoureusement vertical, et par suite le barreau AB, perpendiculaire au miroir, est lui-même horizontal.

L'axe optique de la lunette sera normal au miroir quand l'image de l'objectif occupera le centre du champ. Quant aux autres conditions relatives à la règle, il suffit qu'elles soient remplies approximativement, et nous verrons par la suite comment on y parvient.

---

(1) Voir les écrits de Gauss et de Weber, ou bien VERDET, *Conférences de physique faites à l'École Normale*.

Il est à remarquer que, quand on introduit une aiguille dans l'axe du tube T, on déplace en général d'une très-petite quantité le centre de gravité du système suspendu; mais il est facile de voir que ce déplacement est sans influence sur les lectures. On peut en effet produire le déplacement correspondant du système suspendu par la combinaison de deux rotations: l'une autour d'un axe perpendiculaire au miroir, sans influence sur le phénomène de la réflexion; la seconde autour d'un axe horizontal parallèle au miroir, qui a pour effet d'élever ou d'abaisser la normale au miroir dans un plan vertical, c'est-à-dire d'élever ou d'abaisser l'image de la règle. Cet effet perturbateur est d'ailleurs amené à son minimum par la disposition qui consiste à disposer le miroir parallèlement à l'axe du tube dans lequel on place les aiguilles. La rotation autour de l'axe de suspension, produite par l'introduction d'une aiguille aimantée, est due uniquement à l'action terrestre, ainsi que nous l'avons supposé ci-dessus.

*Corrections et mode d'observation.* — L'axe du tube T n'est jamais bien horizontal; mais, quand on se borne à des mesures relatives (nous verrons comment on y ramène les mesures absolues), il suffit qu'il ait toujours la même inclinaison. Il faut pour cela que le poids des aiguilles qu'on introduit dans le tube T soit très-faible par rapport au poids total de l'appareil.

Nous avons supposé que les plans verticaux qui contiennent l'axe du tube et l'axe de l'aiguille directrice sont rectangulaires. En général ces deux plans font entre eux un angle  $\frac{\varpi}{2} - \beta$ ; la formule exacte qui remplacerait la formule (1) dans cette hypothèse serait

$$(1 \text{ bis}) \quad x = M \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha + \beta)}$$

ou, aux quantités près du second ordre par rapport à  $\beta$ ,

$$(3) \quad x = M \tan \alpha (1 + \beta \tan \alpha).$$

Si l'on retourne l'aiguille bout pour bout dans le tube, l'angle des deux plans considérés devient  $\frac{\varpi}{2} + \beta$ , et l'on a de même, en désignant par  $\alpha'$  la nouvelle déviation,

$$(4) \quad x = M \tan \alpha' (1 - \beta \tan \alpha'),$$

d'où, ajoutant membre à membre (3) et (4) et remarquant que  $\text{tang } \alpha - \text{tang } \alpha'$  est extrêmement petit, on a, aux quantités près du deuxième ordre,

$$(5) \quad x = M \frac{\text{tang } \alpha + \text{tang } \alpha'}{2}.$$

Il suffira donc de prendre la moyenne des deux observations pour corriger l'effet résultant de l'imperfection de l'appareil (').

Nous supposons encore, dans ce qui précède, que le méridien magnétique est invariable, ce qui n'est pas rigoureusement vrai; d'ailleurs notre appareil réalise une véritable boussole des variations, et par conséquent l'erreur qui résulte des variations de la déclinaison est une quantité appréciable dans les conditions où nous sommes placés.

Sauf le cas de variations brusques et irrégulières, on éliminera sensiblement cette cause d'erreur en faisant une troisième mesure, après avoir ramené l'aiguille dans sa première position en la retournant bout pour bout. Si les observations ont été faites à intervalles à peu près égaux, on pourra prendre la moyenne des mesures 1 et 3, et la moyenne de celle-ci et de la mesure 2 ne sera pas sensiblement affectée par la variation de la déclinaison. Dans tous les cas, l'égalité des nombres 1 et 3 sera une garantie de l'exactitude de la mesure.

Pour observer, on éteint d'abord à la main les oscillations de l'appareil, afin d'abrégier la durée de l'expérience. D'ailleurs, dès que les oscillations ont une amplitude suffisamment petite, on observe les divisions  $n_1$  et  $n_2$  de la règle correspondant au commencement et à la fin d'une oscillation, et la division  $n_3$  correspondant à la fin

de l'oscillation suivante. La moyenne  $N = \frac{\frac{n_1 + n_2}{2} + n_3}{2}$  est observée à plusieurs reprises, et la position d'équilibre se trouve ainsi déterminée avec une grande exactitude.

Le nombre  $N$  doit encore subir une correction quand la déviation est

---

(') Les deux lectures  $n$  et  $n'$  correspondant aux déviations  $\alpha$  et  $\alpha'$  doivent différer fort peu l'une de l'autre, si la règle est exactement perpendiculaire à l'axe optique de la lunette. On réalisera donc cette dernière condition en faisant pivoter la règle autour de son centre, et dans un plan horizontal, jusqu'à ce que les deux lectures  $n$  et  $n'$  obtenues avec une même aiguille directe et renversée diffèrent le moins possible l'une de l'autre.

un peu considérable, de telle sorte qu'on ne puisse pas confondre l'arc avec sa tangente. Pour opérer la réduction, on emploie une Table donnant les valeurs de  $\tan \alpha$  quand  $\tan 2\alpha$  est connu ('). Connaissant approximativement la distance de la règle au miroir, on dresse aisément un tableau donnant les valeurs réduites  $N$ , pour un grand nombre de valeurs de  $N$ . Pour les valeurs intermédiaires on prend des parties proportionnelles.

Les masses de fer, réparties à poste fixe dans le laboratoire où l'on opère, sont sans influence sur les mesures, pourvu qu'elles ne soient pas trop rapprochées de l'appareil : elles ne font que modifier l'azimut d'équilibre que nous prenons pour notre méridien magnétique.

En somme, un intervalle d'une dizaine de minutes suffit pour effectuer une bonne expérience, et le résultat de plusieurs mesures successives d'une même aiguille fournit en général des nombres égaux à  $\frac{1}{200}$  près de leur valeur. Du reste l'opération devient si simple et si commode, quand on en a pris l'habitude, qu'on préfère employer cette méthode, même dans les cas où la méthode des oscillations fournirait de bons résultats.

*Comparaison de plusieurs appareils, et mesures absolues.* — On a souvent à comparer plusieurs appareils. On y parvient en effectuant la mesure du moment d'une même aiguille à l'aide des deux appareils qu'on veut comparer. Une autre aiguille convenablement choisie, plus forte par exemple, permettra de comparer le deuxième appareil à un troisième, et ainsi de suite.

On peut d'ailleurs transformer toutes les mesures relatives en mesures absolues : il suffit de déterminer, par la méthode des oscillations, le moment magnétique d'une aiguille, et de le mesurer ensuite à l'aide de l'un des appareils comparés.

---

(') Voir une table de ce genre dans WIEDEMANN, *Galvanismus*, t. II, p. 207 (2<sup>e</sup> édition).

## CHAPITRE II.

## SUR L'AIMANTATION PAR LES COURANTS.

ARTICLE I. — *Sur les extra-courants.*

Une bobine de fils conducteurs jouit de propriétés magnétiques tant qu'elle est traversée par un courant. Pendant la période d'établissement du courant, la production de cet aimant absorbe une certaine quantité de travail, en outre de celui qui serait nécessaire pour établir le courant dans une résistance linéaire égale. Cette absorption de travail est manifestée en dehors de la bobine par l'extra-courant inverse.

Quand on interrompt le courant, la destruction de la propriété magnétique de la bobine restitue le travail absorbé par sa production. De là l'extra-courant direct, égal en quantité à l'extra-courant inverse. L'expérience enseignant que le premier est plus court en durée que le second, nous pouvons affirmer que la propriété magnétique de la bobine se perd plus vite qu'elle ne se produit.

Quand une bobine de fils conducteurs est munie d'un noyau de fer doux, les extra-courants conservent leur caractère, mais augmentent beaucoup en intensité. Cet accroissement mesure le travail absorbé par l'aimantation ou restitué par la désaimantation du fer doux. L'inégalité de durée des extra-courants nous autorise à affirmer que la désaimantation du fer doux est plus rapide que l'aimantation <sup>(1)</sup>.

L'analogie a amené les physiciens à considérer la bobine, qui donne naissance aux extra-courants, comme le siège de forces électromotrices temporaires, de même sens que le courant principal, ou de sens contraire; mais cette analogie n'autorise pas à identifier en tous points

---

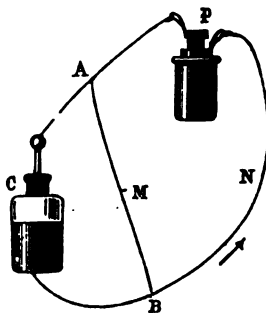
(<sup>1</sup>) VILLARI (*Annales de Poggendorff*, 1873) a déterminé directement le temps que le flint, substance diamagnétique, met à acquérir ou à perdre son pouvoir rotatoire magnétique, corrélatif de son aimantation. Il a trouvé que la désaimantation est plus rapide que l'aimantation, et assigne à celle-ci une durée de 0",0024 (voir *Journal de Physique*, t. II, p. 422). Ce travail est la seule détermination expérimentale que je connaisse, relativement à la durée de l'aimantation.

l'intérieur d'une bobine à celui d'un élément de pile, et par suite à considérer les extra-courants comme ayant les mêmes effets au sein de la bobine et dans le reste du circuit. Nous verrons par la suite que les extra-courants sont sans effet magnétique au sein de la bobine dont ils émanent.

Un condensateur C (*fig. 3*) placé dans un circuit voltaïque sur une dérivation est, comme une bobine, le siège de forces électromotrices temporaires, lors de l'ouverture ou de la fermeture du circuit. Nous n'examinerons que les deux cas suivants :

1° Le condensateur C est placé sur une dérivation sans résistance, sur laquelle on pratique les interruptions. Les points de bifurcation A et B sont au même potentiel quand le courant passe, puisque la dérivation est sans résistance, et par suite le condensateur n'est point chargé. Quand le courant est interrompu, la différence du potentiel en A et B devient égale à la force électromotrice de la pile P. Ainsi le

Fig. 3.



condensateur se décharge pendant la période d'établissement du courant et se charge lors de l'interruption, d'où résultent dans le circuit principal BNPA un extra-courant inverse et un extra-courant direct.

2° Le condensateur C est placé sur une dérivation de résistance assez grande pour que celle du reste du circuit, y compris la pile, soit négligeable. L'interruption est pratiquée en N en dehors de la dérivation. Dans ce cas, les points de bifurcation sont au même potentiel quand le courant est interrompu; mais, quand il passe, la différence de leurs potentiels est sensiblement égale à la force électromotrice. Les



extra-courants se produisent dans la dérivation et avec le signe qui leur convient (inverses à la fermeture, directs à l'ouverture du circuit).

Nous devons ajouter qu'au point de vue où nous nous plaçons une bobine très-faible équivaut à un conducteur de capacité énorme.

## ARTICLE II. — *Sur l'aimantation de l'acier.*

Une aiguille d'acier récemment trempée est transportée de l'infini au sein d'une spirale animée par un courant, puis extraite de la spirale et transportée à l'infini dans le sens opposé. L'aiguille d'acier est attirée dans la spirale, et, pendant l'introduction, le travail absorbé par l'aimantation de l'acier s'ajoute au travail des forces attractives développées entre la spirale et l'aiguille. Ces deux effets de même sens produisent dans le fil, extérieurement à la bobine, un courant induit de sens contraire au courant principal. Quand on retire l'aiguille de la bobine, le travail restitué par la perte de l'aimantation temporaire s'ajoute au travail négatif des attractions, d'où courant induit direct extérieurement à la bobine (1).

Les considérations développées dans l'Article précédent pour les extra-courants s'appliquent aussi aux courants induits. Il est probable que ces courants sont sans effet magnétique dans la bobine dont ils émanent. Dans tous les cas, si l'on introduit ou si l'on extrait l'aiguille très-lentement, l'intensité des courants induits est très-faible, et nous sommes autorisés, tout au moins dans ce cas, à négliger leur effet magnétique au sein de la bobine. On est donc fondé à admettre que l'aimantation emportée par une aiguille, qu'on passe une fois à la spirale, est due à la seule action du courant principal.

I. Le circuit ne comprend qu'une pile à courant constant, et la bobine dans laquelle on aimante.

1° Si l'aiguille est introduite et extraite lentement, et qu'on mesure

---

(1) Ce courant direct est égal en quantité au courant inverse; d'où cette proposition : Le travail absorbé par la production de l'aimantation permanente est égal à l'excédant du travail des forces attractives, pendant l'extraction de l'aimant hors de la spirale, sur le travail des mêmes forces pendant l'introduction. L'aimantation permanente a donc une origine mécanique et n'emprunte rien au courant.

le moment magnétique permanent qu'elle a emporté, on reconnaît que la répétition du passage accroît ce moment résiduel. Il tend, par des passages répétés, vers une limite A, et le moment magnétique  $\gamma$  au bout de  $x$  passages est assez bien représenté par la formule empirique

$$(1) \quad \gamma = A - \frac{B}{x},$$

où  $A - B$  représente le moment magnétique résiduel après le premier passage. On jugera du degré d'exactitude de la formule par les exemples suivants :

TABLEAU I. — *Aiguille de 2 millimètres de diamètre, aimantée par un élément Grove.*

NOMBRE des passages à la spirale.	MOMENT MAGNÉTIQUE		DIFFÉRENCE.
	observé.	calculé.	
1	51,46	51,46	0,00
2	54,55	54,62	- 0,07
3	55,43	55,68	- 0,15
4	56,10	56,20	- 0,10
5	55,95	56,51	- 0,56
10	56,48	57,15	- 0,67
20	57,68	57,47	+ 0,21
30	57,92	57,57	+ 0,35
50	57,75	57,68	+ 0,07

A = 57,78, B = 6,32.

TABLEAU II. — *Aiguille de 1<sup>mm</sup>,3 de diamètre, aimantée par un élément Bunsen.*

NOMBRE des passages à la spirale.	MOMENT MAGNÉTIQUE		DIFFÉRENCE.
	observé.	calculé.	
1	37,50	37,50	0,00
2	39,37	39,51	- 0,14
3	39,99	40,18	- 0,19
4	40,47	40,52	- 0,05
8	41,09	41,01	+ 0,08
16	41,52	41,27	+ 0,25

A = 41,52, B = 4,02.

Le curieux accroissement dont il est ici question a été déjà observé par Herrmann et Scholz (\*). Ces physiciens confondent à tort, dans leurs recherches, l'effet d'une spirale magnétisante et celui d'un aimant en fer à cheval, contre les pôles duquel ils appliquent l'aiguille à aimanter. Dans le premier cas, en effet, l'aiguille, si elle est assez mince, peut être considérée comme placée dans un champ magnétique d'intensité constante, ce qui n'a certainement pas lieu dans le second cas; et, comme il est impossible de placer l'aiguille rigoureusement de la même manière dans un grand nombre d'expériences successives, la loi de l'accroissement se trouve masquée par un phénomène d'espèce différente. Aussi les auteurs n'ont-ils pu trouver de formule empirique propre à représenter les résultats de leurs expériences; mais, si l'on se borne aux nombres obtenus au moyen de la spirale magnétisante, on verra, par le tableau suivant, qu'ils concordent aussi bien que possible avec notre formule empirique (2) :

(\*) HERRMANN et SCHOLZ, *loco citato*.

(2) Les auteurs n'indiquent pas quelle est la limite des erreurs d'expérience dans leur procédé de mesure; mais il est certain qu'elles sont supérieures aux plus grandes différences de la colonne des observations et de celle du calcul.

A l'exception des trois expériences contenues dans ce tableau, les auteurs se bornent à

TABLEAU III.

NOMBRE des passages	PREMIÈRE AIGUILLE		DEUXIÈME AIGUILLE		TROISIÈME AIGUILLE	
	observé.	calculé.	observé.	calculé.	observé.	calculé.
1	8,39	8,39	7,07	7,07	8,88	8,88
2	9,34	9,34	8,17	8,17	9,76	9,76
3	9,66	9,66	8,84	8,54	10,08	9,99
4	9,71	9,82	8,73	8,72	10,43	10,24
5	9,90	9,91	9,15	8,83	10,27	10,29
6	....	....	....	....	10,31	10,31
$\infty$	10,15	10,29	9,32	9,27	11,03	10,64

L'accroissement du moment magnétique par la répétition des passages est indépendant de la durée de l'immersion, ainsi qu'Herrmann et Scholz l'avaient reconnu; il est essentiellement lié à l'intermittence de l'action du courant. Il faut donc admettre, puisque les courants induits sont eux-mêmes sans effet sensible, que l'équilibre magnétique qui succède à l'action des courants modifie la distribution du magnétisme dans un sens tel, qu'une deuxième application de la même force, agissant dans les mêmes conditions, peut ajouter au magnétisme total et résiduel (<sup>1</sup>).

2° Trois autres procédés peuvent être employés pour aimanter une aiguille d'acier dans une bobine :

l'observation des moments magnétiques correspondant aux passages 1, 2 et  $\infty$ . L'application de la formule empirique fournit le troisième nombre au moyen des deux premiers avec une approximation suffisante, chaque fois que l'aimantation a été obtenue par la spirale. Dans le cas contraire, le troisième nombre calculé est très-notablement inférieur au nombre observé.

Les auteurs trouvent que le degré de trempe, la longueur des aiguilles et la durée des immersions sont sans influence sur les résultats.

(<sup>1</sup>) On doit rapprocher le fait que nous signalons du fait connu que l'aimantation permanente, produite par un courant A, devient plus considérable quand l'aiguille a été soumise, après son aimantation, à l'action d'un courant B plus faible et de sens contraire. Si l'on fait tendre B vers 0, le phénomène persiste encore, et cela n'a rien de surprenant puisqu'une désaimantation partielle (correspondant à la perte du magnétisme temporaire) est la conséquence de la cessation du courant A.

a. On introduit l'aiguille, on établit le courant, et l'on retire l'aiguille lentement (établissement).

b. On introduit lentement l'aiguille, le courant passant; on interrompt le courant, et l'on retire l'aiguille (interruption).

c. On introduit l'aiguille, on établit et l'on interrompt le courant; on retire l'aiguille (décharge disruptive).

La répétition de chacun de ces procédés fournit une augmentation du magnétisme de l'aiguille, et, pourvu que toutes les opérations effectuées soient de même espèce et faites dans des conditions identiques, les résultats de l'expérience sont bien représentés par une formule hyperbolique telle que la formule (1); la limite A paraît être la même pour les passages et les interruptions, mais plus faible pour les établissements :

TABLEAU IV. — *Aiguille de 2 millimètres de diamètre, aimantée par un élément Grove.*

NOMBRE des établissements.	MOMENT MAGNÉTIQUE		DIFFÉRENCE.
	observé.	calculé.	
1	50,56	50,56	0,00
2	52,81	52,81	0,00
3	53,50	53,56	- 0,06
4	53,83	53,93	- 0,10
5	54,25	54,16	+ 0,09
6	54,18	54,31	- 0,13
10	54,75	54,61	+ 0,14

A = 55,06, B = 4,50.

Après le dixième passage, des interruptions ayant été produites par mégarde, le moment de l'aiguille s'est élevé subitement à 55,96 et n'a pas dépassé cette limite par cinquante établissements. Dix passages à la spirale ont alors élevé le moment magnétique à 57,56, et vingt nouveaux passages à 57,88.

TABLEAU V. — *Aiguille de 2 millimètres de diamètre, aimantée par un élément Grove.*

NOMBRE des interruptions.	MOMENT MAGNÉTIQUE		DIFFÉRENCE.
	observé.	calculé.	
1	53,15	53,15	0,00
2	55,93	55,93	0,00
32	58,73	58,55	+ 0,18

Trente passages à la spirale n'ont pas élevé notablement le moment magnétique de cette aiguille (<sup>1</sup>).

Les résultats obtenus par les décharges disruptives sont moins réguliers que les précédents, quoique la formule empirique les représente encore. Les irrégularités tiennent sans doute à la difficulté d'opérer ces décharges dans des conditions parfaitement identiques.

Les expériences qui précèdent établissent déjà que les extra-courants sont sans action magnétique au sein de la bobine qui les produit. S'il en était autrement, l'interruption serait un procédé d'aimantation plus efficace que le passage à la spirale. Or on n'a jamais observé d'augmentation du moment magnétique, quand on a soumis à des interruptions répétées du circuit les aiguilles aimantées par un grand nombre de passages.

## II. Le circuit comprend, outre la pile, deux bobines P et Q.

Les phénomènes observés pour les passages lents sont les mêmes que dans le cas d'une seule bobine; mais l'effet des extra-courants complique les phénomènes de l'interruption. Supposons la bobine P beaucoup plus puissante que Q. Si les deux bobines sont placées l'une à la suite de l'autre, deux aiguilles *p* et *q* aimantées chacune dans la bobine correspondante, à la limite relative aux passages, acquièrent un moment

(<sup>1</sup>) Les deux expériences qui précèdent ont été faites immédiatement après celles du tableau I, avec des aiguilles presque identiques, et au sein de la même spirale.

Les établissements et les interruptions s'effectuent au moyen d'une coupelle à mercure dans laquelle plongent les extrémités des fils conducteurs.

magnétique plus considérable par les interruptions; mais l'augmentation relative est beaucoup plus forte dans la bobine la plus faible. Exemple :

TABLEAU VI. — Aiguilles de 142 millimètres de long et de 2 millimètres de diamètre.

AIGUILLE <i>p</i> .	AIGUILLE <i>q</i> .
Premier passage..... 17,51	Premier passage..... 3,22
Deuxième passage..... 18,21	Deuxième passage..... 3,63
Vingtième passage..... 18,70	Vingtième passage..... 4,15
21 interruptions..... 18,91	21 interruptions..... 5,61

L'aimantation limite correspondant aux passages, d'après les deux premières observations de chaque colonne, serait, d'après notre formule empirique, 18,61 pour l'aiguille *p* et 4,04 pour l'aiguille *q*. L'augmentation du moment magnétique produite par les interruptions est, pour l'aiguille *p*, 0,21 en valeur absolue, et environ  $\frac{1}{34}$  en valeur relative; pour l'aiguille *q*, 1,46 et  $\frac{1}{3}$ .

Ainsi, conformément aux observations présentées plus haut, l'extra-courant provenant de P est sensible dans Q, celui de Q dans P; mais l'effet magnétique de chacun de ces extra-courants est nul dans la bobine d'où il émane.

Si les bobines P et Q sont placées en dérivation l'une par rapport à l'autre, l'extra-courant direct de chaque bobine traverse l'autre en sens contraire du courant de la pile. Dans ce cas, l'expérience montre que les interruptions provoquent une diminution du moment magnétique, et les établissements une augmentation, ainsi qu'on pouvait le prévoir d'après ce qui précède.

### III. Le circuit comprend une bobine et un condensateur.

Ce cas est réalisé dans la bobine de Ruhmkorff de la manière suivante : le condensateur C est établi sur une dérivation sans résistance, sur laquelle on pratique les interruptions (*fig. 4*). On peut aussi placer la bobine B sur la dérivation, et produire l'interruption en un point du

circuit principal (*fig. 5*). Dans chacune de ces dispositions le condensateur forme avec la bobine un circuit fermé lors de l'interruption, soit directement, soit par l'intermédiaire de la pile. Il n'en serait pas de même si l'interruption était pratiquée sur le circuit principal avec la disposition de la *fig. 4* ou sur la dérivation dans le cas de la *fig. 5*.

Fig. 4.

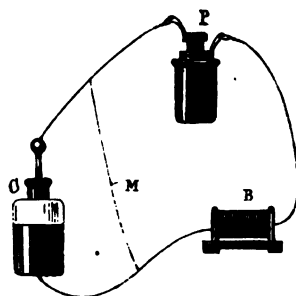
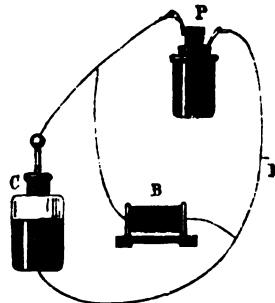


Fig. 5.



Ces deux dernières dispositions sont vaines, ainsi que l'a montré l'expérience; mais, si l'on emploie l'une des premières, on observe que l'interruption du circuit produit une diminution du moment magnétique des aiguilles aimantées par des passages.

L'effet observé ne peut être attribué aux extra-courants du condensateur, car ceux-ci agissent en sens contraire du résultat obtenu; le condensateur employé (') se comporte, au point de vue de la production des extra-courants, comme une bobine de puissance négligeable.

Mais on doit remarquer que l'intensité de l'extra-courant de la bobine est supérieure à celle du courant principal. L'extra-courant direct charge fortement le condensateur qui, par suite, doit se décharger après que l'extra-courant a cessé. La bobine reçoit ainsi *par réflexion* l'extra-courant qu'elle produit, et celui-ci la traverse en sens contraire du courant principal. L'effet réflexe, pour un condensateur donné, est d'autant plus puissant que la bobine employée est elle-même plus forte, et l'expérience montre qu'avec une bobine très-faible l'effet de l'interruption disparaît.

(') Celui d'une bobine de Ruhmkorff dont la distance explosive est de 3 centimètres.



IV. *Aimantation par les courants induits.* — On n'a étudié que le cas suivant :

Quand le circuit comprend deux bobines, l'introduction lente d'un noyau de fer doux dans l'une d'elles ou son extraction est sans effet sur le magnétisme d'une aiguille placée dans l'autre bobine.

Mais si l'on introduit lentement le noyau de fer doux et qu'on le retire brusquement, le courant induit direct augmente le moment magnétique de l'aiguille placée dans la seconde bobine. La répétition de la même opération fait tendre le moment de l'aiguille vers une limite dont il se rapproche très-rapidement. La formule

$$(2) \quad \gamma = A + B(1 - e^{-\alpha x}),$$

où A, B et  $\alpha$  sont des constantes, paraît très-bien convenir à la représentation du moment magnétique  $\gamma$  après  $x$  passages. Le tableau suivant permettra d'apprécier le degré d'exactitude de la formule :

TABLEAU VII.

NOMBRE des courants induits directs.	MOMENT MAGNÉTIQUE		DIFFÉRENCE.
	observé.	calculé.	
0	71,55	71,55	0,00
1	75,30	75,55	- 0,25
2	78,55	78,53	+ 0,03
3	80,50	79,20	+ 0,70
4	80,80	80,03	+ 0,77
8	81,05	80,92	+ 0,13
16	81,05	81,03	+ 0,02

A = 71,55, B = 9,50,  $\log e^{-\alpha} = \bar{1},7626391$ .

Les différences entre le calcul et l'observation sont un peu plus considérables dans ce tableau que dans les précédents; mais il faut tenir compte de la difficulté de retirer le fer doux avec la main d'une manière toujours identique, pour produire des courants induits de même in-

tensité. Eu égard à cette considération, l'accord est satisfaisant. Au contraire, les formules hyperboliques ne se prêtent pas du tout à représenter les expériences de ce genre : elles correspondent à un accroissement bien plus lent, sensible encore après vingt opérations de la même espèce, tandis qu'ici l'accroissement cesse d'être appréciable après sept ou huit opérations.

Quetelet représente par une formule de la forme

$$(3) \quad y = B(1 - e^{-ax})$$

le moment magnétique acquis par un barreau d'acier, aimanté par une, deux, ...,  $x$  frictions. Cette formule représente aussi, comme on vient de le voir, l'accroissement du moment magnétique d'une aiguille opéré par des courants induits égaux. Elle ne convient pas pour l'accroissement produit par les intermittences d'un même courant continu, agissant sur une aiguille vierge de toute aimantation antérieure. Une théorie complète du magnétisme devrait rendre compte de cette différence.

Pour éviter les intermittences du courant principal dans l'expérience qui précède, on a dû placer l'aiguille à poste fixe dans sa spirale, et mesurer son moment magnétique *total* à l'aide de la méthode des déviations. Les variations observées se rapportent au magnétisme permanent, qui peut seul être altéré par le passage des courants induits.

On a reconnu que les courants induits, produits par l'arrachement du contact d'un électro-aimant placé dans le circuit, produisent des effets absolument analogues.

V. *Effets des piles dont le courant n'est pas constant.* — Si le courant de la pile employée n'est pas rigoureusement constant, l'effet de la polarisation des électrodes modifie profondément les phénomènes. Les résultats qui suivent ont été obtenus avec une pile au bichromate de potasse montée depuis plusieurs jours.

Si le circuit ne comprend, en dehors de la pile, qu'une seule bobine, dans laquelle on introduit une aiguille aimantée par un grand nombre de passages, l'établissement du courant accroît le moment magnétique d'une quantité plus ou moins considérable, souvent énorme : le courant possède donc, au moment de sa fermeture, une intensité beaucoup plus grande que celle qu'il conserve un instant après. Quand la

résistance de la spirale augmente, la polarisation est moins forte, et par suite l'effet propre de l'établissement tend à disparaître.

Quant aux interruptions, elles n'ont pas d'effet bien marqué sur les aiguilles, tout au moins tant que la résistance de la bobine n'est pas très-forte; mais dans ce dernier cas, si l'on introduit dans la bobine une aiguille fortement aimantée, avec son pôle austral à gauche du courant principal, on obtient toujours, par l'interruption, une diminution du moment magnétique de l'aiguille. Je pense que cet effet bizarre doit être expliqué ainsi : l'extra-courant direct de la bobine, sans effet magnétique dans son intérieur, augmente momentanément la polarisation de la pile, d'où courant de dépolarisation très-sensible à la suite de l'interruption; ce courant désaimante partiellement les aiguilles. On aurait donc affaire ici à un effet réflexe, analogue à celui du condensateur de la bobine de Ruhmkorff, quoique incomparablement plus faible.

Si le circuit contient deux bobines P et Q, l'une très-forte, l'autre très-faible, l'extra-courant direct de P et l'action réflexe de la pile se succèdent dans Q et produisent un effet très-singulier. L'interruption du circuit augmente beaucoup le moment magnétique d'une aiguille aimantée dans Q par un grand nombre de passages; mais la même opération diminue le moment magnétique d'une aiguille fortement aimantée, placée dans Q avec son pôle austral à gauche du courant principal. Cet effet est beaucoup plus prononcé quand P contient un noyau de fer doux. Exemple :

	Moment.
Aiguille aimantée dans Q par des passages.....	1,16
Interruptions .....	11,10
Aiguille fortement aimantée .....	36,28
Interruptions .....	35,40

Ainsi un même courant instantané complexe aimante les aiguilles non aimantées, et désaimante partiellement les aiguilles fortement aimantées. On reproduit aisément le même fait par l'alternative d'un courant continu direct et d'un courant inverse plus faible.

On voit que, dans certains cas, les aiguilles d'acier aimantées et non aimantées permettent de faire l'analyse d'un courant instantané complexe, et d'y reconnaître un changement de signe.

## CHAPITRE III.

## SUR LA RUPTURE DES AIGUILLES AIMANTÉES.

On sait depuis bien longtemps que, quand on brise un aimant, les fragments obtenus jouissent des propriétés magnétiques; mais je ne crois pas qu'on se soit préoccupé jusqu'ici de déterminer les lois précises qui président à la formation des aimants de rupture.

Dans l'acte de la rupture d'un aimant, nous distinguerons le fait de la séparation des parties [avec ses conséquences, telles qu'elles s'offriraient dans le cas de la simple disjonction des mêmes parties juxtaposées (1), non soudées dans l'aimant primitif] du fait mécanique de la rupture. Je me suis proposé, en premier lieu, de déterminer si ce fait mécanique modifie en quelque manière l'état magnétique des fragments. Voici les expériences que j'ai faites à ce sujet.

ARTICLE I. — *Effet propre de la rupture.*

On obtient une aiguille aimantée régulière en faisant passer une aiguille d'acier récemment trempée à travers une spirale animée par un courant.

Si l'on vient à rompre cette aiguille par le milieu, après son aimantation, deux cas peuvent se présenter :

1° Si l'aiguille est trempée assez dur pour se rompre entre les doigts comme du verre, les deux moitiés sont des aimants de même moment magnétique, comme on devait s'y attendre par raison de symétrie.

2° Si l'aiguille est trempée doux, de façon à se fléchir plusieurs fois en sens contraire avant de rompre, les deux moitiés possèdent des moments magnétiques inégaux, d'une manière en apparence arbitraire.

Il faut d'abord se rendre compte de cette différence.

---

(1) Quand on réunit deux morceaux d'acier par deux faces planes égales, les parties en regard sont en réalité séparées par une lame d'air dont l'épaisseur est très-grande par rapport à la distance de deux molécules magnétiques. Il s'agit ici de la juxtaposition parfaite, telle qu'elle a lieu entre les diverses parties d'un solide cohérent.

Pour cela, je prends une aiguille faiblement trempée et régulière; je la saisis par le milieu entre deux lames de plomb, de manière que l'une des moitiés demeure immobile pendant la rupture, tandis que l'autre moitié, saisie à la main, est soumise à des flexions de sens contraire jusqu'à ce que la rupture ait lieu. On constate que la moitié de l'aiguille soumise aux flexions possède un moment magnétique inférieur à celui de la moitié pincée, et d'autant plus que la rupture a été plus pénible.

Si l'on saisit une aiguille faiblement trempée de part et d'autre, et très-près de son milieu, à l'aide de deux pinces, de manière à n'intéresser aux flexions qui précèdent la rupture qu'une tranche très-mince de part et d'autre du plan de séparation, les deux moitiés de l'aiguille présentent des moments magnétiques très-voisins de l'égalité. Ainsi la différence constatée plus haut est due aux flexions qui précèdent la rupture des aiguilles trempées doux. On sait d'ailleurs depuis longtemps que les actions mécaniques de ce genre, quand elles *suivent* l'aimantation, diminuent le moment magnétique des aiguilles qui y sont soumises.

Dans le cas où les aiguilles se rompent comme du verre, l'acte mécanique de la rupture n'intéresse de part et d'autre du plan de séparation qu'une couche de molécules infiniment mince; on doit présumer que l'effet d'une action mécanique de ce genre est un infiniment petit. J'ai constaté que le moment magnétique d'un fragment ne dépend, dans le cas de la trempe dure, ni du nombre ni du mode des ruptures par lesquelles il a été détaché de l'aiguille mère, ce qui serait bien difficile à expliquer si l'acte de la rupture avait une influence propre appréciable. En un mot, dans aucune de mes expériences je n'ai eu l'occasion de constater un affaiblissement du moment magnétique qui pût être attribué à cette influence. D'ailleurs des preuves plus concluantes encore se présenteront dans le courant de ce Chapitre.

On s'est astreint, pour toutes les expériences qui suivent, à n'employer que des aiguilles de trempe dure et à peu près invariable. Elles ont été obtenues en chauffant dans la flamme du gaz, alimentée d'air par un soufflet, un fil d'acier rectiligne plus long que l'aiguille à obtenir. On le plongeait au rouge vif dans une terrine remplie d'eau, puis on détachait les extrémités du fil de manière à ne conserver que la

portion moyenne, dont la trempe est très-régulière. Les aiguilles obtenues avaient au plus 150 millimètres de longueur.

ARTICLE II. — *Rupture d'aiguilles cylindriques saturées, opérée perpendiculairement à l'axe.*

Dans son *Essai sur l'application de l'Analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme*, Green (1) a déduit de l'hypothèse de la force coercitive la formule suivante, qui donne le moment magnétique  $\gamma$  d'une aiguille de longueur  $x$  aimantée à saturation :

$$(1) \quad \gamma = Aa^2 \left( x - \frac{2}{\beta} \frac{e^{\beta \frac{x}{2}} - e^{-\beta \frac{x}{2}}}{e^{\beta \frac{x}{2}} + e^{-\beta \frac{x}{2}}} \right).$$

Dans cette formule  $A$  est une constante dépendant seulement de la nature de l'acier, et  $\beta$  une quantité de la forme  $\frac{B}{a}$ ,  $B$  étant une deuxième constante. Le diamètre des aiguilles est représenté par  $a$ .

Cette formule est conforme aux résultats des expériences de Coulomb (2). Je me suis proposé de la vérifier pour le cas particulier d'aiguilles de très-faible diamètre et de très-petite longueur.

1° *Aiguilles de même diamètre.* — Les aiguilles que l'on compare doivent recevoir une trempe identique. La rupture d'une aiguille cylindrique saturée, bien régulière, fournit des aiguilles saturées dans cette condition. Elles sont saturées : car l'aiguille primitive possède en chacun de ses points un magnétisme supérieur à celui qui correspond à la saturation du fragment auquel elle appartient après la rupture. La rupture elle-même n'a d'autre effet, d'après ce qui précède, que celui

(1) GREEN, *Essai sur l'application de l'Analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme*, Nottingham, 1828. Beer démontre (BEER, *Elektrostatik*) que la formule de Green s'applique à une aiguille placée dans une spirale magnétisante, pourvu que la dimension des spires soit large par rapport au diamètre de l'aiguille. Dans ce cas,  $A$  est proportionnel à la force magnétisante  $f$ .

(2) COULOMB, *Détermination des forces qui ramènent différentes aiguilles aimantées à leur méridien magnétique* (*Mémoires de l'Institut*, t. III).

qui résulterait de la séparation des parties exactement juxtaposées. Enfin la trempe est aussi identique que possible ; on verra même que la mise en œuvre des résultats élimine l'effet des petites différences de trempe locales qu'on ne peut éviter entièrement.

L'aiguille mère est aimantée à saturation, par 4 éléments Bunsen au moins, dans une spirale de 25 centimètres de longueur, très-régulière, et formée de trois couches de fil superposées. Pour faire une expérience, on mesure la longueur et le moment magnétique de l'aiguille entière. On enlève ensuite les deux bouts par une rupture pratiquée de part et d'autre à  $3\frac{1}{2}$  ou 4 centimètres des extrémités, et l'on réserve les fragments extrêmes. On mesure ensuite la longueur du fragment moyen et son moment magnétique, et par des ruptures successives, accompagnées chaque fois des deux mesures, on ramène ce fragment à une longueur de 1 à 2 millimètres. On termine en mesurant la longueur et le moment magnétique des bouts entiers, et successivement réduits à des longueurs plus faibles.

Il est rare que l'on puisse accomplir toutes les mesures avec un même appareil ; alors on en emploie deux : l'un moins sensible pour les grandes longueurs ; l'autre plus sensible pour les plus faibles. Le rapport des deux appareils est déterminé avec le plus grand soin, par un certain nombre de mesures communes.

Afin de s'affranchir de toutes les irrégularités accidentelles, on représente les résultats de l'expérience par une courbe, en prenant pour abscisses les longueurs  $x$  des aiguilles, et pour ordonnées les moments magnétiques correspondants. Cette courbe est tracée avec un soin extrême au moyen des mesures faites sur les fragments moyens de l'aiguille mère. Si cette aiguille est saturée, les points figuratifs des fragments extrêmes et de l'aiguille entière doivent se placer d'eux-mêmes sur la courbe. L'expérience sera rejetée si cette condition n'est pas satisfaite.

L'expérience montre que divers fragments d'une même aiguille rompue avant l'aimantation, aimantés séparément à saturation, se placent d'eux-mêmes sur la courbe tracée au moyen de la rupture du plus long d'entre eux, par exemple. Cette expérience importante établit que l'effet propre de la rupture est bien réellement nul dans le cas où nous sommes placés.

L'équation (1) représente une courbe tangente à l'axe des  $x$  à l'origine et asymptote à la droite

$$(2) \quad y = A a^x \left( x - \frac{2}{\beta} \right).$$

Les courbes représentatives de l'expérience présentent les mêmes caractères généraux. Pour opérer la comparaison, on détermine avec le plus grand soin l'asymptote de la courbe expérimentale. Par le fait, à partir d'une longueur de 10 à 40 centimètres suivant le diamètre, les points figuratifs des aiguilles tombent rigoureusement en ligne droite à des quantités près plus petites que la limite des erreurs d'expérience : l'asymptote est donc parfaitement déterminée. Soit D son abscisse à l'origine, C son coefficient angulaire ; l'équation peut se mettre sous la forme

$$(1 \text{ bis}) \quad y = C \left( x - D \frac{e^{\frac{1}{b}x} - e^{-\frac{1}{b}x}}{e^{\frac{1}{b}x} + e^{-\frac{1}{b}x}} \right).$$

Cette formule nous a servi à calculer le moment magnétique des aiguilles courtes ; le moment réel se détermine directement sur la courbe expérimentale.

C'est ainsi qu'ont été formés les tableaux suivants. La première colonne contient la longueur des aiguilles ; la deuxième, le moment magnétique observé, évalué en unités arbitraires ; la troisième le moment calculé par la formule (1 bis) ; les deux dernières l'excès absolu et relatif du moment observé sur le moment calculé.

Les expériences ont porté sur des aiguilles de 0<sup>mm</sup>,175, 0<sup>mm</sup>,282, 0<sup>mm</sup>,368 et 0<sup>mm</sup>,551. Nous nous bornerons aux résultats fournis par les trois dernières ; la courbe représentative de la première est trop voisine d'une ligne droite, pour toutes les longueurs supérieures à 2 millimètres, pour qu'on puisse tirer des conclusions certaines relativement à la partie courbe qui avoisine l'origine.



TABEAU I.

$$d = 0^{\text{mm}},551, \quad C = \frac{275,4}{16}, \quad D = 5,25.$$

$l$	M		$\delta$	$\frac{\delta}{M}$
	observé.	calculé.		
1 <sup>mm</sup>	0,50	0,206	+ 0,294	0,588
2	1,88	1,575	+ 0,305	0,162
3	5,60	5,323	+ 0,277	0,049
4	12,00	10,817	+ 1,183	0,098
5	20,00	19,113	+ 0,887	0,044
6	30,00	29,593	+ 0,407	0,013
7	42,00	41,864	+ 0,136	0,003
8	55,50	55,336	+ 0,224	0,002
9	70,20	70,224	- 0,024	0,000
10	85,60	85,627	- 0,027	0,000

TABEAU II.

$$d = 0^{\text{mm}},368, \quad C = \frac{93,25}{12,40}, \quad D = 3,6.$$

$l$	M		$\delta$	$\frac{\delta}{M}$
	observé.	calculé.		
1 <sup>mm</sup>	0,30	0,187	+ 0,113	0,376
2	1,50	1,378	+ 0,122	0,081
3	3,85	3,101	+ 0,749	0,194
4	8,50	8,371	+ 0,124	0,015
5	14,00	13,698	+ 0,302	0,022
6	20,00	19,994	+ 0,286	0,014
8	33,85	33,717	+ 0,133	0,004
10	48,50	48,336	+ 0,114	0,002

TABLEAU III.

$$d = 0^{\text{mm}}, 282, \quad C = \frac{85}{20,70}, \quad D = 2,45.$$

$l$	M		$\delta$	$\frac{\delta}{M}$
	observé.	calculé.		
2 <sup>mm</sup>	1,6	1,442	+ 0,157	0,098
4	7,5	2,107	+ 0,393	0,052
6	15,0	14,726	+ 0,273	0,018

Au delà de 10 millimètres pour l'aiguille la plus épaisse et de 6 millimètres pour la plus mince, les points figuratifs se confondent presque, théoriquement et pratiquement, avec l'asymptote.

L'accord du calcul et de l'expérience est très-remarquable pour les aiguilles dont la longueur n'est pas trop petite par rapport à leur diamètre. Il est à remarquer que c'est pour ce cas seulement que Green a établi la formule qu'il s'agit de vérifier. Pour les aiguilles extrêmement courtes, les nombres observés sont invariablement dans toutes les expériences, plus grands que les nombres calculés. Les différences absolues sont, il est vrai, très-petites, mais supérieures à la limite des erreurs d'expérience, et d'autant plus que le diamètre des aiguilles est plus considérable. Cependant elles ne sont pas assez grandes pour permettre de rechercher empiriquement la forme du terme correctif qu'il faudrait joindre à la formule pour la rendre complètement exacte.

2° *Aiguilles de diamètre différent.* — Pour des aiguilles de diamètre différent, la formule de Green comporte d'autres vérifications. Le coefficient angulaire C de l'asymptote doit être proportionnel au carré du diamètre des aiguilles, et l'abscisse à l'origine D proportionnelle à leur diamètre.

Il est facile d'attribuer un sens physique défini aux quantités C et D.

Considérons deux aiguilles de même diamètre, assez longues pour que leurs points figuratifs se placent sensiblement sur l'asymptote. Leurs moments magnétiques  $y$  et  $y'$  sont représentés par les ordonnées correspondantes de l'asymptote, c'est-à-dire que l'on a

$$(3) \quad \begin{cases} y = C(x - D), \\ y' = C(x' - D). \end{cases}$$

D'autre part, on sait, d'après Coulomb, que dans les aiguilles longues la distance des pôles aux extrémités est constante, quelle que soit la longueur. Soit  $P$  cette distance et  $\mu$  la quantité de magnétisme de chaque pôle (constante aussi), on a

$$(4) \quad \begin{cases} y = \mu(x - 2P), \\ y' = \mu(x' - 2P). \end{cases}$$

Les systèmes (3) et (4) sont incompatibles, à moins qu'on ait à la fois  $C = \mu$ ,  $D = 2P$ . Ainsi la demi-abscisse, à l'origine de l'asymptote, est égale à la distance du pôle de l'aiguille à l'extrémité correspondante, et le coefficient angulaire de la même droite égal à la quantité de magnétisme de chaque pôle.

Ainsi, dans le cas d'aiguilles cylindriques longues, de diamètre différent, la formule de Green exprime la proportionnalité de la puissance des pôles au carré du diamètre, et la proportionnalité de leur distance à l'extrémité de l'aiguille à la première puissance du diamètre.

La comparaison des résultats fournis par l'observation sur des aiguilles de diamètre différent présente beaucoup de difficultés pratiques. La multiplicité des comparaisons d'appareil exigées par ces expériences, l'influence considérable qu'exercent sur les rapports à déterminer les moindres erreurs commises dans l'évaluation des petits diamètres, mais surtout la difficulté de communiquer une trempe identique à des aiguilles de diamètre différent sont des obstacles graves, et qu'il n'est pas facile de surmonter entièrement. Il convient cependant de remarquer que la difficulté relative à la trempe est moins grande pour des aiguilles trempées très-dur, telles que nous les avons toujours employées, parce que, dans ce cas, le pouvoir coercitif varie peu, pour des variations assez larges de la température à laquelle on effectue la trempe.

Le tableau suivant se rapporte à la loi des distances polaires. La première colonne donne le diamètre des aiguilles, la deuxième l'abscisse D, la troisième la valeur du rapport  $\frac{D}{d}$  qui devrait être constant, la quatrième, enfin, la différence des nombres de la troisième colonne à leur moyenne :

TABLEAU IV.

$d$	D	$\frac{D}{d}$	$\delta$
mm 0,175	1,77	10,113	+ 0,718
0,282	2,45	8,688	- 0,707
0,368	3,60	9,783	+ 0,388
0,551	5,25	9,528	+ 0,133
1,036	9,90	9,556	+ 0,161
1,290	12,40	9,612	+ 0,307
1,988	16,80	8,451	- 0,944

Ces nombres vérifient la loi, eu égard à la multiplicité des causes d'erreur signalées.

La loi relative à la puissance des pôles se vérifie tout aussi bien, ainsi qu'on le voit dans le tableau V. La troisième et la quatrième colonne donnent la valeur absolue et relative de la différence des valeurs de  $\frac{C}{d^2}$  et de la moyenne correspondante.

TABLEAU V. — Puissance des pôles.

$d$	$\frac{C}{d^2}$	$\delta$	$r$
mm 0,175	58,719	+ 3,094	0,055
0,282	51,558	- 4,067	0,073
0,368	55,531	- 0,094	0,002
0,551	56,695	+ 1,070	0,019

En résumé, l'expérience confirme d'une manière très-remarquable les diverses lois contenues dans la formule de Green, sauf le cas des aiguilles excessivement courtes. Il en résulte que, à l'exception de ce dernier cas, la distribution du magnétisme libre dans les aiguilles est aussi représentée par la formule donnée à cet effet par Green, et dont notre formule (1) est une conséquence. La quantité de magnétisme libre dans une tranche perpendiculaire à l'axe d'épaisseur  $dx$ , située à une distance  $x$  du milieu, est, d'après cette formule,

$$(5) \quad A a^2 \beta \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{e^{\beta \lambda} + e^{-\beta \lambda}},$$

$\lambda$  étant la demi-longueur de l'aiguille. Cette formule revient à celle de Biot, et représente fidèlement les résultats des expériences de Coulomb.

*Pôles des aiguilles courtes.* — Le moment magnétique d'une aiguille peut toujours être considéré comme le produit de deux facteurs, dont l'un représente la distance des pôles, l'autre la quantité de magnétisme de chacun d'eux. D'après la formule de Green, la distance des pôles est (1)

$$(6) \quad D = \frac{2\lambda - \frac{2}{\beta} \frac{e^{\beta \lambda} - e^{-\beta \lambda}}{e^{\beta \lambda} + e^{-\beta \lambda}}}{1 - \frac{2}{e^{\beta \lambda} + e^{-\beta \lambda}}},$$

et l'autre facteur

$$(7) \quad P = A a^2 \left( 1 - \frac{2}{e^{\beta \lambda} + e^{-\beta \lambda}} \right).$$

Ces facteurs se réduisent respectivement à  $2\lambda - \frac{2}{\beta}$  et à  $A a^2$  pour des valeurs très-grandes de  $\lambda$ .

D'autre part, l'ordonnée  $y$  d'une courbe peut toujours être considérée comme le produit du coefficient angulaire de la tangente au

(1) On définit le pôle comme la projection du centre de gravité de la courbe de distribution

$$y = A a^2 \beta \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{e^{\beta \lambda} + e^{-\beta \lambda}}$$

sur l'axe magnétique de l'aiguille. C'est d'après cette définition que l'on a calculé la distance  $D$  des deux pôles.

point considéré par la différence de l'abscisse  $2\lambda$ , et de l'abscisse à l'origine de la tangente. D'après ces principes, le moment magnétique de l'aiguille considérée est représenté par le produit des deux facteurs

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\lambda - \frac{2}{\beta} \frac{e^{\beta\lambda} - e^{-\beta\lambda}}{e^{\beta\lambda} + e^{-\beta\lambda}} \\ 1 - \left( \frac{2}{e^{\beta\lambda} + e^{-\beta\lambda}} \right)^2 \\ A a^2 \left[ 1 - \left( \frac{2}{e^{\beta\lambda} + e^{-\beta\lambda}} \right)^2 \right]. \end{array} \right.$$

Ces deux facteurs, comme les précédents, se réduisent à  $2\lambda - \frac{2}{\beta}$  et  $A a^2$  pour des valeurs très-grandes de  $\lambda$  : de là l'emploi que nous avons fait précédemment de l'asymptote pour déterminer la distance polaire des aiguilles longues; mais cet emploi ne peut être étendu aux tangentes, comme je l'avais espéré d'abord, puisque les expressions (8) diffèrent des expressions (6) et (7) par le facteur variable  $1 + \frac{2}{e^{\beta\lambda} + e^{-\beta\lambda}}$ . La méthode qui nous a servi à déterminer les moments magnétiques ne peut donc nous éclairer sur la variation indépendante des deux facteurs dont ils dépendent.

### ARTICLE III. — Rupture d'aiguilles non saturées, opérée perpendiculairement à l'axe.

A. *Aiguilles régulières.* — Quand une aiguille est aimantée régulièrement sans être saturée, on peut en détacher les extrémités sur une longueur suffisante, et traiter ensuite le fragment moyen comme celui qu'on retire ainsi d'une aiguille saturée.

On obtient une courbe figurative tangente à l'axe des  $x$  à l'origine, et présentant une asymptote dont la courbe se rapproche rapidement. La demi-abscisse à l'origine de cette asymptote est la distance des pôles des aiguilles longues (de rupture) à leurs extrémités (<sup>1</sup>). Cette distance est donc constante dans les aiguilles de rupture comme dans les aiguilles saturées. Au surplus, il y a deux cas à distinguer :

---

(<sup>1</sup>) Même démonstration que pour les aiguilles saturées.

I. Dans le cas des aiguilles minces de 0<sup>mm</sup>,175 à 0<sup>mm</sup>,551, la distance des pôles aux extrémités dans les aiguilles de rupture ne dépend que du diamètre, et se trouve la même que dans les aiguilles saturées. Les asymptotes de toutes les courbes correspondant aux aiguilles de même diamètre coupent en effet très-exactement l'axe des  $x$  au même point. Ce fait a été vérifié

Sur 3 courbes pour les aiguilles de 0<sup>mm</sup>,551  
 Sur 2 » » 0<sup>mm</sup>,398  
 Sur 3 » » 0<sup>mm</sup>,282  
 Sur 2 » » 0<sup>mm</sup>,175

De plus, dans le cas que nous considérons, la courbe complète n'est qu'une réduction proportionnelle de la courbe des aiguilles saturées. Elle est exactement représentée dans les mêmes limites que celles-ci par l'équation

$$(10) \quad y = m \Lambda a^2 \left( x - \frac{2}{\beta} \frac{e^{\frac{\beta x}{2}} - e^{-\frac{\beta x}{2}}}{e^{\frac{\beta x}{2}} + e^{-\frac{\beta x}{2}}} \right),$$

où  $m$  est un facteur plus petit que 1 qui dépend du degré d'aimantation de l'aiguille mère.

TABLEAU VI.

$l$	COURBE S.	COURBE R		DIFFÉRENCE.
		observée.	calculée.	
3 <sup>mm</sup>	5,60	4,40	4,013	+ 0,387
4	12,00	8,60	8,597	+ 0,003
5	20,00	14,15	14,317	- 0,167
6	30,00	21,00	21,492	- 0,492
7	42,00	29,50	30,088	- 0,588
8	55,50	39,60	39,760	- 0,160
9	70,20	50,50	50,290	+ 0,210
10	85,60	61,20	61,323	- 0,123

Le tableau ci-dessus se rapporte à une aiguille de 0<sup>mm</sup>,551. La deuxième colonne contient le moment de saturation des aiguilles tel 6.

qu'il est fourni par la courbe expérimentale, et la troisième le moment des aiguilles de rupture; les nombres de la quatrième colonne ont été obtenus en multipliant ceux de la seconde par le rapport  $m$  des coefficients angulaires des deux asymptotes; la cinquième colonne donne les différences des nombres observés et calculés.

Au delà de 10 millimètres, les courbes se rapprochent beaucoup de leurs asymptotes, et la comparaison qui fait l'objet de ce tableau n'offre plus d'intérêt.

Observons que les pôles des aiguilles courtes de rupture sont placés de la même manière que si ces aiguilles étaient saturées.

II. Ces divers résultats ne s'appliquent pas aux aiguilles plus grosses, de 1 à 2 millimètres de diamètre par exemple. En premier lieu, les asymptotes aux diverses courbes, correspondant aux aiguilles de même diamètre, ne rencontrent pas l'axe des  $x$  au même point exactement, mais en des points plus rapprochés de l'origine à mesure que le degré d'aimantation de l'aiguille mère est plus faible. D'ailleurs, les courbes elles-mêmes ne sont plus des réductions proportionnelles d'une même courbe; et si l'on prend le rapport du moment magnétique d'une aiguille de rupture à l'aiguille saturée correspondante, ce rapport se rapproche de l'unité à mesure que la longueur de l'aiguille diminue. *Ainsi les aiguilles retirées du milieu d'une aiguille non saturée, mais régulière et de 1 à 2 millimètres de diamètre, sont d'autant plus voisines de la saturation qu'elles sont plus courtes.*

La différence que nous signalons à cet égard entre les aiguilles très-minces et les aiguilles plus grosses est intéressante au point de vue de la théorie du magnétisme.

Il reste à examiner l'état des fragments extrêmes dans les aiguilles non saturées. Je me suis borné à comparer le moment magnétique de ces fragments au moment de fragments égaux empruntés au milieu de l'aiguille. J'ai reconnu que le moment des fragments extrêmes est inférieur à celui des fragments moyens, et d'autant plus,

- 1° Que l'aiguille primitive est plus courte;
- 2° Que l'aimantation est plus faible;
- 3° Que la longueur absolue des fragments est plus petite.



Voici quelques exemples :

I.

Aiguille mère.	{	Longueur.....	131 millimètres.	
		Diamètre.....	2 »	
		Moment.....	127,3	
Partagée d'abord en trois, puis en six fragments égaux.				
Rapport des tiers extrêmes aux moyens.....		0,803		
»	des sixièmes	»	»	0,646

II.

Aiguille mère.	{	Longueur.....	141 millimètres.	
		Diamètre.....	2 »	
Partagée en cinq, puis en dix et en vingt fragments égaux.				
Rapport des cinquièmes extrêmes aux moyens.....		0,751		
»	des dixièmes	»	»	0,544
»	des vingtièmes	»	»	0,321

Dans la même expérience, le rapport des vingtièmes occupant le deuxième rang à partir des bouts aux vingtièmes moyens a été trouvé égal à 0,785.

III.

*Aiguilles de 2 millimètres de diamètre.*

Aiguille A.		Aiguille B.	
Longueur.....	141 <sup>mm</sup>	Longueur.....	143 <sup>mm</sup>
Moment magnétique.....	165,4	Moment magnétique.....	46,15
Rapport des quarts extrêmes } aux moyens.....	0,789	Rapport des quarts extrêmes } aux moyens.....	0,709

IV.

*Aiguilles de 2 millimètres de diamètre.*

Aiguille A.		Aiguille B.	
Longueur.....	122 <sup>mm</sup>	Longueur.....	120 <sup>mm</sup>
Moment magnétique.....	135,75	Moment magnétique inférieur à..	50,00
Rapport des quarts extrêmes } aux moyens.....	0,687	Rapport des quarts extrêmes } aux moyens.....	0,662

B. *Aiguilles présentant des points conséquents.* — Nous venons de voir que dans une aiguille régulière les fragments retirés des extrémités possèdent un moment magnétique plus faible que ceux qui proviennent du centre.

Les points conséquents se comportent comme des pôles plus faibles que les pôles extrêmes; les fragments qui les renferment possèdent à longueur égale un moment magnétique supérieur à celui des fragments extrêmes, mais inférieur à celui des fragments tirés de l'intervalle entre deux points conséquents.

En terminant, nous indiquerons un moyen de vérifier la parfaite régularité d'une aiguille aimantée. Après avoir séparé les extrémités sur une longueur suffisante, on rompra le tronçon moyen en fragments inégaux de longueur arbitraire. Si l'aiguille mère est régulière, les points figuratifs obtenus en prenant pour abscisse la longueur des fragments, et pour ordonnée leur moment magnétique, se placeront d'eux-mêmes sur une courbe régulière. Les plus petites irrégularités se manifesteront alors aux yeux, à la simple inspection de la figure obtenue.

ARTICLE IV. — *Séparation de faisceaux prismatiques, opérée parallèlement à l'axe.* — *Observations sur le magnétisme temporaire de l'acier.*

La difficulté d'opérer la rupture d'une aiguille suivant un plan parallèle à son axe nous a engagé à étudier le cas plus pratique de la séparation des lames superposées qui composent un faisceau. Les résultats que fournira cette étude ne s'appliquent à la rupture que d'une manière approchée, puisque la rupture peut être considérée comme le cas limite de la séparation, lorsque la distance des parties en regard, de part et d'autre du plan de séparation, décroît indéfiniment.

On forme un faisceau prismatique avec des lames de ressort de montre. Ce faisceau trempé et aimanté tout d'une pièce est ensuite séparé.

Si l'aiguille mère est saturée, on observe que les lames séparées ne le sont point. Ce fait n'a rien de surprenant, car les lames superposées

réagissent les unes sur les autres en sens contraire de leur aimantation, et par suite le moment magnétique permanent qu'elles peuvent atteindre étant réunies est plus faible que si elles étaient séparées; mais ce qui paraît étonnant au premier abord, c'est que la somme des moments magnétiques des lames séparées est notablement supérieure au moment magnétique du faisceau primitif.

Ce dernier fait est rendu très-saillant, en faisant l'expérience de la manière suivante. Je prends un faisceau de section carrée, formé par la réunion de quatre barreaux carrés de même longueur. Ce faisceau est trempé dur et aimanté immédiatement; on mesure son moment magnétique, enfin on le démonte, et l'on mesure le moment de chaque barreau isolé. On trouve que la somme de ces moments est très-notablement supérieure au moment magnétique du faisceau. Vient-on à réunir ensemble ces barreaux deux par deux, la somme des moments magnétiques des faisceaux partiels est intermédiaire au moment du faisceau total et des barreaux séparés. Enfin, si l'on reconstitue le faisceau primitif, le moment magnétique revient aussi à sa valeur première.

Dans cette expérience, le faisceau qui, vierge de toute aimantation antérieure, n'a subi qu'une fois l'action de la spirale magnétisante est, au moment de la première séparation, dans une condition absolument normale, et l'on ne voit intervenir aucune force magnétique nouvelle à laquelle on puisse attribuer l'augmentation de magnétisme permanent observée. En séparant les barreaux, on supprime, il est vrai, leur réaction réciproque, et l'on sait qu'elle agissait dans chacun d'eux en sens contraire de l'aimantation permanente; mais cette suppression ne peut avoir d'autre effet que de faire disparaître un certain magnétisme temporaire. Ainsi dans un barreau *normal* un certain magnétisme permanent se trouve superposé à un magnétisme temporaire de sens contraire, que l'ablation d'une couche magnétique parallèle à l'axe fait disparaître.

Cette curieuse superposition peut être observée dans d'autres circonstances. On sait, par exemple, que si l'on soumet un barreau d'acier aimanté à l'action d'un courant trop faible pour le désaimanter entièrement, on observe pendant l'action du courant une diminution du magnétisme du barreau qui peut aller jusqu'au renversement des pôles, tandis qu'après la cessation du courant on trouve que le barreau est

encore aimanté dans le sens primitif. On sait aussi que si l'on présente le pôle austral d'un fort barreau au pôle austral d'une aiguille aimantée, la répulsion qui se manifeste à une grande distance peut se transformer en attraction, à une distance très-faible, par suite du magnétisme temporaire développé par induction. Ce fait avait déjà été observé au siècle dernier par Musschenbroek et Oëpinus.

Les phénomènes relatifs à l'aimantation temporaire jouent un très-grand rôle dans toutes les questions qui se rapportent à la rupture des aimants. Considérons d'une manière générale deux corps A et B soumis à l'action d'une même force inductrice, mais invariablement liés l'un à l'autre. Après la cessation de la force inductrice, le corps A demeure soumis à l'action de B, et conserve, en dehors du moment magnétique résiduel qu'il conserverait après l'ablation de B, un moment produit par l'influence, qui se compose avec le premier, et qui n'est permanent qu'autant que le lieu de A et de B subsiste. On pourrait l'appeler moment magnétique *subpermanent*. Le même raisonnement s'applique si A et B sont deux parties d'un même corps; et l'on voit que la fixation du moment permanent que prend un corps soumis à l'action d'une force inductrice est un problème éminemment complexe, qui ne peut être résolu d'une manière générale que par la connaissance des lois du magnétisme temporaire aussi bien que du magnétisme permanent proprement dit. Nous signalons cette conséquence à l'attention des théoriciens.

Dans l'expérience du faisceau rompu parallèlement à l'axe, le magnétisme subpermanent est de sens contraire au magnétisme permanent. Il est au contraire de même sens dans le cas d'une aiguille rompue par un plan perpendiculaire à son axe, et dont on séparerait ou réunirait les fragments placés bout pour bout. Le moment des fragments rapprochés jusqu'au contact est supérieur à la somme des moments des fragments séparés, sans toutefois atteindre la valeur du moment de l'aiguille entière avant la rupture. Ce résultat est facile à vérifier par l'expérience.

---

## CHAPITRE IV.

## SUR LA THÉORIE DES AIMANTS D'ACIER.

La théorie physique du magnétisme n'existe guère que sous la forme de comparaisons. Comme il ne peut y avoir dans la nature deux séries de phénomènes absolument parallèles, ces comparaisons n'éveillent malheureusement dans l'esprit que des idées incomplètes, et qui ne satisfont jamais pleinement. La belle théorie des solénoïdes moléculaires d'Ampère n'échappe peut-être pas absolument à cette observation, qui s'applique surtout à la théorie de la force coercitive, ainsi qu'à toutes les autres tentatives faites dans le but d'éclairer la théorie des aimants d'acier.

Coulomb a le premier établi avec quelque rigueur la différence du fer et de l'acier au point de vue de l'aimantation, et introduit la notion de *force coercitive*. Il assimile l'effet de cette force à une sorte de *frottement* qui s'oppose à la séparation des fluides magnétiques réunis, ou à leur réunion quand ils sont séparés. Cette comparaison entre deux ordres de phénomènes aussi complexes et aussi mal connus que l'*aimantation* et le *frottement* est nécessairement très-artificielle, et exclut un grand nombre de phénomènes fournis par l'expérience. Il semblerait en effet que l'assomption d'une force coercitive analogue au frottement implique les propositions suivantes :

1° La force coercitive s'opposerait à tout effet d'induction de la part de forces magnétiques inférieures à une certaine limite C ;

2° Elle réduirait l'effet de toute force  $F > C$  à l'effet que produirait une force égale à  $F - C$ , si la force coercitive n'existait pas ;

3° Enfin elle maintiendrait après la cessation de F le magnétisme acquis, jusqu'à une limite égale au magnétisme que produirait une force C continuant à agir dans le sens de la force F, si la force coercitive n'existait pas.

Le seul mathématicien qui, à ma connaissance, ait traité un problème dans l'hypothèse de la force coercitive, Green, ne paraît pas s'en faire une idée différente.

Pour nous rendre compte de la valeur expérimentale de l'hypothèse,

il suffira de rapprocher les trois propositions qui précèdent de trois autres propositions, que nous emprunterons à un travail de M. Rowland (<sup>1</sup>), et qui, fondées sur l'expérience, s'accordent d'ailleurs parfaitement avec tous les faits connus.

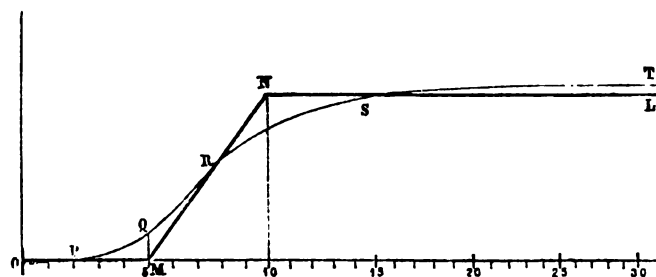
1° Tout le magnétisme (ou mieux presque tout) développé par de faibles courants est temporaire. *Avec l'acier, ce phénomène est plus apparent qu'avec le fer.*

2° Le magnétisme temporaire augmente toujours avec l'intensité du courant qui le produit, et dans des limites assez larges est sensiblement proportionnel à cette intensité. Quand celle-ci augmente indéfiniment, le magnétisme temporaire tend vers une limite finie et déterminée.

3° Le magnétisme permanent croît d'abord très-vite avec le courant, mais plus tard diminue quand le courant est très-intense et que le fer a à peu près acquis son maximum de magnétisme total.

Il est curieux de remarquer que, si l'hypothèse de la force coercitive est impuissante à représenter l'ensemble des phénomènes, elle représente pourtant assez bien la marche de l'aimantation permanente. Nous reproduisons (*fig. 6*) une courbe dessinée par Rowland d'après

Fig. 6.



ses expériences, en prenant pour abscisses les forces magnétiques et pour ordonnées les moments magnétiques correspondants, acquis d'une manière permanente par l'unité de volume d'un cylindre de longueur indéfinie. C'est la courbe OPQRST. Nous mettons en regard une ligne brisée OMNL, qui reproduit en traits généraux l'allure de la courbe; cette dernière correspond à l'hypothèse de la force coercitive, en faisant

(<sup>1</sup>) ROWLAND, *Philosophical Magazine*, août 1873.

$C = 5$  et en admettant que l'aimantation permanente, produite par une force  $F$  comprise entre  $C$  et  $2C$ , est proportionnelle à  $F - C$ .

Ainsi l'hypothèse primitive de la force coercitive rend un compte assez exact des seuls phénomènes bien connus du temps où elle a été imaginée : elle est impuissante à en faire prévoir de nouveaux, et les progrès de la science du magnétisme n'en ont guère laissé subsister que le nom.

Les phénomènes du magnétisme temporaire et du maximum de l'aimantation, ainsi que ceux de l'aimantation permanente, ont été expliqués dans leur ensemble par Wiedemann, mais encore à l'aide d'une comparaison. Ce physicien a rapproché les phénomènes magnétiques de ceux qui dépendent de l'élasticité dans les corps solides, spécialement des phénomènes qui accompagnent la torsion ou la flexion. Ce rapprochement a l'avantage d'exprimer une relation physique incontestable, puisque la torsion modifie l'état magnétique d'un barreau, et que les modifications de cet état magnétique peuvent à leur tour faire varier la torsion à laquelle le barreau a été soumis d'avance.

Wiedemann admet que les éléments magnétiques (courants moléculaires) existent en nombre fini dans l'unité de volume du fer ou de l'acier, mais que dans l'état naturel leurs axes sont répartis également dans toutes les directions. Les forces magnétiques extérieures tendent à faire tourner ces éléments autour de leur centre de gravité; mais ceux-ci opposent une résistance au déplacement, analogue aux réactions élastiques, de telle sorte que, suivant l'intensité des forces agissantes, les éléments conservent d'une manière permanente une portion plus ou moins considérable de leur déplacement temporaire. En soumettant au calcul ces hypothèses, on obtient, pour représenter l'aimantation temporaire et l'aimantation permanente, des courbes qui, tout en satisfaisant aux mêmes conditions essentielles, ne présentent avec les courbes fournies par l'expérience que des relations vagues et générales.

Nous renverrons à l'ouvrage original pour les développements très-ingénieux que l'auteur donne à sa théorie <sup>(1)</sup>. Nous nous bornerons à dire qu'on peut pousser très-loin l'analogie sur laquelle elle se fonde, et que nous trouverions, même dans nos recherches actuelles, des arguments en sa faveur : ainsi nous avons vu <sup>(2)</sup> que la répétition de l'ac-

---

<sup>(1)</sup> WIEDEMANN, *Galvanismus*, t. II.

<sup>(2)</sup> Voir ci-dessus, Chap. II, art. II.

tion d'un courant sur une aiguille accroît le moment magnétique permanent communiqué à celle-ci; de même, quand on tord un fil imparfaitement élastique à l'aide d'une force constante, la torsion permanente qu'il reçoit s'accroît par une deuxième, une troisième application de la même force, et tend vers une limite nouvelle.

Aussi ne reprocherons-nous point à l'hypothèse de Wiedemann d'être absolument fausse, mais seulement d'être incomplète; c'est pourquoi un certain nombre de phénomènes ne s'y laissent adapter que d'une manière extrêmement pénible. De ce nombre sont quelques phénomènes relatifs à la superposition d'un certain magnétisme permanent et d'un magnétisme temporaire de sens contraire, spécialement ceux qui se produisent dans la séparation des faisceaux aimantés (<sup>1</sup>).

Au lieu d'attribuer, comme le fait Wiedemann, le magnétisme temporaire et le magnétisme permanent aux mêmes molécules, d'autres physiciens (<sup>2</sup>) préfèrent admettre que la condition, quelle qu'elle soit, qui correspond à la conservation d'un certain magnétisme permanent ne serait communiquée dans l'aciération ou la trempe qu'à un certain nombre de molécules, les autres conservant les propriétés magnétiques du fer doux. On pourrait encore imaginer que les diverses molécules acquièrent le pouvoir coercitif à un degré différent.

Quoi qu'il en soit, je crois qu'on jetterait une lumière sérieuse sur beaucoup de faits relatifs à l'aimantation de l'acier, en admettant qu'il est magnétiquement hétérogène. Or ceci n'est pas une hypothèse gratuite. Les chimistes accorderont sans peine que la vraie nature des espèces chimiques qui constituent l'acier est encore très-mal connue, et qu'une même barre d'acier peut contenir normalement un mélange de plusieurs de ces espèces. Si l'on attaque un barreau d'acier par l'acide chlorhydrique, on constate d'après A. Holz (<sup>3</sup>) que les barreaux rongés superficiellement présentent une surface rugueuse, dont les as-

---

(<sup>1</sup>) Quand un fil imparfaitement élastique a subi une torsion permanente, on peut, il est vrai, superposer à cette torsion permanente une torsion temporaire de sens contraire, par l'application d'une force insuffisante pour le détordre entièrement. Mais comment une certaine torsion temporaire pourrait-elle se trouver associée à une torsion permanente de sens contraire, dans un fil soumis une seule fois à la torsion, et abandonné ensuite à lui-même. C'est cependant ce qui arrive pour l'aimantation. (*Voir* Chap. III, art. IV.)

(<sup>2</sup>) *Voir* VERDET, *Conférences de Physique faites à l'École normale*, p. 219.

(<sup>3</sup>) A. HOLZ, *Annales de Poggendorff*, t. CLI, 1874.



pérités sont formées d'une substance acideuse très-carbonée (*Kohlensisen*), peu ou point attaquant par l'acide, et affectant dans l'intérieur des barreaux une disposition variable : tantôt elle forme une sorte de réseau à mailles serrées, empâté par la masse ferrugineuse plus attaquant; tantôt, au contraire, les deux matières sont mêlées plus intimement, et l'acier charbonneux est en grains fins isolés. L'hétérogénéité physique entraîne l'hétérogénéité magnétique; et, en effet, Holz ayant mesuré le moment magnétique de barreaux aimantés, avant et après l'action plus ou moins prolongée de l'acide chlorhydrique, croit pouvoir déduire de l'ensemble de ses expériences que l'acier charbonneux est le *vrai support de la force coercitive*; le reste de la masse en serait à peu près dépourvu.

Il ne nous appartient pas de prononcer sur le degré de confiance que méritent les recherches de A. Holz, au point de vue chimique; mais il nous paraît que l'hypothèse de l'hétérogénéité magnétique de l'acier mérite un examen sérieux : elle a d'abord l'avantage de se prêter très-simplement à l'explication des phénomènes relatifs à la superposition du magnétisme temporaire et du magnétisme permanent, pour lesquels elle a été imaginée. Si l'on considère en outre : 1° que les lois du magnétisme temporaire de l'acier ne diffèrent en rien d'essentiel des lois du magnétisme induit dans le fer doux; 2° que le développement du magnétisme permanent est éminemment variable d'une espèce de fer ou d'acier à une autre, et, pour une même espèce, suivant des conditions physiques quelquefois insignifiantes, on sera porté à attribuer à cette hypothèse un certain degré de probabilité.

Dans tous les cas, l'étude des aimants mixtes présenterait un véritable intérêt en dehors de l'hypothèse qui nous conduit à nous en occuper; nous n'en dirons ici que quelques mots, nous réservant de revenir plus tard sur un sujet qui ne peut être pleinement éclairé que par de longues suites d'expériences.

*Théorie d'un aimant mixte.* — Concevons un cylindre de dimensions élémentaires, mais de longueur très-grande par rapport à son diamètre. Supposons-le formé de la réunion de deux sortes d'éléments magnétiques répandus au hasard, mais en proportion déterminée dans toutes les parties du cylindre : les éléments A, doués de pouvoir coercitif, sont tels qu'ils conservent tout le magnétisme qu'ils acquièrent; les

éléments B sont au contraire absolument dépourvus de pouvoir coercitif.

Faisons agir une force magnétique F dans le sens de l'axe du cylindre, et soit  $kF\Delta v$  le moment magnétique que prendrait le cylindre si les molécules B existaient seules.  $\Delta v$  représente le volume du cylindre, et  $k$  un coefficient qui dépend de la densité <sup>(1)</sup> des éléments considérés. Soit de même  $qF\Delta v$  le moment correspondant aux éléments A supposés seuls. Une molécule quelconque du système B est soumise, outre la force extérieure, à l'action du système A, et réciproquement. Cette action réciproque, de même sens que la force extérieure, a pour effet d'élever le magnétisme total au-dessus de la somme  $(k + q)F\Delta v$ .

Si, pour simplifier, on suppose les coefficients  $k$  et  $q$  indépendants de F, ce qui doit être sensiblement vrai pour de petites valeurs des forces inductrices, on trouvera le moment final de chacun des deux systèmes de molécules à l'aide d'un raisonnement très-simple, calqué sur la théorie élémentaire de la condensation électrique <sup>(2)</sup>. Désignant alors par  $c$  et  $d$  deux coefficients qui dépendent du groupement moyen et aussi de la densité des éléments des deux systèmes, on trouvera, pour le moment final  $M_a$  du système A,

$$(1) \quad M_a = qF \frac{1 + ck}{1 - cdkg} \Delta v,$$

et de même

$$(2) \quad M_b = kF \frac{1 + dq}{1 - cdkg} \Delta v,$$

d'où le moment total

$$(3) \quad M = M_a + M_b = F \frac{q + k + (c + d)kq}{1 - cdkg} \Delta v.$$

Si l'on vient à supprimer l'action de la force F, les molécules A conservent leur magnétisme. Quant aux molécules B, elles ne sont plus

<sup>(1)</sup> C'est-à-dire du nombre d'éléments contenus dans l'unité de volume.

<sup>(2)</sup> On sait très-bien que cette théorie élémentaire de la condensation électrique n'est pas rigoureusement exacte, mais il ne s'agit ici que de se faire une idée générale des phénomènes.

Nous nous appuierons d'ailleurs de l'exemple de M. Jamin, qui a introduit dans la science l'expression de *condensation magnétique*, dans sa théorie de l'effet des contacts de fer doux.

soumises qu'à l'action du système A, laquelle est égale à  $dqF \frac{1+ck}{1-cdkq}$ ; elles conservent un moment

$$(4) \quad M'_b = qkdF \frac{1+ck}{1-cdkq} \Delta v.$$

Le magnétisme résiduel total est

$$(5) \quad m = M_a + M'_b = qF \frac{(1+ck)(1+dk)}{(1-cdkq)} \Delta v,$$

et le magnétisme dit *temporaire*, qui disparaît par la cessation du courant, est

$$(6) \quad \mu = M - m = kF \Delta v.$$

Le coefficient  $k$  est ce qu'on appelle habituellement le *coefficient de magnétisme temporaire*, et l'on appelle *coefficient de magnétisme permanent* la quantité qui joue le même rôle dans l'expression de  $m$ , c'est-à-dire

$$q \frac{(1+ck)(1+dk)}{1-cdkq}.$$

La quantité réellement comparable au coefficient A est, d'après ce qui précède, le coefficient  $q$  (1).

Il est évident, et l'on vérifie sans peine sur un cas particulier, que le moment magnétique total M est intermédiaire à ceux que produirait la même force F agissant sur deux cylindres égaux au premier, et ne comprenant chacun qu'une seule espèce de molécules avec la même densité totale; mais il n'en est pas de même du moment résiduel  $m$  qui, pour une valeur donnée de  $q$ , est d'autant plus grand que le coefficient de magnétisme temporaire du fer doux est lui-même plus grand; et, comme le coefficient de magnétisme temporaire du fer doux est énorme, on voit que l'adjonction d'une certaine quantité de fer doux à l'acier le plus dur peut augmenter le moment résiduel de celui-ci.

Nous rappellerons que, d'après M. Jamin, les variétés d'acier les plus riches en carbone et les plus fortement trempées ne présentent pas les

---

(1) Si l'on suppose les coefficients  $c$  et  $d$  égaux, les formules se simplifient un peu (voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 23 février 1874). Il n'appartiendrait qu'à une théorie complète d'expliciter les valeurs des quatre coefficients  $k$ ,  $q$ ,  $c$  et  $d$  en fonction des densités  $\delta$  et  $\delta_1$ , des deux sortes d'éléments, et par conséquent d'établir des relations entre ces quatre quantités.

moments résiduels les plus forts, ce qui doit être si les molécules de fer doux y sont très-rares, comme on doit le supposer.

---

### RÉSUMÉ.

En résumé, nous avons indiqué une méthode nouvelle pour effectuer la comparaison des moments magnétiques de très-petites aiguilles aimantées.

Nous avons étudié l'effet que produit sur un aimant la répétition du passage à la spirale, l'interruption ou le rétablissement du courant inducteur, etc., et nous avons donné des formules empiriques propres à représenter les résultats obtenus.

Nous avons étudié la rupture et la séparation des aimants cylindriques et prismatiques, effectuée soit perpendiculairement, soit parallèlement à l'axe, et vérifié par l'expérience, dans le cas d'aiguilles de faible diamètre, une formule importante donnée par Green pour représenter le moment magnétique d'aiguilles saturées de diverses longueurs et de diamètres différents.

Enfin, nous appuyant aussi bien sur les faits particuliers étudiés dans ce travail que sur l'ensemble des faits connus, nous avons signalé l'insuffisance des théories actuelles du magnétisme pour expliquer les diverses particularités de l'aimantation temporaire de l'acier. Nous avons de plus émis l'idée que cette substance doit être considérée comme une masse hétérogène, au point de vue des propriétés magnétiques de ses éléments.

---

---

**MÉMOIRE**  
SUR  
**LES FONCTIONS DISCONTINUES,**

PAR M. G. DARBOUX,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

---

Jusqu'à l'apparition du Mémoire de Riemann sur les séries trigonométriques aucun doute ne s'était élevé sur l'existence de la dérivée des fonctions continues. D'excellents, d'illustres géomètres, au nombre desquels il faut compter Ampère, avaient essayé de donner des démonstrations rigoureuses de l'existence de la dérivée. Ces tentatives étaient loin sans doute d'être satisfaisantes; mais, je le répète, aucun doute n'avait été formulé sur l'existence même d'une dérivée pour les fonctions continues (1).

La publication du Mémoire de Riemann a décidé la question en sens contraire. A l'occasion des séries trigonométriques, l'illustre géomètre expose ses idées sur les principes du Calcul infinitésimal; il généralise, par une de ces vues qui n'appartiennent qu'aux esprits de premier ordre, la notion de l'intégrale définie; il montre qu'elle est applicable à des fonctions discontinues dans tout intervalle, et il énonce les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction, continue ou discontinue, soit susceptible d'intégration. Ce seul fait, qu'il existe des fonctions discontinues susceptibles d'intégration, suffit à prouver, comme on le verra, qu'il y a des fonctions continues n'ayant pas de dérivée, et cette conséquence des travaux de Riemann n'a pas tardé à être admise par les géomètres allemands.

L'un d'eux, M. Hankel, a publié en 1870 les résultats de ses études

---

(1) Toutefois, quand ces recherches ont été communiquées à la Société Mathématique, M. Bienaymé, en prononçant quelques paroles d'encouragement, a bien voulu déclarer qu'il avait toujours fait des objections aux démonstrations d'Ampère et de Duhamel, et qu'il a toujours pensé qu'une fonction continue n'a pas nécessairement une dérivée.

sur le Mémoire de Riemann. Malheureusement les conclusions de son travail ne sont pas irréprochables, et un géomètre distingué, M. Gilbert, a fait aux démonstrations de Hankel des objections qui pourraient s'adresser aussi aux résultats. Le principe de la condensation des singularités de Hankel est énoncé d'une manière trop absolue, et il est regrettable que la mort n'ait pas laissé à cet excellent géomètre le temps de reprendre les propositions qu'il avait données et de les limiter en les mettant à l'abri de toute objection. Je me suis imposé le devoir de revenir sur quelques-unes d'entre elles, et je crois les avoir mises à l'abri de toute critique, sous la forme que je leur ai donnée.

Plus récemment, M. Schwarz, dans une Note insérée aux *Archives des Sciences naturelles*, n° 189, 15 septembre 1873, et M. Gilbert, dans les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique* (2<sup>e</sup> série, t. XXXV, n° 6), se sont occupés du même sujet. Je dois aussi signaler un travail tout récent de M. Klein, publié dans les *Sitzungsberichte* de la Société d'Erlangen le 8 décembre 1873.

Dans le travail qu'on va lire, je reprends, en donnant tous les développements nécessaires, la définition de l'intégrale définie d'après Riemann, et je montre comment cette définition doit conduire à une infinité de fonctions continues n'ayant pas de dérivée.

Laissant ensuite de côté la définition des fonctions continues comme intégrales, j'expose quelques principes sur les séries dont les termes sont des fonctions de la variable indépendante. Ces principes ont été souvent appliqués par les géomètres; mais, à mon sens, ils gagnent beaucoup à être mis en lumière et exposés avec le degré de généralité qui leur appartient. La théorie des séries permet ensuite de former directement une foule de fonctions continues qui n'ont pas de dérivée pour une infinité de valeurs de la variable indépendante, comprises dans tout intervalle ou même qui n'ont de dérivée pour aucune valeur de la variable.

Au risque d'être trop long, j'ai tenu avant tout, sans y réussir peut-être, à être rigoureux. Bien des points, qu'on regarderait à bon droit comme évidents ou que l'on accorderait dans les applications de la science aux fonctions usuelles, doivent être soumis à une critique rigoureuse dans l'exposé des propositions relatives aux fonctions les plus générales. Par exemple, on verra qu'il existe des fonctions continues

qui ne sont ni croissantes ni décroissantes dans aucun intervalle, qu'il y a des fonctions discontinues qui ne peuvent varier d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

On conçoit qu'en présence de propositions aussi singulières on éprouve le besoin d'apporter la plus grande rigueur dans les déductions et de n'admettre que les propositions les mieux démontrées.

Ces recherches ont été communiquées à la Société Mathématique dans les séances du 19 mars 1873 et du 28 janvier 1874.

### I. — *Des fonctions et de la continuité.*

Une fonction  $f(x)$  est dite *bien déterminée* quand à chaque valeur de  $x$  correspond une valeur unique de  $f(x)$ .

Il peut arriver qu'une fonction généralement bien déterminée de  $x$  devienne indéterminée pour certaines valeurs  $x_0, x_1, x_2, \dots$  de la variable  $x$ . Alors il faut compléter la définition de la fonction en assignant les valeurs qu'elle prend pour  $x = x_0, x = x_1, \dots$ , c'est-à-dire en définissant

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots$$

*Cette définition peut se faire d'une manière arbitraire.* Dans la plupart des cas on effectue cette détermination de manière à conserver à la fonction certains caractères tels que la continuité, la propriété de rester finie, etc.; mais, à considérer les choses d'une manière rigoureuse, une fonction, telle que

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a},$$

n'a aucune valeur pour  $x = a$ ; les opérations qu'il faut faire pour trouver la valeur de la fonction n'ont plus aucun sens lorsque  $x = a$ . De même

$$\frac{x}{y} e^{-\frac{x}{y}},$$

n'est pas bien déterminée pour  $x = 0, y = 0$ , et l'on peut convenir à l'avance qu'elle aura une certaine valeur  $A$  pour  $x = y = 0$ .

Les remarques précédentes ne sauraient être contestées dans le cas des fonctions discontinues; mais nous avons à prévenir une objection

qui pourrait être adressée dans le cas des fonctions continues. Soit, par exemple, la fonction

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a},$$

qui est indéterminée pour  $x = a$ . On pourrait prétendre que la valeur pour  $x = a$  doit être la limite vers laquelle tend la fonction lorsque  $x$  se rapproche de  $a$ .

Mais si nous prenons une de ces fonctions que présente le Calcul intégral, et qui sont définies par les propriétés

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 1, \text{ lorsque } x \text{ est différent de } a, \\ \varphi(a) &= A,\end{aligned}$$

nous voyons que le produit  $\varphi(x)(x + a)$  sera toujours égal à  $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ ,  $x$  étant différent de  $a$ , et il tendra, lorsque  $x$  se rapprochera de  $a$ , vers la limite  $2a$ , différente de sa vraie valeur  $2Aa$  pour  $x = a$ .

Il existe donc des fonctions qui tendent vers une valeur limite quand  $x$  s'approche d'un nombre fixe  $x_0$ , mais qui pour  $x = x_0$  ont une valeur différente de la valeur limite.

A l'exemple de M. O. Bonnet, nous définirons la continuité d'une fonction  $f(x)$  de la manière suivante :

Une fonction  $f(x)$  est dite continue, pour la valeur  $x = x_0$ , quand on peut prendre  $h$  assez petit pour que l'on ait

$$f(x_0 \pm \theta h) - f(x_0) < \varepsilon$$

en valeur absolue,  $\theta$  pouvant prendre toutes les valeurs positives plus petites que 1, et  $\varepsilon$  étant aussi petit qu'on le veut.

Quand une fonction n'est pas continue pour la valeur  $x_0$  de  $x$ , il peut arriver que  $f(x_0 + h)$  ait pour limite  $f(x_0)$  quand  $h$  tend vers zéro seulement par des valeurs positives ou, dans d'autres cas, seulement par des valeurs négatives. Cette remarque est importante pour la définition qui va suivre.

On dit qu'une fonction est continue dans un intervalle  $(x_0, x_1)$ , où  $x_0 < x_1$ , quand elle est continue pour toutes les valeurs de  $x$  comprises entre  $x_0$  et  $x_1$ , et qu'on a, en outre,

$$\lim f(x_0 + h) = f(x_0), \quad \lim f(x_1 - h) = f(x_1),$$



lorsque  $h$  tend vers zéro par des valeurs positives. Ces dernières conditions sont satisfaites si la fonction est continue pour les valeurs  $x_0$ ,  $x_1$  de  $x$ .

THÉORÈME I. — *Étant donnée une fonction  $f(x)$ , qui reste comprise, quand  $x$  prend les valeurs  $x_0$ ,  $x_1$ , et toutes les valeurs intermédiaires, entre deux limites fixes A et B, on peut assigner deux nombres M,  $m$  donnant lieu aux propriétés suivantes : M est supérieur ou égal aux diverses valeurs de la fonction, et il y a au moins une valeur de la fonction supérieure à  $M - \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant aussi petit qu'on le veut. De même  $m$  est inférieur ou égal à toutes les valeurs de la fonction, et il y a au moins une valeur de la fonction inférieure à  $m + \varepsilon$ .*

Considérons, en effet, l'intervalle (A, B), et divisons-le en  $n$  parties, en intercalant  $n - 1$  nombres  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ ,

$$A, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, B.$$

S'il n'y a pas de valeur de la fonction inférieure à  $X_i$ , ou supérieure à  $X_k$ , nous pourrions substituer l'intervalle  $(X_i, X_k)$  à l'intervalle (A, B). Divisons de même l'intervalle  $(X_i, X_k)$ , et continuons ainsi indéfiniment. Nous obtiendrons ainsi une suite d'intervalles tous compris les uns dans les autres et tendant vers un intervalle limite  $(m, M)$ , qui possédera évidemment les propriétés indiquées dans l'énoncé du théorème. Cet intervalle peut être (A, B) si, à chaque opération, il n'y a pas réduction dans la longueur totale de l'intervalle.

Si la fonction est discontinue, M et  $m$  ne sont pas nécessairement des valeurs particulières de la fonction. Par exemple, la fonction

$$\begin{aligned} y &= x, & \text{pour } x \text{ différent de } 1, \\ y &= 0, & \text{pour } x = 1, \end{aligned}$$

a 1 pour limite maximum quand  $x$  varie de 0 à 1 ; elle ne devient jamais égale à 1.

Nous appellerons M la *limite maximum*,  $m$  la *limite minimum* de la fonction dans l'intervalle donné. La différence positive ou nulle  $M - m$  s'appellera, d'après Riemann, l'*oscillation de la fonction* dans l'intervalle donné.

L'énoncé du théorème précédent indique que la fonction doit de-

meurer comprise entre deux limites A, B. Il ne suffit pas, pour qu'il en soit ainsi, que la fonction  $f(x)$  demeure finie pour toute valeur de  $x$  comprise dans l'intervalle ou égale aux valeurs extrêmes.

Par exemple, la fonction définie par les équations

$$y = \frac{1}{x}, \quad \text{pour } x \text{ différent de zéro,}$$

$$y = 0, \quad \text{pour } x = 0,$$

ne devient pas infinie dans l'intervalle  $(0, 1)$ ; elle ne reste pas non plus comprise entre deux limites fixes.

**THÉORÈME II.** — *Étant donnée une fonction de  $x$  finie et continue dans l'intervalle  $(x_0, x_1)$  lorsque  $x$  variera de  $x_0$  à  $x_1$ ,  $f(x)$  passera au moins une fois par toutes les valeurs intermédiaires entre  $f(x_0)$  et  $f(x_1)$ .*

Soient  $k$  une quantité intermédiaire entre  $f(x_0)$  et  $f(x_1)$  et posons

$$\varphi(x) = f(x) - k;$$

il est clair que  $\varphi(x_0)$  et  $\varphi(x_1)$  sont de signes contraires. Tout revient donc à démontrer que, si deux nombres substitués dans le premier membre d'une équation donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent au moins une racine de l'équation. Ce théorème a été établi d'une manière rigoureuse par Cauchy dans la Note III de l'*Analyse algébrique*.

La propriété précédente a été souvent prise pour la définition des fonctions continues. Il existe cependant, nous le verrons, une classe de fonctions discontinues qui ne peuvent varier d'une valeur à une autre, sans passer par toutes les valeurs intermédiaires et, par conséquent, la propriété qui constitue le théorème précédent n'est pas caractéristique des fonctions continues.

**THÉORÈME III.** — *Étant donnée une fonction de  $x$  finie et continue dans l'intervalle  $(a, b)$ , cette fonction atteint ses limites maximum et minimum pour une ou plusieurs valeurs de  $x$  comprises dans l'intervalle, et par conséquent elle passe par toutes les valeurs intermédiaires entre M et m.*

La démonstration que j'ai donnée du théorème analogue pour les fonctions de deux variables (*Bulletin des Sciences mathématiques et as-*

*tronomiques*, t. III, p. 307), s'applique sans difficulté aux fonctions d'une seule variable.

D'après la définition des limites maximum et minimum  $M$  et  $m$ , la fonction prend des valeurs supérieures à  $M - \epsilon$  et inférieures à  $m + \epsilon$ . Puisque la fonction est continue, elle passe donc, quand  $x$  varie dans l'intervalle, par toutes les valeurs intermédiaires entre  $M - \epsilon$  et  $m + \epsilon$ , et, comme  $\epsilon$  est aussi petit qu'on le veut, il est ainsi démontré que la fonction prend toutes les valeurs intermédiaires entre  $M$  et  $m$ . Il n'y a doute que pour  $M$  et  $m$ . Examinons  $M$ .

Décomposons l'intervalle  $(a, b)$  des valeurs de  $x$  en deux intervalles égaux  $(a, c)$ ,  $(c, b)$ , je dis que dans l'un au moins de ces intervalles la limite maximum sera  $M$ . En effet, si les deux limites étaient  $M'$ ,  $M''$ , plus petites que  $M$ , la fonction ne prendrait pas dans l'intervalle  $(a, b)$  les valeurs comprises entre  $M$  et le plus grand des deux nombres  $M'$ ,  $M''$ . Donc l'une au moins des limites  $M'$ ,  $M''$  est égale à  $M$ . Soit, par exemple,  $(a, c)$  l'intervalle dans lequel s'est conservée la limite maximum; si elle est la même dans les deux, on choisira arbitrairement. Décomposons de même  $(a, c)$  en deux parties égales, et répétons les mêmes raisonnements. En continuant indéfiniment, nous aurons une suite d'intervalles tous compris les uns dans les autres et tendant vers zéro, pour lesquels la limite maximum sera toujours  $M$ . Les limites inférieures de ces intervalles sont constantes ou croissantes; de même les limites supérieures sont constantes ou décroissantes. Soit  $\alpha$  leur limite commune; elle jouira évidemment de la propriété que dans tout intervalle  $(\alpha - h, \alpha + h)$ ; la limite maximum de la fonction sera  $M$ , quelque petit que soit  $h$ . Donc il y aura une valeur de  $x$  comprise dans cet intervalle

$$\alpha \pm \theta h,$$

pour laquelle on aura

$$M - f(\alpha \pm \theta h) < \epsilon.$$

D'autre part, on peut prendre  $h$  assez petit, la fonction étant continue, pour que

$$f(\alpha \pm \theta h) - f(\alpha) < \epsilon,$$

en valeur absolue. Donc on peut démontrer que l'on a

$$M - f(\alpha) < 2\epsilon,$$

en valeur absolue. Donc

$$f(\alpha) = M.$$

Le raisonnement se ferait à peu près de la même manière si  $\alpha$  était une des limites extrêmes  $a, b$  de l'intervalle primitif.

Il s'applique aussi à la limite minimum  $m$ , qui devient, au signe près, la limite maximum si l'on change le signe de la fonction.

## II. — *Division des fonctions discontinues en deux classes.*

D'après ce qui précède, étant donnée une fonction continue ou discontinue  $f(x)$  dans un intervalle quelconque  $(a, b)$ , il y a lieu de considérer trois nombres, la *limite maximum*  $M$ , la *limite minimum*  $m$  et l'*oscillation*  $\Delta = M - m$  dans l'intervalle considéré. Nous présenterons d'abord quelques remarques sur ces trois nombres.

Supposons que l'on considère, au lieu de l'intervalle  $(a, b)$ , un autre intervalle  $(x_0, x_1)$  compris dans  $(a, b)$ , c'est-à-dire tel que l'on ait

$$x_0 > a, \quad x_1 < b.$$

Il est clair que la limite maximum  $M'$  dans le nouveau intervalle ne peut être supérieure à  $M$ ; de même la limite minimum  $m'$  ne peut être inférieure à  $m$ . On a donc

$$M' \leq M, \quad m' \geq m, \quad \Delta' \leq \Delta,$$

Soient de même  $(a, c), (c, b)$  deux intervalles consécutifs donnant l'un les nombres  $M, m, \Delta$ , l'autre  $M', m', \Delta'$  et soit  $(x_0, x_1)$  un nouvel intervalle compris dans  $(a, b)$ , mais tel que l'on ait

$$x_0 < c < x_1;$$

ce nouvel intervalle empiète donc sur les deux premiers. La limite maximum dans  $(x_0, x_1)$  sera au plus égale au plus grand des deux nombres  $M, M'$ ; de même la limite minimum sera supérieure ou égale au plus petit des nombres  $m, m'$ ; enfin l'oscillation sera au plus égale à la somme  $\Delta + \Delta'$  des oscillations dans les deux intervalles consécutifs  $(a, c), (c, b)$ .

Cela posé, considérons une fonction quelconque  $f(x)$ , définie dans

un intervalle  $(a, b)$  et assujettie à rester comprise entre deux limites fixes  $A, B$ . Les oscillations de la fonction dans tout intervalle compris dans  $(a, b)$  seront évidemment finies et inférieures à  $B - A$ .

Intercalons, entre  $a$  et  $b$ ,  $n - 1$  valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , et posons pour abrégé

$$x_1 - a = \delta_1, \quad x_2 - x_1 = \delta_2, \dots, \quad a - x_{n-1} = \delta_n.$$

Nous formerons ainsi  $n$  intervalles, et nous désignerons par  $M_i, m_i, \Delta_i$  la limite maximum, la limite minimum et l'oscillation dans le  $i^{\text{ème}}$  intervalle. Formons les trois sommes

$$\begin{aligned} M &= M_1 \delta_1 + M_2 \delta_2 + \dots + M_n \delta_n, \\ m &= m_1 \delta_1 + m_2 \delta_2 + \dots + m_n \delta_n, \\ \Delta &= \Delta_1 \delta_1 + \Delta_2 \delta_2 + \dots + \Delta_n \delta_n, \end{aligned}$$

entre lesquelles existe la relation identique

$$\Delta = M - m.$$

Je dis que, lorsqu'on prendra  $n$  suffisamment grand, et que tous les intervalles  $\delta$  tendront vers zéro, les trois sommes précédentes, quelle que soit la fonction considérée, continue ou discontinue, tendront chacune vers une limite finie et déterminée, ne dépendant que de la nature de la fonction et des valeurs extrêmes  $a, b$  qui limitent l'intervalle considéré.

Pour le démontrer, supposons qu'on passe d'un système d'intervalles  $\delta_i$  à un autre en subdivisant tous les intervalles  $\delta_i$ , qu'on intercale par exemple, entre  $a$  et  $x_1$ ,  $p - 1$  valeurs  $y_1, y_2, \dots, y_{p-1}$  de  $x$ , puis, entre  $x_1$  et  $x_2$ ,  $q - 1$  valeurs  $z_1, z_2, \dots, z_{q-1}$  de  $x$ , et ainsi de suite. Il est facile de démontrer que, dans le nouveau système d'intervalles, les sommes  $M, \Delta$  deviendront plus petites ou resteront constantes, et que  $m$  ne pourra que rester constante ou augmenter. Pour fixer les idées, prenons  $M$ . La démonstration se ferait de la même manière pour  $m$ . Pour  $\Delta$ , elle résulte de la relation identique écrite plus haut entre  $m, M$  et  $\Delta$ .

Appelons  $\delta_1^1, \delta_1^2, \dots, \delta_1^p$  les  $p$  intervalles dans lesquels se décompose l'intervalle  $\delta_1$  : on aura

$$\delta_1 = \delta_1^1 + \delta_1^2 + \dots + \delta_1^p.$$

Désignons par  $M_1^i$  la limite maximum dans l'intervalle  $\delta_1^i$ . Le terme  $M, \delta_1$  de  $M$  devra être remplacé, quand on aura subdivisé les intervalles, par

la somme

$$M_1 \delta_1 + \dots + M_p \delta_p.$$

Or, d'après une remarque déjà faite, les maxima  $M_1, \dots, M_p$  sont tous égaux ou inférieurs à  $M_1$  : on a donc

$$\begin{aligned} M_1 \delta_1 + M_1 \delta_1 + \dots + M_p \delta_p &\leq M_1 (\delta_1 + \dots + \delta_p), \\ &\leq M_1 \delta_1, \end{aligned}$$

Ainsi chaque terme  $M_i \delta_i$  de  $M$  est remplacé, dans la somme relative au nouveau système d'intervalles, par une suite de termes dont la somme est au plus égale au terme qu'ils remplacent. Donc, *dans toute subdivision des intervalles, quelque loin qu'on la continue,  $M$  ne peut que rester constante ou diminuer. Elle a donc nécessairement une limite.*

On verra de même que la somme  $m$  a une limite vers laquelle elle tend en croissant sans cesse, et par conséquent la somme  $\Delta$  qui est égale à  $M - m$  décroît constamment et a aussi une limite égale à la différence des limites de  $M$  et de  $m$ . Il ne reste plus qu'à démontrer que *ces trois limites demeurent toujours les mêmes, de quelque manière que les intervalles tendent vers zéro.*

A cet effet, nous commencerons par résoudre la question suivante :

Soient

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$$

un système d'intervalles, et

$$M = M_1 \delta_1 + \dots + M_n \delta_n$$

la somme  $M$  correspondante. Prenons un second système d'intervalles

$$\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_p,$$

tel que le plus grand des intervalles  $\delta'$  soit inférieur au plus petit des intervalles  $\delta$  divisé par un nombre entier  $h$ . Alors on aura, quels que soient  $\alpha$  et les indices  $\beta$ ,

$$\delta'_\alpha < \frac{\delta_\beta}{h};$$

et soit

$$M' = M'_1 \delta'_1 + \dots + M'_p \delta'_p$$

la valeur de la somme  $M$  correspondant à ce nouveau système d'intervalles. Proposons-nous de trouver une limite supérieure de la différence  $M' - M$  : nous entendons par là non une limite supérieure de la valeur absolue, mais simplement un nombre supérieur à  $M' - M$ .

Soient

$$a, x_1, x_2, \dots, x_{\mu-1}, b,$$

$$a, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\rho-1}, b$$

les deux suites de valeurs de  $x$  déterminant, la première les intervalles  $\delta$ ,

$$\delta_1 = x_1 - a, \quad \delta_2 = x_2 - x_1, \dots,$$

la seconde les intervalles  $\delta'$ ,

$$\delta'_1 = \gamma_1 - a, \quad \delta'_2 = \gamma_2 - \gamma_1, \dots$$

En intercalant ces deux suites entre  $a$  et  $b$ , on aura une nouvelle suite

$$a, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\mu, x_1, \gamma_{\mu+1}, \dots, \gamma_\nu, x_2, \gamma_{\nu+1}, \dots, \gamma_\rho, x_3, \gamma_{\rho+1}, \dots, b,$$

et il est clair que, les intervalles  $\delta'$  étant tous plus petits que les intervalles  $\delta$ , entre deux valeurs consécutives de  $\gamma$  ne peuvent se trouver deux valeurs de  $x$ . Il peut arriver que  $x_1 = \gamma_\mu$  ou  $x_2 = \gamma_\nu$ , mais cela ne changera rien aux raisonnements. On a

$$\delta_1 = x_1 - a = \gamma_1 - a + \gamma_2 - \gamma_1 + \dots + \gamma_\mu - \gamma_{\mu-1} + x_1 - \gamma_\mu,$$

$$\delta_2 = x_2 - x_1 = \gamma_{\mu+1} - x_1 + \gamma_{\mu+2} - \gamma_{\mu+1} + \dots + \dots + x_2 - \gamma_\nu,$$

$$\delta_3 = x_3 - x_2 = \gamma_{\nu+1} - x_2 + \dots + \dots + x_3 - \gamma_\rho,$$

.....,

et par suite

$$\mathbf{M} = (\gamma_1 - a) \mathbf{M}_1 + (\gamma_2 - \gamma_1) \mathbf{M}_2 + \dots + (x_1 - \gamma_\mu) \mathbf{M}_1$$

$$+ (\gamma_{\mu+1} - x_1) \mathbf{M}_2 + \dots + (x_2 - \gamma_\nu) \mathbf{M}_2$$

$$+ (\gamma_{\nu+1} - x_2) \mathbf{M}_3 + \dots + (x_3 - \gamma_\rho) \mathbf{M}_3$$

$$+ \dots,$$

$$\mathbf{M}' = (\gamma_1 - a) \mathbf{M}'_1 + (\gamma_2 - \gamma_1) \mathbf{M}'_2 + \dots + (x_1 - \gamma_\mu) \mathbf{M}'_{\mu+1}$$

$$+ (\gamma_{\mu+1} - x_1) \mathbf{M}'_{\mu+1} + \dots + (x_2 - \gamma_\nu) \mathbf{M}'_{\nu+1}$$

$$+ (\gamma_{\nu+1} - x_2) \mathbf{M}'_{\nu+1} + \dots + (x_3 - \gamma_\rho) \mathbf{M}'_{\rho+1}$$

$$+ \dots,$$

$$\mathbf{M}' - \mathbf{M} = (\gamma_1 - a) (\mathbf{M}'_1 - \mathbf{M}_1) + \dots + (x_1 - \gamma_\mu) (\mathbf{M}'_{\mu+1} - \mathbf{M}_1)$$

$$+ (\gamma_{\mu+1} - x_1) (\mathbf{M}'_{\mu+1} - \mathbf{M}_2) + \dots + (x_2 - \gamma_\nu) (\mathbf{M}'_{\nu+1} - \mathbf{M}_2)$$

$$+ (\gamma_{\nu+1} - x_2) (\mathbf{M}'_{\nu+1} - \mathbf{M}_3) + \dots + (x_3 - \gamma_\rho) (\mathbf{M}'_{\rho+1} - \mathbf{M}_3)$$

$$+ \dots$$

Il est clair que tous les termes de cette somme correspondant à des intervalles tels que  $y_1 - a, y_2 - y_1$ , compris entièrement entre  $a$  et  $x_1$ , entre  $x_1$  et  $x_2$ , ne peuvent être que nuls ou négatifs. En effet, en vertu d'une remarque déjà faite, les intervalles  $\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_\mu$ , par exemple, étant tous compris dans l'intervalle  $\delta$ , les limites maxima  $M'_1, \dots, M'_\mu$  sont inférieures ou au plus égales à  $M_1$ . On a donc

$$\begin{aligned} M' - M &\leq (x_1 - \gamma_\mu)(M'_{\mu+1} - M_1) + (\gamma_{\mu+1} - x_1)(M'_{\mu+1} - M_2) \\ &\quad + (x_2 - \gamma_\nu)(M'_{\nu+1} - M_2) + (\gamma_{\nu+1} - x_2)(M'_{\nu+1} - M_3) \\ &\quad + (x_3 - \gamma_\rho)(M'_{\rho+1} - M_3) + (\gamma_{\rho+1} - x_3)(M'_{\rho+1} - M_4) \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

Or chacune des différences  $M'_{\mu+1} - M_1, \dots$  est inférieure, en valeur absolue et en signe, à la différence  $B - A$  entre les deux membres qui comprennent toutes les valeurs de la fonction dans l'intervalle  $(a, b)$ ; on a donc

$$M' - M < (\delta'_{\mu+1} + \delta'_{\nu+1} + \delta'_{\rho+1} + \dots)(B - A);$$

or

$$\delta'_{\mu+1} < \frac{\delta_1}{h}, \quad \delta'_{\nu+1} < \frac{\delta_2}{h}, \quad \delta'_{\rho+1} < \frac{\delta_3}{h},$$

donc

$$(1) \quad M' - M < \frac{B - A}{h} (\delta_1 + \delta_2 + \dots) < \frac{(b - a)(B - A)}{h}.$$

Il résulte de cette inégalité que la différence  $M' - M$ , si elle est positive, est inférieure à un nombre qui tend vers zéro quand  $h$  grandit indéfiniment. Par un choix convenable de  $h$ , elle pourra être rendue plus petite que tout nombre donné.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition que nous avons énoncée. Supposons que l'on parte de différents systèmes d'intervalles et que, dans chaque système, on fasse tendre tous les intervalles vers zéro, en subdivisant, comme il a été indiqué, les intervalles à l'infini. Nous avons démontré qu'il y a une limite pour la somme  $M$ , dans chaque mode de subdivision : je dis que toutes ces limites sont égales.

En effet, soit  $\mu$  la limite de  $M$  dans un premier système de division; soit  $\mu'$  la limite dans un autre système. Si ces deux limites ne sont pas égales, on aura  $\mu' > \mu$  par exemple.



Cela posé, dans le système d'intervalles correspondant à la limite  $\mu$ , on peut prendre le nombre d'intervalles assez grand pour que la somme  $M$  correspondante satisfasse aux inégalités

$$\mu < M < \mu + \sigma < \mu';$$

alors, dans le système d'intervalles correspondant à la limite  $\mu'$ , toutes les sommes  $M'$  seront supérieures à  $\mu'$  et par conséquent à  $M$ . Supposons que l'on ait poussé assez loin la division des intervalles pour que tous les intervalles correspondant à la somme  $M'$  soient plus petits que les intervalles correspondant à  $M$  divisés par  $h$ . On aura

$$M' - M < \frac{(b-a)(B-A)}{h}.$$

Ainsi on pourrait rendre la différence positive  $M' - M$  inférieure à tout nombre donné en prenant  $h$  suffisamment grand. Cela est évidemment impossible si  $\mu' > \mu$ , puisque la somme  $M'$  est supérieure à  $\mu'$  et la somme  $M$  inférieure à  $\mu + \sigma$ . Donc

$$M' - M > \mu' - \mu - \sigma,$$

et comme on peut prendre  $\sigma$  aussi petit qu'on le veut, on voit que  $M' - M$  devrait demeurer supérieur à un nombre déterminé. Donc  $\mu'$  ne peut être différent de  $\mu$ .

Ainsi, quel que soit le système primitif d'intervalles, si on le subdivise à l'infini d'une manière quelconque, pourvu que tous les intervalles tendent vers zéro, la somme  $M$  tendra toujours en décroissant vers une limite parfaitement déterminée  $\mu$ .

Pour compléter notre démonstration, il importe de remarquer qu'on ne fait pas toujours tendre les intervalles vers zéro par le mode de subdivision qui a été indiqué. Par exemple, on peut diviser l'intervalle  $(a, b)$  en  $n$  parties égales, puis en  $n + 1$ , puis en  $n + 2$ , et ainsi de suite. Il importe d'examiner tous ces cas; mais ici la discussion devient très-simple.

La somme  $M$  relative à tout système d'intervalles est évidemment supérieure à  $\mu$ ; car, si l'on part de ce système d'intervalles en le subdivisant, la somme  $M$ , d'après ce qui a été démontré, tend vers  $\mu$  par des valeurs décroissantes. Il suffit donc de démontrer que, lorsque tous les

intervalles tendent vers zéro d'une manière quelconque, elle finit par différer de  $\mu$  d'aussi peu qu'on le veut.

A cet effet, nous avons vu qu'en partant d'un premier système d'intervalles et en le subdivisant à l'infini on peut obtenir un système d'intervalles pour lequel on ait

$$M < \mu + \sigma,$$

$\sigma$  étant aussi petit qu'on le veut. Dès que l'on aura tout autre système d'intervalles tous plus petits que les intervalles correspondant à  $M$ , divisés par  $h$ , la somme  $M'$  correspondante sera plus petite que

$$M + \frac{(b-a)(B-A)}{h} < \mu + \sigma + \frac{(b-a)(B-A)}{h}.$$

Comme on peut rendre  $\sigma$  et  $\frac{1}{h}$  aussi petits qu'on le veut, on voit que la somme  $M$  se rapprochera toujours de  $\mu$ , quels que soient les modes de division adoptés, pourvu que tous les intervalles tendent vers zéro.

Nous sommes maintenant en mesure de donner, en toute rigueur, la définition de l'intégrale définie d'après Riemann; mais, dès à présent, nous pouvons diviser en deux grandes classes les fonctions discontinues. Nous venons de démontrer que les trois sommes

$$M = \delta_1 M_1 + \dots + \delta_n M_n,$$

$$m = \delta_1 m_1 + \dots + \delta_n m_n,$$

$$\Delta = \delta_1 D_1 + \dots + \delta_n D_n$$

tendent vers des limites finies et déterminées quand tous les intervalles tendent vers zéro. Nous pouvons appeler ces limites  $M_{ab}$ ,  $m_{ab}$ ,  $\Delta_{ab}$ . On a

$$\Delta_{ab} = M_{ab} - m_{ab}.$$

Il est clair que la nature intime de la fonction dépend surtout de la limite  $\Delta_{ab}$ .

Pour une première classe de fonctions, on aura

$$\Delta_{ab} = 0, \quad M_{ab} = m_{ab};$$

pour la deuxième classe,  $\Delta_{ab}$  sera en général une fonction de  $a$  et de  $b$ , différente de zéro.

Riemann a fait connaître un caractère simple qui permet de reconnaître si la somme

$$\Delta = \delta_1 D_1 + \dots + \delta_n D_n$$

tend vers zéro. Prenons une quantité  $\sigma$  fixe, mais aussi petite qu'on le voudra. *Pour que la somme  $\Delta$  tende vers zéro, il faut et il suffit que la grandeur totale des intervalles pour lesquels l'oscillation est plus grande que  $\sigma$  tende vers zéro quand  $n$  augmente indéfiniment.*

Cette condition est nécessaire. En effet, si elle n'est pas remplie, la contribution des intervalles où l'oscillation est plus grande que  $\sigma$  à la somme  $\Delta$  sera plus grande que leur longueur totale  $l$  multipliée par  $\sigma$ ; et, comme  $l$  ne tend pas vers zéro,  $\Delta$  sera toujours plus grand que  $l\sigma$  et ne tendra pas vers zéro.

Elle est suffisante; car, si elle est remplie, la contribution des intervalles où l'oscillation est plus grande que  $\sigma$  sera plus petite que  $l(B - A)$ . D'ailleurs, la grandeur totale des autres intervalles étant plus petite que  $(b - a)$ , on aura

$$\Delta < l(B - A) + \sigma(b - a),$$

$l$  tendant vers zéro et  $\sigma$  pouvant être pris aussi petit qu'on le veut; on peut démontrer ainsi que  $\Delta_{ab}$  est inférieur à tout nombre positif aussi petit qu'on le veut. Donc

$$\Delta_{ab} = 0.$$

Il importe de remarquer que, dans les démonstrations précédentes, nous avons supposé  $a < b$ . Si  $a$  était plus grand que  $b$ , on arriverait de même à une limite, en intercalant des quantités décroissantes  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ,

$$a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b.$$

On aura ainsi deux limites égales et contraires suivant le sens dans lequel on supposera parcouru un intervalle; on aurait

$$M_{ab} = -M_{ba}, \quad \Delta_{ab} = -\Delta_{ba},$$

et, en général,

$$M_{ac} = M_{ab} + M_{bc}, \quad \Delta_{ab} = \Delta_{ac} + \Delta_{cb}, \dots$$

### III. — Définition de l'intégrale définie.

Soit  $f(x)$  une fonction continue de  $x$  qui reste comprise, quand  $x$  varie de  $a$  à  $b$ , entre deux nombres fixes  $A, B$  et prenons entre  $a$  et  $b$  une série de valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , rangées par ordre de grandeur. Désignons toujours  $x_1 - a$  par  $\delta_1$ ;  $x_2 - x_1$  par  $\delta_2, \dots$ , et soient en outre  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  des nombres positifs, inférieurs ou égaux à l'unité. Considérons la somme

$$\Sigma = \delta_1 f(a + \theta_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \theta_2 \delta_2) + \dots + \delta_n f(x_{n-1} + \theta_n \delta_n).$$

Il est clair qu'elle dépend à la fois du choix des intervalles  $\delta$  et des quantités  $\theta$ . Examinons d'abord comment elle varie quand on donne aux  $\theta$  tous les systèmes possibles de valeurs.

Désignons par  $M_i, m_i$  les limites maxima et minima de la fonction dans le  $i^{\text{ème}}$  intervalle. Le terme  $\delta_i f(x_i + \theta_{i+1} \delta_{i+1})$  demeurera compris lorsque  $\theta_{i+1}$  variera entre  $\delta_i M_i$  et  $\delta_i m_i$ , et il s'approchera autant qu'on le voudra de l'une ou de l'autre de ces quantités. Donc la somme  $\Sigma$  demeurera comprise entre les deux sommes

$$M = \delta_1 M_1 + \dots + \delta_n M_n,$$

$$m = \delta_1 m_1 + \dots + \delta_n m_n,$$

dont elle pourra s'approcher autant qu'on voudra.

Donc, si l'on suppose que tous les intervalles  $\delta$  tendent vers zéro, leur nombre augmentant indéfiniment, pour que la somme  $\Sigma$  ait une limite, quels que soient les  $\theta$ , il faut et il suffit que les limites de  $M$  et de  $m$  soient égales, et par conséquent que l'on ait

$$M_{ab} = m_{ab}, \quad \Delta_{ab} = 0.$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que la somme  $\Sigma$  ait une limite, c'est que la grandeur totale des intervalles dans lesquels les oscillations sont plus grandes que  $\sigma$  tende vers zéro quand tous les intervalles tendent vers zéro,  $\sigma$  étant fixe, mais aussi petit qu'on le veut.

Si cette condition est remplie, la limite de  $\Sigma$  est dite l'intégrale de

$f(x)$  entre les limites  $a, b$ . On a

$$(2) \quad \lim \Sigma = \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

*Remarque.* — Si la somme  $\Delta_{ab}$  n'est pas nulle, la limite de  $\Sigma$  dépendra du choix des quantités  $\theta$  et pourra prendre toutes les valeurs intermédiaires entr  $M_{ab}$  et  $m_{ab}$ .  $\Sigma$  ne peut donc, dans tous les cas, que tendre vers une limite ou être indéterminée.

On a évidemment

$$B(b-a) < \Sigma < A(b-a).$$

Les fonctions continues sont toujours susceptibles d'intégration; cela résulte du théorème suivant :

**THÉORÈME III.** — *Étant donnée une fonction  $f(x)$  continue dans l'intervalle  $(a, b)$ , on peut assigner, pour chaque valeur de  $\sigma$ , aussi petite qu'on le veut, une quantité  $\delta$  telle, que si l'on subdivise l'intervalle  $(a, b)$  en intervalles tous plus petits que  $\delta$ , les oscillations de la fonction dans ces intervalles soient toutes plus petites que  $\sigma$ .*

Ce théorème se trouve dans l'ouvrage de M. Thomae, *Abriss einer Theorie der complexen Functionen*, Halle, 1873. La démonstration nouvelle que nous en donnons offre l'avantage de s'appliquer aux fonctions de plusieurs variables.

Divisons l'intervalle  $(a, b)$  en intervalles  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ , puis chacun de ceux-ci en intervalles plus petits, et ainsi de suite. Je dis qu'on finira par obtenir un système d'intervalles dans lequel les oscillations seront plus petites que  $\frac{\sigma}{2}$ . En effet, s'il n'en est pas ainsi, comme les oscillations diminuent ou restent constantes quand on subdivise les intervalles, on ne pourra obtenir que le résultat suivant :

Dans un intervalle  $\delta_i$  pour lequel l'oscillation est plus grande que  $\frac{\sigma}{2}$ , il y aura au moins un nouvel intervalle  $\delta'$  dans lequel l'oscillation sera supérieure à  $\frac{\sigma}{2}$ , puis dans celui-ci au moins un nouvel intervalle pour lequel l'oscillation sera encore supérieure à  $\frac{\sigma}{2}$ , et ainsi de suite. On

aura une suite illimitée d'intervalles, tous compris les uns dans les autres et tendant vers zéro, pour lesquels l'oscillation demeurera supérieure à  $\frac{\sigma}{2}$ . Les limites inférieures et supérieures de ces intervalles étant, les unes croissantes ou constantes, les autres décroissantes ou constantes, et l'intervalle tendant vers zéro, ces deux séries de limites tendront vers une valeur commune  $l$  qui aura la propriété suivante : Dans tout intervalle  $(l-h, l+h)$ , les oscillations de la fonction seront, quel que soit  $h$ , plus grandes que  $\frac{\sigma}{2}$ . Or cela est impossible si la fonction est continue pour  $x = l$ ; car alors on peut trouver une quantité  $h$  telle que l'on ait

$$f(l \pm \theta h) - f(l) < \frac{\sigma}{4}$$

en valeur absolue. Alors la différence des valeurs de la fonction, pour deux valeurs de  $x$  comprises entre  $l-h$  et  $l+h$ , sera nécessairement plus petite que  $2 \frac{\sigma}{4}$  ou  $\frac{\sigma}{2}$ . Il est donc impossible que, dans quelques-uns des intervalles, l'oscillation demeure supérieure à  $\frac{\sigma}{2}$ .

Supposons donc qu'on ait constitué, au moyen des valeurs  $a, x_1, \dots, x_{n-1}, b$ , un système d'intervalles pour lesquels les oscillations soient plus petites que  $\frac{\sigma}{2}$ . Soit  $\delta$  le plus petit de ces intervalles : si l'on subdivise  $(a, b)$  par des valeurs

$$y_1, y_2, \dots, y_{p-1},$$

telles que

$$y_{q+1} - y_q \leq \delta,$$

alors deux valeurs consécutives de  $y$  ne pourront comprendre que l'une des quantités  $x_i$  et l'oscillation dans l'intervalle  $(y_q, y_{q+1})$  sera au plus égale à  $\frac{\sigma}{2}$  s'il n'y a pas de quantité  $x_h$  comprise entre  $y_q$  et  $y_{q+1}$ , et au plus égale à  $\sigma$  s'il y a une quantité  $x_h$  entre  $y_q$  et  $y_{q+1}$ .

*Corollaire.* — Toute fonction continue est susceptible d'intégration.

Il importe de remarquer que cette propriété subsiste si la fonction, tout en étant généralement continue, devient discontinue pour certaines

valeurs en nombre limité  $l, l', l'', \dots$  de la variable  $x$ ; car alors les oscillations de la fonction ne pourront demeurer plus grandes que  $\sigma$  que dans les intervalles

$$l - h, l + h; l' - h, l' + h; l'' - h, l'' + h, \dots,$$

dont la grandeur totale peut être rendue aussi petite qu'on le veut.

#### IV. — Conséquences de la définition de l'intégrale.

Des conséquences de diverse nature peuvent être déduites de la définition précédente de l'intégrale.

D'abord l'intégrale de la fonction  $f(x)$  continuera à exister et ne changera pas de valeur, si l'on change les valeurs de  $f(x)$  pour un nombre limité de valeurs de  $x$ .

En effet, soient  $l, l', l'', \dots$  les valeurs de  $x$  pour lesquelles on change les valeurs de  $f(x)$ . Les oscillations dans les intervalles  $(l - h, l + h)$ ,  $(l' - h, l' + h), \dots$  pourront devenir plus grandes que  $\sigma$ ; mais la longueur totale de ces intervalles pourra être rendue aussi petite qu'on le voudra. L'intégrale continuera donc à exister. D'autre part, la valeur n'aura pas changé, puisque dans la somme  $\Sigma$

$$\Sigma = f(a + \theta_1 \delta_1) \delta_1 + \dots$$

on peut toujours éviter les quantités  $l, l'$ , par un choix convenable des quantités  $\theta$ . La remarque précédente pourrait être beaucoup étendue, mais elle suffit pour l'objet que nous nous proposons.

En second lieu, l'intégrale

$$\int_a^x f(x) dx$$

est toujours une fonction continue de  $x$ . En effet, soient A et B deux limites de  $f(x)$ . L'accroissement de l'intégrale, quand on donne à  $x$  un accroissement  $h$  positif ou négatif, est

$$\int_x^{x+h} f(x) dx,$$

et il sera compris entre les limites  $Ah$  et  $Bh$ . Il tendra donc vers zéro avec  $h$ .

En troisième lieu, soit

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx,$$

et supposons que  $f(x)$  soit continue pour la valeur  $x = x_0$ . Alors, dans l'intervalle  $(x_0, x_0 + h)$ ,  $f(x)$  sera comprise entre  $f(x_0) + \sigma$  et  $f(x_0) - \sigma$ ,  $\sigma$  tendant vers zéro avec  $h$ . On aura donc

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) &= \int_{x_0}^{x_0 + h} f(x) dx < h [f(x_0) + \sigma], \\ &> h [f(x_0) - \sigma], \\ f(x_0) - \sigma &< \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} < f(x_0) + \sigma, \end{aligned}$$

d'où

$$\lim \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Ainsi la fonction  $f(x)$  sera la dérivée de  $F(x)$ , pour toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $f(x)$  est continue.

On démontrerait d'une manière toute semblable (voir art. IX) que, si une fonction susceptible d'intégration  $f(x)$  est la dérivée d'une autre fonction  $F(x)$ , on a nécessairement

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a).$$

La division des fonctions discontinues en deux classes, les unes susceptibles d'intégration, les autres non intégrables, a une grande importance, et les remarques suivantes montrent que ce caractère se conserve à travers des transformations très-variées de la fonction.

Soit  $\varphi(u)$  une fonction de  $u$  telle que

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(v)}{u - v}$$

soit comprise entre deux limites finies  $\alpha, \beta$  quand  $u$  et  $v$  prennent toutes les valeurs comprises entre A et B.

Alors les oscillations de la fonction  $f(x)$  toujours comprise entre A et B et celles de la fonction  $\varphi[f(x)]$  seront évidemment du même ordre



dans tout intervalle et, par conséquent, les deux fonctions  $f(x)$ ,  $\varphi[f(x)]$  appartiennent à la même classe. Par exemple, si une fonction  $f(x)$  est intégrable, il en sera de même des fonctions

$$[f(x)]^2, [f(x)]^n, \sqrt{1+f^2(x)}, \dots$$

Nous allons maintenant indiquer des classes de fonctions discontinues susceptibles d'intégration, et à cet effet nous allons donner d'abord quelques propositions indispensables sur la théorie des séries.

### V. — Des séries.

Toutes les fois qu'une série reste convergente quand on prend tous ses termes avec le même signe, la somme de cette série est indépendante de l'ordre des termes, et nous dirons, pour abrégé, que la série est *absolument convergente*.

Nous dirons qu'une série

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots,$$

dont tous les termes sont des fonctions continues ou discontinues de  $x$ , est également ou *uniformément* (*gleichmässig*) *convergente* (') dans un intervalle donné ( $a, b$ ) quand on peut prendre  $n$  assez grand pour que le reste  $R_n$  de la série soit inférieur à une quantité  $\sigma$  aussi petite qu'on le veut pour toutes les valeurs de  $x$  égales à  $a, b$ , ou comprises entre  $a$  et  $b$ .

Une série peut être toujours convergente dans une intervalle donné, sans être uniformément convergente dans cet intervalle. En voici un premier exemple. Considérons la série

$$x^2 e^{-x^2} = \sum_1^\infty [n^2 x^2 e^{-n^2 x^2} - (n+1)^2 x^2 e^{-(n+1)^2 x^2}],$$

qui est convergente pour toute valeur de  $x$ . La série n'est pas également convergente dans l'intervalle  $(0, 1)$ . En effet, le reste  $R_n$  a pour expression

$$R_n = n^2 x^2 e^{-n^2 x^2};$$

---

(') Voir, au sujet des séries à égale convergence et de leur emploi dans la représentation des fonctions en séries trigonométriques, différents travaux de MM. Heine, Thomae Cantor, dans le *Journal de M. Borchardt*.

il tend vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ , quelle que soit la valeur fixe donnée à  $x$ . Mais, dans l'intervalle  $(0, 1)$ , il y a toujours une valeur de  $x$  égale à  $\frac{1}{n}$  pour laquelle on a  $R_n = \frac{1}{e}$ . Donc  $R_n$  ne peut pas être rendu, quel que soit  $x$ , plus petit que  $\sigma$  pour une valeur fixe donnée à  $n$ ; *son maximum ne tend pas vers zéro quand  $n$  augmente indéfiniment*. Si l'on prenait la série

$$\Sigma [n^2 x e^{-n^2 x^2} - (n+1)^2 x e^{-(n+1)^2 x^2}],$$

le reste  $R_n$  tendrait bien vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ , pour toute valeur fixe de  $x$ ; mais la valeur maximum  $\frac{n}{e}$  dans l'intervalle  $(0, 1)$ , au lieu de tendre vers zéro, croîtrait indéfiniment avec  $n$ .

THÉORÈME IV. — *Si une série*

$$f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \dots$$

*est uniformément convergente dans un intervalle donné  $(a, b)$  et, si ses termes sont des fonctions continues de  $x$ , elle représente dans cet intervalle une fonction continue de  $x$ .*

En effet, décomposons  $f(x)$  en deux parties, la somme  $S_n(x)$  des  $n$  premiers termes et le reste  $R_n(x)$ . On pourra prendre  $n$  assez grand pour que, quel que soit  $x$ ,  $R_n(x)$  soit, dans l'intervalle considéré, plus petit que  $\sigma$ . Or on a

$$f(x \pm \theta h) - f(x) = S_n(x \pm \theta h) - S_n(x) + R_n(x \pm \theta h) - R_n(x),$$

et

$$R_n(x \pm \theta h) - R_n(x) < 2\sigma$$

en valeur absolue. Les termes étant des fonctions continues, on peut prendre ensuite  $h$  assez petit pour que l'on ait

$$S_n(x \pm \theta h) - S_n(x) < \sigma$$

en valeur absolue; donc on peut prendre  $h$  assez petit pour que l'on ait

$$f(x \pm \theta h) - f(x) < 3\sigma$$

en valeur absolue; ce qui est la définition même de la continuité.

Pour ce qui concerne les limites de l'intervalle  $(a, b)$ , on démontrerait de même que

$$f(a) = \lim f(a + h), \quad f(b) = \lim f(b - h),$$

$h$  tendant vers zéro par des valeurs positives.

*Remarque.* — La réciproque de ce théorème n'est pas vraie. Nous avons donné plus haut un exemple d'une fonction continue, développable en une série de fonctions continues qui n'est pas également convergente; mais on peut énoncer le corollaire suivant :

Si une fonction  $f(x)$  est développable en une série convergente dans l'intervalle  $(a, b)$ , et si la fonction est discontinue pour une valeur  $x_0$  de  $x$  comprise dans l'intervalle  $(a, b)$ , la série ne pourra être également convergente dans un intervalle quelconque comprenant la valeur  $x_0$ .

Nous supposons, bien entendu, que les termes sont des fonctions continues de  $x$ .

Par exemple, les séries trigonométriques qui développent des fonctions discontinues ne peuvent être uniformément convergentes dans des intervalles comprenant une des valeurs pour lesquelles la fonction est discontinue. Ainsi la série

$$\sum \frac{\sin 2n\pi x}{n},$$

série toujours convergente, n'est pas uniformément convergente dans tout intervalle comprenant un multiple impair de  $\frac{1}{2}$ .

Il existe des fonctions discontinues telles que  $f(x + h)$  et  $f(x - h)$  aient, lorsque  $h$  tend vers zéro par des valeurs positives, des limites différentes de  $f(x)$ . Nous distinguerons ces limites, à l'exemple de Dirichlet, par  $f(x + 0)$  et  $f(x - 0)$ . Par exemple, la fonction  $E(x)$  qui représente le plus grand entier contenu dans  $x$  est telle que, pour tout nombre entier  $n$ , on a

$$E(n - 0) = n - 1, \quad E(n) = n, \quad E(n + 0) = n.$$

Soit de même  $(x)$  la fonction qui représente la différence entre  $x$  et l'entier le plus voisin. Cette fonction serait indéterminée pour

$x = \text{entier} + \frac{1}{2}$ ; nous poserons alors

$$(x) = 0, \text{ pour } x = \text{entier} + \frac{1}{2}.$$

Cette fonction est toujours continue, excepté pour les valeurs de  $x$  de la forme  $n + \frac{1}{2}$ ,  $n$  étant entier. On a alors

$$(n + \frac{1}{2}) = 0, \quad (n + \frac{1}{2} - 0) = \frac{1}{2}, \quad (n + \frac{1}{2} + 0) = -\frac{1}{2}.$$

C'est à des fonctions de ce genre que s'applique le théorème suivant :

**THÉORÈME V.** — *Si les termes d'une série uniformément convergente*

$$f(x) = \varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x) + \dots$$

*sont des fonctions  $\varphi_n(x)$  pour lesquelles  $\varphi_n(x+0)$  ou  $\varphi_n(x-0)$  existent, la série jouit de la même propriété, et l'on a*

$$f(x+0) = \varphi_1(x+0) + \dots + \varphi_n(x+0) + \dots$$

$$f(x-0) = \varphi_1(x-0) + \dots + \varphi_n(x-0) + \dots$$

Ce théorème se démontre comme le précédent.

On voit qu'une série uniformément convergente dans un intervalle donné peut, en quelque sorte, être traitée comme les sommes composées d'un nombre limité de termes.

Le théorème précédent va nous permettre de définir des fonctions discontinues *dans tout intervalle*.

Soit la série

$$f(x) = a_1 \frac{E(x)}{x} + a_2 \frac{E(2x)}{2x} + \dots + a_n \frac{E(nx)}{nx}.$$

Si la série des constantes

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

est absolument convergente, la série  $f(x)$  aura ses termes inférieurs à ceux de la série  $A$ , son reste inférieur, quel que soit  $x$ , à celui de  $A$  : elle sera donc uniformément convergente dans tout intervalle. On aura donc

$$f(x \pm 0) = \sum a_n \frac{E(nx \pm 0)}{nx}.$$

Si  $x$  est incommensurable, la fonction  $f(x)$  est continue.

Si  $x$  est commensurable et égal à la fraction irréductible  $\frac{p}{q}$ , on a bien

$$f(x + 0) = f(x);$$

mais

$$f(x - 0) = f(x) - \frac{1}{qx} \left( a_1 + \frac{a_{2q}}{2} + \frac{a_{3q}}{3} + \dots \right).$$

Ainsi la fonction  $f(x)$  est discontinue pour toutes les valeurs commensurables de  $x$ .

Soit encore la série

$$f(x) = a_1(x) + a_2(2x) + \dots + a_n(nx) + \dots,$$

où  $(x)$  a la signification indiquée précédemment. Le reste de cette série est inférieur à celui de la série des constantes

$$A = a_1 + a_2 + \dots,$$

et, par conséquent, la série  $f(x)$  sera uniformément convergente dans tout intervalle si la série  $A$  est absolument convergente.

Cela posé pour toute valeur incommensurable de  $x$  ou pour toute valeur commensurable de la forme  $\frac{p}{2q+1}$ ,  $nx$  ne sera jamais égal, quel que soit  $n$ , à un entier plus  $\frac{1}{2}$  et, par conséquent, la fonction  $(nx)$  sera continue. On aura donc, pour toute valeur de  $x$  de la forme indiquée,

$$\lim f(x \pm h) = f(x).$$

La fonction  $f(x)$  est continue pour toutes les valeurs incommensurables de  $x$  et pour toutes les valeurs de la forme  $\frac{p}{2q+1}$ .

Considérons, au contraire, les valeurs commensurables de  $x$  qui, réduites à leur plus simple expression, sont de la forme  $\frac{p}{2q}$ ;  $p$  sera nécessairement impair, et l'on aura

$$\begin{aligned} (qx + 0) &= (qx) - \frac{1}{2}, & (qx - 0) &= (qx) + \frac{1}{2}, \\ (3qx + 0) &= (3qx) - \frac{1}{2}, & (3qx - 0) &= (3qx) + \frac{1}{2}, \dots \end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned} f(x + 0) &= f(x) - \frac{1}{2}(a_q + a_{2q} + a_{3q} + \dots), \\ f(x - 0) &= f(x) + \frac{1}{2}(a_q + a_{2q} + a_{3q} + \dots). \end{aligned}$$

Ainsi la fonction  $f(x)$  est discontinue de telle manière qu'il y ait une limite pour  $f(x + h)$  et  $f(x - h)$  quand  $h$  tend vers zéro par des valeurs positives, et cela pour une infinité de valeurs de  $x$  dans tout intervalle donné.

**THÉORÈME V.** — *Si tous les termes d'une série sont des fonctions continues ou discontinues susceptibles d'intégration, et si la série est uniformément convergente dans un intervalle donné  $(a, b)$ , la fonction que représente la série, et qui n'est pas nécessairement continue, sera susceptible d'intégration. Son intégrale sera la somme des intégrales de tous ses termes.*

Décomposons la série en deux parties, la somme des  $n$  premiers termes et le reste. On aura, en désignant par  $f(x)$  la fonction représentée par la série,

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

On peut prendre, par hypothèse,  $n$  assez grand pour que  $R_n(x)$  demeure, quel que soit  $x$ , inférieur à  $\sigma$ . D'autre part, si, comme nous le supposons, les termes ne deviennent pas infinis,  $S_n(x)$  demeurera comprise entre deux limites fixes quand  $x$  prendra toutes les valeurs comprises dans l'intervalle  $(a, b)$ : donc déjà la fonction  $f(x)$  satisfait à la première condition d'intégrabilité. Elle demeure comprise entre deux limites fixes quand  $x$  varie de  $a$  à  $b$ .

D'après cela, si nous formons la somme

$$\Sigma = f(a + \theta_1, \delta_1)\delta_1 + f(x_1 + \theta_2, \delta_2)\delta_2 + \dots,$$

relative à l'intervalle  $(a, x)$  compris dans  $(a, b)$ , cette somme ne pourra (art. III) que tendre vers une limite finie ou être indéterminée. Si elle tend vers une limite finie, la fonction est intégrable. Tout se réduit donc à montrer que  $\Sigma$  n'est pas indéterminée. Or décomposons la somme  $\Sigma$  en deux parties en remplaçant chaque valeur de  $f(x)$  par  $S_n(x) + R_n(x)$ . Nous aurons

$$\Sigma = \Sigma' + \Sigma'',$$

$\Sigma'$  étant la partie de la somme où  $f(x)$  est remplacée par  $S_n(x)$  et  $\Sigma''$

la partie où  $f(x)$  est remplacée par  $R_n(x)$ . Les termes étant intégrables, il en sera de même de la somme  $S_n(x)$ , et par conséquent  $\Sigma'$  tendra vers une limite finie et déterminée. Quant à  $\Sigma''$ , comme  $R_n$  est inférieur à  $\sigma$ ,  $\Sigma''$  sera toujours comprise entre  $\sigma(b-a)$  et  $-\sigma(b-a)$ ;  $\Sigma$  sera donc comprise entre

$$\Sigma' + \sigma(b-a) \quad \text{et} \quad \Sigma' - \sigma(b-a).$$

Comme on peut prendre  $n$  assez grand pour que  $\sigma$  soit aussi petit qu'on le veut, on voit que la somme  $\Sigma$  ne peut rester indéterminée, puisqu'elle demeure comprise entre deux quantités qui diffèrent aussi peu qu'on le veut. Donc la fonction  $f(x)$  est susceptible d'intégration, et son intégrale est la somme des intégrales de tous les termes.

*Corollaire.* — La série des intégrales des termes est uniformément convergente dans le même intervalle que  $f(x)$ .

**THÉORÈME VI.** — *Étant donnée une série  $f(x)$  dont tous les termes sont des fonctions continues ayant des dérivées, si la série des dérivées est uniformément convergente dans un intervalle donné et si ses termes sont susceptibles d'intégration, elle représentera la dérivée de la série  $f(x)$ .*

Soient

$$f(x) = \varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x) + \dots$$

la série proposée et

$$f_1(x) = \varphi'_1(x) + \dots + \varphi'_n(x) + \dots$$

la série des dérivées. Soit  $S_n$  la somme des  $n$  premiers termes de cette série : on aura, d'après le théorème précédent,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f_1(x) dx = \int_a^x S_n(x) dx + \int_a^x R_n(x) dx.$$

Prenons  $n$  assez grand pour que  $R_n(x)$  soit dans tout l'intervalle considéré inférieur à  $\sigma$ , alors  $\int_x^{x+h} R_n(x) dx$  sera inférieur en valeur absolue à  $\sigma h$ . On aura

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &< \frac{1}{h} \int_x^{x+h} S_n(x) dx + \frac{\sigma h}{h} \\ &> \frac{1}{h} \int_x^{x+h} S_n(x) dx - \frac{\sigma h}{h}, \end{aligned}$$

et, en faisant tendre  $h$  vers zéro,

$$S_n(x) - \sigma < \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < S_n(x) + \sigma;$$

donc

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \text{C. Q. F. D.}$$

*Remarque.* — Si les conditions que nous avons indiquées dans l'énoncé du théorème V ne sont pas toutes remplies, on n'a pas le droit d'intégrer, sans un examen préalable, tous les termes de la série. Nous allons donner un exemple d'une série toujours convergente représentant une fonction continue  $f(x)$  de  $x$  et telle que la série des intégrales, qui est toujours convergente, ne représente pas l'intégrale de  $f(x)$ .

Soit

$$(\alpha) \quad -2xe^{-x^2} = \sum_1^{\infty} [-2n^2xe^{-n^2x^2} + 2(n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2}].$$

Intégrons entre les limites zéro et  $x$ ; l'intégrale du premier membre est

$$e^{-x^2} - 1.$$

La série des intégrales des termes est

$$\sum_1^{\infty} [e^{-n^2x^2} - e^{-(n+1)^2x^2}];$$

elle est toujours convergente, et a pour somme  $e^{-x^2}$  et non  $e^{-x^2} - 1$ . Une des conditions indiquées par le théorème V n'est pas en effet remplie; la série  $(\alpha)$  n'est pas uniformément convergente dans l'intervalle  $(0, x)$ .

**THÉORÈME VII.** — *Soit la série*

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots;$$

si la série

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum \frac{\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)}{h},$$

considérée comme fonction de  $h$ , est uniformément convergente quand  $h$  prend toutes les valeurs comprises entre zéro et un nombre fixe positif,



on a,  $h$  tendant vers zéro par des valeurs positives,

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \Sigma \lim \frac{\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)}{h};$$

de même, si la série demeure uniformément convergente quand  $h$  prend toutes les valeurs comprises entre zéro et un nombre fixe négatif, on a

$$\lim \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = \Sigma \lim \frac{\varphi_n(x-h) - \varphi_n(x)}{-h},$$

$h$  tendant vers zéro par des valeurs positives.

Ce théorème est évident, mais il a une utilité réelle : c'est pour cela que nous l'énonçons explicitement.

On sait peu de chose sur la continuité des séries en général. Aussi croyons-nous que les théorèmes suivants, quoique d'une application limitée, pourront avoir un certain intérêt.

**THÉORÈME VIII.** — *Si une série à termes positifs, fonctions continues de  $x$ , est telle que dans un intervalle  $(a, b)$  les termes puissent se partager en deux groupes nettement séparés, l'un formé de termes croissants, l'autre de termes décroissants, la série sera dans l'intervalle  $(a, b)$  une fonction continue de  $x$ .*

D'après l'hypothèse du théorème, nous pouvons décomposer la série en deux autres, l'une pour laquelle les termes croissent, l'autre pour laquelle les termes décroissent. Il suffira donc de démontrer la proposition pour le cas où les termes sont tous croissants ou tous décroissants.

Supposons, en premier lieu, les termes croissants; je dis d'abord que l'on a

$$\lim f(x-h) = f(x),$$

$h$  tendant vers zéro par des valeurs positives.

En effet, décomposons la série  $f(x)$  en ses deux parties  $S_n, R_n$ . On aura

$$\begin{aligned} f(x) &= S_n(x) + R_n(x), \\ f(x-h) &= S_n(x-h) + R_n(x-h). \end{aligned}$$

Lorsque  $h$  tend vers zéro,  $f(x-h)$  croît sans cesse. Elle a donc une

limite égale ou inférieure à  $f(x)$ . D'un autre côté, cette limite est supérieure à celle de  $S_n(x-h)$  qui est  $S_n(x)$ . Ainsi la limite de  $f(x-h)$  est comprise entre  $S_n(x)$  et  $f(x)$ ; elle ne peut donc être que  $f(x)$ .

Je dis maintenant que

$$\lim f(x+h) = f(x),$$

$h$  tendant vers zéro par des valeurs positives.

En effet, on a

$$f(x+h) = S_n(x+h) + R_n(x+h),$$

$f(x+h)$  décroissant avec  $h$  à une limite égale ou supérieure à  $f(x)$ . D'ailleurs, tous les termes étant décroissants, on a,  $h_1$  étant plus petit que  $h$ ,

$$R_n(x+h_1) < R_n(x+h).$$

Donc

$$f(x+h_1) < S_n(x+h_1) + R_n(x+h),$$

et par suite, lorsque  $h_1$  tend vers zéro,

$$\lim f(x+h_1) < S_n(x) + R_n(x+h);$$

$R_n(x+h)$  pouvant être pris aussi petit qu'on le veut, on voit que

$$\lim f(x+h) = f(x).$$

La démonstration se fait de la même manière quand tous les termes décroissent. La proposition est donc démontrée dans toute son étendue.

**THÉORÈME IX.** — *Si une série  $f(x)$  dont les termes sont des fonctions continues*

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x) + \dots$$

*est absolument convergente pour  $x = a$ ,  $x = b$  et toutes les valeurs de  $x$  comprises entre  $a$  et  $b$  et que dans cet intervalle la série puisse se partager en deux autres, pour chacune desquelles les termes varient tous dans le même sens, la série représente une fonction continue de  $x$  dans l'intervalle  $(a, b)$ .*

En effet, il suffira de considérer séparément les termes positifs et les termes négatifs et d'appliquer la proposition précédente.

Les deux théorèmes qui précèdent pourraient se rattacher à la notion des séries également convergentes. Nous avons préféré en donner des

démonstrations élémentaires. Voici d'autres propositions s'appliquant au cas où les séries ne sont pas absolument convergentes.

THÉORÈME X. — *Si la série*

$$(A) \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

*est convergente, il en sera de même de la suivante :*

$$(B) \quad a_0 \varepsilon_0 + a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n + \dots,$$

*où l'on suppose seulement que*

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$$

*forment une suite croissante ou décroissante, mais telle que  $\varepsilon_n$  ait une limite finie,  $\varepsilon_\infty$ , quand  $n$  croît indéfiniment.*

Le théorème peut être considéré comme équivalent à une proposition d'Abel dans le Mémoire sur la série du binôme. Nous l'énonçons seulement en lui donnant toute l'extension dont il nous paraît susceptible.

Pour le démontrer, considérons la somme d'un nombre quelconque de termes de la série B, à partir de  $\varepsilon_{n+1} a_{n+1}$ ,

$$a_{n+1} \varepsilon_{n+1} + \dots + a_{n+p} \varepsilon_{n+p}.$$

Si nous posons

$$R_{n,p} = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p},$$

la série A étant convergente, nous savons que  $R_{n,p}$  tend vers zéro, quel que soit  $p$ , quand  $n$  augmente indéfiniment. On a d'ailleurs

$$a_{n+p} = R_{n,p} - R_{n,p-1},$$

et par suite

$$a_{n+1} \varepsilon_{n+1} + \dots + a_{n+p} \varepsilon_{n+p} = R_{n,1} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}) + R_{n,2} (\varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+3}) + \dots + R_{n,p} \varepsilon_{n+p}.$$

Les quantités

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}, \quad \varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+3}, \dots$$

étant de même signe, on a

$$R_{n,1} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}) + \dots + R_{n,p-1} (\varepsilon_{n+p-1} - \varepsilon_{n+p}) = \mu_n (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+p}),$$

$\mu_n$  étant une moyenne entre les quantités  $R_{n,1}, \dots, R_{n,p}$ , et par conséquent tendant vers zéro avec elles, et par suite

$$a_{n+1} \varepsilon_{n+1} + \dots + a_{n+p} \varepsilon_{n+p} = \mu_n (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+p}) + R_{n,p} \varepsilon_{n+p}.$$

Or les quantités  $\varepsilon$  variant dans le même sens, elles sont toutes plus petites que la plus grande des quantités  $\varepsilon_0, \varepsilon_\infty$ . Donc le second membre est inférieur, en valeur absolue, à la plus grande des quantités

$$(2\mu_n \pm R_{n,p})\varepsilon_0, \quad (2\mu_n \pm R_{n,p})\varepsilon_\infty.$$

Il tend donc vers zéro d'après les hypothèses faites quand  $n$  augmente indéfiniment, et la proposition est démontrée.

**THÉORÈME XI.** — *Soient la série convergente*

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

*et la suite*

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x),$$

*formée de fonctions continues dans l'intervalle  $(a, b)$ , et jouissant des propriétés suivantes. Pour toute valeur de  $x$  égale à  $a, b$ , ou comprise entre  $a$  et  $b$ , les fonctions forment une suite constante ou croissante ou décroissante, c'est-à-dire que le signe de*

$$\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)$$

*est le même pour toute valeur de  $n$ . En outre  $\varphi_0(x), \varphi_\infty(x)$  demeurent finies dans l'intervalle  $(a, b)$ ; alors la série*

$$a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x) + \dots$$

*sera toujours convergente et définira une fonction de  $x$  continue dans tout l'intervalle  $(a, b)$ .*

La convergence résulte du théorème précédent; quant à la continuité, elle résulte de ce que la série est uniformément convergente dans l'intervalle  $(a, b)$ . En effet, le reste  $R_n$ , d'après ce qui a été démontré précédemment, est inférieur à la plus grande des quantités

$$(2\mu_n \pm R_{n,p})\varphi_0(x), \quad (2\mu_n \pm R_{n,p})\varphi_\infty(x)$$

$\varphi_0(x), \varphi_\infty(x)$  demeurant par hypothèse comprises entre des limites fixes quand  $x$  varie dans l'intervalle considéré, on peut prendre  $n$  assez grand pour que le reste soit, quel que soit  $x$ , plus petit que  $\sigma$ .

L'application des propositions précédentes aux séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable  $x$  est immédiate et évidente, mais on peut indiquer plusieurs autres applications.

Par exemple, si la série

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

est convergente, la série

$$\sum \frac{a_n}{1 - \alpha_n z},$$

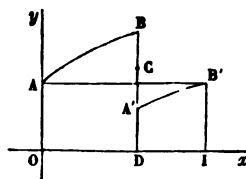
où les nombres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  forment une suite croissante ou décroissante, définit une fonction continue de  $z$ , excepté pour les valeurs qui rendent un terme infini, etc.

VI. — *D'une classe de fonctions discontinues susceptibles d'intégration.*

Nous avons, dans l'article précédent, rencontré des fonctions discontinues, telles qu'il y ait des limites  $f(x + 0), f(x - 0)$  différentes de  $f(x)$  pour  $f(x + h), f(x - h)$ , lorsque  $h$  tend vers zéro par des valeurs positives. On peut prendre des exemples plus généraux de fonctions ayant de telles propriétés.

Soit, par exemple, une fonction  $\varphi(x)$  définie dans l'intervalle  $(0, 1)$  par une courbe telle que  $AB A'B'$ . Nous supposons (*fig. 1*) que

Fig. 1.



$OA = IB'$ . Pour plus de simplicité, nous admettrons que la fonction, généralement continue, soit discontinue pour la seule valeur  $x = \frac{1}{2}$ ; soit

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = DC,$$

et posons

$$BC = \alpha, \quad CA' = \beta;$$

alors

$$\varphi\left(\frac{1}{2} + 0\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \beta, \quad \varphi\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \alpha.$$

Il est clair qu'on peut concevoir ou former une infinité de fonctions satisfaisant à de telles conditions. En dehors de l'intervalle  $(0, 1)$ , la fonction sera définie par l'équation  $\varphi(x + 1) = \varphi(x)$  et par conséquent  $\varphi(x)$  sera toujours inférieure à un nombre  $A$ . Cela posé, la série

$$f(x) = a_1 \varphi(x) + a_2 \varphi(2x) + \dots + a_n \varphi(nx)$$

sera toujours convergente, si la série des constantes

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

est absolument convergente; et, en outre, le reste de la série  $f(x)$  étant toujours inférieur à celui de la série  $s_n$ , où l'on prend tous les termes positivement, multipliés par un nombre fixe  $A$ , il est clair que la série  $f(x)$  sera uniformément convergente dans tout intervalle.

On verra comme précédemment que  $f(x)$  est continue pour toutes les valeurs incommensurables ou commensurables à dénominateur impair. Au contraire, on aura

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{2q} - 0\right) &= f\left(\frac{p}{2q}\right) + \alpha(a_1 + a_2 + a_3 + \dots), \\ f\left(\frac{p}{2q} + 0\right) &= f\left(\frac{p}{2q}\right) - \beta(a_1 + a_2 + a_3 + \dots). \end{aligned}$$

On pourrait multiplier les exemples de ce genre en remplaçant  $\varphi(x)$  par une fonction non périodique, mais restant finie pour toute valeur de  $x$ , en considérant, au lieu de la série  $f(x)$ , la suivante :

$$\sum a_n \varphi(x_n x),$$

où les quantités  $a_n$  sont des constantes quelconques. Nous nous contenterons du cas particulier que nous avons examiné.

Cela posé, je dis que *toutes les fonctions discontinues, telles que, pour chaque valeur de  $x$ ,  $f(x + h)$  et  $f(x - h)$  aient une limite, quand  $h$  positif tend vers zéro, sont des fonctions susceptibles d'intégration.*

Cela est évident, en vertu du théorème V, pour les fonctions développables en série que nous avons formées; mais nous allons démontrer la proposition sans nous préoccuper de l'origine de ces fonctions.

Par la définition, pour chaque valeur de  $x$  on peut trouver un nombre positif  $h$ , tel que l'on ait

$$\begin{aligned} f(x + \theta h) - f(x + 0) &< \sigma, & \text{en valeur absolue,} \\ f(x - \theta h) - f(x - 0) &< \sigma, & 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Soit un intervalle  $(a, b)$ . En partant de  $a$  on pourra donc trouver une quantité  $\delta$ , telle, que l'on ait

$$f(a + \theta \delta) - f(a + 0) \leq \frac{\sigma}{2}, \quad \theta < 1;$$

je la prends aussi grande que possible, soit  $a + \delta = x_1$ .

Ensuite je détermine une quantité  $\delta_2$  la plus grande possible, telle que

$$f(x_1 + \theta \delta_2) - f(x_1 + 0) \leq \frac{\sigma}{2}, \quad \theta < 1,$$

soit

$$x_1 + \delta_2 = \delta_3.$$

Je dis qu'en opérant ainsi et en continuant indéfiniment j'atteindrai la limite  $b$ .

Supposons, en effet, que la suite indéfiniment prolongée

$$x_p = a + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_p$$

n'atteigne pas  $b$ ; elle aura une limite  $x$  égale ou inférieure à  $b$ , et alors, quelque petit que soit  $h$ , il y aura une infinité de quantités  $x_p$  comprises entre  $x - h$  et  $x$ . Or, par parenthèse, on peut trouver une quantité  $h$ , telle que

$$f(x - \theta h) - f(x - 0) < \frac{\sigma}{4}, \quad 0 < \theta < 1,$$

pour toute valeur de  $\theta$ . De l'inégalité précédente il résulte que la différence de deux valeurs quelconques de la fonction dans l'intervalle  $(x - h, x)$  est plus petite que  $\frac{\sigma}{2}$ . On aura donc

$$f[x_p + \theta(x_{p+q} - x_q)] - f(x_p + 0) \leq \frac{\sigma}{2};$$

et par conséquent, au lieu de passer de  $x_p$  à  $x_{p+1}$ , on pourrait aller à  $x_{p+q}$ , ce qui est contraire à l'hypothèse que nous avons faite, puisque  $x_{p+1}$  doit être la plus grande valeur de  $x$ , telle que

$$f[x_p + \theta(x_{p+1} - x_p)] - f(x_p + 0) \leq \frac{\sigma}{2}, \quad \text{en valeur absolue.}$$

Il y a donc contradiction à supposer que la suite des quantités  $x_1, x_2, \dots$  n'atteint pas  $b$ .

Supposons qu'on ait atteint  $b$  après  $n$  opérations, et soient

$$a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$$

les valeurs intercalées. Formons les intervalles

$$a, a + \varepsilon, x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon, x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon, \dots, x_{n-1} - \varepsilon, x_{n-1} + \varepsilon, b - \varepsilon, b.$$

Dans les intervalles

$$(a + \varepsilon, x_1 - \varepsilon), (x_1 + \varepsilon, x_2 - \varepsilon), \dots, (x_{n-1} + \varepsilon, b - \varepsilon),$$

les oscillations de la fonction sont plus petites que  $\sigma$ . Dans les autres elles sont quelconques; mais la longueur totale de ces autres intervalles est  $2(n-1)\varepsilon$ , et peut être rendue aussi petite qu'on le veut par un choix convenable de  $\varepsilon$ . Donc la grandeur totale des intervalles, dans lesquels les oscillations sont plus grandes que  $\sigma$ , peut être prise aussi petite qu'on le veut, et par suite la fonction est toujours susceptible d'intégration.

Il suit de cette démonstration que les fonctions discontinues qui ne sont pas susceptibles d'intégration sont nécessairement telles que, pour un nombre illimité de valeurs de  $x$  dans tout intervalle,  $\varphi(x+h)$  est indéterminé quand  $h$  tend vers zéro.

### VII. — *D'une première classe de fonctions continues n'ayant pas de dérivée.*

Soit  $f(x)$  une fonction pour laquelle  $f(x+0)$  et  $f(x-0)$  existent toujours, et cherchons son intégrale. Soit

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx.$$



On aura

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0 + h} f(x) dx.$$

Supposons d'abord  $h$  positif. On peut, sans changer l'intégrale (art. IV), remplacer la valeur  $f(x_0)$  de  $f(x)$  par  $f(x_0 + o)$ . Alors, dans l'intervalle  $(x_0, x_0 + h)$ ,  $h$  étant suffisamment petit, on aura toujours

$$f(x_0 + o) - \sigma < f(x) < f(x_0 + o) + \sigma.$$

Donc

$$[f(x_0 + o) - \sigma] h < F(x_0 + h) - F(x_0) < [f(x_0 + o) + \sigma] h,$$

et par suite

$$\lim \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0 + o).$$

On aurait de même

$$\lim \frac{F(x_0 - h) - F(x_0)}{-h} = f(x_0 - o).$$

Il y a donc deux dérivées, ou plutôt la dérivée n'existe pas toutes les fois que  $f(x_0 + o)$  est différent de  $f(x_0 - o)$ . Développons quelques exemples.

Soit

$$f(x) = \frac{(x)}{1^s} + \frac{(2x)}{2^s} + \dots + \frac{(nx)}{n^s} + \dots, \quad s > 1;$$

on aura

$$\int_0^x f(x) dx = \sum_1^\infty \int_0^x \frac{(nx) dx}{n^s}.$$

Les intégrales des termes de la série s'effectuent sans difficulté. On a

$$\int_0^x (nx) dx = \frac{1}{n} \int_0^{nx} (x) dx = \frac{1}{2n} [nx]^2,$$

$[x]$  désignant une fonction égale à  $(x)$ , excepté pour les valeurs égales à un entier  $+\frac{1}{2}$ , et qui a alors la valeur

$$[n + \frac{1}{2}] = +\frac{1}{2}.$$

On a donc

$$F(x) = 2 \int_0^x f(x) dx = \frac{[x]^2}{1^{1+s}} + \frac{[2x]^2}{2^{1+s}} + \dots + \frac{[nx]^2}{n^{1+s}} + \dots$$

La fonction définie par cette série n'aura pas de dérivée pour les valeurs de  $x$  de la forme  $\frac{p}{2q}$ . On aura alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = 2f(x) - \frac{1}{q^s} \left( 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \right),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x-h) - F(x)}{-h} = 2f(x) + \frac{1}{q^s} \left( 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \right).$$

Soit de même la série

$$f(x) = \frac{E(x)}{x} + \frac{E(2x)}{2^s x} + \dots + \frac{E(nx)}{n^s x}, \quad s < 2;$$

on trouve sans peine

$$\int_0^x \frac{E(nx)}{x} dx = \log \varphi(nx),$$

où

$$\varphi(x) = \frac{x^{E(x)}}{1.2.3 \dots E(x)},$$

et par suite

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx = \sum \frac{\log \varphi(nx)}{n^s}.$$

Cette fonction n'aura pas de dérivée pour les valeurs commensurables de  $x$ . On peut lui substituer le produit infini

$$e^{F(x)} = \prod \varphi(x) [\varphi(2x)]^{\frac{1}{2^s}} \dots [\varphi(nx)]^{\frac{1}{n^s}} \dots,$$

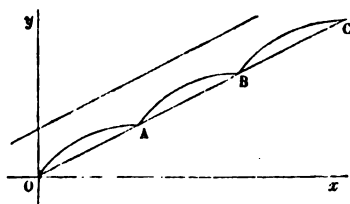
qui a les mêmes propriétés.

Mais on peut former directement, et sans recourir à l'intégration, beaucoup d'autres exemples de fonctions continues n'ayant pas de dérivée.

Soit, par exemple, la fonction représentée (*fig. 2*) par la courbe OABC,

qui se compose d'une partie convexe OA où la tangente n'est jamais verticale, et qu'on reproduit indéfiniment en AB, BC, ..., sur la droite OABC. On peut supposer, par exemple, que OA soit un arc de cercle

Fig. 2.



ayant son centre au-dessous de  $Ox$ . Une telle fonction  $\varphi(x)$  est continue; elle a une dérivée, excepté pour les abscisses correspondant aux points A, B, C, ..., abscisses que nous supposerons égales à 1, 2, 3, ...,  $n$ . De plus,  $\varphi(x)$  est toujours inférieure à l'ordonnée d'une droite, c'est-à-dire à une expression de la forme  $Ax + B$ . Enfin  $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$  demeure visiblement, quels que soient  $x$  et  $h$ , comprise entre deux nombres fixes qui sont les coefficients angulaires des tangentes à la première branche de courbe en O et en A.

Formons la série

$$f(x) = \sum a_n \varphi(nx),$$

qui sera convergente si la série  $\sum na_n$  est absolument convergente. Cela résulte de ce que l'on a  $\varphi(nx) < Anx + B$ .

On aura

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n \frac{\varphi(nx+nh) - \varphi(nx)}{nh}.$$

Par hypothèse,  $\frac{\varphi(nx+nh) - \varphi(nx)}{nh}$  demeure toujours comprise entre deux limites fixes. La série précédente est donc également convergente par rapport à  $x$  et  $h$  dans tout intervalle, et en appliquant le théorème VII, on a

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum na_n \lim \frac{\varphi(nx+nh) - \varphi(nx)}{nh}.$$

Supposons d'abord  $x$  incommensurable, alors  $nx$  le sera aussi. La fonction  $\varphi(X)$  aura une dérivée pour  $X = nx$ , et l'on aura

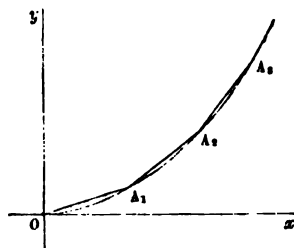
$$\lim_{\pm h} \frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h} = \sum n a_n \varphi'(nx).$$

Supposons, au contraire,  $x = \frac{p}{q}$ . Alors, pour tous les termes tels que  $nx$  soit entier, la limite de  $\frac{\varphi(nx + nh) - \varphi(nx)}{nh}$  sera différente, suivant que  $h$  tendra vers zéro par des valeurs positives ou par des valeurs négatives. Il y aura donc deux limites différentes pour  $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ , suivant que  $h$  tendra vers zéro par des valeurs positives ou par des valeurs négatives.

Voici un autre exemple extrêmement général :

Soit une courbe  $OA, A_2 A_3$ , convexe vers l'axe des  $x$  (*fig. 3*), et inscrivons dans cette courbe une autre courbe  $OA_1 A_2 A_3 \dots$ , formée d'arcs

Fig. 3.



isolés ne présentant pas leur concavité du côté de l'axe des  $x$ . Supposons si l'on veut, pour fixer les idées, que  $OA_1, A_1 A_2, A_2 A_3, \dots$  soient des lignes droites, et considérons la fonction  $\varphi(x)$  représentée par le polygone inscrit  $OA_1 A_2 A_3 \dots$ .

Il est clair qu'on pourra trouver une infinité de systèmes de constantes positives, tels que la série

$$f(x) = a_1 \varphi(x) + a_2 \varphi(2x) + \dots + a_n \varphi(nx) + \dots$$

soit absolument convergente pour toute valeur de  $x$ . Par exemple, si l'on suppose que la courbe  $OA, A_2 A_3 \dots$  soit la parabole représentée

par l'équation  $y = x^2$ , et que le polygone  $OA, A_1, A_2, \dots$  soit compris entre la courbe et la parabole  $y = x^2 + Ax + B$ , où  $A$  et  $B$  sont positifs, la série  $f(x)$  sera absolument convergente pour toutes les valeurs de  $x$ , pourvu que la série

$$a_1 + 4a_2 + \dots + n^2 a_n$$

le soit aussi.

Cela posé, il est clair que la fonction  $\varphi(x)$  a une dérivée pour toutes les valeurs de  $x$  qui ne sont pas les abscisses des sommets  $A_1, A_2, A_3, \dots$  du polygone.

Pour une de ces abscisses  $\alpha_n$  correspondant au sommet  $A_n$ , il y aura, au contraire, deux limites différentes pour

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}.$$

Si  $h$  tend vers zéro par des valeurs positives, la limite correspondante est le coefficient angulaire du côté  $A_n A_{n+1}$ . Si  $h$  est négatif, la limite est, au contraire, le coefficient angulaire de  $A_{n-1} A_n$ . Remarquons, de plus, que le rapport

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

tend vers sa limite par des valeurs décroissantes si  $h$  est positif, ou par des valeurs croissantes si  $h$  est négatif. On aura

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum na_n \frac{\varphi(nx+nh) - \varphi(nx)}{nh}.$$

Supposons d'abord qu'aucune des abscisses  $nx$  ne soit égale à l'abscisse  $\alpha_n$  de l'un des sommets  $A_n$  du polygone : alors, d'après le théorème VIII, tous les termes variant dans le même sens quand  $h$  tend vers zéro, on a

$$\lim \frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h} = \sum na_n \varphi'(nx),$$

et la fonction  $f(x)$  a une dérivée.

Au contraire, si une ou plusieurs des abscisses  $nx$  correspondent à des sommets, il n'y aura pas de dérivée.

Supposons, comme application, que le polygone  $OA, A_1, \dots, A_n$  soit

inscrit dans la parabole dont l'équation est

$$y = x^2,$$

et que les abscisses des sommets  $A_1, A_2, \dots$  soient  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ ; on aura une fonction représentée par le polygone des ponts suspendus.

La fonction  $\varphi(x)$  aura pour expression

$$\varphi(x) = E^2(x) + [2E(x) + 1][x - E(x)].$$

Pour toutes les valeurs non entières de  $x$  on a

$$\varphi'(x) = 2E(x) + 1.$$

Au contraire, si  $x$  est entier,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = 2x + 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{-h} = 2x - 1;$$

on aura par suite, pour  $x$  commensurable et égal à la fraction irréductible  $\frac{p}{q}$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum n a_n [2E(nx) + 1]$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = \sum n a_n [2E(nx) + 1] - 2(qa_1 + 2qa_2 + 3qa_3 + \dots).$$

### VIII. — Nouvelles fonctions continues n'ayant pas de dérivée.

Employons maintenant la fonction introduite par M. Schwarz dans sa Note déjà citée *Sur une fonction continue n'ayant pas de dérivée*.

Cette fonction est définie par l'équation

$$\varphi(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}.$$

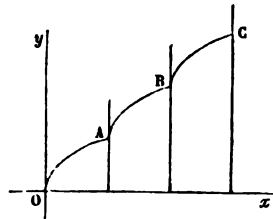
Elle est représentée par une série d'arcs de parabole OA, AB, BC, ... (*fig. 4*), tous égaux et ayant leur tangente en O, A, B, ... verticale. Cette fonction est évidemment croissante, et elle est inférieure à l'ordonnée  $Ax + B$  d'une droite.

Cela posé, formons la série

$$f(x) = a_1 \varphi(x) + a_2 \varphi(2x) + \dots + a_n \varphi(nx),$$

où  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  sont des quantités *positives* telles, que la série  $\sum na_n$  soit convergente. Alors la série  $f(x)$  est uniformément convergente

Fig. 4.



dans tout intervalle. Elle représente une fonction continue et croissante de  $x$ . Cela est évident : tous ses termes sont positifs et croissants. On a

$$f(x+h) - f(x) = \sum a_n [\varphi(nx+nh) - \varphi(nx)],$$

et par suite, en prenant un seul terme de la série,

$$f(x+h) - f(x) > a_n [\varphi(nx+nh) - \varphi(nx)].$$

Supposons  $x$  commensurable égal à  $\frac{p}{q}$ , et prenons  $n = q$  :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > a_q \frac{\varphi(p+qh) - \varphi(p)}{h},$$

ou, en substituant les valeurs de  $\varphi(p)$  et  $\varphi(p+qh)$ ,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > a_q \sqrt{\frac{q}{h}},$$

et par suite

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \infty,$$

quand  $h$  tend vers zéro par des valeurs positives. Ainsi la dérivée de la fonction est infinie dans le sens positif pour toutes les valeurs commensurables de  $x$ .

Pour compléter l'étude de cette fonction, nous allons montrer qu'il y a des incommensurables pour lesquelles la dérivée existe et est finie,

d'autres pour lesquelles elle est infinie. Pour fixer les idées, prenons

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\varphi(nx)}{n^4}.$$

Alors

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \sum \frac{\varphi(nx+nh) - \varphi(nx)}{n^4 h},$$

la somme  $\Sigma$  étant étendue à un nombre fini, mais quelconque, de termes de la série, qu'on choisira de la manière la plus convenable. L'inégalité précédente se justifie d'elle-même, tous les termes de la série étant positifs. Le second membre étant composé d'un nombre fini de termes, cherchons sa limite, qui, d'après la définition de  $\varphi(x)$ , est

$$\sum \frac{1}{n^3} \frac{1}{2\sqrt{nx - E(nx)}}.$$

Choisissons pour  $n$  les dénominateurs des réduites de rang impair du développement de  $x$  en fraction continue. Ces réduites sont toutes inférieures à  $x$ . Désignons-les par  $\frac{P_n}{Q_n}$ . Alors la somme précédente pourra s'écrire

$$\sum \frac{1}{2Q_n^3} \frac{1}{\sqrt{Q_n x - P_n}}.$$

Or on a (voir SERRET, *Algèbre supérieure*, t. I)

$$Q_n x - P_n < \frac{1}{Q_{n+1}}.$$

Donc, en remplaçant  $Q_n x - P_n$  par  $\frac{1}{Q_{n+1}}$ , on ne peut que diminuer la somme précédente, et l'on aura

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \sum \frac{\sqrt{Q_{n+1}}}{2Q_n^3}.$$

D'ailleurs, en appelant  $\alpha_n$  le quotient complet correspondant à  $Q_n$ , on a

$$Q_{n+1} = \alpha_n Q_n + Q_{n-1}, \quad Q_{n+1} > \alpha_n Q_n,$$

et par suite, *a fortiori*,

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \sum \frac{\sqrt{\alpha_n}}{2Q_n^3 \sqrt{Q_n}}.$$



Prenons le premier terme de la somme qui figure dans le second membre de l'inégalité, et supposons qu'on ait choisi  $Q_n$  arbitrairement. Alors,  $\alpha_n$  n'entrant pas dans  $Q_n$ , on peut le déterminer de telle manière que le premier terme ait une valeur quelconque, par exemple une valeur supérieure à 1 ou à  $\frac{1}{n}$ . Dans le terme suivant il y aura un nouveau quotient  $\alpha_{n+2}$  dont on pourra encore disposer arbitrairement, et ainsi de suite. On peut donc former une incommensurable telle, que chacun des termes soit supérieur à l'unité, par exemple, et alors, en prenant un assez grand nombre de termes, on prouvera que

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

est plus grande que toute quantité donnée. Cette limite est donc infinie dans les deux sens, car nous n'avons fait aucune hypothèse sur le signe de  $h$ .

Pour établir que la fonction  $f(x)$  a une dérivée pour certaines valeurs incommensurables, nous nous appuierons sur l'inégalité, facile à démontrer, à laquelle satisfait la fonction  $\varphi(x)$ ,

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} < \frac{2}{(x)}, \quad \text{en valeur absolue,}$$

$(x)$  ayant la signification que nous lui avons déjà attribuée. Alors on voit que la série

$$\sum \frac{\varphi(nx + nh) - \varphi(nx)}{n^2 h},$$

considérée comme fonction de  $h$ , sera uniformément convergente si la série

$$\sum \frac{1}{n^2 (nx)}$$

est absolument convergente; et si cette dernière condition est remplie, on aura le droit de passer à la limite dans la série précédente et d'écrire

$$f'(x) = \sum \frac{\varphi'(nx)}{n^2}.$$

Tout se réduit donc à montrer qu'il y a des incommensurables pour

lesquelles la série

$$\sum \frac{1}{n^2(nx)}$$

est absolument convergente.

Or, si  $n$  n'est pas le dénominateur d'une réduite du développement de  $x$  en fraction continue, on a

$$(nx) > \frac{1}{2n}, \quad \text{en valeur absolue}$$

(voir SERRET, *Algèbre supérieure, loc. cit.*) et, par conséquent,

$$\frac{1}{n^2(nx)} < \frac{1}{2n^2},$$

en valeur absolue. Donc les termes qui ne correspondent pas aux dénominateurs des réduites forment une série absolument convergente.

Pour le dénominateur  $Q_n$  d'une réduite, on a

$$(Q_n x) > \frac{1}{Q_n + Q_{n+1}};$$

donc

$$\frac{1}{Q_n^2(Q_n x)} < \frac{Q_n + Q_{n+1}}{Q_n^3} < \frac{(\alpha_n + 2)}{Q_n^2} \quad (1),$$

(1) Les résultats de la théorie des fractions continues, sur lesquels nous nous appuyerons dans ce qui va suivre, peuvent être résumés de la manière suivante :  $x$  étant l'incommensurable,  $\frac{P_n}{Q_n}$  la  $(n+1)^{\text{ème}}$  réduite,  $\alpha_n$  le quotient complet correspondant à  $Q_n$ , on a

$$Q_{n+1} > \alpha_n Q_n, \quad Q_{n+1} < (\alpha_n + 1) Q_n;$$

$x - \frac{P_n}{Q_n}$  est compris entre  $\frac{(-1)^{n+1}}{Q_n Q_{n+1}}$  et  $\frac{(-1)^{n+1}}{Q_n (Q_n + Q_{n+1})}$ .

Enfin, si  $n$  n'est pas le dénominateur d'une réduite,

$$(nx) > \frac{1}{2n}, \quad \text{en valeur absolue.}$$

Remarquons, en outre, que  $P_n, Q_n$  ne dépendent que des quotients complets  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ . Si donc une incommensurable est inconnue quand  $Q_n$  a été obtenue, on peut choisir  $\alpha_n$  arbitrairement, ce qui donne  $P_{n+1}, Q_{n+1}$ , puis  $\alpha_{n+1}$  arbitrairement, et ainsi de suite.

$\alpha_n$  désignant, comme précédemment, le  $n^{\text{ième}}$  quotient complet. Or il y a une infinité d'incommensurables pour lesquelles la série

$$\sum \frac{\alpha_n + 2}{Q_n^2}$$

sera convergente, par exemple toutes celles pour lesquelles  $\alpha_n$  ne dépasse pas une certaine limite.

Soit encore la série

$$f(x) = \sum a_n (\sin n x \pi)^{\frac{2}{3}},$$

qui sera également convergente dans tout intervalle si la série  $\sum a_n$  est absolument convergente. Nous allons d'abord établir un lemme préliminaire en cherchant une limite supérieure de

$$\frac{[\sin(x\pi + h\pi)]^{\frac{2}{3}} - (\sin x\pi)^{\frac{2}{3}}}{h\pi},$$

lorsque,  $x$  restant fixe,  $h$  prend toutes les valeurs possibles. Posons

$$\sin(x\pi + h\pi) = \gamma^2, \quad \sin x\pi = a^2.$$

On pourra écrire l'expression précédente

$$\frac{\gamma^2 - a^2}{\gamma^2 - a^2} \frac{\sin(x\pi + h\pi) - \sin x\pi}{h\pi} = \frac{\gamma + a}{\gamma^2 + a\gamma + a^2} \frac{\sin \frac{h\pi}{2}}{\frac{h\pi}{2}} \cos\left(x\pi + \frac{h\pi}{2}\right);$$

$\gamma$  et  $a$  étant plus petits que 1, l'expression est en valeur absolue inférieure à  $\frac{2}{\gamma^2 + a\gamma + a^2}$ . Le minimum du dénominateur a lieu pour  $\gamma = -\frac{a}{2}$ . En substituant cette valeur de  $\gamma$ , on a donc

$$\frac{[\sin(x\pi + h\pi)]^{\frac{2}{3}} - (\sin x\pi)^{\frac{2}{3}}}{h} < \frac{8\pi}{3[\sin(x\pi)]^{\frac{2}{3}}},$$

en valeur absolue, et quel que soit  $h$ .

Ce lemme étant admis, revenons à la fonction  $f(x)$  et supposons

que  $x$  soit commensurable et égal à la fraction irréductible  $\frac{p}{q}$ . On aura

$$(\alpha) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum a_n \frac{[\sin(nx\pi + nh\pi)]^{\frac{2}{3}} - (\sin nx\pi)^{\frac{2}{3}}}{h};$$

$\sin nx\pi$  ne peut prendre que les  $q$  valeurs,

$$\sin \frac{\pi}{q}, \quad \sin \frac{2\pi}{q}, \dots, \quad \sin \frac{(q-1)\pi}{q}, \quad \sin \pi,$$

dont la dernière est nulle et correspond aux termes pour lesquels  $n$  est un multiple de  $q$ . Décomposons la série  $f(x)$  en deux, l'une  $\varphi(x)$  formée des termes pour lesquels  $n$  n'est pas multiple de  $q$ , l'autre  $\psi(x)$  formée des termes pour lesquels  $n$  est au contraire multiple de  $q$ . On aura

$$(\beta) \quad f(x+h) - f(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x) + \psi(x+h) - \psi(x).$$

Considérons d'abord la série  $\varphi(x)$ ; on a

$$(\gamma) \quad \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \sum a_n \frac{[\sin(nx\pi + nh\pi)]^{\frac{2}{3}} - (\sin nx\pi)^{\frac{2}{3}}}{h},$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs de  $n$  non multiples de  $q$ . Pour tous les termes, on a, d'après le lemme,

$$\frac{[\sin(nx\pi + nh\pi)]^{\frac{2}{3}} - (\sin nx\pi)^{\frac{2}{3}}}{h} < \frac{8na_n\pi}{3(\sin nx\pi)^{\frac{2}{3}}};$$

$\sin nx\pi$  prend l'une des valeurs

$$\sin \frac{\pi}{q}, \quad \sin \frac{2\pi}{q}, \dots, \quad \sin \frac{(q-1)\pi}{q},$$

et demeure supérieure à tout nombre fixe  $A$  plus petit que les  $q-1$  sinus précédents. Donc la série  $(\gamma)$  a ses termes inférieurs en valeur absolue à ceux de la série

$$\frac{8\pi}{3A} \sum na_n.$$

Si nous supposons que cette dernière série soit absolument convergente, la série  $(\gamma)$ , considérée comme fonction de  $h$ , sera uniformément convergente dans tout intervalle, et l'on aura le droit (théorème VII) de faire tendre  $h$  vers zéro. Donc on aura

$$\lim \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \sum \frac{2}{3} \frac{a_n n \pi \cos(nx\pi)}{(\sin nx\pi)^{\frac{1}{3}}},$$

la somme qui figure dans le second membre étant toujours étendue aux valeurs de  $n$  non multiples de  $q$ . Si nous désignons cette somme par  $L$ , nous pourrions poser

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h(L + \varepsilon),$$

$\varepsilon$  tendant vers zéro avec  $h$ .

Considérons maintenant la série  $\psi(x)$ , qui se compose des termes pour lesquels  $n$  est multiple de  $q$ . On aura, en posant  $n = n'q$ ,

$$\psi(x+h) - \psi(x) = \sum a_{n'q} (\sin n'q h \pi)^{\frac{2}{3}},$$

$$(\delta) \quad \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h^{\frac{2}{3}}} = (\pi)^{\frac{2}{3}} \sum a_{n'q} \left( \frac{\sin n'q h \pi}{n'q h \pi} \right)^{\frac{2}{3}} (n'q)^{\frac{2}{3}}.$$

La série  $\sum a_{n'q} (n'q)^{\frac{2}{3}}$  est convergente, puisque la série  $\sum n a_n$  l'est déjà par hypothèse. D'ailleurs  $\frac{\sin n'q h \pi}{n'q h \pi}$  est toujours plus petit que 1. La série  $(\delta)$  est donc uniformément convergente par rapport à  $h$  dans tout intervalle, et l'on peut faire tendre  $h$  vers zéro. On aura donc

$$\lim \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h^{\frac{2}{3}}} = \pi^{\frac{2}{3}} \sum a_{n'q} (n'q)^{\frac{2}{3}},$$

et si nous désignons le second membre par  $K$ , nous aurons

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h^{\frac{2}{3}}(K + \varepsilon'),$$

$\varepsilon'$  tendant vers zéro avec  $h$ .

En tenant compte des résultats que nous venons d'établir, l'équa-

tion ( $\beta$ ) nous donnera

$$f(x+h) - f(x) = h(L + \epsilon) + h^{\frac{2}{3}}(K + \epsilon') = h^{\frac{2}{3}}(K + \epsilon''),$$

$\epsilon''$  tendant vers zéro avec  $h$ . Ainsi, pour toute valeur commensurable de  $x$ , l'accroissement de la fonction est de la forme

$$(K + \epsilon'') h^{\frac{2}{3}},$$

et la dérivée est par conséquent infinie.

Ce fait analytique correspond, en Géométrie, à un point de rebroussement avec la tangente verticale.

Cet exemple nous paraît surtout remarquable en ce qu'il montre clairement qu'il existe des fonctions continues qui ne sont ni croissantes ni décroissantes dans aucun intervalle.

M. Hankel, qui l'a traité par une méthode inexacte, affirme que, dans le cas où  $x$  est incommensurable, la série des dérivées des termes est convergente et représente la dérivée de la fonction. Cela a lieu, il est vrai, pour un grand nombre d'incommensurables, mais la proposition n'est pas générale. Soit, en effet,

$$\sum \frac{2n a_n \pi}{3} \frac{\cos nx\pi}{(\sin nx\pi)^{\frac{1}{3}}}$$

la série des dérivées : en faisant usage des résultats déjà signalés relatifs aux incommensurables, on reconnaîtra qu'on peut disposer des quotients complets de telle manière que les termes correspondant aux dénominateurs des réduites soient aussi grands qu'on le voudra ; et, par conséquent, la série n'ayant pas ses termes tendant vers zéro avec  $\frac{1}{n}$  ne pourra être convergente.

Voici un nouvel exemple présentant une propriété nouvelle. Soit

$$F(x) = \sum \frac{a_n}{n\pi} \sin nx\pi \sin\left(\frac{1}{2} \log \sin^2 nx\pi\right).$$

On suppose que la série  $\Sigma a_n$  soit absolument convergente et, par suite, la série  $F(x)$  sera convergente pour toutes les valeurs de  $x$ . La série

des dérivées des termes est

$$f(x) = \sum a_n \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \log \sin^2 n x \pi\right) \cos(n x \pi),$$

et elle est, d'après les hypothèses faites, uniformément convergente dans tout intervalle. Les termes sont des fonctions continues devenant indéterminées chacune pour un nombre limité de valeurs de  $x$  dans un intervalle donné. Ils sont donc susceptibles d'intégration, et l'on a, en effet,

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx.$$

Réciproquement, d'après le théorème VI,  $F(x)$  aura pour dérivée  $f(x)$ , excepté pour les valeurs commensurables de  $x$ , et alors on s'assurera aisément, par une recherche directe, que la dérivée est indéterminée. Ainsi nous obtenons *une fonction dont la dérivée existe pour toutes les valeurs incommensurables, mais est indéterminée pour les valeurs commensurables.*

Nous terminerons en donnant un exemple d'une fonction *qui n'a de dérivée pour aucune valeur de la variable.*

Soit

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin[1.2.3\dots(n+1)x]}{1.2.3\dots n}.$$

La série qui représente  $f(x)$  étant uniformément convergente dans tout intervalle, la fonction est évidemment continue. Pour rechercher si elle a une dérivée, décomposons-la en deux parties et posons

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_1^{N-1} \frac{\sin[1.2.3\dots(n+1)x]}{1.2\dots n}, \\ \psi(x) &= \sum_N^{\infty} \frac{\sin[1.2.3\dots(n+1)x]}{1.2.3\dots n}. \end{aligned}$$

Soit ensuite

$$1.2.3\dots N \times Nh = 2\varepsilon.$$

On trouvera facilement

$$\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} = \frac{\theta}{\varepsilon},$$

$0$  étant une quantité comprise entre  $-1$  et  $+1$ , et

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \sum_1^N n \cos[(1.2.3\dots n)x] - \varepsilon \sin[(1.2.3\dots N)x] + \omega(N, \varepsilon),$$

$\omega(N, \varepsilon)$  désignant une fonction qui tend vers zéro quand,  $\varepsilon$  restant fixe,  $N$  croît indéfiniment et, par conséquent,  $h$  tend vers zéro.

En nous appuyant sur ce que  $f(x)$  est la somme de  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$ , nous aurons donc

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \sum_1^N n \cos[(1.2.3\dots n)x] - \varepsilon \sin[(1.2.3\dots N)x] \\ &\quad + \omega(\varepsilon, N) + \frac{\theta}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Si la fonction  $f(x)$  avait une dérivée, le second membre tendrait vers une limite fixe, *indépendante de  $\varepsilon$* , quand,  $\varepsilon$  restant fixe,  $N$  croîtrait indéfiniment.

Or on s'assurera aisément que ce second membre ne peut avoir une limite indépendante de  $\varepsilon$  que dans le cas où  $\sin[(1.2\dots N)x]$  tend vers zéro quand  $N$  croît indéfiniment. Donc déjà la fonction  $f(x)$  n'a pas de dérivée toutes les fois que  $x$  n'a pas été choisie de telle manière que  $\sin[(1.2\dots N)x]$  tende vers zéro quand  $N$  croît indéfiniment.

Considérons maintenant ces valeurs de  $x$ , en nombre infini dans tout intervalle, pour lesquelles  $\sin[(1.2\dots N)x]$  a zéro pour limite quand  $N$  croît indéfiniment. On verra facilement que dans ce cas le rapport

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

se rapproche indéfiniment, quand  $N$  croît, de la somme

$$\sum_1^N n \cos[(1.2.3\dots n)x].$$

Or cette somme ne tend vers aucune limite; car, d'après les hypothèses faites,  $\sin[(1.2\dots N)x]$  ayant zéro pour limite quand  $N$  croît,  $\cos[(1.2\dots N)x]$  se rapproche indéfiniment en valeur absolue de l'unité et la somme précédente dont le terme général devient indéfiniment grand, ne peut avoir aucune limite.

Donc, dans aucun cas, la fonction  $f(x)$  n'a de dérivée.



IX. — *Définition d'une classe singulière de fonctions discontinues.*

Soit

$$\varphi(y) = y^2 \sin \frac{1}{y},$$

et posons

$$\varphi'(y) = 2y \sin \frac{1}{y} - \cos \frac{1}{y},$$

pour  $y$  différent de zéro;

$$\varphi'(0) = 0,$$

pour  $y = 0$ . Alors  $\varphi'(y)$  sera toujours, même pour  $y = 0$ , la dérivée de  $\varphi(y)$ , par rapport à  $y$ ; seulement la fonction  $\varphi'(y)$  sera discontinue pour  $y = 0$ . On a d'ailleurs, pour  $y < 1$ ,  $\varphi'(y) < 3$ .

Formons la série discontinue

$$f(x) = \sum \pi a_n \varphi'(\sin nx\pi) \cos nx\pi + \dots,$$

qui sera uniformément convergente si la série  $\sum a_n$  est absolument convergente. Les termes de cette série sont des fonctions de  $x$  discontinues pour certaines valeurs de  $x$ , mais susceptibles d'intégration. On aura donc

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx = \sum \frac{a_n}{n} \varphi(\sin nx\pi).$$

D'après le théorème VI,  $f(x)$  sera, dans tous les cas, la dérivée de  $F(x)$ . Ainsi nous obtenons *une fonction continue dont la dérivée est discontinue pour toutes les valeurs commensurables de  $x$ , mais existe pour toutes les valeurs de  $x$ .*

En partant de la remarque précédente, nous allons montrer qu'il existe des fonctions discontinues qui jouissent d'une propriété que l'on regarde quelquefois comme le caractère distinctif des fonctions continues, celle de ne pouvoir varier d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

Soit, en effet,  $F(x)$  une fonction dont la dérivée existe pour toute valeur de  $x$ , mais soit discontinue. Supposons que, pour  $x = x_0$ ,  $x = x_1$ ,

la dérivée prenne les valeurs

$$F'(x_0) = A, \quad F'(x_1) = B.$$

Je dis que, si  $x$  varie de  $x_0$  à  $x_1$ ,  $f'(x)$  passe au moins une fois par toutes les valeurs intermédiaires entre  $A$  et  $B$ . Soit, en effet,  $M$  une de ces valeurs

$$A > M > B,$$

et formons la fonction

$$F(x) - Mx.$$

Cette fonction continue aura, pour  $x = x_0$ , une dérivée  $A - M$  positive et, pour  $x = x_1$ , une dérivée  $B - M$  négative. Elle commencera donc par être croissante quand  $x$  variera de  $x_0$  à  $x_1$ , puis elle finira par être décroissante pour  $x = x_1$ . Donc elle aura un maximum qu'elle atteindra pour une certaine valeur

$$x_0 + \theta(x_1 - x_0),$$

et pour lequel sa dérivée sera nulle; on aura donc

$$f'[x_0 + \theta(x_1 - x_0)] - M = 0.$$

Ainsi tout nombre  $M$  intermédiaire entre  $A$  et  $B$  est une valeur de la dérivée.

La seule objection qu'on pourrait faire à notre conclusion, c'est que la dérivée doit nécessairement être continue. L'exemple que nous avons donné montre qu'il n'en est pas ainsi et que la dérivée peut être discontinue un nombre infini de fois dans tout intervalle, sans être jamais indéterminée.

Cet exemple n'est pas, du reste, en désaccord avec les notions que nous avons de la continuité et de la discontinuité des fonctions. Il est clair que, si la loi d'une fonction est telle que ses variations soient brusques, elle ne peut varier d'une valeur à une autre en passant par toutes les valeurs intermédiaires. Par exemple, si l'on a

$$\lim f(x + h) = f(x + 0) > f(x),$$

$$\lim f(x - h) = f(x - 0) < f(x),$$

$h$  tendant vers zéro par des valeurs positives, il est clair que, lorsque  $x$

variera de  $x - h$ , à  $x + h$ , la fonction ne prendra pas toutes les valeurs comprises entre  $f(x - h)$  et  $f(x + h)$ . Mais il y a, nous l'avons vu, d'autres genres de discontinuité et il existe des fonctions pour lesquelles la limite de  $f(x + h)$  est indéterminée quand  $h$  tend vers zéro.

Par exemple, lorsque  $h$  tend vers zéro,  $f(x + h)$  peut prendre toutes les valeurs comprises entre  $f(x) - K^2$  et  $f(x) + K^2$ . Un exemple simple de ce cas nous est offert par la fonction  $\sin \frac{1}{x}$  lorsque  $x$  tend vers zéro. On conçoit que de telles fonctions, pour lesquelles  $f(x + h)$  a une limite indéterminée, ne puissent passer d'une valeur à une autre sans atteindre toutes les valeurs intermédiaires.

C'est à cette dernière classe de fonctions qu'appartiennent les dérivées des fonctions continues quand elles sont finies et existent pour toutes les valeurs de la variable. Soit, en effet,  $F(x)$  une fonction continue ayant une dérivée. On aura, d'après le théorème des accroissements finis (<sup>1</sup>),

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x+h),$$

$h$ , étant compris entre zéro et  $h$ .

Quand  $h$  tendra vers zéro, il en sera de même de  $h$ , d'après une loi inconnue. On voit que la dérivée  $F'(x)$  doit être ou continue ou discontinue, de telle manière qu'il y ait un système de valeurs de  $h$  pour lequel  $F'(x+h) - F'(x)$  tende vers zéro avec  $h$ . Cette propriété exige que  $F'(x+h)$  ne tende vers aucune limite déterminée quand  $h$  tend vers zéro; car, si cette limite existait, elle serait  $F'(x)$  et la fonction dérivée serait continue.

Il semble difficile d'indiquer un caractère général qui permette de reconnaître si une fonction  $f(x)$  a une fonction primitive, c'est-à-dire si elle est la dérivée d'une autre fonction.

Dans le cas, toutefois, où  $f(x)$  est susceptible d'intégration, la solution peut être donnée. En effet, s'il existe une fonction  $F(x)$  telle que

$$F'(x) = f(x),$$

---

(<sup>1</sup>) Voir la belle démonstration de ce théorème, donnée par M. O. Bonnet, dans le *Traité de Calcul différentiel et intégral*, de M. Serret, t. I, p. 17. Cette démonstration suppose seulement que la dérivée existe et soit finie.

ON AURA

$$F(x) - F(a) = F(x) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \dots + F(x_1) - F(a),$$

ou, en appliquant le théorème des accroissements finis,

$$F(x) - F(a) = f(a + \theta_1 \delta_1) \delta_1 + f(x_1 + \theta_2 \delta_2) \delta_2 + \dots + f(x_{n-1} + \theta_n \delta_n) \delta_n,$$

les  $\delta$  ayant la même signification que dans l'article III, et par conséquent  $F(x)$  ne pourra être que l'intégrale définie

$$C + \int_a^x f(x) dx.$$

On effectuera cette intégration et il restera à voir si l'intégrale a pour dérivée  $f(x)$ .

Il faut pour cela que l'on ait

$$\int_x^{x+h} f(x) dx = [f(x) + \varepsilon] h,$$

$\varepsilon$  tendant vers zéro avec  $h$ . Or l'intégrale est la limite de

$$\frac{h}{n} \left\{ f(x) + f\left(x + \frac{h}{n}\right) + \dots + f\left[x + \frac{(n-1)h}{n}\right] \right\},$$

lorsque  $n$  croit indéfiniment. Donc, pour qu'une fonction susceptible d'intégration soit la dérivée d'une autre fonction, il faut et il suffit que sa valeur moyenne dans l'intervalle  $(x, x + h)$

$$\lim \frac{1}{n} \left\{ f(x) + f\left(x + \frac{h}{n}\right) + \dots + f\left[x + \frac{(n-1)h}{n}\right] \right\}$$

devienne égale à  $f(x)$  quand  $h$  tend vers zéro.  $h$  doit être pris successivement positif et négatif.

20 janvier 1874.

---

PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES  
DES  
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

A COEFFICIENTS VARIABLES,

PAR M. JULES TANNERY,  
AGRÉGÉ PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

---

INTRODUCTION.

1. L'étude des fonctions d'une variable imaginaire définies par une équation, étude qui s'est substituée à la recherche, souvent impraticable, de la forme explicite de ces fonctions, a, dans notre siècle, profondément renouvelé l'Analyse. C'est, comme on le sait, à Cauchy que revient la gloire d'avoir frayé cette voie nouvelle. Les travaux de M. Puiseux sur les racines des équations algébriques, ceux de MM. Briot et Bouquet sur les fonctions doublement périodiques et sur les équations différentielles ont, en France, amplement prouvé la fécondité de l'idée de Cauchy. En Allemagne, les belles découvertes de Riemann ont accéléré un mouvement scientifique qui, depuis lors, ne s'est pas ralenti.

Ceux qui aiment la science et qui ont trop de raisons pour se défier de leurs facultés d'invention, ont encore un rôle utile à jouer, celui d'élucider les recherches des autres et de les répandre : c'est ce que j'ai essayé de faire dans ce travail.

Les équations différentielles linéaires ont été l'objet des recherches de Sturm et de M. Liouville : c'est au point de vue des valeurs réelles de la variable et des solutions réelles de l'équation que se sont placés ces

deux savants, et ils ont rencontré là une série de propositions extrêmement remarquables; mais l'étude de ces mêmes équations, lorsqu'on n'apporte aucune restriction aux valeurs de la variable, restait complètement à faire. Dans son Cours de l'année 1863, M. Weierstrass donna quelques indications sur ce sujet; en 1866, M. Fuchs publia un premier Mémoire (1) qui peut être considéré comme fondamental dans la théorie des équations différentielles linéaires; il compléta ses recherches dans un Mémoire qui parut deux ans après. Depuis lors, cette étude a été à l'ordre du jour en Allemagne: M. Thomé, entre autres, a retrouvé les principaux résultats de M. Fuchs par une autre méthode; mais celle de ce dernier m'a semblé plus lumineuse. Plus récemment, M. Fuchs a donné de ses principes une série d'applications qui en montrent la fécondité: ces applications sont liées à la théorie des fonctions abéliennes et je ne les aborderai point ici; j'ai cherché seulement à exposer, de la façon la plus claire et la plus rapide qu'il m'a été possible de le faire, les principes fondamentaux de la théorie des équations différentielles linéaires.

2. Les équations dont il s'agit sont de la forme

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + p_m.$$

On supposera, en général, que les quantités  $p_1, p_2, \dots, p_m$  sont des fonctions continues et uniformes de la variable, sauf pour des valeurs particulières. La première partie de ce travail a été consacrée à la définition précise de ce qu'il faut entendre par la solution d'une pareille équation; dans la deuxième on a rappelé quelques propriétés des équations différentielles, indispensables pour la suite; dans la troisième on s'est occupé des points singuliers et l'on a donné, pour les valeurs voisines de la variable, certaines formes sous lesquelles peuvent être mises les solutions de l'équation différentielle et qui font ressortir les causes de la multiplicité des valeurs de ces solutions; dans la quatrième partie on a étudié spécialement une classe particulière d'équations différentielles dont les solutions jouissent, relativement aux points criti-

---

(1) *Journal de Crelle*, t. LXVI, p. 121.

ques, de propriétés remarquables; enfin la cinquième partie contient quelques applications.

3. J'ai supposé connus les principes relatifs à la représentation des quantités imaginaires et à la théorie élémentaire des fonctions de ces quantités. J'ai constamment confondu la valeur de la variable et le point qui la représente (sur le plan ou la sphère), et ne les ai point distingués par des notations différentes. Je me suis permis d'introduire l'expression de *domaine d'un point* qui répond à l'allemand *Umgebung* : j'entends par là les environs de ce point, et plus précisément la portion du plan où certains développements en série de la fonction que l'on étudie sont convergents. S'il s'agit, par exemple, d'un point  $a$  et d'un développement en série suivant les puissances entières et positives de  $x - a$ , le domaine du point  $a$  sera le cercle de convergence de cette série.

## I.

4. La définition précise des fonctions qui satisfont à une équation différentielle linéaire

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + p_m y$$

repose sur le théorème fondamental qui suit :

*Soit  $a$  un point du plan des  $x$ , tel que dans son domaine les coefficients  $p_1, p_2, \dots, p_m$  de l'équation (1) soient des fonctions uniformes et continues de la variable  $x$ , on pourra satisfaire à cette équation par une fonction uniforme et continue dans le voisinage du point  $a$ , les valeurs de cette fonction et de ses  $m - 1$  premières dérivées au point  $a$  étant arbitraires.*

La démonstration de cette proposition repose sur les principes qu'ont employés MM. Briot et Bouquet pour établir l'existence d'une intégrale dans une équation différentielle ordinaire.

Remarquons d'abord que, s'il existe une fonction uniforme et continue satisfaisant à l'équation (1) et que l'on donne les valeurs  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(m-1)}$  de cette fonction et de ses  $m - 1$  premières dérivées du point  $a$ , on pourra trouver aisément les valeurs des dérivées suivantes au même point : l'équation (1) donnera immédiatement la valeur de la

dérivée  $m^{\text{ième}}$  et celles qu'on en déduirait par la différentiation, les valeurs des dérivées suivantes  $y_0^{(m+1)}, y_0^{(m+2)}, \dots$ . Remarquons encore que toutes ces valeurs se déduisent des valeurs  $y_0, y_0', \dots, y_0^{(m-1)}$  et des valeurs finies que prennent pour  $x = a$  les coefficients  $p_1, p_2, \dots, p_m$  et leurs dérivées par les simples opérations d'addition et de multiplication.

Cela posé, si la série

$$y_0 + \frac{x-a}{1} y_0' + \frac{(x-a)^2}{1,2} y_0'' + \dots$$

est convergente, la fonction qu'elle représente satisfera évidemment à l'équation (1) : tout revient donc à établir la convergence de cette série, quelles que soient les valeurs choisies pour  $y_0, y_0', \dots, y_0^{(m-1)}$ . Nous établirons pour cela la convergence d'une autre série dans laquelle les coefficients auront des valeurs positives respectivement plus grandes que les modules des coefficients correspondants de la série précédente.

Soit  $r$  le rayon d'un cercle décrit du point  $a$  comme centre et dans lequel les coefficients  $p$  restent des fonctions uniformes et continues; soient  $M_1, M_2, \dots, M_m$  les modules maximum de  $p_1, p_2, \dots, p_m$  dans l'intérieur de ce cercle. Posons en outre

$$\frac{M_1}{1 - \frac{x-a}{r}} = \varphi_1, \quad \frac{M_2}{1 - \frac{x-a}{r}} = \varphi_2, \dots, \quad \frac{M_m}{1 - \frac{x-a}{r}} = \varphi_m;$$

on aura, d'après une proposition bien connue,

$$(2) \quad \text{mod.} \left( \frac{d^a \varphi_i}{dx^a} \right)_a > \text{mod.} \left( \frac{d^a p_i}{dx^a} \right)_a, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

en représentant en général par  $[f(x)]_a$  la valeur de  $f(x)$  pour  $x = a$ .

Considérons maintenant l'équation

$$(3) \quad \frac{d^m u}{dx^m} = \varphi_1 \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \varphi_2 \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \dots + \varphi_m u,$$

et désignons par  $u_0, u_0', \dots, u_0^{(m-1)}$  les modules de  $y_0, y_0', \dots, y_0^{(m-1)}$ ; formons les valeurs pour  $x = a$  des dérivées successives d'une fonction qui satisferait à l'équation (3) et dont la valeur au point  $a$  serait  $u_0$ , ses  $m-1$  premières dérivées admettant, au même point, les valeurs



$u'_0, u''_0, \dots, u_0^{(m-1)}$ . On aura à effectuer identiquement les mêmes calculs que pour l'équation (1); seulement les quantités  $p_1, p_2, \dots, p_m$  seront respectivement remplacées par  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ , et  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(m-1)}$  par  $u_0, u'_0, \dots, u_0^{(m-1)}$ . Toutes les quantités  $u_0^m, u_0^{m+1}, \dots$  que l'on obtiendra ainsi seront positives, et, à cause des inégalités (2), on aura en général

$$u_0^{(n)} \geq \text{mod. } y_0^{(n)}.$$

Si la série à coefficients positifs

$$u_0 + \frac{x-a}{1} u'_0 + \frac{(x-a)^2}{1.2} u''_0 + \dots$$

est convergente, elle représentera une fonction satisfaisant à l'équation (3), et de plus la série

$$y_0 + \frac{x-a}{1} y'_0 + \frac{(x-a)^2}{1.2} y''_0 + \dots$$

sera nécessairement convergente. Il suffit donc, pour notre objet, d'établir que l'équation (3) admet toujours comme solution une fonction uniforme et continue ayant au point  $a$  la valeur  $u_0$ , les valeurs de ses  $m-1$  premières dérivées étant pour le même point  $u'_0, u''_0, \dots, u_0^{(m-1)}$ ; cette fonction, en effet, ne pourra différer de la série

$$u_0 + \frac{x-a}{1} u'_0 + \frac{(x-a)^2}{1.2} u''_0 + \dots$$

Posons

$$z = \frac{x-a}{r},$$

l'équation (3) deviendra

$$(3 \text{ bis}) \quad (1-z) \frac{d^m u}{dz^m} = M_1 r \frac{d^{m-1} u}{dz^{m-1}} + M_2 r^2 \frac{d^{m-2} u}{dz^{m-2}} + \dots + M_m r^m u;$$

remplaçons-y  $u$  par  $\sum_0^\infty b_k z^k$  et égalons, dans le résultat, les coefficients

de  $z^k$  dans les deux membres, il viendra

$$\begin{aligned} & (m+k)(m+k-1)\dots(k+1) b_{m+k} \\ & = (m+k-1)(m+k-2)\dots(k+1)(k+M_1 r) b_{m+k-1} \\ & \quad + M_1 r^2 (m+k-2)(m+k-3)\dots(k+1) b_{m+k-2} + \dots + M_m r^m b_k. \end{aligned}$$

Cette équation fournira pour les  $b$  des valeurs positives, si l'on a choisi  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$  plus grands que zéro; on en tirera d'ailleurs

$$b_{m+k} = \frac{k + M_1 r}{k + m} b_{m+k-1} + \dots$$

Si l'on suppose les quantités  $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}$  positives, toutes les quantités  $b$  seront aussi positives, et l'on aura certainement

$$b_{m+k} > b_{m+k-1},$$

pourvu que l'on ait

$$M_1 r > m,$$

condition à laquelle on peut toujours satisfaire en remplaçant  $M_1$  par une quantité plus grande; on aura dès lors

$$\begin{aligned} \frac{b_{m+k}}{b_{m+k-1}} &= \frac{k + M_1 r}{k + m} + \frac{M_1 r^2}{(m+k)(m+k-1)} \frac{b_{m+k-2}}{b_{m+k-1}} + \dots \\ &+ \frac{M_1 r^m}{(m+k)(m+k-1)\dots(k+1)} \frac{b_k}{b_{m+k-1}}. \end{aligned}$$

Il y a dans le second membre un nombre fini  $m$  de termes; les rapports

$$\frac{b_{m+k-2}}{b_{m+k-1}}, \dots, \frac{b_k}{b_{m+k-1}}$$

sont tous inférieurs à l'unité: la limite de ce second membre pour  $k$  infini est donc l'unité, et si, par conséquent, le module de  $z$  est plus petit que 1, la série à coefficients positifs

$$\sum_0^{\infty} b_k z^k,$$

déterminée comme il a été expliqué, sera convergente, quelles que soient les valeurs positives que l'on a choisies pour  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$ ; donc, quelles que soient les valeurs positives que l'on choisira pour  $u_0, u'_0, u_0^{(m)}$ , il existera une fonction uniforme et continue  $u$  satisfaisant à l'équation (3): notre proposition peut, par conséquent, être considérée comme établie.

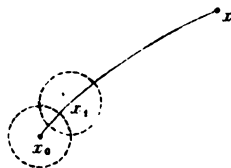
5. Il est, d'après cela, aisé de définir d'une façon très-précise ce qu'il faut entendre par une fonction satisfaisant à l'équation (1)

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + p_m y.$$

Soit T une portion du plan des  $x$  limitée par un contour simple et dans laquelle les coefficients  $p_1, p_2, \dots, p_m$  soient des fonctions de la variable  $x$  toujours uniformes et continues, à l'exception de points *singuliers* isolés les uns des autres.

Soient  $x_0$  et  $x$  deux points quelconques non singuliers de la surface T; joignons-les par une courbe quelconque  $x_0 x$  située entière-

Fig. 1.



ment dans la surface T et ne passant par aucun des points singuliers; choisissons arbitrairement pour les valeurs de  $y$  et de ses  $m - 1$  premières dérivées au point  $x_0$  des quantités quelconques  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(m-1)}$ . Au moyen de la continuité, on pourra en déduire les valeurs de la fonction  $y$  tout le long de la courbe  $x_0 x$ . On pourra en effet décrire de  $x_0$  comme centre un cercle de rayon suffisamment petit pour qu'il soit situé entièrement dans la surface T et pour qu'il existe une fonction uniforme et continue dans son intérieur, satisfaisant à l'équation (1) et telle que les valeurs au point  $x_0$  de cette fonction et de ses  $m - 1$  premières dérivées soient  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(m-1)}$ . Tout le long de la portion de courbe comprise dans le petit cercle les valeurs de  $y$  et de ses dérivées seront parfaitement déterminées; on arrivera ainsi à un point  $x_1$ , pour lequel  $y$  et ses  $m - 1$  premières dérivées auront les valeurs  $y_1, y'_1, \dots, y_1^{(m-1)}$ , et que l'on traitera comme le point  $x_0$ ; en procédant ainsi de proche en proche, on arrivera ainsi avec des valeurs toujours déterminées et variant d'une façon continue, jusqu'au point  $x$ .

6. A la fonction ainsi définie on pourra évidemment appliquer les théorèmes relatifs aux fonctions continues.

Ainsi, si deux chemins situés dans l'intérieur de T conduisent du point  $x_0$  au point  $x$  (*fig. 2*), et si l'on peut les ramener l'un à l'autre

Fig. 2.



sans passer par aucun des points singuliers, on arrivera à la même valeur en  $x$ , si l'on a choisi les mêmes valeurs initiales en  $x_0$ , que l'on suive l'un ou l'autre des deux chemins.

La fonction  $y$  satisfaisant à l'équation (1), ayant en  $x_0$  avec ses  $m - 1$  premières dérivées les valeurs arbitraires  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(m-1)}$ , est développable en une série convergente procédant suivant les puissances entières et positives de  $x - x_0$  dans tout cercle ayant le point  $x_0$  pour centre et ne contenant dans son intérieur ni point singulier ni portion du contour de T.

Si l'on décrit autour de chaque point singulier un petit cercle et qu'on supprime les portions de la surface T contenues dans ces petits cercles, puis que l'on pratique un système de coupures allant du premier cercle au deuxième, du deuxième au troisième, etc., du dernier enfin au contour de T, assujetties en outre à ne pas se croiser et à ne pas rencontrer, sauf la dernière, le contour de T, on déduira ainsi de la surface T une nouvelle surface T' à contour simple, dans l'intérieur de laquelle toute fonction satisfaisant à l'équation (1), et définie comme précédemment, restera finie, uniforme et continue.

Ces diverses propositions s'étendent évidemment au cas où la surface T embrasse tout le plan (ou toute la sphère) des  $x$ . Seulement le contour de T doit alors être remplacé par une circonférence de cercle décrite de l'origine comme centre avec un rayon infiniment grand (ou par un cercle infiniment petit entourant sur la sphère le point  $\infty$ ).

## II.

7. Nous allons maintenant établir et rappeler quelques propriétés importantes des intégrales d'une équation différentielle linéaire

$$(1) \quad \frac{d^m \gamma}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} \gamma}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} \gamma}{dx^{m-2}} + \dots + p_n \gamma,$$

définies comme précédemment. Nous conserverons nos hypothèses relativement aux coefficients  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ; nous supposerons, en outre, que les chemins suivis par la variable ne passent pas par les points singuliers et ne rencontrent pas le contour de la surface T. Lorsque nous considérerons simultanément diverses solutions de l'équation, nous supposerons que les chemins suivis par la variable aient même origine et coïncident constamment ou au moins puissent se ramener au même chemin sans passer par aucun des points singuliers : les diverses solutions ne seront distinctes que par les valeurs initiales choisies, tant pour les fonctions elles-mêmes que pour leurs  $m - 1$  premières dérivées.

8. Nous commencerons par établir deux lemmes dont nous aurons besoin plus tard.

1° Si les  $m$  fonctions  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$  sont telles que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{d^{m-1} \gamma_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} \gamma_1}{dx^{m-2}} & \dots & \gamma_1 \\ \frac{d^{m-1} \gamma_2}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} \gamma_2}{dx^{m-2}} & \dots & \gamma_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{m-1} \gamma_m}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} \gamma_m}{dx^{m-2}} & \dots & \gamma_m \end{vmatrix}$$

soit identiquement nul, il existera entre ces fonctions une relation linéaire à coefficients constants, telle que

$$C_1 \gamma_1 + C_2 \gamma_2 + \dots + C_m \gamma_m = 0.$$

La réciproque de cette proposition est évidente.

Remarquons d'abord que le déterminant

$$D' = \begin{vmatrix} \frac{d^m y_1}{dx^m} & \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} & \dots & y_1 \\ \frac{d^m y_2}{dx^m} & \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} & \dots & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^m y_m}{dx^m} & \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} & \dots & y_m \end{vmatrix},$$

qui ne diffère du précédent qu'en ce que les éléments de la première colonne ont été respectivement remplacés par leurs dérivées, est la dérivée de D. En effet, si dans ce dernier déterminant on donne à  $x$  l'accroissement  $dx$ , il deviendra, en ne tenant compte que des accroissements du premier ordre,

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + \frac{d^m y_1}{dx^m} dx & \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} + \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} dx & \dots & y_1 + \frac{dy_1}{dx} dx \\ \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + \frac{d^m y_2}{dx^m} dx & \frac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}} + \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} dx & \dots & y_2 + \frac{dy_2}{dx} dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} + \frac{d^m y_m}{dx^m} dx & \frac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} + \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} dx & \dots & y_m + \frac{dy_m}{dx} dx \end{vmatrix},$$

ou, en développant en somme de déterminants, supprimant, comme étant au moins du second ordre, ceux dont deux colonnes, au moins, contiennent  $dx$  en facteur et faisant attention à ceux qui sont identiquement nuls,

$$D + D' dx.$$

$D'$  est donc bien la dérivée de D.

Par suite, si D est identiquement nul, il en sera de même de  $D'$ . Désignons maintenant par  $C_1, C_2, \dots, C_m$ ;  $C'_1, C'_2, \dots, C'_m$  les mineurs respectifs de ces deux déterminants relatifs aux colonnes extrêmes de droite, on aura les deux séries de  $m - 1$  identités qui suivent :

$$\begin{aligned} C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m &= 0, \\ C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \dots + C_m \frac{dy_m}{dx} &= 0, \\ \dots & \\ C_2 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + C_2 \frac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}} + \dots + C_m \frac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} &= 0; \end{aligned}$$

et

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m = 0,$$

$$C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \dots + C_m \frac{dy_m}{dx} = 0,$$

.....,

$$C_1 \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} + C_2 \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} + \dots + C_m \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} = 0.$$

Elles montrent que l'on a

$$\frac{C_1}{C_1} = \frac{C_2}{C_2} = \dots = \frac{C_m}{C_m},$$

ou, en général,

$$\frac{C_i C_j - C_j C_i}{(C_j)^2} = 0;$$

mais  $C_i$ ,  $C_j$  étant les dérivées de  $C_i$ ,  $C_j$ , ce rapport est la dérivée de

$$\frac{C_i}{C_j};$$

ce dernier rapport est donc une constante : il suffit de diviser la première de nos identités par l'une quelconque des quantités  $C$  pour apercevoir la vérité de la proposition annoncée.

2° Si  $y_1, y_2, \dots, y_m$  sont  $m$  solutions de l'équation différentielle (1)

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + p_m y,$$

et si l'on désigne par  $D$  le même déterminant que précédemment, on aura,  $C$  étant une constante (1),

$$D = C e^{\int p_1 dx}.$$

Si dans le déterminant  $D'$ , dérivée de  $D$ , on remplace les éléments de

(1) Cette proposition est due à M. Liouville.





Si l'on substitue en effet dans l'équation différentielle (1) les  $m + 1$  solutions considérées  $y_1, y_2, \dots, y_{m+1}$ , on obtiendra  $m + 1$  équations d'où l'on déduira que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{d^m y_1}{dx^m} & \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} & \dots & y_1 \\ \frac{d^m y_2}{dx^m} & \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} & \dots & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^m y_{m+1}}{dx^m} & \frac{d^{m-1} y_{m+1}}{dx^{m-1}} & \dots & y_{m+1} \end{vmatrix}$$

est identiquement nul : d'où résulte la proposition énoncée.

On peut encore remarquer que, si l'on pose

$$y_{m+1} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m,$$

on pourra déterminer les coefficients constants  $C_1, C_2, \dots, C_m$  de manière que, pour  $x = x_0$ , la fonction qui constitue le second membre soit égale à la fonction  $y_{m+1}$ , cette égalité subsistant pour les  $m - 1$  premières dérivées des deux fonctions; on aura pour cela à résoudre  $m$  équations du premier degré dont le déterminant, qui n'est autre que le déterminant  $D$  pour  $x = x_0$ , est, par hypothèse, différent de zéro. Les dérivées suivantes seront aussi égales pour  $x = x_0$ , à cause de l'équation différentielle même. Les deux séries représentant les deux membres de l'égalité posée seront donc identiques pour des valeurs convenables des coefficients  $C$  : c'est précisément ce qu'il fallait établir.

11. Soient  $y_1, y_2, \dots, y_m$  les éléments d'un système fondamental et soient  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ ,  $m$  intégrales s'exprimant au moyen des  $y_1, y_2, \dots, y_m$  par les équations

$$\begin{aligned} Y_1 &= C_{11} y_1 + C_{12} y_2 + \dots + C_{1m} y_m, \\ Y_2 &= C_{21} y_1 + C_{22} y_2 + \dots + C_{2m} y_m, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ Y_m &= C_{m1} y_1 + C_{m2} y_2 + \dots + C_{mm} y_m; \end{aligned}$$

$Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  formeront ou non un système fondamental selon que le dé-

terminant

$$\delta = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mm} \end{vmatrix}$$

sera différent de zéro ou égal à zéro.

En effet, si l'on désigne, comme ci-dessus, par D le déterminant formé avec les quantités  $y_1, y_2, \dots, y_m$  et leurs  $m-1$  premières dérivées et par D<sub>1</sub> le déterminant analogue relatif aux quantités  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ , on aura

$$D_1 = \delta \cdot D.$$

12. Soient  $y_1, y_2, \dots, y_m$  les éléments d'un système fondamental et  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ,  $n$  fonctions linéaires à coefficients constants des  $n$  éléments  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , définies par les équations

$$v_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\beta=n} C_{\alpha\beta} y_\beta;$$

$v_1, v_2, \dots, v_n; y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_m$  formeront un système fondamental si le déterminant

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

En effet, il est bien aisé de voir qu'il n'existera alors aucune relation linéaire à coefficients constants entre  $v_1, v_2, \dots, v_n; y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_m$ . C'est d'ailleurs un cas particulier de la proposition précédente.

13. On obtiendra en particulier un système fondamental par le procédé suivant, bien connu pour la résolution des équations linéaires.

Soit  $y_1$  une intégrale de l'équation

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + P_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + P_m y.$$

On fera

$$(2) \quad y = y_1 f z dx,$$

et, en substituant dans l'équation (1), on obtiendra l'équation linéaire d'ordre  $m - 1$

$$(3) \quad \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} = q_1 \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + q_2 \frac{d^{m-3} z}{dx^{m-3}} + \dots + q_{m-1} z,$$

où

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{1}{y_1} \left( -\frac{m}{1} \frac{dy_1}{dx} + p_1 y_1 \right), \\ \dots\dots\dots, \\ q_r = \frac{1}{y_1} \left[ -\frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{1.2\dots r} \frac{d^r y_1}{dx^r} \right. \\ \quad + p_1 \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-r+1)}{1.2\dots(r-1)} \frac{d^{r-1} y_1}{dx^{r-1}} + \dots \\ \quad \left. + p_j \frac{(m-j)(m-j-1)\dots(m-r+1)}{1.2\dots(r-j)} \frac{d^{r-j} y_1}{dx^{r-j}} + \dots + p_r y_1 \right]. \end{array} \right.$$

Soit maintenant  $z_1$  une solution de cette équation et faisons

$$(5) \quad y_2 = y_1 f z_1 dx.$$

Posons de même

$$z = z_1 f t dx,$$

nous formerons une équation différentielle en  $t$  d'ordre  $m - 2$ , dont je désignerai par  $t_1$  une intégrale; faisons encore

$$(6) \quad y_3 = y_1 f z_1 dx f t_1 dx;$$

continuons ainsi jusqu'à ce que nous soyons arrivés à une équation du premier ordre dont je désignerai par  $\omega_1$  l'intégrale. Soit

$$(7) \quad y_m = y_1 f z_1 dx f t_1 dx f u_1 dx \dots f \omega_1 dx;$$

je dis que le système d'intégrales  $y_1, y_2, \dots, y_m$  est un système fondamental. Pour le prouver, il faut montrer qu'il ne peut exister de relation à coefficients constants de la forme

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m.$$

Si une pareille relation existait, on pourrait la diviser par  $y$ , qui est différent de zéro; on obtiendrait ainsi

$$C_1 + C_2 f z, dx + \dots + C_m f z, dx f v, dx \dots f w, dx = 0;$$

différentiant cette dernière identité, divisant par  $z$ , et continuant de la sorte, on arriverait à prouver que  $C_m$  est nul; puis, en remontant, qu'il en est de même de  $C_{m-1}$ ,  $C_{m-2}$ , ...,  $C_1$ .

14. Le déterminant que nous avons désigné jusqu'à présent par  $D$ , formé au moyen du système fondamental précédent  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , s'exprime d'une façon remarquable au moyen des solutions  $y_1, z_1, \dots, w_1$  des équations linéaires successivement employées.

Désignons, en effet, par  $D'$  le déterminant analogue relatif à un système fondamental de solutions de l'équation (3) en  $z$ ; on aura, d'après un théorème précédent,

$$D' = C e^{\int p_1 dx},$$

ou, en vertu de la première des équations (4),

$$D' = C e^{\int p_1 dx - \int \frac{m}{y_1} \frac{dy_1}{y_1}} = C' D y_1^{-m},$$

où  $C, C'$  désignent des constantes; de là

$$D = C'' D' y_1^m,$$

de même

$$D' = C'' D'' z_1^{m-1}, \dots$$

et finalement, en multipliant toutes ces identités,

$$D = C y_1^m z_1^{m-1} \dots w_1,$$

$C$  désignant encore une constante.

### III.

15. Nous allons maintenant nous occuper des points singuliers: nous supposons désormais que les coefficients  $p_1, p_2, \dots, p_m$  de l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + p_m y,$$

sont uniformes dans tout le plan des  $x$  (ou sur toute la sphère) et qu'ils n'y présentent qu'un nombre fini de points de discontinuité isolés les uns des autres. Parmi les propositions que nous établirons, plusieurs s'appliquent au cas où les conditions d'uniformité et de continuité ne sont satisfaites que pour une portion limitée  $T$  du plan ou de la sphère; mais il sera trop aisé de les reconnaître et, au besoin, d'en modifier l'énoncé, pour que nous y insistions.

Dès lors, à cause du théorème fondamental, une solution quelconque  $y$  de l'équation (1) sera une fonction de  $x$  continue, excepté pour les points de discontinuité des coefficients et pour le point  $\infty$  de la sphère : on ramènera l'étude de ce dernier à celle d'un point singulier à distance finie au moyen d'un changement de la variable indépendante. Par exemple, on le ramènera au cas d'un point singulier situé à l'origine des coordonnées, en faisant

$$x = \frac{1}{t},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dy}{dt} t^2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} t^4 + 2\frac{dy}{dt} t^3,$$

et, en général,

$$\begin{aligned} (-1)^n \frac{d^n y}{dx^n} &= t^{2n} \frac{d^n y}{dt^n} + \frac{n}{1} (n-1) t^{2n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots \\ &+ \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1.2\dots p} (n-1)(n-2)\dots(n-p) t^{2n-p} \frac{d^{n-p} y}{dt^{n-p}} + \dots \\ &+ 2.3\dots n t^{n+1} \frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

16. Soit maintenant  $a$  un point singulier quelconque et soient  $y_1, y_2, \dots, y_m$  les éléments d'un système fondamental d'intégrales de l'équation

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + p_m y.$$

Supposons que la variable fasse le tour du point  $a$  et soient

$$[y_1]', [y_2]', \dots, [y_m]'$$



Cherchons, en effet, une équation linéaire

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + p_n y,$$

à laquelle satisfassent ces  $m$  fonctions; nous aurons, pour en déterminer les coefficients  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , à résoudre le système de  $m$  équations du premier degré

$$\frac{d^m y_1}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} + \dots + p_n y_1,$$

$$\frac{d^m y_2}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}} + \dots + p_n y_2,$$

.....,

$$\frac{d^m y_m}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} + \dots + p_n y_m;$$

le déterminant de ces équations

$$D = \begin{vmatrix} \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} & \dots & y_1 \\ \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}} & \dots & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} & \dots & y_m \end{vmatrix}$$

ne peut être identiquement nul que si les fonctions  $y$  sont liées par une relation linéaire à coefficients constants. Supposons qu'il n'existe pas de pareille relation, ce que l'on peut toujours faire en ramenant, s'il en est besoin, les fonctions  $y$  à être en moindre nombre : le déterminant  $D$  jouira, relativement à la continuité et à l'uniformité, des mêmes propriétés que les fonctions  $y_1, y_2, \dots, y_m$  elles-mêmes.

Soit  $D_\alpha$  le déterminant obtenu en y remplaçant les éléments de la  $\alpha^{\text{ième}}$  colonne à partir de la gauche par

$$\frac{d^m y_1}{dx^m}, \frac{d^m y_2}{dx^m}, \dots, \frac{d^m y_m}{dx^m}.$$

On aura, en général,

$$p_\alpha = \frac{D_\alpha}{D};$$

les points où  $p_\alpha$  peut cesser d'être uniforme sont les points singuliers des fonctions  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ . Or, lorsque la variable tourne autour d'un de ces points,  $p_\alpha$  ne change pas, car  $D_\alpha$  et  $D$  sont multipliés tous les deux par le déterminant désigné par  $R$  dans le paragraphe précédent.

En particulier, lorsque chaque point singulier  $\alpha$  de l'une quelconque  $\gamma_r$  des fonctions  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$  sera tel qu'on puisse toujours trouver un nombre  $\rho$  tel que  $(x - \alpha)^\rho \gamma_r$  soit dans le domaine de  $\alpha$  une fonction uniforme finie et continue, il en sera de même pour chacune des quantités  $D_\alpha, D$ , et le point  $\alpha$  sera pour  $p_\alpha$  un zéro ou un infini d'ordre entier, ou même un point ordinaire. Si la même circonstance se présente pour le point  $\infty$  de la sphère, ramené, comme il a été expliqué, à distance finie, la fonction  $p_\alpha$ , uniforme sur toute la sphère, y présentera un certain nombre de pôles séparés les uns des autres par des espaces finis, par suite, en nombre fini, et sera, par conséquent, une fonction rationnelle.

Pour donner de suite un exemple, considérons le cas d'une fonction  $\gamma$  de  $x$  définie par une équation algébrique entière en  $x$  et  $\gamma$ , du degré  $m$  en  $\gamma$ . Les  $m$  racines de cette équation seront des fonctions de  $x$  qui, relativement à la continuité et à la nature de leurs points singuliers, satisfont aux conditions ci-dessus mentionnées. De plus, quand la variable tourne autour d'un point singulier, elles ne font que s'échanger entre elles, ce qui est un cas particulier des relations (2) du paragraphe précédent : on en conclut qu'elles satisferont à une équation différentielle linéaire qui sera d'ordre  $m$  s'il n'existe entre les racines aucune relation linéaire à coefficients constants, et d'ordre moindre dans le cas contraire; si la somme des racines n'est pas nulle, l'équation différentielle admettra une solution rationnelle.

Il est aisé de former effectivement cette équation :

Soit  $f(x, \gamma) = 0$  l'équation proposée, du degré  $m$  en  $\gamma$  et admettons pour simplifier que le coefficient de  $\gamma^m$  soit une constante: soit, en outre,  $\varphi(x) = 0$  le résultat de l'élimination de  $\gamma$  entre les deux équations

$$f(x, \gamma) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0.$$

On pourra poser identiquement

$$\varphi(x) = f(x, \gamma) A + \frac{\partial f}{\partial \gamma} B,$$



où A et B sont des polynômes en  $x, y$  dont les degrés sont respectivement  $m - 2$  et  $m - 1$  par rapport à  $y$ . Or on a

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{B \frac{\partial f}{\partial x}}{B \frac{\partial f}{\partial y}} = - \frac{B \frac{\partial f}{\partial x}}{\varphi(x)},$$

à cause de l'équation  $f(x, y) = 0$ ; on ramènera  $- B \frac{\partial f}{\partial x}$  à ne contenir  $y$  qu'à la puissance  $m - 1$  au moyen de cette même équation et l'on aura mis  $\frac{dy}{dx}$  sous la forme  $\frac{P_1}{\varphi(x)}$ , où  $P_1$  est un polynôme entier en  $x, y$ , ne contenant  $y$  qu'au degré  $m - 1$ ; en désignant par  $P_2, P_3, \dots, P_m$  des polynômes analogues, on pourra faire

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P_2}{[\varphi(x)]^2}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{P_3}{[\varphi(x)]^3}, \dots, \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_m}{[\varphi(x)]^m}.$$

En éliminant  $y^2, y^3, \dots, y^{m-1}$  entre les  $m - 1$  équations

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_1}{\varphi(x)}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P_2}{[\varphi(x)]^2}, \dots, \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_m}{[\varphi(x)]^m},$$

on tombera visiblement sur une équation linéaire de la forme

$$\frac{d^m y}{dx^m} + \frac{Q_1}{\varphi(x)} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \frac{Q_2}{[\varphi(x)]^2} \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{Q_m}{[\varphi(x)]^m} y = 0,$$

où les quantités  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  sont des polynômes entiers en  $x$ .

Nous aurons plus tard l'occasion d'étudier des équations ayant précisément cette forme : on voit que les points singuliers sont, comme on devait bien s'y attendre, les racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0.$$

A ces points singuliers s'ajouteraient, si le coefficient de  $y^m$  n'était pas une constante, les points correspondant aux valeurs de  $x$  qui annuleraient ce coefficient.

On reconnaîtra sans difficulté que, réciproquement, si une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels admet une solution

algébrique  $y$ , racine de l'équation irréductible et entière

$$f(x, y) = 0,$$

elle admettra comme solutions toutes les autres racines de cette équation.

18. Revenons maintenant à la théorie générale. Puisque toute solution d'une équation différentielle linéaire s'exprime en fonction linéaire à coefficients constants des éléments d'un système fondamental, il suffit évidemment de savoir comment se comportent les éléments d'un système particulier dans le domaine d'un point singulier, pour être renseigné relativement à toutes les intégrales de l'équation différentielle donnée.

Or, pour chaque point singulier donné, il existe un système fondamental dont les éléments se comportent d'une façon simple, ainsi que nous allons le mettre en lumière.

Soient, comme ci-dessus,

$$y_1, y_2, \dots, y_m$$

les éléments d'un système fondamental quelconque de solutions, et

$$[y_1]', [y_2]', \dots, [y_m]'$$

les nouvelles valeurs de ces éléments quand la variable a fait le tour complet d'un point singulier  $a$ ; supposons ces nouvelles valeurs liées aux anciennes par les relations suivantes, où les  $\alpha$  représentent des constantes :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} [y_1]' = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \dots + \alpha_{1m} y_m, \\ [y_2]' = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \dots + \alpha_{2m} y_m, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ [y_m]' = \alpha_{m1} y_1 + \alpha_{m2} y_2 + \dots + \alpha_{mm} y_m. \end{array} \right.$$

Posons

$$u = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m,$$

$x_1, x_2, \dots, x_m$  étant des constantes que nous allons chercher à déterminer de manière que

$$(3) \quad [u]' = \omega u,$$

$[u]'$  désignant la valeur de  $u$  après un tour de la variable autour du point  $a$  et  $\omega$  étant une constante ; on devra avoir

$$\begin{aligned}
 [u]' = & \ y_1 (\alpha_{11} x_1 + \alpha_{21} x_2 + \dots + \alpha_{m1} x_m) \\
 & + y_2 (\alpha_{12} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \dots + \alpha_{m2} x_m) \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + y_m (\alpha_{1m} x_1 + \alpha_{2m} x_2 + \dots + \alpha_{mm} x_m) \\
 = & \ \omega (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m).
 \end{aligned}$$

On satisfera à cette condition en déterminant  $\omega, x_1, x_2, \dots, x_m$  par les équations

$$\begin{aligned}
 (\alpha_{11} - \omega) x_1 + \alpha_{21} x_2 + \dots + \alpha_{m1} x_m = 0, \\
 \alpha_{12} x_1 + (\alpha_{22} - \omega) x_2 + \dots + \alpha_{m2} x_m = 0, \\
 \dots \dots \dots \\
 \alpha_{1m} x_1 + \alpha_{2m} x_2 + \dots + (\alpha_{mm} - \omega) x_m = 0,
 \end{aligned}$$

qui entraînent la suivante :

$$\begin{vmatrix}
 \alpha_{11} - \omega & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1} \\
 \alpha_{12} & \alpha_{22} - \omega & \dots & \alpha_{m2} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{mm} - \omega
 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation, à laquelle, vu son importance, nous donnerons désormais le nom d'équation fondamentale relative au point  $a$ , fournira en général  $m$  valeurs pour  $\omega$  : chacune de ces valeurs portée dans les équations (4) permettra de déterminer des quantités proportionnelles à  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , et donnera par conséquent une fonction  $u$  <sup>(1)</sup>.

19. Les racines de l'équation fondamentale sont indépendantes du choix du système fondamental : cela résulte de ce que les fonctions  $u$  qu'elle permet de trouver et les quantités  $\omega$  qui en dépendent sont, d'après ce que l'on a vu, parfaitement déterminées. Il reste toutefois une légère difficulté lorsqu'elle admet des racines multiples : on aperçoit bien que deux équations relatives à deux systèmes différents ont

---

(<sup>1</sup>) En particulier, si cette équation admettait comme racine une solution de l'équation binôme  $p^p - 1 = 0$ , on obtiendrait une fonction qui reprendrait la même valeur après  $p$  tout autour du point singulier, comme une fonction algébrique.

les mêmes racines, mais on ne voit pas que les degrés de multiplicité de ces racines soient les mêmes. On peut d'ailleurs, et dans tous les cas, démontrer directement cette propriété en se fondant sur ce que, dans cette équation, le coefficient de  $\omega^k$  est la somme des déterminants mineurs principaux du  $k^{\text{ième}}$  ordre du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{mm} \end{vmatrix}.$$

On prendra un second système fondamental dont on exprimera les éléments linéairement en  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , puis on calculera les quantités qui, dans la nouvelle équation, remplacent les  $\alpha$ , et l'on constatera que les sommes susdites ne changent pas par la substitution (BRIOCHI, § 7, formule 61).

20. Supposons d'abord les racines de l'équation fondamentale toutes différentes entre elles et désignons-les par  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$  : on en déduira, comme il a été expliqué,  $m$  fonctions  $u_1, u_2, \dots, u_m$  telles que, en général,

$$[u_p]' = \omega_p u_p.$$

Ces  $m$  fonctions forment un système fondamental, car s'il existait entre elles une relation à coefficients constants, telle que

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_m u_m = 0,$$

on en conclurait, en faisant tourner la variable autour de  $a$ ,

$$C_1 \omega_1 u_1 + C_2 \omega_2 u_2 + \dots + C_m \omega_m u_m = 0,$$

$$C_1 \omega_1^2 u_1 + C_2 \omega_2^2 u_2 + \dots + C_m \omega_m^2 u_m = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$C_1 \omega_1^{m-1} u_1 + C_2 \omega_2^{m-1} u_2 + \dots + C_m \omega_m^{m-1} u_m = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^{m-1} \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_2^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega_m & \omega_m^2 & \dots & \omega_m^{m-1} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est impossible.





Posons

$$e^{2\pi r_1 \sqrt{-1}} = \omega_1, \quad r_1 = \frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \log \omega_1,$$

en prenant pour  $\log \omega_1$ , une quelconque de ses valeurs; la fonction

$$u_1 (x - a)^{-r_1}$$

reste uniforme dans le domaine du point  $a$ ; en la désignant par  $\varphi_1(x)$ , on pourra poser

$$u_1 = (x - a)^{r_1} \varphi_1(x).$$

Si donc l'équation fondamentale admet  $m$  racines distinctes  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ , il existera un système fondamental dont les éléments pourront être mis sous la forme

$$u_\alpha = (x - a)^{r_\alpha} \varphi_\alpha(x), \quad \alpha = 1, 2, \dots, m,$$

où

$$r_\alpha = \frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \log \omega_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m.$$

les différences mutuelles des nombres  $r_\alpha$  ne pouvant jamais être entières et les quantités  $\varphi_\alpha(x)$  représentant des fonctions uniformes de  $x$  dans le domaine de  $a$ , développables en doubles séries procédant suivant les puissances entières positives et négatives de  $x - a$  et convergentes dans le domaine du point  $a$ .

23. Considérons maintenant le cas d'une racine  $\omega_1$  multiple, d'ordre  $\lambda$ ; il existera alors un groupe d'intégrales  $u_1, u_2, \dots, u_\lambda$ , jouissant des propriétés exprimées par les équations (6) du § 21 : la première  $u_1$  sera de la forme

$$u_1 = (x - a)^{r_1} \varphi_{11}(x),$$

où

$$r_1 = \frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \log \omega_1,$$

et où  $\varphi_{11}(x)$  est une fonction uniforme de  $x$ . Considérons maintenant la seconde; on a

$$[u_2]' = \omega_{21} u_1 + \omega_1 u_2$$

et, par suite,

$$\left[ \frac{u_2}{u_1} \right]' = \frac{\omega_{21}}{\omega_1} + \frac{u_2}{u_1}.$$

(Nous désignerons désormais, comme nous l'avons fait jusqu'ici, par  $[f(x)]'$  ce que devient  $f(x)$  quand la variable  $x$  a fait le tour du point singulier  $a$ ). Ce point singulier  $a$  a, d'après cette dernière égalité, le caractère d'un point singulier *logarithmique* pour la fonction  $\frac{u_2}{u_1}$ , c'est-à-dire qu'à chaque tour de la variable elle est augmentée d'une quantité constante  $\frac{\omega_{21}}{\omega_1}$ . Il suit de là que la fonction

$$\frac{u_2}{u_1} - \frac{\omega_{21}}{\omega_1 \cdot 2\pi\sqrt{-1}} \log(x-a)$$

est uniforme dans le domaine du point  $a$ ; si on la désigne pour un instant par  $f(x)$ , on pourra poser

$$(8) \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{\omega_{21}}{\omega_1 \cdot 2\pi\sqrt{-1}} \log(x-a) + f(x).$$

La fonction

$$(x-a)^{-r_1} u_1 f(x)$$

est aussi uniforme; on devra donc prendre  $u_2$  de la forme

$$(9) \quad u_2 = (x-a)^{r_1} [\varphi_{21}(x) + \varphi_{22} \log(x-a)],$$

les deux fonctions  $\varphi_{21}(x)$  et  $\varphi_{22}(x)$  étant uniformes et la dernière ne différant de  $\varphi_{11}(x)$  que par un facteur constant.

On aura de même, pour la troisième fonction,

$$\left[ \frac{u_3}{u_1} \right]' = \frac{\omega_{31}}{\omega_1} + \frac{\omega_{32}}{\omega_1} \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_1},$$

ou, en vertu de l'équation (8),

$$\left[ \frac{u_3}{u_1} \right]' = \frac{\omega_{31}}{\omega_1} + \frac{\omega_{32} \omega_{21}}{\omega_1^2 \cdot 2\pi\sqrt{-1}} \log(x-a) + \frac{u_3}{u_1} + \frac{\omega_{32}}{\omega_1} f(x).$$

On conclut de là que la fonction  $\frac{u_3}{u_1}$  se comporte dans le domaine du point  $a$  comme la fonction

$$k [\log(x-a)]^2 + \psi(x) [\log(x-a)],$$

où  $k$  est une constante et  $\psi(x)$  une fonction uniforme qu'il serait aisé





en donnant aux fonctions  $\varphi_{n2}, \varphi_{n3}, \dots, \varphi_{nn}$  telles formes que l'on voudra, pourvu que l'on détermine convenablement  $\varphi_{n1}$  : nous allons les exprimer en fonctions linéaires des fonctions  $\varphi$ , dont le premier indice est inférieur à  $n$ ; elles seront par suite uniformes dans le domaine du point  $a$ .

Dans ce but, nous égalons les coefficients des puissances  $1, 2, \dots, n-1$  de  $\log(x-a)$  dans les deux fonctions obtenues : la première en remplaçant dans le second membre de l'équation (12)  $u_1, u_2, \dots, u_n$  par les valeurs que fournissent les équations (11), la seconde en supposant que dans le second membre de l'équation (13) la variable fasse le tour du point  $a$ ,  $\varphi_{n1}$  se changeant alors en  $[\varphi_{n1}]'$  et  $\varphi_{n2}, \dots, \varphi_{nn}$  gardant leurs valeurs primitives : on obtient ainsi, après avoir divisé par  $(x-a)^{r_1}$ , une équation identique et  $n-2$  équations dont le type est le suivant :

$$(14) \quad \sum_{p=k+2}^{p=n} \omega_1 \frac{(k+1)(k+2)\dots(p-1)}{1.2\dots(p-k-1)} (2\pi\sqrt{-1})^{p-k-1} \varphi_{np} = \sum_{p=k+1}^{p=n-1} \omega_{np} \varphi_{p,k+1},$$

pour les valeurs  $1, 2, \dots, n-2$  de  $k$ . Ces  $n-2$  équations permettent de déterminer  $\varphi_{n2}, \varphi_{n3}, \dots, \varphi_{nn}$  en fonction linéaire des quantités  $\varphi$ , dont le premier indice est inférieur à  $n$ , quantités qui sont connues.

Ces équations étant satisfaites, les parties restantes des deux valeurs de  $[u_n]'$  doivent être identiques, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\begin{aligned} & \omega_{n1} \varphi_{11} + \omega_{n2} \varphi_{21} + \dots + \omega_{n,n-1} \varphi_{n-1,1} + \omega_1 \varphi_{n1} \\ & = \{ [\varphi_{n1}]' + 2\pi\sqrt{-1} \varphi_{n2} + (2\pi\sqrt{-1})^2 \varphi_{n3} + \dots + (2\pi\sqrt{-1})^{n-1} \varphi_{nn} \} \omega_1; \end{aligned}$$

nous déterminerons  $\varphi_{n2}$  par l'équation

$$\begin{aligned} & [2\pi\sqrt{-1} \varphi_{n2} + (2\pi\sqrt{-1})^2 \varphi_{n3} + \dots + (2\pi\sqrt{-1})^{n-1} \varphi_{nn}] \omega_1 \\ & = \omega_{n1} \varphi_{11} + \omega_{n2} \varphi_{21} + \dots + \omega_{n,n-1} \varphi_{n-1,1}, \end{aligned}$$

et il restera

$$\varphi_{n1} = [\varphi_{n1}]':$$

ce qui montre que la fonction  $\varphi_{n1}$  doit être uniforme, ainsi que nous l'avions annoncé.

On voit aussi que les fonctions  $\varphi$  peuvent toutes s'exprimer en fonc-

tion linéaire à coefficients constants de celles d'entre elles dont le second indice est l'unité.

En particulier, celle des équations (14) qui correspond au cas où l'on prend  $k = n - 2$  donne

$$\omega_1 (n - 1) \pi \sqrt{-1} \varphi_{nn} = \omega_{n,n-1} \varphi_{n-1,n-1},$$

d'où

$$\varphi_{nn} = \frac{\omega_{n,n-1} \cdot \omega_{n-1,n-2} \cdot \dots \cdot \omega_{21}}{(n-1)(n-2)\dots 1 (\omega_1 2\pi \sqrt{-1})^{n-1}} \varphi_{11};$$

ce sont là les propriétés que nous avons annoncées.

Il y a lieu de remarquer que, si les fonctions  $u_1, u_2, \dots, u_\lambda$  jouissent des propriétés qu'expriment les équations (6) du paragraphe précédent, on obtiendra un groupe de fonctions jouissant des mêmes propriétés, en remplaçant l'une quelconque  $u_k$  de ces fonctions par une combinaison linéaire

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k$$

de cette fonction et de celles dont l'indice est moindre. Cette remarque nous sera utile.

On peut arriver aux formules (11) d'une façon bien plus rapide, mais moins rigoureuse, en employant un procédé bien connu et qui consiste à passer du cas des racines simples à celui des racines multiples.

Soient, en effet,  $r$  le logarithme, divisé par  $2\pi\sqrt{-1}$ , d'une racine simple de l'équation fondamentale, et

$$(x - a)^r \varphi(x)$$

l'intégrale correspondante : la fonction  $\varphi$  dépend évidemment de  $r$ ; représentons-la par

$$\varphi(x, r).$$

Supposons qu'une seconde racine de l'équation fondamentale tende vers la première; il existera une seconde intégrale que nous pouvons représenter par

$$(x - a)^{r+h} \varphi(x, r + h),$$

$h$  étant une quantité infiniment petite. La fonction

$$\frac{(x - a)^{r+h} \varphi(x, r + h) - (x - a)^r \varphi(x, r)}{h}$$

est aussi une intégrale; or, lorsque  $h$  s'annule, c'est-à-dire lorsque les deux racines deviennent égales, cette quantité devient

$$\frac{\partial}{\partial r}[(x - a)^r \varphi(x, r)] = (x - a)^r \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \varphi \log(x - a) \right].$$

On démontrerait de même que, si une troisième racine devient égale à la première,

$$(x - a)^r \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \log(x - a) + \varphi [\log(x - a)]^2 \right\}$$

est encore une intégrale, etc. Nous devons mentionner ce procédé, quand ce ne serait que pour montrer de quelle façon on pouvait découvrir immédiatement les formules (11); il y a lieu de remarquer aussi la façon extrêmement simple dont sont liées entre elles les fonctions qui, dans nos dernières formules, remplacent les quantités  $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{nn}$ .

IV.

24. Nous nous proposons maintenant d'étudier, parmi les équations différentielles linéaires

$$(1) \quad \frac{d^n \gamma}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} \gamma}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} \gamma}{dx^{n-2}} + \dots + p_n \gamma$$

à coefficients uniformes  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , celles dont toutes les intégrales jouissent de la propriété de rester finies pour chaque point singulier  $a$ , quand on les a préalablement multipliées par une puissance convenable de  $x - a$ , et aussi pour  $x = \infty$ , quand on les a multipliées par une puissance convenable de  $x$ ; mais auparavant il convient d'étudier de plus près les fonctions que nous avons été amené précédemment à introduire comme formes des intégrales d'une équation linéaire à coefficients uniformes, surtout dans le cas où ces fonctions jouissent des propriétés dont nous venons de parler.

25. Nous établirons d'abord le théorème suivant :

*Il ne peut exister aucune relation identique de la forme*

$$\begin{aligned} & C_0 (x - a)^{\alpha} \left\{ \varphi_{r_0,1} + \varphi_{r_0,2} \log(x - a) + \dots + \varphi_{r_0,\alpha+1} [\log(x - a)]^{\alpha} \right\} \\ & + C_1 (x - a)^{\beta} \left\{ \varphi_{r_1,1} + \varphi_{r_1,2} \log(x - a) + \dots + \varphi_{r_1,\beta+1} [\log(x - a)]^{\beta} \right\} \\ & + \dots \\ & + C_k (x - a)^{\lambda} \left\{ \varphi_{r_k,1} + \varphi_{r_k,2} \log(x - a) + \dots + \varphi_{r_k,\lambda+1} [\log(x - a)]^{\lambda} \right\} = 0. \end{aligned}$$

où les  $r$  sont des quantités fixes dont les différences ne sont ni nulles, ni entières, où les  $c$  sont des constantes et les  $\varphi$  sont des fonctions uniformes dans le voisinage du point  $a$ .

Posons, en général,

$$\omega_t = e^{2\pi r_t \sqrt{-1}}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, k;$$

les  $\omega$  seront des quantités différentes les unes des autres. Supposons que l'on fasse faire à  $x$   $k-1$  tours autour de  $a$ , on aura  $k$  équations du premier degré en  $C_0, C_1, \dots, C_k$ , dont le déterminant devra être identiquement nul; or ce déterminant, développé suivant les puissances entières de  $\log(x-a)$ , peut se mettre sous la forme

$$(x-a)^{r_0+r_1+\dots+r_k} \{P_0 + P_1 \log(x-a) + \dots + P_p [\log(x-a)]^p\},$$

les  $P$  étant des fonctions uniformes dans le voisinage de  $a$ . Chacune de ces fonctions devra être identiquement nulle, sans quoi l'équation

$$P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \dots + P_p z^p = 0$$

aurait une infinité de racines. Or la fonction  $P_p$  est égale, à un facteur constant près différent de zéro, au produit

$$\varphi_{r_0, \alpha+1} \times \varphi_{r_1, \beta+1} \times \dots \times \varphi_{r_p, \lambda+1},$$

qui est différent de zéro ainsi que tous ses facteurs.

Par un raisonnement analogue, on voit que, si

$$V = (x-a)^r \{\varphi_0 + \varphi_1 \log(x-a) + \dots + \varphi_r [\log(x-a)]^r\}$$

est une intégrale de l'équation (1),  $(x-a)^r \varphi_r$  est aussi une intégrale; car, si l'on substitue dans cette équation que l'on divise par  $(x-a)^r$ , le coefficient de  $[\log(x-a)]^r$  devra être nul dans le résultat. Cette propriété doit être rapprochée de la dernière partie du théorème énoncé dans le § 23.

26. Occupons-nous maintenant des fonctions de la forme

$$(2) \quad F = \{\varphi_0 + \varphi_1 \log(x-a) + \dots + \varphi_n [\log(x-a)]^n\} (x-a)^r,$$

qui restent finies, pour  $x=a$ ; quand on les a préalablement multipliées par une puissance convenable de  $x-a$ ,  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  sont,

comme d'habitude, des fonctions uniformes de  $x$  dans le domaine du point  $a$ . Si l'on remarque que l'expression

$$(x - a)^p [\log(x - a)]^q,$$

où  $p$  est positif, est toujours nulle pour  $x = a$ , on voit que, pour que  $F$  jouisse de la propriété demandée, il faut et il suffit que les fonctions  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ , développées suivant les puissances de  $x - a$ , ne contiennent qu'un nombre fini de puissances négatives de  $x - a$  : dès lors, on pourra trouver un nombre  $r$  tel, que l'expression

$$(x - a)^{-r} F$$

soit différente de zéro et ne soit infinie que comme une fonction

$$(3) \quad L = \alpha + \beta \log(x - a) + \dots + \lambda [\log(x - a)]^n$$

entière en  $\log(x - a)$  et ayant ses coefficients  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  constants.

Dans ces conditions, nous dirons que la fonction  $F$  appartient à l'exposant  $r$ .

27. On aperçoit immédiatement que, si  $F, F_1$  sont deux fonctions appartenant respectivement aux exposants  $r, r_1$ , le produit sera une fonction de même nature appartenant à l'exposant  $r + r_1$ ; on aura de plus, en se servant d'une notation déjà expliquée,

$$[F \times F_1]' = [F]' \times [F_1]', \quad \left[ \frac{F}{F_1} \right]' = \frac{[F]'}{[F_1]'}, \dots$$

Si  $F$  appartient à l'exposant  $r$ ,  $\frac{dF}{dx}$  sera une fonction de même nature, appartenant à l'exposant  $r - 1$ ; il y a exception dans le cas où,  $r$  étant nul,  $F$  n'est pas infini pour  $x = a$ .

Soit, en effet,

$$F = (x - a)^r \{ \varphi_0 + \varphi_1 \log(x - a) + \dots + \varphi_p [\log(x - a)]^p + \dots + \varphi_n [\log(x - a)]^n \},$$

les fonctions  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  ne contenant dans leur développement que des puissances entières et positives de  $x - a$ , et ne s'annulant pas à la fois pour  $x = a$ , on aura

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} = & \dots + (x - a)^{r-1} [r\varphi_p + (p+1)\varphi_{p+1} + (x - a)\varphi_p'] [\log(x - a)]^p + \dots \\ & + (x - a)^{r-1} [r\varphi_n + (x - a)\varphi_n'] [\log(x - a)]^n, \end{aligned}$$

$\varphi'_p$  désignant la dérivée par rapport à  $x$  de  $\varphi_p$ ; il s'agit d'établir que les coefficients des différentes puissances de  $\log(x - a)$  ne sont pas nuls à la fois pour  $x = a$ ; s'ils étaient tous nuls, on aurait, pour cette même valeur de  $x$ ,

$$\begin{aligned} r\varphi_p + (p + 1)\varphi_{p+1} &= 0, \\ \dots\dots\dots, \\ r\varphi_n &= 0. \end{aligned}$$

L'ensemble de ces égalités montre clairement que toutes les fonctions  $\varphi_n, \dots, \varphi_p, \dots, \varphi_0$  devraient être nulles à la fois, ce qui est contraire à l'hypothèse : cette conclusion, toutefois, ne subsiste pas dans le cas où  $r$  est nul; il suffit alors, pour que tous les coefficients des différentes puissances de  $\log(x - a)$  soient nuls, que l'on ait

$$\varphi_n = 0, \quad \varphi_{n-1} = 0, \dots, \quad \varphi_1 = 0,$$

pour  $x = a$ ; si donc cette circonstance se présente, c'est-à-dire si, pour  $x = a$ ,  $F$  se réduit à la valeur finie et non nulle de  $\varphi_0$ , il y aura bien exception à notre théorème; alors  $\frac{dF}{dx}$  appartiendra à l'exposant zéro ou, dans certains cas, à un exposant entier positif.

*En disposant convenablement de la constante introduite par l'intégration, on peut faire que l'expression*

$$\int F dx,$$

*où  $F$  appartient à l'exposant  $r$ , soit une fonction de même nature que  $F$ , appartenant à l'exposant  $r + 1$ .*

Il suffit de se reporter à la règle de l'intégration par parties pour reconnaître que  $\int F dx$  est de même nature que  $F$ , au moins lorsque l'on choisit convenablement la constante d'intégration : maintenant, que cette fonction appartienne à l'exposant  $r + 1$ , cela résulte du théorème précédent; il ne peut y avoir de difficulté que dans le cas où la fonction  $\int F dx$ , de même nature que  $F$ , se trouverait dans le cas d'exception; mais alors, en modifiant la constante de manière que  $\int F dx$  s'annule pour  $x = a$ , cette fonction appartiendra nécessairement à un exposant entier positif, et  $F$  à l'exposant moindre d'une unité.

Remarquons encore que l'on a

$$\left[ \frac{dF}{dx} \right]' = \frac{d[F]'}{dx} \int [F dx]' = \int [F]' dx + \text{const.}$$

28. Supposons que, dans le domaine du point singulier  $x = a$ , toutes les intégrales  $y_1, y_2, \dots, y_m$  de l'équation

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + p_m y$$

soient de même nature que la fonction  $F$  [§ 26, équation (2)] et appartiennent respectivement aux exposants  $r_1, r_2, \dots, r_m$ ; supposons de plus ces intégrales groupées comme il a été expliqué dans le § 23, chaque groupe correspondant à une racine distincte de l'équation fondamentale.

Reprenons maintenant la méthode et les notations expliquées dans le § 13; on peut évidemment diriger le calcul et choisir les intégrales  $y_1, z_1, t_1, \dots, \omega_1$  des équations successives de manière à tomber sur le système fondamental  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . On reconnaîtra aisément que les diverses intégrales  $y_1, z_1, t_1, \dots, \omega_1$  sont des fonctions de même nature que  $F$ , mais ne contenant pas de logarithmes et appartenant, si l'on a convenablement choisi le système fondamental, aux exposants  $r_1, r_2 - r_1 - 1, r_3 - r_2 - 1, \dots$ ; si, par exemple, les  $\lambda$  premières intégrales  $y_1, y_2, \dots, y_\lambda$  coïncident avec le groupe  $u_1, u_2, \dots, u_\lambda$  [§ 21, équation (6), et § 23, équation (11)], on aura

$$z_1 = \frac{d}{dx} \frac{u_2}{u_1},$$

d'où

$$[z_1]' = \frac{d}{dx} \left[ \frac{u_2}{u_1} \right]' = \frac{d}{dx} \frac{\omega_2 u_1 + \omega_1 u_2}{\omega_1 u_1} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{u_2}{u_1} \right] = z_1,$$

ce qui montre que  $z_1$  est uniforme; de plus, l'équation qui définit cette quantité montre qu'elle appartient à l'exposant  $r_2 - r_1 - 1$ , sauf dans le cas où  $\frac{u_2}{u_1}$  se trouverait être dans le cas d'exception signalé dans le paragraphe précédent; on devra alors substituer à  $u_2$  une combinaison de  $u_2$  et de  $u_1$  telle, que

$$u_2 + C u_1$$

( $C$  étant une constante) appartienne à un exposant  $r'_2$  supérieur à  $r_1 = r_2$ , ce qui est toujours possible; alors la nouvelle valeur de  $z_1$  ap-



partiendra bien à l'exposant  $r'_2 - r_1 - 1$ . Posons maintenant pour un instant

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{d}{dx} \frac{u_3}{u_1} = z_1 \int t_1 dx, \\ z_3 &= \frac{d}{dx} \frac{u_4}{u_1} = z_1 \int t_1 dx \int u_2 dx, \\ &\dots\dots\dots, \\ z_{\lambda-1} &= \frac{d}{dx} \frac{u_\lambda}{u_1} = z_1 \int t_1 dx \int u_2 dx \dots; \end{aligned}$$

les fonctions  $z_2, z_3, \dots, z_{\lambda-1}$  sont de même nature que  $F$  [§ 26, équation (2)], jouissent de propriétés analogues à celles de  $u_1, u_2, \dots, u_\lambda$  [§ 21, équation (6)] et appartiennent aux exposants respectifs  $r_3 - r_1 - 1, r_4 - r_1 - 1, \dots, r_\lambda - r_1 - 1$ , au moins si l'on a choisi convenablement les intégrales  $u_1, u_2, \dots, u_\lambda$ ; rien donc n'empêche de raisonner sur  $z_1, z_2, \dots, z_{\lambda-1}$  comme sur  $u_1, u_2, \dots, u_\lambda$ . Ainsi on aura

$$t_1 = \frac{d}{dx} \frac{z_2}{z_1},$$

et  $t_1$  sera une fonction uniforme, appartenant à l'exposant

$$r_3 - r_1 - 1 - (r_2 - r_1 - 1) - 1 = r_3 - r_2 - 1,$$

à moins que l'on n'ait  $r_3 = r_2$  et que  $\frac{z_2}{z_1}$  se trouve dans le cas d'exception; alors on substituera à  $z_2$  une combinaison linéaire à coefficients constants de  $z_1$ , et  $z_2$  qui appartienne à un exposant supérieur à  $r_3$ : cela reviendra à substituer à  $u_3$  une combinaison linéaire de  $u_3, u_2$  et  $u_1$ ; ce qui (§ 23, remarque finale) n'offre pas d'inconvénient. En continuant de la sorte, on reconnaîtra aisément les propriétés annoncées; on reconnaîtra de plus que, parmi les intégrales  $y_1, z_1, \dots, \omega_1$ , qui correspondent à un même groupe d'intégrales du système fondamental, la première est la seule à ne pas être uniforme; cela résulte d'ailleurs de ce que ces fonctions ne contiennent pas de logarithmes et de ce que, en outre, les exposants auxquels elles appartiennent sont des nombres entiers.

Remarquons encore que, d'après ce qui précède, les fonctions

$$y_1, y_1 z_1, y_1 z_1 t_1, \dots, y_1 z_1 t_1 \dots, \omega_1$$

appartiennent respectivement aux exposants

$$r_1, r_2 - 1, r_3 - 2, \dots, r_m - (m - 1),$$

et que, par suite, leur produit

$$y_1^{r_1} x_1^{r_1 - 1} \dots \omega_1$$

appartient à l'exposant

$$r_1 + r_2 + \dots + r_m - \frac{m(m-1)}{2}.$$

Or ce produit (§ 14) ne diffère que par un facteur constant, non nul, du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_1}{dx^{m-2}} & \dots & y_1 \\ \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_2}{dx^{m-2}} & \dots & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_m}{dx^{m-2}} & \dots & y_m \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

*Le déterminant D peut toujours être mis sous la forme*

$$D = (x - a)^{r_1 + r_2 + \dots + r_m - \frac{m(m-1)}{2}} \psi(x),$$

$\psi(x)$  étant une fonction uniforme et continue dans le domaine du point et différente de zéro pour  $x = a$ .

Nous avons insisté plusieurs fois, dans le courant de la démonstration, sur la nécessité de choisir convenablement le système fondamental  $y_1, y_2, \dots, y_m$  lorsque les exposants  $r_1, r_2, \dots, r_m$  ne sont pas tous différents : dans ce choix, en effet, la proposition cesserait d'être vraie. Ainsi l'équation

$$2x^2(x-2)\frac{d^2y}{dx^2} - x(x-4)\frac{dy}{dx} + (x-3)y = 0$$

admet comme solutions les deux fonctions  $\sqrt{x}$  et  $\sqrt{x^2 - 2x}$ , qui appartiennent toutes les deux, relativement au point singulier 0, à l'exposant  $\frac{1}{2}$ ; et le déterminant

$$D = \frac{-x}{2\sqrt{x-2}}$$

appartient à l'exposant 1 et non à l'exposant zéro que donnerait la formule précédente imprudemment appliquée; mais si l'on choisit le système fondamental

$$\sqrt{x}, \sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{-2} \sqrt{x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{-2} \sqrt{x}},$$

dont les éléments appartiennent aux exposants  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{3}{2}$ , le théorème s'appliquera sans difficulté.

Nous avons supposé jusqu'ici le point  $a$  à distance finie; on pourra toujours ramener le point  $\infty$  de la sphère à coïncider avec l'origine au moyen d'un changement de variable (§ 15); on peut aussi le traiter directement: on trouvera alors une série de théorèmes analogues aux précédents et sur lesquels il est inutile d'insister. Ainsi:

*Lorsqu'une fonction F sera telle que l'on ait*

$$x^{-\alpha} F = \varphi_0 + \varphi_1 \log x + \varphi_2 (\log x^2) + \dots + \varphi_n (\log x)^n,$$

$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  étant dans le domaine du point  $\infty$  des fonctions uniformes et continues qui ne sont pas toutes nulles à la fois, on dira que F appartient à l'exposant  $\alpha$ ;  $\frac{dF}{dx}$  appartiendra à l'exposant  $\alpha - 1$ , sauf les cas d'exception;  $\int F dx$ , si l'on choisit convenablement la constante, appartiendra à l'exposant  $\alpha + 1$ .

Si  $y_1, y_2, \dots, y_m$  sont les éléments d'un système fondamental de solutions appartenant aux exposants  $r_1, r_2, \dots, r_m$ , et si ce système est convenablement choisi, le déterminant D pourra être mis sous la forme

$$D = x^{r_1 + r_2 + \dots + r_m - \frac{m(m-1)}{2}} \chi(x),$$

$\chi(x)$  étant, dans le domaine du point  $\infty$ , une fonction uniforme et continue, différente de zéro pour  $x = \infty$ .

29. Il est maintenant bien aisé de découvrir la forme des équations différentielles linéaires dont toutes les intégrales sont dans le domaine du point singulier  $a$ , de la même nature que la fonction F [§ 26, équation (2)]. Nous appliquerons la même méthode qu'au § 17. Soient  $y_1, y_2, \dots, y_m$  les éléments d'un système fondamental d'intégrales, choisis

et groupés comme il a été expliqué dans les paragraphes précédents : on résoudra par rapport à  $p_1, p_2, \dots, p_m$  le système d'équations du premier degré

$$\begin{aligned} \frac{d^m y_1}{dx^m} &= p_1 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} + \dots + p_m y_1, \\ \frac{d^m y_2}{dx^m} &= p_1 \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}} + \dots + p_m y_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{d^m y_m}{dx^m} &= p_1 \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} + \dots + p_m y_m, \end{aligned}$$

d'où l'on tirera, en conservant les notations du § 17,

$$p_\alpha = \frac{D_\alpha}{D}.$$

Or, lorsque la variable fait le tour du point singulier  $\alpha$ , les déterminants  $D_\alpha$  et  $D$  sont multipliés par un même déterminant  $R$ , dont les éléments sont les coefficients de la substitution linéaire qui permet d'exprimer les nouvelles valeurs de  $y_1, y_2, \dots, y_m$  au moyen des anciennes.

Il en résulte que, si l'on pose

$$\tau = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log R,$$

$D$  et  $D_\alpha$  seront respectivement de la forme

$$\begin{aligned} D &= (x - a)^{n+\tau} \psi(x), \\ D_\alpha &= (x - a)^{n'+\tau} \psi'(x), \end{aligned}$$

$n$  et  $n'$  étant des nombres entiers,  $\psi(x)$  et  $\psi'(x)$  des fonctions uniformes dans le domaine du point  $\alpha$  (ceci avait d'ailleurs été établi pour  $D$ ). Si donc on développait les deux déterminants  $D_\alpha$  et  $D$ , les logarithmes disparaîtraient complètement. Cela posé, soient  $r_1, r_2, \dots, r_m$  les exposants auxquels appartiennent respectivement  $y_1, y_2, \dots, y_m$ ; multiplions chacun des éléments des déterminants  $D_\alpha$  et  $D$  par une puissance de  $x - a$  égale à  $-$  l'exposant auquel appartient cet élément : cet exposant étant calculé par le théorème du § 27, sans tenir compte du cas

d'exception, cela reviendra à multiplier  $D_\alpha$  par

$$(x-a)^{-\left[\sum_{i=1}^{i=m} r_i - \frac{m(m-1)}{2} - \alpha\right]},$$

et D par

$$(x-a)^{-\left[\sum_{i=1}^{i=m} r_i - \frac{m(m-1)}{2}\right]}.$$

Les deux déterminants ainsi modifiés et ne contenant pas de logarithmes seront nécessairement des fonctions uniformes et continues de  $x$  dans le domaine de  $a$ , car leurs éléments appartiennent (§ 27) aux exposants supposés ou à des exposants plus forts de nombres entiers positifs; de plus le second ne sera pas nul, pour  $x = a$  en vertu du paragraphe précédent : il en résulte que le quotient  $p_\alpha(x-a)^\alpha$  est une fonction de  $x$  uniforme et continue dans le domaine du point  $a$ ; elle peut être nulle pour  $x = a$ , mais jamais infinie; représentons-la par  $P_\alpha(x)$ , on aura

$$p_\alpha = \frac{P_\alpha(x)}{(x-a)^\alpha}.$$

Donc :

*Si toutes les intégrales d'une équation différentielle linéaire, dont les coefficients satisfont aux conditions d'uniformité et de continuité posées au commencement de ce chapitre, restent finies pour  $x = a$ , quand on les multiplie par une puissance convenable de  $x - a$ , cette équation est de la forme*

$$\frac{d^m \gamma}{dx^m} = \frac{P_1(x)}{x-a} \frac{d^{m-1} \gamma}{dx^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a)^2} \frac{d^{m-2} \gamma}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{P_m(x)}{(x-a)^m} \gamma,$$

$P_1(x), P_2(x), \dots, P_m(x)$  étant des fonctions uniformes et continues dans le domaine du point singulier  $a$ .

Si cette propriété doit subsister pour tous les points singuliers  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , l'équation devra d'après cela être de la forme

$$\frac{d^m \gamma}{dx^m} = \frac{P_1(x)}{\psi(x)} \frac{d^{m-1} \gamma}{dx^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{[\psi(x)]^2} \frac{d^{m-2} \gamma}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{P_m(x)}{[\psi(x)]^m} \gamma,$$

$P_1(x), P_2(x), \dots, P_m(x)$  étant des fonctions uniformes et continues dans tout le plan et  $\psi(x)$  représentant le produit  $(x-a_1), (x-a_2), \dots$ ,

$(x - a_\rho)$ . Si l'on veut enfin que dans le domaine du point  $\infty$  les intégrales multipliées par une puissance convenable de  $x$  restent finies, on reconnaîtra, par un procédé tout semblable à celui que nous avons employé, que  $p_\alpha x^\alpha$  doit rester fini pour  $x = \infty$ ; il en doit donc être de même de

$$\frac{P_\alpha(x)}{[\psi(x)]^\alpha} x^\alpha.$$

Or  $[\psi(x)]^\alpha$  est du degré  $\alpha\rho$ : donc, pour  $x = \infty$ ,  $P_\alpha(x)$  doit être infini comme  $x^{\alpha(\rho-1)}$ ; sur tout le reste de la sphère.  $P_\alpha(x)$  étant une fonction continue et uniforme, on voit que  $P_\alpha(x)$  est un polynôme entier en  $x$  de degré  $\alpha(\rho - 1)$  au plus; on en conclut que :

*Les équations différentielles linéaires à coefficients uniformes, dont les intégrales n'ont qu'un nombre fini de points singuliers  $a_1, a_2, \dots, a_\rho$ , restent finies pour chacun de ces points singuliers  $a_i$  quand on les a préalablement multipliées par une puissance de  $x - a_i$ , et pour  $x = \infty$ , quand on les multiplie par une puissance convenable de  $x$ , elles sont de la forme*

$$\frac{d^m \gamma}{dx^m} = \frac{F_{\rho-1}(x)}{\psi(x)} \frac{d^{m-1} \gamma}{dx^{m-1}} + \frac{F_{2(\rho-1)}(x)}{[\psi(x)]^2} \frac{d^{m-2} \gamma}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{F_{m(\rho-1)}(x)}{[\psi(x)]^m} \gamma,$$

où

$$\psi(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_\rho),$$

et où

$$F_{(\rho-1)}(x), F_{2(\rho-1)}(x), \dots, F_{m(\rho-1)}(x)$$

désignent des polynômes entiers en  $x$  de degré marqué par l'indice, ou d'un degré moindre.

29. Nous allons maintenant établir la réciproque de cette importante proposition; nous l'énoncerons ainsi :

*L'équation différentielle linéaire*

$$(1) \quad \frac{d^m \gamma}{dx^m} = \frac{P_1(x)}{x-a} \frac{d^{m-1} \gamma}{dx^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a)^2} \frac{d^{m-2} \gamma}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{P_m(x)}{(x-a)^m} \gamma,$$

où les fonctions  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_m(x)$  sont des fonctions uniformes et continues dans le domaine du point  $a$ , admet dans le domaine de ce même point un système fondamental d'intégrales dont tous les éléments restent

finis pour  $x = a$  quand on les a préalablement multipliés par une puissance convenable de  $x - a$ .

Il résulte de l'étude précédente que, s'il en est ainsi, l'équation différentielle (1) devra admettre une solution de la forme

$$(2) \quad y = (x - a)^r \varphi(x),$$

$\varphi(x)$  étant une fonction uniforme et continue dans le domaine du point  $a$ .

Si nous faisons dans l'équation (1)

$$y = (x - a)^r u,$$

elle prendra la forme analogue

$$(3) \quad \frac{d^m u}{dx^m} = \frac{P_1(x)}{x - a} \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{(x - a)^2} \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{P_m(x)}{(x - a)^m} u,$$

en posant

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_j(x) = - \frac{m(m-1)\dots(m-j+1)}{1.2.3\dots j} r(r-1)\dots(r-j+1) \\ \quad + \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-j+1)}{1.2.3\dots(j-2)} r(r-1)\dots(r-j+2) P_1(x) \\ \quad + \frac{(m-2)(m-3)\dots(m-j+1)}{1.2.3\dots(j-2)} r(r-1)\dots(r-j+3) P_2(x) \\ \quad + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \quad + \frac{m-j+1}{1} r P_{j-1}(x) + P_j(x). \end{array} \right.$$

Or, si l'équation (1) admet la solution (2), l'équation (3) devra admettre la solution

$$y = \varphi(x) = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + \dots,$$

$C_0, C_1, C_2, \dots$  étant des constantes dont la première est essentiellement différente de zéro : si l'on substitue cette valeur de  $y$  dans l'équation (3) et qu'on égale à zéro le coefficient de  $(x - a)^{-m}$ , on trouvera

$$P_m(a)C_0 = 0, \quad \text{d'où} \quad P_m(a) = 0,$$

c'est-à-dire que  $r$  doit être racine de l'équation

$$(5) \begin{cases} r(r-1)(r-2)\dots(r-m+1) - r(r-1)\dots(r-m+2)P_1(a) \\ - r(r-1)\dots(r-m+3)P_2(a) - \dots - rP_{m-1}(a) - P_m(a) = 0. \end{cases}$$

Cette équation joue le plus grand rôle dans toute notre théorie; comme nous le verrons plus tard, ses racines sont les logarithmes divisés par  $2\pi\sqrt{-1}$  des racines de l'équation fondamentale relative au point  $a$ .

Ce sont de plus les exposants auxquels appartiennent les éléments d'un système fondamental dont les groupes analogues au groupe (11) du § 23 jouissent des propriétés définies par les équations (6) du § 21. A ces titres, M. Fuchs a donné à cette équation le nom d'*équation fondamentale déterminante relative au point singulier a*.

Nous établirons immédiatement quelques propriétés de cette équation, propriétés qui nous serviront à démontrer la proposition fondamentale que nous venons d'énoncer.

Remarquons d'abord que si  $P_m(x)$  et, par suite,  $P_m(a)$ , sont nuls, l'équation (5) est divisible par  $r$ ; si l'on opère cette division et que l'on change ensuite  $r$  en  $r+1$ , on obtiendra l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation d'ordre  $m-1$ , obtenue en prenant pour inconnue  $\frac{dy}{dx}$ .

On aperçoit encore immédiatement que, si l'on pose dans l'équation différentielle

$$y = \varphi(x)u,$$

$\varphi(x)$  étant une fonction uniforme et continue de  $x$ , dans le domaine du point  $a$ , différente de zéro pour  $x = a$ , l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation différentielle en  $u$  sera la même que celle relative à l'équation en  $y$ , car les quantités désignées par  $P_1(a)$ ,  $P_2(a)$ , ...,  $P_m(a)$  ont les mêmes valeurs dans les deux équations.

Si dans l'équation (1) on fait

$$y = (x-a)^r u,$$

les racines de l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation en  $u$  seront celles de l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation en  $y$ , diminuées de  $r$ .



Désignons, en effet, par  $f(r)$  le premier membre de l'équation (5), l'équation en  $\rho$

$$(5 \text{ bis}) \quad f(\rho + r_1) = 0$$

aura pour racines les racines de l'équation (5) diminuées de  $r_1$ . Effectuons l'opération indiquée sur un terme de l'équation (5), par exemple sur le terme

$$r(r-1)\dots(r-m+i+1)P_i(a),$$

que nous écrirons

$$[r]^{m-i} P_i(a),$$

en faisant, en général,

$$[u]^p = u(u-1)\dots(u-p+1);$$

en vertu d'une formule bien connue, on a toujours

$$[u+v]^p = \sum_{k=0}^{k=p} \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{1.2.3\dots k} [u]^{p-k} [v]^k.$$

On aura donc

$$[\rho+r_1]^{m-i} P_i(a) = P_i(a) \sum_{k=0}^{k=m-i} \frac{(m-i)(m-i+1)\dots(m-i-k+1)}{1.2.3\dots k} \\ \times \rho(\rho-1)\dots(\rho-m+i+k+1) \times r_1(r_1-1)\dots(r_1-k+1).$$

Le premier membre de l'équation (5 bis) sera une somme de tels termes; or, si l'on réunit tous ceux dans lesquels

$$i+k=j,$$

on trouvera pour leur somme, en tenant compte de l'équation (4) du § 29,

$$\rho(\rho-1)\dots(\rho-m+j+1)Q_j(a),$$

en convenant de faire

$$Q_0(a) = -1;$$

l'équation (5 bis) sera donc

$$\sum_{j=0}^{j=m} \rho(\rho-1)\dots(\rho-m+j+1)Q_j(a) = 0,$$

c'est-à-dire précisément l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation différentielle en  $u$ .

Il suit de ces diverses propositions que si, dans l'équation (1), on fait

$$y = \varphi(x) f z dx,$$

où  $\varphi(x)$  est une intégrale de la forme  $(x - a)^{r_1} f(x)$ ,  $f(x)$  étant une fonction uniforme et continue de  $a$ , différente de zéro pour  $x = a$ , l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation différentielle en  $z$  aura pour racines les diverses racines de l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation différentielle en  $y$  diminuées de  $r + 1$ .

30. Nous allons maintenant, relativement à l'équation fondamentale déterminante (5), établir la proposition suivante :

*Soient  $r_1, r_2, \dots, r_m$  les  $m$  racines de cette équation rangées de manière qu'aucune des quantités  $r_2 - r_1 - 1, r_3 - r_1 - 1, \dots, r_m - r_1 - 1$  ne soit ni nulle, ni égale à un entier positif, condition qui sera remplie, en particulier, si les parties réelles ne vont jamais en croissant, quand on passe d'une racine à la suivante; l'équation différentielle (1) admettra une solution de la forme*

$$y = (x - a)^{r_1} \varphi(x)$$

où  $\varphi(x)$  représente une fonction uniforme et continue dans le domaine du point  $a$ , différente de zéro pour  $x = a$ .

Faisons, en effet, dans l'équation (1), la substitution

$$y = (x - a)^{r_1} u,$$

elle deviendra

$$(6) \quad \frac{d^m u}{dx^m} = \frac{Q_1(x)}{x - a} \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \frac{Q_2(x)}{(x - a)^2} \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{Q_{m-1}(x)}{(x - a)^{m-1}} \frac{du}{dx} + \frac{Q_m(x)}{(x - a)^m} u,$$

où  $Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_{m-1}(x)$  se déduisent de  $P'_1(x), P'_2(x), \dots, P'_{m-1}(x)$ , en affectant  $r$  de l'indice 1, et où

$$Q_m(x) = \frac{P'_m(x)}{x - a}.$$

$Q_m(x)$  sera par hypothèse une fonction continue et uniforme de  $x$

dans le domaine de  $a$ . Nous allons chercher à satisfaire à l'équation (6) par une série de la forme

$$u = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + \dots$$

Pour cela nous l'écrivons de la façon suivante :

$$(6 \text{ bis}) \left\{ \begin{aligned} & (x - a)^{m-1} \frac{d^m u}{dx^m} - Q_1(a)(x - a)^{m-2} \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} \\ & \quad - Q_2(a)(x - a)^{m-3} \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} - \dots - Q_{m-1}(a) \frac{du}{dx} \\ & = Q'_1(x)(x - a)^{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} - Q'_2(x)(x - a)^{m-2} \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} - \dots \\ & \quad - Q'_{m-1}(x)(x - a) \frac{du}{dx} - Q_m(x) u, \end{aligned} \right.$$

en faisant, en général,

$$Q'_i(x) = \frac{Q_i(x) - Q_i(a)}{x - a}.$$

Si maintenant on substitue à la place de  $u$  dans l'équation (6 bis) la série

$$C_0 + C_1(x - a) + \dots$$

et que l'on égale à zéro le coefficient de  $(x - a)^k$ , on trouvera l'équation

$$(7) \left\{ \begin{aligned} & [(k + 1)k \dots (k - m + 2) - (k + 1)k(k - 1) \dots (k - m + 3) Q_1(a) \\ & \quad - (k + 1)k \dots (k - m + 4) Q_2(a) - \dots - (k + 1) Q_{m-1}(a)] C_{k+1} \\ & = A_k C_k + A_{k-1} C_{k-1} + \dots + A_{k+1} C_0, \end{aligned} \right.$$

les  $A$  étant formés au moyen de quantités numériques et des coefficients des développements des fonctions  $Q'(x)$ , suivant les puissances ascendantes de  $x - a$ , par les seules opérations d'addition et de multiplication.

Pour que cette équation puisse servir à déterminer successivement les coefficients de la série, il faut d'abord que le coefficient de  $C_{k+1}$  ne s'annule pour aucune valeur entière et positive de  $k$ . Or l'équation obtenue en annulant ce coefficient

$$(8) \left\{ \begin{aligned} & (k + 1)k(k - 1) \dots (k - m + 2) \\ & \quad - (k + 1)k \dots (k - m + 3) Q_1(a) - \dots - (k + 1) Q_{m-1}(a) = 0 \end{aligned} \right.$$

n'est autre que l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation (6), divisée par  $r$  et dans laquelle on a changé  $r$  en  $k+1$ . Ces racines seront donc

$$r_2 - r_1 - 1, \quad r_3 - r_1 - 1, \quad \dots, \quad r_m - r_1 - 1,$$

et par conséquent ne seront ni nulles ni égales à un entier positif : le coefficient de  $C_{k+1}$  dans l'équation (7) ne pourra donc s'annuler pour aucune valeur entière et positive de  $k$ , et l'on pourra déterminer de proche en proche les coefficients d'une série qui, mise à la place de  $u$  dans le premier membre de l'équation (6), le rendrait identiquement nul; il reste à prouver la convergence de cette série dans le domaine du point  $a$ .

Pour cela, nous la comparerons à une autre série dont la convergence apparaîtra aisément et qui satisfera à l'équation analogue à l'équation (6 bis),

$$(9) \left\{ \begin{aligned} & y_1 (x-a)^{m-2} \frac{d^{m-1} v}{dx^{m-1}} + y_2 (x-a)^{m-3} \frac{d^{m-2} v}{dx^{m-2}} + \dots + y_{m-1} \frac{dv}{dx} \\ &= \frac{M_1}{1 - \frac{x-a}{r}} (x-a)^{m-1} \frac{d^{m-1} v}{dx^{m-1}} + \frac{M_2}{1 - \frac{x-a}{r}} (x-a)^{m-2} \frac{d^{m-2} v}{dx^{m-2}} + \dots \\ & \quad + \frac{M_m}{1 - \frac{x-a}{r}} v. \end{aligned} \right.$$

Dans cette équation,  $M_1, M_2, \dots, M_m$  sont les modules maxima des fonctions  $Q'_1(x), Q'_2(x), \dots, Q'_m(x)$  dans le domaine du point  $a$ ,  $r$  le rayon du cercle qui limite ce domaine et  $y_1, y_2, \dots, y_m$  des constantes positives quelconques, telles cependant que l'équation en  $k$

$$(k+1)k \dots (k-m+3)y_1 + (k+1)k \dots (k-m+4)y_2 + \dots + (k+1)y_{m-1} = 0$$

n'ait pas de racines entières positives.

Il est d'abord aisé de prouver que l'équation (9) admet comme solution une série à coefficients positifs

$$(10) \quad v = \sum_0^{\infty} g_n (x-a)^n,$$

où  $g_0$  est différent de zéro et qui est convergente dans les environs du point  $a$ .

Si, en effet, on substitue cette série à la place de  $r$  dans l'équation (9) multipliée par  $1 - \frac{x-a}{r}$  et que l'on égale à zéro le coefficient de  $(x-a)^k$ , on trouvera

$$\begin{aligned} & [(k+1)k\dots(k-m+3)y_1 + (k+1)k\dots(k-m+4)y_2 + \dots + (k+1)y_{m-1}]g_{k+1} \\ &= \left[ k(k-1)\dots(k-m+2)\left(\frac{y_1}{r} + M_1\right) + k(k-1)\dots(k-m+3)\left(\frac{y_2}{r} + M_2\right) \right. \\ & \quad \left. + k\left(\frac{y_{m-1}}{r} + M_{m-1}\right) + M_m \right]g_k, \end{aligned}$$

d'où

$$\lim \frac{g_{k+1}}{g_k} \text{ (pour } K = \infty) = \frac{y_1 + rM_1}{y_1 r}.$$

Si donc on prend

$$\text{mod. } (x-a) < \frac{ry_1}{y_1 + rM_1},$$

la série sera convergente.

Si maintenant on substitue la même série (10) à la place de  $r$  dans l'équation (9) elle-même et que l'on égale à zéro le coefficient de  $(x-a)^k$ , on trouvera l'équation

$$(11) \begin{cases} [(k+1)k\dots(k-m+3)y_1 + (k+1)k\dots(k-m+4)y_2 + \dots + (k+1)y_{m-1}]g_{k+1} \\ = B_{k+1}g_k + B_k g_{k-1} + \dots + B_k g. \end{cases}$$

Les quantités positives  $B_{ki}$  étant formées avec les quantités positives  $M$ , comme les quantités  $A_{ki}$  de l'équation (7), le sont avec les coefficients des développements des fonctions  $Q'(x)$  selon les puissances ascendantes de  $x-a$  : il suit de là que l'on a, en général,

$$B_{ki} > \text{mod. } A_{ki}.$$

Si, en outre,  $g_0$  est positif, il en sera de même de  $g_1, g_2, \dots, g_k$ . Maintenant, si l'on compare les équations (7) et (11), on voit de suite que, au moins à partir d'une certaine limite  $t$ , le coefficient de  $C_{k+1}$  est toujours supérieur au coefficient de  $g_{k+1}$ . Si donc, pour  $k$  inférieur à  $t$ , on

a toujours

$$(12) \quad \text{mod. } C_k < g_k,$$

cette inégalité subsistera certainement pour  $k$  supérieur à  $l$ .

Supposons que l'on tire des équations (7) et (11)

$$C_k = \mathfrak{A}_k C_0, \quad g_k = \mathfrak{B}_k g_0,$$

les quantités  $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k$  étant indépendantes des quantités  $C$  et  $g$ ; soit de plus  $\mathfrak{A}$  le module maximum des quantités

$$1, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_l,$$

et  $\mathfrak{B}$  le module minimum des quantités

$$1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_l,$$

aucune des deux quantités  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  ne sera nulle; si l'on choisit  $C_0$  de manière que l'on ait

$$\mathfrak{B} g_0 > \mathfrak{A} \text{ mod. } C_0,$$

l'inégalité (12) sera certainement satisfaite. La convergence de la série  $u$  est, par conséquent, établie pour les environs du point  $a$ : elle est convergente pour tout le domaine de ce point, ce qui résulte, soit de la continuité, soit, si l'on veut, de l'inégalité

$$\text{mod. } (x - a) < \frac{r\gamma_1}{\gamma_1 + rM_1},$$

où l'on peut évidemment supposer  $\gamma_1$  aussi grand qu'on le veut.

31. L'existence d'une solution de la forme

$$\gamma_1 = (x - a)^r \varphi(x)$$

une fois établie [rappelons que  $\varphi(x)$  doit être une fonction uniforme, continue dans le domaine du point  $a$  et différente de zéro pour  $x = a$ ], le reste de la proposition fondamentale annoncée dans le § 29 s'établira aisément: si, en effet, dans l'équation

$$(1) \quad \frac{d^m \gamma}{dx^m} = \frac{P_1(x)}{x-a} \frac{d^{m-1} \gamma}{dx^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a)^2} \frac{d^{m-2} \gamma}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{P_m(x)}{(x-a)^m} \gamma,$$

on fait

$$y = y_1 \int z dx,$$

on obtiendra une équation

$$(2) \quad \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} = \frac{P_1(x)}{x-a} \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{P_{m-1}(x)}{(x-a)^{m-1}} z,$$

et il est bien aisé de voir que les fonctions  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_{m-1}(x)$  seront, dans le domaine du point  $a$ , uniformes et continues [§ 13, équation (4)]. Les racines de l'équation fondamentale déterminante relative à cette équation (2) seront (§ 29)

$$r_2 - r_1 - 1, \quad r_3 - r_1 - 1, \dots, \quad r_m - r_1 - 1,$$

si l'on a rangé les racines  $r_1, r_2, \dots, r_m$  dans un ordre tel que  $r_j - r_i$  ne soit jamais un nombre entier positif pour  $j > i$ ; la même propriété subsistera pour les racines ci-dessus dans l'ordre où elles sont et l'équation en  $z$  admettra une intégrale de la forme

$$z_1 = (x-a)^{r_2-r_1-1} \psi(x),$$

$\psi$  étant une fonction uniforme et continue dans le domaine du point  $a$ , différente de zéro pour  $x = a$ .

Il en résultera l'existence d'une intégrale

$$y_1 = y_1 \int z_1 dx,$$

pour l'équation (1), intégrale qui sera une fonction de même nature que  $F$  [§ 26, équation (2)] et appartiendra à l'exposant

$$r_2 - r_1 - 1 + 1 + r_1 = r_2.$$

Si de même, dans l'équation (2), on fait

$$z = z_1 \int t dx,$$

on obtiendra une équation en  $t$  qui admettra une intégrale de la forme

$$t_1 = (x-a)^{r_3-r_2-1} \chi(x),$$

$\chi(x)$  étant une fonction uniforme et continue dans le domaine du

point  $a$ , différente de zéro pour  $x = a$ , et l'on obtiendra une troisième intégrale de l'équation (1), savoir :

$$y_3 = y_1 \int z_1 dx \int t_1 dx,$$

appartenant à l'exposant

$$r_3 - r_2 - 1 + 1 + r_2 - r_1 - 1 + 1 + r_1 = r_3.$$

Les intégrales  $y_1, z_1, t_1, \dots, \omega_1$ , des équations différentielles auxiliaires étant toujours de la forme

$$(x - a)^{\alpha} f(x),$$

où  $f(x)$  est une fonction continue et uniforme dans le domaine de  $a$ , différente de zéro pour  $x = a$ , et les logarithmes ne pouvant s'introduire que par les intégrations (§ 26).

On arrivera ainsi à établir l'existence d'un système fondamental d'intégrales de l'équation (1), dont les éléments sont des fonctions de même nature que  $F$  [§ 26, équation (2)], appartenant respectivement aux exposants  $r_1, r_2, \dots, r_m$ ; comme les combinaisons linéaires que l'on peut former avec ces éléments ne peuvent évidemment appartenir qu'à ces exposants ou à des exposants dont les différences respectives avec les précédents soient entières, il faut bien que les racines  $r_1, r_2, \dots, r_m$  de l'équation fondamentale déterminante soient les logarithmes divisés par  $2\pi\sqrt{-1}$  des racines  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$  de l'équation fondamentale. Telle est la façon remarquable dont ces deux équations dépendent l'une de l'autre.

32. Nous distinguerons maintenant deux cas :

1° Parmi les racines  $r_1, r_2, \dots, r_m$  de l'équation fondamentale déterminante, il n'y en a pas deux dont la différence soit nulle ou entière.

Les différences  $r_2 - r_1 - 1, r_3 - r_1 - 1, \dots, r_m - r_1 - 1$  ne sont alors jamais égales à un nombre entier, positif ou nul, dans quelque ordre que l'on range les racines : par conséquent, il existera  $m$  intégrales

$$y_1 = (x - a)^{r_1} \varphi_1(x), \quad y_2 = (x - a)^{r_2} \varphi_2(x), \dots, \quad y_m = (x - a)^{r_m} \varphi_m(x),$$

les fonctions  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$  étant toutes uniformes et continues dans le domaine du point  $a$ , différentes de zéro pour  $x = a$ .



Ces  $m$  intégrales, d'après leur nature, forment un système fondamental; au surplus, en réfléchissant sur le procédé indiqué dans le paragraphe précédent, on voit clairement que les intégrations ne peuvent pas introduire de logarithmes. Dans ce cas, l'équation fondamentale n'aura pas de racines égales.

2° S'il se trouve entre les racines  $r_1, r_2, \dots, r_m$  des différences nulles ou entières, on séparera les racines en groupes (R) tels, que chacun d'entre eux ne comprenne que des racines dont les différences réciproques soient nulles ou entières et comprenne toutes ces racines: certains groupes pourront ne contenir qu'une seule racine; puis on rangera les racines de chaque groupe de manière que la différence d'une racine quelconque et de celle qui la suit ne soit jamais négative. Dès lors, on pourra, sans crainte d'être arrêté, faire les opérations indiquées dans le paragraphe précédent, en commençant par n'importe quel groupe: on obtiendra ainsi autant de groupes (S) d'intégrales qu'il y a de groupes (R) de racines. Dans chaque groupe les exposants auxquels appartiennent les racines ont des différences entières; il ne peut y avoir de relation linéaire à coefficients constants entre les éléments d'un même groupe, puisque ces éléments font partie d'un système fondamental.

Il est bien aisé de retrouver sur les éléments d'un groupe les propriétés définies par les équations (6) du § 21, propriétés d'où l'on déduira pour les éléments eux-mêmes la forme donnée par les équations (11) du § 23.

Soit, en effet, (R) un groupe de racines  $r_1, r_2, \dots, r_\lambda$ ; nous commencerons les opérations par ce groupe. Soient

$$y_1, \quad y_2 = y_1 \int z_1 dx, \quad y_3 = y_1 \int z_1 dx \int r_1 dx, \dots, \quad y_\lambda = y_1 \int z_1 dx \int t_1 dx \dots \int v_1 dx$$

les intégrales correspondantes, formant le groupe (S):  $y_1$  est de la forme

$$y_1 = (x - a)^{r_1} \varphi(x),$$

et, en faisant

$$\omega = e^{2\pi r_1 \sqrt{-1}},$$

on aura, après avoir fait le tour du point  $a$ ,

$$[y_1]' = \omega y_1;$$

$z_1$  est une fonction uniforme, puisque  $r_2 - r_1 - 1$  est un nombre entier positif. On aura donc

$$\left[ \frac{y_2}{y_1} \right]' = [f z_1 dx]' = f z_1 dx + C = \frac{y_2'}{y_1} + C,$$

C étant une constante; on déduit de là

$$[y_2]' = \omega_{21} y_1 + \omega y_2.$$

On prouvera de même que l'on doit avoir

$$[y_3]' = \omega_{31} y_1 + \omega_{32} y_2 + \omega y_3,$$

.....,

$$[y_\lambda]' = \omega_{\lambda 1} y_1 + \omega_{\lambda 2} y_2 + \dots + \omega_{\lambda, \lambda-1} y_{\lambda-1} + \omega y_\lambda,$$

$\omega_{21}, \omega_{31}, \omega_{\lambda, \lambda-1}$  étant des constantes; il suit de là (§ 23) que l'on peut faire

$$y_1 = (x - a)^{r_1} \varphi_{11},$$

$$y_2 = (x - a)^{r_2} [\varphi_{21} + \varphi_{22} \log(x - a)],$$

.....,

$$y_\lambda = (x - a)^{r_\lambda} \{ \varphi_{\lambda 1} + \varphi_{\lambda 2} \log(x - a) + \dots + \varphi_{\lambda \lambda} [\log(x - a)]^{\lambda-1} \},$$

$\varphi_{11}, \varphi_{21}, \dots, \varphi_{\lambda \lambda}$  étant des fonctions continues et uniformes dans le domaine du point  $a$ . On arriverait à la même conclusion en étudiant la série d'intégrations par lesquelles on déduit  $y_1, y_2, \dots, y_\lambda$  de  $z_1, z_2, \dots, z_\lambda$ . Il résulte du § 23 que l'on peut, en général, exprimer linéairement  $(x - a)^{r_\alpha} \varphi_{\alpha \beta}$  au moyen des fonctions

$$(x - a)^{r_1} \varphi_{11}, (x - a)^{r_2} \varphi_{21}, \dots, (x - a)^{r_\alpha} \varphi_{\alpha 1}.$$

Supposons, en particulier, que dans le groupe (R) les racines  $r_1, r_2, \dots, r_\lambda$  soient toutes distinctes: alors leurs parties réelles iront toujours en diminuant et, si  $\varphi_{\alpha 1}$  était identiquement nul,  $\varphi_{\alpha \beta}$  serait nul pour  $x = a$ ; il résulterait de là que  $y_\alpha$  appartiendrait à un exposant supérieur à  $r_\alpha$ , ce qui est impossible. Dans ce cas donc, le terme  $(x - a)^{r_\alpha} \varphi_{\alpha 1}$ , qui ne multiplie aucun logarithme, ne manque dans aucun élément  $y_1, y_2, \dots, y_\lambda$ , et de plus l'élément  $y_\alpha$  appartient au même exposant que ce terme; une combinaison linéaire

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_\alpha y_\alpha$$

appartiendra évidemment à l'exposant  $r_\alpha$  et le terme qui ne multiplie aucun logarithme n'y pourra manquer. Cette propriété subsiste donc pour toute intégrale de l'équation proposée qui appartient à l'un des exposants  $r_1, r_2, \dots, r_\lambda$ ; on en conclut aisément que, dans une pareille intégrale, le terme qui ne multiplie aucun logarithme ne peut jamais être une solution de l'équation différentielle.

33. Certaines des fonctions  $\varphi$  peuvent être nulles et il peut arriver qu'ainsi tous les logarithmes disparaissent : il importe de distinguer les cas où cette circonstance se présente.

Remarquons d'abord qu'elle ne peut jamais avoir lieu si, dans un groupe (R), il existe deux racines égales; si, par exemple, on a  $r_2 = r_1$ ,  $z_1$  appartiendra à l'exposant  $r_2 - r_1 - 1 = -1$  et sera, par conséquent, de la forme

$$\frac{A}{x-a} + \varphi(x),$$

A étant différent de zéro et  $\varphi(x)$  étant une fonction uniforme et continue dans le domaine de  $a$ ; il en résulte que

$$\int z_1 dx$$

sera de la forme

$$A \log(x-a) + \psi(x),$$

et, par suite,  $y_2$  de la forme

$$(x-a)^{r_1} [\varphi_{21}(x) + \varphi_{22} \log(x-a)].$$

Si d'autres racines du groupe étaient égales, les logarithmes apparaîtraient à un moment des opérations et ne pourraient évidemment disparaître par les intégrations.

Il ne peut donc y avoir de doute que dans le cas où toutes les racines  $r_1, r_2, \dots, r_\lambda$  du groupe (R) sont différentes.

Dans ce cas, on commencera par faire, dans l'équation différentielle, la substitution

$$y = (x-a)^{r_\lambda} z;$$

on obtiendra ainsi une équation différentielle en  $z$  dont l'équation fondamentale déterminante admettra pour racines les nombres positifs entiers

$$r_1 - r_\lambda, r_2 - r_\lambda, \dots, r_{\lambda-1} - r_\lambda, 0.$$

Il existera un groupe ( $\Sigma$ ) d'intégrales de l'équation en  $z$  appartenant respectivement à ces exposants et d'où l'on déduira le groupe (S) d'intégrales de l'équation en  $y$  qui appartiennent aux exposants  $r_1, r_2, \dots, r_\lambda$ ; de plus, aucune des autres racines de l'équation fondamentale déterminante ne sera entière. Faisons, pour abrégé,

$$r_1 - r_\lambda = s - 1,$$

et supposons que l'on forme les dérivées  $s^{\text{ièmes}}$  des intégrales de l'équation en  $r$  appartenant au groupe considéré; on obtiendra ainsi des fonctions qui appartiendront, ou à des exposants entiers nuls ou positifs, ou à des exposants entiers négatifs, suivant que les intégrales ne contenaient pas de logarithmes ou en contenaient.

En effet, une fonction du groupe ( $\Sigma$ ) sera, si elle contient des logarithmes, de la forme

$$Z = (x - a)^r \{ \varphi_0 + \varphi_1 \log(x - a) + \dots + \varphi_k [\log(x - a)]^k \}.$$

Or  $\varphi_k (x - a)^r$  est une intégrale de l'équation en  $x$ , faisant nécessairement partie du groupe ( $\Sigma$ ) et appartenant à un exposant entier  $n$  égal ou supérieur à  $r$ , mais certainement inférieur à  $s$ . Posons pour un instant

$$\varphi_k (x - a)^r = (x - a)^n \Phi(x),$$

$\Phi(x)$  étant une fonction uniforme et continue dans le domaine de  $a$ , ne s'annulant pas pour  $x = a$ ; la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $Z$  contiendra le terme

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \Phi(x) [\log(x - a)]^k,$$

qui ne pourra se réduire avec aucun autre; cette dérivée  $n^{\text{ième}}$  appartiendra donc au plus à l'exposant zéro, et, dans ce cas, sera infinie pour  $x = a$ : elle ne se trouvera donc pas dans le cas d'exception du théorème du § 27 et la dérivée suivante,

$$\frac{d^{n+1}Z}{dx^{n+1}}$$

appartiendra au plus à l'exposant négatif  $-1$ ; il en est de même, *a fortiori*, de

$$\frac{d^i Z}{dx^i}.$$

Si donc on forme une équation différentielle linéaire, admettant pour solutions les dérivées  $s^{\text{ièmes}}$  des intégrales de l'équation en  $z$ , et seulement ces dérivées, on reconnaîtra l'existence ou la non-existence de logarithmes dans le groupe (S), d'après l'existence ou la non-existence de racines négatives dans l'équation fondamentale déterminante relative à cette équation. En particulier, si le groupe (R) ne contient que deux racines, on sera ainsi complètement fixé sur la forme des intégrales du groupe correspondant.

Il ne reste plus qu'à montrer comment on peut former une équation différentielle linéaire admettant comme solutions les dérivées  $s^{\text{ièmes}}$  des intégrales de l'équation en  $z$ . On pourrait différentier  $s$  fois cette équation, puis éliminer  $z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{s-1}z}{dx^{s-1}}$  entre les  $s+1$  équations obtenues; l'équation résultante où l'on ferait  $\frac{d^s z}{dx^s} = u$  admettrait évidemment ces dérivées  $s^{\text{ièmes}}$  comme solutions, mais on peut arriver à une équation d'ordre moindre, dans le cas où l'équation en  $z$  admet une solution entière de degré inférieur à  $s$ , car il existe alors une relation linéaire identique à coefficients constants entre les  $s^{\text{ièmes}}$  d'un système fondamental de l'équation en  $z$ . Pour arriver dans tous les cas à l'équation différentielle d'ordre le plus petit possible, nous écrivons l'équation en  $z$  de la façon suivante :

$$\frac{d^p z}{dx^p} = q_1 \frac{d^{p+1} z}{dx^{p+1}} + q_2 \frac{d^{p+2} z}{dx^{p+2}} + \dots + q_{m-p} \frac{d^m z}{dx^m},$$

$\frac{d^p z}{dx^p}$  étant la dérivée d'ordre le plus petit qui entre effectivement dans l'équation proposée. Si l'on fait

$$u = \frac{d^p z}{dx^p},$$

l'équation deviendra

$$u = q_1 \frac{du}{dx} + q_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \dots + q_{m-p} \frac{d^{m-p} u}{dx^{m-p}},$$

équation qui n'admet pas d'autres solutions que les dérivées  $\beta^{\text{ièmes}}$   $u_1, u_2, \dots, u_m$  des intégrales  $z_1, z_2, \dots, z_m$  de l'équation en  $z$ ; on en déduira,

par la différentiation,

$$\frac{du}{dx} = q'_1 \frac{d^2 u}{dx^2} + q'_2 \frac{d^3 u}{dx^3} + \dots + q'_{m-1} \frac{d^{m-1+1} u}{dx^{m-1+1}},$$

équation qui, si l'on y fait

$$\frac{du}{dx} = v,$$

n'admettra pas d'autres solutions que les dérivées

$$\frac{du_1}{dx}, \frac{du_2}{dx}, \dots, \frac{du_m}{dx}$$

des intégrales de l'équation en  $u$ . Si l'on avait, en effet,

$$C_1 \frac{du_1}{dx} + C_2 \frac{du_2}{dx} + \dots + C_m \frac{du_m}{dx} = 0,$$

on en déduirait

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_m u_m = C,$$

et la constante  $C$  serait une solution de l'équation en  $u$ , ce qui est impossible. On continuera ainsi de proche en proche jusqu'à ce que l'on arrive à l'équation cherchée.

34. Lorsque, en général, on aura reconnu l'existence d'une intégrale de la forme

$$y = (x - a)^r \{ \varphi_0 + \varphi_1 \log(x - a) + \dots + \varphi_n [\log(x - a)]^n \},$$

où  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  représentent des fonctions continues et uniformes dans le domaine du point  $a$ , on pourra employer le procédé suivant pour la détermination directe de ces fonctions; on substituera cette valeur de  $y$  dans l'équation proposée et l'on égalera à zéro les coefficients des diverses puissances de  $\log(x - a)$ : on obtiendra ainsi  $n$  équations différentielles linéaires simultanées, contenant, sauf une, des seconds membres; on cherchera ensuite à déterminer  $n + 1$  séries de la forme

$$\alpha_i + \beta_i (x - a) + \gamma_i (x - a)^2 + \dots, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

qui, mises à la place de  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ , satisfassent à ces équations.

35. Il peut se présenter, relativement à un point singulier  $a$ , une circonstance digne d'attention.

Supposons que les racines  $r_1, r_2, \dots, r_m$  de l'équation fondamentale déterminante soient toutes entières, positives et distinctes, de façon à ne former qu'un seul groupe; il peut se faire que les intégrales correspondantes ne contiennent point de logarithmes; dès lors elles ne présenteront en ce point aucune espèce de singularité, et le point  $a$  ne sera pas en réalité un point singulier; il ne diffère des points ordinaires qu'en ce que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_1}{dx^{m-2}} & \dots & y_1 \\ \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_2}{dx^{m-2}} & \dots & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_m}{dx^{m-2}} & \dots & y_m \end{vmatrix}$$

est nul. M. Weierstrass a désigné ces points sous le nom de *points à apparence singulière*. Il est aisé de les reconnaître, d'après les principes qui précèdent.

V.

36. Ces principes posés, nous allons en faire quelques applications.

Nous donnerons d'abord certaines conditions nécessaires pour que toutes les intégrales d'une équation linéaire soient algébriques.

Les équations linéaires qui jouissent de cette propriété appartiennent évidemment à la classe d'équations que nous avons plus spécialement étudiées et dont le type est (§ 28)

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{F_{p-1}(x)}{\psi(x)} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \frac{F_{2(p-1)}(x)}{[\psi(x)]^2} \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{F_{m(p-1)}(x)}{[\psi(x)]^m} y,$$

où  $\psi(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_p)$  et où  $F_{p-1}(x), F_{2(p-1)}(x), \dots, F_{m(p-1)}(x)$  sont des fonctions entières en  $x$  dont le degré est au plus égal à l'indice.

On devra étudier chacun de leurs points singuliers  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , auquel on adjoindra le point  $\infty$  de la sphère; les racines des équations fondamentales déterminantes relatives à ces différents points devront

toutes être rationnelles et distinctes; de plus, pour chacun des points singuliers  $a_1, a_2, \dots, a_p, \dots, \infty$  les conditions du § 33, nécessaires et suffisantes pour que les éléments du système fondamental ne contiennent point de logarithmes, devront être satisfaites.

Si toutes ces conditions sont remplies, les diverses intégrales de l'équation proposée n'auront qu'un nombre fini de points singuliers, présentant tous le caractère des points critiques algébriques; mais ce ne seront pas nécessairement des fonctions algébriques, car elles restent évidemment susceptibles de prendre une infinité de valeurs en un même point; la distinction des cas où ce nombre de valeurs est fini semble d'une difficulté d'une nature tout autre: cette difficulté se lie à la question du passage d'un système fondamental relatif à un point singulier au système fondamental relatif à un autre point singulier.

37. Les équations différentielles linéaires à coefficients constants ne rentrent pas dans le type du § 28. Tout ce que la théorie nous apprend sur les intégrales de ces équations, c'est qu'elles ne peuvent présenter de singularité qu'au point  $\infty$ ; on peut d'ailleurs, par un changement de la variable indépendante, ramener ces équations au type normal. Si

$$(1) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + p_n y,$$

où  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sont des constantes, est l'équation à laquelle on a affaire, on posera

$$x = \log z,$$

et l'on aura en général

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a_1 z \frac{dy}{dz} + a_2 z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + \dots + a_n z^n \frac{d^n y}{dz^n},$$

où les  $a$  sont des constantes numériques données par la formule

$$a_i = \sum_{i=0}^{i=k-1} \frac{(-1)^i (k-i)^{n-1}}{1.2 \dots i \times 1.2 \dots (k-i-1)},$$

de sorte que l'équation proposée prendra la forme

$$(2) \quad \frac{d^n y}{dz^n} = \frac{p'_1}{z} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \frac{p'_2}{z^2} \frac{d^{n-2} y}{dz^{n-2}} + \dots + \frac{p'_n}{z^n} y,$$



$p'_1, p'_2, \dots, p'_m$  étant de nouvelles constantes. Cette équation est conforme au type du § 28.

Considérons en général les équations de la forme

$$(3) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_1}{x-a} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \frac{P_2}{(x-a)^2} \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{P_m}{(x-a)^m} y,$$

où  $P_1, P_2, \dots, P_m$  sont des constantes.

Elles n'admettent pas d'autre point singulier à distance finie que le point  $a$ ; l'équation fondamentale déterminante relative à ce point sera (§ 29)

$$r(r-1)\dots(r-m+1) - r(r-1)\dots(r-m+2)P_1 - \dots - rP_{m-1} - P_m = 0.$$

Si  $r_1$  est une racine de cette équation et que l'on fasse

$$y = (x-a)^{r_1} u,$$

on verra, d'après l'équation (4) du § 29, que le coefficient de  $u$  dans l'équation différentielle résultante est identiquement nul : cette équation admettra donc une solution de la forme  $u = C_1$ , et par suite l'équation proposée une solution de la forme

$$y = C_1 (x-a)^{r_1}.$$

Si toutes les racines  $r_1, r_2, \dots, r_m$  de l'équation fondamentale déterminante sont distinctes, la solution complète de l'équation (3) sera donnée par la formule

$$y = C_1 (x-a)^{r_1} + C_2 (x-a)^{r_2} + \dots + C_m (x-a)^{r_m};$$

s'il y a deux racines égales à  $r_1$ , on fera dans l'équation proposée

$$y = (x-a)^{r_1} u.$$

L'équation résultante en  $u$  sera de même forme que la proposée, si ce n'est que le coefficient de  $u$  sera nul; en posant

$$\frac{du}{dx} = u',$$

l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation en  $u'$  admet-

tra la racine  $-1$  : l'équation en  $u'$  admettra donc la solution

$$u' = C(x - a)^{-1},$$

l'équation en  $u$  la solution

$$u = C \log(x - a),$$

et l'équation en  $y$  la solution

$$y = C(x - a)^r \log(x - a).$$

En continuant de la même façon, on reconnaîtra en général que, s'il existe  $\lambda$  racines égales à  $r_1$ , l'équation admettra la solution

$$y = (x - a)^{r_1} \{p + q \log(x - a) + \dots + s [\log(x - a)]^{r_1 - 1}\},$$

$p, q, \dots, s$  étant des constantes; c'est là, d'ailleurs, un résultat bien connu.

Revenons à l'équation (2) : elle devra, d'après ce qui précède, admettre une solution de la forme

$$y = x^r;$$

d'où résulte que l'équation (1), à coefficients constants, devra admettre une solution de la forme

$$y = e^{rx},$$

et l'on est ainsi ramené à la méthode ordinairement employée pour la résolution de pareilles équations.

38. Considérons encore les équations du second ordre conformes au type du § 28, et admettant deux points singuliers  $a, b$ ; elles seront de la forme

$$(x - a)^2(x - b)^2 \frac{d^2u}{dx^2} + (x - a)(x - b)(fx + g) \frac{du}{dx} + (hx^2 + kx + l)u = 0.$$

On les ramènera d'abord à la forme

$$(x - a)(x - b) \frac{d^2y}{dx^2} + (mx + n) \frac{dy}{dx} + py = 0;$$

il suffira pour cela d'employer la substitution

$$u = (x - a)^r(x - b)^r y,$$

en prenant pour  $r$  et  $r'$  des valeurs qui satisfassent respectivement aux deux équations fondamentales déterminantes relatives, l'une au point  $a$ , l'autre au point  $b$ .

On pourra ensuite, par un changement de la variable indépendante, amener les deux points  $a$  et  $b$  à coïncider avec deux points singuliers quelconques, 0 et 1 par exemple; il suffira pour cela de faire

$$x = (b - a)x' + a;$$

l'équation prendra alors la forme

$$x(x - 1) \frac{d^2y}{dx^2} + (mx + n) \frac{dy}{dx} + py = 0,$$

les valeurs de  $m$ ,  $n$ ,  $p$  n'étant plus les mêmes, bien entendu.

Il y a lieu de considérer les trois équations fondamentales relatives aux points 0, 1,  $\infty$ .

Les équations relatives aux deux premiers points sont

$$r(r - 1) - nr = 0, \text{ d'où } r = 0, \quad r = 1 + n$$

et

$$r(r - 1) + (m + n)r = 0, \text{ d'où } r = 0, \quad r = 1 - m - n.$$

Pour le point  $\infty$ , il faut d'abord faire (§ 13) la substitution

$$x = \frac{1}{t};$$

l'équation deviendra alors

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2 - 2t - m - nt}{t} \frac{dy}{dt} + \frac{p}{t^2} y = 0,$$

et l'équation fondamentale relative au point  $t = 0$ , sera

$$r(r - 1) + (2 - m)r + p = 0,$$

ou

$$r^2 + (1 - m)r + p = 0.$$

Désignons-en les racines par  $\alpha$  et  $\beta$ , nous aurons

$$p = \alpha\beta, \quad m = 1 + \alpha + \beta;$$

posons enfin

$$n = -\gamma,$$

l'équation proposée prendra la forme

$$(x^2 - x) \frac{d^2 y}{dx^2} - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0 :$$

c'est la célèbre équation différentielle étudiée par Gauss, à laquelle satisfait la série hypergéométrique

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

Les racines des diverses équations fondamentales déterminantes sont :

Pour le point $x = 0 \dots \dots$	$r = 0,$	$r = 1 - \gamma;$
Pour le point $x = 1 \dots \dots$	$r = 0,$	$r = \gamma - \alpha - \beta;$
Pour le point $x = \infty \dots \dots$	$r = \alpha,$	$r = \beta.$

Si  $\gamma$  n'est pas un nombre entier négatif, il existera dans le domaine du point O une fonction uniforme satisfaisant à l'équation : c'est la série hypergéométrique

$$P = F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

elle-même convergente dans le cercle décrit du point O comme centre avec un rayon égal à 1. Dans le même cercle doit exister une solution appartenant à l'exposant  $1 - \gamma$ ; pour l'obtenir, nous ferons

$$y = ux^{1-\gamma} :$$

on aura ainsi l'équation

$$x(x-1) \frac{d^2 u}{dx^2} - [2 - \gamma - (\alpha + \beta + 3 - 2\gamma)x] \frac{du}{dx} + (\alpha + 1 - \gamma)(\beta + 1 - \gamma)u = 0,$$

qui ne diffère de l'équation en  $y$  que par le changement de  $\alpha, \beta, \gamma$  respectivement en  $\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma$ ; lorsque ce dernier nombre ne sera pas un entier négatif, l'équation en  $u$  admettra la solution

$$F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x),$$

et par conséquent l'équation proposée admettra la solution

$$Q = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x).$$

Lors donc que  $\gamma$  ne sera pas entier, la solution complète de l'équation proposée sera, dans le domaine du point zéro,

$$CP + C'Q,$$

C et C' étant des constantes arbitraires.

Pour étudier le point 1, faisons

$$x = (1 - x'),$$

l'équation deviendra

$$x'(x' - 1) \frac{d^2\gamma}{dx'^2} - [\alpha + \beta + 1 - \gamma - (\alpha + \beta + 1)x'] \frac{d\gamma}{dx'} + \alpha\beta\gamma = 0,$$

équation qui ne diffère de la proposée que par le changement de  $\gamma$  en  $\alpha + \beta + 1 - \gamma$ ; si donc  $\alpha + \beta + 1 - \gamma$  n'est pas entier, l'équation proposée admettra dans le domaine du point 1 les deux solutions

$$R = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x),$$

$$S = x^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, 1 + \gamma - \alpha - \beta, 1 - x),$$

et la solution complète sera, dans le domaine du point 1,

$$CR + C'S,$$

C et C' étant des constantes arbitraires.

Remarquons que les deux domaines des points 0 et 1 empiètent l'un sur l'autre; dans la partie commune, si les nombres  $\gamma$  et  $\alpha + \beta + 1 - \gamma$  ne sont entiers ni l'un ni l'autre, les séries P, Q, R, S sont simultanément convergentes, et si  $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$  sont des constantes convenables, on devra avoir

$$R = \lambda P + \mu Q, \quad S = \lambda' P + \mu' Q.$$

La détermination effective des constantes  $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$  permettra de passer d'un domaine dans l'autre.

Examinons maintenant le point  $\infty$ : quand on fait dans l'équation proposée

$$x = \frac{1}{t},$$

elle devient

$$t^2(1 - t) \frac{d^2\gamma}{dt^2} + t[(\gamma - 2)t - (\alpha + \beta + 1)] \frac{d\gamma}{dt} + \alpha\beta\gamma = 0.$$

L'équation fondamentale déterminante relative au point zéro a pour racines  $\alpha$  et  $\beta$ ; cherchons, par exemple, la solution qui appartient à l'exposant  $\alpha$  et, pour cela, faisons

$$y = t^\alpha u,$$

l'équation précédente deviendra

$$t(t-1) \frac{d^2 u}{dt^2} - [\alpha - \beta + 1 - (2\alpha - \gamma + 2)] \frac{du}{dt} + \alpha(\alpha + 1 - \gamma) u = 0,$$

équation qui ne diffère de la proposée que par le changement de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  respectivement en  $\alpha$ ,  $\alpha + 1 - \gamma$ ,  $\alpha - \beta + 1$ : si donc  $\alpha - \beta + 1$  n'est pas un entier nul ou négatif, elle admettra la solution

$$F(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha - \beta + 1, t),$$

et l'équation proposée la solution

$$T = \frac{1}{x^\alpha} F\left(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{x}\right);$$

de même, si  $\beta - \alpha + 1$  n'est pas un entier nul ou négatif, l'équation proposée admettra la solution

$$U = \frac{1}{x^\beta} F\left(\beta, \beta + 1 - \gamma, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{x}\right).$$

Ces deux séries T et U sont convergentes dans tout le domaine du point  $\infty$ , c'est-à-dire dans toute la portion du plan extérieur au cercle de rayon 1, décrit de l'origine comme centre.

Les domaines du point 1 et du point  $\infty$  empiètent l'un sur l'autre; dans la portion commune, T et U doivent pouvoir s'exprimer en fonction linéaire à coefficients constants de R et de S.

Lorsque  $\gamma$  est un nombre entier, ou bien  $\gamma - \alpha - \beta$ , ou bien  $\alpha - \beta$ , il peut y avoir des logarithmes dans les solutions complètes de l'équation dans le domaine du point zéro, ou du point 1, ou du point  $\infty$ : cherchons ce qu'il en est.

On trouvera aisément que, si l'on fait

$$\frac{d^m y}{dx^m} = u,$$

la fonction satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2 - x) \frac{d^2 u}{dx^2} - [(\gamma + m) - (\alpha + m + \beta + m + 1)x] \frac{du}{dx} + (\alpha + m)(\beta + m)u = 0,$$

qui ne diffère de l'équation proposée que par le changement de  $\alpha, \beta, \gamma$  en  $\alpha + m, \beta + m, \gamma + m$ ; l'équation fondamentale déterminante relative au point zéro aura par conséquent pour racines 0 et  $1 - \gamma - m$ . Si donc  $\gamma$  est un nombre entier, positif, nul ou négatif,  $1 - \gamma - m$  finira toujours par être un entier négatif; alors l'intégrale complète devra toujours contenir un logarithme dans le domaine du point zéro.

On conclura de là aisément qu'il en est de même pour le point 1, ou pour le point  $\infty$  lorsque  $\gamma - \alpha - \beta$  est un nombre entier, ou bien  $\alpha - \beta$ .

Dans ces différents cas, effectivement, nous avons vu qu'il n'existe qu'une seule des deux séries P et Q, ou R et S, ou T et U.

Pour obtenir alors la solution complète, on peut se servir de la solution déjà obtenue; désignons-la en général par  $y$ , et faisons

$$y = y_1 \int z dx,$$

dans l'équation proposée; on aura, pour déterminer  $z$ , l'équation

$$(x^2 - x) \left( 2 \frac{dy_1}{dx} z + y_1 \frac{dz}{dx} \right) - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] y_1 z = 0,$$

ou

$$\frac{dz}{z} = \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x^2 - x} dx - 2 \frac{dy_1}{y_1} = \frac{\gamma - \alpha - \beta - 1}{x - 1} dx - \frac{\gamma}{x} dx - 2 \frac{dy_1}{y_1};$$

d'où

$$z = \frac{(x - 1)^{\gamma - \alpha - \beta - 1}}{x^\gamma y_1^2};$$

et, par conséquent,

$$y = y_1 \int \frac{(x - 1)^{\gamma - \alpha - \beta - 1}}{x^\gamma y_1^2} dx$$

sera une seconde solution de l'équation. On peut encore employer la méthode indiquée dans le § 24 et déterminer le terme qui ne multiplie pas de logarithme au moyen d'une équation différentielle contenant un second membre.

Nous appliquerons cette méthode dans le cas où les deux racines de l'équation fondamentale déterminante relative au point zéro sont égales, c'est-à-dire dans le cas où  $\gamma = 1$ .

L'équation proposée se réduit alors à

$$(x^2 - x) \frac{d^2 y}{dx^2} - [1 - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0;$$

elle admettra d'abord la solution

$$P = F(\alpha, \beta, 1, x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_i x^i + \dots$$

En faisant

$$A_i = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+i-1) \times \beta(\beta+1)\dots(\beta+i-1)}{1^2 \cdot 2^2 \dots i^2},$$

cherchons à satisfaire à cette équation par une fonction de la forme

$$y = \varphi + P \log x,$$

$\varphi$  étant une fonction continue et uniforme dans le domaine du point zéro; en substituant dans l'équation proposée, égalant à zéro l'ensemble des termes qui ne contiennent pas de logarithmes en facteur, il vient

$$(x^2 - x) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - [1 - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{d\varphi}{dx} + \alpha\beta\varphi + 2(x-1) \frac{dP}{dx} + (\alpha + \beta)P = 0;$$

si l'on fait

$$\varphi = A_0 a_0 + A_1 a_1 x + \dots + A_i a_i x^i + \dots,$$

que l'on remplace  $\varphi$  et  $P$  par les séries équivalentes dans l'équation différentielle et que l'on égale à zéro le coefficient de  $x^i$ , il viendra

$$(\alpha + i)(\beta + i) A_i a_i - (i + 1)^2 A_{i+1} a_{i+1} + (\alpha + \beta + 2i) A_i - 2(i + 1) A_{i+1} = 0$$

ou, en remarquant que

$$\frac{A_{i+1}}{A_i} = \frac{(\alpha + i)(\beta + i)}{(i + 1)^2},$$

$$a_{i+1} - a_i = \frac{-2}{i + 1} + \frac{1}{\alpha + i} + \frac{1}{\beta + i},$$



d'où

$$a_i = a_0 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \dots + \frac{1}{\alpha+i-1} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} + \dots + \frac{1}{\beta+i-1} - 2 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{i} \right).$$

On peut, sans inconvénient, supposer  $a_0$  nul, cela revenant à retrancher  $a_0 P$  de  $\varphi$ ; la série qui représente  $\varphi$  est ainsi déterminée par son terme général  $A_i a_i x^i$ .

Si l'on examine la forme de ce terme général, on reconnaît aisément que la solution ainsi obtenue

$$\varphi + P \log x$$

peut s'écrire

$$A \log x + \frac{\partial P}{\partial \alpha} + \frac{\partial P}{\partial \beta} + 2 \frac{\partial P}{\partial \gamma},$$

où  $P$  représente la fonction

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

dans laquelle on fait  $\gamma = 1$  après avoir pris les dérivées partielles; c'est le résultat auquel on arriverait immédiatement en cherchant la limite pour  $\gamma = 1$  du rapport

$$\frac{x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{1-\gamma},$$

qui, d'après ce qu'on a vu, satisfait constamment à l'équation proposée.

Le fond de ce travail est l'œuvre de M. Fuchs : j'ai introduit quelques raisonnements intermédiaires pour montrer comment, en partant des propriétés des intégrales, on pouvait arriver à déterminer leurs formes; un peu plus loin j'ai indiqué les caractères qui permettent de reconnaître les fonctions qui satisfont à une équation différentielle linéaire à coefficients uniformes ou rationnels; j'ai donné une application immédiate aux fonctions algébriques. Dans la recherche du

type des équations qui sont l'objet principal de cette étude, j'ai appelé l'attention sur une exception à l'un des lemmes fondamentaux, exception qui enlevait aux raisonnements leur rigueur, et j'ai montré comment on pouvait lever la difficulté. M. Fuchs lui-même, dans son second Mémoire, a parlé de ce cas d'exception sans peut-être y insister suffisamment. Enfin les dernières applications, sous la forme que je leur ai donnée, m'appartiennent.

---

**NOTE**  
SUR  
**LES DÉFORMATIONS DES FOSSILES**

CONTENUS DANS LES ROCHES SCHISTEUSES,

ET SUR

LA DÉTERMINATION DE QUELQUES ESPÈCES DU GENRE *OGYGIA*,

PAR M. HENRY DUFET,

AGRÉGÉ-PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

---

Dans ses études sur les trilobites du terrain silurien de la Bretagne, M. Marie Rouault prend comme principale caractéristique des espèces du genre *Ogygia* le rapport entre la largeur du bouclier céphalique et sa longueur; mais, en étudiant un certain nombre d'individus de ce genre, il est facile de s'assurer que ce rapport ne présente aucune constance. Les déformations subies par ces fossiles, pour la même espèce et dans la même localité, peuvent faire varier ce rapport entre 4 et 1,3; cette Note a pour but d'indiquer comment on peut corriger la valeur de ce rapport, qui, alors, deviendrait un caractère spécifique acceptable.

Sous l'influence de la pression, les roches ne se déforment que si elles présentent un certain degré de plasticité, et la pression en ce cas se transmet dans tous les sens absolument comme dans un liquide. Il est à peu près universellement admis que la schistosité des roches provient d'une pression perpendiculaire au plan de clivage. Admettons une roche ainsi pressée et encore assez plastique pour subir des déformations sans déchirure; les couches tendront à s'étendre dans tous les sens dans un plan perpendiculaire à la pression, à s'écouler, pourrait-on dire. Si ce mouvement d'écoulement est gêné dans un sens, l'écoulement sera plus considérable dans un sens que dans l'autre, et ce fait

suffira pour produire des déformations dans les fossiles contenus dans cette roche. Supposons, en effet, un cercle tracé dans un plan perpendiculaire à la pression : si l'écoulement est uniforme dans tous les sens, il donnera un cercle d'un rayon plus grand; si l'écoulement est gêné dans une direction, il donnera une ellipse; si au lieu d'un cercle on a l'empreinte d'un trilobite, les deux lignes d'abord perpendiculaires, formées par l'axe et le bord transverse du bouclier céphalique, donneront *deux diamètres conjugués* de cette ellipse et feront un angle variable, avec un allongement relatif de l'une ou l'autre de ces lignes. J'ai cherché à construire cette ellipse et, par suite, à corriger cet allongement; je me suis servi pour cela des particularités qu'on observe dans la conductibilité calorifique des roches.

M. Jannettaz, dans la séance du 27 avril 1874, a communiqué à l'Académie des Sciences un Mémoire sur la conductibilité des roches schisteuses; ce Mémoire, concordant absolument avec les résultats autrefois trouvés par de Senarmont pour le verre comprimé, montre que, dans le sens de la pression, la conductibilité est moindre que dans le sens perpendiculaire. Dans la plupart des cas, le lieu des points d'égale température est un ellipsoïde de révolution aplati; mais, dans certaines roches, l'ellipsoïde présente trois axes inégaux; c'est ce qui m'est arrivé, par exemple, pour des schistes siluriens fossilifères de Sion (Loire-Inférieure) appartenant à la zone à *Calymene Tristani*. Sur une plaque polie parallèle à la schistosité, on obtient une ellipse; en taillant ensuite des faces perpendiculaires au plan de schistosité et parallèles aux axes de cette première ellipse, on obtient les trois sections principales de l'ellipsoïde. Ainsi, dans un cas, j'ai trouvé pour les trois axes de l'ellipsoïde 100, 134, 148; le rapport de ces deux derniers nombres, 1,11, est précisément le rapport trouvé pour les axes de l'ellipse située dans le plan de clivage. Certains schistes métamorphiques présentent non un plan de clivage, mais plutôt un axe de clivage, la roche se fendant avec une facilité presque égale dans tous les plans parallèles à cet axe. Un schiste de Nozay (Loire-Inférieure) présentant cette disposition, très-fréquente d'ailleurs, a donné pour les axes de l'ellipsoïde de conductibilité 100, 112, 152; on voit qu'on se rapproche beaucoup d'un ellipsoïde de révolution allongé. Il semble que la pression se soit exercée dans toutes les directions dans un plan perpendiculaire au

grand axe. Je n'ai pas continué cet ordre de recherches, après avoir eu connaissance du travail de M. Jannettaz.

Mais, remarquant que l'ellipse obtenue dans le plan de schistosité, où se trouvent étalés les fossiles, me donne par la direction de son petit axe la direction d'une résistance quelconque à l'écoulement de la roche comprimée, j'ai pu arriver ainsi à déterminer la valeur de cet écoulement. J'ai opéré, pour avoir les ellipses, non sur des plaques, mais sur des fragments présentant une face polie, et j'ai employé presque sans modifications l'ancien procédé de de Senarmont. La tige chauffée était un fil de cuivre de 3 millimètres de diamètre, taillé en cône à son extrémité; ce cône vient s'engager à moitié dans un trou de 2 millimètres de diamètre et de 5 ou 6 millimètres de profondeur, creusé dans la roche à étudier; la face polie est recouverte de cire et un écran la protège contre le rayonnement d'un bec Bunsen qui sert à chauffer la tige; l'élasticité de cette tige assure la certitude du contact, qui n'a lieu d'ailleurs que par le bord du trou. Cet appareil, extrêmement simple, donne des résultats très-suffisamment exacts; dans des expériences comparatives faites avec le gypse, j'obtenais des ellipses très-régulières qui m'ont toujours donné à quelques centièmes près les nombres de de Senarmont et de M. Jannettaz :

$$\frac{a}{b} = 1,26 \text{ à } 400 \text{ degrés environ.}$$

Cette ellipse obtenue, il suffit de fixer le fragment de roche à la place qu'il occupait auprès du fossile et de relever les directions du grand axe de l'ellipse, de l'axe du Trilobite et de la ligne de séparation de la tête et du thorax. On a ainsi trois directions qui permettent très-facilement de trouver le rapport des axes. Ce rapport est ce que j'appellerai le *coefficient de compression*. Il reste à porter sur chaque diamètre la longueur qu'on veut corriger, et à construire le diamètre du cercle qui se projette sur l'ellipse : on aura ainsi le vrai rapport de la largeur de la tête à sa longueur.

En opérant ainsi sur un certain nombre de fossiles provenant de Sion, et présentant des formes très-différentes, on arrive à des résultats concordants qui permettent d'affirmer l'identité d'espèce. Voici, du reste, le tableau donnant les résultats des expériences.

NUMÉROS des échantillons.	RAPPORT des axes de l'ellipsoïde de conductibilité.	COEFFICIENTS de compression.	RAPPORT de la largeur de la tête (avec pointes génales) à sa longueur.		RAPPORT de la largeur de la tête (sans pointes génales) à sa longueur.		RAPPORT de la largeur du pygidium à sa longueur.	
			Directe- ment.	Après correction.	Directe- ment.	Après correction.	Directe- ment.	Après correction.
1	1,20	1,46	3,24	2,31	2,70	1,93	2,73	1,95
2	1,22	1,62	1,54	2,13	1,30	1,80	1,45	2,00
3	1,15	1,80	1,75	2,37	1,47	2,00	1,51	2,04
4	1,13	1,68	2,54	2,14	2,00	1,66	2,15	1,80
5	1,12	1,57	2,28	2,36	1,93	2,00	»	»
6	1,20	1,49	»	»	»	»	2,48	2,07
7	1,17	1,50	»	»	»	»	2,52	2,16
8	1,20	1,75	»	»	»	»	1,63	2,05

Les Trilobites ou parties de Trilobites étudiés présentent, en négligeant les différences de forme dues à la déformation, des caractères très-uniformes. Pour la tête, la glabelle est sensiblement unie, les yeux sont saillants, la suture génale a la forme décrite par M. Rouault pour ses deux espèces *Ogygia Edwardsi* et *Ogygia Brongniarti*; mais la première se distingue par un caractère bien net : c'est que le pygidium présente des articulations nombreuses.

Le nombre de ces côtes et leur forme sur le lobe médian du pygidium rapprochent cette espèce d'*Asaphus nobilis*, Barr. Un trilobite d'Angers, appartenant à la collection de l'École Normale, m'a présenté absolument les caractères de cette dernière espèce; je crois que l'assimilation de ces deux espèces n'est pas douteuse.

Dans la figure donnée par M. Rouault pour *Ogygia Brongniarti* (1), le pygidium est une restauration et manque dans le fossile représenté. M. Barrande (2), tout en admettant l'espèce de M. Rouault, pense qu'elle a été élargie par déformation, et qu'il n'y a que cinq à six côtes sur les parties latérales du pygidium. C'est la conclusion à laquelle

(1) *Bulletin de la Société géologique de France*, t. VI, 2<sup>e</sup> série, p. 88.

(2) *Système silurien de Bohême (Trilobites)*, t. I, p. 655.

nous avons été conduit : si l'on jette les yeux sur notre tableau, on voit que des formes très-différentes, comme les fossiles 1, 3, 5, proviennent d'individus primitivement de même forme. Le type de M. Rouault présente les anneaux du thorax perpendiculaires à l'axe du corps; c'est précisément le cas où la déformation est maxima. Dans ce cas, on obtient immédiatement la valeur corrigée du rapport de la largeur de la tête à sa longueur en la divisant par le coefficient de compression. Ce rapport, dans le dessin de M. Rouault, atteint 3,8; si on le divise par 2,35, valeur moyenne des rapports corrigés que nous avons trouvés, on obtient 1,62, qui est précisément la moyenne de nos coefficients de compression; ce n'est pas là une vérification rigoureuse, puisque le fossile précité vient d'Angers, mais il y a là au moins une coïncidence remarquable.

*Ogygia Brongniarti* non déformée serait donc bien plus allongée que ne l'indique la diagnose de cette espèce. A l'état adulte, la largeur de la tête est égale à 2,35 fois sa longueur; les valeurs 2,13 et 2,14 appartiennent à des individus de plus petite taille. La taille qu'atteint cette espèce est considérable; le fossile n° 3 a une longueur de 40 centimètres; le n° 1 une longueur de 21 centimètres avec une largeur de 23; le fragment n° 7 provient d'un individu de 30 centimètres au moins. Remarquons cependant que ces longueurs ont dû être augmentées par l'épanchement de la roche sous l'influence de la pression, et il serait difficile de préciser la valeur de cet allongement.

Une pièce fort intéressante pour la détermination de cette espèce est un hypostome en place, présenté par un individu de grande taille, dont je ne possède que la tête et une partie du thorax. Cet hypostome est arrondi en arrière et non fourchu. On sait que ce caractère est invoqué par M. Barrande pour établir la distinction des genres *Asaphus* et *Ogygia*. *Ogygia Brongniarti* serait donc bien une *Ogygie*, et les hypostomes fourchus signalés dans les roches siluriennes de Bretagne pourraient se rapporter à *Ogygia Edwardsi*, si l'assimilation entre cette espèce et *Asaphus nobilis*, Barr., était définitivement admise.

Le principal caractère spécifique de l'espèce qui nous occupe est la forme du pygidium, qui, chez les individus de grande taille, est sensiblement lisse et présente seulement quatre ou cinq côtes peu profondes sur les lobes latéraux, dans les individus de taille moyenne. L'axe du

pygidium ne présente que des côtes indistinctes; il est d'ailleurs très-bien limité, et se termine en arrière brusquement et presque à pic. La glabelle est lisse, et les pointes génales s'étendent jusqu'au cinquième ou sixième segment thoracique (fig. 1).

Fig. 1.

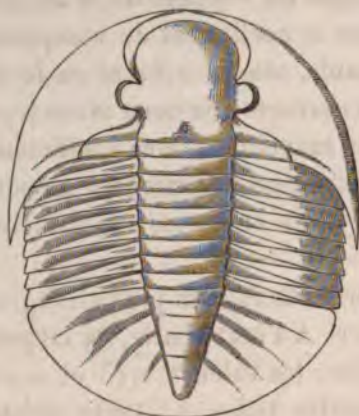
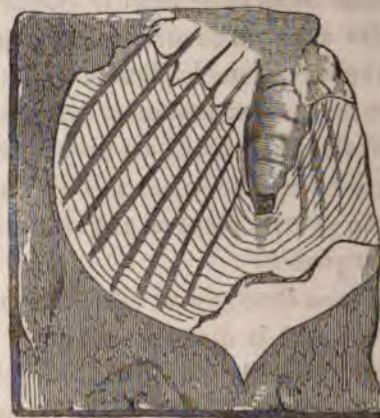


Fig. 2.



Les espèces de Bretagne appartenant au genre *Ogygia*, pour quelques-unes peut-être au genre *Asaphus*, bien caractérisées, seraient, comme l'admet M. Rouault, *Ogygia Guettardi*, Brongniart, *Ogygia Edwardsi*, Rouault, *Ogygia Brongniarti*, Rouault.

*Ogygia Guettardi* est l'espèce faite en 1818, par Al. Brongniart, sur des échantillons d'Angers. M. Rouault la regarde comme caractérisée par le rapport 1,30 entre la largeur du bouclier céphalique et sa longueur. D'après des individus provenant de la Hunaudière (Loire-Inférieure), et présentant la conservation parfaite des fossiles de cette localité, qui, comme on le sait, ont été conservés dans des rognons de roche argileuse très-dure, et souvent ne sont pas déformés, nous croyons ce rapport trop petit. La largeur du bouclier céphalique est égale à 1,65 fois sa longueur. Le pygidium est orné, sur les parties latérales, de sept à huit côtes peu élevées. Les organes pandériens sont très-apparents sur les plèvres.

Parmi les fossiles de Sion se trouve un pygidium appartenant à une espèce nouvelle d'Ogygie. Ce pygidium est remarquable par l'étroitesse du lobe moyen qui n'a que  $\frac{1}{10}$  de la largeur totale; il est orné de



quatre ou cinq côtes peu distinctes et cesse brusquement vers les deux tiers du pygidium. Celui-ci est terminé en pointe à son extrémité postérieure (*fig. 2*); il est orné de huit côtes sensiblement rectilignes et inclinées en arrière, qui présentent une pente douce en avant et très-abrupte en arrière. La doublure du test est ornée de stries concentriques parallèles aux bords du bouclier, caractéristiques des *Asaphidæ*. Nous rapportons provisoirement cette espèce au genre *Ogygia*, et proposons pour elle le nom d'*Ogygia Delessii*, comme témoignage de reconnaissance pour notre savant maître, M. le professeur Delesse.

Il n'est pas inutile de signaler la ressemblance, comme faciès général, de la faune trilobitique de Bretagne et de celle de Wozcek, en Bohême; c'est dans cette localité que M. Barrande a signalé, entre autres, *Calymene Arago*, Renault, et *Ogygia desiderata*, Barr. Cette dernière espèce présente d'assez grands rapports avec *Ogygia Brongniarti*.

Je ferai remarquer, en terminant, que dans le cas où, sur la même plaque de roche, se trouvent deux fossiles différemment orientés, on peut en retrouver les dimensions d'une manière simple sans recourir aux propriétés calorifiques de la roche. Les directions de deux lignes primitivement rectangulaires dans chaque fossile, comme sont l'axe et le bord du bouclier céphalique dans les Trilobites, nous donnent deux systèmes de diamètres conjugués; on peut, par suite, trouver la direction du grand axe de l'ellipse de compression. Cela fait, on est ramené au cas où on l'obtient par la conductibilité. Les constructions sont très-élémentaires; je les indiquerai, cependant, pour faciliter l'emploi de cette méthode, si le cas se présentait de l'appliquer.

Fig. 3.

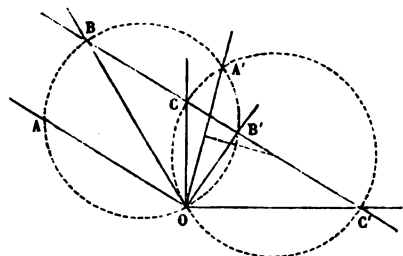
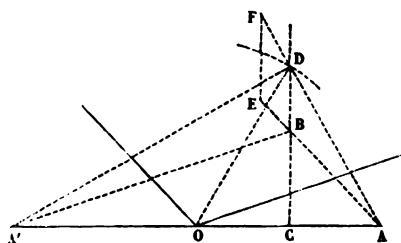


Fig. 4.



Soient AO, A'O, et BO, B'O (*fig. 3*) les deux directions de nos deux systèmes de diamètres conjugués. On sait que, si l'on fait passer des cir-

conférences par le centre O et par les points où les différents systèmes de diamètres conjugués rencontrent une droite quelconque, on a une série de circonférences ayant même axe radical. Prenons la droite parallèle au diamètre AO; l'axe radical sera A'O : on fait passer une circonférence par les trois points, O, B, B'. La circonférence passant par les extrémités des axes aura son centre sur la droite et passera par les points A' et O; en la construisant on a les axes CO, C'O.

Quand on a la direction du grand axe et de deux diamètres conjugués, par deux points de l'axe A et A' (*fig. 4*), on mène des parallèles aux diamètres et l'on abaisse la perpendiculaire BC; en prenant OD égal à la moitié de AA', le rapport  $\frac{DC}{BC}$  est précisément ce que j'ai appelé le *coefficient de compression*.

En portant sur AB la longueur qu'on veut corriger, et menant EF parallèle à BC, on obtient une longueur AF qui est dans un rapport déterminé avec la longueur vraie avant la déformation. En opérant de même à partir de A', on a deux longueurs dont le rapport est la valeur corrigée du rapport que l'on cherche.

En appliquant la première de ces constructions à deux Ogygies appartenant à un même fragment, dont l'une était précisément l'Ogygie avec hypostome dont j'ai parlé plus haut, j'ai trouvé pour le coefficient de compression les deux valeurs, très-concordantes, 1,61 et 1,62.

Je compte étudier les déformations dans les autres genres de Trilobites de Bretagne : ce sera l'objet d'une seconde Note.

---

**APPLICATION**  
DE LA  
**FLEXION CIRCULAIRE DES LAMES ÉLASTIQUES**  
AU TRACÉ DES ARCS DE CERCLE,

PAR M. H. RESAL,  
MEMBRE DE L'INSTITUT.

---

Quelles que soient les conditions auxquelles doit satisfaire le tracé d'un arc de cercle, on peut toujours, soit graphiquement, soit par le calcul, fixer la position de trois points par lesquels on est ramené à faire passer cet arc.

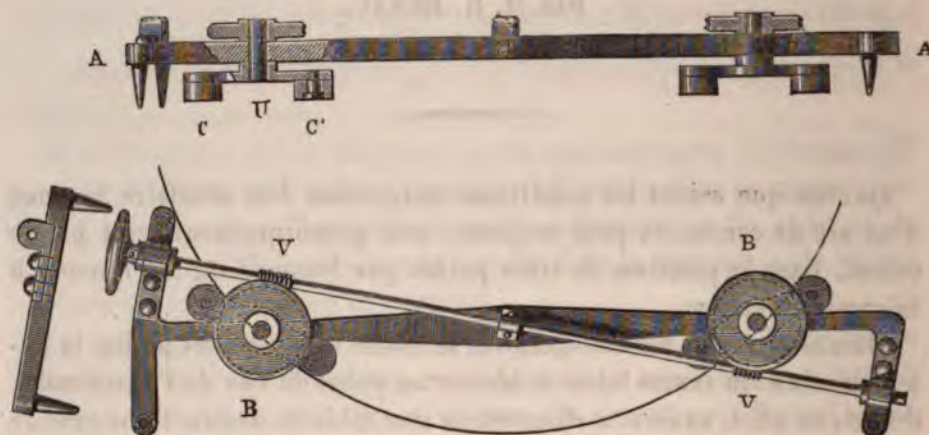
Mais si le rayon est très-grand et la corde relativement petite, la détermination du centre laisse à désirer au point de vue de l'exactitude; il faut, en effet, avoir à sa disposition une table de dessin d'une grande étendue; de plus, l'intersection des perpendiculaires, menées aux milieux de deux cordes, ne donne qu'approximativement la position du centre, position que l'on ne fixe définitivement qu'à la suite de tâtonnements plus ou moins longs et fort ennuyeux. Enfin l'emploi de compas de grandes dimensions, ou de règles à pivot munies d'un crayon ou d'un tire-ligne, laisse aussi à désirer sous le rapport de la précision. C'est ce qui explique pourquoi, dans la confection des mappemondes, on trace par points les parallèles voisins de l'équateur et la plupart des méridiens.

M. Tchébychef, si je ne me trompe, a eu le premier l'idée d'éluder ces difficultés en construisant un instrument qui se compose en principe d'une lame élastique; un mécanisme particulier permet de faire fléchir cette lame de telle manière que, quelle que soit la flèche, son profil ait (suivant M. Tchébychef) huit points communs avec un arc de cercle auquel on peut substituer ce profil par approximation.

Si une lame élastique est encastrée par ses extrémités dans deux pièces mobiles à volonté autour de deux axes fixes parallèles, il est facile de voir qu'en faisant tourner en sens inverse ces encastresments d'un même angle, le profil de la lame affectera la forme d'un arc de cercle; car, en raison de la symétrie, les encastresments ne donnent lieu qu'à des couples égaux et de sens contraire.

L'instrument représenté par la *fig. 1* réalise à très-peu près cette conception théorique.

Fig. 1.



Chacun des encastresments de la lame est formé d'une traverse horizontale  $CC'$  pouvant tourner autour d'un axe vertical  $U$ ; au-dessous de cette traverse, vers ses extrémités et à égale distance de l'axe  $U$ , se trouvent deux roulettes identiques dont les axes sont verticaux. On engage la lame entre les quatre roulettes après avoir réglé la position relative des encastresments, comme nous l'indiquerons plus loin. Les axes  $U$  sont maintenus dans une pièce horizontale  $AA$ , au-dessous de laquelle se trouvent les encastresments, et qui repose sur trois pieds. Aux extrémités supérieures de ces axes sont adaptées deux roues dentées identiques  $B, B$ , engrenant avec une vis sans fin  $VV$  dont l'axe passe entre les deux roues et au moyen de laquelle on fait fléchir la lame.

Les guides de la vis sans fin sont maintenus sur le support  $AA$  par des vis de pression qui permettent de la désembrayer lorsque l'on veut

régler la position des encastremets avant la mise en place de la lame; il suffit, à cet effet, de faire en sorte que les quatre galets soient tangents à une règle disposée en conséquence; on engrène ensuite la vis sans fin, puis on serre les vis de pression.

Si l'angle formé par les rayons des roulettes intérieures menés en leurs points de contact avec la lame ne dépasse pas une certaine limite, la courbure des portions de la lame comprises entre les deux couples de roulettes est très-faible et peut être négligée, ce qui revient à considérer le profil de chacune de ces portions comme se confondant avec la tangente commune aux profils des roulettes correspondantes.

Si l'on fait abstraction du frottement, les réactions sur la lame des deux roulettes extérieures, comme celles des roulettes intérieures, sont normales et égales entre elles en vertu de la symétrie. Les réactions d'un couple de roulettes étant censées parallèles entre elles, d'après ce que nous avons dit plus haut, sont de sens contraire et ont nécessairement la même valeur; car autrement les réactions des quatre roulettes auraient une résultante qui ne ferait équilibre à aucune force extérieure. On voit donc que, au degré d'approximation convenu, les réactions des roulettes forment aux extrémités de la lame deux couples identiques de sens contraire, et que, par suite, le profil de la lame est circulaire entre les roulettes intérieures.

Nous allons chercher maintenant à pousser plus loin l'approximation, en déterminant les modifications apportées à la forme circulaire par la courbure de la lame dans les encastremets, puis par les frottements.

1° *Influence de la courbure de la lame dans les encastremets.* — La *fig. 2* représente la section faite par le plan perpendiculaire aux axes des roulettes qui contient la fibre moyenne de la lame.

Soient

$\mu$  le moment d'élasticité de la lame;

$C_0, C_1$  les centres des roulettes intérieure et extérieure de l'un des encastremets;

$A_0, A_1$  les points de contact de celle de leurs tangentes intérieures avec laquelle la lame viendrait coïncider en faisant tourner dans un sens convenable la roulette  $C_1$  autour du centre  $C_0$ ;

$\alpha_0, \alpha_1$  les points de contact de la lame avec les roulettes  $C_0$  et  $C_1$ ;

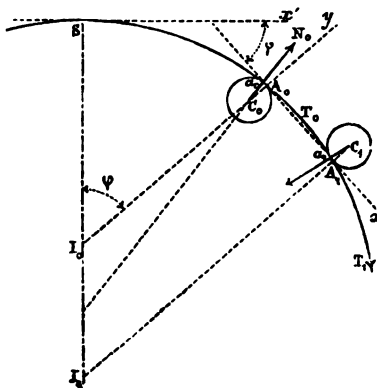
$l$  la longueur connue  $A_0, A_1$ ;

$R$  le rayon de chacune des roulettes;

$\mu N$ , la réaction de la roulette  $C_1$  sur la lame dirigée suivant  $C, a_1$ , en négligeant le frottement;

$\epsilon_0, \epsilon_1$ , les angles  $A_0 C_0 a_0, A_1 C_1 a_1$ .

Fig. 2.



Nous prendrons le point  $A_0$  pour origine des coordonnées, la direction de  $A_0 A_1$  pour celle de l'axe des  $x$ , et le prolongement au delà de  $A_0$  de  $C_0 A_0$  pour partie positive de l'axe des  $y$ . Nous désignerons par  $\rho, \alpha$  le rayon de courbure et l'inclinaison de la tangente sur  $A_0 x$  au point  $m$  du profil  $a_1 a_0$  dont les coordonnées sont  $x$  et  $y$ .

On a

$$\begin{aligned} x &= -R \sin \epsilon_0, & y &= -R(1 - \cos \epsilon_0), & \alpha &= \epsilon_0, & \text{pour le point } a_0, \\ x &= l - R \sin \epsilon_1, & y &= R(1 - \cos \epsilon_1), & \alpha &= -\epsilon_1, & \text{pour le point } a_1, \end{aligned}$$

et l'équation de la portion  $a_0 a_1$  de la lame élastique est

$$\frac{1}{\rho} = N_1 \cos \epsilon_1 (l - R \sin \epsilon_1 - x) + N_1 \sin \epsilon_1 [y - R(1 - \cos \epsilon_1)].$$

Comme  $\alpha$  décroît constamment à partir de  $\epsilon_1$ , nous devons prendre

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\alpha}{ds}, \quad ds \text{ étant l'élément d'arc, d'où}$$

$$(1) \quad -\frac{d\alpha}{ds} = N_1 \{(l - R \sin \epsilon_1 - x) \cos \epsilon_1 + (y - R[1 - \cos \epsilon_1]) \sin \epsilon_1\}.$$

Si l'on différentie cette équation en remarquant que  $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$ ,  $\sin \alpha = \frac{dy}{ds}$ , on obtient la suivante :

$$\frac{d^2 \alpha}{ds^2} = N_1 \cos(\alpha + \epsilon_1).$$

Multipliant par  $d\alpha$ , intégrant et remarquant que l'équation (1) donne  $\frac{d\alpha}{ds} = 0$  pour le point  $a$ , ou pour  $\alpha = -\epsilon_1$ , on trouve

$$(2) \quad \frac{1}{2} \frac{d\alpha^2}{ds^2} = N_1 \sin(\alpha + \epsilon_1),$$

d'où

$$ds = - \frac{1}{\sqrt{2} N_1} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin(\alpha + \epsilon_1)}},$$

par suite

$$dx = - \frac{1}{\sqrt{2} N_1} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{\sin(\alpha + \epsilon_1)}},$$

$$dy = - \frac{1}{\sqrt{2} N_1} \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sqrt{\sin(\alpha + \epsilon_1)}}.$$

Si l'on intègre ces dernières équations entre les points  $a_0$  et  $a_1$ , on obtient les suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} l - R(\sin \epsilon_1 - \sin \epsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2} N_1} \int_{-\epsilon_1}^{\epsilon_0} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{\sin(\alpha + \epsilon_1)}}, \\ R(2 - \cos \epsilon_1 - \cos \epsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2} N_1} \int_{-\epsilon_1}^{\epsilon_0} \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sqrt{\sin(\alpha + \epsilon_1)}}, \end{cases}$$

qui permettront de déterminer  $\epsilon_0$  et  $\epsilon_1$  en fonction de  $N_1$ . Si on les ajoute après les avoir multipliées respectivement par  $\sin \epsilon_1$  et  $\cos \epsilon_1$ , puis par  $\cos \epsilon_1$  et  $-\sin \epsilon_1$ , on trouve

$$(4) \quad \begin{cases} l \sin \epsilon_1 - 2R \left[ \cos^2 \frac{(\epsilon_0 + \epsilon_1)}{2} - \cos \epsilon_1 \right] = \frac{1}{\sqrt{2} N_1} \int_{-\epsilon_1}^{\epsilon_0} \sqrt{\sin(\alpha + \epsilon_1)} d\alpha, \\ l \cos \epsilon_1 + R[\sin(\epsilon_0 + \epsilon_1) - 2 \sin \epsilon_1] = \frac{2}{\sqrt{2} N_1} \sqrt{\sin(\epsilon_0 + \epsilon_1)}, \end{cases}$$

et la solution du problème ne dépend que d'une intégrale elliptique de seconde espèce.

Supposons que  $\varepsilon_0$  et  $\varepsilon_1$ , par suite  $\alpha$ , soient assez petits pour que nous puissions en négliger, devant l'unité, les puissances supérieures à la seconde, nous aurons

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_0} \sqrt{\sin(\alpha + \varepsilon_1)} d\alpha &= \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_0} \left[ \sqrt{\alpha + \varepsilon_1} - \frac{1}{12} (\alpha + \varepsilon_1)^{\frac{3}{2}} \right] \\ &= \frac{2}{3} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)^{\frac{3}{2}} \left[ 1 - \frac{1}{24} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)^2 \right], \\ \sqrt{\sin(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)} &= \sqrt{\varepsilon_0 + \varepsilon_1} \left[ 1 - \frac{1}{12} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)^2 \right], \end{aligned}$$

et dans ces valeurs nous pourrions négliger les termes du second ordre, non-seulement parce qu'ils sont déjà supposés petits, mais encore parce qu'ils sont affectés de petits coefficients; il vient ainsi

$$(5) \quad \begin{cases} l\varepsilon_1 \left( 1 - \frac{1}{6} \varepsilon_1^2 \right) - R \left[ \varepsilon_1^2 - \frac{1}{4} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)^2 \right] = \frac{2}{3\sqrt{N_1}} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \sqrt{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}, \\ l \left( 1 - \frac{\varepsilon_1^2}{2} \right) + R \left\{ (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \left[ 1 - \frac{(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)^2}{6} \right] - 2\varepsilon_1 \left( 1 - \frac{\varepsilon_1^2}{6} \right) \right\} = \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}. \end{cases}$$

Si nous négligeons maintenant les termes du second ordre et si nous admettons que  $R$  soit assez petit pour que l'on puisse considérer les rapports  $\frac{R\varepsilon_1}{l}$ ,  $\frac{R(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)}{l}$  comme étant de cet ordre de grandeur, nous aurons

$$(6) \quad \begin{cases} l\varepsilon_1 = \frac{2}{3\sqrt{2N_1}} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \sqrt{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}, \\ l = \frac{2}{\sqrt{2N_1}} \sqrt{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}; \end{cases}$$

d'où

$$(7) \quad \begin{cases} \varepsilon_0 = 2\varepsilon_1, \\ N_1 l^2 = 6\varepsilon_1. \end{cases}$$

Si l'on désigne par  $\mu N_0$  la réaction de la roulette  $C_0$  et si l'on transporte les forces  $\mu N_1$ ,  $\mu N_0$  parallèlement à elles-mêmes au point  $A_0$ ,



on reconnaît, en continuant l'approximation ci-dessus, qu'elles se réduisent à

- 1° Une force  $Y = \mu(N_0 - N_1)$ , dirigée suivant  $A_0y$ ;
- 2° Une force  $X = -\mu(N_0\varepsilon_0 + N_1\varepsilon_1)$ , dirigée suivant  $A_0x$ ;
- 3° Un couple  $\mu N_1 l = \frac{6\mu\varepsilon_1}{l}$ .

Soient

$S$  le sommet de la portion de la lame comprise entre les roulettes intérieures;

$I_0, I_1$  les intersections de la normale en ce point avec les prolongements de  $a_0 C_0$  et  $a_1 C_1$ ;

$a$  la longueur  $A_0 I_0$  et  $\varphi$  l'angle  $A_0 IS$  qui sont considérés comme des données de la question.

Pour déterminer la forme de la courbe  $a_0 S$ , prenons respectivement pour axes des  $x'$  et des  $y'$  la tangente et la normale en  $S$ .

Les deux groupes de forces  $Y$  et  $X$  se faisant équilibre sur la lame entre les deux roulettes intérieures, on a, en projetant sur  $SI_0$ ,

$$(a) \quad (N_1 - N_0) \cos \varphi = (N_0 \varepsilon_0 + N_1 \varepsilon_1) \sin \varphi,$$

d'où

$$N_0 = N_1 \frac{(1 - \varepsilon_1 \tan \varphi)}{1 + 2 \varepsilon_1 \tan \varphi},$$

$$\frac{Y}{\mu} = -\frac{3 N_1 \varepsilon_1 \tan \varphi}{1 + 2 \varepsilon_1 \tan \varphi} = -\frac{18 \varepsilon_1^2 \tan \varphi}{l^2 (1 + 2 \varepsilon_1 \tan \varphi)},$$

$$\frac{X}{\mu} = -\frac{3 N_1 \varepsilon_1}{1 + 2 \varepsilon_1 \tan \varphi} = -\frac{18 \varepsilon_1^2}{l^2 (1 + 2 \varepsilon_1 \tan \varphi)}.$$

Les composantes des forces  $\mu N_1, \mu N_0$  parallèles aux axes  $Sy', Sx'$ , abstraction faite du facteur  $\mu$ , ont, par suite, pour expressions

$$(8) \quad \begin{cases} Y' = \frac{18 \varepsilon_1^2 (\sin \varphi - \cos \varphi)}{l^2 (1 + 2 \varepsilon_1 \tan \varphi)}, \\ X' = -\frac{18 \varepsilon_1^2}{l^2 [\cos \varphi (1 + 2 \varepsilon_1 \tan \varphi)]}. \end{cases}$$

Si donc nous désignons par  $y'_0$  l'ordonnée du point  $A_0$  et par  $\gamma$  l'angle

que forme la tangente au point  $(x'y')$  avec  $S_0x'$ , nous aurons

$$(9) \quad \frac{dy}{ds} = Y'(a \sin \varphi - x') - X'(y' - y) + \frac{6\varepsilon_1}{l}.$$

On tire de là

$$\frac{d^2y}{ds^2} = X' \sin \gamma - Y' \cos \gamma,$$

et, en multipliant par  $d\gamma$  et intégrant,

$$(10) \quad \frac{1}{2} \frac{d\gamma^2}{ds^2} = -X' \cos \varphi - Y' \sin \varphi + C,$$

$C$  étant une constante que l'on déterminera en exprimant que les équations (9) et (10) donnent la même valeur de  $\frac{ds}{d\gamma}$  pour le point  $S$  ou pour  $x' = 0, y' = 0, \gamma = 0$ ; d'où, en remarquant que  $X', Y'$  sont du second ordre,

$$C = X' + \frac{1}{2} \left( Y' a \sin \varphi - X' y' + \frac{6\varepsilon_1}{l} \right)^2 = X' + 18 \frac{\varepsilon_1^2}{l^2}.$$

L'équation (10) devient, en y remplaçant  $X', Y', C$  par leurs valeurs et désignant par  $\rho$  le rayon de courbure,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{6\varepsilon_1}{l} \left[ 1 + \frac{\sin \gamma (\cos \varphi - \sin \varphi) - \frac{(1 - \cos \gamma)}{\cos \varphi}}{1 + 2\varepsilon_1 \tan \varphi} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour que le profil  $a_0S$  diffère peu d'un arc de cercle, il faut que, entre  $\gamma = 0$  et  $\gamma = \varphi - \varepsilon$  ou  $\gamma = \varphi$ , le second terme entre parenthèses, nul avec  $\gamma$ , reste une petite fraction; en admettant qu'il en soit ainsi, sauf à déterminer ultérieurement les conditions qui doivent être remplies à cet effet, on peut prendre

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{6\varepsilon_1}{l} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\sin \gamma (\cos \varphi - \sin \varphi) - \frac{(1 - \cos \gamma)}{\cos \varphi}}{1 + 2\varepsilon_1 \tan \varphi} \right],$$

d'où

$$(11) \quad \rho = \frac{ds}{d\gamma} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\sin \gamma (\cos \varphi - \sin \varphi) - \frac{(1 - \cos \gamma)}{\cos \varphi}}{1 + 2\varepsilon_1 \tan \varphi} \right].$$

Soit

$$(12) \quad v = \frac{1}{\varphi} \int_0^{\varphi} \rho d\varphi = \frac{l}{6\varepsilon_1} \left[ 1 - \frac{(1 - \cos\varphi)(\cos\varphi - \sin\varphi) - \frac{\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi}}{2\varphi(1 + 2\varepsilon_1 \tan\varphi)} \right]$$

le rayon de courbure moyen; nous aurons

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\rho - v}{v} &= \frac{1}{2(1 + 2\varepsilon_1 \tan\varphi)} \left[ \frac{(1 - \cos\varphi)(\cos\varphi - \sin\varphi)}{\varphi} + \frac{\tan\varphi}{\varphi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\cos\varphi} - \sin\gamma(\cos\varphi - \sin\varphi) + \frac{1 - \cos\gamma}{\cos\varphi} \right]. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$\eta = \sin\gamma(\cos\varphi - \sin\varphi) - \frac{(1 - \cos\gamma)}{\cos\varphi}.$$

Supposons d'abord que  $\varphi$  soit inférieur à 45 degrés; si l'on fait croître  $\gamma$  à partir de zéro,  $\eta$  d'abord nul croîtra, puis décroîtra et s'annulera pour la valeur de  $\gamma$  donnée par l'équation

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \cos\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi).$$

Cette valeur ne correspond à un point de l'arc  $\alpha_0 S$  que si elle est inférieure à  $\varphi - \varepsilon_0$ , ou si l'on veut à  $\varphi$ , ce qui n'a lieu que si  $\varphi$  est au moins égal à 32 degrés environ. Le maximum  $\eta$  correspondra à la valeur de  $\gamma$  donnée par

$$\tan\gamma = \cos\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi),$$

et ne sera admissible que si cette équation donne pour  $\gamma$  une valeur au plus égale à  $\varphi$ , ce qui suppose que ce dernier angle ne soit pas inférieur à 24° 25'. Ce maximum sera

$$\eta' = \frac{1}{\cos\varphi} [\sqrt{1 + \cos^2\varphi(\cos\varphi - \sin\varphi)^2} - 1].$$

Pour de plus grandes valeurs de  $\gamma$ , celle de  $\eta$  deviendra négative, et sa plus grande valeur absolue correspondra à  $\gamma = \varphi$  et sera

$$(14) \quad \sin\varphi(\sin\varphi - \cos\varphi) + \frac{(1 - \cos\varphi)}{\varphi};$$

il est facile de reconnaître que, entre  $\varphi = 24^{\circ} 25'$  et  $\varphi = 45^{\circ}$ , elle est supérieure au maximum  $\eta'$ .

Si  $\varphi < 24^{\circ} 25'$ , la plus grande valeur de  $\eta$  sera donnée par l'expression (14) changée de signe; la même expression donne la plus grande valeur de  $-\eta$  pour  $\varphi > 45^{\circ}$ , limite à partir de laquelle  $\eta$  reste constamment négatif.

Il résulte de cette discussion que la plus grande valeur absolue du rapport (13) correspond à  $\gamma = \varphi$  et qu'il croît avec  $\varphi$ . Cette valeur est

$$\frac{1}{2(1 + 2\varepsilon_1 \tan \varphi)} \left[ (\cos \varphi - \sin \varphi) \left( \frac{1 - \cos \varphi}{\varphi} - \sin \varphi \right) + \frac{\tan \varphi}{\varphi} - 1 \right].$$

En y faisant

$\varphi = 60^{\circ}$ ,	on trouve	$\frac{0,345}{1 + 3,46 \varepsilon_1}$ ,
$\varphi = 50^{\circ}$ ,	"	$\frac{0,209}{1 + 2,38 \varepsilon_1}$ ,
$\varphi = 45^{\circ}$ ,	"	$\frac{0,136}{1 + 2 \varepsilon_1}$ ,
$\varphi = 40^{\circ}$ ,	"	$\frac{0,082}{1 + 1,67 \varepsilon_1}$ ,
$\varphi = 30^{\circ}$ ,	"	$\frac{0,004}{1 + 1,55 \varepsilon_1}$ .

On voit, d'après ce tableau, que pour que l'instrument que nous étudions donne un tracé suffisamment exact, il faut que l'angle  $2\varphi$  des normales aux extrémités de la partie utile de la lame ne dépasse pas 80 degrés, comme nous le supposons dorénavant; mais alors, en raison du degré d'approximation adopté, nous pouvons négliger  $2\varepsilon_1 \tan \varphi$  devant l'unité, et les équations (11) et (12) se réduisent respectivement aux suivantes :

$$(11') \quad \rho = \frac{ds}{d\gamma} = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ \sin \gamma (\cos \varphi - \sin \varphi) - \frac{(1 - \cos \varphi)}{\cos \varphi} \right] \right\},$$

$$(12') \quad \varepsilon = \frac{l}{6\varepsilon_1} \left\{ 1 - \frac{1}{2\varphi} \left[ (1 - \cos \varphi)(\cos \varphi - \sin \varphi) - \frac{\varphi - \sin \varphi}{\cos \varphi} \right] \right\}.$$

Il nous reste maintenant à déterminer la valeur de C correspondant à un angle  $\varphi$  donné.

Nous avons  $dx' = ds \cos \gamma$ ,  $dy' = ds \sin \gamma$ , et en remplaçant  $ds$  par sa valeur donnée par l'équation (11'), puis intégrant entre les limites 0 et  $\gamma$ , on trouve

$$x' = \frac{l}{6\epsilon_1} \left[ \sin \gamma - \frac{\sin \gamma}{2 \cos \varphi} - \frac{(\cos \varphi - \sin \varphi)}{4} \sin^2 \gamma + \frac{\gamma}{4 \cos \varphi} + \frac{\sin 2\gamma}{8} \right],$$

$$y' = \frac{l}{6\epsilon_1} \left[ 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} - \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\cos \varphi} - \frac{1}{4} \sin^2 \gamma - \frac{\gamma}{4} (\cos \varphi - \sin \varphi) + \frac{(\cos \varphi - \sin \varphi)}{8} \sin 2\gamma \right].$$

Il ne faudra pas perdre de vue que dans chacune de ces expressions l'ensemble des termes qui suivent le premier est de l'ordre de  $\eta$ .

Pour le point  $a_0$ , on a, aux termes du second ordre près en  $\epsilon_1$  et  $\eta$ , en désignant par  $x'_0$  l'abscisse du point  $A_0$ ,

$$x' = x'_0, \quad y' = y'_0, \quad \gamma = \varphi - \epsilon_0 = \varphi - 2\epsilon_1;$$

et, par la substitution de ces valeurs, les deux équations précédentes permettront de déterminer  $\epsilon_1$  et  $\gamma_0$ ; mais il nous suffit de considérer seulement la première, qui fait connaître  $\epsilon_1$ , la seule quantité qui entre dans l'expression de  $\rho$ . En négligeant les termes de l'ordre  $\eta\epsilon_1$ , on trouve

$$(15) \quad \epsilon_1 = \frac{\sin \varphi \left( 1 - \frac{1}{2 \cos \varphi} \right) - \left( \frac{\cos \varphi - \sin \varphi}{4} \right) \sin^2 \varphi + \frac{\varphi}{4 \cos \varphi} + \frac{\sin 2\varphi}{8}}{\frac{x'_0}{l} + 2 \cos \varphi}.$$

Soient  $\theta$  l'angle dont on a fait tourner les porte-roulettes, ou l'inclinaison de la droite  $C, C_0$  sur  $Sx'$ ,  $\omega$  l'angle connu que forme  $C, C_0$  avec  $A, A_0$ ; on a

$$\varphi - \omega = 90^\circ - \theta,$$

d'où

$$(16) \quad \varphi = 90^\circ + \omega - \theta.$$

Si  $d$  est la distance connue, à  $Sy'$ , de l'axe de chaque porte-roulette, on aura

$$d = \frac{l}{2} \cos(\theta + \omega) + x'_0,$$

d'où

$$(17) \quad x'_0 = d - \frac{l}{2} \cos(\theta + \omega).$$

Si l'on met les formules (12') et (15) sous la forme

$$(12'') \quad \varepsilon = H \frac{l}{\varepsilon_1}, \quad (15') \quad \varepsilon_1 = \frac{A}{\frac{x'_0}{l} + B},$$

on a

H = 0,1609,	A = 0,1692,	B = 1,969	pour $\varphi = 10^\circ$ ,
0,1581,	0,3326,	1,819	" 20°,
0,1637,	0,4720,	1,733	" 30°,
0,1719,	0,5574,	1,532	" 40°.

A l'aide de ces données et des formules (12''), (15'), (16), (17), il sera facile de construire pour chaque instrument une table donnant les valeurs de  $\varepsilon$  correspondant à des valeurs de  $\theta$  suffisamment rapprochées les unes des autres; l'angle  $\theta$  pourra d'ailleurs être indiqué par un système d'aiguilles et de cadran disposé en conséquence.

2° *Influence du frottement.* — Soient

$p$  le rayon des axes des roulettes ;

$f$  le coefficient du frottement des roulettes sur leurs axes ;

$\delta$  le coefficient du frottement de roulement des roulettes sur la lame ;

$\mu T_0, \mu T_1$  les composantes tangentielles des réactions des roulettes  $C_0$  et  $C_1$  sur la lame.

Nous négligerons les termes de l'ordre  $f\varepsilon_1$  ou  $f\varepsilon_0$ , et nous pourrions aussi supposer que les forces  $\mu T_0, \mu T_1$  sont dirigées suivant la tangente  $A_0 A_1$  commune aux deux roulettes. Les conditions d'équilibre des roulettes donnent

$$(17) \quad T_0 = N_0 k, \quad T_1 = N_1 k,$$

en posant, pour abrégier,  $k = \frac{\delta + fp}{R}$ .

Au degré d'approximation adopté, l'influence des forces  $\mu T_0, \mu T_1$  sur la courbure de la portion  $a_1 a_0$  de la lame est négligeable. Le frottement

de roulement, résultant, comme on le sait, de ce que les points d'application des réactions  $\mu N_0$ ,  $\mu N_1$  sont portées en avant et à la petite distance  $\delta$  de  $a_0$  et  $a_1$ , n'influe pas non plus d'une manière sensible sur la forme de  $a_1 a_0$ , de sorte que les équations (6) et (7) peuvent encore s'appliquer dans les conditions actuelles.

Au lieu de l'équation (a), nous avons la suivante :

$$(N_1 - N_0) \cos \varphi = (N_0 \varepsilon_0 + N_1 \varepsilon_1) \sin \varphi \mp k (N_0 + N_1) \sin \varphi,$$

en prenant le signe  $-$  ou le signe  $+$  selon que l'on tend à augmenter ou à diminuer la courbure de la lame.

Pour fixer les idées, nous considérerons le premier cas; le second s'en déduira en changeant le signe de  $k$ . L'équation précédente donne, aux termes du troisième ordre près en  $\varepsilon_1$ ,  $k$ , en ayant égard aux formules (7),

$$N_0 = \frac{6\varepsilon_1}{l^2} [1 - (3\varepsilon_1 - 2k) \tan \varphi],$$

et l'on voit que l'on peut prendre  $T_0 = T_1 = \frac{6\varepsilon_1 k}{l^2}$ .

Il résulte de là que la déformation de la lame  $a_0 S$ , due au frottement, est produite par les forces  $12 \frac{\varepsilon_1 k \mu}{l^2} \tan \varphi$ ,  $12 \frac{\varepsilon_1 k \mu}{l^2}$ , respectivement dirigées suivant  $C_0 a_0$  ou  $C_0 A_0$  et  $A_0 A_1$ , en négligeant le frottement de roulement qui ne peut pas avoir une influence sensible sur la forme de la courbe.

Le moment des forces précédentes par rapport à un point quelconque de  $a_0 S$  peut être évalué, en continuant l'approximation adoptée comme si cet arc appartenait au cercle de rayon  $r$ ; de sorte que, si l'on appelle  $\rho'$  le rayon de courbure au point ci-dessus, en réservant la lettre  $\rho$  pour désigner le rayon de courbure au même point dans le cas où l'on néglige le frottement, on a

$$\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} = 12 \varepsilon_1 k \frac{r}{l^2} \{ -\sin(\varphi - \theta) \tan \varphi + [1 - \cos(\varphi - \theta)] \},$$

d'où

$$\rho' - \rho = 12 \varepsilon_1 k \frac{r}{l^2} \rho \rho' \{ \sin(\varphi - \theta) \tan \varphi - [1 - \cos(\varphi - \theta)] \},$$

ou encore, en remplaçant  $\rho\rho'$  par  $v^2$ ,

$$\rho' - \rho = 12 \varepsilon k \frac{v^2}{l^2} \{ \sin(\varphi - \theta) \operatorname{tang} \varphi - [1 - \cos(\varphi - \theta)] \}.$$

Si nous appelons  $v'$  la valeur moyenne de  $\rho'$  ou  $\frac{1}{\varphi} \int_0^\varphi \rho' d\varphi$ , l'équation précédente donne par l'intégration

$$v' - v = 12 \frac{\varepsilon k}{\varphi} \frac{r^2}{l^2} (\operatorname{tang} \varphi - \varphi),$$

ou, en vertu des formules (12'') et (15'),

$$\frac{v' - v}{v} = kL \left( \frac{x_0}{l} + B \right),$$

en posant, pour abrégier,  $L = 12 \frac{\operatorname{tang} \varphi - \varphi}{A \varphi} H^2$ .

Si l'on fait le calcul on trouve que l'on a

L = 0,0201	pour	$\varphi = 10^\circ$ ,
0,0391	"	20°,
0,0710	"	30°,
0,1292	"	40°.

Or, tout en satisfaisant à des conditions convenables de solidité de l'instrument, on peut donner à  $p$  une valeur telle que  $k$  soit au plus égal à  $\frac{1}{200}$ ; et alors  $\frac{v' - v}{v}$ , tout en croissant avec la courbure, restera toujours une petite fraction dans les limites de  $\varphi$  que nous avons admises; en d'autres termes, le frottement n'a pas une influence sensible sur la forme de la lame, et c'est ce que nous nous proposons d'établir.



---

RECHERCHES  
SUR  
LES ALTÉRATIONS SPONTANÉES DES ŒUFS,

PAR M. ULYSSE GAYON,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, AGRÉGÉ DES SCIENCES PHYSIQUES.

---

INTRODUCTION.

Lorsqu'on abandonne à eux-mêmes des œufs naturels, c'est-à-dire tels qu'ils ont été pondus, sans qu'aucune préparation ayant pour but de les conserver ait modifié leur surface ou leur contenu, et qu'on les laisse à l'air libre, soumis à l'influence de la température, de la pression et de l'état hygrométrique, on ne tarde pas à constater qu'un certain nombre de ces œufs se sont altérés (<sup>1</sup>). Ces œufs altérés sont devenus impropres à l'alimentation et ont éprouvé des modifications profondes qui ont transformé complètement leur contenu dans sa couleur, son odeur, sa saveur, sa composition chimique.

Étudier ces diverses altérations, toutes *spontanées* en apparence, en rechercher les véritables causes, tel est le but que je me suis proposé dans le présent travail.

Mes observations ont porté jusqu'ici exclusivement sur les œufs d'oiseaux.

Les recherches que je vais exposer ont été faites à l'École Normale, dans le laboratoire de Chimie physiologique, dirigé par M. Pasteur. Je suis heureux de pouvoir remercier publiquement mon illustre

---

(<sup>1</sup>) Les autres œufs ne sont point restés *frais*; mais ils n'ont subi qu'une modification légère, sensible seulement au goût; ils ne sont point pour cela impropres à l'alimentation. On dit dans ce cas qu'ils sont *vieux*. L'étude du vieillissement des œufs sera l'objet d'un Mémoire spécial.

maitre des savants conseils qu'il n'a cessé de me donner avec la plus grande bienveillance.

Les principales altérations que présentent les œufs sont produites, soit par la putréfaction, soit par le développement de moisissures.

Une épreuve d'une grande simplicité permet de savoir si un œuf est sain ou malade, et de reconnaître, sans l'ouvrir, la nature et le degré de son altération, quand celle-ci existe. Cette épreuve est ce qu'on appelle le *mirage*.

Le mirage consiste à regarder une lumière à travers un œuf. On a imaginé divers appareils pour rendre le mirage des œufs plus sûr et plus expéditif (1); mais, dans la pratique, après les avoir rejetés tous successivement, parce qu'ils étaient coûteux et incommodes, on s'est définitivement arrêté au mode suivant. L'observateur se place avec une bougie dans une chambre noire; il saisit l'œuf aux deux extrémités de son axe et l'interpose entre l'œil et la bougie. L'opération est plus rapide, et dans une certaine mesure plus facile, si l'on mire deux œufs à la fois, en rapprochant leurs coques jusqu'au contact; le contenu se trouve alors mieux illuminé (2).

(1) Dans son *Mémoire sur la production artificielle des monstruosité dans l'espèce de la poule*, M. C. Dareste décrit un de ces appareils. (*Ann. des Sciences naturelles, Zoologie*, 4<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 245; 1862.)

(2) Le mirage ainsi pratiqué devient très-expéditif entre des mains exercées. On comprendra l'importance considérable de cette opération et la nécessité de sa rapidité, si l'on remarque que tous les œufs qui arrivent à Paris, et qui sont destinés à l'alimentation, sont comptés, mesurés et mirés chaque jour avant d'être livrés aux marchands. Des agents spéciaux font ce travail dans les caves des Halles centrales et séparent : 1<sup>o</sup> les œufs dont le diamètre est supérieur ou inférieur à une valeur déterminée; 2<sup>o</sup> les œufs sains, les œufs pourris et les œufs tachés.

Chaque année les apports en œufs, à la vente en gros, sont considérables. Voici, par exemple, pour l'année 1872, des renseignements officiels que je dois à l'obligeance de M. le Préfet de police.

*Apport total : 231 193 525, répartis comme il suit :*

Janvier.....	14 040 670	Juillet.....	17 073 385
Février.....	24 193 870	Août.....	17 098 545
Mars.....	35 902 070	Septembre.....	13 407 065
Avril.....	31 053 065	Octobre.....	11 939 115
Mai.....	25 181 520	Novembre.....	11 322 480
Juin.....	17 992 750	Décembre.....	11 988 990

Le nombre des œufs tachés, pour la même année, s'est élevé à 3 467 880, et celui des œufs pourris à 564 070.

Dans ces conditions, un œuf complètement sain et frais apparaît transparent et teinté en rose clair, soit uniformément, soit avec un ton qui se fonce vers le centre. Un œuf un peu vieux, mais sain, présente un ton plus rouge, un peu marbré, limité vers le gros bout à une couleur grise, uniforme, qui correspond à la chambre à air, et dont l'étendue augmente avec l'âge de l'œuf. Les œufs pourris sont complètement opaques. Ce caractère leur est commun avec les œufs couvés; mais ceux-ci se distinguent des premiers en ce que leur chambre à air occupe un grand espace, d'où il résulte qu'au mirage la région opaque se termine brusquement à une zone grise et transparente. Enfin, lorsqu'un œuf renferme des moisissures, on aperçoit, au milieu d'une aire teintée de rose, une tache de diamètre variable, foncée, noire, qui tantôt se déplace dans l'œuf, quand on le retourne, tantôt, et c'est le cas le plus fréquent, paraît adhérente à la coque ou terminée à la chambre à air. Cette apparence justifie l'expression que l'on applique, dans le commerce et dans la ferme, aux œufs moisissés : on dit en effet qu'ils sont *tachés* ou qu'ils ont *la tache*.

L'application du mirage à des recherches scientifiques peut être d'une grande utilité. Ainsi M. C. Dareste a pu, par ce moyen, suivre à travers la coque les premiers développements de l'embryon, reconnaître ses mouvements et constater son état de vie ou de mort (1). Rien n'est plus commode pour observer la position et la grandeur de la chambre à air; avec assez d'habitude, on peut même distinguer les œufs doubles et les œufs triples, ceux dans lesquels sont renfermés deux ou trois vitellus. L'usage de ce procédé m'a permis de savoir chaque jour l'état d'altération des œufs que j'avais mis en expérience, et de ne les ouvrir qu'au moment opportun.

---

(1) C. DARESTE, Mémoire cité, p. 246.

## CHAPITRE I.

## DE LA PUTRÉFACTION DANS LES ŒUFS.

I. — *Historique.*

La putréfaction est une décomposition des matières animales ou végétales qui se produit dans certaines conditions de chaleur et d'humidité, avec dégagement de gaz fétides. Les œufs sont éminemment aptes à subir cette altération profonde, cette fermentation putride.

Il n'est personne qui n'ait observé des œufs pourris; tout le monde connaît l'odeur repoussante et malsaine qu'ils exhalent. Bien que le phénomène de la putréfaction des œufs soit de tous les temps, il ne paraît pas qu'avant Réaumur aucun auteur se soit préoccupé de l'étudier.

Parmi des œufs mis à couvrir dans des fours de fumier pendant quelques jours, « il y en avait, dit Réaumur, qui y répandaient l'odeur la plus détestable, ayant été brisés, par la puante matière qui avait fermenté dans leur intérieur, ou ayant la surface de leur coque couverte d'une liqueur d'une odeur aussi infecte qui avait transsudé; d'autres œufs dont la coque n'était ni fêlée, ni mouillée, donnaient l'odeur la plus insupportable, dès qu'ils avaient été cassés. Parmi ces œufs si corrompus, j'en trouvais d'autres qui, après avoir été cassés, non-seulement ne sentaient pas mauvais, mais qui n'étaient altérés que comme le sont les œufs vieux que l'on mange journellement, et qui aussi étaient très-mangeables ('). » L'auteur pense que les œufs qui sont restés sains dans ce cas étaient inféconds.

Dans des œufs où les embryons, par suite d'un arrêt de développement, étaient restés morts pendant quelques jours, Réaumur constate, non sans étonnement, que plusieurs de ces embryons sont inaltérés. « Il est très à remarquer, dit-il, qu'entre les œufs dans lesquels le poulet a péri, les uns répandent l'odeur la plus insupportable, souvent

---

(') RÉAUMUR, *Art de faire éclore et d'élever en toutes saisons des oiseaux domestiques*, 2<sup>e</sup> édition, t. II, p. 288; 1751.

avant que d'avoir été cassés, ou au moins après l'avoir été, et les autres, après avoir été cassés, ne sentent point mauvais (¹). »

L'auteur cherche l'explication de ce fait, et, après en avoir tenté plusieurs qui lui paraissent peu satisfaisantes, il s'arrête enfin à celle-ci :

« Le poulet mort dans l'œuf s'y trouve embaumé d'une manière bien supérieure à celles qui ont été employées jusqu'ici, sans en excepter celles des Égyptiens, pour empêcher les corps des animaux et ceux des hommes d'être détruits par la pourriture; au moment où le poulet perd la vie, il se trouve enduit de toutes parts d'un baume sans odeur aromatique, mais plus propre à le défendre contre la corruption que les baumes les plus odorants et que tous les aromates; ce baume est le blanc de l'œuf dont tout l'extérieur du poulet est mouillé : ce blanc de l'œuf, qui était devenu fluide, est revenu à s'épaissir, et s'épaissit de jour en jour sur le corps du poulet mort; il se laisse pénétrer pendant quelque temps par les parties aqueuses et par les parties volatiles qui tendent à s'échapper des chairs, mais il ferme tout passage à cet air extérieur qui serait nécessaire pour opérer la fermentation; ainsi peu à peu les chairs et le vernis dont elles sont enduites se dessèchent, le poulet perd de son volume sans se corrompre, et parvient à un état où il est sensiblement inaltérable pour toujours (²). »

En 1822, Geoffroy Saint-Hilaire, recherchant si les œufs fécondés ne pourraient pas subir dans l'oviducte de la poule un commencement d'incubation, n'obtint que des œufs plus ou moins décomposés. Il cite, par exemple, le cas d'un œuf qui s'était entouré d'une forte couche de blanc; après un séjour de vingt-huit jours dans l'oviducte, ce blanc exhalait une odeur fétide, tandis que l'œuf intérieur était parfaitement sain (³). Je reviendrai plus loin sur cette observation.

Dans leurs expériences sur les changements de poids que les œufs éprouvent pendant l'incubation, MM. Prévost et Dumas citent trois œufs sur douze, non fécondés, qui, après être restés vingt jours à la tempé-

(¹) RÉAUMUR, *Art de faire éclore et d'élever en toutes saisons des oiseaux domestiques*, t. I, p. 257.

(²) RÉAUMUR, *Art de faire éclore et d'élever en toutes saisons des oiseaux domestiques*, t. I, p. 260.

(³) GEOFFROY SAINT-HILAIRE, *Sur les organes sexuels et sur les produits de la génération des poules dont on a retardé la ponte* (*Mémoires du Muséum*, t. IX, p. 14; 1822).

rature de l'incubation, c'est-à-dire de 38 à 40 degrés, avaient une odeur très-putride, tandis que les neuf autres n'avaient, au contraire, presque aucune odeur (¹).

Sur neuf œufs mis à couvrir sous une poule, Sacc en trouve quatre qui n'éclosent pas, et parmi ceux-là un est complètement pourri, un contient un petit poulet bien conformé, deux contiennent des poulets desséchés, mais qui n'avaient éprouvé qu'un commencement de développement (²).

Dans une série de recherches sur le développement du poulet et sur les œufs à double germe, M. C. Daresté a rencontré souvent des embryons morts depuis longtemps dans leurs coques « et qui étaient dans un état très-avancé de décomposition et de putréfaction » (³).

L'ensemble des observations précédentes montre que, dans des conditions extérieures semblables, d'une part, certains œufs pourrissent et d'autres restent sains; d'autre part, des embryons de poulets, morts dans leurs coques, peuvent se décomposer avec tous les caractères d'une putréfaction repoussante, ou se conserver sans dégager la moindre odeur fétide.

Ces résultats ont été infirmés, dans ces dernières années, par des recherches importantes que M. Donné a faites à Montpellier sur les altérations spontanées des œufs.

Si l'on prend des œufs naturels, non agités, et qu'on les abandonne à eux-mêmes, ils « restent, dit M. Donné, des semaines et des mois, même pendant les grandes chaleurs de l'été, sans subir aucune altération putride. L'œuf n'exhale aucune odeur, et rien, absolument rien de vivant, soit de la vie végétale, soit de la vie animale, ne s'est produit, ni à la surface de la membrane, ni dans l'intérieur de la matière; pas traces d'infusoires ni de végétaux microscopiques (⁴). » M. Donné

(¹) PRÉVOST et DUMAS, *Ann. des Sciences naturelles*, t. IV, p. 51; 1824.

(²) SACC, *Sur les modifications de l'œuf pendant l'incubation* (*Ann. des Sciences naturelles*, 3<sup>e</sup> série, t. VIII, p. 171; 1847).

(³) C. DARESTÉ, *Recherches sur l'influence qu'exerce sur le développement du poulet l'application totale d'un vernis ou d'un enduit oléagineux sur la coquille de l'œuf* (*Ann. des Sciences naturelles. Zoologie*, 4<sup>e</sup> série, t. XV, p. 5; 1861).

*Mémoire sur l'histoire physiologique des œufs à double germe* (*Ann. des Sciences naturelles. Zoologie*, 4<sup>e</sup> série, t. XVII, p. 31; 1862).

(⁴) DONNÉ, *Expériences sur l'altération spontanée des œufs* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LVII, p. 450; 1863).

trouve au contraire que des œufs ouverts et placés dans les conditions précédentes sont envahis par les moisissures et pourrissent rapidement avec accompagnement d'animalcules microscopiques.

« Cette matière de l'œuf qui ne s'altère pas, dans le sens de la putréfaction, tant qu'on la laisse dans son état normal, subit promptement l'action de la décomposition si, par des secousses, on détruit sa structure physique, c'est-à-dire si l'on rompt la trame, les cellules des corps albumineux, et qu'on opère ainsi le mélange du jaune et du blanc. Alors, même sans accès de l'air extérieur, en se garantissant même de cette intervention par un surcroît de précautions, telles qu'une couche de collodion répandue à la surface de l'œuf, on voit tous les phénomènes de décomposition apparaître, après un temps plus ou moins long, suivant la température, mais toujours en moins d'un mois; tous les phénomènes de décomposition, excepté toutefois la production d'êtres vivants de l'un ou de l'autre règne, car, quel que soit le degré de pourriture auquel on laisse arriver l'œuf, on n'y peut découvrir la moindre trace d'animalcules ni de végétaux microscopiques; la matière de l'œuf est trouble, d'une couleur livide; elle exhale une odeur fétide au moment où l'on brise la coque, mais rien, absolument rien, ne bouge dans cette matière; rien ne vit, et l'examen microscopique le plus attentif et le plus répété n'y fait pas découvrir le moindre être organisé ou vivant. Une fois au contact de l'air extérieur, la décomposition marche rapidement avec son cortège d'infusoires et d'êtres microscopiques (1). »

« Ce qui se passe dans les œufs contenant un embryon développé par l'incubation jusqu'au moment de l'éclosion est tout à fait analogue à ce que l'on observe dans les œufs ordinaires abandonnés à eux-mêmes. Les œufs, avec un embryon de huit jours, de quinze jours et de trois semaines, exposés pendant un mois à toutes les variations de la température extérieure, subissent une altération, une décomposition qui peut aller jusqu'à la putréfaction, jusqu'à répandre une odeur putride, avec teinte livide des liquides, sans donner naissance à aucun être organisé, si simple que ce soit, du règne végétal ou du règne animal, tant que l'œuf n'a pas été ouvert et que la substance intérieure n'a pu

---

(1) DONNÉ, *loc. cit.*, p. 451.

être mise en communication avec le grand réservoir où pullulent les germes que M. Pasteur a si bien démontrés (1). »

Ainsi, d'après ces observations, les œufs non agités se conserveraient sans fermenter ni pourrir; les œufs brouillés par l'agitation, ainsi que les embryons de poulets tués dans leurs coques, s'altéreraient toujours sans jamais donner lieu au développement d'êtres microscopiques du règne animal ou du règne végétal.

De l'absence d'organismes dans les œufs gâtés M. Donné avait conclu, conformément à des expériences antérieures de M. Pasteur, que les matières animales les plus propres à l'organisation ne peuvent donner lieu à des générations spontanées de moisissures et de vibrions.

Un peu plus tard, M. Donné publia une série d'expériences faites avec des œufs ouverts à une extrémité et placés ensuite dans des conditions variées (2). Elles avaient pour but de rechercher si une quantité d'air et d'eau plus grande que celle qui existe à l'intérieur d'un œuf entier ne pourrait pas déterminer la transformation du jaune et du blanc en organismes microscopiques. Les expériences ayant donné des moisissures et des vibrions, M. Donné crut qu'on pouvait présenter ce résultat comme un puissant argument en faveur de l'hétérogénie; mais M. Donné n'avait pas évité de nombreuses causes d'erreur que M. Pasteur indiqua

(1) DONNÉ, *Recherches sur la putréfaction spontanée des œufs couvés, pour servir à l'histoire des générations dites spontanées* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LVIII, p. 952; 1864).

(2) *Première expérience.* — « Des œufs sont lavés avec soin, bien essuyés et aussitôt enveloppés d'une épaisse couche de coton cardé sortant d'une étuve chauffée à 150 degrés. Le coton est bien collé tout autour de l'œuf, afin qu'il ne se déplace pas. Un stylet fin, préalablement rougi au feu, afin de détruire les germes qui pourraient y adhérer, est introduit obliquement sous le coton, et le sommet de l'œuf est percé d'un trou. Tous les œufs, ainsi préparés, sont rangés debout dans une terrine remplie de cendres retirées toutes chaudes du foyer; le tout est recouvert d'une cloche de verre. »

A la suite de cette opération, il pousse des moisissures à la surface de la matière des œufs; mais il ne se développe pas d'animalcules infusoires, parce qu'il n'y a pas d'eau.

« Il est si vrai, ajoute M. Donné, que c'est l'eau qui manque, que si l'on en ajoute un peu dans l'œuf, on voit en vingt-quatre heures les monades et les vibrions se développer par myriades. Pour éviter toute intervention de germes du dehors, je verse dans l'œuf moisi de l'eau bouillante et je recouvre aussitôt l'ouverture avec un tampon de coton ou un verre de montre. Le lendemain, ou le surlendemain au plus tard, la matière fourmille de vibrions. » (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXIII, p. 301; 1866.)

*Deuxième expérience.* — « Des œufs, ouverts à une de leurs extrémités et dont j'avais laissé écouler une petite portion de la matière intérieure pour faire un peu de vide, ont été



alors <sup>(1)</sup>, et qui provenaient soit de la manipulation à l'air extérieur, soit de l'insuffisance de la température à laquelle étaient portés les œufs.

De nouvelles expériences, suggérées par M. Balard, écartèrent ces causes d'erreurs et confirmèrent complètement les premières recherches de M. Donné; par différence de pression, de l'air et de l'eau étaient introduits à l'intérieur des œufs sans briser la coque.

« Des œufs ainsi traités, dit M. Donné, se décomposent et pourrissent avec une grande facilité; abandonnés à eux-mêmes, soit dans une étuve à 30 ou 35 degrés, soit à la température du mois de juillet, à Montpellier, avec l'influence de la lumière dont l'action est peut-être nécessaire à la vie, ils exhalent au bout de huit ou quinze jours, quelquefois trois semaines, selon les circonstances, une odeur fétide; souvent même la matière intérieure suinte à travers la coquille..... Et bien, dans aucun cas, et quel que fût le degré de putréfaction auquel l'œuf fût arrivé, putréfaction qui allait souvent jusqu'à répandre l'odeur la plus fétide; dans aucun cas, dis-je, cette matière décomposée n'a offert la moindre trace d'êtres organisés du règne végétal ou du règne animal; pas la plus petite moisissure, pas une seule monade, ou un seul vibrion; rien enfin d'organisé, d'animé ni de vivant, ne s'est montré au sein de la matière examinée avec le plus grand soin au microscope. »

M. Donné conclut : \*

« Mes dernières expériences sont une confirmation, que je puis dire éclatante, des résultats obtenus par M. Pasteur et qui, jusqu'à présent, repoussent la théorie de l'hétérogénie <sup>(2)</sup>. »

placés debout au fond d'un vase grand comme un seau, bien calé par des fragments de marbre concassé; de l'eau bouillante a été versée par-dessus jusqu'à ce que le vase fût rempli : le vase a été soigneusement couvert et le tout abandonné à la température de mon cabinet, qui peut varier de 15 à 20 degrés. » (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXIII, p. 1072; 1866.)

... « La matière recueillie dans l'intérieur des œufs présente une multitude de vibrions doués d'une grande agilité. »

*Troisième expérience.* — « Expérience avec des œufs que l'on brise, dans lesquels on verse de l'eau distillée bouillante, et que l'on ferme hermétiquement avec de la cire. » (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXIV, p. 47; 1867.)

Au bout de cinq jours, on enlève la cire, et l'on trouve des vibrions.

<sup>(1)</sup> PASTEUR, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXIII, p. 304 et 1073; 1866.

<sup>(2)</sup> DONNÉ, *Note sur la putréfaction des œufs et sur les produits organisés qui en résultent* (Mémoire lu). (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXV, p. 602; 1867.)

On voit par ce qui précède que les observations de M. Donné sont en contradiction avec celles qu'ont rapportées avant lui Réaumur et d'autres savants. En outre, elles tendent à rendre compte de la putréfaction dans les œufs par le simple jeu de forces physiques et chimiques, et constituent ainsi une exception inattendue à la grande loi de corrélation qui résulte des travaux de M. Pasteur sur les fermentations et qui s'applique à la putréfaction ordinaire. M. Pasteur a montré, en effet, dès 1863, que la destruction de la matière organisée est un acte corrélatif du développement et de la multiplication d'êtres microscopiques de la famille des vibrioniens (1). Les résultats de M. Donné intéressaient donc un point de doctrine de la plus haute importance ; aussi était-il nécessaire de faire de nouvelles recherches dans le but de les contrôler : ce sont ces recherches que j'ai tentées.

M. Béchamp, qui n'avait pas vu non plus d'organismes dans les œufs pourris, avait, il est vrai, donné des observations de M. Donné une explication qui était en quelque sorte intermédiaire entre la théorie physiologique de M. Pasteur et une explication purement physico-chimique. On sait qu'il existe, dans la plus grande partie des liquides et des tissus des animaux et des plantes, des granulations moléculaires très-ténues et animées du mouvement brownien. M. Béchamp, qui appelle ces granulations des *microzymas*, suppose que celles qui existent dans l'œuf, et particulièrement dans le jaune, agissent à la façon des véritables ferments figurés pour provoquer la putréfaction dans les œufs (2).

J'espère montrer que les observations de M. Donné sont inexactes, que l'hypothèse de M. Béchamp est inadmissible, et que la putréfaction des œufs, loin d'être une exception aux conclusions qui décou-

---

(1) PASTEUR, *Recherches sur la putréfaction* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LVI, p. 734).

(2) M. Béchamp définit ses *microzymas* « des granulations moléculaires mobiles, ayant une existence indépendante, et, comme le nom l'indique, de la nature et de la fonction des microphytes ferments. » (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVI, p. 1143.)

« Dans l'œuf, dit ailleurs M. Béchamp, on ne découvre, en fait d'éléments figurés, que des *microzymas* ; dans certaines circonstances, ils y fonctionnent comme ils le font hors de l'œuf, sur le sucre et sur la fécule ; ils sont donc de l'ordre des ferments figurés. » (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXV, p. 962.)

Pour M. Béchamp, ce sont ces *microzymas* qui provoquent l'altération des œufs : « L'œuf

lent des travaux de M. Pasteur sur les fermentations, les confirme au contraire d'une manière remarquable.

II. — *Caractères généraux de la putréfaction dans les œufs.*

1. *Caractères physiques.* — La putréfaction des œufs résultant d'un ensemble de phénomènes physiques, chimiques et physiologiques, nous allons l'étudier successivement à ces divers points de vue.

Les caractères physiques changent avec l'état des œufs, selon qu'ils sont brouillés ou non, et aussi avec la période de l'altération.

Considérons d'abord l'œuf qui n'a subi aucune agitation, dans lequel, par conséquent, le blanc et le jaune sont parfaitement distincts. Si l'on abandonne un pareil œuf à lui-même, il perd peu à peu de son poids (<sup>1</sup>);

porte en lui-même, normalement, la cause de cette fermentation, et c'est surtout dans le jaune que réside cette cause. » Pour ne laisser aucun doute sur cette cause, M. Béchamp ajoute à la fin de son travail : « J'aurais pu intituler cette Note : *Des microzymas de l'œuf considérés comme organismes producteurs d'alcool et d'acide acétique.* » (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXVII, p. 523.)

Dans une Lettre adressée à M. Dumas, M. Béchamp avait dit, en 1865 : « Quant à la putréfaction des œufs dans les expériences de M. Donné, et la putréfaction de la viande, elles reconnaissent une autre cause que la naissance d'organismes ferments. (*Annales de Chimie et de Physique*, 4<sup>e</sup> série, t. VI, p. 251.)

(<sup>1</sup>) Voici deux tableaux donnant les pertes de poids de cinq en cinq jours, pour des œufs sains, agités ou non, à la température de 25 à 30 degrés.

*OEUFS non agités.*

N <sup>os</sup> d'ordre.	Poids initial.	Perte dans la			
		1 <sup>re</sup> période.	2 <sup>e</sup> période.	3 <sup>e</sup> période.	4 <sup>e</sup> période.
	gr	gr	gr	gr	gr
1	55,11	1,30	1,26	1,28	1,26
2	55,31	1,23	1,10	1,08	1,08
3	55,66	1,39	1,48	1,34	1,30
4	58,31	1,33	1,26	1,21	1,11
5	57,30	1,03	1,02	1,05	1,00
6	55,80	1,11	1,02	1,01	0,93
7	52,10	1,01	1,07	1,07	1,00
8	52,12	1,48	1,47	1,35	1,30
9	53,32	1,12	1,15	1,11	1,09
10	53,71	1,12	1,12	1,02	1,05
Totaux.....	548,74	12,12	11,95	11,52	11,12
Moyennes.....	54,87	1,21	1,19	1,15	1,11
» pour 1 jour..	»	0,242	0,238	0,230	0,222

(Voir la suite de la note à la page suivante.)

sa chambre à air augmente chaque jour et, lorsqu'il ne doit pas pourrir, on retrouve, après un temps quelconque, ses éléments à très-peu près dans le même état qu'à l'origine. L'albumine seule, qui a perdu une certaine quantité d'eau par évaporation et par la combustion (1) qui résulte de la respiration lente de l'œuf, a changé de consistance; l'odeur est aussi un peu modifiée : elle caractérise les œufs *vieux*.

Si, au contraire, l'œuf doit pourrir, son altération commence à une époque variable après la ponte. Elle dépend en effet de l'humidité de l'air, et surtout de la température. On peut dire qu'en moyenne, à la température de l'été, et par un temps sec, la putréfaction est sensible au bout de quinze jours, et très-avancée au bout d'un mois.

C'est à l'odeur qu'on reconnaît vulgairement un œuf pourri; mais ce caractère est incomplet; car l'odeur ne se développe que plusieurs jours

*OŒufs agités.*

Ces œufs ont été mis en expérience en même temps et dans les mêmes conditions que les œufs non agités précédents.

Nos d'ordre.	Poids initial.	Perte dans la			
		1 <sup>re</sup> période.	2 <sup>e</sup> période.	3 <sup>e</sup> période.	4 <sup>e</sup> période.
1	57,86	1,56	1,64	1,52	1,40
2	56,78	2,52	2,38	2,13	1,92
3	55,86	1,78	1,70	1,56	1,22
4	55,62	1,72	1,67	1,65	1,32
5	58,20	1,35	1,30	1,14	1,07
6	60,02	1,76	1,75	1,67	1,54
7	54,76	1,52	1,47	1,38	1,26
8	53,13	1,54	1,50	1,46	1,28
9	51,02	1,32	1,26	1,16	1,05
10	50,53	1,07	1,10	1,05	0,96
Totaux .....	553,78	16,14	15,77	14,72	13,02
Moyennes .....	55,38	1,61	1,58	1,47	1,30
» pour 1 jour..	»	0,322	0,316	0,294	0,260

Ainsi, la perte de poids diminue en général à mesure que le blanc se concentre; elle est très-notablement plus grande avec les œufs agités qu'avec les œufs non agités.

(1) La combustion des matières de l'œuf par respiration lente est prouvée par la production d'acide carbonique en dehors de toute putréfaction, lorsque l'œuf est abandonné à l'air ordinaire.

Cette combustion, et la production d'acide carbonique qui en est la conséquence, peuvent

après le véritable commencement de la putréfaction. Le premier phénomène sensible est une coloration verdâtre, qui se manifeste en un ou plusieurs points, soit sur les membranes de l'œuf, soit à l'intérieur même du blanc. La couleur verte s'étend peu à peu et gagne bientôt toute l'albumine. En même temps, le blanc devient plus fluide et les couches épaisses qui enveloppent le vitellus se confondent avec les couches périphériques moins denses. Le vitellus nage donc dans un beau liquide vert, dichroïque, homogène et limpide, sans avoir encore subi lui-même aucune modification apparente. La réaction de ce liquide est alcaline, comme le blanc d'un œuf frais ; l'odeur putride commence à peine à devenir appréciable. Les chalazes ne tardent pas à se rompre, et alors le jaune devenu libre obéit aux lois des corps plongés dans les liquides. Plus léger que le blanc (1), il se porte à la partie la plus élevée de l'œuf et se déplace quand on retourne celui-ci dans tous les sens. Quand on laisse l'œuf immobile pendant quelques jours, le vitellus contracte bientôt une adhérence avec le point de la membrane avec

même se produire sans l'air extérieur, aux dépens des seuls éléments de l'œuf. Je citerai une expérience :

Le 13 mai 1873, j'ai mis dans une éprouvette pleine de mercure un œuf de poule fécondé, au moment même où il venait d'être pondu. L'éprouvette, d'abord placée à 25 degrés dans une étuve, a été plus tard abandonnée à la température extérieure, jusqu'au 30 septembre 1874, jour où j'ai mis fin à l'expérience. Dans ce long intervalle de seize mois et demi, il s'est produit un léger abaissement de niveau du mercure, par suite de la formation d'une certaine quantité de gaz ; mais depuis longtemps le niveau restait stationnaire.

Le gaz formé a un volume de 4<sup>cc</sup>, 2 ; voici sa composition :

	<sup>cc</sup>	En centièmes.
Acide carbonique.....	3,5	83,3
Azote.....	0,7	16,7
	<u>4,2</u>	<u>100,0</u>

L'œuf n'est point pourri ; seulement le blanc est un peu trouble et plus fluide que dans un œuf frais ; le jaune s'étale aussi un peu plus facilement ; l'odeur est fortement alcoolique ; le sucre a complètement disparu ; pas d'organismes, ni à la surface extérieure de la coque, ni à l'intérieur de l'œuf.

Il est remarquable que la disparition du sucre soit liée à la production d'alcool et d'acide carbonique ; il semble donc qu'il y ait eu dans cet œuf une véritable fermentation alcoolique, sans formation d'éléments figurés, absolument comme dans les remarquables expériences de MM. Lechartier et Bellamy, confirmées par M. Pasteur, sur les fruits plongés dans une atmosphère privée d'oxygène.

(1) Voici, d'après MM. A. Baudrimont et Martin Saint-Ange (*Annales de Chimie et de*

lequel il est en contact. On trouve de ces adhérences en un point quelconque, aussi bien sur la membrane tendue qui forme comme le plancher de la chambre à air (1) que sur les membranes qui tapissent la coquille : elles ne dépendent que de la position antérieure de l'œuf. Les adhérences dont je parle ne doivent pas être confondues avec celles que l'on observe quand l'œuf est moisi et qui sont beaucoup plus fortes et plus étendues.

Dans une seconde période de la putréfaction, la coloration verdâtre du blanc disparaît peu à peu, et fait place à une teinte jaune; la réaction alcaline s'affaiblit insensiblement, et devient neutre ou très-légerement acide; en même temps, le jaune se ramollit; la membrane très-mince qui l'enveloppe en entier perd de sa résistance et se déchire sous le moindre effort : tandis qu'on a quelque peine à écraser le vitellus d'un œuf de cane sain, il suffit au contraire de le déplacer légèrement pour qu'il s'étale, si la putréfaction est déclarée depuis quelques jours. L'odeur putride est devenue très-sensible. Dans ces circonstances, si l'on perce la coque d'un petit trou pour faire écouler l'albumine, on voit bientôt le jaune couler à son tour.

Enfin, dans une dernière période, et lorsque le vitellus ne s'est pas rompu, sa surface prend une couleur jaune citron; ses éléments se désagrègent et se répandent en partie dans le blanc qui cesse d'être transparent et devient trouble et sale. Alors l'odeur putride est très-accen-

---

*Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. XXI, p. 250; 1847), le poids spécifique du blanc et du jaune dans les œufs de poule :

Albumen externe.....	de 1,0399 à 1,0421
Albumen interne.....	de 1,0421 à 1,0432
Vitellus entier.....	de 1,0288 à 1,0299
Vitellus, vers la cicatricule.....	de 1,0266 à 1,0277
Vitellus, du côté opposé.....	de 1,0310 à 1,0321

Ces derniers nombres expliquent comment la cicatricule se trouve toujours au point culminant du vitellus, quelle que soit la position que l'on donne à l'œuf.

(1) La chambre à air de l'œuf est généralement au gros bout. On sait qu'elle est formée par la membrane interne de la coque qui se sépare de la membrane externe avec laquelle elle était primitivement en contact. Si donc on place un œuf verticalement, le gros bout en haut, la chambre à air aura la forme d'une calotte fermée par le bas au moyen de la membrane interne tendue horizontalement. Comme j'aurai souvent à parler de cette membrane, je la désigne dès maintenant par le nom de *plancher de la chambre à air*, nom qui me paraît justifié par la position même de la membrane dont il s'agit.

tuée, et déjà l'on peut reconnaître la présence du gaz sulfhydrique. Ce dernier caractère prend une intensité rapidement croissante; la putréfaction, favorisée par le mélange d'une partie des éléments du jaune avec le blanc, arrive bientôt à son dernier degré. On voit alors l'albumine se troubler de plus en plus, le vitellus redevenir plus dense, plus ferme et changer de nouveau de couleur. Ce sont d'abord les couches périphériques, puis progressivement les couches profondes, qui se colorent en vert foncé, presque noir. On a comme un noyau opaque et noir au milieu d'un fluide de couleur livide, dans lequel nagent des débris jaunes, verts, noirs. Une section dans ce noyau présente généralement une série de couches concentriques, de couleur normale au centre, vert foncé à la circonférence, avec tous les tons intermédiaires. A cet état, l'œuf est complètement opaque, la coque a une teinte grise, et les gaz de l'intérieur sortant par tous les pores annoncent par leur odeur putride le degré d'infection de l'œuf. La tension de ces gaz devient alors considérable; elle a souvent pour effet de faire suinter un liquide spumeux et puant. Il arrive même que la coque se brise avec éclat, soit spontanément, soit en la piquant en un point, et que les matières en putréfaction sont projetées dans toutes les directions. Le bruit de la rupture, déjà très-fort avec des œufs de poule, est supérieur à la détonation d'un coup de fusil avec des œufs d'autruche (').

Tel est l'ensemble des phénomènes qui se succèdent dans la putréfaction d'un œuf non agité. Dans un œuf qui a été agité, et dans lequel le blanc et le jaune sont par suite mélangés et brouillés, la putréfaction est généralement plus rapide, mais elle ne présente pas nettement toutes les phases que nous avons observées dans le cas précédent. En effet, on ne peut plus constater ni l'état du blanc, ni l'état du jaune, lesquels sont confondus dans une masse granuleuse et rougeâtre.

Lorsqu'un œuf ainsi brouillé se conserve sans altération, en repos, la masse jaune rougeâtre qu'il contient se sépare lentement en deux parties : au fond se tassent les débris solides du vitellus avec une teinte

---

(') Je dois ces détails à M. Ch. Rivière, directeur du Jardin d'essai du Hamma (près d'Alger), qui a bien voulu me communiquer quelques observations recueillies par lui-même, et m'adresser en même temps, avec une libéralité dont je le remercie vivement, quelques œufs d'autruche avec lesquels j'ai pu compléter mes recherches.

plus jaune et à la partie supérieure surnage un liquide transparent plus rouge. L'albumine paraît avoir dissous quelques-uns des éléments du vitellus.

Si, au contraire, la putréfaction se déclare, il ne se produit point de séparation entre les particules solides et les éléments fluides du mélange. Bientôt il s'établit une fermentation interne qui semble favorisée par l'air dissous pendant l'agitation; la masse prend une consistance semi-fluide, se colore légèrement en vert ou prend une teinte livide; l'odeur putride s'accroît, et en peu de temps on arrive à la dernière période du phénomène, celle dans laquelle les gaz s'échappent au dehors, soit lentement à travers les pores, soit violemment par la rupture de la coquille. La réaction, qui était alcaline à l'origine, est devenue peu à peu neutre ou légèrement acide.

L'état physique d'un œuf qui pourrit à l'abri de l'air ou dans un air confiné ne diffère pas sensiblement de celui que nous venons de décrire. L'odeur seule est très-différente : dans les œufs pourris à l'air, ce qui domine est l'odeur de l'hydrogène sulfuré; dans les œufs pourris sans air, on sent un mélange confus de ce gaz, de sulfhydrate d'ammoniaque, de phosphures d'hydrogène, d'ammoniaques composées, dont l'ensemble a une odeur des plus repoussantes. Cette différence paraît liée à la différence des réactions sur le papier de tournesol : dans le premier cas, la réaction devient légèrement acide au bout de quelque temps; dans le second, elle reste toujours alcaline.

2. *Étude chimique de la putréfaction dans les œufs.* — L'étude complète des réactions chimiques qui se produisent dans la fermentation putride des œufs présente les plus grandes difficultés. Il ne s'agit pas ici de phénomènes s'accomplissant avec des éléments simples, peu nombreux et bien déterminés. L'œuf, en effet, chez les oiseaux, étant destiné à suffire, avec le concours de l'air (<sup>1</sup>), à la nutrition et au développement du jeune embryon, contient tous les éléments que l'incubation doit plus tard mettre en jeu : c'est l'aliment complet par excel-

---

(<sup>1</sup>) « L'air respirable contenant une certaine quantité d'humidité pour les œufs aériens et une température convenable sont indispensables pour que l'incubation ait lieu. » (BAUDRIMONT et MARTIN SAINT-ANGE, *Annales de Chimie et de Physique*, t. XXI, p. 292.)



lence; or l'analyse la plus immédiate montre que le blanc et le jaune sont l'un et l'autre formés par des principes nombreux, variés, en quantités souvent très-faibles (1). Si la putréfaction n'était qu'un simple phénomène chimique, une réaction plus ou moins complexe entre ces principes, il serait déjà difficile de séparer tous les produits de cette réaction; mais, ainsi que je le montrerai plus loin, la putréfaction est corrélative de la vie, et, comme tout phénomène vital, elle engendre des produits variables dont la nature peut échapper à l'analyse la plus délicate. Il en est comme de la fermentation alcoolique, par exemple, dans laquelle il ne se forme pas seulement de l'alcool, de l'acide carbonique, mais encore de l'acide succinique, de la glycérine et sans doute encore beaucoup d'autres produits (2).

Les difficultés que je signale sont de même ordre que celles qu'ont

(1) Composition des œufs de poule frais (SCHUTZENBERGER, *Chimie appliquée à la Physiologie animale*, p. 227).

Coquille et enveloppe membraneuse.....	10,69
Albumen ou blanc.....	60,42
Jaune ou vitellus.....	28,89
	<hr/>
	100,00

*Blanc.*

Eau.....	82,88 pour 100.
Matières solubles.....	13,316 »
Albumine.....	13,274 »
Matières grasses (oléine, margarine et savons).....	traces.
Sucre.....	0,5 »
Matières minérales.....	0,64 à 0,68 »

*Jaune.*

Eau.....	48,550 »
Caséine.....	13,932 »
Membranes.....	0,459 »
Albumine soluble.....	2,841 »
Albumine précipitée par l'eau.....	0,892 »
Extrait éthéré (graisses neutres, graisses phosphorées, substance cristalline analogue de la cholestérine, mais s'en distinguant par la forme).....	31,146 »
Matières minérales.....	1,523 »

(2) PASTEUR, *Mémoire sur la fermentation alcoolique* (*Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. LVIII, p. 323; 1860).

rencontrées les savants qui ont voulu étudier tous les phénomènes chimiques que produit l'évolution embryonnaire pendant l'incubation. Pour toutes ces raisons, je n'ai pas abordé ici l'étude entière des réactions qui s'accomplissent dans la fermentation putride des œufs. Les résultats que je vais rapporter sont donc nécessairement très-incomplets.

Les produits de la putréfaction dans les œufs sont de deux sortes : les gaz qui s'échappent par les pores de la coquille, les éléments qui restent dans l'œuf.

(a). *Gaz.* — Un œuf à coque mince, de poule par exemple, laissant perdre au dehors les gaz de la putréfaction, à mesure qu'ils se produisent, ne permet guère d'analyser ces gaz, à moins qu'on ne recueille ceux qui sont contenus dans la chambre à air; mais alors ils sont en petite quantité, et de plus il est impossible d'en faire l'étude à plusieurs périodes de l'altération.

L'œuf d'autruche, au contraire, est extrêmement commode pour cet objet. Son volume étant considérable, il se produit à chaque instant une grande quantité de gaz; la coquille étant épaisse et résistante, ce gaz s'y accumule comme dans un ballon et, à cause de la faible porosité des parois, il y atteint une pression considérable. Si donc, à un moment donné, on fait une ouverture à la coque et si l'on fixe dans le trou l'extrémité d'un tube abducteur, ce qui est facile, grâce à l'épaisseur de la coquille, qui atteint jusqu'à 1,5 et 2 millimètres, on pourra conduire le gaz produit dans une éprouvette et l'analyser. On pourra même, en laissant le tube abducteur, prolonger l'expérience et le recueillir pendant toute la durée de la putréfaction à mesure qu'il se forme.

Pour percer la coque des œufs d'autruche d'un trou circulaire, sans perdre du gaz contenu dans la chambre à air, et sans que l'air extérieur se mélange à lui, j'ai fait construire un appareil à forer que j'emploie de la manière suivante (1).

Deux calottes sphériques en laiton A et B (*Pl. I, fig. 1*), portant chacune quatre petits crochets, peuvent s'appliquer exactement sur les deux bouts de l'œuf, au moyen d'une lame intérieure de caoutchouc enduite de suif sur ses deux faces. On place les crochets en regard et on

---

(1) Cet appareil a été construit par M. Golaz.

les relie deux à deux, très-fortement, à l'aide d'une bonne ficelle. De la sorte, il ne peut passer aucun gaz entre la coquille et le caoutchouc.

La calotte supérieure B est munie d'une douille C, où s'engage à frottement, dans une boîte à cuir, un foret à fraise très-pointue, qu'on peut mettre en mouvement à l'aide d'une poulie et d'un archet. La boîte à cuir n'occupe qu'une partie de la douille, de sorte qu'à la partie inférieure la pointe du foret se meut dans une sorte de chambre très-étroite. Un tube latéral E met cette chambre en communication avec un tube de verre et permet aux gaz qui y sont contenus de passer sous une éprouvette reposant sur la cuve à mercure. Cette chambre occupe d'ailleurs le plus petit espace possible.

Cela posé, si l'on fait tourner le foret, la pointe de la fraise attaque la coquille et y fait un trou d'autant plus large qu'on tourne plus longtemps. Si l'on a appliqué la calotte à foret sur le gros bout, où se trouve d'ordinaire la chambre à air, on entend bientôt un petit sifflement qui annonce que le gaz intérieur s'échappe, et on le recueille dans l'éprouvette, après en avoir perdu les premières bulles, qui contenaient de l'air étranger. Quand tout l'excès de gaz est sorti, on défait l'appareil, et l'on adapte dans le trou obtenu un tube abducteur fin, entouré de caoutchouc; les gaz qui se produiront par la suite se rendront d'eux-mêmes sous une éprouvette disposée à cet effet. On n'a pas à craindre de fuite, car, l'orifice étant bien circulaire, le caoutchouc le ferme très-exactement.

Voici, par exemple, l'analyse du gaz extrait, avec cette disposition, d'un œuf d'autruche en pleine putréfaction (1) :

Quantité totale de gaz recueilli, 150 centimètres cubes :

Hydrogène sulfuré.....	traces.
Acide carbonique.....	30,5
Hydrogène.....	40,2
Azote.....	29,3
	100,0

(1) M. Béchamp a publié, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXVII, p. 523; 1868, les résultats de deux analyses faites sur des œufs d'autruche altérés, mais qui, comme il le dit lui-même, ne présentaient les caractères ni des œufs pourris ordinaires, ni des matières animales putréfiées. Il est donc probable que les œufs dont il s'agit avaient subi une fermentation différente de la putréfaction; dès lors il n'y a pas lieu d'en parler ici.

L'hydrogène sulfuré était en très-petite quantité, car le volume du gaz analysé n'a pas diminué d'une façon sensible, après l'introduction dans l'éprouvette d'une dissolution acide d'acétate de plomb. Cependant sa présence était manifestée par l'odeur, par le léger trouble noir de la dissolution précédente et par la coloration foncée que prenait un papier imprégné d'acétate de plomb.

On remarquera la grande quantité d'azote; d'après l'analyse précédente, elle est de 44 centimètres cubes dans les 150 centimètres cubes de gaz recueilli. Les analyses suivantes, faites avec des œufs de poule, montrent que l'azote est au contraire peu abondant dans les gaz de la putréfaction; il est donc probable que l'œuf d'autruche dont il s'agit s'est altéré lorsque sa chambre à air était grande, et que l'azote obtenu provient pour la principale part de l'air contenu dans cette chambre (1).

Ne pouvant opérer avec les œufs de poule comme avec les œufs d'autruche, j'ai placé ceux-là soit dans une atmosphère limitée, soit dans une éprouvette pleine de mercure; dans le premier cas, il faut tenir compte de l'air extérieur. Dans ces conditions, j'ai toujours obtenu le même résultat général: l'oxygène disparaît; il se forme de l'acide carbonique et de l'hydrogène en grande quantité et de l'hydrogène sulfuré en petite proportion; quant à l'azote, il est toujours aussi peu abondant.

Voici, par exemple, quelques expériences :

*Œufs dans un air confiné.* — Deux tubes contenant des œufs ont été fermés en décembre 1872 et ouverts en novembre 1873. La composition du mélange gazeux au jour de l'ouverture est :

N° 1.		N° 2.	
HS.....	3	HS.....	4
CO <sup>2</sup> .....	59	CO <sup>2</sup> .....	57
Az + H.....	38	Az + H.....	39
	<u>100</u>		<u>100</u>

(1) S'il en est ainsi et si l'on suppose que la perte par les pores a été assez faible pour être négligeable, on voit que la capacité de la chambre à air était de 55 centimètres cubes environ au moment où la putréfaction s'est déclarée. Or le volume du gaz recueilli est de 150 centimètres cubes, le volume du gaz restant 55 ou à peu près 50 centimètres cubes; donc la pression, avant qu'on eût percé la coque, devait être environ de 4 atmosphères. Ce dernier nombre est sans doute un peu trop fort, mais il montre cependant que la tension dans un œuf d'autruche peut devenir considérable.

Ces deux œufs ne différaient qu'en ce que, au n° 2, on avait ajouté un peu d'eau.

*Œufs sans air, sous le mercure.* — 1° J'ai mis un œuf non agité dans une éprouvette pleine de mercure à la température de 25 degrés en moyenne. Le niveau s'est abaissé lentement, puis est resté stationnaire. Au bout de quatre mois et demi, j'ai mis fin à l'expérience.

L'œuf, en pleine putréfaction, exhalait l'odeur la plus repoussante. Le gaz recueilli avait un volume de 10<sup>cc</sup>,8, dont suit la composition :

	En centièmes.	
HS.....	traces.	»
CO <sup>2</sup> .....	7,2	67
H.....	2,6	24
Az.....	1,0	9
	10,8	100

2° Le 24 décembre 1872, j'ai mis à l'étuve un œuf non agité dans une éprouvette pleine de mercure. Le niveau s'est abaissé, et j'ai recueilli le gaz à deux périodes différentes de la putréfaction, en évitant d'exposer l'œuf à l'air extérieur pendant la manipulation.

Première prise de gaz, le 24 février 1873, c'est-à-dire après deux mois.

Volume total recueilli : 51 centimètres cubes, dont suit la composition :

	En centièmes.	
HS.....	traces.	»
CO <sup>2</sup> .....	26,5	52
H.....	20,4	40
Az.....	4,1	8
	51,0	100

Deuxième prise de gaz, le 3 mai 1873, c'est-à-dire deux mois et demi après la première.

Volume total recueilli : 18 centimètres cubes, ainsi composés :

	En centièmes.	
HS.....	traces.	»
CO <sup>2</sup> .....	10,6	59
H.....	7,0	39
Az.....	0,4	2
	18,0	100

3° Le 6 mai 1873, mis un œuf non fécondé, aussitôt après la ponte, dans les mêmes conditions que plus haut. Il y a eu un premier dégagement de gaz qui a fait baisser le niveau du mercure de quelques centimètres seulement; le niveau, resté ensuite stationnaire pendant quelques semaines, a continué à s'abaisser de nouveau pendant plusieurs mois. Au moment où j'ai mis fin à l'expérience, le 28 septembre 1874, le mercure était depuis longtemps au même point.

Gaz total recueilli, 86<sup>cc</sup>,4, ainsi composés :

		En centièmes.
HS.....	traces.	»
CO <sup>2</sup> .....	67,9	78,7
H. ....	17,7	20,4
Az. ....	0,8	0,9
	<u>86,4</u>	<u>100,0</u>

Ces divers exemples montrent que la composition du gaz produit pendant la putréfaction sans air est la même, en général, que dans l'air; seulement, dans le premier cas, la proportion d'hydrogène sulfuré est presque insensible et sa présence n'est accusée que par l'odeur et par la coloration noire du papier à acétate de plomb. Ce fait tient sans nul doute à la présence du mercure, avec lequel l'hydrogène sulfuré forme du sulfure de mercure. Ce qui l'indique, c'est la présence à la surface du mercure d'une mince pellicule noire, dont l'épaisseur augmente à mesure que la putréfaction se prolonge.

La quantité totale d'azote est toujours très-faible, et même elle va en diminuant, comme le prouve l'expérience n° 2.

Tout l'azote recueilli est-il bien véritablement un produit de la putréfaction des œufs? Il est possible que la plus grande partie, sinon la totalité de ce gaz, provienne des gaz dissous dans l'œuf avant toute fermentation putride. On sait, en effet, que l'albumine a la propriété de dissoudre les gaz de l'air : MM. Mathieu et Urbain ont donné la composition du gaz extrait du blanc d'œuf dans plusieurs expériences à l'aide de la machine pneumatique à mercure (1). Ils ont trouvé en

---

(1) En supposant que le blanc d'un œuf entier contienne la même proportion d'azote que l'albumine des expériences de MM. Mathieu et Urbain, comme le volume d'un œuf de poule varie de 50 à 60 centimètres cubes, la quantité d'azote en dissolution varierait de 1,9 à 2,3 centimètres cubes.

moyenne que 100 centimètres cubes d'albumine contenaient :

Acide carbonique.....	66,8
Oxygène.....	2,3
Azote.....	3,8
	<hr/>
	72,9

(b). *Produits solides et liquides.* — Parmi les produits de la putréfaction qui restent à l'intérieur de l'œuf, il en est quelques-uns que l'on peut séparer par distillation : ce sont des produits alcooliques et des acides volatils. Malheureusement je les ai obtenus en trop petite quantité pour pouvoir les déterminer. Ainsi ce n'est qu'à la troisième ou quatrième distillation, en prenant à chaque opération le liquide condensé de l'opération précédente, que j'ai vu se former, sur les parois froides de la cornue, les gouttelettes huileuses caractéristiques de substances alcooliques. Quant aux acides volatils, ils ont une forte odeur d'acide butyrique.

En distillant la masse de l'œuf étendue d'eau en présence de la magnésie et condensant les produits qui se dégagent dans de l'eau additionnée d'acide chlorhydrique, puis faisant évaporer la liqueur, on obtient un mélange de chlorhydrate d'ammoniaque et de chlorhydrate de triméthylamine; ces deux bases volatiles existent donc dans les œufs pourris comme dans tous les résidus de putréfaction des matières albumineuses. Dans des expériences inédites qu'il a bien voulu me communiquer, M. Duclaux a constaté aussi la formation de la triméthylamine dans les œufs pourris; elle ne l'avait pas encore été dans ce cas particulier. Elle est plus abondante dans les œufs pourris à l'abri de l'air que dans les autres.

Une partie de l'albumine se transforme en leucine et en tyrosine, comme dans la putréfaction de toutes les matières animales. La quantité formée est très-faible; d'ailleurs, suivant les auteurs, il en existe des traces dans les œufs, comme dans le plasma sanguin, dans l'urine, etc.

La cholestérine du jaune cristallise quelquefois pendant la putréfaction des œufs brouillés; j'ai observé très-nettement dans quelques cas les cristaux en tablettes rhomboïdales qui la caractérisent.

La quantité de matière grasse ne paraît pas varier sensiblement dans la putréfaction ; car, à l'aide de l'éther, j'ai obtenu à très-peu près les mêmes résultats qu'avec des œufs sains. Par le même traitement, j'ai eu environ 4 grammes d'extrait éthéré pour un œuf sain et pour un œuf pourri de poids moyen.

Le sucre a disparu.

En résumé, la putréfaction dans les œufs agit surtout sur les matières albuminoïdes et le sucre ; elle n'agit pas sensiblement sur les matières grasses, et les produits qu'elle donne sont de même nature que ceux qu'on obtient dans la putréfaction des matières protéiques en général.

3. *Des organismes de la putréfaction dans les œufs.* Les observateurs qui n'ont signalé qu'accidentellement la putréfaction dans les œufs n'ont même pas cherché pour la plupart quelle pouvait être la cause de ce phénomène. J'ai dit que Réaumur, qui s'en était beaucoup préoccupé, l'attribuait aux vapeurs du fumier dont il entourait ses fours à éclosion <sup>(1)</sup>. M. Panceri, qui a bien plus étudié les moisissures que la putréfaction dans les œufs, range les cryptogames au nombre des agents qui la déterminent <sup>(2)</sup> ; mais il ne signale pas quels peuvent être les autres agents. Au contraire, M. Donné, comme on l'a vu dans l'historique, ne trouve dans les œufs pourris ni moisissures ni organismes d'aucune espèce, et M. Béchamp explique ce phénomène par l'action de granulations mobiles (microzymas), auxquelles il prête le rôle de ferments figurés. Mes observations m'ont conduit à considérer la putréfaction des œufs comme un phénomène physiologique, dû, non point à des granulations mobiles, non point à des moisissures, mais bien à des organismes microscopiques de la famille des vibrioniens <sup>(3)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> RÉAUMUR, *loc. cit.*, p. 237.

<sup>(2)</sup> PANCERI, *De la coloration de l'albumine d'un œuf de poule et des cryptogames qui croissent dans les œufs* (*Atti della Società italiana di Scienze naturali*, t. II ; 1860. Milan.)

<sup>(3)</sup> PAYEN, s'inspirant des travaux de M. Pasteur sur les fermentations, explique ainsi les altérations spontanées des œufs dans son *Précis théorique et pratique des substances alimentaires*, p. 234 : « L'air qui s'introduit par les pores de la coquille est une des causes ordinaires des altérations lentes qu'éprouvent les œufs par suite de l'introduction de traces de



Prenons un œuf qui pourrit, abandonné à lui-même, ayant la coque parfaitement saine et continue. Si le blanc et le jaune ne sont pas mélangés, et si la putréfaction est tout au début, nous avons vu que le blanc est verdâtre en partie ou en totalité. Et bien, si nous examinons au microscope une goutte de ce blanc, nous y verrons une multitude de bâtonnets organisés, de bactéries agiles. Ils seront difficiles à distinguer si le blanc est seul ; ils deviendront très-visibles s'il est délayé dans deux ou trois fois son volume d'eau. Dans le blanc, ces animalcules transparents sont presque invisibles, parce que l'indice de réfraction de leur substance est à peu près identiquement le même que celui du milieu dans lequel ils nagent ; en ajoutant de l'eau, le milieu est modifié, son indice de réfraction diminue, et alors les bactéries apparaissent très-nettement (1).

Après avoir vidé l'œuf, si nous examinons avec soin la surface interne de la membrane qui touche le blanc et l'enveloppe, nous trouverons presque toujours une ou plusieurs plages verdâtres comme l'albumine ; si, passant une baguette humide sur cette membrane, nous regardons au microscope la goutte d'eau de lavage, nous reconnaitrons les mêmes organismes que plus haut, agiles comme eux, et ayant un caractère de grande jeunesse. Ces plages sont évidemment les points de départ de la putréfaction ; ces organismes, qui ont besoin d'air pour vivre et se multiplier, le puisent dans l'atmosphère à travers les pores de la coque, et, à mesure qu'ils se reproduisent, ils envahissent peu à peu toutes les parties de l'œuf.

Les bactéries dont il s'agit sont nombreuses sur les parois interne et externe de la membrane interne de la coque ; mais on les retrouve aussi sur les parois de la membrane externe, entre la coque et cette membrane. Pendant qu'elles se répandent dans tout le blanc, elles enva-

---

germes d'animalcules ou de microphytes et d'un léger mouvement de fermentation. Lorsque la coquille a été accidentellement brisée sur un point, la membrane interne déchirée et quelques cellules du blanc rompues, l'altération fait des progrès d'autant plus rapides que la température extérieure est plus élevée ; souvent alors une fermentation putride se prononce et le soufre, dans ce cas, s'unit à l'hydrogène de l'eau en même temps que l'oxygène, de son côté, active la fermentation. »

(1) On sait, d'ailleurs, que les liquides fortement réfringents, tels que le sérum, la lymphe, rendent comme le blanc d'œuf les bactéries presque invisibles.

hissent aussi ces membranes, qui sont bientôt verdâtres dans toute leur étendue. Un moyen commode de les trouver toujours, à cette période de la putréfaction et dans les suivantes, consiste à briser la coque au gros bout, à ouvrir la chambre à air et à laver le plancher de cette chambre avec une goutte d'eau. L'observation microscopique de la goutte montrera toujours des bactéries en grand nombre, nombre d'ailleurs variable avec le degré de la putréfaction et le volume de la goutte d'eau de lavage.

Il est encore un moyen commode d'observer les organismes des œufs pourris : c'est de déchirer un fragment de membrane et de le mettre avec un peu d'eau sur la préparation. On voit alors les petits bâtonnets qui étaient retenus dans les mailles de la membrane se dégager et se répandre dans l'eau, où ils nagent en très-grande abondance.

Enfin, lorsqu'on ne veut que constater la présence de ces êtres, sans explorer les diverses régions de l'œuf, il suffit de faire un vide partiel au-dessus de la coque; les gaz de l'intérieur, en se dilatant, chassent devant eux un liquide spumeux, toujours riche en bactéries, qu'il est très-facile d'y observer par l'addition d'un peu d'eau. Ce procédé est souvent précieux, car il éloigne de l'opérateur l'odeur si désagréable qui s'exhale d'un œuf pourri qu'on brise pour l'ouvrir.

Quand l'œuf a été vivement secoué pour en mélanger le blanc et le jaune, le plancher de la chambre à air a été rompu; il faut alors chercher ailleurs les organismes microscopiques : on les trouve d'une manière certaine entre la coque et la membrane.

Il faut plus d'attention pour reconnaître les organismes qui nagent dans la masse interne, surtout quand la putréfaction est avancée; car, même en ajoutant de l'eau, ils disparaissent pour ainsi dire au milieu des granulations de toutes sortes, des gouttelettes huileuses, des cristaux qui sont répandus dans la préparation. On se débarrasse en grande partie de ces corps étrangers en ajoutant une goutte d'une dissolution étendue de potasse qui nettoie le champ et augmente singulièrement la visibilité des êtres microscopiques que l'on recherche. Il est vrai que leur mouvement propre est détruit; mais, quand une observation avec la potasse a permis de les voir, de les mesurer, il devient beaucoup plus facile de les retrouver dans une préparation faite avec l'eau seule; on peut alors très-bien constater leur immobilité ou la nature de leurs

mouvements. L'acide acétique est souvent d'un emploi commode pour le même but.

La remarque précédente, vraie surtout pour les œufs brouillés, s'applique aussi aux œufs non brouillés, quand la putréfaction est assez avancée pour que le jaune ait commencé à se désagréger à la surface et à perdre des débris qui troublent le blanc; mais, dans ce cas, le plancher de la chambre à air sert toujours très-utilement.

Les grossissements les plus convenables pour les observations varient de 400 à 500 diamètres.

Maintenant que nous savons où trouver ces organismes et comment les observer en toute circonstance, voyons quels sont ceux que l'on rencontre le plus ordinairement dans les œufs pourris.

Avant d'aborder cette étude, il conviendrait peut-être de faire choix de la meilleure classification de ces petits êtres microscopiques et de discuter pour cela celles que les savants les plus autorisés, Ehrenberg (1), Dujardin (2), Ferd. Cohn (3) ont proposées; mais les données actuelles de la science sur ce sujet paraissent trop incomplètes pour qu'on puisse dès maintenant arrêter une classification définitive. La difficulté réside surtout dans la mauvaise détermination des caractères, dans l'ignorance des diverses formes d'une même espèce et de son rôle physiologique. Il est permis de croire qu'avec les nouveaux moyens de préparation des milieux, d'ensemencement et de culture que M. Pasteur a fait connaître dans ces dernières années (4), et dont il a tiré si heureusement parti pour l'étude de la levûre de bière pure, il sera facile désormais d'isoler chaque espèce, de la voir se développer seule, se multiplier, se transformer s'il y a lieu. Il deviendra alors non moins facile de rechercher, comme l'a fait avec tant de succès M. Raulin pour l'*Aspergillus niger* (5), le milieu artificiel composé de substances chimiques définies le plus propre à la vie de ces petits êtres. Alors seulement on pourra déterminer avec précision les réactions qui se produisent dans les milieux où ils puisent les éléments de

(1) EHRENBURG, *Infusionsthierschen*; 1838.

(2) DUJARDIN, *Histoire naturelle des Zoophytes*. Infusoires; 1841.

(3) FERD. COHN, *Recherches sur les bactéries*; 1872.

(4) PASTEUR, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*; 1872-1874.

(5) RAULIN, *Études chimiques sur la végétation*; 1870.

leur vie et de leur multiplication. La connaissance exacte de leurs formes, de leurs modes de développement et de reproduction, de leur rôle physiologique, permettra enfin d'établir leur classification naturelle.

J'ai pris la classification de Dujardin, parce qu'elle est la plus simple et qu'elle m'a toujours suffi dans mes observations.

La famille des *Vibrioniens* est, d'après Dujardin, composée d'animaux filiformes, extrêmement minces, sans organisation appréciable, sans organes locomoteurs visibles. Elle se divise en trois genres :

*Bactéries* : corps filiforme, roide; mouvement vacillant, non ondulatoire.

*Vibrions* : corps filiforme, susceptible d'un mouvement ondulatoire comme un serpent.

*Spirillums* : corps filiforme, contourné en hélice, non extensible, quoique contractile, tournant autour de son axe.

Considérons d'abord le cas d'un œuf qui s'est putréfié dans l'air ordinaire, qu'il ait été préalablement agité ou non. La nature des organismes qu'il contient varie avec la période de la putréfaction.

Au début, ce sont de petits bâtonnets de forme cylindrique, isolés ou par couples, plus rarement en chapelets, dont la teinte homogène et pâle, les contours peu accentués prouvent une grande jeunesse; ce fait est confirmé par l'examen attentif des articles doubles, dans lesquels on distingue, en effet, tantôt un léger étranglement, tantôt une division plus profonde, presque la séparation des deux êtres nouveaux; les articles plus âgés, ou qui vivent gênés dans un milieu incomplet, ont une teinte jaunâtre et des contours accentués, fortement réfringents, noirs, qui ne permettent pas de les confondre avec les jeunes dont je viens de parler. Ces jeunes organismes ont besoin d'air pour vivre, ce qui résulte de la place même qu'ils occupent de préférence dans l'œuf en voie de putréfaction, c'est-à-dire entre la coque et la membrane et sur les parois de la chambre à air. C'est aussi ce que j'ai pu vérifier maintes fois, avec une netteté vraiment remarquable, dans les préparations où je les observais. Dès qu'on a déposé la lamelle sur la goutte de liquide, on voit ces organismes se mouvoir dans tous les sens avec une incroyable rapidité; puis leur mouvement se ralentit, cesse, et les bâtonnets se tassent, se juxtaposent en séries paral-

lèles ('). C'est là ce qui se passe au milieu de la préparation, loin des bords de la lamelle. Sur les bords au contraire, ou mieux encore dans le voisinage des bulles d'air, lorsqu'il s'en trouve dans la préparation, on constate que le mouvement continue avec toute l'agilité primitive. Les premiers organismes conservent leur mouvement jusqu'à ce qu'ils aient absorbé tout l'air dissous dans le liquide; les derniers ne le perdent pas, parce qu'ils ont à chaque instant l'air qui leur est nécessaire. L'explication précédente est si vraie, comme l'a indiqué depuis longtemps M. Pasteur, que, lorsqu'on soulève la lamelle pour permettre la dissolution dans le liquide d'une nouvelle quantité d'air, les bâtonnets, momentanément paralysés, reprennent toute leur agilité, pour la reperdre encore si on les emprisonne de nouveau en laissant retomber la petite lame de verre.

Les bâtonnets dont je parle sont droits, inflexibles; ils décrivent tantôt des lignes droites, tantôt de grands arcs de courbe; ou bien ils vont, viennent, courent dans tous les sens et changent brusquement de direction; quelquefois ils s'arrêtent et semblent hésiter à se mettre en mouvement, oscillent un peu sur eux-mêmes, puis partent avec la rapidité d'un trait; s'ils rencontrent un obstacle, un globule gras, un débris amorphe très-ténu, ils le heurtent ou le culbutent, souvent sans modifier leur marche; on en voit qui se fixent à de fines granulations et les entraînent dans tous leurs mouvements; d'autres tournent autour de ces corpuscules étrangers, se précipitent dessus, puis reculent et s'y précipitent de nouveau, comme sur une proie. Tous ces mouvements vacillants, non ondulatoires, avec la rigidité des individus, caractérisent les *bactéries*. Ce sont donc des bactéries qui se montrent tout d'abord dans la putréfaction des œufs.

J'en ai observé deux formes qui paraissent distinctes :

La première et la plus commune est formée d'articles dont la longueur varie de 2 à 4 millièmes de millimètre, et la largeur de 0,3 à

---

(') MM. Coze et Feltz ont souvent observé le même fait. Ils appellent *zone immobile* le groupement de bâtonnets parfaitement situés dans un même plan et dont l'ensemble apparaît d'un coup d'œil à l'observateur. L'examen de cette zone prend, dans leurs études sur les maladies infectieuses, une grande importance, car elle varie d'une maladie à l'autre, et son aspect paraît lié à la nature de la maladie (*Recherches sur les maladies infectieuses*, p. 27 et 148.)

0,5 millièmes de millimètre (<sup>1</sup>). C'est l'espèce *Bacterium termo*, très-commune dans toutes les infusions (*fig. 7*). J'ai eu des œufs où tous les individus étaient mobiles; d'autres où une partie seulement étaient mobiles; d'autres enfin plus rares, où presque tous étaient immobiles. L'état de repos ou de mouvement, qui peut avoir beaucoup de causes, influence de l'air, du milieu, de l'âge, ne me paraît pas, du moins en général, suffire pour différencier des espèces; aussi ai-je compris sous le même nom des individus mobiles ou immobiles, qui avaient même forme générale, mêmes dimensions moyennes, et dont les articles, en se déplaçant, conservaient la même rigidité.

La seconde forme de bactéries que j'ai observée est une bactérie beaucoup plus petite que les précédentes, ayant d'ailleurs le même mode de mouvement, mais dont la longueur atteint à peine  $1\mu$  et la largeur  $0,2\mu$  (*fig. 8*). Ces organismes sont tellement petits, que s'ils n'étaient nombreux et animés d'un mouvement très-rapide, on pourrait très-bien ou ne pas les remarquer ou les confondre avec des ponctuations amorphes. Quand ils ont cessé de se mouvoir par privation d'air, ils se mettent aussi en rangées parallèles très-serrées. On pourrait admettre que ces bactéries sont des articles de *B. termo* très-courts, qui, vivant péniblement, se développent moins et se divisent plus tôt; mais, comme ils ont un aspect de grande jeunesse, qu'ils ont des mouvements très-rapides, je crois qu'on peut les considérer comme une espèce différente du *B. termo*. Je les ai observés surtout dans des œufs de dinde achetés pourris à la Halle.

J'ai rencontré dans des œufs pourris quelques autres bactéries en fils très-longs, très-grêles, des chapelets d'articles ou de grains extrêmement petits (*fig. 9 et 10*); mais je ne les ai aperçus que très-rarement.

Les bactéries que je viens de décrire, ayant besoin d'oxygène pour vivre, devront se trouver plus abondantes dans les parties de l'œuf les plus voisines de l'air. C'est ce que l'expérience confirme complètement.

Pour faire la comparaison, j'ai employé une méthode qui a été indiquée par M. Pasteur dans ses *Études sur les vers à soie* (<sup>2</sup>), et qui suffit pour donner des rapports approchés. Elle consiste à faire des prépara-

---

(<sup>1</sup>) Je me servirai souvent, pour simplifier, de la lettre  $\mu$ , qu'on emploie généralement pour représenter cette unité.

(<sup>2</sup>) PASTEUR, *Études sur les maladies des vers à soie*, t. I, p. 63.

tions également étendues, du moins autant que possible, et à compter le nombre des organismes disséminés dans un champ. Quand le nombre est grand, on compte seulement ceux d'un quadrant, et l'on multiplie le résultat par 4. Ici j'ai comparé une goutte d'eau de lavage de la membrane avec le même volume de liquide intérieur étendu de moitié avec de l'eau. Bien que la préparation dans ce dernier cas fût plus chargée de matières que l'eau de lavage, les tableaux suivants montrent combien les bactéries sont plus abondantes dans le voisinage de l'air que dans la masse interne :

*OEufs à 25 degrés, du 23 janvier au 27 février 1873.*

N <sup>os</sup>	Entre coque et membrane.	Intérieur.
1.....	500	»
2.....	400	10
3.....	400	»
4.....	1000	5
5.....	200	20
6.....	600	6

*OEufs à 25 degrés, du 27 janvier au 1<sup>er</sup> mars 1873.*

N <sup>os</sup>	Entre coque et membrane.	Intérieur.
1.....	100	20
2.....	200	10
3.....	100	50
4.....	50	20
5.....	500	50
6.....	600	2 à 3

Ces exemples, que je pourrais multiplier, prouvent bien la proposition que j'ai émise plus haut. J'ajouterai que la proportion des bactéries mobiles est aussi plus grande sur les membranes que dans la masse intérieure.

A mesure que la putréfaction de l'œuf avance, on remarque que de nouveaux organismes apparaissent dans l'intérieur; au milieu des bactéries que nous venons de décrire, on voit des bâtonnets plus larges et plus longs, dont la longueur varie de 2 à 8 $\mu$ , et la largeur de 0,8 à 1 $\mu$  (*fig. 11*). Tandis que les bactéries de la surface ont une teinte uniforme, ceux-là présentent quelquefois de fines granulations; au

lieu de courir d'un mouvement rapide, ils s'avancent lentement en s'infléchissant et en décrivant des courbes flexueuses; il en est qui sont articulés, et l'on voit quelquefois les articles osciller vivement l'un et l'autre autour de leur point de jonction, comme s'ils faisaient des efforts pour rompre le lien qui les unit.

A ces caractères on reconnaît des *vibrions*; ils partagent avec le vibrion butyrique de M. Pasteur, et ceux qui sont corrélatifs de la putréfaction véritable (1), la propriété singulière de vivre sans oxygène libre et d'être tués, ou tout au moins frappés d'immobilité, lorsqu'on les expose pendant quelque temps à l'action de ce gaz. En effet, leurs mouvements ondulatoires ne sont pas visibles aussitôt après le dépôt de la lamelle sur la goutte; ce n'est qu'un peu plus tard, lorsque l'oxygène de l'air dissous dans le liquide est absorbé, qu'on voit ces bâtonnets, jusque-là immobiles, s'ébranler, osciller faiblement, puis, après quelques moments d'hésitation, partir doucement pour continuer à se mouvoir aussi longtemps qu'on ne les paralyse pas par l'accès d'une nouvelle quantité d'air.

Dans un œuf pourri depuis longtemps, on ne trouve plus guère que des vibrions à l'intérieur, comme si les bactéries en avaient été chassées, soit par la présence de ces nouveaux êtres, soit par l'absence de gaz oxygène dissous; mais, dans cette dernière période, les vibrions deviennent difficiles à distinguer, et nous allons bientôt en connaître la cause. Si l'on examine alors le contenu de l'œuf et qu'on n'ait pas une grande habitude de ces observations, on pourra ne rien voir d'organisé et être par suite tenté de nier la présence d'organismes microscopiques.

Ainsi, pour résumer ce qui précède, quand un œuf brouillé ou non se putréfie dans l'air ordinaire, il présente deux genres d'infusoires très-distincts par leurs formes et leurs mouvements, et surtout par leur rôle vis-à-vis de l'oxygène libre : bactéries à la surface des membranes, tout près de l'air; vibrions loin de l'oxygène, au centre.

Le fait précédent s'observe dans tous les œufs à coque mince, tels que ceux de poule, de cane, de dinde, de pigeon. S'il est général, les bactéries devront se multiplier de préférence dans tous les cas où l'air

---

(1) PASTEUR, *Recherches sur la putréfaction* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LVI, séance du 29 juin 1863).



aura un libre accès, et les vibrions apparaîtront, au contraire, dans les cas où l'oxygène sera éloigné des matières en putréfaction. Cela est confirmé par plusieurs observations.

1° Au mois de juin dernier, j'ai abandonné à la température ordinaire, dans un flacon ouvert, six blancs d'œuf, dont j'avais séparé les jaunes pour une autre expérience; bientôt l'albumine s'est fluidifiée, puis elle a pris la belle teinte verte que j'ai signalée, et dégagé une odeur légèrement putride. Examinée à ce moment, elle contenait une multitude de bactéries agiles, identiques au *B. termo*, visibles surtout après l'addition d'une petite quantité d'eau.

2° J'ai eu souvent l'occasion de trouver, parmi ceux que j'ai achetés pour mes expériences, des œufs dont la coque était légèrement fendue; j'en ai moi-même fendu plusieurs fois. Ces œufs mis à l'étuve ne se sont pas toujours pourris, mais j'ai toujours constaté que, dans ceux qui étaient entrés en putréfaction, les organismes microscopiques étaient plus abondants sur les points de la membrane, immédiatement au-dessous des fentes de la coque, que sur les autres points, et que ces organismes étaient des bactéries identiques au *B. termo*.

Voilà pour les bactéries; voici maintenant quelques exemples où les vibrions dominent:

1° Et d'abord, sans faire aucune expérience, il suffit de considérer un œuf d'autruche dont la coque, épaisse et compacte, laisse passer difficilement les gaz. Dès que la petite quantité d'oxygène qui peut se trouver dans la chambre à air aura été absorbée, les éléments du blanc et du jaune seront pour ainsi dire complètement privés de ce gaz, puisque celui de l'extérieur pénètre à peine à travers les pores. Dès lors, si ces éléments se putréfient, ils ne devront présenter que des vibrions. C'est ce que j'ai constaté sur quatre œufs d'autruche pourris, que M. Ch. Rivière a bien voulu m'envoyer d'Algérie. Chacun de ces œufs a été ouvert avec l'appareil décrit plus haut, et une goutte de l'intérieur retirée avec une baguette de verre très-propre, puis délayée dans un peu d'eau, a présenté, dans tous, les mêmes organismes, au nombre de dix à vingt par champ; c'étaient des vibrions immobiles de 4 à 6 $\mu$  de longueur et de 1 $\mu$  de largeur, très-légèrement granuleux, et dont les articles s'infléchissaient sur eux-mêmes, lorsque par une légère pression sur la lamelle on les faisait mouvoir dans la préparation.

2° On peut suppléer aux œufs d'autruche, en plaçant un œuf à coque mince dans une atmosphère limitée, soit dans un gros tube fermé,

soit dans une éprouvette, en partie ou en totalité remplie de mercure. Voici les résultats que j'ai obtenus dans ces conditions :

Le 24 décembre 1872, j'ai placé deux œufs de poule dans deux tubes larges, fermés à une extrémité, étirés ensuite à l'autre et fermés à la lampe. Ces œufs ont été abandonnés d'abord à l'étuve, puis à la température extérieure, jusqu'au moment de l'examen, 21 et 29 novembre 1873. Ils s'étaient pourris et avaient une odeur repoussante.

Dans le premier œuf, je n'ai vu tout d'abord rien d'organisé, bien que j'eusse ajouté de l'eau à la préparation; une seconde préparation, faite avec une dissolution étendue de potasse, m'a permis de voir environ dix organismes par champ; même résultat avec l'acide acétique. Éclairé par ces deux observations sur la forme et les dimensions des êtres que je recherchais, j'ai pu les retrouver dans la première préparation, malgré les cristaux, les granulations grasseuses ou autres qui l'obscurcissaient. Si les éléments figurés sont dans ce cas difficiles à voir, c'est que ce ne sont plus des bâtonnets à contours nets, parallèles, à plasma homogène ou finement granuleux, comme ceux qu'on trouve dans les premiers mois de la putréfaction; ces organismes sont ovales, leur plasma s'est presque tout entier concentré en un point brillant ou sombre, suivant la position de l'objectif, et autour de ce point on ne voit plus qu'une sorte d'auréole elliptique très-effacée, dont ce point occupe le centre ou l'un des sommets. Dans la préparation faite avec l'eau, cette auréole était à peine visible, et je ne voyais d'abord que le point brillant, que je confondais avec des granulations amorphes; avec la potasse et l'acide acétique, toute illusion ayant cessé, il n'y a plus de doute sur la nature organisée de ces points et de leurs auréoles. Ce sont des organismes qui sont dans l'état que prennent d'ordinaire les vibrions quand ils vieillissent.

Dans le second œuf, j'ai retrouvé les organismes précédents, avec une auréole encore plus effacée; dans quelques-uns elle n'était même plus visible.

C'étaient bien des vibrions, car, ainsi que l'a montré M. Pasteur pour les petits êtres qui sont corrélatifs de la maladie des vers à soie appelée *flacherie* (1), et comme on peut le constater dans toutes les

---

(1) PASTEUR, *Études sur les maladies des vers à soie*, t. II, p. 228. Planche où l'on voit :

liqueurs qui contiennent ces animalcules à différents âges, un vibrion passe par plusieurs formes successives dont celle que j'ai observée plus haut est la dernière; il représente d'abord un bâtonnet allongé, pâle, à contours parallèles, puis les granulations apparaissent, se groupent en un ou deux points brillants, ovoïdes, à bords fortement réfringents, qui nagent bientôt seuls dans le liquide où vivaient antérieurement les jeunes organismes. Il n'est pas rare de trouver à la fois le bâtonnet homogène, le point isolé et toutes les formes intermédiaires qui accusent le passage de l'une à l'autre (*fig. 12*).

3° Ce sont encore des vibrions qui prennent naissance et se développent sous le mercure, soit qu'on laisse un peu d'air sous l'éprouvette, soit qu'on la remplisse complètement. Seulement les bactéries, qui apparaissent toujours au début de la putréfaction, sont plus nombreuses dans le premier cas que dans le second. Elles ne tardent pas d'ailleurs à disparaître. Plus tard on ne trouve que des vibrions, jeunes d'abord, puis granuleux et enfin transformés en points brillants.

4° Enfin on peut éliminer même l'oxygène de la chambre à air et se placer dans les conditions les plus propres au développement exclusif des vibrions. Il suffit, par exemple, de placer des œufs dans une atmosphère d'acide carbonique; en faisant passer un courant de ce gaz pendant quelques heures, on provoque la diffusion de l'air contenu dans l'œuf, et l'on en débarrasse celui-ci complètement.

Six œufs placés dans ces conditions, à 25 degrés, se sont pourris. Examinés au microscope, ils ont tous montré des vibrions, depuis le bâtonnet long, à contours parallèles, jusqu'au point entouré d'une faible auréole. Ils étaient tous mobiles.

Les expériences qui précèdent montrent bien que les vibrions sont les seuls agents de la putréfaction lorsque l'air ou plutôt l'oxygène est absent. Il résulte de là qu'on peut classer les œufs pourris en deux catégories : les œufs pourris à l'air, les œufs pourris sans air. Au point de vue des organismes, ces deux sortes de putréfaction sont distinctes; elles le sont aussi au point de vue chimique, à en juger seulement par l'odeur si différente qui en résulte et par l'action sur le papier de

---

1° des chaînes de vibrions mobiles, sans points brillants; 2° des vibrions avec corpuscules brillants; 3° des vibrions où la matière qui environne les points brillants se résorbe; 4° des points brillants isolés ressemblant assez aux corpuscules de la pébrine.

tourne-sol; on a déjà vu que les matières décomposées sont légèrement acides à l'air, qu'elles restent fortement alcalines sans air.

D'après cela, l'œuf qui pourrit à l'air est le siège de deux séries de réactions. On peut concevoir que les réactions intérieures, produites par les vibrions, sont celles qui caractérisent la véritable putréfaction, tandis que celles de la surface, déterminées par les bactéries, ne seraient que des oxydations ayant pour effet de modifier, peut-être de simplifier, les premières. L'œuf, dans ces conditions, paraît réaliser toutes les transformations qu'a observées M. Pasteur dans ses savantes *Recherches sur la putréfaction*. « Les vibrions, dit-il, d'une part, vivant sans la coopération du gaz oxygène de l'air, déterminent dans l'intérieur du liquide des actes de fermentation, c'est-à-dire qu'ils transforment les matières azotées en produits plus simples, mais encore complexes. Les *Bacterium* (ou les *Mucor...*), d'autre part, comburent ces mêmes produits et les ramènent à l'état des plus simples combinaisons binaires, l'eau, l'ammoniaque et l'acide carbonique (1). »

L'ensemble des observations que je viens de rapporter conduit à cette conclusion importante :

LA PUTRÉFACTION DANS LES ŒUFS, EN PRÉSENCE OU EN L'ABSENCE DE L'AIR, EST CORRÉLATIVE DU DÉVELOPPEMENT ET DE LA MULTIPLICATION D'ÊTRES MICROSCOPIQUES DE LA FAMILLE DES VIBRIONIENS.

En d'autres termes, contrairement au résultat trouvé par M. Donné, les œufs ne font pas exception à la grande loi de corrélation que M. Pasteur a démontrée pour tous les phénomènes de fermentation proprement dite.

Dans une Note récente (2), M. Béchamp affirme de nouveau que ni M. Donné, ni lui, n'ont trouvé dans les œufs pourris ni bactéries, ni vibrions, ni moisissures, ni autre chose d'organisé. A cette affirmation je ne puis qu'opposer le résultat toujours constant de mes observations. *Je n'ai pas trouvé une seule exception parmi plusieurs centaines d'œufs pourris que j'ai eu l'occasion d'examiner; je suis donc autorisé à con-*

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LVI, séance du 29 juin 1863.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVII, p. 613; 1873. La Note de M. Béchamp a été publiée à l'occasion de deux Communications que j'ai eu l'honneur de faire à l'Académie des Sciences sur les altérations spontanées des œufs, dans les séances du 27 janvier et du 21 juillet 1873.

clure que ce résultat est général. Peut-être mes savants contradicteurs n'ont-ils fait leurs études microscopiques que lorsque la putréfaction était très-avancée, alors que les organismes se désagrègent; peut-être encore n'ont-ils cherché ces derniers que dans le mélange du blanc et du jaune, en négligeant la surface des membranes, où ils sont plus abondants et plus faciles à voir, parce qu'ils ne sont pas confondus avec toutes les granulations de l'intérieur.

### III. — *Influence de quelques circonstances particulières sur l'altération putride des œufs.*

1. *Influence du mélange du blanc et du jaune.* — Dans ses recherches sur la putréfaction des œufs, M. Donné avait pensé, en l'absence d'organismes microscopiques, que l'altération qui caractérise ce phénomène était due à une réaction des éléments du jaune sur ceux du blanc. Cette explication semblait corroborée par les faits observés par ce savant, à savoir, que tous les œufs intacts, non agités, se conservaient sans putréfaction, tandis que tous les œufs brouillés, dont le blanc et le jaune avaient été mélangés par l'agitation, se putréfiaient dans un court espace de temps, dans l'intervalle d'un mois au plus. Or j'ai trouvé que la putréfaction des œufs est corrélative de la vie d'êtres organisés, et par suite qu'elle ne peut avoir pour cause unique l'action réciproque des éléments mélangés. Il semble dès lors que l'on doit trouver des œufs pourris aussi bien parmi les œufs non agités que parmi les œufs brouillés, et que tous les œufs brouillés ne sont pas nécessairement le siège de la putréfaction. Mes observations ne laissent aucun doute à cet égard. Voici les résultats de quelques expériences comparatives :

1° Le 21 novembre, j'ai mis à la température de 30 degrés, dans un flacon à large goulot, six œufs entiers intacts et six œufs fortement agités. L'examen a porté chaque fois sur un œuf agité et sur un œuf non agité.

N <sup>os</sup>	Date de l'examen.	Agité.	Non agité.
1...	7 décembre.	Putréfaction commençante, organismes.	Sain; pas d'organismes.
2...	13 »	Sain; pas d'organismes.	Sain; pas d'organismes.
3...	21 »	Sain; pas d'organismes.	Putride; organismes.

N <sup>os</sup>	Date de l'examen.	Agité.	Non agité.
4...	11 janvier...	Putride; organismes.	Sain; pas d'organismes.
5...	21 »	Sain; pas d'organismes.	Putride, bactéries, moisissures.
6...	21 »	Point putride; pas de bactéries; moisissures.	Point putride, pas de bactéries; moisissures.

## Résumé :

2 pourris.	2 pourris.
4 non pourris.	4 non pourris.

2° Le 28 décembre, j'ai mis à 25 degrés douze œufs agités et douze œufs non agités : les examens ont été faits à des époques variables, en prenant chaque fois les œufs qui paraissaient les plus altérés; voici le résultat :

*OEufs agités.*

N <sup>os</sup>	Date	État
1.....	13 janvier.....	Putride; organismes.
2.....	Id. ....	Id. Id.
3.....	Id. ....	Id. Id.
4.....	Id. ....	Id. Id.
5.....	15 janvier.....	Id. Id.
6.....	18 janvier.....	Putréfaction commençante; organismes.
7.....	28 janvier.....	Putride; organismes.
8.....	29 mars.....	Sain au mirage.
9.....	Id. ....	Id. Id.
10.....	Id. ....	Id. Id.
11.....	Id. ....	Putride; organismes.
12.....	Id. ....	Id. Id.

*OEufs non agités.*

N <sup>os</sup>	Date	État
1.....	16 janvier.....	Putride; organismes.
2.....	Id. ....	Sain; pas d'organismes.
3.....	Id. ....	Id. Id.
4.....	Id. ....	Putride; organismes.
5.....	12 février.....	Id. Id.
6.....	26 mars.....	Id. Id.
7.....	Id. ....	Sain; pas d'organismes.
8.....	Id. ....	Id. Id.
9.....	Id. ....	Id. Id.
10.....	29 mars.....	Id. Id.
11.....	Id. ....	Id. Id.
12.....	Id. ....	Putride; organismes.

Les trois œufs agités n<sup>os</sup> 1, 2 et 3 se sont fendus à l'étuve.

Les trois œufs agités n<sup>os</sup> 8, 9 et 10, abandonnés à la température extérieure jusqu'au 18 décembre, ont traversé sans s'altérer les chaleurs les plus fortes de l'été; à cette date pas d'organismes.

En résumé, et en tenant compte des œufs fendus, on a dans l'expérience précédente :

<i>Œufs agités.</i>	<i>Œufs non agités.</i>
9 pourris.	5 pourris.
3 sains.	7 sains.

Ces deux exemples suffisent pour montrer : 1<sup>o</sup> qu'il y a corrélation entre la putréfaction et le développement d'êtres microscopiques; 2<sup>o</sup> que des œufs agités et brouillés peuvent rester sans altération pendant plusieurs mois; 3<sup>o</sup> que des œufs non agités peuvent se putréfier en quelques semaines; 4<sup>o</sup> que la proportion des œufs pourris dans les deux cas est extrêmement variable.

Le tableau suivant, où je résume les résultats de plusieurs séries d'expériences, montrera combien est variable cette proportion. Le nombre des œufs pourris est rapporté à cent œufs mis en expérience, afin de rendre la comparaison plus saisissante. Leur provenance est très-diverse; les uns ont été achetés directement dans le commerce; d'autres ont été recueillis dans mon laboratoire.

N <sup>os</sup>	Dates des expériences.	Œufs agités pourris.	Œufs non agités pourris.
1...	Série du 21 novembre 1872...	33 pour 100	33 pour 100
2...	» du 26 décembre.....	33 »	0 »
3...	» du 28 décembre.....	75 »	42 »
4...	» du 28 décembre.....	14 »	37 »
5...	» du 17 janvier 1873.....	60 »	75 »
6...	» du 21 janvier.....	100 »	8 »
7...	» du 21 janvier.....	0 »	25 »
8...	» du 27 janvier.....	100 »	33 »
	Totaux.....	415 »	253 »
	Moyennes (1)...	52 »	32 »

(1) Ces moyennes sont bien supérieures à la proportion des œufs pourris qu'on trouve dans le commerce. D'après les renseignements de la Préfecture de police, que j'ai consignés p. 206, cette proportion est en effet de 1 sur 410, mais il ne faut pas s'en étonner, car dans mes expériences les œufs ont été mis à une température qui s'est maintenue à 25 degrés environ pendant plusieurs semaines et même plusieurs mois.

Ainsi, quelle que soit l'époque à laquelle on fait l'expérience, quels que soient les œufs sur lesquels on opère, l'agitation de leurs éléments ne provoque pas nécessairement leur putréfaction, et leur intégrité ne les préserve pas de cette altération.

Ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que la proportion des œufs pourris prend pour ainsi dire toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à 100, qu'ils aient été ou non préalablement brouillés. Il ressort encore de ce tableau que la moyenne des œufs pourris est plus considérable lorsque le blanc et le jaune ont été mélangés que lorsqu'ils sont restés distincts. Il semble donc que ce mélange constitue un milieu plus favorable au développement des bactéries et des vibrions que le blanc ou le jaune tout seul. Cela résulte aussi du fait suivant.

Lorsqu'un œuf non agité se pourrit, j'ai déjà dit que les chalazes se rompaient et que le vitellus se soulevant venait s'appliquer sur la membrane interne au point le plus élevé. Le plancher de la chambre à air est souvent le lieu où se forment de telles adhérences. Dans toute la région correspondante, le blanc et le jaune se mélangeant s'offrent ensemble à la nutrition des bactéries qui se meuvent dans les mailles serrées du plancher membraneux, et il n'est pas rare de les trouver là en plus grande abondance que sur les autres régions qui ne sont en contact qu'avec le blanc. Elles y forment quelquefois une couche épaisse, humide et de consistance mucilagineuse, exactement limitée à la surface de contact du vitellus; les autres parties de la membrane restent parfaitement sèches. Cette grande multiplication de bactéries est assurément due à la présence simultanée du blanc et du jaune, dont le mélange constitue un milieu nutritif plus complet que chacun de ces éléments séparés. Il faut concevoir, par conséquent, que les germes d'organismes qui préexistent dans l'œuf, comme je le montrerai plus loin, à un état de jeunesse variable, se multiplient avec plus de facilité dans un œuf brouillé que dans le blanc tout seul. De plus, l'agitation a pour effet de les disséminer dans la masse et par suite de les mêler intimement aux éléments dont ils doivent se nourrir. Dans l'œuf non agité, au contraire, on conçoit qu'une partie de ces germes, vieux, placés dans le blanc ou dans les membranes, c'est-à-dire sur un terrain incomplet, ne puissent pas se développer et provoquer la putréfaction dans des cas où ce phénomène se serait certainement produit après l'agitation. Ces faits expli-



quent aussi pourquoi les œufs agités qui se putréfient s'altèrent en général plus vite que les œufs non agités.

L'observation suivante conduit à la même conclusion. En brisant un œuf brouillé aussitôt après l'agitation, ou en le faisant cuire et le coupant ensuite en deux parts, on voit de nombreuses bulles d'air qui restent emprisonnées dans la masse, et qui ne peuvent se dégager à cause de la nature visqueuse du mélange. Il en résulte que les bactéries se développent en presque tous les points et par suite que les modifications qu'elles déterminent se produisent en même temps dans tout le volume de l'œuf.

Je viens de montrer que le mélange du blanc et du jaune n'entre pas de lui-même en putréfaction, malgré l'air qui filtre sans cesse à travers la coquille. Je puis en donner une autre démonstration facile à reproduire.

On se rappelle les expériences décisives par lesquelles M. Pasteur a combattu victorieusement les théories de la génération spontanée : je veux parler de la disposition simple qui consiste à conserver, au contact de l'air pur, à l'abri de tous germes actifs, les liquides les plus altérables. M. Pasteur a fait connaître, dès 1863, la conservation, dans ces conditions, du sang et de l'urine <sup>(1)</sup>, et en 1872 celle du moût de raisin <sup>(2)</sup>, tous liquides éminemment putrescibles ou fermentescibles <sup>(3)</sup>. J'ai reproduit la même expérience avec le mélange du blanc et du jaune d'œuf, et aussi avec le blanc tout seul. Voici comment j'opère.

Le vase A (tube, fiole, ballon) (*fig. 2*), où l'on veut recueillir les matières de l'œuf, est fermé par un bouchon de liège ou de caoutchouc percé de deux trous. Le caoutchouc vaut mieux que le liège, parce qu'il est plus facile de porter à 100 degrés dans l'eau bouillante tous les points de sa surface. Dans l'un des trous du bouchon on place un tube de verre B, étiré en forme de tube abducteur très-fin ; dans l'autre trou, un tube de verre C recourbé une fois et étranglé en *a*. Ce

(<sup>1</sup>) PASTEUR, *Examen du rôle attribué au gaz oxygène atmosphérique dans la destruction des matières animales ou végétales après la mort.* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LVI, séance du 20 avril 1863.)

(<sup>2</sup>) PASTEUR, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 19 février 1872.

(<sup>3</sup>) Des recherches récentes faites par Burdon-Sanderson (*Thirteenth Report of the medical Officer of the privy Council*, p. 65), et par William Roberts (*Philosophical Transactions of the royal Society of London*, vol. CLXIV, part. 2, p. 457; 1874) ont confirmé et étendu les résultats trouvés par M. Pasteur sur l'inaltérabilité des liquides organiques au contact de l'air privé de germes.

dernier est mis en relation, par un tube de caoutchouc, avec la branche latérale d'un trocart T. Ce trocart a deux robinets  $r$  et  $r'$ , pouvant tenir le vide,  $r$  qui est traversé par l'aiguille à pointe fine, et  $r'$  qui établit ou interrompt la communication du trocart avec le vase A. L'aiguille et la canule où elle s'engage ont été préparées de telle sorte que l'une soit dans l'autre comme un long piston, parfaitement dressé, et que l'air ne puisse pas se glisser entre les deux, même lorsqu'on retire l'aiguille au-dessus du robinet  $r$  (1).

Cela posé, pour faire une expérience, on met un peu d'eau dans le vase A, on retire l'aiguille et l'on ouvre les deux robinets  $r$  et  $r'$ , puis on fait bouillir. La vapeur d'eau qui se forme, trouvant une issue plus facile par le tube C et la canule que par le tube effilé B, s'échappe bientôt par les deux extrémités ouvertes de T, et tue tous les germes d'organismes qui auraient pu se trouver dans cette partie de l'appareil. Pendant qu'elle sort ainsi, on passe l'aiguille dans la flamme d'une lampe à alcool, on l'introduit dans la canule T et l'on ferme le robinet  $r'$ ; la vapeur s'échappe alors par la seule issue qui lui reste, c'est-à-dire par le tube étiré B, qu'elle porte à son tour à la température de 100 degrés, en détruisant les germes qui pouvaient exister sur sa surface intérieure. Le vase et le tube B sont même chauffés à plus de 100 degrés, parce que, la vapeur éprouvant de la résistance à sortir par une pointe effilée, l'eau bout sous une pression un peu supérieure à la pression extérieure; après un quart d'heure ou une demi-heure d'ébullition, on ferme à la lampe l'extrémité du tube B et l'on retire le feu. L'appareil refroidi a été ainsi purgé d'air, et la pression intérieure n'est plus guère que celle de la vapeur d'eau à la température ambiante. Il n'est pas nécessaire de chasser toute l'eau par l'ébullition; ce liquide ne peut pas nuire ultérieurement.

Supposons maintenant que l'on veuille faire passer dans le vase A le mélange du blanc et du jaune d'un œuf. Après avoir fortement agité cet œuf pour opérer le mélange, on passe la coque dans la flamme à alcool, et avec une tige de fer rougie au feu on perce la coquille d'un petit trou circulaire, dont le diamètre soit égal à celui de la canule du trocart. Il faut éviter de descendre au-dessous de la coque, afin de ne pas atteindre

---

(1) Ce trocart a été construit par M. Collin.

les membranes et les carboniser; puis on introduit l'extrémité du trocart, passée dans la flamme à alcool et refroidie, dans le petit trou qu'on vient de percer, de façon qu'elle plonge le plus possible dans le mélange fluide. On retire ensuite l'aiguille jusqu'au-dessus du robinet *r*, qu'on ferme aussitôt, et l'on ouvre le robinet *r'*. Le mélange contenu dans l'œuf, poussé par la pression atmosphérique, s'élève lentement dans la canule, dans le tube C, et descend dans le vase A, où il se forme une mousse abondante due au dégagement des gaz dissous. L'ouverture du trocart doit toujours baigner dans la matière pour éviter une brusque rentrée de l'air et peut-être une altération ultérieure.

Quand il est passé la quantité voulue du mélange, on ferme le robinet *r'*, et il ne reste plus qu'à rétablir la pression par l'accès d'un air pur, privé de germes actifs. Dans ses expériences sur le sang et l'urine, M. Pasteur faisait rentrer l'air pur aussitôt après l'ébullition de l'eau, et ne conservait dans ses ballons qu'une faible diminution de pression. Ici j'ai fait passer les matières de l'œuf dans un vide presque complet, et introduit ensuite l'air pur, parce que le mélange est visqueux et passe beaucoup moins facilement que le sang et que l'urine dans des tubes très-étroits.

Pour purifier l'air, j'ai mis la pointe effilée du tube B en relation avec un tube fin d'argent, contourné en spirale et chauffé vers 400 degrés (*fig. 3*). En brisant la pointe, l'air est rentré en se dépouillant de ses germes; la mousse est tombée aussitôt.

Il reste à séparer le vase A de toutes les autres parties de l'appareil. On enlève aisément le tube d'argent purificateur; quant au trocart, on le détache en fermant le tube C en *a* avec le dard d'un chalumeau. On a ainsi un vase dont l'intérieur est en communication constante avec l'air atmosphérique, par l'intermédiaire du tube fin B (*fig. 4*).

Lorsqu'on veut opérer avec le blanc seul, et le recueillir sans rompre le jaune, il faut remarquer que le jaune tend toujours à s'élever le plus possible. Il convient alors de redresser le trocart et de placer l'œuf percé au-dessus.

Voici maintenant quelques-unes des expériences que j'ai faites, en opérant comme je viens de l'indiquer :

*Expériences avec les œufs brouillés.* Le 10 février 1873, j'ai mis des œufs frais à l'étuve, afin de déterminer l'évaporation d'une partie de l'eau et la production

d'un vide qui permet plus tard de les brouiller aisément par l'agitation. Le 14 et le 15 mars, j'ai agité dix de ces œufs qui paraissaient sains au mirage, et j'ai opéré sur chacun d'eux, comme il a été dit plus haut, en me servant de tubes fermés à une extrémité pour recueillir le mélange. L'aspect et l'odeur indiquaient des œufs sains, mais un peu vieux; l'examen microscopique a montré qu'ils ne contenaient point d'organismes. Les dix tubes ont été mis à l'étuve.

Dès le 17 mars, le liquide jaune rougeâtre contenu dans tous les tubes a commencé à se séparer en deux parties; au fond se sont tassées lentement des granulations d'un jaune pâle; par-dessus était un liquide rougeâtre et transparent. La couche transparente a augmenté tous les jours, et au bout d'un mois environ la séparation était complète; rien ne s'est altéré. Cet état de conservation se maintient indéfiniment, car actuellement (novembre 1874) rien n'est changé, ni à la limpidité ni à la couleur, dans les tubes qui restent encore. En ouvrant un tube, on constate que l'odeur de la matière est celle des œufs vieux ordinaires; comme dans ces derniers, la masse est alcaline, coagulable par la chaleur, par l'alcool et par les acides; cuite, elle a le même goût qu'un œuf récemment brouillé qu'on fait cuire en même temps. Au microscope, nul organisme n'apparaît, même après l'addition d'eau.

Ainsi, dans ces expériences, le mélange est resté sain, malgré le contact de l'air, lequel pourtant s'est renouvelé sans cesse, par suite des variations de température et de pression, mais en déposant sur les parois du tube effilé tous les germes et particules solides qu'il pouvait contenir. Le volume d'air qui entre ainsi dans un vase est très-notable. M. Balard a calculé que dans un ballon contenant 200 centimètres cubes d'air, en supposant que la température varie de 10 degrés de la nuit au jour, il entre approximativement 1  $\frac{1}{2}$  litre d'air dans l'intervalle de sept mois (<sup>1</sup>).

Le 3 octobre 1874, j'ai fait l'analyse de l'air contenu dans un tube, et j'ai trouvé :

Acide carbonique.....	0,5	pour 100.
Oxygène.....	19,8	"
Azote.....	79,7	"

Comme on le voit, il reste, même après vingt mois, une quantité d'oxygène presque égale à la proportion de ce gaz contenue normalement dans l'air. Il s'est formé un peu d'acide carbonique, ce qui indique

---

(<sup>1</sup>) *Rapport sur les expériences relatives à la génération spontanée. (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LX, séance du 20 février 1865.)*

une très-légère oxydation des matières de l'œuf. L'oxydation des matières organiques au contact de l'air pur a été remarquée depuis longtemps par M. Pasteur, qui a constaté qu'elle varie d'intensité avec la nature de ces matières, qu'elle est plus forte pour le lait, par exemple, que pour l'urine ou l'eau de levûre sucrée (1).

Afin de renouveler l'air d'une façon plus complète que par les variations de pression, j'ai adapté à la pointe effilée C (*fig. 5*) un système aspirateur formé d'un ballon muni de robinets, dans lequel on peut faire un vide partiel à l'aide d'une pompe à main, et j'ai fait communiquer le tube B avec un tube fin d'argent chauffé par une lampe à alcool. Le vase contenant la matière en expérience était placé dans un bain-marie, à une température de 25 degrés environ. La rentrée de l'air était réglée à l'aide d'un petit flacon laveur F et du robinet *r* du ballon. Les tubes en caoutchouc reliant entre elles les différentes parties de l'appareil avaient été portés à 100 degrés dans l'eau bouillante; enfin les extrémités du tube d'argent étaient refroidies dans de petits godets pleins d'eau, pour éviter de fondre le caoutchouc.

J'ai maintenu dans ces conditions, pendant plus d'un mois, un tube contenant le mélange inaltéré du blanc et du jaune d'œuf, en faisant circuler de l'air tous les deux jours. La matière ne s'est pas modifiée : elle est restée aussi saine qu'au début de l'expérience. La présence de l'air, et même d'un air constamment renouvelé, ne suffit donc pas pour déterminer la décomposition des matières animales les plus altérables.

Cependant le mélange conservé à l'air pur n'a point perdu son aptitude à subir la putréfaction. J'ai pris, par exemple, le 5 juin, avec un fil de platine chauffé, quelques organismes à la surface du plancher de la chambre à air d'un œuf pourri, et j'ai laissé tomber ce fil de platine dans l'un des tubes. Le 10 juin, la couche limpide s'était troublée à la surface, par suite de la multiplication des bactéries; le trouble s'est étendu les jours suivants à toute la masse, et au bout d'un mois celle-ci avait une teinte livide et exhalait une forte odeur putride; au microscope, abondance de bactéries et de vibrions.

---

(1) PASTEUR, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LVI, séance du 20 avril 1863.  
*Annales de l'École Normale*. 2<sup>e</sup> Série. Tome IV.

2° *Expérience avec le blanc seul.* — Le 17 et le 18 mars, j'ai traité dix œufs de poule frais, comme il a été dit plus haut pour le blanc. Les tubes de prise ont été mis à la température moyenne de 25 degrés. Le liquide est resté parfaitement limpide dans tous les tubes, tandis que dans un tube témoin, préparé sans précaution, il s'est développé des bactéries et des moisissures. Le blanc conservé n'a point perdu son altérabilité, car il a suffi de laisser tomber dans l'un des tubes de l'expérience quelques organismes provenant d'un œuf pourri pour que cinq jours après, comme avec les œufs brouillés, la limpidité ait disparu, et que l'altération ait été générale avec développement de petits infusoires.

L'analyse de l'air contenu dans un tube a donné :

Acide carbonique.....	0,6
Oxygène.....	18,5
Azote.....	80,9
	<hr/>
	100,0

Le blanc seul n'est donc point plus oxydable que le mélange du blanc et du jaune.

Dans les expériences précédentes, les tubes préparés avec soin sont tous restés sains. On pourrait se demander la cause de ce fait, sachant par les observations antérieures que la proportion des œufs qui s'altèrent est très-variable, et surtout en admettant que les germes d'organismes préexistent dans les œufs susceptibles de s'altérer. Il semble qu'un certain nombre de préparations auraient dû donner une altération quelconque. Nous remarquerons d'abord que les mélanges de blanc et de jaune provenaient d'œufs restés sains pendant plus d'un mois, à 25 degrés, et dans lesquels, par conséquent, il ne devait pas exister d'organismes, car, sans cela, ils eussent été gâtés depuis plusieurs jours. Quant aux blancs, ils venaient, il est vrai, d'œufs frais; mais, comme les organismes renfermés dans l'œuf, au moment de la ponte, sont rares et déposés vraisemblablement dans l'épaisseur des membranes ou dans le blanc tout près d'elles, on conçoit qu'une prise faite sur une partie seulement du contenu, en attaquant un seul point de la membrane, se conserve très-bien, tandis que toute la masse de l'œuf, maintenue au contact de tous les points de la membrane, se serait altérée en peu de temps. Dans ce genre d'expériences, la proportion des œufs gâtés doit donc diminuer; car, pour obtenir l'altération, il faut

avoir la chance de recueillir, en même temps que les matières de l'œuf, un ou plusieurs des germes qu'il porte en lui-même. Ce sera facile si l'œuf est déjà en voie d'altération; ce sera très-rare s'il est encore frais.

Il importe peu d'ailleurs qu'il se soit trouvé, ou non, des tubes altérés; ce que je voulais prouver, ce n'est pas que les œufs se corrompent, mais bien qu'il y a des œufs brouillés qui ne se corrompent pas.

La méthode expérimentale qui vient d'être décrite, et dont le principe a été si heureusement imaginé par M. Pasteur, présente l'avantage considérable de pouvoir faire passer dans un récipient convenablement préparé, et d'exposer au contact de l'air pur, un liquide organique quelconque, *dans l'état même où il se trouve*, c'est-à-dire avec tous les éléments figurés, cellules ou proto-organismes qu'il peut contenir, sans qu'il ait subi l'action d'une température élevée. C'est le seul procédé qui permette de détruire et d'éloigner les germes atmosphériques, dont le développement troublerait celui des germes normalement renfermés dans ce liquide. De la sorte, toute transformation capable de se manifester dans les matériaux recueillis, en présence de l'air, ou mieux de l'oxygène, s'accomplit aisément à l'exclusion de toute autre. Ce procédé est bien supérieur, par exemple, à celui que M. Béchamp voudrait lui substituer, et qui consiste à soumettre la liqueur à conserver à l'action d'une dose non coagulante de créosote ou d'acide phénique. L'introduction de produits antiseptiques ne peut que troubler les réactions naturelles, soit qu'ils interviennent directement dans ces réactions, soit qu'ils empêchent à la fois la naissance et l'évolution des ferments de l'atmosphère et de ceux qui préexistent dans les liquides (1).

---

(1) Dans la Note que j'ai déjà citée, du 8 septembre 1873, M. Béchamp oppose de nouveau sa méthode à celle de M. Pasteur. « Il est donc démontré, dit-il, que la nouvelle méthode empêche les fermentations, parce qu'elle s'oppose à la naissance des ferments organisés par les germes atmosphériques. La méthode de M. Pasteur empêche les mêmes manifestations, parce qu'elle tue les germes ou s'oppose à leur arrivée dans le milieu fermentescible. » (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVII, p. 616.) De l'avis même de M. Béchamp, cette dernière a donc sur l'autre le double avantage de tuer, non simplement de paralyser les ferments figurés et de n'introduire rien d'étranger dans les liqueurs fermentescibles.

2. *Putréfaction dans des œufs d'oiseaux autres que ceux de la poule.*  
— Cette étude a complètement confirmé les résultats qu'avaient donnés les œufs de poule.

*Œufs de dinde.* — Le 17 janvier, mis à l'étuve dans un cristallin dix œufs de dinde brouillés et douze non brouillés. Les derniers œufs examinés l'ont été le 7 mars. Voici le résultat :

*Œufs brouillés.*

Pourris.....	6
Non pourris.....	<u>4</u>
Total.....	10

*Œufs non brouillés.*

Pourris.....	9
Non pourris.....	<u>3</u>
Total.....	12

Tous les œufs pourris présentent des organismes en nombre variable; ce sont surtout des bactéries très-petites, très-pâles et très-mobiles, que j'ai déjà signalées. Tous les œufs non pourris sont sans organismes.

*Œufs de cane.* — 1<sup>o</sup> Expérience du 28 décembre 1872.

*Œufs brouillés.*

Pourris.....	1
Non pourris.....	<u>6</u>
Total.....	7

*Œufs non brouillés.*

Pourris.....	3
Non pourris.....	<u>5</u>
Total.....	8

2<sup>o</sup> Expérience du 26 avril 1873.

*Œufs non brouillés.*

Pourris.....	18
Non pourris.....	<u>18</u>
Total.....	36



Les œufs de cane ont la coque plus épaisse que les œufs de poule ; le jaune est enfermé dans une membrane résistante qui se rompt difficilement par l'agitation et qui empêche le mélange intime du blanc et du jaune.

*Œufs de pigeon.* — Ces œufs se sont comportés comme ceux de poule et comme les précédents.

*Œufs d'autruche.* — J'ai déjà dit que, lorsqu'ils pourrissent, ils contiennent des vibrions très-nets.

Ainsi, quel que soit le volume, quelles que soient la densité et l'épaisseur de la coque, le résultat est général.

3. *Influence de l'eau introduite à travers la coquille.* — Dans quelques-unes de ses expériences, M. Donné a fait pénétrer de l'eau dans des œufs et a constaté que, dans tous les cas, la putréfaction se déclarait rapidement, sans que la matière décomposée offrit la moindre trace d'êtres organisés du règne végétal ou du règne animal.

Rien n'est plus facile que de faire entrer de l'eau à travers la coquille. Pour cela, on place les œufs dans un vase plein d'eau, sous la cloche de la machine pneumatique ; en faisant le vide, les gaz de l'intérieur se dégagent par une multitude de points. Quand le dégagement a cessé, on rétablit la pression en laissant rentrer l'air extérieur sous la cloche, et ainsi l'eau chassée par l'excès de pression s'introduit par tous les pores. C'est une expérience classique connue depuis longtemps.

La quantité d'eau qui entre dans un œuf augmente avec l'âge de l'œuf, c'est-à-dire avec la capacité de sa chambre à air. Cela est établi par les pesées suivantes :

1° Œufs frais pondus depuis deux et trois jours :

N <sup>os</sup>	Poids sans eau.	Poids avec eau.	Augmentation.
1.....	63,06 <sup>gr</sup>	63,96 <sup>gr</sup>	0,90 <sup>gr</sup>
2.....	63,56	63,95	0,39
3.....	63,47	64,58	1,11
4.....	63,20	63,74	0,54
5.....	58,97	59,55	0,58
6.....	56,68	57,23	0,55

## 2° OEufs vieux conservés à 10 degrés pendant un mois :

N <sup>os</sup>	Poids sans eau.	Poids avec eau.	Augmentation.
1.....	60, <sup>gr</sup> 95	62, <sup>gr</sup> 18	1, <sup>gr</sup> 23
2.. .....	60,93	62,54	1,61
3.....	59,03	60,63	1,60
4.....	59,22	(S'est brisé)	»
5.....	51,59	52,87	1,28
6.....	49,76	50,35	0,59

## 3° OEufs vieux conservés à 20 degrés pendant un mois et demi :

N <sup>os</sup>	Poids sans eau.	Poids avec eau.	Augmentation.
1.....	46, <sup>gr</sup> 50	52, <sup>gr</sup> 51	6, <sup>gr</sup> 01
2.....	49,09	56,49	7,40
3.....	48,00	51,99	3,99
4.....	52,16	58,87	6,71
5.....	40,32	46,43	6,11
6....	36,61	37,90	1,29

On voit l'influence de l'âge. Pour des œufs de même âge, placés dans les mêmes conditions, le poids d'eau qui pénètre à travers la coque varie beaucoup. Ces variations, qui n'ont rien de commun avec le volume, tiennent sans doute à la différence de perméabilité des coquilles.

Les œufs brouillés absorbent moins d'eau que les œufs non brouillés. Voici quelques pesées comparatives :

OEufs *brouillés* conservés à l'étuve depuis le 13 février et agités le 24 mars :

N <sup>os</sup>	Poids sans eau.	Poids avec eau.	Augmentation.
1.....	53, <sup>gr</sup> 95	54,43	0,48
2 .....	48,84	50,50	1,66
3.....	47,60	47,82	0,22
4....	40,80	40,89	0,09
5.....	37,10	37,13	0,03
6.....	38,16	38,38	0,22

Œufs non brouillés conservés, comme les précédents, depuis le 13 février et mis en expérience le 25 mars :

N <sup>os</sup>	Poids sans eau.	Poids avec eau.	Augmentation.
1.....	39,62 <sup>gr</sup>	44,97 <sup>gr</sup>	5,35 <sup>gr</sup>
2.....	52,18	56,32	4,14
3.....	51,84	60,30	8,46
4.....	51,17	58,71	7,54
5.....	58,83	63,64	4,81
6.....	43,17	47,97	4,80

Ainsi l'augmentation de poids est considérable avec les œufs non brouillés, et très-faible avec les œufs agités et brouillés; elle est toujours très-variable pour une même série (1).

Avec les œufs non brouillés, on peut avoir des différences nulles et même des pertes de poids. Par exemple, avec des œufs conservés à l'étuve depuis le 8 février, et brouillés le 22 mars, j'ai obtenu le résultat suivant :

N <sup>os</sup>	Poids avant.	Poids après.	Augmentation.
1.....	54,45 <sup>gr</sup>	58,56 <sup>gr</sup>	+ 3,11
2.....	51,24	51,33	+ 0,09
3.....	58,05	58,05	0,00
4.....	44,18	44,45	+ 0,27
5.....	40,81	40,71	- 0,10
6.....	37,86	37,98	+ 0,12

Dans cette expérience, un peu d'albumine avait traversé la coque et

(1) La chambre à air se réduit rarement à zéro; jamais elle ne contient de liquide, bien que les pores par où pénètre l'eau existent sur toute l'étendue de la coque, aussi bien en regard de la chambre à air que sur les autres parties. Cela s'explique par le grand pouvoir endosmotique des membranes de l'œuf qui fait pénétrer dans le blanc, à travers le plancher de la chambre à air, toute l'eau primitivement contenue dans cette chambre. On peut le vérifier directement.

J'ai montré que le pouvoir endosmotique des membranes de l'œuf est considérable de la surface extérieure à la surface intérieure et presque nul en sens inverse. (Voir aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences, séance du 23 mars 1874.)

flottait dans l'eau où plongeaient les œufs : ainsi s'expliquent les différences négatives ou nulles.

La quantité d'albumine qui sort au moment où l'on fait le vide est trop faible pour rendre compte de la façon différente dont se comportent les œufs brouillés et les œufs non brouillés. Il est probable que l'air dissous par l'agitation dans les premiers, et retenu dans des bulles à parois visqueuses, a de la peine à se dégager dans le vide, qu'il provoque par sa dilatation une augmentation du volume des bulles, et presse le contenu contre les parois de la coque, assez même pour en faire sortir. Les pores, ainsi embarrassés et à moitié fermés, ne laissent plus passer facilement l'eau extérieure lorsqu'on rétablit la pression atmosphérique. La pression intérieure ayant aussi moins diminué que dans un œuf intact, l'eau se trouve, pour cette nouvelle cause, poussée moins fortement, et pénètre en quantité plus faible que dans un œuf non agité. On observe d'ailleurs que dans le vide le dégagement gazeux est toujours beaucoup plus abondant avec les œufs non agités qu'avec les autres.

J'ai fait avec l'eau un très-grand nombre d'expériences. J'ai trouvé, comme M. Donné, que la facilité avec laquelle s'altèrent les œufs ainsi préparés est extrême, et que, généralement après quinze jours de séjour à l'étuve, la putréfaction, quand elle se déclarait, était complète; mais, contrairement aux observations de ce savant, j'ai toujours trouvé des organismes, bactéries ou vibrions, à l'intérieur des œufs pourris dans ces conditions.

S'il est rare, dans ces expériences, de ne pas avoir la putréfaction, on peut cependant, en prenant les précautions convenables, introduire de l'eau dans les œufs sans qu'elle se produise. D'où peuvent venir, en effet, les organismes qui dans ce cas provoquent la putréfaction? Ils peuvent exister dans l'intérieur de l'œuf ou être amenés de l'extérieur par l'eau qui pénètre à travers la coque. La première origine explique la putréfaction des œufs ordinaires; la seconde prend ici une importance considérable, car l'eau avec laquelle on opère, le vase qui la contient et surtout la surface des œufs, sont des sources extrêmement abondantes d'êtres microscopiques. Si donc on opère sans précautions, toutes ces causes d'altérations s'ajouteront à celles qui sont naturellement dans l'œuf, et l'on attribuera à l'eau seule les modifications dues exclusivement aux organismes qu'elle apportait avec elle. Que l'on

prene au contraire le soin de chauffer préalablement le vase, de faire bouillir l'eau, de passer rapidement les œufs dans la flamme à alcool, et l'on éliminera la plus grande partie et quelquefois la totalité des causes extérieures dont nous venons de parler. Il ne restera que les causes intérieures, celles qui agissent seules dans les conditions ordinaires de la putréfaction. En opérant ainsi, on peut obtenir des œufs qui ne s'altèrent point. Je citerai les expériences suivantes :

1° Le 29 mars, je fais pénétrer de l'eau de levûre bouillie dans six œufs un peu vieux. Malgré cet élément nouveau, si facilement altérable, je trouve que, même après un mois et demi de séjour à l'étuve, deux de ces œufs sont restés sans organismes et sans putréfaction, tandis que les quatre autres se sont pourris rapidement avec production d'organismes nombreux.

2° Le 29 juin, je fais pénétrer de l'eau distillée bouillie dans quatre œufs frais et je les abandonne à la température ambiante de l'été. Un mois et demi après, je trouve trois œufs parfaitement sains; le quatrième est complètement pourri avec organismes nombreux mobiles et immobiles.

3° Expérience avec l'eau distillée bouillie et six œufs frais. Un mois après, aucun de ces œufs ne s'est gâté. Cependant ils avaient bien absorbé de l'eau, car dans quatre œufs, frais aussi, placés dans les mêmes conditions, il est entré une moyenne de 1<sup>er</sup>, 34 d'eau par œuf.

4° Autre expérience avec six œufs vieux, mais après avoir fait bouillir l'eau distillée sous pression à la température de 105 degrés. Un mois après, tous ces œufs sont sains, malgré la grande quantité d'eau qu'ils avaient absorbée.

Je pourrais encore multiplier les exemples; mais ceux-là suffisent pour montrer que l'on peut faire entrer de l'eau dans des œufs sans qu'ils se putréfient, que l'eau soit pure ou riche en éléments nutritifs, que les œufs soient vieux ou jeunes, que la température à laquelle on les expose soit celle d'une étuve ou celle de l'été; on voit seulement que plus on prend de précautions pour éloigner les germes de la surface et de l'eau employée, plus on écarte les causes d'altération.

4. *Putréfaction dans quelques gaz différents de l'air.* — La putréfaction est généralement attribuée à l'influence de l'air. Les œufs que j'ai obtenus pourris sous le mercure, et dans lesquels la petite quantité d'oxygène de la chambre à air a été rapidement absorbée, ont montré que cet élément gazeux n'est point nécessaire, du moins dans la plus grande partie du phénomène.

Il paraît être inutile même au début, car j'ai eu des œufs pourris dans

des conditions où il n'existait point du tout d'oxygène. Ainsi un œuf de poule a été renfermé dans un gros tube de verre muni d'un tube abducteur. Avec la machine pneumatique à mercure, le vide complet a été fait et maintenu pendant quelques jours; puis on a rempli l'appareil avec de l'hydrogène pur. Le tube, fermé à la lampe et détaché de la machine, a été conservé à l'étuve pendant plusieurs mois. L'œuf s'est pourri, et le gaz intérieur, dont la pression avait augmenté, contenait, outre l'hydrogène, de l'hydrogène sulfuré et de l'acide carbonique, avec des traces d'azote. Dans cette expérience, tout le gaz contenu dans la chambre à air, et même celui qui pouvait être dissous dans le blanc, avait été enlevé par le vide (1).

L'expérience, répétée sans introduire de l'hydrogène, a donné le même résultat.

Voici maintenant ce que j'ai obtenu à la pression ordinaire, avec l'hydrogène et l'acide carbonique, comparativement avec l'air :

Le 17 décembre 1872, j'ai placé respectivement sous trois cloches tubulées, exactement appliquées sur un disque de verre dépoli, six œufs brouillés et six œufs non brouillés. Dans la première cloche, j'ai fait passer à plusieurs reprises un courant d'hydrogène; dans la seconde, de l'acide carbonique, et dans la troisième de l'air ordinaire. La température était de 25 degrés environ (2).

Les œufs ont été examinés à diverses époques, les derniers en avril et mai 1873 :

		<i>Air.</i>			
		Non agitées.	Agitées.		
a.	Sain; pas d'organismes.				α. Pas putride; pas de bactéries; moisissures.
b.	Id. Id.				β. Pas putride; pas de bactéries; moisissures.
c.	Id. Id.				γ. Sain; pas d'organismes.

(1) Lorsqu'on maintient des œufs entiers, frais et sains, dans le vide produit par la pompe à mercure, on obtient un dégagement continu de gaz, où domine l'acide carbonique. Ce phénomène, dont je poursuis l'étude, a peut-être quelque analogie avec les faits observés par MM. N. Gréhant et E. Modrzejewski sur le sang et le blanc d'œuf. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences, séance du 27 juillet 1874.*)

(2) Dès le 23 décembre, les œufs placés dans l'atmosphère d'hydrogène étaient recouverts de petites taches blanches circulaires, d'un aspect pulvérulent, et de houppes blanches de moisissures. Rien de semblable dans l'acide carbonique ni dans l'air.

Non agités.		Agités.	
d.	Sain; pas d'organismes.	δ.	Sain; pas d'organismes.
e.	Id. Id.	ε.	Putride; vibrions.
f.	Id. Id.	ζ.	Pas putride; pas de bactéries; moisissures.

*Acide carbonique.*

Non agités.		Agités.	
a'.	Putride; vibrions.	α'.	Putride; vibrions.
b'.	Sain; pas d'organismes.	β'.	Id. Id.
c'.	Putride; vibrions.	γ'.	Id. Id.
d'.	Sain; pas d'organismes.	δ'.	Id. Id.
e'.	Id. Id.	ε'.	Id. Id.
f'.	Putride; vibrions.	ζ'.	Id. Id.

*Hydrogène.*

Non agités.		Agités.	
a''.	Putride; vibrions; moisissures.	α''.	Putride; vibrions.
b''.	Putride; vibrions.	β''.	Id. Id.
c''.	Id. Id.	γ''.	Id. Id.
d''.	Id. Id.	δ''.	Id. Id.
e''.	Id. Id.	ε''.	Putride; vibrions; moisiss. (¹).
f''.	Id. Id.	ζ''.	Putride; vibrions.

On voit donc que dans l'hydrogène et l'acide carbonique, c'est-à-dire dans des gaz qui ne renferment pas d'oxygène, des œufs, agités ou non, pourrissent aussi bien que dans l'air. Il semble même qu'ils y pourrissent plus facilement. Dans tous les œufs sains, je n'ai point rencontré d'organismes microscopiques; dans tous les œufs pourris, au contraire, j'ai vu de petits infusoires de la nature des vibrions.

L'odeur qui se dégage des œufs pourris dans l'hydrogène et dans l'acide carbonique rappelle celle de tous les œufs pourris sans air.

La réaction est alcaline dans l'acide carbonique et dans l'hydrogène, tandis qu'elle est légèrement acide dans l'air.

Les résultats précédents diffèrent de ceux que M. Crace-Calvert a publiés dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (²). L'auteur a

(¹) On remarquera que les moisissures de la surface n'ont pénétré que dans deux œufs.

(²) T. LXXVII, p. 1024; 1873.

trouvé en effet, en cherchant l'influence qu'exercent certains gaz sur la conservation des œufs, que dans l'hydrogène les œufs, entiers ou percés, tout en se recouvrant d'un léger duvet de moisissures, restent sains et que, dans l'acide carbonique, ils n'offrent même pas de moisissures. Il est possible que la contradiction que je signale soit due à la différence des températures auxquelles les expériences ont été faites. M. Crace-Calvert, préoccupé seulement de conserver les œufs, avait dû les laisser à la température ordinaire, tandis que dans mes essais je les ai toujours placés à la température moyenne de 25 degrés.

5. *De la putréfaction dans les œufs non fécondés.* — Il m'a semblé intéressant de rechercher si le degré d'altérabilité des œufs dépend en quelque chose de leur fécondation. J'y ai d'ailleurs été conduit par la divergence que j'ai remarquée dans les observations de Réaumur et quelques expériences de MM. Prévost et Dumas.

Ainsi Réaumur s'exprime en deux endroits de la façon la plus différente. On lit en effet, dans ses *Mémoires pour servir à l'histoire des Insectes* : « Dans l'air qui n'a que le degré de chaleur que nous appelons du froid, l'œuf se conserve sain pendant un temps assez long; l'œuf se corrompt s'il est dans un air chaud, et se corrompt d'autant plus vite que la chaleur de l'air est plus considérable; et cela pourtant seulement jusqu'à ce que la chaleur qui agit sur l'œuf soit à un certain degré; si elle passe ce degré, elle produit le développement et l'accroissement du poulet. Alors l'œuf ne se corrompt point; si la même chaleur agissait sur un œuf qui ne fût pas fécondé, elle le ferait corrompre très-vite (1). »

On lit, au contraire, dans son *Art de faire éclore et d'élever en toute saison des oiseaux domestiques* : « Quand les œufs n'ont point de germe, ils ne sont point sujets à se corrompre (2). » Réaumur revient plus tard sur le même sujet et cite par exemple l'expérience suivante : « J'ai tenu, dit-il, quatre poules sans coq dans une grande cage où rien d'ailleurs ne leur manquait; elles y ont pondu. J'ai fait couvrir les premiers œufs qu'elles m'ont donnés; pendant quelques semaines, des poulets en

---

(1) T. II, p. 44.

(2) T. I, p. 251.



sont éclos et ont péri dans la coquille. Enfin est venu un temps où les œufs qui avaient été fécondés avant que les poules eussent été renfermées dans la cage ont été épuisés ; tous ceux qu'elles ont pondus dans la suite sont restés clairs dans le four où ils ont été couvés ; il ne s'y est point formé de poulets et ils ne s'y sont point corrompus ; ils sont restés sains, quoiqu'ils aient été environnés d'un air chaud, à ce degré qui fait éclore les poulets, pendant plus de trente, et quelquefois pendant quarante à cinquante jours (¹). »

Et comme conséquence, Réaumur propose un moyen nouveau de conserver les œufs : « Pour avoir des œufs qui se conserveraient depuis le printemps jusqu'au milieu ou jusqu'à la fin de l'hiver, il ne faudrait donc que priver les poules de tout commerce avec les coqs. »

MM. Prévost et Dumas, tout en remarquant que les œufs non fécondés peuvent supporter « l'incubation ordinaire sans manifester de symptômes de putréfaction appréciables », citent cependant une expérience où trois œufs stériles sur douze ont exhalé une très-grande puanteur pendant la durée d'une incubation, c'est-à-dire au moins pendant trois semaines. « Il n'en est pas de même, disent-ils, si l'on continue, et vers le trentième ou quarantième jour ils exhalent tous une odeur infecte, qui se perçoit aisément, même à travers la coquille (²). »

Mes expériences ont été faites à 25 degrés, température à laquelle la putréfaction dans les œufs ordinaires s'est maintes fois déclarée :

1° Je me suis procuré une poule jeune, qui n'avait jamais pondu, et je l'ai tenue privée de coq. Elle m'a donné, en deux périodes, vingt-deux œufs que j'ai numérotés et mis au frais, c'est-à-dire à 10 degrés environ, à mesure qu'ils étaient pondus, jusqu'à ce que j'eusse recueilli le dernier.

Le 10 avril, tous les œufs ont été mis à l'étuve. Le 11 juin, deux mois après, ils sont tous transparents au mirage et paraissent conservés ; je les agite, je les brouille, et ils restent encore plusieurs mois à l'étuve sans éprouver de putréfaction.

2° L'expérience suivante a été faite avec des œufs pondus par des poules différentes, qui ont été privées de coq, à partir du jour où le premier œuf a été recueilli. J'ai mis trente-deux de ces œufs à l'étuve, et quelques jours

---

(¹) T. II, p. 289.

(²) *Annales des Sciences naturelles*, 1<sup>re</sup> série, t. IV, p. 50.

après j'en ai agité et brouillé la moitié. Voici le résultat obtenu après trois mois :

État des œufs.	OŒufs brouillés.	OŒufs non brouillés.
Altérés.....	5	3
Non altérés.....	11	13
Totaux.....	16	16

Inutile d'ajouter que les œufs altérés contenaient un très-grand nombre d'organismes microscopiques.

On sait qu'une poule peut donner six à huit œufs féconds après son dernier accouplement avec un coq; il serait donc possible qu'une grande partie des œufs gâtés dans cette dernière expérience, et peut-être ceux qui se sont pourris dans les expériences de MM. Prévost et Dumas, fussent des œufs de cette sorte; le résultat obtenu avec les œufs véritablement stériles de la première expérience semblerait confirmer cette hypothèse.

Rien ne prouve cependant que, parmi les œufs altérés, il n'y avait pas aussi des œufs non fécondés; car le fait seul de l'absence de *germes* ne suffit point, comme le pensait Réaumur, pour empêcher l'altération des œufs *clairs*. En effet, si l'on ouvre un de ces œufs à l'air ordinaire ou si l'on y fait pénétrer des organismes, il manifeste bientôt tous les caractères d'une putréfaction véritable, avec développement de nombreux vibrioniens.

Les œufs non fécondés paraissent toutefois résister plus longtemps que les autres à la putréfaction; mais il faut en chercher la cause dans l'absence d'organismes, soit dans leurs masses, soit à la surface de leurs membranes. J'essayerai plus loin d'en rendre compte.

6. *Altérations des embryons de poulets morts dans leurs coques.* — J'ai recherché quelles altérations les embryons de poulets morts dans leurs coques pouvaient éprouver, et si, dans le cas de la putréfaction, ils étaient le siège du développement d'organismes microscopiques. J'ai déjà dit que M. Donné était arrivé, pour ce cas particulier, à un résultat général rappelant celui qu'il avait observé avec les œufs ordinaires non soumis à l'incubation, à savoir que les embryons morts ne tardaient pas à présenter les caractères de la putréfaction, mais

que jamais il ne s'y trouvait le moindre être organisé. Cependant MM. Béchamp et Estor, recherchant un peu plus tard le rôle des microzymas dans le développement du poulet, ont observé des bactéries dans les organes et dans les membres d'un embryon mort.

Le 25 mars 1873, j'ai mis onze œufs à l'incubation dans une étuve dont la température moyenne est restée de 38 degrés; les œufs étaient déposés dans une cuvette plate en porcelaine. Les cinq premiers ont été retirés au bout de six jours, les autres au bout de dix jours. Par une simple exposition à la température ordinaire, les embryons sont morts dans leurs coques; je les ai ensuite placés dans une autre étuve dont la température moyenne était de 25 degrés.

*Œufs retirés après six jours d'incubation.*

N<sup>os</sup>

1...	Examiné le 31 mars.	Embryon bien développé.
2...	Examiné le 21 mai.	Clair; pas d'embryon; non altéré.
3...	Id.	Id. Id. Id.
4...	Id.	Embryon bien développé; pas de putréfaction.
5...	Id.	Embryon bien développé; putréfaction déclarée; organismes sur le plancher de la chambre à air, entre la coque et la membrane, dans la masse de l'embryon.

*Œufs retirés après dix jours d'incubation.*

6...	Examiné le 4 avril.	Embryon bien développé.
7...	Examiné le 22 mai.	Clair; pas d'embryon; non altéré.
8...	Id.	Embryon mal développé adhérent à la coque, entouré de petits mamelons blancs cristallins; point putride; pas d'organismes.
9...	Id.	Embryon bien développé, flasque, se déchire facilement; cristaux; pas de putréfaction; pas d'organismes.
10...	Id.	Comme le numéro 9.
11...	Id.	Comme le numéro 9.

Ces trois derniers sont surtout caractérisés par une odeur fade, mais non putride; par l'absence d'organismes dans les différentes parties des membranes et des tissus; par la grande flaccidité du petit embryon, sa faible résistance à la traction; par une multitude d'aiguilles isolées ou formant des mamelons blancs dans les divers organes : cœur, poumon,

foie, intestin, masse cérébrale; enfin par la disparition des globules sanguins et une coloration plus brune que dans les embryons de six jours.

Les embryons n<sup>os</sup> 1 et 6, mis dans l'eau, n'ont pas tardé à se putréfier en dégageant une odeur repoussante, avec production de nombreux bâtonnets très-agiles.

Dans d'autres expériences, j'ai fait périr l'embryon après quinze et vingt jours d'incubation, et j'ai obtenu les mêmes résultats : quelques œufs dans lesquels l'embryon était en pleine putréfaction, avec bâtonnets mobiles; les autres, dans lesquels l'embryon, pas le moins du monde putride, présentait une altération spéciale, caractérisée toujours par l'absence d'organismes, par une odeur fade, des cristaux, etc., comme plus haut; seulement, dans ce cas, les tissus étaient beaucoup plus foncés, ils avaient pris une teinte rouge brun, et les cadavres étaient comme injectés par une sérosité sanguinolente.

La flaccidité va en diminuant quand l'âge de l'embryon mort augmente, ou, du moins, il faut plus longtemps à un embryon de vingt jours pour présenter complètement ce caractère qu'à un embryon de dix jours, et surtout de six jours. Elle était assez considérable avec ces derniers pour qu'en suspendant le petit poulet par une patte le reste du corps se détachât de lui-même.

La différence précédente peut tenir à plusieurs causes. La formation des tissus et des os est beaucoup moins avancée dans un jeune embryon, et la résistance de ces éléments est moindre; en outre, le petit poulet baigne encore dans une couche épaisse de blanc, dont l'humidité est sans doute favorable aux réactions chimiques qui amènent sa désorganisation; enfin, l'incubation ayant duré moins longtemps, la quantité d'humidité disparue par évaporation est plus faible.

Ainsi les différents éléments du poulet sont, comme ceux de l'œuf, absolument imputrescibles, tant que des bactéries ou des vibrions, pour le développement desquels ils constituent un milieu éminemment favorable, n'ont pu y prendre naissance, par l'apport soit de leurs germes, soit d'individus tout formés. Cependant le poulet mort subit des modifications profondes, dont l'effet est surtout de désagréger les globules sanguins, de ramollir les tissus et de produire de nombreux cristaux. Cette altération est sans doute de même ordre que celles que

plusieurs auteurs, Réaumur <sup>(1)</sup>, M. Panceri <sup>(2)</sup>, et plus récemment M. Ch. Rivière <sup>(3)</sup>, ont signalées dans leurs écrits.

Ces faits rappellent ceux que l'on observe chez les Mammifères, lorsque le fœtus meurt dans le sein de la mère et y reste plusieurs jours ou plusieurs mois avant son expulsion.

On sait, en effet, que le fœtus mort qui séjourne dans la cavité utérine peut y subir trois modifications principales : la *macération*, la *momification*, la *putréfaction* <sup>(4)</sup>.

Suivant les auteurs, les deux premiers états s'observent lorsque le fœtus est mort dans les premiers mois de la grossesse; le troisième ne se rencontre que dans les derniers mois, et seulement lorsque, par une cause quelconque, la cavité utérine a été mise en communication avec l'air extérieur. Dans ce cas, ce serait l'air, ou mieux l'oxygène de l'air, qui, en pénétrant dans l'utérus, provoquerait la putréfaction rapide du fœtus <sup>(5)</sup>. Il ne m'a pas été donné d'observer de fœtus putréfié, et par conséquent je n'ai point pu constater si cette décomposition était corréla-

<sup>(1)</sup> Voir *Historique*.

<sup>(2)</sup> *De la coloration de l'albumen des œufs de poule et des cryptogames qui croissent dans les œufs* (*Atti della Società italiana di Scienze naturali*, t. II; 1860). L'auteur cite un embryon de trois jours qui s'était conservé comme momifié, sans putréfaction.

<sup>(3)</sup> *Deuxième Étude sur l'éducation des autruches en Algérie* (*Bulletin de la Société d'acclimatation*, septembre-octobre 1870). M. Ch. Rivière, voulant essayer d'achever l'incubation d'œufs d'autruche que le mâle avait abandonnés, les plaça dans une serre sur un lit de ouate recouvert d'une cloche. « Au bout d'une dizaine de jours de ce traitement, dit-il, n'obtenant aucun résultat, je fis céder la coquille et trouvai les petits parfaitement conformés, mais sans vie, sans cependant être entrés en décomposition. »

<sup>(4)</sup> Dans la macération, l'odeur est douce, fade et pénétrante, la couleur est d'un rouge brun, plus ou moins vif, suivant la durée; la peau est imbibée par une sorte de sérosité sanguinolente qui soulève parfois l'épiderme sous forme de bulles; l'épiderme se détache avec facilité sur toute la surface du corps; le cadavre est d'une flaccidité telle que la tête, dont les os devenus mous et mobiles vacillent les uns sur les autres, s'aplatit sur elle-même sous l'influence de la pesanteur; enfin il y a absence complète de gaz dans la cavité utérine.

Dans la momification, le fœtus n'exhale aucune odeur; il a la peau sèche, comme tannée; les viscères sont presque atrophiés; on le dirait desséché, comme s'il était resté longtemps dans l'alcool.

Enfin la putréfaction du fœtus, semblable à toutes les décompositions de ce genre, s'accompagne de tuméfaction des parties, de dégagement de gaz, d'exhalaisons infectes et de coloration verdâtre des tissus.

<sup>(5)</sup> On trouve des observations intéressantes et des renseignements précis sur ce sujet dans la thèse du D<sup>r</sup> LEMPERRER : *Des altérations que subit le fœtus après sa mort dans le*

tive du développement d'organismes microscopiques; mais, depuis les recherches de M. Pasteur, cette corrélation n'est pas douteuse. Si l'air est nécessaire, il n'agit évidemment qu'en apportant ses germes, qu'il dépose dans un milieu dont la composition et la température sont très-propres à leur développement (1).

Je dois, en revanche, à l'obligeance de M. de Soyres, chef de la clinique d'accouchement de M. Depaul, d'avoir pu examiner à loisir un enfant mort-né dans un état de parfaite macération. L'observation que je rapporte avec détails dans la Note ci-dessous (2) ne laisse aucun doute; les modifications spéciales qui caractérisent la macération, et qui diffèrent de la putréfaction, ne sont point simultanées du développement de bactéries ou de vibrions. Le fœtus macéré présente donc à ce

- *sein maternel*, 1867; — dans le Mémoire couronné du D<sup>r</sup> SENTEX : *Des altérations que subit le fœtus après sa mort dans la cavité utérine et de leur valeur médico-légale*, 1868; — et dans l'article *fœtus*, de M. BAILLY, dans le *Nouveau Dictionnaire de Médecine et de Chirurgie pratiques*, du D<sup>r</sup> Jaccoud.

(1) La putréfaction du fœtus n'arrive-t-elle que si l'air extérieur pénètre dans l'utérus? Je crois que, dans certaines circonstances, elle peut avoir pour cause des organismes venant de la mère, sans aucune influence de l'air extérieur.

(2) Le 22 juillet 1873, à 5 heures du soir, observation d'un enfant mort-né le 21 juillet à 7 heures du soir. Le fœtus est resté depuis sa naissance, c'est-à-dire pendant vingt-deux heures environ, enveloppé dans un linge, à la température d'un petit amphithéâtre, laquelle dans la journée a dépassé 30 degrés à l'ombre.

Le fœtus, de cinq mois et demi environ, est resté mort à peu près trois semaines dans le sein de sa mère, femme syphilitique.

*État général.* — Odeur un peu fade, mais non putride.

La tête est d'un gris foncé, le thorax et l'abdomen ont une coloration rouge brun beaucoup plus foncée à l'abdomen et surtout à la base du cordon ombilical; les membres ont la même couleur dans tous les points où l'épiderme est enlevé; celui-ci s'enlève d'ailleurs avec la plus grande facilité en pellicules blanches et minces, surtout aux membres; il est plus adhérent sur la peau de la tête.

Le cordon est verdâtre.

Flaccidité assez prononcée dans la partie abdominale, moins grande dans la région thoracique; la tête n'est pas aplatie.

Sérosité sanguinolente dans l'abdomen, dans le thorax et sous le cuir chevelu.

Les viscères ont en général une coloration rouge brun ou violet foncé.

*Examen microscopique.* — Surface de l'épiderme de l'abdomen dans le voisinage du cordon : milliers de vibrions et de bactéries; les bactéries sont fines et se mettent immédiatement en mouvement; les vibrions sont plus longs et plus larges; d'abord immobiles, ils prennent, après quelques minutes, le mouvement ondulatoire qui leur est propre. Ces vibrions rappellent tout à fait ceux de la fermentation butyrique.

Sérosité sanguinolente de l'abdomen, au-dessous du point précédent, étendue d'eau : quel-

point de vue une ressemblance parfaite avec les embryons de poulets morts dans leurs coques, et que la putréfaction n'a pas décomposés. Cette ressemblance s'ajoute aux caractères fournis par l'odeur, la couleur, la flaccidité, etc.

Une seule différence m'a paru exister entre le fœtus et le poulet, c'est la production de mamelons cristallins blancs, décomposables en aiguilles longues et fines, que l'on observe à la surface ou dans l'épaisseur des tissus du poulet, et que je n'ai point vus dans le fœtus macéré. Cette différence tient sans doute aux conditions mêmes où séjournent les deux cadavres : dans un cas, l'air extérieur pénètre aisément à travers la coque ; dans l'autre, au contraire, le fœtus reste baigné au milieu d'un liquide très-aqueux, sans aucune communication avec l'air extérieur.

Malgré cette différence, on peut dire que l'embryon de poulet qu'on

ques bactéries, rares, avec un grand nombre de points pâles, un peu allongées, ressemblant à des fragments de vibrions.

Même sérosité, du côté de la colonne vertébrale, au point diamétralement opposé au précédent : absolument rien d'organisé ; quelques cristaux allongés, mais non en aiguilles fines et déliées.

Masses gélatineuses rouge brun de l'intérieur des intestins : pas d'organismes, débris informes de cellules.

Sérosité sanguinolente du thorax : pas d'organismes ; débris amorphes ; pas de globules du sang, non plus que dans les préparations précédentes ; quelques cristaux légèrement teintés de rose, allongés, mais à contours très-irréguliers.

Fragment du foie : pas de globules du sang, pas de cristaux, pas d'organismes.

Sérosité sanguinolente du cuir chevelu ; masse un peu épaisse, plus rouge que les sérosités précédentes ; pas d'organismes ; pas de globules sanguins ; débris amorphes ; pas de cristaux.

Fragment du cerveau : pas d'organismes ; granulations nombreuses, serrées, et environ 25 à 30 globules par champ ; ces globules, de 5 à 8  $\mu$ , sont généralement circulaires ou un peu allongés ; ils sont tous granuleux ; sont-ce des noyaux de cellules ou des globules sanguins très-modifiés ? Pas de cristaux.

On remarquera que le fœtus dont il s'agit avait éprouvé un léger commencement de putréfaction, insensible par l'odeur, mais accusé par la coloration verdâtre du cordon ombilical et par les organismes, qui, après s'être développés à la surface extérieure de l'abdomen, commençaient déjà à pénétrer à l'intérieur. La preuve que les organismes observés à l'abdomen provenaient du dehors et n'avaient apparu que depuis l'expulsion du fœtus, c'est qu'ils y étaient très-rares et développés seulement dans la région immédiatement située au-dessous du cordon ombilical par où ils avaient évidemment passé. Ce commencement de putréfaction s'explique complètement par l'exposition du fœtus pendant vingt-deux heures à l'air d'une salle où la température s'est élevée à 30 degrés.

laisse mourir dans la coque et qu'on place ensuite à une température convenable, lorsqu'il ne se putréfie pas, éprouve une véritable *macération*.

La macération est plus rapide pour le fœtus que pour le poulet, puisqu'elle apparaît dès les premiers jours qui suivent la mort du petit dans le sein de la mère, tandis qu'elle n'est sensible dans les œufs qu'après quelques semaines. Cela s'explique par la température élevée et l'abondance du liquide où se trouve le fœtus; ce liquide, en effet, empêche la dessiccation du cadavre et facilite en même temps les réactions chimiques qui s'accomplissent dans sa masse.

Je n'ai pas observé d'embryon de poulet dont l'état rappelât la mummification qu'on trouve chez le fœtus.

Les phénomènes que nous a fournis cette nouvelle étude nous montrent, comme dans l'étude des œufs ordinaires, le rôle important que jouent les organismes microscopiques dans la putréfaction en général. Nous voyons en outre que les matières animales complètement organisées peuvent rester au contact de l'air, pourvu qu'il soit pur, sans éprouver cette modification.

---

## CHAPITRE II.

### DE QUELQUES AUTRES ALTÉRATIONS DES ŒUFS.

---

#### I. — *Moisissures.*

Les auteurs qui ont signalé et étudié des moisissures dans les œufs ne sont pas moins nombreux que ceux qui ont parlé de leur putréfaction.

Réaumur s'exprime ainsi : « Des observations plus rares m'ont fait voir que des particules qui doivent être incomparablement plus grossières que celles de l'air peuvent pénétrer dans les œufs. J'ai trouvé



des moisissures dans des œufs que j'avais cassés, bien par delà le terme où le poulet aurait dû naître ; je n'ai pu apercevoir aucune fêlure à ces œufs ; les physiciens ont ennobli les moisissures, ils les ont élevées au rang des plantes, ils ont fait voir, et Micheli surtout, qu'elles viennent de graines : les graines de ces petites plantes avaient donc passé au travers de la coquille et de la membrane qui la tapisse (1). Réaumur n'indique pas la nature de ces moisissures.

Dans son *Histoire naturelle des végétaux parasites*, M. Ch. Robin présente un résumé complet des études faites jusqu'à 1853, sur les Cryptogames qu'on rencontre dans les œufs (2) : j'en rapporterai ici les principaux passages.

Mærklin (3), qui trouva un champignon filamenteux dans le blanc d'un œuf, lui donna le nom de *Sporotrichum albuminis*. Rayet (4) découvrit une autre moisissure, dont le mycélium formait une tache noire adhérente au jaune, et séparée de la coque par une couche de blanc ; Montagne l'a décrite sous le nom de *Dactylium oogenum* (5).

Schenk donne une description incomplète, sans figures, d'un champignon trouvé dans un œuf dont le jaune était intact, mais dont le blanc était devenu brun noirâtre (6). Quoique favorable à la génération spontanée, l'auteur admet cependant que la moisissure qu'il a étudiée peut avoir pour origine une spore, et que cette spore, venue du dehors dans l'oviducte de la poule, a pu être englobée par l'albumine avant la formation de la coquille.

(1) RÉAUMUR, *Art de faire éclore et d'élever en toute saison les oiseaux domestiques* ; 2<sup>e</sup> édition, t. I, p. 253 ; 1751.

(2) CH. ROBIN, *Histoire naturelle des végétaux parasites qui croissent sur l'homme et sur les animaux vivants*, p. 543 et 604 ; 1853.

(3) MÆRKLIN, *Betrachtungen über die Urformen niederer Organismen*, p. 73 ; 1824. Heidelberg.

(4) RAYET, *Sur une Mucédinée qui se développe quelquefois sur les œufs de poule conservés pour les usages domestiques* (Soc. Phil. de Paris ; séance du 9 juillet 1842. — *Arch. de Médecine comparée*, p. 59 ; 1843).

(5) MONTAGNE, *Description du DACTYLIUM OOGENUM, Moisissure trouvée par M. Rayet dans un œuf de poule*. (*Journal de l'Institut*, p. 408 ; 1842. — *Arch. de Médecine comparée*, p. 175.)

(6) SCHENK, *Ueber die Pilzbildung im Hühnereiern* (*Verhandlungen der physikalisch-medicinischen Gesellschaft in Fuerzburg*. Erlangen, t. I, p. 73 ; 1850).

Wittich (1), et peu après Harless, ont aussi observé des champignons dans des œufs de poule ou de cane; leurs descriptions phytologiques, sans figures, sont très-insuffisantes, mais l'état des œufs paraît exactement décrit. Wittich a cherché à montrer que les moisissures traversaient la coque en venant de l'extérieur; Harless (2), au contraire, a conclu que les végétations qu'il avait rencontrées n'avaient point pu pénétrer de l'extérieur à l'intérieur de l'œuf. Ces deux opinions contradictoires ne reposent ni l'une ni l'autre sur des expériences assez complètes pour être concluantes.

Parmi les observateurs qui ont le plus étudié les moisissures des œufs, Spring (3) est le premier qui ait institué systématiquement des essais dans le but de déterminer la nature et l'espèce de ces moisissures. Malheureusement les procédés de culture qu'il a employés comportent des causes d'erreurs graves, de sorte qu'il n'est point possible d'admettre ses conclusions. Ce n'est pas, en effet, en semant sans précautions un mycélium dans un liquide, ou en l'inoculant dans un œuf par un petit trou fait à la coque, qu'on peut espérer obtenir le développement exclusif du champignon semé. Il y a, au contraire, de nombreuses raisons pour qu'une spore étrangère tombant de l'air ou déposée dans les tubes, ou à la surface de la coque, se développe simultanément, peut-être même toute seule. Ainsi s'expliquent les résultats extraordinaires contenus, par exemple, dans la cinquième conclusion du Mémoire de Spring : « La même sporule devient *Sporotrichum* ou un mycélium sans fructifications, quand elle se développe dans l'albumine, *Aspergillus*, *Periconia*, *Hemiscyphe*, ou *Mucor*, quand elle se développe à l'air sur une base albumineuse, et à une température de 35 degrés centigrades; elle devient *Penicillium* quand elle se développe à l'air libre sur une base albumineuse et à une température de 10 à 15 degrés centigrades. »

(1) WITTICH, *Ueber Pilzbildung im Hühnerei* (*Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie*, Leipzig, t. III, p. 213; 1851).

(2) HARLESS, *Zusätze zu Dr Wittich's Beobachtung von Pilzbildung im Hühnerei* (même collection, t. III, p. 308).

(3) SPRING, *Des champignons qui se développent dans les œufs de poule* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, t. XIX, 1<sup>re</sup> partie, p. 573; 1852).

Depuis 1853, Kolaczek <sup>(1)</sup> et Panceri <sup>(2)</sup> ont aussi décrit des champignons trouvés dans les œufs de poule. Le Mémoire du savant italien est de beaucoup le plus important.

« On les rencontre, dit Panceri, sous forme de poussières ou de boutons de couleur vert sombre ou incolore, de dimensions diverses. Quand ces boutons sont très-étendus, l'albumine reste emprisonnée dans le mycélium et ne coule pas; lorsqu'on brise la coque, elle se réunit au contraire sous forme de masse gélatineuse. » L'auteur figure quatre moisissures différentes : un *Sporotrichum*, un *Dactylium*, une forme qu'il signale le premier voisine du *Spondylocladium*, et enfin un mycélium vert foncé non fructifié, dont l'espèce resta par suite indéterminée.

Panceri, recherchant l'origine de ces moisissures, démontre qu'elles n'ont pu apparaître spontanément dans l'œuf, et dispose quelques expériences destinées à faire voir que le mycélium peut pénétrer de l'extérieur à l'intérieur de la coque. Il trouve, par exemple, qu'à 22 degrés environ, dans une atmosphère humide, la simple application, sur la surface extérieure de la coque, de certaines espèces de moisissures, suffit pour faire pénétrer le végétal à l'intérieur. L'expérience réussit parfaitement avec le *Sporotrichum albuminis*, et aussi avec une variété du *Verticillium*.

Cependant, à l'intérieur de quelques œufs soumis à ses essais, Panceri trouve, à côté de moisissures identiques à celles de l'extérieur, d'autres formes très-différentes, notamment la Mucédinée qu'il a rapprochée du *Spondylocladium*. On ne pouvait pas admettre dans ce cas que les nouvelles formes étaient venues de l'extérieur.

Ainsi donc, s'il est établi, comme l'avait annoncé Wittich, sans en donner la preuve expérimentale, que dans quelques cas certaines espèces de moisissures peuvent pénétrer de l'extérieur à l'intérieur des œufs, il faut remarquer que, dans d'autres cas, il se développe in-

---

(<sup>1</sup>) KOLACZEK, *Verhandlungen der Vereins für Naturkunde zu Presburg*; 2<sup>e</sup> édition, p. 39; 1857.

(<sup>2</sup>) P. PANCERI, *De la coloration de l'albumine d'un œuf de poule et des cryptogames qui croissent dans les œufs* (*Atti della Società italiana di Scienze naturali*, t. II; 1860, Milan).

térieurement des moisissures qui ne paraissent avoir aucune relation avec l'extérieur.

Je suis arrivé de mon côté au même résultat. En plaçant des œufs de poule dans une atmosphère humide à 25 degrés, j'ai vu la coque se recouvrir rapidement de moisissures très-variées; quelques jours après, l'intérieur était envahi, et lorsque j'attendais assez longtemps je retrouvais souvent les moisissures internes fructifiées, indiquant ainsi par tous leurs caractères leur identité avec celles de la surface. Dans ce cas, il y avait eu pénétration évidente à travers les pores de la coquille (<sup>1</sup>).

Dans beaucoup de cas, au contraire, il m'a été impossible d'admettre cette pénétration: par exemple, j'ai trouvé des œufs tachés, dont la surface de la coque, examinée avec le plus grand soin à la loupe, n'a jamais présenté la moindre trace de moisissures. En ouvrant ces œufs, j'ai vu une ou plusieurs touffes de mycélium, qui tantôt nageaient dans le blanc, tantôt adhéraient à la membrane de la coque, où elles constituaient des sortes de mamelons de diamètre variable; quand elles atteignaient la chambre à air, elles se développaient rapidement et se couvraient de spores.

On pourrait penser qu'une spore tombée à la surface de la coquille a d'abord germé péniblement, puis que son mycélium a pénétré par l'un des pores, traversé la membrane, et enfin qu'il s'est développé dans le blanc, tandis que les tubes de la surface, rapidement desséchés et atrophiés, auraient disparu: ainsi s'expliquerait dans tous les cas l'existence des moisissures dans les œufs. Mais si les choses se passaient de cette manière, on devrait pouvoir trouver des traces de mycélium entre la coque et la membrane; l'observation la plus attentive n'en a jamais montré, dans le cas, bien entendu, où à aucune époque, depuis la ponte, la coque de l'œuf n'avait été recouverte de moisissures apparentes. Le mycélium a donc pour origine une spore ou un fragment de tube renfermé dans l'œuf dès la ponte.

---

(<sup>1</sup>) Ce fait rend compte de la proportion considérable des œufs moisissés dans le commerce, qui s'est élevée à  $\frac{1}{4}$  pour l'année 1872. C'est qu'en effet les œufs qu'on expédie sont généralement emballés dans de la paille humide, sur laquelle ne tardent pas à se développer des moisissures variées.

Dans la masse de l'un des œufs d'autruche que j'ai reçus d'Algérie, j'ai trouvé des fragments très-abondants d'une moisissure qui n'était point fructifiée et qui n'a pas pu pour cette raison être déterminée. Elle était constituée par des filaments vieillis, à contours noirs, à teinte jaune, ne contenant plus que quelques rares granulations. La surface extérieure de la coque était parfaitement lisse, sans trace de moisissures.

Enfin un œuf récemment pondu présentait une tache de peu d'étendue, extrêmement mobile; je l'ouvris et je trouvai un flocon de mycélium fortement adhérent au *jaune*, et dont les ramifications, divergeant du point d'attache avec la membrane vitelline, se répandaient dans la couche albumineuse; les tubes les plus longs arrivaient jusque vers le milieu du blanc; aucun n'avait encore atteint la membrane coquillière.

Ces divers exemples montrent que dans certains cas, comme l'avaient annoncé Schenk et Harless, des moisissures peuvent exister dans des œufs sans qu'elles aient eu pour origine des spores poussées à l'extérieur; en d'autres termes, des spores susceptibles de se développer plus tard existent dans certains œufs, au moment même où ils sont pondus.

Les moisissures bien déterminées que j'ai le plus souvent rencontrées sont trois *Torula* et un *Aspergillus* (1) :

1° *Torula* à spores rondes, très-petites, disposées en longs chapelets et formant de petits flots blancs, pulvérulents, sans mycélium visible; le diamètre des spores est de  $0,7\mu$  (*fig. 21*).

2° *Torula* à spores elliptiques, dont le petit diamètre est de  $2,2\mu$  et le plus grand diamètre de  $3,3\mu$ ; ces spores sont incolores, disposées en chapelets et portées par un petit pédoncule renflé qui part directement du mycélium. Ce dernier est formé de tubes très-grêles, à cloisons peu visibles (*fig. 20*).

3° *Torula* à grosses spores en chapelets, supportées directement par un pédoncule renflé souvent sur toute sa longueur. Chaque spore a la forme générale d'une sphère et s'imbrique sur la précédente à l'aide d'une sorte de petit onglet : leur diamètre va en diminuant de la base à l'extrémité libre

---

(1) Pour la détermination des moisissures, j'ai toujours trouvé auprès de mon collègue et ami, M. Lemonnier, un concours bienveillant dont je suis heureux de le remercier ici.

elles y respirent comme partout où elles prennent naissance, et elles déterminent dans les matières de l'œuf des modifications spéciales, différentes de la fermentation putride.

## II. — *Fermentation acide.*

J'appelle ainsi une altération spéciale dans laquelle les matières de l'œuf deviennent fortement acides. Elle diffère de l'altération par les moisissures et de l'altération putride par l'odeur, l'aspect, la composition chimique, les organismes qui l'accompagnent. Je l'ai remarquée surtout dans des œufs brouillés par l'agitation.

L'odeur est aigre et tout à fait comparable à celle du levain de boulanger qui aurait un peu vieilli.

L'intérieur forme une masse homogène, de consistance butyreuse et de couleur jaune clair; on dirait du beurre légèrement ramolli par la chaleur de l'été.

La réaction sur le papier de tournesol est fortement acide, tandis qu'elle est neutre ou peu acide avec les œufs moisissus ou pourris dans l'air atmosphérique.

Quand on distille les matières de l'œuf après les avoir étendues d'eau, on trouve que le liquide condensé est acide, ainsi que le résidu de la distillation, ce qui indique la présence d'acides fixes et d'acides volatils. Si l'on redistille le produit condensé précédent, puis le nouveau produit de condensation, et ainsi de suite, jusqu'à la cinquième ou sixième distillation, en recueillant chaque fois un tiers environ du liquide distillé, on finit par concentrer quelques produits alcooliques reconnaissables à leur odeur, et surtout à la formation de gouttelettes huileuses sur les parois froides de la cornue.

La quantité de ces divers produits contenue dans un œuf de poule est trop faible pour que j'aie pu déterminer chacun d'eux. Dans tous les œufs où j'ai observé la fermentation dont il s'agit, j'ai trouvé, soit sur les membranes, soit dans la masse intérieure elle-même, des organismes d'un aspect particulier, que je considère comme les véritables ferments de la nouvelle altération. Ce sont des bâtonnets immobiles, à contours pâles, à teinte homogène, articulés deux à deux ou isolés, dont la longueur varie entre 5 et 10, et

la largeur entre 0,5 et 0,7 millièmes de millimètre. Par leurs dimensions et leur immobilité, ils diffèrent des bactéries des œufs pourris; par leur teinte homogène, l'absence de points brillants et leur plus petit diamètre, ils se distinguent des vibrions ordinaires de la putréfaction. Ils sont quelquefois mêlés avec des bactéries; mais, dans ce cas, l'œuf a une odeur légèrement putride, et le papier à acétate de plomb est noirci.

Il est vraisemblable que c'est une altération de cette nature que M. Béchamp a observée en 1868, dans un œuf d'autruche; car l'auteur remarque que cet œuf avait une réaction fortement acide, que l'odeur, désagréable sans doute, n'était point celle « des œufs pourris ordinaires, qui est horrible, ni celle des matières animales putréfiées, qui est si pénétrante et si persistante » (1). M. Béchamp n'a pas vu, d'ailleurs, dans cet œuf, autre chose qu'un « amas de granulations moléculaires »; rien d'organisé.

L'œuf noircissait le papier à acétate de plomb, et le gaz analysé contenait des traces d'hydrogène sulfuré sans doute par suite d'une putréfaction commençante (2). Grâce à la grande masse, 750 grammes, dont il disposait, M. Béchamp a pu constater que le principal produit alcoolique était de l'alcool ordinaire, et le principal acide volatil de l'acide acétique.

### III. — *Production spontanée de cristaux sans développement d'organismes.*

J'ai trouvé des œufs qui n'avaient éprouvé aucune des altérations précédentes, et qui cependant n'étaient point restés sains. Une modification spéciale s'était produite, sans que j'aie pu en saisir la cause, sur quelques-uns seulement des œufs, brouillés ou non, mis en expérience à la température de 25 degrés. La masse décomposée a une teinte jaune

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXVII, p. 523; 1868.

(2) Cette altération n'est pas incompatible avec la putréfaction. Plusieurs œufs qui l'avaient manifestée, ayant été mis dans des flacons fermés et lavés avec l'acide phénique, pour être conservés, n'ont pas tardé à se pourrir avec tous les caractères de la putréfaction; odeur, couleur, organismes.

sale, une odeur de matières animales sèches, une grande fluidité, malgré les aiguilles cristallines qu'elle renferme en grand nombre, et malgré les particules solides qui proviennent de la désagrégation du vitellus.

Je n'ai pu découvrir trace d'organismes microscopiques, ni dans l'intérieur, ni à la surface, ni dans l'épaisseur des membranes.

Ce qui est surtout caractéristique, c'est la formation de gros mamelons blancs, pouvant atteindre 2 et 3 millimètres de diamètre, et constitués par des faisceaux de fines aiguilles cristallines. Ces mamelons sont nombreux sur toute la surface interne ou externe de la membrane de la coque; ils adhèrent fortement aux points où ils se sont formés; les plus gros sont sur les parois de la chambre à air, et, en général, partout où l'air extérieur paraît avoir le plus facile accès.

A l'aspect microscopique et aux réactions qu'ils donnent, on reconnaît qu'ils sont en grande partie formés de tyrosine, mêlée à un peu d'albumine.

Si l'on écrase l'un d'eux sur une lame de verre, il se décompose en faisceaux rayonnés de fines aiguilles, ayant chacun la forme de petits secteurs dentelés sur les bords, opposés le plus souvent deux à deux par leurs sommets, et quelquefois groupés en étoiles. A côté d'eux, on voit des débris amorphes d'albumine solidifiée.

Ces cristaux sont très-peu solubles dans l'eau froide, solubles dans l'eau bouillante, où ils se séparent des matières albumineuses, insolubles dans l'alcool et dans l'éther, mais solubles aisément dans les acides et les alcalis.

Les réactions suivantes, qui sont caractéristiques de la tyrosine, ont parfaitement réussi :

1° La dissolution jaune-orange, obtenue avec l'acide azotique, donne, par une évaporation ménagée, un résidu qui se colore en brun rouge foncé par les alcalis (SCHÉRER).

2° Une dissolution bouillante dans l'eau donne avec l'azotate neutre de mercure un précipité blanc jaunâtre, qui se transforme en rouge foncé par l'addition goutte à goutte d'acide azotique fumant; il faut faire bouillir de nouveau après chaque goutte (MEYER).

3° Une dissolution dans l'acide sulfurique concentré, produite à une douce chaleur, prend une couleur rouge passagère; le liquide, étendu



d'eau, neutralisé par la craie ou le carbonate de baryte, filtré et concentré, donne avec le perchlorure de fer une coloration violette (PIRIA).

Dans le dédoublement des matières albuminoïdes, la tyrosine étant généralement accompagnée de leucine, j'ai cherché si ces deux produits existaient à la fois dans la masse décomposée. Pour cela, j'ai opéré de la manière suivante.

Le contenu de l'œuf a été épuisé par l'alcool bouillant, qui devait dissoudre toute la leucine, puis par l'éther, pour séparer ce qui restait de matières grasses, et enfin par une dissolution aqueuse d'ammoniaque, qui a dissous la tyrosine. Et en effet, par l'évaporation lente de cette dernière liqueur, après filtration, j'ai obtenu des cristaux blancs de tyrosine.

L'extrait alcoolique filtré, de couleur rouge, a été évaporé; le résidu traité par l'éther a été repris par l'alcool bouillant. Après filtration nouvelle et évaporation lente, il s'est déposé des cristaux blancs jaunâtres, dont la forme est celle des cristaux de leucine : ce sont de petites masses granuleuses, sphéroïdes, qui au microscope ressemblent à des cellules adipeuses; sur leurs bords seulement on voit leur constitution cristalline.

J'ai obtenu, d'ailleurs, avec elles les principales réactions de la leucine :

1° En chauffant avec précaution ces cristaux dans un tube de verre ouvert aux deux bouts, ils se volatilisent sans fondre, en donnant des flocons blancs très-légers, dont les uns se déposent sur les parois froides du tube, et les autres, entraînés par le courant d'air, voltigent dans l'atmosphère.

2° Évaporés avec soin sur une lame de platine avec de l'acide azotique, ils laissent un résidu incolore qui, traité par une goutte de lessive de soude, se dissout facilement; en concentrant doucement la liqueur, il se forme une goutte *oléagineuse*, très-mobile et ne mouillant pas la lame de platine (SCHÉRER).

Les quantités de tyrosine et de leucine obtenues dans ces circonstances sont beaucoup plus grandes que dans la putréfaction. Il y a donc là une curieuse transformation de l'albumine de l'œuf, qui rappelle celle que M. Schützenberger a constatée pour les matières protéiques

insolubles de la levûre de bière, lorsque celle-ci continue sa vie à ses propres dépens, sans putréfaction (1).

Le poids des matières grasses extraites par l'éther est inférieur à celui que donne un œuf sain ou un œuf pourri. Au lieu de 4 grammes, poids minimum que ces derniers œufs m'ont donné, j'ai trouvé dans deux cas les nombres 2<sup>gr</sup>, 59 et 0<sup>gr</sup>, 85. Le traitement présente une particularité que je n'ai pas remarquée avec les autres œufs. En agitant la matière avec l'éther, tout se prend en une masse gélatineuse jaunâtre, et par le repos l'éther ne se sépare qu'avec une extrême lenteur; au contraire, avec les œufs sains, par exemple, il forme en peu de temps une couche transparente au-dessus de la masse insoluble qui se réunit au fond du vase.

On pourrait croire, en voyant les mamelons qui grossissent sur les membranes, près de l'air, que l'altération précédente doit ses principales modifications à l'action de l'oxygène atmosphérique. Toutefois ce dernier agent pourrait n'être point du tout nécessaire, car j'ai obtenu des cristaux de tyrosine, dans un tube où j'avais enfermé un œuf avec une quantité très-limitée d'air. La cristallisation de la tyrosine sur les membranes s'expliquerait alors par sa faible solubilité.

---

### CHAPITRE III.

#### DE L'ORIGINE DES ORGANISMES QUI SE DÉVELOPPENT DANS CERTAINES ALTÉRATIONS SPONTANÉES DES ŒUFS.

---

J'ai démontré dans les chapitres précédents que les altérations spontanées des œufs, sauf la dernière, étaient corrélatives du développement et de la multiplication d'êtres organisés, bactéries, vibrions ou moisissures. Il reste maintenant à résoudre la question de savoir comment ces

---

(1) *Bulletin de la Société chimique de Paris*, t. XXI, p. 204. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 493; 1874.

organismes ont apparu dans l'intérieur des œufs. Je vais examiner successivement les hypothèses qui paraissent *a priori* pouvoir rendre compte de ce fait.

1° *Hypothèse de la génération spontanée.* — La théorie des générations dites *spontanées* a été si victorieusement combattue par les magnifiques travaux de M. Pasteur, qu'il semble inutile de chercher à la réfuter de nouveau, à l'occasion des présentes recherches. Cependant le crédit qu'elle trouve encore auprès de quelques savants, à propos même de l'altération des œufs, m'oblige à l'examiner rapidement.

Quant aux moisissures, je ne crois pas qu'un seul savant admette aujourd'hui la production spontanée de cette classe d'organismes. Dans l'état actuel de la science, on ne peut plus même considérer comme possibles les transformations qu'a signalées Spring. Il faut toutefois faire une exception pour la levûre alcoolique, dont la constitution est celle des moisissures les plus simples. En effet, dans deux Mémoires, le premier de 1869, le second de 1872, MM. Legros et Onimus se sont efforcés de démontrer que, dans certaines circonstances, on peut faire naître spontanément de la levûre alcoolique, au sein de liquides sucrés convenablement préparés, par exemple, à l'intérieur d'un œuf, où l'on aurait fait pénétrer une dissolution de sucre.

Voici leur principale expérience (1) :

On enlève une partie de la coque d'un œuf, près de la chambre à air, en ayant soin de respecter la membrane; on plonge ensuite la région mise à nu dans une solution sucrée, de façon à faire entrer dans le blanc, par endosmose, une quantité notable de sucre, et l'on met l'œuf pendant quelques heures dans un liquide en fermentation; on le retire et on l'abandonne, soit à 35 degrés, soit à la température moyenne du laboratoire; il est bon, dans l'intervalle, de le remettre deux ou trois fois en contact avec de l'eau sucrée en fermentation. Dans ces conditions, « au bout de deux à trois jours, disent les auteurs, mais surtout après sept ou huit jours, on constate au microscope la présence dans le blanc d'œuf de spores de la fermentation sucrée » (2).

(1) Dans leur second Mémoire, les auteurs reconnaissent eux-mêmes que les expériences de leur premier travail comportent des causes d'erreur, qu'ils ont cherché à éloigner dans cette nouvelle étude.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXIV, p. 887; 1872.

*Annales de l'École Normale.* 2<sup>e</sup> Série. Tome IV.

J'ai répété souvent cette expérience, et toutes les fois que j'ai convenablement lavé la membrane et la coque, sur lesquelles adhèrent toujours des globules de levûre alcoolique (1), que j'ai eu soin d'écartier tous les œufs où s'étaient produites des déchirures apparentes ou cachées, je n'ai point trouvé de levûre dans l'intérieur du blanc. Et dans les œufs où des globules avaient pénétré accidentellement, les cellules étaient vieilles, granuleuses, à contours noirs, rappelant celles qui se sont usées dans une fermentation avec milieu incomplet, ou qui sont restées longtemps en contact avec un liquide déjà fermenté.

C'est qu'en effet le blanc d'œuf sucré n'est point du tout favorable au développement de la levûre. M. Pasteur l'a montré depuis longtemps, et je l'ai vérifié plusieurs fois : « J'ai été fort surpris, dit M. Pasteur, dans son *Mémoire sur la fermentation alcoolique*, de trouver cette matière tout à fait impropre à nourrir les globules de levûre de bière. Qué l'on dissolve du sucre dans de l'albumine d'œufs frais, délayée dans l'eau et filtrée, rendue ou non très-peu acide, que l'on ajoute une très-petite quantité de levûre de bière, les globules semés ne se développeront pas du tout, il n'y aura pas trace de fermentation » (2). Comment concevoir, dès lors, qu'une levûre alcoolique apparaisse spontanément dans un milieu où elle ne pourrait, ni se développer, ni se multiplier ?

On peut démontrer autrement l'impossibilité de ce fait, tout en conservant les conditions fondamentales que doivent réunir les expériences, d'après MM. Legros et Onimus, à savoir, un milieu favorable au point de vue chimique, un mouvement constant d'endosmose et d'exosmose, un renouvellement moléculaire continu.

Ainsi, que par une différence de pression on fasse pénétrer de l'eau sucrée dans un œuf à coque entière, qu'on l'abandonne ensuite dans un liquide en fermentation, même après plusieurs jours, on ne trouvera pas trace de levûre alcoolique à l'intérieur du blanc ; et cependant le mouvement d'endosmose a fait entrer de l'alcool à travers la coquille.

J'ai employé dans le même but l'appareil à vis qui a servi à M. Du-

---

(1) Les globules de levûre adhèrent si fortement à la membrane, qu'il m'est arrivé d'en trouver encore après deux heures d'un lavage continu à l'eau distillée, sous une chute de 10 centimètres environ de hauteur.

(2) *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. LVIII, p. 385 ; 1860.

mas dans ses *Recherches sur la fermentation alcoolique* ('). Le diaphragme était une portion de la membrane de la coque, détachée avec soin d'un œuf sain (*fig. 6*). Dans l'un des tubes, j'ai mis de l'eau sucrée en fermentation, dans l'autre un mélange filtré à volumes égaux d'eau sucrée au dixième et de blanc d'œuf. Il ne s'est produit dans ce dernier ni fermentation, ni levûre alcoolique, malgré le mouvement considérable d'endosmose qui y a fait passer une grande partie du liquide fermenté, malgré l'introduction de la matière azotée soluble qui jouit de la propriété d'intervertir le sucre, et qui, dans ce cas, a transformé tout celui du tube.

Mais si les moisissures ni la levûre alcoolique ne peuvent d'elles-mêmes prendre naissance dans des œufs, les vibrions et les bactéries, êtres que l'on considère comme plus simples et plus élémentaires que les champignons, ne pourraient-ils pas apparaître spontanément dans les œufs pourris ?

Les expériences et les observations que j'ai citées dans le cours du Chapitre I<sup>er</sup> prouvent suffisamment que cette hypothèse est inadmissible. En effet, les œufs d'une même série, agités ou non, étaient placés dans une cuvette ou dans un cristalliseur, et puis abandonnés à l'étuve pendant quelques semaines. Ils avaient toujours même origine et ne différaient les uns des autres que par l'âge ou le volume; ils étaient donc dans des conditions toutes semblables, quant à la constitution chimique, la température, la nature du milieu extérieur; par conséquent rien n'eût été plus naturel que de trouver tous ces œufs également altérés. Or on a vu combien était grande la différence des résultats, combien était variée la proportion des œufs pourris, et par suite de ceux où s'étaient développés des infusoires. On ne saurait comprendre que les matières des œufs se soient organisées spontanément dans ces derniers cas, tandis que dans les premiers, tout semblables, elles soient restées stériles.

D'autre part, on a vu que le mélange intime du blanc et du jaune pouvait rester indéfiniment au libre contact de l'air pur, sans se décomposer, sans donner lieu à des productions organisées d'aucune sorte. Et, cependant, toutes les conditions demandées par les partisans de

---

(') *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXV, p. 280; 1872. — *Annales de Chimie et de Physique*, 5<sup>e</sup> série, t. III, p. 73; 1874.

l'hétérogénéité sont réunies dans ces expériences : milieu éminemment complet, température élevée, accès constamment renouvelé de l'air atmosphérique; seulement cet air est dépouillé des particules solides qu'il pourrait contenir.

Les matériaux de l'œuf ne sont donc pas capables de s'organiser d'eux-mêmes, de façon à engendrer des bactéries ou des vibrions.

Dans un travail publié récemment (1), M. Onimus conclut pourtant de ses expériences « que des proto-organismes peuvent naître et se développer dans des liquides albuminoïdes, mis à l'abri de l'air », c'est-à-dire à l'abri des impuretés de l'air atmosphérique. Les recherches de ce savant ont porté sur le sang et sur le blanc d'œuf. Par une disposition qui rappelle, avec plus de complication, celle que j'ai indiquée page 245 et suivantes, il a fait aussi passer ces liquides à l'état naturel dans des ballons de verre, et les a exposés au contact de l'air pur. Dans ces expériences délicates, toute complication doit faire augmenter les précautions; or M. Onimus en a-t-il pris assez? On peut se demander, par exemple, si le collodion qu'il applique sur la coque de l'œuf, à l'endroit où il enfonce le trocart, ne renferme pas des organismes; si le coton cardé destiné à filtrer l'air a été chauffé suffisamment dans toutes ses parties; si enfin l'air, en se renouvelant par aspiration, n'apporte pas avec lui, jusque dans le liquide, quelques-uns des germes qu'il contient. De plus, M. Onimus fait bouillir dans ses ballons de l'eau contenant du phosphate d'ammoniaque et du chlorure de sodium, liquide légèrement alcalin; peut-être les germes déposés sur les parois n'ont-ils pas été tués. M. Pasteur a montré en effet que, pour obtenir ce résultat avec les liquides alcalins, il faut une température supérieure à 100 degrés.

M. Onimus cite d'ailleurs deux expériences sur quinze, dans lesquelles, au bout de dix jours, il n'a pas trouvé de bactéries. Il est peu probable que l'addition de sucre dans un cas, et que la petite quantité de matière introduite dans le second, soient les causes de l'absence de proto-organismes. Ne se pourrait-il point que ces deux expériences fussent les seules dont il fallût tenir compte? Le fait que M. Pasteur a conservé pendant des années du sang pris directement dans les veines, que moi-

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXIX, p. 173; 1874.

même je conserve, depuis plus de vingt mois, des matières aussi altérables que le blanc et le jaune d'œuf mélangés, au libre contact de l'air pur, même de l'air pur renouvelé par aspiration, ce fait permet de penser qu'avec des précautions convenables on peut toujours éviter l'apparition spontanée d'organismes dans ce genre d'expériences.

2° *Hypothèse de l'évolution des microzymas en bactéries, vibrions, etc.*

— On sait que M. Béchamp explique tous les phénomènes de fermentation par l'action de granulations moléculaires mobiles, qu'il a appelées *microzymas*; ces granulations, qui ont, d'après lui, une existence indépendante, auraient la propriété de produire des transformations chimiques, soit toutes seules, comme dans la décomposition des œufs, soit parallèlement aux proto-organismes qu'elles engendrent, comme dans la fermentation lactique.

Or, selon M. Béchamp, il existe des microzymas dans les œufs, et surtout dans le jaune; on peut donc se demander si les altérations spontanées des œufs ne sont pas dues à l'action de ces sortes d'éléments figurés, et si, dans les cas où l'on observe des bactéries, des vibrions, ces organismes ne résultent pas d'une transformation des microzymas : telle serait en effet l'hypothèse de M. Béchamp.

Quelles que soient la forme et les dimensions des microzymas, puisque ces ferments existent normalement dans tous les œufs, des œufs placés dans des conditions semblables devront donner les mêmes résultats. On a vu, au contraire, combien les résultats variaient, on a vu que, même dans les meilleures conditions de transformation, aucun organisme n'apparaissait dans les matières restées saines. La théorie des microzymas n'explique donc pas plus les altérations des œufs que les phénomènes ordinaires de fermentation; ces granulations, malgré leur existence propre, n'ont point la faculté d'agir à la façon des véritables ferments, ni de s'organiser en bactéries ou vibrions (1).

---

(1) Dans la Note que M. Béchamp a publiée à l'occasion de mes observations sur les altérations spontanées des œufs, l'auteur dit :

« J'affirme que, nullé part, bien que M. Gayon me le fasse dire, je n'ai soutenu que les microzymas de l'œuf évoluassent en bactéries ou produisissent des cellules de levûre alcoolique. » (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVII, p. 613; 1873.)

Voici le texte de la phrase à laquelle fait allusion mon savant contradicteur :

« Contrairement à ce qui a été annoncé par M. Béchamp, les granulations, qu'il appelle

3° *Hypothèse des germes.* — Nous venons de voir que les organismes qui apparaissent dans certains œufs gâtés ne sont point nés spontanément aux dépens des matières de ces œufs, et qu'ils ne résultent pas non plus de la transformation de ce qu'on appelle *microzymas*; il faut donc qu'eux-mêmes ou leurs germes soient arrivés à un moment quelconque jusque sur les membranes ou dans le blanc.

Deux hypothèses peuvent expliquer leur présence dans les œufs : ou bien les germes et spores ont traversé la coque, l'œuf étant pondu; ou bien ils existaient dans l'œuf dès la ponte, et alors ils ont dû être recueillis dans l'oviducte.

Pour rechercher la part d'influence de la première hypothèse, il faut étudier la pénétrabilité de la coque pour les divers états des corps.

*Pénétrabilité pour les gaz et les liquides.* — Les gaz traversent très-facilement les enveloppes des œufs; ce fait, observé depuis longtemps par Réaumur, résulte de la production de la chambre à air par évapo-

*microzymas*, sont impuissantes à se transformer en bactéries ou vibrions, non plus qu'en globules de levûre alcoolique. » (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVII, p. 214.)

Ainsi, comme on le voit, je n'ai pas dit et je n'ai pas voulu dire que M. Béchamp a vu les *microzymas* de l'œuf évoluer en bactéries. Comment aurais-je pu lui prêter cette assertion, puisque M. Béchamp, qui admet pourtant l'existence normale des *microzymas* dans les œufs, n'a jamais constaté la présence d'organismes dans les œufs altérés? Mais, lors même que j'eusse émis l'idée dont il s'agit, M. Béchamp pourrait-il avec raison m'en accuser? Ne lit-on pas, en effet, dans un travail fait en commun avec M. Estor, et publié en 1872, *Sur le rôle des microzymas pendant le développement embryonnaire* : « Dans le foie (d'un embryon mort) on trouve des bactéries à tous les degrés de développement : *microzymas* isolés et mobiles en foule, grand nombre d'associés, petites bactéries, moyennes et grandes; il est impossible de ne pas les considérer comme les divers degrés du développement d'un même être. » (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXV, p. 962.)

Ce que j'ai combattu dans ma Note et ce que je combats encore, c'est la théorie générale de M. Béchamp : l'évolution des *microzymas* en bactéries ou en levûre alcoolique. Cette théorie se rencontre à chaque instant dans les travaux de M. Béchamp. La phrase que je viens de citer le prouve suffisamment pour l'évolution en bactéries; la phrase suivante me justifie pour l'évolution en levûre alcoolique : « En fait, les ferments organisés se réduisent à trois types : le type cellule, dont la levûre de bière est l'exemple classique, le type bactérie et le type *microzyma*. Or, dans les expériences de la Note que je viens de résumer (Note présentée à l'Académie sous ce titre : *Conclusions concernant la nature de la mère de vinaigre et des microzymas en général*), les choses se sont passées comme si le *microzyma*, certaines conditions favorables étant données, était le facteur et des bactéries et des cellules. » (*Annales de Chimie et de Physique*, 4<sup>e</sup> série, t. XXIII, p. 443; 1871.)



ration d'une partie de l'eau de l'albumine, et des conditions mêmes du développement embryonnaire, pendant lequel la respiration du poulet détermine un échange incessant de gaz entre l'extérieur et l'intérieur<sup>(1)</sup>; nous savons, d'ailleurs, qu'en faisant le vide au-dessus d'un œuf plongé dans l'eau, les gaz sortent en bulles nombreuses par une multitude de pores.

La pénétrabilité de la coque par les liquides est tout aussi bien établie. J'ai donné plus haut des tableaux indiquant les augmentations de poids qu'on obtient en faisant pénétrer de l'eau dans des œufs d'âges différents, et dans des œufs brouillés ou non. Des liquides plus denses que l'eau, tels que des dissolutions sucrées à 10 ou 20 pour 100, s'introduisent avec la même facilité.

MM. Baudrimont et Martin Saint-Ange ont étudié la disposition des pores des œufs; ils ont remarqué que ceux qui laissent passer les plus grosses bulles de gaz dans le vide sont *gémisés*, c'est-à-dire réunis deux à deux, et que ces pores gémisés se trouvent répétés généralement quatre fois sur la coquille<sup>(2)</sup>. Je crois que cette disposition est loin d'être générale.

Pour rechercher la disposition des pores de la coque, j'ai fait pénétrer dans des œufs, à l'aide du vide, des liquides colorés, tels que l'encre ordinaire. La surface extérieure est restée teintée sur toute son étendue, mais avec une nuance plus foncée à l'endroit des pores. La membrane qui tapisse la surface interne a été criblée de petites taches noires plus ou moins larges, irrégulièrement distribuées, et situées exactement au-dessous des points noirs qui indiquaient les pores à la surface externe; en d'autres termes, les dessins de la membrane étaient exactement superposables aux dessins de la coquille. Cela prouve que les pores sont droits et perpendiculaires à la surface, et non, comme l'indique Wittich, tortueux et obliques<sup>(3)</sup>.

D'un œuf à l'autre, le dessin des taches varie; dans un même œuf,

(<sup>1</sup>) Voir pour l'étude de la respiration de l'embryon les recherches chimiques de MM. Prévost et Dumas (*Dictionnaire des Sciences naturelles*, t. XII, p. 112), et de MM. Baudrimont et Martin Saint-Ange (*Recueil des Savants étrangers*, t. XI, p. 469. — *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. XXI, p. 195).

(<sup>2</sup>) Mémoire cité, *Ann.*, p. 245.

(<sup>3</sup>) CH. ROBIN, *Histoire des végétaux parasites*, etc., p. 556.

on observe des taches de dimensions variables, mais rien qui paraisse correspondre aux pores géminés dont parlent MM. Baudrimont et Martin Saint-Ange (1).

*Pénétrabilité pour les éléments figurés solides.* — Le diamètre des pores de la coquille des œufs pourrait être assez étroit pour laisser passer les gaz et les liquides, sans laisser entrer les corps solides, même les plus petits; aussi ai-je cherché directement si certains éléments organisés pouvaient pénétrer dans les œufs. J'ai mis, par exemple, des œufs de poule dans de l'eau sucrée en fermentation; j'ai fait le vide, puis rétabli la pression extérieure; je n'ai point vu de globules de levûre de bière sur la surface interne de la coque. Or les plus petites cellules isolées avaient au moins 5 millièmes de millimètre de diamètre; on peut donc conclure que le diamètre des pores ne dépasse pas en général cette limite dans les œufs de poule.

Panceri a démontré, et j'ai vérifié après lui, que des moisissures peuvent pénétrer dans les œufs en venant de l'extérieur. Si le diamètre des pores par où se fait le passage est celui du mycélium, il serait égal à 1 ou 2 millièmes de millimètre pour les filaments de moisissures que j'ai observés; mais si l'on suppose, ce qui serait possible, que les filaments s'allongent et s'amincissent pour passer, le diamètre des pores serait inférieur au nombre précédent.

Quoi qu'il en soit, plusieurs des pores ont un diamètre supérieur à celui des bactéries ou des vibrions; car, si l'on fait entrer dans des œufs, par différence de pression, de l'eau chargée de ces organismes, et qu'on observe ensuite la surface interne de la coque, on retrouve de petits bâtonnets identiques à ceux du dehors.

Voici un exemple :

N <sup>os</sup> d'ordre.	Poids des œufs sans liquide.	Liquide introduit.	Nombre d'organismes observés entre coque et membrane.
1.....	56,37 <sup>gr</sup>	2,96 <sup>gr</sup>	200
2.....	56,75	0,69	75
3.....	52,79	3,41	40
4.....	43,14	1,84	200

(1) En injectant d'abord une dissolution de perchlorure de fer, puis une dissolution de cyanoferrure de potassium, la masse entière du blanc et même la périphérie du vitellus ont été colorées en bleu. L'injection avait pénétré plus profondément qu'avec l'encre, sans doute

Ces organismes, comme ceux du liquide, sont des bactéries mobiles et des bactéries immobiles. Ils ont été comptés par champ, par le procédé dont j'ai parlé à la page 234. On voit qu'il n'y a aucune relation entre le poids du liquide et le nombre des organismes introduits; cela s'explique par les différences de diamètre des pores d'un œuf à l'autre.

Ainsi les pores de la coquille sont assez larges pour être traversés dans ces conditions par les plus petits des infusoires; mais ce qui est remarquable, c'est l'influence du mouvement propre de ces êtres sur leur pénétration dans l'œuf.

J'ai pris, par exemple, huit œufs pondus depuis quinze jours; dans quatre de ces œufs, j'ai fait pénétrer, par différence de pression dans le vide, de l'eau de levûre contenant des bactéries *immobiles*, et dans les quatre autres un liquide où s'étaient développées des bactéries *mobiles*, de même dimension. Les œufs, lavés et essuyés, ont été ouverts et examinés en faisant de nombreuses prises sur le plancher de la chambre à air, sur la surface interne de la coque, sur la surface externe des membranes. Le tableau suivant donne, pour dix champs, les nombres maxima et minima observés dans les deux cas, avec un grossissement de 500 diamètres.

Nos	Nombres maxima.		Nombres minima.	
	Bactéries mobiles.	Bactéries immobiles.	Bactéries mobiles.	Bactéries immobiles.
1.....	800	30	1	1
2.....	20	20	0	0
3.....	200	150	20	0
4.....	100	30	0	0
Totaux....	1120	230	21	1
Moyennes.	280	57 $\frac{1}{2}$	5 $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

La difficulté qu'éprouvent les organismes immobiles à traverser la coquille d'un œuf, même lorsqu'ils sont entraînés avec force par un courant liquide et poussés par une différence de pression de plusieurs décimètres de mercure, permet de prévoir que, si cette force d'impul-

---

parce que la surface extérieure de la coque avait été un peu dissoute par le perchlorure de fer. J'ai cherché en vain, par des coupes faites dans des œufs cuits après injection, si les liquides avaient suivi des canaux spéciaux; je n'ai remarqué qu'une masse homogène. Je dois toutefois ajouter que l'expérience aurait besoin d'être reprise en faisant varier les liquides injectés et les conditions de l'injection.

sion n'existait pas, il leur serait très-difficile, sinon impossible, de s'introduire d'eux-mêmes dans l'intérieur des œufs. C'est aussi ce que prouve l'expérience directe, non-seulement avec des bactéries immobiles, mais encore avec des bactéries mobiles.

Le 2 avril, j'ai mis dans de l'eau de levûre renfermant des bactéries mobiles et immobiles six œufs achetés dans le commerce. Ils y sont restés successivement 1, 2, 3, 4, 6 et 7 jours : dans aucun je n'ai vu d'organismes. Ainsi, malgré leur mobilité propre, et malgré le mouvement endosmotique qui a fait pénétrer du liquide extérieur, ces bactéries n'ont pu traverser la coquille à la pression ordinaire.

Ce résultat rend compte d'un fait que j'ai remarqué bien des fois : souvent le blanc des œufs gâtés suintait par tous les pores de la coquille et se répandait sur les œufs voisins et sur le fond des vases. Les œufs qui reposaient sur ce liquide putride et rempli d'organismes ne s'altéraient point, même après plusieurs semaines.

Si maintenant nous considérons que sur des œufs naturels il n'existe que des organismes desséchés, toujours immobiles et souvent morts, nous voyons que, en abandonnant ces œufs à eux-mêmes, leurs coques ne sont point en général traversées par des germes pouvant expliquer leurs altérations.

Des moisissures seules, dans certaines conditions d'humidité, peuvent germer sur la coquille et pénétrer ensuite jusqu'à l'intérieur de l'œuf; mais nous avons vu qu'il s'en développe aussi directement dans le blanc (<sup>1</sup>). Par conséquent, la pénétrabilité de la coque ne suffit pas pour rendre compte de l'existence et du développement ultérieur d'êtres

(<sup>1</sup>) Comme on le voit, dans une atmosphère humide, les moisissures traversent la coque plus aisément que les bactéries. C'est ce qui explique pourquoi, dans le commerce, la proportion des œufs tachés est beaucoup plus grande que celle des œufs pourris. Elle était de  $\frac{1}{7}$  en 1872 à Paris, tandis qu'elle n'était que de  $\frac{1}{17}$  pour les œufs pourris. Pour rendre compte de cette aptitude des moisissures à passer par des orifices étroits plus facilement que les bactéries, on peut concevoir que les spores, en germant, ne tardent pas à couvrir la surface de la coque d'un lacs de tubes de mycélium, et que l'un de ces tubes, arrivé en rampant jusque sur les bords d'un pore, poussé par une sorte de *vis a tergo*, s'y glisse et pénètre ensuite jusqu'au blanc. On connaît d'ailleurs la merveilleuse faculté de pénétration des moisissures, lesquelles s'enfoncent dans les tissus les plus épais et parviennent à écarter les parois cellulaires les mieux unies. Les bactéries, au contraire, même dans le cas le plus favorable, c'est-à-dire lorsqu'elles sont douées de mouvement, et que la surface de la

organisés dans les œufs susceptibles de s'altérer; par contre, tous les faits observés établissent de la manière la plus certaine que ces êtres ou leurs germes ont été recueillis par l'œuf pendant sa formation et son mouvement dans l'oviducte. Nous allons maintenant en donner les preuves.

On ne saurait comprendre autrement la présence dans les œufs de certains organismes que l'on y trouve accidentellement, outre les bactéries, les vibrions et les moisissures. Ainsi, d'après Burdach, on aurait trouvé des vers dans les intestins d'embryons, et des Entozoaires auraient été vus par Eschholz dans des œufs de poule (1). Pouchet rapporte que M. Joly a observé des Infusoires ciliés dans le jaune d'œuf (2). M. Davaine a bien voulu me montrer un ver trouvé dans un œuf par M. Chatin. Ce ver, long de plusieurs centimètres, a été déterminé par M. Davaine : c'est l'*ascaris* de la poule; il venait évidemment du tube intestinal, avait traversé le cloaque et s'était élevé dans le canal vecteur. Moi-même j'ai trouvé dans un œuf pondu à mon laboratoire, sur le flanc, entre la coque et la membrane, une plage de 2 centimètres environ de diamètre, couverte d'une couche épaisse de levûre alcoolique vieillie (*fig.* 13). La poule d'où il venait vivait dans une cour où l'on répandait souvent de la levûre de bière.

D'ailleurs l'aptitude de l'œuf à recueillir les corps étrangers qu'il rencontre à la surface de l'oviducte est prouvée par beaucoup d'observations. On cite des œufs qui contenaient des plantes, des pierres, des graines, des insectes, etc. (3). Moquin-Tandon appelle *ovum heterylum* tout œuf renfermant un corps étranger. M. Reiset me communique le

---

coque est humide, ne peuvent que courir dans la couche liquide où elles vivent; si rien ne les y force, elles n'en peuvent sortir, surtout pour traverser la colonne gazeuse qui remplit chaque pore d'un œuf et qui pour elles, eu égard à leurs petites dimensions, est d'une longueur considérable. Les moisissures sont comme les racines des plantes qui s'enfoncent d'elles-mêmes dans les terrains les plus durs; les bactéries sont comme les poissons qui ne sortent jamais de leur élément.

(1) BURDACH, *Traité de Physiologie*, traduction Jourdan, t. I, p. 31; 1837.

(2) POUCHET, *Embryogénie des Infusoires ciliés*. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LIX, p. 276; 1864.)

(3) Voir MOQUIN-TENDON, *Mémoire sur l'Oologie* (*Mém. de la Soc. linnéenne de Paris*, t. III, p. 69-71; 1825. — DAVAINÉ, *Mém. sur les anomalies de l'œuf* (*Mém. de la Société de Biologie pour 1860*, 3<sup>e</sup> série, t. II, p. 242.)

fait d'une patte de hanneton qu'il a trouvée enveloppée de blanc dans un œuf cuit mou. C'était au printemps d'une année où les hannetons étaient très-nombreux. J'ai observé fréquemment des masses grises, irrégulières, de 2 à 4 millimètres de diamètre, qui nageaient dans l'épaisseur de la couche albumineuse : c'étaient des cellules albuminipares détachées du canal vecteur, que le blanc avait englobées au moment de sa sécrétion, et qui avaient subi une sorte de dégénérescence graisseuse. Ce fait s'est présenté surtout avec des œufs non fécondés.

L'examen direct de l'oviducte justifie complètement notre hypothèse.

Dans l'espèce de la poule, on sait que le canal vecteur, long de 50 centimètres environ, se divise en plusieurs régions, dont chacune a sa fonction spéciale. Le vitellus recueilli par le pavillon parcourt rapidement les 6 ou 7 premiers centimètres de l'oviducte, et s'engage dans une région couverte de cryptes nombreux qui déversent à sa surface un liquide albumineux très-abondant. A mesure que l'œuf descend dans la trompe, il se recouvre d'une série de couches de blanc, de densités sans cesse décroissantes. Son mouvement, à la fois de translation et de rotation spirale, tord en tire-bouchons les couches albumineuses situées à ses deux pôles : ainsi se forment les ligaments connus sous le nom de *chalazes*, destinés à retenir le vitellus suspendu et flottant dans un milieu plus dense que lui-même. La portion albuminipare du canal vecteur est longue de 25 centimètres environ, et l'œuf met deux ou trois heures à la parcourir. Quand il en est sorti, il a déjà la forme ovoïde qui le caractérise.

La région que traverse ensuite l'œuf est longue de 10 centimètres environ ; c'est là que se forme la double enveloppe fibreuse qui porte le nom de *membrane de la coque*. Cette formation dure de deux à trois heures, après lesquelles l'œuf, continuant à progresser, arrive dans la région qui doit lui fournir la coquille.

Cette partie de l'oviducte est beaucoup plus courte que les autres ; elle a juste la longueur de l'œuf ; elle se distingue par la forme des plis de la muqueuse, qui sont lancéolés, saillants et très-pressés. Après cinq ou six heures de séjour dans cette région, la coquille est presque entièrement constituée ; elle a déjà une grande résistance. Cependant l'œuf ne la quitte qu'après y être resté vingt-quatre heures environ.

Il est alors poussé à travers la portion vaginale de l'oviducte, jusque dans le cloaque, dont les parois fortement contractiles ne tardent pas à l'expulser au dehors.

J'ai ouvert plusieurs poules pour rechercher si des organismes venus de l'extérieur pouvaient remonter le canal vecteur, et jusqu'à quelle profondeur ils pouvaient pénétrer.

(a). *Examen d'une poule qui n'a jamais pondue.*—Avec une baguette et une goutte d'eau distillée, je lave un point de la surface du cloaque, et j'examine la goutte au microscope; c'est ainsi que j'ai exploré successivement les diverses régions de l'oviducte dans toutes les poules que j'ai ouvertes. Dans la préparation, je trouve au milieu de cellules pavimenteuses, dont quelques-unes sont réduites à leurs noyaux, environ vingt bâtonnets par champ; ces bâtonnets sont immobiles, mais s'infléchissent quand ils sont entraînés par les mouvements du liquide; leur longueur est de quatre à cinq millièmes de millimètre. Sur la surface du canal vecteur, je n'observe point d'organismes.

(b). *Examen d'une poule qui a pondue trois œufs.*—Surface du cloaque : cellules allongées, à noyau très-visible; organismes variés et nombreux, chapelets de grains, bâtonnets articulés, filaments longs et étroits; articulés, dont la longueur dépasse  $\frac{1}{10}$  de millimètre (*fig. 14*). — Surface de l'oviducte, à 2 centimètres du cloaque : cellules à cils vibratiles, cils détachés, organismes de mêmes formes que ceux du cloaque, mais moins nombreux. — A la base de la région où se forme la coque : cils détachés nombreux, organismes semblables à ceux du cloaque, sauf les longs filaments, environ un par champ. — Au-dessus de ce point, pas vu d'organismes.

(c). *Avec une poule pondeuse déjà vieille,* mêmes résultats qu'avec la précédente; les organismes du cloaque sont seulement beaucoup plus variés. J'observe, en effet : 1° des bâtonnets très-courts et très-fins, rappelant le *Bacterium termo*, immobiles; 2° des bâtonnets analogues aux vibrions jeunes de la fermentation butyrique, avec de fines granulations, mais immobiles; 3° de longs filaments immobiles; 4° des *spirillum* tournant lentement sur place; 5° une amibe dont la forme change à chaque instant; 6° des sortes de spores vieilles, ridées, à doubles contours fortement accentués (*fig. 15*). — Les organismes qui ont remonté le canal vecteur sont surtout de longs filaments.

(d). *Autre poule pondeuse.*—Sur le cloaque : peu d'organismes, mais quelques cristaux en plaques rhomboïdales, rappelant certaines formes de l'acide urique. — Sur la surface de l'oviducte : organismes rares; à 10 centimètres environ du cloaque, je trouve une grosse spore oblongue, ayant un appendice caudal, et séparée par trois cloisons transversales en quatre loges à vacuoles; la longueur totale de la spore est de quatre centièmes de millimètre, et sa plus

grande largeur de seize millièmes de millimètre. Cette spore ressemblant beaucoup à celles que produisent certaines moisissures parasites du blé, telles que le *Puccinia graminis*, je tamise le grain, mélange d'avoine et de blé altéré, qui sert de nourriture à mes poules, et j'observe dans la poussière ainsi obtenue une grande quantité de spores, parmi lesquelles celles du *Puccinia graminis*, et d'autres tout à fait semblables à la précédente. Ainsi s'explique l'origine de cette dernière. — Sur la surface de la muqueuse où est sécrétée la coque, j'ai vu trois spores allongées, fusiformes, un peu verdâtres, de 6 à 8  $\mu$  de longueur et de 3  $\mu$  environ de largeur, plus un long filament à contours bien parallèles, de 20  $\mu$  au moins de longueur, et qui se distingue très-nettement des cils vibratiles détachés, avec lesquels de plus petits organismes pourraient aisément se confondre (*fig. 16*).

(*e*). Je citerai une dernière observation. A 10 centimètres du cloaque, dans une poule pondeuse, j'ai trouvé deux longs filaments organisés, ayant près de  $\frac{1}{2}$  millimètre de longueur, et ressemblant beaucoup à ceux de la poule (*b*). Ces organismes, qui diffèrent complètement de ceux du cloaque, étaient accompagnés de spores rondes, brunes, de 2  $\mu$  environ de diamètre, à l'aspect un peu vieux.

Dans toutes ces observations, je me suis attaché à ne considérer comme de véritables organismes que des articles ou filaments qui se distinguaient nettement des cils vibratiles isolés, soit par leurs formes, soit par leur longueur et le parallélisme de leurs contours. A mesure qu'on pénètre plus avant dans l'oviducte, l'observation devient, en effet, de plus en plus difficile, si on la veut certaine, parce que les organismes sont plus rares, plus courts, plus pâles que dans les régions inférieures; ils sont, par conséquent, plus semblables aux cils vibratiles.

Ainsi, dans les poules qui pondent, les organismes qui vivent à la surface du cloaque peuvent remonter à des hauteurs variables dans l'oviducte. Dans les poules vierges, le canal vecteur paraît en communication plus difficile avec le cloaque, et les organismes ne traversent pas l'orifice étranglé qui les sépare.

Si l'on tient compte de la difficulté de l'observation, et si l'on remarque, d'ailleurs, que des organismes nets, filaments, bâtonnets ou spores de moisissures, pénètrent, dans quelques cas, jusque dans la région de l'oviducte où se forme la coquille, c'est-à-dire jusqu'à 10 et 15 centimètres du cloaque, il est vraisemblable que les germes de ces organismes, ou même de petits organismes, peuvent s'élever beaucoup



plus haut, jusque dans les points où se forme la membrane coquillière, et même l'albumine, bien que l'examen microscopique soit généralement impuissant à les y montrer. Il en résulte que l'œuf, pendant la formation de ses divers éléments, peut recueillir, ou non, suivant les circonstances, des organismes ou leurs germes, et porter en lui, par conséquent, dès qu'il est pondu, la cause d'altérations ultérieures.

On voit, en même temps, que le nombre des œufs susceptibles de s'altérer, variera d'une poule à l'autre, aussi bien que dans une même poule, puisque les organismes qu'on observe sur l'oviducte s'élèvent à des hauteurs variables.

Mais tous les œufs qui renferment des organismes, ou leurs germes, ne s'altéreront pas nécessairement plus tard; outre qu'il faut pour cela qu'ils soient placés dans des conditions convenables de température, d'humidité, de milieu, il est probable que plusieurs de ces germes, ayant été transportés accidentellement et ayant séjourné dans un milieu qui ne leur était point destiné, ont perdu leur vitalité.

Ainsi s'expliquent très-rationnellement les différences si grandes dans les résultats qu'on obtient, quand on abandonne des œufs brouillés ou non à leur altération spontanée.

Les observations qui précèdent suffiraient pour établir que les œufs qui se gâtent ont pris leurs germes d'altération dans l'oviducte de la poule; mais voici une expérience qui a le caractère et la force d'une démonstration, car elle montre qu'on peut augmenter, presque à volonté, le nombre des œufs susceptibles de putréfaction.

A l'aide d'une petite seringue, j'ai fait une série d'injections d'un liquide contenant environ cinq cents bactéries mobiles et immobiles par champ, dans l'oviducte d'une poule que j'avais séparée du coq, afin que l'expérience ne fût point troublée par le rapprochement de ce dernier. Le tableau suivant indique les injections faites et les œufs recueillis :

- |    |         |  |
|----|---------|--|
| 11 | juin... | Injection de 2 <sup>cc</sup> ,5 de liquide.  |
| 12 | » ...   | Œuf n° 1.  |
|    |         | Injection de 2 <sup>cc</sup> ,5 de liquide, quatre heures après la ponte de l'œuf précédent. |
| 14 | » ...   | Injection de 2 <sup>cc</sup> ,5 de liquide.  |
| 15 | » ...   | Œuf n° 2.  |
|    |         | Injection de 2 <sup>cc</sup> ,5 de liquide, une heure après la ponte.                        |

- 16 juin.... Injection de 2<sup>cc</sup>,5 de liquide.  
 17 » ... OEuf n° 3.  
           Injection de 2<sup>cc</sup>,5 de liquide, six heures après la ponte.  
 18 » ... OEuf n° 4.  
           Injection de 2<sup>cc</sup>,5 de liquide, cinq heures après la ponte.  
 20 » ... OEuf n° 5.  
           Injection de 2<sup>cc</sup>,5 de liquide, trois heures après la ponte.  
           Cette injection est la dernière.  
 22 » ... OEuf n° 6.  
 24 » ... OEuf n° 7.  
 27 » ... OEuf n° 8.  
 29 » ... OEuf n° 9.  
 1<sup>er</sup> juillet. OEuf n° 10.  
 3 » . OEuf n° 11.  
 4 » . OEuf n° 12.

Tous les œufs sont mis dans un cristalliseur que je recouvre d'une lame de verre, et que je laisse dans une salle exposée au soleil. Les derniers œufs ouverts l'ont été le 16 août. Ils ont donné les résultats suivants :

N <sup>os</sup>		N <sup>os</sup>	
1.....	Pourri; bactéries.	7.....	Sain.
2.....	Id. Id.	8.....	Id.
3.....	Id. Id.	9.....	Id.
4.....	Sain.	10.....	Pourri; bactéries.
5.....	Id.	11.....	Sain.
6.....	Pourri; bactéries.	12.....	Id.

Il y a donc eu cinq œufs gâtés sur douze; mais on peut décomposer la durée de la ponte en deux périodes : la première qui correspond aux six premiers œufs, et pendant laquelle j'ai fait des injections fréquentes de bactéries; la seconde, qui correspond aux six derniers œufs, et pendant laquelle il n'a été fait aucune injection. Or, pendant la période des injections, quatre œufs se sont gâtés, tandis que dans la suivante un œuf seulement s'est gâté. L'influence de l'injection est manifeste. J'ajouterai que trois œufs pondus par la même poule, les 23, 26 et 27 juillet, examinés le 16 août, étaient restés aussi parfaitement sains.

**DONC LES ORGANISMES QUI SE DÉVELOPPENT DANS LES ŒUFS GÂTÉS ONT POUR ORIGINE LES GERMES RECUEILLIS SUR L'OVIDUCTE, PENDANT LA SÉCRÉTION DU BLANC OU DES ENVELOPPES.**

Dans les cas ordinaires, les organismes déposés à la surface du canal vecteur ne trouvent pas un ensemble convenable de conditions physiques et chimiques qui leur permettent de se multiplier. Si ces conditions deviennent favorables, ils peuvent y prendre un développement capable de désorganiser la muqueuse de l'oviducte et de déterminer la putréfaction de tout ce qui est arrêté dans le canal. Ainsi s'expliquent les résultats obtenus par Geoffroy Saint-Hilaire.

A l'intérieur d'un œuf maintenu pendant douze jours dans l'oviducte, afin d'y provoquer, si possible, un commencement d'incubation, Geoffroy Saint-Hilaire constate qu'il n'y a aucune trace d'embryon, et il ajoute : « Ce que j'y trouvai renfermé fut ce mélange confus de blanc et de jaune, que l'on connaît sous le nom d'*œuf gâté*, et qu'on observe dans tous les œufs clairs, après qu'ils ont été infructueusement couvés par une poule. Cependant l'altération n'allait pas jusqu'au degré de la putréfaction. Je ne m'aperçus d'aucune odeur désagréable. »

Un autre œuf, retenu artificiellement par une ligature, est resté vingt-huit jours dans l'oviducte d'une poule. A l'ouverture de l'oiseau, on trouva cet œuf enduit de blanc coagulé, en couches d'épaisseurs variables. « L'œuf ouvert, dit Geoffroy Saint-Hilaire, m'a paru aussi frais qu'un œuf nouvellement pondu; je n'y aperçus aucun indice d'un travail d'incubation. Cette circonstance éveilla d'autant plus mon attention, qu'il s'exhalait une odeur fétide de la couche albumineuse revêtissant l'extérieur de la coquille; l'oviducte répandait la même odeur. Ainsi, tout en dehors indiquait un œuf vieux et mauvais, et en dedans, au contraire, l'état du fluide albumineux, un œuf tout frais : c'est que, sans air oxygéné, il n'y a ni respiration ni putréfaction possibles ('). »

Assurément, si l'attention de l'illustre savant avait pu se porter sur la présence de proto-organismes, il en eût trouvé dans ses expériences. Pour nous, qui admettons la corrélation de l'existence d'êtres microscopiques et de la putréfaction, ces faits montrent que l'obstruction de l'oviducte a placé l'organe dans un état pathologique qui a facilité le développement des organismes déposés à sa surface; parallèlement s'est produite la décomposition des œufs.

---

(') *Mémoires du Muséum*, t. IX, p. 7.

Comment les organismes qui sont à la surface du cloaque et le plus souvent immobiles peuvent-ils pénétrer dans l'oviducte et s'avancer à sa surface, jusqu'à plusieurs centimètres de profondeur? Si la muqueuse était malade, on comprendrait que ces petits êtres, trouvant dans le liquide qui l'humecte un milieu favorable à leur développement, puissent se propager de proche en proche par multiplication; mais, dans l'état ordinaire et normal, la muqueuse doit bien plutôt rejeter tout corps étranger qui aurait pu s'introduire accidentellement dans l'oviducte. Les mouvements péristaltiques, à l'aide desquels les poules qui pondent expulsent leurs œufs, ne peuvent que concourir au même but. Si donc la progression spontanée de ces petits êtres est impossible, il faut qu'ils soient entraînés mécaniquement. Les grosses spores que nous avons trouvées n'ont pas évidemment parcouru d'elles-mêmes une distance de 10 à 15 centimètres.

Cet entraînement s'explique, je crois, de la façon suivante. Dans l'accouplement, l'utérus de la poule s'évagine en partie et sort béant du cloaque. C'est là que le coq applique rapidement le tubercule qui remplit chez ces animaux la fonction du pénis des quadrupèdes, et dépose sa liqueur séminale : la copulation ne dure qu'un instant. Aussitôt l'utérus rentre et reprend sa position naturelle. Dans cette opération, les parois de l'utérus ont nécessairement touché en quelques points la surface du cloaque; de plus, elles ont léché la surface du tubercule et du cloaque du mâle, sur lequel, je l'ai constaté, existent aussi de nombreux organismes; de sorte que, en revenant sur lui-même, l'utérus enferme dans la partie inférieure de l'oviducte, en même temps que la semence du coq, une certaine quantité de spores ou d'infusoires. Après l'accouplement, les spermatozoïdes remontent le long de l'oviducte et le parcourent dans toute son étendue, puisque la fécondation s'opère dans l'ovaire. On ignore quelle est au juste la cause de ce mouvement ('); mais, quelle qu'elle soit, la même force qui pousse ou appelle les sper-

---

(') Leuwenhœck l'a attribué au mouvement spontané des animalcules spermatiques; certains physiologistes aux mouvements des cils vibratiles, d'autres aux contractions vermiculaires de l'utérus; Pouchet pensait qu'au moment du coït un spasme très-prononcé de la partie vaginale produisait une aspiration dont l'effet était d'entraîner la semence; Coste considère ce mouvement comme un simple fait de capillarité.

matozoïdes doit vraisemblablement entraîner avec eux tous les corps étrangers qui ont à peu près leurs dimensions (').

L'explication précédente, qui paraît la plus rationnelle, rend compte en même temps d'une particularité déjà remarquée. Nous avons vu que les œufs non fécondés s'altéraient d'eux-mêmes beaucoup plus rarement que les œufs fécondés; en d'autres termes, au moment de la ponte, ils renferment dans leurs coques moins de germes d'altération que les derniers. Il faut donc qu'ils en aient rencontré moins sur la surface de l'oviducte. Cela se comprend, puisque les organismes ne peuvent pas progresser seuls, et que, d'autre part, par l'absence d'accouplement, rien ne détermine le mouvement antipéristaltique dont nous avons parlé; il est nécessairement très-rare qu'ils sortent du cloaque, et, dans tous les cas, ils doivent s'avancer très-peu dans l'oviducte.

#### RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS.

Les faits qui sont exposés dans ce Mémoire peuvent se résumer dans les conclusions suivantes :

1° En dehors du vieillissement naturel, certains œufs éprouvent spontanément des altérations profondes, distinctes les unes des autres; j'en ai observé quatre principales : la putréfaction, le développement de moisissures, la fermentation acide, la production abondante de cristaux.

2° La putréfaction dans les œufs est corrélative du développement et de la multiplication de vibrioniens, bactéries au contact de l'air, vibrions loin du contact de l'air. Les œufs, à ce point de vue, ne sortent point de la loi générale trouvée par M. Pasteur.

3° Des œufs non agités peuvent se putréfier; tous les œufs agités et brouillés ne s'altèrent point. La proportion des œufs gâtés dans les deux cas est extrêmement variable.

---

(') MM. Pasteur et Raulin ont fait une expérience intéressante qui prouve l'influence des organismes introduits dans la poche copulatrice des femelles de vers à soie en même temps que la semence du mâle. Ils ont montré qu'en trempant, avant l'accouplement, l'extrémité postérieure du mâle dans un liquide à vibrions, les œufs étaient tous contagionés en même temps que fécondés. (*Annales de l'École Normale supérieure*, 2<sup>e</sup> série, t. I, p. 15).

4° On peut faire pénétrer de l'eau dans des œufs sans qu'ils se putréfient; et, lorsque la putréfaction se déclare, ils renferment toujours de nombreux organismes.

5° Les embryons que l'on tue dans la coque, avant la fin de l'incubation, ne se putréfient pas toujours. Ceux qui résistent à cette altération subissent une sorte de *macération* analogue à celle qu'éprouvent les fœtus morts dans le sein maternel, mais sans développement d'organismes microscopiques; quant à ceux qui ne résistent pas, ils renferment de nombreux infusoires.

6° Le développement des moisissures produit une altération spéciale, différente de la putréfaction, mais pouvant exister simultanément avec elle.

7° La fermentation acide est corrélative du développement et de la multiplication d'organismes spéciaux.

8° Les matières de certains œufs se transforment en donnant une quantité notable de tyrosine et de leucine, sans développement corrélatif d'organismes.

9° Les organismes qui se développent spontanément dans les œufs proviennent de germes recueillis à la surface de l'oviducte pendant la formation des différentes couches dont se recouvre successivement le vitellus.



## LÉGENDE.

- Fig. 1.* Appareil à percer la coquille des œufs d'autruche, et permettant de recueillir tout le gaz produit par la fermentation putride.
- Fig. 2.* Tube en verre dans lequel on fait bouillir de l'eau. La vapeur, en passant par le tube effilé B et le trocart T, tue tous les germes déposés dans les différentes parties de l'appareil.
- Fig. 3.* Tube précédent dans lequel on fait arriver les matières d'un œuf, puis l'air extérieur dépouillé de ses germes.
- Fig. 4.* Tube précédent séparé du trocart et dont l'intérieur communique librement avec l'air extérieur par le tube étiré et contourné B.
- Fig. 5.* Appareil aspirateur permettant de renouveler l'air dans le tube précédent, pendant qu'il est maintenu à une température constante dans un bain-marie. Un vide partiel est fait dans le ballon A à l'aide d'une pompe à main P; l'air aspiré est chauffé dans un tube fin d'argent L. Le flacon F permet de régler la rentrée de l'air.
- Fig. 6.* Appareil à vis de M. Dumas pour l'étude de l'action de deux liquides séparés par une membrane mince.
- Fig. 7.* *Bacterium termo* se développant dans les œufs pourris au voisinage de l'air :  
 $l = 2 \text{ à } 4 \mu; c = 0,3 \text{ à } 0,5 \mu; G = \frac{450}{1}.$
- Fig. 8.* Bactéries très-petites se développant aussi dans les œufs pourris au voisinage de l'air et observés particulièrement dans des œufs de dinde :  $l = 1 \mu; c = 0,2 \mu;$   
 $G = \frac{450}{1}.$
- Fig. 9.* Organismes très-ténus, de longueur variable, observés dans les œufs pourris :  
 $G = \frac{450}{1}.$
- Fig. 10.* (a) Chapelets de grains; (b) chapelets d'articles étranglés; ces organismes ont été vus dans un œuf pourri :  $G = \frac{450}{1}.$
- Fig. 11.* Vibrions de la putréfaction, jeunes, vivant loin de l'oxygène de l'air :  $l = 2 \text{ à } 8 \mu;$   
 $c = 0,8 \text{ à } 1 \mu; G = \frac{450}{1}.$

- Fig. 12.* Vibrions vieux, à points brillants, observés dans des œufs dont la putréfaction est avancée :  $G = \frac{450}{1}$ .
- Fig. 13.* Levûre alcoolique trouvée dans un œuf de poule :  $G = \frac{450}{1}$ .
- Fig. 14.* Organismes et cellules épithéliales de la surface du cloaque d'une poule :  $G = \frac{450}{1}$ .
- Fig. 15.* Organismes observés sur le cloaque d'une autre poule : (a) articles analogues au *Bacterium termo*; (b) longs articles flexueux ressemblant à des vibrions; (c) long filament; (d) *spirillum*; (e) amibe; (f) spores vieilles et ridées :  $G = \frac{450}{1}$ .
- Fig. 16* (a) et (b) Spores de moisissures trouvées à 10 centimètres du cloaque dans l'oviducte d'une poule pondeuse; (c) long article de 20  $\mu$  au moins de longueur :  $G = \frac{450}{1}$ .
- Fig. 17.* Organismes trouvés sur la surface du cloaque d'un coq :  $G = \frac{450}{1}$ .
- Fig. 18.* *Torula* violette à spores très-grosses :  $d = 4$  à  $6 \mu$  :  $G = \frac{350}{1}$ .
- Fig. 19.* Spores précédentes à un grossissement plus fort :  $G = \frac{450}{1}$ .
- Fig. 20.* *Torula* à spores oblongues :  $d = 2,2$  à  $3,3 \mu$  :  $G = \frac{450}{1}$ .
- Fig. 21.* Chapelets de spores très-fines; *torula* sans mycélium;  $d = 0,7 \mu$  :  $G = \frac{450}{1}$ .
- Fig. 22.* *Aspergillus* dont le mycélium a  $1 \mu$  environ de diamètre; les spores rondes ont  $1 \mu$  de diamètre.
- Fig. 23.* Filaments de mycélium gênés dans leur développement à l'intérieur d'un œuf : la moisissure n'avait pas pu fructifier.



---

SUR

**LES POLYONES RÉGULIERS,**

PAR M. G. MATHET,  
PROFESSEUR AU LYCÉE DE LYON.

---

Le théorème de Gauss : « Tout polygone régulier dont le nombre des côtés est un nombre premier de la forme  $2^n + 1$  peut être construit graphiquement », n'a pas été, je crois, démontré de manière à pouvoir être donné dans des cours élémentaires; l'excellente démonstration que l'on trouve dans le *Cours d'Algèbre supérieure* de M. Serret exige du lecteur des notions d'Analyse assez étendues. La démonstration suivante repose uniquement sur une propriété des racines primitives, relatives à un nombre premier  $n$ .

Rappelons d'abord qu'on appelle *racine primitive*, pour le nombre premier  $n$ , un nombre  $a$  tel que  $a^{n-1} - 1$  soit un multiple de  $n$ , et tel que, pour aucune valeur de  $m$  inférieure à  $n - 1$ ,  $a^m - 1$  ne soit un multiple de  $n$ .

De cette définition il résulte :

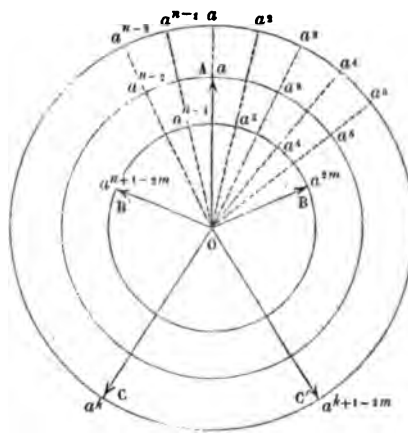
1° Que si  $a$  est une racine primitive, si  $m$  et  $m'$  sont des nombres entiers plus petits que  $n - 1$ ,  $a^m$  et  $a^{m'}$  divisés par  $n$  donnent des restes ou résidus différents; car, si le résidu était le même,  $a^m - a^{m'}$  ou  $a^{m'}(a^{m-m'} - 1)$  serait un multiple de  $n$ : donc  $a^{m-m'} - 1$  serait divisible

par  $n$ , ce qui est contraire à l'hypothèse, puisque  $a$  est une racine primitive. On voit sans peine que, par suite, les résidus fournis par les différents termes de la série  $a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}$  sont les nombres entiers de 1 à  $n-1$ .

2°  $a^{\frac{n-1}{2}}$  a pour résidu  $-1$ , car  $a^{n-1} - 1$  ou  $(a^{\frac{n-1}{2}} - 1)(a^{\frac{n-1}{2}} + 1)$  étant divisible par  $n$ , et  $a^{\frac{n-1}{2}} - 1$  ne l'étant pas, puisque  $a$  est une racine primitive,  $a^{\frac{n-1}{2}} + 1$  doit l'être; donc, etc. Donc : quand on multiplie une puissance de  $a$  par  $a^{\frac{n-1}{2}}$ , le résidu change seulement de signe; quand on la multiplie par  $a^{n-1}$ , le résidu ne change pas.

3° Soient (*fig. 1*) trois cercles concentriques, sur le plus grand desquels sont disposées, à intervalles égaux, les puissances de  $a$ . Sur les

Fig. 1.



deux autres sont les puissances impaires et les puissances paires, chacune, comme l'indique la figure, sur les rayons qui aboutissent aux points correspondants du grand cercle.

Soient un rayon  $OA$  du cercle moyen, dont l'extrémité est sur un des points de division de ce cercle,  $OB$  et  $OB'$  deux rayons du petit cercle, aboutissant à deux divisions de ce cercle, et tels que les angles  $AOB$  et

AOB' soient égaux. Si l'on fait tourner le système de ces trois aiguilles, les angles AOB et AOB' restant invariables, de manière à présenter A successivement à chaque division du cercle moyen, et si l'on fait chaque fois la somme des puissances de  $a$  qui se trouvent en A et B, en A' et B', ces sommes donnent pour résidu un certain nombre, le même que celui de l'une des puissances de  $a$  marquées sur le grand cercle.

Supposons, par exemple, que, A étant sur  $a$ , B soit sur  $a^{2m}$ ;  $a + a^{2m}$  aura un résidu, qui sera le même que celui de  $a^k$  sur le grand cercle. Soit OC le rayon sur lequel est  $a^k$ . B' se trouve en même temps sur  $a^{n+1-2m}$ , et le résidu de  $a + a^{n+1-2m}$  se trouve sur un point du grand cercle, que nous déterminerons tout à l'heure, et vers lequel nous menons le rayon OC'. Je dis que les deux aiguilles OC et OC' sont invariablement liées aux trois autres OA, OB et OB', tournent avec elles quand A se déplace sur le cercle moyen, et que l'intervalle CC' est d'un nombre impair de divisions.

En effet, si  $a + a^{2m}$  a même résidu que  $a^k$ ,  $a^2 + a^{2m+2}$  aura le même que  $a^{k+2}$ ,  $a^3 + a^{2m+4}$  le même que  $a^{k+4}$ , et ainsi de suite. Donc, quand A et B avancent chacun d'une division sur leur cercle respectif, C avance de deux divisions sur son cercle, et par conséquent OC tourne du même angle que OA et OB.

Si  $a + a^{2m}$  a même résidu que  $a^k$ ,  $a^2 + a^{2m+2}$  a même résidu que  $a^{k+2}$ ; mais le résidu de  $a^2$  est le même que celui de  $a^2 a^{n-2}$  ou de  $a^{n+1}$ . Donc  $a^{n+1} + a^{2m+2}$  a même résidu que  $a^{k+4}$ . Donc, en divisant chaque terme par  $a^{2m}$ ,  $a^{n+1-2m} + a$  a le même résidu que  $a^{k+1-2m}$ . Donc l'intervalle de C à C' est de  $2m - 1$  divisions, nombre impair et constant avec  $m$ . Donc, quand A se déplace sur son cercle, OC' parcourt le grand cercle, en tournant du même angle que OA, OB, OB', OC.

Si donc A parcourt toutes les divisions de son cercle, C parcourra toutes les divisions du grand cercle, d'une certaine parité, et C' parcourra toutes les autres.

4° Enfin supposons que le nombre premier  $n$  soit de la forme  $2^p + 1$ ;  $p$  est nécessairement une puissance de 2. La propriété démontrée ci-dessus peut être généralisée de la manière suivante.

Soit  $\alpha$  une puissance de 2. Supposons rangées sur un grand cercle toutes les puissances successives de la racine primitive  $a$ , à intervalles

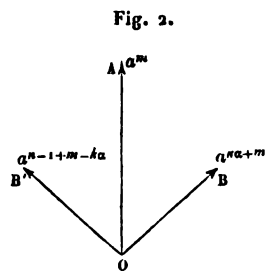
égaux; puis décrivons  $\alpha$  cercles concentriques, sur chacun desquels nous disposerons l'une des séries

$$(1) \quad \begin{cases} a, & a^{\alpha+1}, & a^{2\alpha+1}, & \dots, & a^{n-\alpha}, \\ a^2, & a^{\alpha+2}, & a^{2\alpha+2}, & \dots, & a^{n-\alpha+1}, \\ a^3, & a^{\alpha+3}, & a^{2\alpha+3}, & \dots, & a^{n-\alpha+2}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^\alpha, & a^{2\alpha}, & a^{3\alpha}, & \dots, & a^{n-1}, \end{cases}$$

chacune de ces puissances se trouvant sur le rayon qui aboutit à cette même puissance sur le cercle extérieur. Dédoublons maintenant l'une de ces suites, par exemple

$$a^m, a^{\alpha+m}, a^{2\alpha+m}, \dots, a^{n-\alpha+m-1},$$

et disposons les termes  $a^m, a^{2\alpha+m}, \dots$ , ainsi que  $a^{\alpha+m}, a^{3\alpha+m}, \dots$  sur deux nouveaux cercles concentriques aux premiers. OA étant dirigée vers  $a^m$  et OB vers  $a^{k\alpha+m}$ , où  $k$  est *impair* (fig. 2), pour savoir l'exposant de la



puissance de  $a$  vers laquelle OB' est dirigée, remarquons que la différence des exposants doit être la même, entre B et A, entre A et B'. Or l'exposant de  $a^m$  peut être remplacé par  $n-1+m$  sans que le résidu soit changé; donc en B' on aura  $a^{n-1+m-k\alpha}$ .

Soit maintenant  $a'$  la puissance de  $a$ , sur l'un des cercles portant les séries (1), vers laquelle est dirigée OC, c'est-à-dire que  $a'$  a même résidu que  $a^m + a^{k\alpha+m}$ . Donc  $a^{2\alpha+m} + a^{(k+2)\alpha+m}$  aura même résidu que

$a^{l+2a}$ , et ainsi de suite. L'aiguille OC tourne donc du même angle que OA.

Maintenant, comme  $a^m$  peut être remplacé par  $a^{m+n-1}$ ,  $a^{m+n-1} + a^{k\alpha+m}$  a même résidu que  $a^l$  : donc, en divisant par  $a^{k\alpha}$ ,  $a^{n-1+m-k\alpha} + a^m$  a même résidu que  $a^{l-k\alpha}$ . Or cette puissance se trouve sur le même cercle que  $a^l$ , et séparée de  $a^l$  par un nombre impair de divisions.

Donc, quand A parcourt toutes les divisions de son cercle, C' parcourt toutes les divisions du sien que C n'a pas parcourues.

Soit maintenant proposé d'inscrire à un cercle un polygone régulier de  $n$  côtés,  $n$  étant un nombre premier de la forme  $2^p + 1$ . Si l'on pose  $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ , la question revient à construire graphiquement le cosinus de  $\varphi$  ou de l'un quelconque de ses multiples. Soit

$$x_1 = 2 \cos a \varphi + 2 \cos a^2 \varphi + 2 \cos a^4 \varphi + \dots + 2 \cos a^{\frac{n-1}{2}-1} \varphi,$$

$$x_2 = 2 \cos a^2 \varphi + 2 \cos a^4 \varphi + 2 \cos a^8 \varphi + \dots + 2 \cos a^{\frac{n-1}{2}} \varphi;$$

ou, ce qui revient au même,

$$x_1 = \cos a \varphi + \cos a^3 \varphi + \dots + \cos a^{\frac{n-1}{2}-1} \varphi + \cos a^{\frac{n-1}{2}+1} \varphi + \dots + \cos a^{n-2} \varphi,$$

$$x_2 = \cos a^2 \varphi + \cos a^4 \varphi + \dots + \cos a^{\frac{n-1}{2}} \varphi + \cos a^{\frac{n-1}{2}+2} \varphi + \dots + \cos a^{n-1} \varphi;$$

car chaque puissance de  $a$  peut être réduite à son résidu, et deux puissances dont les exposants diffèrent d'une quantité égale à  $\frac{n-1}{2}$  ont des résidus égaux et de signes contraires. On a d'abord, par une formule connue,

$$x_1 + x_2 = -1.$$

Si l'on forme le produit  $x_1 x_2$ , ce produit est égal à la demi-somme des cosinus des arcs obtenus en ajoutant et en retranchant l'un quel-

conque des arcs de la première suite et l'un quelconque de ceux de la seconde. Or le coefficient de  $\varphi$ , dans chaque terme de la seconde moitié de chaque suite, réduit à son résidu, est égal et de signe contraire à celui qui occupe le même rang dans la première moitié; de sorte qu'au lieu de faire les sommes et les différences il suffit de faire les sommes et de doubler le résultat, le cosinus de deux arcs égaux et de signes contraires étant le même.

Or on obtiendra toutes ces sommes en réglant les aiguilles OB et OB' de toutes les manières possibles par rapport à OA, et en faisant faire chaque fois un tour complet au système. A chaque tour, C et C', dont le réglage change aussi chaque fois, parcourent tout le grand cercle. Donc on obtient en définitive, pour  $x, x_2$ , autant de fois la somme des cosinus qu'il y a de modes de réglage possibles, c'est-à-dire  $\frac{n-1}{4}$  fois.

Donc

$$x, x_2 = -\frac{n-1}{4}.$$

$x_1$  et  $x_2$  sont donc les racines de l'équation

$$x^2 + x - \frac{n-1}{4} = 0.$$

Soit maintenant

$$y_1 = 2 \cos a \varphi + 2 \cos a^3 \varphi + \dots + 2 \cos a^{\frac{n-1}{2}-3} \varphi,$$

$$y_2 = 2 \cos a^3 \varphi + 2 \cos a^7 \varphi + \dots + 2 \cos a^{\frac{n-1}{2}-1} \varphi,$$

ou bien

$$y_1 = \cos a \varphi + \cos a^3 \varphi + \dots + \cos a^{\frac{n-1}{2}-3} \varphi + \cos a^{\frac{n-1}{2}+1} \varphi + \dots + \cos a^{n-1} \varphi,$$

$$y_2 = \cos a^3 \varphi + \cos a^7 \varphi + \dots + \cos a^{\frac{n-1}{2}-1} \varphi + \cos a^{\frac{n-1}{2}+3} \varphi + \dots + \cos a^{n-2} \varphi;$$

et de même

$$z_1 = 2 \cos a^2 \varphi + 2 \cos a^6 \varphi + \dots + 2 \cos a^{\frac{n-1}{2}-2} \varphi,$$

$$z_2 = 2 \cos a^4 \varphi + 2 \cos a^8 \varphi + \dots + 2 \cos a^{\frac{n-1}{2}} \varphi,$$

ou bien

$$x_1 = \cos a^2 \varphi + \cos a^4 \varphi + \dots + \cos a^{\frac{n-1}{2}-2} \varphi + \cos a^{\frac{n-1}{2}+2} \varphi + \dots + \cos a^{n-1} \varphi,$$

$$x_2 = \cos a^4 \varphi + \cos a^8 \varphi + \dots + \cos a^{\frac{n-1}{2}-4} \varphi + \cos a^{\frac{n-1}{2}+4} \varphi + \dots + \cos a^{n-1} \varphi.$$

On voit d'abord que

$$y_1 + y_2 = x_1, \quad z_1 + z_2 = x_2.$$

Pour les produits  $y_1, y_2$  et  $z_1, z_2$ , on voit, comme ci-dessus, que chacun de ces produits est égal à la somme des cosinus de tous les arcs obtenus en ajoutant chacun des arcs qui entrent dans  $y_1$  ou dans  $z_1$ , avec chacun de ceux qui entrent dans  $y_2$  ou dans  $z_2$ .

Or, si l'on range sur deux cercles concentriques les deux séries  $a, a^2, \dots$  et  $a^2, a^4, \dots$ , puis si l'on dédouble l'une d'elles, la première par exemple, sur deux nouveaux cercles, pour chaque mode de réglage des aiguilles OA, OB, OB', dirigées vers les divisions de ces derniers cercles, les points C et C' parcourront toutes les divisions de l'un des deux cercles primitifs. Lorsque C et C' parcourront le premier de ces cercles, la somme des cosinus obtenus sera égale à  $x_1$ ; quand ils parcourront l'autre, cette somme sera égale à  $x_2$ . Donc  $y_1, y_2$  sera une fonction linéaire de  $x_1$  et de  $x_2$ , de la forme  $\alpha x_1 + \beta x_2$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant des nombres qui se trouveront aisément dans toute application numérique, mais dont la présente théorie ne donne pas l'expression. Il en sera de même de  $z_1, z_2$ ; donc  $y_1$  et  $y_2, z_1$  et  $z_2$  sont les racines de deux équations du second degré, à coefficients connus.

Que l'on pose maintenant

$$t_1 = 2 \cos a \varphi + 2 \cos a^3 \varphi + \dots + 2 \cos a^{\frac{n-1}{2}-1} \varphi,$$

$$t_2 = 2 \cos a^2 \varphi + 2 \cos a^4 \varphi + \dots + 2 \cos a^{\frac{n-1}{2}-2} \varphi,$$

et ainsi de suite; on voit sans peine, par un raisonnement identique, que  $t_1$  et  $t_2$  sont les racines d'une équation du second degré, dans la-

quelle le coefficient du second terme est  $-\gamma_1$ , et dont le terme indépendant est une fonction linéaire de  $\gamma_1, \gamma_2, z_1, z_2$ . Chacune des suites  $\gamma, z, t, \dots$  renferme toujours un nombre de termes qui est une puissance de 2 : donc chacune d'elles peut être dédoublée comme on vient de le voir, et l'on arrivera à la fin à une équation du second degré à coefficients connus, dont les racines seront les cosinus de deux multiples de  $\varphi$ .





---

# RECHERCHES

SUR LES

## SOLUTIONS GAZEUSES SURSATURÉES

ET SUR

CERTAINS PHÉNOMÈNES DITS *CATALYTIQUES* (<sup>1</sup>),

PAR M. D. GERNEZ,

PROFESSEUR AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND ET A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES.

---

### HISTORIQUE.

Lorsqu'on verse un liquide mousseux quelconque dans un vase, on voit naître sur ses parois des bulles gazeuses qui grossissent, puis se dégagent; un grain de raisin ou un morceau de mie de pain qu'on projette dans le même liquide se couvre aussitôt de bulles; entraîné jusqu'à la surface libre du liquide par ces petits ballons qui viennent crever au contact de l'air, il retombe, s'enveloppe de nouvelles bulles qui l'amènent encore jusqu'à la surface du liquide où elles se dégagent, et ce mouvement ascendant et descendant se reproduit un certain nombre de fois.

La connaissance de ces phénomènes doit être aussi ancienne que celle des liquides mousseux; néanmoins le premier fait publié sur ce sujet

---

(<sup>1</sup>) Les principaux résultats exposés dans ce Mémoire ont fait l'objet des Notes suivantes, présentées à l'Académie des Sciences :

1° *Sur le dégagement des gaz de leurs solutions sursaturées* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXIII, p. 883; 19 novembre 1866).

2° *Influence d'un courant de gaz sur la décomposition des corps* (*Comptes rendus*, t. LXIV, p. 606; 18 mars 1867).

3° *Note relative à l'action prétendue des liquides à faible tension superficielle sur les gaz dissous dans les liquides à forte tension superficielle* (*Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 89; 13 janvier 1873).

paraît être l'observation suivante signalée par OErsted (<sup>1</sup>). Dans un mélange de carbonate de potasse ou de sulfure de potassium et d'acide chlorhydrique, lorsque l'effervescence a cessé, on produit un nouveau dégagement de bulles gazeuses en introduisant un corps solide au sein du liquide. L'auteur assimile ce résultat à celui qu'on obtient par l'immersion d'un fil de platine dans de l'eau à la surface de laquelle on raréfie l'air. Gehlen avait déjà fait avec le D<sup>r</sup> Schuster des observations analogues, mais aucun de ces savants n'en donna l'explication.

Plus tard, Gay-Lussac fit, pour la première fois sans doute, ressortir les analogies que présentait le dégagement d'un gaz dissous avec la production des vapeurs. « Le dégagement d'un fluide élastique en dissolution dans l'eau est tout à fait analogue à l'ébullition d'un liquide. Si l'on prend une liqueur fermentée, de la bière ou du vin de Champagne mousseux, et que l'on attende que le dégagement de l'acide carbonique ait cessé, on renouvellera le dégagement du gaz en y introduisant une poussière, un morceau de papier, une croûte de pain, ou bien en agitant violemment le liquide. L'acide carbonique se dégage principalement au contact du liquide avec le verre, et plus abondamment aux endroits de la surface où il y a des aspérités. Les bulles partant de la surface du verre sont d'abord très-petites; mais elles grossissent en traversant la liqueur, parce qu'elles y établissent une solution de continuité très-favorable au dégagement de l'acide carbonique. Il semble qu'elles s'élèvent en plus grande abondance du fond du verre que de ses parois, mais c'est une illusion (<sup>2</sup>). » On voit que Gay-Lussac assimile l'effet des corps solides sur les solutions à celui qu'ils produisent lorsqu'on les projette dans des liquides bouillants; mais il attribue aux aspérités une efficacité dont il néglige de donner l'explication. La question ne fit aucun progrès jusqu'à Schönbein, qui publia en 1837 un Mémoire relatif à l'action de l'eau sur l'acide hypoazotique (<sup>3</sup>). Ce travail contient, avec le moyen de rendre inactifs les fils

(<sup>1</sup>) GEHLEN, *Journal für die Chemie und Physik*, t. I, p. 27; Berlin, 1806.

(<sup>2</sup>) GAY-LUSSAC, *Note sur la fixité du degré d'ébullition des liquides*. (*Annales de Chimie*, 2<sup>e</sup> série, t. VII, p. 312; 1817).

(<sup>3</sup>) *Einige Beobachtungen über das Verhalten der salpêtrichten Säure (der salpêtrichte Sauren, Salpetersäure von Berzelius) zu dem Wasser und eine damit in Verbindung stehende eigenthümliche Dampfbildung* von D<sup>r</sup> C.-F. Schœnbein (*Pogg. Ann.*, t. XL, p. 382; 1837).

de platine, des aperçus très-ingénieux et très-nouveaux sur le dégagement des gaz de leurs solutions et sur l'ébullition des liquides. Mais, s'il est facile d'interpréter les faits qu'il contient, maintenant que l'on en a l'explication, il n'en est plus ainsi lorsqu'on s'en tient aux termes mêmes du Mémoire; car, à côté de vues très-exactes, s'en trouvent d'autres contradictoires, comme on peut en juger par la citation suivante du court passage où il est question de solutions gazeuses (1) :

« Nous pourrions comparer notre mélange (d'acide hypoazotique et d'eau) à une solution saturée d'acide carbonique dans un fluide, c'est-à-dire nous pourrions le considérer comme une sorte de solution de bioxyde d'azote dans l'acide azotique étendu. Or comme un corps solide, tel qu'un fil de platine que l'on amène dans de l'eau chargée d'acide carbonique, exerce sur l'eau contenue dans la couche liquide environnante une action attractive capillaire et par là affaiblit l'attraction de l'eau pour l'acide carbonique qui sort de sa combinaison, le fil de platine agit de cette manière sur l'acide azotique du mélange et affaiblit son attraction pour le bioxyde d'azote.

» Mais il est clair que l'action du corps solide ne peut se faire sentir que sur la couche environnante, qui reste à une température constante, et cette action capillaire ne peut dégager que très-peu de gaz; aussi faut-il qu'une autre cause physique intervienne pour produire un dégagement gazeux plus fort et plus durable : cette cause n'est pas produite par le platine. »

Il résulte de là que Schœnbein regarde le platine comme dégageant l'acide carbonique d'une solution simplement saturée, ce qui est inexact; de plus, qu'il attribue le dégagement de gaz, sur les corps solides, à une attraction capillaire de ces corps qui serait plus grande pour l'eau que pour les gaz, qui peuvent ainsi se dégager : l'expérience contredit aussi cette manière de voir. Mais plus loin, et c'est alors qu'il est dans le vrai, comme nous le verrons, il signale l'efficacité de l'atmosphère gazeuse qui entoure les corps solides, et il attribue à cette cause une plus grande activité qu'à l'autre, comme cela résulte du passage suivant : « De ce qui précède il résulte que tout corps solide, même non poreux comme le platine, introduit dans le mélange, dégage du

(1) *Pogg. Ann.*, t. XL, p. 389.

bioxyde d'azote, non simplement par attraction capillaire, mais surtout par la couche d'air adhérente, et cela d'autant plus que la température du liquide est plus élevée. »

Ces assertions, dont la dernière seule est conforme à l'expérience, ne suffisent pas pour constituer une démonstration, et, comme le liquide mixte dont s'est occupé Schœnbein n'est pas assimilable *a priori* à une simple solution d'un gaz dans un liquide, on s'explique comment il se fait que ses idées, malgré ce qu'elles avaient de remarquable, ne trouvèrent pas plus de crédit près des savants. C'est ainsi que, deux ans après leur publication, Liebig (1) attribuait le dégagement d'acide carbonique que l'on produit dans les eaux minérales, en y introduisant un morceau de sucre, au déplacement de ce gaz par la dissolution de l'air du sucre, déplacement qui serait en raison inverse des coefficients de solubilité de l'acide carbonique et des gaz de l'air; et de même, Gmelin, qui analysa les recherches précédentes dans son *Manuel de Chimie* (2), signalait, d'une part, les angles et les bords des corps solides comme présentant des facilités spéciales pour le dégagement des gaz et, d'un autre côté, s'exprimait ainsi : « Beaucoup de corps solides peuvent cependant agir au moyen de l'air adhérent, qui est soit lui-même absorbé par le liquide d'où il chasse l'autre gaz, ou plutôt fournit les premières bulles, qui alors augmentent de volume en attirant l'autre gaz. »

Il y avait donc, d'après cela, trois manières d'envisager les choses : 1° les corps solides, surtout aux aspérités, agissent par attraction de préférence sur les liquides, d'où il résulte que le gaz moins retenu se dégage; 2° une couche gazeuse entourant les corps solides se dissout dans le liquide et en déplace des quantités de gaz qui sont en raison inverse des coefficients de solubilité; 3° cette couche gazeuse forme un centre d'attraction pour le gaz dissous.

Gmelin, comme on vient de le voir, penchait pour cette dernière explication; mais, en l'absence de toute démonstration, c'est la première qui fut généralement adoptée et exposée de la manière suivante : « Chaque molécule d'acide carbonique en dissolution est retenue par

(1) *Untersuchung der Mineralquelle zu Soden und Bemerkungen über die Wirkung der Salze auf den Organismus* von Justus Liebig (*Annalen der Chemie und Pharmacie*, t. XXX, p. 13; 1830).

(2) *Handbuch der Chemie* von Leopold Gmelin, t. I, p. 270-272; Heidelberg, 1843.

les molécules d'eau voisines qui dans l'intérieur du liquide ou même à une distance sensible des parois sont disposées uniformément autour de la molécule d'acide; mais, immédiatement au contact de la paroi, la molécule d'acide n'est retenue en dissolution que par les molécules aqueuses qui se trouvent d'un côté, et, de l'autre côté, par la surface de la paroi du vase. Or on conçoit que cette paroi peut retenir la molécule d'acide carbonique avec beaucoup moins de force que les particules d'eau dont elle tient la place. Les molécules d'acide carbonique placées contre la paroi prendront donc les premières l'état gazeux (1).

Pour ce qui est de l'action des corps poreux, tels que la mousse de platine, sur certains corps instables, outre les recherches consciencieuses et importantes de Thenard sur l'eau oxygénée, on connaissait une expérience remarquable signalée par Schœnbein dans le Mémoire cité précédemment. En introduisant un fil de platine dans la couche inférieure liquide que l'on obtient lorsqu'on ajoute peu à peu de l'eau à l'acide hypoazotique liquide, il avait observé sur le fil un dégagement de bioxyde d'azote; il regardait cette couche liquide comme une dissolution saturée de ce gaz dans l'acide azotique et attribuait le dégagement du bioxyde d'azote à l'atmosphère gazeuse condensée autour du platine. Les savants ne firent pas à cette manière de voir l'accueil qu'elle méritait : les uns, renonçant à expliquer l'action des corps poreux, continuèrent à l'attribuer à une *force catalytique*; les autres essayèrent d'en rendre compte par des considérations qui ne résistent pas à un examen sérieux. Je citerai, pour en donner une idée, celles qu'a développées M. R. Bunsen dans ses recherches gazométriques (2) :

« Lorsqu'un mélange d'un volume de gaz de la pile et de 2,85 volumes d'acide carbonique est porté jusqu'au voisinage de la température d'inflammation du gaz de la pile, ce dernier gaz acquerra immédiatement la faculté de détoner si l'on remplace l'acide carbonique par de l'oxygène sans faire subir au mélange aucun changement de température, et, pourtant, dans ce cas, ni l'acide carbonique ni l'oxygène ne prennent part à la réaction chimique.

» D'après cela, il est certain que les décompositions opérées par la

(1) REGNAULT, *Cours élémentaire de Chimie*, 3<sup>e</sup> édition, t. I, p. 357; 1851. — Voir aussi CAHOURS, *Traité de Chimie générale élémentaire*, 2<sup>e</sup> édition, t. I, p. 392; 1860.

(2) R. BUNSEN, *Méthodes gazométriques*, édition française, p. 276 et 277; Paris, 1858.

force dite *catalytique* peuvent s'expliquer d'une manière tout à fait analogue et que ces phénomènes, loin d'être extraordinaires, ne sont que la manifestation des effets ordinaires de l'affinité; car, de même que les molécules du gaz de la pile ne se combinent pas dans la sphère d'attraction de l'acide carbonique, mais deviennent au contraire aptes à entrer en combinaison, si, à la même température, et toutes circonstances égales d'ailleurs, elles se trouvent placées dans la sphère d'attraction des molécules de l'oxygène, de même les éléments du peroxyde d'hydrogène peuvent se combiner en présence des molécules de l'eau et perdent cette faculté dans la sphère d'attraction des molécules de peroxyde de manganèse ou du platine métallique.

» On explique de la même manière ce fait, qui paraît étrange au premier abord, qu'une petite quantité de platine peut décomposer une quantité illimitée de peroxyde d'hydrogène. En effet, partout où le platine est en contact avec le peroxyde d'hydrogène, il affaiblit l'action de l'affinité dans la couche la plus voisine, à tel point que le peroxyde d'hydrogène se décompose dans cette couche, mais dans cette couche seulement, en eau et oxygène. Par là, l'action du platine se trouve épuisée, et ce n'est que lorsque les produits de cette décomposition ont été éloignés par des forces étrangères, comme la pesanteur, la capillarité, la force expansive, etc., et que, par l'effet de ces mêmes forces, de nouvelles molécules de peroxyde d'hydrogène sont amenées en contact avec le platine, que la même décomposition recommence.

» On voit donc que la force catalytique du platine ou du peroxyde de manganèse ne fournit pas un travail illimité, mais qu'elle exige une dépense de force équivalente, tout comme le soulèvement d'un fardeau par l'effet d'un contre-poids exige une dépense équivalente de travail moteur. »

L'exposé historique que je viens de présenter montre que des expériences étaient nécessaires pour élucider l'action des corps solides sur les solutions gazeuses; je fus naturellement conduit à les entreprendre lorsque j'eus trouvé l'explication des particularités que présentent les solutions salines sursaturées. Je vais entrer dans quelques détails sur cette étude dont j'ai publié en 1866 (1) les principaux

---

(1) *Comptes rendus*, t. LXIII, p. 883.

résultats; je puis le faire avec d'autant plus d'opportunité que, parmi ces détails, ceux qui se trouveront dans le présent Mémoire et que je n'avais pas encore eu le loisir de faire connaître ne se rencontrent pas dans les travaux étrangers auxquels mes publications antérieures ont donné lieu.

---

## PREMIÈRE PARTIE.

### SOLUTIONS GAZEUSES SURSATURÉES.

---

La principale circonstance qui me paraît avoir égaré ceux qui cherchaient l'explication des phénomènes que je viens de rappeler, c'est l'idée préconçue que les solutions gazeuses pouvaient retenir au plus la quantité de gaz correspondant à la saturation. La facilité avec laquelle les gaz semblaient se dégager de leurs solutions paraissait exclure l'idée que ces solutions pussent être sursaturées. Il n'est, en effet, question dans tous les travaux antérieurs aux miens que de solutions saturées; il est certain cependant que l'on opérait dans les conditions ordinaires de la sursaturation.

Je me suis préoccupé tout d'abord d'établir par expérience l'existence de solutions gazeuses sursaturées; j'ai reconnu qu'une solution saturée graduellement de gaz à une température déterminée et sous une pression constante ne produit jamais d'effervescence dans les conditions où l'on observe généralement ce phénomène. C'est ainsi qu'une solution d'acide carbonique faite en amenant dans une petite quantité d'eau distillée un courant de ce gaz prolongé pendant plusieurs heures, et représentant un volume cent fois plus grand que celui de l'eau, ne dégage pas de gaz en présence d'une atmosphère d'acide carbonique, même quand on y introduit des corps poreux. Il n'en est pas de même dans le cas où il y a sursaturation.

On peut appeler *solution gazeuse sursaturée* une solution qui re-

tient une quantité de gaz plus grande que celle que dissoudrait, à la même température, le même poids de liquide si l'on amenait le gaz à sa surface sous une pression égale à celle que supporte actuellement le liquide.

On obtient ces solutions de plusieurs manières :

1° On fait dissoudre le gaz dans le liquide sous une pression déterminée, puis on élève la température et, si le gaz est moins soluble à chaud qu'à froid, ce qui est le cas général, la solution reste pendant un certain temps sursaturée.

2° On diminue la pression sans faire varier la température, et le liquide conserve le gaz dissous entre certaines limites de pression.

3° Enfin, comme dans l'expérience d'OErsted, on produit au sein du liquide, par une réaction chimique, une quantité de gaz plus grande que celle qui correspond à la saturation, et quand cet excédant ne dépasse pas certaines limites, le gaz reste tout entier en dissolution.

Quel que soit le procédé que l'on emploie pour les produire, les solutions sursaturées présentent les mêmes propriétés. Par exemple, lorsqu'on les verse dans un vase quelconque, ou qu'on y introduit un corps solide ayant été exposé à l'air libre, on voit apparaître sur la surface baignée par le liquide des bulles de gaz qui se dégagent après avoir atteint un volume suffisamment grand. Je vais indiquer les résultats auxquels m'a conduit une étude détaillée de ces phénomènes.

1. — *Les corps solides autour desquels se dégagent les bulles gazeuses perdent leur efficacité au bout d'un certain temps.*

On introduit dans la solution sursaturée une tige solide quelconque qui n'exerce pas d'action chimique sur le liquide, un fil de platine ou une baguette de verre, par exemple ; elle se couvre de bulles gazeuses adhérentes ; on agite la tige pour en détacher les bulles : elles montent alors en grossissant vers la surface. Cependant de nouvelles bulles apparaissent en moins grand nombre ; on facilite encore leur séparation par de nouvelles secousses, et, après un certain nombre d'opérations de ce genre, la tige ne se couvre plus de bulles gazeuses ; mais, si l'on enfonce dans le liquide la portion de la même tige non immergée jusque-là, elle produit une vive effervescence.



II. — *Un séjour prolongé des corps solides dans l'eau ou dans les liquides qui dissolvent les gaz leur enlève la propriété de provoquer le dégagement gazeux.*

Les expériences suivantes démontrent qu'un corps solide non poreux devient inactif après avoir longtemps séjourné dans l'eau ou dans un liquide qui dissout les gaz, tandis que la partie de la même substance restée hors du liquide se couvre immédiatement de bulles gazeuses.

1° On chauffe de l'eau à l'ébullition au fond d'un tube mince pour chasser les gaz qu'elle contient et avoir ainsi de l'eau désaérée en contact avec les parois du tube; puis on siphonne l'eau après refroidissement et on la remplace immédiatement par une solution sursaturée gazeuse, par de l'eau de Seltz, par exemple. Tant que le liquide n'est pas arrivé jusqu'au niveau précédemment atteint par l'eau désaérée, il ne se dégage pas de bulles gazeuses; lorsqu'il le dépasse, on voit au contraire une couronne de bulles sur la partie qui n'a pas été précédemment mouillée.

2° Les fils métalliques ou les baguettes de verre qu'on retire de l'eau où ils ont longtemps séjourné pour les introduire dans une solution gazeuse sursaturée ne provoquent plus de dégagement gazeux dans la région qui a été mouillée, tandis que le reste du fil se couvre de bulles.

Ces expériences réussissent bien plus facilement lorsqu'on emploie les liquides qui dissolvent les gaz de l'air plus abondamment que l'eau, tels que l'alcool, l'esprit-de-bois, l'éther, le phénol. Ainsi une baguette immergée pendant quelques minutes dans ces liquides, puis plongée dans l'eau de Seltz, ne se couvre de bulles de gaz que dans la partie qui n'a pas été baignée par ces liquides.

Certains corps poreux, dont l'action est ordinairement très-intense, peuvent de cette manière perdre toute efficacité; c'est ainsi que le bioxyde de manganèse qui a longtemps séjourné dans l'alcool absolu cesse de dégager l'acide carbonique de l'eau de Seltz. Il en est de même lorsqu'il a été maintenu pendant trois quarts d'heure dans l'eau bouillante et qu'on l'a laissé refroidir dans ce liquide.

III. — *Les corps solides perdent leur propriété sous l'influence de la chaleur.*

Une tige métallique portée à une haute température dans la flamme du gaz ou de l'alcool, et plongée immédiatement dans l'eau, devient aussitôt inactive : ainsi, un fil de platine introduit dans une solution sursaturée n'a plus d'effet dans la partie récemment chauffée, tandis que de nombreuses bulles de gaz couvrent le reste du fil. Lorsque le fil est assez fin pour que l'on puisse porter au rouge plusieurs de ses parties sans que les autres soient assez fortement échauffées pour devenir inactives, on distingue à l'immersion dans une solution sursaturée les régions qui sont restées relativement froides par le chapelet de bulles gazeuses qui les recouvre.

Cet effet de la chaleur s'exerce même sur la mousse de platine, dont l'efficacité à produire l'effervescence des solutions sursaturées est très-grande; je suis parvenu à la rendre inactive en la chauffant à blanc, puis en l'immergeant dans de l'eau que je faisais bouillir à diverses reprises.

Du reste, on rend les corps solides inactifs en les chauffant, soit directement dans une flamme, soit en les renfermant dans un tube de verre qu'il suffit d'amener à une température inférieure à celle où le verre se ramollit.

On peut encore éviter le contact direct de la flamme ou des gaz d'un foyer en procédant de la manière suivante. On met les deux bouts d'un fil de platine en communication avec les rhéophores d'une pile, et l'on s'assure que dans la solution sursaturée il se couvre de bulles, on le retire et l'on fait passer le courant qui porte le fil à l'incandescence; puis on le supprime et l'on immerge de nouveau le fil : on constate qu'il est devenu inactif.

IV. — *L'état de poli ou de rugosité de la surface est sans influence sur le phénomène.*

Les expériences précédentes donnent le même résultat, que la surface soit lisse ou qu'elle soit couverte d'aspérités. J'ai pris, par exemple,

une lame de verre dont j'ai complètement dépoli une des faces en la frottant avec du grès et, après l'avoir laissée séjourner à l'air, pendant plusieurs jours, je l'ai introduite dans de l'eau de Seltz, et je n'ai pas observé de différence sensible pour le nombre des bulles sur la face lisse et sur la face dépolie; les bulles développées sur la face lisse m'ont seulement paru atteindre, avant de se dégager, un plus grand diamètre. Du reste le séjour de la lame dans l'eau chaude ou dans l'alcool a enlevé rapidement à l'une et l'autre face la propriété de provoquer le dégagement gazeux.

V. — *Les corps solides qui n'ont pas eu le contact de l'air sont sans action sur la solution sursaturée.*

Les corps solides, quels que soient leur forme et l'état de leur surface, perdent, dans les circonstances indiquées ci-dessus, toute action sur les solutions sursaturées; on peut déjà conclure de là que ce n'est pas en tant que corps solides qu'ils provoquent le dégagement gazeux et que, par conséquent, il faut renoncer à toute explication dans laquelle on attribue une influence déterminante aux pointes ou aux aspérités que les corps peuvent présenter. Je vais indiquer quelques expériences qui établissent directement que les corps solides qui n'ont pas eu le contact de l'air sont sans action sur les solutions gazeuses sursaturées.

1° Lorsqu'on introduit dans ces solutions un fragment solide d'un sel quelconque, soluble ou non, un cristal d'alun dans de l'eau de Seltz par exemple, il se dégage aussitôt de l'acide carbonique. Si cet effet est dû à ce que le corps est à l'état solide, il se produira, quelle que soit la manière dont le cristal d'alun aura été formé et amené dans le liquide. Or on peut établir que, s'il n'a pas eu le contact de l'air, il est sans action sur la solution. A cet effet on introduit dans un tube de verre bouché à une de ses extrémités une solution sursaturée d'alun, que l'on fait bouillir pendant quelque temps pour enlever aux parois du tube la propriété de provoquer le dégagement des gaz, et, après le refroidissement, on fait arriver avec précaution, à la surface du liquide, de l'eau de Seltz qui est plus légère et se superpose nettement à la solution saline. Les deux liquides restent en contact sans dégager de gaz. On

touche alors, avec l'extrémité d'un fil de platine récemment chauffé au rouge, un morceau d'alun, dont on détache une parcelle toujours suffisante pour faire cristalliser la solution sursaturée de cette substance; si alors on enfonce rapidement le fil jusqu'au fond du tube, il y provoque la formation d'un cristal octaédrique d'alun qui adhère assez fortement à son extrémité pour qu'on puisse le retirer sans faire cristalliser le reste du liquide; on amène alors le cristal dans la couche d'eau de Seltz et, si la température est basse, il se dissout très-lentement sans qu'on observe de dégagement gazeux.

2° Lorsqu'on brise sous l'eau de Seltz un morceau de verre ou de tout autre corps solide vitreux, on reconnaît que les surfaces qui n'ont pas eu le contact de l'air ne se couvrent pas de bulles gazeuses. L'expérience peut être réalisée d'une manière intéressante au moyen d'une larme batavique dont la surface a été rendue inactive par le contact prolongé dans l'eau ou dans l'alcool. On brise la larme batavique dans un verre à parois épaisses rempli d'eau; elle se transforme en une poudre qui se rassemble au fond du vase; on enlève rapidement l'eau, que l'on remplace par de l'eau de Seltz, et l'on constate qu'il ne se produit aucune bulle gazeuse sur ces fragments de verre très-petits et de forme anguleuse. Mais l'expérience ne réussit pas avec des corps cristallisés, car l'air s'insinue entre les feuilletés cristallins et pénètre à l'intérieur de la masse solide. C'est ainsi qu'un fragment de bioxyde de manganèse naturel brisé sous l'eau de Seltz dégage de l'acide carbonique à la fois sur la surface extérieure qui a eu le contact de l'air et sur la cassure récente qui n'y a pas été exposée.

3° On peut varier beaucoup ces expériences et produire dans l'eau des corps pulvérulents inactifs, mais qui produisent une vive effervescence lorsqu'ils ont séjourné au contact de l'air. Les seules conditions à remplir pour le succès des expériences, c'est que la réaction chimique qui leur donne naissance ne produise pas en même temps un gaz, et que l'on attende pour mettre le corps solide au contact de la solution sursaturée que la chaleur dégagée pendant la réaction se soit dissipée. On prend, par exemple, de l'acide sulfurique étendu que l'on fait bouillir dans un tube dont les parois deviennent inactives, et l'on y introduit une solution récemment bouillie d'azotate de baryte : un dépôt de sulfate de baryte se rassemble au fond du tube; on enlève avec un

siphon le liquide et on le remplace par de l'eau de Seltz versée doucement. Vient-on à agiter un peu le tube, un nuage de sulfate de baryte s'élève dans le liquide sans produire de bulles gazeuses, tandis que du sulfate de baryte desséché à l'air détermine dans l'eau de Seltz une vive effervescence. On obtient le même résultat avec le dépôt de chlorure d'argent résultant de la réaction du sel marin sur le nitrate d'argent.

VI. — *Les corps qui ont perdu leur propriété la reprennent lorsqu'ils ont été exposés au contact de l'air.*

Nous venons de voir que les corps qui ont séjourné dans l'eau ou qui ont été portés à une température élevée sont dépourvus de la propriété de provoquer le dégagement gazeux. On peut leur rendre leur activité en les laissant séjourner longtemps à l'air. On retire, par exemple, un fil métallique de la solution sursaturée où il cesse de dégager du gaz, et on l'introduit dans un flacon au fond duquel on a versé une couche d'acide sulfurique que l'on a agité au préalable dans le flacon pour ne conserver que les éléments gazeux de l'atmosphère et que l'on maintient fermé. La surface du fil se dessèche rapidement, et, si on l'immerge de nouveau dans la solution sursaturée, il se recouvre immédiatement d'un chapelet de bulles gazeuses. Il en est de même des fils qui ont perdu leur activité par un séjour de quelques minutes dans l'eau bouillante. Pour ce qui est des corps que l'on a rendus inactifs en les chauffant à une température élevée, ils ne reprennent en général leur activité qu'après un temps plus long. L'expérience peut se réaliser sans exposer le fil au contact d'autre chose que les éléments gazeux de l'atmosphère; il suffit de faire rougir le fil à l'aide du courant de la pile dans un tube au fond duquel se trouve de l'eau de Seltz. Vient-on à immerger ce fil dès qu'il est refroidi, on observe qu'il ne produit aucun effet sur la solution sursaturée; mais, si on le retire alors du liquide pour l'amener dans la partie supérieure du tube et qu'on l'immerge de nouveau, au bout de dix minutes, on le voit se couvrir immédiatement de bulles d'acide carbonique.

VII. — *Une atmosphère gazeuse quelconque détermine le dégagement du gaz dissous.*

On voit par ce qui précède, d'une part, que les corps solides qui provoquent le dégagement gazeux n'agissent pas en tant que corps solides, d'autre part, que ceux qui sont devenus inactifs par leur séjour dans l'eau ou l'action de la chaleur et ceux qui, comme le cristal d'alun, les fragments de larme batavique et le précipité de sulfate de baryte, n'avaient pas encore été exposés à l'air, deviennent actifs lorsqu'ils ont séjourné dans des vases fermés ne contenant que les éléments gazeux de l'atmosphère. On est ainsi naturellement conduit à attribuer le dégagement de bulles gazeuses à l'air condensé à la surface des corps solides et amené par eux au sein des liquides. Si cette hypothèse est exacte, il devra être possible de provoquer ce dégagement en introduisant dans la solution sursaturée une atmosphère gazeuse quelconque. Pour réaliser l'expérience, j'étrangle à la lampe d'émailleur, près de l'une de ses extrémités, un tube de verre dont le diamètre peut être aussi petit qu'on voudra; j'y forme ainsi une petite cloche qui sert à introduire en un point quelconque de la masse liquide un volume d'air ou de gaz déterminé. Le bord de l'orifice de cette cloche ayant été récemment chauffé au rouge est devenu inactif; d'un autre côté, l'air de la cloche se trouve soumis à une pression croissante à mesure qu'on enfonce la cloche dans le liquide et il diminue de volume. Cependant on voit bientôt l'air de la cloche en refouler l'eau et prendre la forme d'un ménisque de plus en plus convexe, jusqu'à ce que la bulle d'air qui s'appuie sur le bord intérieur du tube l'abandonne pour monter à la surface du liquide; une nouvelle bulle se forme, puis se dégage, et le phénomène continue tant que la solution est sursaturée. Ainsi l'air introduit dans l'eau de Seltz en dégage de l'acide carbonique. Ce dégagement de gaz dissous au contact d'une atmosphère artificielle introduite dans le liquide est généralement assez lent; sa vitesse augmente avec le degré de concentration de la solution et aussi avec l'élévation de la température. Avec de l'eau de Seltz saturée sous une pression de 2 atmosphères et une cloche d'environ 2 centimètres cubes de capacité, les bulles de gaz se succèdent à des intervalles de plus en plus espacés, comme on peut en

juger par le résultat suivant d'une observation de ce genre prolongée pendant un peu plus d'une heure :

5.55 <sup>m</sup>		8.48 <sup>m</sup>
6.45		9.15
6.50		10.20
7.03		10.45
7.34		13.40
8.00		

Mais on peut observer des dégagements très-rapides avec une solution d'un gaz plus soluble : par exemple, en maintenant à 20 degrés une solution d'ammoniaque obtenue en saturant par un courant de ce gaz de l'eau entourée d'un mélange réfrigérant. Dans ces circonstances, l'introduction d'une cloche à air dans le liquide y produit un dégagement très-abondant de bulles gazeuses, qui toutes viennent prendre naissance à l'orifice de la cloche : c'est une sorte d'ébullition de la solution ammoniacale (1).

Ainsi, une bulle d'air amenée en un point de la masse liquide se gonfle aux dépens du gaz qui se trouve en dissolution dans les régions voisines; la rapidité du phénomène dépend de la vitesse avec laquelle les couches les plus riches cèdent le gaz aux couches contiguës et elle ne peut jamais être très-grande. Pour déterminer un dégagement plus actif, il suffit d'amener successivement la bulle dans des régions qui n'aient point encore cédé de gaz. Ce phénomène se produit spontanément lorsqu'une bulle de gaz détachée du fond du vase s'élève vers la surface en traversant une couche épaisse de liquide; on observe alors une augmentation de volume qui est hors de toute proportion avec la diminution de la pression qu'elle supporte; mais il vaut mieux donner à l'expérience la forme suivante. On prend un tube de verre rendu inactif par l'un des moyens que j'ai indiqués, et d'une grande longueur,

---

(1) Cette expérience, qui réussit très-facilement avec les solutions d'ammoniaque et autres, ne donnerait aucun résultat si l'on employait des liquides qui pussent être considérés comme des combinaisons plus ou moins bien déterminées de gaz avec le dissolvant, par exemple les solutions d'acide chlorhydrique. C'est même là un moyen de reconnaître si, dans des conditions données de température et de pression, un gaz est combiné avec un liquide ou bien s'il y est simplement dissous.

1 mètre par exemple; on recourbe à angles droits ses deux extrémités, puis, le tube étant horizontal, on le remplit d'eau de Seltz; on l'incline alors de quelques degrés, et, à l'aide d'un fil de platine, on fait naître à l'extrémité la plus basse du tube une bulle de gaz qui chemine vers l'autre extrémité en prenant très-vite un volume qui peut être, à l'arrivée de la bulle, plusieurs centaines de fois plus grand qu'au départ, si l'inclinaison du tube est suffisamment faible. Avec un tube de 90 centimètres de long, assez incliné pour que les bulles de gaz puissent cheminer par l'effet de la poussée du liquide, une bulle de gaz de  $\frac{1}{3}$  de millimètre de diamètre arrivait, au bout de deux minutes et demie, à l'autre extrémité; son diamètre était alors de  $2\frac{1}{2}$  millimètres: son volume était donc devenu 421 fois plus grand. Ici l'augmentation de volume ne peut être attribuée à une augmentation de pression et, d'un autre côté, si le tube est peu incliné, le mouvement de la bulle sera plus lent, et par suite elle pourra prendre des dimensions plus considérables.

J'ai indiqué plus haut que mes recherches sur les solutions gazeuses sursaturées avaient eu pour origine celles que j'avais entreprises sur les solutions salines sursaturées. Or le résultat de mes expériences était que le seul contact qui puisse déterminer la cristallisation de ces solutions est celui d'une parcelle identique à la substance que l'on fait cristalliser, ou tout au moins rigoureusement isomorphe avec elle. Je me suis trouvé naturellement conduit à rechercher si la présence d'une bulle gazeuse identique au gaz dissous était nécessaire pour le dégager de sa solution sursaturée. Les expériences précédentes ne résolvaient pas la question, car l'action de l'air sur l'eau de Seltz, par exemple, pouvait être attribuée à la petite quantité d'acide carbonique qui s'y trouve normalement. Pour reconnaître si le contact d'une parcelle gazeuse de même nature était nécessaire au dégagement, il fallait essayer sur une solution gazeuse sursaturée un gaz qui ne contient pas la moindre trace du gaz dissous. Pour me mettre à l'abri des difficultés que présente la préparation des gaz absolument purs, j'ai fait agir l'air atmosphérique sur une solution sursaturée d'un gaz qui ne peut exister dans l'atmosphère, le bioxyde d'azote, qui s'y transforme en acide hypoazotique. L'expérience prouve qu'il y a, dans ce cas, dégagement du bioxyde d'azote dissous comme pour l'eau de Seltz.



Du reste, j'ai reconnu qu'en introduisant dans de l'eau de Seltz de petites cloches contenant des gaz tels que l'hydrogène, l'hydrogène sulfuré, etc., qui n'ont d'action ni sur l'eau ni sur l'acide carbonique, on provoque un dégagement du gaz dissous, mais ces divers gaz n'agissent pas avec la même activité. Non-seulement l'atmosphère gazeuse de même nature n'est pas nécessaire, mais elle a, au contraire, moins d'efficacité que les autres; c'est une particularité dont on trouvera plus loin l'interprétation. Il résulte donc de ces expériences qu'un gaz quelconque détermine un dégagement gazeux dans les solutions sursaturées. J'ajouterai de plus qu'un courant du gaz dissous fait cesser assez rapidement la sursaturation : ainsi, en faisant passer un courant d'acide carbonique dans l'eau de Seltz, ou en agitant ce liquide dans un flacon plein d'acide carbonique, on enlève à la solution la propriété de dégager du gaz lorsqu'on y introduit même des corps poreux.

#### VIII. — *Mécanisme du phénomène.*

Les expériences qui précèdent établissent donc que les corps solides amenés au sein des solutions gazeuses sursaturées n'agissent pas sur elles en tant que corps solides, mais par la couche gazeuse de nature quelconque dont ils sont environnés, laquelle est suffisante pour provoquer un dégagement gazeux. On doit, du reste, considérer un corps poli, quel que soit le degré de poli qu'il ait reçu, comme couvert d'aspérités formant à sa surface une sorte de réseau de conduits capillaires dans lesquels les gaz environnants s'introduisent et se condensent en quantités quelquefois considérables. Quant au mécanisme du phénomène, je crois qu'on peut s'en rendre compte de la manière suivante : soit une bulle d'oxygène amenée à l'aide d'une petite cloche à l'intérieur d'une solution sursaturée d'acide carbonique; la couche liquide sursaturée en contact avec l'atmosphère d'oxygène se trouve dans les mêmes conditions qu'un liquide en présence d'un espace vide ou rempli d'une vapeur d'espèce différente; il y a donc dégagement dans l'oxygène de l'acide carbonique contenu dans la couche très-mince superficielle, jusqu'à ce que dans l'atmosphère d'oxygène ce gaz ait pris la tension qui correspond à son coefficient de solubilité dans l'eau. D'un autre côté, à mesure que la couche superficielle s'appauvrit, la couche

suivante lui cède par diffusion une partie du gaz qu'elle contient et en reçoit en même temps de la couche ultérieure, de sorte que, de proche en proche, il arrive du gaz vers cette couche superficielle tant que dure la sursaturation. Le dégagement se produisant ainsi sur cette sorte de surface libre en présence de l'oxygène et sous une pression extérieure supposée constante, la bulle d'acide carbonique grossira en restant adhérente aux bords de la cloche où elle a pris naissance, jusqu'à ce que la poussée du liquide, qui augmente sans cesse, triomphe de l'adhérence capillaire et entraîne verticalement la bulle vers la surface libre du liquide. En s'élevant, la bulle grossit à la fois par son passage à travers de nouvelles couches sursaturées et par suite de la diminution de la pression.

Du reste, au commencement, l'atmosphère gazeuse étant d'une autre nature que le gaz dissous se comporte par rapport à lui comme le vide, et le dégagement d'acide carbonique doit être alors très-rapide; mais ce gaz se mélange à l'oxygène et aussitôt le dégagement se ralentit, d'autant plus que la proportion d'acide carbonique devient plus grande; cependant il continue tant que la couche superficielle contient plus d'acide carbonique qu'elle n'en dissoudrait sous la pression qu'exerce ce gaz dans le mélange gazeux.

Si, au lieu d'amener de l'oxygène dans l'eau de Seltz, on introduit une atmosphère d'acide carbonique, il y a encore dégagement gazeux; mais il doit être bien plus lent au commencement que dans le cas d'un gaz différent, car la production du gaz par la couche superficielle n'est que l'émission d'un gaz dans une atmosphère de même nature dont la tension est inférieure à celle qu'il faudrait produire pour faire pénétrer dans le liquide la quantité de gaz qui y est dissoute.

L'expérience justifie pleinement cette manière de voir; en effet, dans une même solution sursaturée d'eau de Seltz, deux petites cloches aussi identiques que possible, l'une à hydrogène, l'autre à acide carbonique, descendant au même niveau, laissèrent dégager des bulles gazeuses successives après les durées suivantes :

Cloche à hydrogène.	Cloche à acide carbonique.
5.44 <sup>m</sup>	7.56 <sup>m</sup>
5.55	8.05
7.56	10.30
8.45	12.50
9.10	13.00
10.26	14.06
11.47	16.40

Cette explication très-simple du phénomène suppose : 1° qu'il n'y a dégagement de gaz qu'aux surfaces libres, c'est-à-dire au contact d'une atmosphère gazeuse ; 2° qu'à mesure qu'il y a déperdition du gaz à la surface libre du liquide, les autres couches liquides cèdent par diffusion et de proche en proche une partie du gaz qu'elles contiennent à la couche superficielle, jusqu'à ce que celle-ci ne contienne plus que la quantité de gaz nécessaire à la saturation dans les conditions de l'expérience.

De ces deux conditions, la première se trouve réalisée dans toutes les expériences indiquées ci-dessus. On pourrait croire cependant qu'il se produit souvent des bulles gazeuses au sein même du liquide ; mais un examen attentif de l'endroit où elles prennent naissance ne tarde pas à y faire reconnaître la présence de parcelles solides non privées de l'atmosphère gazeuse dont j'ai parlé plus haut.

Du reste, j'ai réussi à réaliser le dégagement de gaz seulement à la surface libre, dans les conditions les plus démonstratives, en prenant les dispositions suivantes. J'ai nettoyé avec le plus grand soin un tube de verre qui avait été lavé successivement à la potasse, à l'eau distillée et à l'alcool bouillant avant d'être fermé à la lampe à l'une de ses extrémités ; j'y ai introduit une solution saturée d'acide carbonique, sous la pression d'environ 3 atmosphères, et je l'ai mise en communication avec le récipient, entièrement vide d'air, d'une pompe à mercure. Je n'ai observé ni sur les parois, ni à l'intérieur du liquide, la production d'une seule bulle de gaz ; j'ai continué à faire le vide et le gaz ne s'est pas dégagé davantage à l'intérieur du liquide : il n'y avait déperdition que par la surface. Au contraire, en recommençant l'expérience, après avoir introduit dans le liquide un fil de platine non désaéré, il y

avait, au moment où je raréfiais l'air, dégagement si abondant de bulles gazeuses sur le fil que le liquide paraissait être en pleine ébullition. Cette expérience démontre bien que, même dans un milieu tout à fait vide d'air et sous la seule pression de la vapeur d'eau, le gaz d'une solution qui a été sursaturée sous une pression d'environ 3 atmosphères ne se dégage pas au sein du liquide lorsqu'on n'introduit pas au préalable dans son intérieur une couche gazeuse quelconque.

Quant à la seconde condition, voici quelques expériences directes qui établissent qu'elle se trouve toujours réalisée : on prend un vase cylindrique de 20 à 30 centimètres de hauteur, on le prépare de manière que ses parois ne provoquent pas le dégagement du gaz, on le remplit presque entièrement d'eau de Seltz et on le maintient dans une salle dont la température reste sensiblement constante, pour éviter le mélange des couches liquides. On introduit alors une petite cloche dans la région supérieure du liquide ; il se produit un dégagement de bulles de gaz qui continue pendant un certain nombre d'heures, variable avec la concentration de l'eau de Seltz. Lorsque le gaz emprisonné sous la cloche n'augmente plus de volume, on enfonce le tube davantage, et après quelques minutes, bien que la pression supportée par le gaz soit plus forte, on constate un nouvel accroissement de volume qui prouve que les régions inférieures sont encore sursaturées quand les régions supérieures ont cessé de l'être ; lorsqu'au bout d'un certain temps le dégagement cesse à ce niveau on le reproduit en enfonçant encore la cloche de gaz. On peut donner à cette expérience une forme un peu différente ; on introduit dans le vase cylindrique, plein d'eau de Seltz, trois petites cloches à air aussi identiques que possible, mais dont les orifices affleurent à des niveaux différents, et l'on constate que, lorsque le dégagement gazeux a cessé dans la cloche supérieure, il persiste encore pendant un certain temps dans les deux autres, puis qu'il cesse dans la cloche moyenne pendant qu'on peut l'observer encore longtemps dans la cloche inférieure.

On peut du reste se faire une idée de la distribution du gaz dans les couches successives en opérant comme il suit : on prend un tube de 15 millimètres de diamètre et de 40 à 50 centimètres de longueur ; on le prépare comme il a été dit plus haut et on le remplit d'eau de Seltz, en laissant son orifice librement ouvert dans l'atmosphère. On enfonce

alors rapidement dans le tube un fil de platine : il se couvre immédiatement de bulles gazeuses de grosseur uniforme ; mais, si l'on abandonne le tube à une température sensiblement constante pendant plusieurs heures et qu'on immerge de nouveau le fil, on constate que les bulles qui se forment dans les couches voisines de la surface libre sont beaucoup plus petites que les autres. Si l'on répète l'expérience chaque jour, on reconnaît que la région où les bulles sont le plus petites s'étend graduellement vers le bas, et l'on arrive enfin à trouver que le fil ne se couvre plus de bulles gazeuses que dans la région inférieure et sur une longueur qui diminue graduellement.

Il résulte de là que les couches gazeuses sursaturées les plus riches cèdent de proche en proche une partie du gaz dissous aux couches superficielles ; mais cet échange est extrêmement lent, et dans un tube de 40 centimètres de long et de 15 millimètres de diamètre j'ai pu suivre les particularités du phénomène avec la même solution sursaturée pendant plus de six mois. Ainsi se trouve confirmée dans ses divers détails l'explication proposée ci-dessus.

#### IX. — *Vérification a posteriori de l'explication précédente.*

Les expériences qui précèdent nous ont conduit à attribuer le dégagement des gaz des solutions sursaturées à l'existence d'une atmosphère gazeuse agissant comme nous venons de le dire. Nous allons passer en revue quelques conséquences de ce résultat, dont nous donnerons ainsi une vérification expérimentale.

Si le dégagement gazeux produit par les corps solides est déterminé par le réseau de conduits capillaires qui s'ouvrent à la surface des corps, il devra être d'autant plus abondant que ces conduits seront plus nombreux. C'est ce que l'on observe en effet : ainsi, dans une solution gazeuse sursaturée, les corps poreux, comme le noir ou la mousse de platine, produisent une vive effervescence qui persiste très-longtemps.

Au contraire, si ces canaux se réduisent à des sillons largement ouverts, où l'arrivée du liquide emprisonne de l'air, le dégagement de chaque bulle gazeuse formée dans cette atmosphère l'entraînera en partie, et lorsqu'un certain nombre de bulles se seront dégagées, il ne

restera plus de gaz pour amorcer le phénomène : c'est encore ce que l'on constate à la surface des corps non poreux.

L'effet d'un contact prolongé avec les liquides s'explique très-bien par la dissolution lente des gaz condensés à la surface des corps immergés. Quant à l'action de la chaleur, on s'en rend compte en considérant que les gaz sont chassés en grande partie par la dilatation. De plus, lorsque le corps est chauffé au rouge avec le contact de l'air, les matières organiques pulvérulentes ou grasses déposées à sa surface, et qui y forment de nombreux sillons pouvant emprisonner de l'air, se trouvent détruites, et la surface du corps est débarrassée de la couche gazeuse qui était retenue dans les anfractuosités de la surface.

Cette action d'une atmosphère gazeuse sur les gaz retenus en solutions sursaturées par les liquides rend compte d'un certain nombre de phénomènes : elle explique comment une solution sursaturée gazeuse exposée à l'air s'appauvrit peu à peu par la surface ; comment un courant d'air ou d'un gaz quelconque enlève rapidement d'une solution tout l'excédant de gaz dissous, si le courant gazeux est de même nature, et la totalité de ce gaz si le courant est de nature différente. Elle rend compte aussi de l'effervescence très-vive que l'on produit en agitant avec de l'air une solution gazeuse sursaturée. Dans ce cas, en effet, on introduit, par l'agitation, un grand nombre de bulles gazeuses qui forment chacune une atmosphère dans laquelle le gaz dissous se dégage ; ces bulles, très-petites d'abord, grossissent très-rapidement, forment avec des liquides convenables une mousse si abondante, qu'après un très-petit nombre de secousses l'excédant de gaz persistant en dissolution a totalement disparu. Enfin elle donne la raison de l'effervescence qu'on détermine lorsque l'on comprime brusquement de l'air à la surface d'un liquide mousseux ; chaque bulle d'air qui pénètre dans le liquide sert d'amorce au dégagement gazeux.

---

## DEUXIÈME PARTIE.

## DÉCOMPOSITION DE CERTAINS CORPS AU CONTACT D'UNE ATMOSPHÈRE GAZEUSE.

Il résulte des faits rapportés dans la première Partie que l'introduction d'une atmosphère quelconque au sein d'une solution gazeuse sursaturée détermine le dégagement d'une portion du gaz dissous égale à l'excès de la quantité qui s'y trouve contenue sur celle qu'on y pourrait dissoudre de l'extérieur dans les conditions de l'expérience, et cela quelle que soit l'origine de la solution sursaturée, qu'elle provienne d'une diminution de pression, d'une élévation de température ou de la formation au sein du liquide d'un poids de gaz supérieur à celui qu'il pourrait normalement en dissoudre.

La facilité avec laquelle on peut ainsi dégager le gaz dissous dans les liquides au moyen d'une atmosphère gazeuse qu'on y introduit m'a engagé à rechercher si je ne pourrais pas par ce moyen déterminer la séparation de certains composés liquides en leurs éléments gazeux. L'expérience a justifié cette prévision et je vais indiquer les résultats que j'ai obtenus : 1° avec les substances dont les éléments séparés peuvent se recombinaer à la température de l'expérience; 2° avec celles dont les éléments séparés ne peuvent pas, dans les mêmes conditions, régénérer le composé primitif.

I. — *Cas des composés susceptibles de dissociation.*

Pour augmenter la quantité de gaz séparé, il convient de renouveler fréquemment l'atmosphère gazeuse introduite au sein du liquide : à cet effet on le fait traverser par un courant de gaz. Si l'on emploie, par exemple, des solutions de sulfhydrate de sulfure de potassium bien cristallisé, récemment préparé et débarrassé par un courant d'air de l'hydrogène sulfuré interposé mécaniquement, on reconnaît qu'un courant de gaz inerte d'azote ou d'hydrogène, lavé au préalable dans une

lessive alcaline, entraîne immédiatement de l'hydrogène sulfuré à la température ordinaire.

Pour éviter toute objection, voici la disposition qu'il convient de donner à l'expérience : l'air appelé par un aspirateur traverse un long tube contenant des fragments de potasse caustique qui absorbent l'acide carbonique; il passe alors à travers la solution, préparée au moment même, de sulfhydrate de sulfure de potassium, et contenue dans une éprouvette à pied, puis passe à travers deux longs tubes en U dont le rôle est d'arrêter les gouttelettes de la solution qui auraient pu être entraînées mécaniquement; enfin il arrive dans un tube coudé et incliné contenant seulement quelques gouttes d'une solution de sous-acétate de plomb que chaque bulle d'air entraîne dans la partie ascendante du tube, d'où elles redescendent pour être soulevées par une nouvelle bulle : de cette manière on force la bulle à rester le plus longtemps possible en contact avec le liquide et, comme il y a peu de liquide, on reconnaît plus vite la présence de l'hydrogène sulfuré.

De même, si l'on opère sur des solutions d'autres sels bien cristallisés, tels que les bisulfites ou les biacétates alcalins, on trouve qu'il se dégage de l'acide sulfureux ou de l'acide acétique. La décomposition va plus vite avec les bicarbonates : un courant d'hydrogène ou d'air privé d'acide par le passage dans un tube à ponce potassée de plus de 1 mètre de longueur, traversant une solution de bicarbonate de chaux ou de baryte, enlève de l'acide en même temps qu'il se dépose des carbonates insolubles. Cette expérience n'est en réalité que la reproduction rapide du phénomène de décomposition que présente lentement la solution de ces bicarbonates exposés à l'air et qui donne lieu aux dépôts calcaires dans les sources incrustantes.

Mais l'expérience réalisée avec le bicarbonate de potasse donne un résultat beaucoup plus inattendu : en effet ce corps est très-bien cristallisé et il ne paraît pas subir la moindre altération spontanée à la température ordinaire; cependant, si l'on fait traverser une solution de ce sel par un courant d'air que l'on a privé d'acide en le faisant passer dans de longs tubes à potasse, on enlève, même à la température de 10 degrés, des quantités d'acide carbonique graduellement croissantes. Du reste, la quantité d'acide enlevée en un temps donné par le courant d'air augmente assez rapidement avec la température.



Ces phénomènes de décomposition ne s'observent pas seulement avec les corps dont un des éléments est gazeux à la température ordinaire, comme l'acide carbonique, l'hydrogène sulfuré et l'acide sulfureux, on peut les manifester avec un grand nombre de composés, pourvu qu'on opère à une température convenable. C'est ainsi que les azotates abandonnent de l'acide azotique à des températures de beaucoup inférieures à celles que l'on regarde comme températures de décomposition de ces corps. L'azotate de magnésie, par exemple, chauffé à 150 degrés dans un courant d'air privé d'acide, perd peu à peu de l'acide azotique et présente alors une réaction alcaline.

L'azotate d'ammoniaque présente des particularités plus curieuses encore : purifié par plusieurs cristallisations, ce sel neutre, chauffé au bain-marie au-dessous de 150 degrés dans une cornue, abandonne à un courant d'air privé d'acide carbonique une certaine quantité d'ammoniaque en même temps que le liquide restant devient très-manifestement acide.

Des particularités du même genre s'observent encore lorsqu'on fait passer un courant d'air sec ou d'un gaz inerte à travers les acides hydratés, tels que l'acide azotique, l'acide chlorhydrique, etc., maintenus à des températures constantes; et, d'une manière générale, on peut dire que les composés salins dissous semblent céder à un courant gazeux une quantité déterminée de celui de leurs éléments qui est volatil à la température de l'expérience.

Dans ces circonstances, quel est le rôle du courant gazeux? Chimiquement, il n'a d'action sur aucun des éléments du liquide qu'il traverse et il en sort sans avoir subi d'altération. Quant aux substances qui cèdent au courant de gaz un de leurs éléments, elles sont capables de le reprendre à la même température; elles présentent donc le phénomène de la dissociation dont les caractères ont été signalés, pour la première fois, par M. H. Sainte-Claire Deville. D'après cela, si l'on admet que les divers composés dont nous avons parlé ont, à la température ordinaire et à l'état de dissolution, une tension de dissociation déterminée, quoique très-faible, ils émettront par leur surface, dans une atmosphère limitée, une petite quantité de gaz, constante dans les mêmes conditions de température et de milieu; mais, si l'on renouvelle la couche gazeuse en contact avec le liquide, ou si, par un courant gazeux

intérieur, on augmente la surface libre du liquide, on provoquera le dégagement de quantités incessamment renouvelées de l'élément volatil. C'est ainsi, par exemple, que, le bicarbonate de potasse émettant à l'état de dissolution une quantité très-faible d'acide carbonique, l'espace en contact avec le liquide se trouve bientôt saturé, et la décomposition s'arrête; mais, si l'on enlève l'acide carbonique dégagé et qu'on renouvelle l'atmosphère, il s'en produit une nouvelle quantité qui sature l'espace en présence, de sorte que le passage du courant de gaz inerte entraîne bientôt une quantité d'acide carbonique notable. Vient-on à élever la température, la tension de dissociation augmente, et la quantité d'acide carbonique fournie pendant le même temps au courant de gaz inerte est plus considérable.

Cette manière de voir a été confirmée, à l'époque où je l'ai formulée pour la première fois, par une expérience remarquable de M. Debray, qui a montré que dans le vide le carbonate de potasse sec émet à la température ordinaire des quantités appréciables d'acide carbonique (\*).

On voit, du reste, l'identité que présentent le dégagement d'un gaz d'une solution sursaturée dans une atmosphère gazeuse et la décomposition des composés dont je viens de parler, qui émettent dans les mêmes conditions un de leurs éléments gazeux.

## II. — *Cas des composés dont les éléments ne se recombinent pas directement. Explication de certains phénomènes dits catalytiques.*

Dès l'origine de mes recherches sur les solutions sursaturées, je fus frappé de l'analogie que présentait l'effervescence de ces solutions au contact des corps solides quelconques avec la décomposition de quelques composés très-instables, tels que l'eau oxygénée déterminée par certains corps jouissant de propriétés dites *catalytiques*. Après de nombreuses expériences comparatives faites sur l'eau oxygénée et sur d'autres composés instables, je reconnus que les substances dont le contact provoque leur décomposition doivent cette propriété à l'atmosphère gazeuse qu'ils introduisent au sein du liquide et que leur mode d'action sur ces corps est le même que sur les solutions gazeuses sur-

---

(\*) *Comptes rendus*, t. LXIV, p. 606.

saturées. Je vais indiquer sommairement quelques-unes de ces expériences.

Je me suis servi particulièrement de solutions d'eau oxygénée, très-légèrement acides, dont la décomposition spontanée est très-lente à la température ordinaire; elles peuvent se conserver plusieurs mois dans des tubes de verre sans perdre la totalité de leur oxygène et sans qu'une seule bulle de ce gaz se dégage sur les parois des tubes, si l'on a eu soin d'en préparer la surface de manière à la débarrasser de la couche d'air adhérente; seulement elles émettent par leur surface une certaine quantité de gaz, et sous ce rapport elles se comportent comme les solutions gazeuses sursaturées.

Si l'on introduit dans l'eau oxygénée une lame de platine, sa surface se couvre de bulles de gaz absolument comme si elle était baignée d'eau de Seltz; mais vient-on à la faire séjourner pendant quelques minutes dans l'eau bouillante ou à la chauffer au rouge, puis à l'immerger immédiatement dans l'eau, cette même lame refroidie devient absolument sans effet sur l'eau oxygénée comme sur l'eau de Seltz. C'est, du reste, un fait bien connu que l'eau oxygénée peut rester au contact du platine laminé sans éprouver de décomposition manifeste; ainsi, on opère dans une capsule de platine lorsqu'on veut préparer de l'eau oxygénée par l'action du bioxyde de baryum sur l'acide fluorhydrique.

Les fils de platine se comportent de la même manière, et l'on peut, en chauffant le même fil en des points convenablement espacés, obtenir des régions alternativement inactives et actives qui se manifesteront par l'immersion dans le liquide.

La limaille de platine est plus active, mais on peut la priver de ses propriétés par les mêmes moyens.

Si l'on opère avec de l'éponge de platine qui est creusée d'un grand nombre de canaux capillaires où les gaz se condensent facilement, on observe qu'elle produit une vive effervescence dans l'eau de Seltz comme dans l'eau oxygénée. Ici encore on peut enlever au platine son activité, mais plus difficilement que dans les cas précédents, et cela se comprend aisément, puisqu'il faut expulser le gaz des canaux très-étroits qui le contiennent. A cet effet, on chauffe à blanc l'éponge de platine retenue à l'extrémité d'un fil de même métal et on l'immerge brusque-

ment dans de l'eau maintenue en ébullition ; on laisse refroidir, puis on fait bouillir de nouveau, et ainsi de suite un certain nombre de fois. Dans ces opérations alternatives, les gaz sont entraînés par la vapeur et, pendant le refroidissement, l'eau pénètre dans les conduits capillaires où elle dissout peu à peu tout le gaz restant. On finit, avec un peu de persévérance, par obtenir des fragments d'éponge de platine qui sont à la fois sans action sur l'eau de Seltz et sur l'eau oxygénée. Du reste, on peut reconnaître qu'à mesure que l'opération est plus avancée, le nombre des points du fragment où les gaz se dégagent devient de moins en moins élevé. Dans ces manipulations, la substance n'a subi aucune modification, car, si on la retire pour l'exposer pendant quelque temps dans une atmosphère sèche, même à l'abri des poussières atmosphériques, elle redevient active.

Les autres corps qui décomposent très-énergiquement l'eau oxygénée dans les conditions ordinaires perdent leurs propriétés lorsqu'on leur enlève la couche gazeuse condensée à leur surface.

Ainsi l'or obtenu par précipitation du chlorure dans une solution bouillante de sulfate de fer, l'argent précipité du nitrate par le zinc deviennent inactifs lorsqu'on les a maintenus quelque temps dans l'eau bouillante.

Il en est de même de la fibrine conservée depuis longtemps dans l'alcool ou traitée pendant quelque temps par l'eau bouillante.

Je viens de dire que les effets de l'éponge de platine sur l'eau oxygénée étaient de tous points les mêmes que sur l'eau de Seltz ; il en est ainsi, en effet, dans les premiers instants du contact, mais bientôt se manifeste une différence : tandis que dans l'eau de Seltz l'activité de l'effervescence diminue avec le temps, elle augmente, au contraire, dans l'eau oxygénée. Ce phénomène s'explique aisément : dans l'eau de Seltz la quantité de gaz contenue dans les couches liquides en contact avec l'éponge va en diminuant ; de plus, s'il se produit dans ces couches une variation de température, c'est une diminution toujours très-faible, tenant à ce que l'acide carbonique dissous prend de la chaleur pour se dégager à l'état de gaz. Au contraire, l'eau oxygénée, qui appartient à la catégorie des corps que M. H. Sainte-Claire Deville a appelés *explosifs*, se décompose avec un dégagement de chaleur qui favorise la décomposition des couches liquides qui environnent la

mousse de platine, de sorte que le phénomène commencé sous l'influence de l'atmosphère gazeuse introduite se continue surtout par l'action de la chaleur dégagée et avec d'autant plus d'intensité que la décomposition est plus rapide, de telle sorte que, si le liquide, dont la chaleur spécifique est considérable, n'enlevait pas la plus grande partie de la chaleur dégagée, il y aurait explosion. C'est ce que l'on observe quand on verse de l'eau oxygénée sur du noir de platine, qui condense une grande quantité de gaz, est pulvérulent et par suite mauvais conducteur de la chaleur, ou encore sur l'oxyde d'argent, qui jouit de propriétés analogues. Le noir de platine est porté à l'incandescence avec un violent dégagement de gaz, si l'eau oxygénée est concentrée, et l'oxyde d'argent, qui déjà se décompose à 100 degrés d'une manière sensible, est chauffé assez fortement pour perdre la totalité de l'oxygène qu'il contient. Du reste, la réduction de cet oxyde et des oxydes de platine, d'or et de mercure avait été déjà regardée par Thenard comme une conséquence du dégagement de chaleur. Il n'y a, comme on le voit, rien d'extraordinaire dans ces phénomènes.

Toutes les particularités que présente la décomposition de l'eau oxygénée, et qui ont été étudiées avec tant de soin par Thenard, s'expliquent de la même manière. C'est ainsi qu'on se rend compte des divers degrés d'activité de l'argent, suivant qu'on l'emploie sous diverses formes; en lingot il se couvre à peine de bulles, il est plus actif à l'état de limaille, et beaucoup plus lorsqu'il a été précipité par le cuivre et séché. Sous ces divers états, ce métal condense en effet, inégalement, les gaz de l'atmosphère, mais il devient complètement inactif lorsqu'on l'en a privé.

Les substances qui agissent le plus énergiquement sont celles dont les pores condensent le plus facilement les gaz : tels sont le charbon, qui dégage de l'oxygène sans former d'acide carbonique, et les métaux poreux, tels que l'or, le platine, le palladium, le rhodium, l'iridium et l'osmium.

On s'explique aussi facilement l'action singulière de la fibrine du sang. Thenard a constaté que la fibrine fraîche détermine une décomposition très-vive de l'eau oxygénée sans éprouver d'altération dans sa constitution chimique; or on sait que cette substance s'obtient en battant le sang frais au contact de l'air avec une verge d'osier, les fila-

ments de fibrine s'attachant sur les baguettes. Leur action sur l'eau oxygénée tient non pas à leur nature, mais à l'atmosphère gazeuse adhérente à leur surface. Nous avons vu, en effet, que si l'on enlève les gaz condensés à la surface de cette substance, soit par l'action de l'eau bouillante, soit encore, sans variation de température, par un séjour prolongé dans l'alcool, elle devient absolument inactive.

Une autre action très-intense est celle du bioxyde de manganèse qui a son maximum d'effet à l'état pulvérulent. La persistance de cette action, lorsqu'on essaye de priver cette substance des gaz condensés, paraît tenir à ce que, dans les solutions d'eau oxygénée rendues légèrement acides par l'acide sulfurique, il peut se produire une petite quantité d'oxygène qui suffit à amorcer la décomposition et dans les solutions qui contiennent de l'acide chlorhydrique une petite quantité de chlore qui agirait de la même manière.

Il n'y a donc pas lieu d'attribuer aux substances qui, après avoir séjourné à l'air, décomposent l'eau oxygénée, les propriétés spéciales que l'on a appelées *catalytiques*, puisque ces propriétés dépendent essentiellement des gaz qu'elles ont condensés, et qu'il est possible, sans changer leur nature chimique ni leur état physique, ni même leur forme, de leur enlever ces propriétés décomposantes.

On observe des phénomènes analogues aux précédents avec certains liquides instables, susceptibles d'abandonner un élément gazeux lorsqu'on les soumet à l'action des corps poreux, à des températures inférieures à celles où elles produisent un dégagement gazeux ostensible. Je vais indiquer quelques exemples d'actions de ce genre.

Je commencerai par rappeler l'observation due à Schœnbein et que j'ai mentionnée plus haut (p. 313). Si l'on superpose de l'eau à de l'acide hypoazotique liquide, et qu'on introduise un fil de platine dans le liquide inférieur, il se produit un dégagement de bioxyde d'azote. Pour démontrer que cet effet n'est pas dû à la gaine d'eau amenée dans l'acide hypoazotique par le fil de platine, Schœnbein faisait un mélange d'acide hypoazotique avec un volume d'eau de cinq à dix fois plus grand, et lorsque la vive effervescence produite par le dégagement de bioxyde d'azote de ce mélange avait cessé, et qu'il ne se dégagait plus que de très-petites bulles de gaz, Schœnbein introduisait un fil de platine qui se couvrait de bulles de gaz; il n'avait pas hésité à attribuer,

comme nous l'avons rappelé plus haut, cet effet à la couche d'air amenée par le fil de platine.

Ce phénomène rentre dans la catégorie de ceux que présente l'eau oxygénée : on peut utiliser cette action de l'eau sur l'acide hypoazotique pour réaliser avec beaucoup de facilité des expériences analogues à celles que j'ai rapportées sur cette substance. Voici les conditions dans lesquelles il convient de se placer pour les réussir à coup sûr : on commence par nettoyer un tube de verre de diamètre quelconque, en le passant à la potasse, puis à l'eau distillée, puis à l'acide sulfurique, et enfin à l'eau distillée. On y laisse une couche d'eau de 8 à 10 centimètres de hauteur, on la fait bouillir pour enlever l'air qui pourrait encore adhérer aux parois du tube, puis on refroidit le tube vers la température de la glace fondante. On verse alors dans le tube de l'acide hypoazotique liquide, préalablement refroidi, qui traverse l'eau et se rassemble au fond du tube sous forme d'un liquide bleu ; on introduit ainsi une couche de 2 à 3 centimètres de hauteur sans observer de dégagement gazeux. On retire alors le tube du bain réfrigérant et on le laisse reprendre peu à peu la température ordinaire, soit, par exemple, 15 à 20 degrés : il ne se dégage pas une seule bulle de gaz. Vient-on à introduire un fil de platine désaéré dans le liquide bleu inférieur, que l'on regarde comme étant de l'acide azoteux, il ne produit aucun effet, malgré l'eau acidulée qu'il amène dans le liquide bleu. Au contraire, si le fil de platine n'a pas été débarrassé de la gaine d'air adhérente, il provoque un vif dégagement de bioxyde d'azote qui cesse dès qu'on retire le fil pour recommencer par une nouvelle immersion.

La nature de la substance introduite est tout à fait sans influence sur le phénomène, qui ne dépend que de la présence d'une atmosphère gazeuse. On réalise, en effet, tout aussi facilement la même expérience en introduisant dans le liquide inférieur une bulle d'air à l'extrémité d'un tube capillaire de verre préalablement chauffé et inactif. L'arrivée de la bulle d'air provoque un vif dégagement, qui cesse brusquement dès qu'on retire le tube.

L'intensité du dégagement augmente avec la température à laquelle on soumet le liquide. Elle devient très-grande, toutes choses égales d'ailleurs, lorsqu'on substitue à un fil de platine un corps amenant de l'air en un grand nombre de points, par exemple un morceau d'éponge

de platine; dans ce cas, le dégagement ressemble à une véritable explosion; il cesse, du reste, instantanément dès que l'on retire le corps qui le provoque.

Il y a donc décomposition de l'acide azoteux à une température et dans des conditions où il ne se produirait pas une bulle de bioxyde d'azote si l'on n'introduisait dans ce liquide une atmosphère gazeuse.

Voici une autre expérience que j'ai réalisée avec le même liquide dans un tube de verre nettoyé avec le plus grand soin. J'ajuste ce tube par un tube de caoutchouc avec une pompe à mercure, après avoir disposé dans l'axe du tube un fil métallique retenant un morceau d'éponge de platine à une petite distance de la surface du liquide. On fait le vide dans le tube et il ne se dégage pas sur les parois ni à l'intérieur du liquide une seule bulle de gaz : la surface du liquide émet seule une certaine quantité de gaz par une sorte d'évaporation. Vient-on à enfoncer la mousse de platine dans le liquide, il se produit instantanément un dégagement extrêmement abondant de bioxyde d'azote. Cette expérience, semblable à celle que j'ai indiquée page 329, sur l'eau de Seltz, met bien, comme la précédente, en relief l'analogie que présentent les phénomènes de décomposition avec le dégagement des gaz de leurs solutions sursaturées.

L'eau oxygénée et l'acide azoteux ne sont pas les seuls corps dont la décomposition puisse être provoquée par l'introduction d'une atmosphère gazeuse au sein d'un liquide. Un certain nombre de substances susceptibles d'abandonner un de leurs éléments à l'état de gaz se comportent de la même manière. Telle est, par exemple, la solution d'azotite d'ammoniaque qui donne de l'azote; tel est aussi le mélange d'azotite de potasse et de chlorhydrate d'ammoniaque, qui sert à la préparation de l'azote, lorsqu'on maintient ces liquides à des températures inférieures à celles où les bulles d'azote commencent à y apparaître. Ainsi, à la température ordinaire, le mélange de solutions concentrées de chlorhydrate d'ammoniaque et d'azotite de potasse, introduit dans un tube préparé, ne dégage pas une seule bulle d'azote, tandis que l'introduction d'un fil de platine y produit des bulles de ce gaz, et que la mousse de platine ou le bioxyde de manganèse y détermine une vive effervescence.

---



## TROISIÈME PARTIE.

## RÉFUTATION EXPÉRIMENTALE DES OBJECTIONS FAITES AUX EXPÉRIENCES PRÉCÉDENTES.

Les expériences que je viens d'exposer ont été résumées dans deux Notes présentées à l'Académie des Sciences, le 19 novembre 1866 et le 18 mai 1867; elles attirèrent particulièrement l'attention de quelques savants, notamment de M. Tomlinson, membre de la Société royale de Londres, qui annonça qu'elles étaient inexactes, et de M. Schröder, de Mannheim, qui publia, en mai 1869<sup>(1)</sup>, un Mémoire dans lequel, après avoir vérifié scrupuleusement l'exactitude de tous les résultats que j'avais fait connaître en 1866, il déclara qu'ils n'étaient pas nouveaux. Je discuterai plus loin en détail les expériences de M. Tomlinson; quant aux assertions de M. Schröder, j'ai donné dans l'historique qui précède ce Mémoire les éléments suffisants pour les apprécier: aussi ne m'y arrêterai-je pas longtemps. Ce savant affirme que Schœnbein avait *démontré incontestablement* que les corps solides doivent la propriété de dégager les gaz de leurs solutions sursaturées à une couche gazeuse condensée à leur surface: je me contenterai de demander à M. Schröder, qui trouve la *démonstration* de Schœnbein si *incontestable*, pourquoi il s'est donné la peine de répéter et de confirmer mes expériences, et aussi comment il accorde cette réclamation en faveur de Schœnbein avec le passage de son Mémoire où il reconnaît que *personne avant moi n'avait parlé de solution gazeuse sursaturée*<sup>(2)</sup>.

Du reste, la manière dont M. Schröder rendit compte des travaux antérieurs aux siens ne manqua pas d'exciter des réclamations: M. Tomlinson, en particulier, se plaignit vivement dans une Note insérée au *Philosophical Magazine*<sup>(3)</sup>.

(<sup>1</sup>) *Untersuchungen über die Bedingungen von welchen die Entwicklung von Gasblasen und Dampfblasen abhängig ist und über die bei ihrer Bildung wirksamen Kräfte*, von Schröder (*Pogg. Ann.*, t. CXXXVII, p. 76; 1869).

(<sup>2</sup>) *Id.*, p. 79.

(<sup>3</sup>) *On the formation of bubbles of gaz and of vapour in liquids*, by Ch. Tomlinson (*Phil. Mag.*, 4<sup>e</sup> série, t. XXXVIII, p. 204; 1869).

*Expériences sur le rôle de l'air sur les solutions gazeuses sursaturées.*  
— Je vais maintenant discuter celles des expériences de M. Tomlinson qui sont en contradiction avec les miennes.

Dans un Mémoire publié par ce savant en 1867 dans le *Philosophical Magazine* <sup>(1)</sup> et reproduit en 1871 dans les *Mondes* avec une Introduction historique, se trouve une assertion <sup>(2)</sup> relative à l'expérience décrite au § VII ci-dessus, dans laquelle j'introduis au sein de la solution sursaturée l'extrémité ouverte d'une cloche pleine d'air pour provoquer dans cette atmosphère un dégagement gazeux.

L'auteur suppose que je n'observe cette production de gaz que pour n'avoir pas suffisamment nettoyé le tube de verre. J'avais eu pourtant le soin d'indiquer <sup>(3)</sup> qu'avant d'introduire le tube dans le liquide, je l'avais rendu impropre à provoquer par lui-même le dégagement de gaz, et, de fait, les bulles de gaz ne se sont jamais formées sur les parois du tube : elles se produisent au sein de la masse gazeuse et l'on ne s'aperçoit de leur formation que par l'augmentation du volume total. J'ai répété, du reste, plus de vingt fois cette expérience avec des tubes nettoyés, et jamais des bulles gazeuses ne se sont montrées sur les parois, tandis que le volume du gaz introduit dans la solution sursaturée augmentait d'une manière continue.

A l'encontre de cette expérience, M. Tomlinson en a réalisé une autre : elle consiste à emprisonner une certaine quantité d'air dans un cylindre de toile métallique à mailles très-serrées rendu inactif et à l'introduire au milieu de l'eau de Seltz ; on reconnaît, suivant l'auteur, qu'il ne provoque aucun dégagement de gaz. J'ai répété à diverses reprises cette expérience et j'ai toujours obtenu un résultat opposé. Voici comment j'ai procédé pour empêcher le liquide de pénétrer à travers les mailles de la toile métallique : j'ai fermé l'orifice d'une des petites cloches à air, dont j'ai parlé plus haut, avec une toile métallique extrêmement fine <sup>(4)</sup>, afin de me placer dans les conditions de l'expérience de M. Tomlinson ; je l'ai passée à la flamme du gaz pour la rendre inac-

---

<sup>(1)</sup> *On the so called inactive condition of solids*, by Ch. Tomlinson (*Phil. Mag.*, 4<sup>e</sup> série, t. XXXIV, p. 136 et 226; 1867). — *Les Mondes*, t. XXVI, p. 105; 1871.

<sup>(2)</sup> *Phil. Mag.*, 3<sup>e</sup> série, t. XXXIV, p. 142.

<sup>(3)</sup> *Comptes rendus*, t. LXIII, p. 886; 1866.

<sup>(4)</sup> Elle comprenait 1225 mailles par centimètre carré.

tive; puis, après refroidissement, je l'ai introduite dans de l'eau de Seltz. Au bout de quelque temps, le volume du gaz emprisonné sous la cloche a augmenté, et bientôt il s'est produit au point de moindre résistance de la toile métallique un courant de bulles gazeuses. Si M. Tomlinson n'a rien observé dans des conditions analogues, cela tient vraisemblablement à ce qu'il n'a pas attendu que l'air emprisonné dans la cloche, sous la pression atmosphérique et amené dans l'eau de Seltz à une pression supérieure, eût assez reçu d'acide carbonique pour que sa force élastique, sous le volume initial, fût supérieure à la nouvelle pression supportée. Il n'y a donc pas lieu de s'arrêter davantage à cette partie du travail de M. Tomlinson.

*Les matières grasses n'ont par elles-mêmes aucune action sur les solutions sursaturées.* — Je vais maintenant aborder un point important, l'examen des expériences par lesquelles il cherche à établir que l'atmosphère gazeuse qui entoure les corps solides n'est pour rien dans la production des bulles de gaz qui se fixent à leur surface, dans les solutions sursaturées. Suivant l'auteur, ce dégagement est dû aux impuretés déposées à la surface des corps qui ont longtemps séjourné à l'air ou que l'on a touchés avec les mains. Dans cette hypothèse, le séjour prolongé des corps dans l'eau ou dans l'alcool enlève ces impuretés, la calcination au contact de l'air les détruit, et c'est ainsi que les corps deviennent inactifs. Pour essayer la valeur de cette explication, considérons la substance que M. Tomlinson regarde comme l'impureté la plus efficace, l'huile d'olive. En frottant une baguette avec une petite quantité d'huile, on lui communique la propriété d'exciter le dégagement du gaz de l'eau de Seltz. Pour reconnaître le mode d'action de cette substance, je prends un tube, ouvert aux deux bouts, auquel j'enlève la propriété de dégager le gaz; je le remplis, par aspiration, d'huile récemment chauffée, puis j'amène par ce tube une goutte d'huile dans de l'eau de Seltz, et elle ne provoque pas le moindre dégagement gazeux. Il n'est donc pas possible d'attribuer à l'huile d'olive une action sur l'eau de Seltz. L'expérience donne le même résultat, quelle que soit la nature de l'huile ou de la matière grasse employée. Elle réussit encore lorsqu'on couvre la baguette de matière grasse d'une manière discontinue. Ce n'est donc point le corps gras qui déter-

mine le dégagement du gaz, comme le prétend M. Tomlinson. Quant au rôle que jouent les corps gras, il est facile de s'en rendre compte : lorsqu'on frotte un corps quelconque entre les doigts légèrement graissés, on produit à sa surface une série d'éminences linéaires séparées par des sillons qui correspondent aux lignes de l'épiderme; les cavités forment un réseau de conduits qui contiennent de l'air, sont difficilement mouillés par l'eau et, par conséquent, constituent au sein du liquide une atmosphère éminemment favorable au dégagement des gaz. Il résulte de là que, si ce réseau existe à la surface d'un corps très-lisse, tel qu'une lame de verre, et qu'on vienne à dissoudre la matière grasse, la surface sous-jacente, mouillée par le liquide et ne retenant plus de gaz, devient aussitôt inactive.

Après avoir attribué aux corps gras une influence spécifique en contradiction avec l'expérience, M. Tomlinson, dans les dernières lignes de son Mémoire, précise un peu plus ses idées qu'il ne l'a fait jusque-là : « Peu importe, dit-il, qu'il y ait de l'air entre les parois et le liquide, l'air n'occasionne pas le dégagement des gaz, mais c'est le défaut d'adhérence. » S'il y a entre un corps solide et un liquide qui ne le mouille pas un certain intervalle, il est bien évident que, sitôt produit, il se trouve occupé par l'air ambiant ou par les gaz dissous qui se dégagent dans cet espace vide avec la vapeur du liquide s'il est volatil; par conséquent, admettre avec M. Tomlinson qu'il faut, pour le dégagement des gaz de leurs solutions sursaturées, qu'il y ait un intervalle entre le liquide et le solide, c'est admettre en même temps que la couche gazeuse est nécessaire, ce que j'ai du reste établi directement. Dès lors, les procédés par lesquels M. Tomlinson établit le contact intime entre le solide et le liquide étant précisément ceux qui enlèvent de la surface de ces corps la couche gazeuse adhérente, il en résulte qu'il n'y a rien à changer à l'interprétation que j'ai donnée du phénomène.

*Les aspérités des corps solides et les matières qui les recouvrent n'ont pas d'action particulière sur les solutions sursaturées.* — Dans un Mémoire publié en décembre 1872 (1) M. Henrici est revenu à la manière

---

(1) *Ueber die Wirkung fester Körper auf übersättigte Lösungen*, von F.-C. Henrici (*Pogg. Ann.*, t. CXLVII, p. 555; décembre 1872).

de voir adoptée avant mes expériences, et il a cherché à établir que le dégagement des gaz sur les corps solides tient à ce que l'attraction du solide pour le liquide est supérieure à celle du solide pour le gaz. On pourrait, *a priori*, faire à cette manière de voir l'objection capitale qu'on a en présence non pas un solide, un liquide et un gaz, mais un solide et un liquide retenant le gaz à l'état de dissolution : je crois qu'il est plus utile d'examiner le Mémoire de M. Henrici au point de vue expérimental. Suivant l'auteur, un fil métallique récemment passé dans la flamme de l'alcool ou du gaz n'a plus d'effet sur la solution sursaturée, parce que sa surface est couverte d'un dépôt de charbon qui absorbe le gaz dissous, lequel ne peut se dégager. Cette interprétation du phénomène soulève plusieurs objections : d'abord un séjour prolongé du fil dans la solution devrait saturer de gaz cette couche de charbon, et, sitôt qu'il y aurait saturation, le gaz pourrait se dégager. Or cela n'arrive pas, quels que soient la durée du séjour et le renouvellement du liquide autour du fil. De plus le charbon qui a séjourné à l'air est précisément un des corps poreux qui agissent le plus efficacement sur les solutions sursaturées, et auquel on ne peut enlever cette propriété que difficilement, à cause de sa porosité et de l'action condensante qu'il exerce sur les gaz. L'interprétation de l'auteur n'est donc pas fondée; elle est, du reste, contredite par le fait établi plus haut (1), qu'un fil de platine, d'argent ou de verre devient aussi bien inactif lorsqu'au lieu de le chauffer au contact direct de la flamme on l'introduit dans un tube de verre parfaitement nettoyé que l'on porte au rouge sombre, auquel cas il ne peut se produire sur les fils de dépôt charbonneux venant de la flamme.

M. Henrici croit pouvoir déduire de ses expériences que la cause déterminante de la production des bulles réside dans les aspérités de la surface du corps solide immergé, et ses expériences consistent à plonger dans de l'eau gazeuse des feuilles rugueuses de végétaux divers dont les aspérités se couvrent de bulles gazeuses. Ici encore le dégagement tient à la couche gazeuse qui adhère à l'épiderme du végétal, et il est facile de s'en assurer; si l'on prive d'air par l'eau bouillante ou l'alcool les tissus végétaux quelconques, on les rend absolument inac-

---

(1) Page 320.

tifs, comme je l'ai vu avec des feuilles de marronnier d'Inde, de vigne, de lilas, de lierre, de canna, de capucine et de géranium.

M. Henrici ne donne aucune autre expérience sérieuse à l'appui de l'explication qu'il se propose d'établir. Du reste, son travail contient quelques expériences en contradiction avec celles de M. Tomlinson sur l'action exercée par les matières grasses et sur l'effet d'un nettoyage au papier de verre pour ôter aux corps leur action sur les solutions sursaturées. Dans ses expériences, des gouttes d'huile d'olive, d'huile d'amandes et d'huile de lin n'ont pas produit de dégagement de gaz au contact de l'eau de Seltz, tandis que l'acide stéarique fondu se couvrait de bulles de gaz. En réalité, nous verrons plus loin que ces substances sont inactives lorsqu'on les a débarrassées du gaz adhérent. Quant à l'effet d'un nettoyage au papier de verre sur les tiges métalliques, l'auteur trouve qu'il ne les empêche pas de se couvrir de bulles gazeuses lorsqu'on les met dans l'eau de Seltz. Cela n'est pas surprenant, puisqu'il ne les prive pas ainsi de la couche d'air condensée à leur surface.

Ce Mémoire de M. Henrici provoqua une réplique de M. Tomlinson (<sup>1</sup>). Ce savant admettait, comme nous l'avons vu plus haut, que tout corps dont la surface est propre, c'est-à-dire n'est couverte d'aucune matière solide étrangère à sa substance, ne produit aucun dégagement gazeux dans une solution sursaturée; il essaye de préciser davantage les circonstances du dégagement de gaz et déclare que la surface n'est apte à le déterminer qu'autant que la couche de substance étrangère qui la recouvre est discontinue. J'ai démontré plus haut que cette manière de voir est en pleine contradiction avec les faits, et que les corps regardés comme les plus actifs, comme une baguette de verre graissée entre les doigts, etc., deviennent inactifs lorsqu'on leur enlève la couche d'air adhérente. Je vais, du reste, pour éclairer l'opinion, donner un exemple du mode de raisonnement employé par M. Tomlinson à propos du phosphore introduit dans l'eau de Seltz. Suivant lui, les corps purs n'ont pas d'action, et ceux qui agissent doivent cette propriété à leurs impuretés. Or, en essayant de purifier le phosphore par les alcalis, les acides, l'al-

---

(<sup>1</sup>) *On the action of solid bodies on gaseous supersaturated solutions*, by Ch. Tomlinson (*Phil. Mag.*, 4<sup>e</sup> série, t. XLV, p. 276; avril 1873).

cool, l'éther, l'auteur trouve que le phosphore agit toujours; il le regarde alors comme pur, et il déclare que c'est un *noyau*, c'est-à-dire que le phosphore à l'état de pureté jouit de la propriété spécifique de provoquer toujours le dégagement des gaz de leurs solutions sursaturées.

Cette nouvelle hypothèse est tout à fait inutile, et les choses sont beaucoup plus simples que l'auteur ne se le figure. Le phosphore privé de gaz est, comme tous les autres corps, absolument inactif; il suffit, pour s'en convaincre, de faire séjourner du phosphore dans l'eau bouillante pendant quelques minutes, puis de laisser refroidir dans le tube, de décantier et de remplacer l'eau par de l'eau de Seltz: il ne se dégage plus de bulles de gaz. L'erreur de M. Tomlinson tient précisément à ce que, loin d'enlever au phosphore la couche gazeuse adhérente, il a, en vue de le purifier, mis ce corps en contact avec des alcalis, des acides qui, on le sait, sont décomposés par le phosphore avec formation de produits gazeux.

Je me suis assuré, du reste, que le phosphore purifié par le bichromate de potasse, avec addition d'acide sulfurique, et le phosphore tout à fait impur, deviennent tous deux inactifs lorsqu'on les débarrasse de l'atmosphère gazeuse qui les entoure.

M. Tomlinson fait connaître aussi les tentatives qu'il a faites en vue de rendre le mercure inactif; il a cru qu'il était nécessaire, pour arriver à ce résultat, de le purifier des métaux qui s'y trouvaient en dissolution. Cette purification chimique du mercure est inutile; il suffit de l'introduire au fond d'un tube contenant de l'eau que l'on maintient en ébullition pendant quelques minutes, puis de laisser refroidir, de décantier et de remplacer l'eau par de l'eau de Seltz qui ne dégage pas la moindre bulle à la surface du mercure. Il n'est même pas nécessaire, pour obtenir ce résultat, d'employer du mercure nettoyé; j'ai réussi tout aussi bien l'expérience avec du mercure qui avait été exposé pendant trois mois dans un vase ouvert à toutes les poussières du laboratoire.

La pureté des substances n'est donc pour rien dans le phénomène qui nous occupe: c'est toujours à la couche gazeuse adhérente qu'il convient d'attribuer le dégagement gazeux.

Pour ce qui est d'une catégorie de corps appelés *noyaux* par M. Tomlinson, et qui, comme le phosphore, les huiles, les corps gras, etc., jouiraient, même à l'état de pureté, de la propriété de dégager les gaz



des solutions sursaturées, on voit, par ce qui précède qu'il n'est pas nécessaire de les distinguer des autres corps, puisqu'ils perdent comme eux leur activité lorsqu'on rend impossible à leur surface l'existence d'une couche gazeuse.

#### ACTION DES LIQUIDES SUR LES SOLUTIONS SURSATURÉES.

J'ai établi, dans la première Partie de ce Mémoire, que les gaz ont seuls la propriété de dégager les gaz de leurs solutions sursaturées, et cette conclusion est confirmée par la discussion à laquelle je viens de soumettre les travaux de mes contradicteurs. On a vu en particulier que des liquides, tels que le mercure, les huiles, ne se distinguent pas sous ce rapport des corps solides. Cependant un savant belge, connu dans la science par des recherches intéressantes sur les phénomènes capillaires, M. Van der Mensbrugghe, a publié, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* et dans les *Annales de Chimie et de Physique* <sup>(1)</sup>, des expériences qui l'ont conduit à donner l'énoncé suivant de ce qu'il a nommé un *nouveau principe de Physique* : « Chaque fois qu'un liquide à forte tension superficielle et contenant des gaz en dissolution est mis en contact avec un liquide à faible tension, il y a un dégagement plus ou moins prononcé des gaz dissous dans le premier liquide. » La démonstration que l'auteur propose de ce principe repose sur plusieurs faits qui sont en opposition formelle avec mes expériences; la grande publicité que ce travail a reçue et l'habileté bien connue de leur auteur m'ont engagé à soumettre les faits qu'il a annoncés à une étude expérimentale attentive dont je vais exposer les résultats. Je passerai en revue successivement les points principaux signalés par M. Van der Mensbrugghe :

1° Le dégagement de gaz par l'agitation d'un liquide additionné d'une petite quantité d'un autre liquide à tension superficielle faible;

2° Le dégagement présumé de gaz à la surface de séparation de deux liquides de tensions superficielles différentes;

---

(1) *Note préliminaire sur un fait remarquable qu'on observe au contact de certains liquides de tensions superficielles très-différentes*, par M. G. van der Mensbrugghe (*Comptes rendus*, t. LXXIV, p. 1038; avril 1872). — *Annales de Chimie et de Physique*, 4<sup>e</sup> série, t. XXVI, p. 318.



3° L'action présumée des solides salis par une couche de matière grasse sur les gaz dissous dans les gaz liquides.

1° *Dégagement de gaz par l'agitation d'un liquide additionné d'une petite quantité d'un autre liquide à tension superficielle plus faible.* — Dans un flacon soigneusement nettoyé et contenant de l'eau distillée, on introduit quelques gouttes d'alcool ou d'un autre liquide à faible tension superficielle; on bouche, on agite, et il se produit une vive effervescence. Suivant l'auteur, c'est le gaz dissous dans l'eau qui se dégage et non l'air que l'on introduit dans le liquide par l'agitation : la seule preuve qu'il donne de cette assertion, c'est que l'eau et l'alcool agités isolément avec de l'air ne produisent aucun petillement gazeux. Cette démonstration est *a priori* insuffisante, car l'eau, l'alcool et l'eau additionnée d'alcool sont des liquides qui retiennent inégalement l'air qu'on y introduit par l'agitation. Il faut donc, pour décider la question, avoir recours à l'expérience.

Pour la rendre plus démonstrative, au lieu d'opérer sur de petites quantités de liquide, je me suis servi de flacons qui contiennent jusqu'à 9 litres d'eau distillée; et, afin d'apprécier le moindre dégagement gazeux, j'ai fermé le flacon par un bouchon de caoutchouc percé d'un trou dans lequel s'engageait un tube recourbé horizontalement et continué par un tube capillaire dans lequel pouvait se mouvoir un index de liquide. Après avoir ajouté à l'eau dans le flacon de petites quantités d'alcool croissant depuis  $\frac{1}{200}$  de son volume, j'ajustais le bouchon, je notais la position de l'index dans le tube capillaire dont je fermais l'extrémité ouverte avec de la cire molle, puis j'imprimais au flacon de nombreuses secousses qui déterminaient une vive effervescence. Pour faciliter le retour du liquide qui s'engageait du flacon dans le tube pendant l'agitation, et qui aurait pu y produire des cha-pelets de gouttes qui gênent beaucoup la transmission de la pression, il convient de donner à la partie large du tube un diamètre d'au moins 8 millimètres et d'user en biseau son bord inférieur. L'effervescence étant produite, je débouchais l'extrémité du tube, et le mouvement de l'index indiquait la variation du volume de l'air du flacon. Or *jamais* je n'ai observé un dégagement de gaz: il y avait au contraire toujours une faible absorption, quelque grande que fût, du reste, la quantité d'eau employée. J'ai réalisé l'expérience avec six flacons contenant

de 1000 grammes à 8720 grammes d'eau avec des volumes d'air variant de 190 à 800 centimètres cubes, et la diminution du volume a été comprise entre 0<sup>cc</sup>,3 et 2 centimètres cubes.

Pour éviter la cause d'erreur qui aurait pu provenir d'une saturation incomplète de l'eau distillée par rapport aux gaz de l'eau, ou de l'existence de la sursaturation, j'ai eu soin, avant d'introduire l'alcool, d'agiter l'eau distillée pure une trentaine de fois avec de l'air, en débouchant de temps en temps le flacon. Par cette agitation préalable, j'éliminais aussi la cause d'erreur due à l'existence possible d'une différence de température entre le liquide et la partie supérieure du flacon.

Ainsi non-seulement l'effervescence n'est pas accompagnée d'un dégagement de gaz, mais il y a au contraire une absorption qui s'explique facilement si l'on considère que l'addition d'une petite quantité d'alcool à l'eau augmente un peu la solubilité des gaz de l'air dans ce liquide.

J'ai réalisé les mêmes expériences avec la créosote, les essences de térébenthine et de lavande, les huiles d'olive, de lin, de colza et d'amandes douces, et je n'ai jamais constaté d'augmentation dans le volume de l'air, même en opérant sur plus de 5 litres d'eau distillée et en communiquant cinquante secousses au liquide; j'ai toujours trouvé qu'il se produisait une absorption sensible, bien que toujours moindre que dans le cas de l'alcool.

Le petillement tient vraisemblablement à ce que les liquides dont il s'agit, ajoutés à l'eau, lui communiquent la propriété de *mousser*, c'est-à-dire de retenir plus longtemps, en les enveloppant d'une pellicule liquide, les bulles d'air que l'on introduit par l'agitation au sein de l'eau du flacon.

J'ai reconnu, du reste, que le même flacon peut servir à montrer, pour ainsi dire, indéfiniment l'effervescence qui suit l'agitation. Après cent opérations faites avec deux flacons additionnés respectivement d'alcool et d'essence de lavande, le petillement gazeux était aussi abondant qu'à l'origine, ce qui serait inexplicable s'il était dû au dégagement de l'air dissous, dont la quantité est très-limitée.

Enfin, si l'on substitue à l'eau froide qui contient de l'air en dissolution de l'eau récemment débarrassée, par une ébullition prolongée,

de la plus grande partie de l'air qu'elle contient, et encore chaude, on observe, après agitation, des bulles gazeuses visiblement aussi abondantes et qui ne peuvent provenir que de l'air introduit dans le liquide.

Il va sans dire que, si, au lieu d'eau saturée d'air, le seul liquide dont il soit question dans le travail de M. Van der Mensbrugghe, on emploie une solution aqueuse sursaturée d'air ou d'un autre gaz, l'agitation de ce liquide avec l'air provoque une effervescence plus abondante et qui tient, comme je l'ai établi dans la première Partie de ce Mémoire, à ce que chaque bulle d'air que l'on amène dans le liquide s'y gonfle aux dépens de l'excédant de gaz qui était retenu en dissolution.

On observerait aussi un dégagement d'air dissous, si, au lieu d'ajouter une petite quantité d'alcool à de l'eau distillée, on mélangeait l'alcool et l'eau dans les proportions de 52,3 volumes d'alcool pour 47,7 d'eau qui correspondent au maximum de contraction. Le volume total, au lieu d'être 100, n'est plus que 96,35; mais ici le phénomène est très-différent: il y a à la fois diminution de volume et élévation notable de température, ce qui suffit pour expliquer le dégagement d'une partie des gaz qui étaient dissous par l'alcool; mais ce n'est pas le cas des expériences dont nous nous occupons.

2° *Il n'y a pas de dégagement de gaz à la surface de séparation de deux liquides de tensions superficielles différentes.* — Lorsqu'on superpose à un liquide un autre liquide à tension superficielle très-différente, soit sous forme de gouttes, soit sous forme de couche plus ou moins épaisse, il se produit, suivant M. Van der Mensbrugghe, à la surface de séparation des deux liquides, un dégagement de bulles gazeuses que j'ai vainement essayé de constater. Pour exagérer le phénomène et le rendre plus apparent, s'il était réel, je me suis servi de solutions gazeuses sursaturées. Dans de pareils liquides, en effet, pour peu qu'une substance soit apte à provoquer le dégagement gazeux, on la voit se couvrir de bulles qui prennent en peu d'instant des dimensions relativement considérables. Je me suis principalement servi de la solution sursaturée d'acide carbonique dans l'eau, que j'ai superposée aux liquides plus denses comme le sulfure de carbone, le chloroforme et le chlorure de carbone, ou à laquelle j'ai superposé les liquides moins

denses comme les huiles fixes ou volatiles, telles que l'huile d'olive, l'essence de térébenthine, la benzine et le pétrole. J'ai même employé des liquides miscibles à l'eau, tels que la créosote, l'alcool et l'éther, que l'on peut disposer facilement avec l'eau en couches dont la surface de séparation est longtemps apparente. Avec ces divers liquides, qui sont ceux qu'a employés M. Van der Mensbrugghe, je n'ai *jamais constaté* de dégagement gazeux, et cependant l'expérience a été prolongée pendant deux jours avec le chloroforme, la créosote, l'éther, la benzine, et pendant cinq jours avec le sulfure de carbone. La seule précaution à prendre pour qu'il ne se produise aucune bulle de gaz consiste à débarrasser les liquides par filtration des poussières ou des filaments solides qui peuvent s'accumuler à la surface de séparation des deux liquides et s'y couvrir de bulles gazeuses. Je me suis assuré, du reste, que, dans les liquides superposés qui ne donnaient pas de gaz aux surfaces de séparation, il était toujours facile d'en faire naître par l'introduction d'une parcelle solide ayant séjourné à l'air; de même que j'ai constaté que le dégagement de gaz dans les liquides non filtrés ne se produit jamais uniformément sur toute la surface, mais seulement en des points isolés où l'on découvre, avec un peu d'attention, la parcelle solide qui lui a donné naissance.

3° *Les corps solides salis par une couche de matière grasse n'ont pas d'action sur les gaz dissous dans les liquides.* — Lorsque des corps solides ont été exposés à l'air libre ou enduits d'une matière grasse, ils déterminent, suivant M. Van der Mensbrugghe, le dégagement de l'air dissous dans l'eau. A ce propos, je rappellerai les expériences énumérées dans la première Partie, par lesquelles j'ai établi d'abord que les corps solides, quelle que soit leur nature et de quelque manière qu'ils aient été préparés, ne déterminent le dégagement des gaz dissous dans l'eau qu'autant que ce liquide en est sursaturé; si la quantité du gaz contenu correspond à la saturation et, *a fortiori*, si elle n'atteint pas cette limite, ce gaz reste en dissolution. En second lieu, si l'on suppose que le liquide soit sursaturé, les corps solides recouverts d'une pellicule de matière grasse continue ou discontinue n'agissent qu'autant qu'ils retiennent à leur surface une couche gazeuse qui provoque le dégagement du gaz dissous.

Du reste, pour établir directement que les corps solides couverts

d'une matière grasse n'expulsent pas les gaz, même d'une solution sursaturée d'acide carbonique dont la tension superficielle diffère peu de celle de l'eau, j'ai mis de l'eau de Seltz au fond d'un tube dont les parois avaient été rendues inactives, et j'ai couvert l'eau d'une couche d'huile d'olive recouverte elle-même d'alcool. Une baguette de verre qui a séjourné quelque temps dans l'alcool s'y débarrasse de l'air adhérent; plongée ensuite très-lentement dans l'huile, puis enfoncée dans l'eau de Seltz, elle ne manifeste pas le moindre dégagement gazeux, soit sur les parties de la baguette qui sont recouvertes d'huile, soit sur les autres; tandis que des baguettes pareilles non débarrassées de l'air adhérent et plongées directement dans la solution sursaturée, après avoir été huilées ou non, se recouvrent immédiatement de bulles gazeuses.

De ces trois séries d'expériences, il résulte qu'il n'y a pas lieu de rattacher les phénomènes dont il s'agit à la valeur plus ou moins grande de la tension superficielle, ni d'admettre le *nouveau principe de Physique* proposé par M. Van der Mensbrugghe. On en peut tirer une autre conséquence, c'est que les liquides sans action chimique sur les solutions sursaturées n'ont pas plus d'efficacité que les solides pour provoquer le dégagement des gaz dissous, et que, malgré les critiques que mes expériences ont subies depuis que je les ai fait connaître, il n'y a lieu de rien changer aux conclusions que j'en ai tirées dès l'époque de leur publication.

---

## QUATRIÈME PARTIE.

### DÉGAGEMENT DES GAZ DE LEURS SOLUTIONS SURSATURÉES SOUS L'INFLUENCE D'UNE ACTION MÉCANIQUE.

---

Les expériences que j'ai rapportées dans ce Mémoire établissent que les solutions gazeuses sursaturées ne peuvent dégager, entre certaines limites de température et de pression, le gaz dissous par l'effet du contact d'un corps solide qu'autant que ce corps amène dans

leur intérieur un gaz quelconque; nous allons voir que certaines actions mécaniques produisent le même effet.

On trouve dans un Mémoire publié en 1834 par Cagniard-Latour (<sup>1</sup>), sur la mise en vibration des liquides, l'indication de diverses circonstances dans lesquelles on dégage les gaz des liquides qui les tiennent en dissolution. Les expériences n'ont porté que sur des liquides contenant très-peu de gaz et ont été effectuées dans des tubes fonctionnant à la manière du marteau d'eau, fermés à la partie inférieure et dont l'autre extrémité pouvait être ouverte ou fermée. On peut les rattacher à deux séries d'actions : l'effet d'un choc et celui d'un mouvement vibratoire.

1° Lorsqu'on heurte l'extrémité inférieure du tube contre un obstacle, ou mieux lorsqu'on frappe son extrémité supérieure avec un maillet de bois, on voit la masse liquide se diviser au moment du choc en divers points, puis les solutions de continuité qui ont une forme sensiblement sphérique diminuent très-rapidement, et chacune d'elles se réduit le plus souvent à une très-petite bulle d'air qui, suivant les cas, se redissout à quelque distance ou bien s'élève jusqu'à la surface du liquide. Cagniard-Latour fait remarquer très-justement que cette rupture de la colonne liquide est d'autant plus facile qu'il y a moins de temps qu'on a agité le liquide avec l'atmosphère gazeuse qui la surmonte; il fait voir qu'elle est très-difficile à déterminer quand le liquide a été purgé d'air. On obtient des effets analogues en laissant tomber dans le tube une tige de fer qui en frappe violemment le fond.

2° Le second procédé n'est autre chose que la mise en vibration d'une colonne liquide. On la détermine, soit en frottant le tube qui la contient avec du drap mouillé, et l'on voit alors naître dans le liquide de petites bulles gazeuses animées de mouvements très-rapides, soit en faisant écouler de l'eau sous forte pression par une embouchure de flûte ou par une anche, et recevant le liquide dans un autre tube : on observe alors au voisinage de l'embouchure une région dont l'aspect nébuleux provient du dégagement d'une multitude de bulles gazeuses nettement visibles à la loupe. Dans ce cas, le mouvement vibratoire est

---

(<sup>1</sup>) Extrait d'un Mémoire de M. Cagniard-Latour sur la résonance des liquides et une nouvelle espèce de vibrations qu'il a nommées *vibrations globulaires*. (*Annales de Chimie et de Physique*, 2<sup>e</sup> série, t. LVI, p. 252; 1834.)

d'autant plus facile à déterminer, avec production d'un son musical, que l'on a moins enlevé du gaz dissous. « Avec l'eau qui a été purgée d'air le plus complètement possible, dit l'auteur, le dégagement gazeux n'est que peu sensible, comme on le conçoit; mais on remarque néanmoins, surtout si le tube est d'une certaine longueur, comme de 2 mètres environ, que lors de la vibration il se produit dans certaines parties du liquide des groupes scintillants composés d'un grand nombre de petites bulles formant ordinairement une sorte d'étoile et quelquefois des portions d'hélices, groupes qui disparaissent ou dont il ne reste que quelques bulles presque imperceptibles dès que l'on cesse d'exciter la vibration. On peut présumer que ces bulles, quoique très-petites, favorisent cependant la vibration globulaire; car j'ai remarqué que, si l'on cesse pendant un temps un peu long de faire vibrer le tube, on éprouve ensuite plus de difficulté pour produire l'apparition des groupes scintillants, les bulles étant sans doute redissoutes dans le liquide ou remontées à sa surface supérieure (1) ». Du reste, l'auteur, ayant surtout en vue l'étude de la production du mouvement vibratoire des liquides, ne cherche pas à expliquer l'influence de l'action mécanique sur le dégagement des gaz dissous dans les liquides.

Il est une circonstance dans laquelle on produit le dégagement des gaz de leurs solutions sursaturées, et qui peut se rattacher à l'un des cas que je viens de rappeler, mais que je vais considérer particulièrement, car c'est la seule dont on ait paru se préoccuper. Lorsque, dans un vase contenant une solution gazeuse sursaturée, on promène une baguette entre les parois baignées par le liquide, il se produit une ligne de bulles de gaz partout où la baguette a frotté contre le verre. Ce phénomène paraît avoir été étudié en détail pour la première fois par M. Schröder en 1869 (2). Ce savant a reconnu que, pour dégager le gaz, le frotte-

(1) *Loco citato*, p. 263.

(2) M. Dufour avait fait connaître longtemps auparavant : *Recherches sur l'ébullition des liquides* (*Archives des Sciences physiques et naturelles*, t. XII, p. 253; 1861) un phénomène analogue en ces termes : « Lorsqu'on a un vase de verre, préparé avec l'acide sulfurique et renfermant de l'eau à 102 ou 103 degrés, on peut souvent introduire une baguette en verre dans le liquide sans provoquer le changement d'état. Mais qu'on aille avec l'extrémité mousse de cette baguette toucher le fond du vase, qu'on la promène un peu sur ce fond sans presser, et bientôt on verra l'itinéraire de la baguette se dessiner par un dégagement continu et parfaitement localisé de bulles de vapeur. »



ment le plus faible suffisait quand le liquide était très-sursaturé, qu'il fallait un frottement énergique lorsqu'il l'était moins, et que l'expérience ne réussissait plus quand la sursaturation était faible (1).

Il trouva qu'il n'était pas nécessaire que le vase fût rayé pour qu'il se produisît des bulles de gaz sur les lignes de frottement, et qu'une fois ces bulles dégagées il ne s'en produisait plus d'autres au même endroit, que le vase fût rayé ou non.

Quant à la cause du phénomène, M. Schröder ne croit pas que ce soit une élévation de température due à la chaleur dégagée par le frottement, car dans les solutions concentrées le moindre frottement produit par un fil de platine très-flexible suffit pour dégager des bulles de gaz. Il est vrai que, d'un autre côté, il faut, pour produire cet effet sur les solutions peu sursaturées, exercer un frottement très-énergique. L'auteur croit pouvoir tout concilier en admettant que « le frottement dans les liquides suffisamment sursaturés donne lieu à une transformation du travail mécanique en chaleur latente ou en force; puisqu'en outre l'effet du frottement, pour dégager les gaz dans les solutions sursaturées, se produit seulement aux faces chaudes, il faut reconnaître que le frottement, dans ces circonstances, donne lieu immédiatement à une transformation de chaleur sensible en chaleur latente ».

Dans un Mémoire ultérieur (2), il admet « comme conclusion générale que les corps solides exercent par leur contact une action en vertu de laquelle les autres corps sont amenés au même état de cohésion et de cristallisation autant qu'ils en sont capables. La force dissolvante des liquides en contact avec les solides et les gaz agit de manière à amener ces corps dans le même état de fluidité. La force émanant du gaz amène les corps, autant qu'il est possible, au même état de fluide élastique. La cause générale, dans toutes les actions indiquées, agit comme une force d'assimilation inhérente à la matière. »

Quoi qu'il en soit de ces interprétations du phénomène, j'ai cherché à me rendre compte des particularités qu'il présente, et je vais indiquer le résultat de cette étude expérimentale. J'ai d'abord reconnu qu'une augmentation de pression, même considérable, en un point du

---

(1) *Pogg. Ann.*, t. CXXXVII, p. 76 et p. 96 à 101; 1869.

(2) *Pogg. Ann.*, *Ergänzungsband V*, p. 87, et *Jahresberichte über die Fortschritte der Chemie, etc.*, für 1870, p. 52.



liquide ne provoque aucun dégagement gazeux. J'introduis en effet, dans un verre contenant de l'eau de Seltz, une baguette de verre débarrassée d'air adhérent, je l'amène lentement au contact de la paroi, puis j'exerce une pression violente, et il ne se produit rien, tandis qu'un frottement léger de la même baguette contre les parois produit une trainée de bulles de gaz.

On arrive au même résultat lorsqu'au lieu d'exercer une pression contre la paroi on comprime tout le liquide; à la condition, bien entendu, de ne pas introduire dans le liquide du gaz qui provoquerait une vive effervescence. A cet effet, j'ai rempli d'eau de Seltz un tube nettoyé avec soin, et je l'ai retourné sur du mercure aussi désaéré par un séjour de quelques minutes dans l'eau bouillante, et j'ai introduit le flacon à mercure avec le tube dans un piézomètre; je l'ai soumis à une pression supérieure à 4 atmosphères, et il ne s'est rien produit; j'ai alors ramené le liquide à la pression atmosphérique en quelques secondes, et il ne s'est pas non plus dégagé de gaz. On arrive au même résultat négatif par diminution de pression; nous avons vu, en effet, qu'on ne dégage pas de gaz en faisant le vide à la surface de la solution.

On obtient des effets différents si, au lieu de soumettre le liquide à une compression violente en vase clos, on produit une compression brusque en vase ouvert. *A priori* l'expérience paraît être d'une réalisation difficile: il s'agit de comprimer violemment le liquide en un de ses points sans qu'il soit en vase clos. J'ai tourné la difficulté par l'expérience suivante, qui donne les résultats les plus nets; elle consiste à déterminer au sein d'une solution d'eau de Seltz l'explosion d'une larme batavique. On prend un verre dont les parois soient assez résistantes pour supporter une forte pression, et, après en avoir lavé les parois à la potasse et à l'alcool pour les désaérer, on le remplit d'eau de Seltz; on y introduit une larme batavique, également lavée à l'alcool au préalable, et qui peut séjourner dans le liquide sans y développer une seule bulle de gaz. Vient-on à briser la queue de la larme, une explosion se produit, et d'innombrables bulles de gaz se développent en tous les points de la masse liquide en produisant une vive effervescence. J'ai démontré plus haut que les fragments pulvérulents de la larme n'ont par eux-mêmes aucune action. D'un autre côté, le dégagement de chaleur qui

se produit au moment de la rupture ne peut élever la température du liquide que d'une quantité très-faible et absolument insuffisante pour produire le dégagement gazeux ; il faut donc attribuer à la compression brusque du liquide la production des bulles qui naissent en tous ses points, par la raison que la pression que l'on a développée en un point s'est propagée intégralement en tous les points de la masse. Il me semble résulter de cette expérience qu'il faut que les molécules liquides soient soumises à des déplacements d'une assez grande amplitude pour abandonner le gaz dissous. Rapprochées fortement par une compression violente, elles s'écarteraient, en vertu de leur élasticité, sitôt que la compression brusque aurait cessé, et cela d'autant plus qu'elles auraient été rapprochées davantage ; elles pourraient donc être dans ce cas amenées à des distances trop grandes pour continuer à retenir le gaz dissous.

L'effet des vibrations que l'on communique au liquide vient à l'appui de cette manière de voir. Dans les expériences de Cagniard-Latour, le liquide contenait fort peu de gaz ; aussi les effets étaient-ils peu intenses ; on obtient des résultats remarquables par leur netteté, lorsqu'on les répète avec des solutions sursaturées et en prenant la précaution de préparer les tubes de telle façon, qu'en les remplissant d'une solution gazeuse sursaturée, il n'y ait pas de dégagement de gaz sur les parois. Si l'on fait vibrer, par exemple, un tube de verre de 1 mètre de long et de 10 à 20 millimètres de diamètre, rempli d'eau de Seltz et frotté avec du drap mouillé, on voit ce tube, précédemment rempli d'un liquide incolore où l'on ne distingue pas une bulle de gaz, prendre en différents endroits, dès qu'il est mis en vibration, un aspect laiteux qui provient du dégagement d'une multitude de bulles gazeuses qui grossissent en s'élevant à travers le liquide.

L'expérience peut être variée de diverses manières ; j'indiquerai seulement la suivante, qui est d'une réalisation très-facile : j'emploie un verre convenablement nettoyé et je le remplis d'eau de Seltz jusqu'à 2 ou 3 centimètres environ du bord, puis je le fais vibrer au moyen d'un archet ; le verre rend un son en même temps que le liquide entre aussi en vibration, et, si le son est un peu intense, on voit naître dans le liquide, et jusqu'à une profondeur de 3 à 4 centimètres, d'innombrables petites bulles d'acide carbonique qui viennent aussitôt éclater

à la surface. S'il s'était développé avant l'expérience quelques bulles sur le verre, ces bulles sont projetées dans le liquide au moment de la mise en vibration et présentent alors des dimensions relativement très-considérables.

On peut se rendre compte des diverses particularités de ces phénomènes en tenant compte de la propriété, mise en lumière par les expériences de M. Berthelot (<sup>1</sup>), que possèdent les molécules liquides, de ne se séparer que lorsqu'elles sont soumises à des actions dont la grandeur dépasse un certain minimum. Il y a en quelque sorte retard à la séparation des molécules liquides. Si donc on soumet ces molécules à une action mécanique, il faudra, pour produire une solution de continuité dans le liquide, employer toujours une action énergique. Dans le cas où cette action sera un mouvement vibratoire suffisamment intense, les molécules liquides pourront être amenées en certains points à des distances assez grandes pour se séparer : alors il se produira au sein du liquide un vide absolu qui sera immédiatement rempli et par la vapeur émise à la surface libre du liquide qui l'entourne et par une certaine quantité de gaz qui s'échappera par la même surface libre, quelque petite que puisse être du reste la quantité absolue de gaz contenu dans le liquide. Bientôt les molécules reviendront vers leurs positions d'équilibre, l'espace vide diminuera, la vapeur se condensera en totalité; mais, pour ce qui est du gaz, ou bien il y a sursaturation, et alors il ne pourra se dissoudre et restera à l'état de bulle qui s'élèvera à travers le liquide en grossissant aux dépens du gaz de la solution qu'elle traverse, ou bien le liquide n'est pas saturé, et dans ce cas il pourra encore arriver qu'il se dégage sous forme de bulle. En effet, pendant la diminution de l'espace au sein duquel le gaz s'est dégagé, la surface absorbante diminue très-rapidement, et il suffit que la couche superficielle très-restreinte contienne la quantité de gaz qui correspond à la solubilité pour qu'il y ait excédant du gaz, qui alors fera bulle. Ce cas devra surtout se présenter lorsque le liquide aura été soumis à des actions violentes, c'est-à-dire lorsque le volume maximum des solutions de continuité aura été très-grand. C'est ainsi que s'expliquent les expé-

---

(<sup>1</sup>) *Sur quelques phénomènes de dilatation forcée des liquides*, par M. Berthelot (*Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, t. XXX, p. 232; 1850).

riences de Cagniard-Latour sur les liquides contenant peu de gaz en dissolution.

Pour ce qui est du frottement des corps solides sur les parois du vase baignées par le liquide, il a pour effet de mettre en vibration la petite quantité de liquide comprise entre la paroi et le corps frottant.

On s'explique ainsi comment il arrive souvent qu'un frottement lent contre les parois du verre capable de les rayer ne dégage pas de gaz, tandis qu'une légère friction qui détermine un mouvement vibratoire du liquide suffit, au contraire, pour laisser après elle une trainée gazeuse, et comment différents corps n'agissent pas de la même manière, toutes choses égales d'ailleurs.

3 décembre 1874.

---

---

SUR  
**LA TEMPÉRATURE DU SOLEIL,**

PAR M. J. VIOLLE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE GRENOBLE.

(Réponse à M. SORET.)

---

Le dernier numéro des *Annales de l'École Normale supérieure* contient une Lettre de M. Soret, dans laquelle ce savant physicien, jugeant mes expériences avec une courtoisie et une bienveillance dont je tiens tout particulièrement à le remercier, doute cependant « que, dans l'état actuel de la Science, elles puissent conduire à la détermination de la température du Soleil ». En effet, dit-il, « pour pouvoir déduire de ces observations la température du Soleil, il faudrait avant tout connaître la loi du rayonnement de la chaleur à des températures élevées. On a tantôt admis la loi de Newton, tantôt celle de Dulong et Petit; or ni l'une ni l'autre ne sont exactes pour les hautes températures ».

Peut-être M. Soret est-il ici trop affirmatif. Sur la loi de Newton appliquée à de grands excès de température, je passe d'autant plus volontiers condamnation qu'aucun physicien assurément ne réclamera en sa faveur; il serait même injuste aujourd'hui d'adresser quelque critique à cet égard au P. Secchi, car, s'il est d'abord tombé dans une erreur qui peut paraître singulière après les travaux mémorables de Dulong et Petit, il a été depuis le premier à la reconnaître; mais, pour ce qui concerne la loi de Dulong et Petit, je ne pense pas que l'on puisse la condamner aussi facilement. Sans parler, en effet, des raisons théoriques qui militent en faveur de la forme exponentielle pour représenter l'intensité d'une radiation calorifique, et pour ne m'adresser qu'à l'expérience, je trouve en faveur de la loi de Dulong et Petit de puissants arguments. « En réalité le rayonnement d'une source à température

quelconque peut sans doute être représenté par une somme d'exponentielles analogues à celle qui suffit pour représenter approximativement les échanges de chaleur des corps noircis aux températures basses ; ces exponentielles seraient d'ailleurs multipliées chacune par un coefficient particulier. Pour celles qui représentent les rayons dominant aux températures basses, les coefficients seraient plus forts, et la base de l'exponentielle serait moindre que pour les autres. » (DESAINS, *Leçons de Physique*, t. II, p. 707.) D'après ces conclusions, résumant les travaux des deux savants qui ont soumis la loi de Dulong et Petit à une étude de révision si scrupuleuse, on voit que, pour un rayonnement complexe comme celui du Soleil, l'intensité de la radiation peut s'exprimer par une somme de termes de la forme

$$m\alpha^t + m'\alpha'^t + m''\alpha''^t + \dots,$$

et, si les coefficients  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\alpha''$ ,... étaient identiques, cette somme se réduirait à

$$(m + m' + m'' + \dots)\alpha^t \text{ ou } M\alpha^t,$$

M désignant un certain coefficient qui serait précisément le pouvoir émissif du Soleil à la température qu'il possède actuellement.

Mais est-il permis, dans une première approximation, de supposer ainsi  $\alpha = \alpha' = \alpha'' = \dots$ ? C'est, il me semble, l'hypothèse la plus plausible, jusqu'à ce que l'on possède des mesures exactes de ces quantités  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\alpha''$ ,.... Et, en effet, les expériences de MM. de la Provostaye et Desains nous montrent que la quantité  $m$  est à peu près constante entre zéro et 300 degrés lorsque le corps rayonnant est un thermomètre à boule nue ou noircie au noir de fumée, mais que, si la boule du thermomètre est couverte d'une feuille d'argent,  $m$  augmente quand la température décroît, de sorte que l'on a

A 63 degrés.....	$m = 0,01090,$
A 150 » .....	$m = 0,00870,$

tandis que  $\alpha$  reste constant et le même dans les deux cas. Ainsi, malgré la différence des pouvoirs émissifs de l'argent et du noir de fumée, malgré même la variation rapide du pouvoir émissif de l'argent, la base de l'exponentielle reste la même pour les diverses radiations venant se

superposer aux radiations primitives au fur et à mesure que la température s'élève. Et, bien que ces expériences se rapportent à des circonstances dans lesquelles la chaleur semble beaucoup plus homogène que quand elle émane de sources à températures élevées, cependant l'augmentation parfaitement nette de  $m$  nous prouve une modification sensible de la qualité, ou, si l'on aime mieux, de la composition de la chaleur émise. Cette modification n'ayant amené aucun changement dans la valeur de  $\alpha$ , on peut admettre que  $\alpha$  est sensiblement le même pour toutes les radiations. Mes expériences sur l'acier et la fonte en fusion, c'est-à-dire à 1500 et 1300 degrés, conduisent d'ailleurs à la même conclusion, comme on le verra plus bas. Cette constance de  $\alpha$  n'est sans doute pas établie ainsi d'une manière absolument rigoureuse; mais, d'une part, les expériences que je viens de citer montrent qu'en l'admettant on ne saurait être bien éloigné de la vérité; d'autre part, l'hypothèse de  $\alpha$  constant à toute température conduit à une évaluation de la température du Soleil plus élevée que celle qui résulterait de la considération d'une somme d'exponentielles à bases croissantes pour les radiations les plus chaudes, comme le propose M. Desains : la correction qui pourrait résulter de cette considération ne modifierait donc pas le nombre que j'ai proposé pour la température du Soleil dans le sens où M. Soret désirerait me le voir corriger. Aussi M. Soret serait-il disposé à regarder  $\alpha$  comme décroissant au fur et à mesure que la température s'élève; mais cette manière de voir, qui repose sur l'hypothèse de  $m$  constant, ne saurait être admise.

J'ai fait l'année dernière, aux forges d'Allevard, quelques expériences dans le double but de vérifier si une source de chaleur terrestre donnerait avec mon appareil un effet comparable à celui que produit le Soleil et d'obtenir une évaluation probable de la température vraie du Soleil. Ces expériences, qui ne sont qu'indiquées dans la Note que j'ai publiée aux *Comptes rendus* du 5 octobre 1874, sont exposées en détail dans le Mémoire que M. Henri Sainte-Claire Deville a bien voulu présenter en mon nom à l'Académie des Sciences, et qui contient l'ensemble de mes recherches sur la température du Soleil; je n'en relaterai aujourd'hui que la portion touchant directement au point en litige.

Si je rapporte ici ces observations, ce n'est point que je conteste l'exactitude des expériences de M. Soret ou du P. Secchi sur des com-

paraisons analogues ; mais l'emploi d'actinomètres cylindriques de petites dimensions <sup>(1)</sup> et l'absence de toute préoccupation, relativement aux dimensions du thermomètre et de l'ouverture d'admission, me paraissent rendre bien difficile la discussion de leurs résultats numériques <sup>(2)</sup>. Je ne rappellerai pas comment j'ai essayé d'écarter toutes ces difficultés <sup>(3)</sup>, en adoptant pour mon actinomètre une forme et des dimensions plus convenables et en suivant dans la marche des expériences, d'aussi près que je l'ai pu, les leçons que renferme l'admirable Mémoire de Dulong et Petit sur le refroidissement. J'observerai seulement que, dans les recherches actuelles sur la radiation de l'acier ou de la fonte en fusion, la durée de l'expérience étant nécessairement limitée par la durée même de la coulée, j'ai dû opérer par la méthode dynamique, c'est-à-dire que, tout en employant mon actinomètre, je m'en suis servi comme d'un pyréliomètre de Pouillet, ce qui conduit d'ailleurs exactement aux mêmes résultats que l'emploi de la méthode statique, ainsi que je m'en suis assuré par des expériences comparatives faites sur la radiation solaire par l'une et l'autre méthode. Si, d'autre part, j'ai choisi comme source de chaleur terrestre une coulée de fonte ou d'acier, c'est que je ne sais guère parmi les températures élevées que les points de fusion ou d'ébullition qui soient connus avec quelque certitude et que, parmi les métaux usuels, le fer, sous ses différentes formes, s'offrait naturellement à moi comme étant à la fois le plus facile à obtenir en grandes masses et celui dont la température de fusion est le mieux connue. L'important Mémoire de M. Grüner, inséré aux *Annales des Mines* (7<sup>e</sup> série, t. IV, p. 254; 1873), fournit, en effet, non-seulement les températures de fusion des fontes, laitiers et aciers, mais encore la température de ces corps au sortir des hauts fourneaux ou fours à fusion.

Grâce à l'obligeance de M. Charrière, directeur des forges d'Allevard,

<sup>(1)</sup> MM. de la Provostaye et Desains ont établi, en effet, l'importance des perturbations qui peuvent résulter de l'emploi d'une enceinte trop petite, surtout lorsque cette enceinte est de forme cylindrique.

<sup>(2)</sup> Quant aux expériences de M. Soret avec les verres bleus de cobalt, l'auteur reconnaissant lui-même que « l'intensité n'a pas d'influence » sur l'effet observé, elles ne me semblent mettre en évidence que la constitution, mais nullement l'intensité de la radiation solaire.

<sup>(3)</sup> Voir *Comptes rendus* des 18 mai, 29 juin et 5 octobre 1874.



et de M. l'ingénieur Pinat, j'ai pu opérer sur la coulée d'acier de leur beau four Martin Siemens. Je me suis trouvé à Alleverd à une époque où, en vue de la fabrication de ces énormes roues dont on munit maintenant les locomotives à grande vitesse, la coulée qui se renouvelait toutes les douze heures se partageait seulement en cinq ou six temps, employés chacun à remplir un moule de 500 kilogrammes. Le remplissage d'un pareil moule demandait environ  $1^m 30^s$  : je pouvais donc faire arriver sur mon appareil pendant un temps connu, une minute, la radiation de la veine liquide incandescente qui s'échappait verticalement d'un orifice carré placé au-dessus du moule. Les différentes mesures que j'ai faites pendant deux journées consécutives étant parfaitement concordantes, je ne citerai qu'une seule observation, qui m'a fourni, l'appareil fermé,  $14^{\circ},4$  et, l'appareil ouvert à la radiation,  $15^{\circ},7$ . De ces données on tire facilement

$$\alpha^x = 3500 \quad \text{et, par suite,} \quad x = 1063^{\circ},$$

$\alpha^x$  étant la radiation de la surface incandescente et  $x$  ce que j'ai appelé la *température effective*, c'est-à-dire la température que devrait posséder le corps pour que, doué d'un pouvoir émissif égal à l'unité, il rayonnât avec la même intensité que celle avec laquelle il rayonne réellement (<sup>1</sup>).

---

(<sup>1</sup>) La formule qui convient dans ce cas est

$$\alpha^x \beta \tau + \frac{M}{S} (\theta - t) = \frac{\omega}{S} \alpha^x + \frac{\Omega}{S} \alpha^y;$$

$\alpha$  étant la constante de Dulong, ou  $1,0077$  ;

$\beta = \alpha - 1 = 0,0077$  ;

$t$  la température de l'enceinte ;

$\theta$  la température du thermomètre ;

$\tau$  l'excès moyen pendant la durée de l'expérience ;

$M$  la masse en eau de la boule du thermomètre ;

$S$  la surface de l'enceinte ;

$\omega$  la surface de la source rapportée à la distance de l'ouverture d'admission ;

$\Omega$  l'ouverture d'admission ;

$x$  la température effective de la source ;

$y$  la température effective de la portion de l'espace environnant la source et vue du thermomètre à travers l'ouverture d'admission.

*Remarque.* —  $\frac{M}{S}$  se détermine très-exactement par une expérience de refroidissement.

Or la *température vraie*, le métal ayant déjà coulé depuis sa sortie sur une longueur d'environ 0<sup>m</sup>,50, peut être évaluée avec une très-grande approximation à 1500 degrés. Appelons T cette température, on aurait, en désignant par E le pouvoir émissif de l'acier en fusion

$$E\alpha^T = \alpha^x, \text{ d'où } E = 0,037,$$

valeur parfaitement admissible d'après les expériences de MM. de la Provostaye et Desains. Cette valeur est d'ailleurs confirmée par ce fait que, si nous supposons à la fonte en fusion précisément ce même pouvoir émissif, les mesures directes que j'ai faites sur la coulée de fonte du haut fourneau d'Allevard nous donnent pour cette fonte, à 1 mètre environ du trou de coulée,

$$x = 832^\circ \text{ et } T = 1300^\circ,$$

ce qui est bien d'accord avec les nombres de M. Grüner. Tous ces calculs étant d'ailleurs basés sur l'hypothèse de la constance de  $\alpha$ , cet accord ne paraîtra pas sans doute sans importance au point de vue de l'exactitude de la loi de Dulong aux températures élevées, cette loi étant interprétée, comme je l'ai expliqué plus haut, d'après les travaux de MM. de la Provostaye et Desains.

Il est d'ailleurs facile de vérifier que les résultats obtenus avec le Soleil d'une part et l'acier en fusion d'autre part sont bien entre eux dans le rapport qu'exigent nos idées sur la température du Soleil. Sans recourir à aucun calcul et empruntant seulement à mes mesures de la radiation solaire l'une d'entre elles, à la date du 6 septembre 1874, 2<sup>h</sup> 15<sup>m</sup>, dans laquelle le thermomètre est monté en 1 minute de 4<sup>o</sup>,2, on voit que dans le même temps, 1 minute, le thermomètre accuse sous l'influence de la radiation solaire un excès de température environ trois fois et demie plus considérable que celui dû à l'action de l'acier au sortir du four Martin Siemens ; et, si l'on admet entre l'intensité d'une radiation et son effet actinométrique une proportionnalité qui ne peut pas être bien éloignée de la vérité, tant que l'on se renferme entre des limites suffisamment étroites, on peut déterminer immédiatement la température qu'il faudrait attribuer à la surface du Soleil pour qu'elle donnât lieu à une radiation trois fois et demie plus intense que celle de l'acier à 1500 degrés. On trouve ainsi, dans l'hypothèse d'un pouvoir

émissif maximum, comme *température effective* du Soleil, 1600 degrés environ, c'est-à-dire un nombre presque rigoureusement égal à celui que j'ai été conduit à admettre comme résultat de mes mesures directes de la radiation solaire.

Si maintenant, nous rappelant le fait, extrêmement important, mis en évidence par M. Hirn, de la grande transparence des gaz incandescents, nous supposons que la surface solaire rayonne comme un bain de métal en pleine fusion, les expériences précédentes nous fourniront le moyen d'obtenir avec une certaine exactitude la température de ce bain métallique. Nous en avons pu déduire, en effet, pour l'un des métaux les plus importants du globe solaire, le pouvoir émissif déterminé, sinon peut-être avec une très-grande précision, du moins (ce qui est surtout important pour le but spécial que nous poursuivons en ce moment) dans les conditions mêmes d'expérimentation adoptées pour l'étude de la radiation solaire. Si l'on accepte cette détermination comme donnant une valeur probable du pouvoir émissif de la surface du Soleil, on aura pour la température moyenne vraie de cette surface  $T = 1980^{\circ}$ , ou, en nombre rond, 2000 degrés, avec une erreur probable que j'estime inférieure à 100 degrés.

Tel serait d'ailleurs, à bien peu près, le nombre auquel conduirait une interprétation exacte des expériences mêmes par lesquelles M. Soret croit avoir montré l'inexactitude de la loi de Dulong et Petit aux températures élevées. Remarquons, en effet, que la mesure actinométrique du rayonnement émis par un disque de zircon incandescent ne pourrait fournir la température vraie de ce disque qu'à la condition que l'on connût le pouvoir émissif de la zircon à cette température. En admettant que ce pouvoir émissif est égal à l'unité, comme le fait implicitement M. Soret, ce n'est plus la température vraie qu'il calcule, mais bien la température effective; mais la connaissance de cette température effective conduit immédiatement à la valeur du pouvoir émissif moyen du disque, à condition toutefois que l'on connaisse d'autre part la température vraie du disque. M. Soret évalue cette dernière température à 2000 degrés, nombre sans doute fort incertain. Acceptons-le cependant et calculons le pouvoir émissif moyen de son disque de zircon à 2000 degrés. Calculons, d'autre part, la température effective du Soleil, telle qu'elle résulte des mesures de M. Soret, au

sommet du mont Blanc. Admettons maintenant que le pouvoir émissif moyen de la surface du Soleil soit précisément égal au pouvoir émissif du disque de zircone dans l'expérience de M. Soret, et nous trouvons, comme température vraie du Soleil, 2470 degrés, nombre qui ne diffère pas beaucoup de celui que je conclus de mes recherches et qui lui deviendrait rigoureusement égal si nous attribuions au disque de zircone, comme température moyenne de sa surface rayonnante, la valeur peut-être plus probable de 1500 à 1600 degrés; mais il y a sur cette température moyenne une incertitude trop grande pour que je veuille conclure de l'expérience de M. Soret autre chose qu'une vérification de l'ordre de grandeur du résultat de mes recherches, et cette vérification je l'y trouve assurément aussi satisfaisante que possible.

La difficulté, je dirais presque l'impossibilité de connaître la température moyenne exacte de la surface rayonnante du disque de zircone, provient de ce que la température moyenne d'une telle surface peut différer beaucoup des températures locales qu'affecteront tels ou tels points en particulier. Et cette difficulté se rencontre non-seulement dans la comparaison des sources terrestres au Soleil, mais aussi dans l'évaluation même de la température du Soleil; de telle sorte que certains points de l'image du Soleil, obtenue au foyer d'une puissante lentille à échelons, peuvent parfaitement présenter une température de 2500 degrés (j'adopte sans discussion ce nombre proposé par M. Berthelot), la température moyenne du Soleil et, à plus forte raison, celle de l'image ne dépassant pas 2000 degrés. Les variations considérables de la température du Soleil d'une région à l'autre de la surface, variations si bien mises en évidence par les observations du P. Secchi, rendent ce double résultat parfaitement possible et suffisent, je crois, pour faire disparaître toute difficulté provenant de la comparaison de deux nombres en apparence contradictoires.

Grenoble, le 14 février 1875.

---

---

MÉMOIRES  
SUR  
LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

QUI CORRESPONDENT A LA FONCTION  $\cos x + i \sin x$ ,

PAR M. H. LEMONNIER,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE HENRI IV.

---

INTRODUCTION.

L'importance de la fonction  $\cos x + i \sin x$  dans la Trigonométrie et l'Analyse est due surtout aux deux propriétés qu'elle possède, d'avoir pour inverse l'expression  $\cos x - i \sin x$ , et de se reproduire à un facteur près dans sa dérivée.

Les mêmes propriétés appartiennent à trois combinaisons linéaires des fonctions elliptiques désignées par les lettres  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  (voir le Traité de MM. Briot et Bouquet). Ces combinaisons sont

$$\mu(z) + i\lambda(z), \quad \nu(z) + ki\lambda(z), \quad \frac{\nu(z) + k\mu(z)}{k'};$$

nous les désignons par

$$\nu_1(z), \quad \mu_1(z), \quad \lambda_1(z).$$

Dans un premier Mémoire, après avoir signalé les propriétés fondamentales, les zéros et les infinis de ces fonctions, nous en donnons les développements en séries de produits, en sommes de termes, en séries circulaires, et nous traitons les mêmes questions sur leurs rapports, qui n'ont que des zéros et des infinis doubles.

Dans un second Mémoire, il s'agit de l'addition et de la multiplica-

tion. Le point de départ y est, pour  $\nu_1(z)$ , une formule analogue à la formule de Moivre prise sous la forme

$$\cos(z+t) + i \sin(z+t) = \frac{\cos z + i \sin z}{\cos t - i \sin t}.$$

La formule s'établit par la considération des zéros et des infinis de  $\nu_1(z+t)$  au moyen de la relation

$$\nu\left(\frac{\omega'}{2} - z\right) = i \frac{\mu(z)}{\lambda(z)}.$$

Sans compter les expressions de  $\mu(z+t)$ ,  $\lambda(z+t)$  qu'elle implique, elle se prête à des conséquences variées; elle conduit en particulier, sans qu'il y ait embarras de facteurs étrangers, aux valeurs des produits  $\mu(z+t)\mu(z-t), \dots$ . Des formules parallèles ont lieu pour  $\mu_1(z+t)$ ,  $\lambda_1(z+t)$ . Il en résulte, de proche en proche, à l'égard de la multiplication, des expressions concrètes qui sont des fonctions rationnelles de  $\lambda, \mu, \nu$  où les termes, à un facteur près du premier degré quand  $n$  est impair, ont un degré sous-double de celui qui a lieu dans les expressions de  $\lambda(nz)$ , et sont conjugués l'un de l'autre.

L'objet d'un troisième Mémoire est la division de l'argument. En faisant ressortir l'analogie de la question avec le problème correspondant de la Trigonométrie, nous sommes amenés à l'étude particulière de l'équation où  $\nu_1(z)$  est égal à l'unité. C'est une équation qui correspond à l'équation  $x^n - 1 = 0$ , et jouit de propriétés analogues. Les racines primitives y sont en nombre égal à  $n^2 \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \left(1 - \frac{1}{b^2}\right) \dots$ ,  $a, b, \dots$  étant les facteurs premiers de  $n$ . Une racine primitive de  $x^n - 1 = 0$  engendre toutes les racines par ses puissances successives; pareillement deux racines s'exprimant par  $\nu_1 \frac{p_1 \omega + q_1 2 \omega'}{n}$ ,  $\nu_1 \frac{p_2 \omega + q_2 2 \omega'}{n}$  suffisent pour faire obtenir toutes les autres, pourvu que la condition d'avoir  $p_1 q_2 - q_1 p_2 \leq 0$  soit remplie. Quand le nombre  $n$  n'est pas un nombre premier, les racines peuvent se calculer au moyen de celles d'équations de degrés inférieurs, les racines primitives elles-mêmes au moyen de leurs racines primitives.

Les mêmes faits s'appliquent à la fonction  $\mu_1(z)$  et à  $\lambda_1(z)$ , comme à

$\lambda(z)$ ,  $\mu(z)$  et  $\nu(z)$ , sauf certaines particularités; par exemple, pour  $\lambda_1(z)$ ,  $\mu_1(z)$ ,  $\nu_1(z)$ , le nombre des racines primitives est moitié moindre.

Dans le Mémoire suivant, nous traitons de la division par 2, puis par un nombre impair, de l'une ou de l'autre période, ainsi que des problèmes inverses. La division par un nombre impair  $n$  fait dépendre  $g_1$ ,  $k_1$ ,  $k'_1$  paramètres et modules de la fonction à déterminer des diverses valeurs de  $\nu\left(p\frac{\Omega}{n}\right)$ , ou de  $\mu\left(p\frac{\Omega}{n}\right)$ , ou de  $\lambda\left(\frac{\omega}{4} + p\frac{\Omega}{n}\right)$ , avec des équations de condition qui admettent les racines primitives d'équations étudiées dans le troisième Mémoire, et n'admettent pas les autres. Le degré de l'équation modulaire  $f(k', k'_1) = 0$ , égal à  $n\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\dots$ , se reconnaît sans difficulté. Les calculs eux-mêmes accusent que l'équation en  $k$  et  $k_1$  est la même, et que, par le changement de  $k'$  en  $\eta i$ , de  $k'_1$  en  $\eta_1 i$ , elle devient l'équation qui lie  $\eta = \frac{k'}{k}$  et  $\eta_1 = \frac{k'_1}{k_1}$ . L'équation modulaire sous la forme d'un déterminant peut se déduire des formules obtenues. Nous appliquons le procédé au cas de  $n = 3$  et à celui de  $n = 5$ ; alors, au moins, les calculs à faire pour amener l'équation à être rationnelle ne sont pas trop pénibles.

---

## PREMIER MÉMOIRE.

---

### I.

#### *Définitions et premières propriétés.*

1. Soit  $\lambda(z, g, k)$  ou simplement  $\lambda(z)$  la fonction définie par l'équation différentielle

$$\frac{d\lambda}{dz} = g\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)},$$

sous la condition d'avoir, pour  $z = 0$ ,  $\lambda = 0$  et  $\frac{d\lambda}{dz} = g$ . La fonction

$\mu(z, g, k)$  ou  $\mu(z)$  et la fonction  $\nu(z, g, k)$  ou  $\nu(z)$  sont définies par les formules

$$\mu(z) = \sqrt{1 - \lambda^2(z)}, \quad \nu(z) = \sqrt{1 - k^2 \lambda^2(z)},$$

en se prenant égales à 1 pour  $z = 0$ . Il s'ensuit

$$\frac{d\lambda}{dz} = g\mu(z)\nu(z), \quad \frac{d\mu}{dz} = -g\lambda(z)\nu(z), \quad \frac{d\nu}{dz} = -k'g\lambda(z)\mu(z).$$

Soient encore  $\omega, \omega'$  deux périodes élémentaires de  $\lambda(z)$ , telles qu'on ait

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4}\right) = 1, \quad \lambda\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k}, \quad \nu\left(\frac{\omega}{4}\right) = k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad \mu\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right) = -\frac{k'i}{k},$$

de telle sorte qu'il en résulte

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= -i \frac{\nu(z)}{k\lambda(z)}, & \nu\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= -i \frac{\mu(z)}{\lambda(z)}, \\ \lambda\left(\frac{\omega}{4} - z\right) &= \lambda\left(\frac{\omega}{4} + z\right) = \frac{\mu(z)}{\nu(z)}, & \mu\left(\frac{\omega}{4} - z\right) &= -\mu\left(\frac{\omega}{4} + z\right) = k' \frac{\lambda(z)}{\nu(z)}, \\ & & \nu\left(\frac{\omega}{4} - z\right) &= \frac{k'}{\nu(z)}. \end{aligned}$$

Les trois fonctions qui doivent nous occuper seront

$$\nu_1(z) = \mu(z) + i\lambda(z), \quad \mu_1(z) = \nu(z) + ki\lambda(z), \quad \lambda_1(z) = \frac{\nu(z) + k\mu(z)}{k'}.$$

Elles sont évidemment, comme les fonctions  $\lambda, \mu, \nu$ , monodromes sur tout le plan, et elles ont pour périodes élémentaires communes  $\omega$  et  $2\omega'$ .

On sait que, pour avoir  $\lambda\left(\frac{\omega_1}{4}\right) = 1, \lambda\left(\frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega'_1}{2}\right) = \frac{1}{k}, \omega_1, \omega'_1$  étant deux autres périodes, il faut prendre

$$\omega_1 = (4m + 1)\omega + 4n\omega', \quad \omega'_1 = 2m'\omega + (2n' + 1)\omega'.$$

Pour avoir en outre  $\nu\left(\frac{\omega_1}{4}\right) = \nu\left(\frac{\omega}{4}\right)$ , il faut que  $n$  soit pair; et de plus que  $n'$  soit pair aussi pour avoir  $\mu\left(\frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega'_1}{2}\right) = -\frac{k'i}{k}$ . Les pé-



riodes  $\omega$ , et  $2\omega'_1$ , ne seront donc analogues à  $\omega$  et  $2\omega'$ , pour les trois fonctions, que si elles leur sont liées par les formules

$$\omega_1 = (4m + 1)\omega + 8n\omega', \quad 2\omega'_1 = 4m'\omega + (4n' + 1)2\omega'$$

ou

$$\omega_1 = 4m\omega + 4n2\omega' + \omega, \quad 2\omega'_1 = 4m'\omega + 4n'2\omega' + 2\omega';$$

et, si elles sont élémentaires, les nombres entiers  $m, n, m', n'$  satisferont à la condition

$$(4m + 1)(4n' + 1) - 16nm' = 1.$$

Les produits

$$\begin{aligned} & [\mu(z) + i\lambda(z)][\mu(z) - i\lambda(z)], \quad [\nu(z) + ki\lambda(z)][\nu(z) - ki\lambda(z)], \\ & \frac{\nu(z) + k\mu(z)}{k'} \frac{\nu(z) - k\mu(z)}{k'} \end{aligned}$$

sont tous trois égaux à l'unité; on a ainsi

$$\frac{1}{\nu_1(z)} = \mu(z) - i\lambda(z), \quad \frac{1}{\mu_1(z)} = \nu(z) - ki\lambda(z), \quad \frac{1}{\lambda_1(z)} = \frac{\nu(z) - k\mu(z)}{k'},$$

c'est-à-dire que les inverses des trois fonctions sont les expressions conjuguées dues, les deux premières au changement de  $i$  en  $-i$ , la troisième à celui de  $k$  en  $-k$  sans changer le signe de  $k'$ .

Les propriétés connues des fonctions  $\lambda, \mu, \nu$  conduisent immédiatement aux formules suivantes :

$$\begin{aligned} \nu_1(-z) &= \frac{1}{\nu_1(z)}, \quad \nu_1\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = -\nu_1(z), \quad \nu_1\left(\frac{\omega}{2} - z\right) = -\frac{1}{\nu_1(z)}, \\ \nu_1(\omega' + z) &= -\frac{1}{\nu_1(z)}, \quad \nu_1(\omega' - z) = -\nu_1(z), \\ \mu_1(-z) &= \frac{1}{\mu_1(z)}, \quad \mu_1\left(\frac{\omega}{2} + z\right) = \frac{1}{\mu_1(z)}, \quad \mu_1\left(\frac{\omega}{2} - z\right) = \mu_1(z), \\ \mu_1(\omega' + z) &= -\frac{1}{\mu_1(z)}, \quad \mu_1(\omega' - z) = -\mu_1(z) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lambda_1(-z) &= \lambda_1(z), \quad \lambda_1\left(\frac{\omega}{2} + z\right) = \frac{1}{\lambda_1(z)}, \quad \lambda_1\left(\frac{\omega}{2} - z\right) = \frac{1}{\lambda_1(z)}, \\ \lambda_1(\omega' + z) &= -\lambda_1(z) = \lambda_1(\omega' - z). \end{aligned}$$

2. *Dérivées des trois fonctions.* — Le calcul de ces dérivées donne

$$\frac{dv_1}{dz} = v'_1(z) = -g\lambda(z)v(z) + ig\mu(z)v(z) = igv(\mu + i\lambda) = igvv_1,$$

$$\frac{d\mu_1}{dz} = \mu'_1(z) = -gk^2\lambda\mu + kig\mu\nu = kgi\mu(\nu + ki\lambda) = ikg\mu\mu_1,$$

$$\frac{d\lambda_1}{dz} = \lambda'_1(z) = \frac{-gk^2\lambda\mu - kig\lambda\nu}{k'} = -kg\lambda\lambda_1;$$

d'où l'on tire

$$\frac{dv_1}{v_1} = d \log v_1 = igv dz, \quad \frac{d\mu_1}{\mu_1} = d \log \mu_1 = ikg\mu dz, \quad \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} = d \log \lambda_1 = -kg\lambda dz,$$

puis

$$\log v_1(z) = ig \int_0^z v(z) dz,$$

$$\log \mu_1(z) = ikg \int_0^z \mu(z) dz,$$

$$\log \lambda_1(z) = -kg \int_0^z \lambda(z) dz + \log \frac{1+k}{k'},$$

ou bien

$$v_1(z) = e^{ig \int_0^z v(x) dx}, \quad \mu_1(z) = e^{ikg \int_0^z \mu(x) dx}, \quad \lambda_1(z) = \frac{1+k}{k'} e^{-kg \int_0^z \lambda(x) dx}.$$

Il est aisé de reconnaître par ces expressions que les fonctions  $v_1(z)$ ,  $\mu_1(z)$ ,  $\lambda_1(z)$  sont monodromes, bien que les intégrales  $\int_0^z v(z) dz$ ,  $\int_0^z \mu(z) dz$ ,  $\int_0^z \lambda(z) dz$  ne le soient pas.

Si l'on pose  $z = \frac{\omega'}{2} + z'$ , on a

$$v(z) = v\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = -i \frac{\mu(z')}{\lambda(z')},$$

puis

$$\int v(z) dz = -i \int \mu(z') \frac{gz' dz'}{\lambda(z') gz'}.$$

Quand on fait l'intégration le long d'un cercle d'un rayon  $\rho$  infiniment petit, ayant le point  $\frac{\omega'}{2}$  pour centre, cette intégrale a pour limite  $\frac{2\pi}{g}$ ; par suite, l'exponentielle ne change pas. Il en est de même de tout autre point rendant  $\nu(z)$  infini. La fonction  $\nu_1(z)$  est donc bien monodrome.

3. Zéros et infinis des trois fonctions. Fonction  $\nu_1(z)$ . — Comme l'on a  $\mu(z) + i\lambda(z) = \frac{1}{\mu(z) - i\lambda(z)}$ , les infinis de  $\nu_1(z)$  sont les zéros de  $\mu(z) - i\lambda(z)$ , et ses zéros en sont les infinis. Ces zéros et infinis ne peuvent répondre à des valeurs finies de  $\lambda$  et de  $\mu$ ; ils ne peuvent provenir que des infinis de  $\lambda$  et de  $\mu$ , ce qui est une particularité importante.

A tout infini de  $\lambda$  et de  $\mu$ , il correspond soit un zéro, soit un infini de  $\nu_1(z)$ .

L'expression générale des infinis est en effet, pour  $\lambda$  et  $\mu$ ,

$$\alpha = (2p + 1)\frac{\omega'}{2} + q\frac{\omega}{2}.$$

Or, si l'on pose  $z = \alpha + z'$ , il vient

$$\nu_1(\alpha + z') = \pm \nu_1\left[(2p + 1)\frac{\omega'}{2} + z'\right],$$

le signe + se prenant si  $q$  est pair, le signe - si  $q$  est impair; et de là il résulte,

Au cas où  $p$  est pair.....  $\nu_1(\alpha + z') = \pm \nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right),$

Au cas où  $p$  est impair.....  $\nu_1(\alpha + z') = \pm \frac{1}{-\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right)}.$

Mais on a

$$\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = i \frac{1 - \nu(z')}{k\lambda(z')},$$

de sorte que,  $z'$  tendant vers zéro, la limite est celle de

$$i \frac{k^2 g \lambda(z') \mu(z')}{k g \mu(z') \nu(z')} = ik \frac{\lambda(z')}{\nu(z')}$$

ou zéro.

Donc, dans le premier cas,  $\alpha$  est un zéro de  $\nu_1(z)$ , et dans le second, c'est un infini.

L'expression générale des zéros de  $\nu_1(z)$  est, en conséquence,

$$\alpha = (4p + 1) \frac{\omega'}{2} + q \frac{\omega}{2},$$

celle des infinis est

$$\alpha = (4p - 1) \frac{\omega'}{2} + q \frac{\omega}{2}.$$

Ainsi, sur la ligne du côté  $2\omega'$  du parallélogramme élémentaire, les zéros se suivent à partir du point  $\frac{\omega'}{2}$  par intervalles égaux à ce côté,  $2\omega'$ , et les milieux des intervalles sont des infinis; de sorte que les infinis et les zéros sont distribués sur des lignes parallèles au côté  $\omega$  du parallélogramme, les lignes portant alternativement des zéros et des infinis qui se suivent à la distance  $\frac{\omega}{2}$ .

Dans le parallélogramme élémentaire  $(\omega, 2\omega')$ , la somme des deux zéros est

$$\frac{\omega'}{2} + \left(\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2}\right) = \omega' + \frac{\omega}{2};$$

d'où résulte

$$\nu_1(z) = \nu_1\left(\omega' + \frac{\omega}{2} - z\right)$$

ou

$$\nu_1(z + p\omega + q2\omega') = \nu_1\left(\omega' + \frac{\omega}{2} - z + p'\omega + q'2\omega'\right).$$

*Fonction  $\mu_1(z)$ .* — On trouve d'une façon semblable que les zéros de la fonction  $\mu_1(z)$  ont pour expression

$$\alpha = (4p + 1) \frac{\omega'}{2} + q\omega, \quad \alpha = (4p - 1) \frac{\omega'}{2} + (2q + 1) \frac{\omega}{2},$$

et les infinis

$$\alpha = (4p - 1) \frac{\omega'}{2} + q\omega, \quad \alpha = (4p + 1) \frac{\omega'}{2} + (2q + 1) \frac{\omega}{2}.$$

Sur le côté  $2\omega'$  du parallélogramme élémentaire les zéros et les infinis sont les mêmes que pour  $\nu_1(z)$ ; mais sur chacune des lignes me-

nées en ces points parallèlement au côté  $\omega$ , les zéros et les infinis se succèdent à la distance  $\frac{\omega}{2}$ .

*Fonction  $\lambda_1(z)$ .* — Les zéros ont pour expression générale

$$a = (2p + 1) \frac{\omega'}{2} + (2q + 1) \frac{\omega}{2},$$

les infinis

$$\alpha = (2p + 1) \frac{\omega'}{2} + q\omega.$$

Il n'y a là sur la ligne  $2\omega'$  que des infinis, et sur chacune des lignes qui y sont menées parallèlement au côté  $\omega$ , les infinis et les zéros se succèdent alternativement, par intervalles égaux à  $\frac{\omega}{2}$ , de sorte que les lignes parallèles à  $2\omega'$  sont alternativement des lignes d'infinis et de zéros.

4. D'après cette distribution des zéros et des infinis pour les trois fonctions  $\nu_1(z)$ ,  $\mu_1(z)$ ,  $\lambda_1(z)$ , les rapports  $\frac{\nu_1(z)}{\mu_1(z)}$ ,  $\frac{\mu_1(z)}{\lambda_1(z)}$ ,  $\frac{\lambda_1(z)}{\nu_1(z)}$  n'ont chacun que des zéros et des infinis doubles. Nous désignerons ces rapports par  $\varpi_1(z)$ ,  $\varpi_2(z)$ ,  $\varpi_3(z)$ .

Pour le premier,  $\varpi_1(z) = \frac{\nu_1(z)}{\mu_1(z)}$ , l'expression générale des zéros est

$$a = (2p + 1) \frac{\omega}{2} + (4q + 1) \frac{\omega'}{2},$$

celle des infinis

$$\alpha = (2p + 1) \frac{\omega}{2} + (4q - 1) \frac{\omega'}{2};$$

pour le deuxième,  $\varpi_2(z) = \frac{\mu_1(z)}{\lambda_1(z)}$ , celle des zéros est

$$a = p\omega + (4q + 1) \frac{\omega'}{2},$$

celle des infinis

$$\alpha = (2p + 1) \frac{\omega}{2} + (4q + 1) \frac{\omega'}{2};$$

et pour le troisième,  $\varpi_3(z) = \frac{\lambda_1(z)}{\nu_1(z)}$ , celle des zéros est

$$a = (2p + 1) \frac{\omega}{2} + (4q - 1) \frac{\omega'}{2},$$

celle des infinis

$$\alpha = p\omega + (4q + 1) \frac{\omega'}{2}.$$

Les trois rapports ont  $\omega$  et  $2\omega'$  pour périodes élémentaires, et dans leur parallélogramme il n'y a pour chacun qu'un zéro double et un infini double.

Il est à remarquer que l'on a

$$\varpi'_1(z) = igk' \frac{\varpi_1(z)}{\lambda_1(z)}, \quad \varpi'_2(z) = igk \frac{\varpi_2(z)}{\nu_1(z)}, \quad \varpi'_3(z) = -ig \frac{\varpi_3(z)}{\mu_1(z)};$$

d'où

$$\varpi_1(z) = e^{igk' \int_0^z \frac{dz}{\lambda_1(z)}}, \quad \varpi_2(z) = \frac{k'}{1+k} e^{igk \int_0^z \frac{dz}{\nu_1(z)}}, \quad \varpi_3(z) = \frac{1+k}{k'} e^{-ig \int_0^z \frac{dz}{\mu_1(z)}}.$$

## II.

### *Développements en produits de facteurs.*

5. *Développement de*  $\nu_1(z) = \mu(z) + i\lambda(z) = e^{g \int_0^z \nu(s) ds}$ . Considérons la formule connue

$$\nu(z) = \frac{2\pi i}{\omega g} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=-n'}^{n=n'} (-1)^n \cot \left[ (2n+1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right],$$

$n'$  devant croître indéfiniment et  $\rho$  désignant le rapport  $\frac{\omega'}{\omega}$ . C'est

$$\nu(z) = \frac{2\pi i}{\omega g} \lim \left[ \cot \left( \pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right) + 2 \sum_{n=1}^{n=n'} (-1)^{n-1} \frac{\sin \left( 2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega} \right)}{\cos \left( 2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega} \right) - \cos n 4\pi\rho} \right].$$

On en déduit

$$gi \int_0^z v(z) dz = \log \frac{\sin\left(\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin \pi\rho} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n=n'} (-1)^n \log \frac{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega} - \cos n 4\pi\rho\right)}{\cos 2\pi\rho - \cos n 4\pi\rho},$$

d'où

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \lim \frac{\sin\left(\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin \pi\rho} \frac{\cos 2\pi\rho - \cos 4\pi\rho}{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos 4\pi\rho} \\ &\times \frac{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos 2 \cdot 4\pi\rho}{\cos 2\pi\rho - \cos 2 \cdot 4\pi\rho} \dots \frac{\cos 2\pi\rho - \cos(2n-1)4\pi\rho}{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos(2n-1)4\pi\rho} \\ &\times \frac{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos 2n \cdot 4\pi\rho}{\cos 2\pi\rho - \cos 2n \cdot 4\pi\rho} \dots \end{aligned}$$

$n$  croissant indéfiniment.

Comme l'on a

$$\frac{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos 2n 4\pi\rho}{\cos 2\pi\rho - \cos 2n 4\pi\rho} = 1 + \frac{\sin \frac{2\pi z}{\omega} \sin\left(2\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin(4n-1)\pi\rho \sin(4n+1)\pi\rho}$$

et

$$\frac{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos(2n-1)4\pi\rho}{\cos 2\pi\rho - \cos(2n-1)4\pi\rho} = 1 + \frac{\sin \frac{2\pi z}{\omega} \sin\left(2\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin(4n-3)\pi\rho \sin(4n-1)\pi\rho},$$

si l'on pose

$$I_1 = \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos 2n \cdot 4\pi\rho}{\cos 2\pi\rho - \cos 2n 4\pi\rho} = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left[ 1 + \frac{\sin \frac{2\pi z}{\omega} \sin\left(2\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin(4n-1)\pi\rho \sin(4n+1)\pi\rho} \right],$$

$$I_2 = \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos(2n-1)4\pi\rho}{\cos 2\pi\rho - \cos(2n-1)4\pi\rho} = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left[ 1 + \frac{\sin \frac{2\pi z}{\omega} \sin\left(2\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin(4n-3)\pi\rho \sin(4n-1)\pi\rho} \right],$$

la formule est

$$v_1(z) = \frac{\sin\left(\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin\pi\rho} \frac{I_1}{I_2}.$$

Mais elle peut se mettre comme il suit sous une forme plus simple.  
On a d'abord

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \lim \frac{\sin\left(\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin\pi\rho} \frac{\sin\pi\rho \sin 3\pi\rho}{\sin\left(\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right) \sin\left(3\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)} \\ &\times \frac{\sin\left(3\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right) \sin\left(5\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin 3\pi\rho \sin 5\pi\rho} \dots \\ &\times \frac{\sin(4n-3)\pi\rho \sin(4n-1)\pi\rho}{\sin\left[(4n-3)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right] \sin\left[(4n-1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right]} \\ &\times \frac{\sin\left[(4n-1)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right] \sin\left[(4n+1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right]}{\sin(4n-1)\pi\rho \sin(4n+1)\pi\rho} \dots, \end{aligned}$$

ce qui se réduit à

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \lim \frac{\sin\left(\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin\left(\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right)} \frac{\sin\left(3\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right)}{\sin\left(3\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right)} \dots \frac{\sin\left[(4n-3)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right]}{\sin\left[(4n-3)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right]} \\ &\times \frac{\sin\left[(4n-1)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right] \sin\left[(4n+1)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right]}{\sin\left[(4n-1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right] \sin(4n+1)\pi\rho} \\ &= \lim \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi\rho + \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos(2n-1)4\pi\rho}{\cos\left(2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega}\right) - \cos(2n-1)4\pi\rho} \\ &\times \lim \frac{\sin\left[(4n+1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right]}{\sin(4n+1)\pi\rho}. \end{aligned}$$



Or on a

$$\begin{aligned} \lim \frac{\sin \left[ (4n+1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]}{\sin(4n+1)\pi\rho} &= \lim \left[ \cos \frac{2\pi z}{\omega} - \sin \frac{2\pi z}{\omega} \cot(4n+1)\pi\rho \right] \\ &= \cos \frac{2\pi z}{\omega} + i \sin \frac{2\pi z}{\omega}, \end{aligned}$$

supposé que le coefficient de  $i$  dans la valeur de  $\rho$  soit positif. Donc

$$\begin{aligned} v_1(z) &= e^{\frac{2\pi zi}{\omega}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left( 2\pi\rho + \frac{4\pi z}{\omega} \right) - \cos(2n-1)4\pi\rho}{\cos \left( 2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega} \right) - \cos(2n-1)4\pi\rho} \\ &= e^{\frac{2\pi zi}{\omega}} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\sin \frac{4\pi z}{\omega} \sin 2\pi\rho}{\sin \left[ (4n-3)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right] \sin \left[ (4n-1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]} \right). \end{aligned}$$

*Remarque.* — En faisant dans cette formule  $z = \frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}$ , on obtient

$$\frac{1-k'}{k} = e^{\pi i} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4(n-1)\pi\rho \cos 4n\pi\rho}{\cos^2(4n-2)\pi\rho} = e^{\pi i} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\sin^2 2\pi\rho}{\cos^2(4n-2)\pi\rho} \right);$$

d'où

$$\frac{1+k'}{k} = e^{-\pi i} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{\sin^2 2\pi\rho}{\cos 4(n-1)\pi\rho \cos 4n\pi\rho} \right).$$

Par la différentiation, l'expression de  $v_1(z)$  donne

$$\begin{aligned} giv(z) &= \frac{2\pi i}{\omega} - \frac{4\pi}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\sin \left( 2\pi\rho + \frac{4\pi z}{\omega} \right)}{\cos \left( 2\pi\rho + \frac{4\pi z}{\omega} \right) - \cos(2n-1)4\pi\rho} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \left( 2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega} \right)}{\cos \left( 2\pi\rho - \frac{4\pi z}{\omega} \right) - \cos(2n-1)4\pi\rho} \right]; \end{aligned}$$

d'où, par  $z = 0$ ,

$$\begin{aligned} g &= \frac{2\pi}{\omega} + \frac{8\pi i \sin 2\pi\rho}{\omega} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\cos 2\pi\rho - \cos(2n-1)4\pi\rho} \\ &= \frac{2\pi}{\omega} + \frac{4\pi i \sin 2\pi\rho}{\omega} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sin(4n-3)\pi\rho \sin(4n-1)\pi\rho}. \end{aligned}$$

6. Le développement que nous venons d'obtenir pour  $v_1(z)$  peut se déduire de la formule générale due à Cauchy

$$\frac{f(t)}{f(0)} = \prod \frac{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^p}{\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^q} e^{-\frac{t}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{f(z)} \log\left(1 - \frac{t}{z}\right) dz},$$

où  $f(z)$  désigne une fonction qui n'est pas nulle à l'origine, ayant  $a, \dots, \alpha, \dots$  pour ses zéros et ses infinis dans l'intérieur d'un contour qui comprend le point  $z = t$ , monodrome ainsi que sa dérivée à l'intérieur et le long du contour.

Lorsque le contour s'éloigne à l'infini dans tous les sens, si le quotient  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  reste de valeur finie tout le long de ce contour, la formule peut se remplacer par

$$\frac{f(t)}{f(0)} = \lim \prod \frac{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^p}{\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^q} e^{-\frac{t}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{dz}{z}},$$

de sorte qu'elle donne

$$v_1(z) = \lim \prod \frac{1 - \frac{z}{\left(4n+1\right)\frac{\omega'}{2} + m\frac{\omega}{2}}}{1 - \frac{z}{\left(4n-1\right)\frac{\omega'}{2} + m\frac{\omega}{2}}} e^{-\frac{gz}{2\pi} \int \frac{v(\xi) d\xi}{\xi}}.$$

Comme la fonction  $v\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  est impaire, prenons un contour qui ait le point  $z = \frac{\omega'}{2}$  pour centre, par exemple celui d'un parallélogramme

ayant ses côtés parallèles à ceux du parallélogramme élémentaire  $(2\omega', \omega)$ , aux points

$$z = -\left(m' \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{4}\right), \quad z = m' \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{4}$$

et

$$z = -(4n' + 1) \frac{\omega'}{2} + \frac{z}{4} \omega', \quad z = (4n' + 1) \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega'}{4}.$$

L'intégrale, si l'on pose  $\zeta = \frac{\omega'}{2} + \zeta'$ , deviendra

$$\int \nu \frac{d\zeta}{\zeta} = \int \nu \left(\frac{\omega'}{2} + \zeta'\right) d\zeta' \left(\frac{\omega'}{2} + \zeta'\right)^{-1} = \int \nu \left(\frac{\omega'}{2} + \zeta'\right) \frac{d\zeta'}{\zeta'} \left(1 + \frac{\omega'}{2\zeta'}\right)^{-1};$$

elle aura même limite que  $\int \nu \left(\frac{\omega'}{2} + \zeta'\right) \frac{d\zeta'}{\zeta'}$ , c'est-à-dire zéro; et de là

$$\nu_1(z) = \lim \prod_{n=-n'}^{n=n'} \frac{1 - \frac{z}{(4n+1) \frac{\omega'}{2} + m \frac{\omega}{2}}}{1 - \frac{z}{(4n-1) \frac{\omega'}{2} + m \frac{\omega}{2}}}.$$

Mais  $m$  devra varier pour les deux termes depuis  $m = -m'$  jusqu'à  $m = m'$ ; et  $n$  pour le numérateur depuis  $n = -n'$  jusqu'à  $n = n'$ , et pour le dénominateur depuis  $n = -n' + 1$  jusqu'à  $n = n'$ ; c'est-à-dire qu'on a

$$\nu_1(z) = \lim \frac{\prod_{n=-n'}^{n=n'} \prod_{m=-m'}^{m=m'} \left(1 - \frac{z}{(4n+1) \frac{\omega'}{2} + m \frac{\omega}{2}}\right)}{\prod_{n=-n'+1}^{n=n'} \prod_{m=-m'}^{m=m'} \left(1 - \frac{z}{(4n-1) \frac{\omega'}{2} + m \frac{\omega}{2}}\right)}$$

ou

$$\nu_1(z) = \lim \frac{\prod_{n=-n'}^{n=n'} \prod_{m=-m'}^{m=m'} \left(1 - \frac{\frac{2\pi z}{\omega}}{(4n+1)\pi\rho + m\pi}\right)}{\prod_{n=-n'+1}^{n=n'} \prod_{m=-m'}^{m=m'} \left(1 - \frac{\frac{2\pi z}{\omega}}{(4n-1)\pi\rho + m\pi}\right)}$$

De là

$$\begin{aligned}
v_1(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{n=-n'}^{n=n'} \frac{\sin \left[ (4n+1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]}{\sin(4n+1)\pi\rho}}{\prod_{n=-n'+1}^{n=n'} \frac{\sin \left[ (4n-1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]}{\sin(4n-1)\pi\rho}} \\
&= \frac{\sin \left( \pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left( 5\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right) \dots \sin \left[ (4n+1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]}{\sin \pi\rho \sin 5\pi\rho \dots \sin(4n+1)\pi\rho} \\
&\times \frac{\sin \left( 3\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left( 7\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right) \dots \sin \left[ (4n-1)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right]}{\sin 3\pi\rho \sin 7\pi\rho \dots \sin(4n-1)\pi\rho} \\
&\times \frac{\sin 3\pi\rho \sin 7\pi\rho \dots \sin(4n-1)\pi\rho}{\sin \left( 3\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left( 7\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right) \dots \sin \left[ (4n-1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]} \\
&\times \frac{\sin \pi\rho \sin 5\pi\rho \dots \sin(4n-3)\pi\rho}{\sin \left( \pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left( 5\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right) \dots \sin \left[ (4n-3)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right]} \dots;
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
v_1(z) &= \lim \frac{\sin \left( \pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left( 3\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right) \dots \sin \left[ (4n-3)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]}{\sin \left( \pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right) \sin \left( 3\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right) \dots \sin \left[ (4n-3)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right]} \\
&\times \frac{\sin \left[ (4n-1)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right] \sin \left[ (4n+1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]}{\sin \left[ (4n-1)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right] \sin(4n+1)\pi\rho} \dots,
\end{aligned}$$

ce qui est la formule précédemment obtenue.

7. Autre développement de  $v_1(z)$ . — Considérons la formule connue

$$\begin{aligned}
v(z) &= -\frac{i}{g} \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} (-1)^n \frac{1}{z - \frac{m\omega}{2} - (2n+1)\frac{\omega'}{2}} \\
&= -\frac{\pi i}{g\omega'} \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} (-1)^n \frac{1}{\frac{\pi z}{\omega'} - \frac{m\pi}{2\rho} - (2n+1)\frac{\pi}{2}};
\end{aligned}$$

d'où

$$v(z) = \frac{\pi i}{g\omega'} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{m=-m}^{m=m} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi z}{\omega'} - \frac{m\pi}{2\rho}\right)}.$$

Il s'ensuit

$$g^i \int_0^z v(z) dz = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{m=-m}^{m=m'} \log \frac{\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{m\pi}{4\rho}\right)}{\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{4\rho}\right)},$$

puis

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{m=-m}^{m=m'} \frac{\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{m\pi}{4\rho}\right)}{\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{4\rho}\right)} \\ &= \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) \prod_{m=1}^{m=\infty} \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{m\pi}{4\rho}\right) \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} - \frac{m\pi}{4\rho}\right) \\ &= \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{\text{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) - \text{tang}^2 \frac{m\pi}{4\rho}}{1 - \text{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) \text{tang}^2 \frac{m\pi}{4\rho}} \\ &= \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{\cos \frac{m\pi}{2\rho} - \sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{m\pi}{2\rho} + \sin \frac{\pi z}{\omega'}} \\ &= \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) \prod_{m=1}^{m=\infty} \left(1 - \frac{2 \sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{m\pi}{2\rho} + \sin \frac{\pi z}{\omega'}}\right) \\ &= \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) \prod_{m=1}^{m=\infty} \left[1 - \frac{\sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{m\pi}{4\rho}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} - \frac{m\pi}{4\rho}\right)}\right]. \end{aligned}$$

La formule de Cauchy donnerait là

$$\begin{aligned} \nu_1(z) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{m=-m'}^{m=m'} \frac{\prod_{n=-n'}^{n=n'} \left( 1 - \frac{\frac{\pi z}{2\omega'}}{n\pi + \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{4\rho}} \right)}{\prod_{n=-n'+1}^{n=n'} \left( 1 - \frac{\frac{\pi z}{2\omega'}}{n\pi - \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{4\rho}} \right)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{m=-m'}^{m=m'} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{4\rho} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{4\rho}\right)} \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{4\rho} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{4\rho}\right)} \cdot \\ &= \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} + m\frac{\pi}{4\rho}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi z}{2\omega'} - m\frac{\pi}{4\rho}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} - m\frac{\pi}{4\rho}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi z}{2\omega'} + m\frac{\pi}{4\rho}\right)} \end{aligned}$$

ou

$$\nu_1(z) = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right) \prod_{m=1}^{m=\infty} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} + m\frac{\pi}{4\rho}\right) \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} - m\frac{\pi}{4\rho}\right).$$

comme ci-dessus.

8. *Développements de*  $\mu_1(z) = \nu(z) + ki\lambda(z) = e^{gki \int_0^z \mu(z) dz}$ . — Prenons

$$\mu(z) = -\frac{2\pi i}{k g \omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=-n'}^{n=n'} \frac{(-1)^n}{\sin\left[\frac{2\pi z}{\omega} - (2n+1)\pi\rho\right]}.$$

On en tire

$$k g i \int_0^z \mu(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=-n'}^{n=n'} (-1)^n \log \frac{\operatorname{tang}\left[(2n+1)\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right]}{\operatorname{tang}(2n+1)\frac{\pi\rho}{2}},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \mu_1(z) = \lim & \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right) \operatorname{tang}\left(3\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right) \operatorname{tang}\left(5\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right) \dots}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right) \operatorname{tang}\left(3\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right) \operatorname{tang}\left(5\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right) \dots} \\ & \times \frac{\operatorname{tang}\left[(4n-1)\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right] \operatorname{tang}\left[(4n+1)\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right]}{\operatorname{tang}\left[(4n-1)\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right] \operatorname{tang}\left[(4n+1)\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right]} \dots = \frac{\varphi(z)}{\varphi(-z)}, \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \operatorname{tang}\left(\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tang}\left[(4n-1)\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right]}{\operatorname{tang}\left[(4n+1)\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right]} \\ &= \operatorname{tang}\left(\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{2 \sin \pi\rho}{\sin \pi\rho + \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + 4n\pi\rho\right)} \right] \\ &= \operatorname{tang}\left(\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{\sin \pi\rho}{\sin\left[\frac{\pi z}{\omega} + (4n+1)\frac{\pi\rho}{2}\right] \cos\left[\frac{\pi z}{\omega} + (4n-1)\frac{\pi\rho}{2}\right]} \right\}. \end{aligned}$$

*Remarque.* — On déduit de là par  $z = \frac{\omega}{4}$ ,

$$\begin{aligned} k' + ki &= - \prod_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{2 \sin \pi\rho}{\sin \pi\rho + \cos 4n\pi\rho} \right)^2 \\ &= - \prod_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{\sin \pi\rho}{\sin\left[\frac{\pi}{4} - (4n-1)\frac{\pi\rho}{2}\right] \sin\left[\frac{\pi}{4} - (4n+1)\frac{\pi\rho}{2}\right]} \right\}^2; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} k' - ki &= - \prod_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{2 \sin \pi\rho}{\sin \pi\rho - \cos 4n\pi\rho} \right)^2 \\ &= - \prod_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{\sin \pi\rho}{\sin\left[\frac{\pi}{4} - (n+1)\frac{\pi\rho}{2}\right] \cos\left[\frac{\pi}{4} - (4n-1)\frac{\pi\rho}{2}\right]} \right\}^2, \end{aligned}$$

ou encore, de plus haut,

$$k' + ki = - \prod_{n=0}^{n=\infty} \left[ 1 - \frac{\sin \pi \rho \cos 4 n \pi \rho}{\left( \frac{\sin \pi \rho + \cos 4 n \pi \rho}{2} \right)^2} \right],$$

$$k' - hi = - \prod_{n=0}^{n=\infty} \left[ 1 + \frac{\sin \pi \rho \cos 4 n \pi \rho}{\left( \frac{\sin \pi \rho - \cos 4 n \pi \rho}{2} \right)^2} \right].$$

9. Autre développement de  $\mu_1(z)$ . — L'expression suivante de  $\mu(z)$  :

$$\mu(z) = \frac{\pi i}{hg\omega'} \lim_{m=-m'-1}^{m=m'} \frac{(-1)^m}{\cos \left( \frac{\pi z}{\omega'} - m \frac{\pi}{2\rho} \right)}$$

donne

$$\begin{aligned} \mu_1(z) &= \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right) \prod_{n=1}^{n=\infty} \operatorname{col} \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{(2n-1)\pi}{4\rho} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right] \operatorname{col} \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{(2n-1)\pi}{4\rho} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right] \\ &\quad \times \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2n\pi}{4\rho} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right) \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{2n\pi}{4\rho} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right) \\ &= \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right) \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos \frac{(2n-1)\pi}{2\rho} + \sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{(2n-1)\pi}{2\rho} - \sin \frac{\pi z}{\omega'}} : \frac{\cos \frac{2n\pi}{2\rho} + \sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{2n\pi}{2\rho} - \sin \frac{\pi z}{\omega'}} \\ &= \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right) \frac{\prod_{n=1}^{n=\infty} \left[ 1 - \frac{2 \sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\sin \frac{\pi z}{\omega'} - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2\rho}} \right]}{\prod_{n=1}^{n=\infty} \left( 1 - \frac{2 \sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\sin \frac{\pi z}{\omega'} - \cos \frac{2n\pi}{2\rho}} \right)}. \end{aligned}$$

10. Développement de  $\lambda_1(z) = \frac{\nu(z) + h\mu(z)}{h'} = \frac{1+h}{h'} e^{-hg \int_0^z \lambda(z) dz}$ . —

Soit prise la formule

$$\lambda(z) = \frac{2\pi}{hg\omega} \lim_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{1}{\sin \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (2n+1)\pi\rho \right]}.$$



On en déduit

$$\begin{aligned} k g \int_0^z \lambda(z) dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=-n'-1}^{n=n'} \log \frac{\operatorname{tang} \left[ (2n+1) \frac{\pi \rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right]}{\operatorname{tang} (2n+1) \frac{\pi \rho}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{n=n'} \log \frac{\operatorname{tang} \left[ (2n+1) \frac{\pi \rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right] \operatorname{tang} \left[ (2n+1) \frac{\pi \rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right]}{\operatorname{tang}^2 (2n+1) \frac{\pi \rho}{2}} \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \lambda_1(z) &= \frac{1+k}{k'} \prod_{n=0}^{n=\infty} \frac{\operatorname{cot} \left[ (2n+1) \frac{\pi \rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right] \operatorname{cot} \left[ (2n+1) \frac{\pi \rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right]}{\operatorname{cot}^2 (2n+1) \frac{\pi \rho}{2}} \\ &= \frac{1+k}{k'} \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ 1 + \frac{2 \sin \frac{\pi z}{\omega}}{\sin \left[ (2n+1) \pi \rho - \frac{\pi z}{\omega} \right] - \sin \frac{\pi z}{\omega}} \right\} \\ &\quad \times \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ 1 - \frac{2 \sin \frac{\pi z}{\omega}}{\sin \left[ (2n+1) \pi \rho + \frac{\pi z}{\omega} \right] + \sin \frac{\pi z}{\omega}} \right\} \\ &= \frac{1+k}{k'} \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ 1 + \frac{\sin \frac{\pi z}{\omega}}{\sin \left[ (2n+1) \frac{\pi \rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right] \cos (2n+1) \frac{\pi \rho}{2}} \right\} \\ &\quad \times \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ 1 - \frac{\sin \frac{\pi z}{\omega}}{\sin \left[ (2n+1) \frac{\pi \rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right] \cos (2n+1) \frac{\pi \rho}{2}} \right\} \end{aligned}$$

Remarque. — De là, par  $z = \frac{\omega}{4}$ ,

$$\frac{1-k}{k'} = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left[ 1 - \frac{1}{\cos^2 (2n+1) \frac{\pi \rho}{2}} \right];$$

d'où

$$\frac{1+k}{k'} = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left[ 1 - \frac{1}{\sin^2(2n+1)\frac{\pi\rho}{2}} \right].$$

11. *Autre développement.* — On a

$$\begin{aligned} \lambda(z) &= -\frac{\pi}{kg\omega'} \operatorname{tang} \frac{\pi z}{\omega'} - \frac{2\pi}{kg\omega'} \lim_{n=n'} \sum_{n=1}^{n=n'} (-1)^n \left[ \operatorname{tang} \left( \frac{\pi z}{\omega'} - \frac{n\pi}{2\rho} \right) + \operatorname{tang} \left( \frac{\pi z}{\omega'} + \frac{n\pi}{2\rho} \right) \right] \\ &= -\frac{\pi}{kg\omega'} \operatorname{tang} \frac{\pi z}{\omega'} - \frac{2\pi}{kg\omega'} \lim_{n=n'} \sum_{n=1}^{n=n'} (-1)^n \frac{\sin \frac{2\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{n\pi}{\rho} + \cos \frac{2\pi z}{\omega'}}; \end{aligned}$$

d'où

$$kg \int_0^z \lambda(z) dz = \log \cos \frac{\pi z}{\omega'} + \lim_{n=n'} \sum_{n=1}^{n=n'} (-1)^n \log \frac{\cos \frac{n\pi}{\rho} + \cos \frac{2\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{n\pi}{\rho} + 1},$$

puis

$$\lambda_1(z) = \frac{1+k}{k'} \frac{1}{\cos \frac{\pi z}{\omega'}} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{\cos \frac{2\pi z}{\omega'} + \cos \frac{n\pi}{\rho}}{1 + \cos \frac{n\pi}{\rho}} \right)^{(-1)^{n-1}},$$

$$\lambda_1(z) = \frac{1+k}{k'} \frac{1}{\cos \frac{\pi z}{\omega'}} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos^2 \frac{n\pi}{2\rho}} \right)^{(-1)^{n-1}},$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1+k}{k'} \frac{1}{\cos \frac{\pi z}{\omega'}} \frac{\prod_{n=1}^{n=\infty} \left[ 1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos^2 \frac{(2n-1)\pi}{2\rho}} \right]}{\prod_{n=1}^{n=\infty} \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos^2 \frac{2n\pi}{2\rho}} \right)}. \end{aligned}$$

III.

*Développement des mêmes fonctions en séries de fractions.*

12. Pour une fonction  $f(z)$  monodrome et monogène dans une portion du plan, devenant seulement infinie en certains points de cette partie, Cauchy a donné la formule

$$f(t) = \mathcal{E} \frac{f(z)}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z) dz}{z-t},$$

où le signe résidu s'applique à tous les infinis que renferme l'aire plane considérée, tandis que l'intégration s'opère sur tout le contour de l'aire.

Si le contour s'éloigne à l'infini dans tous les sens, sans que le module de  $f(z)$  cesse d'être en tous ses points d'une valeur finie, l'intégrale peut se réduire à la limite de  $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z) dz}{z}$ ; elle est nulle quand  $f(z)$  est une fonction impaire et que l'origine est un centre pour le contour.

13. *Développement de  $\nu_1(z)$ .* — Considérons la fonction impaire

$$\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right).$$

Ses infinis étant donnés par

$$\frac{\omega'}{2} + z = (4m-1) \frac{\omega'}{2} + n \frac{\omega}{2}, \quad \text{d'où} \quad z = (2m-1) \omega' + n \frac{\omega}{2},$$

si l'on pose

$$z = (2m-1) \omega' + n \frac{\omega}{2} + z',$$

on aura

$$\begin{aligned} \nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= (-1)^n \nu_1\left(-\frac{\omega'}{2} + z'\right) = (-1)^n \left[ \mu\left(\frac{\omega'}{2} - z'\right) - i\lambda\left(\frac{\omega'}{2} - z'\right) \right] \\ &= (-1)^n \frac{1 + \nu(z')}{h} i \frac{g z'}{\lambda(z')} \frac{1}{g z'}, \end{aligned}$$

ce qui donne pour expression générale du résidu

$$(-1)^n \frac{2i}{gk} \frac{1}{z - (2m-1)\omega' - n\frac{\omega}{2}}$$

au point  $z = (2m-1)\omega' + n\frac{\omega}{2}$ .

Prenons comme contour un parallélogramme dont les côtés, parallèles à ceux du parallélogramme élémentaire, soient déterminés par les points

$$z = -n'\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{4}, \quad z = n'\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{4},$$

et les points

$$z = -(2m'-1)\omega' - \frac{\omega'}{4}, \quad z = (2m'-1)\omega' + \frac{\omega'}{4}.$$

Les valeurs de  $n$  à considérer seront

$$n = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \dots, \quad n', \\ -1, \quad -2, \quad -3, \dots, \quad -n';$$

celles de  $m$  seront

$$m = 0, \quad 1, \quad 2, \dots, \quad m', \\ -1, \quad -2, \dots, \quad -m'+1,$$

de sorte qu'on a

$$\begin{aligned} \nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= \lim \frac{2i}{kg} \sum_{n=-n'}^{n=n'} \sum_{m=-m'+1}^{m=m'} \frac{(-1)^n}{z - (2m-1)\omega' - n\frac{\omega}{2}} \\ &= \frac{4\pi i}{kg\omega} \lim \sum_{m=-m'+1}^{m=m'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} \frac{(-1)^n}{\frac{2\pi z}{\omega} - 2\pi(2m-1)\rho - n\pi} \\ &= \frac{4\pi i}{kg\omega} \lim \sum_{m=-m'+1}^{m=m'} \frac{1}{\sin\left[\frac{2\pi z}{\omega} - (2m-1)2\pi\rho\right]} \\ &= \frac{4\pi i}{kg\omega} \left\{ \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + 2\pi\rho\right)} + \sum_{m=1}^{m=m'} \left[ \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} - (2m-1)2\pi\rho\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + (2m+1)2\pi\rho\right)} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4\pi i}{kg\omega} \left\{ \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + 2\pi\rho\right)} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{2\sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + 2\pi\rho\right) \cos 4m\pi\rho}{\sin\left[\frac{2\pi z}{\omega} - (2m-1)2\pi\rho\right] \sin\left[\frac{2\pi z}{\omega} + (2m+1)2\pi\rho\right]} \right\} \\
 &= \frac{16\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + 2\pi\rho\right)}{kg\omega} \left\{ \frac{1}{2\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi z}{\omega} + 4\pi\rho\right)\right]} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\cos 4m\pi\rho}{\cos 8m\pi\rho - \cos\left(\frac{4\pi z}{\omega} + 4\pi\rho\right)} \right\} \\
 &= \frac{16\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + 2\pi\rho\right)}{kg\omega} \left\{ \frac{1}{2\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi z}{\omega} + 4\pi\rho\right)\right]} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\cos 4m\pi\rho}{\cos 8m\pi\rho - \cos\left(\frac{4\pi z}{\omega} + 4\pi\rho\right)} \right\},
 \end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned}
 (z) &= \frac{16\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + \pi\rho\right)}{kg\omega} \left\{ \frac{1}{2\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi z}{\omega} + 2\pi\rho\right)\right]} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\cos 4m\pi\rho}{\cos 8m\pi\rho - \cos\left(\frac{4\pi z}{\omega} + 2\pi\rho\right)} \right\} \\
 &= \frac{8\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + \pi\rho\right)}{kg\omega} \left\{ \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{2\pi z}{\omega} + \pi\rho\right)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\cos 4m\pi\rho}{\sin\left[\frac{2\pi z}{\omega} - (4m-1)\pi\rho\right] \sin\left[\frac{2\pi z}{\omega} + (4m+1)\pi\rho\right]} \right\}.
 \end{aligned}$$

14. Autre développement. — Comme on a

$$\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = \frac{\pi i}{kg\omega'} \lim_{n=-n'}^{n=n'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} (-1)^n \sum_{m=-m'+1}^{m=m'} \frac{1}{\frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{4\rho} - m\pi} \quad \text{et} \quad \cot z = \lim_{m=-m'}^{m=m'} \sum_{m=-m'}^{m=m'} \frac{1}{z - m\pi},$$

il vient

$$\begin{aligned}
 \nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= \frac{\pi i}{kg\omega'} \lim_{n=-n'}^{n=n'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} (-1)^n \cot\left(\frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{4\rho}\right) \\
 &= \frac{\pi i}{kg\omega'} \left\{ \cot\left(\frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left[ \cot\left(\frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{4\rho}\right) + \cot\left(\frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{4\rho}\right) \right] \right\} \\
 &= \frac{\pi i}{kg\omega'} \left\{ \cot\left(\frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{\pi z}{\omega'} + \pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{4\rho}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{4\rho}\right)} \right\};
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
v_1(z) &= \frac{\pi i}{kg\omega'} \left[ \cot\left(\frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos \frac{\pi z}{\omega'} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{\cos \frac{n\pi}{2\rho} + \sin \frac{\pi z}{\omega'}} \right] \\
&= \frac{2\pi i \cos \frac{\pi z}{\omega'}}{kg\omega'} \left[ -\frac{1}{2\left(1 + \sin \frac{\pi z}{\omega'}\right)} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{\cos \frac{n\pi}{2\rho} + \sin \frac{\pi z}{\omega'}} \right] \\
&= \frac{\pi i \cos \frac{\pi z}{\omega'}}{kg\omega'} \left[ -\frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'}\right)} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} + \frac{n\pi}{4\rho}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} - \frac{n\pi}{4\rho}\right)} \right].
\end{aligned}$$

15. Développement de  $\mu_1(z)$ . — Soit considérée la fonction impaire  $\mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$ . Ses infinis ont pour expressions générales

$$z = (2m-1)\omega' + n\omega, \quad z = 2m\omega' + (2n+1)\frac{\omega}{2}.$$

Si l'on fait  $z = (2m-1)\omega' + n\omega + z'$ , on trouve

$$\mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = \mu_1\left(-\frac{\omega'}{2} + z'\right) = \frac{i[1 + \mu(z')]}{\lambda(z')},$$

et pour le résidu

$$\frac{2i}{g} \frac{1}{z - (2m-1)\omega' - n\omega};$$

en faisant

$$z = 2m\omega' + (2n+1)\frac{\omega}{2} + z',$$

on a

$$\mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} + z'\right) = \nu\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) - ki\lambda\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = -i \frac{1 + \mu(z')}{\lambda(z')},$$

et pour le résidu correspondant

$$-\frac{2i}{g} \frac{1}{z - 2m\omega' - (2n+1)\frac{\omega}{2}}.$$

Prenons un contour formé par les droites que déterminent parallèlement aux côtés du parallélogramme élémentaire  $(\omega, 2\omega')$  les points

$$z = -2m'\omega' - \frac{\omega'}{4}, \quad z = 2m'\omega' + \frac{\omega'}{4}$$

et les points

$$z = -(2n' + 1)\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{4}, \quad z = (2n' + 1)\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{4};$$

les valeurs de  $m$  et de  $n$  seront pour les premiers infinis

$$\begin{aligned} m = 0, \quad 1, \quad 2, \dots, \quad m', \quad n = 0, \quad 1, \quad 2, \dots, \quad n', \\ -1, \quad -2, \dots, \quad -m' + 1, \quad -1, \quad -2, \dots, \quad -n', \end{aligned}$$

et pour les seconds

$$\begin{aligned} m = 0, \quad 1, \quad 2, \dots, \quad m', \quad n = 0, \quad 1, \quad 2, \dots, \quad n', \\ -1, \quad -2, \dots, \quad -m', \quad -1, \quad -2, \dots, \quad -n' - 1, \end{aligned}$$

de sorte qu'il s'ensuit

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= \frac{2i}{g} \lim \sum_{m=-m'+1}^{m=m'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} \frac{1}{z - (2m-1)\omega' - n\omega} \\ &\quad - \frac{2i}{g} \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} \sum_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{1}{z - 2m\omega' - (2n+1)\frac{\omega}{2}}. \end{aligned}$$

De là, d'abord,

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= \frac{2\pi i}{\omega g} \lim \sum_{m=-m'+1}^{m=m'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} \frac{1}{\frac{\pi z}{\omega} - (2m-1)\pi\rho - n\pi} \\ &\quad - \frac{2\pi i}{\omega g} \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} \sum_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{1}{\frac{\pi z}{\omega} - 2m\pi\rho - (2n+1)\frac{\pi}{2}}, \end{aligned}$$

ce qui revient à

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= \frac{2\pi i}{\omega g} \lim_{m=-m'+1}^{m=m'} \cot\left[\frac{\pi z}{\omega} - (2m-1)\pi\rho\right] + \frac{2\pi i}{\omega g} \lim_{m=-m'}^{m=m'} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi z}{\omega} - 2m\pi\rho\right) \\ &= \frac{2\pi i}{\omega g} \left[ \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{2 \sin \frac{2\pi z}{\omega}}{\cos(2m-1)2\pi\rho - \cos \frac{2\pi z}{\omega}} + \operatorname{tang} \frac{\pi z}{\omega} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{2 \sin \frac{2\pi z}{\omega}}{\cos 4m\pi\rho + \cos \frac{2\pi z}{\omega}} \right] \\ &= \frac{4\pi i \sin \frac{2\pi z}{\omega}}{\omega g} \left[ \frac{\frac{1}{2}}{1 + \cos \frac{2\pi z}{\omega}} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{\cos m 2\pi\rho + (-1)^m \cos \frac{2\pi z}{\omega}} \right]; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu_1(z) &= \frac{4\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)}{\omega g} \left\{ \frac{\frac{1}{2}}{1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{\cos m 2\pi\rho + (-1)^m \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)} \right\} \\ &= \frac{2\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)}{\omega g} \left\{ \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2}\right)} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2} - 2m\pi\rho\right) \cos\left(\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2} + 2m\pi\rho\right)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{\sin\left[\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2} - (2m-1)\pi\rho\right] \sin\left[\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2} + (2m-1)\pi\rho\right]} \right\} \\ &= \frac{2\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)}{\omega g} \left\{ \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2}\right)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{\cos\left[\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2} - m\left(\pi\rho + \frac{\pi}{2}\right)\right] \cos\left[\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2} + m\left(\pi\rho + \frac{\pi}{2}\right)\right]} \right\} \end{aligned}$$

16. Autre développement. — On a également

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= \frac{\pi i}{\omega' g} \lim_{m=-m'+1}^{m=m'} \sum_{n=-n'}^{n=n'} \frac{1}{\frac{\pi z}{2\omega'} - 2n \frac{\pi}{4\rho} - (2m-1) \frac{\pi}{2}} \\ &\quad - \frac{\pi i}{\omega' g} \lim_{m=-m'}^{m=m'} \sum_{n=-n'-1}^{n=n'} \frac{1}{\frac{\pi z}{2\omega'} - (2n+1) \frac{\pi}{4\rho} - m\pi} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\pi i}{\omega' g} \lim \left\{ \sum_{n=-n'}^{n=n'} \operatorname{tang} \left( \frac{\pi z}{2\omega'} - 2n \frac{\pi}{4\rho} \right) + \sum_{n=-n'-1}^{n=n'} \operatorname{cot} \left[ \frac{\pi z}{2\omega'} - (2n+1) \frac{\pi}{4\rho} \right] \right\} \\
 &= -\frac{\pi i}{\omega' g} \left[ \operatorname{tang} \frac{\pi z}{2\omega'} + 2 \sin \frac{\pi z}{\omega'} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\cos \frac{\pi z}{\omega'} + \cos \frac{n\pi}{\rho}} + 2 \sin \frac{\pi z}{\omega'} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\cos(2n+1) \frac{\pi}{2\rho} - \cos \frac{\pi z}{\omega'}} \right] \\
 &= -\frac{2\pi i \sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\omega' g} \left[ -\frac{\frac{1}{2}}{1 + \cos \frac{\pi z}{\omega'}} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\cos \frac{n\pi}{2\rho} + (-1)^n \cos \frac{\pi z}{\omega'}} \right];
 \end{aligned}$$

d'où

$$\mu_1(z) = \frac{2\pi i \cos \frac{\pi z}{\omega'}}{\omega' g} \left[ -\frac{\frac{1}{2}}{1 + \sin \frac{\pi z}{\omega'}} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\cos \frac{n\pi}{2\rho} + (-1)^n \sin \frac{\pi z}{\omega'}} \right].$$

17. *Développement de  $\lambda_1(z)$ .* — Soit considérée la fonction impaire  $\lambda_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$ , dont les infinis sont donnés par

$$\frac{\omega'}{2} + z = (2m+1) \frac{\omega'}{2} + n\omega,$$

de sorte que l'expression générale en est

$$z = m\omega' + n\omega.$$

Si l'on fait  $z = m\omega' + n\omega + z'$ , il vient

$$\lambda_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = (-1)^m \lambda_1\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = (-1)^m \frac{-\mu(z') - \nu(z')}{k' \lambda(z')},$$

et pour le résidu

$$\frac{-2i}{k' g} (-1)^m.$$

Soit un contour semblable aux précédents, passant aux points  $z = -n'\omega$ ,  $z = n'\omega$ , et aux points  $z = -m'\omega'$ ,  $z = m'\omega'$ ; nous aurons

$$\lambda_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = -\frac{2i}{k' g} \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} (-1)^m \sum_{n=-n'}^{n=n'} \frac{1}{z - m\omega' - n\omega};$$

d'où, d'abord,

$$\begin{aligned} \lambda_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= -\frac{2\pi i}{k'\omega g} \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} (-1)^m \sum_{n=-n'}^{n=n'} \frac{1}{\frac{\pi z}{\omega} - m\pi\rho - n\pi} \\ &= -\frac{2\pi i}{k'\omega g} \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} (-1)^m \cot\left(\frac{\pi z}{\omega} - m\pi\rho\right) \\ &= -\frac{2\pi i}{k'\omega g} \left[ \cot\frac{\pi z}{\omega} + \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m \frac{2\sin\frac{2\pi z}{\omega}}{\cos m 2\pi\rho - \cos\frac{2\pi z}{\omega}} \right] \\ &= -\frac{4\pi i \sin\frac{2\pi z}{\omega}}{k'\omega g} \left[ -\frac{\frac{1}{2}}{1 - \cos\frac{2\pi z}{\omega}} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{\cos m 2\pi\rho - \cos\frac{2\pi z}{\omega}} \right]; \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} \lambda_1(z) &= -\frac{4\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)}{k'\omega g} \left[ -\frac{\frac{1}{2}}{1 - \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{\cos m 2\pi\rho - \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)} \right] \\ &= -\frac{2\pi i \sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)}{k'\omega g} \left\{ -\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{\pi z}{\omega} - \frac{\pi\rho}{2}\right)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{\sin\left[\frac{\pi z}{\omega} - (2m+1)\frac{\pi\rho}{2}\right] \sin\left[\frac{\pi z}{\omega} + (2m-1)\frac{\pi\rho}{2}\right]} \right\}. \end{aligned}$$

18. *Autre développement.* — On a encore

$$\lambda_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = -\frac{2\pi i}{k'\omega'g} \lim \sum_{n=-n'}^{n=n'} \sum_{m=-m'}^{m=m'} (-1)^m \frac{1}{\frac{\pi z}{\omega'} - \frac{n\pi}{\rho} - m\pi},$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= -\frac{2\pi i}{h'\omega'g} \lim \sum_{n=-n'}^{n=n'} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi z}{\omega'} - \frac{n\pi}{\rho}\right)} \\ &= -\frac{2\pi i}{h'\omega'g} \left( \frac{1}{\sin\frac{\pi z}{\omega'}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{4 \sin\frac{\pi z}{\omega'} \cos\frac{n\pi}{\rho}}{\cos 2\frac{n\pi}{\rho} - \cos\frac{2\pi z}{\omega'}} \right) \\ &= -\frac{8\pi i \sin\frac{\pi z}{\omega'}}{h'\omega'g} \left( -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{\rho}}{\cos\frac{2n\pi}{\rho} - \cos\frac{2\pi z}{\omega'}} \right), \end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned} \lambda_1(z) &= \frac{8\pi i \cos\frac{\pi z}{\omega'}}{h'\omega'g} \left( -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{\rho}}{\cos\frac{2n\pi}{\rho} + \cos\frac{2\pi z}{\omega'}} \right) \\ &= \frac{4\pi i \cos\frac{\pi z}{\omega'}}{h'\omega'g} \left[ -\frac{1}{2 \cos^2\frac{\pi z}{\omega'}} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{\rho}}{\cos\left(\frac{\pi z}{\omega'} + \frac{n\pi}{\rho}\right) \cos\left(-\frac{\pi z}{\omega'} + \frac{n\pi}{\rho}\right)} \right]. \end{aligned}$$

IV.

*Développement en fonctions circulaires.*

19. Soit considérée la fonction impaire  $\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$ . Si l'on prend pour variable  $t = e^{\frac{2\pi zi}{\omega}}$ , il correspondra à une valeur de  $z$  une seule valeur de  $t$ , et à une valeur de  $t$  des valeurs de  $z$  ayant pour expression générale

$$z = z_1 + m\omega;$$

les valeurs correspondantes de  $\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  sont les mêmes. En conséquence,  $\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  est une fonction monodrome de  $t$ .

Cette fonction a des infinis dont l'expression est

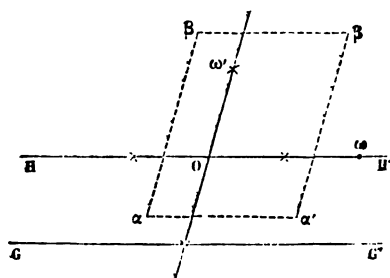
$$z = (2m - 1)\omega' + n \frac{\omega}{2}.$$

Elle sera donc d'un module fini pour tout point situé à l'intérieur de la bande limitée aux droites menées par les points  $z' = (2m - 1)\omega'$ ,  $z'' = (2m + 1)\omega'$  parallèlement au côté  $\omega$  du parallélogramme élémentaire  $(\omega, 2\omega')$ . Pour une valeur de  $t$  correspondante, il y aura ainsi une valeur finie de la fonction et une seule, de sorte que  $\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  est, dans l'étendue que comprennent les deux droites, une fonction monodrome et finie de  $t$ . Elle y est donc développable en une série procédant suivant les puissances croissantes et décroissantes de  $t$ .

Le champ des valeurs correspondantes de  $t$  est d'ailleurs une couronne circulaire, ce qu'il est aisé de voir. Lorsque  $z$  s'accroît de  $\frac{\omega}{2}$ , la fonction  $\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  change de signe,  $t$  le fait aussi : d'après quoi la fonction change de signe en même temps que  $t$ , sans que  $z$  sorte d'une même bande, sans que le développement change de forme; elle est donc une fonction impaire de  $t$ .

Prenons, au lieu d'une bande quelconque, celle qui répond à  $m = 0$ .

Fig. 1.



limitée aux droites  $GG'$ ,  $HH'$  (*fig. 1*) qui passent par les points  $z = -\omega'$ ,  $z = \omega'$ . La valeur de  $z$  y sera susceptible de changer de signe. Or,  $t$  se changeant par là en  $\frac{1}{t}$  ou  $e^{\frac{2\pi zi}{\omega}}$  en  $e^{-\frac{2\pi zi}{\omega}}$ , et  $\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  changeant de signe aussi, il s'ensuit que dans le développement les coefficients des

puissances ascendantes sont respectivement égaux et de signes contraires à ceux des puissances descendantes, c'est-à-dire qu'on a, pour la bande dont il s'agit,

$$\nu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z \right) = \sum_{p=0}^{p=\infty} A_p \left[ e^{(2p+1) \frac{2\pi z i}{\omega}} - e^{-(2p+1) \frac{2\pi z i}{\omega}} \right].$$

Si l'on multiplie par  $e^{(2p+1) \frac{2\pi z}{\omega}}$  tous les termes de cette égalité, puis par  $dz$  et qu'on intègre de  $z = \alpha$ , en ligne droite par exemple, jusqu'à  $z = \alpha + \omega$ , le point  $z = \alpha$  étant dans la bande que nous considérons, il ne reste au second membre que

$$- \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} A_p dz = - A_p \omega.$$

On a donc

$$A_p = - \frac{1}{\omega} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \nu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z \right) e^{(2p+1) \frac{2\pi z i}{\omega}} dz.$$

Pour l'intégration, nous pouvons remplacer le segment  $\alpha\alpha'$  de longueur  $\omega$  par un parallélogramme où ce segment soit un côté, l'opposé  $\beta\beta'$  passe au point  $z = 2p'\omega'$ , et où les deux autres soient parallèles à  $\omega'$ , pourvu que  $\beta\beta'$  soit supposé infiniment loin, du côté de  $\omega'$ , si le module de  $q = e^{2\pi\rho'}$  est  $< 1$ , ou  $\rho'' > 0$  dans  $\rho = \rho' + \rho''i$ , et du côté de  $-\omega'$  dans le cas contraire. Les valeurs de  $\nu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z \right)$  étant les mêmes quand  $z$  s'accroît de  $\omega$ , les éléments de l'intégrale se détruiront sur les côtés  $\alpha'\beta'$ ,  $\beta\alpha$ ; de plus, si l'on pose  $z = 2p'\omega' + z'$ , on a

$$e^{(2p+1) \frac{2\pi z i}{\omega}} = e^{(2p+1) 2\pi 2p' \rho' i} e^{(2p+1) \frac{2\pi z' i}{\omega}} = q^{(2p+1) 2p'} e^{(2p+1) \frac{2\pi z' i}{\omega}},$$

de sorte que le module de  $q^{(2p+1) 2p'}$ ,  $p$  étant  $> 0$ , tend vers zéro, quand  $p'$  va vers  $+\infty$ , si le module de  $q$  est  $< 1$ , et quand  $p'$  tend vers  $-\infty$ , si le module de  $q$  est  $> 1$ . L'intégrale suivant  $\alpha\alpha'$  est donc la limite de celle qu'on obtient en parcourant le contour du parallélogramme. Cette dernière peut s'obtenir au moyen des infinis de  $\nu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z \right)$  qui sont

renfermées dans le contour. Ces infinis sont sur deux lignes. Supposons le module de  $q < 1$  : nous pouvons supposer  $\alpha$  tel que les infinis soient donnés, les uns par  $z = (2m-1)\omega'$ ,  $m$  recevant les valeurs  $0, 1, 2, 3, \dots$ , les autres donnés par  $z = (2m-1)\omega' + \frac{\omega}{2}$  pour les mêmes valeurs de  $m$ . Dans le passage des premiers aux seconds, les valeurs de  $\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  changent de signe, ainsi que celles du facteur  $e^{\frac{2\pi zi}{\omega}(2p+1)}$ ; les résidus sont les mêmes.

En posant  $z = (2m-1)\omega' + z'$ , on trouve

$$\begin{aligned} \nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) e^{(2p+1)\frac{2\pi zi}{\omega}} dz &= \nu_1\left(-\frac{\omega'}{2} + z'\right) e^{(2p+1)2\pi i\left[(2m-1)\frac{\omega'}{2} + \frac{z'}{\omega}\right]} \\ &= \frac{1 + \nu z'}{k} i \frac{dz'}{z'} e^{(2p+1)2\pi i\left[(2m-1)\frac{\omega'}{2} + \frac{z'}{\omega}\right]}, \end{aligned}$$

et pour le résidu

$$\frac{2i}{kg} e^{(2p+1)(2m-1)2\pi i} = \frac{2i}{kg} q^{(2p+1)(2m-1)},$$

ou pour l'intégrale autour du point

$$-\frac{4\pi}{kg} q^{(2p+1)(2m-1)},$$

et de là

$$A_p = \frac{8\pi}{k\omega g} \sum_{m=1}^{\infty} q^{(2p+1)(2m-1)} = \frac{8\pi}{k\omega g} \frac{q^{2p+1}}{1 - q^{2(2p+1)}},$$

puis

$$\nu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = \frac{8\pi}{k\omega g} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{q^{2p+1}}{1 - q^{2(2p+1)}} \left[ e^{(2p+1)\frac{2\pi zi}{\omega}} - e^{-(2p+1)\frac{2\pi zi}{\omega}} \right],$$

tant que le point  $z$  est entre  $GG'$  et  $HH'$ , le module de  $q$  étant  $< 1$ .

Si l'on remplace  $z + \frac{\omega'}{2}$  par  $z$ , il vient, pour les valeurs de  $z$  com-

prises entre les droites de direction  $\omega$  menées aux points  $z = -\frac{\omega'}{2}$ ,  
 $z = \frac{3\omega'}{2}$ ,

$$v_1(z) = \frac{8\pi}{k\omega g} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{q^{2p+1}}{1-q^{2(2p+1)}} \left[ e^{(2p+1)\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)} - e^{-(2p+1)\left(\frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho\right)} \right],$$

ou sous une autre forme

$$v_1(z) = \frac{16\pi i}{k\omega g} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{q^{2p+1}}{1-q^{2(2p+1)}} \sin(2p+1) \left( \frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho \right).$$

Pour la bande comprise entre les droites qui déterminent les points  $z = (4m-1)\frac{\omega'}{2}$ ,  $z = (4m+3)\frac{\omega'}{2}$ ,  $z$  doit se remplacer, dans cette formule, par  $z - 2m\omega'$ , ce qui donne

$$v_1(z) = \frac{16\pi i}{k\omega g} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{q^{2p+1}}{1-q^{2(2p+1)}} \sin(2p+1) \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi\rho \right].$$

*Remarque.* — Pour une bande s'étendant de  $z = -\frac{\omega'}{2}$  à  $z = \frac{\omega'}{2}$ , on aura

$$v_1(z) \pm v_1(-z) = \frac{16\pi i}{k\omega g} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{q^{2p+1}}{1-q^{2(2p+1)}} \left[ \sin(2p+1) \left( \frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho \right) \mp \sin(2p+1) \left( \frac{2\pi z}{\omega} + \pi\rho \right) \right];$$

d'où

$$\mu(z) = -\frac{16\pi i}{k\omega g} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{q^{2p+1}}{1-q^{2(2p+1)}} \sin(2p+1) \pi\rho \cos(2p+1) \frac{2\pi z}{\omega},$$

puis

$$\lambda(z) = \frac{16\pi}{k\omega g} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{q^{2p+1}}{1-q^{2(2p+1)}} \cos(2p+1) \pi\rho \sin(2p+1) \frac{2\pi z}{\omega}.$$





le contour d'un parallélogramme ayant pour côtés  $\alpha\alpha'$ , deux parallèles à  $O\omega'$  et une droite  $\beta\beta'$  se prenant du côté de  $\omega'$  indéfiniment loin. Les infinis compris dans ce contour pourront répondre à  $m = 1, 2, 3, \dots$ , pour  $z = (2m - 1)\omega'$  et à  $m = 0, 1, 2, \dots$ , pour  $z = m2\omega' + \frac{\omega}{2}$ . Évaluons les intégrales qui s'y rapportent. Si l'on pose

$$z = (2m - 1)\omega' + z',$$

il vient

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) e^{-p\frac{2\pi z}{\omega}} dz &= \mu_1\left(-\frac{\omega'}{2} + z'\right) e^{-p(2m-1)2\pi i - p\frac{2\pi z'}{\omega}} dz' \\ &= \mu_1\left(-\frac{\omega'}{2} + z\right) q^{-p(2m-1)} e^{-p\frac{2\pi z'}{\omega}} dz' \\ &= \frac{1 + \mu(z')}{\lambda(z')} iq^{-p(2m-1)} e^{-p\frac{2\pi z'}{\omega}} dz'; \end{aligned}$$

d'où, pour l'intégrale partielle,

$$-\frac{4\pi}{g} q^{-p(2m-1)},$$

et pour la somme des intégrales

$$\sum_{m=1}^{\infty} -\frac{4\pi}{g} q^{-p(2m-1)} = \frac{-4\pi}{g} \frac{q^{-p}}{1 - q^{-2p}}.$$

En prenant  $z = 2m\omega' + \frac{\omega}{2} + z'$ , on a

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) e^{-p\frac{2\pi z}{\omega}} dz &= \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z' + \frac{\omega}{2}\right) e^{-p2\pi i 2m - p\pi i - p\frac{2\pi z'}{\omega}} dz' \\ &= (-1)^p \frac{1 + \mu(z')}{\lambda(z')} ie^{-p2\pi i 2m} e^{-p\frac{2\pi z'}{\omega}} dz' \\ &= (-1)^p \frac{1 + \mu(z')}{\lambda(z')} iq^{-2pm} e^{-p\frac{2\pi z'}{\omega}} dz'; \end{aligned}$$

d'où, pour l'intégrale,

$$\frac{(-1)^p q^{-2mp}}{g} 4\pi,$$

et pour la somme

$$(-1)^p \frac{4\pi}{g} \sum_{m=0}^{\infty} q^{-2mp} = (-1)^p \frac{4\pi}{g} \frac{1}{1-q^{-2p}}.$$

Par suite

$$\Lambda_p = \frac{4\pi}{\omega g} \frac{(-1)^p - q^{-p}}{1 - q^{-2p}};$$

c'est, au cas de  $p$  impair,

$$\Lambda_p = -\frac{4\pi}{\omega g} \frac{1}{1 - q^{-p}},$$

et au cas de  $p$  pair,

$$\Lambda_p = \frac{4\pi}{\omega g} \frac{1}{1 + q^{-p}},$$

ou, dans tous les cas,

$$\Lambda_p = \frac{4\pi}{\omega g} \frac{(-1)^{-p}}{1 + (-q)^{-p}}.$$

Soit, en second lieu,  $p > 0$ , le module de  $q < 1$ . Alors  $\beta\beta'$  est à prendre du côté de  $-\omega'$ , de sorte que pour  $z = (2m-1)\omega'$  les valeurs de  $m$  sont  $0, -1, -2, \dots$  et pour  $z = 2m\omega'$  elles sont  $m = -1, -2, \dots$ . Mais les intégrations autour des infinis s'opèrent là en sens contraire de celles qui concernent les circonstances précédentes, il y a un changement de signe à faire; les résultats sont donc, d'une part,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4\pi}{g} q^{-p(2m+1)} = \frac{4\pi}{g} \frac{q^p}{1 - q^{2p}},$$

de l'autre

$$\sum_{m=-1}^{\infty} -\frac{4\pi}{g} (-1)^p q^{-2mp} = -\frac{4\pi}{g} (-1)^p \frac{q^{2p}}{1 - q^{2p}};$$

d'où

$$\Lambda_p = \frac{4\pi}{\omega g} \frac{q^p - (-1)^p q^{2p}}{1 - q^{2p}} = \frac{4\pi}{\omega g} q^p \frac{1 - (-q)^p}{1 - (-q)^{2p}} = \frac{4\pi}{\omega g} q^p \frac{1}{1 + (-q)^p}.$$

De là

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) &= \Lambda_0 + \frac{4\pi}{\omega g} \left[ \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{q^p}{(1+(-q)^p)} e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} + \sum_{p=-1}^{p=-\infty} \frac{(-1)^{-p}}{1+(-q)^{-p}} e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} \right] \\ &= \Lambda_0 + \frac{4\pi}{\omega g} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{q^p e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} + (-1)^p e^{-p \frac{2\pi z i}{\omega}}}{1+(-q)^p} \\ &= \Lambda_0 + \frac{4\pi}{\omega g} \sum_{p=1}^{p=\infty} \left[ \frac{q^p + (-1)^p}{1+(-q)^p} \cos p \frac{2\pi z}{\omega} + i \frac{q^p - (-1)^p}{1+(-q)^p} \sin p \frac{2\pi z}{\omega} \right] \\ &= \Lambda_0 + \frac{4\pi}{\omega g} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \left[ \cos p \frac{2\pi z}{\omega} - i \frac{1 - (-q)^p}{1+(-q)^p} \sin p \frac{2\pi z}{\omega} \right]. \end{aligned}$$

Il nous reste à trouver la valeur de

$$\omega \Lambda_0 = \int_x^{\alpha+\omega} \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) dz.$$

Considérons pour cela un parallélogramme ayant  $\alpha\alpha'$  pour côté et l'origine O pour centre. Comme la fonction  $\mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = i \frac{1-\mu(z)}{\lambda(z)}$  est impaire, ses valeurs seront égales et de signes contraires aux points symétriques l'un de l'autre sur les côtés  $\alpha\alpha'$ ,  $\alpha, \alpha'_1$  opposés; par suite l'intégrale le long du contour sera

$$2 \int_x^{\alpha+\omega} \mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) dz.$$

Le parallélogramme ne contient qu'un infini, par exemple  $\frac{\omega}{2}$ . Or, en posant  $z = \frac{\omega}{2} + z'$ , on a

$$\int \mu\left(\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} + z'\right) dz' = -i \int \frac{1+\mu(z')}{\lambda(z')} dz' = -\frac{2i}{g} 2\pi i = \frac{4\pi}{g}.$$

Donc

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \mu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z \right) dz = \frac{2\pi}{g},$$

$$A_0 = \frac{2\pi}{\omega g},$$

$$\mu_1 \left( \frac{\omega'}{2} + z \right) = \frac{2\pi}{\omega g} \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \left[ \cos p \frac{2\pi z}{\omega} - i \frac{1 - (-q)^p}{1 + (-q)^p} \sin p \frac{2\pi z}{\omega} \right] \right\},$$

et de là

$$\mu_1(z) = \frac{2\pi}{\omega g} \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \left[ \cos p \left( \frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho \right) - i \frac{1 - (-q)^p}{1 + (-q)^p} \sin p \frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho \right] \right\},$$

pour la bande qui s'étend entre le point  $z = -\frac{\omega'}{2}$  et le point  $z = \frac{\omega'}{2}$ ,  
puis

$$\mu_1(z) = \frac{2\pi i}{\omega g} \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \left( \cos p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi\rho \right] - i \frac{1 - (-q)^p}{1 + (-q)^p} \sin p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi\rho \right] \right) \right\}$$

quand la bande va du point  $z = (4m-1)\frac{\omega'}{2}$  au point  $(4m+1)\frac{\omega'}{2}$ .

**21. Développement de  $\lambda_1(z)$ .** — Soit la fonction  $\lambda_1(z) = \frac{\nu(z) + k\mu(z)}{k'}$ ;

elle est paire et a pour infinis  $z = (2m+1)\frac{\omega'}{2} + n\omega$ , de sorte qu'elle est de valeur finie pour tous les points situés à l'intérieur de la bande qui est limitée aux droites de direction  $\omega$  menées par les points  $z = (2m-1)\frac{\omega'}{2}$ ,  $z = (2m+1)\frac{\omega'}{2}$ .

Considérons d'abord la bande pour laquelle  $m = 0$ , allant du point  $z = -\frac{\omega'}{2}$  au point  $z = \frac{\omega'}{2}$ . On y aura

$$\lambda_1(z) = \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p \left( e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} + e^{-p \frac{2\pi z i}{\omega}} \right) + A_0;$$

d'où

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \lambda_1(z) dz = A_0 \omega \quad \text{et} \quad \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \lambda_1(z) e^{p \frac{2\pi zi}{\omega}} dz = \omega A_p, \quad p \leq 0.$$

La dernière intégrale peut s'évaluer par les infinis que donne  $z = (2m+1) \frac{\omega'}{2}$ ,  $m$  allant de zéro à l'infini, si le module de  $q$  est  $< 1$ .

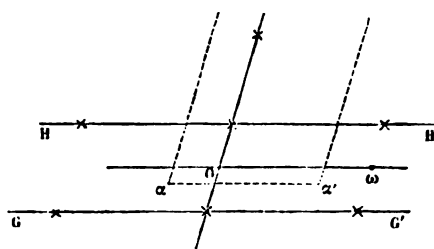
On trouve ainsi

$$\omega A_p = \frac{4\pi}{k'g} q^{\frac{p}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{pm} = \frac{4\pi}{k'g} q^{\frac{p}{2}} \frac{1}{1+q^p},$$

$$A_p = \frac{4\pi}{k'\omega g} \frac{q^{\frac{p}{2}}}{1+q^p}, \quad p \geq 0.$$

D'autre part, si l'on considère le parallélogramme  $\alpha\alpha'\alpha_1\alpha_1'$ , où le

Fig. 3.



côté  $\alpha\alpha_1$ , de longueur  $\omega'$  est parallèle à  $O\omega'$ , la fonction  $\lambda_1(z)$  changeant de signe, quand  $z$  varie de  $\omega'$ , l'intégrale suivant le contour de ce parallélogramme sera  $2 \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \lambda_1(z) dz$ . Comme il ne s'y trouve qu'un infini,  $z = \frac{\omega'}{2}$ , et que par  $z = \frac{\omega'}{2} + z'$  on a

$$\lambda_1(z) dz = -i \frac{\mu(z') + \nu(z')}{h' \lambda(z')} dz',$$

il s'ensuit

$$2 \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \lambda_1(z) dz = \frac{4\pi}{k'g}.$$

Donc il vient

$$A_0 = \frac{2\pi}{k'\omega g},$$

et ainsi

$$\lambda_1(z) = \frac{2\pi}{h'\omega g} \left( 1 + 4 \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{q^p}{1+q^p} \cos p \frac{2\pi z}{\omega} \right).$$

Par le changement de  $z$  en  $z + \frac{\omega}{2}$ , on a dans la même bande

$$\frac{1}{\lambda_1(z)} = \frac{2\pi}{h'\omega g} \left[ 1 + 4 \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \frac{q^p}{1+q^p} \cos p \frac{2\pi z}{\omega} \right];$$

d'où

$$\nu(z) = \frac{2\pi}{\omega g} \left[ 1 + 4 \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{q^p}{1+q^{2p}} \cos 2p \frac{2\pi z}{\omega} \right],$$

$$\mu(z) = \frac{8\pi q^{\frac{1}{2}}}{h'\omega g} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{q^p}{1+q^{2p+1}} \cos(2p+1) \frac{2\pi z}{\omega},$$

formules connues (Traité de MM. Briot et Bouquet, nos 156, 157).

Pour la bande comprise entre les points  $z = (2m-1)\frac{\omega'}{2}$ ,  $(2m+1)\frac{\omega'}{2}$ , l'expression de  $\lambda_1(z)$  sera

$$\lambda_1(z) = \frac{2\pi}{h'\omega g} \left[ 1 + 4 \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{q^p}{1+q^p} \cos p \left( \frac{2\pi z}{\omega} - m 2\pi\rho \right) \right].$$

#### DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS $\varpi_1(z)$ , $\varpi_2(z)$ , $\varpi_3(z)$ .

#### V.

##### *Développements en produits de facteurs.*

22. Nous avons trouvé, en supposant positif le coefficient de  $i$  dans l'expression de  $\rho$ ,

$$\nu_1(z) = e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \left[ (4n-3)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right] \sin \left[ (4n-1)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right]}{\sin \left[ (4n-3)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega} \right] \sin \left[ (4n-1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega} \right]};$$

nous avons obtenu, d'autre part,

$$\mu_1(z) = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tang}\left[(4n-1)\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right] \operatorname{tang}\left[(4n+1)\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right]}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tang}\left[(4n-1)\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right] \operatorname{tang}\left[(4n+1)\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right]}.$$

On en déduit

$$\omega_1(z) = e^{\frac{\pi z i}{\omega}} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right) \cos^2\left(3\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right) \cos^2\left(5\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right) \dots \lim \frac{\sin\left[(4n-1)\pi\rho + \frac{2\pi z}{\omega}\right]}{\sin\left[(4n-1)\pi\rho - \frac{2\pi z}{\omega}\right]},$$

d'où

$$\begin{aligned} \omega_1(z) &= e^{-\frac{\pi z i}{\omega}} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \cos^2\left[(4n-1)\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right] \cos^2\left[(4n+1)\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right]}{\cos^2\left(\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \cos^2\left[(4n-1)\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right] \cos^2\left[(4n+1)\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right]} \\ &= e^{-\frac{\pi z i}{\omega}} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\sin\pi\rho \sin\frac{2\pi z}{\omega}}{\cos\left[(4n-1)\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right] \cos\left[(4n+1)\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right]}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2\sin\pi\rho \sin\frac{2\pi z}{\omega}}{\cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} + \pi\rho\right) + \cos 4n\pi\rho}\right)}. \end{aligned}$$

Au moyen de l'expression de  $\lambda_1(z)$ ,

$$\lambda_1(z) = \frac{1+k}{h'} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{col}\left[(2n+1)\frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega}\right] \operatorname{col}\left[(2n+1)\frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega}\right]}{\operatorname{col}^2(2n+1)\frac{\pi\rho}{2}},$$

on obtient ensuite

$$\begin{aligned}
 \omega_2(z) &= \frac{k'}{1+k} \prod_{n=0}^{n=\infty} \frac{\operatorname{tang}^2 \left[ (4n-1) \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right]}{\operatorname{tang}^2 (4n-1) \frac{\pi\rho}{2}} \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{\operatorname{tang}^2 \left[ (4n+1) \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right]}{\operatorname{tang}^2 (4n+1) \frac{\pi\rho}{2}} \\
 &= \frac{k'}{1+k} \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ 1 + \frac{\sin \frac{\pi z}{\omega}}{\cos \left[ (4n-1) \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right] \sin (4n-1) \frac{\pi\rho}{2}} \right\}^2 \\
 &\quad \times \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{ 1 - \frac{\sin \frac{\pi z}{\omega}}{\cos \left[ (4n+1) \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right] \sin (4n+1) \frac{\pi\rho}{2}} \right\}^2 \\
 &= \frac{k'}{1+k} \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ 1 + \frac{2 \sin \frac{\pi z}{\omega}}{\sin \left[ (4n-1) \pi\rho + \frac{\pi z}{\omega} \right] - \sin \frac{\pi z}{\omega}} \right\}^2 \\
 &\quad \times \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ 1 - \frac{2 \sin \frac{\pi z}{\omega}}{\sin \left[ (4n+1) \pi\rho - \frac{\pi z}{\omega} \right] + \sin \frac{\pi z}{\omega}} \right\}^2
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \omega_3(z) &= \frac{1+k}{k'} e^{\frac{2\pi zi}{\omega}} \frac{\cos^2 \left( \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi z}{\omega} \right) \operatorname{tang}^2 \frac{\pi\rho}{2}}{\sin^2 \left( \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi z}{\omega} \right)} \\
 &\quad \times \prod_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{\sin \left[ (4n-1) \pi\rho - \frac{\pi z}{\omega} \right] + \sin \frac{\pi z}{\omega} \sin \left[ (4n+1) \pi\rho + \frac{\pi z}{\omega} \right] - \sin \frac{\pi z}{\omega}}{\sin \left[ (4n-1) \pi\rho + \frac{\pi z}{\omega} \right] + \sin \frac{\pi z}{\omega} \sin \left[ (4n+1) \pi\rho - \frac{\pi z}{\omega} \right] - \sin \frac{\pi z}{\omega}} \right\}^2,
 \end{aligned}$$

en s'appuyant sur ce que

$$\omega_3(z) = \frac{1}{\omega_1(z) \omega_2(z)}.$$



23. *Autres développements.* — On trouve d'une manière semblable

$$\omega_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{2 \sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\sin \frac{\pi z}{\omega'} + \cos \frac{(2n-1)\pi}{2\rho}} \right],$$

$$\omega_2(z) = \frac{2k'}{1+k} \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right) \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{2n\pi}{2\rho}} \right)^2}{\prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{\sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{(2n-1)\pi}{2\rho}} \right]^2}$$

et

$$\omega_3(z) = \frac{1+k}{2k'} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi z}{2\omega'} \right)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left[ 1 + \frac{\sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{(2n-1)\pi}{2\rho}} \right]^2}{\left( 1 - \frac{\sin \frac{\pi z}{\omega'}}{\cos \frac{2n\pi}{2\rho}} \right)^2}.$$

## VI.

*Développements en sommes de fractions.*

24. Soit considérée la fonction

$$f(z) = \omega_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = igk' \frac{\omega_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)}{\lambda_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)} = -g \frac{k'^2}{k} \frac{[1 - \nu(z)] \lambda(z)}{[1 - \mu(z)] [\mu(z) + \nu(z)]}.$$

C'est une fonction impaire qui n'a que des infinis triples donnés par

$$z = (2p+1) \frac{\omega}{2} + (2q+1)\omega'.$$

Elle est d'une valeur finie sur tout le contour du parallélogramme qui s'étend de

$$z = -p'\omega \text{ à } z = p'\omega \text{ et de } z = -q'2\omega' \text{ à } z = q'2\omega'.$$

Les infinis compris dans le parallélogramme répondront à

$$p = -p', -p'+1, \dots, p'-1 \text{ et à } q = -q', -q'+1, \dots, q'-1.$$

La formule de Cauchy appliquée à la fonction est ainsi

$$f(t) = \varpi' \left( t + \frac{\omega'}{2} \right) = \mathcal{E} \frac{\varpi' \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)}{t - z} = -g \frac{k'^2}{k} \mathcal{E} \frac{[1 - \nu(z)] \lambda(z)}{[1 - \mu(z)] [\mu(z) + \nu(z)] (t - z)}.$$

Posons  $z = (2p+1)\frac{\omega}{2} + (2q+1)\omega' + z'$ ; il viendra

$$f(t) = g \frac{k'^2}{k} \mathcal{E} \frac{[1 + \nu(z')] \lambda(z')}{[1 - \mu(z')] [\mu(z') - \nu(z')] \left[ t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega' - z' \right]}.$$

Comme on a

$$\lambda(z') = g z' \left[ 1 - \frac{z'^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} g^2 (1 + k^2) \dots \right],$$

$$1 + \nu(z') = 2 - \frac{1}{2} g^2 k^2 z'^2 + \frac{k^2 g^4}{2 \cdot 3} \left( 1 + \frac{k^2}{4} \right) z'^4 + \dots,$$

$$[1 - \mu(z')]^{-1} = \frac{2}{g^2 z'^2} \left[ 1 + \frac{g^2}{3} \left( \frac{1}{4} + k^2 \right) z'^2 + \dots \right],$$

$$[\mu(z') - \nu(z')]^{-1} = -\frac{2}{k'^2 g^2 z'^2} \left[ 1 + \frac{g^2 (1 + k^2)}{12} z'^2 + \dots \right],$$

et

$$\left[ t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega' - z' \right]^{-1} \\ = \frac{1}{t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega'} \left[ 1 + \frac{z'}{t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega'} + \frac{z'^2}{(t - \dots)^2} \right],$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned}
 f(t) &= -\frac{4}{hg^2} \mathcal{E} \frac{1}{z'} \left[ -\frac{g^2(1+h^2)}{2 \cdot 3} z^2 - \frac{1}{2} g^2 h^2 + \frac{g^2}{3} \left( \frac{1}{4} + h^2 \right) z + \frac{g^2(1+h^2)}{12} z + \frac{2}{(t-\dots)^2} \right] \frac{1}{t-\dots} \\
 &= -\frac{4}{hg^2} \sum \frac{2}{\left[ t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega' \right]^2} \\
 &= -\frac{4}{hg^2} \sum_{q=-q'}^{q=q'-1} \sum_{p=-p'}^{p=p'-1} \frac{2}{\left[ t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega' \right]^2},
 \end{aligned}$$

$p'$  et  $q'$  allant à  $+\infty$ , d'où

$$f(z) = \varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = -\frac{16\pi^3}{hg^2\omega^2} \sum_{q=-q'}^{q=q'-1} \sum_{p=-p'}^{p=p'-1} \frac{4}{\left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (2q+1)2\pi\rho - (2p+1)\pi \right]^2}.$$

Cela posé, si l'on prend

$$\varphi(z) = \frac{1}{1 + \cos z}, \quad \text{d'où} \quad \varphi'(z) = \frac{\sin z}{(1 + \cos z)^2},$$

on aura

$$\varphi'(t) = \mathcal{E} \frac{\sin z}{(1 + \cos z)^2} \frac{1}{t-z},$$

les ĩnfinis étant triples,  $z = (2p+1)\pi$ , de sorte que

$$\begin{aligned}
 \varphi'(t) &= \mathcal{E} \frac{-z' + \frac{z'^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots}{\left( \frac{z'^2}{1 \cdot 2} - \frac{z'^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right)^2} \frac{1}{t - (2p+1)\pi - z'} \\
 &= \mathcal{E} \frac{4}{z'} \left\{ \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 2} - \frac{1}{[t - (2p+1)\pi]^2} \right\} \frac{1}{t-\dots} \\
 &= -4 \sum_{p=-p'}^{p=p'-1} \frac{1}{[t - (2p+1)\pi]^2},
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{\sin z}{(1 + \cos z)^2} = -4 \sum_{p=-p'}^{p=p'-1} \frac{1}{[z - (2p+1)\pi]^2}.$$

D'après quoi

$$\begin{aligned} \omega_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) &= \frac{16\pi^3}{kg^2\omega^2} \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{q=-q'}^{q=q'-1} \frac{\sin \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (2q+1)2\pi\rho \right]}{\left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi z}{\omega} - (2q+1)2\pi\rho \right) \right]^2} \\ &= \frac{16\pi^3}{kg^2\omega^2} \left\{ \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\sin \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (2q-1)2\pi\rho \right]}{\left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi z}{\omega} - (2q-1)2\pi\rho \right) \right]^2} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\sin \left[ \frac{2\pi z}{\omega} + (2q-1)2\pi\rho \right]}{\left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi z}{\omega} + (2q-1)2\pi\rho \right) \right]^2} \right\} \end{aligned}$$

et de là

$$\omega_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = \frac{4\pi^2}{kg^2\omega^2} \left\{ \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} - (2q-1)\pi\rho \right]} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} + (2q-1)\pi\rho \right]} \right\} + \frac{A_1}{k}.$$

ou

$$h\omega_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = \frac{1-\nu(z)}{1-\mu(z)} = \frac{4\pi^2}{g^2\omega^2} \sum_{q=1}^{q=\infty} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} - (2q-1)\pi\rho \right]} + \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} + (2q-1)\pi\rho \right]} \right\} + A_1;$$

d'où

$$\begin{aligned} k\omega_1(z) &= \frac{4\pi^2}{g^2\omega^2} \sum_{q=1}^{q=\infty} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} - (4q-1)\frac{\pi\rho}{2} \right]} + \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} + (4q-3)\frac{\pi\rho}{2} \right]} \right\} + A_1 \\ &= \frac{4\pi^2}{g^2\omega^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} + (-1)^q (2q+1)\frac{\pi\rho}{2} \right]} + A_1. \end{aligned}$$

25. *Développements de*  $\varpi_2(z)$ . — Considérons la fonction

$$f(z) = \varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = igk \frac{\varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{\nu_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)} = -gk^2k' \frac{[1 - \mu(z)]\lambda(z)}{[1 - \nu(z)][\mu(z) + \nu(z)]}$$

Les infinis sont triples, ayant pour expression

$$z = (2p + 1)\frac{\omega}{2} + 2q\omega';$$

la fonction est impaire, d'une valeur finie sur le contour du parallélogramme qui s'étend de

$$z = p'\omega' \text{ à } z = p'\omega' \text{ et de } z = -(2q' - 1)\omega' \text{ à } z = (2q' - 1)\omega';$$

et les infinis compris dans ce parallélogramme répondent à

$$p = 0, 1, 2, \dots, p' - 1, \quad -1, -2, \dots, -p'$$

et à

$$q = 0, 1, 2, \dots, q' - 1, \quad \text{puis } -1, -2, \dots, -(q' - 1).$$

La formule de Cauchy donnant

$$f(t) = \varpi_2\left(t + \frac{\omega'}{2}\right) = \mathcal{E} \frac{\varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{t - z} = -gk^2k' \mathcal{E} \frac{[1 - \mu(z)]\lambda(z)}{[1 - \nu(z)][\mu(z) + \nu(z)](t - z)},$$

si l'on y fait  $z = (2p + 1)\frac{\omega}{2} + 2q\omega' + z'$ , devient

$$f(t) = -gk^2k' \mathcal{E} \frac{[1 + \mu(z')]\lambda(z')}{[1 - \nu(z')][\mu(z') - \nu(z')]} \frac{1}{t - (2p + 1)\frac{\omega}{2} - 2q\omega' - z'}$$

$$= \frac{4}{h'g^2} \mathcal{E} \frac{1}{z'} \frac{2}{(t - \dots)^2} = \frac{8}{h'g^2} \lim_{q=-\infty}^{q=q'-1} \sum_{p=-\infty}^{p=p'-1} \frac{1}{\left[t - (2p + 1)\frac{\omega}{2} - 2q\omega'\right]^2};$$

d'où

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \frac{64\pi^3}{h'g^2\omega^3} \lim \sum_{q=-(q'-1)}^{q=q'-1} \sum_{p=-p'}^{p=p'-1} \frac{1}{\left[ \frac{2\pi z}{\omega} - 2q2\pi\rho - (2p+1)\pi \right]^2} \\
 &= -\frac{16\pi^3}{h'g^2\omega^3} \lim \sum_{q=-(q'-1)}^{q=q'-1} \frac{\sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} - 2q2\pi\rho\right)}{\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} - 2q2\pi\rho\right)\right]^2} \\
 &= -\frac{16\pi^3}{h'g^2\omega^3} \left\{ \frac{\sin\frac{2\pi z}{\omega}}{\left(1 + \cos\frac{2\pi z}{\omega}\right)^2} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} - 2q2\pi\rho\right)}{\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} - 2q2\pi\rho\right)\right]^2} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi z}{\omega} + 2q2\pi\rho\right)}{\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} + 2q2\pi\rho\right)\right]^2} \right\},
 \end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned}
 h'w_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= -\frac{8\pi^2}{\omega^2g^2} \left[ \frac{1}{1 + \cos\frac{2\pi z}{\omega}} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} - 2q2\pi\rho\right)} + \frac{1}{1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{\omega} + 2q2\pi\rho\right)} \right] + A_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h'w_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= -h'^2 \frac{1 - \mu(z)}{\mu(z) + \nu(z)} \\
 &= -\frac{4\pi^2}{\omega^2g^2} \left[ \frac{1}{\cos^2\frac{\pi z}{\omega}} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi z}{\omega} - q2\pi\rho\right)} + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi z}{\omega} + q2\pi\rho\right)} \right] + A_1,
 \end{aligned}$$

puis

$$h'w_1(z) = -\frac{4\pi^2}{\omega^2g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2\left[\frac{\pi z}{\omega} - (-1)^q(2q+1)\frac{\pi\rho}{2}\right]} + A_1.$$

Il est à remarquer qu'on a

$$\begin{aligned}
 h'w_1\left(z + \frac{\omega'}{2} - \omega'\right) &= \frac{1 + \mu(z)}{\mu(z) + \nu(z)} h'^2 \\
 &= -\frac{4\pi^2}{\omega^2g^2} \sum_{q=1}^{q=\infty} \left\{ \frac{1}{\cos^2\left[\frac{\pi z}{\omega} - (2q-1)\pi\rho\right]} + \frac{1}{\cos^2\left[\frac{\pi z}{\omega} + (2q-1)\pi\rho\right]} \right\} + A_1,
 \end{aligned}$$

et par suite

$$\frac{1 - \nu(z)}{1 - \mu(z)} + k'^2 \frac{1 + \mu(z)}{\mu(z) + \nu(z)} = A_1 + A_2,$$

ce qui exige

$$A_1 + A_2 = 1,$$

et l'on a ainsi

$$k \varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) + k' \varpi_2 \left( z + \frac{\omega'}{2} + \omega' \right) = 1 \quad \text{ou} \quad k \varpi_1(z) + k' \varpi_2(z + \omega') = 1.$$

26. *Développements de  $\varpi_3(z)$ .* — Soit la fonction

$$f(z) = \varpi_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = -ig \frac{\varpi_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)}{\mu_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)} = g \frac{k}{k'} \frac{[\mu(z) + \nu(z)] \lambda(z)}{[1 - \nu(z)] [1 - \mu(z)]}$$

qui est impaire, a ses infinis triples s'exprimant par

$$z = p\omega + 2q\omega',$$

est d'un module fini sur le contour du parallélogramme qui s'étend de

$$z = -p'\omega - \frac{\omega}{2} \text{ à } z = p'\omega + \frac{\omega}{2} \quad \text{et de} \quad z = -2q'\omega' - \omega' \text{ à } z = 2q'\omega' + \omega',$$

les infinis contenus dans le parallélogramme répondant à

$$q = -q', \quad -q' + 1, \dots, \quad q' - 1, \quad q',$$

et à

$$p = -p', \quad -p' + 1, \dots, \quad p' - 1, \quad p'.$$

En posant  $z = p\omega + 2q\omega' + z'$ , on a, par la formule de Cauchy,

$$\begin{aligned} f(t) &= g \frac{k}{k'} \mathcal{E} \frac{[\mu(z') + \nu(z')] \lambda(z')}{[1 - \nu(z')] [1 - \mu(z')] (t - p\omega - 2q\omega' - z')} \\ &= \frac{4}{k k' g^2} \sum_{q=-q'}^{q=q'} \sum_{p=-p'}^{p=p'} \frac{2}{(t - p\omega - 2q\omega')^2}; \end{aligned}$$

de sorte que

$$f(z) = \varpi'_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = -ig \frac{\varpi_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)}{\mu_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)} = \frac{4}{kk'g^2} \frac{\pi^3}{\omega^3} \sum_{q=-q'}^{q=q'} \sum_{p=-p'}^{p=p'} \frac{2}{\left[ \frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho - p\pi \right]^3}.$$

Or il est aisé de voir que

$$\frac{\cos z}{\sin^3 z} = \lim_{p=-p'}^{p=p'} \sum \frac{1}{(z - p\pi)^3};$$

d'où

$$\lim_{p=-p'}^{p=p'} \sum \frac{2}{\left( \frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho - p\pi \right)^3} = 2 \frac{\cos \left( \frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho \right)}{\sin^3 \left( \frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho \right)};$$

On a donc

$$kk' \varpi'_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = \frac{4\pi^3}{g^2 \omega^3} \lim_{q=-q'}^{q=q'} \sum \frac{2 \cos \left( \frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho \right)}{\sin^3 \left( \frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho \right)};$$

d'où

$$\begin{aligned} kk' \varpi_3 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) &= -\frac{4\pi^2}{g^2 \omega^2} \sum_{q=-\infty}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho \right)} + A_3 \\ &= -\frac{4\pi^2}{g^2 \omega^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi z}{\omega}} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho \right)} + \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi z}{\omega} + 2q\pi\rho \right)} \right\} + A_3. \end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned} kk' \varpi_3(z) &= -\frac{4\pi^2}{\omega^2 g^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi z}{\omega} + \frac{\pi\rho}{2} \right)} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} - (4q+1) \frac{\pi\rho}{2} \right]} + \frac{1}{\sin^2 \left[ \frac{\pi z}{\omega} + (4q-1) \frac{\pi\rho}{2} \right]} \right\} + A_3 \\ &= -\frac{4\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi z}{\omega} - (-1)^q (2q+1) \frac{\pi\rho}{2} \right)} + A_3. \end{aligned}$$



et par suite

$$\frac{1 - \cos(\frac{\omega'}{2})}{1 + \cos(\frac{\omega'}{2})} = \frac{1 - \cos(\frac{\omega'}{2})}{2 \cos^2(\frac{\omega'}{4})} = \frac{2 \sin^2(\frac{\omega'}{4})}{2 \cos^2(\frac{\omega'}{4})} = \tan^2(\frac{\omega'}{4})$$

ce qui exige

$$k = \tan(\frac{\omega'}{4})$$

et l'on a ainsi

$$k \pi \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) + k \pi \left( z - \frac{\omega'}{2} \right) = \dots$$

26. Développement de  $\pi_1(z)$  — Résultat

$$f(z) = \pi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = \frac{\cos(\frac{\omega'}{2} - k\pi z)}{\cos(\frac{\omega'}{2} + k\pi z)}$$

qui est impair, a un autre développement

$$f(z) = \frac{\sin(\frac{\omega'}{2} - k\pi z)}{\sin(\frac{\omega'}{2} + k\pi z)}$$

est d'un module fini sur le contour de parallélogramme

$$z = -p + \frac{\omega'}{2} \text{ et } z = p + \frac{\omega'}{2}$$

les infinis constants dans le parallélogramme

$$= A_2$$

et à

$$z = -p + \frac{\omega'}{2} + \omega$$

on a

$$= k^2$$

En posant  $z = p + \frac{\omega'}{2}$

$$f(z) = \frac{\cos(\frac{\omega'}{2} - k\pi z)}{\cos(\frac{\omega'}{2} + k\pi z)}$$

au lieu de  $k\pi \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)$ , on obtient

$$\frac{1}{\cos^2(2q + 1)\pi p}$$

de sorte que

$$f(z) = \varpi_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = -ig \frac{\varpi_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{\mu_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)} = \frac{4}{kk'g^2} \frac{\pi^3}{\omega^3} \sum_{q=-q'}^{q=q'} \sum_{p=-p'}^{p=p'} \frac{2}{\left[\frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho - p\pi\right]^3}$$

Or il est aisé de voir que

$$\frac{\cos z}{\sin^3 z} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{p=-p}^{p=p} \frac{1}{(z - p\pi)^3};$$

d'où

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{p=-p}^{p=p} \frac{2}{\left(\frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho - p\pi\right)^3} = 2 \frac{\cos\left(\frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho\right)};$$

On a donc

$$kk' \varpi_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{4\pi^3}{g^2\omega^3} \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{q=-q'}^{q=q'} \frac{2 \cos\left(\frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho\right)};$$

d'où

$$\begin{aligned} kk' \varpi_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= -\frac{4\pi^3}{g^2\omega^2} \sum_{q=-\infty}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho\right)} + A_3 \\ &= -\frac{4\pi^3}{g^2\omega^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2\frac{\pi z}{\omega}} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi z}{\omega} - 2q\pi\rho\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi z}{\omega} + 2q\pi\rho\right)} \right\} + A_3. \end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned} kk' \varpi_3(z) &= -\frac{4\pi^3}{\omega^2 g^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi z}{\omega} + \frac{\pi\rho}{2}\right)} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2\left[\frac{\pi z}{\omega} - (4q+1)\frac{\pi\rho}{2}\right]} + \frac{1}{\sin^2\left[\frac{\pi z}{\omega} + (4q-1)\frac{\pi\rho}{2}\right]} \right\} + A_3 \\ &= -\frac{4\pi^3}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi z}{\omega} - (-1)^q(2q+1)\frac{\pi\rho}{2}\right)} + A_3. \end{aligned}$$

Il y a lieu de remarquer que

$$\begin{aligned}
 kh'w_3\left(z + \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} - \omega'\right) &= k^2 \frac{\nu(z) - \mu(z)}{1 + \nu(z)} \\
 &= -\frac{4\pi^2}{g^2\omega^2} \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\cos^2\left[\frac{\pi z}{\omega} - (2q-1)\pi\rho\right]} + \frac{1}{\cos^2\left[\frac{\pi z}{\omega} + (2q-1)\pi\rho\right]} \right\} + A_3.
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$k w_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) + kh'w_3\left(z + \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} + \omega'\right) = A_1 + A_3,$$

ou bien

$$\frac{1 - \nu(z)}{1 - \mu(z)} + k^2 \frac{\nu(z) - \mu(z)}{1 + \nu(z)} = A_1 + A_3,$$

ce qui exige

$$A_1 + A_3 = k^2,$$

de sorte que

$$w_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) + k'w_3\left(z + \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} + \omega'\right) = k$$

ou

$$w_1(z) + k'w_3(z) = k \quad \text{et} \quad A_1 + A_3 = k^2.$$

On a également

$$\begin{aligned}
 k'w_3\left(z + \frac{\omega'}{2} - \omega'\right) - kh'w_3\left(z + \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} - \omega'\right) \\
 = k'^2 \frac{1 + \mu(z)}{\mu(z) + \nu(z)} - k^2 \frac{\nu(z) - \mu(z)}{1 + \nu(z)} = A_2 - A_3,
 \end{aligned}$$

ce qui a lieu par

$$A_2 - A_3 = 1 - k^2,$$

résultat qui s'accorde bien avec les deux relations

$$A_1 + A_2 = 1, \quad A_1 + A_3 = k^2.$$

En faisant  $z = 0$  dans le développement de  $k w_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)$ , on obtient

$$A_1 = k^2 - \frac{8\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\cos^2(2q+1)\pi\rho}.$$

Par  $z = 0$  dans l'expression de  $\varpi_3(z)$ , on a

$$(1+k)k = -\frac{4\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2(2q+1)\frac{\pi\rho}{2}} + A_3,$$

d'où

$$A_1 = -k - \frac{4\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2(2q+1)\frac{\pi\rho}{2}}.$$

Si l'on fait  $z = 0$  dans  $k\varpi_1(z)$ , on trouve

$$A_1 = k - \frac{4\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2(2q+1)\frac{\pi\rho}{2}},$$

On a donc

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{2\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2(2q+1)\frac{\pi\rho}{2}} + \frac{1}{\cos^2(2q+1)\frac{\pi\rho}{2}} \\ &= -\frac{2\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2(2q+1)\frac{\pi\rho}{2} \cos^2(2q+1)\frac{\pi\rho}{2}} \\ &= -\frac{8\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2(2q+1)\pi\rho}. \end{aligned}$$

27. En égalant cette valeur à la première, il vient

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{8\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2(2q+1)\pi\rho} - \frac{1}{\sin^2(2q+1)\pi\rho} \\ &= -\frac{8\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{\cos(2q+1)2\pi\rho}{\cos^2(2q+1)\pi\rho \sin^2(2q+1)\pi\rho} \\ &= -\frac{32\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{\cos(2q+1)2\pi\rho}{\sin^2(2q+1)2\pi\rho}. \end{aligned}$$

En égalant deux valeurs précédentes de  $A_1$ , on a encore

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\cos^2(2q+1)\frac{\pi\rho}{2}} \frac{1}{\sin^2(2q+1)\frac{\pi\rho}{2}} \\ &= -\frac{2\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{\cos(2q+1)\pi\rho}{\sin^2(2q+1)\frac{\pi\rho}{2} \cos^2(2q+1)\frac{\pi\rho}{2}} \\ &= -\frac{8\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{\cos(2q+1)\pi\rho}{\sin^2(2q+1)\pi\rho}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$k = 4 \frac{\sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{\cos(2q+1)2\pi\rho}{\sin^2(2q+1)2\pi\rho}}{\sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{\cos(2q+1)\pi\rho}{\sin^2(2q+1)\pi\rho}}.$$

Si l'on fait  $z = 0$ , dans la formule qui donne  $\mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)$  (15), en observant que la limite de  $\frac{\mu_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right)}{\sin \frac{2\pi z}{\omega}}$  est  $i \frac{\omega g}{4\pi}$ , on trouve

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{4\pi}{\omega g}\right)^2 \left[ \frac{1}{4} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{\cos m 2\pi\rho + (-1)^m} \right] \\ &= \frac{8\pi^2}{\omega^2 g^2} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{\cos^2 2m\pi\rho} - \frac{1}{\sin^2(2m-1)\pi\rho} \right]; \end{aligned}$$

c'est la relation

$$1 = A_2 + A_1,$$

en raison de ce que

$$A_1 = -\frac{8\pi^2}{\omega^2 g^2} \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{1}{\sin^2(2q+1)\pi\rho}$$

Elle est d'une valeur finie sur tout le contour du parallélogramme qui s'étend de

$$z = -p'\omega \text{ à } z = p'\omega \text{ et de } z = -q'2\omega' \text{ à } z = q'2\omega'.$$

Les infinis compris dans le parallélogramme répondront à

$$p = -p', -p'+1, \dots, p'-1 \text{ et à } q = -q', -q'+1, \dots, q'-1.$$

La formule de Cauchy appliquée à la fonction est ainsi

$$f(t) = \varpi'_1 \left( t + \frac{\omega'}{2} \right) = \mathcal{E} \frac{\varpi'_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right)}{t - z} = -g \frac{k'^2}{k} \mathcal{E} \frac{[1 - \nu(z)] \lambda(z)}{[1 - \mu(z)] [\mu(z) + \nu(z)] (t - z)}.$$

Posons  $z = (2p+1)\frac{\omega}{2} + (2q+1)\omega' + z'$ ; il viendra

$$f(t) = g \frac{k'^2}{k} \mathcal{E} \frac{[1 + \nu(z')] \lambda(z')}{[1 - \mu(z')] [\mu(z') - \nu(z')] \left[ t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega' - z' \right]}.$$

Comme on a

$$\lambda(z') = g z' \left[ 1 - \frac{z'^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} g^2 (1 + k^2) \dots \right],$$

$$1 + \nu(z') = 2 - \frac{1}{2} g^2 k^2 z'^2 + \frac{k^2 g^4}{2 \cdot 3} \left( 1 + \frac{k^2}{4} \right) z'^4 + \dots,$$

$$[1 - \mu(z')]^{-1} = \frac{2}{g^2 z'^2} \left[ 1 + \frac{g^2}{3} \left( \frac{1}{4} + k^2 \right) z'^2 + \dots \right],$$

$$[\mu(z') - \nu(z')]^{-1} = -\frac{2}{k'^2 g^2 z'^2} \left[ 1 + \frac{g^2 (1 + k^2)}{12} z'^2 + \dots \right],$$

et

$$\left[ t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega' - z' \right]^{-1} \\ = \frac{1}{t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega'} \left[ 1 + \frac{z'}{t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega'} + \frac{z'^2}{(t - \dots)^2} \right],$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{4}{hg^2} \mathcal{E} \frac{1}{z'} \left[ -\frac{g^2(1+h^2)}{2.3} z - \frac{1}{2} g^2 h^2 + \frac{g^2}{3} \left( \frac{1}{4} + h^2 \right) z + \frac{g^2(1+h^2)}{12} z + \frac{2}{(t-\dots)^2} \right] \frac{1}{t-\dots} \\ &= -\frac{4}{hg^2} \sum \frac{2}{\left[ t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega' \right]^3} \\ &= -\frac{4}{hg^2} \sum_{q=-q'}^{q=q'-1} \sum_{p=-p'}^{p=p'-1} \frac{2}{\left[ t - (2p+1)\frac{\omega}{2} - (2q+1)\omega' \right]^3}, \end{aligned}$$

$p'$  et  $q'$  allant à  $+\infty$ , d'où

$$f(z) = \omega'_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = -\frac{16\pi^3}{hg^2\omega^3} \sum_{q=-q'}^{q=q'-1} \sum_{p=-p'}^{p=p'-1} \frac{4}{\left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (2q+1)2\pi\rho - (2p+1)\pi \right]^3}.$$

Cela posé, si l'on prend

$$\varphi(z) = \frac{1}{1+\cos z}, \quad \text{d'où} \quad \varphi'(z) = \frac{\sin z}{(1+\cos z)^2},$$

on aura

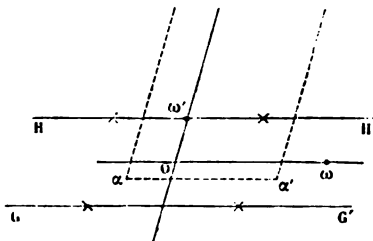
$$\varphi'(t) = \mathcal{E} \frac{\sin z}{(1+\cos z)^2} \frac{1}{t-z},$$

les infinis étant triples,  $z = (2p+1)\pi$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \mathcal{E} \frac{-z' + \frac{z'^3}{1.2.3} - \dots}{\left( \frac{z'^2}{1.2} - \frac{z'^4}{1.2.3.4} + \dots \right)^2} \frac{1}{t - (2p+1)\pi - z'} \\ &= \mathcal{E} \frac{4}{z'} \left\{ \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{[t - (2p+1)\pi]^2} \right\} \frac{1}{t-\dots} \\ &= -4 \sum_{p=-p'}^{p=p'-1} \frac{1}{[t - (2p+1)\pi]^3}, \end{aligned}$$

La bande répondant à  $m = 0$  s'étend de  $z = -\omega'$  à  $z = \omega'$ ; la variable  $y$  est susceptible de valeurs égales et de signes contraires. Comme la

Fig. 4.



fonction est paire, elle s'y développera en

$$\varpi_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = A_0 + \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p \left( e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} + e^{-p \frac{2\pi z i}{\omega}} \right),$$

et l'on aura

$$\omega A_p = \int_{\alpha}^{\alpha + \omega} \varpi_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} dz \quad \text{et} \quad \omega A_0 = \int_{\alpha}^{\alpha + \omega} \varpi_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) dz.$$

Pour  $\omega A_p$  l'intégration suivant  $\alpha\alpha'$ , si le module de  $q = e^{2\pi p i}$ , est moindre que 1, peut se remplacer par les intégrations relatives aux points que donne

$$z = \frac{\omega}{2} + (2m-1)\omega',$$

en attribuant à  $m$  les valeurs 1, 2, 3, ....

Or, par  $z = \frac{\omega}{2} + (2m-1)\omega' + z'$ , on a

$$\begin{aligned} \varpi_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} dz &= \frac{1}{k} q^{(2m-1)p} (-1)^p e^{p \frac{2\pi z' i}{\omega}} \frac{1 + \nu(z')}{1 - \mu(z')} dz' \\ &= \frac{2}{g^2 z'^2} \left[ 1 + \frac{g^2}{2} \left( \frac{1}{4} + h^2 \right) z'^2 + \dots \right] \left( 2 - \frac{g^2}{2} k^2 z'^2 + \dots \right) \\ &\quad \times \left( 1 + p \frac{2\pi z' i}{\omega} - \dots \right) \frac{1}{k} q^{(2m-1)p} (-1)^p dz'; \end{aligned}$$



d'où

$$\int \varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} dz = - \frac{16 \pi^2}{g^2 \omega} p \frac{1}{k} (-1)^p q^{(2m-1)p}$$

et

$$A_p = - \frac{16 \pi^2}{k \omega^2 g^2} (-1)^p p \sum_{m=1}^{\infty} q^{(2m-1)p} = - \frac{16 \pi^2}{k \omega^2 g^2} (-1)^p \frac{pq^p}{1-q^{2p}}.$$

D'autre part, si l'on considère un parallélogramme  $\alpha \alpha' \alpha_1 \alpha'_1$  où le côté  $\alpha' \alpha$ , parallèle à  $O \omega'$  soit de longueur  $\omega'$ , il n'y aura aucun infini à l'intérieur ou il s'en trouvera un pour lequel le résidu sera nul; l'intégrale le long de son contour sera donc nulle, et comme les éléments se détruisent sur les parallèles à  $\omega'$ , il en sera de même sur les deux autres. On a en conséquence

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) dz &= \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \varpi_1 \left( z + \omega' + \frac{\omega'}{2} \right) dz \\ &= \frac{1}{2k} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \left[ \frac{1-\nu(z)}{1-\mu(z)} + \frac{1+\nu(z)}{1+\mu(z)} \right] dz = \frac{1}{k} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{1-\nu(z)\mu(z)}{\lambda^2(z)} dz \\ &= \frac{1}{k} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} - \frac{1}{kg} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{\lambda'(z) dz}{\lambda^2(z)} = \frac{1}{k} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)}. \end{aligned}$$

Donc

$$A_0 = \frac{1}{k \omega} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)},$$

et ainsi

$$\varpi_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) = \frac{1}{k \omega} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} - \frac{32 \pi^2}{k \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{pq^p}{1-q^{2p}} \cos p \frac{2\pi z}{\omega},$$

pour la bande qui s'étend de  $z = -\omega'$  à  $z = \omega'$ .

De là

$$\varpi_1(z) = \frac{1}{k \omega} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} - \frac{32 \pi^2}{k \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{pq^p}{1-q^{2p}} \cos p \left( \frac{2\pi z}{\omega} - \pi p \right),$$

pour la bande qui s'étend de  $-\frac{\omega'}{2}$  à  $z = \frac{3\omega'}{2}$ , et pour la bande allant

de  $z = (4m - 1) \frac{\omega'}{2}$  à  $z = (4m + 3) \frac{\omega'}{2}$ ,

$$\varpi_1(z) = \frac{1}{k\omega} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} - \frac{32\pi^2}{k\omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \frac{pq^p}{1-q^{2p}} \cos p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi p \right];$$

d'ailleurs  $\alpha$  peut là être d'une valeur quelconque.

30. *Développement de  $\varpi_2(z)$ .* — Considérons

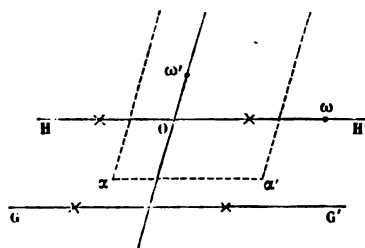
$$\varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = -k' \frac{1 - \mu(z)}{\mu(z) + \nu(z)}.$$

Les infinis de la fonction, qui sont doubles, ont pour expression

$$z = n\omega + \frac{\omega}{2} + 2m\omega'.$$

Il n'y en a aucun à l'intérieur de la bande GG'HH', GG' (*fig. 5*) pas-

Fig. 5.



sant au point  $z = -2\omega'$  et HH' au point  $z = 0$ ; on aura dans cette bande

$$\varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} A_p e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}};$$

d'où

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) e^{-p \frac{2\pi z i}{\omega}} dz = \omega A_p, \quad p \geq 0$$

et

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) dz = \omega A_0.$$

Soit  $p < 0$ . Alors l'intégration se fera par les infinis (mod.  $q < 1$ ) qui donne  $z = \frac{\omega}{2} + 2m\omega'$ , en prenant  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . En posant  $z = \frac{\omega}{2} + 2m\omega' + z'$ , on obtient

$$\omega_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) e^{-p \frac{2\pi z i}{\omega}} dz = -k'(-1)^p q^{-2mp} \left(1 - p \frac{2\pi z' i}{\omega} - \dots\right) \left(2 - \frac{g^2 z'^2}{2} - \dots\right) \\ \times \left[1 + \frac{g^2(1+k^2)z'^2}{12} - \dots\right] \frac{2 dz'}{k'^2 g^2 z'^2};$$

d'où pour l'intégrale

$$-p \frac{16\pi^2}{k' \omega g^2} (-1)^p q^{-2mp},$$

puis

$$A_p = -\frac{16\pi^2}{k' \omega^2 g^2} (-1)^p \frac{p}{1 - q^{-2p}}.$$

Soit en second lieu  $p > 0$ . Alors le module de  $q$  étant  $< 1$ , il faudra prendre les infinis qui répondent à  $m = -1, -2, \dots$  et, les intégrations se faisant en sens contraire des précédentes, il s'ensuivra

$$A_p = \frac{16\pi^2}{k' \omega^2 g^2} (-1)^p \frac{pq^{2p}}{1 - q^{2p}},$$

de sorte que

$$\omega_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = A'_0 + \frac{16\pi^2}{k' \omega^2 g^2} \left[ \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \frac{pq^{2p}}{1 - q^{2p}} e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} - \sum_{p=-1}^{p=-\infty} (-1)^{-p} \frac{p}{1 - q^{-2p}} e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} \right] \\ = A'_0 + \frac{16\pi^2}{k' \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p \frac{pq^{2p} e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} + p e^{-p \frac{2\pi z i}{\omega}}}{1 - q^{2p}} \\ = A'_0 + \frac{16\pi^2}{k' \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} p (-1)^p \frac{q^{2p} e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} + e^{-p \frac{2\pi z i}{\omega}}}{1 - q^{2p}} \\ = A'_0 + \frac{16\pi^2}{k' \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p p \left( \frac{1 + q^{2p}}{1 - q^{2p}} \cos p \frac{2\pi z}{\omega} - i \sin p \frac{2\pi z}{\omega} \right);$$

on a d'ailleurs, comme pour  $\varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) dz &= \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \varpi_2\left(z + \frac{\omega'}{2} + \omega'\right) dz \\ &= -\frac{k'}{2} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \left[ \frac{1-\mu(z)}{\mu(z)+\nu(z)} - \frac{1+\mu(z)}{\mu(z)+\nu(z)} \right] dz \\ &= k' \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{\mu(z) dz}{\mu(z)+\nu(z)} = k' \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{1-\lambda^2(z) - \mu(z)\nu(z)}{-k'^2 \lambda^2(z)} dz \\ &= \frac{\omega}{k'} - \frac{1}{k'} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)}; \end{aligned}$$

donc

$$\Lambda'_0 = \frac{1}{k'} - \frac{1}{k' \omega} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)},$$

c'est-à-dire que, pour la bande qui va du point  $z = -2\omega'$  à  $z = 0$ ,

$$\varpi_1\left(\frac{\omega'}{2} + z\right) = \frac{1}{k'} - \frac{1}{k' \omega} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} + \frac{16\pi^2}{k' \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p p \left( \frac{1+q^{2p}}{1-q^{2p}} \cos p \frac{2\pi z}{\omega} - i \sin p \frac{2\pi z}{\omega} \right)$$

et pour la bande qui va de  $z = -\frac{3\omega'}{2}$  à  $z = \frac{\omega'}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \varpi_1(z) &= \frac{1}{k'} - \frac{1}{k' \omega} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} + \frac{16\pi^2}{k' \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p p \left[ \frac{1+q^{2p}}{1-q^{2p}} \cos p \left( \frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho \right) \right. \\ &\quad \left. - i \sin p \left( \frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho \right) \right], \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \varpi_2(z) &= \frac{1}{k'} - \frac{1}{k' \omega} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} + \frac{16\pi^2}{k' \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p p \left\{ \frac{1+q^{2p}}{1-q^{2p}} \cos p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi\rho \right] \right. \\ &\quad \left. - i \sin p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi\rho \right] \right\}, \end{aligned}$$

pour la bande comprise de  $z = 2m\omega' - \frac{3\omega'}{2}$  à  $z = 2m\omega' + \frac{\omega'}{2}$ .

31. Développement de  $\varpi_3(z)$ . — Soit

$$\varpi_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = -\frac{k}{k'} \frac{\mu(z) + \nu(z)}{1 - \nu z}.$$

Les infinis de cette fonction ont pour expression

$$z = n\omega + 2m\omega'.$$

Considérons la bande qui s'étend de  $-2\omega'$  à zéro. On aura dans cette bande

$$\varpi_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} A_p e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}},$$

d'où

$$\omega A_p = \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \varpi_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) e^{-p \frac{2\pi z i}{\omega}} dz, \quad \omega A'_p = \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \varpi_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) dz.$$

Soit  $p < 0$ . L'intégration se fera par les infinis qui répondent à  $m = 0, 1, 2, \dots$ , et l'on trouve

$$A_p = -\frac{16\pi^2 p}{kk' \omega^2 g^2} \frac{1}{1 - q^{-2p}},$$

le module de  $q$  étant  $< 1$ .

Soit  $p > 0$ . Alors les infinis à prendre répondent à  $m = -1, -2, \dots$ , et, eu égard au sens contraire des intégrations, on a

$$A_p = \frac{16\pi^2 p}{kk' \omega^2 g^2} \frac{q^{2p}}{1 - q^{2p}},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \varpi_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= A'_0 + \frac{16\pi^2}{kk' \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} p \frac{q^{2p} e^{p \frac{2\pi z i}{\omega}} + e^{-p \frac{2\pi z i}{\omega}}}{1 - q^{2p}} \\ &= A'_0 + \frac{16\pi^2}{kk' \omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} p \left( \frac{1 + q^{2p}}{1 - q^{2p}} \cos p \frac{2\pi z}{\omega} - i \sin p \frac{2\pi z}{\omega} \right). \end{aligned}$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned} \omega A_1 &= \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \omega_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} \right) dz = \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \omega_1 \left( z + \frac{\omega'}{2} + \omega' \right) dz \\ &= -\frac{k}{2k'} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} [\mu(z) + \nu(z)] \left[ \frac{1}{1-\nu(z)} - \frac{1}{1+\nu(z)} \right] dz = -\frac{k}{k'} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{[\mu(z) + \nu(z)] \nu(z)}{k^2 \lambda^2(z)} dz \\ &= -\frac{1}{kk'} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{1-h^2 \lambda^2(z)}{\lambda^2(z)} dz = \frac{k\omega}{k'} - \frac{1}{kk'} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda_2(z)}. \end{aligned}$$

Pour la bande qui s'étend de  $z = -\frac{3\omega'}{2}$  à  $z = \frac{\omega'}{2}$ , on aura

$$\begin{aligned} \omega_1(z) &= \frac{k}{k'} - \frac{1}{kk'\omega} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} \\ &\quad + \frac{16\pi^2}{kk'\omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} p \left[ \frac{1+q^{2p}}{1-q^{2p}} \cos p \left( \frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho \right) - i \sin p \left( \frac{2\pi z}{\omega} - \pi\rho \right) \right] \end{aligned}$$

et pour celle qui va de  $z = (4m-3)\frac{\omega'}{2}$  à  $z = (4m+1)\frac{\omega'}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \omega_1(z) &= \frac{k}{k'} - \frac{1}{kk'\omega} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} \\ &\quad + \frac{16\pi^2}{kk'\omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} p \left\{ \frac{1+q^{2p}}{1-q^{2p}} \cos p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi\rho \right] - i \sin p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi\rho \right] \right\}, \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} \omega_1 \left( z + \frac{\omega}{2} \right) &= \frac{k}{k'} - \frac{1}{kk'\omega} \int_{\alpha}^{\alpha+\omega} \frac{dz}{\lambda^2(z)} \\ &\quad + \frac{16\pi^2}{kk'\omega^2 g^2} \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p p \left\{ \frac{1+q^{2p}}{1-q^{2p}} \cos p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4n+1)\pi\rho \right] - i \sin p \left[ \frac{2\pi z}{\omega} - (4m+1)\pi\rho \right] \right\}, \end{aligned}$$

ce qui ramène à la relation

$$\omega_1(z) - k\omega_1 \left( z + \frac{\omega}{2} \right) = h'.$$

Les trois constantes  $A_0, A'_0, A''_0$ , relatives aux développements précédents de  $\varpi_1(z), \varpi_2(z), \varpi_3(z)$ , sont liées par les relations

$$A_0 k + A'_0 k' = 1, \quad A_0 + A''_0 k' = k, \quad A'_0 - A''_0 k = k'.$$

On connaît (Traité de MM. Briot et Bouquet, liv. IV, n° 161) la formule

$$\int_{\frac{\omega}{4}}^z \frac{dz}{\lambda^2(z)} = \left(z - \frac{\omega}{4}\right) \theta'_1(0) - \left[\frac{d \log \theta_1(z)}{dz}\right]_{\frac{\omega}{4}}^z.$$

Elle donne

$$\frac{1}{\omega} \int_{\frac{\omega}{4}}^{\frac{\omega}{4} + u} \frac{dz}{\lambda^2(z)} = A_0 = \theta'_1(0) - \frac{1}{\omega} \left[\frac{d \log \theta_1(z)}{dz}\right]_{\frac{\omega}{4}}^{\frac{\omega}{4} + u},$$

et comme on a (Traité de MM. Briot et Bouquet, liv. IV, n° 131)

$$\log \theta_1(z) = \log \frac{\omega}{2\pi} + \log \sin \frac{2\pi z}{\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{2\pi z}{\omega}}{\sin^2 2n\pi\rho}\right),$$

il s'ensuit

$$A_0 = \theta'_1(0);$$

puis la formule

$$\theta_1(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{k'\omega}} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos \frac{4m\pi z}{\omega}\right]$$

donnant

$$\theta'_1(z) = -2 \sqrt{\frac{2\pi}{k'\omega}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \left(\frac{4m\pi}{\omega}\right)^2 \cos \frac{4m\pi z}{\omega},$$

on a

$$A_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{k'\omega}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} q^{m^2} \left(\frac{4m\pi}{\omega}\right)^2 = \frac{16\pi^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{2\pi}{k'\omega}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} q^{m^2} m^2.$$





---

# TABLE DES MATIÈRES

## DU TOME QUATRIÈME.

---

	Pages.
Étude sur le magnétisme, par M. E. Bouty, Professeur de Physique au Lycée de Reims . . . . .	9
Mémoire sur les fonctions discontinues, par M. G. Darboux, Maître de conférences à l'École Normale . . . . .	57
Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables, par M. Jules Tannery, Agrégé préparateur à l'École Normale supérieure . . . . .	113
Note sur les déformations des fossiles contenus dans les roches schisteuses, et sur la détermination de quelques espèces du genre <i>Ogygia</i> , par M. Henry Dufet, Agrégé préparateur à l'École Normale supérieure . . . . .	183
Application de la flexion circulaire des lames élastiques au tracé des arcs de cercle, par M. H. Resal, Membre de l'Institut . . . . .	191
Recherches sur les altérations spontanées des œufs, par M. Ulysse Gayon, ancien Élève de l'École Normale supérieure, Agrégé ès Sciences physiques . . . . .	205
Sur les polygones réguliers, par M. G. Mathet, Professeur au Lycée de Lyon . . . . .	303
Recherches sur les solutions gazeuses sursaturées, et sur certains phénomènes dits <i>catalytiques</i> , par M. D. Gernez, Professeur au Lycée Louis-le-Grand et à l'École Centrale des Arts et Manufactures . . . . .	311
Sur la température du Soleil, par M. J. Violle, Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble. (Réponse à M. Soret) . . . . .	363
Mémoires sur les fonctions elliptiques qui correspondent à la fonction $\cos x + i \sin x$ , par M. H. Lemonnier, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Henri IV . . . . .	371

PLANCHE.

---

---

## ERRATA.

---

Page 145, ligne 20, *au lieu de*  $\varphi_r [\log(x-a)]^r$ , *lisez*  $\varphi_n [\log(x-a)]^n$ .

» ligne 21, *au lieu de*  $\varphi_r$ , *lisez*  $\varphi_n$ .

» ligne 23, *au lieu de*  $[\log(x-a)]^r$ , *lisez*  $[\log(x-a)]^n$ .

Page 299, ligne 2, en remontant, *au lieu de* les œufs étaient tous contagionnés en même temps que fécondés, *lisez* les femelles mouraient rapidement remplies de vibrions.

par M. Hippolyte Gayen.

Fig. 3

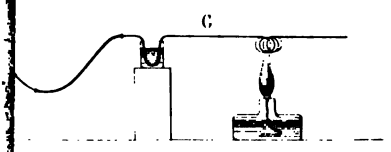


Fig. 4

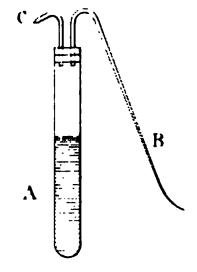


Fig. 6



Fig. 8



Fig. 9



Fig. 10

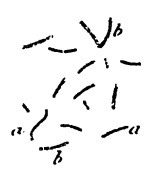


Fig. 11



Fig. 16



Fig. 17



Fig. 18

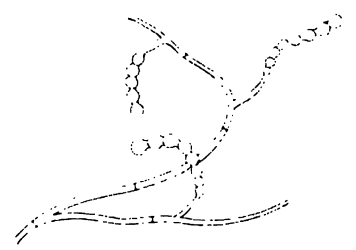


Fig. 22

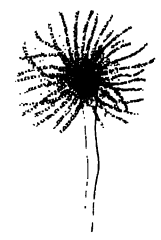
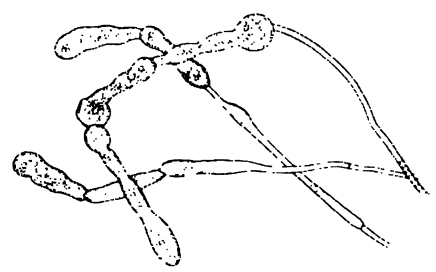


Fig. 23



THE NEW YORK  
PUBLIC LIBRARY  
ASTOR LENOX AND  
TILDEN FOUNDATIONS  
R L



ep







