E.e.V. 6.

APPLICATION
DE LA
GÉOMÉTRIE ORDINAIRE
ET DES CALCULS
DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

A la résolution de plusieurs Problêmes.

APPLICATION
DE LA
GÉOMÉTRIE ORDINAIRE
ET DES CALCULS
DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

A la résolution de plusieurs Problêmes.

Par feu M. ROBILLARD, fils du Professeur de Mathématique de l'Ecole Royale de l'Artillerie établie à Metz.

Ouvrage précédé de l'Histoire critique de ces Calculs, contenant leur métaphysique & leur théorie; par M. SAVERIEN.

A PARIS, RUE DAUPHINE,
Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

16#

AVERTISSEMENT.

C'Est presqu'un axiome en Métaphysique que les préceptes des Sciences, quelqu'élevés & transcendans qu'ils soient, sont des connoissances bien moins difficiles à acquérir que l'art d'appliquer ces préceptes à des usages. Les principes d'une science, toujours liés les uns aux autres, guident l'esprit dans l'étude qu'il en fait. Il suit sans peine l'enchaînement des vérités qui se présentent ; & une contention ménagée fait les progrès nécessaires pour saisir ces vérités. Tant que l'objet est déterminé, un homme capable d'application peut prétendre aux connoissances les plus sublimes. Mais n'a-t'on plus rien qui fixe ? L'art manque, & le génie isolé & sans appui est obligé de se replier en lui même pour découvrir la route qui doit le conduire à la solution des difficultés qu'il se propose.

Ceci doit rendre recommandable l'ouvrage qu'on publie aujourd'hui ; quoiqu'attendu depuis long-tems, dans lequel on s'est attaché à faciliter l'application de la Géométrie & du calcul des infiniment-petits à plusieurs problêmes. C'est un recueil des questions les plus curieuses & les plus intéressantes. Par le mot recueil *on caractérise assez cet ouvrage, pour ne pas attendre d'y trouver un Traité dans les formes. Différens problêmes, qui n'ont d'autre connexion entre eux que leur beauté, en voilà toute la matiere. On avoüera même, que ce n'est ici, si l'on veut, que le fruit des premieres études de feu M.* Robillard, *qui, dans un âge peu avancé *, avoit vaincu les difficultés les*

* Il est mort à 20 ans.

plus épineuſes des Mathématiques ; mais ce ſera toujours un fruit précieux pour les perſonnes qui veulent faire des progrès dans cette ſcience en s'exerçant, avec l'Auteur, ſur des problêmes qui en ſont une partie très-eſſentielle.

En effet, on trouve dans les deux premieres ſections, le fond de la théorie des ſections coniques, *& par conſéquent la génération des courbes qui en proviennent. Il n'y a ici que de la Géométrie ; mais c'eſt cette Géométrie qu'on appelle* compoſée, *& qui doit précéder l'étude des calculs différentiel & intégral.*

Il s'agit dans la troiſiéme ſection de la cubation des ſolides, c'eſt-à-dire de l'art de trouver la ſolidité des corps & de leurs portions mêmes par l'uſage des mêmes calculs différentiel & intégral.

L'Auteur recherche enſuite le centre de péſanteur ou de gravité des figures & des corps : c'eſt le ſujet de la quatriéme ſection.

Enfin, la cinquiéme & derniere ſection eſt remplie de problêmes qui ont pour objet la maniere de déterminer les centres de percuſſion & d'oſcillation.

Ainſi ces cinq ſections renferment les problêmes les plus importans des Mathématiques. On doit donc eſpérer que le Public fera quelque accueil à cet ouvrage. Il ſeroit aiſé d'en faire ſentir le mérite ; & la réflexion qui eſt à la tête de cet Avertiſſement, fourniroit aſſez le ſujet d'une juſte apologie, ſi l'approbation dont l'Académie Royale des Sciences l'a honoré, ne le mettoit au-deſſus des plus grands éloges.

HISTOIRE CRITIQUE DU CALCUL DES INFINIMENT-PETITS,

CONTENANT

LA MÉTAPHYSIQUE

ET

LA THÉORIE DE CE CALCUL.

PEu de découvertes ont fait plus de bruit dans les Sciences, que celle du Calcul des Infiniment-Petits.. Les Savans à qui on le doit étoient déja trop célèbres pour ne pas valoir cette épithete à ce Calcul même dès sa naissance. Tout ce que *Newton* & *Leibnitz* publioient dans ce tems attiroit l'attention du Monde Littéraire. On étoit convaincu que la Nature ne renfermoit dans son sein rien de trop caché pour eux, & que leur sublime génie se portoit également aux objets les plus transcendans & les plus inaccessibles. C'est ce que justifioit le nom de leur Calcul. La connoissance de l'Infini paroît hors de la portée de l'Esprit humain. Le terme même par lequel on prétend l'exprimer, comporte avec lui toute l'obscurité de son objet. Cependant l'amour propre n'y perd rien. Ce qui devroit émousser son aiguillon est précisément ce qui l'éguise. Les Mathématiciens, dit M. *de Fontenelle*, bien loin d'être intimidés par les difficultés, les recherchent. Aussi *Newton* & *Leibnitz*, qui les avoient presque épuisées dans les objets finis, ne craignirent pas de porter leur vûe sur l'Infini. Ils y fixerent leur attention, & dès-lors un crépuscule de lumiere parut au milieu des ténébres qui l'envelopoient. Quoique foible, cette clarté affecta les plus fameux Géométres. Saisis d'admiration à la vûe d'un Calcul de l'Infini établi si solidement, ils s'y appliquerent avec tant d'ardeur qu'ils le firent parvenir à sa plus grande perfection. Ses régles, ses parties & presque ses usages, tout cela parut dans le même tems. Un jour aussi éclatant échauffa les esprits. On crut entrevoir une mine de découvertes : & ces Hommes rares, que touche tant la perfection des Sciences & des Arts, firent les plus grands efforts de tête pour le porter à son dernier terme, & pour en tirer les plus grands avantages. Aucun Livre ne parut plus où l'on ne vit quelques nouveaux usages de ce Calcul. On se provoquoit les uns les autres. L'esprit porté sur un objet inconcevable, éprouvoit les plus grandes satisfactions. Mais si l'amour propre en étoit flaté, presque toutes les parties des Mathématiques gagnoient par-là de nouveaux accroissemens. On sommoit l'Infini, on en fixoit les élémens dont on déterminoit la valeur. Et ces connoiſſances appliquées à l'Aſtronomie, à la Phyſique, à la Mécanique, annonçoient un changement & une perfection dans les Sciences, auxquels il ſembloit qu'on n'auroit pas dû atteindre.

Il faut avoir bien de l'aſcendant ſur ſon imagination pour ne pas ſe laiſſer ſubjuguer par un point de vûe auſſi flateur. La raiſon ſe ſauve difficilement à travers de ſi belles promeſſes, qui animent tant l'amour propre. Voilà ſans doute pourquoi on s'eſt plutôt attaché à appliquer le Calcul des Infiniment-Petits à des Problêmes, qu'à en conſtater les fondemens. La précipitation a été même ſi grande qu'on a ſoumis le Calcul à des régles, & appliqué ces régles à des uſages, ſans ſe donner la peine de ſuivre & de développer la raiſon de ces uſages. Il a réſulté cependant de là deux inconvéniens: l'un eſt que l'objet du Calcul n'étant pas déterminé, on s'eſt défié de ſes principes, & qu'on l'a attaqué avec avantage. L'autre inconvénient vient du défaut d'explication pour chaque opération du Calcul. L'ennui inſéparable d'un travail preſque mécanique, a rebuté ceux qui avoient aſſez de confiance aux lumieres des Inventeurs, pour n'oſer ſe défier de ſes fondemens. Si ces omiſſions ne portent pas coup au Calcul même, elles nuiſent à ſes progrès, & le privent de bien des Partiſans. En y aïant égard, on auroit affermi ce Calcul, & on en auroit facilité l'étude & la pratique. Ce que les Mathématiciens n'ont pas fait, je tâcherai de ne point l'oublier dans cette Hiſtoire Critique: je dis *Criti-*

que, parce qu'en remontant à l'origine du Calcul des Infiniment-Petits, je me propose d'examiner sévérement & ses avantages & ses inconvéniens, & de péser jusques au terme qui le caractérise : je veux dire celui de l'Infini.

Les Hommes toûjours plus curieux de savoir ce qu'ils ne conçoivent pas que de développer ce qu'ils peuvent connoître, ont préféré dans tous les tems les idées abstraites aux objets sensibles. L'avenir les touche plus que le présent. Les substances spirituelles ou qu'on ne peut définir, l'intéressent davantage que les substances matérielles ; & ils sont affectés de l'Infini, dont ils n'ont aucune idée distincte, tandis qu'ils négligent de s'assurer du Fini, qu'il leur importe de connoître. Cette conduite si peu sage est la source du plus grand nombre de nos erreurs. De principes inconcevables on tire des conséquences qui ne peuvent que troubler les esprits & dégrader la raison. En effet quelles régles peut-on déduire de principes, dont nous ne pouvons nous assurer de l'existence ? De-là ces contradictions frappantes & palpables qui insultent avec tant de hauteur à notre jugement. Puisque la raison est donnée à l'homme pour se conduire dans la recherche de la vérité, le premier usage qu'on en doit faire, c'est de rejetter toutes les hypotheses qui sont hors de son Empire. Nul corollaire ne doit être déduit, qu'il ne tienne immédiatement à son principe, & que ce principe ne soit de la derniere évidence. C'est une chose à laquelle on ne sauroit trop faire d'attention que de s'assurer bien de la vérité d'un principe avant que de l'admettre; vérité qui doit être de nature à faire impression sur tous les esprits : le moindre doute sur sa certitude doit le faire rejetter. Je le compare à une terre mouvante, sur laquelle on ne peut élever aucun édifice solide, & dont la chûte seroit d'autant plus prochaine que cet édifice seroit plus considérable.

Mille exemples rendroient sensible cette vérité. La violence peut seule y faire quelque exception. Mais si des ennemis de toute justice tiennent les ames foibles dans les liens de l'erreur, la raison, quoique humiliée, ne perd pas ses droits, & le Sage ne cesse de les reclamer.

Ce que je dis ici en général, s'applique naturellement à mon sujet. Dans toutes les questions géométriques, où l'imagination impérieuse a trop pris sur le jugement, où des Hommes de réputation & de crédit ont voulu faire recevoir pour vérités des conséquences justes, déduites de principes incertains; on a vû des génies assez courageux pour remonter à ces principes & pour en péser la certitude. L'idée seule de l'Infini a été suspectée par ceux même qui joüissoient à pleines mains des avantages du Calcul qu'on en avoit déduit. Les richesses qu'on recueilloit, toutes séduisantes qu'elles étoient, n'empêchoient pas qu'on ne se méfiât de ses grandes promesses. M. *Maclaurin*, l'un des plus grands Géometres de ce siecle, éléva le premier sa voix au milieu des acclamations qu'attiroient les utilités réelles du Calcul des Infiniment-Petits. Il oſa avertir du danger qu'on couroit en s'y livrant avec tant de confiance. Il n'y a rien de concevable, dit-il, dans la ſuppoſition d'un nombre Infiniment-Grand ou Infiniment-Petit; & le paſſage du Fini à l'Infini eſt obſcur & incomprehenſible. D'où M. *Maclaurin* conclud que c'eſt nuire à l'exactitude de la Géométrie, que d'y admettre ces ſortes de ſuppoſitions. Cependant les conſéquences qu'on tire de ces ſuppoſitions, ſont des vérités réelles. Et qu'importe que le principe établi ſoit incompréhenſible ou non, pourvû qu'il nous conduiſe à la découverte de la vérité? Premierement le principe étant inconnu, nous ignorons ſi toutes les conſéquences qui s'enſuivront, ſeront juſtes : ainſi nous marchons ſans connoiſſance, & il peut arriver qu'après bien du travail, nous parvenions à quelque ſujet qui tienne de la nature du principe, c'eſt-à-dire que nous ne connoiſſions pas. En ſecond lieu, n'eſt-ce pas dégrader furieuſement la raiſon que de s'en ſervir pour ſuivre un enchaînement, dont elle ne pénétre ni le commencement, ni la fin? Un grand mal nait de cette eſpece de routine : c'eſt que l'eſprit accoûtumé à opérer ſans connoiſſance de cauſe, perd l'habitude de penſer, & n'agit plus que machinalement. Auſſi voit-on les jeunes Gens les plus incapables de refléxions, devenir facilement habiles Calculateurs; parce que dans l'âge tendre, tout ce qui ſe dérobe aux ſens eſt pénible, & qu'on ne juge que de ce qui les affecte actuellement, ſans pouvoir pouſſer guéres plus loin ſes connoiſſances.

Comme

Comme on croit que cette aptitude eſt un fruit du génie, on fait ſonner bien haut ce ſuccès ; & un enfant ſe trouve grand Homme, ſans qu'il ſe ſoit encore aviſé de penſer. Les éloges qu'on lui croit dûs, & qu'on ne ceſſe de lui prodiguer, le perſuadent. En faut-il davantage pour faire éclorre dans lui l'orgueil, enfant chéri de l'ignorance, & pour le rendre dans la ſuite un homme vain, preſque inutile à la Société & toûjours inſupportable ?

Mais ſans nous arrêter aux inconvéniens que l'abus ſeul du Calcul en général, & particuliérement de *celui* des Infiniment-Petits, pourroit produire, attachons-nous aux utilités réelles qu'on en retire, ou qu'on en peut retirer, & tâchons de parvenir au faîte de cet édifice, quelque lieu que nous aïons de nous défier de ſes fondemens.

Quoique la découverte du Calcul des Infiniment-Petits ſoit une découverte de nos jours, ſon origine tient cependant à celle de la Géométrie. Dès les premiers pas que les hommes ont fait dans cette Science, la connoiſſance des courbes a été un des plus importans objets de leur travail ; & c'eſt en cherchant à parvenir à cette connoiſſance, qu'on a découvert le Calcul des Infiniment-Petits. C'eſt cette invention, précédée de pluſieurs autres d'un genre different, qui forme l'Hiſtoire théorique de ce Calcul. La premiere idée qu'on a eûe à ce ſujet, eſt la véritable époque de ſa découverte. Celles qui en ſont provenues, dévoilent continuellement de plus grands jours, & depuis ce point qui en eſt le crépuſcule, on apperçoit des nuances de clarté toûjours plus vives, dont le terme eſt à la vérité plein de lumiere, mais que des Génies du premier ordre pouvoient ſeuls faire briller à tous les yeux & répandre ſur tous les objets.

Tant que les premiers Mathématiciens n'eurent que des figures terminées par des lignes droites à connoître, la Géométrie fit des progrès rapides. Parvenus enfin aux curvilignes, leur méthode ſe trouva en défaut. Comme dans ces tems reculés on poſſedoit l'art de découvrir des quantités inconnues, en cherchant leur rapport à l'égard des quantités connues, on eſſaya de comparer les figures rectilignes aux figures curvilignes. Cela ſuppoſoit une connoiſſance parfaite des premieres ; & on s'attacha à acquérir cette connoiſſance. Aïant d'abord trouvé que les triangles ſemblables ſont entre eux comme le quarré de leurs côtés homologues, on eut la proportion des poligones, qui eſt la même que celle des triangles, puiſqu'un poligone n'eſt qu'un aſſemblage de pluſieurs triangles. Ce fut avec ce principe que les premiers Mathématiciens ſe hazarderent à toucher aux courbes. Ils commencerent par la circonférence du cercle, qu'ils voulurent déterminer en la comparant à un poligone plus approchant que tout autre quelconque de cette figure curviligne. A cette fin ils inſcrivirent des poligones dans le cercle qu'ils augmentoient à volonté, ſoit en multipliant le nombre de leurs côtés, ſoit en le diminuant. On vit par ce moïen qu'il y avoit, ou qu'il devoit y avoir, un poligone qui devint presque égal au cercle. Toute générale qu'étoit cette idée, elle étoit trop heureuse pour ne pas donner quelque fruit. Elle conduisit à chercher si ces changemens des poligones inscrits altéroient la proportion connue & établie entre eux. Or on reconnut que pendant tous ces tems d'accroissemens & de décroissemens, ces poligones gardoient toûjours la même raison, qui est, comme on a vû, celle de leurs côtés homologues, c'est-à-dire du quarré des diamétres de leur cercle. Donc la proportion de ces cercles, dans lesquels on avoit inscrit un poligone, est la même que celle de ces poligones. Donc ces cercles sont comme le quarré, ou en raison doublée de leur diamétre. Et voilà une proportion générale démontrée, & la raison de la courbure du cercle à son diamétre presque connue.

Ces conséquences si justes s'étendirent, pour ainsi parler, sous la main des hommes de génie, à qui on les devoit. Elles servirent en premier lieu à démontrer les proportions des piramides, des spheres, des cones. Ensuite on les mit en œuvre pour déterminer les autres courbes. De même qu'on avoit comparé les poligones au cercle, cette courbe une fois connue, on la compara à d'autres courbes. Pour l'ellipse, par exemple, des poligones, furent inscrits dans le cercle & dans une demi-ellipse, & le diamétre du cercle servant d'axe à l'ellipse, on démontra, en faiſant le même raiſonnement qu'on avoit fait pour le cercle, on démontra, dis-je, que le demi-cercle eſt à la demi-ellipſe dans la proportion conſtante des poligones inſcrits.

Il auroit été bien poſſible de déduire de ces connoiſſances une méthode pour connoître les aires des courbes, & cela en les confondant avec les poligones inſcrits, dont le nombre des côtés auroit été augmenté à l'infini; mais ce moïen ne fut pas eſtimé bien géométrique. Ce nombre infini ne préſentant rien à l'eſprit qui put le fixer, il parut plus convenable de chercher une autre voye. Puiſque la comparaiſon du cercle au poligone inſcrit avoit été fort heureuſe, on conjectura que le même parallele fait avec le poligone circonſcrit, pourroit procurer quelque lumiere ſur les vûes & les ſoins actuels. Cette conjecture eut tout le ſuccès qu'on pouvoit en attendre. Ce parallele fit voir que les aires curvilignes étoient les limites entre les figures les plus ſimples inſcrites & les figures circonſcrites. En ſoudiviſant continuellement les aires ſur leſquelles s'appuïent les côtés de ces poligones, ces figures inſcrites & circonſcrites approchent toûjours de ces limites; enſorte que la différence entre elles devient plus petite qu'aucune quantité donnée. Les Auteurs de ces découvertes étoient néanmoins toûjours attentifs à ne pas multiplier à l'infini les côtés de ces poligones. Ils ne concevoient les figures inſcrites & circonſcrites que comme étant d'une grandeur déterminable, & ils démontroient la proportion des limites par des conclusions à l'impossible.

C'est ainsi qu'*Archimede* fit voir que l'aire du cercle est égale à un triangle dont la base vaut la circonférence, & dont la hauteur est le raïon du même cercle. Tel fut son raisonnement: Un poligone est égal à un triangle dont la base est égale à la somme des côtés du poligone, & la hauteur à la perpendiculaire abbaissée du centre du poligone sur un de ses côtés. Or le raïon d'un cercle étant la perpendiculaire abbaissée sur un des côtés d'un poligone aïant pour centre l'autre extrêmité de cette perpendiculaire, l'aire d'un triangle dont la hauteur sera égale à cette ligne, sera égale à celle de ce poligone. Maintenant qu'on décrive un cercle aïant pour raïon cette ligne; qu'on inscrive & qu'on circonscrive deux poligones à ce cercle, il est évident que l'un de ces poligones le circonscrit, sera plus grand que le cercle, & que le poligone inscrit sera moindre. Ces deux poligones seront aussi l'un plus grand, l'autre plus petit que le triangle; puisque le dernier aura un raïon plus petit que la hauteur de ce triangle, & que l'autre en aura un plus grand. Et cette raison des deux poligones au triangle sera toûjours moindre à mesure qu'on augmentera les côtés des poligones inscrit & circonscrit jusques à devenir presque nulle; desorte que l'aire du poligone circonscrit ne pourra surpasser celle du triangle que d'une quantité plus petite qu'aucun autre quantité, & que l'aire du triangle n'excédera celle du poligone inſcrit que de la même quantité. Or c'eſt ce qui arrivera en même tems à l'égard du cercle, l'aire de ces poligones approchant toûjours en même raiſon de l'aire du cercle. Donc le cercle & le triangle ſont conſtamment les limites entre ces poligones : donc ils ſont égaux. Ainſi, pour en venir à une concluſion générale, l'aire d'un triangle qui a ſa baſe égale à la circonférence d'un cercle, & ſa hauteur égale à ſon raïon, eſt égale à celle de ce cercle.

Telle fut la méthode dont ſe ſervit *Archimede* pour ſoûmettre les figures curvilignes à une meſure, en les comparant avec d'autres figures plus ſimples. Cette méthode fut long-tems en uſage. Dans la vûe de la ſimplifier, on crut qu'on pouvoit ſe paſſer de concevoir des figures circonſcrites & inſcrites dans des aires curvilignes, comme étant toûjours finies & déterminables. L'expédient qu'on trouva pour cela, fut de ſubſtituer à ces figures finies & déterminables des élémens indiviſibles ou Infiniment-Petits. Le nombre de ces élémens étant ſuppoſé infini, leur ſomme eſt évidemment égale à l'aire curviligne. On doit cette idée à *Cavallieri*. Quelque ſéduiſante qu'elle lui parut par ſa ſimplicité, elle ne le raſſura pas ſur ſon entiere certitude. Ce nombre infini lui paroiſſoit géométriquement indéterminable. Il tâchoit donc d'écarter cette idée de nombre infini, lorſqu'il reconnut bien des difficultés qu'il ne put réſoudre. C'en fut aſſez pour lui rendre ſuſpecte ſa nouvelle Géométrie. Afin de l'appuïer, *Cavallieri* joignit des démonstrations incontestables à celles qu'il avoit déduites de ces principes hypothetiques ; mais ce mêlange de vérités & de suppositions, bien loin de rassurer les esprits, les inquiéta. On vit alors pour la premiere fois (selon la juste remarque de M. *Maclaurin*, dans l'Introduction de son *Traité des Fluxions*) des disputes parmi les Géometres.

Cependant *Wallis*, touché des avantages qui résultoient d'une supposition de quantités Infiniment-Petites, travailloit à soumettre ces quantités au calcul, c'est-à-dire à trouver une quantité particuliere, comme une ligne, une surface, un solide, par une progression réguliere, ou par une suite de quantités, qui s'approchant continuellement de celle que l'on cherche, & qui étant continuée à l'infini, lui devint parfaitement égale. Cette nouvelle méthode parut en 1655, sous le nom de l'*Arithmetique de l'Infini* : en voici le fondement.

D'abord *Wallis* suppose que les aires des parallélogrammes sont composées d'une suite infinie de lignes droites égales ; que l'aire d'un triangle rectiligne est composée d'une suite infinie de lignes droites paralleles à sa base, & qui décroissent également jusques à se terminer à un point au sommet de l'angle opposé à sa base ; que l'aire d'un cercle est composée d'une suite infinie de cercles concentriques, ou d'une suite infinie de cordes paralleles à son diamétre ; que l'aire de l'ellipse, de la parabole, de l'hyperbole, &c, est composée d'une suite d'ordonnées, ou de lignes droites paralleles à l'axe. Ces suppositions admises, pour trouver l'aire de toutes ces figures, il ne s'agit que de déterminer la progression de chaque suite infinie & de la sommer. Mais la chose est-elle possible ? Peut-on additionner des termes dont on suppose le nombre infini ? Puisque la suite est infinie, elle ne doit point avoir de dernier terme. Vouloir lui en assigner un, c'est détruire bien clairement l'essence de la suite, laquelle consiste dans la succession de termes, qui peuvent être suivis d'autres termes, ceux-ci par d'autres encore de même nature que les précédens, c'est-à-dire tous finis, tous composés d'unités : ainsi de suite jusques à l'infini. A cette objection l'Auteur de cette belle Arithmétique, *Wallis*, fait cette réponse. Après avoir démontré, dit-il, (& sa démonstration est très-exacte & réconnue pour telle) que dans une progression de quantités arithmétiquement proportionnelles commençant par zero, la somme de deux, trois, quatre, cinq, six termes est toûjours égale à la moitié du plus grand terme répété autant de fois ; & n'y aïant aucune raison pour que cela ne soit pas vrai dans une progression de sept, de huit, de neuf, de dix, &c. termes, on doit conclurre que la chose doit être, quand même le nombre des termes seroit supposé infini. Ce raisonnement a lieu pour la progression des quantités élévées à une puissance quelconque. Et M. *Wallis* conclud toûjours qu'il n'y a aucun lieu de douter que la chose ne soit vraie, quelque grand que soit le le nombre de termes (*Wallis Opera, Hiſtoria Algebræ.*)

Tout ceci n'eſt cependant, comme l'on voit, qu'une conſéquence par induction : auſſi dans une ſuite continuée à l'infini, la ſomme n'eſt point déterminée. C'eſt pourquoi ſi la ſomme d'une ſuite finie eſt un quart du dernier & plus grand terme, cette ſuite étant continuée à l'infini, à meſure que le nombre des termes augmentera dans la ſuite, l'excès au-deſſus de ce quart diminuera, & cet excès étant toûjours un quart d'un nombre de termes moins un quart, la ſuite étant ſuppoſée continuée à l'infini, il deviendra infiniment petit, égal à zero. Il ne reſte qu'à négliger cet Infiniment-Petit pour être en droit de conclurre, dans cet exemple, qu'un plus grand terme eſt la ſomme vraie de tous les termes de cette ſuite.

Cette conſéquence une fois adoptée, il n'y a point de queſtions point, de problêmes aſſez élévés, auxquels on ne puiſſe atteindre. Les Géometres l'ont bien compris, & depuis qu'elle eſt reçûe, rien ne leur coute. On vient à bout de réſoudre des difficultés dont l'idée n'eſt pas concevable. L'énoncé ſeul du Problême, inſéré dans les Elémens de Mathématique du P. *Lami*, étonne l'imagination la plus hardie. Le mauvais Riche brûlé de ſoif, prie, dit-on, Abraham de lui laiſſer diſtiller un goute d'eau. Abraham obtient ce qu'il demande. Il laiſſe tomber une goute d'eau, qui fait 100 lieuës à la premiere minute, 99 à la ſeconde, ainſi de ſuite, toûjours en même proportion à chaque minute de 100 à 99. Or la distance des lieux où sont Abraham & le mauvais Riche étant supposée infinie, on demande en combien de tems cette goute arrivera au mauvais Riche? On répond à cela, jamais. En effet, l'espace étant infini, la goute d'eau ne peut pas parvenir à un terme. On conçoit bien que la chose ne peut être autrement. Mais ce qui a droit de surprendre, c'est qu'on détermine le nombre des lieues que feroit la goute en tombant pendant une éternité; & ce nombre est 100000 lieues. Voilà donc une quantité finie déterminée, quoiqu'il n'y ait point de terme auquel elle soit limitée, le tems de la chûte d'eau étant infini. Cela est assurement inconcevable. Afin de rendre la chose sensible, on fait observer, que la chûte de la goute d'eau est rétardée, suivant l'hypothese, à chaque minute. Ce rétardement augmentant toûjours, il devient à la fin si peu considérable, qu'on peut le regarder comme nul. Alors la goute d'eau ne se meut pas; puisqu'on néglige son mouvement, qui est infiniment petit. La question est de savoir, si on peut négliger cet Infiniment-Petit, & si dans un tems infini, ce rétardement, quoique toûjours plus petit, n'a pas une valeur réelle. Notre esprit se perd dans ce raisonnement. Nous concevons que la progression decroissant toûjours, la valeur des termes doit diminuer tellement qu'elle ne soit pas sensible, & cependant nous voulons que le nombre des termes, qui composent cette progression, soit infini. Ceci est tout-à-fait contradictoire. Nous supposons que la soudivision d'un Etre peut se continuer à l'infini, & dès que cette soudivision devient telle, que nous ne pouvons plus la saisir, nous regardons comme nul, le reste de cet Etre infiniment petit, quoique nous voulions qu'il y ait encore dans lui une division infinie, & que nous égalons néanmoins à zero. Cela est admirable : nous voulons concevoir l'infini, & connoître cet infini par le fini même. Cette contrarieté vient de ce que nous ne savons au juste ce que c'est que l'infini. Dire qu'une chose est infinie, c'est dire que nous n'y connoissons pas de terme ; & dès-lors nous devons rejetter tout ce qui sembleroit supposer en nous cette connoissance. En Physique au sujet de la divisibilité des corps, on trouve la même contradiction. Il est également démontré que la matiere est divisible à l'infini, & qu'elle ne l'est pas (*Voyez* l'Article DIVISIBILITÉ dans mon *Dictionnaire Universel de Mathématique & de Physique.*) Pourquoi ? Parce que nous voulons raisonner sur l'infini, suivant la remarque de M. *Locke*, comme si nous en avions une idée parfaite & aussi positive que le nom, dont on se sert pour l'exprimer. Il n'est donc pas surprenant, continue le même Auteur, que la nature incompréhensible des choses, dont on parle, nous jette dans des perplexités & des contradictions, & que notre esprit soit accablé par un objet trop vaste & trop élévé. En effet l'inassignable excéde les bornes de notre conception, & l'inassignable est subordonné à l'infini.

Concluons donc avec un célébre Auteur, qui a refléchi sur cette matiere (M. *de Buffon* dans sa Préface de la traduction du *Traité des Fluxions* de *Newton* Page 10.) que nous ne devons considérer l'infini, soit en petit, soit en grand, que comme une privation, un retranchement à l'idée du fini; & alors il est permis de s'en servir comme d'une supposition, qui dans quelque cas peut être utile pour simplifier les idées & généraliser leur résultat dans la pratique des Sciences. C'est en se bornant là que Milord *Brounker* & *Mercator* suivirent les vûes de *Wallis* : ils étendirent sa méthode. *Brounker* aïant trouvé une suite infinie, toute composée de termes finis & connus, détermina l'aire de l'hyperbole, ou pour parler le langage des Géometres, la quarra. Aussi-tôt *Mercator* en donna la démonstration à la maniere de *Wallis*. *Jacques Gregori* publia presque dans le même tems que *Mercator* une démonstration de cette quadrature de l'hyperbole. Et toutes ces découvertes furent envoïées à *Barrow*, ce Géometre fameux, qui a la gloire de compter le grand *Newton* parmi ses disciples.

Barrow voulut ajoûter à ces progrès. Il considera la nature des poligones de plus près qu'on n'avoit encore fait, & y vit un petit triangle formé d'une particule de la courbe, comprise entre deux lignes infiniment proches, paralleles à un des axes de la courbe, de la différence de ces deux lignes, & de celle des lignes prises sur l'autre axe appellées abcisses ou coupées correspondantes. Ce Triangle inconnu par lui-même, se trouvoit cependant semblable à un autre bien connu : c'est le triangle formé par la tangente, par l'appliquée & par la soutangente. Ainsi avec une simple régle de proportion entre les parties du grand triangle & celles du petit, *Barrow*, détermina les proportions du petit triangle. Il ne falloit plus que connoître un de ses côtés, tout le petit triangle étoit connu, & par conséquent la portion infiniment petite de la courbe, qui en étoit la base. Une infinité de triangles ainsi formés, devoit donc dévélopper toute la courbe. L'Auteur de cette découverte le comprit parfaitement. Flatté de cette conséquence, il se livra entiérement à la recherche, dont elle dépendoit. Rien ne coûte aux esprits que touche la vérité de quelque genre qu'elle puisse être. L'entrevûe d'une nouveauté donne à ces esprits des forces qu'ils ne se connoissoient point eux-mêmes. Ce fut cet aiguillon, qui échauffant le génie de *Barrow*, lui fit entrevoir une espece de Calcul propre à la découverte, dont il étoit occupé ; mais cet effort ne satisfit qu'à une partie de ses désirs. Il se ressentoit de la foiblesse de l'esprit humain, qui n'atteint à la perfection que par dégrés. Semblable à celui que *Descartes* avoit trouvé auparavant pour mener les tangentes des courbes, ce Calcul étoit affecté de fractions & de signes radicaux, qu'il n'étoit pas aisé de faire évanoüir.

Barrow n'eut donc pas la satisfaction de perfectionner sa découverte. Cette perfection étoit encore trop élévée pour qu'un esprit fatigué par tant d'efforts, pût parvenir jusques-là. Il falloit un génie tout frais en quelque sorte, & qui sût profiter des connoissances précédentes, afin d'en acquérir de nouvelles. Encore un objet si sublime demandoit-il un génie transcendant. *Newton* & *Leibnitz* parurent dans le monde, & le nœud de la difficulté fut coupé. Ces deux grands hommes inventérent un nouveau Calcul, par le moïen duquel ils résolurent le triangle de *Barrow*. Il est presque démontré que c'est à M. *Newton* qu'on doit ce Calcul (*Voïez* l'Histoire de cette découverte à l'article CALCUL DES INFINIMENS-PETITS du *Dictionn. Univ. de Math. & de Physiq.*). Cependant comme la maniere, dont *Leibnitz* l'a envisagé, dépend des principes précédens, je commencerai par sa méthode, afin de ne pas perdre le fil du progrez du Calcul dont je fais l'histoire.

Le petit triangle de *Barow* n'étoit donc point résolu, quoique sommairement connu par son analogie à un triangle semblable déterminé. Mais quelque générale que fût cette connoissance, *Leibnitz* fonda sur elle son nouveau Calcul. Il considéra ce petit triangle comme l'élément du grand auquel il étoit semblable, en confondant la courbe avec la tangente, c'est-à-dire, en prenant l'arc même pour la tangente. Ainsi chaque côté du petit triangle, semblable au grand, n'étant qu'un accroissement des côtés de ce dernier, M. *Leibnitz* les désigna par les mêmes lettres, qui exprimoient les côtés analogues du grand, en y joignant une autre lettre caractériftique pour les diftinguer de leurs côtés générateurs. Après cela cet illuftre Savant chercha à connoître le petit triangle, en formant avec le grand, femblable à celui-ci, la même analogie déja pratiquée par *Barrow*. Parce que le calcul avoit été fait avec des lettres, & que celles qui exprimoient le petit triangle, étoient caractérifées expreffément par une autre lettre, l'hypothénufe du petit triangle, qui eft une partie de la courbe, fut ainfi à découvert.

Leibnitz eut donc l'hypothénufe de ce petit triangle en termes connus, en tant que les autres côtés du petit triangle l'étoient. Il ne reftoit plus qu'à réduire cette hypothénufe à celle du grand, c'eft-à-dire à en trouver le *facteur*, ou autrement l'expreffion de laquelle elle avoit été tirée. Je m'explique : comme des côtés du petit triangle il étoit aifé de parvenir aux grands qui les avoient formés, en les décompofant & en dégageant la lettre caractériftique, par laquelle ils étoient défignés particuliérement, on pouvoit décompofer l'hypothénufe de la même maniere, pour trouver le grand arc, qui avoit dû la former. C'eft ce que fit M. *Leibnitz*. De-là il parvint facilement à déterminer l'aire comprife entre l'ordonnée, l'abciffe & l'arc de la courbe.

Au lieu d'un triangle, *Leibnitz* forma enfuite un petit parallélograme de l'accroiffement de l'ordonnée & de l'abciffe, dont un arc infiniment-petit de la courbe étoit un des côtés. La furface de ce petit parallélograme étant ainsi mesurée ou exprimée en termes connus, au petit arc près, eu égard à leurs côtés générateurs, l'Auteur de cette admirable méthode, le grand *Leibnitz*, décomposa cette expression pour en trouver les facteurs, comme il avoit fait lorsqu'il avoit cherché la longueur de la courbe : ce qui lui donna l'aire ou la *quadrature* de cette courbe.

Avant que d'aller plus loin, saisissons le principe du nouveau Calcul. Il consiste à enveloper en quelque sorte une quantité inconnuë (l'arc de la courbe) avec des quantités connuës, ou du moins dont le rapport est connu (celui des ordonnées & des abcisses, ce qui forme l'équation de la courbe) & à dépouiller celle-là (supposée connuë par sa petitesse) de celles-ci. Cela forme deux opérations. La premiere est de prendre l'accroissement ou la *différence* de plusieurs quantités : c'est ce que M. *Leibnitz* appelle *Calcul-différentiel*. Il s'agit dans la seconde opération de décomposer cet accroissement tout formé pour découvrir les quantités, qui l'ont produit : & on la nomme le *Calcul-intégral*; parce qu'on remonte à des quantités entieres. Et voilà le fond des deux célébres Calculs, le *Calcul-différentiel* & le *Calcul intégral*, dont l'étenduë, suivant l'expression de M. le *Marquis de Lhôpital*, est immense. C'est ce que je vais vérifier, sans quitter l'enchaînement que j'ai suivi jusques-ici.

Le Calcul-différentiel est donc l'art de comparer les différences infiniment petites des quantités finies,

finies, & de découvrir le rapport de ces différences, afin de connoître ceux des quantités finies. Ces différences infiniment petites sont, comme on vient de voir, des accroissemens de quantités finies. La quantité infiniment petite d'un parallélograme est le produit de la différence de ses deux côtés; celle d'un cube, d'un parallélipipéde le produit de ses dimentions; ainsi de toute autre puissance des quantités divisées, comme des quantités radicales, qui ne sont que des quantités élevées à une puissance *. Ces quantités s'ajoûtent, se multiplient, se divisent, &c. comme les quantités finies. On en forme des équations avec les quantités finies; & regardant celles-là comme inconnuës, on les fait évanoüir en les égalant à celles-ci par les règles ordinaires de l'algèbre. C'est ainsi qu'on fixe la valeur des quantités finies inconnuës, par les élémens. L'opération nécessaire pour cela demande deux équations. L'analogie, qu'il y a entre les quantités finies & les quantités infiniment petites, forme la premiere. L'équation de la courbe, à laquelle les quantités finies se rapportent, est la seconde. Les termes de celle-ci, qui sont connus, se substituent aux membres de l'autre, auxquels ils sont égaux; & par-là on connoît les quantités finies.

Il suit de-là que toutes les questions, tous les problêmes à résoudre, dont les courbes pourront repré-

* On apprend en Algèbre, qu'une puissance, dont il faut extraire la racine quarrée, n'est qu'une quantité élevée à la puissance $\frac{1}{2}$; celle qui est affectée d'une racine cubique à la puissance $\frac{1}{3}$, &c.

ſenter les quantités finies qui formeront les conditions de ces problêmes, ſe réſoudront par le Calcul-différentiel. Et cela eſt fort étendu. Lorſque la concavité d'une courbe eſt déterminée par une ligne, qui eſt la plus grande de toutes celles qui ſe terminent ſur la courbe, & que la convexité eſt limitée par une ligne, qui eſt la moindre de toutes celles qu'on peut mener entre la tangente d'une courbe & cette même courbe, ces lignes rapportées à des quantités, & repréſentant les plus grands ou les moindres efforts compris entre ces deux extrêmes, pourront ſervir à trouver les plus grands (les *maxima*) ou les moindres effets (les *minima*). Il ne s'agira donc plus, pour réſoudre les problêmes de Mécanique, d'Hydraulique, dans leſquels on aura les moindres ou les plus grands efforts à déterminer, que de chercher la plus grande ou la moindre ordonnée d'une courbe.

Dans le premier cas (le *maximum*) l'ordonnée & l'abciſſe croiſſent en même-tems juſques à la plus grande abciſſe. Leur élément augmente donc toujours; parce que l'abciſſe approche toujours de la plus grande concavité. Mais parvenu là, cet élément diminuë; il devient négatif. Ainſi aïant formé l'élément de l'équation de la courbe, ce qu'on appelle autrement différentié cette équation, cet élément doit être nul, & par conſéquent égal à zéro. Délivrée de ſes différentielles, l'équation de la courbe ſe réſoud en des quantités connuës, qui donnent la plus grande ordonnée, ou la plus grande abcisse ; & cela par la même raison & de la même maniere qu'on a vû ci-devant.

Il en est ainsi d'un *minimum*, avec cette différence que dans ce cas l'abcisse diminuë continuellement pendant que l'ordonnée croît ; puisque cette abcisse approche toujours du point de la moindre convexité, passé lequel elle augmente. L'élément est par conséquent nul, lorsqu'on considere la moindre abcisse : il est donc égal à zéro. Et l'équation de la courbe se trouve, comme dans le *maximum*, dégagée de ses différentielles.

On peut juger, par ces connoissances, de l'étenduë du Calcul - différentiel. Toutes les équations, tous les problêmes généraux, ou généralement exprimés, dont les conditions pourront former une équation, qu'on supposera exprimer le rapport de l'ordonnée & de l'abcisse d'une courbe quelconque se résoudront par ce Calcul.

Ce n'est-là qu'une partie du Calcul des Infiniment-Petits de *Leibnitz*. Outre cette maniere de connoître les quantités finies par les quantités infinies, on parvient encore à cette connoissance en remontant de celles-là à celles-ci. J'ai déja parlé de ce moïen : c'est ici le Calcul-intégral. Mais cette opération est quelquefois très-pénible, & souvent impossible. Quand les différentielles sont séparées ; qu'elles ne renferment aucune quantité élevée à une puissance, & que tous les termes n'ont qu'une seule variable, qui soit élevée à une puissance quelconque, on intégre chaque différentielle séparément. Si cela n'eſt pas, on eſt obligé de chercher un facteur, qui rende l'équation différentielle intégrable en multipliant tous ſes termes.

Voilà la théorie du Calcul des Infiniment-Petits, ſuivant les principes de *Leibnitz*. En la dévelopant, j'ai négligé une difficulté, qui ſe préſente dès les premiers principes de cette théorie : c'eſt ſur la maniere de prendre la différence d'une quantité variable. Lorſqu'on différentie une quantité élevée à une puiſſance, un quarré, par exemple, on multiplie le côté d'un quarré par ſon élément, ou ſa différence par lui-même. Or le produit donne d'abord le quarré du côté de ce quarré, plus deux fois le produit compris ſous les parties de ce côté différentié. De ces deux produits, l'un eſt la véritable différence du quarré, & l'autre eſt la différence de cette différence. Suivant les principes du Calcul des Infiniment-Petits, on néglige cette ſeconde différence. Mais cette ſeconde différence, qui tient à la premiere, peut-elle ſe négliger ? C'eſt une queſtion, qui a donné lieu aux difficultés, qu'on a propoſées contre le Calcul, qui nous occupe. On a prétendu, que cet Infiniment-petit, quoique du ſecond ordre, ne devoit point être regardé nul, en bonne rigueur géométrique, & que ſi on introduiſoit de pareilles licences dans les ſciences exactes, cette liberté auroit de facheuſes ſuites.

Cette objection paroît d'autant mieux fondée, que la quantité négligée, comme égale à zéro, a tous les caracteres d'une quantité réelle. Cependant rien n'eſt plus mal fondé. Quand on a d'un Infiniment-Petit l'idée qu'on en doit avoir, les moindres ſcrupulent s'évanoüiſſent. Q'ues-ce en effet qu'une quantité infiniment-petite, ſi ce n'eſt une quantité moindre que toute quantité aſſignable, & qui n'eſt rien en comparaiſon d'une quantité finie quelconque? De telle ſorte qu'une quantité finie ne ſauroit croître ou diminuer par l'addition ou la ſouſtraction d'une quantité infiniment petite. Ainſi une quantité, qui n'eſt augmentée ou diminuée que d'une quantité infiniment petite par rapport à ſon tout, peut être priſe pour la même qu'elle étoit avant ce changement. On doit donc conclurre, qu'une quantité infiniment petite n'eſt abſolument rien par rapport à une quantité finie. Celle-là eſt à celle-ci, ce qu'une quantité infiniment petite eſt à une quantité finie. Quoique nul conſidéré relativement à une quantité finie, un Infiniment-Petit du ſecond ordre, eſt néanmoins un élément comparé à un Infiniment-Petit du premier. Tout cela dépend de la maniere de bien concevoir un Infiniment-Petit. Dans le Calcul des Infiniment-Petits, c'eſt bien moins les quantités elles-mêmes, qui en ſont l'objet, que le rapport de ces quantités; & ces rapports n'ont de valeurs réelles, que celles qu'on leur aſſigne.

Ceci eſt aſſurément de la derniere évidence. Cependant on a cru pouvoir attaquer la certitude du Calcul des Infiniment-Petits par l'endroit que je viens d'expliquer. Dans la naiſſance de ce Calcul, cette omiſſion fut un ſujet de querelle. On préſenta même la choſe d'une maniere ſi captieuſe, que les Géométres ſe virent obligés de s'expliquer avec plus de clarté & d'étenduë. D'ailleurs cette ſuppoſition de quantités infiniment-petites étoit toujours une ſuppoſition, qu'on diſoit ne devoir point être admiſe dans la Géométrie. On ſe rappelloit les ſcrupules d'*Archimede* & de *Cavalieri*; & tout cela fortifioit les chicanes, qu'on faiſoit à la ſolidité des principes du Calcul des Infiniment-Petits.

Ce fut ſans doute pour les prévenir ces chicanes, qu'on enviſagea ſous un autre face la théorie de ce Calcul. Au lieu de ſuppoſer les quantités augmentées de quantités infiniment-petites, *Newton*, pour éviter toute hypotheſe, conſidéra comme finis les incrémens ſimultanés, & chercha la raiſon que ces incrémens ont les uns avec les autres, pendant qu'ils croiſſent ou décroiſſent tous enſemble juſques à diſparoître. Les courbes ne furent plus alors conſidérées comme étant formées par des lignes droites infiniment petites & différemment inclinées les unes aux autres. *Newton*, ne voulant rien ſuppoſer, pour connoître les courbes les forma lui-même, & examina les loix de leur génération. Il conçut les aires terminées par des lignes courbes, comme produites par le mouvement des ordonnées ſur l'abciſſe. Ainſi les accroiſſemens de ces aires doivent être entre eux, comme les ordonnées génératrices des deux aires & peuvent être repréſentés par ces mêmes ordonnées; parce que le rapport des ordonnées eſt le rapport des accroiſſemens naiſſans des deux aires. D'où il ſuit, que les viteſſes des ordonnées, qui coulent ou *fluent* (ſuivant l'expreſſion de *Newton*) ſur la baſe en formant une courbe, que ces viteſſes, dis-je, accélérent leur mouvement, pour rendre la courbe plus concave, c'eſt-à-dire, pour que l'aire de la courbe augmente. Au contraire, ces ordonnées ſe meuvent d'une viteſſe retardée, ſi la concavité de la courbe diminuë, ou ſi l'aire devient moindre. Enfin, il eſt évident que le mouvement de l'ordonnée eſt uniforme, lorſque la courbe n'acquiert point de variation, & par conſéquent que la ſurface qu'elle décrit eſt exactement un parallélograme. Cela revient à la ſuppoſition qu'une partie infiniment-petite d'une courbe eſt une ligne droite.

Tant que les mouvemens générateurs des quantités ſont uniformes, il n'y a dans la courbe aucun changement, & la partie décrite eſt une ligne droite. Le petit triangle, qui ſeroit formé ſi la viteſſe ou la *fluxion* (c'eſt ainſi que *Newton* nomme la viteſſe) eût été accélérée ou rétardée, n'a donc plus lieu : ce triangle ne ſervant qu'à meſurer l'accélération ou le retardement de l'aire de la courbe. Donc toutes les fois que des quantités flueront uniformément, les viteſſes ou les fluxions, qui exprimeroient les variations de ces quantités, n'auront plus lieu. Ce ſont précíſément ces fluxions qu'on néglige, lorſqu'on prend la différence du quarré, dont j'ai parlé ci-devant. La quantité infiniment-petite de la quantité infiniment-petite du quarré, n'eſt que le petit triangle de la courbe. Cette premiere quantité ne sert qu'à mesurer l'accélération ou les côtés du quarré qui fluent ; & par conséquent n'a aucun droit sur le mouvement uniforme de ces côtés.

Tels sont les fondemens du Calcul de *Newton*. Les règles & les usages de ce Calcul sont les mêmes que ceux de celui de *Leibnitz*. Ce que ce dernier appelle différence, *Newton* le nomme *fluxion*. Et la maniere de trouver les fluxions des quantités est la même que celle que donne *Leibnitz* pour trouver les différences. Ce Calcul, ou *Méthode des Fluxions*, a deux parties. De même que dans le Calcul de *Leibnitz*, de la différence on remonte à la quantité qui l'a formée, la vitesse ou la fluxion étant connuë, dans celui *Newton* on parvient à la quantité qui a flué, nommée, à cause de cela, *fluente*. Quand on connoît la théorie générale, ou le principe fondamental de la méthode des fluxions, tel que je viens de le donner, il n'y a plus qu'à substituer au mot *différence* celui de *fluxion*, & à celui d'*intégrale* celui de *fluente*. La seule différence qui pourroit s'y trouver, en conservant les termes de *Newton*, c'est qu'on opere avec plus de confiance, lorsqu'on se rappelle qu'il ne s'agit ici que de vitesse à trouver d'un corps en mouvement, au lieu de supposer sans cesse de quantités infiniment-petites produites par de quantités finies. Ce mot de quantités infiniment-petites, ne représentant à l'esprit rien de déterminé, le prive dans son travail de cette satisfaction, qu'il ressent toujours dans l'étude de la pure Géométrie. A cette

délicatesse

délicatesse près, la méthode des fluxions revient au Calcul des Infiniment-Petits ; & quand on est bien convaincu que cette quantité est quelque chose de réel, que c'est une vitesse, ce Calcul est plus commode, sa caractéristique étant plus frappante, & moins sujette à induire en erreur que celle de la méthode des fluxions *.

Qu'on prononce maintenant si le Calcul des Infiniment-Petits est un Calcul utile. Rien sans doute de plus hardi & de plus grand que l'idée seule de ce Calcul. C'est bien véritablement épuiser les ressources que de chercher à découvrir les quantités inconnuës, non par leurs parties connuës actuellement, mais par celles qu'elles peuvent produire. Il faut ou n'avoir jamais senti la beauté de ce Calcul, ou être bien de mauvaise foi pour vouloir le décrier. On a beau dire que dans ses opérations l'esprit n'est point éclairé, & que l'évidence nuit à la clarté. Ce n'est pas la faute du Calcul si ceux qui l'enseignent, ou qui l'emploïent, ne présentent que le résultat du Calcul plutôt que le calcul même. On se contente de rendre les opérations analytiques, sans s'arrêter à la raison de ces opérations. Parce qu'on est certain qu'on ne peut tomber dans l'erreur, on croit pouvoir se dispenser de faire connoître comment les difficultés s'évanoüissent à mesure que les expressions du Calcul se dégagent, &

* La caractéristique du calcul de *Leibnitz* est un *d* mis à côté de la quantité variable, ou qui a cru (dx) & un point dans celui de *Newton* posé au-dessus de la quantité qui a flué ($\dot{x}$).

que la question se développe. On n'enseigne pas même avec plus d'attention les règles de ce Calcul. Les plus grands Maîtres ont commis cette faute ; & j'ose dire que M. le Marquis de l'*Hôpital* en est aussi coupable, quoique l'ouvrage de cet Auteur illustre, l'*Analyse des Infiniment-Petits*, soit un chef-d'œuvre d'élégance & de clarté. Les règles & leur application aux plus beaux problêmes de Mathématique y sont dévelopées à la vérité avec une nèteté & une précision rares : mais la théorie sur laquelle est fondée la solution de ces problêmes y est totalement omise. On sent que les questions sont résoluës, sans comprendre comment elles peuvent l'être. L'esprit est convaincu & nullement satisfait. Le Calcul y tient lieu de discours ; & à moins de se replier fortement sur soi-même, & d'être instruit du principe de *Leibnitz*, on travaille avec M. le Marquis de l'*Hôpital* plus par routine que par raisonnement. Cette méthode est trop pernicieuse au dévelopement de l'esprit humain, pour n'avoir point de très-mauvaises suites. L'esprit, accoutumé à ne marcher presqu'avec ses sens, n'agit plus lorsqu'il est livré à lui-même. N'est-il point étayé ou soutenu par quelque objet présent ? Il cesse d'agir. Cependant l'habitude d'opérer pourra bien seule former de grands Calculateurs ; mais ils seront tous dépourvûs de logique. Tant qu'ils ne se proposeront de résoudre que des questions détachées, des problêmes isolés, qui ne demanderont qu'une adresse de combinaison, ils excelleront. S'agira-t'il de former un ouvrage ; d'établir une théorie ; de joindre & d'allier convenablement des principes ou des propositions ? Leur production sans liaison & sans nuances, ne sera plus qu'un monstrueux assemblage de vérités, un cahos d'idées mal assorties, les matériaux épars d'un édifice & non un bâtiment véritable.

Voilà les défauts qu'auront les ouvrages des Calculateurs, qui ne feront que cela, & voilà (pour le dire en passant) celui qui règne dans le plus grand nombre des Livres de Mathématique. Quelle que soit la cause de l'imperfection de ces ouvrages, quant à la forme & à l'ordre, rien n'y est à sa place. On trouve à la fin ou au milieu du Livre, ce qui auroit dû être au commencement. Tout est par lambeaux & par coupons, & surtout sans gradation de connoissances. Ce sont des ouvrages fondus par reprises & non d'une seule & même coulée. Je veux dire par-là qu'on compose un Livre en détail, & qu'un Chapitre est achevé avant qu'on ait formé le plan de celui qui doit suivre. Cela forme un recueil de problêmes ou d'especes de dissertations, où rien ne tient. Il est vrai qu'il est bien difficile & bien pénible de soutenir dans sa tête, sans s'égarer, tout le plan d'un ouvrage, d'en arranger intellectuellement les parties & de le mettre dans le point de vûë où l'esprit seul puisse juger de son ensemble. Peu de génies ont assez de force pour soutenir la contention que demande un semblable travail. Il faut, outre cela, être bien au-dessus de son sujet, pour le *maîtriser* avec cette facilité. C'est-là cependant le seul moïen de rendre un Livre intéressant & utile. Et si telle étoit la méthode des Mathématiciens, on verroit moins de Livres & plus de vérités. Le superflu n'inonderoit pas le nécessaire; & le tems seroit mieux emploïé pour celui qui écrit & pour celui qui étudie.

Je déveloperai ces vérités dans l'ouvrage que j'ai annoncé sur la *Maniere d'étudier, d'enseigner & de traiter les sciences Mathématiques*, & il auroit été à désirer qu'elles eussent été plutôt divulguées. On auroit plus de Savans, & moins de disputes. J'ose même avancer, que si l'on ne se hâte de suivre dans les sçiences exactes une route qui soit également lumineuse & solide, & qu'on veuille séparer, ou sacrifier l'un de ces avantages à l'autre, ou la solidité nuira à l'imagination, mere de presque toutes les découvertes, ou l'imagination fera tort au jugement, qui peut seul constater les découvertes. Cette premiere faculté de l'entendement, sacrifiée à l'autre, fera un stupide, & la seconde, subjuguée par l'imagination, formera un insensé.

Ces réflexions conduisent à une conséquence fort naturelle: c'est qu'il est dangereux de se trop livrer au Calcul, & qu'on doit ne l'emploïer que dans les cas où la méthode synthétique ne restraint point assez les matieres, qui nous occupent. Encore faut-il ne pas perdre de vûë le raisonnement & la liaison des opérations qu'exige le dévelopement des matieres. Mais quelles sont ces matieres? Y a-t'il quelque problême où l'on puiſſe ſe paſſer du Calcul ? Tout n'y eſt-il pas ſoumis ? La ſcience des cauſes par les effets s'aquérera-t'elle jamais autrement qu'en cherchant les rapports de ces effets, pour les ramener au principe commun d'où ils dépendent ? Et ce travail eſt-il poſſible ſans Calcul ?

On pourroít bien répondre affirmativement à cette queſtion ; & le *Traité des Fluxions* de M. *Maclaurin*, dans lequel les problêmes les plus élevés & les plus épineux des Mathématiques ſont réſolus ſynthétiquement, en eſt une belle preuve. Cependant l'analyſe ſera toujours préférable, lorſque les ſolutions deviendront, par ſon moïen, plus claires & plus ſimples. Car il y a tels problêmes qui ſe réſolvent avec bien de l'élégance & de la facilité par le Calcul, & qui demanderont beaucoup de circuit, & de raiſonnement, lorſqu'on voudra emploïer la ſyntheſe. Là-deſſus on ne peut preſcrire aucune règle, & c'eſt au génie du Mathématicien à ſavoir diſtinguer laquelle des deux méthodes eſt préférable. En un mot, le vrai art de découvrir les vérités les plus oppoſées ſans nuire aux facultés principales de l'entendement, c'eſt de ne point ſéparer le lumineux du ſolide, de réunir la clarté à l'évidence, & de ne laiſſer jamais agir l'eſprit ſans lui faire connoître la route qu'il tient.

A ces ſages attentions, il ſeroit à déſirer qu'on en joignit une autre pour le moins auſſi eſſentielle que celles-là : ce ſeroit de chercher la vérité pour l'amour de la vérité même. Car ſi l'on n'éprouve pas en la découvrant une ſatisfaction capable d'étouffer tous les ſentimens d'orgueil & de dédain, l'eſprit n'eſt point encore aſſez épuré; & il eſt dangereux de vouloir l'éclairer en l'occupant d'objets étrangers. *Deſcartes* ſouhaite qu'on commence par ſe dépoüiller de tous les préjugés, afin que l'ame n'aïant aucun intérêt particulier à prendre un parti plutôt qu'un autre, ſuive celui de la vérité, qui l'affecte alors de la maniere la plus forte & la plus ſenſible. C'eſt dans ce tems que peut agir l'amour propre, qui ſoutient ſeul dans les grands travaux; parce qu'il ſera toujours ſagement réprimé par la raiſon.

Quoi! ne verrai-je jamais les hommes réunis pour leurs avantages? La ſcience étouffera-t'elle la Philoſophie? Et l'eſprit ne pourra-t'il s'éclairer qu'au préjudice du cœur? On convient qu'il y a dans nous un déſir de ſavoir; que la connoiſſance de la vérité peut ſeule nous rendre heureux, & que notre vie n'eſt qu'un point à l'égard de l'immenſité de l'objet de cette connoiſſance. Et au lieu de ſe réunir, de ſe concilier, de s'aider par le concours de pluſieurs des découvertes de chacun, on ne cherche qu'à s'écarter & à ſe nuire. Dès l'enfance on vous accable de préjugés, & on vous défend de penſer. Lorſque la raiſon commence à développer, on l'enchaîne cette raiſon; & malheur à celui qui veut ſécouer le joug de l'eſclavage. Ainſi chaque homme vit & meurt ſans avoir eu la liberté de ſe reconnoître. Les Savans & les Gens de Lettres, à qui il appartient ſeuls de donner des loix, parce que ce n'eſt que par l'étude & la réflexion qu'on peut les découvrir, plient baſſement ſous le poids des erreurs populaires. Ils font plus : ils ſe dégradent les uns-les-autres, & n'oublient rien pour ſe donner en ſpectacle aux yeux d'un certain Public, qui ne manque pas de mettre à profit ces foibleſſes.

Puiſſent ces réflexions être reçûës avec indulgence, & mériter l'attention de ces ames bienfaiſantes, nées pour l'honneur de l'humanité, qui, par les qualités les plus précieuſes, la maintiennent dans tous ſes droits ! Car il eſt encore des hommes fermes pour les intérêts de la vérité, zélés pour le progrès des Sçiences & celui de la vertu, dont les ſollicitudes ne ſe portent pas ſeulement à étendre la ſphere des connoiſſances humaines, à entretenir l'union & la concorde, mais encore à favoriſer les travaux de ceux qui ont le noble courage de ſe conſacrer à l'utilité publique.

FIN.

Cochin filius inv. et Sculp.

APPLICATION DE LA GEOMETRIE ORDINAIRE, ET DES CALCULS DIFFERENTIEL ET INTEGRAL; *A LA RESOLUTION DE PLUSIEURS PROBLEMES.*

SECTION PREMIERE.

PREMIERE PROPOSITION.

SI l'on coupe un Cône par un plan parallele au côté, & que ſur la ſection, qui ſera une parabole, l'on marque le foyer F, & qu'enſuite du ſommet du cône par le point F, on mene une ligne droite, cette ligne paſſera par les foyers de toutes les ſections paraboliques qui ſeront paralleles à la premiere. *Pl.* 1. *Fig.* 1.

A

Soit le cône ABPCI, coupé paralellement au côté AB, & que F soit le foyer de la parabole GPI, si l'on tire la droite AFL, & que l'on fasse une autre section paralelle à la premiere; je dis que le point f où AFL rencontre l'axe de la parabole NHR est le foyer de cette parabole.

DEMONSTRATION.

Nommant (p) le parametre de la parabole NHR, on a $DG \times 4FG.\ OH \times p :: \overline{DI}^2.\ \overline{OR}^2$, mais $\overline{DI}^2.\ \overline{OR}^2 :: BD \times CD.\ BO \times CO$; donc $DG \times 4FG.\ OH \times p :: BD \times CD.\ BO \times CO$; or $DG.\ OH :: CD.\ CO$, divisant la derniere proportion par celle-ci, terme par terme, on aura $4FG.\ p :: BD.\ BO :: AG.\ AH :: FG.\ fH$, donc $4FG.\ p :: FG.\ fH :: 4FG.\ 4fH$, donc $p = 4fH$. c'est-à-dire que f est le foyer de la parabole NHR. *C. q. f. p.*

LEMME PREMIER.

Soit le triangle ABC dans lequel on mene DF paralelle à BC, puis AG coupant DF en I, je dis que $DI \times FI.\ BG \times CG :: \overline{AI}^2.\ \overline{AG}^2$. *Fig.* 2.

DEMONSTRATION.

A cause des triangles semblables ADI, ABG, on a $DI.\ BG :: AI.\ AG$, & à cause des triangles sembl. AIF, AGC. $FI.\ CG :: AI.\ AG$, donc en multipliant terme par terme, $DI \times FI.\ BG \times CG :: \overline{AI}^2.\ \overline{AG}^2$. *C. q. f. p.*

II. PROPOSITION.

Si l'on coupe un cône droit par un plan oblique & que sur la section qui sera une ellipse, l'on marque l'un des foyers F, & qu'ensuite du sommet du cône par le point F, on mene une ligne droite, cette ligne passera par les foyers du même côté de toutes les sections elliptiques qui seront paralelles à la premiere, *Fig.* 3.

Soit le cône ABCI, coupé obliquement par le plan PMG, & que F soit l'un des foyers de l'ellipse PMG, si l'on tire la droite AFL, & que l'on faſſe une autre ſection paralelle à la premiere, je dis que le point f, où AFL rencontre le grand axe de l'Ellipſe SNH eſt l'un des foyers de cette ellipſe.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré par les centres de ces ellipſes la ligne droite AOR, & aux axes GP, HS, les perpendiculaires MO, NR, qui feront chacune moitié du petit axe, & ſur la ſuperficie du cône, la ligne droite AMN, on aura par le précédent Lemme $PF \times FG.\ Sf \times fH :: \overline{AF}^2.\ \overline{Af}^2$; or à cauſe des triangles ſemblables, AOF, ARf, $\overline{AF}^2.\ \overline{Af}^2 :: \overline{AO}^2.\ \overline{AR}^2$, & à cauſe des triangles ſemblables AOM, ARN; $\overline{AO}^2.\ \overline{AR}^2 :: \overline{OM}^2.\ \overline{RN}^2$, conſéquemment $PF \times FG.\ Sf \times fH :: \overline{OM}^2.\ \overline{RN}^2$; mais $PF \times FG = \overline{OM}^2$; donc $Sf \times fH = \overline{RN}^2$, donc f eſt l'un des foyers de l'ellipſe. *C. q. f. p.*

III. PROPOSITION.

Si l'on coupe un cône droit par un plan paralelle à ſon axe, & que ſur la ſection qui ſera une hyperbole, on marque le foyer F, & qu'enſuite du ſommet du cône par le point F, on mene une ligne droite, cette ligne paſſera par les foyers de toutes les ſections hyperboliques qui feront paralelles à la premiere, *Fig.* 4.

Soit le cône ABEKI coupé paralellement à l'axe AR, & que F ſoit le foyer de l'hyperbole EMI; ſi l'on tire la droite AFL, & que l'on faſſe une autre ſection paralelle à la premiere, je dis que le point f, où AFL rencontre l'axe de l'hyperbole GNH eſt le foyer de cette hyperbole.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré AP perpendiculaire à l'axe AR, & prolongé DM & CN; MO ſera la moitié du premier axe, & AO la moitié du ſecond de l'hyperbole EMI. NP la moitié du premier axe, & AP la moitié du ſecond de l'hyperbole GNH, & à cauſe des triangles ſemblables AOF & APf, OF, Pf

:: AO. AP, & à cause des triangles semblables AOM, APN; AO. AP :: AM. AN; donc OF. P*f* :: AM. AN, mais OF = AM, donc P*f* = AN, donc *f* est le foyer de l'hyperbole GNH. *C. q. f. p.*

Lemme II.

Si deux triangles ABC, BDF ont un angle B commun, & qu'on les coupe l'un & l'autre par une ligne droite HIM paralelle à BC; je dis que BD × CD. IH × IM :: DG × DF. GI × IF, *Fig.* 5.

Demonstration.

A cause des triangles semblables BDF, HIF, on a BD. IH :: FD. FI, & à cause des triangles sembl. CDG, GIM, CD. IM :: GD. GI, donc en multipliant terme par terme, on a BD × CD. IH × IM :: FD × GD. FI × GI. *C. q. f. p.*

IV. Proposition.

Si l'on coupe un cône par un plan oblique qui fasse sur la base un angle moins aigu que le côté du cône, la section sera une hyperbole, *Fig.* 6.

Soit le cône ABRCO coupé par un plan ONR qui étant prolongé, rencontre en F, BA aussi prolongé, je dis que la section ONR est une hyperbole.

Demonstration.

Si l'on conçoit la section ONR coupée par un plan MHPG paralelle à la base du cône, MHPG sera un cercle, & l'on aura par le second Lemme BD × CD. GI × IH :: DN × DF. IN × IF; or BD × CD = $\overline{DR}^2$, & GI × IH = $\overline{PI}^2$; donc $\overline{DR}^2$. $\overline{PI}^2$ :: DN × DF. IN × IF; donc la section ONR est une hyperbole qui a pour premier axe la ligne FN. *C. q. f. p.*

V. Proposition.

Si l'on coupe un cône ABIC par des plans obliques DGIM, NHPO, paralelles entr'eux, & qui fassent sur la base des angles moins aigus que le côté AB, & que sur l'une de ces sections qui sont des hyperboles par la précédente Proposition, on marque le foyer F. Je dis que la ligne droite Ff, tirée du sommet du cône par le point F, passera par les foyers de toutes les sections hyperboliques paralelles à DGIM, & qui couperont le côté AC. *Fig.* 7.

DEMONSTRATION.

Ayant prolongé les lignes MG & OH rencontrant en R & S, AB prolongé; GR sera le premier axe de l'hyperbole DGI, & HS celui de l'hyperbole NHP, nommant (a) le second axe de l'hyperbole DGI, & (b) le second axe de l'hyperbole NHP, on aura par la proprieté de l'hyperbole $\overline{DM}^2$. $GM \times MR :: aa. \overline{GR}^2$; or $\overline{DM}^2 = BM \times CM$, donc $BM \times CM. GM \times MR :: aa. \overline{GR}^2$, mais à cause des triangles semblables BMR, BOS; BM. MR :: BO. OS, & les triangles semblables CGM, COH, donnent CM. GM :: CO. OH, multipliant terme par terme, on a $BM \times CM. GM \times MR :: BO \times CO. OH \times OS$; donc $aa. \overline{GR}^2 :: BO \times CO. OH \times OS$, or $BO \times CO = \overline{NO}^2$; donc $aa. \overline{GR}^2 :: \overline{NO}^2. OH \times OS$, mais par la proprieté de l'hyperbole $\overline{NO}^2. OH \times OS :: bb. \overline{HS}^2$, donc $aa. \overline{GR}^2 :: bb. \overline{HS}^2$, & en changeant, $aa. bb :: \overline{GR}^2. \overline{HS}^2$, or
GR. HS :: FG. fH, &
GR. HS :: FR. Sf, multipliant terme par terme, on a
$\overline{GR}^2. \overline{HS}^2 :: FG \times FR. fH \times Sf$, donc $aa. bb. FG \times FR. fH \times Sf$, ou $\frac{aa}{4}. \frac{bb}{4} :: FG \times FR. fH \times Sf$, mais par la proprieté de l'hyperbole $\frac{aa}{4} = FG \times FR$, donc $\frac{bb}{4} = fH \times Sf$, donc le point f est le foyer de l'hyperbole NHP. *C. q. f. p.*

LEMME III.

Si dans une parabole BAD, dont l'axe est AC, on tire un diametre GF, & l'ordonnée BD à l'axe, je dis que $BF \times FD = FG \times p$ le parametre de l'axe, *Fig.* 8.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré l'ordonnée GH, on aura par la proprieté de la parabole $\overline{BC}^2 = AC \times p$, & $\overline{GH}^2 = AH \times p$, donc $\overline{BC}^2 - \overline{GH}^2 = \overline{AC - AH} \times p$; or par la cinquiéme Propoſition du Second Livre d'Euclide, $\overline{BC}^2 - \overline{GH}^2$, ou $\overline{FC}^2 = BF \times FD$, donc $BF \times FD = \overline{AC - AH} \times p = FG \times p$. *C. q. f. p.*

LEMME IV.

Si dans une parabole BAD on mene un diametre AC, & deux lignes droites BCD, FGH, perpendiculaires à AC, je dis que $BC \times CD. FG \times GH :: AC. AG$. *Fig.* 9.

DEMONSTRATION.

Je nomme (p) le parametre de l'axe, & par le précédent Lemme $BC \times CD = AC \times p$, & $FG \times GH = AG \times p$; donc $BC \times CD. FG \times GH :: AC \times p. AG \times p :: AC. AG$. *C. q. f. d.*

VI. PROPOSITION.

Si l'on coupe un paraboloïde par un plan perpendiculaire à ſa baſe, la ſection ſera une parabole qui aura le même parametre que la parabole generatrice, *Fig.* 10.

I. f. p. q. QRT eſt une parabole, & que ſon parametre eſt le même que celui de la parabole generatrice BAD.

DEMONSTRATION.

Suppoſant le paraboloïde coupé paralellement à ſa baſe, on aura, $\overline{FT}^2 = BF \times FD$, & $\overline{IH}^2 = GH \times HO$; donc $\overline{FT}^2. \overline{IH}^2 :: BF \times FD. GH \times HO$; or par le quatriéme Lemme, $BF \times FD. GH \times HO :: RF. RH$, donc $\overline{FT}^2. \overline{IH}^2 :: RF. RH$, donc QRT eſt une parabole.

Pour prouver ensuite que cette parabole a le même parametre que la parabole generatrice BAD, je dis que par le troisiéme Lemme $BF \times FD = FR \times p$, le parametre de l'axe AC; mais $BF \times FD = \overline{FT}^2$, donc $\overline{FT}^2 = RF \times p$; donc cette parabole a le même parametre que la parabole generatrice BAD. *C. q. f. p.*

LEMME V.

Si dans une parabole BAD dont l'axe est AC, on tire une ligne quelconque MP, & deux autres NR, FH, paralelles à l'axe AC. je dis que $MR \times RP . HM \times HP :: NR . FH$. *Fig.* 11.

DEMONSTRATION.

Ayant divisé MP en deux également en E, & tiré EG paralelle à l'axe, cette ligne EG sera un diametre, dont ME sera une ordonnée; tirant ensuite NO paralelle à MP, cette ligne sera aussi une ordonnée au diametre GE, & nommant (p) le parametre de ce diamétre, on aura par la proprieté de la parabole $\overline{ME}^2 = GE \times p$, & $\overline{NO}^2 = GO \times p$, donc $\overline{ME}^2 - \overline{NO}^2$, ou $MR \times RP = \overline{GE - GO} \times p = NR \times p$, on prouveroit de la même maniere que $MH \times HP = FH \times p$, donc $MR \times RP . MH \times HP :: NR \times p . FH \times p :: NR . FH$. *C. q. f. p.*

VII. PROPOSITION.

Si l'on coupe un paraboloïde obliquement, la section sera une ellipse. *Fig.* 12.

Soit le paraboloïde ABDY coupé obliquement par le plan MXQV, je dis que la section est une ellipse.

DEMONSTRATION.

Si l'on imagine le paraboloïde coupé par deux autres plans perpendiculaires à l'axe, & passant par les points H, R, les sections seront des cercles, & tirant par les points H, R, aux points X & Z où ces deux cercles coupent la courbe

MZXQSV, les lignes HX, RZ, qui feront perpendiculaires à MQ; on aura $\overline{RZ}^2 = KR \times RI$, & $\overline{HX}^2 = OH \times HP$; donc $\overline{RZ}^2 . \overline{HX}^2 :: KR \times RI . OH \times HP$; or par le quatriéme Lemme $KR \times RI . OH \times HP :: RN . FH$, & par le Lemme précédent $RN . FH :: MR \times RQ . MH \times HQ$; donc $\overline{RZ}^2 . \overline{HX}^2 :: MR \times RQ . MH \times HQ$, donc la section MZXQSV est une ellipse. *C. q. f. p.*

VIII. PROPOSITION.

Si l'on coupe un paraboloïde obliquement par des plans paralelles entr'eux, les sections seront des ellipses semblables. *Fig.* 13.

Soit le paraboloïde BAD, coupé par les plans EMF, GNH, paralelles entr'eux, je dis que ces deux ellipses sont semblables.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit les axes EF, GH, de ces ellipses coupés en deux également en R & T, par les cercles SMV, PNQ, & par le diametre XRT, on aura par la proprieté de la parabole $\overline{FR}^2 . \overline{HT}^2 :: RX . TX$, mais par le quatriéme Lemme $RX . TX :: SR \times VR . PT \times QT$; donc $\overline{FR}^2 . \overline{HT}^2 :: SR \times VR . PT \times QT$; or $SR \times VR = \overline{MR}^2$, & $PT \times QT = \overline{NT}^2$; donc $\overline{FR}^2 . \overline{HT}^2 :: \overline{MR}^2 . \overline{NT}^2$; donc $FR . HT :: MR . NT$, donc les ellipses EMF, GNH sont semblables, puisque leurs axes sont proportionnels. *C. q. f. p.*

LEMME VI.

Si dans une ellipse ABCD on tire une ligne droite EF, paralelle au grand axe, & une autre GV, paralelle au petit, je dis que $GT \times TV . ET \times FT :: \overline{BC}^2 . \overline{AC}^2$ *Fig.* 14.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré à l'axe l'ordonnée EO, on aura $\overline{GP}^2 . \overline{EO}^2$

::

$:: \overline{AC}^2 - \overline{CP}^2 . \overline{AC}^2 - \overline{CO}^2$. & en divisant $\overline{GP}^2 - \overline{EO}^2 . \overline{EO}^2$
ou
$\overline{PT}^2$.

$:: \overline{CO}^2 - \overline{CP}^2 . \overline{AC}^2 - \overline{CO}^2$. & en changeant $\overline{GP}^2 - \overline{PT}^2 .$
$\overline{CO}^2 - \overline{CP}^2 :: \overline{EO}^2 . \overline{AC}^2 - \overline{CO}^2$. or $\overline{EO}^2 . \overline{AC}^2 - \overline{CO}^2 :: \overline{BC}^2 . \overline{AC}^2$,
donc $\overline{GP}^2 - \overline{PT}^2 . \overline{CO}^2 - \overline{CP}^2 :: \overline{BC}^2 . \overline{AC}^2$ c'est-à-dire que
ou
$\overline{EI}^2 - IT$.

$GT \times TV . ET \times FT :: \overline{BC}^2 . \overline{AC}^2$; *C. q. f. p.*

IX. PROPOSITION.

Si l'on coupe un spheroïde long par un plan perpendiculaire au petit axe, la section sera une ellipse qui aura pour grand axe l'ordonnée au petit axe de l'ellipse generatrice. *Fig.* 15.

Soit le spheroïde long ABRDN formé par la révolution de la demie ellipse ABR autour du grand axe AR, si l'on coupe ce spheroïde par un plan quelconque EPMFNS perpendiculaire au petit axe BD, je dis que la section est une ellipse qui a pour grand axe l'ordonnée EF au petit axe BD.

DEMONSTRATION.

Imaginant une autre section GPVS paralelle au cercle décrit par BC moitié du petit axe BD, qui coupe EF en un point quelconque T, la section sera aussi un cercle, & l'on aura $\overline{ST}^2 = GT \times TV$. & $\overline{IN}^2 = BI \times ID$. donc $\overline{ST}^2 . \overline{IN}^2 :: GT \times TV . BI \times ID$. or par le 6e Lemme $GT \times TV . ET \times FT :: \overline{BC}^2 . \overline{AC}^2$ & par la proprieté de l'ellipse $\overline{BC}^2 . \overline{AC}^2 :: BI \times ID . \overline{EI}^2$ donc $GT \times TV . ET \times FT :: BI \times ID . \overline{EI}^2$ & en changeant $GT \times TV . BI \times ID :: ET \times FT . \overline{EI}^2$ donc $\overline{ST}^2 . \overline{IN}^2 :: ET \times FT . \overline{EI}^2$ donc la section ERMFNS est une ellipse.

J'ajoute que EF en est le grand axe, car par la proprieté de l'ellipse $\overline{EI}^2.\ BI \times ID :: \overline{AC}^2.\ \overline{BC}^2$ donc $\overline{EI}^2.\ \overline{IN}^2 :: \overline{AC}^2.\ \overline{BC}^2$ donc EI. IN :: AC. BC. or $AC > BC$, donc $EI > IN$, donc $EF > MN$, ainsi EF est le grand axe, & MN le petit. *C. q. f. p.*

LEMME VII.

Si l'on prolonge deux côtés d'un triangle ABC, que l'on termine les prolongemens par une ligne DE paralelle à AB, & qu'ensuite on tire une ligne droite FI aussi paralelle à AB, je dis que $AF \times EF.\ BI \times DI :: \overline{AC}^2.\ \overline{BC}^2$ *Fig.* 16.

DEMONSTRATION.

CF. CI :: CE. CD. donc $CF + CE.\ CI + CD :: CF.$ CI. mais CF. CI :: AC. BC. donc $CF + CE$ (EF). $CI + CD$ (ID) :: AC. BC. or AF. BI :: AC. BC. donc $AF \times EF.\ BI \times ID :: \overline{AC}^2.\ \overline{BC}^2$

Si l'on tiroit une ligne GH paralelle à DE, on prouveroit de la même maniere que $AH \times EH.\ BG \times DG :: \overline{CE}^2.\ \overline{CD}^2 :: \overline{AC}^2.\ \overline{BC}^2$ d'où l'on concluroit que $AF \times EF.\ BI \times ID :: AH \times EH.\ BG \times DG$. & en changeant $AF \times EF.\ AH \times EH :: BI \times ID.\ BG \times DG$.

LEMME VIII.

Soit une ellipse AXBE (*Figure* 17.) dans laquelle on tire une ligne droite EL, coupant son grand axe en un point quelconque C; si du centre de l'ellipse & de la moitié du grand axe comme rayon, on décrit le cercle AGKBY, & que par les points E & L, on mene à cet axe deux perpendiculaires DEG, PLM, rencontrant la circonférence du cercle en G & M, je dis qu'en tirant du point C aux points G & M, deux lignes droites, ces deux lignes n'en feront qu'une.

DEMONSTRATION.

Les triangles CPL, CDE, étant semblables, on a CP. CD :: PL. DE. or PL. DE :: PM. DG. donc CP. CD :: PM. DG. & les angles CPL, CDE, étant égaux, les triangles CPM, CDG, sont équiangles, donc l'angle MCP = DCG, d'où il suit nécessairement que CM & CG sont une même ligne droite. *C. q. f. p.*

LEMME IX.

Si dans une ellipse ASBE dont le grand axe est AB, on tire une ligne quelconque EL, & deux autres OX, SZ perpendiculairement sur AB, qui coupent EL en I & V; je dis que LV × EV. IL × EI :: SV × VZ. XI × IO. *Fig.* 17.

DEMONSTRATION.

Ayant décrit un cercle dont AB soit le diametre, & prolongé les lignes OX, SZ jusqu'à la rencontre de la circonférence en Y & Q, en R & K, & qu'ensuite par les points L & E, l'on mene les droites MLP, GED, perpendiculaires à l'axe AB, & du point C les droites CM, CG, qui coupent RK en T, & YQ en N; ces lignes CM, CG, n'en feront qu'une par le précédent Lemme, & l'on aura FR. SF :: MP. LP. & MP. LP :: FT. FV. donc FR. SF :: FT. FV. & en changeant FR. FT :: SF. FV. donc $\overline{FR}^2$. $\overline{SF}^2$ :: $\overline{FT}^2$. $\overline{FV}^2$. & en divisant $\overline{FR}^2 - \overline{FT}^2$. $\overline{SF}^2 - \overline{FV}^2$ :: $\overline{FR}^2$. $\overline{SF}^2$. on démontreroit de même que $\overline{QH}^2 - \overline{HN}^2$. $\overline{OH}^2 - \overline{IH}^2$ :: $\overline{QH}^2$. $\overline{OH}^2$. or $\overline{FR}^2$. $\overline{SF}^2$ :: $\overline{QH}^2$. $\overline{OH}^2$. donc $\overline{FR}^2 - \overline{FT}^2$. $\overline{SF}^2 - \overline{FV}^2$ :: $\overline{QH}^2 - \overline{HN}^2$. $\overline{OH}^2 - \overline{IH}^2$. mais $\overline{FR}^2 - \overline{FT}^2 = RT \times TK$; & $\overline{SF}^2 - \overline{FV}^2 = SV \times VZ$. de même $\overline{QH}^2 - \overline{HN}^2 = YN \times NQ$. & $\overline{OH}^2 - \overline{IH}^2 = XI \times IO$. donc RT × TK. SV × VZ :: YN × NQ. XI × IO. & en changeant RT × TK. YN × NQ :: SV × VZ. XI × IO. or RT × TK = MT × TG. & YN × NQ = MN × GN. donc MT × TG. MN × GN :: SV × VZ.

$XI \times IO$. mais par le 7^e Lemme $MT \times TG$. $MN \times GN$ :: $LV \times VE$. $IL \times IE$. donc $LV \times EV$. $IL \times IE$ :: $SV \times VZ$. $XI \times IO$. *C. q. f. p.*

X. PROPOSITION.

Si l'on coupe un ſpheroïde long obliquement, la ſection ſera une ellipſe. *Fig.* 18.

Soit le ſpheroïde long AXBE formé par la révolution de la demie ellipſe AEZB autour de l'axe AB, & coupé obliquement par un plan EMNL, je dis que la ſection EMNL eſt une ellipſe.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit deux plans OMXR, SNZP, perpendiculaires à l'axe AB, coupant la ſection EMNL en MR & NP, on aura par le précédent Lemme $LV \times EV$. $IL \times IE$ :: $SV \times VZ$. $XI \times IO$. or $SV \times VZ = \overline{NV}^2$ & $XI \times IO = \overline{IM}^2$ donc $\overline{NV}^2$. $\overline{IM}^2$ :: $LV \times EV$. $IL \times IE$. donc la ſection eſt une ellipſe. *C. q. f. p.*

XI. PROPOSITION.

Si l'on coupe un ſpheroïde long obliquement, par des plans paralelles entr'eux, les ſections qui ſont des ellipſes ſont ſemblables. *Fig.* 19.

Soit le ſpheroïde AGLBEF, coupé par deux plans GKF, LME, paralelles entr'eux, je dis que les ellipſes GKF, LME ſont ſemblables.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit les lignes GF, LE coupées en deux également en C & I, par la ligne RCIS qui ſera un diametre de l'ellipſe generatrice AGLBEF, & par deux cercles NKHP, OMXR, perpendiculaires à l'axe AB, on aura par la proprieté de l'ellipſe, $\overline{CG}^2$. $\overline{IL}^2$ :: $CR \times CS$. $IR \times IS$. or par le Lemme $CR \times CS$. $IR \times IS$ :: $CH \times CN$. $XI \times IO$. donc $\overline{CG}^2$.

$\overline{IL}^2 :: CH \times CN . XI \times IO$. mais $CH \times CN = \overline{CK}^2$, & $XI \times IO = \overline{IM}^2$ donc $\overline{CG}^2 . \overline{IL}^2 :: \overline{CK}^2 . \overline{IM}^2$ & $CG . IL :: CK . IM$. donc les ellipses sont semblables, puisque leurs axes sont proportionnels. *C. q. f. p.*

LEMME X.

Si d'un point M, d'une hyperbole GAMN, on mene une ligne droite MD, paralelle à l'axe A*a*, & terminée en D, par l'hyperbole opposée AD, & qu'ensuite on tire IKF & NOG perpendiculaires à l'axe, & coupant en L & H, MD prolongée; je dis que $NH \times HG . IL \times LF :: HM \times HD . LM \times LD$. *Fig.* 20.

DEMONSTRATION.

Par la proprieté de l'hyperbole $\overline{NO}^2 . \overline{MP}^2 :: AO \times Oa . AP \times Pa$; or par la 6^e Proposition du second Livre d'Euclide $AO \times Oa = \overline{CO}^2 - \overline{AC}^2$, & $AP \times Pa = \overline{CP}^2 - \overline{AC}^2$. donc $\overline{NO}^2 . \overline{MP}^2 :: \overline{CO}^2 - \overline{AC}^2 . \overline{CP}^2 - \overline{AC}^2$ & par conversion de raison $\overline{NO}^2 - \overline{MP}^2 . \overline{NO}^2 :: \overline{CO}^2 - \overline{CP}^2 . \overline{CO}^2 - \overline{AC}^2$ or $\overline{NO}^2 - \overline{MP}^2$, ou $\overline{NO}^2 - \overline{OH}^2 = NH \times HG$. & $\overline{CO}^2 - \overline{CP}^2$ ou $\overline{BH}^2 - \overline{BM}^2 = HM \times HD$. par la même 6^e Proposition du second Livre d'Euclide, donc $NH \times HG . \overline{NO}^2 :: HM \times HD . AO \times Oa$, & en changeant $NH \times HG . HM \times HD :: \overline{NO}^2 . AO \times Oa$; on démontreroit de la même maniere que $IL \times LF . LM \times LD :: \overline{IK}^2 . AK \times Ka$. mais par la proprieté de l'hyperbole $\overline{IK}^2 . AK \times Ka :: \overline{NO}^2 . AO \times Oa$. donc $NH \times HG . MH \times HD :: IL \times LF . LM \times LD$. & en changeant $NH \times HG . IL \times LF :: MH \times HD . LM \times LD$. *C. q. f. p.*

LEMME XI.

Si l'on a deux hyperboles opposées AM, *a*D, dont CS, CR, soient les asymptotes, & que l'on tire une ligne droite

DH paralelle au premier axe Aa, & rencontrant les hyperboles en M & D, qu'ensuite du centre C l'on tire BC perpendiculaire sur HD, & du point de rencontre B la ligne BK paralelle à l'asymptote CS, puis du point M, MK paralelle à BC, je dis que $NH \times HG. MH \times HD :: \overline{KM}^2. \overline{BM}^2$. *Fig.* 21.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré AI paralelle à BC, cette ligne sera la moitié du petit axe, & l'on aura par le Lemme précédent $NH \times HG. MH \times HD :: \overline{NO}^2. AO \times Oa$. or par la proprieté de l'hyperbole $\overline{NO}^2. AO \times Oa :: \overline{AI}^2. \overline{AC}^2$, & à cause des triangles semblables AIC, BKM, $\overline{AI}^2. \overline{AC}^2 :: \overline{KM}^2. \overline{BM}^2$. donc $NH \times HG. MH \times HD :: \overline{KM}^2. \overline{BM}^2$. *C. q. f. p.*

XII. PROPOSITION.

Si l'on coupe un hyperboloïde par un plan perpendiculaire à sa base, la section sera une hyperbole, *Fig.* 22.

Soit l'hyperboloïde GANX coupé par un plan XYMTV, perpendiculaire à sa base GVNX, je dis que la section est une hyperbole.

DEMONSTRATION.

J'ai prouvé dans le 10e Lemme que $NH \times HG. IL \times LF :: MH \times HD. LM \times LD$. or $NH \times HG = \overline{HX}^2$. & $IL \times LF = \overline{LY}^2$ donc $\overline{HX}^2. \overline{LY}^2 :: MH \times HD. LM \times LD$. donc XYMTV est une hyperbole. *C. q. f. p.*

J'ajoute que MD est le premier axe, & si l'on tire BK paralelle à l'asymptote CS, rencontrant EM prolongée en K, KM sera la moitié du second axe, car nommant (b) la moitié du second axe de l'hyperbole VMX, on aura par la proprieté de l'hyperbole $\overline{HX}^2$. ou $NH \times HG. MH \times HD :: bb. \overline{BM}^2$. mais par le 11e Lemme $NH \times HG. HM \times HD :: \overline{MK}^2. \overline{BM}^2$. donc $bb. \overline{BM}^2 :: \overline{MK}^2. \overline{BM}^2$. donc $bb = \overline{MK}^2$. donc $b = MK$. donc

MK est la moitié du second axe de l'hyperbole VMX.

LEMME XII.

Si l'on a deux couronnes circulaires égales ADKEPBN, FHIMRGO, que l'on tire une ligne ABK dans l'une de ces couronnes qui coupe la circonférence intérieure BPN, & une tangente FGI à la circonférence intérieure de l'autre couronne, je dis que le quarré de FG moitié de cette tangente, est égal au rectangle de AB par BK. *Fig.* 23.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré par le point B & le centre C le diametre DE, & par le point touchant G & le centre L, le diametre HM, on a $\overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BK$. & $\overline{HL}^2 - \overline{GL}^2 = \overline{FG}^2$. or les couronnes étant égales $\overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{HL}^2 - \overline{GL}^2$. donc $AB \times BK = \overline{FG}^2$. *C. q. f. p.*

LEMME XIII.

Si dans une ellipse ABaD dont AB est l'un des axes, & BD l'autre, l'on prend les parties égales AG, *aS*, & que l'on tire FGH & VSZ perpendiculaires à l'axe A*a*, puis entre FH & VZ autant de lignes droites que l'on voudra comme MR, *mr*, paralelles à BD, & divisées de telle sorte, que $MN \times NR$, ou $PR \times PM = \overline{FG}^2$, & $mn \times nr$, ou $pr \times pm = \overline{FG}^2$, je dis que la courbe GNI*nsp*P est une ellipse. *Fig.* 24.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré du point F la droite FTV qui sera paralelle à l'axe A*a*, l'on aura par l'hypothese $MN \times NR = \overline{FG}^2$, & $BI \times ID = \overline{FG}^2$, or par la 5^e^ Proposition du second livre d'Euclide, $MN \times NR = \overline{MO}^2 - \overline{NO}^2$, & $BI \times ID = \overline{BC}^2 - \overline{CI}^2$, donc $\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2 = \overline{FG}^2$ & $\overline{BC}^2 - \overline{CI}^2 = \overline{FG}^2$. donc $\overline{MO}^2$

— $\overline{FG}^2 = \overline{NO}^2$. & $\overline{BC}^2 - \overline{FG}^2 = \overline{CI}^2$ consequemment $\overline{MO}^2 - \overline{FG}^2$. $\overline{BC}^2 - \overline{FG}^2 :: \overline{NO}^2$. $\overline{CI}^2$ & mettant dans le premier terme à la place de $\overline{FG}^2$, $\overline{OS}^2$ son égal, & dans le second à la place de $\overline{FG}^2$. $\overline{CT}^2$ son égal, on aura $\overline{MO}^2 - \overline{OS}^2$. $\overline{BC}^2 - \overline{CT}^2 :: \overline{NO}^2$. $\overline{CI}^2$ mais $\overline{MO}^2 - \overline{OS}^2 = MS \times RS$. & $\overline{BC}^2 - \overline{CT}^2 = BT \times DT$, donc $MS \times RS$. $BT \times DT :: \overline{NO}^2$. $\overline{CI}^2$ or par le 6e Lemme $MS \times RS$. $SF \times SV :: BT \times DT$. $\overline{FT}^2$ & en changeant $MS \times RS$. $BT \times DT :: SF \times SV$. $\overline{FT}^2$. donc $\overline{NO}^2$. $\overline{CI}^2 :: SF \times SV$. $\overline{FT}^2 :: GO \times OS$. $\overline{CG}^2$. & en changeant $\overline{NO}^2$. $GO \times OS :: \overline{CI}^2$. $\overline{CG}^2$. donc la courbe GNI*nsp*P est une ellipse. *C. q. f. p.*

XIII. PROPOSITION.

Si l'on coupe un hyperboloïde obliquement, en sorte que la section soit perpendiculaire au plan de l'hyperbole generatrice & rencontre ses asymptotes, je dis que cette section sera une ellipse. *Fig. 25.*

Soit l'hyperloïde A*okp* formé par la révolution de la demie hyperbole A*o*B autour de l'axe AB, si l'on coupe cet hyperboloïde par un plan *f*INGPE perpendiculaire au plan de l'hyperbole generatrice A*o*B*p*, & que la section rencontre les asymptotes *ca*, *cr* de cette hyperbole, je dis que cette section est une ellipse.

DEMONSTRATION.

Si l'on fait tourner le triangle rectangle *a*BC autour de BC, il décrira un cône *cagr*, qui étant coupé par le même plan que l'hyperboloïde, la section sera une ellipse, & si l'on conçoit le cône & l'hyperboloïde coupés par deux plans *d*KDX, MLRZ perpendiculaires à l'axe CB, & par un 3e plan SFVH qui passe par l'extrêmité G de la section *f*INGPE, & soit parallele aux deux autres, ces plans couperont l'ellipse *ad*FQHD en FH, MR, *d*D qui en seront des ordonnées, & toutes les

couronnes

couronnes renfermées entre la superficie du cône, & celle de l'hyperboloïde étant égales, ce qui est aisé à démontrer, on aura par le 12e Lemme $MN \times NR = \overline{FG}^2$, & $dI \times ID = \overline{FG}^2$, donc par le 13e Lemme la section fINGPE est une ellipse.

XIV. PROPOSITION.

Si l'on fait tourner le triangle rectangle CPQ, & la demie hyperbole ANK autour de l'axe CAQ, le triangle décrira le cône CPIL, & la demie hyperbole, l'hyperboloïde AKXZ, *Fig.* 26. Si l'on coupe le cône & l'hyperboloïde par un plan perpendiculaire au triangle & paralelle à l'asymptote CP, je dis que la section de l'hyperboloïde est une parabole qui a le même parametre que la parabole faite par la section du cône.

DEMONSTRATION.

Supposant le cône & l'hyperboloïde coupés par deux plans BMDG, *brd*, paralelles à la base PRLI, la couronne renfermée entre les circonferences BMDG, NYOH, est égale à la couronne renfermée entre les circonférences PRLI & KXZS, & nommant (p) le parametre, on a par le 12e Lemme $\overline{GT}^2 - \overline{HT}^2 = \overline{FR}^2$; or par la proprieté de la parabole $\overline{GT}^2 = \overline{FT + EF} \times p$, & $\overline{Fr}^2 = EF \times p$, donc $\overline{FT + EF} \times p - \overline{HT}^2 = EF \times p$, & retranchant de part & d'autre $EF \times p$, & transposant $-\overline{HT}^2$, on a $FT \times p = \overline{HT}^2$: on démontreroit de même que $FV \times p = \overline{SV}^2$; donc la section SHFYX de l'hyperboloïde est une parabole qui a le même parametre que la parabole REL.

COROLLAIRE.

Il suit delà que si dans une hyperbole KAZ, on mene une ligne droite FTV paralelle à l'une de ses asymptotes CP, puis deux autres NO, KZ, perpendiculaires à l'axe, on aura $NT \times OT.\ KV \times VZ :: FT.\ FV$.

XV. PROPOSITION.

Si l'on a une hyperbole BAD, (*Figure* 27.) dont A soit le sommet, C le centre, & dont CF & CG soient les asymptotes ; que l'on fasse tourner le triangle rectangle CaF autour de Ca, il décrira un cône CFaGC, & la demie hyperbole AaB, un hyperboloïde BADM, je dis que si l'on coupe le cône par un plan HhO, qui étant prolongé du côté de h, rencontre l'asymptote CF aussi prolongée en g, & qui coupe l'hyperboloïde, la section IZN de l'hyperboloïde est une hyperbole.

DEMONSTRATION.

Par la 4e. Proposition, la section HhO du cône est une hyperbole dont hg est le premier axe, ainsi divisant hg en deux également en l, le point l sera le centre de l'hyperbole HhO ; & si l'on imagine le cône & l'hyperboloïde coupés par deux plans, l'un VYX qui passe par le sommet Z de la section de l'hyperboloïde, & un autre quelconque Ppf paralelles à la base du cône, les sections seront des cercles ; on a vû dans le 10e Lemme que $\overline{HM}^2 - \overline{YZ}^2 . \overline{HM}^2 :: \overline{lM}^2 - \overline{lZ}^2 . \overline{lM}^2 - \overline{lh}^2$, donc en changeant $\overline{HM}^2 - \overline{YZ}^2 . \overline{lM}^2 - \overline{lZ}^2 :: \overline{HM}^2 . \overline{lM}^2 - \overline{lh}^2$; de même $\overline{PS}^2 - \overline{YZ}^2 . \overline{lS}^2 - \overline{lZ}^2 :: \overline{PS}^2 . \overline{lS}^2 - \overline{lh}^2$; or par la propriété de l'hyperbole $\overline{HM}^2 . \overline{lM}^2 - \overline{lh}^2 :: \overline{PS}^2 . \overline{lS}^2 - \overline{lh}^2$; donc $\overline{HM}^2 - \overline{YZ}^2 . \overline{lM}^2 - \overline{lZ}^2 :: \overline{PS}^2 - \overline{YZ}^2 . \overline{lS}^2 - \overline{lZ}^2$; & en changeant $\overline{HM}^2 - \overline{YZ}^2 . \overline{PS}^2 - \overline{YZ}^2 :: \overline{lM}^2 - \overline{lZ}^2 . \overline{lS}^2 - \overline{lZ}^2$; or par le 12e Lemme $\overline{HM}^2 - \overline{IM}^2 = \overline{YZ}^2$, & $\overline{PS}^2 - \overline{rS}^2 = \overline{YZ}^2$; donc en transposant $\overline{HM}^2 - \overline{YZ}^2 = \overline{IM}^2$, & $\overline{PS}^2 - \overline{YZ}^2 = \overline{rS}^2$; donc $\overline{HM}^2 - \overline{YZ}^2 . \overline{PS}^2 - \overline{YZ}^2 :: \overline{IM}^2 . \overline{rS}^2$, mettant à la place de $\overline{HM}^2 - \overline{YZ}^2$, & de $\overline{PS}^2 - \overline{YZ}^2$, $\overline{lM}^2 - \overline{lZ}^2$, & $\overline{lS}^2 - \overline{lZ}^2$, qui sont en même raison, l'on aura $\overline{IM}^2 . \overline{rS}^2 :: \overline{lM}^2 - \overline{lZ}^2 . \overline{lS}^2 - \overline{lZ}^2$, donc la section IZN de l'hyperboloïde est une hyperbole, dont l est le centre, & lZ la moitié du premier axe.

XVI. PROPOSITION.

Si l'on coupe un paraboloïde par des plans perpendiculaires à sa base, & que sur les sections qui sont des paraboles l'on marque leurs foyers, la courbe qui passera par ces foyers sera une parabole, *Fig.* 28.

Soit le paraboloïde BADM, dont AC est l'axe, coupé par des plans MAO, HPK perpendiculaires à la base BHMDOK & paralelles entr'eux ; supposant que les foyers de ces paraboles soient F & f, il faut prouver que la courbe EfFG qui passe par ces foyers est une parabole.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré par le point f la ligne droite NFQR perpendiculairement à l'axe, on aura par le 3^e^. Lemme $Nf \times fR$, ou $\overline{NQ}^2 - \overline{fQ}^2 = Pf \times 4AF$; or par la 4^e^. Proposition $AF = Pf$, donc $\overline{NQ}^2 - \overline{fQ}^2 = AF \times 4AF$, mais par la proprieté de la parabole $\overline{NQ}^2 = AF \times 4AF + FQ \times 4AF$, donc $AF \times 4AF + FQ \times 4AF - \overline{fQ}^2 = AF \times 4AF$, retranchant de part & d'autre $AF \times 4AF$, & transposant $-\overline{fQ}^2$, on aura $FQ \times 4AF = \overline{fQ}^2$; on démontreroit la même proprieté à chaque foyer des autres sections, donc la courbe qui passe par les foyers de toutes ces sections est une parabole qui a pour parametre celui de la parabole generatrice. *C. q. f. d.*

XVII. PROPOSITION.

Si l'on coupe un spheroïde long par des plans perpendiculaires au petit axe de l'ellipse generatrice ABPD, & qui soient paralelles entre eux, & que sur les sections qui sont des ellipses on marque les foyers, la courbe qui passera par ces foyers sera une ellipse. *Fig.* 29.

Soit le spheroïde long ABPDS formé par la révolution de la demie ellipse ABP autour du grand axe AP, si l'on coupe ce spheroïde par des plans VGMS, OKNL, perpendiculaires au petit axe BD, & paralelles entr'eux, ſuppoſant que F & f ſoient les foyers de ces deux ſections, je dis que la courbe BfFD, qui paſſe par ces foyers eſt une demie ellipſe.

DEMONSTRATION.

Par la proprieté de l'ellipſe $\overline{NT}^2 . BT \times DT :: \overline{MR}^2 . BR \times DR$. or $BT \times DT = \overline{LT}^2$, & $BR \times DR = \overline{RS}^2$, donc $\overline{NT}^2 . \overline{LT}^2 :: \overline{MR}^2 . \overline{RS}^2$; mais les lignes KL, GS, étant les petits axes des ellipſes OKNL, VGMS, on aura par la proprieté de l'ellipſe $\overline{LT}^2 = \overline{NT}^2 - \overline{fT}^2$, & $\overline{RS}^2 = \overline{MR}^2 - \overline{FR}^2$, donc $\overline{NT}^2 . \overline{NT}^2 - \overline{fT}^2 :: \overline{MR}^2 . \overline{MR}^2 - \overline{FR}^2$ donc par converſion de raiſon $\overline{fT}^2 . \overline{NT}^2 :: \overline{FR}^2 . \overline{MR}^2$; & en changeant $\overline{fT}^2 . \overline{FR}^2 :: \overline{NT}^2 . \overline{MR}^2$. mais $\overline{NT}^2 . \overline{MR}^2 :: BT \times DT . BR \times DR$. donc $\overline{fT}^2 . \overline{FR}^2 :: BT \times DT . BR \times DR$; donc la courbe B$f$FD eſt une demie ellipſe; ſi l'on continuoit la courbe par les foyers z, Z, on acheveroit l'ellipſe.

REMARQUE.

Si le grand axe étoit au petit comme $\sqrt{2}$ à 1, en décrivant du centre de l'ellipſe & de l'intervale de la moitié du petit axe un cercle, il détermineroit les foyers de toutes les ſections faites comme ci-deſſus, car ſi AP. BD, ou AC. BC :: $\sqrt{2}$. 1. on aura $\overline{AC}^2 . \overline{BC}^2 :: 2 . 1$. donc $\overline{AC}^2 = 2\overline{BC}^2$, mais $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CF}^2$, & en tranſpoſant $\overline{BC}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{AC}^2$, donc $\overline{BC}^2 + \overline{CF}^2 = 2\overline{BC}^2$, donc $\overline{CF}^2 = \overline{BC}^2$, donc CF = BC, ainſi les deux axes étant égaux l'ellipſe devient un cercle.

XVIII. PROPOSITION.

Si l'on coupe un hyperboloïde par des plans perpendiculaires à la baſe, & paralelles entr'eux, & que ſur les ſections qui ſont des hyperboles, l'on marque les foyers, la courbe qui paſſera par ces foyers ſera une hyperbole, *Fig.* 30.

Soit l'hyperboloïde NAER, coupé par les plans GOP, gRQ, perpendiculaires à la base NREP, & paralelles entre eux, & suposant que les points F, f, soient les foyers des hyperboles GOP, gRQ, je dis que la courbe nfFV, qui passe par ces foyers est une hyperbole.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré du centre C les asymptotes CX, CZ, de l'hyperbole generatrice NGAE, & prolongé les lignes GS, gI, jusqu'à la rencontre de l'hyperbole *abd* opposée à l'hyperbole generatrice, & du même centre C la perpendiculaire CBD sur les axes bg, dG des hyperboles gRQ, GOP; si des points D, B, l'on mene les droites DH, BY, paralelles à l'asymptote CX, rencontrant en H & Y les ordonnées gh, Gm, prolongées, puis des points f, F, les ordonnées fL, Fr, par la 12e Proposition gH sera la moitié du second axe de l'hyperbole gRQ, & GY la moitié du second axe de l'hyperbole GOP, donc $\overline{gH}^2 = \overline{Df}^2 - \overline{Dg}^2$, & $\overline{GY}^2 = \overline{BF}^2 - \overline{BG}^2$; donc $\overline{gH}^2 . \overline{GY}^2 :: \overline{Df}^2 - \overline{Dg}^2 . \overline{BF}^2 - \overline{BG}^2$; mais à cause des triangles semblables DgH, BGY, $\overline{gH}^2 . \overline{GY}^2 :: \overline{Dg}^2 . \overline{BG}^2$ donc $\overline{Dg}^2 . \overline{BG}^2 :: \overline{Df}^2 - \overline{Dg}^2 . \overline{BE}^2 - \overline{BG}^2$. donc par la 15e Proposition du 5e Livre d'Euclide $\overline{Df}^2 . \overline{BF}^2 :: \overline{Dg}^2 . \overline{BG}^2$. & en changeant $\overline{Df}^2 . \overline{Dg}^2 :: \overline{BF}^2 . \overline{BG}^2$; on démontreroit de même que $\overline{Df}^2 . \overline{Dg}^2 :: \overline{Cn}^2 . \overline{AC}^2$. conséquemment $\overline{Df}^2 . \overline{Dg}^2 :: \overline{BF}^2 . \overline{BG}^2 :: \overline{Cn}^2 . \overline{AC}^2$; par la propriété de l'hyperbole $\overline{gh}^2 . \overline{Gm}^2 :: \overline{Ch}^2 - \overline{AC}^2 . \overline{Cm}^2 - \overline{AC}^2$. mais $\overline{Ch}^2 = \overline{Dg}^2$, & $\overline{Cm}^2 = \overline{BG}^2$, donc $\overline{gh}^2 . \overline{Gm}^2 :: \overline{Dg}^2 - \overline{AC}^2 . \overline{BG}^2 - \overline{AC}^2$; on vient de voir que $\overline{Df}^2 . \overline{Dg}^2 :: \overline{Cn}^2 . \overline{AC}^2$. & en changeant $\overline{Dg}^2 . \overline{AC}^2 :: \overline{Df}^2 . \overline{Cn}^2$. & en divisant $\overline{Dg}^2 - \overline{AC}^2 . \overline{Df}^2 - \overline{Cn}^2 :: \overline{AC}^2 . \overline{Cn}^2$. on a vû aussi que $\overline{BF}^2 . \overline{BG}^2 :: \overline{Cn}^2 . \overline{AC}^2$. & en renversant $\overline{BG}^2 . \overline{BF}^2 :: \overline{AC}^2 . \overline{Cn}^2$. donc $\overline{BG}^2 - \overline{AC}^2 . \overline{BF}^2 - \overline{Cn}^2 :: \overline{AC}^2 . \overline{Cn}^2$. donc $\overline{Dg}^2 - \overline{AC}^2 . \overline{Df}^2 - \overline{Cn}^2 :: \overline{BG}^2 - \overline{AC}^2 . \overline{BF}^2 - \overline{Cn}^2$. & en changeant $\overline{Dg}^2 - \overline{AC}^2 . \overline{BG}^2 - \overline{AC}^2 :: \overline{Df}^2 - \overline{Cn}^2$.

$\overline{BF}^2 - \overline{Cn}^2$. J'ai prouvé que $\overline{gh}^2 . \overline{Gm}^2 :: \overline{Dg}^2 - \overline{AC}^2 . \overline{BG}^2 - \overline{AC}^2$. donc $\overline{gh}^2 . \overline{Gm}^2 :: \overline{Df}^2 - \overline{Cn}^2 . \overline{BF}^2 - \overline{Cn}^2$. ou $\overline{fL}^2 . \overline{Fr}^2 :: \overline{CL}^2 - \overline{Cn}^2 . \overline{Cr}^2 - \overline{Cn}^2$. donc la courbe *nf*FV est une hyperbole dont C est le centre, & qui a pour premier axe le double de C*n*. *C. q. f. p.*

XIX. PROPOSITION.

Si l'on coupe un paraboloïde ABLD obliquement par des plans ONXR, VPYS paralelles entr'eux, & que sur les sections qui sont des ellipses, l'on marque les foyers F, F, *f*, *f*, je dis que la courbe *f*FMF*f*, qui passe par ces foyers est une parabole, *Fig.* 31.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré par les centres de ces ellipses le diametre MGHK & les petits axes NGR, PHS, on aura par la proprieté de l'ellipse $\overline{GN}^2 = \overline{GX}^2 - \overline{GF}^2$, & $\overline{PH}^2 = \overline{YH}^2 - \overline{fH}^2$, donc $\overline{GN}^2 . \overline{PH}^2 :: \overline{GX}^2 - \overline{GF}^2 . \overline{YH}^2 - \overline{fH}^2$. mais par la 8e Proposition les ellipses ONXR, VPYS étant semblables $\overline{GN}^2 . \overline{PH}^2 :: \overline{GX}^2 . \overline{YH}^2$. donc $\overline{GX}^2 . \overline{YH}^2 :: \overline{GX}^2 - \overline{GF}^2 . \overline{YH}^2 - \overline{fH}^2$. donc la difference des antecedens étant à celle des conséquens comme l'un des antecedens à son conséquent $\overline{GF}^2 . \overline{fH}^2 :: \overline{GX}^2 . \overline{YH}^2$; mais par la proprieté de la parabole $\overline{GX}^2 . \overline{YH}^2 ::$ MG. MH, donc $\overline{GF}^2 . \overline{fH}^2 ::$ MG. MH. donc la courbe *f*FMF*f* est une parabole. *C. q. f. p.*

XX. PROPOSITION.

Si l'on coupe un spheroide long ABPCM obliquement par des plans GOHR, LQ*h*M paralelles entr'eux, & que sur les sections qui sont des ellipses, l'on marque les foyers F, F, *f*, *f*, je dis que la courbe *f*FNF*f*P, qui passe par ces foyers est une ellipse, *Fig.* 32,

DEMONSTRATION.

Ayant tiré par les centres de ces ellipses le diametre NCIP, & les petits axes OCR, QIM, on a par la proprieté de l'ellipse $\overline{GR}^2 = \overline{CH}^2 - \overline{CF}^2$, & $\overline{IM}^2 = \overline{Ih}^2 - \overline{If}^2$. donc $\overline{CR}^2 . \overline{IM}^2 :: \overline{CH}^2 - \overline{CF}^2 . \overline{Ih}^2 - \overline{If}^2$. or par la Proposition 11^e. $\overline{CR}^2 . \overline{IM}^2 :: \overline{CH}^2 . \overline{Ih}^2$. donc $\overline{CH}^2 . \overline{Ih}^2 :: \overline{CH}^2 - \overline{CF}^2 . \overline{Ih}^2 - \overline{If}^2$. donc $\overline{CF}^2 . \overline{If}^2 :: \overline{CH}^2 . \overline{Ih}^2$ mais par la proprieté de l'ellipse $\overline{CH}^2 . \overline{Ih}^2 :: CN \times CP . IN \times IP$. donc $\overline{CF}^2 . \overline{If}^2 :: CN \times CP . IN \times IP$. donc la courbe fFNFfP est une ellipse. *C. q. f. p.*

LEMME *XIV.*

Si un triangle CXO a deux de ses côtés CX, CO, coupés par plusieurs lignes MP, YK, paralelles à OX, je dis que $\overline{CX}^2 - \overline{CM}^2 . \overline{CY}^2 - \overline{CM}^2 :: \overline{OX}^2 - \overline{MP}^2 . \overline{YK}^2 - \overline{MP}^2 :: \overline{CO}^2 - \overline{CP}^2 . \overline{CK}^2 - \overline{CP}^2$. *Fig.* 33.

DEMONSTRATION.

A cause des triangles semblables COX, CMP, $\overline{CX}^2 . \overline{CM}^2 :: \overline{OX}^2 . \overline{MP}^2$. donc en divisant $\overline{CX}^2 - \overline{CM}^2 . \overline{CM}^2 :: \overline{OX}^2 - \overline{MP}^2 . \overline{MP}^2$. & en changeant $\overline{CX}^2 - \overline{CM}^2 . \overline{OX}^2 - \overline{MP}^2 :: \overline{CM}^2 . \overline{MP}^2$. on démontreroit de même que $\overline{CY}^2 - \overline{CM}^2 . \overline{YK}^2 - \overline{MP}^2 :: \overline{CM}^2 . \overline{MP}^2$. donc $\overline{CX}^2 - \overline{CM}^2 . \overline{OX}^2 - \overline{MP}^2 :: \overline{CY}^2 - \overline{CM}^2 . \overline{YK}^2 - \overline{MP}^2$. & en changeant $\overline{CX}^2 - \overline{CM}^2 . \overline{CY}^2 - \overline{CM}^2 :: \overline{OX}^2 - \overline{MP}^2 . \overline{YK}^2 - \overline{MP}^2$. on démontreroit de la même maniere que $\overline{OX}^2 - \overline{MP}^2 . \overline{YK}^2 - \overline{MP}^2 :: \overline{CO}^2 - \overline{CP}^2 . \overline{CK}^2 - \overline{CP}^2$. donc $\overline{CX}^2 - \overline{CM}^2 . \overline{CY}^2 - \overline{CM}^2 :: \overline{OX}^2 - \overline{MP}^2 . \overline{YK}^2 - \overline{MP}^2 :: \overline{CO}^2 - \overline{CP}^2 . \overline{CK}^2 - \overline{CP}^2$. *C. q. f. p.*

LEMME XV.

Soient les deux hyperboles opposées NAG, TaR, dont le centre soit C; si l'on tire un diametre RCM prolongé du côté de M, rencontrant en Y & X, deux ordonnées FI, GN au premier axe Aa, je dis que $NX \times GX . IY \times FY :: MX \times RX . MY \times RY$. *Fig.* 34.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré MP perpendiculaire à l'axe Aa, & la ligne HMT, paralelle à Aa; on a vû dans le 10^e. Lemme que $\overline{NO}^2 - \overline{MP}^2 . \overline{NO}^2 :: \overline{CO}^2 - \overline{CP}^2 . \overline{CO}^2 - \overline{AC}^2$. donc en changeant $\overline{NO}^2 - \overline{MP}^2 . \overline{CO}^2 - \overline{CP}^2 :: \overline{NO}^2 . \overline{CO}^2 - \overline{AC}^2$. on aura de même $\overline{IK}^2 - \overline{MP}^2 . \overline{CK}^2 - \overline{CP}^2 :: \overline{IK}^2 . \overline{CK}^2 - \overline{AC}^2$. or par la proprieté de l'hyperbole $\overline{NO}^2 . \overline{CO}^2 - \overline{AO}^2 :: \overline{IK}^2 . \overline{CK}^2 - \overline{AC}^2$. donc $\overline{NO}^2 - \overline{MP}^2 . \overline{CO}^2 - \overline{CP}^2 :: \overline{IK}^2 - \overline{MP}^2 . \overline{CK}^2 - \overline{CP}^2$. & en changeant $\overline{NO}^2 - \overline{MP}^2 . \overline{IK}^2 - \overline{MP}^2 :: \overline{CO}^2 - \overline{CP}^2 . \overline{CK}^2 - \overline{CP}^2$. mais par le 14^e. Lemme $\overline{OX}^2 - \overline{MP}^2 . \overline{IK}^2 - \overline{MP}^2 :: \overline{CO}^2 - \overline{CP}^2 . \overline{CK}^2 - \overline{CP}^2$. donc $\overline{NO}^2 - \overline{MP}^2 . \overline{IK}^2 - \overline{MP}^2 :: \overline{OX}^2 - \overline{MP}^2 . \overline{YK}^2 - \overline{MP}^2$. donc $\overline{NO}^2 - \overline{OX}^2 . \overline{IK}^2 - \overline{YK}^2 :: \overline{NO}^2 - \overline{MP}^2 . \overline{IK}^2 - \overline{MP}^2$. on a vû ci-dessus que $\overline{NO}^2 - \overline{MP}^2 . \overline{IK}^2 - \overline{MP}^2 :: \overline{CO}^2 - \overline{CP}^2 . \overline{CK}^2 - \overline{CP}^2$. donc $\overline{NO}^2 - \overline{OX}^2 . \overline{IK}^2 - \overline{YK}^2 :: \overline{CO}^2 - \overline{CP}^2 . \overline{CK}^2 - \overline{CP}^2$. mais le Lemme 14^e. $\overline{CO}^2 - \overline{CP}^2 . \overline{CK}^2 - \overline{CP}^2 :: \overline{CX}^2 - \overline{CM}^2 . \overline{CY}^2 - \overline{CM}^2$. donc $\overline{NO}^2 - \overline{OX}^2 . \overline{IK}^2 - \overline{YK}^2 :: \overline{CX}^2 - \overline{CM}^2 . \overline{CY}^2 - \overline{CM}^2$. or par la 5^e Proposition du second Livre d'Euclide $\overline{NO}^2 - \overline{OX}^2 = NX \times GX$. & $\overline{IK}^2 - \overline{YK}^2 = IY \times FY$. on a aussi par la 6^e Proposition du même Livre $\overline{CX}^2 - \overline{CM}^2 = MX \times RX$. & $\overline{CY}^2 - \overline{CM}^2 = MY \times RY$. donc $NX \times GX . IY \times FY :: MX \ RX . MY \times RY$. *C. q. f. p.*

XXI. PROPOSITION.

Soit l'hyperboloïde AOTS, formé par la révolution de la demie hyperbole AOD, autour de AD ; si l'on coupe cet hyperboloïde obliquement par des plans LOPQ, KVHZ paralelles entr'eux, & que sur les sections qui sont des ellipses, l'on marque les foyers F, F ; f, f, je dis que la courbe $FfMfF$ qui passe par ces foyers, est une hyperbole. *Fig.* 35.

DEMONSTRATION.

Si l'on imagine l'hyperboloïde coupé par des plans NOGQ, IVFZ, paralelles à sa base, & qui passent par les centres X & Y, des ellipses LOPQ, KVHZ, ces sections seront des cercles. Tirant aussi par ces centres le diamétre XYMCR rencontrant en R l'hyperbole aR opposée à l'hyperbole génératrice OAS, on aura par la proprieté de l'hyperbole $\overline{PX}^2 . \overline{YH}^2 :: MX \times RX . MY \times RY$, & par le 15^e. Lemme $MX \times RX . MY \times RY :: NX \times GX . IY \times FY$. donc $\overline{PX}^2 . \overline{YH}^2 :: NX \times GX . IY \times FY$. or $NX \times GX = \overline{OX}^2$, & $IY \times FY = \overline{YV}^2$. donc $\overline{PX}^2 . \overline{YH}^2 :: \overline{OX}^2 . \overline{YV}^2$ mais par la proprieté de l'ellipse $\overline{OX}^2 = \overline{PX}^2 - \overline{FX}^2$ & $\overline{YV}^2 = \overline{YH}^2 - \overline{fY}^2$ donc $\overline{PX}^2 . \overline{YH}^2 :: \overline{PX}^2 - \overline{FX}^2 . \overline{YH}^2 - \overline{fY}^2$ conséquemment $\overline{FX}^2 . \overline{fY}^2 :: \overline{PX}^2 . \overline{YH}^2$. or par la proprieté de l'hyperbole $\overline{PX}^2 . \overline{YH}^2 :: MX \times RX . MY \times RY$. donc $\overline{FX}^2 . \overline{fY}^2 :: MX \times RX . MY \times RY$. donc la courbe $FfMfF$, est une hyperbole. *C. q. f. p.*

XXII. PROPOSITION.

Si l'on coupe le cône ABCH, & l'hyperboloïde hIZXS par des plans PDR, HEV paralelles à l'un des côtés AB du cône qui est une asymptote de l'hyperbole generatrice hIZ, & que sur les sections de l'hyperboloïde QIS, YOX, qui sont des paraboles, l'on marque les foyers, qu'on les marque de même sur les paraboles PDR, HEV, par lesquels passera la ligne droite AFG, je dis que l'espace renfermé par l'arc hyperbolique *h*IG, la courbe KLT, qui passe par les foyers K, L, l'une & l'autre prolongées à l'infini, & par la ligne KO, est égal au triangle AGE. *Fig.* 36.

DEMONSTRATION.

Les paraboles QIS, PDR, ayant le même parametre, ainsi que les paraboles YOX, HEV, comme il a été prouvé dans la 14^e^ Proposition IL = FD, & OK = EG, c'est-à-dire que chaque élement de l'espace infini est égal à son correspondant du triangle AGE, & comme il y en a autant dans l'un que dans l'autre, il s'ensuit que l'espace infini est égal au triangle. *C. q. f. p.*

XXIII. PROPOSITION.

Soit le solide ABVDGE formé par la révolution de l'espace ANBCK autour de CK le second axe de l'hyperbole ANB, dont A est le sommet, & AE le premier axe; si l'on coupe ce solide par un plan ASTV, perpendiculaire à la base BVDS, je dis que la section ASTV est un triangle. *Fig.* 37.

DEMONSTRATION.

Si l'on imagine une autre section NPGR paralelle à la base, cette section sera un cercle, & que l'on prolonge AE de part & d'autre, rencontrant en M & F les ordonnées BM, DF, au premier axe AE des hyperboles opposées ANB, EGD, & que l'on tire aussi les ordonnées NI, GH, au même axe AE, on aura par la proprieté de l'hyperbole $\overline{BM}^2 . \overline{IN}^2 :: AM \times EM . AI \times EI$. or $AM \times EM = AM \times AF = BT \times DT = \overline{VT}^2$. & $AI \times FI = AI \times AH = NO \times GO = \overline{PO}^2$. on a aussi $\overline{BM}^2 = \overline{AT}^2$. & $\overline{IN}^2 = \overline{AO}^2$, donc $\overline{AT}^2 . \overline{AO}^2 :: \overline{VT}^2 . \overline{PO}^2$. conséquemment la section ASTV est un triangle. *C. q. f. p.*

XXIV. PROPOSITION.

Soit le solide AGBPFE formé par la révolution de l'espace

AGBCD autour du second axe prolongé de l'hyperbole AGB dont A est le sommet, & AE le premier axe. Si l'on coupe ce solide par un plan POTV qui passe par l'asymptote DN, & coupe les cercles AVET, BPFO, en sorte que les lignes OP, TV, où ces plans s'entrecoupent soient perpendiculaires aux diamétres BF, AE, je dis que la section POTV est un rectangle. *Fig.* 38.

DEMONSTRATION.

Si l'on imagine ce solide coupé par un plan GSMR paralelle à sa base, la section sera un cercle, & la ligne d'intersection RS sera perpendiculaire au diametre GM, & l'on aura par la proprieté de $BN \times FN = \overline{AD}^2$. & $GH \times HM = AD$. or $BN \times FN = \overline{NP}^2$. & $GH \times HM = \overline{HS}^2$. donc $\overline{AD}^2 = \overline{NP}^2 = \overline{HS}^2$. donc $AD = NP = HS$. mais $AD = DV$. donc $DV = HS = NP$. conséquemment $TV = RS = OP$. donc la section POTV est un rectangle, puisque tous ses élemens sont égaux. *C. q. f. p.*

LEMME XVI.

Soient les deux hyperboles opposées BAF, D*a*T, dont C est le centre; si l'on tire les lignes BD, OS, NR, paralelles à l'axe A*a*, puis la droite HNL perpendiculaire au même A*a*, je dis que $BL \times DL$. $OP \times PS$ :: $NL \times HL$. $NP \times HP$. *Fig.* 39.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré par les points B & O, les lignes BF, OG, paralelles à HL rencontrant la droite NR prolongée en I & M, l'on aura par le 10^e^ Lemme $BI \times FI$. $MO \times GM$ :: $IN \times IR$. $MN \times MR$. or $BI \times FI = NL \times HL$, & $MO \times GM = NP \times HP$. ce qui est aisé à démontrer; de même $IM \times IR = BL \times DL$. & $MN \times MR = OP \times PS$. donc $NL \times HL$. $NP \times HP$ :: $BL \times DL$. $OP \times PS$. *C. q. f. p.*

XXV. PROPOSITION.

Soit le solide AOBMD formé comme dans la 23^e^ & 24^e^

Proposition, si l'on coupe ce solide par un plan MNR perpendiculaire à la base BMDR, je dis que la section MNR est une hyperbole. *Fig* 40.

DEMONSTRATION.

Ayant prolongé NL jusqu'à la rencontre de l'hyperbole AB continuée en H, on aura par le 16e Lemme $NL \times HL. NP \times HP :: BL \times DL. OP \times PS.$ or $BL \times DL = \overline{LR}^2$, & $OP \times PS = \overline{TP}^2$. donc $\overline{LR}^2. \overline{TP}^2 :: NL \times HL. NP \times HP.$ donc la section MNR est une hyperbole. *C. q. f. p.*

XXVI. PROPOSITION.

Soit le solide ABSFER formé comme les précédens, si l'on coupe ce solide par un plan STR perpendiculaire au plan generateur ABCD, & paralelles à l'une des asymptotes de l'hyperbole generatrice AB, je dis que la section STR est une parabole. *Fig.* 41.

DEMONSTRATION.

Si l'on imagine ce solide coupé par un plan OLMI paralelle à sa base, & qui coupe la section STR en IL; puis BF & OM prolongées, rencontrant en X & Z la droite TZX, tirée du sommet T de la section STR paralellement à l'asymptote DN; ensuite les ordonnées VXm, YZr, au premier axe AE, on aura par le Corollaire de la 14e Proposition $VX \times Xm. YZ \times Zr :: TX. TZ.$ mais il a été démontré dans le 10e Lemme que $VX \times Xm. BX \times XF :: \overline{VF}^2. AF \times EF.$ de même $YZ \times Zr. OZ \times Zm :: \overline{Yg}^2. Ag \times Eg.$ & par la proprieté de l'hyperbole $\overline{Vf}^2. Af \times Ef :: \overline{Yg}^2. Ag \times Eg.$ donc $VX \times Xm. BX \times XF :: YZ \times Zr. OZ \times ZM.$ & en changeant $VX \times Xm. YZ \times Zr :: BX \times XF. OZ \times ZM.$ donc $TX. TZ :: BX \times XF. OZ \times ZM.$ mais à cause des triangles semblables TXP, TZK, on a $TX. TZ :: CX - CP. dZ - dK$, & par la 6e Proposition du second Livre d'Euclide $BX \times XF = \overline{CX}^2 - \overline{BC}^2$. de même

$OZ \times ZM = \overline{dZ}^2 - \overline{dO}^2$; donc $CX - CP$. $dZ - dK :: \overline{CX}^2 - \overline{BC}^2$. $\overline{dZ}^2 - \overline{dO}^2$. or à cause des paralelles $Cn + CP = dp + dK$. de même $CX - Cn = dz - dp$; ajoutant ces deux équations ensemble, on aura $CX - CP = dZ + dK$. multipliant le premier terme de la derniere proportion par $CX + CP$, & le second par $dZ + dK$, on aura $\overline{CX}^2 - \overline{CP}^2$. $\overline{dZ}^2 - \overline{dK}^2 :: \overline{CX}^2 - \overline{BC}^2$. $\overline{dZ}^2 - \overline{dO}^2$. donc $\overline{BC}^2 - \overline{CP}^2$. $\overline{dO}^2 - \overline{dK}^2 :: \overline{CX}^2 - \overline{BC}^2$. $\overline{dZ}^2 - \overline{dO}^2$. donc $\overline{BC}^2 - \overline{CP}^2$. $\overline{dO}^2 - \overline{dK}^2 :: BX \times XF$. $OZ \times ZM$. mais on a vû que $BX \times XF$. $OZ \times ZM :: VX \times Xm$. $YZ \times Zr$. donc $\overline{BC}^2 - \overline{CP}^2$. $dO \times dK :: VX \times Xm$. $YZ \times Zr$. or par le Corollaire de la 14^e. Propoſition $VX \times Xm$. $YZ \times Zr :: TX$. TZ. donc $\overline{BC}^2 - \overline{CP}^2$. $\overline{dO}^2 - \overline{dK}^2 :: TX$. TZ. mais par la 5^e Propoſition du ſecond Livre d'Euclide $\overline{BC}^2 - \overline{CP}^2 = BP \times PF$. & de même $\overline{dO}^2 - \overline{dK}^2 = OK \times KM$, & à cauſe des triangles ſemblables TXP, TZK, TX. TZ :: TP. TK, conſéquemment $BP \times PF$. $OK \times KM :: TP$. TK, ou $BP \times PF = \overline{PR}^2$, & $OK \times KM = \overline{KL}^2$. donc $\overline{PR}^2$. $\overline{KL}^2 :: TP$. TK. donc la ſection STR eſt une parabole. *C. q. f. p.*

XXVII. PROPOSITION.

Soit le ſolide AB*t*FE formé comme les précédens, coupé par un plan *mh*SK perpendiculaire au plan generateur ABCD, je dis que la ſection *mh*SK eſt une ellipſe. *Fig.* 42.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce ſolide coupé par deux plans GQMH, O*h*PK, paralelles à ſa baſe, & qui coupent la ſection *mh*SK en HQ & *h*K, & que l'on tire les droites *mg*, ST, puis T*m*, S*g*, que l'on prolonge enſuite les lignes GM, OP en X & N, en Z & R, & que des points de rencontre X, Z, l'on mene les lignes VX*n*, YZ*r*, perpendiculaires au premier axe AE, des deux hyperboles oppoſées AB, EF, on aura par la 13^e Propoſition $VX \times nX$. $YZ \times Zr :: TX \times mX$. $TZ \times mZ$; or l'on a vû dans le dixiéme Lemme que VX × *n*X. GX × MX :: $\overline{Vx}^2$. A*x* × E*x*. & de même que YZ × Z*r*. OZ × PZ :: $\overline{aY}^2$. A*a* × E*a*. mais par la proprieté de l'hyperbole $\overline{Vx}^2$. A*x* × E*x* :: $\overline{aY}^2$. A*a* × E*a*, donc VX × *n*X. GX × MX :: YZ × Z*r*. OZ × PZ, & en changeant VX × *n*X. YZ × Z*r* :: GX × MX. OZ × PZ. donc GX × MX. OZ × PZ :: TX × *m*X. TZ × *m*Z. or à cause des paralelles XI, ZL, TX. TZ :: SI. SL. & à cause des triangles semblables *m*XI, *m*ZL, *m*X. *m*Z :: *m*I. *m*L, donc TX × *m*X. TZ × *m*Z :: SI × *m*I. SL × *m*L, donc GX × MX. OZ × PZ :: SI × *m*I. SL × *m*L. mais par la 6e. Proposition du second Livre d'Euclide GX × MX $= \overline{fX}^2 - \overline{fG}^2$. & OZ × PZ $= \overline{dZ}^2 - \overline{dO}^2$. donc $\overline{fX}^2 - \overline{fG}^2$. $\overline{dZ}^2 - \overline{dO}^2$ :: SI × *m*I. SL × ML. or à cause des triangles semblables SIN, SLR, SI. SL :: IN. LR. & à cause des triangles semblables *m*XI, *m*ZL, *m*I. *m*L :: XI. ZL. donc SI × *m*I. SL × *m*L :: IN × XI. LR × ZL. donc $\overline{fX}^2 - \overline{fG}^2$. $\overline{dZ}^2 - \overline{dO}^2$ :: IN × XI. LR × ZL. mais IN × XI $= \overline{fX}^2 - \overline{fI}^2$. & LR × ZL $= \overline{dZ}^2 - \overline{dL}^2$. donc $\overline{fX}^2 - \overline{fG}^2$ $\overline{dZ}^2 - \overline{dO}^2$ :: $\overline{fX}^2 - \overline{fI}^2$. $\overline{dZ}^2 - \overline{dL}^2$. donc en changeant & en renversant $\overline{fX}^2 - \overline{fI}^2$. $\overline{fX}^2 - \overline{fG}^2$ :: $\overline{dZ}^2 - \overline{dL}^2$. $\overline{dZ}^2 - \overline{dO}^2$. donc en divisant $\overline{fG}^2 - \overline{fI}^2$. $\overline{fX}^2 - \overline{fG}^2$ :: $\overline{dO}^2 - \overline{dL}^2$. $\overline{dZ}^2 - \overline{dO}^2$. & en changeant $\overline{fG}^2 - \overline{fI}^2$. $\overline{dO}^2 - \overline{dL}^2$ :: $\overline{fX}^2 - \overline{fG}^2$. $\overline{dZ}^2 - \overline{dO}^2$. donc $\overline{fG}^2 - \overline{fI}^2$. $\overline{dO}^2 - \overline{dL}^2$ :: GX × MX. OZ × PZ. or par la cinquiéme Propofition du fecond Livre d'Euclide $\overline{fG}^2 - \overline{fI}^2 =$ GI × IM. & $\overline{dO}^2 - \overline{dL}^2 =$ OL × PL. donc GI × IM. OL × PL :: GX × MX. OZ × PZ. mais on a vu ci-deffus que GX × MX. OZ × PZ :: SI × *m*I. SL × *m*L. GI × IM. OL × PL :: SI × *m*I. SL × *m*L. or GI × IM $= \overline{IH}^2$. & OL × PL $= \overline{LK}^2$. donc $\overline{IH}^2$. $\overline{LK}^2$ :: SI × *m*I. SL × *m*L. donc la fection *mh*SK eft une ellipfe. *C. q. f. p.*

XXVIII. PROPOSITION.

Soit le folide ABMFE (*Fig.* 43.) formé comme les précédens, dont CD est l'axe, si l'on coupe ce solide par des plans ORM, IPG perpendiculaires à sa base, & au plan generateur ABDC, & que sur les sections qui sont des hyperboles on marque les foyers F, f, je dis que la courbe AFf qui passe par les foyers est une hyperbole.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit l'hyperbole AB continuée en K, & l'ordonnée BK au premier axe AE prolongé en S, puis les lignes NR, HP, prolongées aussi en X & V, & que l'on tire par les sommets R, P, des hyperboles ORM, IPG les droites YRm, ZPn, paralelles au premier axe AE, on aura comme on l'a vu dans le 10^e. Lemme $BY \times YK.\ RY \times Ym :: \overline{BS}^2.\ AS \times ES.$ de même $BZ \times ZK.\ PZ \times Zn :: \overline{BS}^2.\ AS \times ES.$ donc $BY \times YK.\ RY \times Ym :: BZ \times ZK.\ PZ \times Zn.$ & en changeant $BY \times YK.\ BZ \times ZK :: RY \times Ym.\ PZ \times Zn.$ mais $BY \times YK = NR \times NX.$ & $BZ \times ZK = HP \times VH.$ de même $RY \times Ym = BN \times FN$, & $PZ \times Zn = BH \times FH.$ ce qui est facile à démontrer, donc $NR \times NX.\ HP \times VH :: BN \times FN.\ BH \times FH$; or $BN \times FN = \overline{NO}^2.$ & $BH \times FH = \overline{IH}^2$ donc $NR \times NX.\ HP \times VH :: \overline{NO}^2.\ \overline{IH}^2$ & en changeant & renversant, on aura $\overline{NO}^2.\ NR \times NX :: \overline{IH}^2.\ HP \times VH.$ donc les hyperboles ORM, IPG sont semblables ; ainsi nommant (a) le second axe de l'hyperbole ORM, & (b) le second axe de l'hyperbole IPG, on aura $aa.\ bb :: \overline{LR}^2.\ \overline{TP}^2$ mais par la proprieté de l'hyperbole $aa = RF \times FX = \overline{FL}^2 - \overline{LR}^2$, & $bb = \overline{fT}^2 - \overline{TP}^2$ donc $\overline{FL}^2 - \overline{LR}^2.\ \overline{fT}^2 - \overline{TP}^2 :: \overline{LR}^2.\ \overline{TP}^2$ donc $\overline{FL}^2.\ \overline{fT}^2 :: \overline{LR}^2.\ \overline{TP}^2.$ mais par la proprieté de l'hyperbole $\overline{LR}^2.\ \overline{TP}^2 :: AL \times EL.\ AT \times TE.$ donc $\overline{FL}^2.\ \overline{fT}^2 :: AL \times EL.\ AT \times TE.$ donc la courbe AFf, est une hyperbole. *C. q. f. p.*

XXIX. PROPOSITION.

Soit le solide ABHFE formé comme les précédens, si l'on coupe ce solide par un plan SHTP, perpendiculaire au plan generateur ABCD & paralelle à l'asymptote CG de l'hyper-FEV, & qui coupe les cercles ASEP, BHFT, je dis que la section est une portion de parabole qui a son sommet en un point de l'hyperbole AB prolongée. *Fig.* 44.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce solide coupé par un plan YMXN paralelle à sa base, puis gR prolongée en L jusques à la rencontre de l'hyperbole AB continuée de part & d'autre, ensuite du point L la droite LV paralelle au premier axe AE, & des points L & V, les lignes Lt, VZ paralelles aux asymptotes Ch, CG, rencontrant les lignes BF, YX prolongées de part & d'autre en t, Z, en f, K, & que l'on tire des points de rencontre t, f, les ordonnées ntx, mfu, au premier axe AE prolongé en r, & p, on aura par le Corollaire de la $tn \times tx, fm \times fu :: tL. fL$; or on a vû dans le Lemme que $tn \times tx. Bt \times Ft :: \overline{px}^2. Ap \times Ep$, & que $mf \times fu. fY \times fX :: \overline{ru}^2. Ar \times Er$, & par la proprieté de l'hyperbole $\overline{px}^2. Ap \times Ep :: \overline{ru}^2. AR \times Er$. donc $tn \times tx. fm \times fu :: Bt \times Ft. fY \times fX$, & en changeant $tn \times tx. fm \times fu :: Bt \times Ft. fY \times fX$. donc $tL. fL :: Bt \times Ft. fY \times fX$. mais à cause des triangles semblables tRL, fIL, $tL. fL :: tD + DR. fO - OI$. donc $tD + DR. fO - OI :: Bt \times Ft. fY \times fX$; or à cause des paralelles gR, VZ, $DZ - DR$, ou $tD - DR = OK + OI$, ou $Of + OI$, multipliant les deux premiers termes de la précédente proportion par $tD - DR$, & $fO + OI$ qui sont égales, l'on aura $\overline{tD}^2 - \overline{DR}^2. \overline{fO}^2 - \overline{OI}^2 :: Bt \times Ft. fY \times fX$. mais par la 6^e^ Proposition du second Livre d'Euclide $Bt \times Ft = \overline{tD}^2 - \overline{BD}^2$, & $fY \times fX = \overline{fO}^2 - \overline{OY}^2$ donc $\overline{tD}^2 - \overline{DR}^2. \overline{fO}^2 - \overline{OI}^2 :: \overline{tD}^2 - \overline{BD}^2. \overline{fO}^2 - \overline{OY}^2$. donc $\overline{BD}^2 - \overline{DR}^2. \overline{OY}^2 - \overline{OI}^2 :: \overline{tD}^2 - \overline{BD}^2. \overline{fO}^2 - \overline{OY}^2 :: Bt \times Ft. fY \times fX$. or on a vû ci-dessus que $tL. fL :: Bt \times Ft. fY \times fX$. donc $\overline{BD}^2 - \overline{DR}^2. \overline{OY}^2 - \overline{OI}^2 :: tL. fL$, ou $\overline{DF}^2 - \overline{DR}^2. \overline{OY}^2 - \overline{OI}^2 :: tL. fL$. mais $\overline{DF}^2 - \overline{DR}^2 = BR \times FR$. & $\overline{OY}^2 - \overline{OI}^2 = YI \times IX$. donc $BR \times FR. YI \times IX$

$\times$ IX :: tL $\times$ fL; or BR $\times$ FR $= \overline{RT}^2$ & YI $\times$ IX $= \overline{IN}^2$ donc $\overline{RT}^2$. $\overline{IN}^2$ :: tL. fL, mais à cause des triangles semblables tRL, fIL, tL. fL :: RL. IL. donc $\overline{RT}^2$. $\overline{IN}^2$ :: RL. IL. donc la section SHTP est une portion de parabole dont L est le sommet. *C. q. f. p.*

XXX. PROPOSITION.

Soit le solide ABMFE (*Fig.* 45.) formé comme les précédens, si l'on coupe ce solide par des plans yMRu, gmr, perpendiculaires au plan generateur ABCD, & paralelles à l'une des asymptotes CG de l'hyperbole EF; la section yMRu sera une portion de parabole dont Ox prolongé en h où elle rencontre l'hyperbole AB continuée, sera l'axe par la précédente Proposition, & la section gmr, une autre parabole par la 26e Proposition. Supposant ensuite que l'on fasse tourner le triangle rectangle CDG autour de l'axe CD, il décrira un cône CHNGP, qui étant coupé par les plans yMRu, gmr, les sections SNP, tnp, seront des paraboles, & si sur leurs axes SO, to, l'on marque les foyers, L, l, en tirant par ces foyers la droite CLl, & sur les axes hO, go, les foyers F, f, je dis que l'espace infini renfermé par l'hyperbole gAh, & la courbe fF, chacune prolongée infiniment jusqu'à la rencontre de l'asymptote GC prolongée du côté de C, est égal au triangle CtL.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit le solide ABMFE coupé par un plan VTX paralelle à sa base, on aura par le Lemme MN $\times$ NR $= \overline{TS}^2$, mais MN $\times$ NR $= \overline{MO}^2 - \overline{NO}^2$; donc $\overline{MO}^2 - \overline{NO}^2 = \overline{TS}^2$, & en transposant $\overline{MO}^2 - \overline{TS}^2 = \overline{NO}^2$; nommant p le parametre de la parabole yMRu, l'on a $\overline{MO}^2 = \overline{ho} \times p$, & $\overline{TS}^2 = \overline{hs} \times p$, donc $\overline{MO}^2 - \overline{TS}^2 = \overline{ho} \times p - \overline{hS} \times p = \mathrm{SO} \times p$, donc $\overline{NO}^2 =$ So $\times$ p, donc p est aussi le parametre de la parabole SNP, donc hF $=$ SL: on démontreroit de la même maniere que $gf = tl$, donc l'espace infini terminé par l'hyperbole gAh, & la courbe

tF, chacune prolongée à l'infini jusqu'à la rencontre de l'asymptote CG prolongée du côté de C, est égal au triangle Ctl, puisque chaque élement hF, gf, de cet espace, est égal à son élement correspondant du triangle Ctl, & qu'il y en a autant dans l'un que dans l'autre. *C. q. f. p.*

LEMME XVII.

Soient les deux hyperboles opposées OAB, HEF, (*Fig.* 46.) dont AE est le premier axe, & C le centre, si l'on tire des lignes obliques LV, KZ, paralelles entre elles, puis du centre C le diametre CP, qui divise ces lignes en deux également, qu'ensuite l'on prenne les parties DY, PX, proportionnelles aux parties DL, PK, je dis que la courbe YXh, qui passe par ces points est une hyperbole.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré du centre C le diametre GCH, conjugué au diametre CP, & prolongé en I, M, puis fait CT. CG :: DY. DL, & mené des points L, K, les ordonnées LN, KO, au diametre GCH, ensuite des points Y, X, les lignes YS, XR, paralelles à ces ordonnées, on aura par l'hypotèse $\overline{DL}^2 . \overline{DY}^2 :: \overline{CG}^2 . \overline{CT}^2$; donc $\overline{DL}^2 - \overline{CG}^2 . \overline{DY}^2 - \overline{CT}^2 :: \overline{CG}^2 . \overline{CT}^2$. on aura de même que $\overline{PK}^2 - \overline{CG}^2 . \overline{PX}^2 - \overline{CT}^2 :: \overline{CG}^2 . \overline{CT}^2$. donc $\overline{DL}^2 - \overline{CG}^2 . \overline{DY}^2 - \overline{CT}^2 :: \overline{PK}^2 - \overline{CG}^2 . \overline{PX}^2 - \overline{CT}^2$, & en changeant $\overline{DL}^2 - \overline{CG}^2 . \overline{PK}^2 - \overline{CG}^2 :: \overline{DY}^2 - \overline{CT}^2 . \overline{PX}^2 - \overline{CT}^2$, ou $\overline{CI}^2 - \overline{CG}^2 . \overline{CM}^2 - \overline{CG}^2 :: \overline{CS}^2 - \overline{CT}^2 . \overline{CR}^2 - \overline{CT}^2$. mais par la 6e Proposition du second Livre d'Euclide $\overline{CI}^2 - \overline{CG}^2 = GI \times IH$. & $\overline{CM}^2 - \overline{CG}^2 = GM \times MH$; de même $\overline{CS}^2 - \overline{CT}^2 = TS \times SH$. & $\overline{CR}^2 - \overline{CT}^2 = TR \times RH$. donc $GI \times IH . GM \times MH :: TS \times SH . TR \times RH$. or par la proprieté de l'hyperbole $GI \times IH . GM \times MH :: \overline{IL}^2 . \overline{MK}^2$. donc $\overline{IL}^2 . \overline{MK}^2 :: TS \times SH . TR \times RH$. ou $\overline{YS}^2 . \overline{XR}^2 :: TS \times SH . TR \times RH$. donc la courbe YX$h$ est une hyperbole. *C. q. f. p.*

XXXI. PROPOSITION.

Soit le ſolide AByFE (*Fig.* 47.) formé comme les précédens, ſi l'on coupe ce ſolide par des plans obliques *g*YTV, *nrmx*, qui ſoient perpendiculaires au plan generateur ABCD, & que ſur les ſections qui ſont des ellipſes, l'on marque les foyers F, *f*, je dis que la courbe F*f* qui paſſe par ces foyers, eſt une hyperbole.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré du centre C les aſymptotes CH, CG, ſi l'on fait tourner le triangle rectangle CDH autour de l'axe CD, il décrira le cône CHZG qui étant coupé par les plans *g*YTV, *nrmx*, les ſections XO*h*P, OS*pu*, ſeront des ellipſes; tirant auſſi par les centres I, *t*, de ces ellipſes le diametre CI*td*, & coupant le ſolide AByFE par deux plans paralelles à ſa baſe, l'un SNLR qui paſſe par le centre I de l'ellipſe *g*YTV, & l'autre KY*m*V, qui paſſe par l'extrêmité X de l'ellipſe XO*h*P, on aura par le 12ᵉ Lemme $\overline{RI}^2 - \overline{PI}^2 = \overline{VX}^2$, donc en tranſpoſant $\overline{RI}^2 - \overline{VX}^2 = \overline{PI}^2$. or par la proprieté de l'ellipſe $\overline{RI}^2 . \overline{VX}^2 :: \overline{gI}^2 . \overline{gI}^2 - \overline{XI}^2$ donc par converſion de raiſon $\overline{RI}^2 - \overline{VX}^2 . \overline{RI}^2 :: \overline{XI}^2 . \overline{gI}^2$ ou $\overline{PI}^2 . \overline{RI}^2 :: \overline{XI}^2 . \overline{gI}^2$ donc PI. RI :: XI. *g*I. donc l'ellipſe *g*YTV eſt ſemblable à l'ellipſe XO*h*P, on démontreroit de même que l'ellipſe *nrmx* eſt ſemblable à l'ellipſe *oSpu*, mais les ellipſes XO*h*P, *oSpu*, ſont ſemblables, donc les ellipſes *g*YTV, *nrmx*, ſont auſſi ſemblables; ainſi tirant le petit axe *rx* de l'ellipſe *nrmx*, on aura $\overline{gI}^2 . \overline{RI}^2 :: \overline{nt}^2 . \overline{xt}^2$ mais par la proprieté de l'ellipſe $\overline{RI}^2 = \overline{gI}^2 - \overline{FI}^2$. & $\overline{xt}^2 = \overline{nt}^2 - \overline{ft}^2$. donc $\overline{gI}^2 . \overline{gI}^2 - \overline{FI}^2 :: \overline{nt}^2 . \overline{nt}^2 - \overline{ft}^2$. donc par converſion de raiſon $\overline{FI}^2 . \overline{gI}^2 :: \overline{ft}^2 . \overline{nt}^2$ donc FI. *g*I :: *ft*. *nt*. donc par le Lemme précédent la courbe F*f* qui paſſe par les foyers F, *f*, eſt une hyperbole. *C. q. f. p.*

XXXII. PROPOSITION.

Soit le ſolide ABZFE (*Fig.* 48.) comme les précédens, ſi l'on coupe ce ſolide par un plan $VZXg$ perpendiculaire à ſa baſe & dont la ſection XZ ſoit auſſi perpendiculaire à BF, je dis que les courbes VZ, gX qui terminent cette ſection ſont deux demies hyperboles oppoſées dont Vg eſt le premier axe.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce ſolide coupé par un plan $TdKL$, paralelle au plan $VZXg$, & qui paſſe par l'axe CD, puis par un autre $GIHN$, paralelle à ſa baſe, qu'enſuite des points N, X, P, K, l'on tire les lignes Nh, Xi, Pb, Kf, paralelles aux lignes SY, CD, juſqu'à la rencontre des lignes Vg, TL, prolongées; qu'enfin du centre C, l'on décrive les cercles bhn, fim, qui ſeront égaux aux cercles $GIHN$, $BZFX$. on aura $fL \times LN = ig \times gm$, ou $fL \times fT = ig \times iV$, de même $bL \times bT = hg \times hV$, donc $fL \times fT . bL \times bT :: ig \times iV . hg \times hV$, mais TL étant le premier axe des deux hyperboles oppoſées Td, LK, on aura $\overline{fK}^2 . \overline{Pb}^2 :: fL \times fT . bL \times bT$. donc $\overline{fK}^2 . \overline{Pb}^2 :: ig \times iV . hg \times hV$. or $\overline{fK}^2 = \overline{Xi}^2$, & $\overline{Pb}^2 = \overline{hN}^2$. donc $\overline{Xi}^2 . \overline{hN}^2 :: ig \times iV . hg \times hV$, donc la courbe gX eſt une demie hyperbole dont gV eſt le premier axe; on démontreroit de même que la courbe VZ, eſt auſſi une demie hyperbole dont gV eſt le premier axe, donc les courbes VZ, gX, ſont deux demies hyperboles oppoſées. *C. q. f. p.*

COROLLAIRE.

Il ſuit de ce que $\overline{Pb}^2 = \overline{hN}^2$, & $bL \times bT = hg \times hV$, que $\overline{Pb}^2 . bL \times bT :: \overline{hN}^2 . hg \times hV$, & conſéquemment que les hyperperboles gX, LK ſont ſemblables.

XXXIII. PROPOSITION.

Soit le ſolide $ABGFE$ (*Fig.* 49.) comme les précédens, ſi l'on coupe ce ſolide par des plans $TNMS$, $PGHO$, perpendiculaires au plan $ABFE$, & dont l'un $PGHO$ paſſe par l'axe CD, les courbes SM, OH, ſeront des hyperboles par la 32^e^. Propoſition dont les lignes ST, OP, ſeront les premiers axes, si l'on prolonge ces axes, en suposant que les points F, f, soient les foyers des demies hyperboles SM, OH, je dis que la courbe AFf qui passe par ces foyers est une demie ellipse dont Cf est la moitié du grand axe.

DEMONSTRATION.

Nommant $2a$ le second axe de la demie hyperbole SM, & $2b$ le second axe de la demie hyperbole OH, ces hyperboles étant semblables par le Corollaire de la 32^e Proposition, l'on aura $\overline{RS}^2 . \overline{CO}^2 :: aa . bb.$ or par la proprieté de l'hyperbole $aa = \overline{RF}^2 - \overline{RS}^2$ & $bb = \overline{Cf}^2 - \overline{CO}^2$ donc $\overline{RS}^2 . \overline{CO}^2 :: \overline{RF}^2 - \overline{RS}^2 . \overline{Cf}^2 - \overline{CO}^2.$ donc $\overline{RF}^2 . \overline{Cf}^2 :: \overline{RS}^2 . \overline{CO}^2$ mais $\overline{RS}^2 = AR \times RE.$ & $\overline{CO}^2 = \overline{AC}^2$ donc $\overline{RF}^2 . \overline{Cf}^2 :: AR \times RE . \overline{AC}^2.$ donc la courbe AFfE qui passe par ces foyers, est une demie ellipse dont Cf est la moitié du grand axe & AC la moitié du petit. *C. q. f. p.*

Cochin filius inv. et Sculp.

APPLICATION
DE LA
GEOMETRIE ORDINAIRE,
ET
DES CALCULS
DIFFERENTIEL ET INTEGRAL;
A LA RESOLUTION DE PLUSIEURS PROBLEMES.

SECTION SECONDE.

PREMIERE PROPOSITION.

SOIT un cylindre parabolique *a*E (*Figure* 50.) dont la parabole CAE est la base, & A son sommet. Si l'on coupe ce cylindre obliquement par un plan perpendiculaire au rectangle *a*AB*b*, je dis que la section XGDIZ est une parabole.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit le cylindre coupé par deux plans MFON, TALV paralelles à la base CAEB, les sections seront des paraboles, & les lignes PS, GI, où ces paraboles couperont la section XGDIZ, seront paralelles entr'elles & à LT & MO, nommant p le parametre de la base, il sera le parametre des autres, & l'on aura par la proprieté de la parabole $\overline{GH}^2 = FH \times p$, & $\overline{PR}^2 = AR \times p$, donc $\overline{GH}^2 . \overline{PR}^2 :: FH \times p . AR \times p :: FH . AR$, mais à cause des triangles semblables DFH, DAR, $FH . AR :: DH . DR$; donc $\overline{GH}^2 . \overline{PR}^2 :: DH . DR$; donc la section XGDIZ est une parabole, puisque les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les coupées. *C. q. f. p.*

II. PROPOSITION.

Soit le cylindre parabolique Ag, coupé par un plan ACR, qui passe par l'axe AC de sa base, & par un point R de son côté, je dis que la section ACR est une parabole. (*Fig.* 51.)

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce cylindre coupé par un plan IFHT, perpendiculaire à sa base & au rectangle ACGM, cette section IFHT sera aussi un rectangle qui coupera la portion ACR en GEH, & GEH sera un triangle semblable au triangle BCR, & l'on aura par la proprieté de la parabole $\overline{GH}^2 . \overline{BC}^2 :: AG . AC$; mais à cause des triangles semblables HGE, BCR, $\overline{GH}^2 . \overline{BC}^2 :: \overline{GE}^2 . \overline{CR}^2$ donc $\overline{GE}^2 . \overline{CR}^2 :: AG . AC$. donc la section ACR est une parabole. *C. q. f. p.*

III. PROPOSITION.

Soit le cylindre hyperbolique Ad, (*Fig.* 52.) coupé par un plan fVTS, perpendiculaire au rectangle aACc, je dis que la section est une hyperbole.

DEMONSTRATION.

Si l'on imagine ce cylindre coupé par deux autres plans HEF, XmL paralelles à la base ABD (les sections seront des hyperboles égales & semblables à ABD), qui coupent la section fVTS en OR & MN, & que l'on prolonge AC, faisant AY égal au premier axe de l'hyperbole ABD, ensuite fT, rencontrant en h la droite Yh, tirée paralellement à aA, prolongeant aussi les lignes GE, Km, en Z & g, on aura par la proprieté de l'hyperbole $\overline{PR}^2 . \overline{Im}^2 :: PE \times PZ . Im \times Ig$; or à cause des triangles semblables PEf, Imf, PE. Im :: Pf. If, & à cause des triangles semblables PZh, Igh, PZ. Ig :: Ph. Ih. donc $\overline{PE \times PZ . Im \times Ig :: Pf \times Ph . If \times Ih}$, donc $\overline{PR}^2 . \overline{Im}^2 :: Pf \times Ph . If \times Ih$. donc la section fVTS est une hyperbole. *C. q. f. p.*

IV. PROPOSITION.

Soit le cylindre hyperbolique AC (*Fig.* 53.) coupé par un plan ACE qui passe par le prolongement AC, du premier axe aA, & par un point quelconque E de son côté, je dis que la section ACE est une hyperbole.

DEMONSTRATION.

Si l'on imagine ce cylindre coupé par un plan IHOM paralelle au rectangle DBbd, la section sera un rectangle qui coupera la portion ACE, en FGH qui sera un triangle semblable au triangle ECB, & l'on aura par la proprieté de l'hyperbole $\overline{GH}^2 . \overline{BC}^2 :: AG \times aG . AC \times aC$, mais à cause des triangles semblables FGH, ECB, $\overline{GH}^2 . \overline{BC}^2 :: \overline{GF}^2 . \overline{CE}^2$, donc $\overline{GF}^2 . \overline{CE}^2 :: AG \times aG . AC \times aC$; donc la section ACE est une hyperbole. *C. q. f. p.*

V. PROPOSITION.

Soit le cylindre parabolique cubique Ab (*Fig.* 54.) coupé par

par un plan ZEY, perpendiculaire au rectangle $aACc$, je dis que la section ZEY est une parabole cubique.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce cylindre coupé par deux plans LKS, VFH, paralelles à la base ABD (les sections seront deux paraboles cubiques égales & semblables à ABD) & qui coupent la section ZEV, en PR & MN, on aura par la proprieté de la parabole cubique $\overline{OP}^3 . \overline{IM}^3 :: KO . FI.$ mais à cause des triangles semblables OKE, IFE, OK. FI :: EO. EI, donc $\overline{OP}^3 . \overline{IM}^3 :: EO . EI$; donc la section est une parabole cubique *C. q. f. p.*

VI. PROPOSITION.

Soit le cylindre parabolique cubique A*b* (*Fig.* 55.) coupé par un plan ACE, qui passe par l'axe AC de sa base, & par un point quelconque E de son côté, je dis que la section ACE est une parabole cubique.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce cylindre coupé par un plan FHMN, paralelle au rectangle DB*bd*, la section sera un rectangle qui coupera la portion ACE en GHO, qui sera un triangle semblable au triangle BCE, & l'on aura par la proprieté de la parabole cubique $\overline{GH}^3 . \overline{CB}^3 :: AG . AC.$ mais à cause des triangles semblables GHO, BCE, $\overline{GH}^3 . \overline{BC}^3 :: \overline{GO}^3 . \overline{CE}^3$; donc $\overline{GO}^3 . \overline{CE}^3 :: AG . AC$, donc la section ACE est une parabole cubique. *C. q. f. p.*

VII. PROPOSITION.

Soit le cylindre elliptique cubique ABFED, (*Fig.* 56.) coupé obliquement par un plan GNHM, perpendiculaire au rectangle ABFD, je dis que la section GNHM, est une ellipse cubique.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit le cylindre coupé par deux plans, RVXT, ONPM, paralelles à la base ALB, les sections seront des ellipses cubiques égales & semblables à cette base, & l'on aura par la proprieté de l'ellipse cubique $\overline{ST}^3 . \overline{IM}^3 :: RS \times SX . OI \times IP$, mais à cause des triangles semblables GRS, GOI, $RS . OI :: GS . GI$, & à cause des triangl. sembl. SHX, IHP, $SX . IP :: SH . IH$; donc $\overline{RS \times SX} . \overline{OI \times IP} :: \overline{GS \times SH} . \overline{GI \times IH}$; donc $\overline{ST}^3 . \overline{IM}^3 :: GS \times SH . GI \times IH$, donc la section GNHM est une ellipse cubique. *C. q. f. p.*

VIII. PROPOSITION.

Soit un cône parabolique ADBF, dont le sommet est A, & B celui de la parabole BFD qui lui sert de base. Si l'on coupe ce cône par un plan TVR, perpendiculaire à cette base, & paralelle au triangle ADF, je dis que la section est une hyperbole, *Fig.* 57.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit le cône coupé par un plan GIM, qui coupe aussi la section TVR, l'on aura à cause des triangles semblables AHM, ACF, $\overline{HM}^2 . \overline{CF}^2 :: \overline{AH}^2 . \overline{AC}^2$, & à cause des triangles semblables AGH, ABC, $\overline{AH}^2 . \overline{AC}^2 :: \overline{GH}^2 . \overline{BC}^2$; donc $\overline{HM}^2 . \overline{CF}^2 :: \overline{GH}^2 . \overline{BC}^2$; or par la proprieté de la parabole, $\overline{OP}^2 . \overline{HM}^2 :: GO . GH$, & $\overline{CF}^2 . \overline{ST}^2 :: BC . BS$, donc en multipliant terme par terme, & divisant le premier & le second produit par $\overline{CF}^2$ & $\overline{HM}^2$, & le 3^e. & le 4^e. par BC & GH, on aura $\overline{OP}^2 . \overline{ST}^2 :: GO \times GH . BC \times BS$, mais à cause des triangles semblables GVO, BVS, $GO . BS :: OV . VS$, & à cause des triangles semblables AGH, ABC, $GH . BC :: AH . AC :: OX . SX$, prenant à la place de GO & de BS, OV & VS qui sont en même raison, & à la place de GH & de BC, OX & SX qui sont aussi en même raison, on aura $\overline{OP}^2 . \overline{ST}^2 :: OV \times OX . VS \times SX$; donc TVR est une hyperbole. *C. q. f. p.*

IX. PROPOSITION.

Soit un cône parabolique ABFD, (*Fig.* 58.) dont A soit le sommet, & B celui de la parabole BDF qui lui sert de base; si l'on coupe ce cône par un plan RXYT, paralelle au côté AB du cône, & dont la section RT soit perpendiculaire à l'axe BC; je dis que la section RXYT est une portion de parabole qui a son sommet hors du cône en un point V d'une ligne AV, tirée paralellement à BC.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce cône coupé par un plan INGPM, paralelle à la base, la section sera une parabole, & l'on aura à cause des triangles semblables AIH, ADC, $\overline{IH}^2 . \overline{CD}^2 :: \overline{AH}^2 . \overline{AC}^2$, & à cause des triangles semblables AHG, ABC, $\overline{AH}^2 . \overline{AC}^2 :: \overline{GH}^2 . \overline{BC}^2$, donc $\overline{IH}^2 . \overline{CD}^2 :: \overline{GH}^2 . \overline{BC}^2$, or par la proprieté de la parabole $\overline{NO}^2 . \overline{IH}^2 :: GO . GH$, & $\overline{CD}^2 . \overline{RS}^2 :: BC . BS$, multipliant ces proportions terme par terme, & divisant le premier & le second produit par IH & CD, & le 3^e^ & le quatriéme par GH & BC, on aura $\overline{NO}^2 . \overline{RS}^2 :: GH \times GO . BC \times BS$, or $BS = GO$, donc $\overline{NO}^2 . \overline{RS}^2 :: GH . BC$, mais $GH . BC :: AG . AB :: OV . VS$, donc $\overline{NO}^2 . \overline{RS}^2 :: OV . VS$, donc RNVT est une parabole dont RXYT est une portion. *C. q. f. p.*

X. PROPOSITION.

Soit un cône parabolique ABFCD, (*Fig.* 59.) A son sommet, & B celui de la parabole BDCF, si l'on coupe ce cône obliquement par un plan KE*nm*, perpendiculaire au triangle ABC, je dis que la section est une portion d'ellipse.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce cône coupé par deux plans IGM, SVT, paralelles à la base, & qui coupent la section KE en NP & XZ, ces deux plans sont deux paraboles, & l'on aura à cause des triangles semblables ATR, AMH, $\overline{RT}^2 . \overline{HM}^2 :: \overline{AR}^2 . \overline{AH}^2$. & à cause des triangles semblables ARV, AHG, $\overline{AR}^2 . \overline{AH}^2$ $\overline{VR}^2 . \overline{GH}^2$; donc $\overline{TR}^2 . \overline{MH}^2 :: \overline{VR}^2 . \overline{GH}^2$, or par la proprieté de la parabole $\overline{MH}^2 . \overline{OP}^2 ::$ GH. GO, & $\overline{ZI}^2 . \overline{TR}^2 ::$ YV. VR, donc en multipliant terme par terme, & divisant le premier & le second produit par $\overline{TR}^2$, & par $\overline{MH}^2$, le 3^e. & le 4^e. par VR, & GH, on aura $\overline{ZY}^2 . \overline{OP}^2 ::$ YV×VR. GH×GO, or à cause des triangles semblables YVE, OGE, YV. GO :: EY. EO, & à cause des triangles semblables AVR, AGH, VR. GH :: AV. AG :: *r*Y. *r*O, mettant à la place de YV & de GO, EY & EO qui sont en même raison, & à la place de VR & de GH, *r*Y & *r*O, qui sont aussi en même raison, l'on aura $\overline{ZY}^2 . \overline{OP}^2 ::$ EY×*r*Y. EO×*r*O, donc KE*nm* est une portion d'ellipse dont E*r* est le grand axe. *C. q. f. p.*

XI. PROPOSITION.

Soit un cône parabolique ABCDR, (*Fig. 60.*) A son sommet, & R celui de la parabole BRD, dont CR est l'axe; si l'on coupe ce cône par un plan EPF, perpendiculaire à la base, & que PE soit paralelle à l'axe, je dis que cette section est une demie hyperbole.

DEMONSTRATION.

Si l'on coupe ce cône par un plan ACR qui passe par l'axe CR, & un autre GNOHM, paralelle à la base qui coupe la section EPF en IN, & le triangle ACR en OM, on aura à cause des triangles semblables AOM, ACR, MO. CR :: AM. AC. & à cause des triangles semblables AMG, ACB, AM. AC :: GM. BC, donc MO. CR :: GM. BC, & par le Lemme 3^e. CR. PE :: $\overline{BC}^2$. BE × ED, & NI. MO :: GI × IH. $\overline{GM}^2$. donc en multipliant terme par terme, & divisant le premier & le second produit par CR, & MO, le 3^e. & le 4^e. par BC & GM, on aura NI × PE : GI × IH × BC. BE × ED × GM, prolongeant ensuite AD jusques à la rencontre de EF aussi prolongé, & tirant AK paralelle à BD, on a par le Lemme second GI × IH. BE × ED :: FI × IS. EF × ES. & BC. GM :: AC. AM :: EK. IK, mettant à la place de GI × IH, & de BE × ED, FI × IS, & EF × ES qui sont en même raison & à la place de BC & de GM, EK & IK qui sont aussi en même raison, l'on aura NI. PE :: FI × IS × EK. EF × ES × IK, donc la section est une demie hyperbole.

XII. PROPOSITION.

Soit le cône parabolique ABRDC, (*Fig.* 61.) A son sommet, & R celui de la parabole BCDR, dont CR est l'axe ; si l'on coupe ce cône par un plan PGF paralelle au côté AB, en sorte que GF soit perpendiculaire à l'ordonnée BC, je dis que la section GPF est une hyperbole.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce cône coupé par un plan ACR, qui passe par l'axe CR, & le sommet du cône, & par un autre plan EMON paralelle à la base qui coupe le triangle ACR en MN, & la section PGF en IH, on aura à cause des triangles semblables AMN, ACR, MN. CR :: AN. AC, & à cause des triangles semblables ANE, ACB, AN. AC :: EN. BC, donc MN. CR :: EN. BC, or par le 3^e. Lemme CR. FG :: $\overline{BC}^2$. BF × FD, & IH. MN :: EI × IO. $\overline{EN}^2$, donc en multipliant terme par terme, & divisant le premier & le second produit par MN & CR, le 3^e. & le 4^e. par EN & BC, on aura $\overline{IH}^2$. FG :: BC × EI × IO. EN × BF × FD, mais EI = BF, donc IH. FG :: BC × IO. EN × FD. tirant ensuite AK paralelle à BD, & prolongeant FP jusques en K, on aura à cause des triangles semblables ABC, AEN, DFP & OIP, BC. EN ::

AB. AE :: FK. IK, & IO. FD :: PI. PF, mettant à la place de BC & de EN, FK & IK qui sont en même raison & à la place de IO & de FD, PI & PF qui sont aussi en même raison, on aura IH. FG :: EK × PI. PF × IK, donc la section est une hyperbole.

XIII. PROPOSITION.

Soit le cône parabolique ABCDR, (*Fig. 62.*) A son sommet, & R celui de la parabole BCDR, si l'on coupe ce cône obliquement & perpendiculairement au triangle ABD, je dis que la section GFE est une demie ellipse.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit le cône coupé par le triangle ACR, qui passe par l'axe CR; & par deux autres plans NPTO, HXYV, qui coupent le triangle ACR en OP & VX, & la section GFE en SF & IM, on aura à cause des triangles semblables AOP, AVX, OP. VX :: AO. AV, & à cause des triangles semblables AON, AVH, AO. AV :: ON. VH, consequemment OP. VX :: ON. VH, mais par le 3^e^. Lemme VX. IM :: $\overline{VH}^2$. IH × IY, SF. OP :: FT × FN. $\overline{ON}^2$; donc en multipliant terme par terme, & divisant le premier & le second produit par OP & VX, & le 3^e^ & le 4^e^. par ON & VH, on aura SF. IM :: VH × FT × FN. ON × IH × IY, mais à cause des triangles semblables FNG, IHM, FN. IH :: GF. GI, & à cause des triangles semblables ETF & EYI, FT. IY :: EF. EI. de même à cause des triangles semblables AON, AVH, VH. ON :: AH. AN, mais AH. AN :: IK. FK, mettant donc à la place de VH, FT, FN, les lignes IK, EF, GF, qui sont en même raison, & à la place de ON, IH, IY, les lignes FK, GI, EI, qui sont aussi en même raison, l'on aura SF. IM :: IK × EF × GF. FK × GI × EI, donc la section est une demie ellipse.

LEMME XVIII.

Soit un cône hyperbolique ABED, (*Fig. 63.*) A son sommet, & B celui de l'hyperbole DBE, si l'on coupe ce cône par un plan HIFG paralelle à sa base, la section sera une hyperbole semblable à la base, si l'on prolonge BC faisant BM égale au premier axe de l'hyperbole DBE, que l'on tire AM, & que l'on prolonge GI en N, je dis que IN est le premier axe de l'hyperbole HIF.

DEMONSTRATION.

A cause des triangles semblables ACD, AGH, $\overline{CD}^2$. $\overline{GH}^2$ :: $\overline{AC}^2$. $\overline{AG}^2$, & à cause des triangles ACM, AGN, AC. AG :: CM. GN, & à cause des triangles semblables ABC, AGI, AC. AG :: BC. GI, donc $\overline{AC}^2$. $\overline{AG}^2$ :: BC×CM. GI×GN, donc $\overline{CD}^2$. $\overline{GH}^2$ :: BC×CM. GI×GN, d'où il suit que IN est le premier axe de l'hyperbole HIF. *C. q. f. p.*

LEMME XIX.

Si un triangle ABD a deux cotés AB, AD, coupés par une ligne FH paralelle à BD, & que l'on tire une ligne droite quelconque MGC, je dis que GH×FH. CD×BD :: MH×AH. MD×AD. (*Fig. 64.*)

DEMONSTRATION.

A cause des triangles semblables MGH, MCD, on a GH. CD :: MH. MD, & à cause des triangles semblables AFH, ABD, FH. BD :: AH. AD, donc en multipliant terme par terme GH×FH. CD×BD :: MH×AH. MD×AD. *C. q. f. p.*

COROLLAIRE I.

Si la ligne étoit tirée du sommet A, comme AON, on auroit FH×HO. BD×DN :: $\overline{AH}^2$. $\overline{AD}^2$.

COROLLAIRE II.

Si cette ligne étoit tirée d'un point pris au-dessus du point A fur le prolongement de AD; comme PRS, on auroit $FH \times HR. BD \times DS :: AH \times HP. AD \times DP.$

XIV. PROPOSITION.

Soit un cône hyperbolique ABFCD, (*Fig. 65.*) A son sommet, & B celui de l'hyperbole DBF. Si l'on coupe ce cône par un plan GRHI perpendiculaire au triangle ABC & paralelle au triangle AFD, je dis que cette section est une hyperbole.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit le cône coupé par un plan MEON, qui coupe aussi la section GRHI, & qui soit paralelle à la base du cône, qu'ensuite on prolonge BC, faisant BL égale au premier axe de l'hyperbole DBFC, que l'on tire AL, & que l'on prolonge aussi NE jusques à la rencontre de AL, EK sera le premier axe de l'hyperbole MEO, par le 18^e. Lemme, les hyperboles MEO, DBF étant semblables $\overline{ST}^2. \overline{IH}^2 :: TE \times TK. BI \times IL$, & si l'on prolonge IR en P, on aura par le 19^e. Lemme $TE \times TK. BI \times IL :: TR \times TP. IR \times IP$, conséquemment $\overline{ST}^2. \overline{IH}^2 :: TR \times TP. IR \times IP$, donc la section GRHI est une hyperbole dont PR est le premier axe. *C, q. f. p.*

XV. PROPOSITION.

Soit un cône hyperbolique ABFCD, (*Fig. 66.*) A son sommet, & B celui de l'hyperbole DBF; si l'on coupe ce cône par un plan KLMR, perpendiculaire au triangle ABC, & paralelle au côté AB, je dis que cette section est une portion de parabole.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit le cône coupé par un plan TEP paralelle à sa base, & qui coupe la section KLMR en OH, cette ligne sera paralelle à RM, prolongeant ensuite BC & ES, & faisant BG égale au premier axe de l'hyperbole DBF; tirant AG, EF sera le premier axe de l'hyperbole TEP, par le 18^e Lemme, prolongeant

prolongeant ensuite NV jusqu'à la rencontre de AG aussi prolongée en X, les hyperboles TEP, DBF étant semblables, $\overline{IH}^2$. $\overline{MN}^2$ :: EI × FI. BN × NG, divisant les deux derniers termes par EI & BN qui sont égales, on aura $\overline{IH}^2$. $\overline{MN}^2$ :: FI. GN; or à cause des triangles semblables FIX, GNX, FI. GN :: IX. NX, donc $\overline{IH}^2$. $\overline{MN}^2$ :: IX. NX, donc la section KLMR est une portion de parabole. *C. q. f. p.*

XVI. PROPOSITION.

Soit un cône hyperbolique ABFCD, (*Fig.* 67.) A son sommet, & B celui de l'hyperbole DBF ; si l'on coupe ce cône obliquement par un plan OKRP perpendiculaire au triangle ABC, & qui étant prolongé du côté de K, rencontre la ligne AG qui termine en G, le premier axe BG de l'hyperbole DBF, je dis que la section OKRP est une hyperbole dont KM est le premier axe.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit le cône coupé par un plan NIVX, paralelle à sa base qui coupe la section OKRP en STL, & par un autre plan OYRP, qui passe par la ligne OR, & qui soit aussi paralelle à la base du cône, qu'ensuite l'on prolonge XI & PY en H, & Z les prolongemens IH, YZ, seront les premiers axes des hyperboles NIVX, OYRP, qui étant semblables donneront $\overline{ST}^2$. $\overline{OP}^2$ :: TI × TH. PY × PZ ; or à cause des triangles semblables TIK, PYK, TI. PY :: TK. PK, & à cause des triangles semblables THM, PZM, TH. PZ :: TM. PM, donc TI × TH. PY × PZ : : TK × TM. PK × PM, donc $\overline{ST}^2$. $\overline{OP}^2$ :: TK × TM. PK × PM, donc la section OKRP, est une hyperbole dont KM est le premier axe. *C. q. f. p.*

XVII. PROPOSITION.

Soit le cône hyperbolique ABFCD, (*Fig.* 68.) A son sommet, & B celui de l'hyperbole BFCD, si l'on coupe ce cône obliquement par un plan NEK, lequel étant prolongé rencontre en H la ligne AG aussi prolongée, qui termine en G le premier axe de l'hyperbole DBF, je dis que la section NEK est une portion d'ellipse.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit le cône coupé par un plan VSZ, paralelle à sa base, & par un autre plan KMN, aussi paralelle à cette base; que l'on prolonge les lignes SX, MO, en T & L; TS & LM seront les premiers axes des hyperboles VSZ, KMN, qui étant semblables, donneront $\overline{IR}^2 . \overline{OK}^2 :: IS \times IT . MO \times LO$; or à cause des triangles semblables ESI, EMO, IS. MO :: EI. EO, & à cause des triangles semblables IHT, OHL, IT. LO :: IH. OH, donc $IS \times IT . MO \times LO :: EI \times IH . EO \times OH$, donc $\overline{IR}^2 . \overline{OK}^2 :: EI \times IH . EO \times LO$, donc la section NEK est une portion d'ellipse. *C. q. f. p.*

XVIII. PROPOSITION.

Soit le cône hyperbolique ABFCD, (*Fig. 69.*) A son sommet, & B celui de l'hyperbole DBF; si l'on coupe ce cône obliquement par un plan NEK, perpendiculaire au triangle ABC & paralelle à AG, qui termine en G le premier axe BG de l'hyperbole DBF, je dis que la section est une parabole.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce cône coupé par un plan VSZ paralelle à sa base, & qui coupe la section NEK en PR, & par un autre KMN, aussi paralelle à la base, & qui passe par la ligne KN, que l'on prolonge ensuite les lignes SX, MO, en T & L, les prolongemens TS, LM, seront les premiers axes des hyqerboles VSZ, KMN, qui étant semblables, donneront cette proportion $\overline{IR}^2 . \overline{OK}^2 :: IS \times IT, MO \times LO$, & divisant les deux derniers termes par IT & LO qui sont égales à cause des paralelles AG & EO, l'on aura $\overline{IR}^2 . \overline{OK}^2 :: IS . MO$, mais à cause des triangles semblables EIS, EOM, IS. MO :: EI. EO, donc $\overline{IR}^2 . \overline{OK}^2 :: EI . EO$, donc la section NEK est une parabole. *C. q. f. p.*

LEMME XX.

Soit un cône parabolique cubique ABFCD, (*Fig.* 70.) A son sommet, & B celui de la parabole cubique DBF, si l'on coupe ce cône par un plan GEHK paralelle à sa base, & que l'on tire aux axes BC & EK, les ordonnées MLN, OIP, je dis que $\overline{LN}^3 . \overline{IP}^3 :: \overline{BC}^2 \times BL . \overline{EK}^2 \times EI$.

DEMONSTRATION.

Par la proprieté de la parabole cubique, on a $\overline{LN}^3 . \overline{CD}^3 ::$ $BL . BC$. $\overline{KG}^3 . \overline{IP}^3 :: EK . EI$. & à cause des triangles semblables ACD, AGK. $\overline{CD}^3 . \overline{KG}^3 :: \overline{AC}^3 . \overline{AK}^3$; & à cause des triangles semblables ABC, AEK, $\overline{AC}^3 . \overline{AK}^3 :: \overline{BC}^3 . \overline{EK}^3$; donc en multipliant terme par terme, & divisant le premier & le second produit par $\overline{KG}^3$ & $\overline{CD}^3$, le premier & le troisiéme par $\overline{AC}^3$, le second & le quatriéme par $\overline{AK}^3$, & enfin le troisiéme & le quatriéme par EK & BC, on aura $\overline{LN}^3 . \overline{IP}^3 :: \overline{BC}^2 \times BL$. $\overline{EK}^2 \times EI$. *C. q. f. p.*

XIX. PROPOSITION.

Soit un cône parabolique cubique ABFCD, (*Fig.* 71.) A son sommet, & B celui de la parabole cubique DBF, si l'on coupe ce cône par un plan SMLN, perpendiculaire à la base & paralelle au triangle ADF, je dis que la section est une hyperbole seconde cubique.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce cône coupé par un plan GEHK, paralelle à la base, & qui coupe en OP la section SMLN, puis que l'on prolonge LS, rencontrant en R la ligne AR tirée par le sommet du cône paralellement à BC, on a par le précédent Lemme $\overline{LN}^3 . \overline{IP}^3 :: \overline{BC}^2 \times BL . \overline{EK}^2 \times EI$; or à cause des triangles semblables ABC, AEK, $\overline{BC}^2 . \overline{EK}^2 :: \overline{AC}^2 . \overline{AK}^2 :: \overline{LR}^2 . \overline{IR}^2$, & à cause des triangles semblables BLS, EIS, BL. EI :: LS. IS, mettant donc dans les deux derniers termes de la premiere proportion à la place de $\overline{BC}^2$, & de $\overline{EK}^2$, $\overline{LR}^2$ & $\overline{IR}^2$ qui sont en même raison, & à la place de BL & de EI; LS & IS qui sont aussi en même raison, on aura cette proportion $\overline{LN}^3 . \overline{IP}^3 :: \overline{LR}^2 \times LS . \overline{IR}^2 \times IS$, donc la section SMLN est une hyperbole seconde cubique.

XX. PROPOSITION.

Soit un cône parabolique cubique ABFCD, (*Fig.* 72.) A son sommet, & B celui de la parabole cubique DBF, si l'on coupe ce cône par un plan HMLNG, perpendiculaire au triangle ABC, & paralelle au côté AB, je dis que la section est une portion d'une parabole seconde cubique.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit le cône coupé par un plan GEHK paralelle à la base, & prolongeant LK, jusques à la rencontre de AS, tirée du sommet A, paralellement à BC; on aura par le 20^e. Lemme cette proportion $\overline{LN}^3 . \overline{GK}^3 :: \overline{BC}^2 \times BL . \overline{EK}^2 \times EK$; or BL = EK, donc $\overline{LN}^3 . \overline{GK}^3 :: \overline{BC}^2 . \overline{EK}^2$, mais à cause des triangles sembl. ABC, AEK, $\overline{BC}^2 . \overline{EK}^2 :: \overline{AB}^2 . \overline{AE}^2 :: \overline{LS}^2 . \overline{KS}^2$, donc $\overline{LN}^3 . \overline{GK}^3 :: \overline{LS}^2 . \overline{KS}^2$, donc la section est une portion d'une parabole seconde cubique, puisque les cubes des ordonnées sont entr'eux comme les quarrés des abscisses. *C. q. f. p.*

XXI. PROPOSITION.

Soit un cône parabolique cubique ABFCD, (*Fig.* 73.) A son sommet, & B celui de la parabole cubique DBF; si l'on coupe encore ce cône obliquement par un plan PXT, perpendiculaire au triangle ABC, je dis que la section PXT, est une portion d'une ellipse seconde cubique.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit le cône coupé par deux plans GEH, PRT, paralelles à sa base, l'un GEH, qui coupe la section PXT, par une ligne quelconque IL, & l'autre PRT, qui passe par la ligne TP, prolongeant XN jusqu'à la rencontre de AS, tirée par le sommet du cône paralellement à BC, on aura par le 20e. Lemme $\overline{IO}^3 . \overline{NP}^3 :: \overline{EK}^2 \times EO . \overline{RN}^2 \times RN$, mais à cause des triangles semblables AEK, ARN; $\overline{EK}^2 . \overline{RN}^2 :: \overline{AE}^2 . \overline{AR}^2 :: \overline{OS}^2 . \overline{NS}^2$, & à cause des triangles semblables EXO, RXN, EO. RN :: OX. NX, mettant donc dans la premiere proportion à la place de $\overline{EK}^2$, & de $\overline{RN}^2$; $\overline{OS}^2$ & $\overline{NS}^2$, qui sont en même raison, & à la place de EO & de RN, OX & NX qui sont aussi en même raison, on aura $\overline{IO}^3 . \overline{NP}^3 :: \overline{OS}^2 \times OX . \overline{NS}^2 \times NX$, donc la section PXT est une portion d'une ellipse seconde cubique.

LEMME XXI.

Si dans une parabole cubique DBFC (*Fig.* 74.) dont B est le sommet, & FD ordonnée à l'axe BC, on tire une ligne MN paralelle à cet axe, je dis que MN. BC :: $\overline{CF}^3 - \overline{CM}^3 . \overline{CF}^3$.

DEMONSTRATION.

Ayant l'ordonnée NP, l'on aura par la proprieté de la parabole cubique BC. BP :: $\overline{CF}^3 . \overline{NP}^3$, donc par conversion de raison BC—BP. BC :: $\overline{CF}^3 - \overline{NP}^3 . \overline{CF}^3$, ou MN. BC :: $\overline{CF}^3 - \overline{CM}^3 . \overline{CF}^3$, en prenant pour BC—BP sa valeur MN, & pour $\overline{NP}^3$ son égale $\overline{CM}^3$. *C. q. f. p.*

LEMME XXII.

Soit le triangle ACF (*Fig.* 75.) dont les côtés AC, AF, soient coupés par une ligne droite HK paralelle à sa base ; si l'on tire une ligne quelconque MRS paralelle à AC rencontrant en S la ligne AS tirée du sommet A paralellement à CF, je dis que $\overline{CF}^3 - \overline{CM}^3 . \overline{HK}^3 - \overline{KO}^3 :: \overline{MS}^3 - \overline{RS}^3 . \overline{OS}^3 - \overline{RS}^3$. (*Fig.* 75.)

DEMONSTRATION.

Ayant tiré RL paralellement à FC, l'on aura à cause des triangles semblables ACF, ALR, $\overline{CF}^3 . \overline{LR}^3 :: \overline{AC}^3 . \overline{AL}^3$, donc en divisant $\overline{CF}^3 - \overline{LR}^3 . \overline{LR}^3 :: \overline{AC}^3 - \overline{AL}^3 . \overline{AL}^3$, & en changeant $\overline{CF}^3 - \overline{LR}^3 . \overline{AC}^3 - \overline{AL}^3 :: \overline{LR}^3 . \overline{AL}^3$, on démontreroit de même que $\overline{HK}^3 - \overline{LR}^3 . \overline{AK}^3 - \overline{AL}^3 :: \overline{LR}^3 . \overline{AL}^3$, conséquemment $\overline{CF}^3 - \overline{LR}^3 . \overline{AC}^3 - \overline{AL}^3 :: \overline{HK}^3 - \overline{LR}^3 . \overline{AK}^3 - \overline{AL}^3$, & en changeant $\overline{CF}^3 - \overline{LR}^3 . \overline{HK}^3 - \overline{LR}^3 :: \overline{AC}^3 - \overline{AL}^3 . \overline{AK}^3 - \overline{AL}^3$. ou $\overline{CF}^3 - \overline{CM}^3 . \overline{HK}^3 - \overline{KO}^3 :: \overline{MS}^3 - \overline{RS}^3 . \overline{OS}^3 - \overline{RS}^3$, en prenant $\overline{CM}^3$ & $\overline{KO}^3$ pour $\overline{LR}^3$, & pour $\overline{AC}^3$, $\overline{AK}^3$ & $\overline{AL}^3$, leurs égaux $\overline{MS}^3$, $\overline{RS}^3$, & $\overline{OS}^3$. *C. q. f. p.*

XXII. PROPOSITION.

Soit un cône parabolique cubique ABFCD, (*Fig.* 76.) A son sommet, & B celui de la parabole cubique DBF, si l'on coupe ce cône par un plan RNM, paralelle au triangle ABC, je dis que la section RNM est une portion d'hyperbole seconde.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit le cône coupé par un plan GHE, paralelle à la base, & qui coupe la section RNM en OP, on aura par le 21^e^. Lemme MN. BC :: $\overline{CF}^3 - \overline{CM}^3 . \overline{CF}^3$; or à cause des triangles semblables ABC, AEK, BC. EK :: AC. AK, & à cause des triangles semblables ACF, AKH, AC. AK :: CF. HK, & par le 21^e^. Lemme EK. PO :: $\overline{HK}^3 . \overline{HK}^3 - \overline{KO}^3$; donc en multipliant terme par terme, & divisant le premier & le second produit par BC & EK, le premier & le troisiéme par AC, le second & le quatriéme par AK, & enfin le troisiéme & le quatriéme par CF & HK, on aura MN. PO :: $\overline{CF}^3 - \overline{CM}^3 \times \overline{HK}^2 . \overline{HK}^3 - \overline{KO}^3 \times \overline{CF}^2$, mais par le 22^e. Lemme $\overline{CF}^3 - \overline{CM}^3 . \overline{HK}^3 - \overline{KO}^3 :: \overline{MS}^3 - \overline{RS}^3 . \overline{OS}^3 - \overline{RS}^3$, & à cause des triangles semblables AKH, ACF, $\overline{HK}^2 . \overline{CF}^2 :: \overline{AK}^2 . \overline{AC}^2 :: \overline{OS}^2 . \overline{MS}^2$, en prenant pour AK sa valeur OS, & pour AC sa valeur MS, mettant donc la cinquiéme proportion à la place de $\overline{CF}^3 - \overline{CM}^3$, $\overline{HK}^3 - \overline{KO}^3$, les quantités $\overline{MS}^3 - \overline{RS}^3$, & $\overline{OS}^3 - \overline{RS}^3$, qui sont en même raison; & à la place de $\overline{HK}^2$ & de $\overline{CF}^2$, les quantités $\overline{OS}^2$ & $\overline{RS}^2$, qui sont aussi en même raison, on aura MN. PO :: $\overline{MS}^3 - \overline{RS}^3 \times \overline{OS}^2 . \overline{OS}^3 - \overline{RS}^3 \times \overline{MS}^2$. donc la section RNM est une portion d'hyperbole seconde.

Lemme XXIII.

Soit le cône elliptique cubique ABFCD (*Fig.* 77.) A son sommet, & BC le premier axe de l'ellipse cubique BFCD; si l'on coupe ce cône par un plan MEHG, paralelle à sa base, & que l'on tire deux ordonnées quelconques OP, TR, aux premiers axes BC, MH, des ellipses BDCF, MEHG, je dis que $\overline{NO}^3 . \overline{SR}^3 :: BN \times CN \times BC . MS \times SH \times MH$.

Demonstration.

Si l'on imagine ce cône coupé par un plan AFD qui passe par les centres K & L des ellipses cubiques BDCF, MEHG, & qui passe par les seconds axes, on aura par la proprieté de l'ellipse cubique $\overline{NO}^3 . \overline{DK}^3 :: BN \times CN . \overline{BK}^2$, mais à cause des triangles semblables ADK, AEL, $\overline{DK}^3 . \overline{EL}^3 :: \overline{AK}^3 . \overline{AL}^3$. & à cause des triangles semblables ABK, AML, $\overline{AK}^3 . \overline{AL}^3 :: \overline{BK}^3 . \overline{ML}^3$. & par la proprieté des ellipses cubiques, $\overline{EL}^3 . \overline{SR}^3 :: \overline{ML}^3 . MS \times SH$; donc en multipliant terme par terme,

& divisant le premier & le second produit par $\overline{DK}^3$, & $\overline{EL}^3$, le premier & le 3e. par $\overline{AK}^3$, le 2e. & le 4e. par $\overline{AL}^3$, & enfin le 3e. & le 4e. par $\overline{BK}^2$ & $\overline{ML}^2$ on aura $\overline{NO}^3$. $\overline{SR}^3$ :: $BN \times CN \times BK$, $MS \times SH \times ML$, & prenant pour BK & ML, BC & MH qui sont en même raison, on aura $\overline{NO}^3$. $\overline{SR}^3$ :: $BN \times CN \times BC$. $MS \times SH \times MH$. *C. q. f. p.*

XXIII. PROPOSITION.

Si l'on coupe un cône elliptique cubique ABPCO (*Fig.* 78) par un plan PEO, perpendiculaire à sa base, & dont la section OP soit aussi perpendiculaire à l'axe BC, je dis que la section PEO est une hyperbole seconde cubique.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit le cône coupé par un plan MRHT, qui coupe aussi la section PEO en RT, & qui soit paralelle à la base du cône, & NE prolongée rencontrant en G le côté AC aussi prolongé, puis du point A que l'on tire la droite AL paralelle à BC, l'on aura par le 23e Lemme cette proportion $\overline{NO}^3$. $\overline{SR}^3$ :: $BN \times CN \times BC$. $MS \times SH \times MH$, mais par le second Lemme $BN \times CN$. $MS \times SH$ :: $EN \times GN$. $ES \times GS$, & à cause des triangles semblables ABC, AMH, BC. MH :: AC. AH. donc $BN \times CN \times BC$. $MS \times SH \times MH$ :: $EN \times GN \times AC$. $ES \times GS \times AH$, donc $\overline{NO}^3$. $\overline{SR}^3$ :: $EN \times GN \times AC$. $ES \times GS \times AH$, mais AC. AH :: LN. LS, donc $\overline{NO}^3$. $\overline{SR}^3$ :: $EN \times GN \times LN$. $ES \times GS \times LS$, donc la section PEO est une hyperbole seconde cubique.

XXIV. PROPOSITION.

Soit le cône elliptique cubique ABPCO, (*F.* 79) si l'on coupe ce cône par un plan PEO, qui étant prolongé rencontre en G le côté AB aussi prolongé; qui soit oblique sur la base, & que la section OP soit perpendiculaire au premier axe BC, je dis que la section PEO, est une hyperbole seconde cubique.

DEMONSTRATION

DEMONSTRATION.

Cette Propoſition ſe démontre de la même maniere que la précédente.

XXV. PROPOSITION.

Soit le cône elliptique cubique ABPCO, (*Fig.* 80.) coupé par un plan PEO paralelle au côté AB, en ſorte que la ſection PO ſoit perpendiculaire au premier axe BC, je dis que la ſection PEO eſt une hyperbole cubique.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce cône coupé par un plan MRHT, paralelle à ſa baſe, & qui coupe la ſection PEO, puis que l'on tire la droite AL paralellement à BC, rencontrant en L, NE prolongée, on aura par le 23^e. Lemme $\overline{NO}^3 . \overline{SR}^3 :: BN \times CN \times BC . MS \times SH \times MH$, & diviſant les deux derniers termes de cette proportion par BN & MS qui ſont égales, on aura $\overline{NO}^3 . \overline{SR}^3 :: CN \times BC . SH \times MH$, mais à cauſe des triangles ſemblables CEN, HES, CN. SH :: EN. ES, & à cauſe des triangles ſemblables ABC, AMH, BC. MH :: AB. AM, donc $CN \times BC . SH \times MH :: EN \times AB . ES \times AM$; donc $\overline{NO}^3 . \overline{SR}^3 :: EN \times AB . ES \times AM$; or $AB = LN$, & $AM = LS$; donc $\overline{NO}^3 . \overline{SR}^3 :: EN \times LN . ES \times LS$, donc la ſection PEO eſt une hyperbole cubique.

XXVI. PROPOSITION.

Soit le cône elliptique cubique ABIC, & BC le premier axe de l'ellipſe cubique BIC, ſi l'on coupe ce cône obliquement par un plan KOEP perpendiculaire au triangle ABC, je dis que la ſection KOEP eſt une ellipſe hyperbolique cubique. (*Fig.* 81.)

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit le cône coupé par deux plans FOGP, MRHT, paralelles à sa base, & qui coupent la section KOEP en OP & RT, puis KE prolongé en L, rencontrant AL tirée du sommet A paralellement à BC, on aura par le 23^e Lemme cette proportion $\overline{NO}^3 . \overline{SR}^3 :: FN \times NG \times FG . MS \times SH \times MH$; or à cause des triangles semblables FNK, MSK, FN. MS :: NK. SK, & à cause des triangles semblables ENG, ESH, NG. SH :: EN. ES, & à cause des triangles semblables AFG, AMH, FG. MH :: AF. AM, donc $FN \times NG \times FG . MS \times SH \times MH :: NK \times EN \times AF . SK \times ES \times AM$, donc $\overline{NO}^3 . \overline{SR}^3 :: NK \times EN \times AF . SK \times ES \times AM$, mais à cause des paralelles FN, MS, à AL. AF. AM :: NL. SL; donc $\overline{NO}^3 . \overline{SR}^3 :: NK \times EN \times NL . SK \times ES \times SL$, donc la section KOEP est une ellipse hyperbolique cubique.

LEMME XXIV.

Si dans une ellipse cubique ABED (*Fig.* 82.) dont AE soit le premier axe, & BD le second, l'on tire une ordonnée FGH à ce second axe, je dis que $\overline{BC}^3 - \overline{CG}^3 . \overline{BC}^3 :: \overline{FG}^2 . \overline{AC}^2$

DEMONSTRATION.

Ayant tiré l'ordonnée FM au premier axe AE, on a par la propriété de l'hyperbole cubique $\overline{BC}^3 . \overline{FM}^3 :: \overline{AC}^2 . AM \times ME$, ou $\overline{AC}^2 - \overline{CM}^2$, donc par conversion de raison $\overline{BC}^3 - \overline{FM}^3 . \overline{BC}^3 :: \overline{CM}^2 . \overline{AC}^2$ ou $\overline{BC}^3 - \overline{CG}^3 . \overline{BC}^3 :: \overline{FG}^2 . \overline{AC}^2$ *C. q. f. p.*

XXVII. PROPOSITION.

Soit le cône elliptique cubique ABHDM, (*Fig.* 83.) dont BD soit le second axe de l'ellipse cubique AHDM, si l'on coupe ce cône par un plan HEM, perpendiculaire au triangle ABD, & à la base BHDM du cône; je dis que la section est une hyperbole réciproque.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce cône coupé par un plan FRGS paralelle à la base, qui coupe la section HEM en RS, & un autre ANO qui passe par le sommet du cône, & dont NCO soit le premier axe de l'ellipse cubique BHDM, puis que l'on prolonge IE qui rencontre en L la droite AL tirée du sommet A paralellement à BD, on aura par le 24e Lemme $\overline{IM}^2 . \overline{CO}^2 :: \overline{BC}^3 - \overline{CI}^3 . \overline{BC}^3$; or à cause des triangles sembl. ACO, AKV, $\overline{CO}^2 . \overline{KV}^2 :: \overline{AC}^2 . \overline{AK}^2$. & à cause des triangles semblables ABC, AFK, $\overline{AC}^2 . \overline{AK}^2 :: \overline{BC}^2 . \overline{FK}^2$, & par le 24e Lemme $\overline{KV}^2 . \overline{PS}^2 :: \overline{FK}^3 . \overline{FK}^3 - \overline{PK}^3$; donc en multipliant terme par terme, & divisant le premier & le second produit par $\overline{CO}^2$, & $\overline{KV}^2$, le premier & le troisiéme par $\overline{AC}^2$, le second & le quatriéme par $\overline{AK}^2$, & enfin le troisiéme & le quatriéme par $\overline{BC}^2$ & $\overline{FK}^2$, l'on aura $\overline{IM}^2 . \overline{PS}^2 :: \overline{\overline{BC}^3 - \overline{CI}^3} \times FK . \overline{\overline{FK}^3 - \overline{PK}^3} \times BC$, mais par le 22e. Lemme $\overline{BC}^3 - \overline{CI}^3 . \overline{FK}^3 - \overline{PK}^3 :: \overline{IL}^3 - \overline{EL}^3 . \overline{PL}^3 - \overline{EL}^3$, & à cause des triangles sembl. FK. BC :: AK. AC, donc $\overline{\overline{BC}^3 - \overline{CI}^3} \times FK . \overline{\overline{FK}^3 - \overline{PK}^3} \times BC :: \overline{\overline{IL}^3 - \overline{EL}^3} \times AK . \overline{\overline{PL}^3 - \overline{EL}^3} \times AC$; donc $\overline{IM}^2 . \overline{PS}^2 :: \overline{\overline{IL}^3 - \overline{EL}^3} \times AK . \overline{\overline{PL}^3 - \overline{EL}^3} \times AC$, & mettant à la place de AK & de AC, leurs égales PL & IL, on aura $\overline{IM}^2 . \overline{PS}^2 :: \overline{\overline{IL}^3 - \overline{EL}^3} \times PL . \overline{\overline{PL}^3 - \overline{EL}^3} \times IL$, donc la section HEM est une hyperbole ré- réciproque.

Lemme XXV.

Soit le cône hyperbolique cubique (*Fig.* 84.) ABECD; A son sommet, & B celui de l'hyperbole cubique DBEC, si l'on coupe ce cône par un plan GFIH, paralelle à sa base; & qu'ensuite on prolonge BC faisant BZ égale au premier axe de l'hyperbole cubique DBE, que l'on tire AZ, & que l'on prolonge aussi FH en V, je dis que FV est le premier axe de l'hyperbole cubique GFI.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce cône coupé par un plan AOM qui passe par le sommet du cône, & dont MO soit parallele à l'ordonnée DE, on aura par la proprieté de l'hyperbole cubique $\overline{NM}^3 . \overline{CD}^3 :: BN \times NZ . BC \times CZ$, les triangles APR. AMN étant semblables $\overline{PR}^3 . \overline{NM}^3 :: \overline{AR}^3 . \overline{AN}^3$, AHR, ACN étant semblables $\overline{AR}^3 . \overline{AN}^3 :: \overline{AH}^3 . \overline{AC}^3$; AHG, ACD étant aussi semblables $\overline{AH}^3 . \overline{GH}^3 :: \overline{AC}^3 . \overline{CD}^3$, donc en multipliant terme par terme, & divisant le premier & le second produit par $\overline{MN}^3$, le premier & le troisiéme par $\overline{AR}^3$, & $\overline{AH}^3$, le second & le quatriéme par $\overline{CD}^3$ & $\overline{AN}^3$, & enfin le troisiéme & le quatriéme par $\overline{AC}^3$, l'on aura $\overline{PR}^3 . \overline{GH}^3 :: BN \times NZ . BC \times CZ$, mais $BN . BC :: FR . FH$. & $NZ . CZ :: VR . VH$; donc $BN \times NZ . BC \times CZ :: FR \times VR . FH \times VH$; donc $\overline{PR}^3 . \overline{GH}^3 :: FR \times VR . FH \times VH$; donc VF est le premier axe de l'hyperbole cubique GFIH. *C. q. f. p.*

LEMME XXVI.

Soit le cône hyperbolique cubique ABECD (*Fig.* 85.) A son sommet, & B celui de l'hyperbole cubique DBEC; si l'on coupe ce cône par un plan GFIH parallele à sa base, que l'on tire une ordonnée PS & une autre MO, parallele à GI & DE, je dis que $\overline{PR}^3 . \overline{MN}^3 :: FR \times VR \times AH . BN \times NZ \times AC$.

DEMONSTRATION.

Ayant prolongé les lignes BC, FH, faisant BZ égale au premier axe de l'hyperbole cubique DBE, puis tiré AZ, FV sera le premier axe de l'hyperbole cubique GFIH par le 25^e^. Lemme, & l'on aura par la proprieté de l'hyperbole cubique $\overline{PR}^3 . \overline{GH}^3 :: FR \times VR . FH \times VH$, & à cause des triangles semblables AGH, ACD, $\overline{GH}^3. \overline{CD}^3 :: \overline{AH}^3. \overline{AC}^3$, & par le premier Corollaire du 19e Lemme $\overline{AH}^2. \overline{AC}^2$ :: FH × VH. BC × CZ; or par la proprieté de l'hyperbole cubique $\overline{CD}^3. \overline{MN}^3$ :: BC × CZ. BN × NZ, donc en multipliant terme par terme & divisant le premier & le second produit par $\overline{GH}^3$ & $\overline{CD}^3$, le 1er & le 3e par $\overline{AH}^2$, le 2e & le 4e par $\overline{AC}^2$, & enfin le 3e & le 4e par FH × VH, & BC×CZ, on aura cette proportion $\overline{PR}^3. \overline{MN}^3$ :: FR × VR × AH. BN × NZ × AC. *C. q. f. p.*

XXVIII. PROPOSITION.

Soit un cône hyperbolique cubique ABECD (*Fig.* 86.) A son sommet, & B celui de l'hyperbole cubique DBE, si l'on coupe ce cône par un plan OLM parallele au triangle AED, je dis que la section est une hyperbole seconde cubique.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce cône coupé par un plan GFI, parallele à sa base, & qui coupe la section OLM en SP qui sera parallelle à IG, & que l'on prolonge BC faisant BZ égale au premier axe de l'hyperbole cubique DBE, puis que l'on tire AZ & prolonge FH en V, FV sera le premier axe de l'hyperbole cubique GFI, par le 25e. Lemme, prolongeant ensuite NL rencontrant AK tiré par le sommet du cône paralellement à BC, on aura par le 26e. Lemme $\overline{PR}^3. \overline{MN}^3$ :: FR × VR × AH. BN × NZ × AC; or par le 19e. Lemme FR × VR. BN × NZ :: LR × RX. LN × NX, & AH. AC :: KR. KN; donc en multipliant terme par terme, & divisant le premier & le troisiéme produit par FR × VR × AH, & le second & le quatriéme par BN × NZ × AC, l'on aura $\overline{PR}^3. \overline{MN}^3$ :: LR × RX × KR. LN × NX × KN; donc la section OLM est une hyperbole seconde cubique.

XXIX. PROPOSITION.

Soit le cône hyperbolique cubique ABECD, (*Fig.* 87.) A son sommet, & B celui de l'hyperbole cubique DBE, si l'on coupe ce cône par un plan OTKM perpendiculaire au triangle ABC, & paralelle au côté AB, je dis que la section OTKM est une portion d'hyperbole cubique.

DEMONSTRATION.

Si l'on imagine ce cône coupé par un plan GFIH paralelle à sa base, & qui coupe la section OTKM en PS, puis BC prolongé faisant BZ égale au premier axe de l'hyperbole cubique DBEC, que l'on tire AZ, & que l'on prolonge FH en V, FV sera le premier axe de l'hyperbole cubique GFI, par le 25^{e}. Lemme, qu'ensuite on prolonge NL, qui rencontre AZ prolongé en Y, & qu'enfin l'on tire AX paralelle à BC, on aura par le 26^{e}. Lemme $\overline{PR}^3 . \overline{MN}^3 :: FR \times VR \times AH . BN \times NZ \times AC$, divisant le troisiéme terme par FR & le quatriéme par BN, son égale, on aura $\overline{PR}^3 . \overline{MN}^3 :: VR \times AH . NZ \times AC$; or à cause des triangles semblables RVY, NZY, $VR . NZ :: RY . NY$, & à cause des triangles semblables AFH, ABC, $AH . AC :: AF . AB$; donc $VR \times AH . NZ \times AC :: AF \times RY . AB \times NY$; donc $\overline{PR}^3 . \overline{MN}^3 :: AF \times RY . AB \times NY$, & mettant à la place de AF & de AB leurs égales RX & NX, on aura $\overline{PR}^3 . \overline{MN}^3 :: RX \times RY . NX \times NY$, donc la section OTKM est une portion d'hyperbole cubique. *C. q. f. p.*

XXX. PROPOSITION.

Soit un cône hyperbolique cubique ABECD (*Fig.* 88.) A son sommet, & B celui de l'hyperbole cubique DBEC; si l'on coupe ce cône obliquement par un plan OZRP perpendiculaire au triangle ABC, & qui étant prolongé du côté de Z, rencontre la ligne A*p* (qui termine en *p* le premier axe B*p* de l'hyperbole cubique DBEC) prolongée aussi en *t*, je dis que la section OZRP, est une portion d'une ellipse hyperbolique cubique.

DEMONSTRATION.

Si l'on coupe ce cône par deux plans GFIH, M*h*NL, paralelles à sa base, & que l'on prolonge FH, hL, en m & n, les prolongemens Fm, hn, seront les premiers axes des hyperboles cubiques GFIH, MhNL, par le 25^e Lemme; prolongeant aussi ZP jusqu'à la rencontre de Ak, tirée du sommet A paralellement à BC, on aura par le 26^e Lemme $\overline{KS}^3 . \overline{VX}^3 ::$ FK $\times$ mK $\times$ AH. hX $\times$ nX $\times$ AL; or à cause des triangles semblables KFZ, XhZ, FK. hX :: KZ. XZ, & à cause des triangles semblables mKt, nXt, mK. nX :: Kt. Xt, & à cause des triangles semblables AmH, AnL, AH. AL :: Am. An; donc FK $\times$ mK $\times$ AH. hX $\times$ nX $\times$ AL :: KZ $\times$ Kt $\times$ Am. XZ $\times$ Xt $\times$ An; donc $\overline{KS}^3 . \overline{VX}^3 ::$ KZ $\times$ Kt $\times$ Am. XZ $\times$ Xt $\times$ An, & mettant à la place de Am & de An, Kk, & Xk, qui sont en même raison, à cause des paralelles Ak, mK, nX, on aura $\overline{KS}^3 . \overline{VX}^3 ::$ KZ $\times$ Kt $\times$ mk. XZ $\times$ Xt $\times$ Xk, donc la section OZR est une portion d'une ellipse hyperbolique cubique.

XXXI. PROPOSITION.

Soit le cône hyperbolique cubique ABECD (*Fig.* 89.) A son sommet, & B celui de l'hyperbole cubique DBE; si l'on coupe ce cône par un plan KmnL, qui étant prolongé du côté de nK, rencontre AZ (qui termine en Z, le premier axe de l'hyperbole cubique DBE) prolongée aussi en Y, je dis que la section KmnL est une portion d'une ellipse hyperbolique cubiq.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce cône coupé par deux plans GFIH, $gfih$ paralelles à sa base, & qui coupent la section KmnL en PS & MO, puis FH, fh, prolongées en X & t, les prolongemens FX, ft, seront les premiers axes des hyperboles cubiques FGIH, $fgih$, tirant aussi Ax paralelle à BC, on aura $\overline{PR}^3 . \overline{MN}^3 ::$ FR $\times$ RX $\times$ AH. fN $\times$ Nt $\times$ Ah; or à cause des triangles semblables FmR, fmN, FR. fN :: mR. mN, & à cause des triangles semblables RXY, NtY, RX. Nt :: RY. NY, & à cause des triangles semblables AHX, Aht, AH. Ah :: AX. At, & à cause des paralelles Ax, RX, Nt, AX.

$At :: Rx. Nx.$ donc en multipliant terme par terme, & divisant le premier & le troisiéme produit par AX, le second & le quatriéme par At, on aura $FR \times RX \times AH. fN \times Nt \times Ah ::$ $mR \times RY \times Kx. mN \times NY \times Nx$; donc $\overline{PR}^3. \overline{MN}^3 :: mR \times Rx$ $\times KY. mN \times Nx \times NY$; donc la section KmnL est une portion d'une ellipse hyperbolique cubique.

XXXII. PROPOSITION.

Soit le cône hyperbolique cubique ABECD (*Fig.* 90.) A son sommet, & B celui de l'hyperbole cubique DBE, si l'on coupe ce cône par un plan KmnL perpendiculaire au triangle ABC & paralelle à la ligne AZ tirée du sommet A, & terminant en Z le premier axe BZ de l'hyperbole cubique DBE, je dis que cette section est une portion d'une ellipse cubique.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce cône coupé par deux plans GFIH, *gfih* paralelles à sa base, & qui coupent la section KmnL en PS, & MO, puis FH, *fh*, prolongées en V & X, les prolongemens FV, *fX*, seront les premiers axes des hyperboles cubiques *gfih*, par le 25^e Lemme, prolongeant aussi ML, rencontrant en *k* la droite A*k*, tirée du sommet A paralellement à BC, on aura par le 26^e. Lemme $\overline{PR}^3. \overline{MN}^3 :: ER \times VR \times AH.$ $fN \times NX \times Ah$; or à cause des triangles semblables $mFR. mfN$; $FR. fN :: mR. mN$, & à cause des triangles semblables AFH, A*fh* ; $AH. Ah :: AF. Af$, & à cause des paralelles AK, FR, *f*N ; $AF. Af :: Rk. Nk$, donc en multipliant terme par terme, & divisant le premier & le troisiéme produit par AF, & le second & le quatriéme par A*f*, on aura $FR \times AH.$ $fN \times Ah :: mR \times Rk. mN \times Nk$, & conséquemment $\overline{PR}^3. \overline{MN}^3$ $:: mR \times Rk. mN \times Nk$; donc la section KmnL est une portion d'une ellipse cubique. *C. q. f. p.*

XXXIII. PROPOSITION.

Soit le cône parabolique ABECD (*Fig.* 91.) A son sommet, & B celui de la parabole DBE ; si l'on coupe ce cône par des plans

plans GTIH, MPON, perpendiculaires au triangle ABC, & paralelles au triangle ADE, les sections seront des hyperboles par la Proposition VIII. & si sur l'une de ces hyperboles GTIH, l'on marque le foyer F, & que l'on tire du sommet A la droite AFf, je dis que cette ligne passera par les foyers de toutes les autres sections hyperboliques faites paralellement à la premiere, il ne s'agit que de prouver que le point f est le foyer de l'hyperbole MPON.

DEMONSTRATION.

Ayant prolongé les lignes HT, NP jusques à la rencontre de AK, tirée du sommet paralellement à BC, les prolongemens TL, PK, seront les premiers axes des hyperboles GTIH, MPON, par la Proposition & nommant (a) le second axe de l'hyperbole GTIH, & (b) celui de l'hyperbole MPON, on aura par la proprieté de l'hyperbole $\overline{GH}^2 . TH \times HL :: aa . \overline{TL}^2$ & $\overline{MN}^2 . NP \times NK :: bb . \overline{PK}^2$; or par la proprieté de la parabole, & à cause des triangles semblables BHT, BNP, BH. BN :: HT. NP, donc $\overline{GH}^2 . \overline{MN}^2 :: HT . NP$, multipliant les deux derniers termes de cette proportion par HL, NK, qui sont égales à cause des paralelles AK, BC, on aura $\overline{GH}^2 . \overline{MN}^2 :: HT \times HL . NP \times NK$, & en changeant $\overline{GH}^2 . HT \times HL :: \overline{MN}^2 . NP \times NK$; donc $aa . \overline{TL}^2 :: bb . \overline{PK}^2$; mais par la proprieté de l'hyperbole $aa = FT \times FL$; donc $FT \times FL . \overline{TL}^2 :: bb . \overline{PK}^2$; or $FT . TL :: fP . PK$, & $FL . TL :: fK . PK$, ce qui est aisé à entendre, donc $FT \times FL . \overline{TL}^2 :: fP \times fK . \overline{PK}^2$; donc $bb . \overline{PK}^2 :: fP \times fK . \overline{PK}^2$; donc $bb = fP \times fK$; donc f est le foyer de l'hyperbole MPON. *C. q. f. p.*

XXXIV. PROPOSITION.

Soit un cône parabolique ABECD (*Fig. 92.*) comme le précédent, si l'on coupe ce cône par des plans GSTIH, MVXON, perpendiculaires au triangle ABC, & paralelles au côté AB, les sections seront des portions de paraboles par la Proposition IX. & si l'on imagine les paraboles achevées dont les sommets seront dans des points P, R, d'une ligne AR tirée paralellement à BC, par la Proposition IX. & que l'on suppose que F soit le foyer de la parabole GSTIH, puis que l'on tire la droite AFf, je dis que cette ligne passera par les foyers de toutes les paraboles paralelles à la premiere : il ne s'agit que de prouver que le point f est le foyer de la parabole MVRXON qui les represente toutes.

DEMONSTRATION.

Nommant (p) le parametre de la parabole MVRXON, on aura par la proprieté de la parabole $\overline{IH}^2 = PH \times 4PF$, & $\overline{ON}^2 = RN \times p$, donc $\overline{IH}^2 . \overline{ON}^2 :: PH \times 4PF . RN \times p$; divisant les deux derniers termes par PH & RN son égale, on aura $\overline{IH}^2 . \overline{ON}^2 :: 4PF . p$; mais par la proprieté de la parabole $\overline{IH}^2 . \overline{ON}^2 :: BH . BN$; donc $BH . BN :: 4PF . p$; or $BH = AP$, & $BN = AR$; donc $AP . AR :: 4PF . p$; mais à cause des triangles semblables APF, ARf, $AP . AR :: PF . Rf$, donc $PF . Rf :: 4PF . p$; donc $Rf = \frac{p}{4}$ dont f est le foyer de la para- MVRXON. *C. q. f. p.*

XXXV. PROPOSITION.

Soit le cône parabolique ABECD (*Fig.* 93.) comme les précédens; si l'on coupe ce cône obliquement par des plans IMRS, YLXV, perpendiculaires au triangle ABC, les sections seront des portions d'ellipses; & si sur l'une de ces portions IMRS l'on marque le foyer F, & que l'on tire la droite AFf, je dis que cette ligne passera par les foyers de toutes les ellipses paralelles à la premiere; il ne s'agit que de prouver que le point f est le foyer de l'ellipse YLXV.

DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit ce cône coupé par un plan ANO qui passe par les centres r, p, de ces portions d'ellipses IMRS, YLXV, les lignes bd, gh, en feront les petits axes, & si l'on prolonge MS, LV, en G & K, jusqu'à la rencontre de AK, tirée paralellement à BC, les lignes MG, LK, feront les grands axes de ces ellipses par la proposition .... & l'on aura à cause des triangles semblables Abr, Agp. $\overline{br}^2$. $\overline{gp}^2$ :: $\overline{Ar}^2$. $\overline{Ap}^2$, & par la proprieté de l'ellipse $\overline{br}^2 = MF \times FG$; donc $MF \times FG$. $\overline{gp}^2$ :: $\overline{Ar}^2$. $\overline{Ap}^2$, & en changeant $MF \times FG$. $\overline{Ar}^2$ :: $\overline{gp}^2$. $\overline{Ap}^2$; or par le premier Lemme $MF \times FG$. $Lf \times fK$ :: $\overline{AF}^2$. $\overline{Af}^2$, & à cause des triangles semblables AFr, Afp, $\overline{AF}^2$. $\overline{Af}^2$ :: $\overline{Ar}^2$. $\overline{Ap}^2$, donc $MF \times FG$. $Lf \times fK$ :: $\overline{Ar}^2$. $\overline{Ap}^2$, & en changeant $MF \times FG$. $\overline{Ar}^2$ :: $Lf \times fK$. $\overline{Ap}^2$; donc $\overline{gp}^2$. $\overline{Ap}^2$ :: $Lf \times fK$. $\overline{Ap}^2$; donc $\overline{gp}^2 = Lf \times fK$, donc f est un des foyers de l'ellipse dont YLXV est une portion. *C. q. f. p.*

XXXVI. PROPOSITION.

Si sur une ligne droite BD, (*Fig.* 94.) l'on décrit le demi cercle BMAVD, que du centre C l'on tire CA perpendiculaire sur BD, & que l'on fasse passer par les points B & A, la demie parabole BAX, dont BD soit l'axe, & qu'ensuite on tire autant que l'on voudra de perpendiculaire sur BD, comme PR, TS, IX, sur lesquelles on prenne les parties PR, TS, IO, troisiémes proportionnelles aux lignes PN, PM, TL, TK, IX, IV, la courbe qui passera par les points R, S, O, aura cette proprieté que le quarré d'une ordonnée PR sera au quarré d'une autre ordonnée quelconque IO, comme $BP \times \overline{PD}^2$, sera à $BI \times \overline{ID}^2$.

DEMONSTRATION.

Par construction PN. PM :: PM. PR, donc $PR = \frac{\overline{PM}^2}{PN}$, de même IX. IV :: IV. IO, donc $IO = \frac{\overline{IV}^2}{IX}$; donc PR. IO ::

$\frac{\overline{PM}^2}{\overline{PN}}$. $\frac{\overline{IV}^2}{\overline{IX}}$, or $\overline{PM}^2 = BP \times PD$, & $\overline{IV}^2 = BI \times ID$, & par la proprieté de la parabole $PN = \sqrt{BP \times BC}$, & $IX = \sqrt{BI \times BC}$, donc PR. IO :: $\frac{BP \times PD}{\sqrt{BP \times BC}}$. $\frac{BI \times ID}{\sqrt{BI \times BC}}$, donc $\overline{PR}^2$. $\overline{IO}^2$ :: $\frac{\overline{BP}^2 \times \overline{PD}^2}{BP \times BC}$. $\frac{\overline{BI}^2 \times \overline{ID}^2}{BI \times BC}$ :: $BP \times \overline{PD}^2$. $BI \times \overline{ID}^2$ *C. q. f. p.*

XXXVII. PROPOSITION.

Soit le solide AMBNOIR (*Fig.* 95.) formé par la révolution de la courbe ADB, autour de son axe AB, si l'on coupe ce solide par un plan quelconque BRDO, passant par le point B, je dis que la section est une figure de même genre que la figure génératrice.

DEMONSTRATION.

Si l'on coupe ce solide par deux plans MONR, SFKH, dont les diamétres MN, FH, soient perpendiculaires à AB, & que l'on tire CD, aussi perpendiculaire à AB, on aura par la proprieté de la figure génératrice $\overline{MP}^2$. $\overline{CD}^2$ :: $\overline{BP}^2 \times AP$. $\overline{BC}^2 \times AC$, & les triangles semblables BCD, BPI, donnent $\overline{CD}^2$. $\overline{PI}^2$ :: $\overline{BC}^2$. $\overline{BP}^2$, donc $\overline{MP}^2$. $\overline{PI}^2$ :: AP. AC; donc $\overline{MP}^2 - \overline{PI}^2$. $\overline{MP}^2$ :: AP — AC (ou CP). AP, on vient de dire que $\overline{MP}^2$. $\overline{CD}^2$ :: $\overline{BP}^2 \times AP$. $\overline{BC}^2 \times AC$; donc $\overline{MP}^2 - \overline{PI}^2$. $\overline{CD}^2$ :: $\overline{BP}^2 \times CP$. $\overline{BC}^2 \times AC$, & en changeant $\overline{MP}^2 - \overline{PI}^2$. $\overline{BP}^2 \times CP$ :: $\overline{CD}^2$. $\overline{BC}^2 \times AC$, on prouveroit de même que $\overline{FG}^2 - \overline{GT}^2$. $\overline{BG}^2 \times CG$ :: $\overline{CD}^2$. $\overline{BC}^2 \times AC$, donc $\overline{MP}^2 - \overline{PI}^2$. $\overline{BP}^2 \times CP$ :: $\overline{FG}^2 - \overline{GT}^2$. $\overline{BG}^2 \times CG$; or $\overline{MP}^2 - \overline{PI}^2 = \overline{IO}^2$, & $\overline{FG}^2 - \overline{GT}^2 = \overline{TS}^2$, donc $\overline{IO}^2$. $\overline{TS}^2$ :: $\overline{BP}^2 \times CP$. $\overline{BG}^2 \times CG$, & prenant à la place de $\overline{BP}^2$ & $\overline{BG}^2$, BI & $\overline{BT}^2$, qui sont en même raison & à la place de CP & CG, ID & TD qui sont aussi en même raison, on aura $\overline{IO}^2$. $\overline{TS}^2$

$:: \overline{BI}^2 \times ID . \overline{BT}^2 \times TD$, donc la section BRDO est de même genre que la figure generatrice.

XXXVIII. PROPOSITION.

Soit le solide AMBNOR, (*Fig. 96.*) comme le précédent, si l'on coupe ce solide par un plan quelconque AODR, passant par le point A, je dis que la section est une ellipse hyperbolique.

DEMONSTRATION.

Si l'on coupe ce solide par deux plans MONR, FKHS, dont les diamétres MN, FH soient perpendiculaires à l'axe AB, & qui coupent la section AODR, en OR & SK, puis que l'on tire CD aussi perpendiculairement sur AB, on aura par la proprieté de la courbe ADB, $\overline{MP}^2 . \overline{CD}^2 :: AP \times \overline{BP}^2 . AC \times \overline{BC}^2$; or à cause des triangles semblables ACD, API, $\overline{CD}^2 . \overline{PI}^2 :: \overline{AC}^2 . \overline{AP}^2$, donc $\overline{MP}^2 . \overline{PI}^2 :: AC \times \overline{BP}^2 . AP \times \overline{BC}^2$, donc par conversion de raison $\overline{MP}^2 - \overline{PI}^2 . \overline{MP}^2 :: AC \times \overline{BP}^2 - AP \times \overline{BC}^2 . AC \times \overline{BP}^2$, mais on vient de voir que $\overline{MP}^2 . \overline{CD}^2 :: AP \times \overline{BP}^2 . AC \times \overline{BC}^2$; donc $\overline{MP}^2 - \overline{PI}^2 . \overline{CD}^2 :: AP \times AC \times \overline{BP}^2 - AP \times \overline{BC}^2 . \overline{AC}^2 \times \overline{BP}^2$, mais $\overline{BP}^2 = \overline{BC}^2 + 2BC \times CP + \overline{CP}^2$, donc $AC \times \overline{BP}^2 = AC \times \overline{BC}^2 + AC \times 2BC \times CP + AC \times \overline{CP}^2$, & $AP = AC - CP$, donc $AP \times \overline{BC}^2 = AC \times \overline{BC}^2 - CP \times \overline{BC}^2$, donc $AC \times \overline{BP}^2 - AP \times \overline{BC}^2 = AC \times \overline{BC}^2 + AC \times 2BC \times CP + AC \times \overline{CP}^2 - AC \times \overline{BC}^2 + CP \times \overline{BC}^2 = AC \times 2BC \times CP + AC \times \overline{CP}^2 + CP \times \overline{BC}^2 = AC \times CP \times \overline{2BC + CP + \frac{\overline{BC}^2}{AC}}$, donc $\overline{MP}^2 - \overline{PI}^2 . \overline{CD}^2 :: AP \times AC \times CP \times \overline{2BC + CP + \frac{\overline{BC}^2}{AC}} . \overline{AC}^2 \times \overline{BC}^2 :: AP \times CP \times \overline{2BC + CP + \frac{\overline{BC}^2}{AC}} . AC \times \overline{BC}^2$, prolongeant AB, faisant BE

$= BC + \frac{\overline{BC}^2}{AC}$, CE ſera $2BC + \frac{\overline{BC}^2}{AC}$, & PE ſera $2BC + CP + \frac{\overline{BC}^2}{AC}$, donc $\overline{MP}^2 - \overline{PI}^2 . \overline{CD}^2 :: AP \times CP \times PE . AC \times \overline{BC}^2$, on prouveroit de même $\overline{FG}^2 - \overline{GT}^2 . \overline{CD}^2 :: AG \times CG \times GE . AC \times \overline{BC}^2$, donc $\overline{MP}^2 - \overline{PI}^2 . \overline{FG}^2 - \overline{GT}^2 :: AP \times CP \times PE . AG \times CG \times GE$, & ſi l'on prolonge AD, & que l'on tire EY paralelle à CD prenant à la place de AP, CP, PE, les lignes AI, ID, IY, qui ſont en même raiſon, & à la place de AG, CG, GE, les lignes AT, DT, TY, qui ſont auſſi en même raiſon, on aura $\overline{MP}^2 - \overline{PI}^2 . \overline{FG}^2 - \overline{GT}^2 :: AI \times ID \times IY . AT \times DT \times TI$, donc la ſection AODR, eſt une ellipſe hyperbolique.

APPLICATION DE LA GEOMETRIE ORDINAIRE, ET DES CALCULS DIFFERENTIEL ET INTEGRAL, *A LA RESOLUTION DE PLUSIEURS PROBLEMES.*

SECTION TROISIEME.

PROBLEME PREMIER.

TROUVER la valeur d'une portion de cylindre circulaire ADLBC coupé par un plan ALBC, passant par un point L de son côté, & le centre C de sa base (*Fig.* 97.)

Si l'on imagine cette portion coupée par un plan CDL qui passe par son sommet L, & le rayon CD perpendiculaire à AB, puis par deux autres plans MNP, *mnp*, paralelles au premier, & infiniment près l'un de l'autre, ces sections seront des triangles semblables; ainsi nommant les données AC ou CD (a) AB sera ($2a$) DL (b), & les indéterminées AP (x) MP (y), MN (z), Pp sera (dx), & $\frac{yzdx}{2}$ sera la différentielle de la portion APMN; mais à cause des triangles semblables PMN, CDL, $z. b :: y. a$; donc $z = \frac{by}{a}$, donc $\frac{yzdx}{2} = \frac{byydx}{2a}$, or $yy = 2ax - xx$, mettant cette valeur de yy dans la différentielle $\frac{byydx}{2a}$, l'on aura $\frac{2abxdx - bxxdx}{2a}$, égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{bxx}{2} - \frac{bx^3}{6a}$ est égale à la portion APMN, & l'on aura $\frac{aab}{2} - \frac{aab}{6}$, ou $\frac{aab}{3}$ pour la valeur de la portion ACDL, parce que P devenant c, x devient a, donc $\frac{2aab}{3}$ sera la valeur de la portion entiere ADLBC.

COROLLAIRE I.

Si la hauteur de la portion ADLBC étoit égale au rayon a de la base, la portion seroit les $\frac{2}{3}$ du cube de ce rayon, & ce que l'on appelle l'onglet.

COROLLAIRE II.

Comme la pyramide ABDL est $\frac{aab}{3}$, il s'ensuit que la portion ADLBC est double de cette pyramide.

PROBLEME II.

Trouver la valeur d'une portion ABDCL, d'un cylindre parabolique coupé par un plan ALD, passant par un point L de son côté, & une ordonnée AC à l'axe BC de sa base dont le parametre est p. (*Fig.* 98.)

Si l'on imagine cette portion coupée par un plan BCL, passant par son sommet L, & l'axe BC de sa base, puis par deux

deux autres plans MPN, *mpn*, paralelles au premier, & infiniment près l'un de l'autre, les sections seront des triangles semblables; ainsi nommant les données AC (a), BC (b), BL (d), & les indéterminées AP (x), PM (y), MN (z), Pp sera dx, & l'on aura $\frac{yzdx}{2}$ égal à la différentielle de la portion APMN; or à cause des triangles semblables MPN, BCL; $z. d :: y. b$; donc $z = \frac{dy}{b}$, donc $\frac{yzdx}{2} = \frac{dyydx}{2b}$; mais par le Lemme III. page 5. $py = 2ax - xx$, donc $ppyy = 4aaxx - 4ax^3 + x^4$, & $yy = \frac{4aaxx - 4ax^3 + x^4}{pp}$, mettant cette valeur de yy dans la différentielle $\frac{dyydx}{2b}$, l'on aura $\frac{2aadxxdx}{bpp} - \frac{2adx^3dx}{bpp} + \frac{dx^4dx}{2bpp}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale qui est $\frac{2aadx^3}{3bpp} - \frac{adx^4}{2bpp} + \frac{dx^5}{10bpp}$ est égal à la portion APMN, & l'on aura $\frac{2a^5d}{3bpp} - \frac{a^5d}{2bpp} + \frac{a^5d}{10bpp}$, ou $\frac{4abd}{15}$, en prenant pour a^4 sa valeur $bbpp$, & réduisant toutes les fractions à un même dénominateur, pour la valeur de la portion ABCL, parce que P devenant C, x devient a, & par conséquent $\frac{8abd}{15}$, pour la portion entiere ABDCL.

COROLLAIRE.

Comme la pyramide ABDL est $\frac{abd}{3}$ ou $\frac{5abd}{15}$, il est évident que cette pyramide est à la portion comme 5 à 8.

PROBLEME III.

Trouver la valeur d'une portion quelconque ABCD d'un cylindre parabolique coupé par un plan passant par un point A de son côté, & par l'axe BC de sa base (*Fig.* 99.)

Si l'on coupe cette portion par deux plans MPN, *mpn*, infiniment près l'un de l'autre & paralelles à ACD, nommant les données CD (a), BC (b), AD (d), & les indéterminées PM (y), BP (x), MN (z), Pp sera dx, & l'on aura

$\frac{yzdx}{2}$ pour la différentielle de la portion BPMN ; or à cause des triangles semblables $z.\ d :: y.\ a$; donc $z = \frac{dy}{a}$; donc $\frac{yzdx}{2} = \frac{dyydx}{2a}$, mais par la proprieté de la parabole, $yy.\ aa :: x.\ b$; donc $yy = \frac{aax}{b}$, mettant cette valeur de yy dans la différentielle $\frac{dyydx}{2a}$, on aura $\frac{adxdx}{2b}$ égal à cette même différentielle ; dont l'intégrale $\frac{adxx}{4b}$ est égale à la portion BPMN, & l'on aura $\frac{abd}{4}$ pour la valeur de la portion ABCD, parce que P devenant C, x devient b.

PROBLEME IV.

Trouver la valeur d'une portion quelconque ABCDL d'un cylindre parabolique cubique coupé par un plan ADL passant par un point L de son côté, & par une ordonnée AD à l'axe BC (*Fig.* 98.)

Si l'on conçoit cette portion coupée par un plan BCL passant par un point L de son côté, & par l'axe BC de sa base, puis par deux autres plans MPN, *mpn*, paralelles au premier, & infiniment près l'un de l'autre ; ces sections seront des triangles semblables, ainsi nommant les données BL (a), BC (b), AC (f), & les indéterminées AP (x), MP (y), MN (z), Pp sera dx, & l'on aura $\frac{zydx}{2}$ égal à la différentielle de la portion APMN ; mais par le Lemme XX. page 51^e. $y.\ b :: x^3 + 3ffx - 3fxx.\ f^3$, donc $y = \frac{bx^3 + 3bffx - 3bfxx}{f^3}$, & $z.\ y :: a.\ b$, donc $z = \frac{ay}{b} = \frac{ax^3 + 3affx - 3afxx}{f^3}$, donc $\frac{zy}{2} =$

$= \frac{abx^6 + 15abffx^4 - 6abfx^5 + 9abf^4xx - 18abf^3x^3}{2f^6}$, & $\frac{zydx}{2} =$

$= \frac{abx^6dx + 15abffx^4dx - 6abfx^5dx + 9abf^4xxdx - 18abf^3x^3dx}{2f^6}$, dont l'intégrale $\frac{abx^7}{14f^6} + \frac{3abx^5}{2f^4} - \frac{abx^6}{2f^5} + \frac{3abx^3}{2ff} - \frac{9abx^4}{4f^3}$ est égale à la portion APMN, & l'on aura $\frac{abf}{14} + \frac{3abf}{2} - \frac{abf}{2} + \frac{3abf}{2}$

$-\frac{9abf}{4}$, ou $\frac{9abf}{28}$ pour la valeur de la portion ABCL; parce que P devenant C, x devient f, & par conséquent l'on aura $\frac{9abf}{14}$ pour la valeur de la portion entiere ABCDL.

PROBLEME V.

Trouver la valeur d'une portion quelconque ABCD (*Fig.* 99.) d'un cylindre parabolique cubique coupé par un plan ABC passant par un point A de son côté, & par l'axe BC de sa base.

Si l'on imagine cette portion coupée par deux plans PMN, pmn, infiniment près l'un de l'autre, & paralelles à ACD, nommant les données CD (a), BC (b), AD (c), (pp) le parametre de la demie parabole cubique DBC, & les indéterminées BP (x), MP (y), MN (z), Pp sera (dx), & l'on aura $\frac{yzdx}{2}$ égal à la différentielle de la portion BPMN, mais à cause des triangles semblables PMN, ACD, $z. c :: y. a$; donc $z = \frac{cy}{a}$, donc $\frac{yzdx}{2} = \frac{cyydx}{2a}$; or par la proprieté de la parabole cubique $y^3 = ppx$; donc $y = \sqrt[3]{ppx}$, & $yy = \sqrt[3]{p^4} \times x^{\frac{2}{3}}$, mettant cette valeur de yy dans la différentielle $\frac{cyydx}{2a}$, l'on aura $\frac{c\sqrt[3]{p^4} \times x^{\frac{2}{3}}\, dx}{2a}$ égale à cette même différentielle, dont l'intégrale $\frac{3c\sqrt[3]{p^4x^5}}{10a}$, ou $\frac{3zxy}{10}$ (en prenant pour p^4xx, & $\frac{cy}{a}$ leurs valeurs y^6, & z) est égale à la portion BPMN, & l'on aura $\frac{3abc}{10}$ pour la valeur de la portion ABCD, parce que P devenant C, z devient égal à c, x à a, & y à b.

PROBLEME VI.

Trouver la valeur d'une portion quelconque ABDCL, d'un cylindre elliptique cubique coupé par un plan passant par un point L de son côté, & par le second axe AB de sa base (*Fig.* 97.)

Si l'on imagine cette portion coupée par le plan CDL, qui passe par son sommet L, & par le premier axe CD de sa base, puis par deux autres MPN, mpn, paralelles au premier, & infiniment près l'un de l'autre, les sections seront des triangles semblables, ainsi nommant les données AC (a), CD (b), DL (c), & les indéterminées AP (x), MP (y), MN (z), Pp sera dx, & l'on aura $\frac{zydx}{2}$ pour la différentielle de la portion APM, mais à cause des triangles semblables MPN, CDL, $z.\ c :: y.\ b$; donc $z = \frac{cy}{b}$, & $\frac{zydx}{2} = \frac{cyydx}{2b}$, mais par le Lemme XXIII. page 55, $yy.\ bb :: 3aax - 3aax + x^3.\ a^3$, donc $yy = \frac{3aabbx - 3abbxx + bbx^3}{a^3}$, mettant cette valeur de yy dans la différentielle $\frac{cyydx}{2b}$, l'on aura $\frac{3bcxdx}{2a} - \frac{3bcxxdx}{2aa} + \frac{bcx^3dx}{2a^3}$ égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{3bcxx}{4a} - \frac{bcx^3}{2aa} + \frac{bcx^4}{8a^3}$ est égale à la portion APMN, & l'on aura $\frac{3abc}{4} - \frac{abc}{2} + \frac{abc}{8}$, ou $\frac{3abc}{8}$ pour la valeur de la portion ACDL, parce que P devenant C, x devient a, & conséquemment l'on aura $\frac{3abc}{4}$ pour la valeur de la portion entiere ABDCL.

PROBLEME VII.

Trouver la valeur d'une portion ABCD (*Fig.* 100.) d'un cylindre hyperbolique coupé par un plan passant par un point A de son côté, & par le prolongement BC du premier axe Bb de sa base.

Si l'on coupe cette portion par deux plans MPN, mpn, infiniment près l'un de l'autre, & paralelles au triangle ACD, nommant les données Bb (a), CD (b), BC (d), AD (c), & les indéterminées Pp (x), MP (y), MN (z), Pp sera dx, & l'on aura $\frac{yzdx}{2} =$ la différentielle de la portion BPMN, mais à cause des triangles semblables MPN, DCA, $z.\ c :: y.\ b$; donc $z = \frac{cy}{b}$, donc $\frac{yzdx}{2} = \frac{cyydx}{2b}$; or par la proprieté de l'hyperbole $yy \cdot bb :: ax + xx \cdot ad + dd$, donc $yy = \frac{abbx + bbxx}{ad + dd}$, mettant cette valeur de yy dans la différentielle $\frac{cyydx}{2b}$, on aura $\frac{abcxdx + bcxxdx}{2ad + 2dd}$ égale à cette même différentielle, dont l'intégrale $\frac{abcxx}{4ad + 4dd} + \frac{bcx^3}{6ad + 6dd}$ eſt égale à la portion BPMN, & l'on aura $\frac{abcd}{4a + 4d} - \frac{bccdd}{6a + 6d}$ pour la valeur de la portion ABCD, parce que P devenant C, x devient d.

PROBLEME VIII.

Trouver la valeur du ſolide ABXG (*Fig.* 101.) formé par la révolution de la demie parabole ABC autour d'une ligne droite DH paralelle à l'axe AC.

Si l'on imagine un plan MLSNKR, paralelle à la baſe du ſolide, & un autre *mlsnkr* auſſi paralelle, & infiniment près du premier, le ſolide infiniment petit, renfermé entre ces deux plans ſera la différentielle du ſolide formé par la révolution de l'eſpace AMN autour de HP; ainſi nommant les données AC (a), BC (b), CD (f), la circonférence BXF (c), la circonférence [illegible]E (g), (p) le parametre, & les indéterminées AN (x), MN (y) la circonférence MLS (z), Nn ou Pp ſera dx, & l'on aura $\frac{yz + gy}{2}$ égale à la couronne circulaire MLSRKN, qui étant multipliée par dx, donnera $\frac{yzdx + gydx}{2}$ pour la valeur du ſolide infiniment petit Ms, différentielle du ſolide MG, mais par la propriété de la parabole $yy = px$; donc $x = \frac{yy}{p}$, & $dx = \frac{2ydy}{p}$, & $z \cdot g :: y + f \cdot f$; donc $z = \frac{gy + fg}{f}$, mettant ces valeurs de dx & de z, dans la différentielle $\frac{yzdx + gydx}{2}$, on aura $\frac{gy^3dy + 2fgyydy}{pf}$, égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{gy^4}{4pf} + \frac{2gy^3}{3p}$, ou $\frac{gxyy}{4f} + \frac{2gxy}{3}$, en prenant pour yy ſa valeur px eſt égale au ſolide MG, & l'on aura $\frac{abbg}{4f} + \frac{abg}{3}$ pour la valeur du ſolide entier.

AF, parce que P devenant D, x devient a, & y devient b.

PROBLEME IX.

Trouver la valeur du solide creux BG (*Fig.* 102.) formé par la révolution de la demie parabole ABC autour d'une ligne DH paralelle à l'ordonnée BC.

Ayant tiré deux ordonnées MP, mp, infiniment près l'une de l'autre, elles décriront en tournant des surfaces cylindriques MF, mf, qui seront des elemens de ce solide, ainsi nommant les données AC (a), BC (b), CD (d), la circonférence LVC (c), (p) le parametre, & les indéterminées AP (x), MP (y), la circonférence PRF (z), PD sera $a+d-x$, Pp sera dx, & l'on aura $yzdx$ égal à la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de DH, mais $z. c :: a+d-x. d$, donc $z = \frac{ac+cd-cx}{d}$, donc $yzdx = \frac{acydx+cdydx-cxydx}{d}$; or par la proprieté de la parabole $yy=px$, donc $y=\sqrt{px}$, mettant cette valeur de y dans la différentielle $\frac{acydx+cdydx-cxydx}{d}$, on aura $\frac{ac\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx}{d}+c\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx - \frac{c\sqrt{p}x^{\frac{3}{2}}dx}{d}$, égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{2ac\sqrt{px^3}}{3d}+\frac{2c\sqrt{px^3}}{3}-\frac{2c\sqrt{px^5}}{5d}$, ou $\frac{2acxy}{3d}+\frac{2cxy}{3}-\frac{2cxxy}{5d}$ (en prenant pour $\sqrt{px}$ sa valeur y) est égale au solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de DH, & l'on aura $\frac{2aabc}{3d}+\frac{2abc}{3}-\frac{2aabc}{5d}$, ou $\frac{4aabc}{15d}+\frac{2abc}{3}$ pour la valeur du solide creux BG, parce que P devenant C, x devient a, & y devient b.

REMARQUE.

Si AC (a) = CD (d), on aura $\frac{14abc}{15}$ pour la valeur de ce solide creux.

Et comme $\frac{3abc}{2}$ seroit la valeur du cylindre creux qui lui seroit circonscrit, il s'ensuit que le solide seroit à ce cylindre comme $\frac{14abc}{15}$ à $\frac{3abc}{2}$, ou comme 28 à 45.

PROBLEME X.

Trouver la valeur du solide creux AG, formé par la révolution de la demie parabole ABC, autour d'une ligne DH paralelle à l'axe AC (*Fig.* 103.)

Ayant tiré une ligne MP paralelle à AC, & une autre *mp* aussi paralelle, & infiniment près de MP, ces lignes décriront en tournant des surfaces cylindriques MO, *mo*, qui seront des elemens de ce solide creux; ainsi nommant les données AC (a), BC (b), BD (d), BIL (c), (p) le parametre, & les indéterminées BP (x), MP (y), la circonférence OTP (z), Pp sera dx, & l'on aura $yzdx$ pour la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace BPM autour de DH, mais $z. c :: d+x. d$; donc $z = \frac{cd+cx}{d}$, & $yzdx = \frac{cdydx+cxydx}{d}$; or par le Lemme III. page 5. $py = 2bx - xx$; donc $y = \frac{2bx-xx}{p}$, mettant cette valeur de y dans la différentielle $\frac{cdydx+cxydx}{d}$, l'on aura $\frac{2bcxdx-cxxdx}{p} + \frac{2bcxxdx-cx^3dx}{pd}$ égale à cette même différentielle, dont l'intégrale $\frac{bcxx}{p} - \frac{cx^3}{3p} + \frac{2bcx^3}{3pd} - \frac{cx^4}{4pd}$ est égale au solide formé par la révolution de l'espace BPM, autour de DH, & l'on aura $\frac{b^3c}{p} - \frac{b^3c}{3p} + \frac{2b^4c}{3pd} - \frac{b^4c}{4pd}$, ou $\frac{2b^3c}{3p} + \frac{5b^4c}{12pd}$, ou $\frac{2abc}{3} + \frac{5abbc}{12d}$ (en prenant pour bb sa valeur ap) égal au solide creux formé par la révolution de la demie parabole ABC autour de DH, parce que P devenant C, x devient b.

REMARQUE.

Si BC (b) = BD (d), on aura $\frac{13abc}{12}$ pour la valeur de ce solide creux.

Et comme $\frac{3abc}{2}$ seroit la valeur du cylindre creux qui lui seroit circonscrit, le solide seroit au cylindre, comme 13 à 18.

PROBLEME XI.

Trouver la valeur du ſolide creux formé par la révolution de la demie parabole ABC, autour d'une ligne DH; parallelle à l'ordonnée BC (*Fig.* 104.)

Ayant tiré une ordonnée MP à l'axe AC, & une autre *mp* infiniment proche, elles décriront en tournant autour de DH des ſurfaces cylindriques qui ſeront des elemens de ce ſolide; ainſi nommant les données AC (a), BC (b), AD (d), la circonférence AOE (c), (p) le parametre, & les indéterminées AP (x), MP (y), la circonférence RTP (z), PD ſera $d+x$, & Pp ſera dx, & l'on aura $yzdx$ égal à la différentielle du ſolide formé par la révolution de l'eſpace AMP autour de DH, mais par la proprieté de la parabole $yy=px$; donc $y = \sqrt{px}$, & $yzdx = z\sqrt{px}dx$; or $z.c::x+d.d$; donc $z = \frac{cx+cd}{d}$, mettant cette valeur de z dans la différentielle $z\sqrt{px}dx$, on aura $\frac{c\sqrt{px^3}dx+cd\sqrt{px}dx}{d}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{2c\sqrt{px^5}}{5d}+\frac{2c\sqrt{px^3}}{3}$, ou $\frac{2cxxy}{5d}+\frac{2cxy}{3}$ (en prenant pour $\sqrt{px}$ ſa valeur y) eſt égal au ſolide formé par la révolution de l'eſpace AMP, autour de DH, & l'on aura $\frac{2aabc}{5d}+\frac{2abc}{3}$ pour celle du ſolide formé par la révolution de la demie parabole ABC autour de DH.

REMARQUE.

Si AD (d) = BC (a), on aura $\frac{16abc}{15}$ pour la valeur de ce ſolide,

Et comme $\frac{3abc}{2}$ ſeroit la valeur du cylindre creux qui lui ſeroit circonſcrit, ce ſolide ſeroit au cylindre comme $\frac{16abc}{15}$ à $\frac{3abc}{2}$ comme 32 à 45.

LEMME

LEMME XXVII.

Soit la demie parabole ABC (*Fig.* 105.) si l'on tire du point B la tangente BT, & qu'on tire une ligne droite MO paralelle à l'axe AC, je dis que MO. AT :: $\overline{BO}^2$. $\overline{BT}^2$.

DEMONSTRATION.

Ayant tiré du point B le diametre BP & des points A & M les ordonnées AP, MN, au diametre, on aura par la proprieté de la parabole BN. BP :: $\overline{MN}^2$. $\overline{AP}^2$; or BN = MO, BP = AT, MN = BO, & AP = BT; donc MO. AT :: $\overline{BO}^2$. $\overline{BT}^2$. *C. q. f. p.*

PROBLEME XII.

Trouver la valeur du solide formé par la révolution de la demie parabole ABC autour de la tangente BT (*Fig.* 106.)

Ayant tiré une ligne OP paralelle à CT, & une autre *op* infiniment proche & qui lui soit paralelle, la premiere coupant la parabole en M, & la seconde en *m*, les lignes OM, *om*, décriront en tournant des surfaces coniques qui seront des elemens du solide AMBELT, ainsi nommant les données AC ou AT (a), BC (b), la circonférence ALE (c), & les indéterminées BP (x), OM (y) la circonférence MKN (z), P*p* sera dx, & l'on aura $\frac{yz}{2}$ égale à la superficie conique décrite par OM, qui étant multipliée par dx donnera $\frac{yzdx}{2}$ pour la différentielle du solide BMKNO, mais $z. c$ :: MN. AE, & à cause des triangles semblables MON, ATE, MN. AE :: $y. a$; donc $z. c :: y. a$; donc $z = \frac{cy}{a}$, & $\frac{yzdx}{2} = \frac{cyydx}{2a}$; or par le Lemme précédent $y. a :: \overline{BO}^2. \overline{BT}^2$, & à cause des triangles semblables BPO, BCT, $\overline{BO}^2. \overline{BT}^2 :: xx. bb$; donc $y. a :: xx. bb$; donc $y = \frac{axx}{bb}$, & $yy = \frac{aax^4}{b^4}$, mettant cette valeur de yy

dans la différentielle $\frac{cyydx}{2a}$, on aura $\frac{acx^4dx}{2b^4}$ égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{acx^5}{10b^4}$ est égale au solide BMKNO, & l'on aura $\frac{abc}{10}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de l'espace AMBT, autour de BT, parce que P devenant C, x devient b; or $\frac{2abc}{3}$ est la valeur du solide formé par la révolution du triangle BCT autour de BT, donc $\frac{17abc}{30}$ est la valeur du solide formé par la révolution de la demie parabole ABC autour de BT.

PROBLEME XIII.

Trouver la valeur du solide formé par la révolution de la demie parabole ABC autour d'une ligne DK, paralelle à la tangente BT (*Fig.* 107.).

Ayant prolongé CT & CB, rencontrant DK en D, & F, puis tiré B*k* paralelle à CD, ensuite une ligne PX paralelle à AT, & une autre *px* infiniment proche & aussi paralelle, les parties ML, *ml*, décriront en tournant autour de DK, des surfaces de cônes tronqués qui seront des elemens du solide formé par la révolution de l'espace ALBT autour de DK; ainsi nommant les données AC ou AT (a), BC (b), DT (d), BF (f), la circonférence T*h*H (c), & les indéterminées BP (x), ML (y) la circonférence L*y*R (z), P*p* sera dx, & l'on aura $\frac{cy+yz}{2}$ égale à la surface d'un cône tronqué décrite par la ligne ML, & $\frac{cydx+yzdx}{2}$ égale à la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace BML, autour de DK, mais $z.\ c :: \text{LR}.\ \text{TH}$, & à cause des triangles semblables LRX, TDH, $\text{LR}.\ \text{TH} :: y+d.\ d$; donc $z.\ c :: y+d.\ d$; donc $z = \frac{cy+cd}{d}$, donc $\frac{cydx+yzdx}{2} = \frac{cydx}{2} + \frac{cyydx+cdydx}{2d}$; or par le Lemme précédent $y.\ a :: \overline{\text{BM}}^2.\ \overline{\text{BT}}^2$, & à cause des triang. semblab. BPM, BCT, $\overline{\text{BM}}^2.\ \overline{\text{BT}}^2 :: xx.\ bb$; donc $y.\ a :: xx.\ bb$; donc $y = \frac{axx}{bb}$, & $yy = \frac{aax^4}{b^4}$; mettant cette valeur de y &

de yy dans la différentielle $\frac{cydx}{2}+\frac{ayydx+cdydx}{2d}$, on aura $\frac{acxxdx}{bb}+\frac{aacx^4dx}{2b^4d}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{acx^3}{3bb}+\frac{aacx^5}{10b^4d}$ est égal au solide formé par la révolution de l'espace BML autour de DK, & l'on aura $\frac{abc}{3}+\frac{aabc}{10d}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ALBT autour de DK, parce que P devenant C, x devient b; mais $\frac{bcd}{2}$ est la valeur du solide formé par la révolution du parallellogramme BTDk, autour de DK, & $\frac{cdf}{6}$ est la valeur du cône formé par la révolution du triangle BFk, autour de DK, donc $\frac{bcd}{2}+\frac{cdf}{6}$ sera la valeur du solide formé par la révolution du trapeze BFDT autour de FD; or $\frac{4aabc+4abcd+bcdd+4aacf+4acdf+cddf}{6d}$ est égal au solide formé par la révolution du triangle CFD autour de DK, ce qui est facile à démontrer; donc $\frac{4aabc+4abcd-2bcdd+4aacf+4acdf}{6d}$ est égal au solide formé par la révolution du triangle BCT autour de DK; donc $\frac{4aabc+4abcd-2bcdd+4aacf+2acdf}{6d}-\frac{abc}{3}-\frac{aabc}{10d}$, ou $\frac{17aabc}{30d}+\frac{abc}{3}-\frac{bcd}{3}+\frac{2aacf}{3d}+\frac{2acf}{3}$ est égal au solide formé par la révolution de la demie parabole ABC autour de DK.

REMARQUE.

Si AC ou AT (a) $=$ DT (d), BF sera $\frac{b}{2}$ à cause des paralelles BT, DK, & l'on aura $\frac{17abc}{30}+\frac{abc}{3}-\frac{abc}{3}+\frac{aba}{3}+\frac{abc}{3}=\frac{37abc}{30}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de la demie parabole ABC autour de DK.

PROBLEME XIV.

Trouver la valeur du solide ABLF (*Fig.* 108.) formé par la révolution de la demie parabole ABC autour d'une ligne quelconque AD tirée par son sommet A.

Ayant prolongé l'ordonnée BC jusqu'à la rencontre de AD, puis tiré deux autres ordonnées MP, *mp*, infiniment proches & prolongées en N & *n*, ces ordonnées en tournant décriront des surfaces de cônes tronqués qui seront des elemens de ce solide; ainsi nommant les données AC (a), BC (b), CD (d), la circonférence CLE (c), (p) le parametre de la parabole, & les indéterminées AP (x), MP (y), PN (t), la circonférence MOS (z), & la circonférence PIR (u), Pp sera dx, & l'on aura $\frac{yz+yu}{2}$ égale à la surface d'un cône tronqué décrite par MP, qui étant multipliée par dx, donnera $\frac{yzdx+yudx}{2}$ égale à la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de AD, mais par la proprieté de la parabole $yy=px$; donc $y=\sqrt{px^{\frac{1}{2}}}$, & $u.c::x.a$; donc $u=\frac{cx}{a}$, & à cause des triangles semblables APN, ACD, $t.d::x.a$; donc $t=\frac{dx}{a}$; or $z.c::y+t.d$; donc $z=\frac{cy+ct}{d}=\frac{c\sqrt{px^{\frac{1}{2}}}}{d}+\frac{cx}{a}$ (en prenant pour y, & t leurs valeurs $\sqrt{px^{\frac{1}{2}}}$, & $\frac{dx}{a}$) mettant donc dans la différentielle $\frac{yzdx+yudx}{2}$ à la place de y, de u, & de z, leurs valeurs $\sqrt{px^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{cx}{a}$, & $\frac{c\sqrt{px^{\frac{1}{2}}}}{d}+\frac{cx}{a}$, on aura $\frac{cpxdx}{2d}+\frac{c\sqrt{px^{\frac{3}{2}}}dx}{a}$ égale à cette même différentielle, dont l'intégrale $\frac{cpxx}{4d}+\frac{2c\sqrt{px^{5}}}{5a}$, ou $\frac{cxyy}{4d}+\frac{2cxxy}{5a}$ (en prenant pour px sa valeur yy) est égale au solide formé par la révolution de l'espace AMP, autour de AD, & l'on aura $\frac{abbc}{4d}+\frac{2abc}{5}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de la demie parabole ABC autour de AD, parce que P devenant C, x devient a, & y devient b.

REMARQUE.

Si CD (d) $=$ BC (b), on aura $\frac{13abc}{20}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de la demie parabole ABC autour de AD, c'est-à-dire que pour avoir cette valeur, il faudroit multiplier la furface du cône tronqué décrite par BC qui feroit $\frac{3bc}{2}$ par les $\frac{13}{30}$ de la hauteur AC.

PROBLEME XV.

Trouver la valeur du folide formé par la révolution de la demie parabole ABC autour d'une ligne quelconque DK, faifant un angle DKC avec l'axe AC prolongé (*Fig.* 109.)

Ayant prolongé l'ordonnée BC jufqu'à la rencontre de DK, puis tiré AS paralelle à BC, & deux ordonnées à l'axe MP, *mp*, infiniment proches & prolongées en R & *r*, jufqu'à la rencontre de DK, ces ordonnées décriront en tournant des furfaces de cônes tronqués qui feront des elemens du folide formé par la révolution de la demie parabole ABC autour de DK, ainfi nommant les données AC (a), BC (b), AK (d), AS (g), la circonférence ATL (c), (p) le parametre, & les indéterminées AP (x), MP (y), PR (z), la circonférence MIN (u), la circonférence PXO (t), Pp fera (dx), & l'on aura $\frac{yu+yt}{2}$ égale à la furface d'un cône tronqué décrite par MP, qui étant multipliée par dx, donnera $\frac{yudx+ytdx}{2}$ pour la différentielle du folide formé par la révolution de l'efpace AMP, autour de DK, mais par la proprieté de la parabole $yy=px$; donc $y=\sqrt{px}$, & à caufe des triangles femblables PRK, AKS, $z.\ g :: x+d.\ d$; donc $z=\frac{gx+gd}{d}$, mais à caufe des cônes femblables ASLT, PROX, $t.\ c :: z.\ g$; donc $t=\frac{cz}{g}$ $=\frac{cx+cd}{d}$ (en prenant pour z fa valeur $\frac{gx+gd}{d}$; or à caufe des cônes femblables MRNI, ASLT, $u.\ c :: y+z.\ g$; donc u $=\frac{cy+cz}{g}=\frac{c\sqrt{px}}{g}+\frac{cx+cd}{d}$ (en prenant pour y & z leurs valeurs $\sqrt{px}$, & $\frac{gx+gd}{d}$, mettant donc la différentielle $\frac{yudx+ytdx}{2}$ à la place de y, de t, & de u, leurs valeurs $\sqrt{px}$, $\frac{cx+cd}{d}$, & $\frac{c\sqrt{px}}{g}+\frac{cx+cd}{d}$, on aura $\frac{cpxdx}{2g}+\frac{c\sqrt{p}x^{\frac{3}{2}}dx+cd\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx}{d}$ égale à cette même différentielle, dont l'intégrale $\frac{cpxx}{4g} + \frac{2c\sqrt{px^5}}{5d} + \frac{2c\sqrt{px^3}}{3}$, ou $\frac{cxyy}{4g} + \frac{2cxxy}{5d} + \frac{2cxy}{3}$ (en prenant pour px sa valeur yy) est égale au solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de DK, & l'on aura $\frac{abbc}{4g} + \frac{2aabc}{5d} + \frac{2abc}{3}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de la demie parabole ABC autour de DK.

REMARQUE.

Si AC (a) = AK (d), on aura $\frac{abbc}{4g} + \frac{16abc}{15}$ pour la valeur de ce solide.

Et si AC (a) = AK (d), & BC (b) = CD, AS (g) sera moitié de CD (b) & l'on aura $\frac{47abc}{30}$, & comme $\frac{2abc}{3}$ est la valeur du solide formé par la révolution du triangle CKD autour de KD, il s'ensuit que le solide formé par la révolution de la demie parabole ABC $(\frac{47abc}{30})$ sera au solide formé par la révolution du triangle CKD $(\frac{2abc}{3})$ comme 47 à 20.

PROBLEME XVI.

Trouver la valeur du solide formé par la révolution de la demie parabole ABC autour d'une ligne quelconque CK, tirée par l'extrêmité de l'axe AC (*Fig.* 110.)

Ayant tiré une ligne droite AG paralelle à l'ordonnée BC rencontrant CK prolongée en G, puis deux ordonnées à l'axe MP, mp, infiniment proches l'une de l'autre, & qui étant prolongées rencontrent CK en O & o, ces ordonnées MP, mp, décriront en tournant des surfaces de cônes tronqués qui seront des elemens de ce solide; ainsi nommant les données AC (a), BC (b), AG (d), la circonférence ALE (c), (p) le parametre & les indéterminées AP (x), MP (y), PO (z), la circonférence MTR (u), la circonférence PSN (t), l'on aura $\frac{yu+yt}{2}$ égal à la surface conique tronquée décrite par l'ordonnée MP, & multipliant cette surface par Pp (dx), on aura $\frac{yudx+ytdx}{2}$ égale à la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de CK, mais par la propriété de la parabole $yy=px$; donc $y=\sqrt{px}$, & à cause des triangles semblables CPO, CAG, $z.\ d :: a-x.\ a$; donc $z=\frac{ad-dx}{a}$; or les cônes semblables PONSI, GALEK, donnent $t.\ c :: z.\ d$; donc $t=\frac{cz}{d}=\frac{ac-cx}{a}$ (en prenant pour z sa valeur $\frac{ad-dx}{a}$) & les cônes semblabl. OMTR, GALEK, donnent $u.\ c :: y+z.\ d$; donc $u=\frac{cy+cz}{d}=\frac{c\sqrt{px}}{d}+\frac{ac-cx}{a}$ (en prenant à la place de y & de z leurs valeurs $\sqrt{px}$, & $\frac{ad-dx}{a}$) mettant dans la différentielle $\frac{yudx+ytdx}{2}$ à la place de y, de t, & de u, leurs valeurs $\sqrt{px}$, $\frac{ac-cx}{a}$, & $\frac{c\sqrt{px}}{d}+\frac{ac-cx}{a}$, l'on aura $\frac{cpxdx}{2d}+\frac{ac\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx-c\sqrt{p}x^{\frac{3}{2}}dx}{a}$ égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{cpxx}{4d}+\frac{2a\sqrt{px^3}}{3}-\frac{2c\sqrt{px^5}}{5a}$ ou $\frac{cxyy}{4d}+\frac{2cxy}{3}-\frac{2cxxy}{5a}$ (en prenant pour px sa valeur yy) est égale au solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de CK, & l'on aura $\frac{abbc}{4d}+\frac{4abc}{15}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de la demie parabole ABC autour de CK, parce que P devenant C, x devient a, & y devient b.

REMARQUE.

Si BC (b) $=$ AG (d), on aura $\frac{31abc}{60}$ pour la valeur de ce même solide.

PROBLEME XVII.

Trouver la valeur du solide formé par la révolution de la demie parabole ABC autour d'une ligne quelconque BK, tirée d'un point B de la parabole AMB (*Fig.* 111.)

Ayant prolongé BK de part & d'autre, & AC jusqu'à la rencontre de BK, puis tiré AF paralelle à l'ordonnée BC, ensuite deux ordonnées à l'axe MP, *mp*, infiniment près l'une de l'autre, & prolongées en O & *o*, de la ligne BK, ces ordonnées MP, *mp*, décriront en tournant des surfaces de cônes tronqués qui seront des elemens de ce solide; ainsi nommant les données AC (a), BC (b), CG (d), AF (f), la circonférence ALE (c), (p) le parametre, & les indéterminées AP (x), MP (y), MO (z), la circonférence MSN (u), la circonférence TPR (t), on aura $\frac{yu+yt}{2}$ égale à la surface conique tronquée décrite par MP, qui étant multipliée par P*p* (dx) donnera $\frac{yudx+ytdx}{2}$ égale à la différence du solide formé par la révolution de l'espace AMP, autour de BK, mais par la proprieté de la parabole $yy=px$; donc $y=\sqrt{px}$, & les surfaces coniques GPTR, GALE étant semblables, $t.\ c :: a+d-x.\ a+d$; donc $t=\frac{ac+cd-cx}{a+d}$; les triangles semblables CPO, GAF, donnent $y+z.\ f :: a+d-x.\ a+d$; donc $y+z=\frac{af+fd-fx}{a+d}$; donc $z=\frac{af+fd-fx}{a+d}-\sqrt{px}$ en transposant y de l'autre côté, & mettant à sa place $\sqrt{px}$; or les surfaces coniques OMSN, FALE, étant semblables $u.\ c :: z.\ f$, donc $u=\frac{cz}{f}=\frac{ac+cd-cx}{a+d}-\frac{c\sqrt{px}}{f}$ en prenant pour z sa valeur $\frac{af+fd-fx}{a+d}-\sqrt{px}$, mettant donc dans la différentielle $\frac{yudx+ytdx}{2}$ à la place de y, de t, & de u, leurs valeurs $\sqrt{px}$, $\frac{ac+cd-cx}{a+d}$, $\frac{ac+cd-cx}{a+d}-\frac{c\sqrt{px}}{f}$, on aura $\frac{ac\sqrt{px}^{\frac{1}{2}}dx+cd\sqrt{px}^{\frac{1}{2}}dx-c\sqrt{px}^{\frac{3}{2}}dx}{a+d}-\frac{cpxdx}{f}$, ou $c\sqrt{px}^{\frac{1}{2}}dx-\frac{c\sqrt{px}^{\frac{3}{2}}dx}{a+d}-\frac{cpxdx}{2f}$ (parce que $c\sqrt{px}^{\frac{1}{2}}dx$, étoit multiplié & divisé par $a+d$) égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{2c\sqrt{px^3}}{3}-\frac{2c\sqrt{px^5}}{5a+5d}-\frac{cpx^2}{4f}$, ou $\frac{2cxy}{3}-\frac{2cxxy}{5a+5d}-\frac{cxyy}{4f}$ (en prenant pour $\sqrt{px}$ sa valeur y) est égale au solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de BK, & l'on aura $\frac{2abc}{3}-\frac{2aabc}{5a+5d}-\frac{abbc}{4f}$ pour la valeur du solide formé mé par la révolution de la demie parabole ABC autour de BK, parce que P devenant C, x devient a, & y devient b.

REMARQUE.

Si AC (a) = CG (d) = AF (f), on aura $\frac{7abc}{15} - \frac{bbc}{2}$ pour la valeur de ce solide.

PROBLEME XVIII.

Trouver la valeur d'un espace parabolique AMBC renfermé entre un arc parabolique quelconque, un diamétre AC, & une ordonnée BC à ce diamétre (*Fig.* 112.)

Ayant tiré au diametre AC, deux ordonnées MP, mp, infiniment proches l'une de l'autre, puis tiré AF perpendiculaire sur l'ordonnée BC, & nommé les données AF (a), BC (b), & les indéterminées AR (x), MP (y), Rr sera dx, & l'on aura ydx égale à la differentielle de l'espace AMP, mais par la proprieté de la parabole yy. bb :: AP. AC, & à cause des triangles semblables APR, ACF, AP. AC :: x. a, donc yy. bb :: x. a; donc $yy = \frac{bbx}{a}$, & $y = \sqrt{\frac{bbx}{a}}$, mettant cette valeur de y dans la differentielle ydx, on aura $\sqrt{\frac{bbx}{a}}^{\frac{1}{2}} dx$ égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{bbx^3}{a}}$, ou $\frac{2xy}{3}$, (en prenant pour $\sqrt{\frac{bbx}{a}}$ sa valeur y) est égale à l'espace AMP, & l'on aura $\frac{2ab}{3}$ pour la valeur de l'espace ABC, parce que R devenant F, x devient (a), & y devient (b).

REMARQUE.

Si l'on fait le paralellogramme ACBD, comme ab est la valeur de ce paralellogramme, & que $\frac{2ab}{3}$ est celle de l'espace ABC, il s'ensuit que cet espace est les $\frac{2}{3}$ de ABCD.

PROBLEME XIX.

Les mêmes choses étant posées, trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ABC autour de AC. (*Fig.* 113.)

Ayant tiré au diamétre AC, deux ordonnées MP, *mp*, infiniment près l'une de l'autre, puis AF perpendiculaire sur BC, il est évident que les ordonnées MP, *mp*, décriront en tournant autour de AC des surfaces coniques MNSP, *mnsp*, qui seront des elemens de ce solide ; ainsi nommant les données AF (a), BC (b), la circonférence BKG (c), & les indéterminées AR (x), MP (y), la circonférence MNS (z), R*r* sera dx, & l'on aura $\frac{yzdx}{2}$ égale à la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace AMP, autour de AC, mais par la proprieté de la parabole $yy. bb$ :: AP. AC, & à cause des triangles sembl. APR, ACF, AP. AC :: $x. a$, donc $yy. bb :: x. a$; donc $yy = \frac{bbx}{a}$, & $y = \sqrt{\frac{bbx}{a}}$, or à cause des surfaces coniques semblables MNSR, BKGC, $z. c :: y. b$; donc $z = \frac{cy}{b} = c\sqrt{\frac{x}{a}}$, en prenant pour y sa valeur $\sqrt{\frac{bbx}{a}}$, donc $yz = \frac{bcx}{a}$, & mettant dans la différentielle $\frac{yzdx}{2}$, à la place de yz, sa valeur $\frac{bcx}{a}$, on aura $\frac{bcxdx}{2a}$ égale à cette même différentielle, dont l'intégrale $\frac{bcxx}{4aa}$, ou $\frac{yzx}{4}$, en prenant pour $\frac{bcx}{a}$ sa valeur yz, est égale au solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de AC, & l'on aura $\frac{abc}{4}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ABC autour de AC, parce que R devenant F, x devient a, y devient (b), & z devient c.

REMARQUE.

Si l'on fait le paralellogramme ACBD, le solide formé par la révolution de ce paralellogramme autour de AC, sera $\frac{abc}{2}$, & comme $\frac{abc}{4}$ est la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ABC autour de AC, il s'ensuit que celui-ci est moitié de celui-là.

PROBLEME XX.

Les mêmes choses étant posées que dans la 18e Proposition, trouver la valeur du solide ABGFC formé par la révolution de l'espace ABC autour de l'ordonnée BC. (*Fig.* 114.)

Ayant tiré au diamétre AC, deux ordonnées MP, *mp*, infiniment proches l'une de l'autre, il est évident qu'elles décriront en tournant des surfaces cylindriques MPLRI, *mplri*, qui seront des elemens du solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de BC; ainsi nommant les données AH (a), BC (b), la circonférence ATG (c), & les indéterminées AO (x), MP (y), la circonférence PLR (z), P*p* sera (dx), & OH, ou PK ($a-x$), & l'on aura yz égal à la surface cylindrique décrite par MP qui étant multipliée par dx, donnera $yzdx$, pour la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de BC; or par la proprieté de la parabole $yy.\ bb :: AP.\ AC$, & à cause des triangles semblables APO, ACH, $AP.\ AC :: x.\ a$; donc $yy.\ bb :: x.\ a$; donc $yy = \frac{bbx}{a}$, & $y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$, & $z.\ c :: a-x.\ a$; donc $z = c - \frac{cx}{a}$, mettant donc ces valeurs de y & de z dans la différentielle $yzdx$, on aura $\frac{bcx^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a}} - \frac{bcx^{\frac{3}{2}}dx}{\sqrt{a^3}}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{2bc}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}} - \frac{2bc}{5}\sqrt{\frac{x^5}{a^3}}$, ou $\frac{2cxy}{3} - \frac{2cxxy}{5a}$ (en prenant pour $b\sqrt{\frac{x}{a}}$ sa valeur y) est égal au solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de AC, & l'on aura $\frac{2abc}{3} - \frac{2abc}{5}$, ou $\frac{4abc}{15}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ABC autour de BC, parce que R devenant F, x devient a, & y devient b.

REMARQUE.

Si l'on fait le paralellogramme ACBD, le solide formé par la révolution de ce paralellogramme autour de BC, est $\frac{abc}{2}$, or $\frac{4abc}{15}$ est la valeur du solide formé par la révolution de l'espace

ABC autour de BC; donc celui-ci eſt à celui-là comme 8 eſt à 15.

PROBLEME XXI.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le 18^e^ Problême, trouver la valeur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace ABC, autour de AD, tangente en A. (*Fig.* 115.)

Ayant tiré AF perpendiculaire à BC, puis au diametre AC deux ordonnées MP, *mp*, infiniment près l'une de l'autre, elles décriront en tournant autour de AD des ſurfaces cylindriques qui ſeront des elemens de ce ſolide; ainſi nommant les données AF (a), BC (b), la circonférence CLG (c), & les indéterminées AR (x), PM (y), la circonférence PSO (z), Rr ſera (dx), & l'on aura $yzdx$ pour la différentielle du ſolide formé par la révolution de l'eſpace AMP autour de AD, mais par la proprieté de la parabole $yy.\ bb$ :: AP. AC, & à cauſe des triangles ſemblables APR, ACF, AP. AC :: $x.\ a$; donc $yy.\ bb :: x.\ a$; donc $yy = \frac{bbx}{a}$, & $y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$, & à cauſe des ſurfaces ſemblables APSO, ACLG, $z.\ c$ :: AP. AC :: $x.\ a$; donc $z = \frac{cx}{a}$, mettant ces valeurs de y & de z dans la différentielle $yzdx$, on aura $\frac{bc}{\sqrt{a^3}} x^{\frac{3}{2}} dx$ égal à cette même différentielle, dont l'intégrale $\frac{2bc}{5}\sqrt{\frac{x^5}{a^3}}$, ou $\frac{2cxxy}{5a}$ (en prenant pour $b\sqrt{\frac{a}{x}}$ ſa valeur y) eſt égale au ſolide formé par la révolution de l'eſpace AMP autour de AD, & l'on aura $\frac{2abc}{5}$ pour la valeur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace ABC autour de AD, parce que R devenant F, x devient a, & y devient b.

REMARQUE.

Si l'on fait le paralellogramme ACBD, le ſolide formé par la révolution de ce paralellogramme autour de AD ſera $\frac{abc}{2}$ qui ſera à $\frac{2abc}{5}$, comme 5 à 4.

PROBLEME XXII.

Les mêmes choses étant posées comme dans le 18e Problême, trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ABC autour de DI, paralelle au diametre AC. (*Fig.* 116.)

Ayant tiré AV perpendiculaire à BC, puis au diametre AC, deux ordonnées MP, *mp*, infiniment près l'une de l'autre, & qui étant prolongées rencontrent DI en N & *n*, elles décriront en tournant autour de DI, des surfaces de cônes tronqués qui seront des elemens de ce solide; ainsi nommant les données AV (a), BC (b), la circonférence CHG, ou PKS (c) & les indéterminées AO (x), MP (y), la circonférence MTK (z), O*o* sera dx, MN ($b-y$), & l'on aura $\frac{cy+yz}{2}$ égal à la surface conique tronquée décrite par MP qui étant multipliée par dx, donnera $\frac{cydx+yzdx}{2}$ égal à la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de DI, mais par la proprieté de la parabole $yy.\ bb$ :: AP. AC, & à cause des triangles semblables APO, ACV, AP. AC :: $x.\ a$; donc $yy.\ bb :: x.\ a$; donc $yy=\frac{bbx}{a}$, & $y=b\sqrt{\frac{x}{a}}$, donc MN$=$ $b-b\sqrt{\frac{x}{a}}$; or à cause des surfaces coniques semblables MTRN, BCHG, $z.\ c :: b-b\sqrt{\frac{x}{a}}.\ b$; donc $z=c-c\sqrt{\frac{x}{a}}$, mettant ces valeurs de y & de z dans la différentielle $\frac{cydx+yzdx}{2}$, on aura $bc\sqrt{\frac{x}{a}}\,dx-\frac{bcxdx}{2a}$, égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{2bc}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}}-\frac{bcxx}{4a}$, est égal au solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de DI, & l'on aura $\frac{2abc}{3}-\frac{abc}{4}$ ou $\frac{5abc}{12}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ABC autour de DI, parce que O devenant V, x devient a.

REMARQUE.

Si l'on fait le paralellogramme ACBD, le solide formé par la révolution de ce parallellogramme sera $\frac{abc}{2}$, qui sera à $\frac{5abc}{12}$ comme 6 à 5.

PROBLEME XXIII.

Les mêmes choses étant posées comme dans le 18[e]. Problême, trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ABC autour de CD perpendiculaire sur le diametre AC. (*Fig.* 117.)

Ayant tiré deux autres diametres MK, *mk*, infiniment près l'un de l'autre, les parties MP, *mp*, décriront en tournant autour de CD, des couronnes circulaires qui seront des elemens de ce solide; ainsi nommant les données AC (a), CD (b), BD (d), la circonférence BHF (c), & les indéterminées DK (x), MP (y), PK (z), la circonférence MSR (u), la circonférence PTN (t), K*k* sera (dx), & l'on aura $\frac{yudx + ytdx}{2}$ égal à la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace BPM autour de CD, mais par le Lemme 5[e]. page 7. $y.\ a :: \overline{BC}^2 - \overline{CP}^2 .\ \overline{BC}^2$, & à cause des triangles semblables BCD, CPK, $\overline{BC}^2 - \overline{CP}^2 .\ \overline{BC}^2 :: 2bx - xx.\ bb$, donc $y.\ a :: 2bx - xx.\ bb$, donc $y = \frac{2abx - axx}{bb}$; or $t.\ c ::$ PK. BD, & à cause des triangles semblables CPK, CBD, PK. BD $:: b - x.\ b$, donc $t.\ c :: b - x.\ b$, donc $t = c - \frac{cx}{b}$, mais $z.\ d :: b - x.\ b$; donc $z = d - \frac{dx}{b}$, & $u.\ c :: y + z.\ d$, donc $u = \frac{cy + cz}{d} = \frac{2abcx - acxx}{bbd} + c - \frac{cx}{b}$ (en prenant pour y & z leurs valeurs $\frac{2abx - axx}{bb}$, & $d - \frac{dx}{b}$) mettant donc dans la différentielle $\frac{yudx + ytdx}{2}$ à la place de y, t, & u leurs valeurs $\frac{2abx - axx}{bb}$, $c - \frac{cx}{b}$, & $\frac{2abcx - acxx}{bbd} + c - \frac{cx}{b}$, on aura $\frac{4aabbcxxdx - 4aabcx^3dx + aacx^4dx}{2b^4d} + \frac{2acxdx}{b} - \frac{3acxxdx}{bb} + \frac{acx^3dx}{b^3}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{2aacx^3}{3bbd}$ —

$\frac{aacx^4}{2b^3d} + \frac{aacx^5}{10b^4d} + \frac{acxx}{b} - \frac{acx^3}{bb} + \frac{acx^4}{4b^3}$ eſt égal au ſolide formé par la révolution de l'eſpace BPM autour de CD, & l'on aura $\frac{4aabc}{15d} + \frac{abc}{4}$ pour la valeur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace ABC autour de CD, parce que K devenant C, x devient b.

PROBLEME XXIV.

Trouver la valeur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace BFG, renfermé entre l'arc parabolique BF, le diametre FG, & une partie BC de l'ordonnée BD à l'axe AC, de la parabole BAD autour du diametre FG (*Fig.* 118.).

Ayant tiré deux diametres MP, *mp*, infiniment près l'un de l'autre, ils décriront en tournant autour de GF des ſurfaces cylindriques qui ſeront des elemens de ce ſolide; ainſi nommant les données BG (a), BC (b), la circonference BRT (c), (p) le parametre, & les indéterminées BP (x), MP (y), la circonférence PNK (z), Pp ſera (dx), PG ſera ($a - x$), & l'on aura $yzdx$ égal à la différentielle du ſolide formé par la révolution de l'eſpace BPM autour de GF; mais par le Lemme III. page 5. $y = \frac{2bx - xx}{p}$, & $z.\ c :: a - x.\ a$; donc $z = c - \frac{cx}{a}$, mettant ces valeurs de y & de z dans la différentielle $yzdx$, l'on aura $\frac{2abcxdx - acxxdx - 2bcxxdx + cx^3dx}{ap}$, égal à cette même différentielle, dont l'intégrale $\frac{bcxx}{p} - \frac{cx^3}{3p} - \frac{2bcx^3}{3ap} + \frac{cx^4}{4ap}$ eſt égal au ſolide formé par la révolution de l'eſpace BMP autour de GF, & l'on aura $\frac{aabc}{p} - \frac{a^3c}{3p} - \frac{2aabc}{3p} + \frac{a^3c}{4p}$, ou $\frac{aabc}{3p} - \frac{a^3c}{12p}$ pour la valeur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace BFG autour de GF, parce que P devenant G, x devient a.

PROBLEME XXV.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le précédent

Problême, trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace BFG autour de BD (*Fig.* 119.)

Ayant tiré deux diametres MP, *mp*, infiniment près l'un de l'autre, ils décriront en tournant des cercles MNOP, *mnop*, qui seront des elemens de ce solide; ainsi nommant les données BG (a), BC (b), la circonférence FRT (c), (p) le parametre, & les indéterminées BP (x), MP (y), la circonférence MNO (z), P*p* sera dx, & l'on aura $\frac{yzdx}{2}$ égal à la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace BMP autour de BD; mais par le Lemme III. page 5. $y = \frac{2bx - xx}{p}$ & $z.\ c :: y.\ a$, donc $z = \frac{cy}{a} = \frac{2bcx - cxx}{ap}$, (en prenant pour y sa valeur $\frac{2bx - xx}{p}$), mettant ces valeurs de y & de z dans la différentielle $\frac{yzdx}{2}$, on aura $\frac{4bbcxxdx - 4bcx^3dx + cx^4dx}{2app}$ égal à cette même différentielle, dont l'intégrale $\frac{2bbcx^3}{3app} - \frac{bcx^4}{2app} + \frac{cx^5}{10app}$, est égal au solide formé par la révolution de l'espace BMP autour de BD, & l'on aura $\frac{2aabbc}{3pp} - \frac{a^3bc}{2pp} + \frac{a^4c}{10pp}$, pour la valeur du solide formé par la révolution de l'espace BFG autour de BD, parce que P devenant G, x devient a.

PROBLEME XXVI.

Les mêmes choses étant posées comme dans le 24[e] Problême, trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace BFG autour de BK paralelle à AC (*Fig.* 120.)

Ayant tiré deux diamétres MP, *mp*, infiniment près l'un de l'autre, ils décriront en tournant des surfaces cylindriques qui seront des elemens de ce solide; ainsi nommant les données BG (a), BC (b), la circonférence GLH (c), (p) le parametre, & les indéterminées BF (x), MP (y), la circonférence POI (z), P*p* sera dx, & l'on aura $yzdx$ égal à la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace BMP autour

autour de BK, mais par le Lemme III. page 5. $y = \frac{2bx - xx}{p}$ & $z.\ c :: x.\ a$; donc $z = \frac{cx}{a}$, mettant ces valeurs de y & de z dans la différentielle $yzdx$, on aura $\frac{2bcxxdx - cx^3dx}{ap}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{2bcx^3}{3ap} - \frac{cx^4}{4ap}$, est égal au solide formé par la révolution de l'espace BMP autour de BK, & l'on aura $\frac{2aabc}{3p} - \frac{a^3c}{4p}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de l'espace BFG autour de BC, parce que P devenant G, x devient a.

PROBLEME XXVII.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême 24, trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace BFG autour d'une ligne FK, paralelle à l'ordonnée BD (*Fig.* 121.)

Ayant tiré deux lignes quelconques PI, *pi*, infiniment près l'une de l'autre, les parties MP, *mp* de ces lignes décriront en tournant autour de FK des couronnes circulaires qui feront des Elémens de ce solide ; ainsi nommant les données FG (a), BC (b), BG (d), la circonférence GSH, ou PEO (c), (p) le parametre, & les indéterminées BP (x), MP (y), la circonférence MRN (z), Pp sera (dx), & l'on aura $\frac{cydx + yzdx}{2}$ égal à la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace BMP autour de FK ; mais par le Lemme III. $y = \frac{2bx - xx}{p}$; donc IM $= a - \frac{2bx + xx}{p}$, & $z.\ c ::$ IM $(a - \frac{2bx + xx}{p})$ a ; donc $z = c - \frac{2bcx + cxx}{ap}$, mettant ces valeurs de y & de z, dans la différentielle $cydx + yzdx$, on aura $\frac{2bcxdx - cxxdx}{2p} - \frac{4bbcxxdx + 4bcx^3dx - cx^4dx}{2app}$ égal à cette même différentielle, dont l'intégrale $\frac{bcxx}{p} - \frac{cx^3}{3p} - \frac{2bbcx^3}{3app} + \frac{bcx^4}{2app} + \frac{cx^5}{10app}$ est égal au solide formé par la révolution de l'espace BMP autour de FK, & l'on aura $\frac{bcdd}{p} - \frac{cd^3}{3p} - \frac{2bbcd^3}{3app} + \frac{bcd^4}{2app} - \frac{cd^5}{10app}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de l'espace BFG autour de FK, parce que P devenant G, x devient d.

PROBLEME XXVIII.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême 24, trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace BFG, autour de l'axe AC (*Fig.* 122.)

Ayant tiré à l'axe AC, deux ordonnées MP, mp, infiniment près l'une de l'autre, les parties MN, mn, décriront en tournant des couronnes circulaires qui seront des élemens de ce solide; ainsi nommant la donnée FG (a), la couronne circulaire BGVD (C), & les indéterminées FN (x), la couronne circulaire MNSR (Y), Nn sera (dx), & l'on aura Ydx égal à la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace MNF autour de AC, mais Y. C :: MN × NR. BG × GD, & par le Lemme IV. page 6. MN × NR. BG × GD :: x. a; donc Y. C :: x. a; donc $Y = \frac{Cx}{a}$, mettant cette valeur de Y dans la différentielle Ydx, on aura $\frac{Cxdx}{a}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{Cxx}{2a}$, ou $\frac{Yx}{2}$ (en prenant pour $\frac{Cx}{a}$ sa valeur Y) est égal au solide formé par la révolution de l'espace MNF autour de AC, & l'on aura $\frac{aC}{2}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de l'espace BFG autour de AC, parce que M devenant G, x devient a, & Y devient C.

REMARQUE.

Si l'on fait le rectangle BGFH; comme le cylindre creux formé par la révolution de ce rectangle autour de AC est AC, & que celle du solide parabolique est $\frac{aC}{2}$, il s'ensuit que ce solide est la moitié du cylindre creux.

PROBLEME XXIX.

Trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace hyperbolique BFG (renfermé entre l'arc hyperbolique BG, une ligne FG paralelle au premier axe Aa prolongé en C, & une partie BF d'une ordonnée BD à cet axe) autour de AC (*Fig.* 123.)

Ayant prolongé FG en g où elle rencontre l'hyperbole opposée, puis tiré du centre k, la ligne kZ perpendiculaire à Aa & Gg, ensuite à l'axe Aa deux ordonnées MP, mp, infiniment près l'une de l'autre, les parties MN, mn, décriront en tournant des couronnes circulaires qui seront des élemens de ce solide, ainsi nommant les données FG (a), GZ (b), la couronne circulaire BFTH (C), & les indéterminées GN (x), la couronne circulaire MNSE (Y), Nn sera (dx), & l'on aura Ydx égal à la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace MNG autour de AC, mais Y. C :: MN $\times$ NE. BF $\times$ FH, & par le Lemme 10. page 18. MN $\times$ NE. BF$\times$FH :: $2bx + xx$. $2ab + aa$; donc Y. C :: $2bx + xx$. $2ab + aa$, & $Y = \frac{2bCx + Cxx}{2ab + aa}$ mettant cette valeur de Y dans la différentielle Ydx, on aura $\frac{2bCxdx + Cxxdx}{2ab + aa}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{bCxx}{2ab + aa} + \frac{Cx^3}{6ab + 3aa}$ est égal au solide formé par la révolution de l'espace MNG autour de AC, & l'on aura $\frac{abC}{2b + a} + \frac{aaC}{6b + 3a}$, ou $\frac{3abC + aaC}{6b + 3a}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de l'espace BFG autour de AC, parce que N devenant F, x devient a.

REMARQUE.

Si l'on fait le rectangle BFGx; la valeur du cylindre creux formé par la révolution de ce rectangle autour de AC sera aC; mais $\frac{3abC + aaC}{6b + 3a}$ est la valeur du solide formé par la révolution de l'espace hyperbolique BFG autour de AC, donc ce

N ij

ſolide eſt au cylindre creux comme $\frac{3abC+aaC}{6b+3a}$ eſt à aC, comme $3b+a$ à $6b+3a$.

Si $b=a$ le ſolide eſt au cylindre creux comme 4 à 9.

PROBLEME XXX.

Trouver la valeur du ſolide elliptique formé par la révolution de l'eſpace BFG (renfermé entre l'arc elliptique GBF, & une ligne GF paralelle à l'axe AD autour de AD (*Fig.* 124).

Ayant tiré par le centre C l'axe BZ, puis à l'axe AD deux ordonnées MP, *mp*, infiniment près l'une de l'autre, les parties MN, *mn*, décriront en tournant des couronnes circulaires qui feront des Elemens de ce ſolide ; ainſi nommant les données G*k* (*a*), la couronne circulaire B*k*LZ (C), & les indéterminées GN (*x*), la couronne circulaire MNSR (Y), N*n* ſera (*dx*), & l'on aura Y*dx* égal à la différentielle du ſolide formé par la révolution de l'eſpace MGN autour de AD, mais Y. C :: MN × NR. B*k* × *k*Z, & par le Lemme 6 page 9 MN × NR. B*k* × *k*Z :: $2ax-xx$. aa, donc Y. C :: $2ax-xx$. aa ; donc $Y=\frac{2aCx-Cxx}{aa}$, mettant cette valeur de Y dans la différentielle Y*dx*, on aura $\frac{2aCxdx-Cxxdx}{aa}$, égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{Cxx}{a}-\frac{Cx^3}{3aa}$ eſt égal au ſolide formé par la révolution de l'eſpace MGN autour de AD, & l'on aura $4a\text{C}-\frac{8a\text{C}}{3}$, ou $\frac{4a\text{C}}{3}$ pour la valeur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace BFG autour de AD, parce que N devenant F, x devient a.

REMARQUE.

Si l'on fait le rectangle BKFGX ; $2a$C ſera la valeur du cylindre creux formé par la révolution de ce rectangle autour de AD, mais $\frac{4a\text{C}}{3}$ eſt la valeur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace BFG autour de AD ; donc ce ſolide eſt au cylindre creux, comme 2 à 3.

PROBLEME XXXI.

Trouver la valeur du solide formé par la révolution de la demie ellipse ADB autour du diametre AB (*Fig.* 125.)

Ayant tiré du centre C le demi diametre CD conjugué au diametre AB, puis BF paralelle à CD & AL perpendiculaire sur CD & BF, cette ligne AL sera divisée en deux également en K, tirant aussi au diametre AB deux ordonnées MP; *mp*, infiniment près l'une de l'autre, elles décriront en tournant des surfaces coniques qui seront des Elemens de ce solide; ainsi nommant les données AL (a), la surface conique DCIS (C), & les indéterminées AO (x), la surface MPNR (Y), Oo sera (dx), & l'on aura Ydx égal à la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace AMB autour de AB, mais à cause des surfaces coniques semblables MPNR, DCIS, $Y. C :: 2ax - xx. aa$, donc $Y = \frac{2aCx - Cxx}{aa}$; mettant cette valeur de Y dans la différentielle Ydx, l'on aura $\frac{2aCxdx - Cxxdx}{aa}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{Cxx}{a} - \frac{Cx^3}{3aa}$ est égal au solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de AB, & l'on aura $\frac{4aC}{3}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de la demie ellipse ADB autour de AB, parce que O devenant L, x devient $2a$.

REMARQUE.

Si l'on fait un paraléllogramme ABFG, la valeur du solide formé par la révolution de ce paralellogramme autour de AB sera $2a$C; or la valeur du solide formé par la révolution de la demie ellipse ADB autour de AB est $\frac{aC}{3}$, donc ce solide est à l'autre comme 2 à 3.

PROBLEME XXXII.

Trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace hyperbolique ADB (dont C est le centre, Aa un diametre, & BD une ordonnée à ce diametre) autour de AD, (*Fig.* 126.)

Ayant tiré du centre C le diametre LCK conjugué au diametre Aa, puis du point a, aO paralelle à LK, ensuite OAS perpendiculaire à BD, (que je prolonge en S, s'il est nécessaire) tirant aussi deux lignes MR, mr, infiniment près l'une de l'autre, & paralelles à BS, les ordonnées MP, mp, décriront en tournant des surfaces coniques qui seront des élemens de ce solide; ainsi nommant les données AS (a), AX (b), la surface conique BDGV (C), & les indéterminées AR (x), la surface conique MPNT (Y), Rr sera dx, & l'on aura Ydx égal à la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de AD; mais à cause des surfaces coniques semblables MPNT, BDGV, $Y.\ C :: \overline{MP}^2.\ \overline{BD}^2$, & par la proprieté de l'hyperbole $\overline{MP}^2.\ \overline{BD}^2 :: AP \times Pa.\ AD \times Da$, donc $Y.\ C :: AP \times Pa.\ AD \times Da$, prenant à la place de AP, Pa, AD, Da, les lignes AR, RO, AS, SO, qui sont en même raison, on aura $Y.\ C :: 2bx + xx.\ 2ab + aa$, donc $Y = \frac{2bCx + Cxx}{2ab + aa}$, mettant cette valeur de Y dans la différentielle Ydx, l'on aura $\frac{2bCxdx + Cxxdx}{2ab + aa}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{bCxx}{2ab + aa} + \frac{Cx^3}{6ab + 3aa}$ est égal au solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de AD, & l'on aura $\frac{abC}{2b + a} + \frac{aaC}{6b + 3a}$, ou $\frac{3abC + aaC}{6b + 3a}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ABD autour de AD, parce que R devenant S, x devient a.

REMARQUE.

Si l'on fait le paralellogramme ADBE, le solide formé par la révolution de ce paralellogramme autour de AD sera aC; or $\frac{3abC + aaC}{6b + 3a}$ est la valeur du solide formé par la révolution de l'espace hyperbolique ABD autour de AD, donc celui-ci est à celui-là comme $\frac{3abC + aaC}{6b + 3a}$ est à aC, comme $3b + a$, à $6b + 3a$.

Si $a=b$ ces deux solides seront entr'eux comme 4 à 9.

LEMME XXVIII.

Soient les deux surfaces coniques tronquées ESEDOC, & MTNHRG paralelles entre elles, & qui ont un même axe AK, je dis que la premiere est à la seconde comme $\overline{AE}^2 - \overline{AC}^2$ est à $\overline{BM}^2 - \overline{BG}^2$ (*Fig.* 127.)

Je nomme la surface conique AESF (A), la surface conique ACOD (B), la surface conique BMTN (C), & la surface conique BGRH (D), la surface conique tronquée ESFDOC sera $A - B$, & la surface conique tronquée MTNHRG sera $C - D$.

Il faut prouver que $A - B. C - D :: \overline{AE}^2 - \overline{AC}^2. \overline{BM}^2 - \overline{BG}^2$.

DEMONSTRATION.

$A. B :: \overline{AE}^2. \overline{AC}^2$; donc $A - B. B :: \overline{AE}^2 - \overline{AC}^2. \overline{AC}^2$; de même $C - D. D :: \overline{BM}^2 - \overline{BG}^2. \overline{BG}^2$, ou $D. C - D :: \overline{BG}^2. \overline{BM}^2 - \overline{BG}^2$, & $B. D :: \overline{AC}^2. \overline{BG}^2$; donc en multipliant terme par terme, & divisant le premier & le second produit par BD, & le troisiéme & le quatriéme par $AC \times BG$, on aura $A - B. C - D :: \overline{AE}^2 - \overline{AC}^2. \overline{BM}^2 - \overline{BG}^2$. *C. q. f. p.*

PROBLEME XXXIII.

Trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace hyperbolique ABD dont C est le centre, & BD une ordonnée au demi-diametre AC, autour d'une ligne CK paralelle à l'ordonnée BD. (*Fig.* 128.)

Ayant fait le paralellogramme AVBD, & prolongé BV en K, puis tiré au demi-diametre AC deux ordonnées MP, *mp*, infiniment proches l'une de l'autre, & ensuite MR, *mr*, paralelles à CD, les lignes MN, *mn*, décriront en tournant des surfaces de cônes tronqués qui seront des élemens du solide formé par la révolution de l'espace ABV, autour de CK; tirant aussi AE perpendiculaire sur MR, *mr*, BK, prolongées en O, *o*, E, & nommant les données AE (a), la surface conique tronquée décrite par BV (C), & les indéterminées AO (x), la surface conique tronquée décrite par MN (Y), O*o* sera dx, & l'on aura Ydx égal à la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace AMN autour de CK, mais par le Lemme précédent $Y . C :: \overline{MR}^2 - \overline{NR}^2 . \overline{BK}^2 - \overline{VK}^2$, & prenant à la place de $\overline{MR}^2 - \overline{NR}^2$, & de $\overline{BK}^2 - \overline{VK}^2$, $\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$, & $\overline{CD}^2 - \overline{CA}^2$ qui leur sont égaux, on aura $Y . C :: \overline{CP}^2 - \overline{CA}^2 . \overline{CD}^2 - \overline{CA}^2$, or par la proprieté de l'hyperbole $\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2 . \overline{CD}^2 - \overline{CA}^2 :: \overline{MP}^2$ ou $\overline{AN}^2 . \overline{BD}^2$ ou $\overline{AV}^2$; donc $Y . C :: \overline{AN}^2 . \overline{AV}^2$, mais à cause des triangles semblables AON, AEV, $\overline{AN}^2 . \overline{AV}^2 :: xx . aa$; donc $Y = \frac{Cxx}{aa}$, mettant cette valeur de Y dans la différentielle Ydx, on aura $\frac{Cxxdx}{aa}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{Cx^3}{3aa}$, ou $\frac{xY}{3}$ (en prenant pour $\frac{Cxx}{aa}$ sa valeur Y) est égale au solide formé par la révolution de l'espace AMN autour de CK, & l'on aura $\frac{aC}{3}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ABV autour de CK, parce que O devenant E, x devient a, & Y devient C, & comme aC est la valeur du solide formé par la révolution du paralellogramme AVBD autour de CK, il s'ensuit que $\frac{2aC}{3}$ sera la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ABD autour de CK.

PROBLEME XXXIV.

Trouver la valeur d'une portion quelconque ABHG d'un paraboloïde ABDC coupé obliquement par un plan BHG (*Fig.* 129.)

Si l'on imagine cette portion coupée par deux plans MNR, *mnr*, infiniment proches & paralelles au premier BHG, les sections

sections seront des ellipses semblables comme il a été prouvé dans la 1re section; divisant aussi leurs axes MR, mr, BG, en deux également P, p, O, par le diametre AO, & tirant AE perpendiculaire à BG, & nommant les données AE (a), l'Ellipse BHG (C), & les indéterminées AI (x), l'ellipse MNR (Y), Ii sera dx, & l'on aura Ydx égal à la différentielle du solide AMNRP, mais Y.C :: $\overline{MP}^2.\overline{BO}^2$, & par la proprieté de la parabole $\overline{MP}^2.\overline{BO}^2$ :: AP. AO :: AI (x). AE (a); donc Y. C :: x. a, donc $Y = \frac{Cx}{a}$ mettant cette valeur de Y dans la différentielle Ydx, on aura $\frac{Cxdx}{a}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{Cxx}{2a}$, ou $\frac{xY}{2}$ (en prenant pour $\frac{Cx}{a}$ sa valeur Y) est égale au solide AMNRP, & l'on aura $\frac{aC}{2}$ pour la valeur de la portion ABHG, parce que I devenant E, x devient a, & Y devient C.

REMARQUE.

Si l'on imagine que l'ellipse BHG soit muë paralellement à elle-même le long du diametre AO, en sorte que le point O parcoure ce même diametre, étant parvenue en A, où BG sera alors tangente, elle aura formé dans son mouvement un cylindre elliptique BHGSLT, dont la valeur sera aC, mais $\frac{aC}{2}$ est celle de la portion ABHG; donç cette portion est moitié du cylindre elliptique.

PROBLEME XXXV.

Trouver la valeur d'une portion quelconque AKSDT, d'un spheroïde coupé obliquement par un plan KSDT (*Fig.* 130.)

Ayant coupé cette portion par deux plans MINP, $minp$; infiniment proches l'un de l'autre, & paralelles au premier, les sections seront des ellipses semblables, comme il a été prouvé, & divisant leurs axes MN, mn, KD en deux également en P, p, & T par le diametre AB, & du point B ayant tiré la

O

tangente BE jusqu'à la rencontre de AE perpendiculaire à KD, ensuite du centre C du spheroïde tiré CL paralelle à BE ; nommant les données AL (a), l'ellipse KSDT (C), AO (b), & les indéterminées AR (x), l'ellipse MINP (Y), Rr sera dx, & l'on aura Ydx égale à la différentielle de la portion AMINP, mais $Y. C :: \overline{MP}^2. \overline{KT}^2$, & par la proprieté de l'ellipse $\overline{MP}^2. \overline{KT}^2 :: AP \times BP. AT \times BT$; donc $Y.C :: AP \times BP. AT \times BT$, prenant à la place de AP, BP ; AT, BT, les lignes AR, RE, AO, OE, qui sont en même raison, on aura $Y. C :: 2ax - xx. 2ab - bb$; donc $Y = \frac{2aCx - Cxx}{2ab - bb}$, mettant cette valeur de Y dans la différentielle Ydx, l'on aura $\frac{2aCxdx - Cxxdx}{2ab - bb}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{aCxx}{2ab - bb} - \frac{Cx^3}{6ab - 3bb}$ est égale à la portion AMINP, & l'on aura $\frac{abC}{2a - b} - \frac{bbC}{6a - 3b}$, ou $\frac{3abC - bbC}{6a - 3b}$ pour la valeur de la portion AKSDT, parce que R devenant O, x devient b, & Y devient C.

REMARQUE.

Si l'on conçoit comme dans le Problême précédent le cylindre elliptique KSDFHG, sa valeur bC, qui sera à $\frac{3abC - bbC}{6a - 3b}$ valeur de la portion AKSDT, comme $6a - 3b$, à $3a - b$.

PROBLEME XXXVI.

Trouver la valeur de la portion AITF d'un hyperboloïde ABDC coupé obliquement par un plan ITF (*Fig.* 131.)

Si l'on conçoit cette portion coupée par deux plans MSN, *msn*, infiniment près l'un de l'autre & paralelles au premier, les sections MSN, *msn*, ITF seront des ellipses semblables, comme il a été prouvé, divisant ensuite leurs axes en deux également en P, p, O, par le diamétre AO que je prolonge jusqu'au centre K, de l'hyperbole BAC, & du centre K ayant tiré la ligne KE perpendiculaire à IF rencontrant en Z la tangente AG, ensuite nommé les données KZ (a), ZE (b), l'ellipse ITF (C) & les indéterminées ZR (x), l'ellipse MSN (Y), Rr sera dx, & l'on aura Ydx égale à la différentielle de la portion AMSN, mais $Y . C :: \overline{MP}^2 . \overline{IO}^2$, & par la proprieté de l'hyperbole $\overline{MP}^2 . \overline{IO}^2 :: \overline{PK}^2 - \overline{AK}^2 . \overline{OK}^2 - \overline{AK}^2$; donc $Y . C :: \overline{PK}^2 - \overline{AK}^2 . \overline{OK}^2 - \overline{AK}^2$; or par le Lemme 14 page 23. $\overline{PK}^2 - \overline{AK}^2 . \overline{OK}^2 - \overline{AK}^2 :: 2ax + xx . 2ab + bb$; donc $Y . C :: 2ax + xx . 2ab + bb$; donc $Y = \frac{2aCx + Cxx}{2ab + bb}$, mettant cette valeur de Y dans la différentielle Ydx, l'on aura $\frac{2aCxdx + Cxxdx}{2ab + bb}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{aCxx}{2ab + bb} + \frac{Cx^3}{6ab + 3bb}$ est égale à la portion AMSN, & l'on aura $\frac{abC}{2a + b} + \frac{bbC}{6a + 3b}$, ou $\frac{3abC + bbC}{6a + 3b}$ pour la valeur de la portion AITF, parce que R devenant E, x devient b.

REMARQUE.

Si l'on conçoit comme dans les deux précédens Problêmes le cylindre elliptique ITFGLH, sa valeur sera bC qui sera à $\frac{3abC + bbC}{6a + 3b}$ valeur de la portion AITF, comme $6a + 3b$ à $3a + b$.

PROBLEME XXXVII.

Trouver la surface d'un paraboloïde ABFDC (*Fig.* 132.)

Si l'on tire deux ordonnées MP, mp, infiniment proches l'une de l'autre, leurs extrêmités M, m, décriront en tournant des circonférences de cercles qui seront des elemens de cette surface; tirant ensuite la tangente MT, puis la perpendiculaire infiniment petite MR, & nommant les données AC (a), BC (b), la circonférence BFD (c), (p) le parametre, & les indéterminées AP (x), MP (y), la circonférence MON (u), TP sera $2x$, MT sera $\sqrt{4xx + yy}$, ou $\sqrt{4xx + px}$; Pp, ou MR sera

dx, Mm fera $\frac{\sqrt{4x+p}}{2\sqrt{x}}dx$ (car à cauſe des triangles ſemblables MPT, MRm. $2x. \sqrt{4xx+px} :: dx. mM = \frac{\sqrt{4x+p}}{2\sqrt{x}}dx$, & l'on aura $\frac{u\sqrt{4x+p}}{2\sqrt{x}}dx$ égal à la différentielle de la ſurface AMON; mais $u. c :: y. b$; donc $u = \frac{cy}{b} = \frac{c\sqrt{px}}{b}$, (en prenant pour y ſa valeur $\sqrt{px}$, mettant cette valeur de u dans la différentielle $\frac{u\sqrt{4x+p}}{2\sqrt{x}}$, on aura $\frac{c}{2b}\sqrt{4px+pp}\,dx$, ou $\frac{c\sqrt{p}}{2b} \times \overline{4x+p}^{\frac{1}{2}}dx$, égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{c\sqrt{p}}{12b} \times \overline{4x+p}^{\frac{3}{2}}$, ou $\frac{\overline{4cx+cp}\sqrt{4px+pp}}{12b}$, eſt égale à la ſurface AMON, & l'on aura $\frac{\overline{4ac+cp}\sqrt{4ap+pp}}{12b}$ pour la valeur de la ſurface ABFG, parce que P devenant C, x devient a.

REMARQUE.

Si AC $(a) = p$, BC vaudra auſſi p, & l'on aura $5ac\sqrt{5}$ pour la valeur de cette ſurface.

PROBLEME XXXVIII.

Trouver la valeur de la ſurface intérieure du ſolide formé par la révolution de la demie parabole ABC autour de AL tangente au ſommet (*Fig.* 133.)

Ayant tiré BL paralelle à AC, puis deux ordonnées MP, mp, infiniment près l'une de l'autre, enſuite des points M, m, les lignes MN, mn, paralelles à AC, les points M, m, décriront en tournant des circonferences de cercles qui feront des elemens de cette ſurface; ainſi nommant les données AC (a), BC (b), la circonférence BGD (c), (p) le parametre, & les indéterminées AP (x), la circonférence MKN (y), Pp ſera dx, Mm ſera $\frac{\sqrt{4x+p}}{2\sqrt{x}}dx$, on aura $\frac{y\sqrt{4x+p}}{2\sqrt{x}}dx$ égal à la différentielle de la ſurface AMR, mais $y. c :: x. a$; donc $y = \frac{cx}{a}$, mettant cette valeur de y dans la différentielle $\frac{y\sqrt{4x+p}}{2\sqrt{x}}$

dx, on aura $\frac{c}{2a}\sqrt{4xx+px}\,dx$, égal à cette même différentielle. Si l'on imagine maintenant une demie hyperbole AIH dont AI soit double de AC, & qui ait pour premier axe la moitié du parametre de la parabole AB, que l'on prenne AO double de la variable AP, cette partie AO sera aussi variable & sera $2x$; donc sa différence Oo sera $2dx$; tirant ensuite les ordonnées OV, ou, infiniment près l'une de l'autre, AI sera $(2a)$, AO $(2x)$, & nommant IH (d), OV (z), $2zdx$ sera la differentielle de l'espace AOV, mais par la proprieté de l'hyperbole, $zz.dd :: 4xx+px.\ 4aa+ap$; donc $zz = dd \times \frac{4xx+px}{4aa+ap}$, & $z = d\frac{\sqrt{4xx+px}}{\sqrt{4aa+ap}}$, mettant cette valeur de z dans la différentielle zdx, on aura $d\frac{\sqrt{4xx+px}}{\sqrt{4aa+ap}}dx$, égale à cette même différentielle, donc la différentielle de la surface AMSR est à la différentielle de l'espace AOV comme $\frac{c}{2a}\sqrt{4xx+px}\,dx$, est à $d\frac{\sqrt{4xx+px}}{4aa+ap}dx$, comme $\frac{c}{2a}$ est à $\frac{d}{\sqrt{4aa+ap}}$, comme $c\sqrt{4aa+ap}$ est à $2ad$; or quand deux différentielles sont en même raison que deux quantités constantes, leurs intégrales sont aussi en même raison; donc la surface AMRS est à l'espace AOV comme $c\sqrt{4aa+ap}$ est à $2ad$; & supposant $\sqrt{4aa+ap}=f$, on aura AMSR. AOV :: $cf.\ 2ad$, parce que P devenant C, O devient I; donc la surface ABCD. AIH :: $cf.\ 2ad$.

PROBLEME XXXIX.

Trouver la valeur de la surface ALDM d'une portion de cylindre parabolique, coupé par un plan qui passe par un point L de son côté, & par l'axe AC de sa base (*Fig.* 134.)

Ayant coupé cette portion par deux plans MPN, mpn, infiniment près l'un de l'autre, les sections seront des triangles semblables, & les lignes MN, mn, seront des elemens de la surface ALDM, ainsi nommant les données AC (a), CD (b), DL (c), (p) le parametre, & les indéterminées AP (x), MP (y) MN (z), Mm sera, comme on a vû ci-devant,

$\frac{\sqrt{4x+p}}{2\sqrt{x}}dx$, & l'on aura $\frac{z\sqrt{4x+p}}{2\sqrt{x}}dx$ égal à la différentielle de la surface AMN, mais à cause des triangles semblables PMN, CDL, $z.\ c :: y.\ b$; donc $z = \frac{cy}{b} = \frac{c\sqrt{px}}{b}$, en prenant pour y sa valeur $\sqrt{px}$, mettant cette valeur de z dans la différentielle $\frac{z\sqrt{4x+p}}{2\sqrt{x}}dx$, on aura $\frac{c\sqrt{4px+pp}}{2b}dx$, égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{\overline{4cx+cp} \times \sqrt{4px+pp}}{12b}$ est égale à la surface AMN, & l'on aura $\frac{\overline{4ac+cp} \times \sqrt{4ap+pp}}{12b}$ égal à la surface ADL, parce que P devenant C, x devient a.

PROBLEME XL.

Trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace cycloïdal ADB autour d'une ligne AV paralelle à BD (*Fig.* 135.)

Ayant tiré DV paralelle à AB, & décrit le demi-cercle generateur ATB de la cycloïde AD, puis tiré deux ordonnées MP, mp, infiniment proches l'une de l'autre, ensuite les lignes NK, nk, paralelles à DV, ces lignes décriront en tournant des cercles NIO, nio, qui seront des elemens du solide formé par la révolution de l'espace ANK, autour de AV; tirant aussi du centre C le rayon CM, puis la petite perpendiculaire MR, & nommant les données AC (a), BD ou AV (b), la circonférence DFG, ou BXH (c), & les indéterminées AP, ou NK (x), MP (y), l'arc AM, ou la ligne MN, (z), la circonférence NIO, ou PYS (u), MR sera (dx), Mm (dz), NP ou AK, sera $y+z$, Kk sera $dy+dz = \sqrt{\frac{2a-x}{x}}dx$, (car $y = \sqrt{2ax+xx}$, donc $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax-xx}}$ & $dz = \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$ car à cause des triangles semblables CPM, MRm, MP ($\sqrt{2ax-xx}$). CA (a) :: MR (dx). $\frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$ = Mm (dz); donc $dy+dz = \frac{2adx - xdx}{\sqrt{2ax-xx}} = \frac{\sqrt{2a-x}}{x}dx$, en divisant le numerateur

$2adx - xdx$, & le dénominateur $\sqrt{2ax - xx}$ par $\sqrt{2a - x}$) $\frac{ux}{2}$ sera égal au cercle décrit par NK, qui étant multiplié par Kk ($\sqrt{\frac{2a-x}{x}}\,dx$) donnera $\frac{u\sqrt{2ax-xx}}{2}dx$, pour la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace ANK autour de AV ; mais si l'on fait tourner le demi-cercle ATB autour de AV, l'espace AMP décrira un solide dont la différentielle sera $u\sqrt{2ax - xx}\,dx$; donc le solide formé par la révolution de l'espace ANK autour de AV, est moitié du solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de AV ; donc le solide formé par la révolution de l'espace ADV autour de AV est moitié de l'anneau formé par la révolution du demi-cercle ATB autour de la même AV, parce que K devenant V, P devient B, mais BXH étant c, ATB sera $\frac{c}{4}$, & l'anneau sera $\frac{acc}{16}$; BD $=$ ATB $= \frac{c}{4}$; donc le cylindre BG sera $\frac{acc}{4}$, ou $\frac{4acc}{16}$, qui étant quadruple de l'anneau, sera octuple de la pointe formée par la révolution de l'espace ADV ; donc le solide formé par la révolution de l'espace cycloïdal ADB en est les $\frac{7}{8}$.

PROBLEME XLI.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême précédent, trouver la surface intérieure ADFG du même solide. (*Fig.* 135.)

Il est évident que les circonférences QIN, *oin*, sont des elemens de cette figure ; ainsi nommant l'arc de cycloïde AN (t), sa différentielle Nn sera (dt), & udt sera la différentielle de la surface ANIO, mais $dt = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{x}}dx$, (car à cause du triangle rectangle Nnz, $\overline{Nn}^2$ (dt^2) $= \overline{Nz}^2$, ou Kk ($\frac{2adx^2 - xdx^2}{x}$) $+ \overline{Nz}^2$, ou $\overline{Pp}^2$ (dx^2), c'est-à-dire $\overline{dt}^2 = \frac{2adx^2}{x}$, donc $dt^2 = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{x}}dx$) & $u.\,c :: x.\,2a$; donc $u = \frac{cx}{2a}$, mettant donc dans la différentielle udt à la place de u & de dt, leurs valeurs $\frac{cx}{2a}$ &

$\frac{\sqrt{2a}}{x}dx$, l'on aura $\frac{c\sqrt{2ax}}{2a}dx$, égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{c\sqrt{2ax^3}}{3a}$ est égale à la surface ANIO, & l'on aura $\frac{4ac}{3}$ pour la valeur de la surface ADFG, parce que K devenant V, P devient B, & x devient $2a$.

REMARQUE PREMIERE.

Comme l'arc cycloïdal est toujours double du diametre AB de son cercle generateur, sa valeur sera $4a$, & comme $\frac{4ac}{3}$, est la valeur de cette surface, il s'ensuit qu'elle est égale au produit de l'arc AD multiplié par le $\frac{1}{4}$ de la circonférence DFG.

REMARQUE II.

$\frac{4ac}{3}$ étant la valeur de la surfade ADFG, & ac celle du cercle DFGY, cette surface est à ce cercle comme 4 à 3.

REMARQUE III.

Par la proprieté de la cycloïde, BD étant égale à la demie circonférence, ATB sera $\frac{c}{2}$, & par conséquent le rectangle BG sera ac qui sera à la surface ADFG comme 3 à 4.

PROBLEME XLII.

Les mêmes choses étant posées comme dans le 40e Problême, trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace cycloïdal ABD autour de BD (*Fig.* 136.)

Ayant tiré deux ordonnées, NP, np, infiniment proches l'une de l'autre, puis des points N, n, les lignes NR, nr, paralelles à AB, elles décriront en tournant des cercles qui seront des elemens de ce solide; ainsi nommant les données AB ($2a$), la circonférence AEF (c), & les indéterminées AP (x), Pp (y), pn (z), la circonférence NTO (u), Rr différentielle de DR sera $-dy-dz$ (car DR$=b-y-z$, donc sa différentielle

différentielle Rr sera $-dy-dz$), & $\frac{u\times\overline{a-x}}{2}$, sera égal au cercle décrit par NR qui étant multiplié par Rr ($-dy-dz$) donnera $\frac{u\times\overline{a-x}\times\overline{-dy-dz}}{2}$ égale à la différentielle du solide DOTNR, mais il a été prouvé dans le Problême 45. que $dy+dz=\frac{\sqrt{2a-x}}{x}dx$, donc $-dy-dz=-\sqrt{\frac{2a-x}{x}}dx$, & $u.\ c :: 2a-x.\ 2a$; donc $u=c\times\frac{\overline{2a-x}}{2a}$, mettant cette valeur de u, & de $-\overline{dy-dz}$ dans la différentielle $\frac{u\times\overline{a-x}\times\overline{-dy-dz}}{2}$ on aura $-\frac{c}{4a}\times\sqrt{\frac{\overline{2a-x}^5}{x}}dx$, égale à cette même différentielle.

Si l'on imagine maintenant la Dioclée BH dont AG perpendiculaire sur AB soit l'asymptote, & que l'on fasse tourner l'espace infini ABHG autour de BD, toutes les lignes MP, mp, décriront des surfaces cylindriques qui seront des elemens du solide infini formé par la révolution de l'espace ABHG, & nommant MP (t), tu sera égale à la surface cylindrique décrite par MP, qui étant multipliée par Pp ($-dx$) donnera $-tudx$ pour la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace BMP autour de BD, mais par la proprieté de la Cissoïde BH, $t=\frac{2a-x}{x}\times y=\sqrt{\frac{\overline{2a-x}^3}{x}}$ (en prenant pour y sa valeur $\sqrt{2ax-xx}$), & $u.\ c :: 2a-x.\ 2a$; donc $u=\frac{c\times\overline{2a-x}}{2a}$, mettant cette valeur de t & de u, dans la différentielle $-tudx$, l'on aura $-\frac{c}{2a}\sqrt{\frac{\overline{2a-x}^5}{x}}$ égale à cette même différentielle qui étant double de la différentielle du solide DOTNR, il s'ensuit que le solide formé par la révolution de l'espace BMP autour de AD est double du solide DOTNR, & le solide formé par la révolution de l'espace ABD autour de BD, est la moitié du solide infini formé par la révolution de l'espace infini ABHG autour de BD, parce que R devenant B, P devient A.

DEFINITION.

Ayant décrit une demi cycloïde ABD, & son demi cercle generateur AMB ; si l'on prolonge BD vers F, & que l'on tire une infinité de lignes comme PR, *pr*, paralelles à FF ; qu'ensuite l'on tire les cordes AM, A*m*, & que l'on prenne les parties NR, *nr*, DF doubles des cordes AM, AB, la courbe qui passera par les points ARrF sera appellée parabole cycloïdale.

PROBLEME XLIII.

Trouver la valeur de l'espace ABF (*Fig.* 137.)

Ayant tiré deux lignes PR, *pr*, infiniment près l'une de l'autre & paralelles à BF, nommant les données AB ($2a$), DF (b), la demie circonférence AMB, ou BD (c), & les indéterminées AP (x), NR (y), P*p* sera (dx), & ydx sera la différentielle de l'espace ANR, mais par construction $y = 2AM = 2\sqrt{2ax}$, donc $ydx = 2\sqrt{2ax}\,dx$, dont l'intégrale $\frac{4\sqrt{2ax^3}}{3}$, ou $\frac{2xy}{3}$ est égale à l'espace ANR, & l'on aura $\frac{4ab}{3}$ pour la valeur de l'espace ADF, parce que P devenant B, x devient $2a$; & comme il est prouvé que $\frac{3ac}{2}$ est la valeur de l'espace cycloïdal ABD, $\frac{3ac}{2} + \frac{4ab}{3}$ sera la valeur de l'espace ABF

REMARQUE.

Comme le rectangle BG est $2ac + 2ab$, si l'on en ôte $\frac{3ac}{2} + \frac{4ab}{3}$, il restera pour la valeur du triligne AFG $\frac{ac}{3} + \frac{2ab}{3}$.

PROBLEME XLIV.

Trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ABF autour de AZ paralelle à BF. (*Fig.* 138.)

Ayant décrit son demi-cercle generateur AIB, & la demie cycloïde AMD dont AIB soit aussi le demi-cercle generateur, je tire deux ordonnées NP, np, infiniment près l'une de l'autre, & la corde AI, les lignes MN, mn, DF, décriront en tournant des surfaces cylindriques qui seront des elemens du solide formé par la révolution de l'espace ADF autour de AZ, & nommant les données AB ($2a$), la circonférence AIB, ou BD (c), DF (b), la circonférence FVG sera $4c$, & les indéterminées AP (x), MN (y), la demie circonférence NSK (u), $yudx$ sera égal à la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace AMN autour de AZ, mais par la proprieté de la courbe ANF $y=2\sqrt{2ax}$, & $u.c::x.\frac{a}{2}$, donc $u=\frac{2cx}{a}$, mettant ces valeurs de y & de u dans la différentielle $yudx$, on aura $\frac{4c\sqrt{2a}}{a}x^{\frac{3}{2}}dx$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{8c\sqrt{2ax^5}}{5a}$, ou $\frac{2xyu}{5}$, (en prenant pour $2\sqrt{2ax}$, & $\frac{2cx}{2}$ leurs valeurs y & u) est égale au solide formé par la révolution de l'espace AMN autour de AZ, & l'on aura $\frac{16abc}{5}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ADF autour de AZ, parce que P devenant B, x devient $2a$, y devient b, & u devient $4c$; mais par le Problême 40 le solide formé par la révolution de l'espace ABD autour de AZ est $\frac{7acc}{2}$, donc $\frac{7acc}{2}+\frac{16abc}{5}$ est la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ABF autour de AZ.

REMARQUE.

Si l'on fait le rectangle BZ, $4acc+4abc$ sera la valeur du cylindre formé par la révolution du rectangle autour de AZ, donc $\frac{acc}{2}+\frac{4abc}{5}$ sera la valeur de la pointe ou du solide formé par la révolution de l'espace AF autour de AZ.

PROBLEME XLV.

Trouver la valeur de l'espace renfermé entre la demie ellipse seconde AMB & son axe AB (*Fig.* 139.)

Ayant tiré deux ordonnées MP, mp, infiniment près l'une de l'autre, & nommé la donnée AB (a) & les indéterminées AP (x), MP (y), Pp sera dx, & l'on aura ydx égal à la différentielle de l'espace AMP, mais l'équation de la courbe AMB est $y = \frac{ax - xx}{\sqrt{\frac{ax}{2}}} = \sqrt{2ax} - \sqrt{\frac{2x^3}{a}}$, donc $ydx = \sqrt{2ax}\,dx - \sqrt{\frac{2x^3}{a}}\,dx$, dont l'intégrale $\frac{2}{3}\sqrt{2ax^3} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2x^5}{a}}$ est égale à l'espace AMP, & l'on aura $\frac{2aa\sqrt{2}}{3} - \frac{2aa\sqrt{2}}{5}$, ou $\frac{4aa\sqrt{2}}{15}$ pour la valeur de l'espace AMB, parce que P devenant B, x devient a.

PROBLEME XLVI.

Trouver la valeur du solide X formé par la révolution de l'espace AMB autour de son axe AB (*Fig.* 140.)

Ayant tiré la plus grande ordonnée CD à l'axe AB, & deux autres MP, mp, infiniment près l'une de l'autre, elles décriront en tournant des cercles MRNP, $mrnp$, qui seront des élemens de ce solide; ainsi nommant les données AB (a), CD (b), la circonférence DFG (c), & les indéterminées AP (x), MP (y), la circonférence MRN (z), Pp sera dx, & $\frac{yzdx}{2}$ sera égal à la différentielle du solide AMNRP, mais l'équation de la courbe est $y = \frac{2ax - xx}{\sqrt{\frac{ax}{2}}}$, & $z . c :: y . b$; donc $z = \frac{cy}{b} = \frac{acx - cxx}{b\sqrt{\frac{ax}{2}}}$ (en prenant pour y sa valeur $\frac{ax - xx}{\sqrt{\frac{ax}{2}}}$); mettant donc dans la différentielle $\frac{yzdx}{2}$ à la place de y & de z, leurs valeurs $\frac{ax - xx}{\sqrt{\frac{ax}{2}}}$, & $\frac{acx - cxx}{b\sqrt{\frac{ax}{2}}}$, on aura $\frac{aacxdx - 2acxxdx + cx^3dx}{ab}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{acxx}{2b} - \frac{2cx^3}{3b} + \frac{cx^4}{4ab}$ est égale au solide AMNRP, & l'on aura $\frac{a^3c}{2b} - \frac{2a^3c}{3b} + \frac{a^3c}{4b}$, ou $\frac{a^3c}{12b}$ pour la valeur du solide X, parce que P devenant B, x devient a.

PROBLEME XLVII.

Trouver la valeur du ſolide formé par la révolution du même eſpace ADB autour de la tangente AK (*Fig.* 141.)

Ayant tiré deux ordonnées MP, *mp*, infiniment près l'une de l'autre, elles décriront en tournant des ſurfaces cylindriques qui ſeront des elemens de ce ſolide ; ainſi nommant les données AB (*a*), la circonférence BTC (*c*), & les indéterminées AP (*x*), MP (*y*), la circonférence PRI (*z*), P*p* ſera *dx*, & *yzdx* ſera la différentielle du ſolide formé par la révolution de l'eſpace AMP autour de AK, mais l'équation de la courbe ADB eſt $y = \frac{ax - xx}{\frac{\sqrt{ax}}{2}}$, & $z.\,c :: x.\,a$, donc $z = \frac{cx}{a}$, mettant ces valeurs de *y* & de *z* dans la différentielle *yzdx*, on aura $\frac{cx^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{\frac{a}{2}}} - \frac{cx^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{\frac{a^3}{2}}}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale qui eſt $\frac{2c}{5}\sqrt{\frac{2x^5}{a}} - \frac{2c}{7}\sqrt{\frac{2x^7}{a^3}}$, eſt égale au ſolide formé par la révolution de l'eſpace AMP autour de AK, & l'on aura $\frac{2aac\sqrt{2}}{5} - \frac{2aac\sqrt{2}}{7}$, ou $\frac{4aac\sqrt{2}}{35}$ pour la valeur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace ADB autour de AK, parce que P devenant B, *x* devient *a*.

PROBLEME XLVIII.

Trouver la valeur du ſolide formé par la révolution du même eſpace ADB autour d'une ligne BI perpendiculaire ſur AB (*Fig.* 142.)

Ayant tiré deux ordonnées MP, *mp*, infiniment près l'une de l'autre, & nommant les données AB (*a*), la circonférence AKG (*c*), & les indéterminées AP (*x*), MP (*y*), la circonférence PNR (*z*), P*p* ſera *dx*, & l'on aura *yzdx* égal à la différentielle du ſolide formé par la révolution de l'eſpace AMP autour de BI, mais l'équation de la courbe ADB eſt $y =$

$\frac{ax - xx}{\frac{\sqrt{2a}}{2}}$, & $z. c :: a - x. a$; donc $z = c - \frac{cx}{a}$, mettant ces valeurs de y & de z dans la différentielle $yzdx$, l'on aura $c\sqrt{2ax}\,dx - 2c\sqrt{\frac{2x^3}{a}}\,dx + c\sqrt{\frac{2x^5}{a^3}}\,dx$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale qui est $\frac{2c}{3}\sqrt{2ax^3} - \frac{4c}{5}\sqrt{\frac{2x^5}{a}} + \frac{2c}{7}\sqrt{\frac{2x^7}{a^3}}$ est égale au solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de BK, & l'on aura $\frac{2aac\sqrt{2}}{3} - \frac{4aac\sqrt{2}}{5} + \frac{2aac\sqrt{2}}{3}$, ou $\frac{16aac\sqrt{2}}{105}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ADB autour de BI, parce que P devenant B, x devient a.

DEFINITION.

Ayant décrit une parabole BCM (*Fig.* 143.) dont BC soit ordonnée à l'axe, & tiré autant de diametres MP, MP, DG, que l'on voudra faisant BP$\times$MP. BD$\times$GD :: PR. DF la courbe qui passera par les points R, R, F sera une parabole elliptique qui aura cette proprieté que PR. DF :: $\overline{BP}^2\times$CP. $\overline{BD}^2\times$CD; car par la construction PR. DF :: BP$\times$MP. BD$\times$GD, prenant à la place de MP & DG les rectangles BP$\times$CP, & BD$\times$CD qui sont en même raison, on aura PR. DF :: $\overline{BP}^2\times$CP. $\overline{BD}^2\times$CD.

La plus grande ordonnée DF fait BD $= \frac{2BC}{3}$, ce qui est facile à prouver.

PROBLEME XLIX.

Trouver la valeur de l'espace renfermé entre AB, & la courbe ADC (*Fig.* 144.)

Ayant tiré sa plus grande ordonnée CD & deux autres MP, *mp*, infiniment près l'une de l'autre, nommant les données AB (a), AC sera $\frac{2a}{3}$, & BC ($\frac{a}{3}$); CD (b), & les indéferminées AP (x), MP (y), Pp sera dx, & ydx sera la différentielle de l'espace AMP, mais par la proprieté de la courbe $y . b :: axx - x^3 . \frac{4a^3}{27}$, donc $y = \frac{27abxx - 27bx^3}{4a^3}$, mettant cette valeur de y dans la différentielle ydx, l'on aura $\frac{27abxxdx - 27bx^3dx}{4a^3}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{9bx^3}{4aa} - \frac{27bx^4}{16a^3}$ est égale à l'espace AMP, & l'on aura $\frac{9ab}{4} - \frac{27ab}{16}$, ou $\frac{9ab}{16}$ pour la valeur de l'espace ADB, parce que P devenant B, x devient a.

PROBLEME L.

Trouver la valeur du solide W formé par la révolution de l'espace ADB autour de AB (*Fig.* 145.)

Ayant tiré la plus grande ordonnée CD, & deux autres MP, mp, infiniment près l'une de l'autre, elles décriront en tournant des cercles qui seront des élemens de ce solide, ainsi nommant les données AB (a), BC sera $\frac{2a}{3}$, & AC ($\frac{a}{3}$) CD (b), la circonférence DGF (c), & les indéterminées BP (x), MP (y), la circonférence MRN (z), Pp sera dx, & $\frac{yzdx}{2}$ sera la différentielle du solide AMNRP, mais par la proprieté de la courbe, $y . b :: axx - x^3 . \frac{4a^3}{27}$, donc $y = \frac{27abxx - 27bx^3}{4a^3}$, & $z . c :: y . a$; donc $z = \frac{cy}{a} = \frac{27abcxx - 27bcx^3}{4a^4}$ (en prenant pour y sa valeur $\frac{27abxx - 27bx^3}{4a^3}$), mettant donc la différentielle $\frac{yzdx}{2}$ à la place de y & de z leurs valeurs $\frac{27abxx - 27bx^3}{4a^3}$ & $\frac{27abcxx - 27abcx^3}{4a^4}$, on aura $\frac{729aabbcx^4dx - 1458abbcx^5dx}{32a^7} +$ $+ \frac{729bbcx^6dx}{32a^7}$ égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{729bbcx^5}{160a^5} - \frac{729bbcx^6}{96a^6} + \frac{729bbcx^7}{224a^7}$; est égale au solide AMNRP, & l'on aura $\frac{729bbc}{160} - \frac{729bbc}{96} + \frac{729bbc}{224}$, ou $\frac{243bbc}{1120}$

pour la valeur du solide W, parce que P devenant B, x devient a.

PROBLEME LI.

Trouver la valeur du solide formé par la révolution du même espace ADB autour d'une ligne BV perpendiculaire sur AB (*Fig.* 146.)

Ayant tiré la plus grande ordonnée CD, & deux autres MP, mp, infiniment près l'une de l'autre, elles décriront en tournant des surfaces cylindriques qui seront des elemens de ce solide; ainsi nommant les données AB (a), CD (b), la circonférence AEF(c), AC sera ($\frac{2a}{3}$), & BC ($\frac{a}{3}$), & les indéterminées AP (x), MP (y), la circonférence PIR (z), Pp sera (dx), & $yzdx$ sera la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de BV, mais $y.\ b :: axx - x^3.\ \frac{4a^3}{27}$, donc $y = \frac{27abxx - 27bx^3}{4a^3}$, & $z.\ c :: a - x.\ a$; donc $z = c - \frac{cx}{a}$, mettant ces valeurs de y & de z dans la différentielle $yzdx$, l'on aura $\frac{27abcxxdx - 54bcx^3dx}{4a^3} + \frac{27bcx^4dx}{4a^4}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{9bcx^3}{4aa} - \frac{54bcx^4}{16a^3}$ $\frac{27bcx^5}{20a^4}$ est égale au solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de BV, & l'on aura $\frac{9abc}{4} - \frac{54abc}{16a^3} + \frac{27abc}{20}$, ou $\frac{9abc}{40}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ADB autour de BV, parce que P devenant B, x devient a.

REMARQUE.

La valeur du cylindre qui auroit même base & même hauteur que ce solide seroit $\frac{abc}{2}$, mais $\frac{9abc}{40}$ est la valeur de ce solide; donc ce solide est les $\frac{9}{20}$ du cylindre.

PROBLEME LII.

Trouver la valeur du solide formé par la révolution du même espace ADB autour d'une ligne AK perpendiculaire à AB (*Fig.* 147.)

Ayant

Ayant tiré la plus grande ordonnée CD, & deux autres MP, *mp*, infiniment près l'une de l'autre, elles décriront en tournant des surfaces cylindriques qui seront des élemens de ce solide ; ainsi nommant les données AB (a), CD (b) la circonférence BTF (c), AC sera $\frac{2a}{3}$, BC ($\frac{a}{3}$), & les indéterminées AP (x), MP (y), la circonférence POR, z, Pp sera dx, & $yzdx$ sera la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de AK ; mais $y. b :: axx - x^3. \frac{4a^3}{27}$, donc $y = \frac{27abxx - 27bx^3}{4a^3}$, & $z. c :: x. a$; donc $z = \frac{cx}{a}$. Mettant ces valeurs de y & de z dans la différentielle $yzdx$, l'on aura $\frac{27abcx^3dx - 27bcx^4dx}{4a^4}$ égal à cette même différentielle, dont l'intégrale $\frac{27bcx^4}{16a^4} - \frac{27bcx^5}{20a^4}$ est égale au solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de AK, & l'on aura $\frac{27abc}{16} - \frac{27abc}{20}$, ou $\frac{27abc}{80}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ADB autour de AK, parce que P devenant B, x devient a.

REMARQUE.

La valeur du cylindre de même base & de même hauteur que ce solide est $\frac{abc}{2}$, mais $\frac{27abc}{80}$ est la valeur de ce solide ; donc ce solide est $\frac{27}{40}$ du cylindre.

PROBLEME LIII.

Trouver la valeur du solide formé par la révolution du même espace ADB autour de la tangente KV paralelle à AB (*Fig.* 148.)

Ayant tiré du point touchant D l'ordonnée CD, elle sera la plus grande ; tirant aussi deux autres ordonnées MP, *mp*, infiniment près l'une de l'autre & que je prolonge en I & *i*, elles décriront en tournant des couronnes circulaires qui seront des élemens de ce solide ; ainsi nommant les données AB (a), CD (b), la circonférence CXE, ou PSR (c), AC sera $(\frac{2a}{3})$, BC $(\frac{a}{3})$, & les indéterminées AP (x), MP (y), la circonférence MTN (z), MI sera $(b-y)$, Pp sera dx, $\frac{cy+zy}{2}$ sera égale à la couronne circulaire décrite par MP, qui étant multipliée par dx, donnera $\frac{cydx+zydx}{2}$ égale à la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de KV, mais $y.\,b :: axx - x^3.\,\frac{4a^3}{27}$, donc $y = \frac{27abxx-27bx^3}{4a^3}$, & $z.\,c :: b-y.\,b$; donc $z = c - \frac{cy}{b} = c - \frac{27acxx-27cx^3}{4a^3}$ en prenant pour y sa valeur $\frac{27abxx-27bx^3}{4a^3}$, mettant donc dans la différentielle $\frac{cydx+zydx}{2}$ à la place de y & de z leurs valeurs $\frac{27abxx-27bx^3}{4a^3}$ & $c - \frac{27acxx+27cx^3}{4a^3}$, l'on aura $\frac{54abcxxdx-54bcx^3dx}{8a^3} - \frac{729aabcx^4dx+1458abcx^5dx}{32a^6} - \frac{729bcx^6dx}{32a^6}$ égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{9bcx^3}{4aa} - \frac{54bcx^4}{32a^3} - \frac{729bcx^5}{160a^4} + \frac{1458bcx^6}{192a^5} - \frac{729bcx^7}{224a^6}$, est égale au solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de KV, & l'on aura $\frac{9abc}{4} - \frac{54abc}{32} - \frac{729abc}{160} + \frac{1458abc}{192} - \frac{729abc}{224}$, ou $\frac{387abc}{1120}$ pour la valeur du solide formé par la révolution de l'espace ADB autour de KV, parce que P devenant B, x devient a.

REMARQUE.

Comme $\frac{abc}{2}$ est la valeur du cylindre BF, le solide formé par la révolution de l'espace ADB autour de KV est à ce cylindre comme $\frac{387abc}{1120}$ est à $\frac{abc}{2}$, ou comme 387 est à 560.

PROBLEME LIV.

Trouver la valeur du solide infini, formé par la révolution de l'espace infini renfermé entre la cyssoïde AMZ sa base AB, & son asymptote BH autour de BH. (*Fig.* 149.)

Ayant décrit son demi-cercle generateur AGB & tiré deux ordonnées quelconques MP, *mp*, infiniment près l'une de l'autre, puis que l'on fasse tourner le demi-cercle AGB autour d'une ligne AY perpendiculaire sur AB, les parties NP, *np*, décriront en tournant autour de AY des surfaces cylindriques qui seront des élemens de l'anneau formé par la révolution du demi-cercle, & nommant les données AB (a), la demie circonférence AGB (c), & les indéterminées AP (x), la surface du cylindre NR (y), la surface du cylindre MV (z), Pp sera dx, ydx sera la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace APN, autour de BH, & zdx sera la différentielle du solide formé par la révolution de l'espace APM autour de AY; mais $y. z :: NP \times BP. MP \times AP$, & par la proprieté de la courbe AMZ, $NP \times BP = MP \times AP$; donc $y = z$; donc $ydx = zdx$, conséquemment le solide formé par la révolution de l'espace ANP autour de BH est égal au solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de AY; donc le solide infini sera égal à l'anneau, & comme acc est la valeur de l'anneau, c'est aussi celle du solide infini.

DEFINITION.

Ayant un triangle rectangle ABK, & autant de lignes droites TP, tp, TP, que l'on voudra paralelles à BK. Si l'on fait BP. AB :: TP. MP, & BP. AP :: TP. MP; ainsi de suite, la courbe qui passera par les points M, m, M, m, sera une cyssoïde qui aura cette proprieté que $MP \times BP = AP \times TP$; car par la construction BP. AP :: TP. MP; donc $BP \times MP = AP \times TP$. (*Fig.* 150.)

PROBLEME LV.

Trouver la valeur du solide infini formé par la révolution de l'espace infini renfermé entre la cyssoïde AY, sa base AB, & son asymptote BK autour de BK. (*Fig.* 151).

Ayant tiré deux lignes TP, tp, infiniment près l'une de l'autre, & fait tourner le triangle ABK autour de AZ perpendiculaire sur AB, les parties MP, mp décriront en tournant des ſurfaces cylindriques qui ſeront des elemens du ſolide formé par la révolution de l'eſpace AMP autour de BK; & les lignes TP, *tp*, décriront en tournant des ſurfaces cylindriques qui ſeront des elemens du ſolide formé par la révolution de l'eſpace ATP autour de AZ; ainſi nommant les données AB (a), BK (b), la circonférence BFC (c), & les indéterminées AP (x), la ſurface cylindrique MR (y), la ſurface cylindrique TS (z), Pp ſera (dx), ydx ſera la différentielle du ſolide formé par la révolution de l'eſpace AMP autour de BK, & zdx ſera la différentielle du ſolide formé par la révolution de l'eſpace ATP autour de AZ, mais $y.\ z ::$ MP × BP. TP × AP, & par la proprieté de la courbe AY, MP × BP = TP × AP, donc $y = z$; donc $ydx = zdx$, donc le ſolide formé par la révolution de l'eſpace AMP autour de BK, & le ſolide formé par la révolution de l'eſpace ATP autour de AZ ſont égaux, puiſque leurs différences ſont égales; donc le ſolide infini ſera égal au ſolide formé par la révolution du triangle ABK autour de AZ; mais la valeur de celui-ci eſt $\frac{abc}{3}$, donc $\frac{abc}{3}$ ſera auſſi la valeur de celui-là.

PROBLEME LVI.

Soient les deux demies ellipſes paraboliques ACB, ADB, ſe joignant en AB en ſens contraire. Si l'on tire des lignes droites MN, *mn*, perpendiculaires à AB, & que l'on imagine autant de cercles MRN, *mrn*, dont MN, *mn*, ſoient les diamétres, trouver la valeur du ſolide que compoſent tous ces cercles. (*Fig.* 152.)

Ayant diviſé AB en deux également en I par la perpendiculaire FIH, & nommant AB (a), FH (b), la circonférence FGH (c), (p) le parametre, & les indéterminées AP (x), MN (y), la circonférence MRN (z), Pp ſera dx, & $\frac{yzdx}{4}$ ſera la différentielle de la portion AMRNP; or $z.\ c :: y.\ b$ donc $z = \frac{cy}{b}$, mais par la proprieté de ces courbes MP $= \frac{axx - x^3}{pp}$, & PN $= \frac{aax - 2axx + x^3}{pp}$; donc MP + PN, ou y

$= \frac{aax - axx}{pp}$, & $z = \frac{aacx - acxx}{bpp}$; mettant ces valeurs de z & de y dans la différentielle $\frac{yzdx}{4}$, on aura $\frac{a^4cxxdx - 2a^3cx^3dx + aacx^4dx}{4bp^4}$ égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{a^4cx^3}{12bp^4} - \frac{a^3cx^4}{8bp^4} + \frac{aacx^5}{20bp^4}$ eſt égale à la portion AMNRP, & l'on aura $\frac{a^7c}{120bp^4}$, ou $\frac{2abc}{15}$ (en prenant pour $\frac{a^6}{16p^4}$ ſa valeur bb) pour la valeur du ſolide AFBHG, parce que P devenant B, x devient a.

Cochin filius inv. et Sculp.

APPLICATION
DE LA
GEOMETRIE ORDINAIRE,
ET
DES CALCULS
DIFFERENTIEL ET INTEGRAL,
A LA RESOLUTION DE PLUSIEURS PROBLEMES.

SECTION QUATRIEME.

LEMME XXIX.

SOIENT les rectangles CD, FG, IH, qui décroissent dans un rapport quelconque, & dont la base C*k* soit paralelle à une ligne donnée AB ; supposant que les points K, T, S, soient les centres de gravité de ces trois rectangles, & que E soit le centre de gravité de la figure CH, je dis que tirant les perpendiculaires MK, TP, OE, RS, la somme des produits de chacun de ces rectangles multiplié par sa perpendiculaire prise depuis son centre de gravité jusqu'à la ligne AB, est égale au produit de la figure CH multipliée par la perpendiculaire OE prise depuis le centre de gravité de cette figure jusqu'à la ligne AB. (*Fig.* 153.)

DEMONSTRATION.

Supposant que le point L soit le centre de gravité de la figure CG, & que l'on tire NL, perpendiculaire sur AB, puis la droite LS, le point E se trouvera dans cette ligne; car S étant le centre de pesanteur du rectangle IH, & L le centre de pesanteur de la figure GG; si l'on divise LS en deux parties réciproquement proportionnelles au rectangle IH, & à la figure CG, le point de division sera le centre de pesanteur de la figure CH; donc E centre de pesanteur de la figure CH est dans la ligne LS; tirant ensuite les perpendiculaires LV, EX, TY, SZ, sur les lignes MK, NL, OE, TP, & nommant les rectangles CD (A), FG (B), IH (C), MK (d), NL (f), TP (g), OE (h), RS (i), KV sera $d-f$, LX sera $f-h$, LY $f-g$, EZ $h-i$, & l'on aura $A.\ B ::$ TL. KL; mais à cause des triangles semblables TLV, KLV, TL. KL :: LY ($f-g$). KV ($d-f$); donc $A.\ B :: f-g.\ d-f$, & en composant $A+B.\ B :: d-g.\ d-f$; donc $d-f=\frac{Bd-Bg}{A+B}$, & $f=d-\frac{Bd+Bg}{A+B}=\frac{Ad+Bg}{A+B}$, donc $\overline{A+B}\times f=Ad+Bg$, ou CG × NL = CD × MK + FG × TP; je dis ensuite que $A+B.\ C ::$ ES. EL; or à cause des triangles semblables ESZ, LEX, ES. EL :: EZ ($h-i$), LY ($f-h$); donc $A+B.\ C :: h-i.\ f-h$, & en composant $A+B+C.\ C :: f-i.\ f-h$, donc $f-h=\frac{Cf-Ci}{A+B+C}$, & $h=f-\frac{Cf+Ci}{A+B+C}$ $=\frac{Af+Bf+Ci}{A+B+C}$, conséquemment $\overline{A+B+C}\times h=\overline{A+B}\times f+Ci$, mais on a prouvé $\overline{A+B}\times f=Ad+Bg$; donc $\overline{A+B+C}\times h=Ad+Bg+Ci$, ou CH × OE = CD ×

MK + FG × TP + IH × RS, c'eſt-à-dire que la ſomme des produits de chacun de ces rectangles par la perpendiculaire priſe depuis ſon centre de gravité juſqu'à la ligne AB, eſt égale au produit de toute la figure CH par la perpendiculaire priſe depuis ſon centre de gravité E, juſqu'à la même ligne AB. *C. q. f. p.*

REMARQUE.

Si l'on tire une ligne Bk perpendiculaire à AB, & que des centres de gravité de ces rectangles on mene ſur Bk les perpendiculaires K*m*, T*p*, S*r*, & du centre de gravité E de la figure CH, la perpendiculaire E*o*, on prouveroit de même que la ſomme des produits de chacun de ces rectangles par ſa perpendiculaire eſt égale au produit de la figure CH par ſa perpendiculaire.

DEFINITION PREMIERE.

Chaque rectangle CD, FG, IH, eſt appellé poids (*Fig.* 153.)

DEFINITION II.

Le produit de chaque rectangle CD, FG, IH, par ſa perpendiculaire KM, TP, SR, eſt appellé *premier moment.*

DEFINITION III.

Le produit de chaque rectangle CD, FG, IH, par ſa perpendiculaire K*m*, T*p*, S*r*, eſt appellé *ſecond moment.*

DEFINITION IV.

La perpendiculaire EO eſt appellée *premier bras.*

DEFINITION V.

La perpendiculaire E*o* eſt appellée *ſecond bras.*

COROLLAIRE.

Il ſuit du Lemme, de la Remarque, & de ces définitions que ſi l'on diviſe la ſomme des premiers momens par la figure

gure CH qui est la somme des poids, on aura au quotient le premier bras EO ; & si l'on divise la somme des seconds momens par la même figure CH, ou la somme des poids, on aura au quotient le second bras E*o*.

COROLLAIRE.

D'où je tire la *Regle pour trouver le centre de gravité d'une figure quelconque connue.*

Il faut trouver les deux bras, leur point d'intersection sera le centre de gravité de la figure.

Si la figure est réguliere, il suffira de déterminer la longueur de son premier bras.

APPLICATION DE LA REGLE SUR UNE FIGURE IRREGULIERE.

PROBLEME I.

Trouver le centre de pesanteur d'une demie parabole ABC. (*Fig.* 154.)

Ayant tiré du sommet A une ligne AS paralelle à l'ordonnée BC, puis une ordonnée quelconque MP, & une autre *mp*, infiniment près de MP, ensuite la petite perpendiculaire MR, qui formera le rectangle RP. Si l'on imagine l'espace AMP composé d'une infinité de semblables rectangles RP, RP, &c. dont les points O, O, &c. soient les centres de gravité, & que l'on tire de ces points les perpendiculaires OS, OS, OI, OI, sur les lignes AS, AC ; nommant les données AC (a), BC (b), (p) le parametre, & les indéterminées AP (x), MP (y), Pp sera dx, & ydx sera la valeur du rectangle infiniment petit RP, qui étant multiplié par OS, (x) donnera $xydx$ égal au premier moment du rectangle RP, & sera la différentielle des premiers momens de l'espace indéterminé AMP ; mais par la proprieté de la parabole $yy=px$; donc $y=\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}$; mettant cette valeur de y dans la différentielle $xydx$, on aura $\sqrt{p}x^{\frac{3}{2}}dx$, égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{2\sqrt{px^5}}{5}$, ou $\frac{2xxy}{5}$ (en prenant pour $\sqrt{px}$ sa valeur y) est égale à la somme des premiers momens ; divisant cette somme par celle des poids, c'est-à-dire par l'espace AMP, ($\frac{2xy}{3}$) on aura $\frac{3x}{5}$ pour le premier bras, supposant que $AH = \frac{3x}{5}$, je tire HL*L* paralelle à BC.

Je dis ensuite que $\frac{yydx}{2}$ sera égal au second moment du rectangle RP, & sera la différentielle des seconds momens de l'espace indéterminé AMP, or $yy = px$, donc $\frac{yydx}{2} = \frac{pxdx}{2}$ dont l'intégrale $\frac{pxx}{4}$, ou $\frac{xyy}{4}$ (en prenant pour px sa valeur yy) est égale à la somme des seconds momens qui étant divisée par celle des poids $\frac{2xy}{3}$ donne au quotient $\frac{3y}{8}$ pour le second bras ; faisant $HL = \frac{3y}{8}$, le point L est le centre de gravité de l'espace AMP ; car tirant LK paralelle à AC, on aura LK = AH qui est la valeur du premier bras, & LH est la valeur du second ; donc par la regle le point L est le centre de gravité de l'espace AMP, & l'on aura $\frac{3a}{5}$ pour le premier bras de la demie parabole ABC, & $\frac{3b}{8}$ pour le second. Ainsi faisant AV = $\frac{3}{5}$ de AC, & tirant VX paralelle à BC, si l'on fait VZ = $\frac{3}{8}$ de BC, Z sera le centre de gravité de la demie-parabole ABC, puisque tirant YZ paralelle à AC, YZ sera le premier bras, & VZ le second.

Application de la Regle sur une Figure reguliere.

PROBLEME II.

Trouver le centre de pesanteur de la parabole ABD, dont l'axe est AC, & BD ordonnée à l'axe. (*Fig.* 155.)

Ayant tiré deux ordonnées MP, *mp* infiniment près l'une de l'autre, puis les petites perpendiculaires MR, P*r*, nommant les données AC (a) BC (b) (p) le paramétre & les indéterminées AN (x) MN (y) N*n* sera dx, & $2ydx$ sera égal au rectangle RP, qui étant multiplié par la ligne AO prise depuis son centre de gravité O jusqu'au sommet A, c'est-à-dire par x, donnera $2xydx$ pour le premier moment de ce rectangle & la différentielle des premiers momens de l'espace indéterminée AMP : mais par la proprieté de la parabole $yy=px$; donc $y=\sqrt{px}$, mettant cette valeur de y, dans la différentielle $2xydx$, on aura $2\sqrt{p}\,x^{\frac{3}{2}}dx$, égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{4\sqrt{px^5}}{5}$, ou $\frac{4xxy}{5}$ (en prenant pour $\sqrt{px}$ sa valeur y) est égale à la somme des premiers momens, qui étant divisée par celle des poids qui est l'espace AMP ($\frac{4xy}{3}$) donnera $\frac{3x}{5}$ pour le premier bras de l'espace AMP, & comme le centre de gravité de cet espace est dans l'axe, si l'on prend la partie AV $=\frac{3x}{5}$, le point V sera le centre de gravité; & si l'on fait AY $=\frac{3}{5}$ de AC, le point Y sera le centre de gravité de la parabole ABD.

PROBLEME III.

Trouver le centre de pesanteur de l'espace renfermé entre les deux demies-paraboles elliptiques ADB, AEB. (*Fig.* 156.)

Ayant tiré deux ordonnées MP, *mp*, infiniment près l'une de l'autre, puis les petites perpendiculaires MR, P*r*, & nommant la donnée AB (a) p le paramétre, & les indéterminées AN (x) MN (y) MP sera $2y$, N*n* (dx) & $2ydx$ sera égal au rectangle infiniment petit RP, qui étant multiplié par la partie AO (x) prise depuis le centre de gravité O du rectangle jusqu'au sommet A, donnera $2xydx$ pour la différentielle des premiers momens. Mais par la proprieté de la courbe ADB

$y = \frac{axx - x^3}{pp}$; si l'on met cette valeur de y dans la différentielle $2xydx$, l'on aura $\frac{2ax^3dx - 2x^4dx}{pp}$ égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{ax^4}{2pp} - \frac{2x^5}{5pp}$ est égale à la somme des momens qui étant divisée par celle des poids, ou l'intégrale de $2ydx$ ou de $\frac{2axxdx - 2x^3dx}{pp}$ (en prenant pour y sa valeur $\frac{axx - x^3}{pp}$, c'est-à-dire par $\frac{2ax^3}{3pp} - \frac{x^4}{2pp}$, on aura $\frac{15ax - 12xx}{20a - 15x}$ pour le premier bras, c'est-à-dire pour la distance du point A au centre de gravité de l'espace AMP, & l'on aura $\frac{3a}{5}$ pour le premier bras de l'espace ADBE, parce que N devenant B, x devient a.

PROBLEME IV.

Trouver le centre de pesanteur de l'espace renfermé entre la demie-parabole elliptique ADB, & la ligne AB. (*Fig.* 157.)

Ayant tiré deux ordonnées MP, mp, infiniment près l'une de l'autre, puis la petite perpendiculaire MR, ensuite la ligne AS perpendiculaire à AB, & du centre de gravité O du rectangle RP, les lignes OS, OI, perpendiculaires sur AS, AB; nommant la donnée AB (a) p le paramétre, & les indéterminées AP ou OS (x) MP (y) OI sera ($\frac{y}{2}$) Pp (dx) & $xydx$ sera la différentielle des momens, mais par la proprieté de la courbe ADB $y = \frac{axx - x^3}{pp}$, mettant cette valeur de y dans la différentielle $xydx$, l'on aura $\frac{ax^3dx - x^4dx}{pp}$ égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{ax^4}{4pp} - \frac{x^5}{5pp}$ est égale à la somme des premiers momens qui étant divisée par celle des poids ou l'intégrale de ydx ou de $\frac{axxdx - x^3dx}{pp}$ (en prenant pour y sa valeur $\frac{axx-x^3}{pp}$) c'est-à-dire par $\frac{ax^3}{3pp}-\frac{x^4}{4pp}$ on aura $\frac{15ax-12xx}{20a-15x}$ pour le premier bras, & supposant que $AH=\frac{15ax-12xx}{20a-15x}$, si l'on tire Hh paralelle à MP, le centre de gravité de l'espace AMP, se trouvera dans cette ligne pour le déterminer, je dis que $\frac{yydx}{2}$ est égale à la différentielle des seconds momens; mais $y=\frac{axx-x^3}{pp}$, donc $yy=\frac{aax^4-2ax^5+x^6}{p^4}$; mettant cette valeur de yy dans la différentielle $\frac{yydx}{2}$, on aura $\frac{aax^4dx-2ax^5dx+x^6dx}{2p^4}$ égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{aax^5}{10p^4}-\frac{ax^6}{6p^4}+\frac{x^7}{14p^4}$ sera égale à la somme des seconds momens qui étant divisée par celle des poids $\frac{ax^3}{3pp}-\frac{x^4}{4pp}$ donnera $\frac{1008aaxx-1680ax^3+720x^4}{336app-252ppx}$ pour le second bras, faisant HL $=\frac{1008aaxx-1680ax^3+720x^4}{3360app-2520ppx}$, le point L est le centre de pesanteur de l'espace AMP; car tirant LK paralelle à AB, LK $=$ AH, sera la valeur du premier bras, & HL celle du second; donc par la regle, L est le centre de pesanteur de l'espace AMP, & comme P devenant B, x devient a, le premier bras LK $\frac{15ax-12xx}{20a-15x}$ deviendra $\frac{3a}{5}$ pour la valeur du premier bras de l'espace ADB, & HL $\frac{1008aaxx-1680ax^3+720x^4}{336app-252ppx}$ deviendra $\frac{2a^3}{35pp}$ pour le second bras de l'espace ADB; ainsi faisant AV égale à $\frac{3}{5}$ de AB, je mene l'ordonnée VX; & faisant $VZ=\frac{2a^3}{35pp}$, Z est le centre de pesanteur de l'espace ADB, puisque tirant Zk paralelle à AB, $Zk=$ AV sera égale au premier bras, & VZ au second.

PROBLEME V.

Trouver le centre de pesanteur de l'espace renfermé entre les deux demie-ellipses secondes ADB, AFB. (*Fig.* 158.)

Ayant tiré deux ordonnées MP, *mp*, infiniment près l'une de l'autre, puis les petites perpendiculaires MR, P*r*, & nommé la donnée AB (a) & les indéterminées AN (x) MN (y), N*n* sera dx, & $2ydx$ la différentielle des poids, qui étant multipliée par x donnera $2xydx$ pour le premier moment du rectangle RP & la différentielle des premiers momens. Mais l'équation de la courbe ADB est $y = \frac{ax - xx}{\sqrt{\frac{ax}{2}}} = \sqrt{2ax} - \frac{\sqrt{2x^3}}{a}$, mettant cette valeur de y dans la différentielle $2xydx$, on aura $2\sqrt{2a}x^{\frac{3}{2}}dx - 2\sqrt{\frac{2}{a}}x^{\frac{5}{2}}dx$ égale à cette même différentielle, dont l'intégrale $\frac{4\sqrt{2ax^5}}{5} - \frac{\frac{4\sqrt{2x^7}}{a}}{7}$ est égale à la somme des premiers momens, qui étant divisée par celle des poids $\frac{4}{3}\sqrt{2ax^3} - \frac{4}{5}\frac{\sqrt{2x^5}}{a}$ donnera $\frac{84\sqrt{2axx} - 60\frac{\sqrt{2x^4}}{a}}{140\sqrt{2a} - 84\frac{\sqrt{2xx}}{a}}$ pour le premier bras de l'espace AMP; & comme le centre de gravité se trouve dans la ligne AN, si l'on fait la partie $AV = \frac{84\sqrt{2axx} - 60\frac{\sqrt{2x^4}}{a}}{140\sqrt{2a} - 84\frac{\sqrt{2xx}}{a}}$; V sera le centre de gravité de l'espace AMP, & l'on aura $\frac{6a}{14}$ ou $\frac{3a}{7}$ pour le premier bras de l'espace ADBF, c'est-à-dire pour la distance du point A au centre de pesanteur de cet espace, parce que N devenant B, x devient a.

PROBLEME VI.

Trouver le centre de pesanteur de l'espace ADB renfermé entre la demie-ellipse seconde ADB, & la ligne AB. (*Fig.* 159.)

Ayant tiré du point A la tangente AS, puis deux ordonnées quelconques MP, *mp*, infiniment près l'une de l'autre, & la petite perpendiculaire MR, ensuite du centre de gravité O du rectangle RP, les lignes OS, OI, perpendiculaires à AS, AB, & nommé la donnée AB (a) & les indéterminées AP (x) MP (y) Pp sera dx, & ydx la différentielle des poids qui étant multipliée par OS (x) donnera $xydx$ égal au premier moment du rectangle & la différentielle des premiers momens ; mais l'équation de la courbe est $y = \frac{ax - xx}{\sqrt{\frac{ax}{2}}} = \sqrt{2ax} - \frac{\sqrt{2x^3}}{a}$, mettant cette valeur de y dans la différentielle $xydx$, on aura $\sqrt{2a}\,x^{\frac{3}{2}}dx - \sqrt{\frac{2}{a}}\,x^{\frac{5}{2}}dx$ égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{2\sqrt{2ax^5}}{5} - \frac{2}{7}\frac{\sqrt{2x^7}}{a}$ est égale à la somme des premiers momens, qui etant divisée par celle des poids $\frac{2}{3}\sqrt{2ax^3} - \frac{2}{5}\frac{\sqrt{2x^5}}{a}$ donnera $\frac{42\sqrt{2axx} - 30\sqrt{\frac{2x^4}{a}}}{70\sqrt{2a} - 42\sqrt{\frac{2xx}{a}}}$ pour le premier bras de l'espace AMP ; ainsi faisant AH égale à $\frac{42\sqrt{2axx} - 30\sqrt{\frac{2x^4}{a}}}{70\sqrt{2a} - 42\sqrt{\frac{2x}{a}}}$, & tirant H$k$ paralelle à AS, le centre de gravité de l'espace AMP, se trouvera dans cette ligne Hk.

Pour trouver le second bras, je dis que $\frac{yydx}{2}$ est égal au second moment du rectangle RP, & sera la différentielle des seconds momens ; or $y = \frac{ax - xx}{\sqrt{\frac{ax}{2}}}$; donc $yy = \frac{2aax - 4axx + 2x^3}{a}$; mettant cette valeur de yy, dans la différentielle $\frac{yydx}{2}$, on aura $\frac{aaxdx - 2axxdx + x^3dx}{a}$ égale à cette même différentielle, dont l'intégrale $\frac{axx}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4a}$ eſt égale à la ſomme des ſeconds momens, & diviſant cette ſomme par celle des poids $\frac{2}{3}\sqrt{2ax^3} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2x^5}{a}}$, le quotient ſera $\frac{60axx - 80ax^3 + 30x^4}{80\sqrt{2a^3x^3} - 48\sqrt{2ax^5}}$ pour le ſecond bras; ainſi faiſant HL $= \frac{60axx - 80ax^3 + 30x^4}{80\sqrt{2a^3x^3} - 48\sqrt{2ax^5}}$, le point L ſera le centre de gravité de l'eſpace AMP, puiſque tirant LK paralelle à AB, LK qui eſt égale à AH ſera égale au premier bras, & HL au ſecond, & l'on aura $\frac{3a}{7}$ pour le premier bras de l'eſpace ADB, & $\frac{5a\sqrt{2}}{16}$ pour ſon ſecond bras, parce que P, devenant B, x devient a; ainſi faiſant AV égale à $\frac{3}{7}$ de AB, & tirant VE paralelle à AS, ſi l'on fait VX $= \frac{5a}{16\sqrt{2}}$, X ſera le centre de gravité de l'eſpace ADB, puis tirant XY paralelle à AB, XY qui eſt égale à AV ſera le premier bras, & VX le ſecond.

PROBLEME VII.

Trouver le centre de peſanteur de l'eſpace renfermé entre la courbe AMBP, qui a cette proprieté que ſi l'on prolonge AB, & que l'on faſſe Aa = AB, puis que l'on tire une ordonnée quelconque MNP à AB, on a toujours cette équation MN $= \frac{AN \times BN \times aN}{\overline{AB}^2}$. (*Fig.* 160.)

Ayant tiré une autre ordonnée *mnp*, infiniment proche de MP, & les petites perpendiculaires MR, Pr, puis nommé la donnée AB ou Aa (a) & les indéterminées AN (x) MN (y) Nn ſera dx, & $2ydx$ ſera la différentielle des poids qui étant multipliée par x, donnera $2xydx$ pour la différentielle des premiers momens de l'eſpace AMP, mais par la proprieté de la courbe AMBP, $y = \frac{aax - x^3}{aa}$, mettant cette valeur de y dans la différentielle $2xydx$, on aura $\frac{2aaxxdx - 2x^4dx}{aa}$ égale à

cette

cette même différentielle, dont l'intégrale $\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^5}{5aa}$ est égale à la somme des premiers momens, qui étant divisée par celle des poids ou l'intégrale de $2ydx$ ou de $\frac{2aaxdx - 2x^3dx}{aa}$ (en prenant pour y sa valeur $\frac{aax - x^3}{aa}$) c'est-à-dire par $xx - \frac{x^4}{2aa}$ donnera $\frac{20aax - 12x^3}{30aa - 15xx}$ pour le premier bras de l'espace AMP; & supposant la partie $AV = \frac{20aax - 12x^3}{30aa - 15xx}$, V sera le centre de pesanteur de l'espace AMP, & l'on aura $\frac{8a}{15}$ pour le premier bras de l'espace AMBP, parce que N devenant B, x devient a, ainsi faisant $AL = \frac{8a}{15}$, L sera le centre de gravité de l'espace AMBP.

PROBLEME VIII.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême précédent, trouver le centre de pesanteur de l'espace AMB. (*Fig.* 160.)

Il faut remarquer que V étant le centre de pesanteur de l'espace indéterminé AMP, si l'on tire par ce point l'ordonnée XVZ le centre de pesanteur de l'espace AMN sera dans la ligne NX, ainsi AN sera le premier bras de l'espace AMN; il ne s'agit plus que de trouver le second. Pour cela, je dis que $\frac{yydx}{2}$ est égal au second moment du rectangle RN, & la différentielle des seconds momens, mais par la proprieté de la courbe AMBP, $y = \frac{aax - x^3}{aa}$; donc $yy = \frac{a^4xx - 2aax^4 + x^6}{a^4}$, mettant cette valeur de yy dans la différentielle $\frac{yydx}{2}$, l'on aura $\frac{a^4xxdx - 2aax^4 + x^6dx}{2a^4}$ égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{5aa} + \frac{x^7}{14a^4}$ est égale à la somme des momens de l'espace AMN, qui étant divisée par celle des poids xx

$-\frac{x^4}{2aa}$ donne $\frac{35a^4x - 42aax^3 + 15x^5}{210a^4 - 105aaxx}$ pour le ſecond bras de l'eſpace AMN; ainſi faiſant $VZ = \frac{35a^4x - 14aax^3 + 5x^5}{210a^4 - 105aaxx}$, Z ſera le centre de gravité de l'eſpace AMN, puiſque tirant une ligne AS perpendiculaire ſur AB; & du point K, la ligne KS paralelle à AB, KS étant égale à AN, ſera le premier bras, & VK le ſecond, & l'on aura $\frac{8a}{105}$ pour le ſecond bras de l'eſpace AMB, parce que N devenant B, x devient a; ainſi tirant Lk perpendiculaire à AB, & prenant $LI = \frac{8a}{105}$, I ſera le centre de gravité de l'eſpace AMB; puiſque tirant IO paralelle à AB, IO étant égale à AL ſera le premier bras, & LI le ſecond.

PROBLEME IX.

Trouver le centre de peſanteur de l'eſpace renfermé entre les courbes égales & ſemblables AMB, APD, (dont l'axe eſt Aa, c le centre, & BD une ordonnée à l'axe) qui ont cette proprieté que ſi l'on tire une ordonnée quelconque MNP à l'axe Aa, on a toujours $MN = \frac{AN \times CN \times aN}{\overline{Aa}^2}$. (*Fig.* 161.)

Ayant tiré une autre ordonnée mp infiniment proche de MP, puis les petites perpendiculaires MR, Pr, & nommé les données AG (a) AC (b) Aa ſera ($2b$) & les indéterminées AN (x) MN (y) Nn ſera dx, & $2ydx$ ſera la différentielle des poids qui étant multipliée par x donnera $2xydx$ pour le premier moment du rectangle RP, & la différentielle des premiers momens de l'eſpace AMP; mais par la proprieté de la courbe $y = \frac{x^3 + 3bxx + 2bbx}{4bb}$, mettant cette valeur de y dans la différentielle $2xydx$, l'on aura $\frac{x^4dx + 3bx^3dx + 2bbxxdx}{2bb}$ égal à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{x^5}{10bb} + \frac{3x^4}{8b} + \frac{x^3}{3}$ eſt égale à la ſomme des premiers momens, qui étant divisée par celle des poids ou l'intégrale de $2ydx$ ou de $\frac{x^3dx+3bxxdx+2bbxdx}{2bb}$ (en prenant pour y sa valeur $\frac{x^3+3bxx+2bbx}{4bb}$) c'est-à-dire par $\frac{x^4}{8bb}+\frac{x^3}{2b}+\frac{xx}{2}$ donnera $\frac{12x^3+45bxx+40bbx}{15xx+60bx+60bb}$ pour le premier bras de l'espace AMP; ainsi faisant la partie AV, $=\frac{12x^3+45bxx+40bbx}{15xx+60bx+60bb}$, V sera le centre de pesanteur de l'espace AMP, & l'on aura $\frac{12a^3+45aab+40abb}{15aa+60ab+60bb}$ pour le premier bras de l'espace ABD, parce que N devenant G, x devient a; ainsi faisant AL $=\frac{12a^3+45aab+40abb}{15aa+60ab+60bb}$, L sera le centre de gravité de l'espace ABD.

REMARQUE.

Si AG (a) = Aa $(2b)$ on aura $\frac{89a}{120}$ pour le premier bras de l'espace ABD, c'est-à-dire pour la distance du point A au centre de gravité.

PROBLEME X.

Ayant deux demies-paraboles ABC, BCD, dont les axes AC, CD soient égaux, trouver le centre de pesanteur de la figure ABD. (*Fig.* 162.)

Il est évident que le centre de pesanteur de cette figure est dans la ligne BC, & tirant deux lignes MP, mp, infiniment près l'une de l'autre & paralelles à AD, & nommant les données BC (b) p le parametre, & les indéterminées BN (x) MN (y) Nn sera (dx) & $2ydx$ sera la différentielle des poids de l'espace BMP; mais par le Lemme III. page 7. $y=\frac{2bx-xx}{p}$, mettant cette valeur de y dans la différentielle $2ydx$, l'on aura $\frac{4bxdx-2xxdx}{p}$ égale à cette même différentielle qui étant multipliée par x, donnera $\frac{4bxxdx-2x^3dx}{p}$ pour la différentielle des momens, dont l'intégrale $\frac{4bx^3}{3p} - \frac{x^4}{2p}$ eſt égale à la ſomme des momens, laquelle étant diviſée par celle des poids, ou l'intégrale de $\frac{4bxdx - 2xxdx}{p}$, c'eſt-à-dire par $\frac{2bxx}{p} - \frac{2x^3}{3p}$ donnera $\frac{8bx^3 - 3x^4}{12bxx - 4x^3}$ pour la diſtance du point B au centre de gravité de l'eſpace BMP, & l'on aura $\frac{5b}{8}$ pour celle du point B au centre de gravité de la Figure ABD, parce que N devenant C, x devient b.

PROBLEME XI.

Soit le rectangle BG & les deux demies-paraboles ABF, ADG, dont les axes AF, AG ſont égaux, trouver le centre de gravité de la Figure ABD. (*Fig.* 163.)

Ayant tiré AC paralelle aux ordonnées BF, DG, il eſt évident que le centre de peſanteur de cette Figure eſt dans la ligne AC, & tirant deux lignes MP, *mp*, infiniment près l'une de l'autre & paralelles aux axes AF, AG, puis des points M, *m*, les ordonnées MR, *mr*, à l'axe AF, nommant les données AC (a) p le paramétre, & les indéterminées AN ou MR (x) MN ou AR (y) N*n* ſera (dx) & $2ydx$ ſera la différentielle des poids de l'eſpace AMP, mais par la proprieté de la parabole $py = xx$; donc $y = \frac{xx}{p}$, mettant cette valeur de y dans la différentielle $2ydx$, l'on aura $\frac{2xxdx}{p}$ égale à cette même différentielle, qui étant multipliée par x, donnera $\frac{2x^3dx}{p}$ pour la différentielle des momens, dont l'intégrale $\frac{x^4}{2p}$ ou $\frac{xxy}{2p}$, (en prenant pour $\frac{xx}{p}$, ſa valeur y) ſera égale à la ſomme des momens, qui étant diviſée par celle des poids $\frac{2xy}{3}$ donnera $\frac{3x}{4}$ pour la diſtance du point A au centre de peſanteur de l'eſpace AMP, & l'on aura $\frac{3a}{4}$ pour celle du point

A au centre de pesanteur de la Figure ABD, parce que N devenant C, x devient a.

PROBLEME XII.

Les mêmes choses étant posées, comme dans le Problême précédent, trouver le centre de pesanteur de la Figure ABC. (*Fig.* 163.)

Il est évident que si du centre de pesanteur O de la Figure ABD on tire la ligne OS paralelle à BD, le centre de pesanteur de la Figure ABC sera dans la ligne OS. De même, si V est le centre de pesanteur de l'espace AMP, tirant VX paralelle à BD, le centre de pesanteur de l'espace AMN sera dans la ligne VX; ainsi pour avoir son centre de gravité, il ne s'agit que de trouver son second bras, nommant BC (b) l'on a ydx égale à la différentielle des poids de l'espace AMN, qui étant multipliée par $\frac{y}{2}$ donnera $\frac{yydx}{2}$ pour la différentielle des seconds momens; mais $y = \frac{xx}{p}$, donc $yy = \frac{x^4}{pp}$, mettant cette valeur de yy dans la différentielle $\frac{yydx}{2}$, l'on aura $\frac{x^4dx}{2pp}$ égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{x^5}{10pp}$ ou $\frac{xyy}{10}$ (en prenant pour $\frac{x^4}{pp}$ sa valeur yy) est égale à la somme des seconds momens, qui étant divisée par celle des poids $\frac{xy}{3}$, donnera $\frac{3y}{10}$ pour le second bras de l'espace AMN; ainsi faisant $VZ = \frac{3y}{10}$, Z sera le centre de pesanteur de l'espace AMN, & l'on aura $\frac{3b}{10}$ pour le second bras de l'espace ABC, parce que N devenant C, y devient b. Ainsi faisant $KO = \frac{3b}{10}$, K sera le centre de pesanteur de la Figure ABC.

PROBLEME XIII.

Ayant deux demies-paraboles égales ABD, BCF renfermées entre les paralelles AC, DF, & dont A & C sont les sommets, trouver le centre de pesanteur de la Figure ABC. (*Fig.* 164.)

Ayant tiré BG paralelles aux axes AD, CF de ces deux demies-paraboles, le centre de pesanteur de cette Figure sera dans la ligne BG, & tirant deux lignes MP, *mp*, infiniment proches & paralelles à AC, puis des points P, *p*, les diamétres PR, *pr*; nommant les données BG ou AD (*a*) BD ou AG (*b*) *p*, le paramétre, & les indéterminées PN ou BR (*x*) BN ou PR (*y*) N*n* sera *dy*, & $2xdy$ sera la différentielle des poids de l'espace BMP; mais par le Lemme III. page 7, $y = \frac{2bx - xx}{p}$; donc $dy = \frac{2bdx - 2xdx}{p}$, mettant cette valeur de *dy* dans la différentielle $2xdy$, on aura $\frac{4bxdx - 4xxdx}{p}$ égale à cette même différentielle qui étant multipliée par *y* ou $\frac{2bx - xx}{p}$ donnera $\frac{8bbxxdx - 12bx^3dx + 4x^4dx}{pp}$ pour la différentielle des momens, dont l'intégrale $\frac{8bbx^3}{3pp} - \frac{3bx^4}{pp} + \frac{4x^5}{5pp}$ sera égale à la somme des momens, qui étant divisée par celle des poids, où l'intégrale de $\frac{4bxdx - 4xxdx}{p}$, c'est-à-dire par $\frac{2bxx}{p} - \frac{4x^3}{3p}$ donnera $\frac{40bbx - 45bxx + 12x^3}{30bp - 20px}$ pour la distance du point B au centre de pesanteur de l'espace BPM, & l'on aura $\frac{7bb}{10p}$ ou $\frac{7a}{10}$ (en prenant pour *bb* sa valeur *ap*) pour la distance du point B au centre de pesanteur de la Figure ABC, parce que N devenant G, *x* devient *b*.

PROBLEME XIV.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême précédent, trouver le centre de pesanteur de la Figure ABG. (*Fig.* 164.)

Il est évident que si du centre de pesanteur O de la Figure ABC, on tire une ligne IOS paralelle à AC, le centre de pesanteur de la Figure ABG sera dans la ligne OS, & de même dans l'espace indéterminé BPM, si de son centre de pesanteur V, on mene la droite XVZ paralelle à AC, le centre de pesanteur de l'espace BPN sera dans la ligne VZ ; ainsi pour avoir son centre de gravité, il ne s'agit que de trouver son second bras. On a $\frac{2bxdx - 2xxdx}{p}$ égale à la différentielle des poids de l'espace BNP, qui étant multipliée par $\frac{x}{2}$ la distance du centre de pesanteur du rectangle infiniment petit PN à la ligne BG donne $\frac{bxxdx - x^3dx}{p}$ pour la différentielle des seconds momens, dont l'intégrale $\frac{bx^3}{3p} - \frac{x^4}{4p}$ sera égale à la somme des seconds momens, qui étant divisée par celle des poids $\frac{bxx}{p} - \frac{2x^3}{3p}$ donnera $\frac{4bx - 3xx}{12b - 8x}$ pour le second bras de l'espace BNP ou pour la distance du point V au centre de pesanteur de cet espace, & l'on aura $\frac{b}{4}$ pour la distance du point O au centre de pesanteur de l'espace ABG, parce que N devenant G, x devient b.

PROBLEME XV.

Les mêmes choses étant posées que dans le neuviéme Problême, trouver le centre de pesanteur de l'espace ABG. (*Fig.* 161.)

Il est évident que si du centre de pesanteur L de l'espace ABD, on tire la ligne LS paralelle à BD, le centre de pesanteur de l'espace ABG sera dans cette ligne LS ; & de même dans l'espace indéterminé AMN, si du centre de pesanteur V de l'espace AMP on tire la ligne VT paralelle à BD, le centre de pesanteur de cet espace AMN sera dans la ligne VT, il ne s'agit donc que de déterminer le second bras. On a ydx ou $\frac{x^3dx + 3bxxdx + 2bbxdx}{4bb}$ (en prenant pour y sa valeur $\frac{x^3+3bxx+2bbx}{4bb}$) égale à la différentielle des poids de l'espace AMN, qui étant multiplié par $\frac{y}{2}$ ou $\frac{x^3+3bxx+2bbx}{8bb}$ donnera $\frac{x^6dx+6bx^5dx+13bbx^4dx+12b^3x^3dx+4b^4xxdx}{32b^4}$ pour la différentielle des seconds momens, dont l'intégrale $\frac{x^7}{224b^4}+\frac{x^6}{32b^3}+\frac{13x^5}{160bb}+\frac{3x^4}{32b}+\frac{x^3}{24}$ est égale à la somme de ces seconds momens, qui étant divisée par celle des poids $\frac{x^4}{16bb}+\frac{x^3}{4b}+\frac{xx}{4}$, donnera $\frac{15x^5+105bx^4+273bbx^3+315b^3xx+140b^4x}{210bbxx+840b^3x+840b^4}$ pour le second bras de l'espace AMN ou pour la distance du point V au centre de pesanteur de cet espace, & l'on aura $\frac{15a^5+105a^4b+273a^3bb+315aab^3+140ab^4}{210aabb+840ab^3+840b^4}$ pour la distance du point L au centre de gravité de l'espace ABG, parce que N devenant G, x devient a.

REMARQUE.

Si $a=b$, on aura $\frac{424a}{945}$ pour cette distance.

PROBLEME XVI.

Les mêmes choses étant posées comme dans le neuviéme Problême, si l'on fait le rectangle GF, que l'on prolonge BF, & que l'on fasse l'espace AFH égal & semblable à ABF, trouver le centre de pesanteur de la Figure ABH. (*Fig.* 165.)

Il est évident que le centre de pesanteur de cette Figure est dans la ligne AF, & tirant des points M, *m* les lignes MO, *mo* paralelles à BH, $2xdy$ sera la différentielle des poids de l'espace AMO, mais par la proprieté de la courbe $y=\frac{x^3+3bxx+2bbx}{4bb}$, donc $dy=\frac{3xxdx}{4bb}+\frac{3xdx}{2b}+\frac{dx}{2}$, mettant cette valeur

valeur de dy dans la différentielle $2xdy$, l'on aura $\frac{3x^3dx}{2bb} + \frac{3xxdx}{b} + xdx$, égale à cette même différentielle qui étant multipliée par y ou $\frac{x^3+3bxx+2bbx}{4bb}$, donnera $\frac{3x^6dx}{8b^4} + \frac{15x^5dx}{8b^3} + \frac{13x^4dx}{4bb} + \frac{xxdx}{2} + \frac{9x^3}{4b}$ pour la différentielle des momens; dont l'intégrale $\frac{3x^7}{56b^4} + \frac{5x^6}{16b^3} + \frac{13x^5}{20bb} + \frac{x^3}{6} + \frac{9x^4}{16b}$ est égale à la somme des momens, qui étant divisée par celle des poids $\frac{3x^4}{8bb} + \frac{x^3}{b} + \frac{xx}{2}$, donnera $\left\{\frac{\frac{3x^7}{56b^4} + \frac{5x^6}{16b^3} + \frac{13x^5}{20bb} + \frac{9x^4}{16b} + \frac{x^6}{6}}{\frac{3x^4}{8bb} + \frac{x^3}{b} + \frac{xx}{2}}\right\}$ pour la distance du point A au centre de pesanteur de l'espace AMO, & l'on aura $\left\{\frac{\frac{3a^7}{56b^4} + \frac{5a^6}{16b^3} + \frac{13a^5}{20bb} + \frac{9a^4}{16b} + \frac{a^3}{6}}{\frac{3a^4}{8bb} + \frac{a^3}{b} + \frac{aa}{2}}\right\}$ pour la distance du point A au centre de pesanteur de la Figure ABH; parce que I devenant F, x devient a.

PROBLEME XVII.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême précédent, trouver le centre de pesanteur de l'espace ABF. (*Fig.* 165.)

Il est évident que si du centre de pesanteur K de la Figure ABH, on tire une ligne KS paralelle à BH, le centre de pesanteur de l'espace ABF sera dans la ligne KS, & de même dans l'espace indéterminé AMI; si de son centre de pesanteur V, on tire la ligne VL paralelle à BH, le centre de pesanteur de cet espace sera dans la ligne; ainsi pour le trouver, il ne s'agit que de déterminer la longueur du second bras. L'on a $\frac{3x^3dx}{4bb} + \frac{3xxdx}{2b} + \frac{xdx}{2}$ égale à la différentielle des poids de l'espace AMI, qui étant multipliée par $\frac{x}{2}$, donnera

$\frac{3x^4dx}{8bb}+\frac{3x^3dx}{4b}+\frac{xxdx}{4}$ pour la différentielle des seconds momens dont l'intégrale $\frac{3x^5}{40bb}+\frac{3x^4}{16b}+\frac{x^3}{12}$ sera égale à la somme des seconds momens qui étant divisée par celle des poids $\frac{3x^4}{16bb}+\frac{x^3}{2b}+\frac{xx}{4}$ donnera $\frac{36x^3+90bxx+40bbx}{90xx+240bx+120bb}$ pour le second bras de l'espace AMI, ou pour la distance du point I, au centre de pesanteur de cet espace, & l'on aura $\frac{36a^3+90aab+40abb}{90aa+240ab+120bb}$ pour la distance du point K au centre de pesanteur de l'espace ABF, parce que I devenant F, x devient a.

REMARQUE.

Ayant trouvé le centre de pesanteur Z de la Figure ABD, & le centre de pesanteur K de la Figure BAH, il est facile de trouver le centre de pesanteur de la Figure AHBD; car tirant par les centres de pesanteur K & Z la ligne KZ, si l'on fait l'espace ABH est à l'espace ABD, comme ZY à KY, le point Y sera le centre de pesanteur de l'espace AHBD, puisque l'on peut supposer les pesanteurs de ces espaces réunies à leurs centres de pesanteurs K & Z, & considerer KZ comme un levier aux extrêmités duquel ces poids sont attachés. On trouveroit de la même maniere les centres de pesanteur des Figures AFBD & AGBH.

PROBLEME XVIII.

Les mêmes choses étant posées comme dans le huitiéme Problême de la troisiéme Section, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution de la demie-parabole ABC au-tour de DH. (*Planche* 14. *Fig.* 101.)

Il est évident que le centre de pesanteur de ce solide est dans l'axe DH, & $\frac{gy^3dy+2fgyydy}{ff}$ sera égal à la différentielle des poids qui étant muliplié par le bras x ou $\frac{yy}{p}$ donnera

$\frac{gy^5dy+2fgy^4dy}{ppf}$ égale à la différentielle des momens dont l'intégrale $\frac{gy^6}{6ppf}+\frac{2fgy^5}{5ppf}$ ou $\frac{gxxyy}{6f}+\frac{2gxxy}{5}$ (en prenant pour y^4 sa valeur $ppxx$) est égale à la somme des momens; & divisant cette somme par le poids $\frac{gxyy}{4f}+\frac{2gxy}{3}$, le quotient sera $\frac{10xy+24fx}{15y+40f}$ qui sera égal à la distance du point H au centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace AMN autour de DH, & l'on aura $\frac{10ab+24af}{15b+40f}$ pour la distance du point H au centre de pesanteur du solide formé par la révolution de la demie-parabole autour de DH.

REMARQUE.

Si $a=b=f$, on aura $\frac{34a}{55}$ pour cette distance.

PROBLEME XIX.

Les mêmes choses étant posées comme dans le neuviéme Problême, trouver le centre de pesanteur du solide creux formé par la révolution de la demie-parabole ABC autour de DH paralelle à l'ordonnée BC.

Le centre de pesanteur est dans la ligne DH, & l'on a $\frac{ac\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx}{d}+c\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx-\frac{c\sqrt{p}x^{\frac{3}{2}}dx}{d}$ égal à la différentielle des poids, & comme les centres de pesanteurs de toutes les surfaces cylindriques qui composent le solide divisent leurs axes en deux également, leur bras commun par rapport à l'axe d'équilibre DH, pourra être exprimé par $\frac{1}{2}y$, ou $\frac{1}{2}\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}$ (en prenant pour y sa valeur $\sqrt{px}$) multipliant donc la différentielle des poids par $\frac{1}{2}\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}$, on aura $\frac{acpxdx}{2d}+\frac{cpxdx}{2}-\frac{cpxxdx}{2d}$ égale à la différentielle des momens, dont l'intégrale $\frac{acpxx}{4d}$

$+\frac{cpxx}{4}-\frac{cpx^3}{6d}$, ou $\frac{acxyy}{4d}+\frac{cxyy}{4}-\frac{cxxyy}{6d}$ (en prenant pour px sa valeur yy) est égale à la somme des momens, qui étant divisée par la somme des poids $\frac{2acxy}{3d}+\frac{2cxy}{3}-\frac{2cxxy}{5d}$, donnera $\frac{15ay+15dy-10xy}{40a+40d-24x}$ pour le bras de la portion indéterminée sur AD, c'est-à-dire pour la distance du point D au centre de pesanteur de cette portion, & l'on aura $\frac{15ab+15bd-10ab}{40a+40d-24a}$ ou $\frac{5ab+15bd}{16a+40d}$ pour la distance du point D au centre de pesanteur du solide formé par la révolution de la demie-parabole, parce que P devenant C, x devient a, & y devient b.

REMARQUE.

Si AC (a) $=$ EC (b) $=$ CD (d) on aura $\frac{5}{14}$ pour cette distance.

PROBLEME XX.

Les mêmes choses étant posées comme dans le dixiéme Problême, trouver le centre de pesanteur du solide creux, formé par la révolution de la demie-parabole ABC autour d'une ligne DH paralelle à l'axe AC. (*Fig.* 103.)

Le centre de pesanteur est dans la ligne DH, & l'on a $\frac{2bcxdx-cxxdx}{p}+\frac{2bcxxdx-cx^3dx}{pd}$ égal à la différentielle des poids; & comme le solide est composé de surfaces cylindriques qui ont leurs centres de pesanteurs au milieu de leurs axes, on pourra exprimer leur bras commun par rapport à l'axe d'équilibre par $\frac{1}{2}y$ ou $\frac{2bx-xx}{2p}$ (en prenant pour y sa valeur $\frac{2bx-xx}{p}$) & multipliant la différentielle des poids par le bras, on aura $\frac{4bbcxxdx-4bcx^3dx+cx^4dx}{2pp}+\frac{4bbcx^3dx-4bcx^4dx}{2ppd}$ $+\frac{cx^5dx}{2ppd}$ égale à la différentielle des momens, dont l'intégrale $\frac{2bbcx^3}{3pp} - \frac{bcx^4}{2pp} + \frac{cx^5}{10pp} + \frac{bbcx^4}{2ppd} - \frac{2bcx^5}{5ppd} + \frac{cx^6}{12ppd}$ est égale à la ſomme des momens, qui étant diviſée par la ſomme des poids $\frac{bcxx}{p} - \frac{cx^3}{3p} + \frac{2bcx^3}{3pd} - \frac{cx^4}{4pd}$ donnera $\frac{40bbdx - 30bdxx + 6dx^3 + 30bbxx - 24bx^3 + 5x^4}{60bpd - 20pdx + 40bpx - 15pxx}$ pour le bras de la portion indéterminée du ſolide ſur CD, & l'on aura $\frac{40b^3d - 30b^3d + 6b^3d + 30b^4 - 24b^4 + 5b^4}{60bpd - 20bpd + 40bbp - 15bbp}$ ou $\frac{16ad + 11ab}{40d + 25b}$ (en prenant pour bb ſa valeur ap, & réduiſant la fraction à ſa plus ſimple expreſſion) pour le bras du ſolide formé par la révolution de la demie-parabole ABC autour de DH, ſur CD.

REMARQUE.

Si AC (a) $=$ BC (b) $=$ BD (d) on aura $\frac{27a}{65}$ pour le bras du ſolide ſur CD, c'eſt-à-dire pour la diſtance du point D à ſon centre de peſanteur.

PROBLEME XXI.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême 11, *trouver le centre de peſanteur du ſolide formé par la révolution de la demie-parabole ABC, autour d'une ligne DH paralelle à l'ordonnée BC.* (*Fig.* 104.)

Le centre de peſanteur eſt dans l'axe DH, & la différentielle des poids eſt $\frac{c\sqrt{p}x^{\frac{3}{2}}dx + cd\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx}{d}$ qui étant multiplié par $\frac{1}{2}y$ ou $\frac{\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}}{2}$ donnera $\frac{cpxxdx + cdpxdx}{2d}$ égale à la différentielle des momens, dont l'intégrale $\frac{cpx^3}{6d} + \frac{cpxx}{4}$ ou $\frac{cxxyy}{6d} + \frac{cxyy}{4}$ (en prenant pour px ſa valeur yy) eſt égale à la ſomme des momens; & diviſant cette ſomme par celle des poids $\frac{2cxxy}{5d} + \frac{2cxy}{3}$, on aura

$\frac{20xy + 30dy}{48x + 80d}$ pour le bras de la portion indéterminée du ſolide ſur CD, & $\frac{20ab + 30bd}{48a + 80d}$ ou $\frac{10ab + 15bd}{24a + 40d}$ pour le bras du ſolide formé par la révolution de la demie-parabole ABC autour de DH, parce que P devenant C, x devient (a) & y (b)

REMARQUE.

Si AC (a) = BC (b) = AD (d) on aura $\frac{25b}{64}$ pour le bras de ce même ſolide ſur CD, c'eſt-à-dire pour la diſtance du point D à ſon centre de peſanteur.

PROBLEME XXII.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême douziéme de la troiſiéme Section, trouver le centre de peſanteur du ſolide ABETL. (*Planche* 15. *Fig.* 106.)

Il eſt évident que le centre de peſanteur eſt dans l'axe BT, & comme les centres de peſanteurs de toutes les ſurfaces coniques qui compoſent ce ſolide ſont aux $\frac{2}{3}$ de leurs axes ; nommant BT (f) TV (g) OS (u) BS (t) la diſtance du point B au centre de peſanteur de la ſurface OMKM, ſera $t + \frac{u}{3}$, & $\frac{acx^4dx}{2b^4}$ ſera la différentielle des poids qui étant multipliée par $t + \frac{u}{3}$, donnera $\frac{actx^4dx}{2b^4} + \frac{acux^4dx}{6b^4}$ égale à la différentielle des premiers momens. Mais à cauſe des triangles ſemblables BPO, BCT, $t + u . f :: x . b$; donc $t + u = \frac{fx}{b}$, & à cauſe des triangles ſemblables OMS, TAV, $u . g :: y . a$; or il a été démontré dans le douziéme Problême de la troiſiéme Section, que $y = \frac{axx}{bb}$; donc $u . g :: \frac{axx}{bb} . a$; donc $u = \frac{gxx}{bb}$; mettant cette valeur de u dans $t + u = \frac{fx}{b}$, on aura $t + \frac{gxx}{bb} = \frac{fx}{b}$ & $t = \frac{fx}{b} - \frac{gxx}{bb}$; mettant donc dans la différentielle

$\frac{actx^4dx}{2b^4} + \frac{acux^4dx}{6b^4}$ à la place de t & de u, leurs valeurs $\frac{fx}{b} - \frac{gxx}{bb}$ & $\frac{gxx}{bb}$, on aura $\frac{acfx^5dx}{2b^5} - \frac{acgx^6dx}{3b^6}$ égale à cette même différentielle, dont l'intégrale $\frac{acfx^6}{12b^5} - \frac{acgx^7}{21b^6}$ est égale à la somme des momens, qui étant divisée par celle des poids $\frac{acx^5}{10b^4}$ donnera $\frac{105bfx - 60gxx}{126bb}$ pour le premier bras du solide BMKNLS, c'est-à-dire pour la distance du point B au centre de pesanteur de ce solide, & l'on aura $\frac{105abf - 60aag}{126bb}$ pour la distance du point B au centre de pesanteur du solide ABETL, parce que P devenant C, x devient a.

PROBLEME XXIII.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême 19e. de la troisiéme Section, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace ABC, autour de AC. (*Fig.* 113.)

Ayant prolongé AC en E, il est évident que le centre de pesanteur de ce solide est dans l'axe CE, & comme les centres de pesanteur des surfaces coniques qui composent ce solide, sont aux $\frac{2}{3}$ de leurs axes; nommant CE (f) AC (g) VP (u) CP (t) $\frac{2u}{3}$ sera la distance du point A au centre de pesanteur de la surface conique MNSP, & $t + \frac{2u}{3}$ sera celle du point C au même centre, & $\frac{bcxdx}{2a}$ sera la différentielle des poids, qui étant multipliée par $t + \frac{2u}{3}$, donnera $\frac{bctxdx}{2a} + \frac{bcuxdx}{3a}$ égale à la différentielle des momens; mais à cause des triangles semblables MRV, BCE, $u.f :: y.b$; donc $u = \frac{fy}{b} = f\sqrt{\frac{x}{a}}$ (en prenant pour y sa valeur $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, & à cause des paralelles PR, CE, $t.g :: a - x.a$; donc $t = g - \frac{gx}{a}$;

mettant donc dans la différentielle $\frac{bctxdx}{2a} + \frac{bcuxdx}{3a}$ à la place de t & de u leurs valeurs $g - \frac{gx}{a}$ & $f\sqrt{\frac{x}{a}}$, on aura $\frac{bcgxdx}{2a} - \frac{bcgxxdx}{2aa} + \frac{bcfx^{\frac{3}{2}}dx}{3a\sqrt{a}}$ égale à cette même différentielle, dont l'intégrale $\frac{bcgxx}{4a} - \frac{bcgx^3}{6aa} + \frac{2bcfxx\sqrt{\frac{x}{a}}}{15a}$ eſt égale à la ſomme des momens, qui étant diviſée par celle des poids $\frac{bcxx}{4a}$, donnera $g - \frac{2gx}{3a} + \frac{8f\sqrt{\frac{x}{a}}}{15}$ ou $g - \frac{2gx}{3a} + \frac{8u}{15}$ (en prenant pour $f\sqrt{\frac{x}{a}}$ ſa valeur u pour le bras du ſolide formé par la révolution de l'eſpace AMP autour de AC, & l'on aura $\frac{g}{3} + \frac{8f}{15}$ pour la diſtance du point C au centre de peſanteur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace ABC autour de AC, parce que R devenant F, x devient a, & u devient f.

PROBLEME XXIV.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le vingtiéme Problême, trouver le centre de peſanteur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace ABC autour de BC. (*Planche* 16. *Fig.* 114.)

Le centre de peſanteur de ce ſolide eſt dans l'axe, & comme les centres de peſanteur de toutes les ſurfaces cylindriques qui le compoſent diviſent leurs axes par le milieu, nommant CH (d) CK (u) $\frac{y}{2}$ ſera la diſtance du point K au centre de gravité de la ſurface cilyndrique PN, & $u + \frac{y}{2}$ ſera celle du point C à ce même centre, & $\frac{bcx^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a}} - \frac{bcx^{\frac{3}{2}}dx}{a\sqrt{a}}$ ſera égale à la différentielle des poids, qui étant multipliée par $u + \frac{y}{2}$, donnera $\frac{bcux^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a}} - \frac{bcux^{\frac{3}{2}}dx}{a\sqrt{a}} + \frac{bcyx^{\frac{1}{2}}dx}{2\sqrt{a}} - \frac{bcyx^{\frac{3}{2}}dx}{2a\sqrt{a}}$ pour la différentielle des momens; mais à cauſe des triangles ſemblables PKC, AHC, $u.\ d :: a - x.\ a$; donc $u = d - \frac{dx}{a}$, &

y

$y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$, comme il a été prouvé dans le Problême 20; mettant donc la différentielle $\frac{bcux^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a}} - \frac{bcux^{\frac{3}{2}}dx}{a\sqrt{a}} + \frac{bcyx^{\frac{1}{2}}dx}{2\sqrt{a}} - \frac{bcyx^{\frac{3}{2}}dx}{2a\sqrt{a}}$ à la place de u & de y leurs valeurs $d - \frac{dx}{a}$ & $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, on aura $\frac{bcdx^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a}} - \frac{2bcdx^{\frac{3}{2}}dx}{a\sqrt{a}} + \frac{bcdx^{\frac{5}{2}}dx}{aa\sqrt{a}} + \frac{bbcxdx}{2a} - \frac{bbcxxdx}{2aa}$ égale à cette même différentielle des momens, dont l'intégrale $\frac{2}{3}bcdx\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{4bcdxx}{5a}\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{2bcdx^3}{7aa}\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{bbcxx}{4a} - \frac{bbcx^3}{6aa}$, ou $\frac{2}{3}cdxy - \frac{4cdxxy}{5a} + \frac{2cdx^3y}{7aa} + \frac{cxyy}{4} - \frac{cxxyy}{6d}$ (en prenant pour $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, & $\frac{bbx}{a}$ leurs valeurs y & yy) est égale à la somme des momens, qui étant divisée par celle des poids $\frac{2cxy}{3} - \frac{2cxxy}{5a}$ donnera $\frac{280aad - 336adx - 70axy + 105aay + 120dxx}{280aad - 168xx}$ pour la distance du point c au centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace AMP autour de BC, & l'on aura $\frac{64d + 35b}{112}$ pour la distance du point c au centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace ABC autour de AC, parce que O devenant N, x devient a, & y devient b.

PROBLEME XXV.

Les mêmes choses étant posées comme dans le vingt-uniéme Problême, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace ABC autour de la tangente AD. (*Fig.* 115.)

Ayant prolongé AD en Z, le centre de ce solide est dans l'axe DZ, & comme les centres de pesanteurs de toutes les surfaces cylindriques qui composent ce solide divisent leurs axes par le milieu; nommant AZ (f) ZX (u) $\frac{v}{2}$ étant la distance du point X au centre de gravité de la surface cylindrique PI, $u + \frac{v}{2}$ sera celle du point Z à ce même centre,

& $\frac{bcx^{\frac{3}{2}}dx}{a\sqrt{a}}$ ſera la différentielle des poids, qui étant multipliée par $u+\frac{y}{2}$ donnera $\frac{bcux^{\frac{3}{2}}dx}{a\sqrt{a}}+\frac{bcyx^{\frac{3}{2}}dx}{2a\sqrt{a}}$ pour la différentielle des momens; mais à cauſe des paralelles CG, PO, $u.f::$ CP. AP, & à cauſe des paralelles BC, MP, CP. AC $:: a-x.\ a$; donc $u.f::a-x.\ a$; donc $u=f-\frac{fx}{a}$ & $y=b\sqrt{\frac{x}{a}}$, mettant donc dans la différentielle des momens $\frac{bcux^{\frac{3}{2}}dx}{a\sqrt{a}}+\frac{bcyx^{\frac{3}{2}}dx}{2a\sqrt{a}}$ à la place de u & de y leurs valeurs $f-\frac{fx}{a}$ & $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, l'on aura $\frac{bcfx^{\frac{3}{2}}dx}{a\sqrt{a}}-\frac{bcfx^{\frac{5}{2}}dx}{aa\sqrt{a}}+\frac{bbcxxdx}{2aa}$ égale à cette même différentielle dont l'intégrale $\frac{2bcf}{5a}\sqrt{\frac{x^5}{a}}-\frac{2bcf}{7aa}\sqrt{\frac{x^7}{a}}+\frac{bbcx^3}{6aa}$ ou $\frac{2cfxxy}{5a}-\frac{2cfx^3y}{7aa}+\frac{cxxyy}{6a}$ (en prenant pour $b\sqrt{\frac{x}{a}}$ & $\frac{bbx}{a}$ leurs valeurs y & yy) eſt égale à la ſomme des momens, qui étant diviſée par celle des poids $\frac{2cxxy}{5a}$ donnera $\frac{84af+35ay-60fx}{84a}$ pour la diſtance du point Z au centre de gravité du ſolide formé par la révolution de l'eſpace AMP autour de AB, & l'on aura $\frac{24f+35b}{84}$ pour la diſtance du point Z au centre de gravité du ſolide formé par la révolution de l'eſpace ABC autour de AD, parce que R devenant F, x devient a, & y devient b.

PROBLEME XXVI.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême 23^e^. trouver le centre de peſanteur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace ABC autour de CD. (*Fig.* 117.)

Le centre de peſanteur de ce ſolide eſt dans l'axe CD, & $\frac{4aabbcxxdx-4aabcx^3dx+aacx^4dx}{2b^4d}+\frac{2acxdx}{b}-\frac{3acxxdx}{bb}+\frac{acx^3dx}{b^3}$ eſt égale à la différentielle des poids, qui étant multipliée par x, donnera $\frac{4aabbcx^3dx - 4aabcx^4dx + aacx^5dx}{2b^4d} + \frac{2acxxdx}{b} - \frac{3acx^3dx}{bb} + \frac{acx^4dx}{b^3}$ pour la différentielle des momens, dont l'intégrale $\frac{aacx^4}{2bbd} - \frac{2aacx^5}{5b^3d} + \frac{aacx^6}{12b^4d} + \frac{2acx^3}{3b} - \frac{3acx^4}{4bb} + \frac{acx^5}{5b^3}$ eſt égale à la ſomme des momens, qui étant diviſée par celle des poids, $\frac{2aacx^3}{3bbd} - \frac{aacx^4}{2b^3d} + \frac{aacx^5}{10b^4d} + \frac{acxx}{b} - \frac{acx^3}{bb} + \frac{acx^4}{4bb}$ donnera $\frac{30abbxx - 24abx^3 + 5ax^4 + 40b^3dx - 45bbdxx + 12bdx^3}{40abbx - 30abxx + 6ax^3 + 60b^3d - 60bbdx + 15bdxx}$ pour la diſtance du point D au centre de peſanteur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace BPM autour de CD, & l'on aura $\frac{30a^3bb - 24a^4b + 5a^5 + 40ab^3d - 45aabbd + 12a\ bd}{40aabb - 30a^3b + 6a^4 + 60b^3d - 60abbd + 15aabd}$ pour la diſtance du point D au centre de peſanteur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace ABC autour de CD, parce que K devenant C, x devient a.

PROBLEME XXVII.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême 24^e. trouver le centre de peſanteur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace BFG autour de FG. (*Fig.* 118.)

Le centre de peſanteur eſt dans l'axe FG, & comme les centres de peſanteur de toutes les ſurfaces cylindriques qui compoſent ce ſolide diviſent leurs axes par le milieu, $\frac{y}{2}$ ſera la diſtance du point G au centre de peſanteur de la ſurface cylindrique PO, & $\frac{2abcxdx - acxxdx - 2bcxxdx + cx^3dx}{ap}$ ſera la différentielle des poids, qui étant multipliée par $\frac{y}{2}$ ou $\frac{2bx - xx}{2p}$ ſon égale donnera $\frac{4abbcxxdx - 4abcx^3dx - 4bbc^2x^3dx + 4bcx^4dx + acx^4dx - cx^5dx}{2app}$ pour la différentielle des momens, dont l'intégrale $\frac{2bbcx^3}{3pp} - \frac{bcx^4}{2pp} - \frac{bbcx^4}{2app} + \frac{2bcx^5}{5app} + \frac{cx^5}{10pp} - \frac{cx^6}{12app}$ eſt égale à la ſomme des momens, qui étant divisée par celle des poids $\frac{bcxx}{p} - \frac{cx^3}{3p} - \frac{2bcx^3}{3ap} + \frac{cx^4}{4ap}$, donnera $\frac{40abbx - 30abxx - 30bbxx + 24bx^3 + 6ax^3 - 5x^4}{60abp - 20apx - 40bpx + 15pxx}$ pour la distance du point G au centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace BMP autour de FG, & l'on aura $\frac{10abb - 6aab + a^3}{20bp - 5ap}$ pour la distance du point G au centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace BFG autour de FG, parce que P devenant G, x devient a.

PROBLEME XXVIII.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême 25^e. trouver le centre de pesanteur du solide BFRTG.

Le centre de pesanteur de ce solide est dans la ligne BG, & $\frac{4bbcxxdx - 4bcx^3dx + cx^4dx}{2app}$ est égale à la différentielle des poids, qui étant multipliée par x, donnera $\frac{4bbcx^3dx - 4bcx^4dx + cx^5dx}{2app}$ pour la différentielle des momens, dont l'intégrale $\frac{bbcx^4}{2opp}$ — $\frac{2bcx^5}{5app} + \frac{cx^6}{12app}$ est égale à la somme des momens, qui étant divisée par celle des poids $\frac{2bbcx^3}{3app} - \frac{bcx^4}{2app} + \frac{cx^5}{10app}$ donnera $\frac{30bbx - 24bxx + 5x^3}{40bb - 30bx + bxx}$ pour la distance du point B au centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace BMP autour de BD, & l'on aura $\frac{30abb - 24aab + 5a^3}{40bb - 30ab + 6aa}$ pour la distance du point A au centre de pesanteur du solide BFRTG, parce que P devenant G, x devient a.

PROBLEME XXIX.

Les mêmes choses étant posées comme dans le 26^e. Problême, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace BFG autour de Bk. (*Fig.* 120.)

Le centre de peſanteur de ce ſolide eſt dans la ligne Bk, & comme les centres de peſanteur de toutes les ſurfaces cylindriques qui compoſent ce ſolide, diviſent leurs axes par le milieu, $\frac{y}{2}$ ſera la diſtance du point B au centre de gravité de la ſurface cylindrique PR, & $\frac{2bcxxdx - cx^3dx}{ap}$ ſera la différentielle des poids qui étant multipliée par $\frac{y}{2}$ ou $\frac{2bx - xx}{2p}$, donnera $\frac{4bbcx^3dx - 4bcx^4dx + cx^5dx}{2app}$ pour la différentielle des momens dont l'intégrale $\frac{bbcx^4}{2app} - \frac{2bcx^5}{5app} + \frac{cx^6}{12app}$ eſt égale à la ſomme des momens, qui étant diviſée par celle des poids $\frac{2bcx^3}{3ap} - \frac{cx^4}{4ap}$, donnera $\frac{30bbx - 24bxx + 5x^3}{40bp - 15px}$ pour la diſtance du point B au centre de peſanteur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace BPM autour de Bk, & l'on aura $\frac{30abb - 24aab + 5a^3}{40bp - 15ap}$ pour la diſtance du point B au centre de peſanteur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace BFG autour de Bk, parce que P devenant G, x devient a.

PROBLEME XXX.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême 27ᵉ. trouver le centre de peſanteur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace BFG autour de FK.

Le centre de peſanteur de ce ſolide eſt dans l'axe FK, & $\frac{2bcxdx - cxxdx}{p} - \frac{4bbcxxdx + 4bcx^3dx - cx^4dx}{2app}$ eſt égale à la différentielle des poids, qui étant multipliée par x, donnera $\frac{2bcxxdx - cx^3dx}{p} - \frac{4bbcx^3dx + 4bcx^4dx - cx^5dx}{2app}$ pour la différentielle des momens, dont l'intégrale $\frac{2bcx^3}{3p} - \frac{cx^4}{4p} - \frac{bbcx^4}{2app} +$ $+ \frac{2bcx^5}{5app} - \frac{cx^6}{12app}$ eſt égale à la ſomme des momens, qui étant diviſée par celle des poids $\frac{bcxx}{p} - \frac{cx^3}{3p} - \frac{2bbcx^3}{3app} +$

$+\frac{bcx^4}{2app}-\frac{cx^5}{10app}$, donnera $\frac{40abpx-15apxx-30bbxx+24bx^3-5x^4}{60abp-20apx-40bbx+30bxx-6x^3}$ pour la diſtance du point K au centre de peſanteur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace BPM autour de FK, & l'on aura $\frac{40abp-15aap-30abb+24aab-5a^3}{60bp-20ap-40bb+30ab-6aa}$ pour la diſtance du point K au centre de peſanteur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace BFG autour de FK, parce que P devenant G, x devient a.

PROBLEME XXXI.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le 28^e^. Problême, trouver le centre de peſanteur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace BFG autour de AC. (*Fig.* 122.)

Le centre de peſanteur eſt dans la ligne AC, & $\frac{Cxdx}{a}$ eſt égale à la différentielle des poids, qui étant multipliée par x donnera $\frac{Cxxdx}{a}$ pour la différentielle des momens dont l'intégrale $\frac{Cx^3}{3a}$ ſera égale à la ſomme des momens, qui étant diviſée par celle des poids $\frac{Cxx}{2a}$ donnera $\frac{2x}{3}$ pour la diſtance du point H au centre de peſanteur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace MNF autour de AC, & l'on aura $\frac{2a}{3}$ pour la diſtance du point H au centre de peſanteur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace BFG autour de AC, parce que P devenant C, x devient a.

PROBLEME XXXII.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le 29^e^. Problême, trouver le centre de peſanteur du ſolide formé par la révolution de l'eſpace hyperbolique BFG autour de AC.

Le centre de peſanteur eſt dans l'axe AC, & $\frac{2bCxdx+Cxxdx}{2ab+aa}$

est égale à la différentielle des poids de la portion formée par la révolution de l'espace MNG autour de A, & qui étant multipliée par x donnera $\frac{2bCxxdx + Cx^3dx}{2ab + aa}$ pour la différentielle des momens dont l'intégrale $\frac{2bCx^3}{6ab+3aa} + \frac{Cx^4}{8ab+4aa}$ est égale à la somme des momens, qui étant divisée par celle des poids $\frac{bCxx}{2ab+aa} + \frac{Cx^3}{6ab+3aa}$, donnera $\frac{8bx+3xx}{12b+4x}$ pour la distance du point K au centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace MNG autour de AC, & l'on aura $\frac{8ab + 3aa}{12b + 4a}$ pour la distance du point K au centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace BFG autour de AC, parce que N devenant G, x devient a.

REMARQUE.

Si FG $(a) =$ GZ (b) on aura $\frac{11a}{16}$ pour la distance du point K au centre de pesanteur de ce solide.

PROBLEME XXXIII.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême 30^e. trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace elliptique BkG autour de AD. (*Fig.* 124.)

Le centre de pesanteur de solide est dans la ligne AC, & $\frac{2aCxdx - Cxxdx}{aa}$ est égale à la différentielle des poids de la portion formée par la révolution de l'espace MNG autour de AD, & qui étant multipliée par x, donnera $\frac{2aCxxdx - Cx^3dx}{aa}$ pour la différentielle des momens, dont l'intégrale $\frac{2Cx^3}{3a} - \frac{Cx^4}{4aa}$ sera égale à la somme des momens, qui étant divisée par celle des poids $\frac{Cxx}{a} - \frac{Cx^3}{3aa}$ donnera $\frac{8ax - 3xx}{12a - 4x}$ pour la distance du point a au centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace MNG autour de AC, & l'on aura $\frac{5a}{8}$ pour la distance du point a au centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace BkG autour de AC, parce que N devenant k, x devient a.

PROBLEME XXXIV.

Les mêmes choses étant posées comme dans le 34e. Problême, trouver le centre de pesanteur de la portion oblique parabolique ABHG. (*Fig.* 129.)

Le centre de pesanteur de cette portion est dans la ligne AO, qui passe par les centres de pesanteur de toutes les ellipses qui la composent; & nommant AO (b) AP (z) $\frac{Cxdx}{a}$ étant la différentielle des poids de la portion indéterminée AMNRP, $\frac{Czxdx}{a}$ sera la différentielle des momens; mais à cause des triangles semblables API, AOE, $z . b :: x . a$; donc $z = \frac{bx}{a}$; mettant cette valeur de z dans la différentielle $\frac{Czxdx}{a}$, l'on aura $\frac{bCxxdx}{aa}$ égal à cette même différentielle, dont l'intégrale $\frac{bCx^3}{3aa}$ sera égale à la somme des momens, qui étant divisée par celle des poids $\frac{Cxx}{2a}$ donnera $\frac{2bx}{3a}$ ou $\frac{2z}{3}$ (en prenant pour $\frac{bx}{a}$ sa valeur z) pour la distance du point A au centre de pesanteur de la portion AMNRP, & l'on aura $\frac{2b}{3}$ pour la distance du point A au centre de pesanteur de la portion ABHG, parce que P devenant O, z devient b.

PROBLEME XXXV.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême 35e. trouver le centre de pesanteur de la portion oblique elliptique AKSDT. (*Fig.* 130.)

Le

Le centre de pesanteur de cette portion, est dans la ligne AT qui passe par les centres de toutes les ellipses qui la composent, & nommant AP (z) AT (d) $\frac{2aCxdx - Cxxdx}{2ab - bb}$ étant la différentielle des poids de la portion indéterminée AMINP, $\frac{2aCzxdx - Czxxdx}{2ab - bb}$ sera la différentielle des momens, mais à cause des triangles semblables AFR, ATO, $z . d :: x . b$; $z = \frac{dx}{b}$, mettant cette valeur de z dans la différentielle des momens $\frac{2aCzdx - Czxxdx}{2ab - bb}$ on aura $\frac{2aCdxxdx - Cdx^3dx}{2abb - b^3}$ égale à cette même différentielle, dont l'integrale $\frac{2aCdx^3}{6abb - 3b^3} - \frac{Cdx^4}{8abb - 4b^3}$ sera égale à la somme des momens qui étant divisée par celle des poids $\frac{aCxx}{2ab - bb} - \frac{Cx^3}{6aab - 3bb}$ donnera $\frac{8adx - 3dxx}{12ab - 4bx}$ pour la distance du point A au centre de gravité de la portion AMINP, & l'on aura $\frac{8ad - 3bd}{12a - 4b}$ pour la distance du point A au centre de gravité de la portion AKSDT, parce que P devenant T, x devient b.

PROBLEME XXXVI.

Les mêmes choses étant ainsi posées que dans le 36^e^. Problême, trouver le centre de pesanteur de la portion oblique hyperbolique AITF. (*Fig.* 131.)

Le centre de pesanteur de cette portion est dans la ligne AO qui passe par les centres de toutes les ellipses qui la composent, & nommant AO (d) AP (z) $\frac{2aCxdx + Cxxdx}{2ab + bb}$ étant la différentielle des poids de la portion indéterminée AMSNF, $\frac{2aCzxdx + Czxxdx}{2ab + bb}$ sera la différentielle des momens, mais à cause des paralelles AG, PR, OF, $z . d :: x . b$, donc $z = \frac{dx}{b}$ mettant cette valeur de z dans la différentielle $\frac{2aCzxdx + Czxxdx}{2ab + bb}$, l'on aura $\frac{2aCdxxdx + Cdx^3dx}{2abb + b^3}$ égale à cette même différentielle, dont l'integrale $\frac{2aCdx^3}{6abb + 3b^3}$

$+ \frac{Cdx^4}{8abb + 4b^3}$ eſt égale à la ſomme des momens, qui étant diviſée par celle des poids $\frac{aCxx}{2ab + bb} + \frac{Cx^3}{6ad + 3bb}$, donnera $\frac{8adx + 3dxx}{12ab + ux}$ pour la diſtance du point A au centre de peſanteur de la portion AMSNP, & l'on aura $\frac{8ad + 3bd}{12a + 4b}$ pour la diſtance du point A au centre de gravité de la portion AITF, parce que P devenant O, x devient b.

REMARQUE.

Si $a = b$, on aura $\frac{11d}{16}$ pour cette diſtance.

PROBLEME XXXVII.

Les mêmes choſes étant poſées, comme dans le Probléme 46, trouver le centre de peſanteur du ſolide ADBGFC. (*Fig.* 140.)

Le centre de peſanteur de ce ſolide eſt dans la ligne AB, & $\frac{aacxdx - 2acxxdx + 6x^3dx}{ab}$, eſt égale à la différentielle des poids de la portion indéterminée AMRNP, qui étant multipliée par x, donnera $\frac{aacxxdx - 2acx^5dx + cx^4dx}{ab}$ pour la différentielle des momens dont l'intégrale $\frac{acx^3}{3b} - \frac{cx^4}{2b} + \frac{cx^5}{5ab}$ eſt égale à la ſomme des momens, qui étant diviſée par celle des poids $\frac{acxx}{2b} - \frac{2cx^3}{3b} + \frac{cx^4}{4ab}$, donnera $\frac{20aax - 30axx + 12x^3}{30aa - 40ax + 15xx}$ pour la diſtance au point A au centre de peſanteur de la portion indéterminée AMRNP, & l'on aura $\frac{2a}{5}$ pour la diſtance du point A au centre de peſanteur du ſolide ADBGFC, parce que P devenant B, x devient a.

PROBLÊME XXXVIII.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le 47^e. Probléme, trouver le centre de peſanteur du ſolide formé par la revolution de l'eſpace ADB, autour de la tangente AK. (*Fig.* 141.)

Le centre de peſanteur de ce ſolide eſt dans la ligne KR,

& comme il est composé de surfaces cylindriques qui ont leurs centres de pesanteur au milieu de leurs axes; $\frac{y}{2}$ sera la distance du point A au centre de pesanteur de la surface cylindrique PN, & $\frac{cx^{\frac{3}{2}}dx}{\sqrt{\frac{a}{2}}} - \frac{cx^{\frac{5}{2}}dx}{a\sqrt{\frac{a}{2}}}$ sera la différentielle des poids de la portion indéterminée formée par la révolution de l'espace AMP, autour de AK, qui étant multipliée par $\frac{y}{2}$ ou son égale $\frac{ax - xx}{2\sqrt{\frac{ax}{2}}}$ donnera $cxxdx - \frac{2cx^3dx}{a} + \frac{cx^4dx}{aa}$ pour la différentielle des momens, dont l'intégrale $\frac{cx^3}{3} - \frac{cx^4}{2a} + \frac{cx^5}{5aa}$ est égale à la somme des momens, qui étant divisée par celle des poids $\frac{2c}{5}\sqrt{\frac{2x^5}{a}} - \frac{2c}{5}\sqrt{\frac{2x^7}{a^3}}$, donnera $\frac{70aax - 105axx + 42x^3}{84\sqrt{2a^3x} - 60\sqrt{2ax^3}}$ pour la distance du point A au centre de pesanteur de la portion indéterminée formée par la revolution de l'espace AMP, autour de AK, & l'on aura $\frac{7a}{24\sqrt{2}}$ pour la distance du point A au centre de pesanteur du solide formé par la revolution de l'espace ADB autour de AK, parce que P devenant B, x devient a.

PROBLEME XXXIX.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême 48, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la revolution de l'espace ADB autour de BI. (*Planc.* 19. *Fig.* 142.)

Le centre de pesanteur de ce solide est dans la ligne BI, & comme les centres de pesanteur de toutes les surfaces cylindriques qui le composent sont au milieu de leurs axes, $\frac{y}{2}$ sera la distance du point B au centre de pesanteur de la surface cylindrique MR, & $c\sqrt{2axdx} - 2c\sqrt{\frac{2x^3}{a}}\,dx + c\sqrt{\frac{2x^5}{a^3}}\,dx$ sera égale à la différentielle des poids de la portion indéterminée formée par la revolution de l'espace AMP autour de BI, qui étant multipliée par $\frac{y}{2}$, ou son égale $\frac{ax - xx}{2\sqrt{\frac{ax}{2}}}$ donne

$acxdx - 3cxxdx + \frac{3cx^3dx}{a} - \frac{cx^4dx}{aa}$, pour la différentielle des momens dont l'integrale $\frac{acxx}{2} - \frac{cx^3}{3} + \frac{3cx^4}{4a} - \frac{cx^5}{5aa}$ eſt égale à la ſomme des momens, qui étant diviſée par celle des poids $\frac{2c}{3}\sqrt{2ax^3} - \frac{4c}{5}\sqrt{\frac{2x^5}{a}} + \frac{2c}{7}\sqrt{\frac{2x^7}{a^3}}$ donne $\frac{210a^3xx - 420aax^3 + 315ax^4 - 84x^5}{280aa\sqrt{2ax^3} - 336\sqrt{2a^3x^5} + 120\sqrt{2ax^7}}$, pour la diſtance du point B au centre de peſanteur de la portion formée par la revolution de l'eſpace AMP, autour de BI, & l'on aura $\frac{21a}{64\sqrt{2}}$ pour la diſtance du point B au centre de peſanteur du ſolide formé par la revolution de l'eſpace ADB autour de BI, parce que F devenant B, x devient a.

PROBLEME XL.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême 50, trouver le centre de peſanteur du ſolide ADBFGC. (*Fig.* 145.)

Le centre de peſanteur de ce ſolide eſt dans l'axe AB, & $\frac{729aabbcx^4dx - 1458abbcx^5dx + 729bbcx^6dx}{32a^7}$ eſt la différentielle des poids de la portion indéterminée AMRNP, qui étant multipliée par x, donnera $\frac{729aabbcx^5dx - 1458abbcx^6dx + 729bbcx^7dx}{32a^7}$ pour la différentielle des momens, dont l'integrale $\frac{729bbcx^6}{192a^5} - \frac{729bbcx^7}{112a^6} + \frac{729bbcx^8}{256a^7}$ eſt égale à la ſomme des momens, qui étant diviſée par celle des poids $\frac{729bbcx^5}{160a^5} - \frac{729bbcx^6}{96a^6} + \frac{729bbcx^7}{224a^7}$, donnera $\left\{\frac{\frac{729bbcx^6}{192a^5} - \frac{729bbcx^7}{112a^6} + \frac{729bbcx^8}{256a^7}}{\frac{729bbcx^5}{160a^5} - \frac{729bbcx^6}{96a^6} + \frac{729bbcx^7}{224a^7}}\right\}$ pour la diſtance du point A au centre de peſanteur de la portion indéterminée AMRNP, & l'on aura $\frac{5a}{8}$ pour la diſtance du point A au centre de peſanteur du ſolide ABDFGC, parce que P devenant B, x devient a.

PROBLEME XLI.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême 51, trouver le centre de peſanteur du ſolide formé par la revolution de l'eſpace ADB autour de BV. (*Fig.* 146.)

Le centre de peſanteur du ſolide eſt dans la ligne BV, & & comme les centres de peſanteur de toutes les ſurfaces cylindriques qui le compoſent ſont au milieu de leurs axes, $\frac{y}{2}$ ſera la diſtance du point B au centre de peſanteur de la ſurface cylindrique PN, & $\frac{27abcxxdx - 54bcx^3dx}{4a^3} + \frac{27bcx^4dx}{4a^4}$ ſera la différentielle des poids de la portion indéterminée formée par la revolution de l'eſpace AMP, autour de BV, qui étant multipliée par $\frac{y}{2}$ ou ſon égale $\frac{27abxx - 27bx^3}{8a^3}$ donnera $\frac{729aabbcx^4dx - 2187abbcx^5dx + 2187bbcx^6dx}{32a^6} - \frac{729bbcx^7dx}{32a^7}$ pour la différentielle des momens, dont l'intégrale $\frac{729bbcx^5}{160a^4} - \frac{2187bbcx^6}{192a^5} + \frac{2187bbcx^7}{224a^6} - \frac{729bbcx^8}{256a^7}$ eſt égale à la ſomme des momens, qui étant diviſée par celle des poids $\frac{9bcx^3}{4aa} - \frac{54bcx^4}{16a^3} + \frac{27bcx^5}{20a^4}$ donnera

$$\left\{\frac{\frac{729bbcx^5}{160a^4} - \frac{2187bbcx^6}{192a^5} + \frac{2187bbcx^7}{224a^6} - \frac{729bbcx^8}{256a^7}}{\frac{9bcx^3}{4aa} - \frac{54bcx^4}{16a^3} + \frac{27bcx^5}{20a^4}}\right\}$$

pour la diſtance du point B au centre de peſanteur de la portion indéterminée formée par la revolution de l'eſpace AMP autour de BV, & l'on aura $\frac{81b}{224}$ pour la diſtance du point B, au centre de peſanteur du ſolide formé par la revolution de l'eſpace ADB autour de BV, parce que P devenant B, x devient a.

PROBLEME XLII.

Les mêmes choſes étant poſées que dans le Problême 53, trouver le centre de peſanteur du ſolide formé par la revolution de l'eſpace ADB autour de AK. (*Fig.* 147.)

Le centre de pesanteur de ce solide est dans l'axe AK, & comme il est composé de surfaces qui ont leurs centres de pesanteur au milieu de leurs axes, $\frac{y}{2}$ sera la distance du point A au centre de pesanteur de la surface cylindrique PN, $\frac{27abcx^3dx - 27bcx^4dx}{4a^4}$ est égale à la différentielle des poids de la portion indéterminée formée par la revolution de l'espace AMP autour de AK, qui étant multipliée par $\frac{y}{2}$ ou son égale $\frac{27abxx - 27bx^3}{8a^3}$ donnera $\frac{729aabbcx^5dx - 1458abbcx^6dx + 729bbcx^7dx}{32a^7}$ pour la différentielle des momens, dont l'intégrale $\frac{729bbcx^6}{192a^5} - \frac{729bbcx^7}{142a^6} + \frac{729bbcx^8}{256a^7}$ est égale à la somme des momens qui étant divisée par celle des poids $\frac{27bcx^4}{16a^3} - \frac{27bcx^5}{20a^4}$ donne

$$\left\{\frac{\frac{729bbcx^6}{192a^5} - \frac{729bbcx^7}{112a^6} + \frac{729bbbx^8}{256a^7}}{\frac{27bcx^4}{16b^3} - \frac{27bcx^5}{20a^4}}\right\}$$ pour la distance du point A au centre de pesanteur de la portion indéterminée formée par la revolution de l'espace AMP autour de AK, & l'on aura $\frac{629b}{2688}$ pour la distance du point A au centre de pesanteur du solide formé par la revolution de l'espace ADB autour de AK, parce que P devenant B, x devient a.

PROBLEME XLIII.

Les mêmes choses étant posées, comme dans le Problême 54; trouver le centre de pesanteur du solide formé par la revolution de l'espace ADB autour de KV. (*Fig.* 148.)

Le centre de pesanteur de ce solide est dans ligne KV, & $\frac{54abcxxdx - 54bcx^3dx}{8a^3} - \frac{729aabcx^4dx + 1458abcx^5dx - 729bcx^6dx}{32a^6}$ est égale à la différentielle des poids de la portion indéterminée formée par la revolution de l'espace AMP autour de KV, & cette différentielle étant multipliée par x, donnera

$\frac{54abcx^3dx - 54bcx^4dx}{8a^3} - \frac{729aabcx^5dx + 1458abcx^6dx - 729bcx^7dx}{32a^6}$ pour la différentielle des momens, dont l'intégrale $\frac{27bcx^4}{28a^3} - \frac{27bcx^5}{35a^3} - \frac{243bcx^6}{64a^4} + \frac{729bcx^7}{112a^5} - \frac{729bcx^8}{256a^6}$ est égale à la somme des momens, qui étant divisée par celle des poids $\frac{9bcx^3}{4aa} - \frac{27bcx^4}{16a^3} - \frac{729bcx^5}{160a^4} + \frac{729bcx^6}{96a^5} - \frac{729bcx^7}{224a^6}$, donne

$$\left\{\frac{\frac{27bcx^4}{28a^3} - \frac{27bcx^5}{35a^3} - \frac{243bcx^6}{64a^4} + \frac{729bcx^7}{112a^5} - \frac{729bcx^8}{256a^5}}{\frac{9bcx^3}{4aa} - \frac{27bcx^4}{16a^4} - \frac{729bcx^5}{160a^4} + \frac{729bcx^6}{96a^5} - \frac{729bcx^7}{224a^6}}\right\}$$

pour la distance du point V au centre de pesanteur de la portion indéterminée, formée par la revolution de l'espace AMP, autour de KV; & l'on aura $\frac{57a}{344}$ pour la distance du point V, au centre de gravité du solide formé par la revolution de l'espace ADB autour de KV, parce que P devenant B, x devient a.

LEMME XXIX.

Si l'on fait tourner un rectangle DG autour d'une ligne AB paralelle à l'un de ses côtés GF, il décrira un cylindre creux qui sera égal au produit du rectangle DG multiplé par la circonférence décrite par son centre de pesanteur H. (*Planche 21. Fig. 166.*)

Ayant tiré par le point H la ligne IHR, paralelle à DF, & nommant IR (a), OR (b) la circonférence décrite du rayon IR (c) & la circonférence décrite du rayon OR (d), la circonférence décrite du rayon HR sera $\frac{c+d}{2}$ & IO sera $a - b$; que CD soit (g) la valeur du cylindre creux est $\frac{acg - bdg}{2}$.

Il faut donc prouver que $\frac{acg - bdg}{2} = \overline{a - b} \times g \times \frac{c+d}{2} = \frac{acg + adg - bcg - bdg}{2}$.

DEMONSTRATION.

$a. b :: c. d$, donc $ad = bc$, donc $adg = bcg$, effaçant dans le second membre ces deux termes qui se détruisent, on aura $\frac{acg - bdg}{2} = \frac{acg - bdg}{2}$, ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION. XLIV.

Si l'on fait tourner une figure quelconque X autour d'une ligne quelconque AC, elle décrira un solide qui sera égal au produit de la figure X par la circonférence décrite par son centre de pesanteur F.

DEMONSTRATION.

On peut considerer cette figure comme composée de rectangles CD, CD infiniment petits, & dont les côtés BD soient paralelles à AC, tous les petits rectangles multipliés chacun par la circonférence décrite par son centre de pesanteur, formeront autant de petits cylindres creux qui feront les élemens du solide formé par la revolution de la figure X autour de AC, & si l'on imagine des perpendiculaires tirées des centres de pesanteur de ces petits rectangles sur la ligne AC, & que l'on mene sur la même AC la perpendiculaire FK; la somme des produits de chaque rectangle par sa perpendiculaire, est égale au produit de la figure X par sa perpendiculaire FK par le premier Lemme; & si l'on prend à la place de ces perpendiculaires les circonférences qu'elles décriront en tournant, & qui sont en même raison, la somme des produits de chacun de ces rectangles par la circonférence décrite par son centre de gravité, sera égale au produit de la figure X par la circonférence décrite par son centre de gravité F, mais chacun de ces produits est un des petits cylindres creux qui composent le solide formé par la revolution de la figure X autour de AC, donc la somme de ces produits est égale à ce solide; donc ce solide est égal au produit de la figure X par la circonférence décrite par son centre de gravité F; ce qu'il falloit prouver.

LEMME

LEMME XXX.

Si l'on a plusieurs lignes droites CD, DF, FG, dont I, H, R soient les centres de pesanteur, & L leur centre commun de pesanteur, que l'on tire une ligne quelconque AB, & que des points I, H, R, L, on tire des lignes IM, HP, RS & LO perpendiculaires sur AB, je dis que la somme des produits de chacune de ces lignes CD, DF, FG par sa perpendiculaire IM, HP, RS, est égale au produit de la somme de ces lignes par la perpendiculaire LO. (*Fig.* 168.

Ayant tiré par les centres de pesanteur I, H, la droite IH, si l'on fait CD. DF : : HT. TI, le point T sera le centre de ces deux lignes, & Tirant la droite TR, il est facile de démontrer que le centre de pesanteur L de ces trois lignes, doit se trouver dans la ligne TR & la diviser en deux parties reciproquement proportionnelles aux lignes CD + DF, & FG, ainsi menant des points I, T, & L les lignes IZ, TV & LK, perpendiculaire à RS, & nommant CD (a), DF (b), FG (c), IM (d), TY (f), HX (g), LT (h), & RK (i), TN ou TO, ou VS, sera ($d+f$), LO ($d+f+h$) & RS ($d+f+h+i$); il faut donc prouver $\overline{a\times d}+\overline{b\times d+f+g}+\overline{c\times d+f+h+i}$ est égale à $\overline{a+b+c}\times\overline{d+f+h}$ ou que $ad+bd+bf+bg+cd+cf+ch+ci$, est égal à $ad+af+ah+bd+bf+bh+cd+cf+ch$, ou que (après avoir effacé de part & d'autre $ad+bd+bf+cd+cf+ch$) le reste $bg+ci=af+ah+bh$.

DEMONSTRATION.

Par construction $a.\ b$: : HT. TI, or à cause des triangles semblables THX, TIY, HT. TI : : $g.f$, donc $a.\ b : : g.f$, donc $af=bg$, & L étant le centre de pesanteur des trois lignes CD, DF, FG, on a $a+b.\ c$: : LR. LT, & à cause des triangles semblables LRK, TLT, LR. LT : : $i.\ h$, donc $a+b.\ c : : i.\ h$, donc $ah+bh=ci$, donc $bg+ci=af+ah+bh$, ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XLV.

Si l'on a une ligne courbe quelconque ABE, que l'on fasse tourner autour d'une ligne droite GL, elle décrira une surface courbe qui sera égale au produit de la courbe ABE, par la circonférence décrite par son centre de pesanteur O. (*Fig.* 169.)

DEMONSTRATION.

Il faut considerer cette couche comme composée de lignes décrites CD, CF, &c. chacune infiniment petite, & qui décrivent en tournant des surfaces de cônes tronqués, des couronnes circulaires & des surfaces cylindriques; or pour avoir la valeur de ces petites surfaces, il faut multiplier chacune des petites lignes qui composent la courbe ABE, par les circonférences décrites par leurs centres de pesanteur. Ainsi la surface décrite par la courbe ABE sera égale aux produits de chacune des petites lignes CD, DR, &c. qui la composent par la circonférence décrite par son centre de pesanteur I, K, &c. mais par le Lemme précédent, la somme des produits de chacune de ces lignes CD, DF, multipliée par IR, KP, tirées des centres de pesanteur I, K, de ces lignes perpendiculairement sur GL, est égale au produit de la somme de ces lignes ou de la courbe ABE par la perpendiculaire OH tirée de leur centre commun de pesanteur O, & prenant à la place des perpendiculaires IR, KP, &c. & de OH les circonférences décrites par les points I, K, & O, on aura la somme des produits de chacune de ces lignes par la circonférence décrite de son centre de pesanteur, égale au produit de la somme de ces lignes ou de la courbe ABE, par la circonférence décrite par le centre commun de pesanteur O; mais la somme de tous ces produits composent la surface formée par la revolution de la courbe ABE autour de GL, donc cette surface est égale au produit de la courbe ABE par la circonférence décrite du point O. Ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XLVI.

Si l'on a un vaiſſeau BF plein d'eau, dont les côtés BH, CF, ſoient verticaux, & que ſur l'un de ces côtés BH on ait décrit une figure quelconque ABC, ſuppoſant que le point O en ſoit le centre de gravité, tirant OR perpendiculaire ſur IH, je dis que l'effort de l'eau du vaiſſeau contre cette figure, eſt ABC×OR. (*Fig.* 170.)

DEMONSTRATION.

Si l'on conſidere cette figure comme compoſée d'une infinité de rectangles qui en ſeront les élemens, & dont les côtés ſoient paralelles aux lignes BC, CH, & que des centres de gravité de chacun de ces rectangles, on imagine des lignes droites tirées perpendiculairement ſur IH, l'effort de l'eau contre chacun de ces petits rectangles, eſt le produit de chacun de ces rectangles par la perpendiculaire tirée de ſon centre de gravité ſur IH, comme il eſt démontré dans l'Hydraulique, donc la ſomme de tous ces efforts, c'eſt-à-dire, l'effort de l'eau contre la figure ABC, eſt égale à la ſomme de tous ces produits; or par le Lemme 28. page 103. la ſomme de tous ces produits eſt égale à la ſomme de tous ces rectangles multipliée par la perpendiculaire OR tirée de leur centre commun de peſanteur O ſur IH, c'eſt-à-dire, à la figure ABC multipliée par OR, donc l'effort de l'eau ſur cette figure eſt égale au produit de cette même figure par la perpendiculaire OR. Ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XLVII.

Si l'on a un vaiſſeau BF plein d'eau, & dont l'un des côtés ABHG ſoit incliné à l'horiſon, & que ſur ce côté l'on décrive une figure quelconque BOH, je dis que l'effort de l'eau contre ce plan BOH eſt le produit de ce plan par la hauteur RK de l'eau priſe depuis ſon centre de gravité R, juſques à la ſuperficie ſuperieure de l'eau.

Cette Propoſition ſe démontre comme la précédente.

PROPOSITION XLVIII.

Si l'on a un vaisseau quelconque V plein d'eau, & dont D soit le centre de gravité de la surface, je dis que l'effort de l'eau contre la surface de ce vaisseau est égale au produit de cette surface par la hauteur de l'eau prise depuis son centre de gravité D jusqu'à la superficie superieure de l'eau. (*Fig.* 172.)

DEMONSTRATION.

Si l'on considére cette surface comme composée d'une infinité de surfaces de cônes tronqués, & chacune de ces petites surfaces comme composée d'une infinité de petits trapezes qui seront autant de plans inclinés, l'effort de l'eau sur chacun de ces petits plans inclinés, est le produit de chacun de ces plans par la hauteur de l'eau prise depuis son centre de gravité jusques à la superficie superieure de l'eau, ainsi la somme de tous ses efforts est égale à la somme de tous ces produits; mais la somme de tous ces produits est égale à la somme de tous ces plans par la hauteur DF prise depuis leur centre commun de gravité jusques à la superficie superieure de l'eau, donc la somme de tous ces efforts, c'est-à-dire, l'effort de l'eau sur la surface du vaisseau, est égal au produit de la somme de tous ces petits plans, c'est-à-dire, au produit de cette surface par la hauteur DF de l'eau prise depuis son centre de gravité jusqu'à la superficie superieure de l'eau.

APPLICATION DE LA GEOMETRIE ORDINAIRE, ET DES CALCULS DIFFERENTIEL ET INTEGRAL, A LA RESOLUTION DE PLUSIEURS PROBLEMES.

SECTION CINQUIE'ME.

Principe général pour trouver les centres de Percussion.

SOIT une courbe ABD, dont AC soit l'axe & BD perpendiculaire à cet axe; si l'on tire du sommet A une ligne KAL paralelle à BD, & que l'on fasse tourner cette figure autour de KL, la somme des efforts des élemens de cette figure divisée par celle de leurs momens, donnera au quotient la diſtance de l'axe de mouvement KAL au centre de percuſſion de la figure.

DEMONSTRATION.

Ayant fait AV = AC, puis tiré FVG perpendiculaire à AV, que l'on tire enſuite deux lignes quelconques MN, *mn*, & que l'on faſſe les parties AS, A*s* égales à AP, A*p* & les lignes RST, *rst* paralelles à FVG, qu'enſuite l'on décrive les courbes AG, AF faiſant les lignes RT, *rt*, FG, proportionnelles aux momens des lignes MN, *mn*, BD; le centre de percuſſion de la figure ABD n'étant autre choſe que le centre de gravité des momens, ſuppoſant que le point *k* ſoit le centre de gravité de la figure AFG. Si l'on décrit du point A, comme centre, l'arc *k*Q, Q ſera le centre de percuſſion de la figure ABD, puiſque tirant OQX paralelle à BD & ZKI paralelle à FG, les momens de chaque élement des eſpaces, AOX, BOXD, ſont proportionnels aux élemens des eſpaces AZI, FZIG, & comme ces eſpaces font équilibre entr'eux les momens des eſpaces AOX, BOXD feront auſſi équilibre entr'eux, & conſéquemment Q ſera le centre de percuſſion de la figure ABD; mais par le Lemme 28 de la quatriéme Section, page 103. Pour avoir la diſtance A*k*, ou AQ, il faut diviſer la ſomme des momens de la figure AFG par la ſomme des poids, & la ſomme des élemens de la figure AFG exprimant la ſomme des momens de la figure ABD, la ſomme des momens de la figure AFG exprimera la ſomme des efforts de la figure ABD, donc la ſomme des efforts de la figure ABD diviſée par celle des momens, donnera la diſtance AQ de l'axe de mouvement KAL au centre de percuſſion Q de la figure ABD. Ce qu'il falloit prouver.

PROBLEME I.

Les mêmes choſes étant poſées, que dans le 3^e. Problême de la 4^e. Section, trouver le centre de percuſſion de l'eſpace ADBE, tournant autour de la ligne GAI, perpendiculaire à AB. (*Planche* 20. *Fig.* 156.)

Il eſt évident que le centre de percuſſion de cet eſpace est dans l'axe AB qui divise cet espace en deux également, & comme les vitesses des lignes MP, *mp*, sont exprimées par les arcs décrits par les points N, *n*, ou les rayons AN, A*n*; x exprimera la vitesse de l'ordonnée MP, & $\frac{2axxdx - 2x^3dx}{pp}$ sera la différentielle des poids; $\frac{2ax^3dx - 2x^4dx}{pp}$ sera celle des momens qui étant multipliée par x donne $\frac{2ax^4dx - 2x^5dx}{pp}$, pour la différentielle des efforts, dont l'intégrale $\frac{2ax^5}{5pp} - \frac{x^6}{3pp}$ sera égale à la somme des efforts, laquelle étant divisée par celle des momens, ou l'intégrale de $\frac{2ax^3dx - 2x^4dx}{pp}$, c'est-à-dire, par $\frac{ax^4}{2pp} - \frac{2x^5}{5pp}$ donnera $\frac{12ax - 10xx}{15a - 12x}$ pour la distance de l'axe de mouvement GI au centre de percussion de l'espace AMP, & l'on aura $\frac{2a}{3}$ pour celle de l'axe de mouvement GI au centre de percussion de la figure AMP, parce que N devenant B, x devient a.

PROBLEME II.

Les mêmes choses étant posées que dans le troisiéme Problême de la quatriéme Section; trouver le centre de percussion de la figure ADBE, tournant autour d'une ligne TBS perpendiculaire à HB. (*Fig.* 156.)

Il est évident que les parties BN, B*n* exprimeront les vitesses des ordonnances MP, *mp*, & $\frac{2axxdx - 2x^3dx}{pp}$ étant la différentielle des poids de l'espace AMP $\frac{2axxdx - 2x^3dx}{px} \times \overline{a - x}$ ou $\frac{2aaxxdx - 4ax^3dx + 2x^4dx}{pp}$ sera la différentielle des momens & $\frac{2aaxxdx - 4aax^3dx + 2x^4dx}{pp} \times \overline{a - x}$ ou $\frac{2a^3xxdx - 6aax^3dx + 6ax^4dx - 2x^5dx}{pp}$ sera celle des efforts, dont l'intégrale $\frac{2a^3x^3}{3pp} - \frac{3aax^4}{2pp} + \frac{6ax^5}{5pp} - \frac{x^6}{3pp}$ sera égale à la somme des efforts, qui étant divisée par celle des momens ou l'intégrale de $\frac{2aaxxdx - 4ax^3dx + 2x^4dx}{pp}$, c'est-à-dire, $\frac{2aax^3}{3pp} - \frac{ax^4}{pp} + \frac{2x^5}{5pp}$ donnera $\frac{20a^3 - 45aax + 36axx - 10x^3}{20aa - 30ax + 12xx}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement TBS au centre de percuſſion de l'eſpace BDMPE, & l'on aura $\frac{a}{2}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement au centre de percuſſion de la figure ADBE, parce que N devenant B, x devient a.

PROBLEME III.

Les mêmes choſes étant poſées que dans le cinquiéme Problême de la quatriéme Section, trouver le centre de percuſſion de la figure ADBF tournant autour d'une ligne GAI, perpendiculaire à AB. (*Fig.* 158.)

Le centre de percuſſion de cette figure eſt dans l'axe AB qui la diviſe en deux également, & $2\sqrt{2a}\,x^{\frac{3}{2}}dx - 2\sqrt{\frac{2}{a}}\,x^{\frac{5}{2}}dx$, ſera la différentielle des momens, qui étant multipliée par x donne $2\sqrt{2a}\,x^{\frac{5}{2}}dx - 2\sqrt{\frac{2}{a}}\,x^{\frac{7}{2}}dx$ pour la différentielle des efforts, dont l'intégrale $\frac{4\sqrt{2a}}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{9}\sqrt{\frac{2}{a}}\,x^{\frac{9}{2}}$ ſera égale à la ſomme des efforts, qui étant diviſée par celle des momens, où l'intégrale de $2\sqrt{2a}\,x^{\frac{3}{2}}dx - 2\sqrt{\frac{2}{a}}\,x^{\frac{5}{2}}dx$, c'eſt-à-dire, par $\frac{4}{5}\sqrt{2a}\,x^{\frac{5}{2}} - \frac{4\sqrt{\frac{2}{a}}}{7}x^{\frac{7}{2}}$, donnera $\frac{45\sqrt{2axx} - 35\sqrt{\frac{2a^4}{a}}}{63\sqrt{2a} - 45\sqrt{\frac{2xx}{a}}}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement GAI au centre de percuſſion de l'eſpace AMP, & l'on aura $\frac{5a}{9}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement GAI au centre de percuſſion de la figure ADBF, parce que N devenant B, x devient a.

PROBLEME IV.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême cinquiéme de la quatriéme Section, trouver le centre de percuſſion de la figure ADBF, tournant autour d'une ligne EBO, perpendiculaire à AB. (*Fig.* 158.)

Le

Le centre de percussion de cette figure est dans l'axe AB, & $\overline{2\sqrt{2a}\,x^{\frac{1}{2}}dx - 2\sqrt{\frac{2}{a}}\,x^{\frac{3}{2}}dx}$ étant égale à la différentielle des poids, $\overline{2\sqrt{2a}\,x^{\frac{1}{2}}dx - 2\sqrt{\frac{2}{a}}\,x^{\frac{3}{2}}dx} \times \overline{a - x}$, ou $2a\sqrt{2a}\,x^{\frac{1}{2}}dx - 4\sqrt{2a}\,x^{\frac{3}{2}}dx + 2\sqrt{\frac{2}{a}}\,x^{\frac{5}{2}}dx$, sera la différentielle des momens; qui étant multipliée par $a - x$, donnera $2ax\sqrt{2a}\,x^{\frac{1}{2}}dx - 6a\sqrt{2a}\,x^{\frac{3}{2}}dx + 6\sqrt{2a}\,x^{\frac{5}{2}}dx - 2\sqrt{\frac{2}{a}}\,x^{\frac{7}{2}}dx$ pour celle des efforts dont l'intégrale $\frac{4aa\sqrt{2a}\,x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{12a\sqrt{2a}\,x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{12\sqrt{2a}\,x^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{4\sqrt{\frac{2}{a}}\,x^{\frac{9}{2}}}{9}$, est égale à la somme des efforts, laquelle étant divisée par celle des momens où l'intégrale de $2a\sqrt{2a}\,x^{\frac{1}{2}}dx - 4\sqrt{2a}\,x^{\frac{3}{2}}dx + 2\sqrt{\frac{2}{a}}\,x^{\frac{5}{2}}$, c'est-à-dire, par $\frac{4a\sqrt{2a}\,x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{8\sqrt{2a}\,x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{4}{7}\sqrt{\frac{2}{a}}\,x^{\frac{7}{2}}$, donnera

$$\left\{\frac{\frac{4aa\sqrt{2a}}{3} - \frac{12a\sqrt{2axx}}{5} + \frac{12\sqrt{2ax^4}}{7} - \frac{4x^3\sqrt{\frac{2}{a}}}{9}}{\frac{4a\sqrt{2a}}{3} - \frac{8x\sqrt{2a}}{5} + \frac{4xx\sqrt{\frac{2}{a}}}{7}}\right\}$$

pour la distance de l'axe de mouvement EBO au centre de percussion de l'espace BDMPE, & l'on aura $\frac{2a}{3}$ pour la distance de l'axe de mouvement EBO au centre de percussion de la figure ADBF, parce que N devenant B, x devient a.

PROBLEME V.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême septiéme de la quatriéme Section; trouver le centre de percussion de la figure AMBP tournant autour d'une ligne TAS perpendiculaire à AB. (*Fig.* 160.)

Le centre de percussion de cette figure est dans l'axe AB qui la divise en deux également & $\frac{2aaxxdx - 2x^4dx}{aa}$ étant la différentielle des momens de l'espace AMP, $\frac{2aax^3dx - 2x^5dx}{aa}$ sera celle des efforts dont l'intégrale $\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3aa}$ sera égale à la somme des efforts, qui étant divisée par celle des momens, ou l'intégrale de $\frac{2aax^2dx - 2x^4dx}{aa}$, c'est-à-dire, par $\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^5}{5aa}$ donnera $\frac{15aa - 10xx}{20aa - 12xx}$ pour la distance de l'axe de mouvement TAS au centre de percussion de l'espace AMP, & l'on aura $\frac{5a}{8}$ pour la distance de l'axe de mouvement TAS au centre de percussion de la figure AMBP, parce que N devient B, x devient a.

PROBLEME VI.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême septiéme de la quatriéme Section; trouver le centre de percussion de la figure AMBP, tournant autour d'une ligne DBE perpendiculaire à AB. (*Fig.* 160.)

Le centre de percussion de cette figure est dans l'axe AB qui la divise en deux également, & $\frac{2aaxdx - 2x^3dx}{aa}$, étant la différentielle des poids de l'espace AMP, on aura $\frac{2aaxdx - 2x^3dx}{aa} \times a - x$, ou $\frac{2a^3xdx - 2ax^3dx - 2aax^2dx + 2x^4dx}{aa}$, pour la différentielle des momens, qui étant multipliée par $a - x$, donnera $\frac{2a^4xdx - 4a^3x^2dx + 4ax^4dx - 2x^5dx}{aa}$ pour la différentielle des efforts, dont l'intégrale $\frac{aax^2}{2} - \frac{4ax^3}{3} + \frac{4x^5}{5a} - \frac{x^6}{3aa}$ est égale à la somme des efforts, qui étant divisée par celle des momens ou l'intégrale de $\frac{2a^3xdx - 2ax^3dx - 2aax^2dx + 2x^4dx}{aa}$, c'est-à-dire, par $2ax^2 - \frac{x^4}{2a} - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5aa}$, donnera $\frac{30a^4x^2 - 40a^3x^3 + 24ax^5 - 10x^6}{30a^3x^2 - 15ax^4 - 20aax^3 + 22x^5}$ pour la distance de l'axe de mouvement DBE au centre de percussion de l'espace BMP; & l'on aura $\frac{4a}{7}$ pour la distance de l'axe de mouvement DBE au centre de percussion de l'espace ou figure AMBP, parce que N devenant B, x devient a.

PROBLEME VII.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême neuviéme de la quatriéme Section, trouver le centre de percussion de la figure ADB tournant autour d'une ligne FAE perpendiculaire sur AG. (*Fig.* 161.)

Le centre de cette figure est dans la ligne AG qui la divise en deux également & $\frac{x^4dx + 3bx^3dx + 2bbxxdx}{2bb}$ étant la différentielle des momens de l'espace AMP, on aura $\frac{x^5dx + 3bx^4dx + 2bbx^3dx}{2bb}$ pour la différentielle des efforts dont l'intégrale $\frac{x^6}{12bb} + \frac{3x^5}{10b} + \frac{x^4}{4}$ sera égale à la somme des efforts; qui étant divisée par celle des momens, ou l'intégrale de $\frac{x^4dx + 3bx^3dx + 2bbx^2dx}{2bb}$, c'est-à-dire, par $\frac{x^5}{10bb} + \frac{3x^4}{8b} + \frac{x^3}{3}$ donnera $\frac{20x^3 + 72bxx + 60bbx}{24xx - 96bx + 80bb}$ pour la distance de l'axe de mouvement FAE au centre de percussion de l'espace AMP $\frac{20a^3 + 72aab + 60abb}{24aa + 90ab + 80bb}$ pour la distance de l'axe de mouvement au centre de percussion de la figure ADB parce que N donnant G, x devient a.

PROBLEME VIII.

Les mêmes choses étant posées comme dans le neuviéme Problême de la quatriéme Section, trouver le centre de percussion de la figure ABD tournant autour de BD. (*Fig.* 161.)

Le centre de percussion de cette figure est dans l'axe AG qui la divise en deux également, & $\frac{x^3dx + 3bx^2dx + 2bbxdx}{2bb}$, étant la différentielle des poids de l'espace AMP, on aura $\frac{x^3dx + 3bx^2dx + 2bbxdx}{2bb} \times \overline{a - x}$, ou $\frac{ax^3dx + 3abx^2dx + 2abbxdx - x^4dx - 3bx^3dx - 2bbx^2dx}{2bb}$ pour celle des momens, & l'on aura pour la différentielle des efforts $\frac{ax^3dx + 3abx^2dx + 2abbxdx - x^4dx - 3bx^3dx - 2bbx^2dx}{2bb} \times \overline{a - x}$, ou $\frac{a^2x^3dx + 3a^2bx^2dx + 2a^2bx^2dx - 2a^4dx - 6abx^3dx - 4ab^2x^2dx + x^5dx + 3bx^4dx + 2b^2x^3dx}{2bb}$, dont l'intégrale $\frac{aax^4}{8bb} + \frac{aax^3}{2b}$

$+\frac{aax^2}{2}-\frac{ax^5}{5bb}-\frac{3ax^4}{4b}-\frac{2ax^3}{3}+\frac{x^6}{12bb}+\frac{2x^5}{10b}+\frac{x^4}{4}$, eſt égale à la ſomme des efforts, qui étant diviſée par celle des momens ou l'intégrale de $\frac{ax^3dx+3abx^2dx+2abbxdx-x^4dx-3bx^3dx-2bbx^2dx}{2bb}$, c'eſt-à-dire, par $\frac{ax^4}{8bb}+\frac{ax^3}{2b}+\frac{ax^2}{2}-\frac{x^5}{10bb}-\frac{3x^4}{2b}-\frac{x^3}{3}$ donnera

$$\left\{\frac{\frac{aax^4}{8bb}+\frac{a^2x^3}{2b}+\frac{a^2x^2}{2}-\frac{ax^5}{5bb}-\frac{3ax^4}{4b}-\frac{2ax^3}{3}+\frac{x^6}{12bb}+\frac{3x^5}{10b}+\frac{x^4}{x}}{\frac{ax^4}{8bb}+\frac{ax^3}{2b}+\frac{ax^2}{2}-\frac{x^5}{10bb}-\frac{3x^4}{8b}-\frac{x^3}{3}}\right\}$$

pour la diſtance de l'axe de mouvement au centre de percuſſion de l'eſpace BMPD, & l'on aura $\frac{\frac{a^3}{120bb}+\frac{aa}{2cb}+\frac{a}{120}}{\frac{aa}{40bb}+\frac{a}{8b}+\frac{1}{6}}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement au centre de percuſſion de la figure ABD, parce que N devant G, x devient a.

PROBLEME IX.

Ayant deux demi-paraboles égales ACD, BCD, dont A & B ſont les ſommets, & DC une ordonnée à leurs axes AC, BC, trouver le centre de percuſſion de la figure ABD tournant autour d'une ligne FDG paralelle à AB.) *Fig.* 162.)

Le centre de percuſſion de cette figure eſt dans la ligne BC, & tirant deux lignes MP, *mp*, paralelles à AB & infiniment près l'une de l'autre, & nommant la donnée CD (b) pour le parametre & les indéterminées BN (x) MN (y) N*n* ſera (dx) & $2ydx$, ſera la différentielle des poids de l'eſpace DMP, mais par le Lemme 3. page 7. $y=\frac{2bx-xx}{p}$ donc $2ydx=\frac{4bxdx-2xxdx}{p}$ qui étant multiplié par x, donnera $\frac{4bxxdx-2x^3dx}{p}$ pour la différentielle des momens & $\frac{4bx^3dx-2x^4dx}{p}$ ſera celle des efforts dont l'intégrale $\frac{bx^4}{p}-\frac{2x^5}{5p}$ ſera égale à la ſomme des efforts, qui étant diviſée par celle des momens; ou l'intégrale de $\frac{4bxxdx-2x^3dx}{p}$, c'eſt-à-dire, par $\frac{4bx^3}{3p}-\frac{x^4}{2p}$, donnera $\frac{36bx - 12xx}{40b - 15x}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement au centre de percuſſion de l'eſpace DMP, & l'on aura $\frac{18b}{25}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement FDG au centre de percuſſion de la figure ADB, parce que N devenant C, x devient b.

PROBLEME X.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême précédent, trouver le centre de percuſſion de la figure ABD, tournant autour de AB. (*Fig.* 162.)

Le centre de percuſſion de cette figure eſt dans la ligne CD, & l'on a $\frac{4bxdx - 2xxdx}{p}$ égale à la différentielle des poids de l'eſpace DMP, qui étant multipliés par $b - x$ donne $\frac{4bbxdx - 6bxxdx + 2x^3dx}{p}$ pour celle des momens, qui étant multipliée par $b - x$, donnera $\frac{4b^3xdx - 10bbxxdx + 8bx^3dx - 2x^4dx}{p}$, pour la différentielle des efforts dont l'intégrale $\frac{2b^3xx}{p} - \frac{10bbx^3}{3p} + \frac{2bx^4}{p} - \frac{2x^5}{5p}$ eſt égale à la ſomme des efforts, qui étant diviſée par celle des momens ou l'intégrale de $\frac{4bbxdx - 6bxxdx + 2x^3dx}{p}$, c'eſt-à-dire, par $\frac{2bbxx}{p} - \frac{2bx^3}{p} \frac{x^4}{2p}$, donnera $\frac{120b^3xx - 200bbx^3 + 120bx^4 - 24x^5}{120bbxx - 120bx^3 + 30x^4}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement AB au centre de percuſſion de l'eſpace ABPM & l'on aura $\frac{8b}{15}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement au centre de percuſſion de la figure ABD, parce que N devenant C, x devient b.

PROBLEME XI.

Ayant deux demi-paraboles égales AB, AD, dont A ſoit le ſommet, & BD qui les termine, paralelle à leurs axes FAG; trouver le centre de percuſſion de la figure ABD tournant autour de FG. (*Fig.* 163.)

Ayant tiré la ligne AC perpendiculaire à BD, le centre de percuſſion de cette figure eſt dans la ligne AC, & tirant deux lignes MP, mp, infiniment près l'une de l'autre, & paralleles à BD, puis des points M, m, les lignes MR, mr, perpendiculaires sur FG, & nommant les données AC (a) p le parametre, & les indéterminées AN ou MR (x) MN ou AR (y) Nn sera (dx), & $2ydx$ sera la différentielle des poids de l'espace AMP; or par la proprieté de la parabole $py = xx$ & $y = \frac{xx}{p}$ donc $2yxdx = \frac{2xxdx}{p}$, & $\frac{2x^3dx}{p}$ sera la différentielle des momens, & $\frac{2x^4dx}{p}$ celle des efforts dont l'intégrale $\frac{2x^5}{5p}$ sera égale à la somme des efforts, qui étant divisée par celle des momens, ou l'intégrale de $\frac{2x^3dx}{p}$, c'est-à-dire, $\frac{x^4}{2p}$ donnera $\frac{4x}{5}$ pour la distance de l'axe de mouvement FG au centre de percussion de l'espace AMP, & l'on aura $\frac{4a}{5}$ pour la distance de l'axe de mouvement au centre de percussion de la figure ABD parce que N devenant C, x devient a.

PROBLEME XII.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême précédent, trouver le centre de percussion de la figure ABD, tournant autour de BD.

Le centre de percussion est dans la ligne AC & l'on a $\frac{2xxdx}{p}$ pour la différentielle des poids de l'espace AMP, qui étant multipliée par $a - x$, donne $\frac{2axxdx - 2x^3dx}{p} \times \overline{a - x}$, ou $\frac{2aaxxdx - 4ax^3dx + 2x^4dx}{p}$ sera celle des efforts dont l'intégrale $\frac{2aax^3}{3p} - \frac{ax^4}{p} + \frac{2x^5}{5p}$ sera égale à la somme des efforts; qui étant divisée par celle des momens; ou l'intégrale de $\frac{2axxdx - 2x^3dx}{p}$, c'est-à-dire, par $\frac{2ax^3}{3p} - \frac{x^4}{2p}$, donnera $\frac{20aax^3 - 30ax^4 + 12x^5}{20ax^3 - 15x^4}$ pour la distance de l'axe de mouvement DB au centre de percussion de l'espace BNPD, & l'on aura $\frac{2a}{5}$ pour la distance de l'axe de mouvement BD au centre de percussion de la figure ABD, parce que N devenant C, x devient a.

PROBLEME XIII.

Ayant deux demi-paraboles égales ABD, CBF, renfermées entre les paralelles AC, DF & dont A & C soient les sommets, trouver le centre de percussion de la figure ABC tournant autour de DF. (*Fig.* 164.)

Ayant tiré BG paralelle aux axes AD, CF, de ces demi-paraboles, le centre de percussion de cette figure sera dans la ligne BG, & nommant les données BG (a), BD (b), p le parametre & les indéterminées BN ou PR (y), PN ou BR (x) Nn sera (dy) & $2xdy$ sera la différentielle des poids de l'espace BMP, or par le Lemme 3 page 5 $y = \frac{2bx - xx}{p}$ donc $dy = \frac{2bdx - 2xdx}{p}$ mettant cette valeur de dy dans la différentielle $2xdy$, on aura $\frac{4bxdx - 4xxdx}{p}$ égale à cette même différentielle, qui étant multipliée par y ou $\frac{2bx - xx}{p}$ donnera $\frac{8bbxxdx - 12bx^3dx + 4x^4dx}{pp}$ pour la différentielle des momens qui étant multipliée par y, ou $\frac{2bx - xx}{p}$ donne $\frac{16b^3x^3dx - 32bbx^4dx}{p^3}$ $\frac{+ 20bx^5dx - 4x^6dx}{p^3}$ pour la différentielle des efforts dont l'intégrale $\frac{4b^3x^3}{p^3} - \frac{32bbx^5}{5p^3} + \frac{10bx^3}{3p^3} - \frac{4x^7}{7p^3}$ est égale à la somme des efforts qui étant divisée par celle des momens ou l'intégrale de $\frac{8bbxxdx - 12bx^3dx + 4x^4dx}{pp}$, c'est-à-dire, par $\frac{8bbx^3}{3pp} - \frac{3bx^4}{pp}$ $+ \frac{4x^5}{5pp}$, donnera $\frac{420b^3x - 672bbxx + 350bx^3 - 60x^4}{280bbp - 315bpx + 84pxx}$, pour la distance de l'axe de mouvement DBF au centre de percussion de l'espace BMP, & l'on aura $\frac{38bb}{49p}$ pour la distance de l'axe de mouvement au centre de percussion de la figure ABC, parce que N devenant G, x devient b.

PROBLEME XIV.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême précédent, trouver le centre de percussion de la figure ABC, tournant autour de AC. (*Figure* 164.)

Le centre de percuſſion de cette figure eſt dans la ligne BG, & l'on a $\frac{4bxdx - 4xxdx}{p}$ pour la différentielle des poids de l'eſpace BPM, qui étant multipliée par $a - y$, ou $a - \frac{2bx + xx}{p}$ (en prenant pour y ſa valeur $\frac{2bx - xx}{p}$) donnera $\frac{4abxdx - 4axxdx}{p} - \frac{8bbxxdx + 12bx^3dx - 4x^4dx}{pp}$, pour la différentielle des momens, qui étant encore multipliée par $a - \frac{2bx + xx}{p}$ donne $\frac{4a^2bxdx - 4a^2x^2dx}{p} - \frac{16a^2x^2dx + 24abx^3dx - 8ax^4dx}{pp}$ $\frac{16b^3x^3dx - 32b^2x^4dx + 20bx^5dx - 4x^6dx}{p^3}$ pour la différentielle des efforts, dont l'integrale $\frac{2aabxx}{p} - \frac{4a^2x^3}{3p} - \frac{16abbx^3}{3pp} + \frac{6abx^4}{pp} - \frac{8ax^5}{5pp} + \frac{4b^3x^4}{p^3} - \frac{32bbx^5}{5p^3} + \frac{10bx^6}{3p^3} - \frac{4x^7}{7p^3}$ eſt égale à la ſomme des efforts, qui étant diviſée par celle des momens ou l'integrale de $\frac{4abxdx - 4axxdx}{p} - \frac{8bbxxdx + 12bx^3dx - 4x^4dx}{pp}$, c'eſt-à-dire, par $\frac{2abxx}{p} - \frac{4ax^3}{3p} - \frac{8bbx^3}{3pp} + \frac{3bx^4}{pp} - \frac{4x^5}{5pp}$, donnera

$$\left\{\frac{\frac{2aabxx}{p} - \frac{4aax^3}{3p} - \frac{16abbx^3}{3pp} + \frac{6abx^4}{pp} - \frac{8ax^5}{5pp} + \frac{4b^3x^4}{p^3} - \frac{32bbx^5}{5p^3} - \frac{10bx^6}{3p^3} - \frac{4x^7}{7p^3}}{\frac{2abxx}{p} - \frac{4ax^3}{3p} - \frac{8bbx^3}{3pp} + \frac{5bx^4}{pp} - \frac{4x^5}{5pp}}\right\}$$

pour la diſtance de l'axe de mouvement AC au centre de percuſſion de l'eſpace ACMP, & l'on aura $\frac{10a}{21}$ (en prenant pour bb & b^4 leurs valeurs ap & $aapp$) pour la diſtance de l'axe de mouvement AC au centre de percuſſion de la figure ABC, parce que N devenant G, x devient b.

PROBLEME XV.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le premier Problême de la quatriéme Section, trouver le centre de percuſſion de l'eſpace parabolique ABD tournant autour d'une ligne FG perpendiculaire à l'axe AC prolongé en L. (*Fig.* 173.)

Nommant la donnée AL, d, l'on aura $2ydx$ égale à la différentielle

férentielle des poids qui étant multiplée par $x+d$, donnera $2xydx+2dydx$ pour la différentielle des momens ; mais par la proprieté de la parabole $y=\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}$, mettant donc cette valeur de y dans la différentielle $2xydx+2dydx$, l'on aura $2\sqrt{p}x^{\frac{3}{2}}dx+2d\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx$, égale à cette même différentielle, & $2\sqrt{p}x^{\frac{3}{2}}dx+2d\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx\times\overline{x+d}$, ou $2\sqrt{p}x^{\frac{5}{2}}dx+4d\sqrt{p}x^{\frac{3}{2}}dx+$ $+2dd\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx$ pour la différentielle des efforts, dont l'integrale $\frac{4\sqrt{px^7}}{7}+\frac{8d\sqrt{px^5}}{5}+\frac{4dd\sqrt{px^3}}{3}$ est égale à la somme des efforts, qui étant divisée par celle des momens, ou l'integrale de $2\sqrt{p}x^{\frac{3}{2}}dx+2d\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx$, c'est-à-dire par $\frac{4\sqrt{px^5}}{5}+\frac{4d\sqrt{px^3}}{3}$ donnera $\frac{60xx+168dx+140dd}{84x+140d}$, pour la distance de l'axe de mouvement FG, au centre de percussion de l'espace AMP, & l'on aura $\frac{60aa+168ad+140dd}{84a+140d}$ pour la distance de l'axe de mouvement FG au centre de percussion de l'espace ABD, parce que N devenant C, x devient a.

REMARQUE.

Si $a=d$ on aura $\frac{23a}{14}$ pour cette distance, & $\frac{9a}{14}$ pour la distance du sommet A a ce même centre de percussion.

PROBLEME XVI.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême précédent, trouver le centre de percussion de l'espace parabolique ABD, tournant autour d'une ligne IOR perpendiculaire à l'axe AC prolongé en O. (*Fig.* 173.)

Le centre de percussion sera dans l'axe AC, & $2ydx$ ou $2\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx$ (en prenant pour y sa valeur $\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}$) étant la différentielle des poids de l'espace indéterminée AMP, nommant CO (f) $2\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx\times\overline{a-x+f}$, ou $2a\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx-2\sqrt{p}x^{\frac{3}{2}}dx+$ $+2f\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx$, sera celle des momens, qui étant multipliée par $a-x+f$ donnera $2aa\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx - 4a\sqrt{p}x^{\frac{3}{2}}dx + 2\sqrt{p}x^{\frac{5}{2}}dx + 4af\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}} - 4f\sqrt{p}x^{\frac{3}{2}}dx + 2ff\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx$, pour la différentielle des efforts dont l'intégrale $\frac{4aa\sqrt{px^3}}{3} - \frac{8a\sqrt{px^5}}{5} + \frac{4\sqrt{px^7}}{7} + \frac{8af\sqrt{px^3}}{4} - \frac{8f\sqrt{px^5}}{5} + \frac{4ff\sqrt{px^3}}{3}$ ſera égale à la ſomme des efforts, qui étant diviſée par celle des momens ou l'intégrale de $2a\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx - 2\sqrt{p}x^{\frac{3}{2}}dx + 2f\sqrt{p}x^{\frac{1}{2}}dx$, c'eſt-à-dire, par $\frac{4a\sqrt{px^3}}{2} - \frac{4\sqrt{px^5}}{5} \frac{4f\sqrt{px^3}}{3}$ donnera $\frac{35aa - 42ax + 15xx + 70af - 42fx + 35ff}{35a - 21x + 35f}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement au centre de percuſſion de l'eſpace BDPM, & l'on aura $\frac{8aa + 28af + 35ff}{14a + 35f}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement au centre de percuſſion de l'eſpace ABD parce que N devant C, x devient a.

REMARQUE.

Si $a=f$ on aura $\frac{71a}{49}$ pour cette diſtance & $\frac{22a}{49}$ pour celle du point C à ce même centre de percuſſion.

PROBLEME XVII.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le troiſiéme Problême de la quatriéme Section, trouver le centre de percuſſion de la figure ADBE tournant autour d'une ligne FOR, perpendiculaire à l'axe AB prolongé en O. (*Fig.* 174.)

Le centre de percuſſion eſt dans l'axe AB, & nommant AO (d) l'on aura $\frac{2axxdx - 2x^3dx}{pp}$ égale à la différentielle des poids de l'eſpace AMP, qui étant multipliée par $x+d$, qui repréſente la viteſſe de l'ordonnée MP, donne $\frac{2ax^3dx - 2x^4dx + 2adxxdx - 2dx^3dx}{pp}$ pour la différentielle des momens, qui étant encore multiplée par la viteſſe $x+d$, donnera $\frac{2ax^4dx - 2x^5dx + 4adx^3dx - 4dx^4dx + 2addxxdx - 2ddx^3dx}{pp}$ pour la différentielle des efforts dont l'integrale $\frac{2ax^5}{5pp} - \frac{x^6}{3pp} + \frac{adx^4}{pp} - \frac{4dx^5}{5pp} + \frac{2addx^3}{3pp} - \frac{ddx^4}{2pp}$ eſt égale à la ſomme des efforts, qui étant diviſée par celle des momens ou l'integrale de $\frac{2ax^3dx - 2x^4dx + 2adxxdx - 2dx^3dx}{pp}$, c'eſt-à-dire, par $\frac{ax^4}{2pp} - \frac{2x^5}{5pp} + \frac{2adx^3}{3pp} - \frac{dx^4}{2pp}$ donnera $\frac{12axx - 10x^3 + 30adx - 24dxx + 20add - 15ddx}{15ax - 12xx + 20ad - 15dx}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement FOR au centre de percuſſion de l'eſpace AMP, & l'on aura $\frac{2ax + 6ad + 5dd}{3a + 5d}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement FOR au centre de percuſſion de la figure ADBE, parce que N devenant B, x devient a, & l'on aura $\frac{2ax + 3ad}{3a + 5d}$ pour la diſtance du point A à ce même centre.

REMARQUE.

Si $a = d$ on aura $\frac{13a}{8}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement FOR au centre de percuſſion de la figure ADBE & l'on aura $\frac{5a}{8}$ pour la diſtance du point A à ce même centre.

PROPOSITION. XVIII.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême précédent, trouver le centre de percuſſion de la figure ADBE tournant autour d'une ligne KVH, perpendiculaire à l'axe AB prolongé en V. (*Fig.* 174.)

Le centre de percuſſion eſt dans l'axe AB, & nommant BV (f) $a - x + f$, repréſentera la viteſſe de l'ordonnée MP, & $\frac{2axxdx - 2x^3dx}{pp}$ différentielle des poids de l'eſpace AMP, étant multipliée par cette viteſſe, donnera $\frac{2aaxxdb - 4ax^3dx + 2x^4dx + 2afxxdx - 2fx^3dx}{pp}$ pour la différentielle des momens, qui étant multipliée par $a - x + f$, donne $\frac{2a^3x^2dx - 6a^2x^3dx + 6ax^4cx - 2x^5dx + 4a^2fx^2dx - 8afx^3dx + 2affx^2dx + 4fx^4dx - 2ffx^3dx}{pp}$ pour la différentielle des efforts, dont l'intégrale $\frac{2a^3x^3}{3pp} - \frac{3aax^4}{2pp} + \frac{6ax^5}{5pp} - \frac{x^6}{3pp} + \frac{4aafx^3}{3pp} - \frac{2afx^4}{pp} + \frac{2affx^3}{3pp} + \frac{4fx^5}{5pp} - \frac{ffx^4}{2pp}$, est égale à la somme des efforts; qui étant divisée par celle des momens, ou l'intégrale de $\frac{2aaxxdx - 4ax^3dx + 2x^4dx + 2afxxdx - 2fx^3dx}{pp}$ c'est-à-dire, par $\frac{2aax^3}{3pp} - \frac{ax^4}{pp} + \frac{2x^5}{5pp} + \frac{2afx^3}{3pp} - \frac{fx^4}{2pp}$, donnera

$$\frac{20a^3 - 45aax + 36axx - 1ax^3 + 40aaf - 60afx + 20aff + 24fxx - 15ffx}{20aa - 30ax + 12xx + 20af - 15fx}$$

pour la distance de l'axe de mouvement KVH au centre percussion de l'espace BDMPE & l'on aura $\frac{aa + 4af + 5ff}{2a + 5f}$ pour la distance de l'axe de mouvement au centre de percussion de la figure ADBE parce que N devenant B, x devient a, & l'on aura $\frac{aa + 2af}{2a + 5f}$ pour la distance du point B, à ce même centre de percussion.

REMARQUE.

Si $f = a$ on aura $\frac{10a}{7}$ pour la distance de l'axe de mouvement KVH au centre de percussion de la figure ADBE & $\frac{3a}{7}$ pour celle du point B à ce même centre.

PROBLEME XIX.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême seiziéme de la quatriéme Section, trouver le centre de percussion de la figure ABA, tournant autour de Ga.

Le centre de percussion de cette figure est dans la ligne AF, & $\frac{3x^6dx}{8b^4} + \frac{15x^5dx}{8b^3} + \frac{13x^4dx}{4bb} + \frac{xxdx}{2} + \frac{9x^3dx}{4b}$ est la différentielle des momens de l'espace AOM, qui étant multipliée par y ou par sa valeur $\frac{x^3 + 3bxx + 2bbx}{4bb}$, donnera $\frac{3x^9dx}{32b^6} + \frac{3x^8dx}{4b^5} + \frac{77x^7dx}{32b^4} + \frac{63x^6dx}{16b^3} + \frac{55x^5dx}{16bb} + \frac{3x^4dx}{2b} + \frac{x^3dx}{4}$ pour la différentielle des efforts, dont l'intégrale $\frac{3x^{10}}{320b^6} + \frac{x^9}{12b^5} + \frac{77x^8}{256b^4} + \frac{9x^7}{16b^3}$.

$+\frac{55x^6}{96bb}+\frac{3x^5}{10b}+\frac{x^4}{16}$ eſt égale à la ſomme des efforts, qui étant diviſée par celle des momens $\frac{3x^7}{56b^4}+\frac{5x^6}{16b^3}+\frac{13x^5}{20bb}+\frac{x^3}{6}+\frac{9x^4}{16b}$, donnera

$$\left\{\frac{\frac{3x^{10}}{320b^6}+\frac{x^9}{12b^5}+\frac{77x^8}{56b^4}+\frac{9x^7}{16b^3}+\frac{55x^6}{96bb}+\frac{3x^5}{10b}+\frac{x^4}{16}}{\frac{3x^7}{56b^4}+\frac{5x^6}{16b^3}+\frac{13x^5}{20bb}+\frac{x^3}{6}+\frac{9x^4}{16b}}\right\}$$

pour la diſtance de l'axe de mouvement Ga au centre de percuſſion de l'eſpace indéterminé AOM, & l'on aura

$$\left\{\frac{\frac{3a^{10}}{320b^6}+\frac{a^9}{12b^5}+\frac{77a^8}{56b^4}+\frac{9a^7}{16b^3}+\frac{55a^6}{96bb}+\frac{3a^5}{10b}+\frac{a^4}{16}}{\frac{3a^7}{56b^4}+\frac{5a^5}{16b^3}+\frac{13a^5}{20bb}+\frac{a^3}{6}+\frac{9a^4}{16b}}\right\}$$

pour la diſtance de l'axe de mouvement Ga, au centre de percuſſion de la figure ABH, parce que I devenant F, x devient a.

PROBLEME XX.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême ſeiziéme de la quatriéme Section, trouver le centre de percuſſion de la figure ABA tournant autour de AH. (*Fig.* 165.)

Le centre de percuſſion de cette figure eſt dans la ligne AP, & $\frac{3x^3dx}{2bb}+\frac{3xxdx}{b}+xdx$ eſt égale à la différentielle des poids de l'eſpace AOM, & nommant AF (c) $c-y$, ou $c-\frac{x^3-3bxx-2bbx}{4bb}$ (en prenant pour y ſa valeur $\frac{x^3-3bxx-2bbx}{4bb}$) exprimera la viteſſe de l'ordonnée OM, & la différentielle des poids multipliée par $c-\frac{x^3-3bxx-2bbx}{4bb}$ donnera $\frac{3cx^3dx}{2bb}+\frac{3cx^2dx}{b}+cxdx-\frac{3x^6dx}{8b^4}-\frac{15x^5dx}{8b^3}-\frac{13x^4dx}{4bb}-\frac{9x^3dx}{4b}-\frac{xxdx}{2}$ pour la différentielle des momens, qui étant multipliée par $c-\frac{x^3-3bxx-2bbx}{4bb}$ donnera $\frac{3ccx^3dx}{2bb}+\frac{3ccxxdx}{b}+ccxdx-\frac{3cx^6dx}{4b^4}-\frac{30cx^5dx}{8b^3}-\frac{26cx^4dx}{4bb}-\frac{9cx^3dx}{2b}-cxxdx+\frac{3x^9dx}{32b^6}+\frac{3x^8dx}{4b^5}+\frac{77x^7dx}{32b^4}+\frac{63x^6dx}{16b^3}+\frac{55x^5dx}{16bb}+\frac{3x^4dx}{2b}+\frac{x^3dx}{4}$ pour la différentielle des efforts dont l'intégrale $\frac{3ccx^4}{8bb}+\frac{ax^3}{b}+\frac{ccxx}{2}-\frac{3cx^7}{28b^4}$

$-\frac{5cx^6}{8b^3}-\frac{13cx^5}{10bb}-\frac{9cx^4}{8b}-\frac{cx^3}{3}+\frac{3x^{10}}{320b^6}+\frac{x^9}{12b^5}+\frac{77x^8}{256b^4}+\frac{9x^7}{16b^3}+$ $+\frac{55x^6}{96bb}+\frac{3x^5}{10b}+\frac{x^4}{16}$ eſt égale à la ſomme des efforts, qui étant diviſée par celle des momens ou l'intégrale de $\frac{3cx^3dx}{2bb}+\frac{3cxxdx}{b}$ $+cxdx-\frac{3x^6dx}{8b^4}-\frac{15x^5dx}{8b^3}-\frac{13x^4dx}{4bb}-\frac{9x^3dx}{4b}-\frac{xxdx}{2}$, c'eſt-à-dire par $\frac{3cx^4}{8bb}+\frac{cx^3}{b}+\frac{cxx}{2}-\frac{3x^7}{56b^4}-\frac{5x^6}{16b^3}-\frac{13x^5}{4bb}-\frac{9x^4}{16b}-\frac{x^3}{6}$ donnera

$$\frac{\frac{3ccx^4}{8bb}+\frac{ccx^3}{b}+\frac{ccxx}{2}-\frac{3cx^7}{28b^4}-\frac{5cx^6}{8b^3}-\frac{13cx^5}{10bb}-\frac{9cx^4}{8b}-\frac{cx^3}{3}+\frac{3x^{10}}{320b^6}+\frac{x^9}{12b^5}+\frac{77x^8}{256b^4}+\frac{9x^7}{16b^3}+\frac{55x^6}{96bb}+\frac{3x^5}{10b}+}{\frac{3cx^4}{8bb}+\frac{cx^3}{b}+\frac{cxx}{2}-\frac{3x^7}{56b^4}-\frac{5x^6}{16b^3}-\frac{13x^5}{4bb}-\frac{9x^4}{16b}-\frac{x^3}{6}}$$

pour la diſtance de l'axe de mouvement BH au centre de percuſſion de l'eſpace, & l'on au

$$\frac{\frac{3a^4cc}{8bb}-\frac{3acc}{b}+\frac{aacc}{2}-\frac{3a^7c}{28b^4}-\frac{5a^6c}{8b^3}-\frac{13a^5c}{10bb}-\frac{9a^4c}{8b}-\frac{a^3c}{3}+\frac{3a^{10}}{320b^6}+\frac{a^9}{12b^5}+\frac{77a^8}{256b^4}+\frac{9a^7}{16b^3}+\frac{55a^6}{96bb}+\frac{3a^5}{10b}+}{\frac{3a^4c}{8bb}+\frac{a^3c}{b}+\frac{aac}{2}-\frac{3a^7}{56b^4}-\frac{5a^6}{16b^3}-\frac{13a^5}{4bb}-\frac{9a^4}{16b}-\frac{a^3}{6}}$$

pour la diſtance de l'axe de mouvement BH au centre de percuſſion de la figure ABH, parce que I devenant F, x devient a.

PROBLEME XXI.

Les mêmes choſes étant poſées, comme dans le Problême dix-huit de la quatriéme Section, trouver le centre de percuſſion du ſolide ABG, tournant autour de AG. (*Planche* 14. *Fig.* 101.)

L'on a $\frac{gy^5dy+2fgy^4dy}{ppf}$ égale à la différentielle des momens qui étant multipliée par x ou $\frac{yy}{p}$ donnera $\frac{gy^7dy+2fgy^6dy}{p^3f}$ pour la différentielle des efforts, dont l'intégrale $\frac{gy^8}{8p^3f}+\frac{2gy^7}{7p^3}$ eſt égale à la ſomme des efforts, qui étant diviſée par celle des momens $\frac{gy^6}{6ppf}+\frac{2fgy^5}{5ppf}$ donnera $\frac{105y^3+240fyy}{140py+336pf}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement AG au centre de percuſſion de la portion indéterminée MG, & l'on aura $\frac{105b^3+240bbf}{140bp+336pf}$ ou $\frac{105ab+240af}{140b+336f}$ (en prenant pour bb ſa valeur ap) pour la diſtance de l'axe de mouvement AG au centre de percuſſion du ſolide BG, parce que P devenant D, y devient b.

REMARQUE.

Si $a = b = f$, on aura $\frac{345a}{476}$ pour cette diſtance.

PROBLEME XXII.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême dix-huit de la troiſiéme Section, trouver le centre de percuſſion du ſolide BG tournant autour de BF. (*Fig.* 101.)

L'on a $\frac{gy^3dy + 2fgyydy}{pf}$ pour la différentielle des poids de la portion indéterminée MG, qui étant multipliée par $a - x$ ou $a - \frac{yy}{p}$ (en prenant pour x ſa valeur $\frac{yy}{p}$, donnera $\frac{agy^3dy + 2afgyydy}{pf} - \frac{gy^5dy - 2fgy^4dy}{ppf}$ pour la différentielle des momens, qui étant encore multipliée par $a - \frac{yy}{p}$, donnera $\frac{aagy^3dy + 2fgy^6dy}{pf} - \frac{2agy^3dy - 4afgy^4dy}{ppf} + \frac{gy^7dy + 2fgy^6dy}{p^3f}$ pour la différentielle des efforts, dont l'intégrale $\frac{aagy^4}{4pf} + \frac{2aagy^3}{3p} - \frac{agy^6}{3ppf} - \frac{4agy^5}{5pp} + \frac{gy^8}{8p^3f} + \frac{2gy^7}{7p^3}$ eſt égale à la ſommé des efforts, qui étant diviſée par celle des momens, ou l'intégrale de $\frac{agy^3dy + 2afgyydy}{pf} - \frac{gy^5dy - 2fgy^4dy}{ppf}$, c'eſt-à-dire, par $\frac{agy^4}{4pf} + \frac{2agy^3}{3p} - \frac{gy^6}{6ppf} - \frac{2gy^5}{7p^3}$, donnera

$$\left\{\frac{\frac{aagy^4}{4pf} + \frac{2aagy^3}{3p} - \frac{agy^6}{3ppf} - \frac{4agy^5}{5pp} + \frac{gy^8}{8p^3f} + \frac{2gy^7}{7p^3}}{\frac{agy^4}{4pf} + \frac{2agy^3}{3p} - \frac{gy^6}{6ppf} - \frac{2gy^5}{5pp}}\right\}$$

pour la diſtance de l'axe de mouvement BF au centre de percuſſion de la portion BMLSF, & l'on aura $\frac{35ab}{70b}\ \frac{128af}{224f}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement BF au centre de percuſſion du ſolide BG, parce que N devenant C, y devient h, & que à la place de bb, b^4 & b^6, on prend leurs valeurs ap, $aapp$ & a^3p^3.

REMARQUE.

Si $a=b=f$ on aura $\frac{163a}{294}$ pour cette diſtance.

PROBLEME XXIII.

Les mêmes choſes étant poſées que dans le Problême quarante de la troiſiéme Section, trouver le centre de percuſſion du ſolide W tournant autour d'une ligne TAS perpendiculaire à l'axe AB. (*Planche* 19. *Fig.* 145.)

L'on a $\frac{729aabbcx^4dx - 1458abbcx^5dx + 729bbcx^6dx}{32a^7}$ égale à la différentielle des poids de la portion indéterminée AMRNP, & $\frac{729aabbcx^5dx - 1458abbcx^6dx + 729bbcx^7dx}{32a^7}$ égale à celle des momens qui étant multipliée par x, donnera $\frac{729aabbcx^6dx - 1458abbcx^7dx + 729bbcx^8dx}{32a^7}$ pour celle des efforts dont l'intégrale $\frac{729bbcx^7}{224a^5} - \frac{729bbcx^8}{128a^6} + \frac{729bbcx^9}{288a^7}$ eſt égale à la ſomme des efforts, qui étant diviſée par celle des momens ou l'intégrale de $\frac{729aabbcx^6dx - 1458abbcx^6dx + 729bbcx^7dx}{32a^7}$, c'eſt-à-dire, par $\frac{729bbcx^6}{192a^5} - \frac{729bbcn^7}{112a^6} + \frac{729bbcx^8}{256a^7}$, donnera $\left\{\frac{\frac{729bbcx^7}{224a^5} - \frac{729bbcx^8}{128a^6} + \frac{729bbcx^9}{288a^7}}{\frac{729bbcx^6}{192a^5} - \frac{729bbcx^7}{112a^6} + \frac{729bbcx^8}{256a^7}}\right\}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement TAS au centre de percuſſion de la portion indéterminée AMRNP, & l'on aura $\frac{2a}{3}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement au centre de percuſſion du ſolide W, parce que P devenant B, x devient a.

PROPOSITION XXIV.

Les mêmes choſes étant poſées que dans le Problême quarante de la troiſiéme Section, trouver le centre de percuſſion du ſolide W tournant autour de KBL perpendiculaire à l'axe AB (*Fig.* 145.)

L'on

L'on a $\frac{729aabbcx^4dx - 1458abbcx^5dx + 729bbcx^6dx}{32a^7}$ égale à la différentielle des poids de la portion indéterminée AMRNP, qui étant multipliée par $a - x$ donnera $\frac{729a^3bbcx^4dx - 2187aabbcx^5dx + 2187abbcx^6dx - 729bbcx^7dx}{32a^7}$ pour la différentielle des momens qui étant encore multipliée par $(a - x)$ donnera

$$\frac{729a^4b^2cx^4dx - 2916a^3b^2cx^5dx + 1374a^2b^2cx^6dx - 2916ab^2cx^7dx + 729bbcx^8dx}{32a^7}$$

pour la différentielle des efforts; dont l'intégrale $\frac{729bbcx^5}{160a^3} - \frac{729bbcx^6}{48a^4} + \frac{2187bbcx^7}{112a^5} - \frac{729bbcx^8}{64a^6} + \frac{729bbcx^9}{288a^7}$ est égale à la somme des efforts, qui étant divisée par celle des momens ou l'intégrale de $\frac{729a^3bbcx^4dx - 2187aabbcx^5dx + 2187abbcx^6dx - 729bbcx^7dx}{32a^7}$, c'est-à-dire, par $\frac{729bbcx^5}{160a^4} - \frac{2187bbcx^6}{192a^5} + \frac{2187bbcx^7}{224a^6} - \frac{729bbcx^8}{288a^7}$,

donnera $\left\{\frac{\frac{729bbcx^5}{160a^3} - \frac{729bbcx^6}{48a^4} + \frac{2187bbea^7}{112a^5} - \frac{729bbcx^8}{64a^6} + \frac{729bbcx^9}{288a^7}}{\frac{729bbcx^5}{160a^4} - \frac{2187bbcx^6}{192a^5} + \frac{2187bbcx^7}{224a^6} - \frac{729bbcx^8}{256a^7}}\right\}$

pour la distance de l'axe de mouvement KBL au centre de percussion de la portion indéterminée AMRNP, & l'on aura $\frac{4a}{9}$ pour la distance de l'axe de mouvement au centre de percussion du solide W, parce que P devenant B, x devient a.

PROBLEME XXV.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême trente-sept de la troisiéme Section, trouver le centre de percussion du solide X, tournant autour d'une ligne TAS perpendiculaire à l'axe AB. (*Planche* 18. *Fig.* 140.)

L'on a $\frac{aacxdx - 2acxxdx + cx^3dx}{ab}$ égale à la différentielle des poids de la portion indéterminée AMRNP, & $\frac{aacxxdx - 2acx^3dx + cx^4dx}{ab}$ égale à la différentielle des momens, qui étant multipliée par x, donnera $\frac{aacx^3dx - 2acx^4dx + cx^5dx}{ab}$

pour la différentielle des efforts, dont l'intégrale $\frac{acx^4}{4b} - \frac{2cx^5}{5b} + \frac{cx^5}{5ab}$ eſt égale à la ſomme des efforts, qui étant diviſée par celle des momens, ou l'intégrale de $\frac{aacxxdx - 2acx^3dx + cx^4dx}{ab}$ c'eſt-à-dire, par $\frac{acx^3}{3b} - \frac{cx^4}{2b} + \frac{cx^5}{5ab}$, donnera $\frac{15aax - 24axx + 10x^3}{20aa - 30ax + 12xx}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement TAS au centre de percuſſion de la portion indéterminée AMRNP, & l'on aura $\frac{a}{2}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement au centre de percuſſion du ſolide X, parce que P devenant B, x devient a.

PROBLEME XXVI.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême trente-ſept de la troiſiéme Section; trouver le centre de percuſſion du ſolide X tournant autour d'une ligne KBL perpendiculaire à l'axe AB. (*Fig.* 140.)

L'on a $\frac{aacxdx - 2acxxdx + cx^3dx}{ab}$ égale à la différentielle des poids de la portion indéterminée AMRNP, qui étant multipliée par $a - x$, donnera $\frac{a^3cxdx - 3aacxxdx + 3acx^3dx - cx^4dx}{ab}$ pour la différentielle des momens, qui étant encore multipliée par $a - x$, donnera $\frac{a^4cxdx - 4a^3cxxdx + 6aacx^3dx + 4acx^4dx + cx^5dx}{ab}$ pour la différentielle des efforts dont l'intégrale $\frac{a^3cxx}{2b} - \frac{4aacx^3}{3b} + \frac{3acx^4}{2b} - \frac{4cx^5}{5b} + \frac{cx^6}{6ab}$ eſt égale à la ſomme des efforts, qui étant diviſée par celle des momens ou l'intégrale de $\frac{a^3cxdx - 3aacxxdx + 3acx^3dx - cx^4dx}{ab}$, c'eſt-à-dire, par $\frac{aacxx}{2b} - \frac{acx^3}{b} + \frac{3cx^4}{4b} - \frac{cx^5}{5ab}$ donnera $\frac{30a^4 - 80a^3x + 90aaxx - 48ax^3 + 10x^4}{30a^3 - 60aax + 45axx - 12x^3}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement KBL au centre de percuſſion de la portion indéterminé BDFGC, & l'on aura $\frac{2a}{3}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement au centre de percuſſion du ſolide X, parce que P devenant B, x devient a.

PROBLEME XXVII.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême huit de la quatriéme Section, & faisant tourner l'espace AMB autour de AB, il décrira le solide AGBHDC dont on propose de trouver le centre de percussion lorsqu'il tourne autour d'une ligne TAS perpendiculaire à AB. (*Planche* 21. *Fig.* 175.)

Ayant tiré la plus grande ordonnée GH de cette courbe; & nommé GC (b), la circonférence GDH (c) la circonférence MRP (z) $\frac{aaxz - zx^3}{2aa}$ sera égale au cercle MRPN, & $\frac{aaxzdx - zx^3dx}{2aa}$ sera la différentielle des poids de la portion indéterminée AMRNP, mais $z . c :: y . b$, donc $z = \frac{cy}{b}$ $= \frac{aacx - cx^3}{aab}$ (en prenant pour y sa valeur $\frac{aax - x^3}{aa}$) mettant cette valeur de z dans la différentielle $\frac{aaxzdx - zx^3dx}{2aa}$, l'on aura $\frac{a^4cxxdx - 2aacx^4dx + cx^6dx}{2a^4b}$ égale à cette même différentielle, qui étant multipliée par x, donne $\frac{a^4cx^3dx - 2aacx^5dx + cx^7dx}{2a^4b}$ pour la différentielle des momens, qui étant multipliée par x, donne $\frac{a^4cx^4dx - 2aacx^6dx + cx^8dx}{2a^4b}$ pour la différentielle des efforts, dont l'intégrale $\frac{cx^5}{10b} - \frac{cx^7}{7aab} + \frac{3x^9}{18a^4b}$ est égale à la somme des efforts; qui étant divisée par celle des momens ou l'intégrale de $\frac{a^4cx^3dx - 2aacx^5dx + cx^7dx}{2a^4b}$, c'est-à-dire, par $\frac{cx^4}{8b} - \frac{cx^6}{6aab} + \frac{cx^8}{16a^4b}$ donnera $\frac{504a^4x - 720aax^3 + 280x^5}{630a^4 - 840aaxx + 315x^4}$ pour la distance de l'axe de mouvement TAS au centre de percussion de la portion indéterminée AMRNP & l'on aura $\frac{64a}{105}$ pour la distance de l'axe de mouvement au centre de percussion du solide AGBHDC; parce que N devenant B, x devient a.

PROBLEME XXVIII.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême précédent, trouver le centre de percuſſion du ſolide AGBHDC, tournant autour d'une ligne KBL perpendiculaire à AB. (*Fig.* 175.)

L'on a $\frac{a^4cxxdx - 2aacx^4dx + cx^6dx}{2a^4b}$, égale à la différentielle des poids de la portion indéterminée AMRNP, qui étant multipliée par $a - x$, donnera $\frac{a^5cxxdx - 2a^3cx^4dx + acx^6dx - a^4cx^3dx + 2aacx^5dx - cx^7dx}{2a^4b}$ pour la différentielle des momens qui étant multipliée par $a - x$, donnera $\frac{a^6cxxdx - a^4cx^4dx - aacx^6dx - 2a^5cx^3dx + 4a^3cx^5dx - 2acx^7dx + cx^8dx}{2a^4b}$ pour la différentielle des efforts dont l'intégrale $\frac{aacx^3}{6b} - \frac{cx^5}{10b} - \frac{cx^7}{14aab} - \frac{acx^4}{4b} + \frac{cx^6}{3ab} - \frac{cx^8}{8a^3b} + \frac{cx^9}{18a^4b}$ eſt égale à la ſomme des effots, qui étant diviſée par celle des momens, ou l'intégrale de $\frac{a^5cxxdx - 2a^3cx^4dx + acx^6dx - a^4cx^3dx + 2aacx^5dx - cx^7dx}{2a^4b}$, c'eſt-à-dire, par $\frac{cax^3}{6b} - \frac{cx^3}{5ab} + \frac{cx^7}{14a^3b} - \frac{cx^4}{8b} + \frac{cx^6}{6aab} - \frac{cx^8}{16a^4b}$, donnera

$$\left\{\frac{\frac{aacx^3}{6b} - \frac{cx^5}{10b} + \frac{cx^7}{14aab} - \frac{acx^4}{4b} + \frac{cx^6}{3ab} - \frac{cx^8}{8a^3b} + \frac{cx^9}{18a^4b}}{\frac{acx^3}{6b} - \frac{cx^5}{5ab} + \frac{cx^7}{14a^3b} - \frac{cx^4}{8b} + \frac{cx^5}{6aab} - \frac{cx^8}{16a^4b}}\right\}$$

pour la diſtance de l'axe de mouvement KBL au centre de percuſſion de la portion indéterminée BMRPN, & l'on aura $\frac{46a}{87}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement KBL au centre de percuſſion du ſolide AGBHDC, parce que N devant B, x devient a.

PROBLEME XXIX.

Les mêmes choſes étant poſées ainſi que dans le Problême neuviéme, Section quatre, & faiſant tourner la figure ABG autour de AG, elle décrira un ſolide ABHDG, dont on propose de trouver le centre de percussion lorsqu'on le fait tourner autour d'une ligne EAF perpendiculaire à l'axe Aa. (*Fig.* 176.)

Nommant BG (b) la circonférence BHD (c) la circonférence MRP (z), l'on aura $\frac{zx^3dx+3bzxxdx+2bbzxdx}{8bb}$ égale à la différentielle des poids de la portion indéterminée AMRPN, mais $z.c::y.b$, donc $z=\frac{cy}{b}=\frac{cx^3+3bcxx+2bbcx}{4b^3}$ (en prenant pour y sa valeur $\frac{x^3+3bxx+2bbcx}{4bb}$) mettant cette valeur de z dans la différentielle $\frac{zx^3dx+3bzxxdx+2bbzxdx}{8bb}$ on aura $\frac{cx^6dx+6bcx^5dx+13bbcx^4dx+12bx^3cx^3dx+4b^4cxxdx}{32b^5}$ égale à cette même différentielle, qui étant multipliée par x donnera $\frac{cx^7dx+6bcx^6dx+13bcx^5dx+12b^3cx^4dx+4b^4cx^3dx}{32b^5}$ pour la différentielle des momens, qui étant encore multipliée par x donnera $\frac{cx^8dx+6bcx^7dx+13bbcx^6dx+12b^3cx^5dx+4b^4cx^4dx}{32b^5}$ pour celle des efforts, dont l'intégrale $\frac{cx^9}{288b^5}+\frac{3cx^8}{128b^4}+\frac{13cx^7}{224b^3}+\frac{cx^6}{16bb}+\frac{cx^5}{40b}$ est égale à la somme des efforts, qui étant divisée par celle des momens ou l'intégrale de $\frac{cx^7dx+6bcx^6dx+13bcx^5dx+12b^3cx^4dx+4b^4cx^3dx}{32b^5}$, c'est-à-dire, par $\frac{cx^8}{256b^5}+\frac{3cx^7}{112b^4}+\frac{13cx^6}{192b^3}+\frac{3cx^5}{40bb}+\frac{cx^4}{32b}$ donnera

$$\left\{\frac{\frac{cx^9}{288b^5}+\frac{3cx^8}{128b^4}+\frac{13cx^7}{224b^3}+\frac{cx^6}{16bb}+\frac{cx^5}{40b}}{\frac{cx^8}{256b^5}+\frac{3cx^7}{112b^4}+\frac{13cx^6}{192b^3}+\frac{3cx^5}{40bb}+\frac{cx^4}{32b}}\right\}$$

pour la distance de l'axe de mouvement EAF au centre de percussion de la portion indéterminée AMRP, & l'on aura

$$\left\{\frac{\frac{a^9c}{288b^5}+\frac{3a^8c}{128b^4}+\frac{14a^7c}{224b^3}+\frac{a^6c}{16bb}+\frac{a^5c}{40b}}{\frac{a^8c}{256b^5}+\frac{3a^7c}{112b^4}+\frac{13a^6x}{192b^3}+\frac{3a^5c}{40bb}+\frac{a^4c}{32b}}\right\}$$

pour la distance de l'axe de mouvement EAF au centre de percussion du solide ABHDG, parce que N devenant G, x devient a.

PROBLEME XXX.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême dix de la quatriéme Section, & faiſant tourner la demi-parabole ACD autour de CD, elle décrira un ſolide ADBH, dont on propoſe de trouver le centre de percuſſion, lorſqu'il tourne autour d'une ligne FDG perpendiculaire à l'ordonnée CD. (*Fig.* 177.)

Nommant AC (a), la circonférence AHB (c), la circonférence MRP (z), $\frac{2bxzdx - xxzdx}{2p}$ ſera la différentielle des poids de la portion indéterminée DMRP, mais $z.c::y.a$; donc $z = \frac{cy}{a} = \frac{2bcx - cxx}{ap}$, (en prenant pour y ſa valeur $\frac{2bx - xx}{p}$) mettant cette valeur de z dans la différentielle $\frac{2bxzdx - xxzdx}{2p}$, l'on aura $\frac{4bbcxxdx - 4bcx^3dx + cx^4dx}{2app}$ égale à cette même différentielle, qui étant multipliée par x, donnera $\frac{4bbcx^3dx - 4bcx^4dx + cx\ dx}{2app}$ pour la différentielle des momens; qui étant encore multipliée par x, donnera $\frac{4bbcx^4dx - 4bcx^5dx + cx^6dx}{2app}$ pour la différentielle des efforts dont l'intégrale $\frac{2bbcx^5}{5app} - \frac{bcx^6}{3app} + \frac{cx^7}{14app}$ eſt égale à la ſomme des efforts, qui étant diviſée par celle des momens, ou l'intégrale de $\frac{4bbcx^3dx - 4bcx^4dx + cx^5dx}{2app}$, c'eſt-à-dire, $\frac{bbcx^4}{2app} - \frac{2bcx^5}{5app} + \frac{cx^6}{12app}$, donnera $\frac{336bbx - 280bxx + 60x^3}{420bb - 3,6bx + 70xx}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement FDG, au centre de percuſſion de la portion indéterminée DMRP, & l'on aura $\frac{58b}{77}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement au centre de percuſſion du ſolide ADBH, parce que N devenant C, x devient b.

PROBLEME XXXI.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême précédent, trouver le centre de percuſſion du ſolide ADBH tournant autour de AB. (*Fig.* 177.)

L'on a $\frac{4bbcxxdx - 4bcx^3dx + cx^4dx}{2app}$ égale à la différentielle des poids de la portion indéterminée DMRP, qui étant multipliée par $b - x$, donnera $\frac{4b^3cxxdx - 8bbcx^3dx + 5bcx^4dx - cx^5dx}{2app}$ pour la différentielle des momens, qui étant encore multipliée par $b - x$, donnera $\frac{4b^4cxxdx - 12b^3cx^3dx + 13bbcx^4dx - 6bcx^5dx + cx^6dx}{2app}$ pour la différentielle des efforts, dont l'intégrale $\frac{2b^4cx^3}{3app} - \frac{3b^3cx^4}{2app} + \frac{13bcx^5}{10app} - \frac{bcx^6}{2app} + \frac{cx^7}{14app}$, eſt égale à la ſomme des efforts, qui étant diviſée par celle des momens, ou l'intégrale de $\frac{4b^3cxxdx - 8bbcx^3dx + 5bcx^4dx - cx^5dx}{2app}$, c'eſt-à-dire, par $\frac{2b^3cx^3}{3app} - \frac{bbcx^4}{app} + \frac{bcx^5}{2app} - \frac{cx^6}{12app}$ donnera $\frac{840b^4 - 1890b^3x + 1638bbxx - 630bx + 90x^4}{840b^3 - 1260bbx + 630bxx - 105x^3}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement AB au centre de percuſſion de la portion indéterminée ARMPB; & l'on aura $\frac{16b}{35}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement au centre de percuſſion du ſolide ADBH, parce que N devenant C, x devient b.]

PROBLEME XXXII.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême onziéme de la quatriéme Section, & faiſant tourner l'eſpace ABC autour de AC, il décrira un ſolide ABHD, dont on propoſe de trouver le centre de percuſſion lorſqu'il tourne autour d'une ligne FAG perpendiculaire à AC. (*Fig.* 178.)

Nommant BC (b), la circonférence BHD (c), la circonférence MSP (z), l'on aura $\frac{zxxdx}{2p}$ égale à la différentielle des poids de la portion indéterminée AMSP, mais $z . c :: y . b$, donc $z = \frac{cy}{b} = \frac{cxx}{bp}$ (en prenant pour y ſa valeur $\frac{xx}{p}$) mettant cette valeur de z dans la différentielle $\frac{zxxdx}{2p}$ l'on aura $\frac{cx^4dx}{2bpp}$ égale à cette même différentielle, qui étant multipliée par x, donnera $\frac{cx^5dx}{2bpp}$, pour la différentielle des momens, & l'on aura $\frac{cx^6dx}{2bpp}$ pour celle des efforts, dont l'intégrale $\frac{cx^7}{14bpp}$ eſt égale à la ſomme des efforts, qui étant diviſée par celle des momens, ou l'intégrale de $\frac{cx^5dx}{2bpp}$, c'eſt-à-dire, par $\frac{cx^6}{12bpp}$ donnera $\frac{6x}{7}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement FAG au centre de percuſſion de la portion indéterminée AMSP, & l'on aura $\frac{6a}{7}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement au centre de percuſſion du ſolide ABHD, parce que N devenant C, x devient a.

PROBLEME XXXIII.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême précédent, trouver le centre de percuſſion du ſolide ABHD, tournant autour de BD. (*Fig.* 178.)

L'on a $\frac{cx^4dx}{2bpp}$ pour la différentielle des poids de la portion indéterminée AMSP, qui étant multipliée par $a-x$ donne $\frac{acx^4dx - cxxdx}{2bpp}$ pour la différentielle des momens qui étant encore multipliée par $a-x$, donnera $\frac{aacx^4dx - 2acx^5dx + cx^6dx}{2bpp}$ pour la différentielle des efforts, dont l'intégrale $\frac{aacx^5}{10bpp} - \frac{acx^6}{6bpp} + \frac{cx^7}{14bpp}$ eſt égale à la ſomme des efforts, qui étant diviſée par celle des momens ou l'intégrale de $\frac{acx^4dx - cx^5dx}{2bpp}$, c'eſt-à-dire, par $\frac{acx^5}{10bpp} - \frac{bx^6}{12bpp}$, donnera $\frac{42aax - 70axx + 30x^3}{42ax - 35axx}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement au centre de percuſſion de la portion indéterminée AMSP, & l'on aura $\frac{2a}{7}$ pour la diſtance de l'axe de mouvement au centre de percuſſion du ſolide ABHD, parce que N devenant C, x devient a.

PROBLEME XXXIV.

Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Problême quatorze Section quatre, & faiſant tourner l'eſpace BCG autour de BG, il décrira un ſolide ABCH dont on propoſe de de trouver le centre de percussion lorsqu'il tourne autour d'une ligne DBF perpendiculaire à BG. (*Fig.* 179.)

Nommant la circonférence AHC (c), la circonférence MSP (z), l'on aura $\frac{bzxdx - zxxdx}{p}$ égale à la différentielle des poids de la portion indéterminée BMSP; mais $z . c :: y . b$, donc $z = \frac{cy}{b} = \frac{2bcx - cxx}{bp}$, mettant cette valeur de z dans la différentielle $\frac{bzxdx - zxxdx}{p}$, l'on aura $\frac{2bbcxxdx - 3bcx^3dx + cx^4dx}{bpp}$ égale à cette même différentielle qui étant multipliée par y ou $\frac{2bx - xx}{p}$ donnera $\frac{4b^3cx^3dx - 8bbcx^4dx + 5bcx^5dx - cx^6dx}{bp^3}$ pour la différentielle des momens, qui étant multipliée par $\frac{2bx - xx}{p}$, donnera $\frac{8b^4cx^4dx - 20b^3cx^5dx + 18bbcx^6dx - 7bcx^7dx + cx^8dx}{bp^4}$ pour la différentielle des efforts, dont l'intégrale $\frac{8b^3cx^5}{5p^4} - \frac{10bbcx^6}{3p^4} + \frac{18bcx^7}{7p^4} - \frac{7cx^8}{8p^4} + \frac{cx^9}{9bp^4}$ est égale à la somme des efforts, qui étant divisée par celle des momens ou l'intégrale de $\frac{4b^3cx^3dx - 8bbcx^4dx + 5bcx^5dx - cx^6dx}{bp^3}$, c'est-à-dire, par $\frac{bbcx^4}{p^3} - \frac{8bcx^5}{5p^3} + \frac{5cx^6}{6p^3} - \frac{cx^7}{7bp^3}$, donnera

$$\left\{\frac{\frac{8b^3cx^5}{5p^4} - \frac{10bbcx^6}{3p^4} + \frac{18bcx^7}{7p^4} - \frac{7cx^8}{8p^4} + \frac{cx^9}{9bp^4}}{\frac{bbcx^4}{p^3} - \frac{8bcx^5}{5p^3} + \frac{5cx^6}{6p^3} - \frac{cx^7}{7bp^3}}.\right\}$$

pour la distance de l'axe de mouvement DBF au centre de percussion de la portion indéterminée BMSP, & l'on aura $\frac{187a}{228}$ pour la distance de l'axe de mouvement au centre de percussion du solide ABCH, parce que N devenant G, x devient b, & qu'à la place de b^6 & de b^8 on prend leurs valeurs a^3p^3, & a^4p^4.

PROBLEME XXXV.

Les mêmes choses étant posées comme dans le Problême précédent, trouver le centre de percussion du solide ABCH tournant autour de AC. (*Fig.* 179.)

L'on a $\frac{2bbcx^2dx - 3bcx^3dx + cx^4dx}{bpp}$ égale à la différentielle des poids de la portion indéterminée B M S P qui étant multipliée par $a - y$, ou $a - \frac{2bx + xx}{p}$ (en prenant pour y sa valeur $\frac{2bx - xx}{p}$) donnera $\frac{2abbcxxdx - 3abcx^3dx + acx^4dx}{bpp}$ $- \frac{4b^3cx^3dx + 8bbcx^4dx - 5bcx^5dx + cx^6dx}{bp^3}$ pour la différentielle des momens, qui étant encore multipliée par $a - \frac{2bx + xx}{p}$ donnera $\frac{2a^2b^2cx^2dx - 3a^2bcx^3dx + a^2cx^4dx}{bpp}$ $- \frac{8ab^3cx^3dx + 16ab^2cx^4dx - 10abcx^5dx + 2acx^6dx}{bp^3}$ $+ \frac{8b^4cx^4dx - 20b^3cx^5dx + 18bbcx^6dx - 7bcx^7dx + cx^8dx}{bp^4}$ pour la différentielle des efforts dont l'intégrale $\frac{2aabcx^3}{3pp}$ $- \frac{3aacx^4}{4pp} + \frac{aacx^5}{5bpp} - \frac{2abbcx^3}{p^3} + \frac{16abcx^5}{5p^3} - \frac{5acx^6}{3p^3}$ $+ \frac{2acx^7}{7bp^4} + \frac{8b^3cx^4}{5p^4} - \frac{10bbcx^6}{3p^4} + \frac{18bcx^7}{7p^4} - \frac{7cx^8}{8p^4}$ $+ \frac{cx^9}{9bp^4}$ est égale à la somme des efforts, qui étant divisée par celle des momens ou l'intégrale de $\frac{2abbcxxdx - 3abcx^3dx + acx^4dx}{bpp}$ $- \frac{4b^3cx^3dx + 8bbcx^4dx - 5bcx^5dx + cx^6dx}{bp^3}$, c'est-à-dire par $\frac{2abcx^3}{3pp} - \frac{3acx^4}{4pp} + \frac{acx^5}{5bpp} - \frac{bbcx^3}{p^3} + \frac{8bcx^5}{5p^3}$ $- \frac{5cx^6}{6p^3} + \frac{cx^7}{7bp^3}$ donnera

$$\frac{\frac{2a^2bcx^3}{3pp} - \frac{3a^2cx^4}{4pp} + \frac{a^2cx^5}{5bpp} - \frac{2ab^3cx^3}{p^3} + \frac{16abcx^5}{5p^3} - \frac{5acx^6}{3p^3} + \frac{2acx^7}{7bp^4} + \frac{8b^4cx^5}{5p^4} - \frac{10b^2cx^6}{3p^4} + \frac{18bcx^7}{7p^4} - \frac{7cx^8}{8p^4} +}{\frac{2abcx^3}{3pp} - \frac{3acx^4}{4pp} + \frac{acx^5}{5bpp} - \frac{bbcx^3}{p^3} + \frac{8bcx^5}{5p^3} - \frac{5cx^6}{6p^3} + \frac{cx^7}{7bp^3}}$$

pour la distance de l'axe de mouvement A au centre de percussion de la portion A P S M C, & l'on aura $\frac{570}{344}$ pour la distance de l'axe de mouvement au centre de percussion du solide A B C H, parce que N devenant G, x devient b, & qu'à la place de b^4, de b^6, de b^8, on prend leurs valeurs $aapp$, a^3p^3, & a^4p^4.

FIN.

TABLE

DU CONTENU EN CET OUVRAGE.

SECTION PREMIERE.

Où l'on traite de la section de différens corps en général.

PROPOSITION PREMIERE. *De la section du cone parallelement à son côté,* Page 1
PROP. II. *De la section oblique du cone,* 2
PROP. III. *De la section parallele à l'axe du cone,* 3
PROP. IV. *De la section du cone pour former une hyperbole,* 4
PROP. V. *De la section du cone par des plans obliques paralleles entre eux,* ibid.
PROP. VI. *De la section d'un paraboloïde par un plan perpendiculaire à sa base,* 6
PROP. VII. *De la section oblique d'un paraboloïde,* 7
PROP. VIII. *De la section oblique d'un paraboloïde par des plans paralleles entre eux,* 8
PROP. IX. *De la section d'un sphéroïde par un plan perpendiculaire au petit axe,* 9
PROP. X. *De la section oblique d'un sphéroïde long,* 12
PROP. XI. *De la section oblique d'un sphéroïde long par des plans paralleles entre eux,* ibid.
PROP. XII. *De la section d'un hyperboloïde par un plan perpendiculaire à sa base,* 14
PROP. XIII. *De la section oblique d'un hyperboloïde pour former une ellipse,* 15

PROP. XIV. *De la section de l'hyperboloïde pour former une parabole*, 17
PROP. XV. *De la section de l'hyperboloïde pour former une hyperbole*, 18
PROP. XVI. *De la section d'un paraboloïde pour former une parabole*, 19
PROP. XVII. *De la section d'un sphéroïde long pour former une ellipse*, ibid.
PROP. XVIII. *De la maniere de décrire une hyperbole sur des hyperboles formées par la section d'un hyperboloïde*, 20
PROP. XIX. *De la maniere de décrire une parabole sur des ellipses formées par la section d'un paraboloïde*, 22
PROP. XX. *De la maniere de décrire une ellipse sur des ellipses formées par la section d'un sphéroïde long.* ibid.
PROP. XXI. *De la maniere de décrire une hyperbole par des ellipses formées par la section d'un hyperboloïde*, 25
PROP. XXII. *De la comparaison de la section du cone & de celle de l'hyperboloïde*, 25
PROP. XXIII. *De la section d'un solide engendré par la révolution d'un espace déterminé autour du second axe de l'hyperbole pour former un triangle*, 26
PROP. XXIV. *De la section d'un solide engendré par la révolution d'un espace déterminé autour du second axe prolongé de l'hyperbole pour former un rectangle*, ibid.
PROP. XXV. *De la section d'un solide engendré, comme les précédens, pour former une hyperbole*, 27
PROP. XXVI. *De la section d'un solide engendré de même que les précédens, pour former une parabole*, 28
PROP. XXVII. *De la section d'un solide pareil aux précédens, pour former une ellipse*, 29
PROP. XXVIII. *De la maniere de décrire une hyperbole sur des hyperboles formées par la section d'un solide engendré comme les précédens*, 30
PROP. XXIX. *De la section d'un solide, engendré comme les précédens, pour former une portion de parabole*, 31
PROP. XXX. *De l'égalité d'un espace infini à l'aire d'un triangle provenus par des sections particulieres d'un solide, engendré comme les précédens*, 33

PROP. XXXI. *De la maniere de décrire une hyperbole sur des ellipses formées par la section d'un solide engendré comme les précédens*, 35

PROP. XXXII. *Les courbes qui terminent la section d'un solide semblable aux précédens, faite par un plan perpendiculaire à sa base, sont deux demi-hyperboles*, ibid.

PROP. XXXIII. *De la maniere de décrire une demi-ellipse sur des hyperboles formées par la section d'un solide semblable aux précédens*, 36

SECTION II.

Examen des sections particulieres du cilindre & du cone de différens genres.

PROP. I. *De la section oblique du cilindre pour former une parabole*, 38

PROP. II. *De la section du cilindre parabolique pour former une parabole*, 39

PROP. III. *De la section du cilindre hyperbolique pour former une hyperbole*, ibid.

PROP. IV. *Autre section du cilindre hyperbolique, pour former la même courbe*, 40

PROP. V. *De la section du cilindre parabolique cubique, pour former une parabole cubique*, ibid.

PROP. VI. *Autre section d'un cilindre parabolique cubique, pour former une parabole cubique*, 41

PROP. VII. *De la section du cilindre elliptique cubique pour former une ellipse cubique*, ibid.

PROP. VIII. *De la section d'un cone parabolique pour former une hyperbole*, 42

PROP. IX. *De la section d'un cone parabolique pour former une portion de parabole*, 43

PROP. X. *De la section d'un cone parabolique pour former une portion d'ellipse*, ibid.

PROP. XI. *De la section du cone parabolique pour former une demi-hyperbole*, 44

PROP. XII. *D'une section particuliere du cone parabolique pour former une hyperbole,* 45

PROP. XIII. *De la section du cone parabolique pour former une demi-ellipse,* 46

PROP. XIV. *Troisiéme maniere de couper le cone hyperbolique pour former une hyperbole,* 48

PROP. XV. *De la section du cone hyperbolique pour former une portion de parabole,* ibid.

PROP. XVI. *Quatriéme maniere de couper le cone hyperbolique pour former une parabole,* 49

PROP. XVII. *De la section du cone hyperbolique pour former une portion d'ellipse,* ibid.

PROP. XVIII. *De la section du cone hyperbolique pour former une parabole,* 50

PROP. XIX. *De la section du cone parabolique cubique pour former une hyperbole seconde cubique,* 51

PROP. XX. *De la section du cone parabolique cubique pour former la portion d'une parabole seconde cubique,* 52

PROP. XXI. *De la section d'un cone parabolique cubique pour former la portion d'une ellipse seconde cubique,* ibid.

PROP. XXII. *De la section du cone parabolique cubique pour former une portion d'hyperbole seconde,* 54

PROP. XXIII. *De la section du cone elliptique cubique pour former une hyperbole seconde cubique,* 56

PROP. XXIV. *Autre section du cone elliptique cubique pour former une hyperbole seconde cubique,* ibid.

PROP. XXV. *De la section du cone elliptique cubique pour former une hyperbole cubique,* 57

PROP. XXVI. *De la section du cone elliptique cubique pour former une ellipse hyperbolique cubique,* ibid.

PROP. XXVII. *De la section du cone elliptique cubique pour former une hyperbole réciproque,* 58

PROP. XXVIII. *De la section du cone hyperbolique cubique pour former une hyperbole seconde cubique,* 61

PROP. XXIX. *De la section du cone hyperbolique cubique pour former une portion d'hyperbole cubique,* ibid.

PROP. XXX. *De la section du cone hyperbolique cubique pour former une portion d'ellipse hyperbolique cubique,* 62

PROP. XXXI. *Autre section du cone hyperbolique cubique pour former une portion d'ellipse hyperbolique cubique,* 63

PROP. XXXII. *De la section du cone hyperbolique cubique pour former une portion d'une ellipse cubique,* 64

PROP. XXXIII. *De la propriété des sections hyperboliques faites sur un cone parabolique,* ibid.

PROP. XXXIV. *De la propriété des portions de parabole faites par des sections du cone parabolique,* 65

PROP. XXXV. *De la propriété des portions d'ellipses formées par des sections du cone parabolique,* 66

PROP. XXXVI. *Description d'une courbe qui a cette propriété que le quarré d'une ordonnée est au quarré d'une autre ordonnée quelconque en une raison déterminée,* 67

PROP. XXXVII. *De la génération d'un solide dont la section forme une figure de même genre que la figure génératrice,* 68

PROP. XXXVIII. *La section d'un solide engendré comme le précédent, faite par un plan quelconque, est une ellipse,* 69

SECTION III.

Résolution de plusieurs Problêmes de la cubation des solides.

PROBLEME PREMIER. *Trouver la valeur d'une portion de cilindre circulaire coupé par un plan,* 71

PROBL. II. *Trouver la valeur d'une portion d'un cilindre parabolique coupé par un plan,* 72

PROBL. III. *Trouver la valeur d'une portion quelconque d'un cilindre parabolique coupé par un plan qui passe par un point de son côté & par l'axe de sa base,* 73

PROBL. IV. *Trouver la valeur d'une portion quelconque d'un cilindre parabolique cubique coupée par un plan qui passe par un point de son côté & par l'ordonnée à l'axe de la base,* 74

PROBL. V. *Trouver la valeur d'une portion quelconque d'un cilindre parabolique cubique coupé par un plan qui passe par un point de son côté & par l'axe de sa base,* 75

PROBL. VI. *Trouver la valeur d'une portion quelconque d'un ci-*

lindre elliptique cubique coupé par un plan qui passe par un point de son côté & par le second axe de sa base, ibid.

PROBL. VII. *Trouver la valeur d'une portion d'un cilindre hyperbolique coupée par un plan qui passe par un point de son côté & par le prolongement du premier axe de sa base,* 76

PROBL. VIII. *Trouver la valeur du solide formé par la révolution d'une demi-parabole autour d'une ligne parallele à son axe,* 77

PROBL. IX. *Trouver la valeur d'un solide creux formé par la révolution d'une demi-parabole autour d'une ligne parallele à l'ordonnée,* 78

PROBL. X. *Trouver la valeur d'un solide creux formé par la révolution d'une demi-parabole autour d'une ligne parallele à son axe,* 79

PROBL. XI. *Trouver la valeur d'un solide creux formé par la révolution d'une demi-parabole autour d'une ligne parallele à l'ordonnée,* 80

PROBL. XII. *Trouver la valeur du solide formé par la révolution d'une demi-parabole autour de la tangente,* 81

PROBL. XIII. *Trouver la valeur du solide formé par la révolution d'une demi-parabole autour d'une ligne parallele à la tangente,* 82

PROBL. XIV. *Trouver la valeur du solide formé par la révolution d'une demi-parabole autour d'une ligne quelconque, tirée par le sommet de cette courbe,* 83

PROBL. XV. *Trouver la valeur du solide formé par la révolution d'une demi-parabole autour d'une ligne quelconque, faisant un angle avec l'axe prolongé,* 85

PROBL. XVI. *Trouver la valeur du solide formé par la révolution d'une demi-parabole autour d'une ligne quelconque, tirée par l'extrémité de l'axe,* 86

PROBL. XVII. *Trouver la valeur d'un solide formé par la révolution d'une demi-parabole autour d'une ligne quelconque, tirée d'un point de la parabole,* 87

PROBL. XVIII. *Trouver la valeur d'un espace parabolique renfermé entre un arc parabolique quelconque, un diametre & une ordonnée à ce diametre,* 89

PROBL. XIX. *Les mêmes choses étant posées que dans le problême*

me précédent, trouver la valeur du solide formé par la révolution d'un espace parallele à l'espace parabolique autour du diametre, 90
PROBL. XX. *Les mêmes choses étant posées que dans le problême XVIII, trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace déterminé dans le problême XIX, autour d'une ordonnée,* 91
PROBL. XXI. *Les mêmes choses étant posées comme ci-dessus, trouver la valeur du solide formé par la révolution du même espace autour de la tangente,* 92
PROBL. XXII. *Toutes choses existant comme auparavant, trouver la valeur du solide formé par la révolution du même espace autour d'une ligne parallele au diametre,* 93
PROBL. XXIII. *Les mêmes choses étant posées, trouver la valeur du solide formé par la révolution du même espace, autour d'une ligne perpendiculaire sur le diametre,* 94
PROBL. XXIV. *Trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace renfermé entre l'arc parabolique, le diametre & une partie de l'ordonnée à l'axe d'une parabole autour du diametre de cette courbe,* 95
PROBL. XXV. *Les mêmes choses étant posées que dans le problême précédent, trouver la valeur du solide formé par la révolution d'un espace déterminé autour de l'ordonnée,* ibid.
PROBL. XXVI. *Les mêmes choses étant posées, trouver la valeur du solide formé par la révolution du même espace autour d'une ligne parallele à l'axe.* 96
PROBL. XXVII. *Toutes choses existant toujours, trouver la valeur du solide formé par la révolution du même espace autour d'une ligne parallele à l'ordonnée,* 97
PROBL. XXVIII. *Les mêmes choses étant posées, trouver la valeur du solide formé par la révolution du même espace autour de l'axe,* 98
PROBL. XXIX. *Trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace hyperbolique, enfermé entre un arc hyperbolique, une ligne parallele au premier axe prolongé & une partie d'une ordonnée à cet axe autour de l'axe prolongé,* 99
PROBL. XXX. *Trouver la valeur du solide elliptique formé par la révolution de l'espace renfermé entre l'arc elliptique & une ligne parallele à l'axe, autour de ce même axe,* 100

PROBL. XXXI. *Trouver la valeur du solide formé par la révolution de la demi-ellipse autour de son diametre*, 101

PROBL. XXXII. *Trouver la valeur du solide formé par la révolution d'un espace hyperbolique autour d'une ligne donnée*, 102

PROBL. XXXIII. *Trouver la valeur du solide formé par la révolution d'un espace hyperbolique, autour d'une ligne parallele à l'ordonnée*, 103

PROBL. XXXIV. *Trouver la valeur d'une portion quelconque d'un paraboloïde coupé obliquement par un plan*, 104

PROBL. XXXV. *Trouver la valeur d'une portion quelconque d'un sphéroïde coupé obliquement par un plan*, 105

PROBL. XXXVI. *Trouver la portion d'un hyperboloïde coupé obliquement par un plan*, 106

PROBL. XXXVII. *Trouver la surface d'un paraboloïde*, 107

PROBL. XXXVIII. *Trouver la valeur de la surface intérieure du solide formé par la révolution d'une demi-parabole autour de la tangente au sommet*, 108

PROBL. XXXIX. *Trouver la valeur de la surface d'une portion de cilindre parabolique coupé par un plan qui passe par un point de son côté & par l'axe de sa base*, 109

PROBL. XL. *Trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace cycloïdal autour d'une ligne donnée*, 110

PROBL. XLI. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême précédent, trouver la surface intérieure du même solide*, 111

PROBL. XLII. *Les mêmes choses étant posées, comme dans le problême XL, trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace cycloïdal autour d'une ligne donnée*, 112

PROBL. XLIII. *Trouver la valeur d'un espace donné*, 114

PROBL. XLIV. *Trouver la valeur du solide d'un espace donné autour d'une ligne déterminée*, ibid.

PROBL. XLV. *Trouver la valeur de l'espace renfermé entre la demi-ellipse seconde & son axe*, 115

PROBL. XLVI. *Trouver la valeur du solide formé par la révolution d'un espace donné autour de l'axe de cet espace*, 116

PROBL. XLVII. *Trouver la valeur du solide formé par la révolution du même espace autour de la tangente*, 117

PROBL. XLVIII. *Trouver la valeur du solide formé par la ré-*

volution du même espace autour d'une ligne perpendiculaire à l'axe de cet espace, ibid.

PROBL. XLIX. *Trouver la valeur de l'espace renfermé entre une courbe & une ligne*, 118

PROBL. L. *Trouver la valeur du solide formé par la révolution d'un espace donné autour d'une ligne donnée*, 119

PROBL. LI. *Trouver la valeur du solide formé par la révolution du même espace autour d'une ligne perpendiculaire à l'axe de révolution du problême précédent*, 120

PROBL. LII. *Autre solution du problême précédent*, ibid.

PROBL. LIII. *Trouver la valeur du solide formé par la révolution du même espace autour d'une tangente*, 121

PROBL. LIV. *Trouver la valeur du solide infini formé par la révolution de l'espace infini renfermé entre la cissoïde, sa base & son assymptote*, 122

PROBL. LV. *Trouver la valeur du solide infini formé par la révolution de l'espace infini renfermé entre la cissoïde, sa base & son assymptote, autour de ce même assymptote*, 123

PROBL. LVI. *Trouver la valeur du solide que composent des cercles déterminés par des ellipses paraboliques*, 124

SECTION IV.

Contenant la résolution de plusieurs Problêmes de statique pour trouver la pesanteur des figures & des corps.

Notions & définitions préliminaires, 128

PROBLEME I. *Trouver le centre de pesanteur d'une demi-parabole*, 129

PROBL. II. *Trouver le centre de pesanteur de la parabole*, 130

PROBL. III. *Trouver le centre de pesanteur de l'espace renfermé entre deux demi-paraboles elliptiques*, 131

PROBL. IV. *Trouver le centre de pesanteur de l'espace renfermé entre la demi-parabole elliptique & une ligne donnée*, 132

PROBL. V. *Trouver le centre de pesanteur de l'espace renfermé entre deux demi-ellipses secondes*, 134

PROB. VI. *Trouver le centre de pesanteur de l'espace renfermé entre une demi-ellipse seconde & une ligne donnée,* ibid.

PROBL. VII. *Trouver le centre de pesanteur de l'espace renfermé entre une courbe particuliere qui a une propriété donnée,* 136.

PROBL. VIII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême précédent, trouver le centre de pesanteur d'un autre espace renfermé dans la même courbe,* 137

PROBL. IX. *Trouver le centre de pesanteur renfermé entre des courbes égales & semblables, dont on connoît la propriété,* 138

PROBL. X. *Ayant deux demi-paraboles dont les axes soient égaux, trouver le centre de pesanteur de la figure qu'elles forment,* 139

PROBL. XI. *Deux demi-paraboles dont les axes sont égaux & un rectangle étant donnés, trouver le centre de gravité de la figure qu'ils forment,* 140

PROBL. XII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême précédent, trouver le centre de pesanteur d'une autre figure,* 141

PROBL. XIII. *Ayant deux demi-paraboles égales renfermées entre des paralleles, trouver le centre de pesanteur de la figure qu'elles forment,* 142

PROBL. XIV. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême précédent, trouver le centre de pesanteur d'une autre figure,* ibid.

PROBL. XV. *Les mêmes choses étant posées que dans le problême IX, trouver le centre de pesanteur de l'espace,* 143

PROBL. XVI. *Toutes choses posées comme ci-dessus, trouver le centre de pesanteur d'une figure qui s'y forme par l'addition d'un rectangle,* 144

PROBL. XVII. *Les mêmes choses étant toujours posées, trouver le centre de pesanteur d'un autre espace,* 145

PROBL. XVIII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême VIII, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution d'une demi-parabole autour d'une ligne donnée,* 146

PROBL. XIX. *Les choses étant posées comme dans le neuviéme problême, trouver le centre de pesanteur du solide creux formé par la révolution de la demi-parabole autour d'une ligne parallele à l'ordonnée,* 147

PROBL. XX. *Les mêmes choses étant posées comme dans le dixié-*

me problême, trouver le centre de pesanteur du solide creux formé par la révolution d'une demi-parabole autour d'une ligne parallele à l'axe, 148
PROBL. XXI. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême XI, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution d'une demi-parabole autour d'une ligne parallele à l'ordonnée,* 149
PROBL. XXII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême XII de la troisiéme section, trouver le centre de pesanteur du solide,* 150
PROBL. XXIII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême XIX de la troisiéme section, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace autour d'une ligne donnée,* 151
PROBL. XXIV. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême XX, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace autour d'une ligne donnée,* 152
PROBL. XXV. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme XXI, trouver le centre de pesanteur autour de l'espace autour de la tangente,* 153
PROBL. XXVI. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême XXIII, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution d'un espace autour d'une ligne donnée,* 154
PROBL. XXVII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême XXIV, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace autour d'une ligne donnée,* 155
PROBL. XXVIII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême XXV, trouver le centre de pesanteur du solide,* 156
PROBL. XXIX. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême XXVI, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace autour d'une ligne donnée,* ibid.
PROBL. XXX. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême XXVII, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace autour d'une ligne donnée,* 157
PROBL. XXXI. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême XXVIII, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace autour d'une ligne donnée,* 158
PROBL. XXXII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le pro-*

blême XXIX, trouver le centre de pesanteur du solide engendré par la révolution de l'espace hyperbolique autour d'une ligne donnée, ibid.

PROBL. XXXIII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême XXX, trouver le centre de pesanteur du solide engendré par la révolution de l'espace elliptique autour d'une ligne donnée,* 159

PROBL. XXXIV. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême XXXIV de la section troisiéme, trouver le centre de pesanteur de la portion oblique parabolique,* 160

PROBL. XXXV. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême XXXV de la troisiéme section, trouver le centre de pesanteur de la portion oblique elliptique,* ibid.

PROBL. XXXVI. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême XXXVI de la troisiéme section, trouver le centre de pesanteur de la portion oblique hyperbolique,* 161

PROBL. XXXVII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême XL de la troisiéme section, trouver le centre de pesanteur du solide,* 162

PROBL. XXXVIII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le quarante-septiéme problême de la troisiéme section, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace autour de la tangente,* ibid.

PROBL. XXXIX. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême XLVIII de la troisiéme section, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace autour d'une ligne donnée,* 163

PROBL. XL. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême L de la troisiéme section, trouver le centre de pesanteur du solide,* 164

PROBL. XLI. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême LI de la troisiéme section, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace autour d'une ligne donnée,* 165

PROBL. XLII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême LIII de la troisiéme section, trouver le centre de pesanteur du solide formé par la révolution de l'espace autour d'une ligne donnée,* ibid.

PROBL. XLIII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême LIV, trouver la valeur du solide formé par la révolution de l'espace autour d'une ligne donnée,* 166

PROPOSITION XLIV. *Si l'on fait tourner une figure quelconque autour d'une ligne quelconque, elle décrira un solide qui sera égal au produit de la figure par la circonférence décrite par son centre de pesanteur,* 168

PROP. XLV. *Si l'on a une ligne courbe quelconque, que l'on fasse tourner autour d'une ligne droite, elle décrira une surface courbe qui sera égale au produit de la courbe par la circonférence décrite par son centre de pesanteur,* 170

PROP. XLVI. *De l'effort de l'eau contenue dans un vaisseau sur lequel on a décrit une figure dont on connoît le centre de pesanteur,* 171

PROP. XLVII. *De l'effort de l'eau contenue dans un vaisseau dont l'un des côtés est incliné à l'horison,* ibid.

PROP. XLVIII. *L'effort de l'eau contre la surface du vaisseau qui la contient est égal au produit de cette surface par la hauteur de l'eau, prise depuis son centre de gravité jusques à la superficie supérieure de l'eau,* 172

SECTION V.

Où l'on donne la maniere de trouver le centre de percussion des figures & des corps, avec la résolution de plusieurs problêmes.

Principe général pour trouver le centre de percussion des corps, 173

PROBLEME I. *Les mêmes choses étant posées que dans le problême III de la section troisiéme, trouver le centre de percussion de l'espace tournant autour d'une ligne,* 174

PROBL. II. *Les mêmes choses étant posées comme dans le problême précedent, trouver le centre de percussion de l'espace autour d'une ligne différente de la precédente,* 175

PROBL. III. *Les mêmes choses étant posées que dans le problême V de la quatriéme section, trouver le centre de percussion de la figure tournant autour d'une ligne,* 176

PROBL. IV. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme précédent, trouver le centre de percussion de la figure tournant autour d'une autre ligne,* ibid.

PROBL. V. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme VII de la quatriéme section, trouver le centre de percussion de la figure tournant autour d'une ligne,* 177

PROBL. VI. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme précédent, trouver le centre de percussion de la figure tournant autour d'une autre ligne,* 178

PROBL. VII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme IX de la quatriéme section, trouver le centre de percussion de la figure tournant autour d'une ligne,* 179

PROBL. VIII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme précédent, trouver le centre de percussion de la figure tournant autour d'une autre ligne,* ibid.

PROBL. IX. *Ayant deux demi-paraboles qui forment une figure, trouver le centre de percussion de cette figure tournant autour d'une ligne,* 180

PROBL. X. *Les mêmes choses posées que dans le probleme précédent, trouver le centre de percussion de la figure tournant autour d'une autre ligne,* 181

PROBL. XI. *Trouver le centre de percussion d'une figure formée par deux demi-paraboles égales & qui tournent autour d'une ligne,* ib.

PROBL. XII. *Les mêmes choses étant posées que dans le probleme précédent, trouver le centre de percussion de la figure tournant autour d'une ligne,* 182

PROBL. XIII. *Ayant deux demi-paraboles égales renfermées entre des paralleles, trouver le centre de percussion de la figure qu'elles forment & qui tourne autour d'une ligne,* 183

PROBL. XIV. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probl. précédent, trouver le centre de percussion autour d'une autre ligne,* ib.

PROBL. XV. *Les mêmes choses étant posées que dans le probleme premier de la quatriéme section, trouver le centre de percussion de l'espace parabolique tournant autour d'une ligne,* 184

PROBL. XVI. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme précédent, trouver le centre de percussion de la figure tournant autour d'une autre ligne,* 185

PROBL. XVII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme*

bleme III de la quatriéme section, trouver le centre de la figure tournant autour d'une ligne, 186

PROBL. XVIII. *Les mêmes choses etant posées comme dans le probleme précédent, trouver le centre de percussion de la figure tournant autour d'une autre ligne,* 187

PROBL. XIX. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme XVI de la quatriéme section, trouver le centre de percussion de la figure tournant autour d'une ligne,* 188

PROBL. XX. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme précédent, trouver le centre de percussion de la même figure tournant autour d'une autre ligne,* 189

PROBL. XXI. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme XVIII de la quatriéme section, trouver le centre de percussion du solide tournant autour d'une ligne,* 190

PROBL. XXII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme précédent, trouver le centre de percussion du même solide tournant d'une autre ligne,* 191

PROBL. XXIII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme XL de la quatriéme section, trouver le centre de percussion du solide tournant autour d'une ligne,* 192

PROBL. XXIV. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme précédent, trouver le centre de pesanteur du solide tournant autour d'une ligne,* 193

PROBL. XXV. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme XXXVII de la quatriéme section, trouver le centre de percussion du solide tournant autour d'une ligne,* ibid.

PROBL. XXVI. *Les mêmes choses étant posees comme dans le probleme précédent, trouver le centre de percussion du même solide tournant autour d'une autre ligne,* 194

PROBL. XXVII. *Les mêmes choses choses étant posées comme dans le probleme VIII de la quatriéme section, si l'on fait tourner l'espace qu'il renferme il décrira un solide dont on propose de trouver le centre de percussion lorsqu'il tourne autour d'une ligne,* 195

PROP. XXVIII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme précédent, trouver le centre de percussion du même solide tournant autour d'une autre ligne,* 196

PROBL. XXIX. *Les mêmes choses étant posées ainsi que dans le* *probleme IX. de la quatriéme section, si l'on fait tourner la figure autour d'une ligne, elle décrira un solide dont on propose de trouver le centre de percussion lorsqu'il se meut autour d'une ligne perpendiculaire à l'axe,* 197

PROBL. XXX. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme X de la quatriéme section, si l'on fait tourner la demi-parabole autour de l'ordonnée elle engendrera un solide dont on propose de trouver le centre de percussion lorsqu'il se meut autour de cette même ordonnée,* 198

PROBL. XXXI. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme précédent, trouver le centre de percussion du solide lorsqu'il se meut autour d'une autre ligne,* ibid.

PROBL. XXXII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme XI de la quatriéme section, on fait tourner l'espace que renferme la figure, lequel engendre un solide dont on propose de trouver le centre de percussion lorsqu'il tourne autour de l'axe de révolution de l'espace,* 199

PROBL. XXXIII. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme précédent, trouver le centre de percussion du même solide tournant autour d'une autre ligne,* 200

PROBL. XXXIV. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme XIV section quatriéme, on fait tourner l'espace qui décrit un solide dont on propose de trouver le centre de percussion lorsqu'il tourne autour d'une ligne,* ibid.

PROBL. XXXV. *Les mêmes choses étant posées comme dans le probleme précédent, trouver le centre de percussion du solide tournant autour d'une autre ligne,* 201

Fin de la Table.

De l'Imprimerie de J. CHARDON.

ERRATA.

Fautes à corriger dans l'Histoire du Calcul.

Page xxix. *lig.* 16, ce qu'une quantité infiniment petite est à une quantité finie, *lisez* ce qu'une quantité finie est à une quantité infinie.

Fautes à corriger dans l'Application de la Géométrie ordinaire & des Calculs différentiel & intégral.

Page 17. *lig.* 10, *il faut lire* un plan IERV perpendiculaire &c.

Page 24. *lig.* 21, *il faut* par le Lemme 14.

Page 25. *lig.* 21, *il faut* MX × RX.

Page 27. *lig.* 11, *il faut* par la propriété de l'hyperbole.

dans la même lig. il faut $GH \times HM = \overline{AD}^2$

Page 29. *lig.* 4, *il faut* CX + CP.

même page lig. 10, *il faut* $\overline{dO}^2 - \overline{dK}^2$.

même pag. lig. 16, *il y a* ou, *il faut* or.

Page 30. *ligne* 27, *il faut* donc GI × IM. OL × PL :: &c.

Page 32. *lig.* 14, *il faut* par le Corollaire de la 14[e] Proposition.

même pag. lig. 15, *il faut* or on a vû dans le Lemme 10[e].

même pag. lig. 18, il y a *tn* × *tx*. *fm* × *fu* :: B*t* × F*t*. *f*Y × *f*X. il faut *tn* × *tx*. B*t* × F*t* :: *fm* × *fu*. *f*Y × *f*X.

Page 33. *lig.* 22, *il y a* C*t*L, *il faut* C*tl*.

même pag. lig. 25, *il faut* par le Lemme 12.

Page 34. *lig.* 16, *il y a* CT. CG :: DY. DL, *il faut* CT ou CQ. CG :: DY. DL.

même pag. l. 27 *& suiv. au lieu de* TS × SH, & de TR × RH, *il faut* TS × SQ, & TR × RQ.

Page 35. *l.* 4, au lieu de *nrmx*, il faut *nrkx*,

Page 39. *l.* 3, *au lieu de* TALV, *il faut* TKLV;

même pag. lig. 8 *& suiv. de la démonstration, au lieu de* AR. *lisez* KR,

Page 42. *lig.* 23, *il y a* donc en multipliant, *lisez* donc en multipliant ces trois dernieres proportions.

Page 43. *lig.* 18, *il y a* multipliant ces proportions, *lisez* multipliant ces trois dernieres proportions.

Page 44. *lig.* 3, *il y a* la section KE, *lisez* la section KE*nm*.

même pag. lig. 9. *il y a* multipliant terme par terme, *lisez* multipliant ces trois dernieres proportions terme par terme.

même pag. lig. 24, *il y a* est une demi-hyperbole, *lisez* est une portion d'hyperbole.

Page 45. *lig.* 3, *il y a encore* multipliant terme par terme, *lisez* multipliant ces trois dernieres proportions terme par terme.

même page ligne 5, *il y a* NI × PE :: *il faut* NI. PE :: (ce qui est fort différent.)

même pag. lig. 13, *il y a* est une demi-hyperbole, *lisez* est une portion d'hyperbole.

même pag. lig. 30, *il y a* $\overline{HI}^2$, *il faut simplement* IH.

Page 46. *lig.* 10 & 30, *il y a* est une demi-ellipse, *lisez* est une portion d'hyperbole.

même pag. lig. 20, *il y a* multipliant terme par terme, *lisez* multipliant ces trois proportions terme par terme.

Page 49, GN : IX, *lisez* GN :: IX.

Page 96. *lig.* 23, autour de BK, *lisez* autour de B*k*.

Page 103. *ligne* 2, ESEDOC, *lisez* ESFDOC.

Page 118. *lig.* 21, ADC, *lisez* ADB.

Page 139. *ligne* 13, ABC, *lisez* ACD.

Page 170. *ligne* 7 couche, *lisez* courbe.

Page 171. *ligne* 26, BF plein d'eau, *lisez* BF (*Fig.* 171.) plein d'eau.

Page 173. *ligne* 1, *après* ABD *ajoûtez* (*Pl. XXX. Fig.* 180.)

Page 182. *ligne* 16, Après ABD *ajoûtez* (*Fig.* 163.)

Page 188. *ligne* 18, ABA tournant, *lisez* ABH (*Fig.* 165.) tournant.

Page 189. *ligne* 11, ABA, *lisez* ABH.

Page 190. *ligne* 14, (*Planche* 14. *&c.*), *lisez* (*Planche* 17. *&c.*)

Page 193. *ligne* 20, (*Planche* 18 *&c.*), *lisez* (*Planche* 25. *&c.*)

Page 195. *ligne* 5, (*Planche* 21 *&c.*), *lisez* (*Planche* 30. *&c.*)

APPROBATION.

J'AI examiné par ordre de Monſeigneur le Chancelier un Manuſcrit intitulé : *Application de la Géometrie & du Calcul différentiel & intégral, à la réſolution de pluſieurs Problêmes.* Et je juge que cet Ouvrage, qui a mérité les éloges de l'Académie, ſera très-utile à ceux qui voudront faire du progrez dans les Mathématiques. A Paris ce 7 Octobre 1740.

J. DE MOLIERES.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos Amés & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire à Paris, & ordinaire pour notre Artillerie & pour le Génie, Nous a fait expoſer qu'il déſireroit faire imprimer & donner au Public, *un Nouveau Tarif pour le Toiſé de la Maçonnerie & des bois de Charpente, par le ſieur Meſange; & l'application de la Géométrie aux nouveaux Calculs, par le ſieur Robillard le fils*, s'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce néceſſaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes de faire imprimer leſdits Ouvrages en un ou pluſieurs Volumes, & autant de fois que bon lui ſemblera, & de le vendre, faire vendre & debiter par tout notre Royaume, pendant le tems de *douze* années conſécutives, à compter du jour de la date deſdites Préſentes : Faiſons défenſes à tous Libraires & Imprimeurs & autres perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, ni contrefaire leſdits Ouvrages, ni d'en faire aucun extrait ſous quelque prétexte que ce ſoit, d'augmentation, correction, changement ou autres, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Expoſant, & de tous dépens, dommages & intérêts. A la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles, que l'impreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée & attachée pour modèle ſous le contre ſcel des Préſentes ; que l'impétrant ſe conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notament à celui du 10 Avril 1725 ; qu'avant de l'expoſer en vente, le manuſcrit ou imprimé qui aura ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Livres ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en ſera enſuite remis deux exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France : le tout à peine de nullité des Préſentes. Du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Expoſant & ſes ayans cauſe pleinement & paiſiblement ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Préſentes qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin deſdits Ouvrages ſoit tenuë pour duëment ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers & Secretaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & néceſſaires ſans demander autre permiſſion, nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires. CAR tel eſt notre plaiſir. Donné à Paris le vingtième jour de Juillet l'an de grace mil ſept cens quarante-deux, & de notre Regne le vingt-cinquième. Par le Roi en ſon Conſeil.

SANSON.

Regiſtré ſur le Regiſtre XI. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 76. fol. 64. conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du 28 Février 1723. A Paris ce 6 Septembre 1742.

SAUGRAIN, *Syndic.*

2.

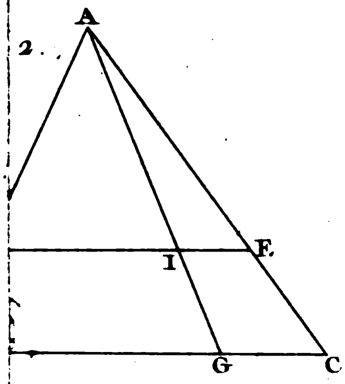
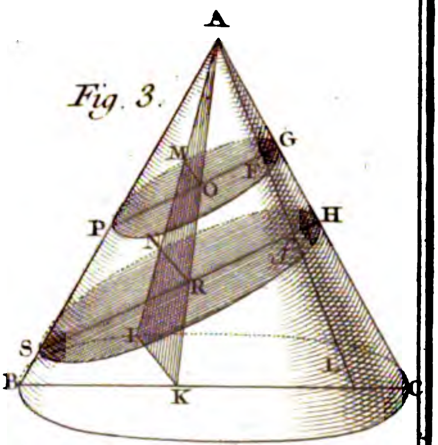


Fig. 3.



g. 5.

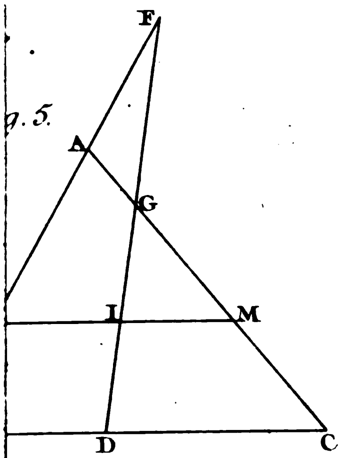
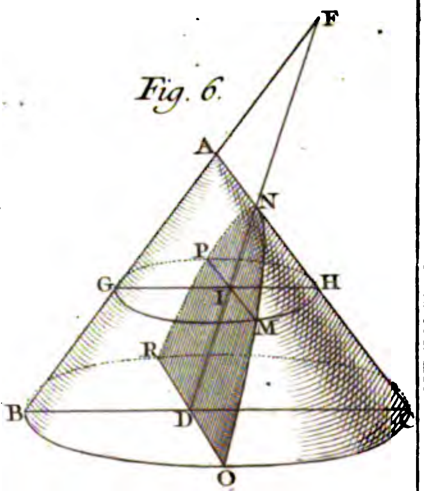


Fig. 6.



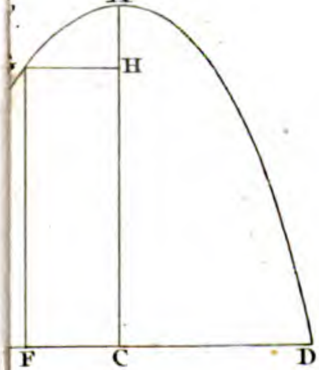
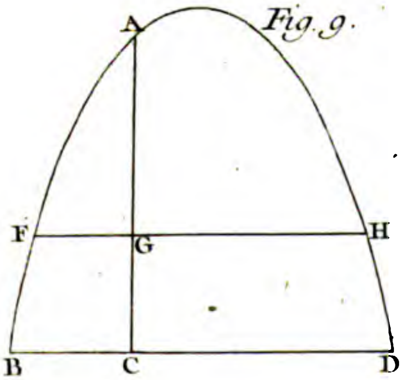
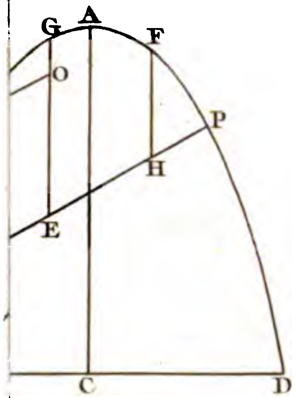


Fig. 9.





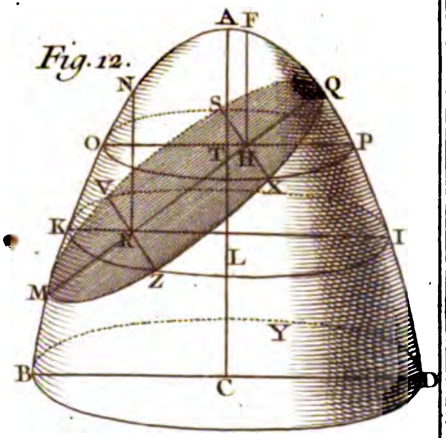


Fig. 12.

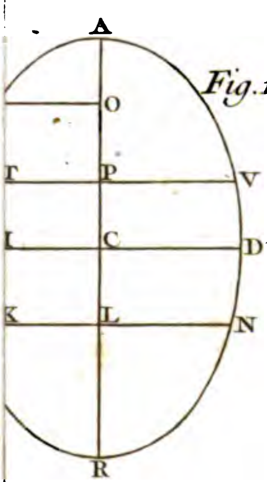


Fig. 14.

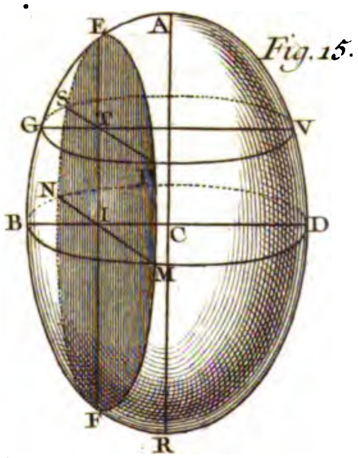


Fig. 15.

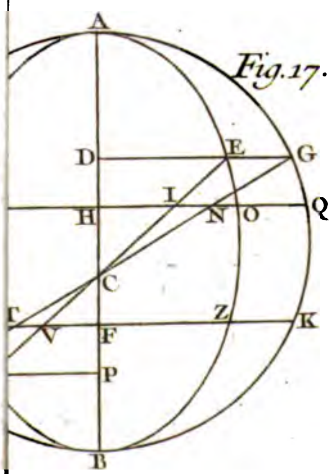


Fig. 17.

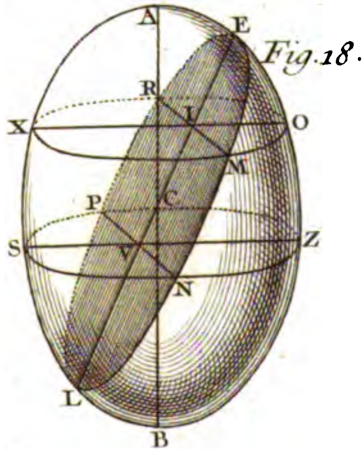


Fig. 18.

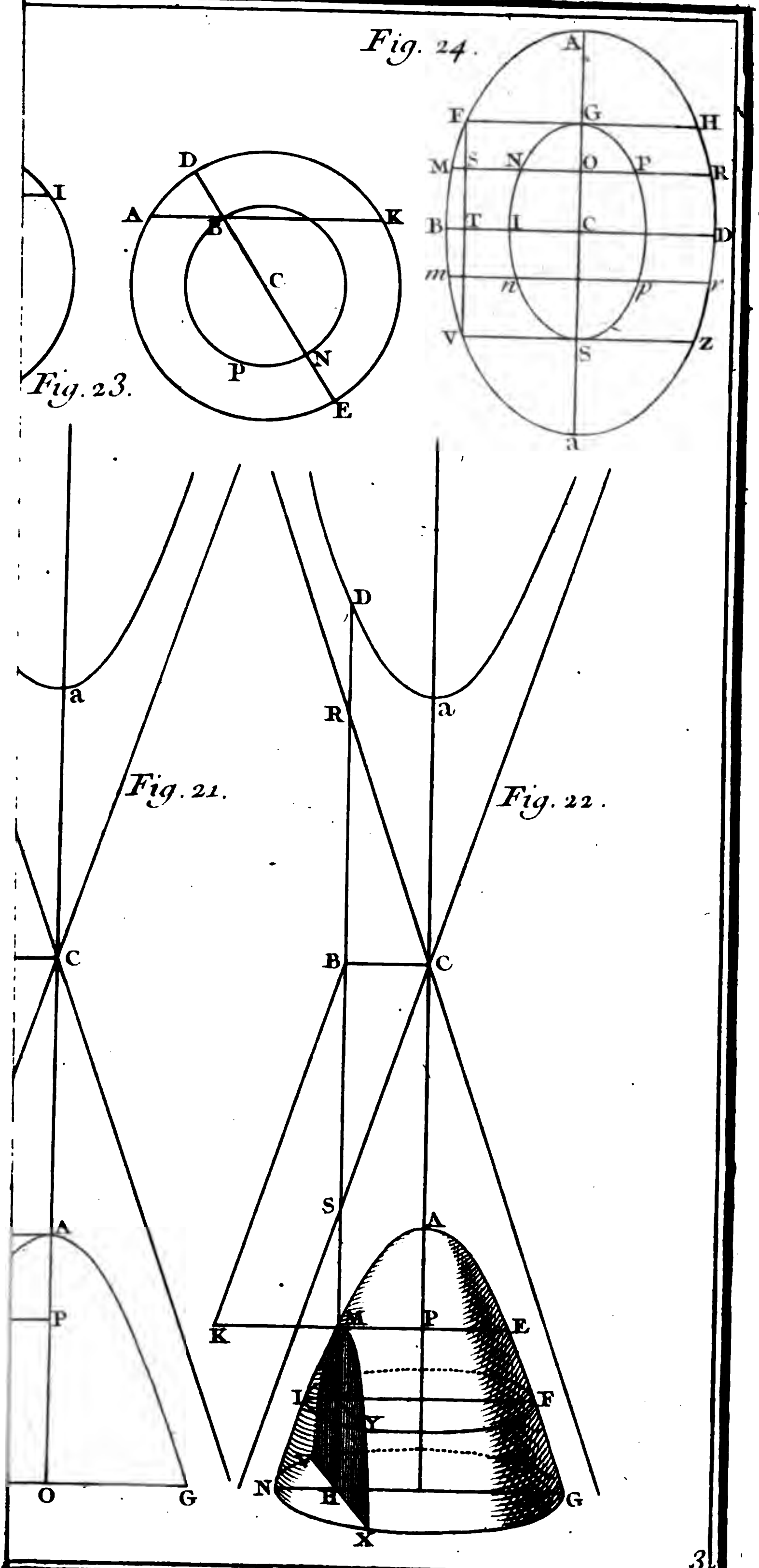


Fig. 24.
Fig. 23.
Fig. 21.
Fig. 22.

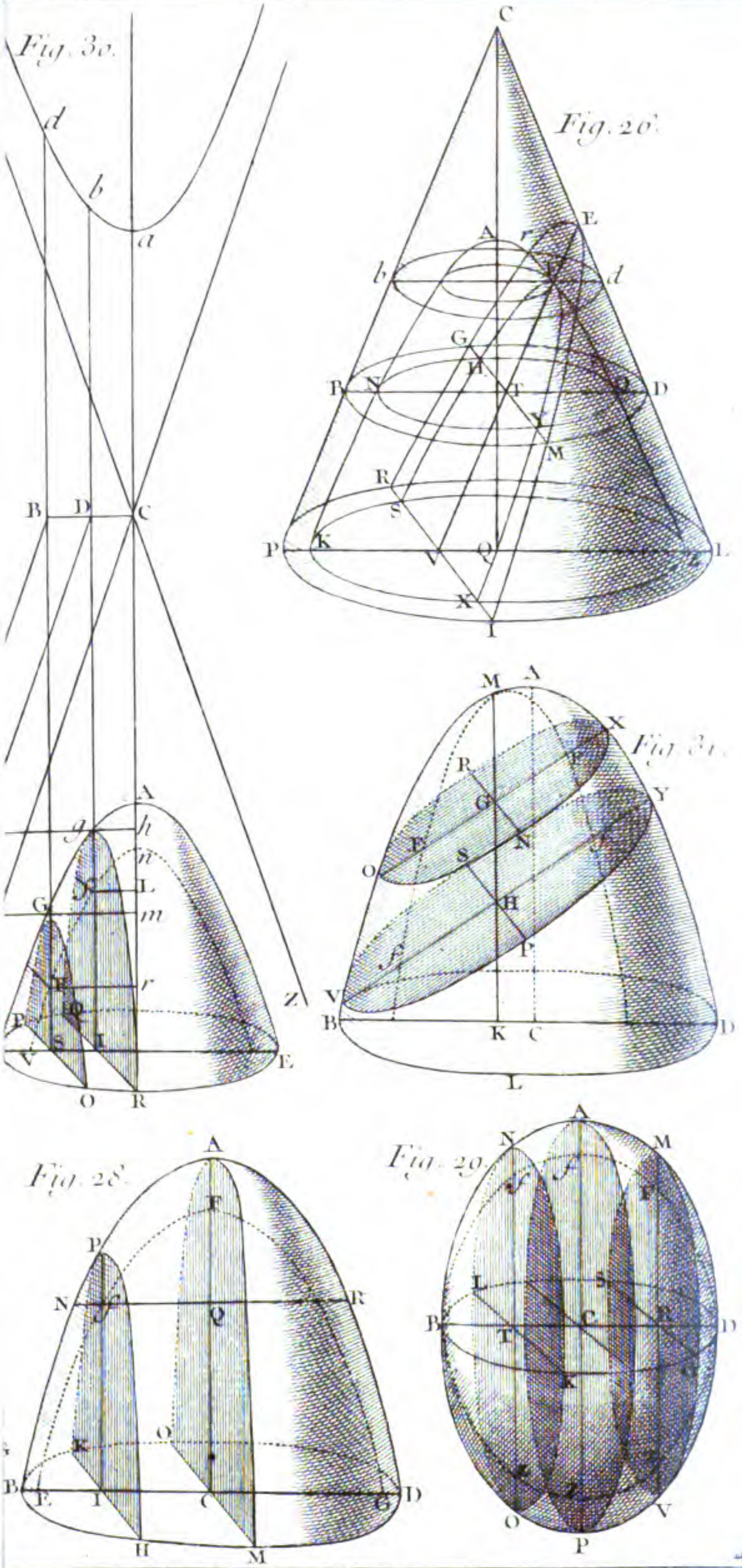


Fig. 30.
Fig. 26.
Fig. 31.
Fig. 28.
Fig. 29.

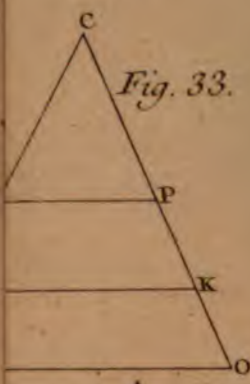


Fig. 33.

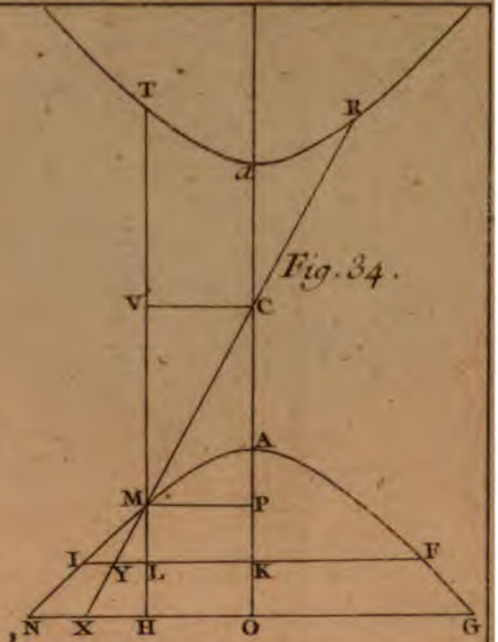
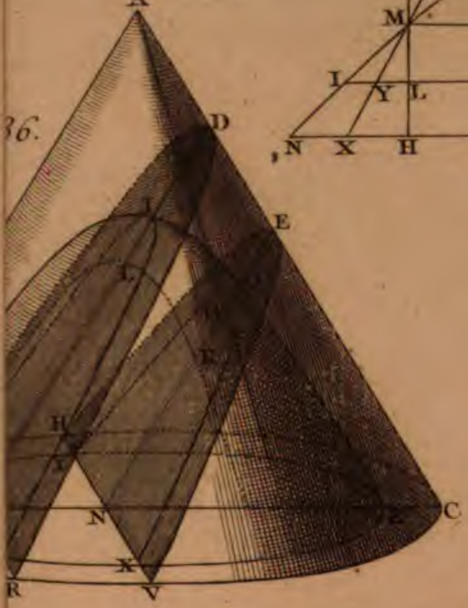


Fig. 34.



36.

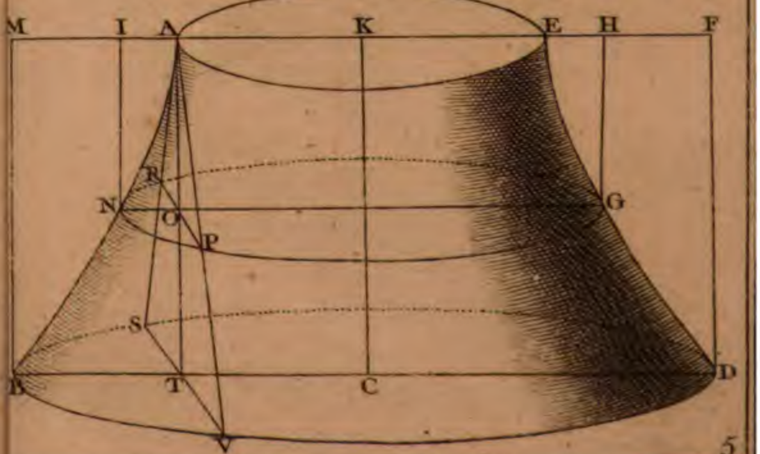


Fig. 37.

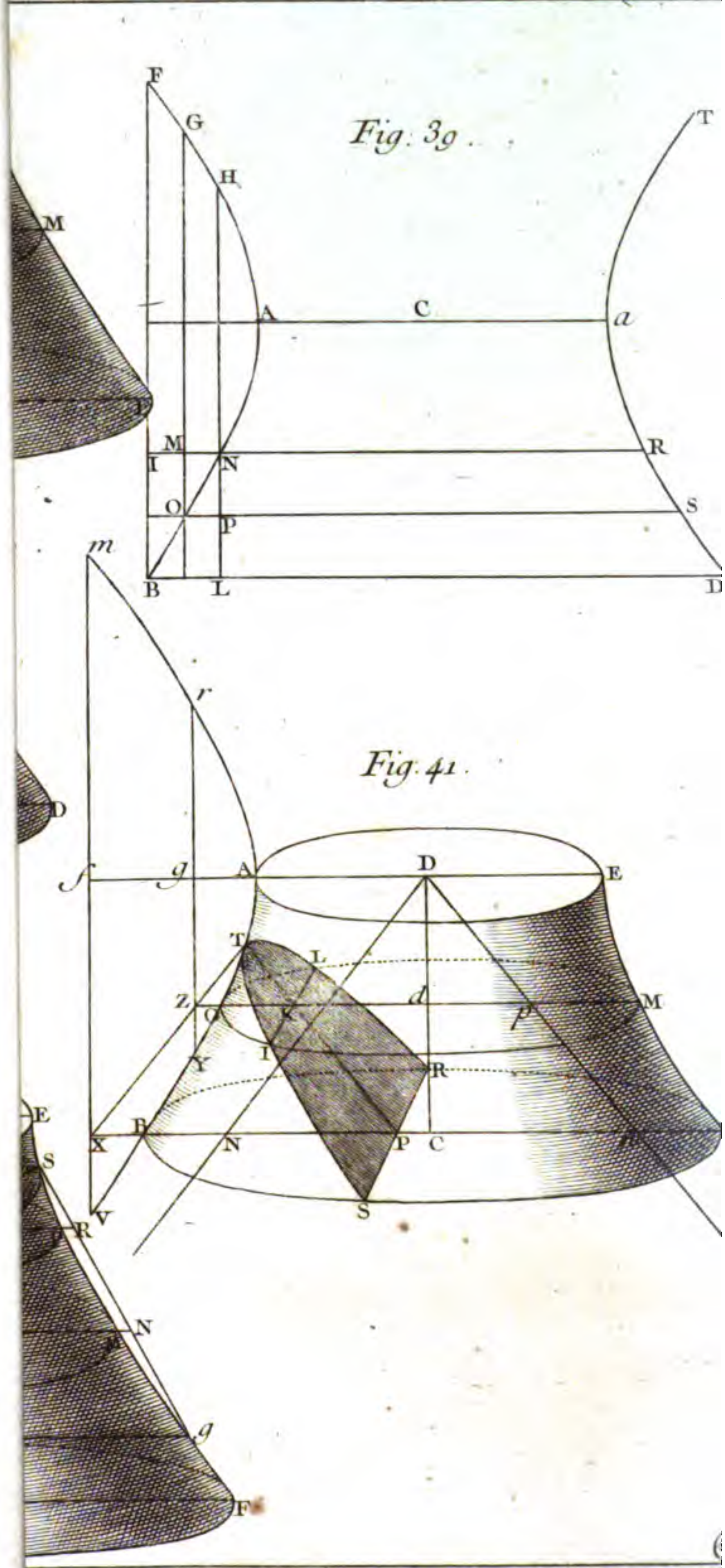
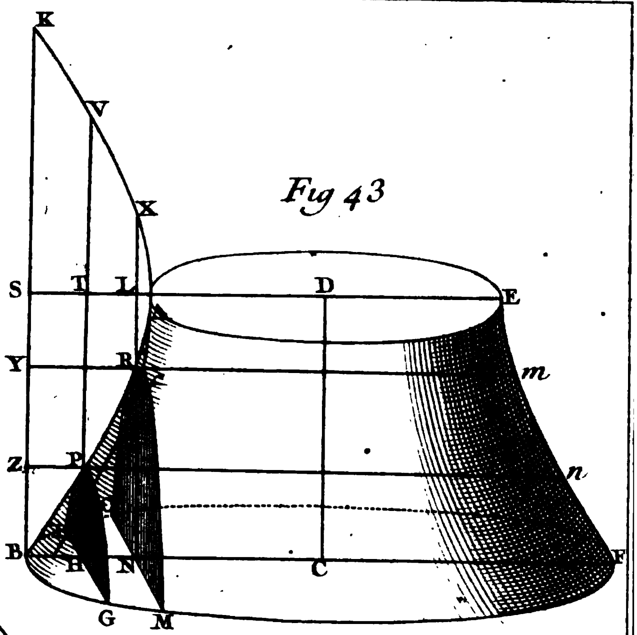


Fig: 39.

Fig. 41.

Fig 43



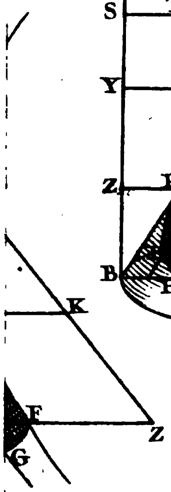
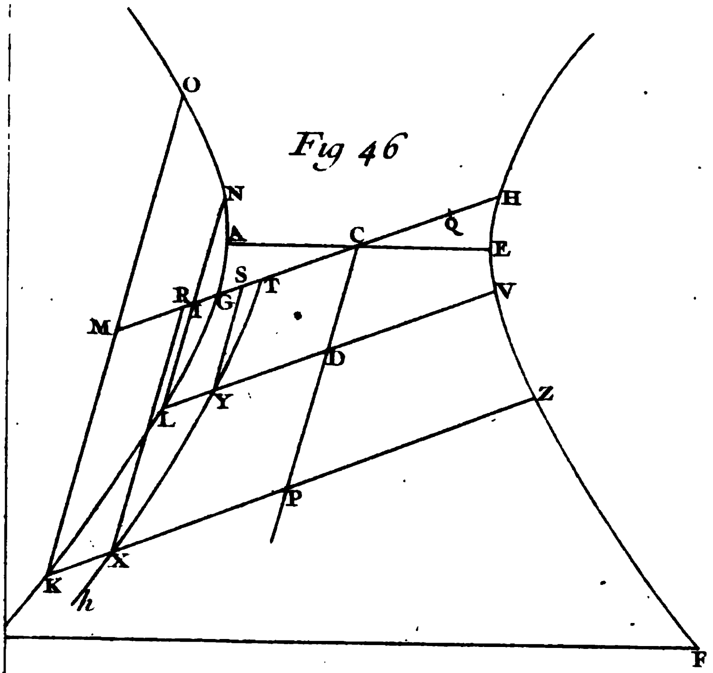
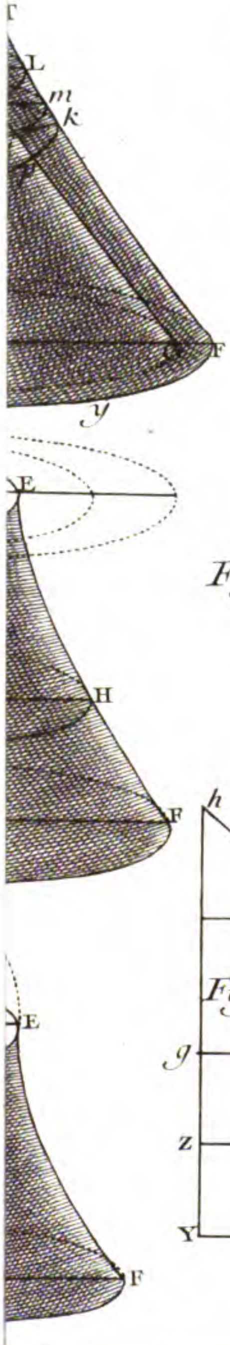


Fig 46





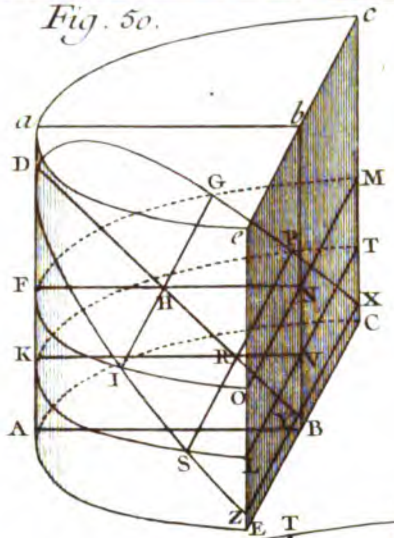


Fig. 50.

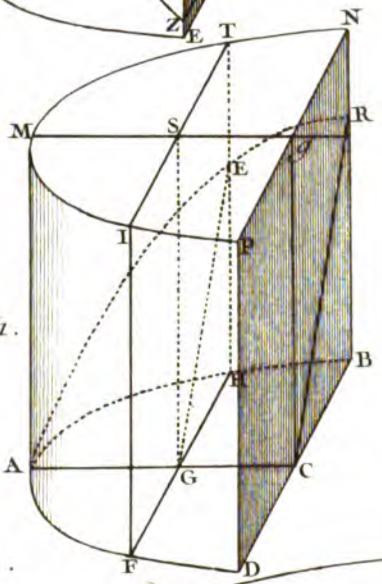


Fig. 51.

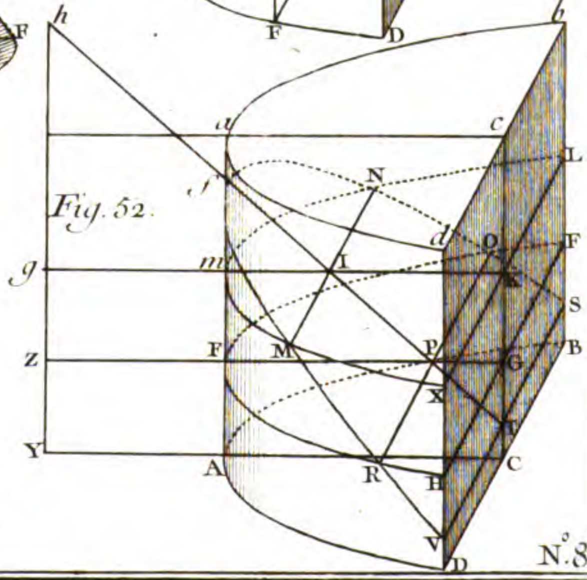


Fig. 52.

Fig. 56.

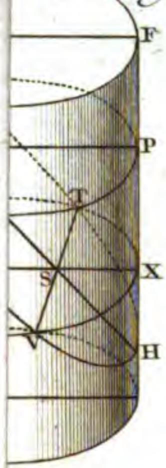


Fig. 57.

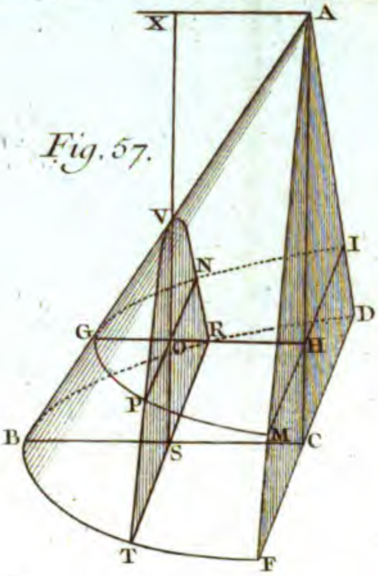


Fig. 58.

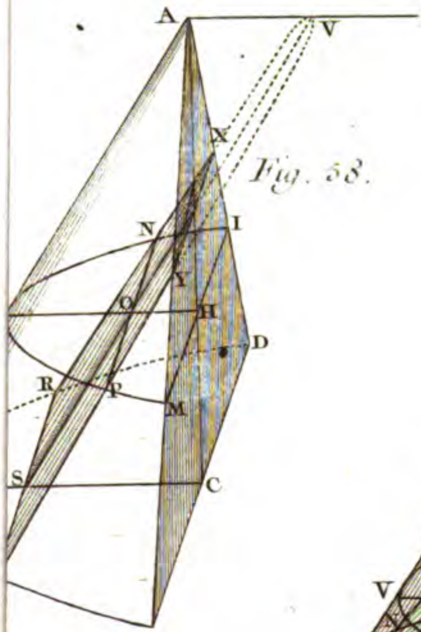
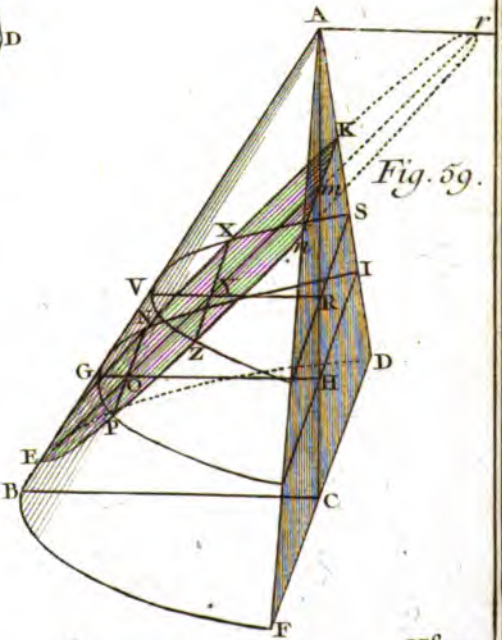


Fig. 59.



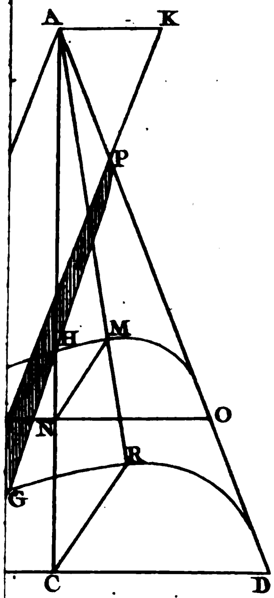


Fig. 62.

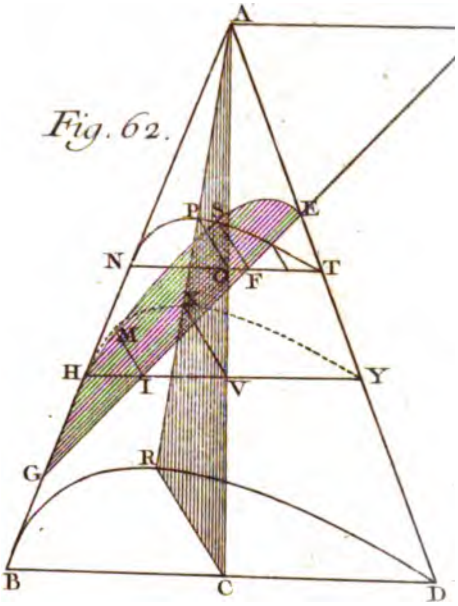


Fig. 63.

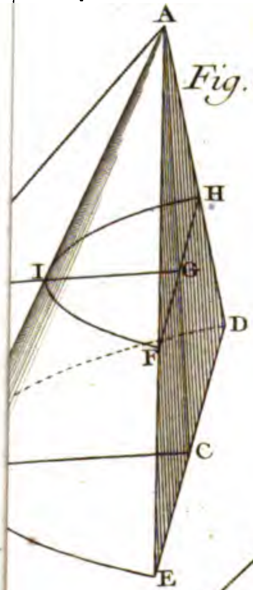


Fig. 65.

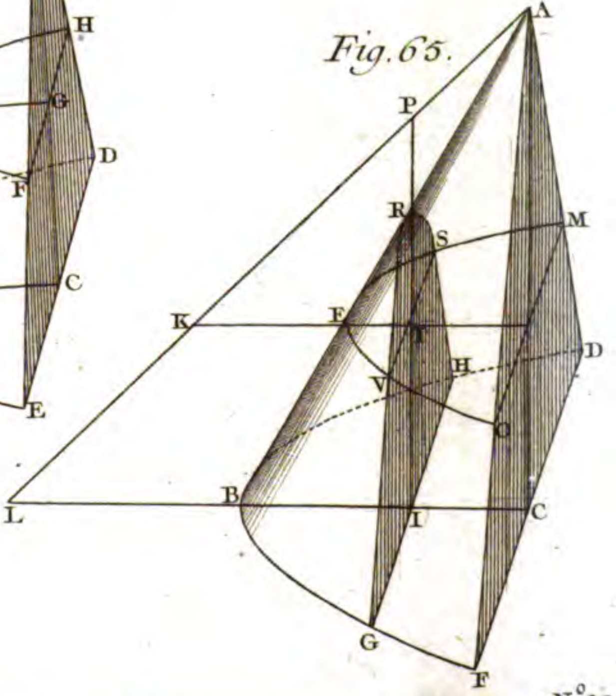


Fig. 68.

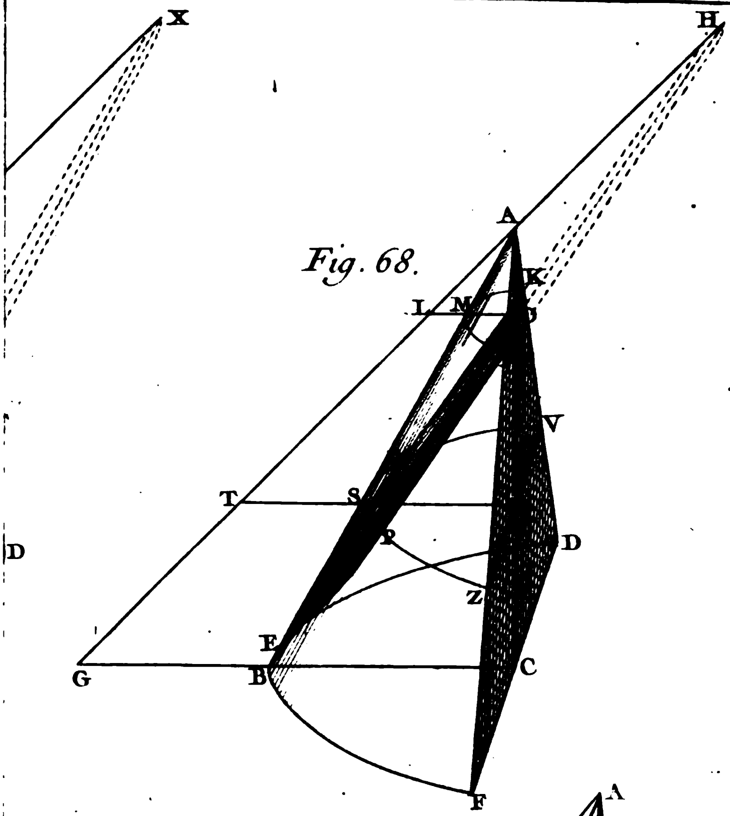
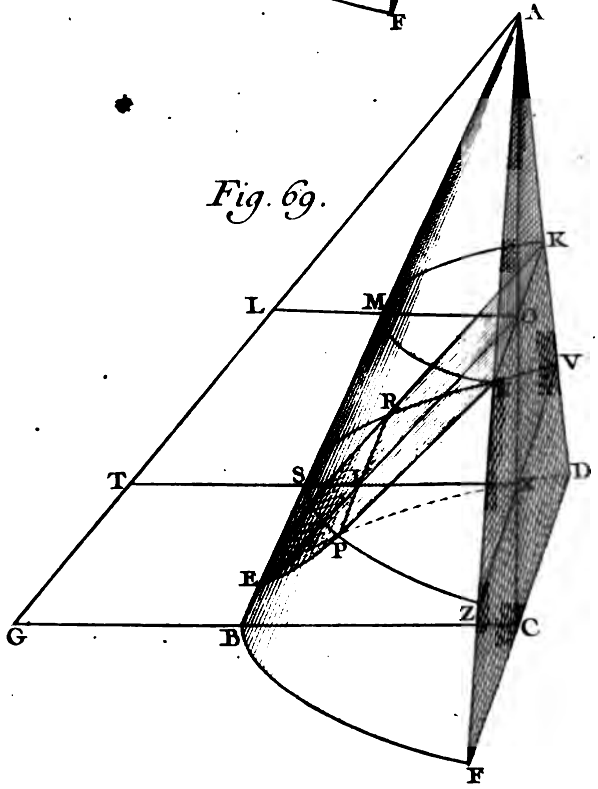


Fig. 69.



71.

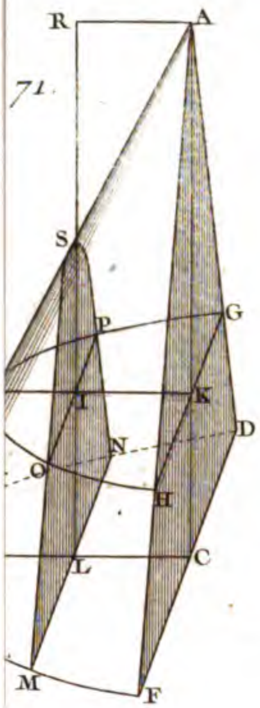


Fig. 72.

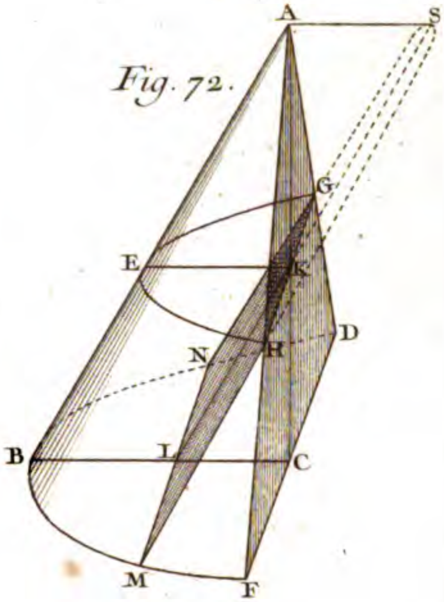


Fig. 73.

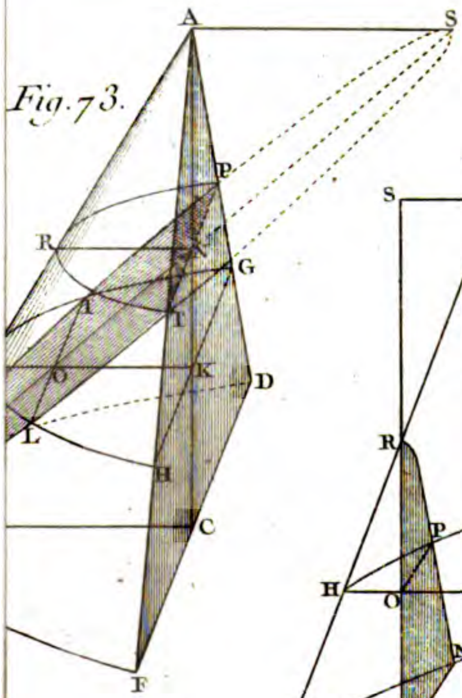
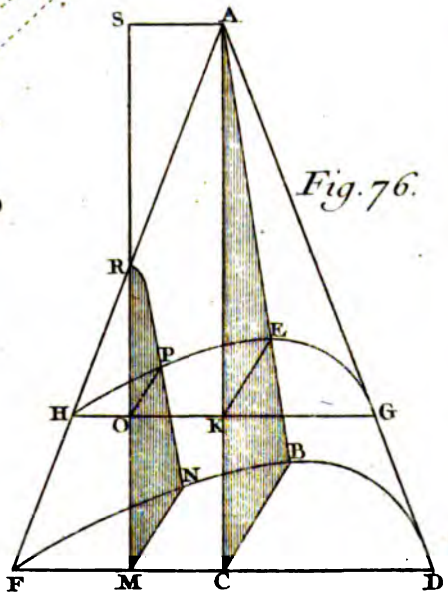


Fig. 76.



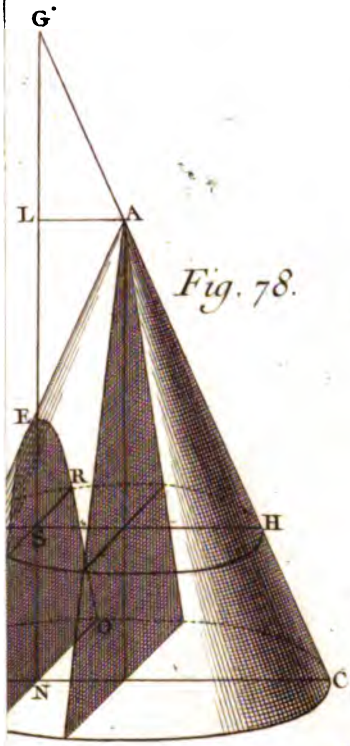


Fig. 78.

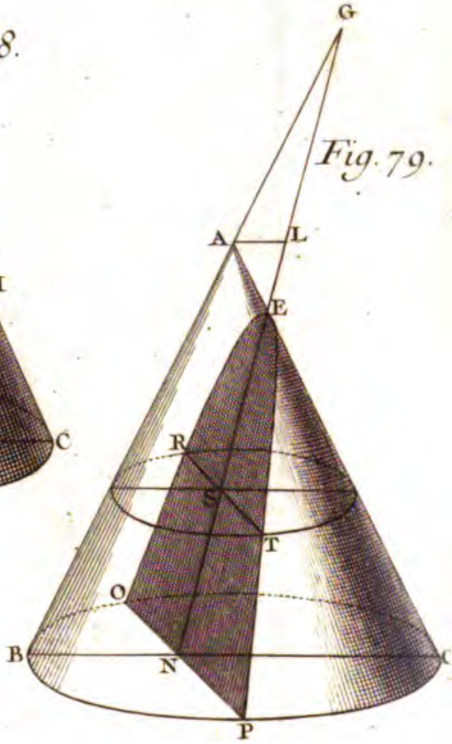


Fig. 79.

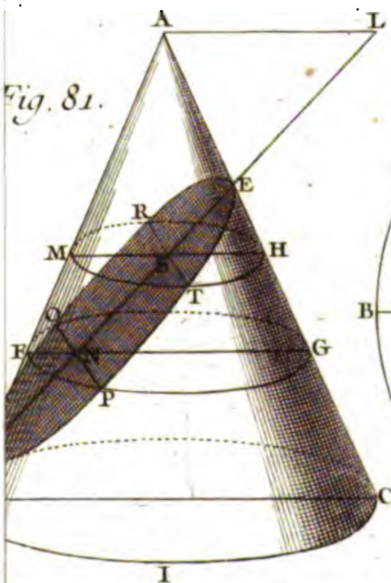


Fig. 81.

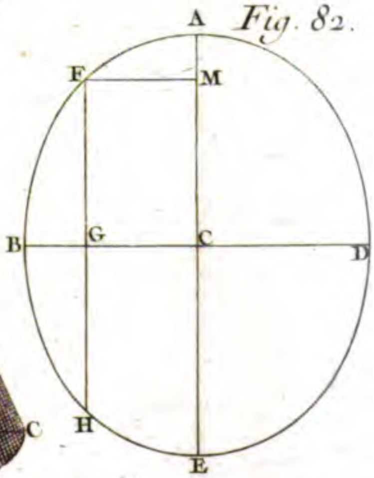


Fig. 82.

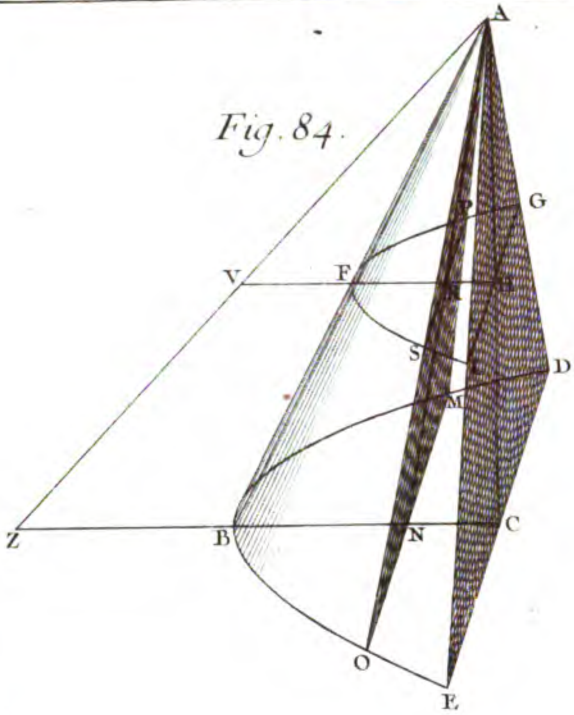


Fig. 84.

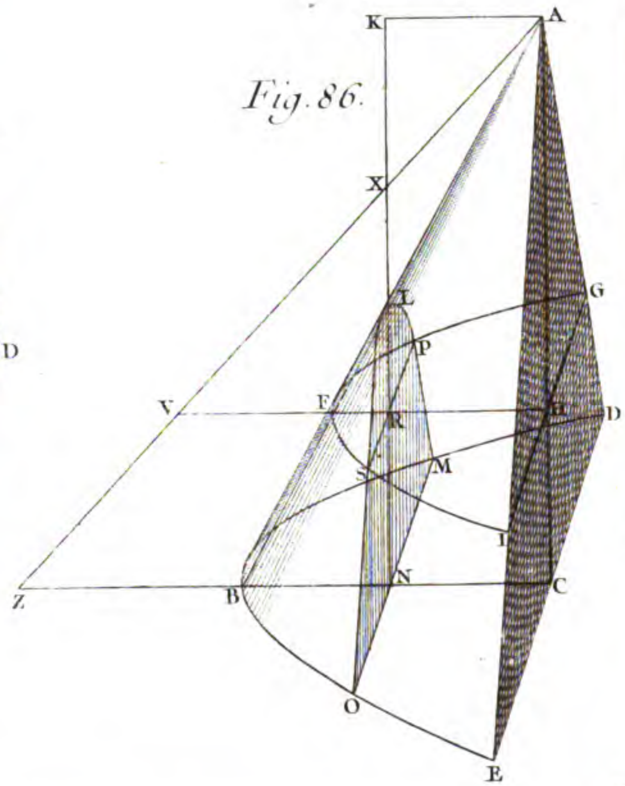


Fig. 86.

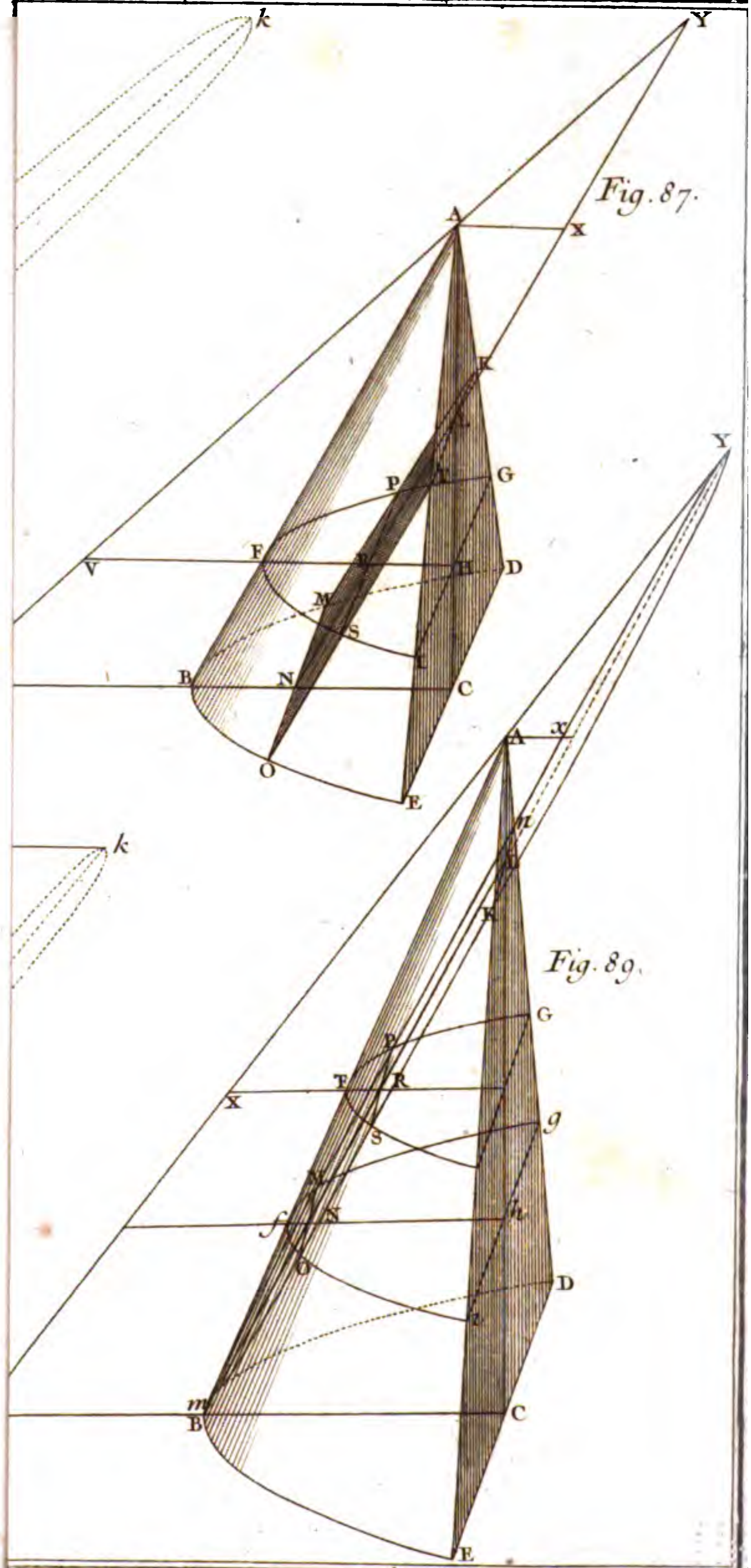


Fig. 87.
Fig. 89.

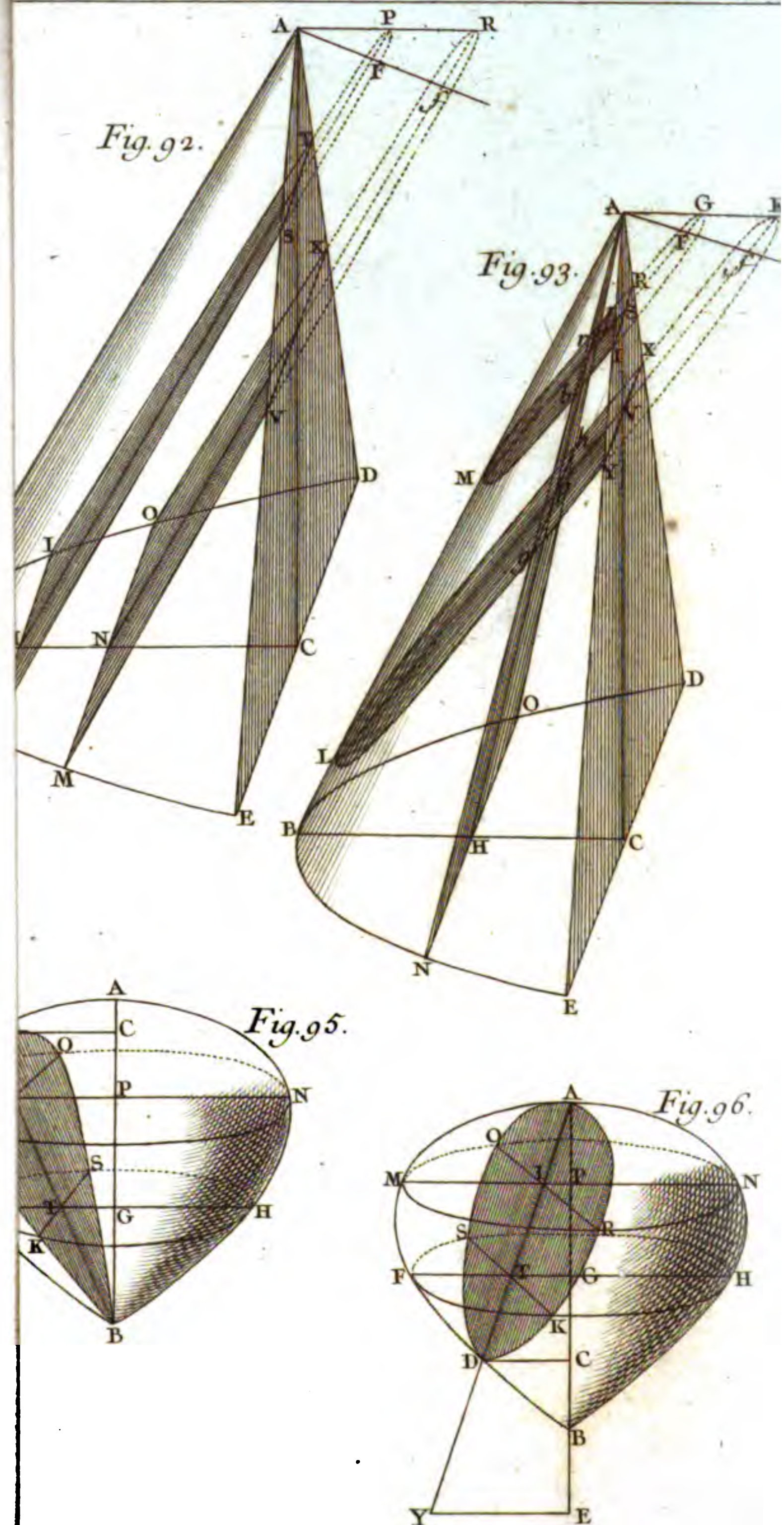
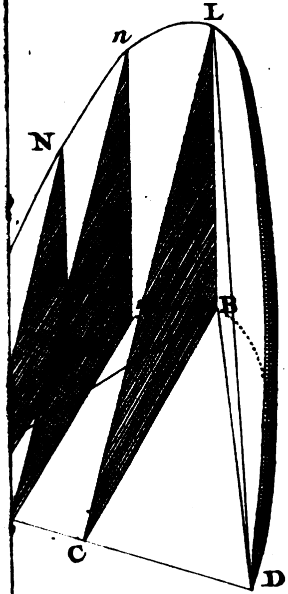


Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 95.
Fig. 96.



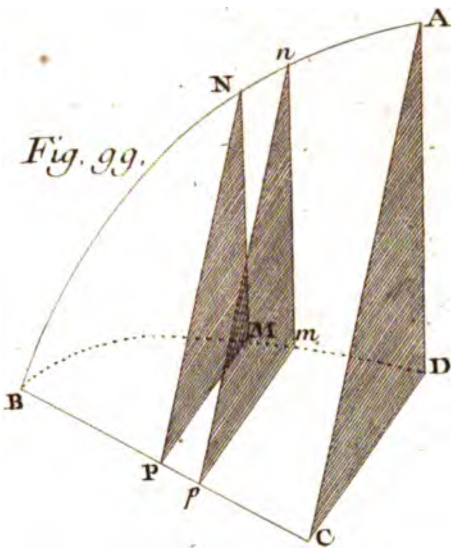


Fig. 99.

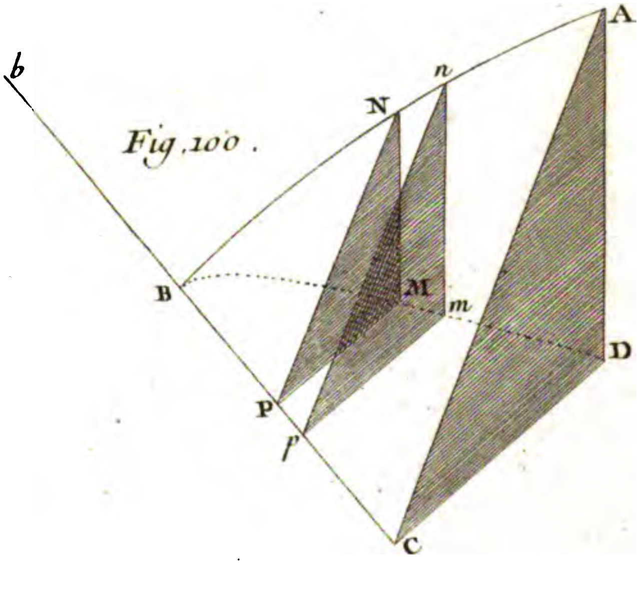
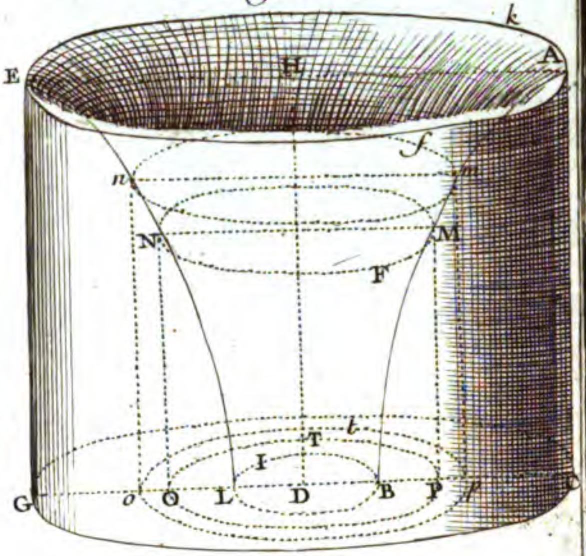


Fig. 100.

Fig. 103.



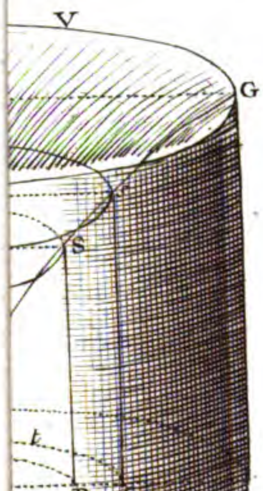


Fig. 105.

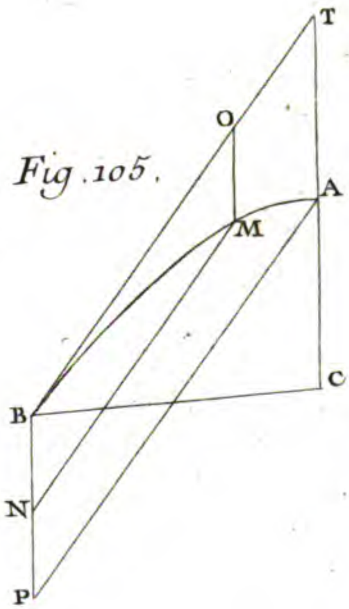
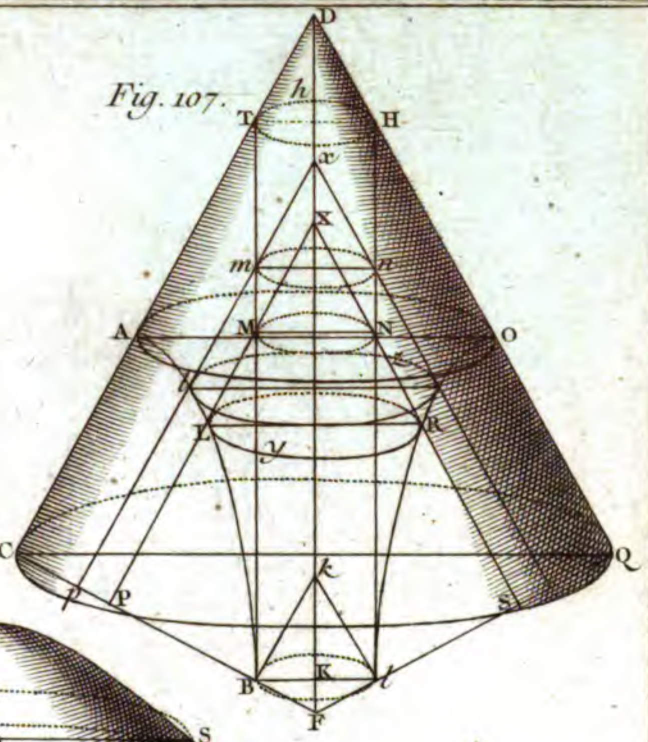


Fig. 107.



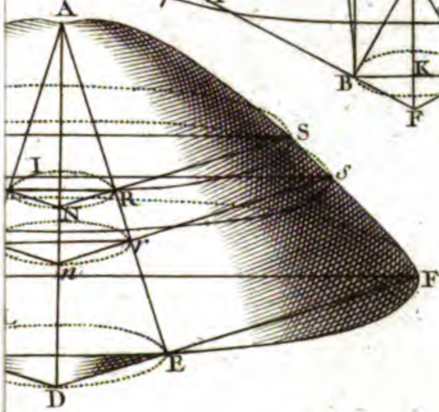
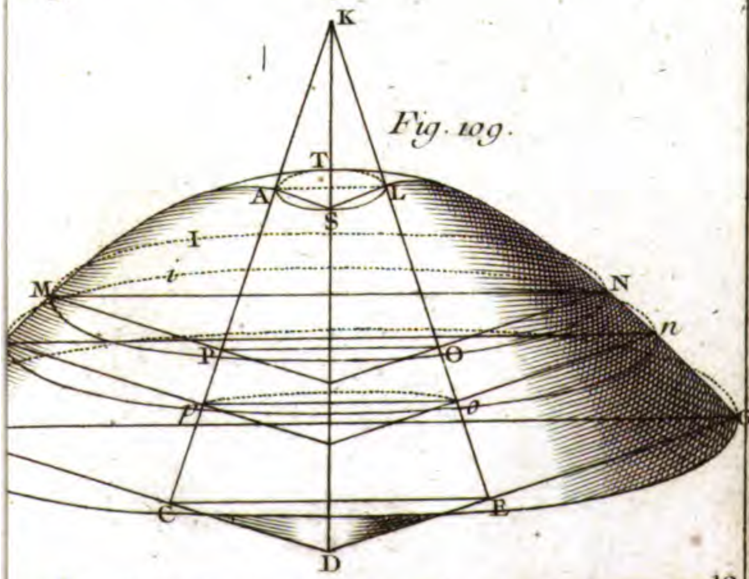


Fig. 109.



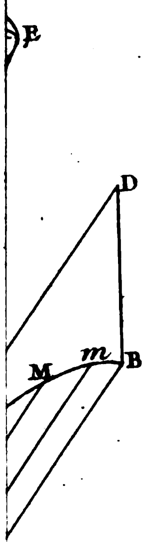


Fig. 112.

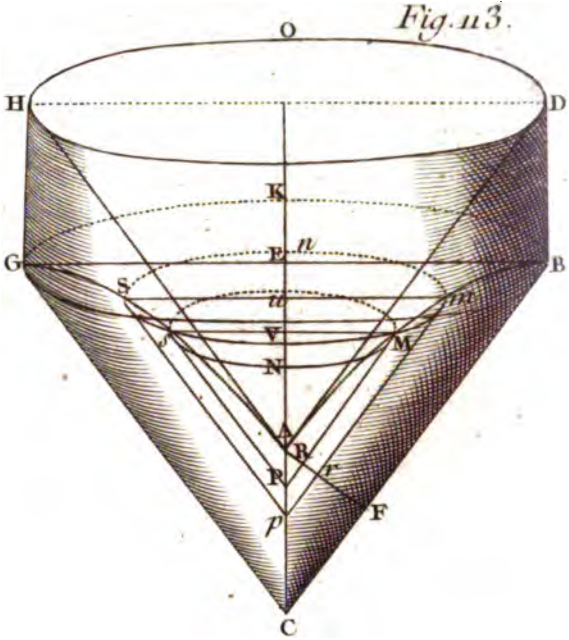


Fig. 113.

. 115.

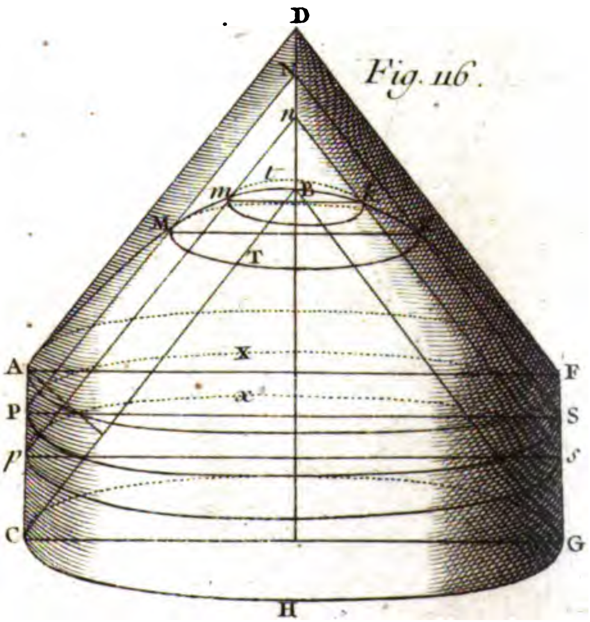


Fig. 116.

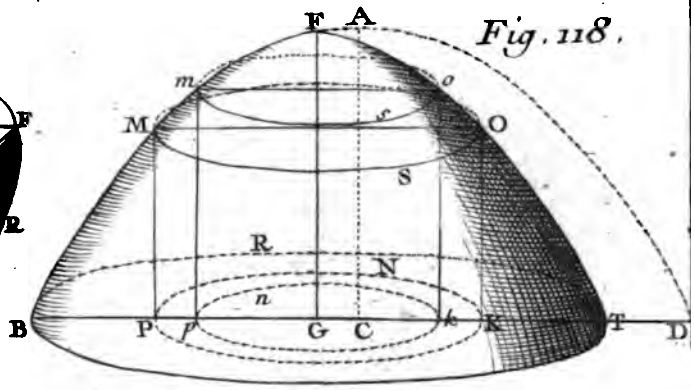


Fig . 118 .

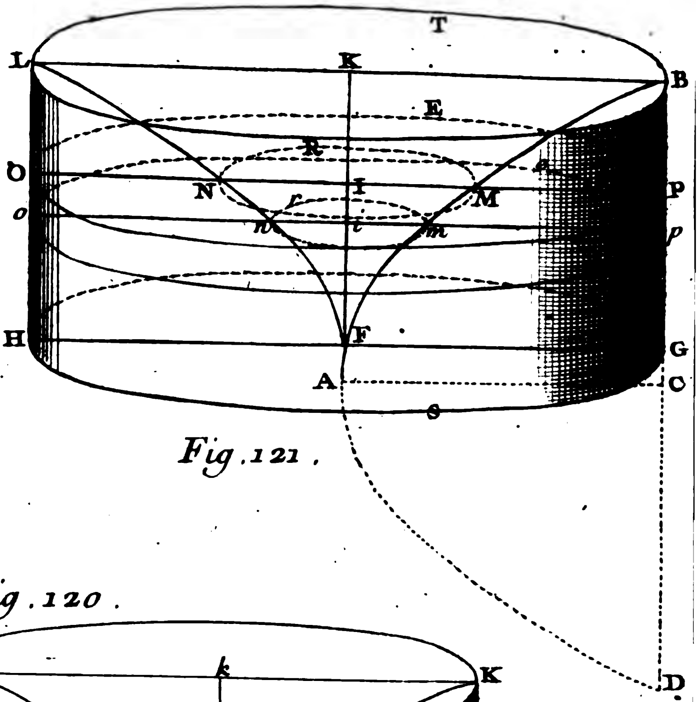
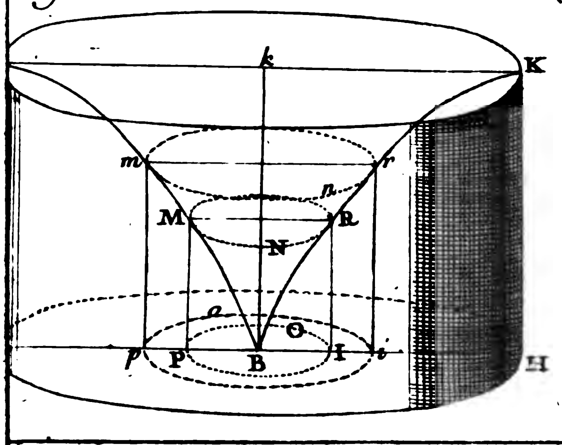


Fig . 121 .

Fig . 120 .



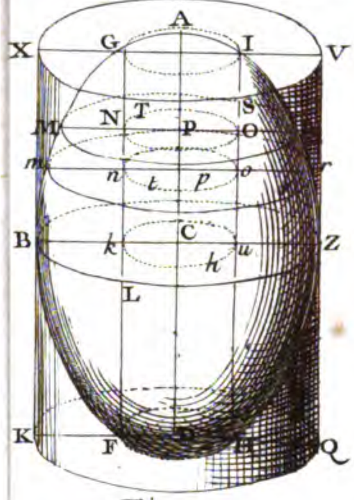


Fig. 124.

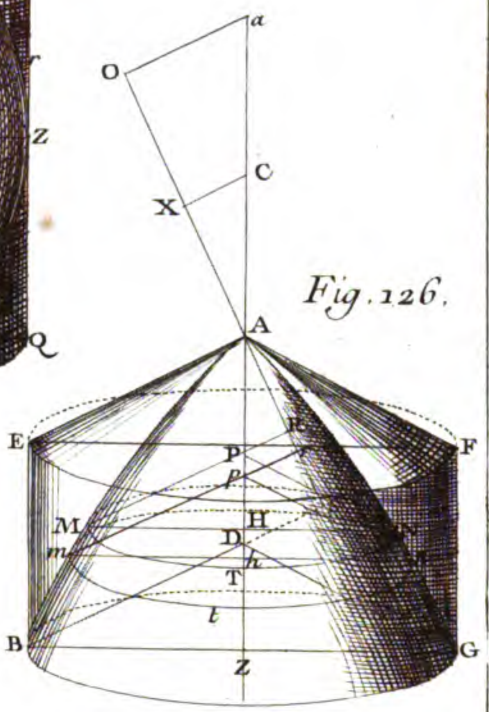


Fig. 126.

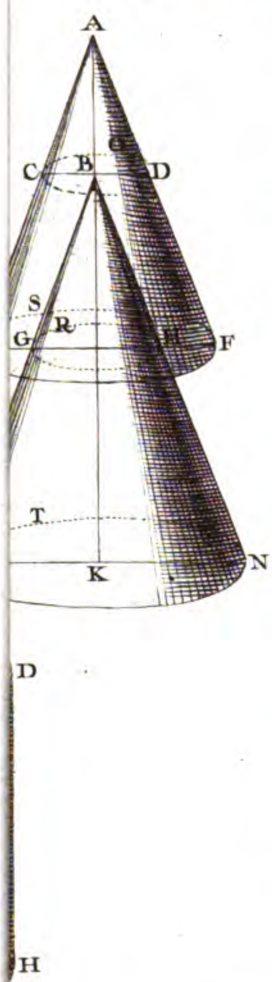


Fig. 125.

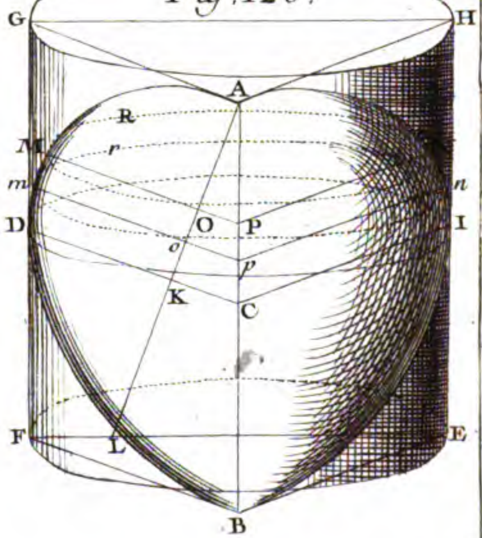
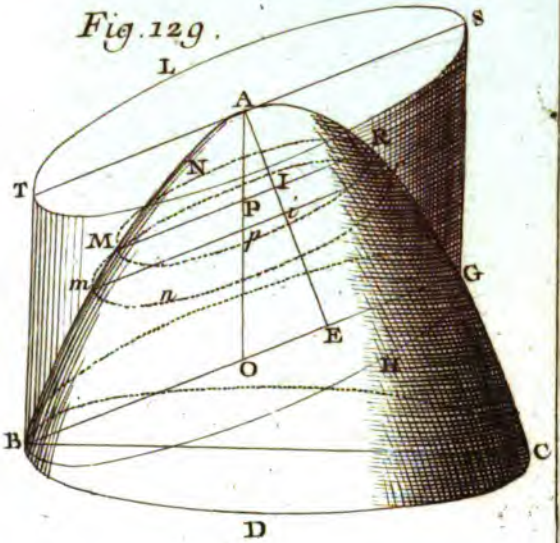


Fig. 129.



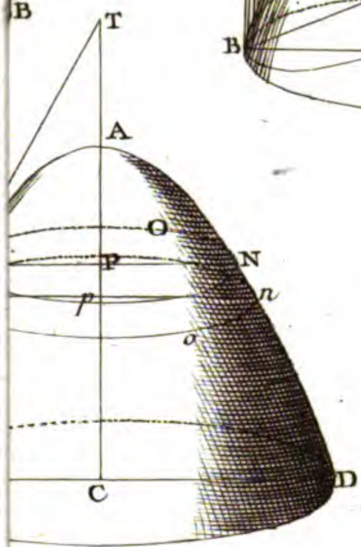
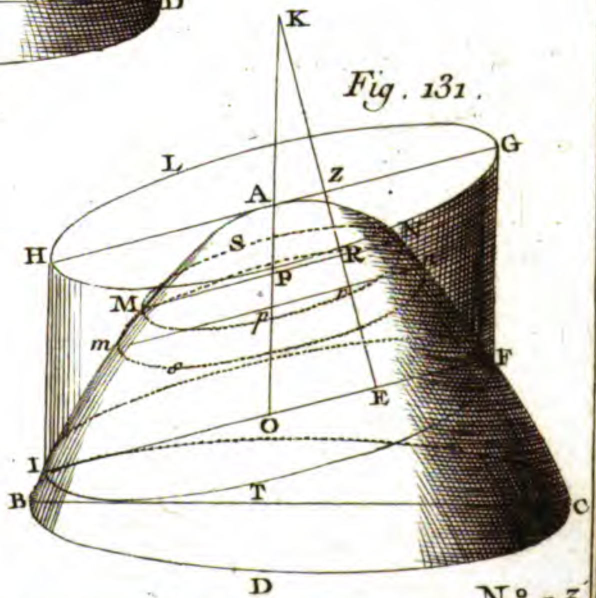
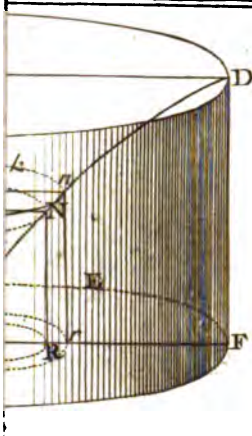


Fig. 132.

Fig. 131.



N°. 23.



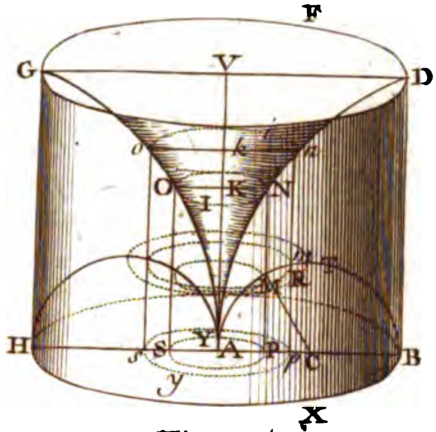


Fig.135.

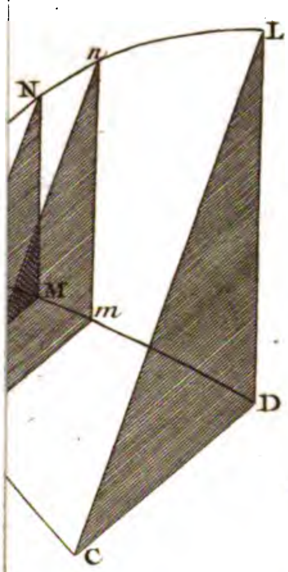


Fig.136.

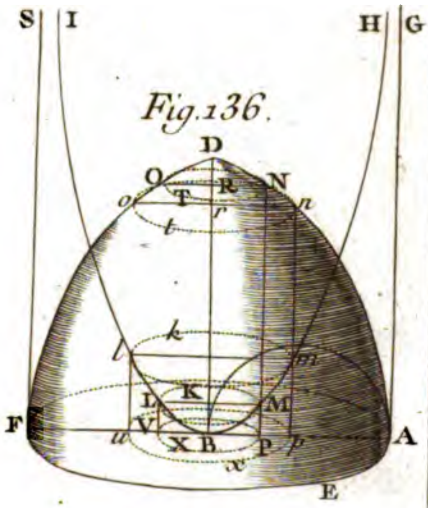


Fig.137.

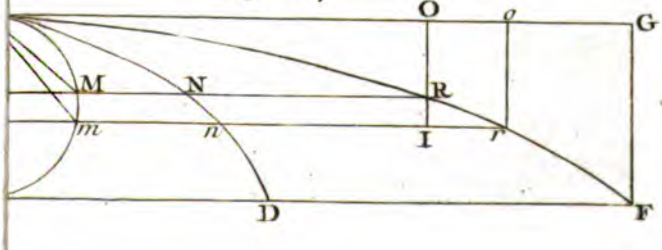


Fig. 142.

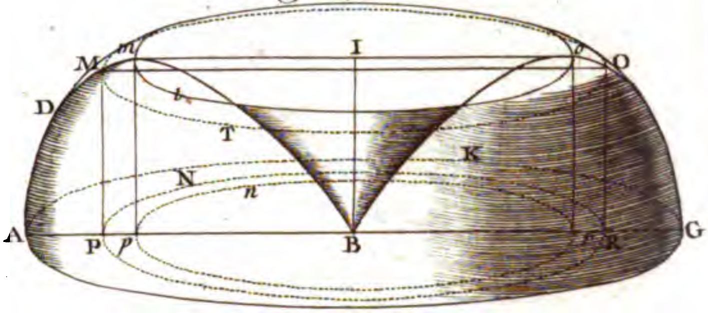


Fig. 143.

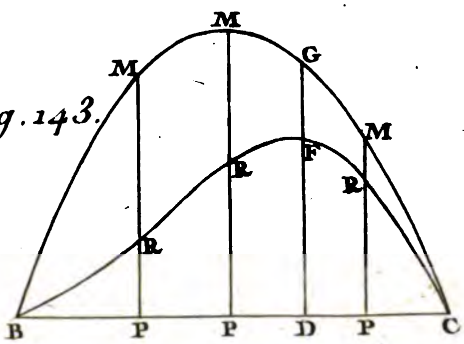


Fig. 144.

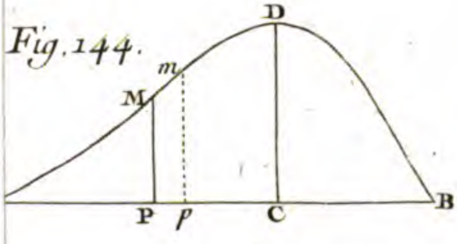
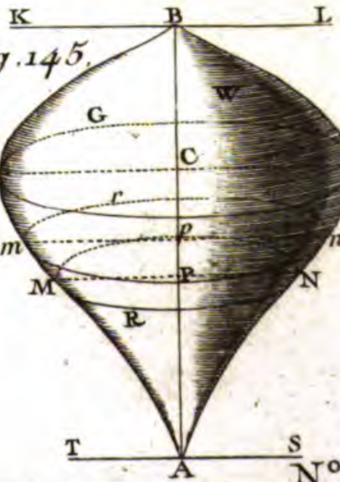


Fig. 145.



g. 141.

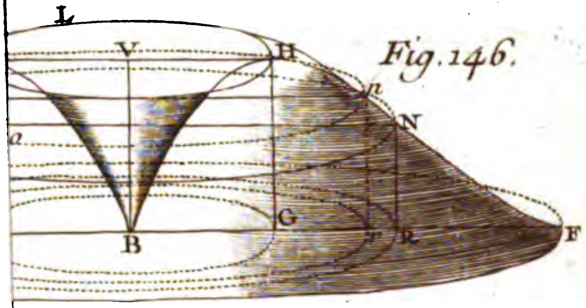
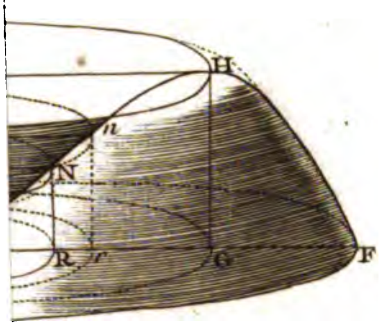


Fig. 146.



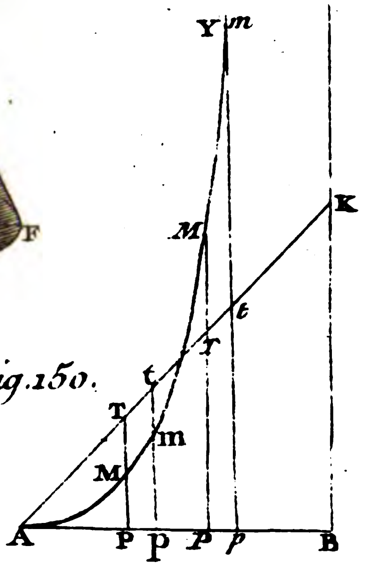


Fig. 150.

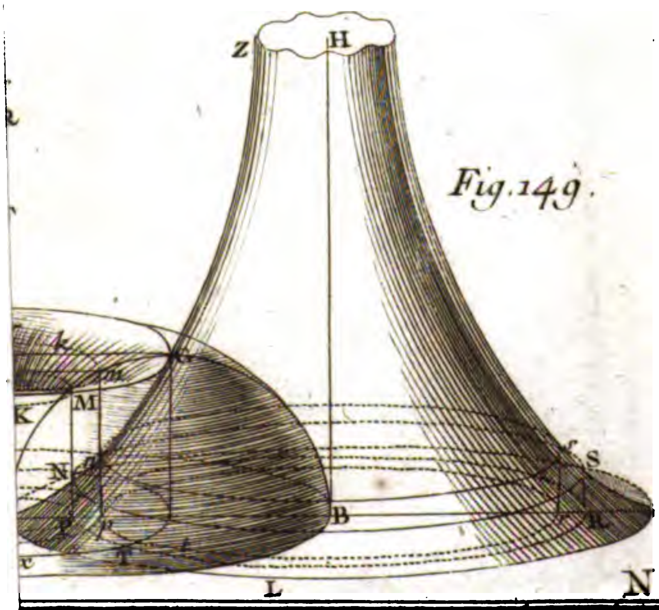
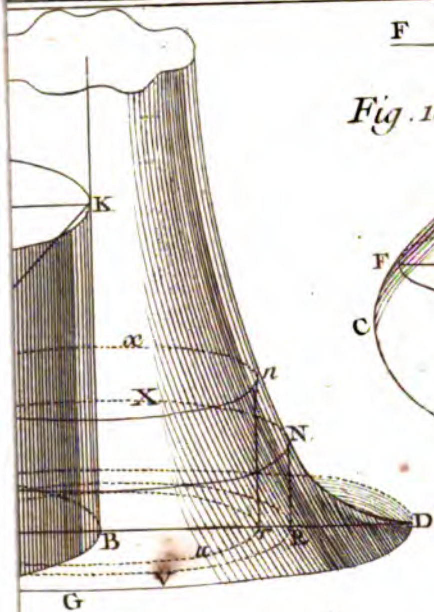


Fig. 149.



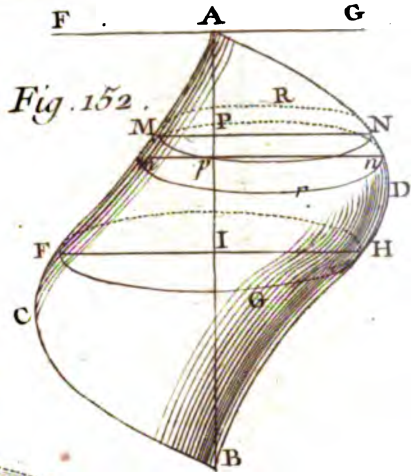


Fig. 152.

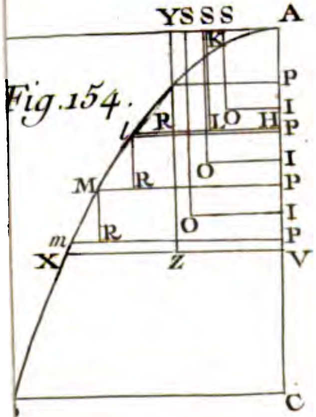


Fig. 154.

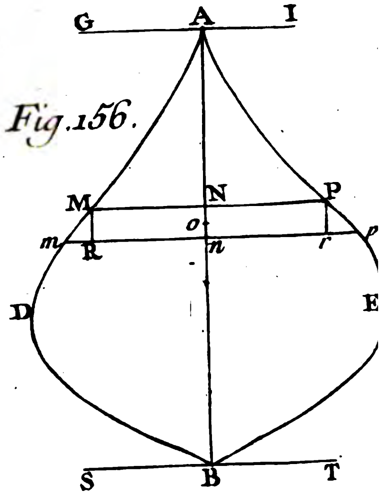


Fig. 156.

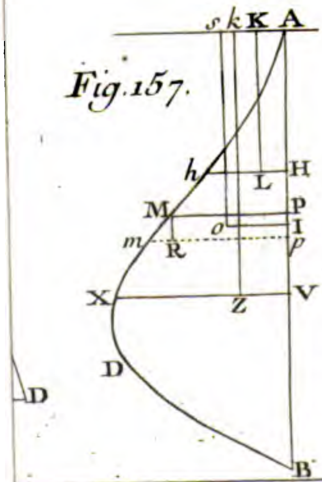


Fig. 157.

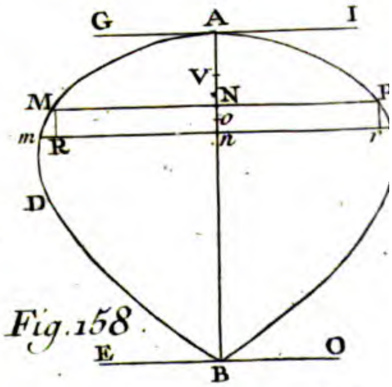


Fig. 158.

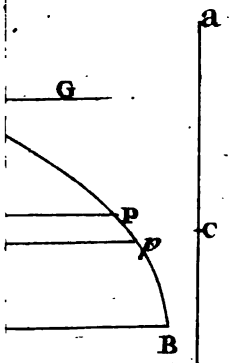


Fig. 163.

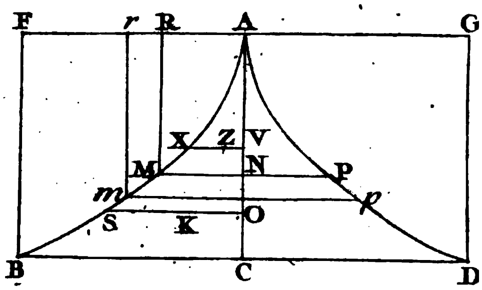


Fig. 161.

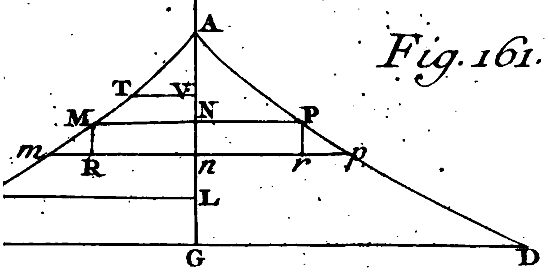


Fig. 164.

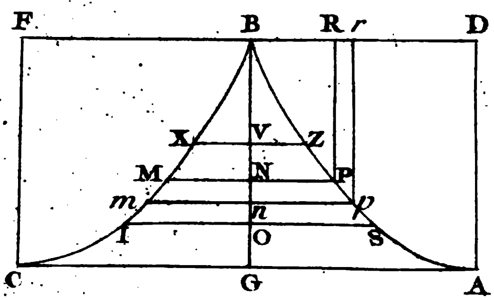
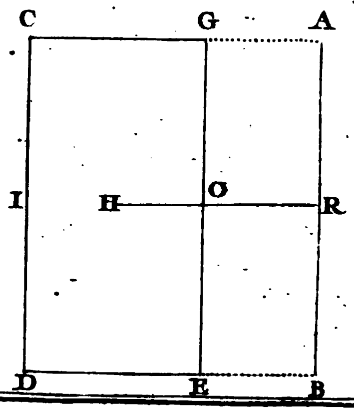
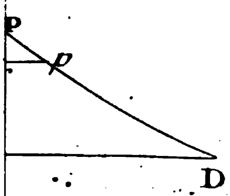
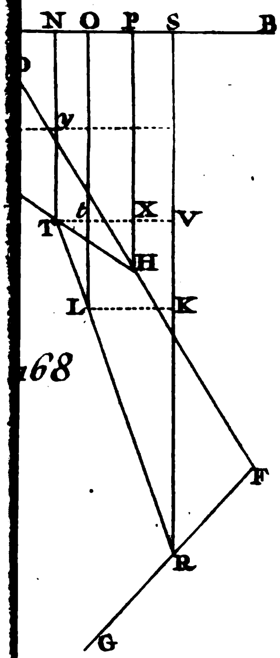


Fig. 166.







168

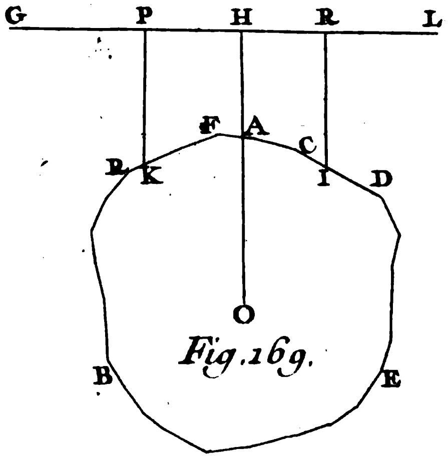


Fig.169.

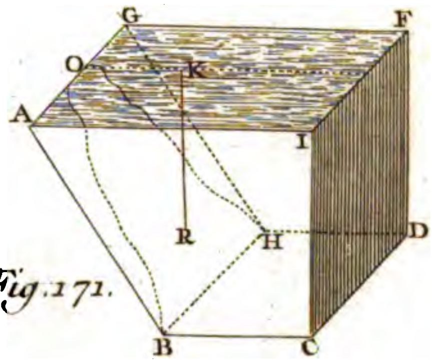
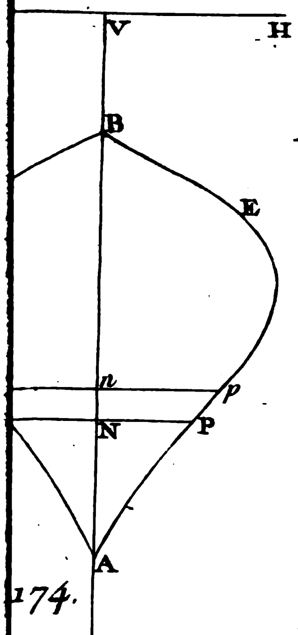


Fig.171.



174.

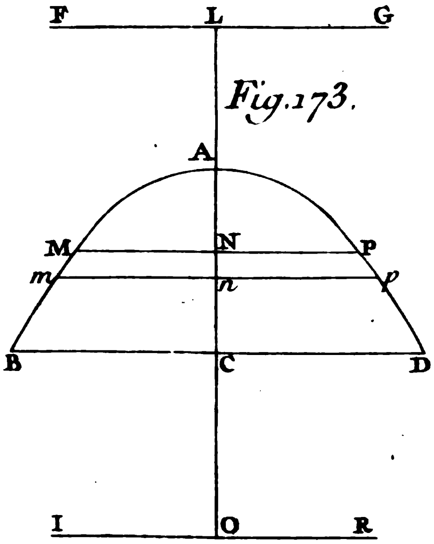
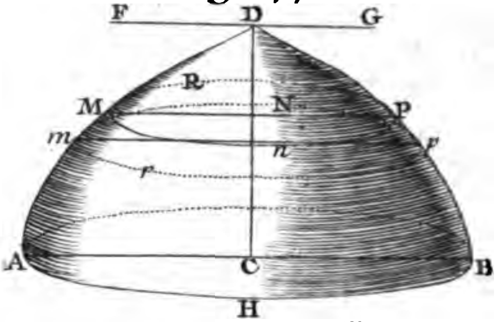


Fig.173.

Fig. 177.



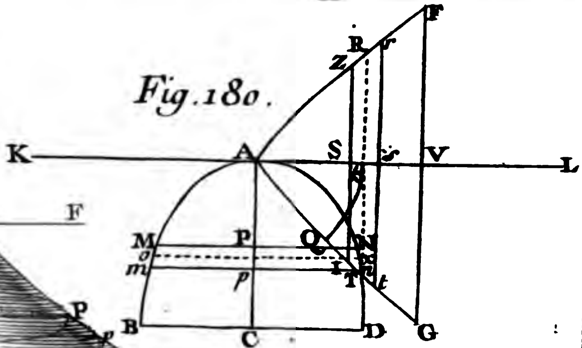


Fig. 180.

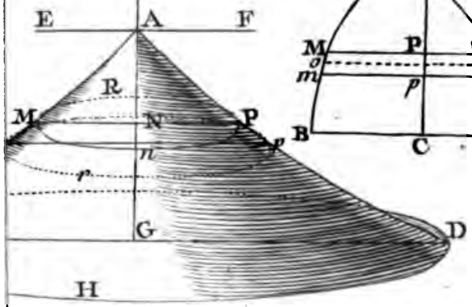


Fig. 176.

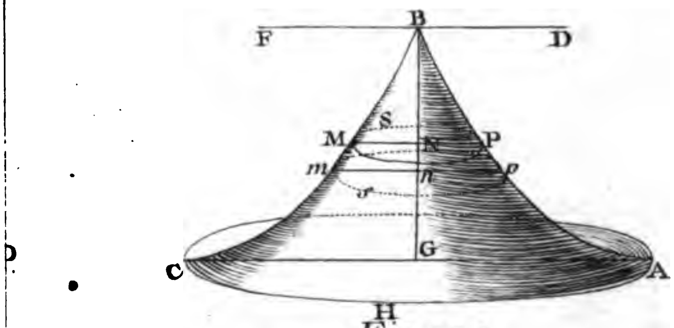


Fig. 179.