This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 8503.54.2

Haven Fund.

Rec. Mar. 28, 1855.

GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY

APPLICATION

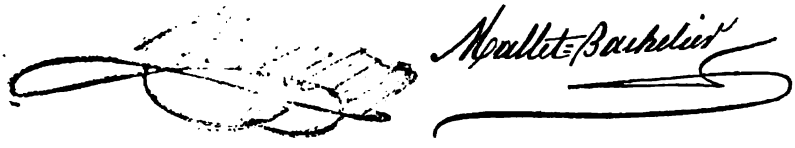
DE

L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE.

Le Libraire-Éditeur de cet ouvrage se réserve le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes les langues. Il poursuivra, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons, soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de ses droits.

Le dépôt légal de cet ouvrage a été fait à Paris dans le cours du mois d'octobre 1854, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, les griffes de l'Auteur et de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.



PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
Rue du Jardinet, 12.

APPLICATION

DE

L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE,

COMPRENANT

LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A DEUX ET A TROIS DIMENSIONS;

PAR M. BOURDON,

Commandeur de la Légion d'honneur, Conseiller honoraire de l'Université, ancien Examinateur d'admission à l'École Polytechnique, et Membre de plusieurs Sociétés savantes.

OUVRAGE ADOPTÉ PAR L'UNIVERSITÉ.

CINQUIÈME ÉDITION,

Rédigée conformément aux nouveaux Programmes de l'enseignement dans les Lycées.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, GENDRE ET SUCCESSEUR DE BACHELIER,

Imprimeur-Libraire

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1854.

(L'Editeur de cet ouvrage se réserve le droit de traduction.)

Math 8508.54.2

1953
57

AVERTISSEMENT.

Cette nouvelle édition diffère assez notablement de la précédente, pour que des explications soient nécessaires sur les changements qu'elle a subis.

Mais l'Auteur manque aujourd'hui pour exposer l'ordre d'idées dans lequel il s'est placé en procédant à un travail de révision qui a eu particulièrement pour but de mettre cet ouvrage en rapport avec les *Programmes* actuels d'enseignement.

Obligé de le suppléer, nous devons nous borner à une indication sommaire de ces changements.

Les deux TRIGONOMÉTRIES, bien que toujours considérées comme faisant partie de l'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE, ont été supprimées pour faire l'objet d'une publication distincte.

Au moyen de cette suppression, l'Auteur a pu, tout en diminuant l'étendue de l'ouvrage, et en ne laissant subsister le *petit texte* que pour les applications numériques et quelques questions secondaires, compléter des théories importantes, en étendre les applications générales, accorder plus de développement à la méthode de discussion des équations par la séparation des variables, et donner place à la construction de quelques courbes remarquables, telles que le *folium de* DESCARTES, la *cissoïde de* DIOCLÈS et la *conchoïde de* NICOMÈDE.

Une modification essentielle a été apportée dans l'exposé des principales propriétés des trois courbes du second degré.

Un chapitre spécial est consacré à chacune de ces courbes, de manière toutefois à laisser ressortir l'analogie qui existe entre les énoncés et les démonstrations de ces propriétés. Des questions se rapportant à ces courbes considérées ensemble, sont traitées dans un chapitre complémentaire.

Enfin un chapitre, qui termine la GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS, comprend, sous le titre général de *Complément et Applications de la théorie des courbes du second degré*, les questions relatives à la détermination de ces courbes d'après certaines données, la construction des racines des équations du deuxième, troisième et quatrième degré à une seule inconnue, la détermination, par des intersections de courbes, du *nombre* des racines réelles dans les équations numériques à une inconnue, quelques problèmes sur les lieux géométriques, la similitude des courbes du second degré, et leur identité avec les sections coniques et cylindriques.

Quant à la GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS, qui compose la *seconde section* de l'ouvrage, elle n'a subi aucun changement notable.

On peut, d'après cette analyse sommaire, apprécier l'importance de ce travail accompli au terme d'une carrière vouée tout entière à l'Enseignement.

Appelé à en assurer la publication, puissions-nous avoir rempli convenablement une tâche que nous n'aurions pas entreprise si nous n'avions été soutenu par un sentiment supérieur à celui de notre faiblesse!

HENRI BOURDON,
ancien élève de l'École Polytechnique.

TABLE DES MATIÈRES.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE.

INTRODUCTION.

PREMIÈRE MÉTHODE DE TRAITER DES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE PAR LE SECOURS DE L'ALGÈBRE.

§ I. — *Notions préliminaires.*

N^os.		Pages.
1... 2.	Objet de l'application de l'Algèbre à la Géométrie.....	1... 2
3... 8.	Développement sur quelques exemples.....	2... 9

§ II. — *Construction des expressions algébriques.*

9...14.	Expressions élémentaires. Autres expressions rationnelles ou irrationnelles du second degré.....	9...15
15...16.	Principe de l'homogénéité.....	16...19
17.	Scolie général.....	19...20

§ III. — *Résolution de diverses questions relatives à la ligne droite et au cercle.*

18...22.	Résolution de deux problèmes.....	20...25
23...27.	Interprétation des résultats négatifs développée sur un troisième problème.....	26...33
28...32.	Résolution et discussion complète d'un quatrième problème.....	33...41
33...37.	Exprimer la surface d'un triangle en fonction de ses trois côtés. — Même question pour le trapèze.....	41...45
38...41.	Déterminer la relation qui existe entre les trois côtés d'un triangle et le rayon du cercle circonscrit. — Problèmes qui s'en déduisent.....	45...52
42.	Scolie général.....	52
	Énoncés de questions à résoudre.....	52...53

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

PREMIÈRE SECTION.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS.

CHAPITRE PREMIER.

DU POINT ET DE LA LIGNE DROITE. — DU CERCLE. — DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES. — RÉSOLUTION DE DIVERSES QUESTIONS, ET PROBLÈME DES TANGENTES.

N^os.		Pages.
43.	Définition de la *Géométrie analytique*.....	54
	§ I. — *Du point et de la ligne droite.*	
44.	Manière de fixer la position d'un point sur un plan.	55... 56
45... 47.	Équations du point.....	56... 58
48... 49.	Expression de la distance entre deux points donnés.	58... 59
50... 55.	Équation de la ligne droite ; sa discussion.....	60... 67
56.. 69.	Questions préliminaires sur la ligne droite.....	67... 80
	§ II. — *Du cercle.*	
70... 74.	Équation du cercle. Des différentes formes que cette équation peut avoir.....	80... 83
	§ III. — *Des lieux géométriques.*	
75 .. 78.	Considérations générales sur les lieux géométriques.	83... 87
79... 87.	Propositions sur la forme caractéristique de l'équation d'une ligne droite et de l'équation d'un cercle.	87... 98
88... 90.	Usage des lieux géométriques dans la résolution des problèmes déterminés ou indéterminés.....	98...101
	§ IV. — *Application des théories précédentes à la résolution de diverses questions et au problème des tangentes.*	
91... 94.	Questions sur la ligne droite : propositions relatives aux triangles.....	102...107
95... 97.	Questions sur le cercle : conditions pour que deux circonférences se touchent, se coupent, etc.; faire passer une circonférence par trois points donnés.	107...114
98...100.	Problème des tangentes. — Définition générale de la tangente à une courbe. — Moyen analytique de fixer sa position en un point donné d'une courbe quelconque.....	114...117
101.	Équation de la tangente au cercle.....	117...120
102.	Détermination du coefficient d'inclinaison de la tangente à une courbe par la méthode des dérivées..	120...121
103.	Autre forme de l'équation de la tangente au cercle.	121
104...105.	Sous-tangente; normale et sous-normale.....	121...123
106...108.	Tangente au cercle menée par un point pris hors de la circonférence. — Construction par les lieux géo-	

N^os. Pages.

métriques. — Propriété déduite de cette construction..... 123...127
109. Problème sur les lieux géométriques..... 128...130
110. Remarque sur les problèmes indéterminés..... 130...131

CHAPITRE II.

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES. — NOTIONS SUR LES COURBES DU SECOND DEGRÉ. — RÉDUCTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ.

§ I. — *Transformation des coordonnées.*

111. Objet de la transformation des coordonnées..... 132.. 133
112...123. Formules pour la transformation des coordonnées, et usage de ces formules..... 133...140

§ II. — *Notions préliminaires sur les courbes du second degré.*

124...125. Définition de l'ELLIPSE. — *Foyers.* — Construction de la courbe par points et d'un mouvement continu. 141...143
126...130. Équation de l'ellipse. — *Centre, axes, sommets* de la courbe..... 143...147
131...133. Discussion de l'équation $My^2+Nx^2=P$. — Moyen de la ramener à la forme $A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$... 147...150
134. Définition de l'HYPERBOLE. — *Foyers.* — Construction de la courbe par points..... 150...151
135...138. Équation de l'hyperbole. — *Centre, axes transverse* et *non transverse, sommets* de la courbe. — Hyperbole équilatère. — Lignes de séparation entre les droites passant par le centre, qui rencontrent la courbe et celles qui ne la rencontrent pas..... 151...155
139...140. Discussion de l'équation $My^2-Nx^2=\mp P$. — Moyen de la ramener à la forme $A^2y^2-B^2x^2=\mp A^2B^2$.. 156...157
141. Définition de la PARABOLE. — *Foyer; directrice.* — Construction de la courbe par points..... 157...159
142...143. Équation de la parabole. — *Paramètre*..... 159...160
144...146. Liaison des trois courbes; rapprochement entre l'ellipse et la parabole; rapprochement entre l'hyperbole et la parabole; équation propre à représenter les trois courbes..... 160.. 163
147...152. Autre manière d'établir la liaison des trois courbes; ce qu'on appelle *directrice* pour les trois courbes. — Raison des dénominations attribuées à ces courbes..... 163...168

§ III. — *Réduction, par la transformation des coordonnées, de l'équation générale du second degré à deux variables.*

153...156. On peut toujours faire disparaître le terme en xy. — Cas où l'équation peut être ramenée à la forme $My^2+Nx^2=P$. — Calcul des quantités M et N. 168...174
157...158. Cas où l'équation peut être ramenée à la forme $My^2+Sx=0$ ou $Nx^2+Ry=0$. — Cas particulier du système de deux droites parallèles..... 174...176

Nos. Pages.

159...161. Caractères analytiques des trois *genres* de courbes. — *Variétés* de ces courbes..... 176...179

162...165 Mode de réduction de l'équation générale pour le cas de $B^2 - 4AC < \text{ou} > 0$..... 179...183

166. Interprétation du double signe des valeurs de M et de N dans l'équation réduite..... 183

167. Mode de réduction de l'équation générale pour le cas de $B^2 - 4AC = 0$..... 183...184

168...169. Applications numériques de la méthode de réduction de l'équation générale par la transformation des coordonnées..... 184...191

170. Remarque sur la discussion précédente, d'où l'on déduit que le caractère géométrique des courbes représentées par les équations $My^2 \pm Nx^2 = \pm P$, $y^2 = \pm Qx$, est indépendant de l'inclinaison des axes..... 191...194

CHAPITRE III.

DE L'ELLIPSE.

Propositions préliminaires.

171...172. Caractères analytiques des points pris *sur* la courbe, *au dedans* et *au dehors* de la courbe..... 195...196

173. Relation entre les carrés des ordonnées des points de la courbe..... 196

174...175. Rapport entre l'ordonnée de l'ellipse et celle du cercle décrit sur son grand axe. — Deux moyens de construire la courbe, fondés sur cette propriété..... 196...198

176. Quadrature de l'ellipse..... 198...200

§ I. — *Diamètres dans l'ellipse. — Diamètres conjugués. — Cordes supplémentaires; leurs relations avec les diamètres conjugués.*

177. Définition générale d'un *diamètre*. — Dans l'ellipse, tous les diamètres sont des lignes droites passant par le centre..... 200...202

178...180 *Diamètres conjugués*. — L'ellipse a une infinité de systèmes de diamètres conjugués, dont un seul rectangulaire, celui des axes principaux. — Propriétés des diamètres conjugués..... 202...204

181...185 *Cordes supplémentaires;* leurs propriétés et leurs relations avec les diamètres conjugués. — Limites de l'angle de deux diamètres conjugués et de deux cordes supplémentaires..... 204...209

§ II. — *De la tangente à l'ellipse et de ses propriétés par rapport aux diamètres et aux rayons vecteurs.*

186...192. Tangente menée par un point de la courbe. — Sous-tangente. — Normale et sous-normale. — Discussion du coefficient angulaire de la tangente..... 209...214

N^os.		Pages.
193...194.	Tangente menée par un point extérieur à la courbe. — Construction par les lieux géométriques. — Propriété déduite de cette construction.....	214...217
195.	Tangente menée parallèlement à une droite donnée.	217...218
196.	De la tangente considérée par rapport aux diamètres conjugués. — Procédé pour mener une tangente, 1° par un point donné sur la courbe; 2° parallèlement à une droite donnée.....	218...219
197...199.	De la tangente par rapport aux rayons vecteurs passant par le point de contact. — Moyen de mener une tangente par un point donné, 1° *sur* la courbe; 2° *hors* de la courbe.....	219...224
200.	Remarque sur les dénominations de *foyers* et de *rayons vecteurs*.....	224...225
201...203.	Conséquences des propriétés de la tangente considérée par rapport aux rayons vecteurs.....	225..227

§ III. — *Propriétés de l'ellipse rapportée à des diamètres conjugués.*

204...207.	Passer de l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes principaux, à l'équation de la même courbe rapportée à des diamètres conjugués; et *réciproquement*. — Relations entre les axes et les diamètres conjugués. — Propriétés du parallélogramme construit sur un système de diamètres conjugués...	227...233
208.	Système de diamètres conjugués égaux. — Équation de la courbe rapportée à ce système.....	233...234
209...210.	Les propriétés démontrées indépendamment de l'inclinaison des axes, sont vraies pour un système quelconque de diamètres conjugués. — Relations entre les carrés des ordonnées des points de la courbe; construire la courbe connaissant un système de diamètres conjugués en grandeur et en direction.....	234...235
211...213.	De la tangente à l'ellipse rapportée à un système de diamètres conjugués; tangente menée par un point pris sur la courbe; tangente menée par un point extérieur. — Propriété déduite de la construction de cette tangente, et réciproque de cette propriété.....	235...238
214.	Une ellipse étant tracée sur un plan, 1° déterminer son centre et ses axes principaux; 2° trouver un système de diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné.....	239

CHAPITRE IV.

DE L'HYPERBOLE.

Propositions préliminaires.

215...217.	Analogie entre l'ELLIPSE et l'HYPERBOLE. — Caractères analytiques des points pris *sur* la courbe, *au dedans* et *au dehors* de la courbe.....	240...241

N^os. Pages.

218. Relation entre les carrés des ordonnées des points de la courbe..... 241...242

219. Rapport entre l'ordonnée d'une hyperbole quelconque et celle de l'hyperbole *équilatère*..... 242

§ I. — *Diamètres dans l'hyperbole. — Diamètres conjugués. — Cordes supplémentaires; leurs relations avec les diamètres conjugués.*

220. Dans l'hyperbole, tous les diamètres sont des lignes droites passant par le centre..... 242...243

221...223. *Diamètres conjugués.* — L'hyperbole a une infinité de systèmes de diamètres conjugués dont un seul est rectangulaire, celui des axes principaux. — Propriétés des diamètres conjugués. — Diamètres conjugués *transverses* et *non transverses*; construction des lignes de séparation entre les diamètres transverses et les diamètres non transverses..... 243...245

224...225. *Cordes supplémentaires*; leurs propriétés et leurs relations avec les diamètres conjugués..... 245...247

§ II. — *De la tangente à l'hyperbole et de ses propriétés par rapport aux diamètres et aux rayons vecteurs.*

226...230. Tangente menée par un point de la courbe. — Sous-tangente. — Normale et sous-normale. — Discussion du coefficient angulaire de la tangente..... 247...250

231. Tangente menée par un point extérieur. — Propriété déduite de sa construction. — Tangente parallèle à une droite donnée..... 250

232. De la tangente considérée par rapport aux diamètres conjugués. — Procédé pour mener une tangente 1° par un point donné sur la courbe; 2° parallèlement à une droite donnée..... 251

233...235. De la tangente par rapport aux rayons vecteurs passant par le point de contact. — Moyen de mener une tangente par un point donné, 1° *sur* la courbe; 2° *hors* de la courbe... ..... 251...256

236. Remarque sur les dénominations de *foyers* et de *rayons vecteurs*..... 256

237. Conséquences des propriétés de la tangente considérée par rapport aux rayons vecteurs..... 256

§ III. — *Propriétés de l'hyperbole rapportée à des diamètres conjugués.*

238...240. Passer de l'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes principaux, à l'équation de la même courbe rapportée à des diamètres conjugués; et *réciproquement*. — Relations entre les axes et les diamètres conjugués. — Propriétés du parallélogramme construit sur un système de diamètres conjugués. 256. .259

241. Dans une hyperbole qui n'est pas équilatère, il ne peut exister aucun système de diamètres conjugués égaux..... 259

242. Diverses propriétés de la courbe, indépendantes de

Nos. Pages.

l'inclinaison des axes. — Tangente à la courbe rapportée à des diamètres conjugués..... 259...260

§ IV. — *Des asymptotes de l'hyperbole.*

243. Définition générale d'une droite asymptote à une courbe..... 260

244...245. Détermination des asymptotes de l'hyperbole..... 260...263

246...251. Propriétés de l'hyperbole par rapport à ses asymptotes..... 263...268

252...254. Équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes. — Déduire de cette équation les propriétés déjà démontrées..... 268...270

255...256. Équations d'une sécante et de la tangente à la courbe rapportée à ses asymptotes. — Conséquences déduites de ces équations..... 270...272

257. Construction de l'hyperbole, lorsque l'on connaît les asymptotes et un seul point de la courbe.... 272...273

CHAPITRE V.

DE LA PARABOLE.

258. *Observation préliminaire* sur l'étude des propriétés de la parabole comparée à l'étude des propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole..... 274

§ I. — *Propriétés de la parabole rapportée à ses axes principaux.*

259. Caractères analytiques des points pris *sur* la courbe, *au dedans* et *au dehors* de la courbe..... 274...275

260. Rapport des carrés des ordonnées, appelé le *paramètre* de la courbe..... 275...276

261. La parabole n'a pas d'asymptotes..... 276...277

262. Construction de la courbe, déduite du rapport des carrés des ordonnées..... 277

263. Mesure d'un segment parabolique..... 277...279

§ II. — *De la tangente à la parabole et de ses propriétés par rapport au rayon vecteur.*

264...266. Tangente et sous-tangente. — Normale et sous-normale. — Discussion du coefficient angulaire de la tangente..... 279...282

267...268. De la tangente par rapport au rayon vecteur passant par le point de contact. — Moyen de mener une tangente par un point donné, 1° sur la courbe; 2° hors de la courbe..... 282...284

269...270. Conséquences de la propriété de la tangente par rapport au rayon vecteur..... 284...285

§ III. — *Diamètres de la parabole. — Axes conjugués.*

271. Dans la parabole, tous les diamètres sont des lignes droites parallèles à l'axe principal..... 285

272...273. *Axes conjugués.* — Équation de la courbe rapportée à un système d'axes conjugués. — La parabole a une infinité de systèmes d'axes conjugués. — Éva-

Nos.		Pages.
	tuation géométrique du paramètre de la parabole rapportée à un de ces systèmes	285...289
274.	Rapport des carrés des ordonnées; construire la courbe, connaissant l'angle de deux axes conjugués et le paramètre correspondant	289
275...276.	De la tangente à la parabole rapportée à un système d'axes conjugués; tangente menée par un point pris sur la courbe; tangente menée par un point extérieur. — Propriété déduite de la construction de cette tangente, et réciproque de cette propriété.	290...292

CHAPITRE VI.

DES COORDONNÉES POLAIRES.

277.	Définitions. — Pôle. — Rayon vecteur	293
278...279.	Formules pour la transformation des coordonnées rectilignes en coordonnées polaires, et *réciproquement*	294...296
280...281.	Exemples d'équations polaires, et conséquences qui s'en déduisent : équations polaires du cercle et de l'hyperbole, le pôle étant placé au centre	296...298
282...286.	Équations polaires de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole, un foyer étant pris pour pôle. — Discussion de ces équations	298...305
287.	Équation polaire commune aux trois courbes. — Ce qu'on appelle *excentricité*	305...306

CHAPITRE VII.

QUESTIONS SE RAPPORTANT AUX COURBES DU SECOND DEGRÉ.

288.	Étant donnée, dans le cas d'axes rectangulaires, l'équation commune aux trois courbes du second degré, rechercher dans le plan de chaque courbe les points tels que leur distance à un point quelconque de la courbe soit une fonction rationnelle de l'abscisse de ce dernier point	307...311
289.	Déterminer la nature et la position des diamètres dans les trois courbes du second degré	311...313
290...291.	Une droite étant menée à volonté dans le plan d'une courbe du second degré, si, de chacun de ses points, on mène deux tangentes à la courbe, et qu'on joigne les deux points de contact correspondants, toutes ces lignes concourent en un même point. — Fixer la position de ce point de concours	313...315
292.	Une portion de courbe du second degré étant tracée sur un plan, — 1° déterminer sa nature; — 2° achever cette courbe et en déterminer les axes ainsi que les éléments principaux	315...318
293.	Connaissant les longueurs de deux diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole, et l'angle	

Nos. Pages.

qu'ils font entre eux, trouver les longueurs des axes principaux ..... 318...320

294. *Réciproquement*, étant donnés les axes principaux d'une ellipse ou d'une hyperbole, trouver deux diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné ..... 320...322

295. Remarque sur les deux dernières questions ..... 322...

CHAPITRE VIII.

DISCUSSION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ PAR LA SÉPARATION DES VARIABLES. — APPLICATION DE CETTE MÉTHODE DE DISCUSSION A DES ÉQUATIONS DE DEGRÉ SUPÉRIEUR, ET DISCUSSION DE QUELQUES ÉQUATIONS POLAIRES.

§ I. — *Discussion de l'équation générale du second degré par la séparation des variables.*

296...301. Division des courbes du second degré en trois genres. — Variétés de chacun des genres ..... 323...334

302...304. Construction d'un système d'axes ou de diamètres conjugués, déduite de la séparation des variables dans l'équation générale du second degré ..... 334...337

305. Remarque sur l'application de cette méthode à la détermination des axes principaux 337

306...307. Construction des asymptotes dans l'hyperbole, déduite de la séparation des variables dans l'équation générale du second degré. — Cas où l'équation est privée soit de l'un des carrés des variables, soit de tous deux ..... 337...343

308. Remarque sur la construction des courbes en général ..... 343...344

309. Récapitulation de la discussion de l'équation générale du second degré par la séparation des variables ..... 344...346

310...311. Construction de paraboles données en équations numériques ..... 346...349

312. Remarque sur la détermination des *points limites* dans la construction des courbes en général ..... 349...350

313. Construction d'ellipses données en équations numériques ..... 350...354

314. Construction d'hyperboles données en équations numériques ..... 354...358

315. Mode de détermination des asymptotes dans les courbes en général, fondé seulement sur la définition de ces sortes de lignes ..... 358...361

§ II. — *Application de la méthode de discussion par la séparation des variables à des équations de degré supérieur ; et discussion de quelques équations polaires.*

316. Observations générales sur la construction des courbes ..... 362...363

N^os. Pages.

317. Construction de courbes de degré supérieur. — *Folium de* DESCARTES ..... 363...372

318. Construction de lignes données en équations polaires ..... 372...378

CHAPITRE IX.

COMPLÉMENT ET APPLICATIONS DE LA THÉORIE GÉNÉRALE DES COURBES DU SECOND DEGRÉ.

§ I. — *Nombre et nature des conditions servant à la détermination des courbes du second degré. — Solutions géométriques pour la construction de ces courbes d'après des conditions données. — Propriété commune aux trois courbes.*

319...323. Nombre de conditions nécessaires pour déterminer une courbe du second degré. — Cas où l'on donne le centre ou un système d'axes ou de diamètres conjugués; moyen assez simple de construire la courbe dans ces derniers cas ..... 379...384

324...326. Cas où l'on donne un *foyer*.—Propriété remarquable du foyer et de la directrice. — Construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant *un foyer et trois points*, ou une parabole, connaissant *un foyer et deux points* ..... 384...386

327. La connaissance d'un *sommet* de la courbe équivaut à *deux* conditions ..... 386...387

328. Solutions géométriques pour la détermination d'une courbe du second degré, d'après des conditions données : plusieurs questions résolues; énoncés de questions à résoudre ..... 387...390

329. Propriété des *transversales*, commune aux trois courbes du second degré ..... 390...395

§ II. — *Construction des racines des équations du deuxième, troisième et quatrième degré à une seule inconnue; trisection de l'angle et duplication du cube. — Détermination, par des intersections de courbes, du nombre des racines réelles dans les équations numériques à une inconnue. — Problèmes sur les lieux géométriques, se rapportant aux courbes du second degré. — De quelques courbes remarquables:* cissoïde *de* DIOCLÈS, conchoïde *de* NICOMÈDE.

330. Construction des racines de l'équation du second degré ..... 392...395

331...339. Construction des racines des équations du troisième et du quatrième degré. — Application à la *trisection de l'angle* et à la *duplication du cube* ..... 395...405

340...343. Détermination, par des intersections de courbes, du nombre des racines réelles dans les équations numériques à une inconnue ..... 405...411

344...349. Problèmes sur les lieux géométriques, se rapportant aux courbes du second degré ..... 411...422

350...351. De quelques courbes remarquables : *cissoïde* de DIOCLÈS; *conchoïde* de NICOMÈDE ..... 423...428

§ III. — *Des courbes du second degré semblables. — Identité des courbes du second degré avec les sections planes d'un cône droit ou d'un cône oblique à base circulaire. — Des sections coniques semblables. — De la section plane dans un cylindre droit ou oblique à base circulaire.*

N°.		Pages.
352.	Ce qu'on entend par des ellipses et des hyperboles semblables. — Deux ellipses ou deux hyperboles semblables jouissent de toutes les propriétés des figures semblables de la géométrie	428...431
353.	Deux paraboles quelconques sont toujours des figures semblables	432...433
354.	Remarque sur les paramètres dans les courbes en général	433...434
355.	L'intersection d'un cône droit ou oblique, à base circulaire, par un plan, donne lieu aux trois courbes du second degré ou à une de leurs variétés	434...438
356...357.	Une courbe du second degré étant donnée, on peut toujours la reproduire au moyen de l'intersection d'un plan et d'un cône droit	438...443
358.	De la section anti-parallèle ou sous-contraire dans le cône oblique à base circulaire	443...445
359.	Manière d'obtenir l'équation la plus générale d'une section plane dans le cône oblique à base circulaire	445
360.	Ce qu'on entend par sections coniques semblables	446
361...363.	De la section plane dans un cylindre droit ou oblique à base circulaire	446...450

SECONDE SECTION.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS.

CHAPITRE X.

DU POINT, DE LA LIGNE DROITE ET DU PLAN DANS L'ESPACE.

§ I. — *Du point et de la ligne droite.*

364...368.	Moyen de fixer analytiquement la position d'un point dans l'espace; ce qu'on entend par équations d'un point. Leur discussion	451...455
369.	Expression de la distance entre deux points, dans le cas d'axes *rectangulaires*	455...456
370...373.	Moyen de déterminer la position d'une droite dans l'espace; ce qu'on entend par les équations d'une droite	456...459
374...375.	Trouver les équations d'une droite assujettie à remplir certaines conditions	459...460

N^os. Pages.

376. Condition pour que deux droites dans l'espace se rencontrent; trouver les coordonnées de leur point d'intersection..... 461

377...379. Trouver l'angle de deux droites dans l'espace, et ceux qu'une droite forme avec les axes coordonnés..... 462...465

380. Conditions de *parallélisme* et de *perpendicularité* de deux droites..... 466

381. Scolie général, relatif à l'inclinaison des axes..... 467

§ II. — *De l'équation du plan et de ses combinaisons avec les équations du point et de la ligne droite.*

382...385. Moyen de fixer analytiquement la position d'un plan dans l'espace; équation du plan; équations de ses *traces;* forme symétrique de l'équation du plan.. 467...472

386...388. Faire passer un plan, 1° par trois points donnés; — 2° par un point et une droite donnés. — Remarque sur les conditions que fournit la seconde question..... 472...477

389...392. D'un point donné, abaisser, 1° une perpendiculaire sur un plan donné; — 2° un plan perpendiculaire à une droite donnée. — Trouver, dans le premier cas, la longueur de la perpendiculaire, et dans le second, la distance du point à la droite. — Conséquence du second problème..... 477...482

393...394. Par un point donné dans l'espace, mener un plan parallèle à un autre; conditions de *parallélisme* de deux plans. — Distance de deux plans parallèles. 482...484

395. Trouver les équations de l'intersection commune de deux plans..... 484

396...398. Trouver l'angle de deux plans et ceux qu'un plan forme avec les plans coordonnés; condition de *perpendicularité* de deux plans..... 485...488

399. Trouver l'angle d'une droite et d'un plan..... 488...489

400. Plus courte distance de deux droites données par leurs équations..... 489

401. Scolie général..... 489

CHAPITRE XI.

DES SURFACES COURBES, ET EN PARTICULIER DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

402...404. Notions préliminaires sur les surfaces courbes. Comment fixer, en général, la position d'une surface, d'une ligne et d'un point dans l'espace..... 490...492

§ I. — *Transformation des coordonnées dans l'espace.*

405. Énoncé général du problème de la transformation des coordonnées dans l'espace..... 493

406. .407. Passer, 1° d'un système de coordonnées quelconques

Nos.		Pages.
	à un système de coordonnées parallèles d'origine différente; — 2° d'un système rectangulaire à un système oblique de même origine.	493...495
408.	Expression de la distance entre deux points, dans le cas d'axes *obliques*.....	495...497
409...411.	Passer d'un système rectangulaire à un autre système rectangulaire. — Cas particuliers; formules propres à faire connaître la nature des intersections d'une surface courbe par un plan.....	497...500
	§ II. — *Des différents genres de surfaces.*	
412...415.	Équations de la surface SPHÉRIQUE et de son plan tangent.....	500...503
416...417.	Équation générale des surfaces CYLINDRIQUES. Caractère de ces sortes de surfaces.....	503...505
418...419.	Équation générale des surfaces *coniques*. Caractère de ces sortes de surfaces.....	505...508
420...421.	Équation des surfaces conoïdes; cas particulier....	508...510
422...426.	Équation générale des surfaces de RÉVOLUTION. Leur caractère. — Cas particuliers : *ellipsoïde*, *hyperboloïde*, et *paraboloïde*; propriété remarquable du paraboloïde de révolution.....	511...514
	§ III. — *Discussion des surfaces du second degré.*	
427. .432.	Formes auxquelles on peut toujours, par une double transformation de coordonnées, ramener l'équation générale du second degré à trois variables. — Exception à cette double transformation.....	514...518
433.	Division des surfaces du second degré en surfaces DOUÉES D'UN CENTRE et en surfaces DÉNUÉES DE CENTRE. — Plans diamétraux.....	518...520
434...435.	Discussion de l'équation aux ELLIPSOÏDES. — Cas particuliers et variétés de ce genre de surfaces.....	520...523
436...439.	Discussion de l'équation aux HYPERBOLOÏDES *à deux nappes* ou *à une nappe*. — Cas particulier : *surface conique*; propriété remarquable de cette surface.....	523...527
440...443.	Équation aux deux paraboloïdes *elliptique* ou *hyperbolique*. — Cas particulier : paraboloïde *de révolution*. — Génération de ces deux surfaces.....	527...531
444.	Résumé de la discussion précédente : division des surfaces du second degré en cinq genres.....	531...532
445.	Manière de reconnaître la nature des intersections d'une surface du second degré par un plan.....	532
446. .448.	Prouver que toute surface du second degré (à l'exception du paraboloïde hyperbolique) donne lieu à deux systèmes de *sections circulaires*. — Lieu géométrique des centres de toutes ces sections.....	532...537

N^os.		Pages.
449...450.	Des plans tangents aux surfaces du second degré : équation du plan tangent aux surfaces douées d'un centre; équation du plan tangent aux surfaces dépourvues de centre. — Normale.....	537...540
451.	Mener un plan tangent par un point pris hors de la surface; propriété de la *courbe de contact*.....	540...541
452...454.	Génération de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique par le mouvement d'une ligne droite.....	541...546

Planches I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 182, ligne 6; *au lieu de* $4\,Ac$, *lisez* $4\,AC$.

Page 456, ligne 11 en remontant; *au lieu de* $D = \sqrt{x'^6 + y'^{12} + z'^{12}}$, *lisez* $D = \sqrt{x'^6 + y'^6 + z'^6}$.

Page 495, ligne 12 en remontant; *lisez* en marge *fig.* 197.

APPLICATION

DE

L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE.

INTRODUCTION.

PREMIÈRE MÉTHODE DE TRAITER DES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE PAR LE SECOURS DE L'ALGÈBRE.

§ I. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. On a vu, en Géométrie, que les *lignes*, les *surfaces* et les *solides* peuvent, aussi bien que toutes les autres grandeurs, être exprimés par des *nombres;* il suffit, en effet, pour cela, de prendre pour *unité* l'une de ces grandeurs géométriques.

C'est ainsi que $\sqrt{2}$ exprime la *diagonale* d'un carré dont le côté est égal à 1. De même, si 4 et 3 représentent les nombres d'unités *linéaires* contenues dans les deux côtés d'un rectangle, 4×3 ou 12 exprime le *nombre* d'unités de *superficie* contenues dans ce rectangle, ou, en d'autres termes, la *surface* de ce rectangle. De même encore, $4\times3\times5$, ou 60, exprime le *volume* d'un parallélipipède dont les *trois arêtes contiguës* sont représentées par 4, 3 et 5.

Généralement, si l'on désigne par a, b, c, les *nombres* d'*unités linéaires* contenues dans les *arêtes contiguës* d'un parallélipipède, ab, ac, bc exprimeront les *aires* de trois de ses six faces, et abc son *volume*.

On voit donc que l'ALGÈBRE, dont les méthodes sont applicables à toutes les questions numériques possibles, peut aussi servir à résoudre les questions relatives aux grandeurs que l'on considère en GÉOMÉTRIE.

2. Qu'il s'agisse, par exemple, de déterminer la *longueur* d'une ligne d'après la connaissance d'une ou de plusieurs autres lignes comprises avec la première, dans une même figure : *On suppose le* PROBLÈME RÉSOLU, *et l'on tâche, à l'aide de quelques propositions de Géométrie, dont l'existence est déjà établie, et qui ont quelque rapport avec l'énoncé du problème, on tâche*, dis-je, *d'exprimer par des équations les relations qui existent entre les données* (représentées, soit par des lettres, soit par des chiffres) *et les inconnues, toujours représentées par des lettres. On* RÉSOUT *ces équations, et l'on obtient ainsi les expressions des lignes cherchées au moyen des lignes connues, expressions qu'il faut ensuite* TRADUIRE *en Géométrie.*

Si la question proposée est un *théorème* à démontrer, *on* TRADUIT *algébriquement les relations qui existent entre les différentes parties de la figure; ce qui conduit à des équations auxquelles on fait subir diverses transformations, dont la dernière donne lieu au théorème énoncé.*

En un mot, *traduire en Algèbre les questions de Géométrie*, et, réciproquement, *traduire en Géométrie les résultats obtenus par l'Algèbre*, tel est le but qu'on se propose en appliquant L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE.

Développons ces notions générales sur quelques exemples.

3. Proposons-nous d'abord de *rechercher les propriétés principales du triangle* RECTANGLE *et du triangle* OBLIQUANGLE, en partant de ce seul principe, que *deux triangles équiangles ont leurs côtés homologues proportionnels, et sont par conséquent semblables.*

FIG. 1. Soit un triangle BAC RECTANGLE en A; du point A abaissons AD perpendiculaire sur BC, et posons

$$BC = a,\quad AC = b,\quad AB = c,\quad AD = h,\quad BD = m \quad \text{et} \quad DC = n.$$

Les deux triangles BAC, ADC sont *rectangles*, l'un en A, l'autre en D; de plus, ils ont l'angle C commun; donc le troisième angle ABC du premier est égal au troisième angle DAC du second, et les deux triangles sont *semblables*. Il en est de même des triangles BAC, ADB.

Ainsi, comparant les côtés homologues et employant les

notations qui viennent d'être établies, on obtient les trois proportions

$$a : b :: b : n,$$
$$a : c :: c : m,$$
$$a : c :: b : h;$$

d'où l'on déduit

$$b^2 = an, \quad (1)$$
$$c^2 = am, \quad (2)$$
$$bc = ah, \quad (3)$$

égalités auxquelles on peut réunir celle-ci :

$$a = m + n, \quad (4)$$

qui existe nécessairement entre les deux segments BD et DC.

Ces *quatre* équations renferment *implicitement* toutes les propriétés des triangles *rectangles;* et il ne s'agit que de les faire ressortir par des transformations convenablement exécutées.

1°. Les égalités (1) et (2), ou plutôt les proportions qui y ont conduit, nous apprennent que *chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et le segment adjacent.*

C'est une des propriétés principales du triangle rectangle.

2°. Ajoutons membre à membre les égalités (1) et (2), il vient

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m + n),$$

ou, à cause de l'égalité (4),

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Ce qui démontre que, *dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit.*

C'est la propriété caractéristique du triangle rectangle.

3°. Multiplions les mêmes égalités (1) et (2) membre à membre; on obtient

$$b^2c^2 = a^2mn;$$

mais l'égalité (3) donne aussi

$$b^2c^2 = a^2h^2;$$

donc

$$a^2mn = a^2h^2,$$

et, par conséquent,

$$h^2 = mn,$$

ou bien

$$m : h :: h : n.$$

Ainsi, *la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre lesdeux segments de l'hypoténuse.*

4°. Divisons membre à membre les égalités (1) et (2); il vient

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{an}{am}, \quad \text{d'où} \quad b^2 : c^2 :: n : m;$$

c'est-à-dire que *les carrés construits sur les côtés de l'angle droit sont entre eux comme les segments de l'hypoténuse.*

En un mot, toute transformation exécutée sur les égalités (1), (2), (3) et (4) conduirait à un résultat qui, *traduit géométriquement,* ne serait autre chose qu'un théorème ou une vérité plus ou moins remarquable.

4. Observons d'ailleurs, en passant, que, comme ces *quatre* équations renferment *six* quantités a, b, c, h, m et n, il s'ensuit que, *deux quelconques d'entre elles étant données, on peut se proposer de déterminer les quatre autres à l'aide de ces équations.*

Supposons, par exemple, que *connaissant l'hypoténuse* BC *et la perpendiculaire* AD, *il s'agisse de déterminer les deux côtés de l'angle droit et les deux segments.*

Les équations (1), (2) et (4) donnent d'abord, comme on l'a déjà vu,

$$b^2 + c^2 = a^2;$$

mais si l'on double l'égalité (3), on a

$$2bc = 2ah,$$

d'où, en faisant successivement la somme et la différence de ces deux dernières, on déduit

$$(b + c)^2 = a^2 + 2ah,$$
$$(b - c)^2 = a^2 - 2ah,$$

et, par conséquent,

$$b + c = \sqrt{a^2 + 2ah}, \quad b - c = \sqrt{a^2 - 2ah}.$$

Connaissant la somme $b+c$ et la différence $b-c$ des deux côtés b et c, il est facile d'obtenir chacun d'eux en particulier.

On a, d'après un théorème connu, pour le plus grand côté (qu'on peut toujours supposer exprimé par b),

$$b=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2ah}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-2ah},$$

et pour le plus petit, c,

$$c=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2ah}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-2ah}.$$

Quant aux deux segments m et n, ils sont donnés immédiatement par les équations (1) et (2), puisque b, c et a sont maintenant connus.

5. *Remarque.* — La seconde partie des valeurs de b et de c nous apprend que, pour que le triangle puisse exister avec les données établies, il faut que l'on ait

$$a^2>2ah, \quad \text{ou au moins} \quad a^2=2ah;$$

d'où l'on tire

$$h<\frac{a}{2}, \quad \text{ou tout au plus} \quad h=\frac{a}{2};$$

car autrement, les valeurs de b et de c seraient imaginaires.

En effet, pour construire un triangle *rectangle*, connaissant *l'hypoténuse et la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit*, on peut employer le moyen suivant :

Décrivez sur l'hypoténuse BC *comme diamètre une demi-circonférence; élevez au point* B *une perpendiculaire* BH *égale à la perpendiculaire donnée; menez* HL *parallèle à* BC; et les deux triangles égaux, ABC, A'BC, satisfont à la question. FIG. 2.

Or, pour que le problème soit possible, il faut évidemment que BH soit *inférieur*, ou tout au plus *égal* à $\frac{1}{2}$BC.

Lorsqu'on a $BH=\frac{1}{2}BC$, ou $h=\frac{1}{2}a$, le triangle rec-

tangle devient *isocèle*, et les valeurs de b, c se réduisent à

$$b = \frac{1}{2} a \sqrt{2}, \quad c = \frac{1}{2} a \sqrt{2};$$

ce qu'on peut aussi reconnaître d'après la figure.

FIG. 3. 6. Considérons, en second lieu, un triangle OBLIQUANGLE ABC, et proposons-nous d'exprimer l'un des côtés, AB par exemple, au moyen des deux autres, en nous fondant sur la propriété caractéristique du triangle rectangle (n° 3, 2°).

Abaissons du sommet A la perpendiculaire AD (qui peut tomber en dedans ou au dehors du triangle, selon que l'angle C est aigu ou obtus), et conservons d'ailleurs les mêmes notations que précédemment, savoir :

$$BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c, \quad AD = h, \quad BD = m, \quad DC = n.$$

Les deux triangles rectangles ADB, ADC donnent les égalités

(1) $$c^2 = h^2 + m^2,$$

(2) $$b^2 = h^2 + n^2,$$

auxquelles il faut joindre celle-ci :

(3) $$a = m \pm n.$$

[Le signe *supérieur* de l'égalité (3) correspond au cas où l'angle C est *aigu*, et le signe *inférieur*, à celui où il est *obtus*.]

Cela posé, retranchons l'égalité (2) de l'égalité (1); il vient

$$c^2 - b^2 = m^2 - n^2,$$

d'où

(4) $$c^2 = b^2 + m^2 - n^2;$$

mais l'égalité (3) donne

$$m = a \mp n,$$

et, par conséquent,

$$m^2 = a^2 \mp 2an + n^2.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (4), on obtient enfin

(5) $$c^2 = b^2 + a^2 \mp 2an.$$

Donc, *dans tout triangle obliquangle, le carré d'un côté*

quelconque est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, MOINS *ou* PLUS *le double produit de l'un de ces deux côtés par la projection de l'autre sur celui-ci.*

L'égalité (5) comprend, sous une forme très-concise, les deux théorèmes principaux sur les triangles obliquangles.

7. Le problème suivant est très-propre à faire ressortir l'utilité de l'Algèbre dans la résolution des questions de Géométrie.

On propose de diviser une ligne donnée AB *en* MOYENNE ET EXTRÊME RAISON, c'est-à-dire *en deux parties, dont l'une soit moyenne proportionnelle entre la droite entière et l'autre partie.* FIG. 4.

Supposons le problème résolu, et soit E un point de AB, déterminé de manière qu'on ait la proportion

$$AB : AE :: AE : EB.$$

Posons

$$AB = a, \quad AE = x; \quad \text{d'où} \quad EB = a - x.$$

La proportion devient

$$a : x :: x : a - x;$$

d'où l'on déduit l'équation

$$x^2 = a^2 - ax,$$

qui, étant résolue, donne

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

De ces *deux* valeurs fournies par la résolution de l'équation, la *première* est la seule susceptible de satisfaire à l'énoncé du problème tel qu'il a été établi, car la seconde (qui est négative) a une valeur numérique *plus grande* que a; d'où il suit qu'elle ne peut exprimer *une partie* de la droite donnée a. Nous verrons plus loin (n° 25) pour quelle raison cette valeur se rattache à la première et comment on doit l'interpréter; occupons-nous donc seulement de la valeur

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}},$$

et voyons ce qu'elle signifie en Géométrie.

Ce résultat indique évidemment que, pour obtenir la valeur de x en *ligne*, il faut retrancher la *moitié* de a de l'expression $\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}$. Mais, en vertu de la propriété principale du triangle rectangle, $\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}$ représente l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont a et $\frac{a}{2}$.

On est ainsi amené à la construction suivante :

Fig. 4. *De l'extrémité* B *de la ligne* AB $= a$, *élevez une perpendiculaire* BC *égale à* $\frac{1}{2}a$, *et tirez* AC; il en résulte

$$AC = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}.$$

Du point C *comme centre, avec le rayon* CB $= \frac{a}{2}$, *décrivez un arc de cercle*, BD, *qui coupe* AC *au point* D; vous aurez

$$AD = AC - CD = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}.$$

Enfin, rabattez par un arc de cercle AD *de* A *en* E; et le point E sera LE POINT DEMANDÉ.

En effet, on a

$$AE = AD = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2} = x.$$

Il est à remarquer que cette construction à laquelle on est parvenu, est précisément celle qu'on donne dans les *Éléments de Géométrie.*

Pour l'obtenir par des considérations purement géométriques, il faut une analyse assez délicate; tandis qu'on la trouve facilement à l'aide des symboles de l'Algèbre.

C'est ainsi que souvent, en appelant l'Algèbre au secours de la Géométrie, on parvient à résoudre des questions qui, autrement, exigeraient des raisonnements difficiles et compliqués.

8. En réfléchissant sur la manière dont la dernière question vient d'être traitée, on voit que la résolution d'un

problème de Géométrie par le secours de l'Algèbre se compose de *trois* parties principales :

1°. *Traduire algébriquement l'énoncé du problème*, ou *le mettre en équation.*

2°. *Résoudre l'équation* ou *les équations*, suivant que l'énoncé renferme une ou plusieurs inconnues.

3°. *Construire* ou *évaluer en lignes* les *expressions algébriques* auxquelles on est parvenu.

Généralement, on doit y joindre une *quatrième* partie qui a pour objet *la discussion du problème*, ou l'examen de toutes les circonstances qui y sont relatives (*voyez* le n° 5).

Or, il en est des problèmes de Géométrie comme des problèmes d'Algèbre, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de règles bien fixes *pour mettre un problème en équation.* Le précepte établi en Algèbre est également applicable (*voyez* n° 2) aux problèmes de Géométrie ; mais la manière de le mettre en pratique varie suivant les différents problèmes qu'on peut avoir à résoudre. Cependant, nous développerons ultérieurement, à ce sujet, une *méthode générale* constituant, à proprement parler, la GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Les *équations* une fois obtenues, on peut les *résoudre* d'après les moyens que fournit l'Algèbre en s'attachant à combiner ces équations de la manière la plus convenable pour en tirer le résultat cherché.

Quant à la *troisième* partie, qui a pour objet de *construire les expressions algébriques* auxquelles on est parvenu, les règles à suivre sont faciles et en petit nombre.

C'est donc par le développement de cette troisième partie qu'il convient de commencer.

§ II. — CONSTRUCTION DES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES.

9. Nous ne considérerons, dans tout ce qui va suivre, que des expressions *rationnelles* ou *irrationnelles du second degré*, c'est-à-dire des résultats provenant d'équations du *premier* ou du *second* degré.

Les expressions élémentaires, c'est-à-dire les expressions

à la construction desquelles on peut ramener toutes les autres, sont au nombre de *six*, savoir :

$$x = a - b + c - d + e \ldots, \quad x = \frac{ab}{c}, \quad x = \frac{a^2}{c},$$

$$x = \sqrt{ab}, \quad x = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

(a, b, c, d,... exprimant les *nombres* d'unités *linéaires* contenues dans des lignes données).

Nous renvoyons, pour la construction de ces expressions, aux *Éléments de Géométrie* (*).

Les expressions

$$x = 2a, \quad x = 3a, \quad x = 4a, \ldots$$

ne sont que des cas particuliers de

$$x = a + b + c + d + \ldots.$$

Quant aux lignes représentées par les expressions

$$x = \frac{a}{3}, \quad x = \frac{2a}{3}, \quad x = \frac{3a}{7}, \ldots,$$

leur construction se déduit facilement du mode de division d'une droite en 2, 3, 7,... parties égales.

Ainsi, pour construire la ligne $x = \frac{3a}{7}$, il suffit de *diviser a en 7 parties égales et de prendre 3 de ces parties*, ou bien *de prendre une ligne égale à 3 a, qu'on divise ensuite en 7 parties égales.*

10. La construction de l'expression

$$x = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - e^2 + f^2 - \ldots}$$

se ramène à celle des deux expressions *élémentaires*

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad x = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

En effet, si l'on pose

$$m^2 = a^2 + c^2 + f^2 + \ldots \quad \text{et} \quad n^2 = b^2 + d^2 + e^2 + \ldots,$$

il en résulte

$$x = \sqrt{m^2 - n^2},$$

m étant nécessairement *plus grand* que n, pour que l'expression de x soit *réelle*.

(*) *Voyez* le Cours de *Géométrie élémentaire* et l'*Abrégé de Géométrie* de M. VINCENT. (Imprimerie de MALLET-BACHELIER.)

Or, on obtient la ligne représentée par

$$m = \sqrt{a^2 + c^2 + f^2 + \ldots}$$

en construisant d'abord $\sqrt{a^2+c^2}$, *ligne* qu'on peut désigner par p, puis $\sqrt{p^2+f^2}$, qu'on désigne par q, et ainsi de suite.

On obtient de la même manière

$$n = \sqrt{b^2 + d^2 + e^2 + \ldots};$$

en sorte qu'il ne s'agit plus que de construire

$$x = \sqrt{m^2 - n^2}.$$

Donc, etc.

11. Ce mode de construction peut servir à évaluer en *lignes* les radicaux *numériques* du second degré.

Soit, pour premier exemple, à *construire*

$$x = \sqrt{15}.$$

Cette valeur de x peut être mise sous la forme

$$x = \sqrt{16 - 1} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{(4)^2 - 1},$$

et représente, en conséquence, l'un des côtés, b, de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est $a = 4$, et l'autre côté, $c = 1$.

On trouverait de même

$$\sqrt{7} = \sqrt{4 + 4 - 1} = \sqrt{2^2 + 2^2 - 1},$$

$$\sqrt{11} = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{3^2 + 1 + 1},$$

$$\sqrt{43} = \sqrt{36 + 9 - 1 - 1} = \sqrt{6^2 + 3^2 - 1 - 1}.$$

L'artifice consiste à décomposer le nombre soumis au radical en la *somme algébrique* de plusieurs *carrés;* ce qui est toujours possible.

12. Nous sommes actuellement en état de construire toute expression algébrique *rationnelle* ou *irrationnelle du second degré*, provenant de la *mise en équation* d'un problème de Géométrie, *chacune* des lignes qui font partie de l'énoncé, ayant été représentée par une lettre.

Commençons par les *monômes rationnels*.

Soit proposée l'expression

$$x = \frac{2abc}{de}.$$

On peut la mettre sous la forme

$$x = \frac{2ab}{d} \times \frac{c}{e}.$$

Or, $\frac{2ab}{d}$ exprime évidemment une *quatrième proportionnelle* aux trois lignes d, $2a$ et b.

Cette ligne étant construite, posons

$$\frac{2ab}{d} = m;$$

il en résulte

$$x = m \times \frac{c}{e},$$

qui exprime également une *quatrième proportionnelle* aux trois lignes e, m, c.

Soit encore à construire

$$x = \frac{2a^3b^2c}{3d^2f^2g}.$$

Cette expression revient à

$$x = \frac{2a^2}{3d} \times \frac{a}{d} \times \frac{b}{f} \times \frac{b}{f} \times \frac{c}{g}.$$

D'abord, $\frac{2a^2}{3d}$, ou $\frac{2a \times a}{3d}$ exprime une *quatrième proportionnelle* aux lignes $3d$, $2a$ et a.

Posant

$$\frac{2a^2}{3d} = m,$$

on a

$$x = m \times \frac{a}{d} \times \frac{b}{f} \times \frac{b}{f} \times \frac{c}{g}.$$

Or, $m \times \frac{a}{d}$ représente une *quatrième proportionnelle* aux lignes d, m et a.

Soit

$$m \times \frac{a}{d} = n;$$

il en résulte

$$x = n \times \frac{b}{f} \times \frac{b}{f} \times \frac{c}{g}.$$

En continuant ainsi, l'on parviendra, à l'aide de *cinq* quatrièmes proportionnelles, à une *dernière ligne* qui représentera la valeur proposée.

N. B. — *Le nombre des quatrièmes proportionnelles est toujours marqué par le degré, ou par la* SOMME *des exposants du* DÉNOMINATEUR.

13. Passons aux expressions fractionnaires *polynômes*. Soit à construire

$$x = \frac{2a^3 - 3a^2b + b^2c}{a^3 - 2ab + b^2}.$$

On peut d'abord l'écrire ainsi :

$$x = \frac{a^2\left(2a - 3b + \dfrac{b^2c}{a^2}\right)}{a\left(a - 2b + \dfrac{b^2}{a}\right)}.$$

Si, après avoir supprimé le facteur a, commun aux deux termes, on pose

$$\frac{b^2c}{a^2} = m, \quad \frac{b^2}{a} = n,$$

il en résulte

$$x = \frac{a(2a - 3b + m)}{a - 2b + n};$$

et cette expression représente alors une *quatrième proportionnelle* aux *trois* lignes $a - 2b + n$, a et $2a - 3b + m$.

Quant aux deux lignes m et n, on peut les construire facilement, d'après ce qui a été dit plus haut.

L'artifice de ces transformations consiste à décomposer l'un des termes, tant du numérateur que du dénominateur, en deux facteurs, l'un du premier degré, l'autre du degré $n - 1$, n étant le degré de ce terme, et à mettre ce dernier facteur en évidence.

On a soin d'ailleurs, pour restreindre autant que possible les *constructions partielles*, de faire en sorte que ce facteur mis en évidence comprenne les lettres qui entrent

le plus de fois comme facteurs dans les deux termes de la fraction.

On trouvera ainsi que l'expression

$$x = \frac{a^4 - 2a^3b + 2ab^3c - b^3cd}{2ab^3 - 3b^3 - 4bc^3 + c^3d}$$

revient à

$$x = \frac{a(m - n + 2c - p)}{2a - 3b - q + r},$$

en mettant le facteur ab^3 en évidence au *numérateur*, et le facteur b^3 en évidence au *dénominateur*, puis posant

$$m = \frac{a^3}{b^2}, \quad n = \frac{2a^2}{b}, \quad p = \frac{cd}{a}, \quad q = \frac{4c^2}{b}, \quad r = \frac{c^2d}{b^2}.$$

Ces dernières expressions étant construites, on en déduit la valeur de x, qui est une *quatrième proportionnelle* aux trois lignes $2a - 3b - q + r$, a, et $m - n + 2c - p$.

On peut remarquer qu'il y a beaucoup d'analogie entre ces transformations et celles qu'on exécute pour rendre les expressions algébriques calculables par logarithmes.

14. Considérons maintenant *les expressions radicales du second degré.*

Soit, premièrement, l'expression

$$x = \sqrt{a^2 - bd}.$$

On peut la mettre sous la forme

$$x = \sqrt{a\left(a - \frac{bd}{a}\right)};$$

et si l'on pose

$$\frac{bd}{a} = m,$$

ligne facile à construire, il en résulte

$$x = \sqrt{a(a - m)},$$

expression qui représente *une moyenne proportionnelle* entre les deux lignes a et $a - m$.

AUTREMENT. — Soit fait

$$n^2 = bd,$$

il vient

$$x = \sqrt{a^2 - n^2};$$

d'où l'on voit qu'après avoir construit une *moyenne* propor-

tionnelle n entre b et d, il suffit de déterminer l'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant a pour hypoténuse, et n pour autre côté.

Soit, en second lieu,

$$x = \sqrt{\frac{a^3 - 2b^2c + 3b^3}{a - b}}.$$

Cette expression revient à celle-ci

$$x = \sqrt{b \times \frac{a^3 - 2b^2c + 3b^3}{b(a - b)}}.$$

Or, on a

$$\frac{a^3 - 2b^2c + 3b^3}{b(a - b)} = \frac{b\left(\frac{a^3}{b^3} - 2c + 3b\right)}{a - b},$$

quantité qu'on peut construire aisément, comme on l'a vu au n° 13.

Désignant donc cette quantité ou cette ligne par m, on obtient

$$x = \sqrt{b \times m},$$

expression facile à construire.

En général, pour toute expression radicale du second degré, il suffit de *mettre en évidence, sous le radical, un des facteurs littéraux qui entrent dans les termes du numérateur, a* par exemple; le second facteur sous le radical est alors *une expression rationnelle qu'on sait construire.*

Désignant cette expression par une lettre m, on est amené finalement *à construire la valeur*

$$x = \sqrt{a \times m}.$$

N. B. — Si l'on avait une expression telle que

$$x = a\sqrt{\frac{b}{c}},$$

il faudrait commencer par faire passer le coefficient a sous le radical; ce qui donnerait

$$x = \sqrt{\frac{a^2 b}{c}} = \sqrt{a \times m},$$

en posant et construisant

$$m = \frac{a \times b}{c}.$$

*Remarque importante sur l'*HOMOGÉNÉITÉ.

15. Dans chacune des expressions algébriques que nous venons de considérer, tous les termes sont de *même degré* si elles sont *entières;* et si elles sont *fractionnaires :* 1° tous les termes du numérateur sont *de même degré entre eux*, ainsi que tous les termes du dénominateur; 2° le degré du numérateur *surpasse* celui du dénominateur d'*une unité* pour les quantités *rationnelles*, et de *deux unités* pour les quantités *irrationnelles* du *second degré*.

Une expression qui doit représenter *une ligne* est dite *homogène* lorsque ces conditions sont remplies; et *elles le sont* toutes les fois que, dans la traduction algébrique de l'énoncé d'un problème, *on a désigné par une lettre chacune des lignes qu'on a dû faire entrer dans le calcul.*

Pour comprendre qu'il en doit être ainsi, il suffit d'observer que, *d'une part*, les relations employées pour la mise d'un problème en équation, se réduisent toutes à des égalités telles que

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \quad \text{ou} \quad a.d=b.c,$$

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{m}{n}, \quad \text{ou} \quad a^2.n=b^2.m,$$

$$a^2=b^2\pm c^2, \qquad a^2=b^2+c^2\pm 2b.m,$$

qui se déduisent, soit de la théorie des triangles *semblables*, soit des propriétés relatives aux triangles *rectangles* ou *obliquangles;* et que, *d'autre part*, les opérations ou transformations (*) qu'on peut avoir à exécuter sur ces égalités pour arriver au résultat demandé, conduisent toujours nécessairement à des égalités *homogènes*, dans le sens attribué, en Algèbre, à cette dénomination.

(*) Quand il s'agit d'*addition* ou de *soustraction*, les égalités sur lesquelles on opère doivent être non-seulement *homogènes*, étant considérées séparément, mais encore elles doivent être de MÊME DEGRÉ ENTRE ELLES; autrement le résultat de l'addition ou de la soustraction de ces égalités, membre à membre, n'offrirait *aucun sens raisonnable*. Ainsi, l'on ne pourrait additionner des égalités telles que $a=b+c$, $a^2=b^2+c^2$; pas plus qu'en Arithmétique on ne saurait ajouter des quantités d'*espèce différente*.

D'après ce qui vient d'être dit, soit, par exemple,

$$x = \frac{B}{A}, \quad \text{d'où} \quad Ax = B,$$

le résultat auquel on est parvenu pour l'une des inconnues, x devant exprimer *une ligne*.

1°. B et A doivent être séparément *homogènes;*

2°. Comme x exprime une *ligne*, il faut que le degré de B *surpasse d'une unité* celui de A; autrement la seconde égalité ne serait pas *homogène*.

Ainsi, dans le résultat $x = \frac{B}{A}$, les deux conditions énoncées ci-dessus seront *satisfaites*.

Quant aux *radicaux du second degré*, qui peuvent être généralement représentés par l'expression

$$x = \sqrt{A}$$

(A étant *entier* et *fractionnaire*), comme on en déduit

$$x^2 = A,$$

et que le premier membre, x^2, exprime une *surface*, le second membre A doit exprimer une *surface*.

D'où il suit que si A est *fractionnaire*, le degré du numérateur doit surpasser de *deux* unités celui du dénominateur.

Mais si, afin de rendre les calculs plus simples, *on convient* de prendre pour *unité* l'une des *lignes* que l'énoncé du problème prescrit de faire entrer dans le calcul, comme les diverses puissances de 1 sont égales à 1, le *degré* de chacun des termes où cette ligne se trouvait élevée à diverses puissances, doit nécessairement diminuer d'*une* ou de *plusieurs* unités; et, dans le résultat obtenu pour la valeur de l'inconnue, les conditions de l'*homogénéité* doivent, en général, cesser d'exister.

Par exemple, lorsque, dans les expressions

$$x = \frac{ab}{c}, \quad x = \frac{2a^2b^2c}{3d^2f^2g}, \quad x = \frac{a^2 - bd}{c},$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2 - 2b^2c + 3b^3}{a - b}},$$

on suppose $b = 1$, elles se réduisent à

$$x = \frac{a}{c}, \quad x = \frac{2a^3c}{3d^2f^2g}, \quad x = \frac{a^2 - d}{c}, \quad x = \sqrt{\frac{a^3 - 2c + 3}{a - 1}}.$$

Cependant, comme la construction de la *ligne cherchée* dépend de la longueur de chacune des lignes données, et en particulier, *de la ligne prise pour unité*, il faut préalablement rétablir cette dernière dans l'expression de x; ce qui n'offre aucune difficulté, car, en désignant cette ligne par une lettre, m par exemple, il suffit *de l'introduire dans les différents termes*, comme facteur, *à une puissance d'un degré tel, que les deux conditions d'homogénéité soient remplies.*

Ainsi, soit l'expression

$$x = \frac{a^3 - 2a + 3bc}{1 - 2b^2 + a},$$

qui n'est pas homogène, parce qu'on a supposé l'une des lignes de la question, égale à 1.

Puisque l'un des termes du numérateur est du *troisième* degré, et qu'un de ceux du dénominateur est du *deuxième* degré, tous les autres termes doivent être *respectivement* ramenés à ces *mêmes* degrés.

Donc, en désignant par m la ligne prise pour unité, on a

$$x = \frac{a^3 - 2am^2 + 3bcm}{am - 2b^2 + m^2},$$

expression qui peut se construire d'après les règles établies précédemment.

De même,

$$x = \frac{a - b^2 + c^3}{a^3 - b + d^2} \quad \text{devient} \quad \frac{am^3 - b^2m^3 + c^3m}{a^3 - bm^2 + d^2m}.$$

Soit encore

$$x = \sqrt{\frac{acf}{bd} + \frac{ce}{fg} - \frac{a^4f}{d}}.$$

Chacun des termes, sous le radical, *devant* être du *deuxième* degré, on transformera $\frac{acf}{bd}$ en $\frac{acfm}{bd}$, $\frac{ce}{fg}$ en $\frac{cem^3}{fg}$, $\frac{a^4f}{d}$ en $\frac{a^4f}{dm^2}$; et l'expression deviendra

$$x = \sqrt{\frac{acfm}{bd} + \frac{cem^3}{fg} - \frac{a^4f}{dm^2}}.$$

Posant alors

$$p^2=\frac{aefm}{bd}=\frac{ae}{b}\times\frac{fm}{d},\quad \text{d'où}\quad p=\sqrt{\frac{ae}{b}\times\frac{fm}{d}},$$

$$q^2=\frac{cem^2}{fg}=\frac{ce}{f}\times\frac{m^2}{g},\quad \text{d'où}\quad q=\sqrt{\frac{ce}{f}\times\frac{m^2}{g}},$$

$$r^2=\frac{a^4f}{dm^2}=a\times\frac{a^3f}{dm^2},\quad \text{d'où}\quad r=\sqrt{a\times\frac{a^3f}{dm^2}},$$

et construisant p, q, r, d'après les principes connus, on obtiendra pour x la valeur

$$x=\sqrt{p^2+q^2-r^2},$$

expression qui rentre dans celle du n° 10.

16. *Conséquence.* — Dès qu'on applique l'Algèbre à une question de Géométrie, la représentation des *lignes* par des *lettres* suppose toujours (n° 1) qu'on ait pris une *certaine* ligne pour *unité;* mais il faut distinguer deux cas :

Ou le résultat auquel on parvient, pour l'expression de l'inconnue, est *homogène;* ou bien, il ne l'est pas.

Dans le premier cas, la connaissance de la ligne *prise pour unité* est indifférente à la construction du résultat.

Dans le second, cette ligne est nécessairement *une des lignes de l'énoncé,* et son introduction dans le résultat est indispensable pour la construction.

On est ainsi conduit, en quelque sorte, à considérer deux espèces d'*unités linéaires :* l'UNE qu'on peut appeler l'*unité implicite;* c'est celle que comportent en elles-mêmes les expressions HOMOGÈNES; l'AUTRE, qui serait alors l'*unité explicite;* c'est une des *lignes données* de la question, et que, pour simplifier le calcul, on a jugé à propos de faire égale à 1. Son rétablissement dans le résultat final est toujours facile, au moyen des conditions d'homogénéité.

La *Trigonométrie* où, soit en vue de simplifier les calculs, soit afin d'obtenir des formules plus faciles à graver dans la mémoire, on suppose généralement *le rayon égal à l'unité,* offre des applications nombreuses de ces principes sur l'*homogénéité.*

17. SCOLIE GÉNÉRAL. — Les diverses propositions que

nous avons développées dans ce paragraphe et dans le précédent sont suffisantes pour la construction de tous les problèmes dont les équations conduisent à des résultats *rationnels*, ou à des expressions *irrationnelles du second degré*.

Nous ajouterons que, dans chaque problème, il faut tâcher de faire servir la figure de l'énoncé à la construction des résultats; car c'est ordinairement dans la liaison plus ou moins directe entre la construction et la figure, que consiste le plus ou moins d'élégance de la solution du problème par le secours de l'Algèbre. Les problèmes suivants feront ressortir l'importance de cette observation.

Nous les proposons comme moyen d'initier les commençants aux méthodes de l'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE; nous aurons soin, à cet effet, de faire quelques réflexions sur la manière dont ils auront été résolus.

§ III. — RÉSOLUTION DE DIVERSES QUESTIONS RELATIVES A LA LIGNE DROITE ET AU CERCLE.

FIG. 5. 18. PREMIER PROBLÈME. — *Inscrire un carré dans un triangle donné* ABC; c'est-à-dire, trouver sur le côté AB un point E tel, que si l'on mène EF parallèle à BC, et EG, FH perpendiculaires sur BC, la figure GEFH soit un carré.

Supposons le problème résolu, et abaissons du sommet A la hauteur AD du triangle.

Il est évident que, si le point I où AD rencontre EF, était déterminé de position, il en serait de même de EF, et par conséquent du *carré cherché*.

Posons donc

$$DI = EG = EF = x,$$

et tâchons d'obtenir une équation entre cette ligne x et les lignes *connues* de la figure *qui peuvent nous être utiles*.

Or, les deux triangles ABC, AEF étant semblables, leurs bases BC, EF sont entre elles comme leurs hauteurs AD, AI; c'est-à-dire qu'on a la proportion

$$BC : EF :: AD : AI.$$

Cela posé, soit

$$BC = a, \quad AD = h;$$

comme on a d'ailleurs

$$DI = EF = x,$$

il en résulte

$$AI = h - x;$$

d'où, en substituant ces notations dans la proportion ci-dessus,

$$a : x :: h : h - x;$$

ce qui donne

$$ah - ax = hx,$$

et, par suite,

$$x = \frac{ah}{a + h}.$$

Cette expression représente *une quatrième proportionnelle* aux trois lignes $a + h$, a et h.

Pour la construire, nous ferons usage de l'angle ADX, puisqu'on a déjà

$$AD = h,$$

et que le point I *cherché* doit être situé sur AD.

Portons d'abord BC, *ou* a, *de* D *en* K, *et* AD, *ou* h, *de* K *en* L; il en résulte

$$DL = a + h, \quad DK = a;$$

et comme on a déjà

$$DA = h,$$

il s'ensuit que *si l'on joint le point* L *au point* A, et *qu'on mène* KI *parallèle* à LA, *le point* I *sera le point cherché.*

En effet, on a la proportion

$$DL : DK :: DA : DI, \quad \text{d'où} \quad a + h : a :: h : DI;$$

donc

$$DI = \frac{ah}{a + h} = x.$$

Le point I étant déterminé, on mène, par ce point, EF *parallèle à* BC, *et* EG, FH *perpendiculaires à* BC; ce qui donne GEFH pour le CARRÉ DEMANDÉ.

19. *Remarque.* — Dans l'analyse de ce problème, nous avons eu le soin de n'établir les notations algébriques, qu'après avoir reconnu quelles étaient les données *absolument nécessaires.* Ainsi, il nous a suffi de faire entrer en considération la *base* et la *hauteur* du triangle, quoique les deux autres côtés fussent également connus. C'est une attention qu'on doit toujours avoir pour éviter les notations inutiles.

Fig. 6. 20. Deuxième problème. — *Étant donnés de position et de grandeur un cercle* X *et une droite* AB, *trouver sur la circonférence un point* M *tel que, si on le joint aux extrémités de la droite* AB, *et qu'on tire la corde* DE, *cette corde soit parallèle à* AB.

(Nous considérons particulièrement ici le cas où la droite AB est *extérieure* au cercle.)

Solution. — Remarquons d'abord que, si le point D était fixé de position sur le cercle, il en serait de même des deux lignes AM, BM, et par conséquent, de la droite DE.

La question est donc ramenée à chercher le point D.

Or ce point serait connu, si l'on pouvait déterminer la distance, AG, du point A au pied de la perpendiculaire DG abaissée sur AB.

A cet effet, du point C, centre du cercle, abaissons la perpendiculaire CF, et posons

$$AB = a,\quad AF = b,\quad CF = c,\quad CD = r,\quad AG = x,\quad DG = y;$$

il en résulte

$$GF = DI = b - x,\quad CI = c - y.$$

(L'introduction d'une seconde inconnue, DG ou y, sert ici pour la commodité du calcul.)

Ces notations étant convenues, observons d'abord que le triangle rectangle CDI donne

$$\overline{CD}^2 = \overline{DI}^2 + \overline{CI}^2,$$

ou bien

$$r^2 = (b - x)^2 + (c - y)^2, \tag{1}$$

première équation entre les inconnues x, y, et les lignes connues b, c, r.

Pour en obtenir une *seconde*, nous considérerons les deux triangles MAB et MDE; ils sont semblables et donnent la proportion

$$MA : MD :: AB : DE;$$

d'où l'on déduit

$$MA : AD :: AB : AB - DE,$$

ou, multipliant les deux premiers termes par AD,

$$MA \times AD : \overline{AD}^2 :: AB : AB - DE.$$

Or, le rectangle $MA \times AD$ est connu; car si, du point

A qui est déterminé de position, nous menons la tangente AL, nous avons, d'après un théorème de Géométrie,

$$MA \times AD = \overline{AL}^2 = m^2$$

(en désignant par m la nouvelle ligne connue AL).

On a d'ailleurs

$$\overline{AD}^2 = x^2 + y^2, \quad AB = a, \quad DE = 2DI = 2(b - x);$$

d'où

$$AB - DE = a - 2b + 2x.$$

Ainsi, la proportion ci-dessus devient

$$m^2 : x^2 + y^2 :: a : a - 2b + 2x;$$

d'où l'on tire

$$m^2(a - 2b + 2x) = a(x^2 + y^2); \tag{2}$$

telle est la *seconde* équation du problème.

Les équations (1) et (2), dont la première, développée, devient

$$x^2 + y^2 = 2bx + 2cy - (b^2 + c^2 - r^2),$$

et dont l'autre peut se mettre sous la forme

$$x^2 + y^2 = \frac{m^2}{a}(2x + a - 2b),$$

sont susceptibles de simplification.

D'abord, les triangles ACF et ACL donnent

$$\overline{AC}^2 = b^2 + c^2,$$

$$\overline{AL}^2 \text{ ou } m^2 = \overline{AC}^2 - \overline{LC}^2 = b^2 + c^2 - r^2.$$

En second lieu, la quantité $\frac{m^2}{a}$ est *une troisième proportionnelle* qu'on peut supposer construite, et en la désignant par m, on obtient

$$m^2 = an.$$

Par suite, les deux équations du problème deviennent

$$x^2 + y^2 = 2bx + 2cy - an, \tag{3}$$

$$x^2 + y^2 = n(2x + a - 2b). \tag{4}$$

Égalant entre elles ces deux valeurs de $x^2 + y^2$, on trouve, toute réduction faite,

$$(b - n)x + cy = n(a - b), \tag{5}$$

équation qui n'est que du *premier* degré en x, y, et qui

peut remplacer l'équation (3); en sorte que la question est ramenée à éliminer y entre les deux équations (4) et (5).

L'équation en x que l'on obtiendra ainsi, étant résolue, fera connaître la distance AG, et, par suite, la position du point D qui donne celle du *point demandé* M.

Si l'on effectue cette élimination, on trouvera pour équation finale en x,

$$[c^2+(n-b)^2]x^2+2n[(n-b)(a-b)-c^2]x = n[(a-2b)c^2-n(a-b)^2].$$

Nous n'entrerons pas dans le détail de la résolution de cette équation, parce que le résultat qu'on obtiendrait serait très-compliqué, et que la construction qu'on déduirait des principes établis précédemment, n'offrirait aucun intérêt (*).

21. *Second moyen de résolution* du problème proposé.

FIG. 7. Supposons toujours le problème résolu, et soit D le point à déterminer.

Menons en ce point la tangente DK, et par le point A la tangente AL, comme dans l'analyse précédente.

Les deux triangles ABM, ADK sont semblables, car ils ont l'angle A commun; de plus, AKD = KDE, par la propriété des angles alternes internes; mais KDE et DME sont égaux comme ayant même mesure: ainsi

$$AKD = DME \text{ ou } AMB.$$

On a donc la proportion

$$AB : AD :: AM : AK,$$

d'où l'on tire

$$AB \times AK = AD \times AM = \overline{AL}^2.$$

Soient

$$AB = a, \quad AL = m, \quad AK = x;$$

il en résulte

$$a \times x = m^2, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{m^2}{a}.$$

Après avoir *construit* séparément (ou si l'on veut, sur la figure même), cette *troisième proportionnelle*, par l'une des méthodes connues, on la portera de A en K sur AB; puis, du point K l'on *mènera la tangente* KD au cercle donné.

(*) Nous renvoyons au chapitre premier, pour la construction géométrique des équations (1) et (2).

Le point D sera le point qui servira à *fixer* le POINT M CHERCHÉ.

N. B. — Comme du point K il est toujours possible de mener deux tangentes KD, KD′, il s'ensuit que l'on a deux points M et M′ qui satisfont à la question. Ainsi, le problème admet, en général, *deux* solutions.

Ce résultat s'accorde avec celui de la première méthode employée pour résoudre le problème, puisqu'on est parvenu à une équation du *second degré*.

22. *Remarque.* — La construction de la tangente DK, qui a conduit d'une manière si simple à la résolution du problème, est une de ces idées qui s'offrent rarement à l'esprit de ceux qui n'ont pas déjà une grande habitude.

Quel que soit le problème proposé, il est toujours facile de trouver dans la figure que prescrit l'énoncé, et à l'aide de quelques constructions qui se présentent naturellement, un premier mode de résolution, en faisant usage des relations principales de la Géométrie, telles que les propriétés des triangles rectangles, des triangles semblables ou des lignes considérées dans le cercle. Mais la difficulté est de découvrir les constructions susceptibles de conduire à des équations simples et à des résultats élégants.

Nous observerons, à ce sujet, qu'un problème de Géométrie est en général moins facile à mettre en équation qu'un problème ordinaire d'Algèbre. Dans celui-ci, il suffit, le plus communément, de traduire, à l'aide des signes algébriques, les conditions *explicites* de l'énoncé, ou du moins des conditions *implicites* que l'on déduit aisément des premières. Les données et les inconnues y sont d'ailleurs en évidence; tandis que dans un problème de Géométrie, qui se réduit presque toujours à fixer la position d'un ou de plusieurs points, il faut beaucoup d'attention et de sagacité pour déterminer la nature des relations qui, *exprimées algébriquement*, peuvent conduire à une construction simple et élégante du problème. Or, de la nature des relations qu'on emploie, dépend celle des données et des inconnues que l'on doit faire entrer en considération. L'habitude et le discernement peuvent seuls apprendre à surmonter ces difficultés.

Interprétation des résultats négatifs.

Nous allons maintenant nous proposer des problèmes qui donnent lieu à des *résultats négatifs* pour les expressions des inconnues.

Fig. 8. 23. Troisième problème. — *Étant donné un triangle* ACB, *trouver sur le côté* AC *un point* D *tel que, si l'on mène la droite* DE *parallèle à* AB, *cette parallèle soit égale à une ligne donnée* m.

D'abord, les deux triangles semblables ACB, DCE donnent la proportion

$$AC : AB :: DC : DE.$$

Prenons pour *inconnue* la distance du point fixe A au point D, et posons

$$AB = a, \quad AC = b, \quad AD = x, \quad \text{d'où} \quad DC = b - x.$$

La proportion ci-dessus deviendra

$$b : a :: b - x : m, \quad \text{d'où} \quad mb = ab - ax;$$

donc

$$x = \frac{b(a-m)}{a}.$$

On obtiendra facilement cette *quatrième proportionnelle* en prenant BAC pour l'angle de construction, puisque l'on a déjà

$$AB = a, \quad AC = b.$$

A partir du point B *sur* BA, *prenez une partie* BG *égale à* m; il en résulte

$$AG = a - m;$$

menez ensuite GD *parallèle à* BC; le point D sera le point demandé.

En effet, on a la proportion

$$AB : AC :: AG . AD,$$

d'où

$$a : b :: a - m : AD; \quad \text{donc} \quad AD = \frac{b(a-m)}{a} = x.$$

Il est visible d'ailleurs que, si l'on mène DE parallèle à AB, l'on a

$$DE = GB = m.$$

Discussion du résultat. — Tant qu'on aura $m < a$ ou AB,

la valeur de x sera positive, et pourra être construite comme précédemment.

Si l'on suppose $m = a$, la valeur de x se réduit à 0, et le point D se confond avec le point A; ce qui doit être, puisque la ligne AB satisfait à la question.

Soit maintenant $m > a$; la valeur de x devient *négative*, Fig. 8. et, le signe étant mis en évidence, elle prend la forme

$$x = -\frac{b(m-a)}{a}.$$

Afin d'interpréter ce résultat, il faut, en vertu des principes établis en Algèbre, remonter à l'équation du problème, ou à la proportion

$$b : a :: b - x : m,$$

et y changer x en $-x$; ce qui donne

$$b : a :: b + x : m.$$

Or, $b - x$, qui exprimait la distance CD, devenant $b + x$, représente maintenant la somme de deux lignes; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que le point cherché se trouve en D′ sur le prolongement de CA, c'est-à-dire *en sens contraire* de celui où il était d'abord placé.

Cette modification une fois établie dans la proportion, l'on en déduit

$$ab + ax = bm, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{b(m-a)}{a}.$$

Pour construire cette expression, il suffit de porter, à partir du point B, la ligne donnée m de B en G′, ce qui donne

$$AG' = m - a,$$

puis de mener G′D′ parallèle à BC. Le point D′ est le point demandé; c'est-à-dire que D′E′, parallèle à AB, est égale à m. Cela est d'ailleurs évident.

24. *Remarque.* — La solution *négative* qu'on a obtenue dans le cas de $m > a$ indique, non pas une rectification à faire dans l'énoncé de la question (car, quelle que soit la grandeur de m, il est toujours possible de placer cette ligne dans l'angle ACB, parallèlement à AB, en prolongeant les deux côtés, si cela est nécessaire), mais bien une *différence*

de position du point D pàr rapport au point fixe A, suivant la grandeur de m.

Ainsi, lorsque, pour résoudre le problème, on suppose le point D *au-dessus* du point A, cette position est *exacte* tant que l'on a $m < a$; mais elle devient *fausse* dès qu'on a $m > a$; et le signe — obtenu dans ce cas, sert à rectifier cette position, en indiquant que *la distance du point donné au point inconnu, doit être portée en sens contraire de celui où elle avait été d'abord portée.*

Cela est si vrai, qu'on peut éviter tout résultat *négatif* en fixant convenablement *un autre point de départ*, par exemple en prenant CD au lieu de AD pour *inconnue.*

En effet, soit $CD = x'$; les autres notations restant les
Fig. 8. mêmes, on a

$$b : a :: x' : m, \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{mb}{a},$$

résultat qui est *essentiellement positif,* quelles que soient les grandeurs relatives de a, b, m.

Tant que l'on aura $m < a$, la valeur de x' sera *plus petite* que b; et après l'avoir construite, si on la porte sur CA, à partir du point C, l'extrémité D tombera *au-dessus* de A; mais si l'on a $m > a$, la valeur de x' est *plus grande* que b, et le point cherché tombe en D', *au-dessous* du point A.

Observons d'ailleurs que l'expression

$$x' = \frac{mb}{a}$$

peut se mettre sous l'une des deux formes

$$x' = b - \frac{b(a-m)}{a}, \quad \text{ou} \quad x' = b + \frac{b(m-a)}{a};$$

la première correspondant au cas où l'on a $m < a$, et la deuxième à celui où l'on a $m > a$.

Mais comme, par la première manière de résoudre la question, on a trouvé

$$x = \frac{b(a-m)}{a} = -\frac{b(m-a)}{a},$$

il s'ensuit que les deux inconnues x et x' sont liées entre elles par la relation

$$x' = b - x;$$

x étant *positif* dans le cas de $m < a$, et *négatif* lorsque l'on a $m > a$.

25. Reprenons maintenant le problème du n° 7, et tâchons d'en interpréter la *solution négative.*

Il est clair, d'abord, que la première des deux valeurs obtenues est la seule qui puisse satisfaire à la question telle qu'elle a été énoncée, puisqu'on demande de *diviser a* en deux parties, etc., et que la valeur absolue de la seconde solution est *plus grande* que a.

Mais on peut modifier l'énoncé ainsi qu'il suit :

Étant donnés deux points fixes A *et* B, *trouver sur la* FIG. 9. *ligne* AB *ou sur son prolongement un troisième point tel, que sa distance au point* A *soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point* B *et la distance des deux points* A *et* B.

D'après ce nouvel énoncé, comme il n'y a pas de raison pour supposer le point cherché à gauche plutôt qu'à droite du point A, on commence par le supposer *à droite,* c'est-à-dire entre A et B. (Il ne peut être en E″, car AE″ étant *plus grand* à la fois que AB et BE″, ne saurait être moyen proportionnel entre ces deux lignes.)

Soit donc E le point cherché, et posons

$$AE = x, \quad AB = a, \quad \text{d'où} \quad BE = a - x;$$

on a la proportion

$$a : x :: x : a - x,$$

d'où

$$x^2 = a^2 - ax,$$

et

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

La première valeur est *positive* et se construit comme il a été dit n° 7.

La seconde valeur est *négative;* et pour la construire, il faut, *après avoir déterminé la ligne* AC *égale à* $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$, *prolonger* AC *jusqu'à sa rencontre en* D′ *avec la circonférence déjà décrite,* ce qui donne AD′ égal à $\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$, puis *rabattre par un arc de cercle,* AD′ *de* A *en* E′ *à la gauche du point* A (conformément à la remarque du n° 24);

et la distance AE′ devra satisfaire également à la question.

Fig. 9. En effet, à cause de

$$AE' = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}},$$

on a

$$BE' = a + \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Or

$$\overline{AE'}^2 = \left(\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}\right)^2 = \frac{3a^2}{2} + a\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}},$$

et

$$AB \times BE' = \frac{3a^2}{2} + a\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Donc

$$\overline{AE'}^2 = AB \times BE', \quad \text{ou bien} \quad AB : AE' :: AE' : BE'.$$

Ainsi le nouveau problème admet *deux solutions*.

Si l'on demande comment il se fait que ces deux solutions soient comprises dans la *même formule*, quoiqu'en mettant le problème en équation, on ait supposé le point cherché, à droite du point A, et *non à gauche*, voici l'explication qu'on peut en donner :

Soit d'abord le point cherché entre A et B; on a la proportion

$$a : x :: x : a - x,$$

d'où

$$x^2 + ax = a^2. \tag{1}$$

Puis, supposons-le sur le prolongement, en E′ par exemple : comme on a

$$AE' = x,$$

il en résulte

$$BE' = a + x,$$

et la proportion devient

$$a : x :: x : a + x;$$

d'où

$$x^2 - ax = a^2. \tag{2}$$

Cela posé, si l'on résout l'équation (1) en ne tenant compte que de la valeur qui correspond au signe + du radical, on obtient

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}};$$

de même, si l'on résout l'équation (2) en ne tenant compte que de la valeur qui correspond au signe + du radical, il vient

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Or cette valeur est précisément, au *signe près,* la seconde valeur que donne l'équation (1) par sa résolution complète.

Le signe —, qu'on obtient pour cette seconde valeur, correspond (n° 24) à une rectification, non dans l'énoncé du problème, mais dans *la position* qui avait été primitivement attribuée au *point demandé.*

On éviterait, comme dans le problème précédent, toute solution négative, en prenant pour *inconnue* la distance du point cherché à un autre point A′, tel que l'on eût

Fig. 9.

$$AA' > \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Ainsi soit, par exemple,

$$AA' = 2a,$$

et posons

$$A'E = x',$$

d'où

$$AE = x' - 2a, \quad BE = 3a - x';$$

la proportion indiquée par l'énoncé devient

$$a : x' - 2a :: x' - 2a : 3a - x';$$

ce qui donne

$$(x' - 2a)^2 = 3a^2 - ax',$$

et, par suite,

$$x' = \frac{3a}{2} \pm \sqrt{\frac{9a^2}{4} - a^2}.$$

Ces deux valeurs sont essentiellement positives, puisque le radical est *numériquement moindre* que $\frac{3a}{2}$.

On peut d'ailleurs les mettre sous la forme

$$x' = 2a - \frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}},$$

d'où

$$x' - 2a = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}};$$

et, comme on avait trouvé

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}},$$

il s'ensuit que x et x' sont liées par la relation

$$x' - 2a = x, \quad \text{ou} \quad x' = 2a + x.$$

Seulement, x est *positif* pour le point E, et *négatif* pour le point E'.

26. *N. B.* — L'erreur que l'on commettrait en attribuant au point cherché une position *impossible*, se manifeste par une expression *imaginaire*.

FIG. 9. Supposons, en effet, que dans ce même problème, au lieu de prendre le point cherché en E ou en E', on le prenne en E'', c'est-à-dire *à droite* des deux points A et B.

En posant

$$AE'' = x, \quad \text{d'où} \quad BE'' = x - a,$$

on trouve, par la substitution de ces valeurs dans la proportion AB : AE'' :: AE'' : BE'',

$$a : x :: x : x - a, \quad \text{d'où} \quad x^2 - ax = -a^2,$$

et, par suite,

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{3a^2}{4}}.$$

Ce résultat *imaginaire* tient uniquement à ce que l'on a attribué au point cherché une position *absolument impossible;* car AE'' ne saurait, comme nous l'avons déjà dit, être *moyen proportionnel* entre AB et BE''.

27. Les principes établis (n°s 23, 24 et 25) peuvent être résumés de la manière suivante :

1°. Toutes les fois que, dans la résolution d'un problème de Géométrie par le secours de l'Algèbre, l'*inconnue* représente la *distance d'un point fixe à un autre point, comptée sur une droite fixe,* et qu'on obtient, pour expression de cette inconnue, des résultats, les uns *positifs* et les autres *négatifs,*

Si l'on est convenu de porter les *valeurs positives dans*

un sens quelconque à partir du point fixe, les valeurs négatives doivent être portées en sens contraire du précédent.

2°. Le moyen de faire disparaître les solutions négatives, est *de rapporter le point cherché à un autre point fixe, dont la distance au premier point fixe soit assez grande pour qu'on soit assuré que tous les points susceptibles de satisfaire à l'énoncé se trouvent d'un même côté par rapport à ce second point;* et cela est toujours possible, en général, puisque la ligne sur laquelle se comptent ces distances peut être prolongée autant qu'on veut.

Les résultats *négatifs* proviennent uniquement de ce que l'*origine des distances* a été d'abord choisie dans une position intermédiaire entre les points cherchés; et le signe — indique *la différence de position de ces points par rapport au premier point fixe.*

3°. Si dans la résolution d'une question (d'un *problème* ou d'un *théorème*), on veut faire entrer en considération les distances entre un premier point fixe et d'autres points situés avec celui-ci sur la même ligne, mais dans des sens différents, et qu'*on regarde comme positives les distances comptées dans un sens, on doit regarder comme négatives celles qui sont comptées en sens contraire du précédent.*

Nous ne donnons point ici de démonstration générale de ces principes; mais dans la suite, nous les verrons se confirmer de plus en plus, et nous en sentirons mieux l'usage et l'importance.

Le problème suivant mérite beaucoup d'attention, non-seulement sous le rapport des constructions auxquelles il donne lieu, mais encore et surtout sous le rapport de la *discussion.*

28. QUATRIÈME PROBLÈME. — *Étant donnés un angle* YAX *et un point* D *dans l'intérieur de cet angle, on propose de mener par ce point une droite* LDN, *de telle manière que le triangle intercepté* ALN *soit égal à un carré donné* m^2. FIG. 10

Abaissons des points N et D les perpendiculaires NP, DC, et menons DB parallèle à AY.

FIG. 10. Prenons AL pour inconnue, et posons

$$AL = x, \quad DC = h, \quad AB = a, \quad \text{d'où} \quad BL = x - a.$$

Les deux triangles semblables ALN, BLD donnent

$$BL : DC :: AL : NP, \quad \text{ou} \quad x - a : h :: x : NP;$$

donc

$$NP = \frac{hx}{x - a};$$

mais, d'après l'énoncé, on doit avoir

$$ALN \quad \text{ou} \quad \frac{AL \times NP}{2} = m^2;$$

ainsi l'on a pour l'équation du problème,

$$x \times \frac{hx}{2(x - a)} = m^2,$$

ou, effectuant les calculs et ordonnant,

$$(1) \qquad x^2 - 2\frac{m^2}{h}x = \frac{-2am^2}{h}.$$

Cette équation étant résolue donne

$$x = \frac{m^2}{h} \pm \frac{m}{h}\sqrt{m^2 - 2ah}.$$

Pour que ces valeurs soient réelles, il faut que l'on ait

$$m^2 > 2ah, \quad \text{ou au moins} \quad m^2 = 2ah.$$

Arrêtons-nous à l'hypothèse $m^2 = 2ah$, d'où $x = 2a$.

Prenons AG double de AB ou égal à $2a$, et tirons la droite GDH, qui se trouve divisée, au point D, en deux parties égales.

Nous formons ainsi un triangle AGH dont la surface est égale à $2ah$ comme étant *quadruple* de celle du triangle DBG qui a pour mesure $a \times \frac{h}{2}$.

D'où l'on peut conclure que le triangle AGH correspondant à la valeur de $x = 2a$, est le *minimum* de tous ceux qui peuvent satisfaire à la question.

FIG. 11. Supposons maintenant $m^2 > 2ah$, et tâchons de construire le problème sur la figure elle-même.

Les deux valeurs de x étant mises, à cet effet, sous la

forme

$$x = \frac{m^2}{h} \pm \sqrt{\frac{m^2}{h}\left(\frac{m^2}{h} - 2a\right)},$$

prenons sur AX,

$$AG = 2AB = 2a \quad \text{et} \quad AK = \frac{m^2}{h},$$

troisième proportionnelle qu'on peut supposer construite séparément; il en résulte

$$GK = AK - AG = \frac{m^2}{h} - 2a;$$

décrivons sur AK une demi-circonférence, *élevons* du point G la perpendiculaire GI, et *tirons* la corde KI; nous avons

$$KI = \sqrt{AK \times KG} = \sqrt{\frac{m^2}{h}\left(\frac{m^2}{h} - 2a\right)};$$

rabattons par un arc de cercle KI de K en L, et de K en L'; les distances

$$AL = AK + KL \quad \text{et} \quad AL' = AK - KL'$$

sont évidemment les deux valeurs de x.

Enfin *tirons* les droites LDN, L'DN', et nous avons ainsi ALN, AL'N' pour les deux solutions du problème proposé.

29. *Première remarque.* — Le point L' qui correspond à la seconde solution, tombe nécessairement entre B et G; car on a d'abord

$$KL' \quad \text{ou} \quad KI > KG;$$

d'un autre côté, l'expression $\frac{m^4}{h^2} - \frac{2am^2}{h}$ formant les deux premiers termes du carré de $\frac{m^2}{h} - a$, il en résulte

$$\frac{m^4}{h^2} - \frac{2am^2}{h} < \left(\frac{m^2}{h} - a\right)^2,$$

d'où

$$\sqrt{\frac{m^4}{h^2} - \frac{2am^2}{h}}, \quad \text{ou} \quad KL' < \frac{m^2}{h} - a, \quad \text{ou KB.}$$

Dans l'hypothèse de $\frac{m^2}{h} = 2a$, les triangles ALN, AL'N' se réduisent au triangle unique AHG, puisque alors les deux valeurs de x deviennent égales à $\frac{m^2}{h}$.

30. *Seconde remarque.* — La question proposée étant considérée sous le point de vue le plus général, présente *quatre* solutions, quoique la méthode employée pour la résoudre n'en ait fourni que *deux*.

FIG. 12. En effet, outre les deux solutions déjà obtenues, ALN, AL'N', il est visible qu'on peut toujours mener par le point D, deux autres droites DL'', DL''', de manière que les triangles AL''N'', AL'''N''' soient égaux au carré donné m^2.

De plus, pour ces deux solutions, le carré peut être aussi petit ou aussi grand qu'on veut.

Comment se fait-il que ces deux solutions ne soient pas comprises dans le résultat obtenu? — Nous allons répondre à cette question.

En cherchant à mettre le problème en équation, nous avons supposé le point L *à la droite* du point A; et les triangles ALN, BLD nous ont donné

$$NP : DC :: AL : BL, \quad \text{ou} \quad NP : h :: x : x - a;$$

d'où

$$NP = \frac{hx}{x-a},$$

et, par suite,

$$\frac{hx}{x-a} \times \frac{x}{2} = m^2,$$

ou, en simplifiant,

$$(1) \qquad x^2 - 2\frac{m^2}{h}x = -\frac{2am^2}{h}.$$

Maintenant, si nous considérons le point L *à la gauche* du point A, en L'' par exemple, les deux triangles AL''N'', BL''D donnent encore

$$N''P'' : DC :: AL'' : BL''.$$

Mais, comme en général une proportion ne doit être établie qu'entre des nombres *absolus,* et que x est, par sa position, *négatif,* il s'ensuit que la valeur absolue de AL'' doit être exprimée par $-x$, et celle de BL'' par $-x+a$; ainsi la proportion devient

$$N''P'' : h :: -x : -x+a; \quad \text{donc} \quad N''P'' = \frac{-hx}{-x+a};$$

ce qui donne l'équation

$$\frac{-hx}{-x+a}\times\frac{-x}{2}=m^2,$$

ou, réduisant,

$$(2)\qquad x^2+\frac{2m^2}{h}x=\frac{2am^2}{h},$$

équation qui diffère de (1) par le signe de $\frac{m^2}{h}$.

L'équation (2) étant résolue donne

$$x=-\frac{m^2}{h}\pm\frac{m}{h}\sqrt{m^2+2ah}.$$

De ces deux valeurs, qui sont essentiellement réelles, la première est *positive* et la seconde est *négative*. Or, je dis que la valeur positive correspond au triangle AL'''N'''.

En effet, les deux triangles AL'''N''', BL'''D donnent

$$N''P''' : DC :: AL''' : BL''',$$

ou

$$N''P''' : h :: x : a-x; \quad \text{d'où} \quad N''P'''=\frac{hx}{a-x},$$

et, par conséquent,

$$\frac{hx}{a-x}\times\frac{x}{2}=m^2,$$

équation qui revient à celle-ci,

$$\frac{-hx}{-x+a}\times\frac{-x}{2}=m^2;$$

ce qui fait voir que les solutions AL''N'', AL'''N''' sont comprises dans la même équation.

Voici d'ailleurs la construction du résultat

$$x=-\frac{m^2}{h}\pm\sqrt{\frac{m^2}{h}\left(\frac{m^2}{h}+2a\right)}:$$

Prenez A GAUCHE *du point* A *une distance* AK' *égale à* $\frac{m^2}{h}$, et A DROITE *du même point, une distance* AG $=2a$; FIG. 12.

ce qui donne

$$GK'=\frac{m^2}{h}+2a.$$

Décrivez sur GK' *une demi-circonférence; au point* A

élevez la perpendiculaire AI', *et tirez la corde* K'I'; vous avez

$$K'I' = \sqrt{AK' \times GK'} = \sqrt{\frac{m^2}{h}\left(\frac{m^2}{h} + 2a\right)}.$$

Rabattez ensuite K'I' *de* K' en L'' *et de* K' *en* L'''; il en résulte

$$AL'' = -AK' - K'L'' = -\frac{m^2}{h} - \sqrt{\frac{m^2}{h}\left(\frac{m^2}{h} + 2a\right)},$$

$$AL''' = -AK' + K'L''' = -\frac{m^2}{h} + \sqrt{\frac{m^2}{h}\left(\frac{m^2}{h} + 2a\right)}.$$

FIG. 12. *N. B.* — Il serait aisé de reconnaître que le point L''' doit tomber entre A et B. (*Voyez* le n° 29.)

On peut comprendre les *quatre* solutions dans une même formule, en posant l'équation

$$x^2 - 2\left(\pm\frac{m^2}{h}\right)x = -2a\left(\pm\frac{m^2}{h}\right),$$

d'où l'on déduit

$$x = \pm\frac{m^2}{h} \pm \sqrt{\pm\frac{m^2}{h}\cdot\left(\pm\frac{m^2}{h} - 2a\right)}.$$

Le signe supérieur de $\pm\frac{m^2}{h}$ correspondrait alors aux deux solutions ALN, AL'N'; et le signe inférieur, aux solutions AL''N'', AL'''N'''.

Ou bien encore, on pourrait multiplier entre eux les deux facteurs

$$x^2 - \frac{2m^2}{h}x + \frac{2am^2}{h} \quad \text{et} \quad x^2 + \frac{2m^2}{h}x - \frac{2am^2}{h};$$

il en résulterait l'équation du *quatrième* degré

$$x^4 - \frac{4m^4}{h^2}x^2 + \frac{8am^4}{h^2}x - \frac{4a^2m^4}{h^2} = 0,$$

qui comprendrait les *quatre* solutions.

La remarque qui a fait l'objet de ce numéro est une nouvelle confirmation du principe (n° 27) sur *les changements de signe des distances comptées* en sens contraire les unes des autres.

31. Examinons maintenant les circonstances relatives

aux diverses positions que le point D est susceptible de prendre par rapport aux deux lignes AX, AY, en nous bornant à faire connaître les résultats, avec la manière d'y parvenir.

Premier cas. — Supposons le point D placé au-dessous de AX et à la droite de AY, en D′. FIG. 13.

Cette condition s'exprime en introduisant (n° 27) dans le résultat *primitif*, $-h$ à la place de h, puisque les distances des points D et D′ à la ligne AX sont comptées en *sens contraire* l'une de l'autre; et il vient

$$x = -\frac{m^2}{h} \pm \sqrt{\frac{-m^2}{h}\left(\frac{-m^2}{h} - 2a\right)},$$

ou bien

$$x = -\frac{m^2}{h} \pm \sqrt{\frac{m^2}{h}\left(\frac{m^2}{h} + 2a\right)}.$$

La nature de ce résultat, dont les valeurs sont toujours *réelles*, prouve que les triangles qui lui correspondent sont placés dans les deux angles YAX, Y′AX′.

Deuxième cas. — Le point D peut être placé à la gauche de AY, et au-dessus de AX, comme en D″. FIG. 14.

Dans ce cas, il est clair que la distance AB″ est comptée en sens contraire de AB; ainsi, il suffit de changer a en $-a$ dans la formule primitive, ce qui donne

$$x = \frac{m^2}{h} \pm \sqrt{\frac{m^2}{h}\left(\frac{m^2}{h} + 2a\right)}.$$

Les solutions correspondantes se trouvent encore placées dans les angles YAX, Y′AX′.

Troisième cas. — Le point D peut être situé en D‴ dans l'angle X′AY′, opposé par le sommet à l'angle XAY. FIG. 15.

Il faut alors changer à la fois a et h en $-a$ et $-h$ dans le résultat, qui devient

$$x = -\frac{m^2}{h} \pm \sqrt{-\frac{m^2}{h}\left(-\frac{m^2}{h} + 2a\right)},$$

ou bien

$$x = -\frac{m^2}{h} \pm \sqrt{\frac{m^2}{h}\left(\frac{m^2}{h} - 2a\right)};$$

et comme ces deux solutions peuvent être imaginaires, elles doivent être toutes les deux placées dans l'angle X′AY′.

On pourrait, par des raisonnements analogues à ceux du n° 30, expliquer pourquoi, dans chacun de ces trois cas, on n'obtient que *deux* solutions, tandis qu'il doit y en avoir *quatre* quand on considère la question d'une manière générale.

32. Nous terminerons cette discussion par l'examen de deux cas particuliers.

Fig. 16. 1°. Soit le point D placé sur la ligne AX.

Dans ce cas, on a

$$h = 0,$$

et l'expression

$$x = \frac{m^2}{h} \pm \frac{m}{h}\sqrt{m^2 - 2ah}$$

devient

$$x = \frac{m^2 \pm m^2}{0}, \quad \text{ou} \quad x = \frac{A}{0} \quad \text{et} \quad x = \frac{0}{0}.$$

De ces deux valeurs, la première est *infinie*, et l'autre se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Mais si l'on remonte à l'équation

$$hx^2 - 2m^2x = -2am^2,$$

elle se réduit, dans l'hypothèse de $h = 0$, à

$$-2m^2x = -2am^2, \quad \text{d'où} \quad x = a = \text{AD}.$$

Connaissant la base AD du triangle cherché, on obtiendra sa hauteur y, d'après la condition

$$y \times \frac{x}{2} = m^2, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{2m^2}{x} = \frac{2m^2}{a};$$

cette hauteur étant trouvée et construite, on la portera sur AH perpendiculaire à AX; puis on mènera HN′ parallèle à AX, et l'on aura enfin le triangle ADN′ pour réponse à la question.

Quant à la solution *infinie*, elle signifie que l'un des triangles de la question a une base *infinie* et une hauteur *nulle*, puisque $y \times \frac{x}{2} = m^2$ donne

$$y = \frac{2m^2}{\infty} = 0;$$

c'est ce que devient la solution ALN de la *fig.* 11 lorsque le point D, se rapprochant de plus en plus de AX, finit par tomber sur AX.

2°. Soit le point D placé sur AY. FIG. 17.

Dans ce cas, on a

$$a = 0,$$

et l'expression de x se réduit à

$$x = \frac{m^2}{h} \pm \frac{m^2}{h}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2m^2}{h} \quad \text{et} \quad x = 0.$$

D'ailleurs, l'égalité $y \times \frac{x}{2} = m^2$ donne

$$y = \frac{2m^2}{x},$$

et, par conséquent,

$$y = h, \quad y = \frac{2m^2}{0} = \infty;$$

c'est-à-dire qu'en prenant sur AX une distance AL égale à $\frac{2m^2}{h}$, et tirant DL, on aura ALD pour *première solution*.

Quant à la seconde, elle se réduit encore à un triangle dont la base est *nulle* et la hauteur *infinie;* et c'est ce que devient la solution AL'N' de la *fig.* 11 quand le point D, se rapprochant de plus en plus de la ligne AY, finit par se trouver sur AY.

Nous n'en dirons pas davantage, pour le moment, sur la construction et la discussion des problèmes; celui que nous venons de traiter, renfermant dans ses détails tout ce qui constitue la résolution complète d'un problème de Géométrie par le secours de l'Algèbre.

Les problèmes suivants ont principalement pour objet la recherche de quelques *formules* qui nous seront utiles.

33. CINQUIÈME PROBLÈME. — *Étant donnés les trois côtés d'un triangle* ABC, *on propose de déterminer l'expression de sa surface.* FIG. 18.

Désignons par a, b, c les côtés respectivement opposés aux angles A, B, C.

FIG. 18. Nous aurons, d'après ces notations,

$$BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c;$$

posons d'ailleurs

$$AD = y, \quad BD = x;$$

d'où

$$DC = a - x \quad \text{ou} \quad x - a,$$

suivant que la perpendiculaire AD tombe en dedans ou au dehors du triangle.

On a pour la surface du triangle,

$$ABC = \frac{BC \times AD}{2} = \frac{a \times y}{2};$$

en sorte que tout se réduit à déterminer y en fonction des trois côtés a, b, c.

Or, les deux triangles rectangles ADB, ADC donnent

$$(1) \qquad y^2 + x^2 = c^2,$$

$$(2) \qquad y^2 + (a - x)^2 = b^2.$$

Cette seconde équation restant la même quand on substitue $x - a$ à la place de $a - x$, convient également au cas où le triangle serait *obtusangle* en CD.

Retranchons l'équation (2) de l'équation (1); il vient

$$-a^2 + 2ax = c^2 - b^2, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Remplaçant x par sa valeur dans l'équation (1), on trouve

$$y^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2,$$

et, par suite,

$$y = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}.$$

(On ne met point ici le double signe devant le radical, puisque, d'après la nature de la question, l'on n'a besoin que de la valeur absolue de y.)

Rapportant enfin cette valeur de y dans l'expression du triangle ABC, et désignant la surface de ce triangle par S, on obtient, toute réduction faite,

$$(3) \qquad S = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2},$$

ou

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}.$$

Telle est l'expression de la surface du triangle, évaluée au moyen des trois côtés a, b, c.

34. On peut donner à l'expression (3) une autre forme, qui soit propre *au calcul logarithmiqne.*

Remarquons que la quantité sous le radical, étant la différence des deux carrés, peut se décomposer en

$$(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2).$$

D'ailleurs, chacun de ces deux facteurs est lui-même la différence de deux autres carrés, savoir :

$$(a+c)^2 - b^2 \quad \text{et} \quad b^2 - (a-c)^2,$$

lesquels se décomposent en

$$(a+c+b)(a+c-b) \quad \text{et} \quad (b+a-c)(b-a+c).$$

Donc

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)};$$

et si l'on fait, pour plus de simplicité,

$$a + b + c = 2p,$$

d'où

$$a + b - c = 2p - 2c,$$
$$a + c - b = 2p - 2b,$$
$$b + c - a = 2p - 2a,$$

il vient

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)},$$

ou, toute réduction faite,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \tag{4}$$

ce qui fournit la règle suivante :

Pour obtenir la valeur numérique de la surface d'un triangle, connaissant les trois côtés,

Faites d'abord la somme des trois côtés, et prenez la moitié de cette somme; retranchez alternativement de cette moitié, chacun des trois côtés; cela vous donne trois

différences. Formez ensuite le produit de la demi-somme et des trois différences, puis extrayez la racine carrée de ce produit.

Vous avez ainsi *en nombre* l'expression demandée.

35. Soit pour application,

$$a = 15, \quad b = 12, \quad c = 7;$$

il en résulte

$$a + b + c, \quad \text{ou} \quad 2p = 34,$$

d'où

$$p = 17;$$

donc

$$p - a = 2, \quad p - b = 5, \quad p - c = 10.$$

Ainsi

$$\text{ABC} = \sqrt{17 \times 2 \times 5 \times 10}.$$

Appliquons les logarithmes.

On a, d'après les Tables de Callet :

$$\begin{aligned} \log 17 &= 1{,}23044892 \\ \log\ 2 &= 0{,}30103000 \\ \log\ 5 &= 0{,}69897000 \\ \log 10 &= 1{,}00000000 \\ \text{Somme} \quad & \overline{3{,}23044892} \end{aligned}$$

Donc

$$\log\ \text{S} = 1{,}61522445,$$

et, par conséquent,

$$\text{S} = \ 41{,}231;$$

c'est-à-dire que, si l'on a pris le mètre pour unité linéaire, la surface renferme 41 *mètres carrés* plus 231 *millièmes* de *mètre carré*.

36. *Discussion.* — Pour que la formule (4) donne une valeur réelle, il faut (comme p est essentiellement *positif*) que les *trois* autres facteurs soient *positifs* à la fois, ou bien qu'il y en ait *deux* négatifs et *un* positif.

Or, on ne peut avoir en même temps

$$p - a < 0, \quad p - b < 0;$$

car l'addition de ces deux inégalités donnerait

$$2p - (a + b) < 0, \quad \text{ou} \quad 2p < a + b,$$

c'est-à-dire le périmètre du triangle moindre que la somme de deux côtés; ce qui est absurde.

On doit avoir les trois inégalités

$$p - a > 0, \quad p - b > 0, \quad p - c > 0;$$

d'où l'on déduit, en remplaçant p par sa valeur et réduisant,

$$b + c > a, \quad a + c > b, \quad a + b > c;$$

c'est-à-dire *un quelconque des côtés moindre que la somme des deux autres.*

C'est, en effet, la condition nécessaire pour qu'un triangle soit *possible* quand on donne ses côtés.

Si l'une des inégalités précédentes avait lieu dans un ordre *inverse*, l'expression serait *imaginaire.*

37. Nous proposerons encore comme application, de *déterminer la surface d'un trapèze* ABDC, *en fonction des quatre côtés.* Fig. 19.

En posant $AB = a$, $CD = b$, $AC = c$, $BD = d$, on doit trouver

$$S = \frac{b+a}{b-a}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-a-c)(p-a-d)}.$$

Soit $a = 0$, auquel cas le trapèze se réduit à un triangle; il vient

$$S = \sqrt{p(p-b)(p-c(p-d)},$$

comme au n° 34.

38. Sixième problème. — *Déterminer la relation qui existe entre les trois côtés d'un triangle quelconque et le rayon du cercle circonscrit à ce triangle.*

Avant de passer à la résolution de cette question, nous rappellerons la démonstration du théorème suivant de Géométrie :

Dans tout quadrilatère inscrit ABCD, *le rectangle des diagonales est égal à la somme des rectangles des côtés opposés;* c'est-à-dire que l'on a Fig. 20.

$$BD \times AC = AB \times DC + AD \times BC.$$

Soit menée du point B sur AC la droite BE, de manière qu'on ait l'angle CBE égal à l'angle ABD ; il en résulte nécessairement l'angle DBC égal à l'angle ABE.

Fig. 20. Cela fait, les deux triangles BCE, ABD sont semblables, comme ayant deux angles égaux, savoir : CBE = ABD par construction, et BCE = ADB, puisqu'ils sont inscrits et appuyés sur le même arc AB.

On a donc la proportion

$$CE : BC :: AD : BD;$$

d'où l'on déduit

(1) $$CE \times BD = BC \times AD.$$

Pareillement, les deux triangles ABE, BDC sont semblables, puisque ABE = DBC d'après la construction, et que BAE = BDC comme appuyés sur le même arc BC.

On a donc la proportion

$$AE : AB :: DC : BD;$$

d'où l'on tire

(2) $$AE \times BD = AB \times DC.$$

Ajoutant l'une à l'autre les égalités (1) et (2), on obtient

$$(CE + AE)\,BD \quad \text{ou} \quad AC \times BD = BC \times AD + AB \times DC.$$

C. Q. F. D.

Appliquons ce théorème à la question proposée.

Fig. 21. Soient ABC le triangle donné, et O le centre du cercle circonscrit.

Tirons le diamètre COD et les cordes AD, BD; puis faisons, d'après les notations du n° 33,

$$BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c \quad \text{et} \quad OC = r;$$

il en résulte

$$AD = \sqrt{4r^2 - b^2}, \quad BD = \sqrt{4r^2 - a^2},$$

puisque les angles CAD, CBD sont droits.

Cela posé, on a, en vertu du théorème précédent,

$$AB \times CD = CB \times AD + AC \times BD,$$

ou

(A) $$2cr = a\sqrt{4r^2 - b^2} + b\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

Telle est la relation générale qui existe entre les côtés d'un triangle et le rayon du cercle circonscrit.

Cette formule renfermant *quatre* quantités a, b, c, r, on

peut se proposer d'en déterminer *une* quelconque au moyen des *trois* autres; et cela conduit à différentes questions que nous allons résoudre et discuter.

39. 1°. *Étant données dans un cercle dont le rayon est connu, les cordes de deux arcs, on demande la corde de la somme de ces deux arcs.*

Soient X le cercle donné, AC, CB les cordes aussi données; AB sera la corde de la somme des deux arcs. Fig. 21.

On connaît donc dans la formule (A) les quantités a, b, r, et il ne s'agit que d'obtenir c.

Or, cette formule donne immédiatement

$$(B) \qquad c = \frac{a}{2r}\sqrt{4r^2 - b^2} + \frac{b}{2r}\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

2°. *Déterminer la corde du double d'un arc, connaissant la corde de cet arc.*

Soit fait dans la formule (B), $b = a$; alors c exprime évidemment la corde du double de l'arc sous-tendu par a ou par b; et il vient Fig. 22.

$$(C) \qquad c = \frac{a}{r}\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

3°. Réciproquement, *déterminer la corde de la moitié d'un arc, connaissant la corde de cet arc.*

Dans la formule (C), les quantités c et a étant liées entre elles de manière que l'une est la corde du double de l'arc sous-tendu par l'autre, il s'ensuit que, réciproquement, la seconde a est la corde de la moitié de l'arc sous-tendu par la première c. Ainsi, tout se réduit à déterminer a en fonction de c, d'après la formule (C). Fig. 22.

Or, si l'on chasse le dénominateur et qu'on élève les deux membres au carré, il vient

$$c^2 r^2 = 4a^2 r^2 - a^4,$$

ou, ordonnant,

$$a^4 - 4a^2 r^2 = -c^2 r^2.$$

Donc

$$a^2 = 2r^2 \pm \sqrt{4r^4 - c^2 r^2},$$

ou bien,

$$a^2 = r(2r \pm \sqrt{4r^2 - c^2}),$$

et, par conséquent,

$$(D) \qquad a = \sqrt{r(2r \pm \sqrt{4r^2 - c^2})}.$$

(Nous ne mettons point ici le double signe devant le premier radical, parce que nous n'avons besoin que de la valeur numérique de a.)

L'expression de a, qu'on vient d'obtenir, présente deux valeurs essentiellement différentes, et cela doit être.

Fig. 22. En effet, la corde AB appartient non-seulement à l'arc ACB, mais encore à l'arc ADB; ainsi, lorsqu'on demande la corde de la moitié de l'arc sous-tendu par la corde AB, il n'y a pas plus de raison pour trouver AC, corde de la moitié de ACB, que AD, corde de la moitié de ADB.

Toutefois, si l'on suppose d'avance que l'arc sous-tendu par la corde donnée AB est moindre qu'une demi-circonférence, il faudra prendre pour a la plus petite des deux valeurs ci-dessus, c'est-à-dire celle qui correspond au signe inférieur du radical, et l'on aura

$$a = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - c^2})}.$$

Le contraire aurait lieu si l'arc donné était plus grand qu'une demi-circonférence, et il faudrait prendre pour a,

$$a = \sqrt{r(2r + \sqrt{4r^2 - c^2})}.$$

Il est d'ailleurs facile de se convaincre que si AC est exprimé par la première de ces valeurs, AD est représenté par la seconde.

En effet, le triangle rectangle CAD donne

$$AD = \sqrt{4r^2 - \overline{AC}^2};$$

mais, par hypothèse,

$$\overline{AC}^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - c^2};$$

donc

$$AD = \sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - c^2}}.$$

4°. *Étant données les cordes de deux arcs, trouver la corde de leur différence.*

Fig. 21. Soient $AB = c$, $AC = b$ les deux cordes données, et proposons-nous de déterminer CB ou a, qui n'est autre

chose que la corde de la différence des arcs sous-tendus par c et b.

La question est donc ramenée à traiter a comme une inconnue, dans la formule (A), et à tâcher de l'en dégager.

Reprenons cette formule

$$2cr = a\sqrt{4r^2 - b^2} + b\sqrt{4r^2 - a^2};$$

et observons que a se trouvant sous le second radical, il faut commencer par faire disparaître ce radical. Or, de cette formule on tire, par la transposition,

$$2cr - a\sqrt{4r^2 - b^2} = b\sqrt{4r^2 - a^2};$$

d'où, élevant au carré,

$$4c^2r^2 - 4acr.\sqrt{4r^2 - b^2} + 4a^2r^2 - a^2b^2 = 4b^2r^2 - a^2b^2;$$

ou, réduisant et ordonnant par rapport à a,

$$a^2 - \frac{c}{r}\sqrt{4r^2 - b^2}.a = b^2 - c^2.$$

Cette équation étant résolue donne

$$(E) \qquad a = \frac{c}{2r}\sqrt{4r^2 - b^2} \pm \frac{b}{2r}\sqrt{4r^2 - c^2}.$$

Pour interpréter ce résultat qui comprend *deux* solutions, nous remarquerons que les cordes données AB, AC appartiennent chacune à deux arcs, savoir : FIG. 21.

ACB, ADB, pour la corde AB,

et

AMC, ADBC, pour la corde AC.

Ainsi, lorsqu'on demande la corde de la différence des arcs sous-tendus par AB et par AC, le même calcul doit donner la corde de la différence entre l'un quelconque des arcs ACB, ADB, et l'un quelconque des arcs AMC, ADBC.

Or, si sur l'arc ADB on prend une partie AC′ égale à AC, et qu'on tire la corde BC′, on aura

1°. ACB — AMC = CNB.. qui correspond à la corde CB;

2°. ADB — AMC ou ADB — AM′C′ = C′DB ..... C′B;

3°. ADBC — ACB ou ADBC — AM′C′ — CNB = C′DB.. C′B;

4°. ADBC — ADB = CNB ..... CB;

d'où l'on voit que les *quatre différences* sont *égales deux à deux* et correspondent aux deux cordes CB, C'B.

FIG. 21. On voit encore que, si les arcs sous-tendus par les cordes données sont supposés plus petits à la fois, ou plus grands à la fois qu'une demi-circonférence, comme le sont les arcs ACB et AMC, ou ADBC et ADB, la réponse à la question est nécessairement

$$\text{CB ou } a = \frac{c}{2r}\sqrt{4r^2 - b^2} - \frac{b}{2r}\sqrt{4r^2 - c^2};$$

mais si les deux arcs sous-tendus sont supposés l'un plus petit et l'autre plus grand qu'une demi-circonférence, on a pour réponse

$$\text{C'B ou } a = \frac{c}{2r}\sqrt{4r^2 - b^2} + \frac{b}{2r}\sqrt{4r^2 - c^2}.$$

Il est à remarquer que cette dernière formule est identique avec la formule (B) qui donne la corde de la somme de deux arcs; et cela doit être, car C'B peut être regardée comme la corde de la somme des arcs sous-tendus par AB et AC'.

40. 5°. *Étant donnés les trois côtés* a, b, c, *d'un triangle, on demande l'expression du rayon du cercle circonscrit à ce triangle.*

La difficulté consiste à dégager r de la formule (A).

Or, dans le numéro précédent, on a déjà obtenu, par une première transformation exécutée sur cette formule, l'équation

$$a^2 - \frac{c}{r}\sqrt{4r^2 - b^2}.a = b^2 - c^2,$$

qui revient à

$$r(a^2 + c^2 - b^2) = ac\sqrt{4r^2 - b^2}.$$

Élevant de nouveau les deux membres de cette équation au carré, on a

$$r^2(a^2 + c^2 - b^2)^2 = 4a^2c^2r^2 - a^2b^2c^2;$$

d'où l'on déduit

$$r^2 = \frac{a^2b^2c^2}{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2},$$

et, par conséquent,

$$r = \frac{abc}{\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}.$$

(Le double signe devant le radical serait inutile, puisqu'on ne demande que la valeur numérique du rayon.)

Autre expression — La formule (3) du n° 33 donne

$$\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2} = 4S;$$

on a donc encore

$$r = \frac{abc}{4S},$$

c'est-à-dire que le *rayon du cercle circonscrit a pour expression le produit des trois côtés du triangle, divisé par le quadruple de sa surface.*

41. On peut encore, à cette occasion, se proposer de *trouver le rayon du cercle inscrit à un triangle.*

Soient un triangle donné ABC et O le centre du cercle inscrit à ce triangle. FIG. 23.

Tirons les lignes OA, OB, OC, et les rayons OP, OQ, OR, que nous désignerons par r'.

On a évidemment, d'après la figure,

$$\text{ABC} \quad \text{ou} \quad S = \text{ABO} + \text{ACO} + \text{BCO} = \frac{(a + b + c)r'}{2};$$

d'où l'on déduit

$$r' = \frac{2S}{a + b + c}.$$

Ainsi, *le rayon du cercle inscrit à un triangle a pour expression le double de la surface du triangle, divisé par son périmètre.*

Remarque. — On a vu, en Géométrie, qu'il existe *quatre* cercles tangents aux trois côtés d'un triangle, supposés prolongés indéfiniment.

En désignant par r'_1, r'_2, r'_3 les rayons des *trois* cercles *autres* que celui qui vient d'être considéré, on a pour les expressions de ces rayons,

$$r'_1 = \frac{2S}{a + c - b}, \quad r'_2 = \frac{2S}{a + b - c}, \quad r'_3 = \frac{2S}{b + c - a}.$$

En effet, considérons, par exemple, le cercle dont le centre est en O′; nous trouvons

$$\text{ABC} \quad \text{ou} \quad S = AO'B + BO'C - AO'C = \frac{(a + c - b)\, r'_1}{2};$$

d'où

$$r'_1 = \frac{2S}{a + c - b}.$$

42. Scolie général. — On a pu remarquer que, dans toutes les questions qui ont été traitées à partir du n° 28, les expressions *algébriques* ont été constamment *homogènes*, parce qu'aucune des lignes que l'on a fait entrer dans le calcul n'a été *explicitement* prise pour *unité;* ce qui confirme le principe général établi au n° 15, sur l'homogénéité.

Les formules où l'on a introduit la lettre S pour désigner la *surface* d'un triangle, ne font pas exception sous ce rapport; car, pour les rendre *homogènes*, il suffirait d'y remplacer S, qui n'est qu'une simple *notation*, par un *carré tel* que m^2.

Exercices.

Nous croyons devoir terminer cette introduction en proposant quelques *Exercices*, comme moyen de familiariser les commençants avec la manière d'*appliquer l'Algèbre à la Géométrie.*

Plusieurs questions sont susceptibles d'une solution *graphique;* d'autres n'admettent, par leur nature, que des solutions purement *numériques;* quelques-unes nécessitent l'emploi des principes de la *Trigonométrie.*

I. Étant donnés dans un triangle rectangle la *somme* des deux côtés de l'angle droit ainsi que la *somme* de l'hypoténuse et de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse : 1° *calculer* les côtés et les angles; 2° *construire* le triangle; 3° *discuter.*

II. Étant donnés dans un triangle rectangle le périmètre et la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, *construire* ce triangle. — *Discussion.*

III. On donne, dans un triangle quelconque, l'un des côtés, l'angle opposé et la *somme* ou la *différence* des deux autres côtés : 1° *résoudre* le triangle ; 2° le *construire*.

IV. Sur une base donnée, *construire* un triangle dans lequel la somme des côtés soit double de la base, et dont le sommet soit sur une droite donnée de position.

V. Déterminer la *surface* et les *côtés* d'un triangle, en fonction des trois hauteurs.

VI. Diviser un *trapèze* en deux parties qui soient entre elles dans le rapport de deux lignes m et n, par une droite menée parallèlement aux bases.

VII. Partager de même un *tronc de cône* par un plan parallèle aux bases.

VIII. Inscrire dans un triangle quelconque un *rectangle* d'une *surface donnée*. — Parmi tous les rectangles inscrits dans un triangle, quel est celui dont la *surface* est un *maximum*?

IX. Étant données trois circonférences concentriques, trouver le côté du triangle équilatéral dont les sommets seraient sur ces trois circonférences.

X. Par un point donné dans l'intérieur d'un *angle droit*, mener une *droite* telle, que le *rectangle* de ses deux parties comprises entre le point et les côtés de l'angle soit égal à un *carré donné*.

Généraliser cette question en supposant *quelconque* l'angle que forment les deux droites qui comprennent le point donné.

XI. Etant donné, dans l'intérieur d'un *angle droit*, un point à *égale distance* des côtés de cet angle, mener par ce point une *droite* telle, que la partie comprise entre les deux côtés soit égale à une ligne donnée $a\,m$.

[Ce problème est susceptible d'une solution assez simple quand on prend pour *inconnue auxiliaire* la distance du point donné au point *milieu* de la droite demandée.]

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

PREMIÈRE SECTION.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS.

CHAPITRE PREMIER.

§ I. Du point et de la ligne droite. — § II. Du cercle. — § III. Des lieux géométriques. — § IV. Application des théories précédentes a la résolution de diverses questions et au problème des tangentes.

43. Définition. — La méthode que nous avons développée dans l'introduction, pour résoudre toute espèce de questions (*théorèmes* ou *problèmes*) par le secours de l'Algèbre, n'est, à proprement parler, qu'une méthode *indirecte*, puisque les moyens employés sont particuliers à chaque question, et varient avec l'énoncé de chacune d'elles.

Il existe une *méthode générale*, appelée Analyse de Descartes, du nom de l'illustre philosophe qui en a donné la première idée; elle consiste à *exprimer par des équations la position respective des points et des lignes droites ou courbes, faisant partie de la figure d'une question proposée, puis à combiner ces équations de manière à atteindre le but indiqué par l'énoncé de la question.*

A proprement parler, c'est le développement des principes de cette méthode qui constitue la Géométrie analytique telle qu'on l'envisage maintenant.

Elle se divise en deux parties distinctes que nous traiterons successivement : Géométrie analytique *à deux dimensions*, et Géométrie analytique *à trois dimensions*, suivant que les objets que l'on considère sont situés *sur un même plan* ou d'une manière quelconque *dans l'espace*.

§ I. — Du point et de la ligne droite.

Manière de fixer la position d'un point sur un plan.

44. Pour peu qu'on réfléchisse sur la nature des problèmes de Géométrie, on voit que la plupart reviennent, en dernière analyse, à trouver la *distance* d'un ou de plusieurs points *inconnus*, à d'autres points ou à des droites *fixes* et déjà *déterminées de position*. Si donc on avait un moyen de fixer *analytiquement* la position d'un point par rapport à des points ou à des lignes *connues de position*, on serait en état de résoudre toute espèce de questions géométriques.

Soient deux droites RECTANGULAIRES, AX, AY, fixes et *données de position* sur un plan; et soit M un point quelconque dont il s'agit de *déterminer la position sur ce plan*. FIG. 24,

Si, de ce point, on abaisse les perpendiculaires MP, MQ, il est visible que le point M sera *fixé* dès que l'on connaîtra les *longueurs* des deux côtés contigus AP, AQ du rectangle APMQ, puisque ces côtés sont les *distances* du point M aux deux lignes fixes AX et AY.

Donc, si l'on mène, à ces distances, deux droites, PM et QM, respectivement *parallèles* aux lignes AX et AY, le *point d'intersection* de ces deux parallèles sera le POINT DEMANDÉ.

On est convenu de donner le nom d'AXES aux deux lignes fixes AX et AY.

La distance AP ou QM du point M à l'axe AY s'appelle l'*abscisse* de ce point, et se désigne algébriquement par x.

La distance AQ ou PM du même point M à l'axe AX est dite l'*ordonnée* de ce point, et s'exprime par y.

Ces deux distances portent conjointement le nom de *coordonnées du point*.

Les deux axes se distinguent l'un de l'autre par les dénominations d'axe des *abscisses* ou des x, donnée à la ligne AX sur laquelle se comptent les abscisses, et d'axe des

ordonnées ou des y, donnée à la ligne AY sur laquelle se comptent les ordonnées.

Enfin, le point A est ce qu'on appelle l'ORIGINE *des coordonnées*, parce que c'est à partir de ce point que se comptent ces distances.

45. *Équations du point.* — Le *caractère analytique* de tout point considéré sur l'axe des y est $x = 0$, puisque cette équation exprime que la distance du point à cet axe est *nulle*.

De même, le *caractère* de tout point placé sur l'axe des x est $y = 0$.

Donc le système des deux équations

$$x = 0, \quad y = 0$$

caractérise l'*origine* A des coordonnées; car elles n'ont lieu en même temps que pour ce point.

En général, les deux équations

$$x = a, \quad y = b,$$

considérées simultanément, caractérisent un point situé à une distance a de l'axe des y, et à une distance b de l'axe des x.

En effet, la première appartient à tous les points d'une *parallèle* à AY, menée à une distance $AP = a$; la seconde, à tous les points d'une *parallèle* à AX, menée à une distance $AQ = b$. Donc le système des deux équations appartient au point d'intersection M, et n'appartient qu'à lui. Elles en sont, pour ainsi dire, la REPRÉSENTATION ANALYTIQUE.

On les nomme, pour cette raison, les *équations du point*.

46. *Remarque.* — On doit toutefois considérer, dans les expressions a et b, non-seulement les valeurs absolues ou numériques des distances du point aux deux axes, mais encore les signes dont elles peuvent être affectées, eu égard à la position du point dans le plan des axes AX et AY.

FIG. 24. Car, d'après le principe établi (n° 27), si l'on convient de regarder comme *positives* les distances telles que AP, comptées sur AX et à la *droite* du point A, on doit regarder comme *négatives* les distances telles que AP′, comptées à la *gauche* de ce point. De même, si l'on regarde comme

positives les distances AQ comptées *au-dessus* du point A sur AY, on doit regarder comme *négatives* les distances comptées *au-dessous* de ce même point.

A la vérité, le principe que nous venons de rappeler a été établi pour les distances de points situés de côté et d'autre sur une même droite, par rapport à un point fixe; mais il a lieu également pour des distances de points *à des droites fixes*.

Il suffirait, pour s'en convaincre, de prendre une nouvelle origine et de nouveaux axes parallèles aux premiers, et par rapport auxquels tous les points considérés fussent situés du même côté.

D'après cela, si nous mettons en évidence les *signes* dont a et b peuvent être affectés, nous aurons les *quatre* systèmes d'équations

$$x = +a, \quad x = -a, \quad x = +a, \quad x = -a,$$
$$y = +b, \quad y = +b, \quad y = -b, \quad y = -b,$$

pour *caractériser* les *quatre* positions essentiellement différentes du point, savoir : M, M′, M″, M‴.

On trouvera ainsi :

1°. Que le point dont les équations sont FIG. 25.

$$x = +1, \quad y = -3,$$

est situé dans l'angle Y′AX à une distance AP = 1 de l'axe des y, et à une distance PM = 3 de l'axe des x.

2°. Que le point exprimé par FIG. 26.

$$x = 0, \quad y = -2,$$

est situé sur l'axe AY (n° 45) à une distance AM′ = 2.

3°. Que le point FIG. 26.

$$x = -1, \quad y = 0,$$

est situé sur l'axe AX vers la gauche de A, à une distance AM = 1.

47. Nous avons supposé jusqu'à présent les axes PERPENDICULAIRES ENTRE EUX, parce que c'est la position la plus simple et la plus usitée. Cependant il y a des questions dont la résolution exige que l'on considère des axes faisant entre eux un *angle* quelconque.

FIG. 27. Dans ce cas, les *coordonnées* ne sont plus des perpendiculaires abaissées sur les axes, mais bien des *parallèles* à ces axes; c'est-à-dire que les distances AP ou QM, AQ ou PM, se comptent *parallèlement* aux axes AX, AY.

Du reste, tout ce qui a été dit dans l'hypothèse où les axes sont RECTANGULAIRES, s'applique également au cas où ils sont OBLIQUES.

Expression analytique de la distance entre deux points donnés sur un plan.

FIG. 28. 48. Pour trouver cette *expression* qui est d'un usage continuel, prenons d'abord les axes RECTANGULAIRES.

Soient x', y' les coordonnées d'un premier point M, et x'', y'' les coordonnées d'un second point M'; en sorte que l'on ait

$$\left[\begin{matrix} x = x' \\ y = y' \end{matrix}\right] \quad \text{et} \quad \left[\begin{matrix} x = x'' \\ y = y'' \end{matrix}\right],$$

pour les équations respectives de ces points qu'on suppose connus de position.

Il s'agit d'exprimer la distance MM', que nous appellerons D, en fonction des coordonnées x', y', x'', y''.

Pour cela, menons les ordonnées MP, M'P' de ces deux points, et tirons M'R parallèle à AX.

Le triangle rectangle MRM' donne

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{M'R}^2;$$

mais

$$MR = MP - RP = y' - y'', \quad M'R = PP' = x' - x'';$$

donc

$$\overline{MM'}^2, \quad \text{ou} \quad D^2 = (y' - y'')^2 + (x' - x'')^2;$$

par suite,

$$D = \sqrt{(y' - y'')^2 + (x' - x'')^2}.$$

Cette formule est *générale*, et convient même au cas où les deux points sont *dans une position contraire* par rapport à l'un des axes. Il suffit d'y introduire, pour les applications, les *changements de signe* qui correspondent aux *changements de position*.

Ainsi, par exemple, pour obtenir la *distance* de deux points dont l'un, M, est placé dans l'angle YAX, et dont l'autre, M′, est placé dans l'angle YAX′, il faut changer le signe de x'', ce qui donne FIG. 29.

$$D = \sqrt{(y' - y'')^2 + (x' + x'')^2};$$

et, en effet, la figure donne, dans ce cas, abstraction faite des signes,

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{M'R}^2;$$

puis

$$MR = y' - y'', \quad M'R = AP + AP' = x' + x'';$$

donc

$$D = \sqrt{(y' - y'')^2 + (x' + x'')^2}.$$

Si l'un des points donnés, M′ par exemple, est l'*origine* des coordonnées, comme on a alors $x'' = 0$, et $y'' = 0$, la formule devient

$$D = \sqrt{y'^2 + x'^2};$$

ce qui est conforme au résultat que donne le triangle rectangle AMP dans lequel on a

$$\overline{AM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{AP}^2.$$

49. Lorsque les axes sont OBLIQUES, la formule est différente. FIG. 30.

En effet, le triangle MM′R est *obliquangle* et donne, en vertu d'une formule trigonométrique connue,

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{M'R}^2 - 2\,MR \times M'R \cdot \cos MRM'.$$

Or, on a

$$MR = y' - y'', \quad M'R = x' - x'';$$

d'ailleurs

$$\cos MRM' = -\cos MRK = -\cos\theta$$

(θ désignant l'angle MRK qui n'est autre chose que celui des deux axes); donc

$$D^2 = (y' - y'')^2 + (x' - x'')^2 + 2(y' - y'')(x' - x'') \cdot \cos\theta,$$

d'où

$$D = \sqrt{(y' - y'')^2 + (x' - x'')^2 + 2(y' - y'')(x' - x'') \cdot \cos\theta}.$$

Ce résultat, plus compliqué que le précédent, fait sentir l'*avantage* de supposer les axes RECTANGULAIRES lorsqu'on doit faire entrer dans les calculs la *distance* entre deux points donnés, et que le choix des axes est arbitraire.

Manière de fixer analytiquement la position d'une droite sur un plan.

Fig. 31 et 32. 50. Soit une droite LBL′ indéfinie et située à volonté dans un plan. Prenons dans ce plan deux axes *rectangulaires* ou *obliques*, AX, AY, par rapport auxquels la droite soit placée d'une manière quelconque.

Menons d'ailleurs de différents points M, M′, M″, etc., pris sur cette droite, les ordonnées MP, M′P′, M″P″, etc., et par le point B où la droite rencontre l'axe des y, tirons BH *parallèle* à AX.

Les triangles semblables BQM, BQ′M′, BQ″M″, etc., donnent la suite de rapports égaux

$$\frac{MQ}{BQ} = \frac{M'Q'}{BQ'} = \frac{M''Q''}{BQ''}, \text{ etc.},$$

ou bien

$$\frac{MP - AB}{AP} = \frac{M'P' - AB}{AP'} = \frac{M''P'' - AB}{AP''}, \text{ etc.};$$

ce qui prouve que *la différence entre l'ordonnée d'un point quelconque de la droite et l'ordonnée qui passe par l'origine, est à l'abscisse du même point, dans un* RAPPORT CONSTANT.

Désignons donc par x et y les coordonnées d'un point pris au hasard sur la droite, par b la distance AB (appelée l'*ordonnée à l'origine*), et par a le *rapport constant* dont nous venons de parler; nous aurons la relation

$$\frac{y - b}{x} = a;$$

d'où

(1) $$y = ax + b,$$

laquelle sera satisfaite pour *tous* les points de la droite L′BL, à l'*exclusion* de tout autre point.

Fig. 31. Car soit N un point situé au-dessus ou au-dessous de cette droite.

Comme l'ordonnée NP de ce point est plus grande ou plus petite que l'ordonnée MP correspondante à la même abscisse, et que, par hypothèse, on a pour le point M

$$MP = a.AP + b,$$

il s'ensuit que NP est *plus grand* ou *plus petit* que $a.AP + b$.

Ainsi l'on a, pour les coordonnées de ce point,

$$y \gtrless ax + b.$$

On voit donc que la relation (1) *caractérise* tous les points de la droite, et qu'elle en est, pour ainsi dire, *la représentation analytique*, en ce sens, que si, au moyen de cette équation, l'on veut retrouver les différents points de la droite, il suffit de donner à x une série de valeurs que l'on porte de A en P, P′, P″, etc. Menant ensuite par les points P, P′, P″, etc., des parallèles à AY, et prenant sur ces parallèles des parties PM, P′M′, P″M″, etc., égales aux valeurs de y correspondantes et tirées de l'équation (1), on aura M, M′, M″, etc., pour autant de points de la droite.

On appelle, pour cette raison, la relation (1) l'ÉQUATION DE LA DROITE L′BL.

Les quantités x et y qui expriment les coordonnées des différents points de la droite, sont des VARIABLES; et les quantités a et b qui, pour la même droite, ne changent pas, sont appelées les CONSTANTES de cette équation.

51. Le RAPPORT a est susceptible de deux acceptions différentes, suivant que les axes sont *rectangulaires* ou *obliques*.

1°. Si les axes sont *rectangulaires*, le triangle rectangle MBQ donne FIG. 31.

$$\frac{MQ}{BQ}, \quad \text{ou} \quad a = \frac{\text{tang MBQ}}{r};$$

appelons α l'angle MBQ égal à LCX, et supposons, pour plus de simplicité, le rayon des tables égal à 1; il en résulte

$$a = \text{tang}\,\alpha;$$

ainsi, le RAPPORT CONSTANT est égal à *la tangente trigonométrique de l'angle que forme la droite avec l'axe des x*.

2°. Lorsque les axes sont *obliques*, on a FIG. 32.

$$\frac{MQ}{BQ}, \quad \text{ou} \quad a = \frac{\sin MBQ}{\sin BMQ} = \frac{\sin MBQ}{\sin LBY},$$

ou bien, désignant par θ l'angle YAX, d'où $LBY = \theta - \alpha$,

$$a = \frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)};$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, le RAPPORT CONSTANT est *égal*

au rapport des sinus des deux angles que la droite forme avec les axes des x *et des* y.

Cette dernière valeur rentre dans la précédente, lorsqu'on suppose $\theta = 90^\circ$; car on a

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tang}\alpha.$$

Discussion de l'équation $y = ax + b$.

52. Nous considérerons particulièrement, dans cette discussion, les axes à ANGLE DROIT, parce que c'est le cas le plus ordinaire.

Les *constantes* a et b, qui sont fixes et déterminées pour tous les points d'une même droite, peuvent, d'après leur nature, passer par tous les états de grandeur, soit *positifs*, soit *négatifs*, puisque la première est une *tangente trigonométrique* et que la seconde exprime la *distance* du point fixe A, à un point placé sur la ligne AY.

Ces divers états de grandeur dépendent de la position que peut avoir la droite donnée, par rapport aux axes; nous allons examiner ces différentes circonstances.

FIG. 33. Traitons, d'abord, le cas où la droite passe *par l'origine*. Dans ce cas, on a $b = 0$, et l'équation devient

$$y = ax, \quad \text{d'où} \quad \frac{y}{x} = a;$$

ce qui montre que *l'ordonnée d'un point quelconque de la droite est à son abscisse dans un rapport constant.*

Cette propriété *caractérise* toutes les droites qui passent par l'*origine*; car ce point se trouvant sur chacune d'elles, ses coordonnées $[x = 0, y = 0]$ doivent vérifier leur équation; ce qui exige que le terme indépendant de x et de y manque dans cette équation.

Faisons actuellement tourner la droite autour de l'origine, et voyons ce que devient a dans ce mouvement.

D'abord, si la droite est couchée sur AX, l'angle α est *nul*, et l'on a

$$\operatorname{tang}\alpha, \quad \text{ou} \quad a = 0,$$

ce qui réduit l'équation à

$$y = 0,$$

qui n'est autre chose que l'équation de l'axe des x, puisque (n° 45) elle est le *caractère* de tout point placé sur cet axe.

Tant que la droite, en tournant *au-dessus* de l'axe des x, sera placée dans l'angle YAX, l'angle α sera plus petit que 90 degrés, et tang α ou a sera *positif*, mais augmentera de plus en plus.

Il est d'ailleurs évident, d'après l'équation $y = ax$, qu'à des abscisses *positives* AP, ou *négatives* AP′, correspondront des ordonnées MP, M′P′ respectivement de *même signe* qu'elles.

Si la droite vient à se confondre avec AY, comme on a alors

$$\alpha = 90°, \quad \text{il en résulte} \quad a = \infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{a} = 0;$$

d'où l'on peut conclure que l'équation, mise sous la forme

$$x = \frac{1}{a} \cdot y, \quad \text{se réduit à} \quad x = 0,$$

qui est en effet l'équation de l'axe des y (n° 45).

Supposons maintenant que la droite soit placée dans l'intérieur de l'angle YAX′, comme L″AL‴.

L'angle α est *obtus*; donc tang α ou a devient *négatif*, et diminue de plus en plus, *numériquement*, à mesure que la droite se rapproche de AX′; et si l'on met le signe de a en évidence, on a pour l'équation de la droite L″AL‴,

$$y = -ax;$$

d'où l'on voit qu'à des abscisses *positives* AP‴ correspondent des ordonnées *négatives* P‴M‴; et à des abscisses *négatives* AP″ correspondent des ordonnées *positives* P″M″.

Ce résultat s'accorde avec la figure.

N. B. — Lorsque les axes sont OBLIQUES, le *changement de signe* de a correspond au cas où l'angle α ou L′AX devient plus grand que l'angle θ des deux axes. FIG. 34.

En effet, dans l'expression $a = \frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)}$, le dénominateur $\sin (\theta - \alpha)$ pour $\alpha > \theta$ se change en $-\sin (\alpha - \theta)$,

et l'on trouve

$$y = -\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\theta)}\cdot x.$$

Fig. 33. Revenons aux axes rectangulaires. Si la droite, continuant de tourner, se place sur AX', tang α redevient *nul*, et l'équation se réduit de nouveau à $y = 0$, ou à l'équation de l'axe des x.

La droite passant dans l'angle X'AY', α est $> 180°$, mais $< 250°$; donc tang α ou a est *positif*, et l'équation redevient

$$y = ax.$$

Et, en effet, la droite étant prolongée au-dessus de l'axe des x, reprend les positions qu'elle avait prises d'abord dans l'angle YAX.

Enfin, lorsque la droite passe dans l'angle Y'AX, auquel cas on a $\alpha > 270°$, mais $< 360°$, tang α ou a redevient *négatif*, et l'on retombe sur l'équation

$$y = -ax.$$

Fig. 35. 53. Considérons, maintenant, le cas où la droite passe par un point B de l'axe des y situé *au-dessus de l'origine*.

Dans ce cas, l'*ordonnée à l'origine*, ou b, est *positive;* et l'on a pour l'équation de la droite

$$y = ax + b.$$

La quantité b est essentiellement *positive;* mais il n'en est pas de même de a.

Car si l'on conçoit que la droite tourne autour du point B, comme, dans ce mouvement, elle prendra nécessairement des positions *parallèles* à toutes celles qu'elle avait prises autour de l'origine, a sera *positif* ou *négatif* dans les mêmes circonstances.

Il suit de là :

1°. Que l'équation $y = ax + b$ convient à toutes les droites, telles que LBL', qui forment, avec l'axe des x, un angle *moindre que* 90 degrés, ou *plus grand que* 180 degrés, *mais moindre que* 270 degrés;

2°. Et que l'équation $y = -ax + b$ convient à toutes les droites, telles que L''BL''', formant avec l'axe des x un

angle *plus grand que* 90 degrés et *moindre que* 180 degrés, ou *plus grand que* 270 degrés, mais *moindre que* 360 degrés.

Enfin, lorsque la droite est assujettie à passer par un point B′ situé *au-dessous de l'origine*, b est *négatif*, et l'équation devient FIG. 35.

$$y = +ax - b$$

pour toutes les droites telles que L′B′L, et

$$y = -ax - b$$

pour toutes les droites telles que L″B′L‴.

54. Examinons, comme cas particuliers, ceux où la droite est *parallèle* à l'un des axes.

1°. Lorsqu'elle est parallèle à l'axe des x, on a évidemment tang α ou $a = 0$; d'ailleurs, b est *positif* ou *négatif*; ainsi l'équation se réduit à

$$y = \pm b,$$

résultat qui s'accorde avec ce qui a été dit n°s 45 et 46.

2°. Si la droite est parallèle à l'axe des y, tang α doit être *infini*. Il en est de même de b, qui, exprimant la distance de l'origine au point où la droite rencontre l'axe des y, devient nécessairement, dans le cas dont il s'agit, *plus grand qu'aucune quantité donnée*.

Ces deux conditions, introduites dans

$$y = ax + b,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a},$$

la réduisent à

$$x = -\frac{\infty}{\infty}.$$

Pour interpréter ce résultat, observons qu'afin d'obtenir la droite dans toutes les situations possibles, par rapport aux axes, nous avons supposé (n° 53) que la droite tourne autour du point B regardé comme fixe. Dans cette hypothèse, b a une valeur *finie* et déterminée, et il est impossible d'en déduire le cas où la droite devient parallèle à AY.

(On trouve seulement, dans la supposition de $a = \infty$,

$$x = 0$$

ou l'équation de l'axe des y.)

Fig. 35. Pour ce cas particulier, il est nécessaire de changer *le centre de mouvement* de la droite, et de prendre, par exemple, le point C où la droite rencontre l'axe des x.

Or, si l'on désigne la distance AC par c, ou plutôt par $-c$, attendu que cette ligne est comptée dans le sens des *abscisses négatives*, on a évidemment

$$\frac{AB}{AC} = \operatorname{tang}\alpha, \quad \text{ou} \quad \frac{b}{-c} = a; \quad \text{d'où} \quad c = -\frac{b}{a};$$

et l'équation devient

$$x = \frac{1}{a}y + c.$$

Supposons maintenant que la droite, tournant autour du point C, devienne *parallèle* à AY; $\operatorname{tang}\alpha$ ou a devient *infini*, et c ne change pas.

Donc l'équation se réduit à

$$x = c,$$

équation qui représente en effet (n° 45) une parallèle à l'axe des y.

Le *signe* de c dépend de la position du point C par rapport à l'origine A; le point peut être en C ou C′.

L'expression de c, ou $-\frac{b}{a}$, offre l'exemple d'une fraction qui reste *constante*, bien que ses deux termes deviennent *infinis*. C'est ainsi qu'une fraction $\frac{b}{a}$, qui se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsqu'on suppose $a = 0$, $b = 0$, acquiert dans certains cas une valeur *finie et déterminée*.

55. Nous ferons observer, en passant, que la relation $a = -\frac{b}{c}$, introduite dans l'équation

$$y = ax + b,$$

a ramène à la forme $y = -\frac{b}{c}x + b$, d'où

$$cy + bx = bc,$$

équation qui renferme comme *constantes* les distances de l'origine A aux points où la droite rencontre les axes.

En y faisant $x = 0$, on trouve $y = b$; ce sont les coordonnées du point où la droite rencontre l'axe des y.

Soit $y = 0$, on obtient $x = e$; ce sont les coordonnées du point où la même droite rencontre l'axe des x.

Il y a quelquefois de l'avantage à employer l'équation de la droite sous la forme

$$cy + bx = bc, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{b} + \frac{x}{c} = 1,$$

à cause de l'*homogénéité* des termes de celle-ci.

Cette forme convient encore au cas où les axes sont obliques; car le triangle BAC donne

Fig. 32.

$$\frac{\sin BCA}{\sin CBA}, \quad \text{ou} \quad a = \frac{AB}{AC} = \frac{b}{-c} = -\frac{b}{c}.$$

Conclusion. — Il résulte de la discussion précédente, que l'équation

$$y = ax + b$$

comprend implicitement les équations de la droite considérée *dans toutes les situations* qu'elle peut avoir par rapport aux axes. Il suffit d'y subtituer pour a et b les valeurs correspondantes à ces diverses situations.

Questions préliminaires relatives à la ligne droite.

56. Toutes les fois que la position d'une droite sera donnée par celle du point B où la droite rencontre l'axe des y, et par l'angle qu'elle forme avec l'axe des x, les constantes a et b auront une *valeur déterminée*. Mais on peut imposer à une droite d'autres conditions, telles, par exemple, que celles de *passer par deux points* pris à volonté sur un plan; de *passer par un point donné* et d'être *parallèle* ou *perpendiculaire* à une droite déjà connue de position; de *passer par un point* et de *faire avec une autre droite un angle donné*, etc.

Dans ces différents cas, a et b doivent être regardées comme des *constantes indéterminées*, dont les valeurs dépendent des conditions imposées à la droite.

La recherche de ces valeurs donne lieu à une série de questions qui servent de base à la GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, et que nous allons développer successivement.

57. PREMIÈRE QUESTION. — *Trouver l'équation d'une droite assujettie à passer par deux points donnés sur un plan.*

(Dans cette question, les axes peuvent être pris indifféremment *rectangulaires* ou *obliques*.)

FIG. 28 et 30. Soient M et M′ deux points fixés sur un plan par leurs coordonnées x', y' et x'', y''.

L'équation cherchée sera de la forme

$$y = ax + b; \tag{1}$$

a et b étant deux constantes (*inconnues pour le moment*) qu'il s'agit d'exprimer en fonction de x', y', x'', y'', qui sont supposées *connues*.

Or, puisque chacun des deux points M et M′ se trouve sur la droite, leurs coordonnées mises à la place de x et y dans l'équation (1), doivent la vérifier. Ainsi, l'on doit avoir les deux relations

$$y' = ax' + b, \tag{2}$$

$$y'' = ax'' + b. \tag{3}$$

Comme ces équations ne contiennent a et b qu'au premier degré, on en tire facilement les valeurs de *ces inconnues*.

D'abord, si l'on soustrait (3) de (2), il vient

$$y' - y'' = a(x' - x''); \quad \text{d'où} \quad a = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (2), on trouve

$$b = y' - \frac{y' - y''}{x' - x''} \cdot x' = \frac{x'y'' - y'x''}{x' - x''};$$

et substituant ces valeurs de a et b dans l'équation (1), on obtient

$$y = \frac{y' - y''}{x' - x''} \cdot x + \frac{x'y'' - y'x''}{x' - x''} \tag{4}$$

pour l'ÉQUATION DEMANDÉE.

Autre méthode. — Retranchons d'abord l'équation (2)

de l'équation (1); il vient

$$y - y' = a(x - x'),$$

équation qui contient encore l'*inconnue* a; mais, en soustrayant (3) de (2), on obtient

$$y' - y'' = a(x' - x''); \quad \text{d'où} \quad a = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

Portant cette valeur de a dans l'équation précédente, on a

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'), \tag{5}$$

équation qui, ne renfermant plus que les *variables nécessaires* x, y, et les *données* x', y', x'', y'', convient encore A LA DROITE CHERCHÉE.

L'identité des équations (4) et (5) peut être établie facilement. En effet, on tire de l'équation (5),

$$y = y' + \frac{y' - y''}{x' - x''} \cdot x - \frac{y' - y''}{x' - x''} \cdot x';$$

ou réduisant,

$$y = \frac{y' - y''}{x' - x''} \cdot x + \frac{x'y'' - y'x''}{x' - x''}.$$

La seconde méthode, plus simple et plus élégante que la première, donne lieu à un résultat dont l'emploi dans les calculs est, en général, plus commode.

Toutefois, l'équation (4) a l'avantage de laisser en évidence la quantité b, ou l'*ordonnée à l'origine*.

58. *Remarque.* — L'équation

$$y - y' = a(x - x'),$$

qu'on a d'abord trouvée en employant la seconde méthode, joue un grand rôle dans la GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. Elle offre un caractère particulier : c'est de représenter toutes les droites qui passent par le point particulier (x', y').

En effet, on y est parvenu par la combinaison de l'équation générale

$$y = ax + b,$$

avec la relation particulière

$$y' = ax' + b,$$

qui exprime que le point (x', y') se trouve sur la droite.

D'ailleurs, si l'on y fait à la fois $y = y'$, $x = x'$, elle se

réduit à $0 = 0$; ce qui prouve évidemment que la droite passe par le point (x', y').

Quant à la quantité a qui subsiste encore dans l'équation, c'est une *constante indéterminée* dont la valeur dépend d'une *seconde condition* qui peut être imposée à la droite. Dans la question précédente, cette condition consiste à faire passer la droite *par un second point* (x'', y''), ce qui détermine complétement la position de cette droite; et l'on trouve, en effet,

$$a = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

59. SECONDE QUESTION. — ***Mener par un point donné une droite parallèle à une autre déjà connue de position.***

Commençons par établir *analytiquement* la condition de *parallélisme* des deux droites.

FIG. 36. Soient

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b'$$

les équations des deux droites BL et DH.

Puisque ces droites sont parallèles, les angles α et α' qu'elles forment avec l'axe des x sont égaux.

Ainsi, dans le cas d'axes *rectangulaires*, on a

$$\operatorname{tang}\alpha' = \operatorname{tang}\alpha, \quad \text{ou bien} \quad a' = a.$$

Quand les axes sont *obliques*, on a de même

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin(\theta - \alpha')} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)},$$

et, par conséquent encore,

$$a' = a.$$

Réciproquement, si l'on a la relation $a = a'$, on peut conclure que les deux droites sont *parallèles*.

Il suffit, pour le prouver, de considérer le cas où les axes sont *obliques*, puisqu'il comprend celui d'axes *rectangulaires* comme cas particulier.

Or, la relation $\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)} = a$, étant développée, donne

$$a\sin\theta\cos\alpha - a\sin\alpha\cos\theta = \sin\alpha;$$

d'où

$$(1 + a\cos\theta)\operatorname{tang}\alpha = a\sin\theta,$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a\sin\theta}{1 + a\cos\theta}.$$

On obtiendrait de même

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{a'\sin\theta}{1 + a'\cos\theta}.$$

Mais comme on a, par hypothèse, $a = a'$, il vient

$$\operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\alpha',$$

et, par conséquent,

$$\alpha = \alpha'$$

(car il ne peut être ici question que d'angles $< 180°$.)

Ainsi, les deux droites sont *parallèles*.

La relation $a' = a$ est donc une condition *caractéristique* du PARALLÉLISME de deux droites.

60. Reprenons maintenant le problème proposé.

Soient x', y' les coordonnées du point M par lequel on veut mener une *parallèle* DH à une droite donnée BL. FIG. 36.

L'équation de la droite *donnée* étant

$$y = ax + b, \tag{1}$$

celle de la droite *cherchée* sera de la forme

$$y = a'x + b', \tag{2}$$

a' et b' étant deux *constantes* qu'il s'agit de *déterminer*.

Or, la droite DH devant, par hypothèse, passer par le point M, on a l'équation particulière

$$y' = a'x' + b'. \tag{3}$$

Retranchons les équations (2) et (3) l'une de l'autre, il vient

$$y - y' = a'(x - x') \text{ (\textit{voir} le n° 58).}$$

D'ailleurs, à cause du *parallélisme* des deux droites, on a

$$a' = a;$$

donc, enfin,

$$y - y' = a(x - x').$$

Telle est l'ÉQUATION DE LA DROITE CHERCHÉE.

Cette équation pouvant s'écrire

$$y = ax + y' - ax'$$

ne diffère de l'équation (1) de la droite *donnée* que par l'*ordonnée à l'origine*, qui est ici $y' - ax'$.

61. Troisième question. — *Deux droites étant données, trouver les coordonnées de leur point d'intersection.*

Fig. 37. Soient

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b',$$

les équations des deux droites données BL et DH.

Pour *fixer* la *position* de leur *point de concours*, remarquons que, ce point se trouvant à la fois sur les deux droites, ses coordonnées AP, MP doivent vérifier leurs équations, et ne sont, par conséquent, autre chose que les valeurs de x et de y susceptibles de satisfaire *simultanément* à ces deux équations.

Donc, si l'on *élimine* x et y entre les équations proposées, on aura les *coordonnées cherchées*.

Retranchant d'abord ces deux équations l'une de l'autre, on trouve

$$0 = (a - a')x + b - b',$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{b' - b}{a - a'},$$

et si l'on porte cette valeur dans la première équation, il vient, toute réduction faite,

$$y = \frac{ab' - ba'}{a - a'}.$$

Telles sont les expressions des coordonnées du point M.

Discussion. — Soit, comme cas particulier,

$$a' = a;$$

on trouve pour les expressions des coordonnées,

$$x = \frac{b' - b}{0}, \quad y = \frac{a(b' - b)}{0};$$

c'est-à-dire qu'elles deviennent *infinies;* ce qui doit être, puisque les deux droites sont alors *parallèles* (n° 59).

Si l'on a, en même temps,

$$a' = a, \quad b' = b,$$

il vient

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0},$$

valeurs *indéterminées;* et, en effet, dans ce cas, les deux

droites se confondant, se rencontrent en une *infinité* de points.

62. QUATRIÈME QUESTION. — *Calculer l'angle de deux droites données par leurs équations*

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b'.$$

Les résultats obtenus dans les trois questions précédentes sont *indépendants* de l'inclinaison des axes; il n'en est pas de même dans celle-ci, et il y a lieu de distinguer deux cas : ou les axes sont RECTANGULAIRES, ou ils sont OBLIQUES.

Premier cas. — Pour déterminer l'angle EMG des deux droites, angle que nous appellerons V, remarquons que le triangle MEG donne FIG. 37.

$$\text{EMG} = \text{MGX} - \text{MEG};$$

ou, si l'on désigne par α, α' les angles que les droites BL et DH forment respectivement avec l'axe des x,

$$\text{V} = \alpha' - \alpha,$$

d'où

$$(1) \qquad \operatorname{tang} \text{V} = \operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{\operatorname{tang}\alpha' - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\alpha}.$$

Cette formule est vraie, *quelle que soit l'inclinaison des axes.*

Mais comme nous avons supposé les axes *rectangulaires*, on a

$$\operatorname{tang}\alpha = a, \quad \operatorname{tang}\alpha' = a';$$

et la formule (1) devient

$$(2) \qquad \operatorname{tang} \text{V} = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Second cas. — Les axes étant *obliques*, on a (n° 59)

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a \sin\theta}{1 + a\cos\theta}, \quad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{a' \sin\theta}{1 + a'\cos\theta};$$

d'où, substituant dans la formule (1),

$$\operatorname{tang} \text{V} = \frac{\dfrac{a' \sin\theta}{1 + a'\cos\theta} - \dfrac{a \sin\theta}{1 + a\cos\theta}}{1 + \dfrac{aa' \sin^2\theta}{(1 + a\cos\theta)(1 + a'\cos\theta)}},$$

ou, réduisant au même dénominateur, et ayant égard à la

relation $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$,

$$(3) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{(a' - a)\sin\theta}{1 + aa' + (a + a')\cos\theta}.$$

Ce résultat rentre évidemment dans l'expression (2), quand on fait

$$\theta = 90^\circ.$$

Fig. 37. 63. *N. B.* — Si, au lieu de l'angle EMG, on voulait obtenir son *supplément* EMD, il suffirait de changer $a' - a$ en $a - a'$, dans les résultats (2) et (3), puisque les tangentes de ces deux angles sont liées par la relation

$$\operatorname{tang} EMD = -\operatorname{tang} EMG.$$

En général, toutes les fois que l'on a à calculer l'angle de deux droites, il faut préciser quel est celui des deux angles, *supplémentaires l'un de l'autre*, qu'on veut obtenir.

64. Considérons le cas particulier où les deux droites sont *perpendiculaires entre elles*.

Dans ce cas, on doit avoir

$$V = 90^\circ, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} V = \infty;$$

ce qui donne, les axes étant *rectangulaires*,

$$\frac{a' - a}{1 + aa'} = \infty; \quad \text{d'où} \quad 1 + aa' = 0,$$

et les axes étant *obliques*,

$$1 + aa' + (a + a')\cos\theta = 0.$$

La relation $1 + aa' = 0$, que nous aurons souvent occasion de rappeler, peut être démontrée *directement* au moyen de la figure.

Fig. 38. En effet, puisque le triangle EMG est rectangle en M, les deux angles MEG, MGE sont *compléments* l'un de l'autre; et l'on a

$$\operatorname{tang} MGE = \cot MEG = \frac{1}{\operatorname{tang} MEG}.$$

Mais

$$\operatorname{tang} MGX \quad \text{ou} \quad a' = -\operatorname{tang} MGE, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} MEG = a;$$

donc

$$a' = -\frac{1}{a}, \quad \text{ou bien} \quad aa' + 1 = 0.$$

65. CINQUIÈME QUESTION. — *D'un point donné hors d'une droite*, on propose, 1° *d'abaisser une perpendiculaire sur cette droite;* 2° *de trouver la longueur de cette perpendiculaire*, c'est-à-dire *la distance du point donné à la première droite.*

(Les axes sont supposés RECTANGULAIRES.)

Soient BL la droite *donnée*, MG la droite *cherchée*, perpendiculaire à BL et assujettie à passer par le point M dont nous désignerons les coordonnées par x' et y'. FIG. 39.

Supposons que l'équation de la droite BL soit

$$y = ax + b. \tag{1}$$

Puisque la droite MG passe par le point x', y', son équation sera (n° 58) de la forme

$$y - y' = a'(x - x'),$$

a' étant une *constante* qu'il s'agit de *déterminer.*

Or, puisque les deux droites doivent être *perpendiculaires* l'une à l'autre, on a (n° 64) la relation

$$1 + aa' = 0; \quad \text{d'où} \quad a' = -\frac{1}{a}.$$

Donc l'équation précédente devient

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x'). \tag{2}$$

Telle est l'ÉQUATION DE LA PERPENDICULAIRE MG; et cette droite est ainsi déterminée de *position.*

Pour résoudre la seconde partie de la question, il s'agit d'obtenir l'*expression de la distance du point* M *au point* H *où les deux lignes se rencontrent.*

On connaît déjà les coordonnées x', y' du point M; si l'on pouvait déterminer celles du point H, il suffirait de substituer ces quatre coordonnées dans l'expression de la *distance entre deux points donnés,* formule trouvée n° 48, et l'on aurait la valeur de MH.

Comme le point H est le *point d'intersection* de BL et de MG, il faudrait (n° 61) éliminer x et y entre les équations (1) et (2); mais observons que, d'après la formule déjà citée, ce sont moins les coordonnées des deux points M et H, que leurs *différences,* qu'il est important d'obte-

nir; ainsi la question est ramenée à éliminer entre (1) et (2) les quantités $x-x'$, $y-y'$, considérées comme *inconnues;* et les valeurs de ces quantités étant substituées dans l'expression

$$D=\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2},$$

à la place de $x'-x''$, $y'-y''$, donneront *la distance demandée.*

Afin de mettre en évidence les deux inconnues $x-x'$, $y-y'$, dans l'équation (1), comme elles le sont dans l'équation (2), nous écrirons la première équation sous la forme

$$y-y'=a(x-x')-y'+ax'+b, \tag{3}$$

qu'on obtient en ajoutant $-y'$ aux deux membres, puis en retranchant et ajoutant ax' dans le second membre.

Cela fait, retranchons l'équation (2) de l'équation (3); il vient

$$0=\left(a+\frac{1}{a}\right)(x-x')-y'+ax'+b;$$

d'où

$$x-x'=\frac{y'-ax'-b}{a+\frac{1}{a}},$$

ou réduisant,

$$x-x'=\frac{a(y'-ax'-b)}{a^2+1},$$

Cette valeur, portée dans l'équation (2), donne

$$y-y'=-\frac{1}{a}\cdot\frac{a(y'-ax'-b)}{a^2+1}=\frac{-(y'-ax'-b)}{a^2+1}.$$

Substituant ces valeurs de $x-x'$, $y-y'$, dans celle de D, et désignant par P la *perpendiculaire*, on trouve

$$P=\sqrt{\frac{a^2(y'-ax'-b)^2+(y'-ax'-b)^2}{(a^2+1)^2}}.$$

Enfin, mettant en évidence au numérateur le facteur $(y'-ax'-b)^2$, et supprimant le facteur a^2+1, commun aux deux termes, on obtient pour la LONGUEUR CHERCHÉE de la distance MH,

$$P=\frac{\pm(y'-ax'-b)}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Discussion. — Le double signe $\pm$ dont ce résultat est affecté, a besoin d'être interprété.

Si l'on cherche à traduire *géométriquement* la valeur de la quantité $y' - ax' - b$, on voit que y' désignant l'ordonnée MP, $ax' + b$ exprime l'ordonnée NP de BL, qui correspond à l'abscisse x' ou AP; car si l'on fait $x = x'$ dans $y = ax + b$, on a y ou AP $= ax' + b$. Fig. 39.

Donc $y' - ax' - b$ représente la distance MN.

Or, cette distance peut être (n° 27) *positive* ou *négative*, c'est-à-dire $\gtrless 0$, suivant que le point M est placé *au-dessus* ou *au-dessous* de BL.

Par exemple, si le point était en M', on aurait

$$\mathrm{M'N'} = \mathrm{N'P'} - \mathrm{M'P'}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{M'N'} = ax' + b - y'.$$

D'un autre côté, demander la *distance* du point M à la droite BL, c'est en demander la *valeur absolue;* d'où il suit que, *si le point* M *est placé au-dessus de la droite* BL, auquel cas $y' - ax' - b$ est > 0, on doit avoir

$$\mathrm{P} = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{a^2 + 1}};$$

et *si le point* M *est placé au-dessous,* ce qui entraîne la condition $y' - ax' - b < 0$, on aura

$$\mathrm{P} = \frac{ax' + b - y'}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

Chacun de ces deux résultats peut être vérifié par la Géométrie.

En effet, MP, MH étant respectivement perpendiculaires à AP, BL, on a

$$\text{angl. NMH} = \text{angl. BL'X} = \alpha.$$

Or le triangle rectangle NMH donne

$$\mathrm{MH} = \mathrm{MN}\cos\alpha = \frac{\mathrm{MN}}{\text{séc } \alpha} = \frac{\mathrm{MN}}{\sqrt{1 + \text{tang}^2\alpha}};$$

d'ailleurs

$$\mathrm{MN} = \mathrm{MP} - \mathrm{NP} = y' - ax' - b, \quad \text{et} \quad \text{tang}\,\alpha = a;$$

donc

$$MH, \quad \text{ou} \quad P = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

Si le point M était placé en M' *au-dessous* de BL, on aurait

$$M'N' = ax' + b - y', \quad \text{d'où} \quad P = \frac{ax' + b - y'}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

66. Examinons quelques cas particuliers :

Fig. 40. 1°. Supposons que le point duquel on veut abaisser la perpendiculaire soit l'ORIGINE des coordonnées.

On a, dans ce cas,

$$x' = 0, \quad y' = 0,$$

et l'expression devient

$$P = \frac{\mp b}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

résultat *positif* ou *négatif*, suivant que le point B est placé *au-dessus* ou *au-dessous* de l'origine.

Fig. 41. 2°. Supposons que la droite donnée passe par l'origine.

On a alors

$$b = 0;$$

et l'expression se réduit à

$$P = \frac{y' - ax'}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad \text{ou} \quad P = \frac{ax' - y'}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

67. *N. B.* — Dans la question que nous venons de traiter, nous avons supposé les axes RECTANGULAIRES; s'ils étaient OBLIQUES, il faudrait, pour la *première partie*, faire usage (n° 64) de la relation

$$1 + aa' + (a + a')\cos\theta = 0,$$

qui donnerait

$$a' = -\frac{(1 + a\cos\theta)}{a + \cos\theta},$$

et substituer cette valeur dans l'équation

$$y - y' = a'(x - x').$$

Quant à la *seconde partie*, après avoir effectué l'élimination de $x - x'$, $y - y'$ entre les équations des deux droites, on porterait ces valeurs dans l'expression générale de D

(n° 49); et l'on trouverait, tout calcul fait,

$$P = \frac{(y' - ax' - b)\sin\theta}{\sqrt{a^2 + 2a\cos\theta + 1}}.$$

68. SIXIÈME QUESTION. — *Par un point donné hors d'une droite, en mener une seconde qui forme avec la première un angle donné.*

Les axes étant supposés RECTANGULAIRES, appelons x', y' les coordonnées du point, et m la tangente de l'angle donné.

L'équation de la droite donnée étant

$$y = ax + b,$$

celle de la *droite cherchée* sera de la forme

$$y - y' = a'(x - x');$$

et puisque ces droites doivent former un angle dont la tangente est m, on doit avoir (n° 62)

$$\frac{a' - a}{1 + aa'} = m, \quad \text{ou bien} \quad \frac{a - a'}{1 + aa'} = m.$$

Ces deux relations peuvent être comprises dans une seule,

$$\frac{a' - a}{1 + aa'} = \pm m; \quad \text{d'où} \quad a' = \frac{a \pm m}{1 \mp am};$$

ce qui donne, pour l'ÉQUATION DE LA DROITE CHERCHÉE,

$$y - y' = \frac{a \pm m}{1 \mp am}(x - x').$$

La question admet donc généralement *deux* solutions; et cela est évident, car, de chaque côté de la perpendiculaire abaissée du point donné sur la droite $y = ax + b$, on peut mener une droite qui fasse avec celle-ci l'angle donné.

Soit cet angle égal à 90 degrés, auquel cas on a

$$m = \infty;$$

il en résulte

$$\frac{a \pm m}{1 \mp am}, \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{a}{m} \pm 1}{\frac{1}{m} \mp a} = -\frac{1}{a};$$

d'où

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x'),$$

équation obtenue (n° 65).

Nous ne considérons pas le cas où les axes sont *obliques*, parce que les résultats n'en sont pas assez simples.

69. *Scolie général.* — Les différentes questions que nous venons de résoudre se reproduiront presque à chaque instant dans tout le cours de la GÉOMÉTRIE ANALITIQUE. En réfléchissant sur les résultats auxquels on a été conduit par leur résolution, on doit sentir la nécessité d'éviter, autant que possible, le système des *axes obliques*, pour que les calculs soient plus simples. Il faut toutefois excepter les cas où l'on n'a à faire entrer en considération que l'équation d'une droite *passant par deux points donnés*, et la condition de *parallélisme de deux droites*, les résultats étant alors *indépendants de l'inclinaison des axes*.

§ II. — DU CERCLE.

Manière de fixer analytiquement la position d'un cercle sur un plan.

FIG. 42. 70. Soit un cercle de rayon quelconque r, dont le centre est en O.

Traçons dans son plan deux axes RECTANGULAIRES AX, AY, et proposons-nous d'en fixer la position par rapport à ces axes.

Si l'on désigne par p, q, les coordonnées AB, OB du *centre*, et par x, y les coordonnées AP, MP d'un point quelconque M de la *circonférence*, on aura, en vertu de la formule du n° 48,

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2. \qquad (1)$$

Cette relation caractérise *tous les points de la circonférence*, en ce qu'elle est évidemment satisfaite par les coordonnées de chacun d'eux, et qu'elle ne peut l'être que par ces coordonnées.

En effet, soit N un point quelconque pris à l'*extérieur* ou à l'*intérieur* du cercle; on a, en désignant toujours par x et y les coordonnées de ce point,

$(x-p)^2+(y-q)^2$ pour le carré de la distance ON;

mais il est évident que ON est $>$ ou $<$ OM, suivant que

le point est *extérieur* ou *intérieur* au cercle, d'où résulte nécessairement

$$(x-p)^2+(y-q)^2 > \text{ ou } < r^2.$$

Ainsi, l'équation (1) ne saurait être vérifiée pour un point qui ne se trouve pas sur la circonférence.

Cette équation est donc l'ÉQUATION DU CERCLE, en ce sens qu'elle fixe complétement *la position de chacun des points de la circonférence.*

Les *constantes* qui y entrent, sont les *coordonnées du centre* et le *rayon;* et, en effet, un cercle est complétement déterminé avec ces données.

71. L'équation est plus compliquée lorsque les axes sont OBLIQUES; car, d'après la formule du n° 49, on a Fig. 43.

$$(x-p)^2+(y-q)^2+2(x-p)(y-q)\cos\theta=r^2,$$

θ désignant l'angle des deux axes.

72. L'équation (1) (n° 70) prend une forme plus ou moins simple, suivant les diverses positions du cercle par rapport aux axes.

1°. L'*origine des coordonnées* peut être placée en un point A′ de la *circonférence.* Fig. 42.

Dans ce cas, on a évidemment entre p, q et r, la relation

$$p^2+q^2=r^2;$$

mais si l'on développe l'équation (1), elle devient

$$x^2-2px+p^2+y^2-2qy+q^2=r^2,$$

ou, supprimant les deux quantités égales p^2+q^2 et r^2,

$$x^2-2px+y^2-2qy=0. \tag{2}$$

Telle est, dans ce cas, la forme de l'*équation du cercle.*

Si l'on pose $y=0$ dans cette nouvelle équation, il en résulte

$$x^2-2px=0, \quad \text{ou} \quad x(x-2p)=0;$$

d'où

$$x=0, \quad x=2p;$$

ce qui prouve qu'en effet le point $[x=0, y=0]$ ou l'*origine,* se trouve placé *sur la circonférence.*

Remarque. — Comme, à l'hypothèse $y = 0$, correspond encore l'abscisse $x = 2p$, il s'ensuit que la circonférence coupe l'axe des x en un second point C tel, que A'C est double de A'D ou p; ce qui démontre que *la corde* A'C *est divisée en deux parties égales par la perpendiculaire abaissée du centre sur cette corde.*

Cette propriété est connue en Géométrie; mais on voit comment on la met en évidence à l'aide de l'équation du cercle.

La démonstration s'applique d'ailleurs à une corde quelconque, puisqu'on peut faire varier à volonté la direction de l'axe A'X', pourvu que le second axe A'Y' lui soit mené *perpendiculairement.*

Fig. 42. 73. 2°. L'*origine* peut être placée à l'*extrémité* A'' d'un *diamètre* A''G qui serait lui-même l'axe des x.

Dans cette nouvelle position des axes, on a

$$p = r \quad \text{et} \quad q = 0;$$

ainsi, l'équation (1) devient

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2,$$

ou réduisant,

$$y^2 = 2rx - x^2. \tag{3}$$

On pourrait déduire celle-ci de l'équation (2) en y faisant

$$p = r \quad \text{et} \quad q = 0.$$

L'équation (3) peut servir à démontrer deux autres propriétés du cercle.

En effet, d'abord, cette équation peut se mettre sous la forme

$$y^2 = x(2r - x);$$

mais, d'après la figure, on a

$$y = \text{MR}, \quad x = \text{A''R};$$

d'où

$$2r - x = \text{A''G} - \text{A''R} = \text{GR};$$

donc

$$\overline{\text{MR}}^2 = \text{A''R} \times \text{GR},$$

ou bien

$$\text{A''R} : \text{MR} :: \text{MR} : \text{GR};$$

c'est-à-dire que *la perpendiculaire abaissée d'un point de*

la circonférence sur un diamètre, est moyenne proportionnelle entre les deux segments de ce diamètre.

La même équation revient encore à

$$y^2 + x^2 = 2r.x;$$

or, si l'on tire la corde A″M, on a évidemment

$y^2 + x^2$ ou $\overline{MR}^2 + \overline{A''R}^2 = \overline{A''M}^2$, $2r = A''G$, $x = A''R$;

donc

$\overline{A''M}^2 = A''G \times A''R$, ou bien $A''G : A''M :: A''M : A''R$;

ce qui prouve que *la corde menée par l'une des extrémités d'un diamètre est moyenne proportionnelle entre ce diamètre et le segment adjacent formé par la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de la corde sur ce diamètre.*

74. 3°. Enfin, l'*origine des coordonnées* peut être placée au *centre*.

Dans ce cas, qui est celui que nous aurons à considérer le plus fréquemment, les coordonnées p et q sont *nulles*.

Alors l'équation (1) se réduit à

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{4}$$

C'est l'équation du cercle *rapporté à son centre comme origine*, les coordonnées étant RECTANGULAIRES.

Si les axes étaient OBLIQUES, l'équation du cercle serait (n° 71)

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = r^2. \tag{5}$$

N. B. — On parviendrait directement aux équations (4) et (5) par la considération du triangle *rectangle* OMR de la *fig.* 42, et du triangle *obliquangle* OMR de la *fig.* 43, l'origine des coordonnées étant supposée en O.

§ III. — DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

75. Avant de pousser plus loin l'étude de la ligne droite et du cercle, il est utile d'entrer dans quelques considérations sur les *équations des lignes en général*, et sur le parti qu'on peut en tirer.

Nous avons déjà vu que la *position* d'une droite ou d'un cercle est *fixée* sur un plan par le moyen d'une *équation*

entre les *coordonnées* x et y de *chacun de ses points* et un certain nombre de *constantes* dont la connaissance suffit pour déterminer cette position géométriquement.

Supposons actuellement que, x et y désignant toujours les distances d'un point à deux axes *rectangulaires* ou *obliques*, la résolution d'une question ait conduit à une équation générale entre x et y, que nous représenterons par

$$F(x, y) = 0.$$

(Le caractère F s'énonce : *fonction de*).

Je dis que, quand on voudra fixer la position du point qui satisfait à l'énoncé de la question, ou dont les coordonnées vérifient l'équation, au lieu d'un point, on en obtiendra une *infinité;* et la série de ces points formera une ligne qui sera *droite* ou *courbe*, suivant la *nature* et le *degré* de l'équation.

En effet, puisque l'on n'a qu'*une seule* équation entre les *deux* quantités x et y, on peut disposer arbitrairement de l'une d'elles (ces quantités sont, pour cette raison, appelées VARIABLES), et l'équation donnera les valeurs correspondantes de l'autre variable.

Donnons, par exemple, à l'abscisse x la suite des valeurs

$$x = a,\ a',\ a'',\ a''',\ a^{\text{IV}},\ a^{\text{V}},\ \text{etc.}$$

Si l'équation n'est que du *premier degré en* y, on en déduira successivement pour les valeurs correspondantes de cette variable,

$$y = b,\ b',\ b'',\ b''',\ b^{\text{IV}},\ b^{\text{V}},\ \text{etc.}$$

FIG. 44. En portant sur AX les valeurs de x, et en menant par les points P, P′, P″, P‴, etc., des parallèles à AY, égales aux valeurs de y, on aura différents points M, M′, M″, M‴, etc., qui satisferont également à la question.

Comme rien n'empêche de donner à x des valeure *extrêmement peu différentes* les unes des autres, et qu'alors les valeurs de y seront elles-mèmes, en général, *très-peu différentes* les unes des autres, on doit en conclure que les points M, M′, M″, etc., seront *très-voisins;* et l'on pourra ensuite lier ces points entre eux par une ligne continue

$MM'M''M'''\ldots$, dont tous les points seront autant de solutions de la question, parce que les points intermédiaires sont censés correspondre aux valeurs de x, y, tirées de l'équation du problème, et comprises entre celles qui ont déjà été construites.

Cette ligne sera d'ailleurs d'autant plus rigoureusement déterminée, que les points M, M′, M″, etc., seront plus rapprochés les uns des autres.

Supposons maintenant que l'équation soit, par rapport à y, d'*un degré supérieur au premier*.

Comme, dans ce cas, à chaque valeur de x doivent correspondre *plusieurs* valeurs de y, la ligne est composée de plusieurs branches $MM'M''\ldots NN'N''\ldots RR'R''\ldots$. FIG. 45.

76. Soit, par exemple, à construire l'équation FIG. 46.

$$y^2 = 2x.$$

On en déduit

$$y = \pm\sqrt{2x};$$

ce qui prouve, 1° qu'à une même valeur de x correspondent *deux* valeurs de y *égales* et de *signes contraires;* 2° qu'à des valeurs *négatives* de x ne correspondent que des valeurs *imaginaires* de y, c'est-à-dire que la *ligne demandée*, qui est ici une courbe, *ne peut avoir aucun point situé à la gauche de l'origine*, ou de AY.

Cela posé, faisons d'abord

$$x = 0, \quad \text{il vient} \quad y = 0;$$

d'où l'on peut conclure que l'origine des coordonnées appartient à la courbe, ou que *la courbe passe par l'origine*.

Soit

$$x = 1;$$

il en résulte

$$y = \pm\sqrt{2} = \pm 1{,}4 \text{ à } \textit{moins de } 0{,}1 \text{ près.}$$

Après avoir pris sur AX une distance AP égale à l'*unité linéaire*, si l'on mène par le point P une parallèle à AY, et que l'on prenne *au-dessus* et *au-dessous* de AX deux distances PM, PN, égales à $1{,}4,\ldots$, M et N seront *deux points de la courbe demandée*.

Faisons encore $x = 2$; d'où

$$y = \pm 2.$$

Ces valeurs étant construites comme les précédentes, donnent M′ et N′ pour deux nouveaux points.

En continuant ainsi de donner à x différentes valeurs, et construisant les valeurs correspondantes de y, on obtiendra une courbe de la forme LAH qui s'étend *indéfiniment à la droite de l'axe des y*, puisque, tant que x est *positif*, les valeurs de y sont *réelles*.

FIG. 47. 77. Prenons, pour *second exemple*, l'équation

$$y^2 - x^2 = 4,$$

de laquelle on tire

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 4}.$$

On voit, *premièrement*, qu'à *une même* valeur de x correspondent *deux* valeurs de y *égales* et de *signes contraires; secondement*, que, quelque valeur *positive* ou *négative* que l'on donne à x, on a toujours pour y des valeurs *réelles*. Ainsi l'on est déjà certain que la *ligne demandée*, qui est encore ici une courbe, s'étend *indéfiniment au-dessus et au-dessous de l'axe des* x, *à droite et à gauche de l'axe des* y.

Faisons quelques hypothèses :

Soit d'abord

$$x = 0;$$

on tire de l'équation proposée,

$$y = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

Prenons sur AY *deux* distances AB, AC, égales à 2; les points B et C *appartiennent à la courbe*.

Soit, en second lieu,

$$x = 1;$$

d'où

$$y = \pm\sqrt{5} = \pm 2{,}2, \text{ à } \textit{moins de } 0{,}1 \text{ près.}$$

Si l'on prend sur AX, AP = 1, et qu'on porte sur une parallèle à AY, menée par le point P, deux parties PM, PN égales à $2\frac{1}{5}$, M et N seront *deux nouveaux points de la courbe*.

Soit encore

$$x = 2,$$

ce qui donne

$$y = \pm\sqrt{8} = \pm 2{,}8, \text{ à } \textit{moins de } 0{,}1 \text{ près.}$$

En construisant ces valeurs comme les précédentes, on obtiendra les deux points M′ et N′;

Et ainsi de suite, dans le sens *positif* de l'axe des x.

Actuellement, pour obtenir les points situés *à la gauche* de AY, observons que, puisqu'à des valeurs de x *positives* ou *négatives*, mais NUMÉRIQUEMENT *les mêmes*, correspondent *les mêmes valeurs* de y, il suffit, après avoir pris des distances Ap, Ap', etc., égales à AP, AP', etc., de mener par les points p, p', etc., des parallèles à AY, et par les points M, M', etc., N, N', etc., des parallèles à AX. Les points m, m', etc., n, n', etc., seront aussi des *points de la courbe*, qui sera évidemment composée de DEUX BRANCHES distinctes et opposées LBL', HCH'.

Ces exemples suffisent pour donner une idée de ces sortes de constructions, sur lesquelles nous reviendrons plus tard avec détail.

78. La ligne représentée par l'équation

$$F(x, y) = 0$$

est appelée le *lieu géométrique* de cette équation.

Réciproquement, une ligne étant tracée sur un plan, si, par un moyen quelconque, fondé sur la définition ou sur une propriété caractéristique de cette ligne, on parvient à une équation qui existe entre les coordonnées x et y de tous ses points, et n'existe pas pour d'autres points, la relation ainsi obtenue est dite l'ÉQUATION DE LA LIGNE. (*Voyez* les nos 50, 70.)

Nous terminerons les notions générales sur les *lieux géométriques* par deux propositions qui seront d'un usage continuel, par la suite.

79. PREMIÈRE PROPOSITION. — On a vu précédemment que l'équation générale d'une ligne droite est de la forme

$$y = ax + b, \tag{1}$$

les quantités a et b pouvant passer par tous les états de grandeur.

Je dis que, réciproquement, *toute équation du* PREMIER DEGRÉ *entre deux variables* x *et* y, *en tant que ces variables expriment des distances à deux droites fixes, a pour lieu géométrique une* LIGNE DROITE.

En effet, quelle que soit l'équation proposée, on peut

toujours la ramener à la forme

$$y = mx + n. \qquad (2)$$

Comparons entre elles les équations (1) et (2).

Fig. 31. 1°. Si les axes sont RECTANGULAIRES, on peut poser

$$a \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}\alpha = m \quad \text{et} \quad b = n.$$

Prenant alors sur AY une distance $AB = n$, et menant par le point B une droite CBL qui forme avec AX un angle α dont m soit la *tangente trigonométrique*, on aura (n° 51) pour l'équation de cette droite ainsi fixée de position,

$$y = x \operatorname{tang}\alpha + n, \quad \text{ou bien} \quad y = mx + n.$$

Donc cette dernière équation a pour *lieu géométrique* une LIGNE DROITE.

Fig. 32. 2°. Si les axes sont OBLIQUES, on pose

$$a \quad \text{ou} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)} = m \quad \text{et} \quad b = n.$$

Prenant sur AY une partie AB égale à n, et menant par le point B une droite CBL qui forme avec AX un angle α tel que l'on ait

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)} = m,$$

on aura (n° 51) pour son équation,

$$y = x\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)} + n, \quad \text{ou bien} \quad y = mx + n.$$

Donc, etc.

Il reste, toutefois, à savoir si l'angle α peut toujours être déterminé d'après la relation

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)} = m.$$

Or, on a reconnu (n° 59) que cette relation donne

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{m \sin\theta}{1 + m\cos\theta},$$

et l'on sait qu'une tangente peut passer par tous les états de grandeur; ainsi l'angle α est toujours susceptible de détermination.

80. Comme deux points déterminent la position d'une droite, il s'ensuit qu'une équation du *premier degré* en x

et y étant donnée, il suffira, pour en construire le *lieu géométrique*, de fixer la position de *deux de ses points*.

Les plus remarquables sont ceux où la droite rencontre les axes; et, pour les obtenir, on fait successivement, dans l'équation,

$$y = 0, \quad \text{puis} \quad x = 0;$$

les valeurs obtenues, pour x dans la première hypothèse, et pour y dans la deuxième, représentent, l'une, l'abscisse du point de rencontre avec l'axe des x, l'autre, l'ordonnée du point de rencontre avec l'axe des y.

[On a déjà vu (n° 55) que l'introduction de ces deux quantités dans l'équation de la droite, lui donne une forme *symétrique*.]

81. Lorsque l'équation est de la forme

$$y = mx,$$

comme, en faisant

$$y = 0, \quad \text{on obtient} \quad x = 0,$$

et *réciproquement*,

La droite passe par l'origine; et pour avoir un *second* point, il suffit de donner à x une valeur particulière, et de construire la valeur de y correspondante.

82. *Applications numériques.* — [Les axes sont supposés RECTANGULAIRES.]

1°. $2y - 3x = 1.$ FIG. 48.

Pour $y = 0$, on trouve

$$x = -\frac{1}{3},$$

et pour $x = 0$,

$$y = +\frac{1}{2}.$$

Soit AI $= 1$, et prenons sur AX une distance AC $= -\frac{1}{3}$, puis sur AY, AB $= \frac{1}{2}$, nous obtenons CBL pour le LIEU GÉOMÉTRIQUE DEMANDÉ.

On peut, à l'une de ces constructions, substituer celle de la tangente de l'angle α.

Or, on a

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{3}{2}.$$

FIG. 48. Soit prise sur AY la distance $AB = \frac{1}{2}$, comme ci-dessus, et soit tirée la droite BH parallèle à AX; prenant sur cette droite $BD = 1$, et élevant au point D, DE perpendiculaire à BH, et égale à $\frac{3}{2}$, on aura

$$\text{tang EBD} = \frac{3}{2},$$

et le point E appartiendra à la droite CBL.

Veut-on connaître, en degrés, la valeur numérique de l'angle α lui-même? Voici comment il faut opérer :

On a

$$\text{l. tang}\,\alpha = 10 + \text{l. } 3 - \text{l. } 2 = 10,1760912\,5;$$

d'où, cherchant dans les Tables sexagésimales la valeur correspondante de l'angle α,

$$\alpha = 56^\circ\,18'\,35'',8.$$

FIG. 49. 2°. $$3y + 5x + 4 = 0.$$

Pour $y = 0$, $x = -\frac{4}{5}$: et pour $x = 0$, $y = -\frac{4}{3}$; $\text{tang}\,\alpha = -\frac{5}{3}$.

Après avoir pris sur AX une partie $AC' = -\frac{4}{5}$, et sur AY, $AB' = -\frac{4}{3}$, on tire C'B'; et l'on obtient ainsi la DROITE DEMANDÉE.

Ou bien, en menant B'X' parallèle à AX, et prenant $B'D' = -1$, puis élevant D'E' perpendiculaire à B'X' et égale à $\frac{5}{3}$, on obtient le point E' pour un autre point de la droite cherchée.

Pour calculer l'angle α qui est nécessairement *obtus*, puisque la tangente est *négative*, on pose

$$\alpha' = 180^\circ - \alpha;$$

d'où

$$\text{tang}\,\alpha' = -\,\text{tang}\,\alpha = \frac{5}{3},$$

et

$$\text{l. tang}\,\alpha' = 10 + \text{l. } 5 - \text{l. } 3,$$

ou

$$\text{l. tang}\,\alpha' = 10,2218488.$$

Les Tables donnent

$$\alpha' = 59^\circ\,2'\,10'',5;$$

et, par suite,

$$\alpha = 120^\circ\,57'\,49'',5.$$

N. B. — Les constructions précédentes sont toutes applicables au cas où les axes sont OBLIQUES.

Mais alors les quantités $\frac{3}{2}$ et $-\frac{5}{3}$ expriment les valeurs du rapport $\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$; et, pour déterminer l'angle α, il faut faire usage de la formule du n° 59,

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{m\sin\theta}{1+m\cos\theta},$$

dans laquelle on remplace m par $\frac{3}{2}$ ou $-\frac{5}{3}$, et $\sin\theta$, $\cos\theta$ par les *sinus* et *cosinus* de l'angle θ des deux axes, angle supposé connu.

3°. $$y = x,$$ FIG. 50.

les axes étant supposés quelconques.

En faisant successivement

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \text{etc.},$$

on trouve pour y,

$$y = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \text{etc.};$$

ce qui démontre, d'abord, que la droite ABB' *passe par l'origine*, et ensuite qu'elle divise l'angle YAX en *deux parties égales*.

Lorsque les axes sont RECTANGULAIRES, l'angle α est égal à 45 degrés, c'est-à-dire est la *moitié* de l'angle droit.

83. REMARQUE IMPORTANTE.—L'équation proposée pourrait être en x ou en y seulement, c'est-à-dire ne renfermer qu'*une seule variable*.

On peut avoir, par exemple, l'équation FIG. 51.

$$2x - 3 = 0, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{3}{2}.$$

Prenant sur AX, $AB = \frac{3}{2}$, et menant par le point B, BC *parallèle* à AY, on obtient une droite dont tous les points jouissent exclusivement (n° 45) de la propriété d'avoir $\frac{3}{2}$ pour abscisse, quel que soit d'ailleurs y.

Soit encore FIG. 52.

$$y^2 + y - 2 = 0.$$

Cette équation étant résolue, donne

$$y = 1 \quad \text{et} \quad y = -2.$$

FIG. 52. Si l'on prend sur AY, deux distances, AB=1, AB'=—2, et qu'on mène GH, G'H', parallèles à AX, l'*ensemble de ces droites* constitue le *lieu géométrique* de l'équation.

GÉNÉRALEMENT, toute équation à *une seule* variable a pour *lieu géométrique* UNE DROITE OU UN SYSTÈME de plusieurs droites *parallèles*, soit à AX, soit à AY, suivant qu'elle est du *premier* degré ou d'un degré *supérieur* en y ou en x.

84. La question suivante, qui se rattache aux *lieux géométriques* du premier degré, peut avoir son utilité dans les applications.

Trouver l'équation d'une droite assujettie à passer par le point de concours de deux droites données.

Soient

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b'$$

les équations de ces deux droites. On peut les mettre sous la forme

(1) $$y - ax - b = 0, \quad y - a'x - b' = 0;$$

et si l'on pose la nouvelle équation

(2) $$(y - ax - b)m + y - a'x - b' = 0,$$

m étant une *indéterminée* quelconque, on obtiendra l'équation demandée.

D'abord le *lieu géométrique* de cette équation est *une ligne droite*, puisqu'elle est du *premier degré* en x et en y.

De plus, elle est satisfaite lorsqu'on pose simultanément

$$y - ax - b = 0, \quad y - a'x - b' = 0,$$

ou

$$y = ax + b, \qquad y = a'x + b';$$

d'où l'on voit (n° 61) que les coordonnées du point de concours *des* deux droites données, la *vérifient*.

D'ailleurs la quantité m est, par hypothèse, une *indéterminée* qui peut recevoir toutes les valeurs réelles possibles.

Ainsi l'équation (2) peut être considérée comme l'*équation générale de toutes les droites passant par le point d'intersection des deux droites données*.

85. SECONDE PROPOSITION. — On a trouvé (n° 70) pour l'équation générale du cercle rapporté à des axes RECTANGU-

LAIRES,

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2;$$

ou développant,

(1) $$x^2+y^2-2px-2qy+p^2+q^2-r^2=0.$$

Réciproquement, *toute équation du second degré, de* la forme

(2) $$x^2+y^2+Ax+By+C=0,$$

c'est-à-dire *qui ne renferme pas le rectangle* xy *des variables, et dans laquelle les coefficients des carrés sont égaux à l'unité ou égaux entre eux* (parce qu'on peut toujours diviser l'équation par ce coefficient commun), *appartient* (dans le cas d'axes RECTANGULAIRES) *à une circonférence de cercle.*

En effet, comparons l'une à l'autre les équations (1) et (2), et posons

$$-2p=A, \quad -2q=B, \quad p^2+q^2-r^2=C;$$

on en déduit

$$p=-\frac{A}{2}, \quad q=-\frac{B}{2},$$

$$r=\sqrt{p^2+q^2-C}=\sqrt{\frac{A^2+B^2}{4}-C}.$$

Cela posé, traçons deux axes rectangulaires AX, AY, FIG. 53. et construisons le point O dont les coordonnées soient $-\frac{A}{2}$ et $-\frac{B}{2}$, quantités que nous supposons ici positives. Puis, du point O comme centre, et avec un rayon égal à $\sqrt{\frac{A^2+B^2}{4}-C}$, décrivons une circonférence de cercle; elle aura nécessairement pour équation

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2;$$

ou, si l'on remplace p, q, r par leurs valeurs,

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2}{4}-C,$$

ou développant et réduisant,

$$x^2+Ax+y^2+By+C=0,$$

résultat identique avec l'équation (2). Donc, etc.

Autre démonstration. — Ajoutons aux deux membres de l'équation (2) la quantité $\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}$, afin de compléter les carrés x^2+Ax et y^2+By; il vient

$$x^2+Ax+\frac{A^2}{4}+y^2+By+\frac{B^2}{4}=\frac{A^2+B^2}{4}-C,$$

ou bien

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2}{4}-C, \tag{3}$$

équation que l'on peut comparer immédiatement avec

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2,$$

en posant

$$p=-\frac{A}{2},\quad q=-\frac{B}{2},\quad r=\sqrt{\frac{A^2+B^2}{4}-C};$$

d'où il suit que l'équation (3), et par conséquent l'équation (2) dont (3) n'est qu'une transformée, représente une *circonférence du cercle* qui a pour *centre* le point déterminé par les coordonnées $-\frac{A}{2}$, $-\frac{B}{2}$, et pour *rayon* $\sqrt{\frac{A^2+B^2}{4}-C}$.

Cette démonstration, plus simple que la première, est *moins analytique.*

Remarque. — Les quantités A, B, C étant quelconques, il peut arriver que l'on ait

$$\frac{A^2+B^2}{4}-C=0 \quad \text{ou} \quad <0.$$

Dans le premier cas, le rayon r est *nul*, et la courbe se réduit à *son centre*, c'est-à-dire à *un point.*

Dans le deuxième, le rayon r est *imaginaire*, ce qui veut dire qu'il n'y a pas de courbe; et l'on dit alors que le *cercle est imaginaire.*

86. *Applications numériques.* — AXES RECTANGULAIRES.

Soit à construire l'équation

$$2x^2+2y^2-3x+4y-1=0;$$

elle peut d'abord être mise sous la forme

$$x^2+y^2-\frac{3}{2}x+2y=\frac{1}{2},$$

ou, en ajoutant aux deux membres les carrés de la moitié du coefficient $-\frac{3}{2}$ et de la moitié du coefficient 2, c'est-à-dire $\frac{9}{16}+1$, ou $\frac{25}{16}$,

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+(y+1)^2=\frac{25}{16}+\frac{1}{2}=\frac{33}{16}.$$

Cela posé, déterminons d'abord le point O qui a $\frac{3}{4}$ pour abscisse et -1 pour ordonnée. FIG. 54.

Ensuite, du point O comme centre, et avec un rayon égal à $\frac{1}{4}\sqrt{33}$ (ou 1,4 à 0,1 *près*), décrivons une circonférence; cette courbe sera le LIEU GÉOMÉTRIQUE DEMANDÉ.

Soit, maintenant, l'équation

$$x^2+y^2-3y+2x=0,$$

qui peut se mettre sous la forme

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1+\frac{9}{4}=\frac{13}{4}.$$

Après avoir fixé la position du point qui a -1 pour abscisse et $\frac{3}{2}$ pour ordonnée, si de ce point O comme centre, avec un rayon égal à $\frac{1}{2}\sqrt{13}$ ou 1,8, on décrit une *circonférence*, elle sera le LIEU GÉOMÉTRIQUE de l'équation proposée. FIG. 55.

Il faut observer toutefois que, dans cet exemple, comme l'équation est satisfaite simultanément par $x=0$, $y=0$, la courbe passe nécessairement par *l'origine;* d'où il suit que le rayon se trouve tout construit et est représenté par OA.

En effet, on a

$$OA=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BO}^2}, \quad \text{ou bien} \quad OA=\sqrt{\frac{9}{4}+1}=r.$$

On reconnaîtrait pareillement :

1°. Que l'équation

$$x^2+y^2-3x+1=0$$

représente un CERCLE dont le *centre* a pour coordonnées $\frac{3}{2}$ et 0, et qui a pour *rayon* $\frac{1}{2}\sqrt{5}$;

2°. Que l'équation

$$4x^2 + 4y^2 - 12x - 8y + 13 = 0$$

représente un POINT ayant pour coordonnées $\frac{3}{2}$ et 1.

Car on peut la transformer en

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = 0;$$

et cette équation, dont le premier membre est *la somme de deux carrés*, ne peut être satisfaite qu'en posant

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0, \quad (y - 1)^2 = 0,$$

ce qui donne

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad y = 1;$$

3°. Que l'équation

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 7 = 0$$

ne représente RIEN.

On peut, en effet, lui donner la forme

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = -2,$$

équation dont le premier membre, étant *la somme de deux carrés*, ne peut être égal à une quantité *négative*.

87. La proposition que nous avons établie et démontrée au n° 85, suppose que les axes sont RECTANGULAIRES.

Cherchons maintenant, dans le cas d'*axes* OBLIQUES, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation complète du second degré à deux variables,

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

représente une *circonférence de cercle*.

On a trouvé (n° 71) pour l'équation la plus générale du cercle,

$$(2) \quad (x - p)^2 + (y - q)^2 + 2(x - p)(y - q)\cos\theta = r^2.$$

Il ne s'agit donc, pour résoudre la question proposée, que de comparer terme à terme les équations (1) et (2).

En développant la dernière, et égalant entre eux les coefficients des termes analogues de cette équation et de la première, *divisée* d'abord par A, on obtient les relations sui-

vantes :

$$\frac{B}{A} = 2\cos\theta, \quad \frac{C}{A} = 1,$$

$$\frac{D}{A} = -2(q + p\cos\theta), \quad \frac{E}{A} = -2(p + q\cos\theta),$$

$$\frac{F}{A} = p^2 + q^2 + 2pq\cos\theta - r^2.$$

Des *deux premières* relations on déduit

$$\cos\theta = \frac{B}{2A}, \quad C = A;$$

ce qui prouve déjà que l'équation (1) ne peut représenter un *cercle* qu'autant que les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux, et que la courbe est rapportée à un système d'axes dont l'angle θ a pour cosinus $\frac{B}{2A}$.

Ces deux conditions étant supposées remplies, reste à savoir si les quantités p, q, r sont toujours *réelles*.

Or les deux quantités p et q sont liées entre elles par les *troisième* et *quatrième* relations, qui, considérées comme deux équations du *premier degré* à deux inconnues, donnent

$$p = \frac{D\cos\theta - E}{2A\sin^2\theta}, \quad q = \frac{E\cos\theta - D}{2A\sin^2\theta},$$

valeurs essentiellement *réelles*.

Quant à la quantité r, elle est formée par la *dernière* relation, d'où l'on tire

$$r = \sqrt{p^2 + q^2 + 2pq\cos\theta - \frac{F}{A}},$$

expression *radicale du second degré* qui montre, sans qu'il soit besoin d'y substituer les valeurs trouvées pour p et q, que r peut être une quantité *réelle*, *nulle* ou *imaginaire*.

D'où l'on conclut que, sous *la double condition*

$$A = C, \quad \cos\theta = \frac{B}{2A},$$

l'équation (1) représentera toujours un *cercle*, à moins que la courbe ne se réduise à *un point*, ou qu'elle ne représente *rien*.

Soit, pour exemple, l'équation numérique

$$3y^2 - 2xy + 3x^2 - y + x - 2 = 0;$$

et supposons la courbe rapportée à un système d'*axes obliques*, pour lesquels on ait

$$\cos\theta = -\frac{1}{3}, \quad \text{d'où} \quad \sin\theta = \frac{2}{3}\sqrt{2},$$

système qu'il faudrait préalablement construire.

Il en résulte

$$p = \frac{-1\times-\frac{1}{3}-1}{6\times\frac{8}{9}} = -\frac{1}{8}, \qquad q = \frac{+1\times-\frac{1}{3}+1}{6\times\frac{8}{9}} = \frac{1}{8},$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{64}+\frac{1}{64}-\frac{1}{32}\times-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = \frac{1}{12}\sqrt{102} = \frac{5}{6} \text{ à } \frac{1}{6} \text{ près.}$$

Ainsi, dans le système particulier d'axes qui vient d'être défini, l'équation proposée représente un CERCLE dont le centre a pour coordonnées $-\frac{1}{8}$, $+\frac{1}{8}$, et dont le rayon est $\frac{5}{6}$, à moins de $\frac{1}{6}$ près.

N. B. — Dans le cas d'axes *rectangulaires* ou d'un système d'axes OBLIQUES, qui ne satisferait pas à la condition exprimée par $\cos\theta = -\frac{1}{3}$, l'équation proposée représenterait une courbe offrant de l'analogie avec le cercle, ainsi que nous le verrons plus loin.

Usage des lieux géométriques.

88. Les notions générales que nous venons d'exposer sur les LIEUX GÉOMÉTRIQUES étant bien entendues, voyons le parti qu'on peut en tirer dans la résolution des problèmes de Géométrie *déterminés* ou *indéterminés*.

Considérons d'abord le cas où la question est *indéterminée*, et supposons que cette question revienne à *fixer la position d'un certain point* sur le plan d'une figure.

En rapportant le point cherché et les autres parties de la figure à deux axes, et désignant les coordonnées de ce point par x et y, on obtiendra par la traduction algébrique de

l'énoncé, une certaine relation, $F(x, y) = 0$, entre ces coordonnées et les quantités connues, laquelle sera dite l'ÉQUATION DU PROBLÈME; puis, si, conformément aux principes établis précédemment, on construit le *lieu géométrique* de cette équation, la série des points faisant partie de ce lieu géométrique satisfera à l'énoncé de la question; et les coordonnées de ces points représenteront *géométriquement* tous les systèmes de valeurs de x et de y, propres à vérifier l'équation

$$F(x, y) = 0.$$

89. Non-seulement les LIEUX GÉOMÉTRIQUES servent à résoudre les questions *indéterminées*, mais on peut encore en faire usage dans les problèmes *déterminés à deux inconnues*.

Admettons, en effet, que l'énoncé d'une question ait conduit aux deux équations

$$F(x, y) = 0, \quad F'(x, y) = 0,$$

x et y représentant les *coordonnées* d'un certain point rapporté à deux axes quelconques.

On pourrait, d'abord, éliminer x et y entre ces équations, puis construire tous les systèmes de valeurs que l'on obtiendrait; chacun des points ainsi déterminés satisferait à l'énoncé.

Mais, sans effectuer l'élimination qui, le plus souvent, conduit à des résultats compliqués, et n'est d'ailleurs pas toujours facile, on peut fixer la position de ces mêmes points.

En effet, l'équation $F(x, y) = 0$, considérée seule, re- FIG. 56.
présente une certaine ligne, LIEU de tous les points dont les coordonnées vérifient cette équation. Supposons-la construite, et soit LBH ce lieu géométrique.

De même, l'équation $F'(x, y) = 0$ est celle d'une SECONDE LIGNE dont tous les points sont tels, que leurs coordonnées vérifient cette équation; supposons cette ligne construite par rapport aux mêmes axes que la précédente, et représentée par KCI.

Il est évident que les points M, M', etc., où ces lignes *se*

rencontrent, sont ceux qui satisfont à l'énoncé, puisque leurs coordonnées forment des systèmes de valeurs de x et de y, qui vérifient en même temps les deux équations. Ainsi, les points M, M′, etc., sont autant de SOLUTIONS de la question dont ces équations sont la traduction algébrique. si toutefois on a eu pour objet de *fixer*, sur un plan, la *position d'un point* d'après certaines conditions.

Lorsque les inconnues x et y, au lieu d'exprimer des *distances de points* à des axes fixes, expriment des *lignes*, les coordonnées des points M, M′, etc., représentent les valeurs géométriques de ces lignes.

En substituant ainsi les *intersections de deux lieux géométriques* à l'élimination entre leurs équations, on parvient souvent à des constructions simples et élégantes du problème. La suite de ce chapitre nous en fournira plusieurs exemples.

90. Nous nous bornerons, pour le moment, à faire l'application de ces principes à un problème traité dans l'INTRODUCTION, et qui a fait l'objet des n°s 20 et 21.

FIG. 6 et 7. Reprenons, à cet effet, les deux équations obtenues par la *première méthode* d'application de l'Algèbre à la Géométrie, savoir :

$$(1) \qquad (b-x)^2+(c-y)^2=r^2,$$

$$(2) \qquad a(x^2+y^2)=m^2(a-2b+2x);$$

et observons d'abord que ces équations seraient celles qu'on trouverait en rapportant le point inconnu D à deux axes rectangulaires dont l'un serait AB pris pour axe des x, et l'autre une perpendiculaire élevée au point A.

Cela posé, au lieu d'éliminer x et y entre ces équations qui conduisent, ainsi que nous l'avons vu, à des résultats très-compliqués, tâchons de construire les *lieux géométriques* qu'elles représentent.

LA PREMIÈRE est évidemment celle du *cercle donné*; car CD ou r étant le rayon, b et c ou AF et CF sont les coordonnées du centre.

Quant à LA SECONDE, qui peut se transformer ainsi,

$$x^2+y^2-2\frac{m^2}{a}x=m^2-2b.\frac{m^2}{a},$$

ou bien encore

$$\left(x-\frac{m^2}{a}\right)^2+y^2=\frac{m^4}{a^2}+m^2-2b.\frac{m^2}{a},$$

elle représente (n° 85) un *cercle* dont le centre est sur l'axe des x, AB, en un point K pour lequel on a

Fig. 7.

$$AK=\frac{m^2}{a},$$

et qui a pour rayon

$$r'=\sqrt{\frac{m^4}{a^2}+m^2-2b.\frac{m^2}{a}}.$$

Or, le triangle rectangle ACL donne

$$\overline{AL}^2 \quad \text{ou} \quad m^2=\overline{AC}^2-\overline{CL}^2,$$

ou bien

$$m^2=b^2+c^2-r^2;$$

ainsi l'on a

$$r'=\sqrt{\frac{m^4}{a^2}-2b.\frac{m^2}{a}+b^2+c^2-r^2}=\sqrt{\left(b-\frac{m^2}{a}\right)^2+c^2-r^2}.$$

D'ailleurs, $b-\frac{m^2}{a}$ est égal à KF; ce qui donne

$$\overline{KC}^2=c^2+\left(b-\frac{m^2}{a}\right)^2.$$

Donc enfin

$$r'=\sqrt{\overline{KC}^2-r^2}.$$

Mais si l'on mène du point K les tangentes KD et KD′ au cercle donné, on a évidemment

$$\overline{KD}^2=\overline{KD'}^2=\overline{KC}^2-r^2.$$

D'où l'on voit que ces deux tangentes donnent, non-seulement le rayon du second cercle, mais encore *les points où les deux circonférences se coupent*, c'est-à-dire ceux dont on demandait de fixer la position.

Il est remarquable que la *première méthode* employée pour résoudre la question, méthode que nous avons appelée *indirecte* (n° 43), conduise, par le secours des *lieux géométriques*, à la même construction que la *méthode générale*. Mais il faut un peu de réflexion et d'habitude pour découvrir ce rapprochement.

§ IV. — Application des théories précédentes a la résolution de diverses questions et au problème des tangentes.

Questions sur la ligne droite.

Fig. 57. **91.** Première question. — Rechercher *par l'analyse* les points d'intersection *deux à deux* des droites menées par les *sommets* A, B, C d'un triangle, et par les *milieux* F, E, D des côtés opposés. — Prouver que *ces trois médianes se coupent en un même point.*

Prenons deux axes rectangulaires AX, AY, dont l'un, celui des x, se confonde avec l'un des côtés AB du triangle, l'*origine* étant d'ailleurs placée au sommet A.

La question consiste à former les équations des droites AF, BE, CD, puis (n° 61) à éliminer x et y entre ces équations combinées deux à deux. Mais, auparavant, il est nécessaire d'établir les coordonnées des points A, B, C, D, E, F.

On a d'abord pour les coordonnées de A,

$$(y = 0, \quad x = 0);$$

soit $AB = c$; il en résulte pour celles de B,

$$(y = 0, \quad x = c);$$

posons d'ailleurs pour le point C,

$$(y = y', \quad x = x').$$

Maintenant, comme D, E, F sont les *milieux* de AB, AC, CB, on en déduit

$$AD = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}, \quad EI = \frac{CH}{2} = \frac{y'}{2}, \quad AI = \frac{AH}{2} = \frac{x'}{2},$$

$$FG = \frac{CH}{2} = \frac{y'}{2}, \quad GH = \frac{BH}{2} = \frac{c - x'}{2},$$

$$AG = x' + \frac{c - x'}{2} = \frac{c + x'}{2};$$

ce qui donne pour les coordonnées des points

$$D..... \quad \left(y = 0, \quad x = \frac{c}{2}\right),$$

$$E..... \quad \left(y = \frac{y'}{2}, \quad x = \frac{x'}{2}\right),$$

$$F..... \quad \left(y = \frac{y'}{2}, \quad x = \frac{c + x'}{2}\right).$$

Connaissant pour chacune des droites AF, BE, CD, les coordonnées de deux de ses points, nous pourrions obtenir son ÉQUATION en substituant dans la formule (5) du n° 57,

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'),$$

à la place de x', y', x'', y'', les valeurs correspondantes; mais il est plus convenable d'opérer de la manière suivante :

Comme AF passe par l'origine, son équation est de la forme

$$y = ax;$$

et puisque cette droite passe par le point F, ou $\left(\frac{y'}{2}, \frac{c+x'}{2}\right)$, on a la relation particulière

$$\frac{y'}{2} = a\left(\frac{c+x'}{2}\right), \quad \text{d'où} \quad a = \frac{y'}{c+x'};$$

ainsi l'équation de AF est

$$y = \frac{y'}{c+x'}x. \tag{1}$$

La droite BE passant par le point B, ou $(0, c)$, son équation est (n° 58) de la forme

$$y = a'(x - c).$$

Mais, comme cette même droite passe par le point E, ou $\left(\frac{y'}{2}, \frac{x'}{2}\right)$, on a la relation

$$\frac{y'}{2} = a'\left(\frac{x'}{2} - c\right), \quad \text{d'où} \quad a' = \frac{y'}{x' - 2c};$$

donc l'équation de BE est

$$y = \frac{y'}{x' - 2c}(x - c). \tag{2}$$

On trouverait de même pour CD,

$$y = \frac{y'}{2x' - c}(2x - c). \tag{3}$$

Il reste actuellement à combiner les équations (1), (2) et (3).

D'abord, on déduit des deux premières,

$$\frac{y'}{c+x'} \cdot x = \frac{y'}{x' - 2c}(x - c),$$

équation qui, étant résolue, donne

$$x = \frac{c + x'}{3}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (1), on trouve

$$y = \frac{y'}{3}.$$

Puis, les équations (1) et (3) donnent

$$\frac{y'}{c + x'} \cdot x = \frac{y'}{2x' - c}(2x - c),$$

ou, résolvant,

$$x = \frac{c + x'}{3}, \text{ et par conséquent, } y = \frac{y'}{3}.$$

D'où l'on voit que les coordonnées du point d'intersection des deux droites AF, BE, sont *identiques* avec celles du point d'intersection de AF et CD.

Ainsi, CES TROIS DROITES SE COUPENT EN UN MÊME POINT.

Si du point O commun à ces trois droites, on abaisse l'ordonnée OP, les deux triangles semblables DCH, DOP donnent

$$\text{OP} : \text{CH} :: \text{DO} : \text{DC}; \quad \text{mais on a} \quad \text{OP} = \frac{1}{3}y' = \frac{\text{CH}}{3};$$

donc aussi

$$\text{DO} = \frac{\text{DC}}{3}.$$

Le point O se nomme, en STATIQUE, le *centre de gravité* du triangle.

FIG. 58. 92. En réfléchissant sur l'analyse précédente, on reconnaît aisément que les calculs sont les mêmes, quelle que soit l'inclinaison des axes. Ils deviennent beaucoup plus simples lorsqu'en conservant AB pour axe des x, on prend pour celui des ordonnées une droite AY *parallèle* à CD, ce qui est permis, puisque la droite CD est connue de position.

Dans ce cas, il est évident que l'abscisse x' du point C est égale à AD ou $\frac{c}{2}$, d'où $c = 2x'$; et les équations (1), (2), (3) deviennent, savoir :

L'équation de la droite AF,

$$y = \frac{y'}{3x'}\,x;$$

celle de la droite BE,

$$y = -\frac{y'}{3x'}\,(x - 2x');$$

et celle de la droite CD,

$$x = x'.$$

Cela posé, combinons cette dernière équation avec la première; il en résulte

$$y = \frac{y'}{3}.$$

En la combinant avec la seconde, on trouve encore

$$y = \frac{y'}{3}.$$

Ainsi, les coordonnées des *points d'intersection* de CD et de AF, comme de CD et de BE, sont

$$x = x', \quad y = \frac{y'}{3} = \frac{DC}{3}.$$

On voit par là combien le choix des axes peut influer sur la simplicité des calculs.

93. SECONDE QUESTION. — *Déterminer les points d'intersection deux à deux des perpendiculaires abaissées des trois sommets du triangle* ABC, *sur les côtés opposés.* — Démontrer que *ces perpendiculaires se coupent en un même point* O. FIG. 59.

On conçoit qu'ici il doit y avoir de l'avantage à supposer les axes RECTANGULAIRES, puisqu'il faut faire entrer en considération la relation de perpendicularité de deux droites (*voir* le n° 64).

Prenons encore pour axe des *abscisses* la ligne AB, et pour axe des *ordonnées* la perpendiculaire élevée au sommet A.

En désignant toujours par c la distance AB ou l'abscisse du point B, et par x', y' les coordonnées du point C, on a d'abord pour l'équation de CD parallèle à l'axe des y,

(1) $$x = x'.$$

Avant de rechercher les équations de AF et de BE, nous commencerons par déterminer celles des droites CB, AC, auxquelles elles sont perpendiculaires.

Or, la droite CB passant par les deux points (y', x') et $(0, c)$, son équation est (n° 57)

$$y - y' = \frac{y'}{x' - c}(x - x').$$

Celle de la droite AC qui passe par l'origine et par le point (x', y'), est

$$y = \frac{y'}{x'} x.$$

Cela posé, AF passant par l'origine a une équation de la forme

$$y = a' x;$$

et comme elle est perpendiculaire à CB, on a (n° 64) la relation

$$aa' + 1 = 0 \quad \left(a \text{ ayant pour valeur } \frac{y'}{x' - c}\right);$$

d'où l'on déduit

$$a' = -\frac{1}{a} = \frac{c - x'}{y'}.$$

Ainsi l'équation de AF est

$$y = \frac{c - x'}{y'} \cdot x. \tag{2}$$

La droite BE étant assujettie à passer par le point B ou $(0, c)$, on a pour son équation,

$$y = m'(x - c);$$

et puisqu'elle est perpendiculaire à AC, on doit avoir la relation

$$mm' + 1 = 0 \quad \left(m \text{ ayant pour valeur } \frac{y'}{x'}\right);$$

d'où l'on déduit

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{x'}{y'}.$$

Donc enfin l'équation de BE est

$$y = -\frac{x'}{y'}(x - c). \tag{3}$$

Maintenant, si l'on combine les équations (1) et (2), on trouve

$$x = x', \quad y = \frac{c - x'}{y'} \cdot x'.$$

Combinant de même les équations (1) et (3), on obtient

$$x = x', \quad y = -\frac{x'}{y'}(x' - c) = \frac{c - x'}{y'} \cdot x'.$$

Donc les coordonnées du point d'intersection des droites CD, AF sont les mêmes que celles du point d'intersection des droites CD, BE; ainsi CES TROIS DROITES SE COUPENT EN UN MÊME POINT.

94. Nous indiquerons comme exercice se rattachant aux questions qui viennent d'être traitées, les trois suivantes :

Démontrer par l'analyse :

1°. Que *les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle concourent en un même point;*

2°. Que *ce point et les points de rencontre qui se rapportent aux deux premières questions sont tous les trois placés sur une même droite;*

3°. Que *les trois bissectrices des angles d'un triangle concourent en un même point.*

La *première* et la *troisième* de ces questions offrent un rapprochement remarquable avec celles du cercle *circonscrit* et du cercle *inscrit* au triangle donné.

Questions sur le cercle.

95. PREMIÈRE QUESTION. — Rechercher par l'analyse les conditions qui expriment que deux circonférences de cercle *se coupent, se touchent,* ou *n'ont aucun point commun.*

Soient O, O′ les centres de deux circonférences de cercle, FIG. 60. r, r' leurs rayons, et $OO' = d$ la distance des centres.

Prenons pour axe des x la ligne des centres, et pour axe des y la perpendiculaire OY élevée par le point O.

Le cercle dont le rayon est r, étant rapporté à son *centre* et à deux axes RECTANGULAIRES, on a (n° 74) pour l'équation

de ce cercle,

$$y^2 + x^2 = r^2. \tag{1}$$

Celle du second cercle, dont le centre a pour coordonnées $p = d$, $q = 0$, est (n° 70)

$$y^2 + (x - d)^2 = r'^2. \tag{2}$$

Cela posé, pour exprimer que les deux circonférences de cercles *se coupent*, et obtenir leurs points d'intersection, il faut (n° 61) établir que leurs équations ont lieu en même temps, et éliminer x, y entre ces équations.

A cet effet, retranchons l'équation (2) de l'équation (1); il vient

$$2dx - d^2 = r^2 - r'^2;$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{r^2 - r'^2 + d^2}{2d}.$$

Cette valeur, portée dans l'équation (1), donne

$$y = \pm \frac{1}{2d} \sqrt{4d^2r^2 - (r^2 - r'^2 + d^2)^2}.$$

Discussion. — L'inspection seule de ces valeurs prouve d'abord que, dans l'hypothèse où la quantité sous le radical de la valeur de y étant *positive*, les valeurs de x, y sont *réelles*, et où par conséquent *les circonférences ont deux points communs*, dans cette hypothèse, dis-je, les deux points d'intersection ont *une même abscisse* OP, mais *deux ordonnées égales et de signes contraires*.

Donc, toutes les fois que deux circonférences se coupent, *la ligne des centres est perpendiculaire à la corde commune, et la divise en deux parties égales*.

Maintenant, afin de savoir quand y sera *réel* ou *imaginaire*, nous ferons subir à l'expression ci-dessus une transformation.

La quantité sous le radical étant la *différence de deux carrés*, peut être décomposée dans le produit

$$(2dr + r^2 + d^2 - r'^2)(2dr - r^2 - d^2 + r'^2);$$

mais chacun des deux facteurs entre parenthèses étant lui-même la *différence* de deux carrés

$$(r + d)^2 - r'^2 \quad \text{et} \quad r'^2 - (r - d)^2,$$

on a pour le premier,

$$(r+d+r')(r+d-r'),$$

et pour le second,

$$(r'+r-d)(r'-r+d).$$

Donc, enfin, la valeur y devient

$$y=\pm\frac{1}{2d}\sqrt{(r+r'+d)(r+d-r')(r+r'-d)(r'+d-r)}.$$

Sous cette forme, comme le premier facteur soumis au radical est essentiellement *positif*, on voit que y sera *réel* tant que les trois autres seront positifs, ou l'un deux positif et les deux autres négatifs.

Mais cette dernière circonstance ne peut jamais exister, car dès qu'un de ces trois facteurs est *négatif*, les deux autres sont évidemment *positifs*.

Par exemple,

$$r+d-r'<0 \quad \text{revient à} \quad r+d<r',$$

et donne nécessairement

$$r<r' \quad \text{et} \quad d<r';$$

donc

$$r'-r+d \quad \text{et} \quad r'-d+r$$

sont *positifs*.

Même raisonnement pour le cas où l'on aurait

$$r+r'-d<0 \quad \text{ou} \quad r'+d-r<0.$$

A plus forte raison, les trois facteurs ne sauraient être *négatifs à la fois*.

Ainsi, il ne peut seprésenter que *deux* cas :

Ou les trois facteurs sont *positifs* à la fois, et dans ce cas, y est *réel;* donc *deux circonférences se coupent toutes les fois que l'on a*

$$r+d>r', \quad r+r'>d, \quad r'+d>r;$$

c'est-à-dire *chacune des trois quantités*, les rayons et la distance des centres, *moindre que la somme des deux autres;*

Ou bien, l'un des trois facteurs est *négatif* et les deux autres *positifs;* dans ce cas, y est *imaginaire* et il n'y a pas de point d'intersection : ainsi *deux circonférences n'ont*

aucun point commun, lorsque l'une des inégalités ci-dessus a lieu dans un ordre *inverse*.

Il peut arriver que l'on ait

$$r+d-r'=0, \quad \text{ou} \quad r+r'-a=0, \quad \text{ou} \quad r'+d-r=0;$$

c'est-à-dire

$$r+d=r', \quad \text{ou} \quad r+r'=d, \quad \text{ou} \quad r'+d=r.$$

Dans ces différents cas, les deux valeurs de y se réduisent à 0, et les deux circonférences n'ont plus qu'*un point commun*, lequel est nécessairement placé sur la ligne des centres, puisque son ordonnée est *nulle*.

Donc, *deux circonférences de cercle se touchent toutes les fois que la distance des centres est égale à la somme ou à la différence des rayons*.

Ces résultats sont conformes aux théorèmes établis en Géométrie sur les intersections et les contacts de deux circonférences.

Cas particuliers. — Soit $d=0$, auquel cas les deux circonférences sont *concentriques;* les valeurs de x et de y deviennent

$$x=\frac{r^2-r'^2}{0} \quad \text{et} \quad y=\sqrt{\frac{-(r^2-r'^2)^2}{0}},$$

expressions de *forme infinie*.

Ce résultat, qui exprime que les deux circonférences *ne peuvent alors avoir aucun point commun*, offre quelque analogie avec celui qu'on a obtenu au n° 64, dans le cas où deux droites sont *parallèles*.

Si l'on avait en même temps

$$d=0 \quad \text{et} \quad r=r',$$

les valeurs de x et de y se réduiraient à

$$x=\frac{0}{0}, \quad y=\frac{0}{0},$$

signes ordinaires de l'*indétermination*.

En effet, dans ce cas, les deux circonférences *se confondent* et ont une *infinité* de *points communs*.

96. Seconde question. — *Faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés*.

Toutes les fois que l'on connaît la position du *centre* d'un

cercle sur un plan, et la *longueur de son rayon*, les quantités *constantes* p, q, r, qui entrent dans l'équation

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2,$$

doivent être regardées comme données *à priori*; et le cercle est complétement déterminé par cette équation.

Mais on peut, comme pour la *ligne droite*, se proposer de déterminer une circonférence de cercle qui satisfasse à certaines conditions, comme celles de *passer par des points donnés*, d'être *tangente* à une ou plusieurs droites, à une ou plusieurs circonférences, etc.: dans ce cas, p, q, r sont des *constantes indéterminées* dont les valeurs dépendent de ces diverses conditions; et comme les indéterminées sont au nombre de *trois*, il s'ensuit que l'on peut imposer à une circonférence *trois* conditions différentes, celles, par exemple, de PASSER PAR TROIS POINTS DONNÉS.

Soient en général (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') trois points donnés sur un plan par rapport à deux axes rectangulaires, et appelons p, q, r les coordonnées du centre et le rayon; son équation sera de la forme

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2, \tag{1}$$

p, q, r étant des quantités *qu'il s'agit de déterminer*.

Or, puisque chacun des trois points donnés se trouve sur la circonférence, on doit avoir les relations

$$(x'-p)^2+(y'-q)^2=r^2,$$
$$(x''-p)^2+(y''-q)^2=r^2,$$
$$(x'''-p)^2+(y'''-q)^2=r^2;$$

et la question est ramenée à éliminer p, q, r entre ces relations, pour les reporter ensuite dans l'équation (1).

En développant, puis soustrayant successivement la seconde et la troisième relation de la première, on trouve

$$x'^2-x''^2+y'^2-y''^2-2p(x'-x'')-2q(y'-y'')=0, \tag{2}$$
$$x'^2-x'''^2+y'^2-y'''^2-2p(x'-x''')-2q(y'-y''')=0, \tag{3}$$

équations du premier degré en p, q, d'où l'on peut tirer facilement les valeurs de ces inconnues; après quoi, en les substituant dans la *première* des relations ci-dessus, on obtiendra la valeur correspondante de r.

Nous n'entrerons pas dans les détails de ces calculs qui n'offrent aucune difficulté réelle, et qui présenteraient d'ailleurs peu d'intérêt à cause de leur complication; mais nous allons tâcher de traduire en Géométrie les équations (2) et (3).

Chacune de ces équations, considérée seule, étant du *premier degré* par rapport aux quantités p et q qui expriment les coordonnées d'un point, représente (n° 79) une *ligne droite;* et si on les construit successivement par rapport aux mêmes axes, le *point d'intersection* (n° 61) de ces lignes sera le *centre du cercle demandé.*

Occupons-nous d'abord de l'équation (2); elle peut être mise sous la forme

$$q = -\frac{x' - x''}{y' - y''} \cdot p + \frac{y'^2 - y''^2 + x'^2 - x''^2}{2(y' - y'')},$$

ou bien encore

$$(4) \qquad q - \frac{y' + y''}{2} = -\frac{x' - x''}{y' - y''}\left(p - \frac{x' + x''}{2}\right).$$

FIG. 61. Cela posé, soient M, M′, M″ les points dont les coordonnées sont (x', y'), (x'', y''), (x''', y''').

L'équation de la droite MM′ est (n° 57)

$$(5) \qquad y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

D'un autre côté, les trapèzes MM′P′P, MM′R′R donnent, pour les coordonnées NQ, NS, du point N, *milieu* de MM′,

$$\mathrm{NS} = \frac{x' + x''}{2}, \quad \mathrm{NQ} = \frac{y' + y''}{2};$$

ainsi déjà, l'équation (4) est celle d'une droite passant par le point N.

En outre, si l'on compare les deux coefficients $\frac{y' - y''}{x' - x''}$ et $-\frac{x' - x''}{y' - y''}$ des équations (5) et (4), on voit qu'ils satisfont à la relation $aa' + 1 = 0$ qui exprime (n° 64) que deux droites sont *perpendiculaires* entre elles.

D'où l'on peut conclure que l'équation (4), qui n'est

autre chose que l'équation (2) transformée, représente la droite élevée par le point N *milieu* de MM', *perpendiculairement* à cette dernière ligne. Ainsi, sa construction est facile.

On reconnaîtra de même que l'équation (3) représente la *perpendiculaire* élevée au *milieu* N' de MM'' dont l'équation est

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Le centre du *cercle cherché* se trouve donc *déterminé de position ;* et la construction que nous venons d'en donner est précisément celle des éléments de Géométrie.

97. On parviendrait à des résultats plus simples en pre- Fig. 62
nant pour *origine* des coordonnées le point M, et pour *axe des abscisses* la droite MM', le point M'' ayant d'ailleurs une position quelconque.

Soient α la distance MM' ou l'abscisse du point M', α' et $6'$ les coordonnées du point M''.

On a encore pour l'équation du cercle,

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2. \tag{1}$$

Or, puisque le point M doit se trouver sur la circonférence, ses coordonnées $x = 0, y = 0$, doivent vérifier l'équation (1), et l'on a

$$p^2 + q^2 = r^2,$$

pour première relation entre les inconnues p, q, r.

D'un autre côté, le point M' ayant pour coordonnées α et 0, l'on doit avoir

$$(\alpha - p)^2 + q^2 = r^2,$$

ou, à cause de la relation précédente,

$$\alpha^2 - 2p\alpha = 0. \tag{2}$$

Enfin, les coordonnées α', $6'$ du point M'', devant aussi vérifier l'équation (1), on obtient

$$(\alpha' - p)^2 + (6' - q)^2 = r^2,$$

ou, d'après la même relation $p^2 + q^2 = r^2$,

$$\alpha'^2 - 2p\alpha' + 6'^2 - 26'q = 0. \tag{3}$$

Si, maintenant, on construit les *lieux géométriques* des

équations (2) et (3), leur point d'intersection sera le *centre du cercle cherché.*

L'équation (2) donnant

$$p = \frac{\alpha^2}{2\alpha}, \quad \text{ou} \quad p = \frac{\alpha}{2},$$

représente évidemment la *perpendiculaire* à MX, élevée par le *milieu* N de MM'.

Quant à l'équation (3), elle peut être mise sous la forme

$$q = -\frac{\alpha'}{6'}p + \frac{\alpha'^2 + 6'^2}{2 6'},$$

ou bien encore sous celle-ci,

$$q - \frac{6'}{2} = -\frac{\alpha'}{6'}\left(p - \frac{\alpha'}{2}\right),$$

et représente la droite élevée par le point N', dont les coordonnées sont $\frac{\alpha'}{2}, \frac{6'}{2}$, *perpendiculairement* à la droite MM'', dont l'équation est

$$y = \frac{6'}{\alpha'}x.$$

On reconnaît encore ici l'importance du choix des axes.

PROBLÈME DES TANGENTES.

Définition générale de la tangente à une courbe. Moyen analytique de fixer sa position en un point donné d'une courbe quelconque.

98. Commençons par fixer le véritable sens qu'on doit attacher au mot TANGENTE.

On définit, en Géométrie, la *tangente au cercle*, une droite qui n'a qu'*un point commun* avec la circonférence; mais il est aisé de voir que cette définition ne convient pas à toutes les courbes.

FIG. 63. Soit, en effet, une ligne telle que LN'NKMH. Si, en un point quelconque M, on mène une droite MNN', qui semble se trouver, par rapport à la partie KMH, dans la situation d'une *tangente* telle qu'elle vient d'être définie, cette droite peut être supposée n'avoir qu'*un point commun*

avec cette partie de la courbe; mais prolongée indéfiniment, elle passera par *d'autres points* N, N′, etc., de la courbe. Donc il ne serait pas exact de dire qu'elle n'a qu'un seul point commun avec LN′NKMH.

Il y a plus : une droite située dans le plan d'une courbe peut avoir un *seul* point commun avec cette courbe sans lui être *tangente* dans le sens attribué à ce mot.

Par exemple, la courbe $y^2 = 2x$, dont nous avons indi- Fig. 46.
qué la construction au n° 76, est telle que l'axe Ay est bien, par rapport à cette courbe, *dans la position d'une tangente;* mais il n'en est pas de même de l'axe des x qui n'a que le point A *commun avec elle*. La même chose aurait évidemment lieu pour toutes les droites menées parallèlement à AX par les différents points M, M′, N, N′, etc.

Pour avoir une définition qui puisse s'appliquer à toutes Fig. 64.
les courbes, il faut imaginer qu'une droite Ss ayant deux points M, m, communs avec la courbe, tourne autour de l'un de ces points, M par exemple, de manière à prendre les diverses positions SMms, S′M$m's'$, S″m''Ms''; on voit que, dans ce mouvement, le second point commun avec la courbe, qui était placé d'un côté du point M, en m, m', se trouve maintenant du côté opposé, en m''. Or, dans le passage de la *première* position, m, à la *troisième*, m'', il doit nécessairement en exister une, *intermédiaire*, où le point m vient à *se confondre* avec le point M; et c'est dans cette position, représentée par TMt, que la droite est dite une *tangente*.

On doit donc regarder *une tangente à la courbe comme une sécante dont deux des points d'intersection viennent à se réunir en un seul.*

99. Il n'est pas toujours nécessaire que le mouvement de la droite se fasse autour de l'un des points d'intersection; il peut souvent se faire *autour d'un point quelconque*. La droite peut même, dans certaines circonstances, se mouvoir *parallèlement* à elle-même.

Reprenons encore la courbe Fig. 46.

$$y^2 = 2x, \quad \text{d'où} \quad y = \pm\sqrt{2x}.$$

Comme, à chaque valeur de x positive, correspondent

deux valeurs de y *égales* et de *signes contraires*, il s'ensuit que toute parallèle à AY, menée à droite de cet axe, est une *sécante* qui a deux points communs avec la courbe; mais à mesure que x diminue, les distances M'N', MN, etc., entre ces points d'intersection, *diminuent;* et lorsqu'enfin on suppose $x = 0$, auquel cas la valeur de y devient $y = \pm 0$, les deux points d'intersection *se réunissent* au point A, et la droite AY est dite *tangente* à la courbe.

Fig. 47. On reconnaîtrait de même que, dans la courbe discutée au n° 77 et ayant pour équation

$$y^2 - x^2 = 4,$$

d'où, résolvant par rapport à x, on tire

$$x = \pm\sqrt{y^2 - 4},$$

la droite IK, parallèle à AX, et située à la distance $y = 2$, est une sécante dont les deux points d'intersection sont venus se réunir au point B.

Une courbe étant ordinairement regardée comme un *polygone* d'une *infinité* de côtés *infiniment petits* que l'on nomme LES ÉLÉMENTS de la courbe, ou comme la *trace* d'un point qui change à chaque instant de direction, on peut encore dire que la *tangente à une courbe est un des éléments de cette courbe, prolongé indéfiniment.* C'est ainsi qu'on l'envisage dans la haute analyse; mais ici nous la considérerons comme UNE SÉCANTE DONT DEUX POINTS D'INTERSECTION AVEC LA COURBE SE RÉUNISSENT EN UN SEUL; et c'est ce caractère que nous allons traduire en analyse.

Fig. 64. **100.** Prenons une sécante quelconque SM *ms* à la courbe M'MM'' rapportée à des axes RECTANGULAIRES OU OBLIQUES AX, AY; et désignons par x', y', les coordonnées du point M, par x'', y'', ou $x' + h$, $y' + k$, celles du point m.

L'équation de la droite Mm rapportée aux mêmes axes sera

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x'), \quad \text{ou} \quad y - y' = \frac{k}{h}(x - x');$$

le rapport $\frac{y'' - y'}{x'' - x'}$ ou $\frac{k}{h}$, qu'on appelle le COEFFICIENT D'INCLINAISON, OU COEFFICIENT ANGULAIRE, est la quantité qui doit fixer complétement la position de la sécante.

Concevons maintenant que la droite S M *ms tourne* autour du point M de manière que le point *m* se *rapproche continuellement* du point M; il est clair que, dans le mouvement, *h* et *k* *diminueront simultanément*, et que le *rapport* $\frac{h}{k}$ passera d'une manière *continue* par différents états de grandeur jusqu'à ce que le point *m* vienne tomber en M, avant que la sécante prenne une position telle que M*m''*. Lorsque la coïncidence aura lieu, la *sécante* prendra la POSITION-LIMITE M T; et, à ce moment, le *rapport* atteindra lui-même la LIMITE vers laquelle il aura sans cesse convergé.

D'où l'on peut conclure que l'équation de la *tangente* sera

$$y - y' = \text{LIM.}\ \frac{k}{h}(x - x');$$

c'est-à-dire que le *coefficient d'inclinaison dans l'équation de la tangente* est LIM. $\frac{k}{h}$; limite que l'on obtiendra d'ailleurs en faisant $x'' = x'$, $y'' = y'$ dans l'équation de la sécante, après que l'on aura exprimé toutefois que les points $[x', y']$, $[x'', y'']$ appartiennent à la courbe donnée.

C'est dans la détermination de cette LIMITE, pour chaque courbe, que consiste la solution du problème des tangentes.

De la tangente au cercle. — Propriétés qui s'y rattachent.

101. Soit d'abord un cercle rapporté à des axes RECTANGULAIRES, et à son *centre* comme *origine* des coordonnées.

On a pour son équation,

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{1}$$

Une sécante quelconque sera représentée par l'ensemble des trois relations

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x'), \tag{1}$$

$$x'^2 + y'^2 = r^2, \tag{2}$$

$$x''^2 + y''^2 = r^2; \tag{3}$$

mais si l'on retranche la seconde de la troisième, on a

$$x''^2 - x'^2 + y''^2 - y'^2 = 0$$

ou bien

$$(x''+x')(x''-x')+(y''+y')(y''-y')=0,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=-\frac{x''+x'}{y''+y'};$$

et, par suite, le système des trois relations (1), (2) et (3) peut être remplacé par celui des deux suivantes :

$$y-y'=-\frac{x''+x'}{y''+y'}(x-x'),$$

$$x'^2+y'^2=r^2.$$

Si, maintenant, on veut que x', y' soient les coordonnées du point de *contact* d'une tangente à la courbe, il suffit (n° 98) d'exprimer que le point $[x'', y'']$ vient à *se confondre* avec le point $[x', y']$, c'est-à-dire de poser

$$x''=x', \quad y''=y';$$

ce qui donne

$$\text{LIM.}\ \frac{y''-y'}{x''-x'}, \quad \text{ou} \quad \text{LIM.}\ \frac{k}{h}=-\frac{x'}{y'};$$

et l'équation de la sécante devient alors

$$y-y'=-\frac{x'}{y'}(x-x'). \tag{4}$$

Telle est l'équation DE LA TANGENTE AU CERCLE, pourvu que l'on y joigne la relation (2) qui exprime que le point (x', y') se trouve *sur la courbe*.

FIG. 65. Il est aisé de reconnaître *à posteriori* que l'équation (4) caractérise la *tangente au cercle* en un point M dont les coordonnées sont x' et y'.

En effet, tirons le rayon OM dont l'équation, par rapport aux mêmes axes, est

$$y=\frac{y'}{x'}x;$$

on voit que les deux *coefficients angulaires* $\frac{y'}{x'}$ et $-\frac{x'}{y'}$ sont liés par la relation $a.a'+1=0$.

Ainsi, la droite SMT représentée par l'équation (4) est *perpendiculaire* à l'extrémité du rayon OM ; donc elle est TANGENTE en ce point.

Lorsque les axes sont OBLIQUES, les calculs nécessaires

pour la détermination du *coefficient angulaire* de la tangente sont un peu plus compliqués.

L'équation du cercle est alors (n° 74), l'*origine* étant toujours placée au *centre*,

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = 0,$$

celle de la sécante conservant la forme

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x').$$

On a d'ailleurs pour les deux relations qui expriment que les points (x', y'), (x'', y'') sont sur la courbe,

$$y'^2 + x'^2 + 2x'y'\cos\theta = 0$$

et

$$y''^2 + x''^2 + 2x''y''\cos\theta = 0.$$

Retranchant ces deux égalités l'une de l'autre, on trouve

$$y''^2 - y'^2 + x''^2 - x'^2 + 2\cos\theta\,(x''y'' - x'y') = 0.$$

Mais, pour en déduire le *rapport* $\frac{y'' - y'}{x'' - x'}$ et, par suite, la LIMITE de ce *rapport*, il est nécessaire de *transformer* le facteur $x''y'' - x'y'$; ce qui se fait en lui ajoutant les deux termes, $-x''y' + x''y'$, qui se détruisent. Il vient ainsi

$$x''y'' - x'y' = x''(y'' - y') + y'(x'' - x'),$$

et l'égalité précédente se change en celle-ci,

$$y''^2 - y'^2 + x''^2 - x'^2 + 2\cos\theta\,[x''(y'' - y') + y'(x'' - x')] = 0,$$

d'où, en divisant par $x'' - x'$,

$$(y'' + y')\cdot\frac{y'' - y'}{x'' - x'} + (x'' + x') + 2\cos\theta\left(x''\cdot\frac{y'' - y'}{x'' - x'} + y'\right) = 0,$$

équation qui donne

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{(x'' + x' + 2y'\cos\theta)}{y'' + y' + 2x''\cos\theta};$$

et passant *à la limite*, ce qui revient à poser $x'' = x'$ et $y'' = y'$,

$$lim.\ \frac{y'' - y'}{x'' - x'},\quad \text{ou}\quad lim.\ \frac{k}{h} = -\frac{x' + y'\cos\theta}{y' + x'\cos\theta}.$$

Donc enfin, on a pour l'équation de la tangente,

$$y - y' = -\frac{x' + y'\cos\theta}{y' + x'\cos\theta}(x - x'),$$

en y joignant la relation nécessaire

$$x'^2+y'^2+2x'y'\cos\theta=0.$$

102. REMARQUE IMPORTANTE. En se reportant aux principes de l'Analyse algébrique, on reconnaît que les *coefficients angulaires*, $-\frac{x'}{y'}$, $-\frac{x'+y'\cos\theta}{y'+x'\cos\theta}$, ne sont autre chose que les *quotients de la division de la* DÉRIVÉE *prise par rapport à* x et en *signe contraire, par la* DÉRIVÉE *prise par rapport à* y, du premier membre de l'équation du cercle, mise préalablement sous la forme

$$x^2+y^2-r^2=0, \quad \text{ou} \quad x^2+y^2+2xy\cos\theta-r_1^2=0,$$

après qu'on y a remplacé les coordonnées *courantes* x et y par les coordonnées x' et y' *du point de contact*

On peut se rendre compte de ce fait d'une manière générale en observant :

Que, toutes les fois que l'équation de la courbe est de la forme

$$y=f(x),$$

y étant au premier degré, et $f(x)$ exprimant une *fonction entière* de x, qui, par conséquent, ne peut jamais devenir *infinie* pour des valeurs *finies* de x, *la limite du rapport* $\frac{k}{h}$ (h et k désignant les accroissements des deux variables x et y), a *pour valeur* $f'(x)$ ou la DÉRIVÉE de $f(x)$;

Et si l'équation de la courbe est de la forme

$$f(x,y)=0,$$

$f(x,y)$ représentant encore une expression *rationnelle* et *entière* en x et en y, *la limite du rapport* $\frac{k}{h}$ est égale à

$$-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)};$$

$f'_x(x,y)$ désignant la FONCTION DÉRIVÉE de $f(x,y)$, prise par rapport à x, et $f'_y(x,y)$ la fonction dérivée de $f(x,y)$, prise par rapport à y.

Comme l'équation de chacune des courbes dont nous nous occuperons dans les chapitres suivants, rentrera dans

l'une des deux *catégories* précédentes, nous pourrons, pour obtenir l'*équation de la tangente*, ou appliquer les raisonnements qui ont été faits pour le cercle, ou faire usage des règles de l'Analyse algébrique, relatives aux *dérivées*.

103. *Autre forme de l'équation de la tangente.* — Reprenons l'équation du cercle rapportée à son *centre* comme ORIGINE et à des axes RECTANGULAIRES, ainsi que l'équation de sa tangente,

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

et

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x'). \tag{2}$$

On peut, au moyen de la relation

$$x'^2 + y'^2 = r^2, \tag{3}$$

qui est intimement liée avec celle de la tangente, faire subir à cette dernière une simplification.

Chassant le dénominateur y' et transposant, on a

$$yy' + xx' = y'^2 + x'^2,$$

ou, à cause de la relation (3),

$$xx' + yy' = r^2, \tag{4}$$

équation qui ne diffère de l'équation (1) qu'en ce que les carrés x^2 et y^2 sont remplacés par les rectangles xx' et yy'; ce qui rend l'équation de la tangente facile à retenir.

Si l'on fait successivement $y = 0$ et $x = 0$, dans l'équation (4), on obtient FIG. 66.

$$x = \frac{r^2}{x'} \quad \text{et} \quad y = \frac{r^2}{y'}.$$

Ce sont évidemment l'*abscisse* OR du point de rencontre de la tangente avec l'axe des x, et l'*ordonnée* OR′ de son point de rencontre avec l'axe des y.

104. On nomme SOUS-TANGENTE dans une courbe, *la partie de l'axe des abscisses, comprise entre le pied de l'ordonnée du point de contact, et le point où la tangente rencontre cet axe.*

La sous-tangente est *géométriquement* représentée par PR; FIG. 66.

et si l'on veut obtenir son expression *analytique*, comme on a, d'après la figure,

$$PR = OR - OP,$$

il en résulte

$$PR = \frac{r^2}{x'} - x' = \frac{r^2 - x'^2}{x'} = \frac{y'^2}{x'},$$

à cause de la relation (3).

On obtient encore l'*expression de la sous-tangente* en faisant $y = 0$ dans l'équation (2), *non simplifiée*, de la tangente.

Il vient en effet, pour $y = 0$,

$$x - x' = \frac{y'^2}{x'},$$

expression dans laquelle $x - x'$ représente nécessairement l'*abscisse* OR du point où la tangente rencontre l'axe des x, *diminuée* de l'abscisse du point de contact, et, par conséquent, la distance PR.

C'est même le moyen général d'obtenir la *sous-tangente* dans toutes les courbes :

Tirez de l'équation non simplifiée de la tangente la valeur de $x - x'$, *qui correspond à* $y = 0$; vous avez ainsi *la valeur de la sous-tangente* avec le signe qui convient à la *position* du point R par rapport au pied P de l'ordonnée du point de contact, c'est-à-dire *positive* ou *négative* suivant que le point R est situé à *droite* ou à *gauche* du point P.

105. De la normale. — On appelle normale à une courbe la *perpendiculaire menée à la tangente par le point de contact*, et sous-normale *la distance du pied de l'ordonnée du point de contact, au point où la normale rencontre l'axe des* x.

Pour le *cercle* dont l'équation la plus simple est

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

l'équation de la tangente étant

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x'),$$

on a nécessairement pour l'équation de la *normale*, à rai-

son de la relation $aa' + 1 = 0$,

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x'),$$

ou, chassant le dénominateur et réduisant,

$$yx' = y'x,$$

équation d'*une droite passant par l'origine* (n° 52).

Quant à la *sous-normale*, il faut, pour obtenir son expression, chercher la valeur de $x - x'$ correspondante à $y = 0$ dans l'équation *non simplifiée* de la normale ; ce qui donne

$$x - x' = -\frac{x'y'}{y'} = -x',$$

expression *négative*, parce que la *distance* est, d'après la définition, comme pour la *sous-tangente*, comptée *à partir du pied de l'ordonnée du point de contact*.

Sa valeur *absolue* étant la même que celle de l'abscisse du point de contact, il en résulte bien, comme on l'a déjà reconnu, que *la normale au cercle passe par l'origine*.

Tangente au cercle menée par un point pris hors de la circonférence.

106. Proposons-nous maintenant de mener une *tangente au cercle* par un point N *situé hors de la circonférence ;* et désignons par α, 6 les coordonnées du point donné N, en conservant x', y' pour les coordonnées *inconnues* du point de contact. FIG. 66.

Puisque la tangente est assujettie à passer par le point $[\alpha, 6]$, son équation est (n° 58) de la forme

$$y - 6 = a(x - \alpha), \tag{1}$$

a, ou le *coefficient angulaire*, ayant pour expression $-\frac{x'}{y'}$; et il s'agit de déterminer x' et y' pour reporter leurs valeurs dans l'expression de a.

Or l'équation simplifiée de la tangente étant (n° 103)

$$xx' + yy' = r^2,$$

on a nécessairement la relation

$$\alpha x' + 6y' = r^2, \tag{2}$$

puisque cette droite doit passer par le point $[\alpha, 6]$.

D'ailleurs, le point $[x', y']$ se trouve sur la courbe $(x^2 + y^2 = r^2)$; ce qui donne une seconde relation

$$x'^2 + y'^2 = r^2; \tag{3}$$

les équations (2) et (3) peuvent donc servir à déterminer les inconnues x' et y'.

On tire de la relation (2)

$$y' = \frac{r^2 - \alpha x'}{6};$$

d'où, substituant dans la relation (3) et ordonnant par rapport à x',

$$(\alpha^2 + 6^2)\, x'^2 - 2 r^2 \alpha x' = r^2 \beta^2 - r^4,$$

ou, résolvant et simplifiant,

$$x' = \frac{r(r\alpha \pm \beta\sqrt{\alpha^2 + 6^2 - r^2})}{\alpha^2 + 6^2}.$$

Si l'on remplace x' par sa valeur dans l'expression de y' en x', il vient, toute réduction faite,

$$y' = \frac{r(r6 \mp \alpha\sqrt{\alpha^2 + 6^2 - r^2})}{\alpha^2 + 6^2}.$$

Donc,

$$a = -\frac{r\alpha \pm \beta\sqrt{\alpha^2 + 6^2 - r^2}}{r6 \mp \alpha\sqrt{\alpha^2 + 6^2 - r^2}}$$

(les deux signes *supérieurs* se correspondant ainsi que les signes *inférieurs*).

FIG. 66. Ce résultat prouve, 1° que par le point N on peut, en général, mener *deux tangentes;* 2° que le problème serait *impossible* si l'on avait

$$\alpha^2 + 6^2 < r^2,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{ON}^2 < r^2, \quad \text{ou} \quad \mathrm{ON} < r;$$

donc le point *donné ne peut pas être pris à l'intérieur du cercle.*

L'hypothèse $\alpha^2 + 6^2 - r^2 = 0$ réduirait la valeur de a à

$$a = -\frac{\alpha}{6};$$

et le point *donné* serait le *point de contact* lui-même.

Pour fixer *géométriquement* la position du point (x', y').

il faudrait construire les valeurs obtenues pour ces coordonnées; mais comme elles sont assez compliquées, on peut avoir recours aux *lieux géométriques* (n° 89).

107. Premier mode de construction. — Reprenons les équations Fig. 67.

$$\alpha x' + \beta y' = r^2, \tag{2}$$

$$x'^2 + y'^2 = r^2, \tag{3}$$

qui ont servi à déterminer x' et y'.

En retranchant la première de la seconde, on obtient

$$x'^2 - \alpha x' + y'^2 - \beta y' = 0, \tag{4}$$

équation qui peut être substituée à la première; et si l'on construit par rapport aux mêmes axes, chacune des équations (3) et (4) considérées comme renfermant deux variables x', y', *les points d'intersection des deux lieux géométriques* seront les points de contact demandés.

D'abord, l'équation (3), en tant que x' et y' sont ici des variables, représente le *cercle déjà construit*.

Quant à l'équation (4), qui est évidemment comprise dans l'équation générale du n° 85, comme elle peut être mise sous la forme

$$\left(x' - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y' - \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4},$$

elle représente *une circonférence de cercle* dont le *centre* a pour *coordonnées* $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, et qui a pour *rayon* $\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Or, si l'on joint le point O au point *donné* N, on a

$$\text{OL ou } \frac{\text{OP}}{2} = \frac{\alpha}{2}, \quad \text{IL} = \frac{\text{NP}}{2} = \frac{\beta}{2},$$

d'où

$$\text{OI} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Donc, la *circonférence décrite sur* ON *comme diamètre*, est le *lieu géométrique de l'équation* (4).

Ainsi les points M, M', *où les deux circonférences se coupent*, sont les points de contact, qu'on joint au point N pour obtenir les *tangentes demandées*.

Il est à remarquer que cette construction est précisément celle qu'on donne dans les *Éléments* de Géométrie.

Fig. 68. 108. Second mode de construction. — En opérant directement sur les équations (2) et (3), on est conduit à une propriété très-remarquable.

L'équation (3) représente toujours le *cercle donné*.

L'équation (2), étant du premier degré en x', y', représente une *ligne droite;* et comme les points où elle doit rencontrer la circonférence ne sont autre chose que les *points de contact*, il s'ensuit que cette droite peut être considérée comme la ligne de jonction des points de contact.

Afin d'en fixer la position, faisons successivement dans l'équation (2),

$$y' = 0, \quad x' = 0;$$

il vient

$$\text{pour } y' = 0, \quad x' = \frac{r^2}{\alpha};$$

$$\text{pour } x' = 0, \quad y' = \frac{r^2}{6}.$$

Le premier point $y' = 0$, $x' = \frac{r^2}{\alpha}$ est le point B où la droite rencontre l'axe des x, et il s'obtient par la construction d'une troisième *proportionnelle*.

Le second point $x' = 0$, $y' = \frac{r^2}{6}$ est le point C où la droite coupe l'axe des y, et s'obtient par une construction analogue.

La *droite de jonction des points de contact* est donc la ligne BC.

Or c'est ici que se présente la propriété que nous avons annoncée :

La valeur $x' = \frac{r^2}{\alpha}$, qui correspond à $y' = 0$, est *indépendante* de l'ordonnée 6 du point N par lequel on veut mener les deux tangentes;

D'où il suit que si, par un autre point quelconque N' de la ligne indéfinie LNL' parallèle à OY, on mène des tan-

gentes au cercle donné, la droite qui joint les *deux points de contact* rencontre l'axe des x au même point B.

Et, en effet, en appelant α et $6'$ les coordonnées du point N', on aurait pour l'équation de la droite M'' M''',

$$\alpha x' + 6'y' = r^2,$$

qui, pour $y' = 0$, donnerait encore

$$x' = \frac{r^2}{\alpha} = \text{OB}.$$

Observons d'ailleurs que, l'axe OX étant une droite menée à volonté dans le plan du cercle donné, la droite LL', qui lui est *perpendiculaire*, peut elle-même être regardée comme tracée d'une manière quelconque dans ce plan, puisqu'on pourrait toujours, après avoir tracé cette dernière ligne *arbitrairement*, prendre pour axe des x, la perpendiculaire abaissée du *centre* sur cette ligne.

On arrive ainsi au THÉORÈME SUIVANT :

Si, des différents points d'une droite quelconque et indéfinie LL', *on mène des tangentes à un cercle, toutes les droites qui joignent les points de contact des deux tangentes partant d'un même point, se réunissent en* UN MÊME POINT B, *qui se trouve placé sur la perpendiculaire abaissée du centre* O *sur la droite* LL'.

Le point B est ce qu'on nomme le POLE de la droite LL', qui, à son tour, est appelée la POLAIRE du point B (*).

N. B. — Il résulte de l'expression $x' = \frac{r^2}{\alpha} = r \cdot \frac{r}{\alpha}$, que toutes les fois que la droite LL' est *extérieure* au cercle, auquel cas on a $\alpha > r$, le point B est *intérieur*.

Si, au contraire, la droite est *sécante* à la courbe, comme on a alors $\alpha < r$, d'où $\frac{r^2}{\alpha} > r$, le point de concours des lignes qui joignent les points de contact est *extérieur*.

(*) On trouve, dans le Traité de *Géométrie élémentaire* de M. Vincent, un grand nombre de propriétés fort curieuses du *pôle* et de la *polaire* d'un cercle donné.

Problème sur les lieux géométriques.

FIG. 69. **109.** Nous terminons ce chapitre par la résolution d'un problème sur les lieux géométriques.

Étant donnés deux points A *et* B, *trouver un autre point* M *tel que, si on le joint aux points* A *et* B, *l'angle* AMB *formé par ces deux lignes de jonction soit égal à un angle donné* V.

Prenons pour axes la ligne AB et la perpendiculaire élevée par le point K, milieu de AB.

Nommons d'ailleurs $2x'$ la distance AB.

La droite BM, assujettie à passer par le point B, dont les coordonnées sont $y = 0$, $x = x'$, a pour équation

$$y = a\,(x - x'). \tag{1}$$

On a de même pour l'équation de la droite AM, assujettie à passer par le point $[y = 0,\ x = -x']$,

$$y = a'\,(x + x'); \tag{2}$$

et comme, d'après l'énoncé, ces deux droites doivent former un angle donné V, les quantités a et a' sont (n° 62) liées entre elles par la relation

$$\frac{a - a'}{1 + aa'} = \text{tang V}. \tag{3}$$

En donnant à a une valeur *arbitraire*, ce qui fixerait la position de la droite BM, on tirerait de l'équation (3) une valeur correspondante pour a', qui déterminerait aussi la position de la droite AM ; et le point d'intersection de ces deux droites serait une réponse à la question qui, par sa nature, est *indéterminée*, puisque l'on n'a que *trois* relations entre *quatre* inconnues x, y, a et a'.

Mais si, entre les équations (1), (2) et (3), qui existent en même temps pour un point quelconque M du *lieu géométrique*, on ÉLIMINE a et a', l'équation résultante en x et y sera nécessairement l'ÉQUATION DU LIEU GÉOMÉTRIQUE, puisqu'elle exprimera une relation entre les coordonnées de chacun de ses points.

Or, pour effectuer cette élimination, il suffit de rempla-

cer dans l'équation (3) les quantités a et a' par leurs valeurs tirées des équations (1) et (2). Il vient, par la substitution,

$$\frac{\frac{y}{x-x'}-\frac{y}{x+x'}}{1+\frac{y^2}{x^2-x'^2}}=\operatorname{tang} V;$$

d'où, chassant les dénominateurs et réduisant,

$$x^2+y^2-\frac{2x'}{\operatorname{tang} V}\cdot y-x'^2=0, \tag{4}$$

équation d'une circonférence de cercle (n° 85), dont le *centre* $[p, q,]$, a pour coordonnées $\left(p=0,\ q=\frac{x'}{\operatorname{tang} V}\right)$, et qui a pour rayon

$$r=\frac{x'}{\operatorname{tang} V}\cdot\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 V}.$$

Mais, comme l'hypothèse $y=0$, donne

$$x^2-x'^2=0,$$

d'où

$$x=\pm x',$$

et qu'ainsi la circonférence se trouve assujettie à passer par les points A et B, il est clair que le cercle sera déterminé dès qu'on aura construit sur OY l'expression

$$q=\frac{x'}{\operatorname{tang} V},$$

qui fixe la position du centre.

Pour construire cette expression, *faites au point* B *un angle* ABL *égal à l'angle donné* V; *puis, élevez en ce même point,* BO *perpendiculaire à* BL. Le point O d'intersection avec KY sera le centre du cercle cherché.

Car le triangle rectangle OBK donne

$$OK=BK\times\operatorname{tang} OBK=BK\times\cot KBL=\frac{x'}{\operatorname{tang} V}.$$

Cette construction est précisément celle qu'on donne dans les *Éléments* de Géométrie, pour *décrire sur une droite un segment de cercle capable d'un angle donné.*

Discussion. — Tant que l'angle V sera aigu, $\frac{x'}{\operatorname{tang} V}$ sera *positif;* et le centre du cercle sera situé au-dessus de AB.

FIG. 69. Mais si l'angle V est obtus, tang V est *négatif;* par suite, $\frac{x'}{\text{tang V}}$ est aussi *négatif*, et le centre se trouve placé au-dessous de AB.

Soit $V = 90°$, d'où

$$\text{tang V} = \infty \quad \text{et} \quad \frac{x'}{\text{tang V}} = 0.$$

L'équation (4) se réduit alors à

$$x^2 + y^2 = x'^2$$

et représente une circonférence décrite sur AB comme diamètre.

Soit encore $V = 0$, d'où

$$\text{tang V} = 0,$$

les expressions

$$q = \frac{x'}{\text{tang V}}, \quad r = \frac{x'}{\text{tang V}}\sqrt{1 + \text{tang}^2 \text{V}},$$

deviennent *infinies;* et le cercle lui-même, d'une *grandeur infinie*.

On doit d'ailleurs observer, dans le cas général, que tous les points de la partie *supérieure* AMB de la circonférence donnée par l'équation (4), satisfont à l'énoncé, et que, pour la partie *inférieure* AM'B, ce n'est pas l'angle AM'B, mais son *supplément* AM'H qui est égal à l'angle donné.

On a, en effet, pour cet angle,

$$\text{AM'H} = \text{M'AB} + \text{ABM'},$$

d'où

$$\text{tang AM'H} = \frac{\text{tang M'AB} + \text{tang ABM'}}{1 - \text{tang M'AB . tang ABM'}}.$$

Mais

$$\text{tang M'AB} = -\text{tang GAX} = -a', \quad \text{tang ABM'} = a;$$

donc

$$\text{tang AM'H} = \frac{-a' + a}{1 + aa'} = \frac{a - a'}{1 + aa'}.$$

Ainsi, c'est bien pour cet angle AM'H que l'équation (3) est satisfaite.

110. REMARQUE GÉNÉRALE sur les *problèmes indéterminés*.

En réfléchissant sur la manière dont la question précédente a été résolue, on voit que, pour obtenir *l'équation d'un lieu géométrique*, il faut commencer par établir des

équations entre les coordonnées x et y d'un quelconque de ses points, et d'autres quantités qui varient aussi avec la position de ce point.

Le nombre de ces équations doit être *moindre d'une unité* que le nombre des variables, y compris x et y; et ces équations une fois formées, on élimine les variables autres que x et y. L'équation résultante est *l'équation demandée*, puisqu'elle exprime une relation entre les coordonnées d'un point quelconque du *lieu géométrique*, et des *quantités connues*.

Mais il importe de choisir convenablement les axes auxquels le LIEU GÉOMÉTRIQUE doit être rapporté, afin d'obtenir des constructions simples et faciles.

En général, les équations se réduisent, 1° à celles de deux *lignes droites* ou de deux *circonférences* dont les points d'intersection appartiennent au *lieu géométrique* cherché, ces équations renfermant, outre les coordonnées x et y, deux autres quantités qui varient avec la position du point; 2° et à une relation entre ces deux dernières variables, immédiatement fournie par l'énoncé.

S'il arrive qu'il y ait *trois* ou *quatre* variables à éliminer, on doit avoir alors *une* ou *deux* relations de plus.

Ces observations trouvent leur application dans la résolution des questions suivantes que nous proposons comme *exercices :*

1°. Étant donnés deux points, trouver le *lieu géométrique* des points tels, que la SOMME ou la DIFFÉRENCE des carrés des distances de chaque point de ce lieu aux deux points donnés soit égale à un carré donné;

2°. Un cercle et un point étant donnés sur un plan, si par ce point on tire autant de droites qu'on voudra, et que par les deux points d'intersection de chaque droite avec la circonférence, on mène des tangentes, on demande le *lieu géométrique* des points de rencontre de ces tangentes considérées deux à deux.

CHAPITRE II.

§ I. TRANSFORMATION DES COORDONNÉES. — § II. NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES COURBES DU SECOND DEGRÉ. — § III. RÉDUCTION, PAR LA TRANSFORMATION DES COORDONNÉES, DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ A DEUX VARIABLES.

§ I. — TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

111. L'une des questions les plus importantes de la géométrie analytique est celle de la TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

Si l'on jette les yeux sur les équations de la ligne droite et du cercle, et que l'on considère ces lignes dans les diverses situations qu'elles peuvent avoir par rapport à deux axes, on reconnaît qu'une même ligne peut être représentée par une équation *plus ou moins simple*, selon sa position à l'égard des axes et suivant que les axes eux-mêmes sont *rectangulaires* ou *obliques*.

Ainsi, l'équation la plus générale de la ligne droite étant

$$y = ax + b,$$

celle d'une droite passant par l'origine est

$$y = ax,$$

a ayant, dans l'une et l'autre de ces équations, une acception *différente*, selon que les axes sont *rectangulaires* ou *obliques*;

Et l'équation d'une parallèle à l'un des axes est

$$x = a \quad \text{ou} \quad y = b.$$

De même, l'équation la plus générale du cercle étant

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + 2\,(x-p)\,(y-q)\cos\theta = r^2,$$

celle du cercle rapporté à deux axes *rectangulaires* menés par son *centre*, est

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

On conçoit donc que, lorsqu'une courbe est déjà *fixée*

de position sur un plan par le moyen d'une équation, si l'on s'aperçoit que cette courbe est dans une situation *plus simple* par rapport à deux nouvelles droites que par rapport aux axes primitifs, il est bon, pour faciliter la recherche de ses propriétés, de chercher à déduire l'équation de la courbe rapportée aux *nouveaux* axes, de l'équation de la même courbe rapportée aux *premiers*.

Tel est le but qu'on se propose dans le problème de la transformation des coordonnées, lequel peut s'énoncer ainsi :

Étant donnée l'équation d'une courbe rapportée à deux axes quelconques, trouver l'équation de la même courbe rapportée à deux nouveaux axes.

112. La transformation la plus simple est celle qui a pour objet de passer de l'équation d'une courbe rapportée à un système d'axes *rectangulaires* ou *obliques*, à l'équation de la même courbe rapportée à un système d'axes *parallèles* aux anciens.

Soient AX, AY, deux droites par rapport auxquelles une courbe M'MM'' est fixée de position par le moyen de l'équation FIG. 70.

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

et A'X', A'Y' deux autres droites respectivement *parallèles* aux premières.

Appelons x', y' les nouvelles coordonnées d'un point quelconque M de la courbe, a, b les coordonnées de la nouvelle origine A' rapportée aux anciens axes, coordonnées qu'on doit supposer *connues*.

On a évidemment, d'après la figure, les relations

$$\text{AP} = \text{AB} + \text{BP} = \text{AB} + \text{A'P'}, \text{ ou } x = a + x',$$
$$\text{PM} = \text{PP'} + \text{P'M} = \text{A'B} + \text{MP'}, \text{ ou } y = b + y';$$

et si l'on substitue ces valeurs de x et de y dans l'équation (1), on aura une nouvelle équation

$$f(x', y') = 0 \tag{2}$$

qui fixera *la position de la courbe* par rapport aux nouveaux axes.

Comme application de cette première transformation de coor-

données, prenons l'équation du cercle rapporté à des axes *rectangulaires* quelconques, savoir (n° 70)

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2,$$

et posons

$$x=x'+p,\quad y=y'+q;$$

il vient

$$x'^2+y'^2=r^2.$$

Telle est (n° 74) l'équation du cercle rapportée *à son centre et à des axes rectangulaires.*

De même, si l'on pose

$$x=x'+p-r,\quad y=y'+q,$$

l'équation

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

devient

$$(x'-r)^2+y'^2=r^2,$$

ou réduisant,

$$y'^2=2rx'-x'^2 \quad (\text{n° 73}).$$

C'est l'équation du cercle, *quand l'origine est placée à l'extrémité d'un diamètre.*

113. Traitons maintenant la question générale, savoir : *Passer d'un système de coordonnées obliques à un autre système de même espèce et d'origine différente.*

FIG. 71. Soient AX, AY les anciens axes, et A′X′, A′Y′ les nouveaux; AP et MP sont les coordonnées, x, y, d'un point quelconque, M, de la courbe rapportée aux premiers axes; A′P′ et MP′ sont les nouvelles coordonnées, x', y', de ce même point.

Menons A′X″ et P′H parallèles à AX, puis A′Y″ et P′K parallèles à AY, en prolongeant A′Y″ jusqu'à sa rencontre en B avec AX.

Faisons d'ailleurs

$$AB=a,\quad A'B=b,\quad X'A'X''=\alpha,\quad Y'A'X''=\alpha'$$

et

$$Y''A'X''\quad \text{ou}\quad YAX=\theta;$$

a, b, sont des quantités *connues*, puisqu'elles ne sont autre chose que les coordonnées de la nouvelle origine, qu'on suppose donnée de position par rapport aux anciens axes; il en est de même des angles α, α', que chacun des nouveaux axes forme avec l'ancien axe des x, et de l'angle θ, qui est égal à l'angle YAX des anciens axes.

Cela posé, la figure donne évidemment

$$\text{AP ou } x = \text{AB} + \text{BP} = a + \text{A'K} + \text{P'H},$$

$$\text{MP ou } y = \text{A'B} + \text{ML} = b + \text{P'K} + \text{MH};$$

ainsi, tout se réduit à déterminer A'K, P'K, P'H et MH.

Or, on a dans les triangles A'P'K, MP'H, en vertu d'un principe connu de Trigonométrie,

1°. $\text{A'K} : \text{A'P'} :: \sin \text{A'P'K} : \sin \text{A'KP'}$;

ou, à cause de $\text{A'P'K} = \text{P'A'Y''} = \theta - \alpha$, et à cause de $\text{A'KP'} = \text{A'LM} = 180^\circ - \text{MLX''} = 180^\circ - \theta$,

$$\text{A'K} : x' :: \sin(\theta - \alpha) : \sin\theta; \quad \text{d'où} \quad \text{A'K} = \frac{x' \sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta};$$

2°. $\text{P'K} : \text{A'P'} :: \sin \text{P'A'K} : \sin \text{A'KP'}$; d'où $\text{P'K} = \frac{x' \sin\alpha}{\sin\theta}$;

3°. $\text{P'H} : \text{MP'} :: \sin \text{P'MH} : \sin \text{P'HM}$;

ou, à cause de $\text{P'MH} = \text{Y'A'Y''} = \theta - \alpha'$, et à cause de $\text{P'HM} = \text{A'LM} = 180^\circ - \theta$,

$$\text{P'H} : y' :: \sin(\theta - \alpha') : \sin\theta; \quad \text{d'où} \quad \text{P'H} = \frac{y' \sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta};$$

4°. $\text{MH} : \text{MP'} :: \sin \text{MP'H} : \sin \text{P'HM}$; d'où $\text{MH} = \frac{y' \sin\alpha'}{\sin\theta}$.

Donc, en portant ces valeurs dans les expressions de x, y, on obtient

$$(1) \quad \begin{cases} x = \dfrac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta} + a, \\ y = \dfrac{x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'}{\sin\theta} + b. \end{cases}$$

Telles sont les formules les plus générales de la transformation des coordonnées, dont il est facile de déduire les formules particulières correspondant à toutes les *positions* de la nouvelle origine et aux différentes *directions* des nouveaux axes par rapport aux anciens, en donnant à a, b, des valeurs convenables, *positives* ou *négatives*, et aux angles α, α', toutes les valeurs depuis 0° jusqu'à 180°, sans que α et α' puissent recevoir *simultanément* la même valeur.

Quant à l'angle θ, il est toujours donné *à priori*, puisque c'est l'angle des anciens axes.

Nous nous contenterons d'indiquer ici les cas principaux.

Fig. 70. **114.** PREMIER CAS. — *Les deux nouveaux axes sont parallèles aux anciens;* c'est le cas déjà considéré au n° 112.

On a alors

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \alpha' = \theta,$$

ce qui donne

$$\sin(\theta - \alpha) = \sin\theta, \quad \sin(\theta - \alpha') = 0, \quad \sin\alpha = 0, \quad \sin\alpha' = \sin\theta;$$

ainsi les formules se réduisent à

$$x = x' + a, \quad y = y' + b;$$

résultats conformes à ceux trouvés précédemment.

Fig. 72. **115.** DEUXIÈME CAS. — On propose de *passer d'un système rectangulaire à un système oblique.*

Dans cette hypothèse, il suffit de faire

$$\theta = 90^\circ,$$

d'où

$$\sin\theta = 1, \quad \sin(\theta - \alpha) = \cos\alpha \quad \text{et} \quad \sin(\theta - \alpha') = \cos\alpha';$$

et les formulent deviennent

$$(3) \quad x = x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' + a, \quad y = x'\sin\alpha + y'\sin\alpha' + b.$$

Fig. 73. **116.** TROISIÈME CAS. — *Passer d'un système rectangulaire à un système aussi rectangulaire :* c'est un des cas les plus usités.

On a

$$\theta = 90^\circ,$$

$$\alpha' \quad \text{ou} \quad Y'A'X'' = Y'A'X' + X'A'X'' = 90^\circ + \alpha;$$

d'où

$$\sin\theta = 1, \quad \sin(\theta - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\sin(\theta - \alpha') = \sin(90^\circ - 90^\circ - \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\sin\alpha' = \sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha;$$

et l'on obtient pour formules correspondantes,

$$(4) \quad \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b. \end{cases}$$

N. B. — On déduit ce dernier cas du deuxième, en y faisant simplement $\alpha' = 90^\circ + \alpha$, ce qui donne

$$\cos\alpha' = -\sin\alpha \quad \text{et} \quad \sin\alpha' = \cos\alpha.$$

117. QUATRIÈME CAS. — *Passer d'un système oblique à un système rectangulaire.* FIG. 74.

Il suffit de faire dans les formules générales

$$\alpha' \quad \text{ou} \quad \mathrm{Y'A'X''} = 90^\circ + \alpha; \quad \text{d'où} \quad \sin\alpha' = \cos\alpha,$$

$$\sin(\theta - \alpha') = \sin(\theta - 90^\circ - \alpha)$$

$$= -\sin[90^\circ - (\theta - \alpha)] = -\cos(\theta - \alpha).$$

Ces formules deviennent alors

$$(5) \quad \begin{cases} x = \dfrac{x'\sin(\theta-\alpha) - y'\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta} + a. \\ y = \dfrac{x'\sin\alpha + y'\cos\alpha}{\sin\theta} + b. \end{cases}$$

118. Chacun des trois systèmes précédents peut être obtenu directement au moyen de la figure; mais nous nous contenterons de rechercher celui qui correspond au dernier cas. FIG. 74.

Soient toujours menées par les points A' et P', A'X'' et P'H parallèles à AX, puis A'Y'' et P'K parallèles à AY.

Il résulte de cette construction,

$$\mathrm{AP} \quad \text{ou} \quad x = \mathrm{AB} + \mathrm{A'K} - \mathrm{P'H},$$

$$\mathrm{MP} \quad \text{ou} \quad y = \mathrm{A'B} + \mathrm{P'K} + \mathrm{MH}.$$

On trouve d'abord, comme dans le problème général,

$$\mathrm{A'K} = \frac{x'\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} \quad \text{et} \quad \mathrm{P'K} = \frac{x'\sin\alpha}{\sin\theta}.$$

D'un autre côté, le triangle MP'H donne

1°. $\mathrm{P'H} : \mathrm{MP'} :: \sin\mathrm{HMP'} : \sin\mathrm{MHP'}$;

ou, comme $\mathrm{HMP'} = \mathrm{Y'A'Y''} = \mathrm{Y'A'X'} - \mathrm{Y''A'X'} = 90^\circ - (\theta - \alpha)$,

$$\mathrm{P'H} : y' :: \cos(\theta-\alpha) : \sin\theta; \quad \text{d'où} \quad \mathrm{P'H} = \frac{y'\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta};$$

2°. $\mathrm{MH} : \mathrm{MP'} :: \sin\mathrm{MP'H} : \sin\mathrm{MHP'}$;

mais

$$\mathrm{MP'H} = \mathrm{MP'A'} - \mathrm{HP'A'} = 90^\circ - \mathrm{XA'X''} = 90^\circ - \alpha;$$

ainsi

$$\mathrm{MH} : y' :: \cos\alpha : \sin\theta; \quad \text{d'où} \quad \mathrm{MH} = \frac{y'\cos\alpha}{\sin\theta}.$$

Donc enfin

$$x = \frac{x'\sin(\theta-\alpha) - y'\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta} + a,$$

$$y = \frac{x'\sin\alpha + y'\cos\alpha}{\sin\theta} + b.$$

Dans le second et le troisième cas, les triangles A'P'K, MHP', sont rectangles, et la détermination des lignes A'K, P'K, P'H et MH, n'en est que plus facile.

119. Enfin, si, dans les formules générales et dans celles qui en ont été déduites, on suppose $a = 0$ et $b = 0$, on obtiendra de nouvelles formules qui correspondront au cas où l'*on veut changer seulement la direction des axes, sans déplacer l'origine.*

Ainsi,

$$\left\{\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \cos\alpha' \\ y &= x' \sin\alpha + y' \sin\alpha' \end{aligned}\right\} \text{ et } \left\{\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}\right\},$$

sont les formules propres à faire passer d'un système *rectangulaire* à un autre système *oblique* ou *rectangulaire* de *même origine.*

En général, on distingue deux espèces principales de transformation de coordonnées, *le déplacement de l'origine* et *le changement de direction des axes.* Lorsque la question exige cette double transformation, il y a souvent de l'avantage à ne les exécuter que successivement; nous en verrons bientôt des exemples.

120. Nous terminerons cette théorie générale par l'examen de deux cas particuliers :

Fig. 75. 1°. On peut demander de *passer d'un système oblique* YAX *à un système rectangulaire* XAY', *l'origine restant la même, et l'axe des* x *restant aussi le même.*

Dans ce cas, on a

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \alpha = 0, \quad \alpha' = 90°;$$

d'où l'on tire

$$\sin\alpha = 0, \sin\alpha' = 1, \sin(\theta - \alpha) = \sin\theta, \sin(\theta - \alpha') = -\cos\theta;$$

et les formules (1) se réduisent à

$$x = x' - y' \cot\theta, \quad \text{et} \quad y = \frac{y'}{\sin\theta} = y' \operatorname{cosec}\theta.$$

On fait usage de celles-ci lorsqu'une courbe étant rapportée à un système d'axes obliques, on veut rendre le système rectangulaire.

Fig. 76. 2°. On peut, *en conservant le même système d'axes,*

exiger que l'axe des y′ *se confonde avec celui des* x, et *réciproquement.*

Dans ce cas, on doit avoir

$$\alpha' = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = \theta;$$

d'où

$$\sin\alpha = \sin\theta, \quad \sin\alpha' = 0, \quad \sin(\theta - \alpha) = 0, \quad \sin(\theta - \alpha') = \sin\theta.$$

On a, en outre,

$$a = 0, \quad b = 0;$$

ainsi, les formules (1) se réduisent à

$$x = y' \quad \text{et} \quad y = x';$$

ce qui est d'ailleurs évident, car on ne fait ici que changer les dénominations des axes.

121. On tire de là cette conséquence : *Lorsque les équations de deux courbes sont telles, que la seconde est composée en* y *et* x *comme la première l'est en* x *et* y, *les deux courbes sont* IDENTIQUES.

Car on passe de l'une à l'autre équation en changeant x en y, et, réciproquement, y en x. Il n'y a réellement, dans ce cas, que la *position* de la courbe par rapport aux axes qui soit renversée.

122. *Première remarque.* — Comme, pour une même question, on a souvent besoin d'effectuer successivement plusieurs transformations de coordonnées, nous conviendrons de *supprimer les accents* dans les seconds membres des formules relatives à ces diverses transformations; c'est-à-dire que nous désignerons toujours par x et y les anciennes et les nouvelles coordonnées, quoique leurs valeurs et leurs positions soient différentes; mais l'emploi successif des formules suffira pour indiquer que la courbe, étant rapportée à un premier système, se trouve ensuite rapportée à un second, à un troisième, etc., système.

Ainsi, pour passer d'un système oblique ou rectangulaire à un système de coordonnées parallèles, nous ferons dans l'équation de la courbe,

$$x = x + a \quad \text{et} \quad y = y + b,$$

les x et y du second membre désignant les coordonnées rap-

portées aux nouveaux axes, dont l'origine a d'ailleurs a et b pour ses coordonnées rapportées aux anciens axes.

De même, pour passer d'un système *rectangulaire* à un système *oblique* de *même* origine, nous poserons

$$x = x\cos\alpha + y\cos\alpha' \quad \text{et} \quad y = x\sin\alpha + y\sin\alpha'.$$

Cette convention a pour but de simplifier l'écriture des calculs en évitant la multiplicité des accents.

123. *Seconde remarque.* — Les quantités a, b, α, α', qui entrent dans les formules, sont des *constantes* dont les valeurs fixent *la position* de la nouvelle origine et les *directions* des nouveaux axes par rapport aux anciens dont l'angle est exprimé par θ. Elles doivent être regardées comme *connues* et données *à priori*, toutes les fois qu'on veut rapporter la courbe à de nouvelles lignes dont la position par rapport à cette courbe a été reconnue plus simple que celle des anciens axes.

Mais il arrive souvent qu'on exécute une transformation de coordonnées, avec le dessein d'introduire un changement déterminé dans l'*équation de la courbe*, par exemple, pour faire disparaître certains termes. Dans ce cas, a, b, α, α', sont des CONSTANTES, *indéterminées pour le moment*, que l'on tâche ensuite de calculer de manière qu'il en résulte les simplifications exigées. Quant à l'angle θ, on ne peut pas en disposer, puisque c'est l'angle des deux axes primitifs, lequel est toujours donné *à priori*.

Le *nombre des termes* à faire disparaître de l'équation, indique le *nombre des indéterminées* à introduire dans le calcul, et, par suite, le *système de formules* dont il faut faire usage.

Ces remarques s'éclairciront par les applications nombreuses que nous aurons à faire des formules précédentes.

§ II. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES COURBES DU SECOND DEGRÉ.

Afin de présenter la théorie des courbes du second degré d'une manière simple et tout à fait élémentaire, nous commencerons par rechercher les équations de *trois* courbes

dont chacune jouit d'une propriété qui lui est particulière. Nous ferons voir ensuite que ces courbes sont *les seules* que puisse représenter une équation quelconque du second degré à deux variables.

De l'Ellipse.

124. *On demande l'équation d'une courbe telle que, si l'on joint chacun de ses points* M *à deux points fixes* F *et* F′, *la somme des distances* FM, F′M, *soit égale à une ligne donnée* 2A. FIG. 77.

Cette courbe est ce qu'on nomme une ELLIPSE; les points F, F′, en sont dits les *foyers*, et l'on appelle *rayons vecteurs* les distances FM, F′M.

Nous verrons plus loin la raison de ces dénominations.

Pour construire cette courbe d'après sa définition, *prenons d'abord le milieu* O *de la distance* FF′, *et, à partir de ce point, portons la moitié de* 2A, *de* O *en* B, *et de* O *en* A; les points A et B appartiendront à la courbe.

Il résulte, en effet, de cette construction,

$$OB - OF \quad \text{ou} \quad FB = OA - OF' \quad \text{ou} \quad F'A,$$

c'est-à-dire

$$FB = F'A;$$

donc,

1°. $$FB + F'B = F'A + F'B = 2A,$$

2°. $$F'A + FA = FB + FA = 2A.$$

Ensuite, si *des points* F, F′, comme centres, *avec un rayon égal à* A, *l'on décrit deux circonférences qui se coupent* en C, D, ces deux points d'intersection appartiendront encore à la courbe; car on aura évidemment

$$FC + F'C = 2A \quad \text{et} \quad FD + F'D = 2A.$$

Ces points se trouvent d'ailleurs sur la perpendiculaire à la droite AB, élevée du point O.

Pour obtenir des points intermédiaires, *marquez sur* AB *et entre les points* F, F′, *un point quelconque* L; *puis des points* F′ *et* F *comme centres, et avec des rayons respectivement égaux à* AL, LB, *décrivez deux circonférences qui se coupent en* M, *m*; vous aurez deux nouveaux points de la courbe.

FIG. 77. En effet, la construction donne

1°. $$F'M + FM = AL + LB = 2A,$$

2°. $$F'm + Fm = 2A.$$

Ces points sont *symétriquement* placés par rapport à AB.

De même, *des points* F, F', *comme centres, et avec les mêmes rayons* AL, LB, *décrivez deux circonférences;* vous obtiendrez *encore deux nouveaux points* M', *m'*, qui seront, avec les points M, *m*, dans une position *symétrique* par rapport à la ligne CD. Cela est évident.

Après avoir ainsi déterminé une série de points suffisamment rapprochés les uns des autres, on pourra les joindre par une ligne continue ACBDA qui sera la COURBE DEMANDÉE.

N. B. — Pour que la construction puisse s'effectuer, il faut que la *distance des centres* FF' soit *moindre que* la *somme des rayons* ou 2 A, et en même temps *plus grande que leur différence.*

Cette dernière condition exige que le point L soit entre F et F'.

Car, prenons, par exemple, un point L' qui soit placé entre F et B; on aurait

$$AL' > AF \quad \text{et} \quad L'B < FB;$$

d'où l'on déduirait

$$AL' - L'B > AF - FB \quad \text{ou} \quad > AF - F'A \quad \text{ou} \quad > FF';$$

donc la distance FF' serait moindre que la différence des rayons AL', L'B; et, par suite, les deux circonférences décrites seraient intérieures l'une à l'autre, sans se couper.

125. On peut construire l'ellipse d'un mouvement continu, ainsi qu'il suit :

Fixez aux points F *et* F', *par le moyen de deux épingles, un fil dont la longueur soit égale à* 2 A. *Faites ensuite glisser un style ou un crayon qui tienne ce fil toujours tendu; et la courbe se trouve tracée quand l'instrument mobile a fait deux demi-révolutions, l'une au-dessus de* FF', *et l'autre au-dessous.*

Si l'ellipse doit être tracée sur le terrain, on se sert d'un *cordeau* d'une longueur égale à 2A, et de *trois* piquets dont *deux* fixent les extrémités du cordeau aux points F, F', et le *troisième* sert à tracer la courbe, en tenant le cordeau toujours tendu.

126. L'ellipse étant ainsi déterminée de forme et de position, recherchons son ÉQUATION, c'est-à-dire *une relation* entre les coordonnées de chacun de ses points rapportés à deux axes fixes. FIG. 77.

Comme, d'après la construction précédente, la courbe se compose de points *symétriquement* placés par rapport aux lignes AB, CD, il convient de *prendre celles-ci pour axes.*

Soient

$$OP = x,\quad MP = y,\quad FM = z,\quad F'M = z',\quad FF' = 2c,$$

d'où

$$OF = OF' = c.$$

On a d'abord, pour les *équations* des deux circonférences qui ont leurs centres en F, F', et dont la rencontre détermine le point M,

$$y^2 + (x-c)^2 = z^2, \tag{1}$$

$$y^2 + (x+c)^2 = z'^2. \tag{2}$$

En outre, la définition même de la courbe donne *l'équation de condition*

$$z + z' = 2A; \tag{3}$$

et si, entre ces trois équations, on élimine z et z', l'équation résultant en x, y, sera (n° 110) l'équation cherchée.

Pour y parvenir facilement, ajoutons entre elles et retranchons l'une de l'autre les équations (1) et (2), il vient

$$2y^2 + 2x^2 + 2c^2 = z'^2 + z^2, \tag{4}$$

$$4cx = z'^2 - z^2; \tag{5}$$

mais celle-ci revient à

$$(z'+z)(z'-z) = 4cx, \quad \text{ou} \quad 2A(z'-z) = 4cx;$$

d'où l'on tire

$$z' - z = \frac{2cx}{A}.$$

Or, on a déjà

$$z' + z = 2A;$$

donc

$$z' = A + \frac{cx}{A} \quad \text{et} \quad z = A - \frac{cx}{A}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (4), on trouve

$$y^2 + x^2 + c^2 = A^2 + \frac{c^2 x^2}{A^2};$$

ou, chassant le dénominateur et ordonnant,

$$A^2 y^2 + (A^2 - c^2) x^2 = A^2 (A^2 - c^2).$$

D'après ce qui a été dit précédemment, on doit avoir

$$FF' \text{ ou } 2c < 2A;$$

donc $A^2 - c^2$ est essentiellement *positif;* et si l'on pose

$$A^2 - c^2 = B^2,$$

l'équation prend la forme

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2. \tag{6}$$

Telle est l'ÉQUATION LA PLUS SIMPLE DE L'ELLIPSE.

FIG. 77. **127.** Cette équation étant résolue par rapport à y, puis par rapport à x, ce qui donne

$$y = \pm \frac{B}{A} \sqrt{A^2 - x^2}, \quad x = \pm \frac{A}{B} \sqrt{B^2 - y^2},$$

1°. On reconnaît que la courbe est *symétrique* par rapport aux axes OX, OY, puisque chacun d'eux divise en *deux parties égales* toutes les cordes telles que Mm, MM', menées *parallèlement* à l'autre;

2°. Comme pour $y = 0$ on trouve

$$x = \pm A,$$

et pour $x = 0$

$$y = \pm B,$$

il s'ensuit que la courbe rencontre l'axe des x aux points A, B, et l'axe des y aux points C, D, pour lesquels on a évidemment

$$OC = OD = B = \sqrt{A^2 - c^2};$$

3°. L'hypothèse $x = A$ ou $x = -A$, réduisant la double valeur de y à une seule, $y = \pm 0$, on peut (n° 99) en

conclure que la courbe est *tangente* en A et B aux deux droites RS, R'S', menées parallèlement à l'axe des y;

De même, $y = B$ ou $y = -B$ donnant $x = \pm o$, la courbe est *tangente* en C et D aux deux droites RR', SS', parallèles à l'axe des x.

Comme, d'ailleurs, il est visible que, dès qu'on suppose $x > A$ ou $y > B$, la valeur correspondante de y ou de x est *imaginaire*, il s'ensuit que la courbe, tangente aux quatre côtés du rectangle RSS'R', est entièrement comprise dans ce rectangle.

128. Si l'on évalue la distance du point O à un point quelconque (x, y) de la courbe, on a pour expression de cette distance, FIG. 77.

$$D = \sqrt{x^2 + y^2};$$

ou, mettant pour y^2 sa valeur $\frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2)$,

$$D = \sqrt{B^2 + \frac{A^2 - B^2}{A^2} \cdot x^2}.$$

En faisant $x = o$, on trouve d'abord $D = B$ ou OC.

A mesure que x augmente, la quantité D augmente; et elle acquiert son *maximum* lorsqu'on donne à x la plus grande valeur possible, qui est $x = A$; d'où l'on tire

$$D = \sqrt{B^2 + \frac{A^2 - B^2}{A^2} \cdot A^2} = A \text{ ou } OB.$$

Ainsi, *la plus petite distance du point* O *à la courbe, est* OC, *et la plus grande*, OB; en d'autres termes, CD est *la plus petite* corde qu'on puisse mener par le point O, et AB *la plus grande.*

Cette ligne AB ou 2A est non-seulement la plus grande corde passant par le point O, mais encore *la plus grande de toutes les cordes de l'ellipse.*

Car, soit IK une corde quelconque; si l'on joint le point O aux points I et K, le triangle OIK donne

$$IK < OI + OK;$$

mais on vient de voir que chacune des distances OI, OK,

est moindre que OA ou OB; donc, à plus forte raison, l'on a

$$IK < OB + OA, \quad \text{ou} \quad < AB.$$

Fig. 77. 129. Le point O jouit de la propriété de *diviser en deux parties égales toutes les cordes qui y passent.*

En effet, soit MO m' une quelconque de ces cordes, représentée par l'équation

$$y = ax.$$

Combinons cette équation avec celle de la courbe

$$A^2y^2 + B^2x = A^2B^2,$$

en remplaçant dans celle-ci y par sa valeur, ce qui donne

$$(A^2a^2 + B^2)\,x = A^2B^2;$$

il vient

$$x = \frac{\pm AB}{\sqrt{A^2a^2 + B^2}}, \quad y = \frac{\pm ABa}{\sqrt{A^2a^2 + B^2}}.$$

Ces valeurs de x et de y qui expriment les coordonnées des points d'intersection, M, m', de la droite avec la courbe étant *respectivement égales* et de *signes contraires,* les distances OP, OP′ et MP, m'P′, sont égales.

Donc les deux triangles OPM, OP′m', sont égaux et donnent

$$OM = Om'.$$

130. On nomme, en général, CENTRE d'une courbe, *un point situé dans le plan de cette courbe, et tel que toutes les cordes menées par ce point y sont divisées en deux parties égales.*

De cette définition et de la propriété qui vient d'être démontrée, il résulte que le point O est le *centre* de l'ellipse.

Son caractère analytique est que, si des valeurs x', y', satisfont à l'équation de la courbe rapportée à *son centre* comme *origine*, les valeurs $-x'$, $-y'$, satisfont également, ou, en d'autres termes, que cette équation ne change pas lorsqu'on y change x en $-x$, et y en $-y$.

Les deux lignes 2A, 2B, ou AB, CD, ont reçu le nom d'*axes principaux.*

On les appelle encore *premier axe* et *second axe,* ou bien, *grand axe* et *petit axe.*

Les points A, B, sont dits les *sommets* du premier axe, et les points C, D, les *sommets* du second axe.

L'équation $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$ est l'équation de l'ellipse rapportée à *son centre* comme *origine* et à *ses axes principaux* comme *axes des coordonnées*.

131. Supposons que, dans la recherche d'un lieu géométrique rapporté à des axes *rectangulaires*, on soit parvenu à l'équation

$$My^2 + Nx^2 = P,$$

M, N, P, étant des quantités essentiellement *positives*.

Faisons successivement, dans cette équation,

$$y = 0 \quad \text{et} \quad x = 0;$$

il en résulte pour $y = 0$,

$$x = \pm\sqrt{\frac{P}{N}},$$

et pour $x = 0$,

$$y = \pm\sqrt{\frac{P}{M}}.$$

Cela posé, soient

$$\sqrt{\frac{P}{N}} = A, \quad \sqrt{\frac{P}{M}} = B; \quad \text{d'où} \quad N = \frac{P}{A^2}, \quad M = \frac{P}{B^2};$$

l'équation ci-dessus devient, par la substitution,

$$\frac{P}{B^2}y^2 + \frac{P}{A^2}x^2 = P,$$

ou, réduisant,

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2.$$

D'où l'on voit que l'équation proposée est celle d'une ellipse dont les *axes principaux* sont $2\sqrt{\frac{P}{N}}$ et $2\sqrt{\frac{P}{M}}$, ou, en d'autres termes, sont le *double* de la valeur de x correspondant à $y = 0$, et le *double* de la valeur de y correspondant à $x = 0$.

Connaissant les deux axes $2A$, $2B$ ou $2\sqrt{\frac{P}{N}}$, $2\sqrt{\frac{P}{M}}$, pour obtenir les *foyers*, on a recours à la relation

$$B^2 = A^2 - c^2,$$

qui donne

$$c = \pm\sqrt{A^2 - B^2}.$$

FIG. 78. Soient pris sur deux lignes indéfinies à angle droit,

$$OB = OA = A \quad \text{et} \quad OC = OD = B;$$

puis du point C comme *centre*, avec un rayon égal à A, décrivons un arc de cercle qui coupe AB en *deux* points F, F'; ce seront les *foyers*.

Car on a

$$OF' = OF = \sqrt{\overline{CF}^2 - \overline{OC}^2} = \sqrt{A^2 - B^2}.$$

Comme, par rapport à l'équation

$$My^2 + Nx^2 = P,$$

on a

$$A^2 = \frac{P}{N} \quad \text{et} \quad B^2 = \frac{P}{M},$$

il s'ensuit que

$$c = \sqrt{\frac{P}{N} - \frac{P}{M}} = \sqrt{\frac{P(M-N)}{MN}}.$$

N. B. — Puisque, dans toute ellipse, on doit avoir $2A > 2B$, il faut supposer

$$\frac{P}{N} > \frac{P}{M}, \quad \text{d'où} \quad M > N.$$

S'il en était autrement, c'est-à-dire si l'on avait $M < N$, on changerait (n° 121) y en x et x en y. Par là, l'équation deviendrait

$$Ny^2 + Mx^2 = P,$$

et représenterait encore une ELLIPSE, qui aurait pour *premier axe*, $2\sqrt{\frac{P}{M}}$, et pour *second axe* $2\sqrt{\frac{P}{N}}$.

Avant la transformation des coordonnées, la courbe est dans la position indiquée par la *fig.* 79; mais après, elle prend, par rapport aux nouveaux axes, la position qu'on lui donne ordinairement (*fig.* 77).

132. Soit, comme cas particulier, $M = N$; l'équation se réduit alors à

$$y^2 + x^2 = \frac{P}{M},$$

c'est-à-dire à l'équation d'un CERCLE ayant $\sqrt{\frac{P}{M}}$ pour

rayon; la quantité c, ou $\sqrt{\frac{P(M-N)}{MN}}$, devient *nulle;* ainsi les *deux foyers* se réunissent au *centre*.

Le CERCLE peut donc être regardé comme une ELLIPSE dont *les deux axes* $2A$, $2B$, *sont égaux*, et dont les deux *foyers* viennent à se *confondre*.

133. Enfin, comme nous aurons souvent besoin de ramener une équation telle que

$$My^2 + Nx^2 = P,$$

à la forme

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,$$

nous indiquerons un procédé simple et facile pour y parvenir.

Soient multipliés les deux membres de la première équation par un facteur indéterminé h; il vient

$$Mhy^2 + Nhx^2 = Ph.$$

Mais, pour que cette équation ait la forme demandée, il faut que l'on ait

$$Ph = Mh \times Nh = MN.h^2;$$

d'où l'on déduit

$$h = \frac{P}{MN}.$$

Donc il suffit de *multiplier les deux membres de la proposée par le quotient du second membre divisé par le produit des coefficients de* y^2 *et de* x^2.

Cette multiplication donne

$$\frac{P}{N}y^2 + \frac{P}{M}x^2 = \frac{P^2}{MN};$$

et, par suite,

$$A^2 = \frac{P}{N}, \quad B^2 = \frac{P}{M}, \quad c^2 = A^2 - B^2 = \frac{P(M-N)}{MN}.$$

Prenons pour exemple l'équation

$$5y^2 + 3x^2 = 6.$$

On trouve, en multipliant par $\frac{6}{5\times 3}$ ou $\frac{2}{5}$,

$$2y^2 + \frac{6}{5}x^2 = \frac{12}{5};$$

donc

$$A=\sqrt{2},\quad B=\frac{1}{5}\sqrt{30},\quad c=\frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

Soit encore l'équation

$$3y^2+4x^2=5.$$

Multipliant par $\frac{5}{3\times 4}$ ou $\frac{5}{12}$, on obtient

$$\frac{5}{4}y^2+\frac{5}{3}x^2=\frac{25}{12};$$

ou (n° 131, *N. B.*), changeant y en x et réciproquement,

$$\frac{5}{3}y^2+\frac{5}{4}x^2=\frac{25}{12};$$

donc

$$A=\frac{1}{3}\sqrt{15},\quad B=\frac{1}{2}\sqrt{5},\quad c=\frac{1}{6}\sqrt{15}.$$

De l'Hyperbole.

FIG. 80. **134.** *On demande l'équation d'une courbe telle que, si l'on joint chacun de ses points* M *à deux points fixes* F, F', *la différence des distances* F'M, FM, *soit égale à une ligne donnée* 2A.

Cette courbe est ce qu'on appelle une HYPERBOLE; les points F, F', en sont les *foyers*, et l'on nomme *rayons vecteurs* les lignes FM, F'M.

Commençons par indiquer un moyen de construire cette courbe.

Prenez à partir du point O, *milieu de* FF', *deux distances* OA, OB, *égales à* A; les deux points A et B appartiennent à la courbe.

En effet, il résulte de cette construction,

$$BF=AF',$$

d'où

$$AF-AF'=AF-BF=2A,$$

et

$$BF'-BF=BF'-AF'=2A.$$

Les points A, B, sont nécessairement situés entre F et F'; car autrement, ce serait la somme des distances de chacun de ces points aux points F et F', et non leur différence qui serait égale à 2A. Ainsi 2A doit être donné *moindre que* FF'.

Pour obtenir d'autres points de la courbe, *marquez sur la ligne* OF *et à droite du point* F, *un point quelconque* L, *puis des points* F′, F *comme centres, avec les rayons* AL, BL, *décrivez successivement deux circonférences qui se coupent en* M, *m*; vous obtiendrez ainsi deux points de la courbe; car, en joignant le point M, par exemple, aux points F′, F, vous avez

$$F'M - MF = AL - BL = 2A.$$

De même, *des points* F, F′ *comme centres, et avec les mêmes rayons, décrivez encore successivement deux circonférences;* vous aurez *deux nouveaux points* M′, *m*′, qui seront, avec les points M, *m*, *symétriquement* placés par rapport à la droite OC perpendiculaire sur AB.

Cette construction exige que le point L soit situé *à la droite* du point F; car s'il était en L′, comme on aurait $BL' < BF$, il s'ensuivrait

$$AL' + BL' \text{ ou } AB + 2BL' < AB + 2BF, \text{ ou } < FF';$$

et alors les deux circonférences seraient telles, que la distance des centres, FF′, serait plus grande que la somme des rayons, en sorte qu'elles seraient tout à fait extérieures l'une à l'autre et ne se couperaient pas.

Mais le point L peut être pris vers la droite du point F, à *une distance aussi grande qu'on veut.*

D'où l'on voit que la courbe se compose *de deux branches égales et opposées, m*BM, *m*′AM′, *qui s'étendent indéfiniment à droite du point* B *et à gauche du point* A, *tant au-dessus qu'au-dessous de la ligne* AB.

Il existe bien un procédé pour tracer l'hyperbole d'un mouvement continu; mais nous nous abstenons de l'indiquer, parce que la pratique en est peu commode.

135. Nous allons maintenant nous occuper de la recherche de l'ÉQUATION de cette courbe.

L'hyperbole étant, ainsi que l'ellipse, *symétrique* par rapport à AB et OC, nous prendrons ces deux lignes pour les *axes des coordonnées.* Fig. 80.

Soient donc

$$OP = x, \quad MP = y, \quad OF = OF' = c, \quad FM = z, \quad F'M = z'.$$

On a d'abord, comme pour l'ellipse, les deux équations

$$y^2 + (x - c)^2 = z^2, \tag{1}$$

$$y^2 + (x + c)^2 = z'^2, \tag{2}$$

auxquelles on doit joindre, d'après l'énoncé, l'*équation de condition*

$$z' - z = 2A. \tag{3}$$

Pour éliminer z et z', combinons alternativement par addition et soustraction les équations (1) et (2); nous obtenons les suivantes :

$$2y^2 + 2x^2 + 2c^2 = z'^2 + z^2, \tag{4}$$

$$4cx = z'^2 - z^2; \tag{5}$$

mais celle-ci donne

$$(z' - z)(z' + z) \quad \text{ou} \quad 2A(z' + z) = 4cx,$$

d'où l'on déduit

$$z' + z = \frac{2cx}{A}.$$

Or, on a déjà

$$z' - z = 2A;$$

donc

$$z' = \frac{cx}{A} + A \quad \text{et} \quad z = \frac{cx}{A} - A.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (4), on obtient

$$y^2 + x^2 + c^2 = \frac{c^2x^2}{A^2} + A^2,$$

ou, chassant le dénominateur et transposant,

$$A^2y^2 + (A^2 - c^2)x^2 = A^2(A^2 - c^2).$$

Mais, comme il a été reconnu précédemment que la distance FF' ou $2c$, doit toujours être plus grande que $2A$, il s'ensuit que $A^2 - c^2$ est essentiellement *négatif*.

Donc, en posant

$$c^2 - A^2 = B^2,$$

on trouve pour l'équation de l'hyperbole,

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2. \tag{6}$$

Cette équation ne diffère de celle de l'ellipse, qu'en ce que B^2 est remplacé par $-B^2$. Aussi les deux courbes, quoique étant de forme très-différente, puisque l'une est

limitée en tous sens, tandis que l'autre est *illimitée*, jouissent-elles de propriétés analogues.

Soit fait $y = 0$ dans l'équation; il en résulte $x = \pm A$, ce qui prouve que la courbe passe par les points A et B, circonstance que nous avons déjà reconnue (n° 134).

Soit encore

$$x = 0;$$

on trouve

$$y^2 = -B^2; \quad \text{d'où} \quad y = \pm B\sqrt{-1};$$

ce qui fait voir que la courbe *ne rencontre pas* l'axe des y.

Cependant on peut convenir de marquer sur cet axe *deux* points C et D dont la distance au point O soit exprimée par B ou $\sqrt{c^2 - A^2}$. Fig. 80.

Pour fixer la position de ces points, il suffit de décrire du point B comme centre, et d'un rayon égal à c ou OF, un arc de cercle qui coupe OY aux deux points demandés; car on a

$$OC = OD = \sqrt{\overline{OF}^2 - \overline{OB}^2} = \sqrt{c^2 - A^2}.$$

Comme, en faisant $x = +A$ ou $x = -A$ dans l'équation résolue par rapport à y,

$$y = \pm \frac{B}{A}\sqrt{x^2 - A^2},$$

on trouve

$$y = \pm 0,$$

et qu'en donnant à x des valeurs *positives* ou *négatives*, *numériquement* plus petites que A, on obtient des valeurs *imaginaires* pour y, on peut en conclure, 1° que la courbe est *tangente* en A et B aux deux droites R′S′, RS, parallèles à l'axe des y; 2° qu'elle s'étend *indéfiniment* à la gauche du point A et à la droite du point B.

On voit enfin que la courbe est composée de deux branches *égales et opposées*, dont chacune est divisée en *deux parties égales* par la ligne AB; en sorte que si l'on pliait la figure, soit suivant la ligne CD, soit suivant la ligne AB, les *quatre* parties de la courbe se couvriraient parfaitement deux à deux.

Presque toutes ces circonstances avaient déjà (n° 134) été reconnues par la Géométrie.

136. Les quantités 2 A, 2 B, sont, comme dans l'ellipse,

appelées *les axes principaux* de l'hyperbole, ou *le premier axe* et *le second axe*. Mais l'un quelconque des deux axes pouvant, d'après la relation $B^2 = c^2 - A^2$, être plus grand que l'autre, les dénominations de *grand axe* et de *petit axe* seraient impropres.

On désigne encore le premier axe sous le nom d'*axe transverse*, et le second, sous celui d'axe *non transverse*, parce que l'un rencontre la courbe, et l'autre ne la rencontre pas.

On peut avoir $A = B$, auquel cas l'équation se réduit à

$$y^2 - x^2 = -A^2.$$

On dit alors que l'hyperbole est *équilatère*, comme ayant ses deux axes *égaux entre eux*.

L'*hyperbole équilatère* est à l'hyperbole quelconque ce que le *cercle* est à l'ellipse.

Les points A et B sont dits *les sommets* de la courbe.

FIG. 80. 137. De même que pour l'ellipse, le point O est le CENTRE de l'hyperbole, ou, en d'autres termes, *toutes les droites passant par le point* O *et terminées à la courbe, sont divisées par ce point en deux parties égales*.

Soit, en effet, $m'M$ une droite quelconque menée par le point O, et rencontrant la courbe; si l'on combine entre elles les deux équations

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2, \quad y = ax,$$

on trouve, en mettant pour y sa valeur ax dans la première,

$$(A^2a^2 - B^2)x^2 = -A^2B^2;$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{\pm AB}{\sqrt{B^2 - A^2a^2}},$$

et, par conséquent,

$$y = \frac{\pm ABa}{\sqrt{B^2 - A^2a^2}}.$$

Il résulte de là que $OP = OP'$, et $MP = m'P'$; par suite les deux triangles OPM, $OP'm'$ sont égaux, et l'on a

$$OM = Om'.$$

Ainsi l'équation

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2$$

représente une hyperbole rapportée à son *centre* comme *origine* et à ses *axes principaux* comme *axes des coordonnées*.

138. *Remarque importante.* — On voit que les valeurs précédentes de x et de y ne sont *réelles*, c'est-à-dire qu'une droite *menée par le centre* ne rencontre la courbe qu'autant que l'on a

$$B^2 - A^2a^2 > 0, \quad \text{ou} \quad a^2 < \frac{B^2}{A^2}.$$

Si l'on fait

$$B^2 - A^2a^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad a = \pm\frac{B}{A};$$

les valeurs de x et de y deviennent *infinies;* ce qui prouve que les deux droites correspondantes, dont l'une est située au-dessus de l'axe des x, l'autre au-dessous, *rencontrent* l'hyperbole à *une distance infinie*.

Construisons les deux droites

$$y = +\frac{B}{A}x, \quad y = -\frac{B}{A}x,$$

qui méritent une attention particulière.

Pour cela, soit achevé sur les deux axes AB ou 2 A et CD ou 2 B, le *rectangle* R′RSS′; on a évidemment FIG. 80.

$$BR = BS = B;$$

d'où

$$\text{tang BOR} = \frac{B}{A}, \quad \text{tang BOS} = -\frac{B}{A}.$$

Donc les droites OR, OS, menées par le point O et par les points R, S, sont *les deux droites demandées*.

Nous verrons dans les chapitres suivants quel parti l'on tire de ces droites dans la théorie de l'hyperbole; nous nous bornons, pour le moment, à les considérer comme deux *lignes de séparation* des droites passant par le centre, qui *rencontrent* la courbe d'avec celles qui *ne la rencontrent pas*, propriété résultant de ce que nous avons dit en commençant ce *numéro*.

Lorsque l'hyperbole est *équilatère* (n° 136), c'est-à-dire lorsque l'on a $B = A$, les tangentes trigonométriques des angles BOR, BOS, ou $\frac{B}{A}$ et $-\frac{B}{A}$, se réduisent à $+1$ et -1; donc ces angles sont chacun de 45 degrés, et les deux droites, OR, OS sont *perpendiculaires entre elles*.

139. Supposons maintenant qu'on ait obtenu pour l'équation d'un *lieu géométrique*

$$My^2 - Nx^2 = -P,$$

et multiplions (n° 133) les deux membres par $\frac{P}{MN}$, il vient

$$\frac{P}{N}y^2 - \frac{P}{M}x^2 = -\frac{P^2}{MN}.$$

Cette nouvelle équation comparée à celle de l'hyperbole,

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2,$$

donne

$$A^2 = \frac{P}{N} \text{ et } B^2 = \frac{P}{M}; \text{ d'où } A = \pm\sqrt{\frac{P}{N}}, \quad B = \pm\sqrt{\frac{P}{M}};$$

donc la proposée représente une HYPERBOLE dont le *premier axe est* $2\sqrt{\frac{P}{N}}$, et *le second axe*, $2\sqrt{\frac{P}{M}}$.

La relation $B^2 = c^2 - A^2$ donne

$$c = \pm\sqrt{A^2 + B^2};$$

d'où, mettant pour A et B leurs valeurs,

$$c = \pm\sqrt{\frac{P(M+N)}{MN}}.$$

FIG. 81. Pour fixer la *position des foyers*, connaissant les axes, *prenez sur deux droites rectangulaires*,

$$OB = OA = A = \sqrt{\frac{P}{N}}, \quad OC = OC' = B = \sqrt{\frac{P}{M}};$$

puis élevez au point B *une perpendiculaire* BD *égale à* B, *et tirez* OD.

La circonférence décrite du point O comme centre, avec le rayon OD, coupera AB en deux points, F, F′, qui seront *les points demandés*.

Car on a

$$OF = OF' = OD = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

N. B. — Il est remarquable que cette construction donne en même temps la direction OD de l'une des *droites limites* (n° 138); quant à la seconde, on l'obtient en prolongeant DB d'une quantité BD′ = BD, et tirant OD′.

140. Si l'équation était de la forme $My^2 - Nx^2 = +P$, on changerait y en x et x en y, ce qui donnerait

$$Ny^2 - Mx^2 = -P;$$

et l'équation n'en serait pas moins celle d'une HYPERBOLE, qui aurait pour *premier axe*, $2\sqrt{\frac{P}{M}}$, et pour *second axe*, $2\sqrt{\frac{P}{N}}$.

Avant la transformation, la courbe a la position indiquée par la *fig.* 82; mais après, elle reprend la position de la *fig.* 80.

Multiplions les deux membres de l'équation proposée, par $\frac{P}{MN}$; il vient

$$\frac{P}{N}y^2 - \frac{P}{M}x^2 = \frac{P^2}{MN},$$

d'où, en posant $\frac{P}{N} = B^2$, $\frac{P}{M} = A^2$,

$$B^2y^2 - A^2x^2 = A^2B^2.$$

Telle est la forme que prend l'équation de l'hyperbole rapportée à son *centre* et à ses *axes principaux* lorsque son axe *non transverse* est pris pour axe des x.

On en déduit

$$y = \pm\frac{A}{B}\sqrt{x^2 + B^2};$$

ce qui prouve qu'à toute valeur de x correspondent des valeurs *réelles* de y.

Pour $x = 0$, l'on a

$$y = \pm A;$$

et cette valeur est le MINIMUM de toutes celles que peut recevoir y.

De la Parabole.

141. *Trouver l'équation d'une courbe telle, que la distance de chacun de ses points* M *à un point* F (appelé *foyer*), *soit égale à la distance de ce même point* M *à une droite fixe* DD′ appelée *directrice*. FIG. 83.

Voici d'abord le moyen de construire *par points* cette courbe connue sous le nom de PARABOLE.

Après avoir abaissé du point F *une perpendiculaire sur* DD′, *prenez le milieu* A *de la distance* FG; *et le point* A appartient à la courbe, puisque les deux distances AF et AG sont égales.

Ce point est dit *le sommet* de la parabole.

Pour obtenir d'autres points, *élevez en un point quelconque* P *pris vers la droite de* A, *une perpendiculaire à* GF; *puis du point* F *comme centre, avec le rayon* GP, *décrivez un arc de cercle qui coupe la perpendiculaire en deux points* M, *m*; vous aurez ainsi *deux* points de la courbe; car il résulte de cette construction,

$$FM = Fm = GP = MQ = mR.$$

D'où l'on voit que la parabole se compose de deux parties AM′ M, A*m′ m*, *symétriques* par rapport à GX.

Elle peut être aussi décrite d'un mouvement continu.

Fig. 84. *Prenez une équerre dont l'un des côtés de l'angle droit* QR *soit assujetti à glisser suivant la direction* DD′; *fixez aux points* F *et* V *les deux extrémités d'un fil dont la longueur soit égale au second côté* QV *de l'équerre; faites ensuite mouvoir cette équerre le long de* DD′, *en ayant soin de tenir le fil tendu au moyen d'un style ou crayon qui s'appuie constamment sur* QV.

La trace de ce style sera nécessairement *une parabole.*

En effet, pour une position quelconque QRV de l'équerre, on a

$$FM + MV = MQ + MV; \quad \text{d'où} \quad FM = MQ.$$

Lorsque l'équerre est arrivée dans une position Q′R′V′, telle que Q′V′ passe par le point F, le fil se *replie sur lui-même* de F en A, et le point A est le *sommet* de la courbe; car on a

$$FA + AV' = AQ' + AV'; \quad \text{d'où} \quad FA = AQ'.$$

Pour tracer la partie *inférieure* de la courbe, il suffit de *renverser* la position de l'équerre.

N. B. — Ce procédé ne donne qu'une portion de la courbe; cette portion qui se termine au point V″ pour lequel on a

$$FV'' = V''Q'' = VQ,$$

est d'autant plus grande que le côté QV de l'équerre a plus de longueur.

C'est probablement ce moyen de description qui a fait donner à la droite DD′ le nom de *directrice*.

142. Recherchons actuellement l'ÉQUATION DE LA PARABOLE.

Nous prendrons pour *axe des x* la ligne GF, qui divise la courbe en deux parties égales, et pour *origine* le point A qui appartient à la courbe. FIG. 83.

Soient x, y, les coordonnées AP, MP, du point M, z la distance FM, et p la distance FG; d'où

$$AF = AG = \frac{p}{2} \quad \text{et} \quad GP = \frac{p}{2} + x.$$

La circonférence décrite du point F comme centre avec le rayon FM, a pour équation

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = z^2; \tag{1}$$

mais on a l'équation de condition FM = PG, ou

$$z = x + \frac{p}{2}. \tag{2}$$

Éliminant z entre ces deux équations, on trouve pour l'équation de la courbe,

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

ou, réduisant,

$$y^2 = 2px. \tag{3}$$

Telle est l'équation de la parabole *rapportée à ses axes principaux*.

AX est dit le *premier* axe principal, et AY le *second*.

On déduit de cette équation,

$$y = \pm\sqrt{2px};$$

d'où il suit que la courbe *s'étend indéfiniment à la droite de l'axe des y, tant au-dessus qu'au-dessous de l'axe des x*.

Et comme, pour $x = 0$, on a

$$y = \pm 0,$$

cette courbe est *tangente* en A à l'axe des y.

143. On nomme *paramètre* le coefficient de x, $2p$, c'est-à-dire *le double de la distance du foyer à la directrice.*

Ce paramètre est encore égal *à la double ordonnée qui passe par le foyer.*

Car, d'après la définition de la courbe, on a

$$FN = NH = FG;$$

ce qu'on vérifie, d'ailleurs, au moyen de l'équation (3), qui, pour $x = \frac{p}{2}$, donne

$$y^2 = p^2, \quad \text{d'où} \quad y = \pm p.$$

Liaison des trois courbes.

144. Quoique la *parabole* semble, d'après sa définition, n'avoir aucune analogie avec l'*ellipse* et l'*hyperbole*, on peut établir un rapprochement entre la première courbe et les deux autres, au moyen d'une transformation de coordonnées exécutée sur les équations de ces deux dernières.

FIG. 77. *Rapprochement entre l'ellipse et la parabole.* — Reprenons l'équation de *l'ellipse*

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2, \tag{1}$$

et proposons-nous de rapporter cette courbe au *sommet* A comme *origine*, en conservant la *même direction* pour les axes.

Pour cela, il faut faire usage des formules (n° 114)

$$x = x + a, \quad y = y + b$$

en y faisant $b = 0$, $a = -A$; ce qui les réduit à

$$x = x - A, \quad y = y,$$

c'est-à-dire qu'il suffit de remplacer x par $x - A$ dans l'équation ci-dessus, en laissant y tel qu'il est.

Il vient, par cette substitution,

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 - 2AB^2 x = 0;$$

d'où l'on déduit

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Ax - x^2). \tag{2}$$

C'est l'équation de l'ellipse *rapportée à son sommet de gauche, pris pour origine.*

Cela posé, cette équation peut être mise sous la forme

$$y^2 = 2\frac{B^2}{A}x - \frac{B^2}{A^2}x^2,$$

ou bien, en faisant $\frac{B^2}{A} = p$,

$$y^2 = 2px - \frac{p}{A}x^2. \tag{3}$$

Or, si l'on suppose que les deux quantités A et B croissent *indéfiniment*, de manière cependant que la quantité p ou $\frac{B^2}{A}$ reste *constante* (cela est permis d'après la relation $\frac{B^2}{A} = p$, dans laquelle, après avoir pris pour p une valeur *fixe* et *déterminée*, on peut donner à A différentes valeurs, et calculer ensuite une valeur correspondante pour B), il est clair que, dans cette hypothèse, plus A *augmente*, plus le terme $\frac{p}{A}$ *diminue;* et lorsqu'on suppose $A = \infty$, il en résulte $\frac{p}{A} = 0$.

Donc l'équation (3) se réduit alors à

$$y^2 = 2px,$$

qui n'est autre chose que l'équation d'une parabole.

D'où l'on peut conclure que la *parabole* est une *ellipse* dont le *grand axe* est *infini*, ou dont le *centre* est situé *à l'infini*.

145. *Rapprochement entre la parabole et l'hyperbole.* Fig. 80. Il faut rapporter cette dernière courbe à son sommet *de droite* B, ce qui revient (n° 114) à porter $x + A$ à la place de x dans l'équation

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2.$$

Elle devient ainsi

$$A^2y^2 - B^2x^2 - 2AB^2x = 0;$$

d'où

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Ax + x^2),$$

ou, en posant, comme pour l'ellipse, $\frac{B}{A} = p$,

$$y^2 = 2px + \frac{p}{A}x^2. \tag{4}$$

Actuellement, faisons augmenter A et B de manière que p reste *constant;* il vient pour

$$A = \infty, \quad \frac{p}{A} = 0,$$

et l'équation (4) se réduit à

$$y^2 = 2px.$$

Dans ce cas, la *seconde branche*, le *centre* et le *second sommet*, disparaissent, ou sont situés à l'*infini*.

146. *Conclusion importante.* — Il résulte de ce qui vient d'être dit, que les *trois courbes* peuvent être, en général, représentées par l'équation

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Lorsque la courbe est une *parabole*, on a

$$q = 0;$$

et l'équation se réduit à

$$y^2 = 2px.$$

Si c'est une *ellipse*, on a

$$2p = \frac{2B^2}{A}, \quad q = -\frac{B^2}{A^2},$$

l'origine des coordonnées étant supposée au sommet *de gauche*.

Enfin, dans le cas de l'*hyperbole*, on a

$$2p = \frac{2B^2}{A}, \quad q = +\frac{B^2}{A^2}.$$

Par analogie avec la parabole, on nomme PARAMÈTRE de l'ellipse ou de l'hyperbole, la quantité $2p$ ou $\frac{2B^2}{A}$ qui forme le coefficient de x dans l'équation de la courbe rapportée à l'un de ses sommets.

Cette quantité, qui peut être mise sous la forme $\frac{4B^2}{2A}$, ou $\frac{2B.2B}{2A}$, n'est autre chose qu'*une troisième proportionnelle au premier et au second axe.*

C'est aussi, comme dans la parabole, *le double de l'ordonnée qui passe par le foyer.*

Car si, dans l'équation de l'*ellipse* (n° 144)

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Ax - x^2),$$

on fait $x = A \pm c$ (ce qui est l'abscisse de l'un ou de l'autre des foyers), on trouve

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - c^2) = \frac{B^4}{A^2}; \quad \text{d'où} \quad y = \pm\frac{B^2}{A}.$$

Même résultat pour l'*hyperbole*.

N. B. — Cette dernière propriété peut servir à faire reconnaître la position des *foyers*.

147. AUTRE MANIÈRE D'ÉTABLIR LA LIAISON QUI EXISTE ENTRE LES TROIS COURBES. — On demande l'équation d'*une courbe telle, que la distance de chacun de ses points*, M, *à un point fixe*, F, *soit avec la distance de ce même point* M *à une droite* DD' *aussi donnée de position, dans un rapport connu*, m : 1; en sorte que l'on ait Fig. 85.

$$MF : MQ :: m : 1,$$

m désignant un nombre absolu quelconque, $<$, $=$, ou >1.

CONSTRUCTION de la courbe d'après cette définition. — Du point F *abaissons* FG perpendiculaire sur DD', et *divisons* la distance FG dans le rapport $m : 1$, à partir du point F; le point A ainsi obtenu appartient nécessairement à la courbe.

Pour en obtenir d'autres, *marquons* un point quelconque P sur la droite indéfinie GFX, et *élevons* en ce point une perpendiculaire; puis du point F comme centre, avec un rayon égal à m.GP, *décrivons* un arc de cercle qui coupe la perpendiculaire en M et M'; ces points appartiendront à la courbe, puisque l'on a par construction

$$FM = GP.m = MQ.m;$$

d'où l'on tire

$$MF : MQ :: m : 1;$$

et ainsi de suite.

ÉQUATION de la courbe. — Prenons pour axe des x la droite GFX, par rapport à laquelle la courbe est *symétrique*, et pour axe des y la perpendiculaire élevée au point A qui, comme nous l'avons vu, est un point de la courbe.

FIG. 85. Soient

$$AP = x, \quad MP = y, \quad FM = z, \quad AF = \alpha;$$

d'où

$$AG = \frac{\alpha}{m},$$

puisque l'on a

$$AF : AG :: m : 1.$$

Cela posé, l'équation de la *circonférence* qui a son centre en F, et pour rayon, FM ou z, est

$$(1) \qquad y^2 + (x - \alpha)^2 = z^2;$$

de plus, on doit avoir

$$FM : MQ \text{ ou } GP :: m : 1, \quad \text{ou} \quad z : x + \frac{\alpha}{m} :: m : 1;$$

d'où

$$(2) \qquad z = mx + \alpha.$$

Ainsi, en éliminant z entre ces équations, on obtiendra (n° 110) l'équation demandée.

Il vient, toute réduction faite,

$$(3) \qquad y^2 + (1 - m^2)\, x^2 - 2\alpha\,(1 + m)\, x = 0.$$

148. DISCUSSION. — L'équation (3) est privée du terme indépendant d'x et d'y; et cela doit être, puisque, la courbe passant par l'origine A, il faut que l'équation soit vérifiée par le système $[x = 0, y = 0]$.

Examinons successivement les circonstances qui correspondent aux trois hypothèses $m < 1$, $m = 1$, $m > 1$, en commençant par le cas le plus simple.

Soit $m = 1$.

L'équation (3) se réduit à

$$y^2 = 4\alpha x,$$

et est immédiatement comparable avec

$$y^2 = 2px.$$

Il suffit de poser

$$4\alpha = 2p; \quad \text{d'où} \quad p = 2\alpha = 2\,AF;$$

d'où l'on voit que la courbe est une PARABOLE dont le *foyer* est en F, et qui a pour *directrice* DD'.

Le point A en est d'ailleurs le *sommet*, puisque l'on a alors

$$AF : AG :: 1 : 1, \quad \text{ou} \quad AF = AG.$$

149. Soit $m < 1$.

Le coefficient de x^2 est essentiellement *positif*.

L'équation peut être mise sous la forme

$$y^2 = (1 - m^2)\left(\frac{2\alpha}{1-m}x - x^2\right);$$

et en la comparant à l'équation de l'ellipse rapportée à son *sommet de gauche* (n° 144), savoir :

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Ax - x^2),$$

on trouve

$$A = \frac{\alpha}{1-m}, \quad \frac{B^2}{A^2} = 1 - m^2;$$

d'où

$$\frac{B^2}{A} = \alpha(1+m);$$

et, par suite,

$$B = \frac{\alpha}{1-m}\sqrt{1-m^2}.$$

Ainsi, la courbe est une ELLIPSE dont les *axes principaux* sont

$$\frac{2\alpha}{1-m}, \quad \frac{2\alpha}{1-m}\sqrt{1-m^2},$$

et le *paramètre*,

$$2\alpha(1+m).$$

Soit posé $x = \alpha$ (ou AF) dans l'équation FIG. 85.

$$y^2 = (1 - m^2)\left(\frac{2\alpha}{1-m}\cdot x - x^2\right),$$

il vient

$$y^2 = (1-m^2)\cdot\frac{\alpha^2(1+m)}{1-m} = \alpha^2(1+m)^2;$$

d'où

$$y = \pm\alpha(1+m) = \pm\frac{B^2}{A};$$

ce qui prouve (n° 146) que le point F est un des *foyers* de la courbe.

Afin d'obtenir sur la figure le *premier axe*, remarquons que, le point A étant déjà l'*un des sommets*, il suffit de porter sur AX, et de A en B, une distance égale à

$\frac{2}{1-m}\cdot\alpha$; le point B est alors le *second sommet* de la courbe.

Quant au *second* axe, comme on connaît déjà le foyer F, il n'y a qu'à décrire de ce point comme centre, avec un rayon OA, moitié de AB, un arc de cercle qui coupe en deux points C, C', la perpendiculaire élevée du point O, *centre* de l'ellipse.

Enfin, l'autre *foyer* F' s'obtient en prenant OF' = OF.

150. Soit $m > 1$.

Le coefficient de x^2 étant *négatif* dans l'équation (3), on peut mettre celle-ci sous la forme

$$y^2 = (m^2-1)\left(\frac{2\alpha}{m-1}x + x^2\right);$$

et en la comparant à l'équation obtenue n° 145

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}\,(2Ax + x^2),$$

on trouve

$$A = \frac{\alpha}{m-1}, \qquad \frac{B^2}{A^2} = m^2 - 1;$$

d'où

$$\frac{B^2}{A} = \alpha(m+1),$$

et, par suite,

$$B = \frac{\alpha}{m-1}\sqrt{m^2-1};$$

donc la courbe est une HYPERBOLE dont le *premier axe* est $\frac{2\alpha}{m-1}$, le *second*, $\frac{2\alpha}{m-1}\sqrt{m^2-1}$, et le *paramètre*, $2\alpha(m+1)$.

FIG 85. L'hypothèse $x = \alpha$ (ou AF), donne d'ailleurs

$$y = \pm\alpha(m+1) = \pm\frac{B^2}{A};$$

ce qui prouve que, comme pour la *parabole* et l'*ellipse*, le point F est *un foyer* de la courbe.

La construction des *axes* et du *second foyer* s'exécuterait comme pour l'*ellipse*. Toutefois, il faut observer qu'elle doit s'opérer de *droite* à *gauche* par rapport au

point F; car si l'on fait $y = 0$ dans l'équation, il vient

$$\frac{2\alpha}{m-1}x + x^2 = 0, \quad \text{ou} \quad x\left(\frac{2\alpha}{m-1} + x\right) = 0,$$

ce qui donne

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = -\frac{2\alpha}{m-1}.$$

On trouve ainsi le *centre* O', le *second sommet* B' et le *second foyer* F''.

151. La droite DD' porte dans chacune des trois courbes le nom de DIRECTRICE.

PARABOLE. $y^2 = 2px$. FIG. 83.

Il suffit, pour obtenir cette directrice, de prendre à *la gauche* du point A, une distance $AG = AF = \frac{p}{2}$, puis d'*élever* au point G une perpendiculaire à l'axe des x.

ELLIPSE. $y^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Ax - x^2)$, FIG. 77.

l'origine étant supposée (n° 144) en A, et le point fixe en F'.

Comme on a trouvé (n° 149)

$$\frac{B^2}{A^2} = 1 - m^2, \quad \text{d'où} \quad m^2 = \frac{A^2 - B^2}{A^2} = \frac{c^2}{A^2}, \quad \text{et} \quad m = \frac{c}{A},$$

on voit que le *rapport constant* $m : 1$ est représenté *géométriquement* par celui de OF'' à OA.

D'où il suit (n° 147) que la distance du point A à la directrice est une *quatrième proportionnelle* aux trois lignes

$$OF' \text{ ou } c, \quad OA \text{ ou } A, \quad AF' \text{ ou } A - c.$$

Construisant cette ligne exprimée par la quantité

$$\frac{A(A-c)}{c},$$

et la portant de A en G' vers la *gauche* du point A, on obtiendra le *pied de la directrice* (qu'on s'est dispensé de tracer sur la figure).

On a d'ailleurs, pour la distance OG' du *centre* à la *directrice*,

$$OG' = OA + AG' = A + \frac{A(A-c)}{c} = \frac{A^2}{c},$$

qui, n'étant autre chose qu'une *troisième proportionnelle* à c et A, peut être facilement construite.

Il est en outre évident, à cause de la *symétrie* de l'ellipse par rapport aux axes principaux, qu'il doit exister *deux* directrices de part et d'autre du centre, aux distances AG′, AG, exprimées par $-\frac{A^2}{c}$ et $+\frac{A^2}{c}$.

FIG. 80. HYPERBOLE. — On parviendrait à des résultats analogues pour cette courbe.

Mais il faut remarquer que *les pieds des deux directrices* doivent être situés *entre les deux sommets de l'hyperbole*, tandis que, pour l'*ellipse*, ils sont situés sur les *prolongements* de AB.

152. — *Remarque.* On trouve dans les caractères

$$m < 1, \quad m = 1, \quad m > 1,$$

la raison des *dénominations* attribuées aux trois courbes :

L'hypothèse $m < 1$ donne l'*ellipse*, ou la courbe par *défaut*.

L'hypothèse $m = 1$ donne la *parabole*, ou la courbe *par égalité*.

L'hypothèse $m > 1$ donne l'*hyperbole*, ou la courbe *par excès*.

Ces dénominations peuvent encore se déduire de l'équation

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

suivant que l'on a

$$q < 0, \quad q = 0, \quad q > 0,$$

p étant constant pour les trois hypothèses.

§ III. — RÉDUCTION, PAR LA TRANSFORMATION DES COORDONNÉES, DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ A DEUX VARIABLES.

153. Nous allons faire voir maintenant que l'ELLIPSE, l'HYPERBOLE, et la PARABOLE, telles que nous les avons définies précédemment, sont LES SEULES courbes qui puissent être représentées par l'équation générale du *second degré à deux variables*

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Il semble, au premier abord, difficile de concevoir qu'il puisse y avoir *identité* entre toutes les courbes comprises

dans cette équation et les courbes dont les équations sont de la forme

$$My^2 + Nx^2 = P, \quad \text{ou} \quad y^2 = Qx,$$

la PREMIÈRE désignant une *ellipse* ou une *hyperbole*, suivant que M, N, P, sont positifs à la fois (n° 131), ou bien, que M est positif, N négatif, et P négatif ou positif (n°s 139, 140); la *seconde* étant immédiatement comparable à l'équation, $y^2 = 2px$, de la *parabole*.

Mais observons que, si dans les deux équations précédentes, on met à la place de x et de y, les valeurs

$$x = x\cos\alpha + y\cos\alpha' + a,$$
$$y = x\sin\alpha + y\sin\alpha' + b,$$

au moyen desquelles (n° 115) on passe d'un système *rectangulaire* à un système *oblique* d'origine différente, l'équation qui en résulte est de même forme que l'équation complète. Or, il est évident que cette transformation de coordonnées n'a pas changé la *nature* de la courbe; seulement, comme les nouveaux axes se trouvent dans une situation quelconque à l'égard de la courbe, l'équation qui la représente est plus compliquée que lorsque cette courbe est rapportée à ses *axes principaux*.

Voyons donc si, par des transformations de coordonnées, on ne pourrait pas simplifier l'équation la plus générale et la ramener à l'une ou l'autre des deux formes ci-dessus.

Telle est la question qu'il s'agit d'examiner.

154. Remarquons, avant tout, que rien n'empêche de supposer que la courbe soit primitivement rapportée à des axes *rectangulaires;* car s'il en était autrement, on pourrait (n° 120), en conservant la *même origine* et le *même axe* des x, les rendre rectangulaires, et l'équation résultante étant de même forme que la proposée, serait celle sur laquelle on aurait à opérer.

Cela posé, reprenons l'équation

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

et tâchons d'abord de faire disparaître le terme en xy.

Pour cela, nous aurons recours aux formules

$$x = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$y = x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

au moyen desquelles (n° 119) on passe d'un système *rectangulaire* à un système de même espèce, l'*origine* restant la *même*. L'angle α est ici une *indéterminée* (n° 123) qu'il s'agit de calculer d'après la condition que l'équation *transformée* soit privée du rectangle xy, c'est-à-dire que le coefficient de ce terme soit *nul*.

En substituant ces valeurs de x et de y dans l'équation (1), ordonnant, et égalant à 0 le coefficient de xy, on obtient pour l'*équation de condition*,

$$2A\sin\alpha\cos\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha - 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

et pour l'*équation transformée*,

$$(2) \qquad My^2 + Nx^2 + Ry + Sx + F = 0,$$

dans laquelle on a fait, pour plus de simplicité,

$$M = A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha,$$
$$N = A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha,$$
$$R = D\cos\alpha - E\sin\alpha,$$
$$S = D\sin\alpha + E\cos\alpha.$$

[La quantité F est la même dans l'équation (2) que dans l'équation (1)].

Mais l'*équation de condition* pouvant s'écrire

$$(A - C).2\sin\alpha.\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0,$$

devient, en vertu de relations trigonométriques connues,

$$(A - C)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0;$$

d'où l'on déduit

$$\text{tang } 2\alpha = -\frac{B}{A - C}.$$

Or, une tangente pouvant passer par tous les états de grandeur, et même être *infinie*, il s'ensuit que l'angle α est susceptible de détermination, quels que soient les coefficients A, B, C.

Donc, *il est toujours possible de faire disparaître le terme en* xy, *tant que* A, B, C, D, E, F, *ont des valeurs réelles*.

Soient AX, AY, les axes primitifs; pour obtenir les nouveaux axes, *menons* par le point A une droite AL qui formeavec l'axe des x un angle ayant pour tangente, $\frac{-B}{A-C}$; ce qui revient à prendre une partie $AG = 1$, puis à élever une perpendiculaire $GH = \frac{-B}{A-C}$, expression que nous supposons, pour fixer les idées, avoir une valeur *positive* (*). Fig. 86.

Divisons ensuite cet angle LAX en *deux parties égales* par la ligne AX′; cette dernière droite sera le *nouvel axe* des x, et AY′, perpendiculaire à AX′, le nouvel axe des y.

N. B. — La relation

$$\text{tang } 2\alpha = -\frac{B}{A-C},$$

correspondant à deux angles différents, 2α, $180^\circ + 2\alpha$, il semble qu'on puisse prendre à volonté pour nouvel axe des x, la *bissectrice* de l'angle LAX, ou celle de l'angle $180^\circ +$ LAX. Mais observons que, les angles, $\frac{1}{2}$ LAX et $90^\circ + \frac{1}{2}$ LAX, ont pour différence 90 degrés; en sorte que, si l'une de ces droites est prise pour le nouvel axe des x, l'autre doit être prise pour le nouvel axe des y, et réciproquement.

Ainsi, il n'y a réellement qu'UN SEUL SYSTÈME d'axes *rectangulaires* par rapport auxquels l'équation de la courbe peut être débarrassée du terme en xy.

On convient, d'ailleurs, de prendre pour l'angle 2α le plus petit des deux angles donnés par l'expression de tang 2α.

155. Cette première simplification de l'équation géné-

(*) Tant que les coefficients A, B, C, D, etc., ne reçoivent aucune valeur particulière, il est impossible de déterminer le *signe* dont telle ou telle fonction de ces quantités qu'on suppose réelles et de *signes quelconques*, doit être affectée; mais alors il est d'usage de considérer ces fonctions comme *positives*.

Ainsi, qu'il s'agisse de construire l'expression d'une *distance* à porter sur l'un des axes, ou sur une *parallèle* à ces axes, on la porte dans le sens que l'on est convenu de regarder comme *positif*. De même s'il s'agit d'un angle, on le compte de *droite* à *gauche*; et les lignes *trigonométriques* sont elles-mêmes considérées comme *positives*.

rale étant opérée, calculons les valeurs de M et de N au moyen de la valeur obtenue pour tang 2α.

On a, d'après des formules trigonométriques connues,

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tang^2 2\alpha}}, \quad \sin 2\alpha = \frac{\tang 2\alpha}{\sqrt{1+\tang^2 2\alpha}},$$

d'où l'on déduit, en remplaçant tang 2α par sa valeur,

$$\cos 2\alpha = \frac{A-C}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}}, \quad \sin 2\alpha = \frac{-B}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}}.$$

D'un autre côté, les équations

$$M = A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha,$$
$$N = A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha,$$

étant d'abord ajoutées entre elles, donnent, d'après la relation $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,

$$M + N = A + C.$$

On trouve également, en les soustrayant l'une de l'autre,

$$M - N = (A-C)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - B.2\sin\alpha\cos\alpha,$$

ou, à cause de $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

$$M - N = (A-C)\cos 2\alpha - B\sin 2\alpha;$$

et si l'on remplace $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, par leurs valeurs,

$$M - N = \frac{(A-C)^2+B^2}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}};$$

ou, supprimant le facteur $\sqrt{(A-C)^2+B^2}$,

$$M - N = \sqrt{(A-C)^2+B^2}.$$

Connaissant les valeurs de $M+N$ et de $M-N$, on en déduit successivement

$$M = \frac{A+C}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2},$$

$$N = \frac{A+C}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}\ (*),$$

d'où, multipliant ces deux équations membre à membre et

(*) Ces expressions de M et de N, à cause du radical qui y entre, comportent chacune *deux* valeurs qu'il sera nécessaire d'interpréter quand nous en viendrons à des applications numériques.

réduisant,

$$M.N = \frac{4AC - B^2}{4} = -\frac{B^2 - 4AC}{4}.$$

Ce dernier résultat prouve, 1° que les deux coefficients M et N sont *de même signe* ou *de signes contraires*, suivant que la quantité $B^2 - 4AC$ est *négative* ou *positive*; 2° que l'un de ces coefficients est *nul* toutes les fois que l'on a $B^2 - 4AC = 0$, et ne peut être nul que sous cette condition.

N. B. — On ne saurait avoir en même temps $M = 0$, $N = 0$; car il en résulterait

$$M + N = 0, \quad M - N = 0,$$

et, par conséquent,

$$A + C = 0, \quad (A - C)^2 + B^2 = 0.$$

Or, cette dernière condition entraîne les deux suivantes:

$$B = 0, \quad A - C = 0;$$

et celle-ci, combinée avec $A + C = 0$, donne

$$A = 0, \quad C = 0.$$

Ce serait donc supposer que l'équation primitive ne renfermait aucun des trois termes en y^2, xy, et x^2; ce qui n'est pas admissible, puisqu'alors l'équation ne serait que du premier degré.

156. Complétons maintenant la *réduction de l'équation générale du second degré.*

L'équation étant déjà débarrassée du terme en xy, essayons, par une translation d'origine, de faire évanouir les termes du premier degré en x et y.

Pour cela, faisons (n° 114), dans l'équation (2) du n° 154,

$$x = x + a,$$
$$y = y + b;$$

et égalons séparément à 0 les deux coefficients de x et de y qui résultent de cette substitution.

On obtient d'abord pour les *deux équations de condition*,

$$2Mb + R = 0, \quad 2Na + S = 0,$$

M, N, R et S étant des quantités essentiellement *réelles*,

et pour l'*équation transformée*,

$$My^2 + Nx^2 + F' = 0$$

(en posant $F' = Mb^2 + Na^2 + Rb + Sa + F$).

On déduit des deux équations de condition,

$$a = -\frac{S}{2N}, \quad b = -\frac{R}{2M}.$$

Or, ces valeurs de a et de b seront toujours *réelles et finies* tant que M et N seront différents de 0, c'est-à-dire (n° 155), tant que l'on aura

$$B^2 - 4AC \gtrless 0.$$

FIG. 86. On pourra donc, dans ce cas, transporter l'origine en un nouveau point A' ayant pour coordonnées,

$$AC = -\frac{S}{2N}, \quad CA' = -\frac{R}{2M},$$

et pour lequel l'équation de la courbe, rapportée aux axes A'X'', A'Y'', parallèles à AX', AY' sera de la forme

$$My^2 + Nx^2 = P$$

(P désignant ce que devient $-F'$ lorsqu'on y a remplacé a et b par leurs valeurs).

On pourrait avoir soit $R = 0$, soit $S = 0$, auquel cas b ou a serait *nul*, et la nouvelle origine serait située sur AX' ou AY'.

Aucun de ces coefficients R, S, ne saurait d'ailleurs être *infini*, d'après leur composition (n° 154).

Ainsi, toutes les fois que, dans l'équation complète du second degré, la quantité $B^2 - 4AC$ est *différente* de 0, *il est possible de faire disparaître les deux termes en* x *et en* y, et, par conséquent, *de ramener l'équation primitive à la forme*

$$My^2 + Nx^2 = P. \tag{3}$$

157. Supposons actuellement que l'un des deux coefficients M ou N soit *nul*, ce qui exige (n° 155) que l'on ait entre les coefficients A B, C, de la proposée, la relation

$$B^2 - 4AC = 0.$$

Dans ce cas, l'une des valeurs

$$a = -\frac{S}{2N}, \quad b = -\frac{R}{2M},$$

se présente sous la forme de l'*infini;* et comme on ne saurait transporter l'origine à une distance infinie, il est impossible d'exécuter la transformation proposée.

Et en effet, admettons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$N = 0.$$

L'équation (2) du n° 154 se réduit à

$$My^2 + Ry + Sx + F = 0;$$

et si l'on substitue dans cette équation les valeurs $x = x + a$, $y = y + b$, il vient

$$My^2 + (2Mb + R)y + Sx + Mb^2 + Rb + Sa + F = 0.$$

Or, le coefficient de x, dans cette équation, étant indépendant des indéterminées a et b, on ne peut disposer de celles-ci de manière à faire disparaître ce terme.

Mais voyons si, dans ce cas, il est possible de faire évanouir le terme en y et la quantité indépendante de x et de y?

Il suffit, pour cela, de poser les équations de condition,

$$2Mb + R = 0, \quad Mb^2 + Rb + Sa + F = 0;$$

d'où l'on déduit

$$b = -\frac{R}{2M}, \quad a = -\frac{Mb^2 + Rb + F}{S},$$

ou, mettant dans l'expression de a, la valeur trouvée pour b,

$$b = -\frac{R}{2M}, \qquad a = \frac{R^2 - 4MF}{4MS}.$$

De ces deux valeurs, celle de b est nécessairement *réelle et finie*, puisque (n° 155, *N. B.*) on ne peut avoir $M = 0$ en même temps que $N = 0$.

Quant à la valeur de a, si le coefficient S n'est pas *nul* en même temps que N, elle est aussi *réelle et finie*.

Ainsi, lorsque la disparition du terme en xy aura donné lieu à celle du terme en x^2, en laissant subsister le terme en x, la transformation précédente pourra s'exécuter, et l'équation de la courbe rapportée aux nouveaux axes, sera ramenée à la forme

$$My^2 + Sx = 0,$$

ou plutôt à celle-ci,

$$y^2 = Qx, \tag{4}$$

Q étant égal à $-\frac{S}{M}$.

N. B. — Si au lieu de $N = 0$, on supposait $M = 0$, R étant *différent* de *zéro*, on reconnaîtrait de même que l'équation peut être ramenée à la forme

$$Nx^2 + Ry = 0;$$

mais en y changeant y en x et x en y, ce qui reviendrait (n° 121) à *renverser la position* de la courbe par rapport aux axes, on retomberait sur l'équation

$$Ny^2 + Rx = 0, \quad \text{ou} \quad y^2 = Qx \left(\text{en posant } Q = -\frac{R}{N}\right).$$

FIG. 86. 158. Les deux cas particuliers de $N = 0$, $S = 0$, ou de $M = 0$, $R = 0$, font exception à la transformation précédente, puisqu'alors la valeur de l'une des coordonnées a, b, de la nouvelle origine, se présente sous *forme infinie*.

Mais remarquons que l'équation (2) du n° 154, reçoit alors l'une des deux formes

$$My^2 + Ry + F = 0, \quad Nx^2 + Sx + F = 0;$$

et comme chacune de ces équations ne renferme qu'une seule variable, elle représente (n° 83) *un système de deux droites parallèles* soit à l'axe AX′, soit à l'axe AY′.

159. En résumant tout ce qui a été dit n°s 153 et suivants, on doit regarder comme rigoureusement démontré que *toute équation du second degré à deux variables peut, par une double transformation de coordonnées, être ramenée à l'une des deux formes*

$$My^2 + Nx^2 = P, \quad y^2 = Qx,$$

excepté dans un cas tout particulier, celui où, par la disparition du terme en xy, le carré et la première puissance d'une même variable disparaissent également. Mais alors l'équation représente, ainsi que nous venons de le voir, *un système de deux droites parallèles*.

On parvient à la *première* forme d'équation toutes les fois que M et N sont *différents* de 0, c'est-à-dire (n° 155) lorsque, dans l'équation primitive, on a

$$B^2 - 4AC < \text{ou} > 0;$$

et à la *seconde* forme, toutes les fois que les coefficients A, B, C, sont liés entre eux par la relation

$$B^2 - 4AC = 0.$$

On a vu, d'ailleurs (n°s 131, 139 et 140), que la courbe est une *ellipse* ou une *hyperbole* suivant que M et N sont de *même* signe ou de *signes contraires*, c'est-à-dire (n° 155) suivant que $B^2 - 4AC$ est *négatif* ou *positif*.

D'où l'on peut conclure enfin que, dans l'équation générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

la condition $B^2 - 4AC < 0$ caractérise les ELLIPSES,
$B^2 - 4AC > 0$ ..... les HYPERBOLES,
$B^2 - 4AC = 0$ ..... les PARABOLES.

160. *N. B.* — La dernière de ces relations donnant

$$B = 2\sqrt{A}.\sqrt{C},$$

les trois premiers termes

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2$$

de l'équation générale peuvent, dans le cas qui s'y rapporte, se mettre sous la forme

$$(y\sqrt{A} + x\sqrt{C})^2$$

et constituent ainsi un *carré parfait*.

Ce caractère, qui équivaut à la condition $B^2 - 4AC = 0$, est généralement plus commode dans les applications numériques, pour distinguer la *parabole* des deux autres courbes.

161. VARIÉTÉS DES TROIS COURBES. — Les trois courbes du second degré que nous venons de reconnaître, sont susceptibles de certaines *variétés* qui ressortent de la discussion de leurs équations respectives.

Considérons d'abord l'équation

$$My^2 + Nx^2 = P,$$

dans laquelle on peut toujours supposer M *positif*, puisque s'il était *négatif*, il suffirait de changer les signes des deux membres.

Il peut se présenter différents cas, par rapport aux *signes* et aux *valeurs numériques* des autres coefficients.

ELLIPSES..... M *et* N *positifs.*

Soit P *positif* en même temps que M et N.

L'équation $My^2 + Nx^2 = P$ représente (n° 131) une ellipse qui, dans le cas particulier de $M = N$, devient *un cercle* (n° 132).

Le cercle est donc *une première variété* de l'ellipse.

Si l'on a M et N positifs et P négatif, l'équation est évidemment *impossible;* c'est-à-dire qu'à des valeurs de x *réelles* il ne peut correspondre que des valeurs *imaginaires* pour y, et réciproquement.

Donc *la courbe est imaginaire*, ou, en d'autres termes, l'équation n'a pas de lieu *géométrique*, ou ne représente *rien*.

Soit $P = 0$. L'équation, se réduisant à

$$My^2 + Nx^2 = 0,$$

ne peut être satisfaite que par le système $(x = 0, y = 0)$. Donc la courbe se réduit à *un point.*

Ainsi, les *variétés* de l'ELLIPSE sont :

Le cercle, une courbe imaginaire, et *un point.*

HYPERBOLES..... M *positif*, N *négatif.*

P peut être *négatif* ou *positif.*

Dans le premier cas, l'équation $My^2 - Nx^2 = P$ représente (n° 139) une hyperbole *rapportée à son axe transverse* comme axe des x; et dans le second (n° 140) une hyperbole *rapportée à son axe non transverse.*

Le cas particulier de N négatif et numériquement égal à M, donne l'*hyperbole équilatère.*

Si l'on fait $P = 0$, l'équation se réduit à

$$My^2 - Nx^2 = 0;$$

et l'on en tire

$$y = \pm x \sqrt{\frac{N}{M}}.$$

Donc, dans ce cas, la courbe dégénère en *un système de deux droites qui se coupent.*

Ainsi, les *variétés* de l'HYPERBOLE sont : *l'hyperbole équilatère*, et *un système de deux droites qui se coupent*.

$$\text{PARABOLES} \ldots\ldots \quad y^2 = Qx.$$

Il peut arriver que Q soit *positif* ou *négatif*.

Dans le premier cas, l'équation représente évidemment une *parabole* dont le paramètre, $2p$, est égal au coefficient Q.

Dans le second, comme, en changeant x en $-x$, l'équation $y^2 = -Qx$ devient $y^2 = Qx$, il s'ensuit que la courbe est encore une *parabole;* seulement, elle est dirigée dans le sens des x négatifs. Mais en pliant la figure suivant l'axe des y, on remet la courbe dans la situation ordinaire.

Le cas dans lequel on suppose (n° 158) $N = 0$, $S = 0$ ou bien $M = 0$, $R = 0$, est regardé comme donnant *une variété* de la parabole, par la raison que $M = 0$, ou $N = 0$, est le caractère général de cette courbe.

Les équations

$$My^2 + Ry + F = 0, \quad \text{ou} \quad Nx^2 + Sx + F = 0,$$

qui correspondent à ces hypothèses particulières, donnant par leur résolution

$$y = -\frac{R}{2M} \pm \frac{1}{2M}\sqrt{R^2 - 4MF},$$

ou bien

$$x = -\frac{S}{2N} \pm \frac{1}{2N}\sqrt{S^2 - 4NF},$$

il en résulte que, suivant que l'on a

$$R^2 - 4MF > 0, \quad = 0, \quad \text{ou} \quad < 0,$$

ou bien

$$S^2 - 4NF > 0, \quad = 0, \quad \text{ou} \quad < 0,$$

l'équation représente *deux droites parallèles*, *une seule droite*, ou *deux droites imaginaires*.

Telles sont les *variétés* de la PARABOLE.

162. *Mode de réduction de l'équation du second degré, qui convient au cas de* $B^2 - 4AC <$ ou > 0. — Nous avons vu (n°s 154 à 156) comment, par une *double transformation de coordonnées*, on peut ramener toute équation du

second degré à deux variables, à la forme

$$My^2 + Nx^2 = P,$$

en tant que, dans l'équation primitive,

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

on a

$$B^2 - 4AC \lessgtr 0,$$

ce qui caractérise l'*ellipse* ou l'*hyperbole*.

Mais, la méthode que nous avons exposée ayant, en général, l'inconvénient d'introduire des quantités *irrationnelles* dans les coefficients de l'équation *transformée* (n° 154) et, par suite, aussi, dans les valeurs des coordonnées a et b de la nouvelle origine, nous allons montrer qu'on peut avec avantage, dans ce cas, *intervertir l'ordre* des deux transformations.

Reprenons, à cet effet, l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0; \tag{1}$$

et tâchons de faire disparaître, *d'abord*, les termes (dits *linéaires*) en x et y, savoir :

$$Dy \quad \text{et} \quad Ex.$$

Pour cela, remplaçons x, y, respectivement par $x + a$, $y + b$; il vient

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + (2Ab + Ba + D)y + (2Ca + Bb + E)x + Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F = 0;$$

et puisqu'on veut que la nouvelle équation soit privée des termes *linéaires*, il suffit de poser

$$2Ab + Ba + D = 0, \quad 2Ca + Bb + E = 0,$$

et de déterminer (n° 123) a et b de manière que ces deux *équations de condition* soient satisfaites.

Or, on obtient, par l'élimination de a, b, entre ces équations,

$$a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \quad b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC},$$

valeurs essentiellement *réelles* et *finies*, puisque, par hypothèse, $B^2 - 4AC$ est *différent* de 0.

D'où l'on peut conclure que cette PREMIÈRE transformation est *toujours* possible, tant que l'on a

$$B^2 - 4AC < \text{ou} > 0.$$

L'équation *transformée* devient alors

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F' = 0, \tag{2}$$

F' ayant pour valeur

$$Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F.$$

Cette dernière expression, qui n'est que le *résultat de la substitution* de a, b, à la place de x, y, dans le premier membre de la proposée, peut recevoir une forme plus simple, à l'aide des deux équations de condition.

En effet, si, après avoir multiplié la première de ces équations par b et la seconde par a, on les ajoute l'une à l'autre, il vient

$$2Ab^2 + 2Bab + 2Ca^2 + Db + Ea = 0;$$

d'où l'on déduit

$$Ab^2 + Bab + Ca^2 = -\frac{Db + Ea}{2},$$

ce qui donne

$$F' = F + \frac{Db + Ea}{2}.$$

163. L'équation (2) mérite une attention toute particulière.

En y posant $y = mx$, on obtient

$$(Am^2 + Bm + C)x^2 + F' = 0,$$

d'où

$$x = \pm\sqrt{\frac{-F'}{Am^2 + Bm + C}};$$

par suite,

$$y = \pm m\sqrt{\frac{-F'}{Am^2 + Bm + C}}.$$

Ce qui prouve, comme au n° 129, que *toute droite* menée par la *nouvelle origine* des coordonnées, et terminée de part et d'autre à la courbe, est *divisée par ce point en deux parties égales*.

Donc (n° 130) ce point est le CENTRE de la courbe; et l'on dit alors qu'elle est *rapportée à son centre* comme origine.

N. B. — Dans le cas de $B^2 - 4AC = 0$, les valeurs des coordonnées a et b de la *nouvelle origine* sont *infinies;* et le *centre* est alors situé à l'*infini;* résultat conforme à ce que l'on a établi au n° 144.

164. La *première transformation* étant opérée, la *se-*

conde, qui a pour but de faire disparaître le terme en xy de l'équation (2), et qui (n° 154) est *toujours possible*, s'exécute de la manière indiquée dans ce numéro.

Les opérations auxquelles donne lieu la *double transformation* sont donc, suivant la *deuxième méthode*, qui convient au cas de $B^2 - 4Ac \lessgtr 0$, représentées dans le tableau suivant :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

1°. $a = \dfrac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}$; $b = \dfrac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}$; $F' = F + \dfrac{Db + Ea}{2}$;

Première transformée : $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F' = 0.$

2°. $$\operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{B}{A - C},$$

$$M = \frac{A + C}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A - C)^2 + B^2},$$

$$N = \frac{A + C}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(A - C)^2 + B^2};$$

Résultat final : $My^2 + Nx^2 + P = 0,$

P désignant ce que devient F′ ou $F + \dfrac{Db + Ea}{2}$ après qu'on y a remplacé a et b, par les valeurs ci-dessus.

La courbe se trouve ainsi rapportée à *son centre* et à *ses axes principaux*.

165. *Remarque.* — La *seconde* transformation devient inutile lorsque la *première*, qui correspond au *déplacement d'origine*, conduit à un résultat de la forme

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = 0.$$

Car cette équation résolue par rapport à y donne

$$y = x\left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right),$$

expression qui montre :

1°. Que, dans le cas de

$$B^2 - 4AC < 0,$$

la courbe se réduit à un POINT qui n'est autre que la *seconde origine*, puisque alors l'équation n'est satisfaite que par $x = 0, y = 0$;

2°. Et que, dans le cas de

$$B^2 - 4AC > 0,$$

la courbe dégénère en un *système de deux droites qui se coupent à cette nouvelle origine.*

166. *Interprétation du double signe des valeurs de* M *et de* N. — Nous avons fait remarquer (n° 155, note au bas de la page), que les expressions de M et de N comportent, chacune, *deux* valeurs.

Pour interpréter ces *doubles valeurs*, rappelons-nous qu'elles ont été déduites de celles-ci :

$$\cos 2\alpha = \frac{A-C}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}}, \quad \sin 2\alpha = \frac{-B}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}}.$$

Or, comme nous sommes convenus (n° 154, *N. B.*) de prendre pour l'angle 2α, le plus petit des angles fournis par la valeur $\text{tang}\, 2\alpha = -\frac{B}{A-C}$, il s'ensuit que $\sin 2\alpha$ est essentiellement *positif;* et dès lors, il peut se présenter *deux cas :*

Ou B est *négatif* dans l'équation particulière proposée; ou bien B est *positif.*

Dans le PREMIER cas, le signe + doit accompagner le radical dans la valeur de $\sin 2\alpha$; et, par suite, on a pour les *vraies* valeurs de M et de N,

$$M = \frac{A+C}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2},$$

$$N = \frac{A+C}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}.$$

Dans le SECOND, au contraire, pour que $\sin 2\alpha$ conserve le signe +, il faut que le radical soit affecté du signe —; et les *vraies* valeurs de M et de N, doivent être

$$M = \frac{A+C}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2},$$

$$N = \frac{A+C}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}.$$

167. Lorsque l'équation est aux *paraboles*, c'est-à-dire dans le cas de $B^2-4AC=0$, il convient de conserver l'ordre primitif des deux transformations, et l'on peut résumer de la manière suivante les résultats auxquels on par-

vient :

1°. $$\text{tang } 2\alpha = -\frac{B}{A-C},$$

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{A+C}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2} \\ N &= \frac{A+C}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2} \end{aligned}\right\} \text{ si B est } \textit{négatif},$$

ou bien,

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{A+C}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2} \\ N &= \frac{A+C}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2} \end{aligned}\right\} \text{ si B est } \textit{positif},$$

l'une des deux quantités M *ou* N *étant nécessairement nulle;*

D'où, en supposant, par exemple, $N = 0$,

$$My^2 + Ry + Sx + F = 0, \quad \textit{première transformée.}$$

[Les coefficients R et S sont exprimés (n° 154), au moyen des valeurs de $\cos\alpha$ et de $\sin\alpha$, déduites de celles de $\text{tang } 2\alpha$.]

2°. $$b = -\frac{R}{2M}; \quad a = \frac{R^2 - 4MF}{4MS},$$

$$My^2 + Sx = 0, \quad \text{ou} \quad y^2 = Qx, \quad \textit{résultat final.}$$

N. B. — Si l'on a $S = 0$, la seconde tranformation est impossible; mais alors la *première transformée* représente généralement *deux droites parallèles au nouvel axe des x*; ces droites pourraient d'ailleurs se réduire à *une seule*, ou même être *imaginaires*.

Applications numériques.

168. *Mode de transformation correspondant à* $B^2 - 4AC \lessgtr 0$.

Soit, pour *premier exemple*,

$$y^2 - 2xy + 3x^2 + 2y - 4x - 3 = 0;$$

on a

$$A = 1, \quad B = -2, \quad C = 3, \quad D = 2, \quad E = -4, \quad F = -3;$$

d'où

$$B^2 - 4AC = 4 - 12 = -8, \quad \text{Ellipse.}$$

Appliquons les formules du n° 164 :

1°. $$a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} = -\frac{1}{2},$$

et

$$F' = F + \frac{Db + Ea}{2} = -3 + \frac{(-1-2)}{2} = -\frac{9}{2},$$

d'où

Première transformée : $y^2 - 2xy + 3x^2 - \frac{9}{2} = 0.$

Soit pris sur AX, $AC = \frac{1}{2}$, et soit élevée au point C une per- FIG. 87.
pendiculaire $CO = -\frac{1}{2}$; si l'on mène par le point O, les deux droites OX', OY' parallèles à AX, AY, la courbe se trouve rapportée à deux nouveaux axes *parallèles* aux anciens.

2°. $\text{tang } 2\alpha = -\frac{B}{A-C} = \frac{2}{-2} = -1.$

Comme on a

$$AC = \frac{1}{2}, \quad CO = -\frac{1}{2},$$

il s'ensuit que

$$\text{tang } AOX' = -1;$$

il suffit donc, après avoir tiré la droite OAL, de diviser l'angle LOX' en *deux parties égales* par la droite OX'', puis d'élever OY'' perpendiculaire à OX''; et la courbe se trouve alors rapportée au *troisième* système d'axes OX'', OY''.

On a d'ailleurs (n° 166)

$$M = \frac{A+C}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2 + B^2} = 2 + \sqrt{2},$$

$$N = \frac{A+C}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2 + B^2} = 2 - \sqrt{2};$$

ce qui donne la *transformée finale*,

$$(2+\sqrt{2})y^2 + (2-\sqrt{2})x^2 = \frac{9}{2}.$$

Pour comparer cette équation à celle-ci,

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,$$

et en déduire les valeurs numériques des *axes principaux*, 2A, 2B, il faut (n° 133) la multiplier par

$$\frac{P}{MN} \quad \text{ou} \quad \frac{9}{2(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{9}{4}.$$

On obtient ainsi :

$$\frac{9(2+\sqrt{2})}{4}y^2 + \frac{9(2-\sqrt{2})}{4}x^2 = \frac{81}{8};$$

donc

$$A = \frac{3}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad B = \frac{3}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

ou, calculant ces valeurs à 0,1 près, et doublant,

$$2A = 5{,}5, \quad 2B = 2{,}2.$$

La courbe est une ELLIPSE telle que DED'E' dont le *grand axe* est dans le sens de OX".

Deuxième exemple.

$$y^2 + 2xy + 2x^2 - 2x - 1 = 0,$$

$A = 1$, $B = +2$, $C = 2$, $D = 0$, $E = -2$, $F = -1$; d'où

$$B^2 - 4AC = -4, \quad \text{ELLIPSE.}$$

1°.
$$a = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} = \frac{-4}{-4} = 1,$$

$$b = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} = \frac{+4}{-4} = -1,$$

$$F' = F + \frac{Db + Ea}{2} = -1 + \frac{2}{2} = 0;$$

Première transformée : $y^2 + 2xy + 2x^2 = 0.$

La courbe se trouve ainsi rapportée au point $[a = 1, b = -1]$ comme *nouvelle origine*, et à des axes *parallèles* aux premiers.

2°.
$$\text{tang } 2\alpha = -\frac{B}{A - C} = \frac{-2}{-1} = 2;$$

et puisque B est *positif* dans l'équation,

$$M = \frac{A + C}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(A - C)^2 + B^2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5},$$

$$N = \frac{A + C}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(A - C)^2 + B^2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5};$$

ce qui donne, pour la *transformée finale*,

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)y^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)x^2 = 0.$$

Comme dans cette équation les coefficients M et N sont tous les deux *positifs*, elle ne peut être satisfaite que par $x = 0$, $y = 0$.

Donc, l'*ellipse* se réduit à UN POINT qui n'est autre que la *seconde origine* à laquelle on avait rapporté la courbe.

Ce résultat est conforme à la *remarque* du n° 165, et l'on aurait pu se dispenser d'opérer la *seconde transformation*.

Troisième exemple.

$$y^2+2xy-2x^2-4y-x+10=0,$$

$$A=1,\ B=+2,\ C=-2,\ D=-4,\ E=-1,\ F=10,$$

$$B^2-4AC=4+8=+12,\quad \text{Hyperbole.}$$

1°. $$a=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}=\frac{1}{2},\quad b=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}=\frac{3}{2},$$

$$F'=F+\frac{Db+Ea}{2}=10-\frac{13}{4}=\frac{27}{4}.$$

Prenant sur AX, $AN=\frac{1}{2}$, et élevant NO perpendiculaire à AX et égale à $\frac{3}{2}$, on a le point O pour *nouvelle origine*, et OX', OY', pour les *nouveaux axes*. Fig. 88.

La *première transformée* est d'ailleurs

$$y^2+2xy-2x^2+\frac{27}{4}=0.$$

2°. $$\text{tang}\,2\alpha=-\frac{B}{A-C}=-\frac{2}{3}.$$

Prenons sur OX', OR = 1, puis *élevons* au point R, RS perpendiculaire à OX' et égale à $-\frac{2}{3}$, et *tirons* la droite SOL; il en résulte $\text{tang}\,LOX'=-\frac{2}{3}$.

Donc, si l'on divise l'angle LOX' en deux parties égales, par la droite OX'', on a OX'', OY'' pour le *troisième* système d'axes.

Les quantités M et N sont d'ailleurs, à cause de B *positif*,

$$M=\frac{A+C}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13},$$

$$N=\frac{A+C}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13};$$

ce qui donne, pour la *transformée finale*, après un changement de signe,

$$\frac{\sqrt{13}+1}{2}y^2-\frac{\sqrt{13}-1}{2}x^2=\frac{27}{4}.$$

Ici, l'*axe transverse* est (n° 140) sur OY''; c'est-à-dire que le *premier axe principal* est figuré par BB'.

On obtiendrait, d'ailleurs, les valeurs numériques des deux axes principaux, en opérant comme il a été dit au n° 139.

Quatrième exemple.

$$y^2+xy-2x^2-y+x=0,$$

$$A=1,\quad B=+1,\quad C=-2,\quad D=-1,\quad E=1,\quad F=0,$$

$$B^2-4AC=+9,\qquad \text{HYPERBOLE.}$$

$$1^\circ.\quad a=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}=\frac{1}{3},\quad b=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}=\frac{1}{3},$$

$$F'=F+\frac{Db+Ea}{2}=0+\frac{\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)}{2}=0;$$

ce qui donne, pour *première transformée*,

$$y^2+xy-2x^2=0.$$

$$2^\circ.\qquad \text{tang}\,2\alpha=-\frac{B}{A-C}=-\frac{1}{3},$$

et comme B est *positif*,

$$M=\frac{A+C}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$N=\frac{A+C}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

On obtient ainsi pour *seconde transformée*, en changeant les signes, et multipliant par 2,

$$(\sqrt{2}+1)y^2-(\sqrt{2}-1)x^2=0,$$

équation qui, résolue par rapport à y, devient

$$y=\pm x\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}},$$

ou, transformant et réduisant,

$$y=\pm x(\sqrt{2}-1),$$

et représente, par conséquent, *un système de deux droites* qui se coupent à la *nouvelle origine* dont les coordonnées sont

$$a=\frac{1}{3},\quad b=\frac{1}{3}.$$

On voit encore ici se vérifier la *remarque* du n° **168**; et l'on serait parvenu au même résultat en traitant directement la *première transformée*.

169. *Mode de transformation pour le cas de* $B^2 - 4AC = 0$.

Soit, pour *cinquième exemple*,

$$y^2 - 4xy + 4x^2 + 2y - 7x - 1 = 0,$$

$$A = 1, \quad B = -4, \quad C = 4, \quad D = 2, \quad E = -7, \quad F = -1,$$

$$B^2 - 4AC = 16 - 16 = 0, \qquad \text{PARABOLE.}$$

Il y a lieu ici d'appliquer les formules du n° **167**.

1°. $$\operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{B}{A - C} = -\frac{4}{3},$$

d'où

$$\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}, \quad \sin 2\alpha = +\frac{4}{5};$$

et, par suite,

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}, \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{1}{5}\sqrt{5},$$

$$M = \frac{A + C}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(A - C)^2 + B^2} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5,$$

$$N = \frac{A + C}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(A - C)^2 + B^2} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0,$$

$$R = D\cos\alpha - E\sin\alpha = \frac{16}{5}\sqrt{5},$$

$$S = D\sin\alpha + E\cos\alpha = -\frac{3}{5}\sqrt{5};$$

ce qui donne, pour *première transformée*,

$$5y^2 + \frac{16}{5}\sqrt{5}\,.\,y - \frac{3}{5}\sqrt{5}\,.\,x - 1 = 0.$$

Pour construire les deux nouveaux axes, *prenez* sur AX une distance AC égale à 1 ; *élevez* au point C une perpendiculaire CD égale à $-\frac{4}{3}$, puis *tracez* la droite DAB ; vous avez ainsi

FIG. 89.

$$\operatorname{tang} BAX = -\frac{4}{3}.$$

Divisez l'angle BAX en deux parties égales, et vous obtenez les axes AX′, AY′, pour *second* système de coordonnées.

2°. $$b = -\frac{R}{2M} = -\frac{8}{25}\sqrt{5}, \quad a = \frac{R^2 - 4MF}{4MS} = -\frac{89}{75}\sqrt{5}.$$

D'où l'on déduit la *seconde transformée*

$$5y^2 - \frac{3}{5}\sqrt{5}\,.\,x = 0.$$

Les quantités

$$b = -\frac{8}{25}\sqrt{5}, \quad a = -\frac{89}{75}\sqrt{5}, \quad S = -\frac{3}{5}\sqrt{5}$$

étant évaluées en décimales à 0,1 *près* par exemple, deviennent respectivement

$$b = -0{,}7, \quad a = -2{,}7, \quad S = -1{,}3.$$

Prenons sur AX′ une distance AE $= -2{,}7$; élevant en E, EA′ perpendiculaire à AX′ et égal à $-0{,}7$, puis, menant A′X″, A′Y″ parallèles à AX′, AY′, on aura le système d'axes auxquels est rapportée la PARABOLE,

$$5y^2 - 1{,}3.x = 0,$$

dont le *paramètre* a pour expression 1,3, et qui, par conséquent, peut être facilement construite au moyen des procédés indiqués au n° 141.

On obtient ainsi une courbe telle que MA′N, tangente en A′ à l'axe A′Y″.

Sixième exemple.

$$y^2 - 2xy + x^2 + 2y - 2x - 3 = 0,$$

$$A = 1, \quad B = -2, \quad C = 1, \quad D = 2, \quad E = -2, \quad F = -3,$$

$$B^2 - 4AC = 4 - 4 = 0, \qquad \text{PARABOLE.}$$

$$\text{tang } 2\alpha = -\frac{B}{A - C} = \frac{2}{0}, \quad \cos 2\alpha = 0, \quad \sin 2\alpha = 1,$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$M = \frac{A + C}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(A - C)^2 + B^2} = 1 + 1 = 2,$$

$$N = \frac{A + C}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(A - C)^2 + B^2} = 1 - 1 = 0,$$

$$R = D\cos\alpha - E\sin\alpha = 2\sqrt{2}, \quad S = D\sin\alpha + E\cos\alpha = 0;$$

ce qui donne la *première transformée*

$$2y^2 + 2\sqrt{2}.y - 3 = 0.$$

FIG. 91. La valeur obtenue pour tang 2α étant *infinie*, indique que le nouvel *axe* des x, AX′, est la *bissectrice* de l'angle YAX.

Quant à la *seconde* transformation de coordonnées, il n'y a pas lieu (n° 167, *N. B.*) de l'effectuer, puisque l'équation de la première transformée ne renferme plus que la *seule variable* y.

Cette équation représente un *système de deux droites parallèles*

au nouvel axe des x ; système que l'on peut *construire* facilement en résolvant cette équation ; il vient, toute réduction faite,

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad y = -\frac{3}{2}\sqrt{2},$$

ou

$$y = 0{,}7 \quad \text{et} \quad y = -2{,}1, \quad \text{à } 0{,}1 \text{ près.}$$

Prenant sur AY′ deux distances AB=0,7 et AB′= — 2,1, puis, tirant les droites BC, B′C′, parallèles à AX′, on obtient le système demandé.

Les différents exemples que nous venons de traiter, suffisent pour montrer comment *une courbe du second degré* exprimée par une équation numérique quelconque, peut, par *une double* transformation de coordonnées, être rapportée à son *centre* et à ses *axes principaux*, si c'est une ELLIPSE ou une HYPERBOLE, et à son *axe principal*, si c'est une PARABOLE.

170. REMARQUE GÉNÉRALE sur toutes les courbes exprimées par une équation du *second degré* en x et y, ces lettres représentant les *distances* d'un point à des axes *fixes* et donnés de position sur un plan.

Dans la *double* transformation de coordonnées que nous avons exécutée pour ramener l'équation générale du second degré à deux variables, à l'une ou à l'autre des deux formes

$$My^2 + Nx^2 = P, \quad y^2 = Qx,$$

nous sommes partis de la supposition que la courbe était d'abord rapportée à des axes *rectangulaires ;* et que le *troisième* système d'axes était lui-même rectangulaire.

Les *trois classes* de courbes du second degré ont été ensuite déterminées d'après des hypothèses faites sur les coefficients M, N, P, Q.

Mais si nous supposons qu'une courbe rapportée à des axes OBLIQUES, soit exprimée par l'une de ces équations, *peut-on affirmer que*, pour les mêmes hypothèses faites sur les coefficients, *la courbe*, sous le rapport de la forme, *est la même que dans le cas d'axes* RECTANGULAIRES?

Pour répondre à cette question, il faut remarquer que

chacune des *trois* courbes obtenues dans la supposition d'axes *rectangulaires* offre, dans son cours, un caractère qui lui est propre, et qui peut servir à la distinguer des *deux autres*.

Ainsi, l'*ellipse*, telle que nous l'avons définie au n° 124, est une courbe RENTRANTE ET FERMÉE ou une courbe *limitée dans tous les sens*.

L'*hyperbole* (n° 134) est une courbe composée de *deux branches distinctes, égales* et *opposées*, qui s'étendent *l'une et l'autre indéfiniment*.

Enfin, la *parabole* (n° 141) s'étend *indéfiniment dans un seul sens:* et elle n'a qu'*une seule branche.*

Or, ces *trois caractères géométriques* se reproduisent également par la discussion des deux équations précédentes, considérées par rapport à des axes *obliques*.

En effet, prenons l'équation

$$My^2 + Nx^2 = P,$$

et supposons d'abord M, N, *positifs* (on doit aussi regarder P comme *positif;* autrement l'équation ne pourrait donner lieu à des valeurs réelles pour x et y).

Cette équation, étant résolue par rapport à y, donne

$$y = \pm\sqrt{\frac{N}{M}\left(\frac{P}{N} - x^2\right)};$$

et l'inspection seule de ce résultat démontre qu'à des valeurs de x, soit *positives*, soit *négatives*, numériquement *plus grandes* que $\sqrt{\frac{P}{N}}$, correspondent des valeurs *imaginaires* pour y.

FIG. 91. Donc, la courbe est *limitée* dans le sens des x positifs, et dans celui des x négatifs, par deux parallèles à l'axe des y, SS′, RR′, menées aux distances

$$OB = +\sqrt{\frac{P}{N}}, \quad OB' = -\sqrt{\frac{P}{N}}.$$

En résolvant l'équation par rapport à x, on reconnaîtrait de même qu'elle est *limitée* dans les deux sens de l'axe des y, par deux parallèles à l'axe des x, RS, R′S′, menées

aux distances

$$OC = +\sqrt{\frac{P}{M}}, \quad OC' = -\sqrt{\frac{P}{M}}.$$

La courbe est alors entièrement comprise en dedans du parallélogramme RSS'R', aux côtés duquel elle est tangente en B', C, B, C'.

Soient actuellement M *positif*, N *négatif*, et P négatif *ou* positif; ce qui donne (les signes étant mis en évidence),

$$My^2 - Nx^2 = \mp P.$$

L'équation résolue par rapport à y devient

$$y = \pm\sqrt{\frac{N}{M}\left(x^2 - \frac{P}{N}\right)}, \quad \text{ou} \quad y = \pm\sqrt{\frac{N}{M}\left(x^2 + \frac{P}{N}\right)}.$$

Dans le premier cas, on voit que, pour des valeurs de x, soit positives, soit négatives, numériquement *moindres que* $\sqrt{\frac{P}{N}}$, les valeurs correspondantes de y sont *imaginaires*. Mais en donnant à x des valeurs plus grandes que $\sqrt{\frac{P}{N}}$, on obtient pour y des valeurs *toujours réelles*, quelque grande que soit d'ailleurs la valeur de x dans les deux sens.

Donc, la courbe n'a *aucun point* situé entre les parallèles à l'axe des y, BL, B'L', menées aux distances Fig. 92.

$$OB = +\sqrt{\frac{P}{N}}, \quad OB' = -\sqrt{\frac{P}{N}}.$$

Mais elle s'étend *indéfiniment* à *droite* et à *gauche* de ces deux parallèles, au-*dessus* et au-*dessous* de l'axe des x.

Dans le second cas, il est évident que toute valeur donnée à x produira pour y des valeurs *toujours réelles*.

D'ailleurs, si l'on fait $x = 0$, ce qui donne

$$y = \pm\sqrt{\frac{P}{M}},$$

on doit regarder ces valeurs comme *les plus petites* de celles que peut recevoir y.

Donc la courbe n'a *aucun point* compris entre les paral- Fig. 93.

lèles à l'axe des x, LBK, L'B'K', menées aux distances

$$OB = +\sqrt{\frac{P}{M}}, \quad OB' = -\sqrt{\frac{P}{M}}.$$

Mais elle s'étend *indéfiniment* au-*dessus* et au-*dessous* de ces parallèles, à *droite* et à *gauche* de l'axe des y.

FIG. 94. Quant à l'équation

$$y^2 = Qx, \quad \text{d'où} \quad y = \pm\sqrt{Qx},$$

il est clair qu'elle représente une courbe *indéfinie* dans le sens des x positifs, si Q est *positif*, et dans le sens des x négatifs, si Q est *négatif*.

De là on conclut que les équations

$$My^2 + Nx^2 = +P, \quad My^2 - Nx^2 = \mp P, \quad y^2 = \pm Qx,$$

représentant des courbes rapportées à des axes OBLIQUES, ont, la *première*, le caractère géométrique d'une *ellipse*, la seconde, celui d'une *hyperbole*, et la *troisième*, celui d'une *parabole*.

Si, maintenant, pour avoir des axes *rectangulaires*, on change d'abord (n° 120)

$$x \text{ en } x - y\cos\theta, \quad \text{et} \quad y \text{ en } \frac{y}{\sin\theta},$$

on aura des équations en y^2, xy, x^2 et P ou $Q'x$, qui pourront ensuite, par une autre transformation de *coordonnées* ayant pour objet de faire disparaître le terme en xy, être ramenées aux formes tout à fait *caractéristiques*

$$A'^2y^2 + B'^2x^2 = A'^2B'^2, \quad A'^2y^2 - B'^2x^2 = \mp A'^2B'^2, \quad y^2 = 2px.$$

Donc enfin, *toute équation du second degré à deux variables*, rapportée à des axes rectangulaires ou obliques, représente, lorsqu'elle donne lieu à des valeurs *réelles*, une ELLIPSE ou une HYPERBOLE ou une PARABOLE, telles que nous les avons définies aux nos 124, 134 et 141, ou bien une de leurs VARIÉTÉS, savoir : *un cercle*, *un point*, *un système de deux droites qui se coupent*, *un système de deux droites parallèles*, ou *une seule ligne droite*.

CHAPITRE III.

DE L'ELLIPSE.

PROPOSITIONS PRÉLIMINAIRES.

171. *Caractères analytiques* des points pris *sur* la courbe, *au dedans* ou *au dehors*. — L'équation de l'ellipse, rapportée à son centre et à ses axes principaux, étant (n° 130) Fig. 95.

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,$$

on a d'abord, pour chacun de ses points, M, la relation

$$A^2y^2 + B^2x^2 - A^2B^2 = 0.$$

Maintenant, si l'on considère un point N *intérieur* à la courbe, comme l'ordonnée NP de ce point est *moindre* que l'ordonnée MP correspondante à la même abscisse OP, il s'ensuit que $A^2.\overline{NP}^2$ est *moindre* que $A^2.\overline{MP}^2$; ainsi l'on a pour le point N, ou tout point *intérieur*,

$$A^2y^2 + B^2x^2 - A^2B^2 < 0.$$

Pour un point *extérieur* N', l'ordonnée N'P est *plus grande* que NP, et l'on a nécessairement

$$A^2y^2 + B^2x^2 - A^2B^2 > 0.$$

N. B. — Si le point extérieur avait la position N'', pour laquelle il n'y a pas d'ordonnée correspondante de la courbe, la même relation n'en subsisterait pas moins; car l'*abscisse* de ce point N'' étant plus grande que OB, il en résulte $B^2x^2 > A^2B^2$, d'où *à fortiori*, etc.

172. La définition de l'ellipse (n° 124) fournit d'autres caractères qu'il importe d'établir.

Pour tout point M, *sur* la courbe, on a

$$F'M + FM = 2A.$$

Pour un point *intérieur* R, comme F'R + RF est plus

petit que F′M + MF, il en résulte

$$F'R + FR < 2A.$$

Pour un point *extérieur* R′, on a, au contraire, F′R′+R′F plus grand que F′M + MF; et, par suite,

$$F'R' + FR' > 2A.$$

Fig. 95. **173.** On déduit de l'équation $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$:

$$\frac{y^2}{(A+x)(A-x)} = \frac{B^2}{A^2}.$$

Or, x et y étant les coordonnées d'un point quelconque, M, de la courbe, il est évident que $A+x$, $A-x$, expriment les distances AP, BP des sommets A, B, au pied de l'ordonnée MP; ainsi, l'on a

$$\frac{\overline{MP}^2}{AP \times PB} = \frac{B^2}{A^2}, \quad \text{ou} \quad \overline{MP}^2 : AP \times PB :: B^2 : A^2;$$

d'où l'on voit que

Le *carré d'une ordonnée quelconque de l'ellipse est avec le produit des distances du pied de cette ordonnée aux deux sommets, dans un rapport constant;*

En d'autres termes, *les carrés des ordonnées sont respectivement proportionnels aux rectangles des distances des pieds de ces ordonnées aux sommets de la courbe.*

Si l'on suppose B = A, la relation se réduit à

$$y^2 = A^2 - x^2 = (A+x)(A-x);$$

ce qui exprime que l'*ordonnée d'un cercle à un diamètre est moyenne proportionnelle entre les segments correspondants du diamètre;* propriété connue en Géométrie.

La propriété qui vient d'être établie pour l'ellipse, n'est, du reste, qu'un cas particulier d'une autre proposition sur les courbes du second degré rapportées à des axes quelconques, et qui sera démontrée plus tard.

Fig. 96. **174.** Décrivons sur le *grand axe* d'une ellipse, comme diamètre, une circonférence de cercle; on a, pour son équation,

$$y^2 = A^2 - x^2;$$

celle de l'ellipse rapportée aux mêmes axes, étant

$$y' = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2),$$

il s'ensuit que, si l'on désigne par y l'ordonnée d'un point quelconque de cette courbe, et par Y l'ordonnée du *cercle* correspondant *à la même abscisse*, on a la relation

$$y = \frac{B}{A} Y;$$

c'est-à-dire que l'*ordonnée de l'ellipse est à celle du cercle décrit sur son grand axe dans le rapport du petit axe au grand axe;*

D'où résulte un moyen assez simple de *construire* l'ellipse par points :

Sur les axes AB, CD, *décrivez* deux circonférences; *tirez* le rayon OM, et par le point L où ce rayon coupe la petite circonférence, *menez* LN parallèle à AB.

Le point N où cette parallèle rencontre l'ordonnée du point M, appartient à l'ellipse.

En effet, on a, d'après la construction,

$$OM : OL :: PM : PN, \quad \text{ou} \quad A : B :: Y : PN;$$

donc

$$PN = \frac{B}{A} Y = y.$$

Prolongeant ensuite MP d'une quantité Pn égale à PN, on obtient un second point de la courbe; les points n', n'', *symétriques* des deux premiers, peuvent être ensuite déterminés comme l'indique la figure.

175. Il existe un autre moyen, fondé sur la même propriété, pour construire l'ellipse. FIG. 97.

AB, CD, étant les deux axes, *marquez* sur CD un point K tel qu'on ait

$$OK = A - B;$$

prenez ensuite un point quelconque I situé entre O et K; puis, de ce point I comme centre, avec un rayon OK, *décrivez* un arc de cercle qui coupe AB en L et en L'; *tirez*

IL, IL′, et *prenez* sur ces deux lignes prolongées,

$$IM = IM' = A;$$

les points M, M′, appartiennent à la courbe.

Car, si l'on mène IH parallèle à AB, et MQ perpendiculaire à IH, les triangles IQM, LPM sont semblables et donnent

$$MI : ML :: MQ : MP; \quad \text{d'où} \quad MP = \frac{ML}{MI} \cdot MQ = \frac{B}{A} \cdot MQ.$$

Mais on a

$$MQ = \sqrt{\overline{MI}^2 - \overline{IQ}^2} = \sqrt{\overline{MI}^2 - \overline{OP}^2};$$

donc, en posant $OP = x$, on trouve

$$y = MP = \frac{B}{A}\sqrt{A^2 - x^2} = \frac{B}{A} \cdot Y.$$

Même raisonnement à l'égard du point M′ *symétrique* du point M.

Pour obtenir les deux points m, m' *symétriques* de M, M′, il suffirait de prendre sur OC, $OI' = OI$ et d'opérer comme précédemment.

Il est évident, d'ailleurs, que, pour que la construction soit *possible*, le point I doit être placé entre O et K.

176. *Mesure de la surface* ou QUADRATURE de l'*ellipse*.

Le rapport *constant* $\frac{B}{A}$, qui existe entre l'ordonnée de l'ellipse et celle du cercle décrit sur son grand axe, conduit très-simplement à l'expression, soit de la *surface entière* de l'ellipse, soit de l'*aire* d'un *segment* compris entre *deux ordonnées parallèles*.

FIG. 96. En premier lieu, concevons que l'on ait inscrit au *cercle* un polygone quelconque dont MM′ soit un côté.

Des sommets M, M′, ... de ce polygone, abaissons des perpendiculaires sur le grand axe, et joignons par des cordes les points N, N′, ... où ces perpendiculaires coupent *l'ellipse*; nous formons ainsi un polygone inscrit à cette courbe, et qui a NN′ pour un de ses côtés.

Cela posé, soient Y, Y′, les ordonnées des deux points M, M′, et y, y', celles des points N, N′, correspondant aux mêmes abscisses x, x'.

Les trapèzes MM′P′P, NN′P′P, donnent

$$MM'P'P = \frac{Y+Y'}{2}\cdot(x'-x), \quad NN'P'P = \frac{y+y'}{2}\cdot(x'-x);$$

d'où

$$\frac{NN'P'P}{MM'P'P} = \frac{y+y'}{Y+Y'}.$$

Or on a

$$y = \frac{B}{A}Y, \quad y' = \frac{B}{A}Y'; \quad \text{par suite,} \quad \frac{y+y'}{Y+Y'} = \frac{B}{A};$$

donc

$$\frac{NN'P'P}{MM'P'P} = \frac{B}{A}.$$

On reconnaîtrait, de la même manière, que chacun des trapèzes dont se compose le polygone inscrit à l'*ellipse* est au trapèze correspondant du *cercle*, dans le rapport B : A.

D'où l'on conclut, en vertu d'un principe connu, que la *somme de tous les premiers trapèzes* est à *celle des seconds*, dans ce même rapport.

Ainsi, soient p, P, les deux polygones; on a

$$\frac{p}{P} = \frac{B}{A}.$$

Cette relation, devant subsister quel que soit le *nombre des côtés des deux polygones*, est encore vraie pour les *polygones limites* qui ne sont autres que l'*ellipse* et le *cercle*.

Donc, si l'on désigne par s, S, leurs SURFACES, il vient

$$\frac{s}{S} = \frac{B}{A}, \quad \text{ou} \quad s = \frac{B}{A}\cdot S;$$

et comme l'aire du cercle a pour expression, $\pi . A^2$, il en résulte

$$s = \pi A^2 \frac{B}{A},$$

ou bien enfin

$$s = \pi . A . B,$$

pour l'expression de la SURFACE d'une *ellipse* dont les *axes principaux* sont 2 A, 2 B.

En second lieu, quant à l'*aire* d'un *segment compris entre deux ordonnées parallèles*, il suffirait, pour l'obtenir,

d'appliquer à *ce segment* et à celui qui lui *correspond* dans le cercle, le même raisonnement que celui qui a conduit à l'expression du rapport des deux *surfaces entières;* de sorte qu'en appelant s', S' ces *segments*, on arriverait à l'égalité

$$s' = \frac{B}{A} S';$$

d'où l'on déduirait l'*aire cherchée* au moyen de celle de S' qu'on sait déterminer *géométriquement*.

§ I. — Diamètres dans l'ellipse. — Diamètres conjugués. — Cordes supplémentaires; leurs relations avec les diamètres conjugués.

177. On appelle, en général, DIAMÈTRE d'une courbe, *une ligne* (droite ou courbe) *qui passe par les milieux de toutes les cordes parallèles menées sous une direction quelconque.*

De cette définition il résulte nécessairement que toute courbe a une *infinité* de diamètres dont la nature dépend de la nature de la courbe elle-même.

Mais nous allons démontrer que, dans l'*ellipse* (et nous ferons voir plus tard qu'il en est de même pour les deux autres courbes du second degré), *tous les diamètres sont des lignes droites.*

Soient, en effet,

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2 \tag{1}$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes, et

$$y = ax + b \tag{2}$$

celle d'une droite qui doit rencontrer la courbe.

En éliminant x et y entre ces équations, on obtiendra les coordonnées des points d'intersection de la droite avec la courbe.

L'élimination de y, par exemple, donne

$$(A^2a^2 + B^2)x^2 + 2A^2ab\,x + A^2(b^2 - B^2) = 0. \tag{3}$$

FIG. 98. Cela posé, désignons par $[x', y']$, $[x'', y'']$ les coordonnées des points M, M', et par X, Y, celles du *point milieu* N

On a (n° 96)

$$X = \frac{x' + x''}{2}, \quad Y = \frac{y' + y''}{2}.$$

D'un autre côté, l'équation (3) étant du *second degré*, donne entre ses racines la relation

$$\frac{x' + x''}{2} = -\frac{A^2 ab}{A^2 a^2 + B^2};$$

en sorte que l'on a, pour les coordonnées du point N,

$$X = -\frac{A^2 ab}{A^2 a^2 + B^2}, \tag{4}$$

$$Y = aX + b. \tag{5}$$

Mais des deux quantités a, b, qui *fixent* la position de la droite MM′, l'une, a, est *constante* pour toutes les positions que peut prendre cette droite *parallèlement* à elle-même; l'autre, b, varie d'une position à l'autre; d'où il suit que si, pour une valeur *déterminée* de a, on donne à b une série de valeurs auxquelles correspondent *autant* de valeurs de X déduites de l'équation (4), et de Y, tirées de l'équation (5), on obtiendra les coordonnées de la série des *points milieux* de la corde MM′ et de toutes les cordes qui lui sont parallèles.

Par conséquent, en éliminant b entre (4) et (5), on parviendra à une équation qui, convenant *exclusivement* à tous ces *points milieux*, sera l'équation de leur *lieu géométrique*.

Or, l'équation (5) donne $b = Y - aX$; d'où, substituant dans l'équation (4) et chassant le dénominateur,

$$(A^2 a^2 + B^2) X = -A^2 a (Y - aX),$$

ou réduisant et résolvant par rapport à Y,

$$Y = -\frac{B^2}{A^2 a} \cdot X;$$

équation d'une *droite* passant par l'*origine*.

Comme d'ailleurs, on est arrivé à cette équation *sans donner à la constante* a *aucune valeur particulière*, on peut conclure

1°. Que, *dans l'ellipse, tous les diamètres sont des lignes droites;*

2°. Que *les diamètres de l'ellipse passent tous par le centre.*

Ce dernier résultat s'accorde avec la définition du *centre* (n° 130).

Fig. 98. 178. Diamètres conjugués. — Considérons, avec le diamètre LL' qui, passant par les *milieux* de la corde MM' et des cordes *parallèles* à celles-ci, a pour équation

$$y = -\frac{B^2}{A^2 a}x \qquad (1)$$

le diamètre II' *parallèle* à ces cordes; l'équation de ce dernier est

$$y = ax. \qquad (2)$$

Réciproquement, si l'on considère les cordes *parallèles* au premier diamètre LL', et qu'on appelle a' la quantité $-\frac{B^2}{A^2 a}$, l'équation du diamètre, *lieu géométrique* des *points milieux* de ces nouvelles cordes, sera (n° 177)

$$y = -\frac{B^2}{A^2 a'}x,$$

expression qui, après que l'on a remplacé a' par sa valeur, se réduit à

$$y = ax,$$

c'est-à-dire à l'équation même du diamètre II'.

D'où résulte nécessairement cette conséquence :

Si un diamètre LL' passe par les *points milieux* d'un système de cordes *parallèles* à un autre diamètre II', *réciproquement*, celui-ci passe par les *points milieux* de toutes les cordes *parallèles* au premier.

Ces deux diamètres, dont *chacun* divise *en deux parties égales* les cordes *parallèles* à l'autre, sont dits diamètres conjugués.

L'ellipse a évidemment *une infinité de systèmes de diamètres conjugués*, puisqu'il y a *une infinité de systèmes de cordes parallèles.*

179. Autres conséquences immédiates :

1°. La quantité $-\frac{B^2}{A^2 a}$ ayant été représentée par a', le

produit de a par a' est égal à $-\frac{B^2}{A^2}$; en sorte que, si l'on désigne par α, α', les angles que forment respectivement avec le *grand axe*, les deux *diamètres conjugués* d'un système quelconque, on a, entre les *coefficients d'inclinaison* de ces diamètres, la relation

$$\text{tang}\,\alpha.\,\text{tang}\,\alpha' = -\frac{B^2}{A^2};$$

2°. Le *caractère analytique* d'un pareil système, est qu'en y rapportant la courbe, on a une équation de la forme

$$My^2 + Nx^2 = P.$$

Car cette équation donnant *pour une même* valeur de x, *deux* valeurs de y, égales et de *signes contraires*, ou *réciproquement*, satisfait à la double condition que *chacun* des nouveaux axes *divise en deux parties égales* toutes les cordes de la courbe *parallèles* à l'*autre* axe;

3°. Par suite, les *axes principaux* forment un système de *diamètres conjugués*.

180. Le système de diamètres conjugués formé par les axes principaux est le *seul* qui puisse être *rectangulaire*, tant qu'il s'agit d'une ellipse proprement dite.

Car, pour que les deux diamètres soient *perpendiculaires* l'un à l'autre, il faut (n° 64) qu'entre les angles α, α' qu'ils font avec l'axe des x, on ait la relation

$$\text{tang}\,\alpha\,.\,\text{tang}\,\alpha' = -1;$$

et pour que ces diamètres soient *conjugués*, on doit avoir, en vertu de la première conséquence (n° 179),

$$\text{tang}\,\alpha\,.\,\text{tang}\,\alpha' = -\frac{B^2}{A^2}.$$

Or les demi-axes, A et B, d'une ellipse étant *inégaux*, ces deux relations ne peuvent exister ensemble qu'autant que l'on a à la fois

$$\text{tang}\,\alpha = 0, \quad \text{tang}\,\alpha' = \infty,$$

ou réciproquement : c'est-à-dire qu'autant que le système des diamètres conjugués est précisément celui des *axes principaux*.

Donc, etc.

N. B. — Dans le cas de B = A, qui est celui où l'ellipse devient un CERCLE, les deux relations n'en font plus qu'*une seule;* d'où l'on conclut que, *dans le cercle, il existe une infinité de systèmes de diamètres conjugués perpendiculaires entre eux.*

Cela est, du reste évident; car un diamètre étant tracé à volonté dans le plan du cercle, si l'on élève par le centre une *perpendiculaire* à ce diamètre, l'équation de la courbe rapportée à ce système d'axes, est toujours

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

181. CORDES SUPPLÉMENTAIRES. — On nomme ainsi *deux droites qui, partant des extrémités d'un diamètre quelconque, se rencontrent sur la courbe.*

Les *angles* que ces droites, prises *deux à deux*, forment avec le *grand axe*, ont entre eux une *relation particulière* que nous allons établir.

FIG. 99. Considérons, à cet effet, en *premier lieu*, les deux cordes AM et BM, menées d'un point quelconque M de la courbe aux extrémités A et B du *grand axe.*

La droite BM passant par le point B, dont les coordonnées sont $[y = 0, x = A]$, a pour équation

$$y = a(x - A);$$

on a de même pour la droite AM, passant par le point A ou $[y = 0, x = -A]$,

$$y = a'(x + A).$$

Si l'on désigne par x', y' les coordonnées du point M, comme elles doivent vérifier les deux équations précédentes, il en résulte

$$y' = a(x' - A); \quad \text{d'où} \quad a = \frac{y'}{x' - A},$$

$$y' = a'(x' + A); \quad \text{d'où} \quad a' = \frac{y'}{x' + A};$$

et, par suite,

$$a \cdot a' = \frac{y'^2}{x'^2 - A^2}.$$

D'un autre côté, le point $[x', y']$ se trouve aussi sur la

courbe; ce qui donne

$$A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2B^2,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{y'^2}{x'^2 - A^2} = -\frac{B^2}{A^2}.$$

Égalant entre elles les deux valeurs de $\frac{y'^2}{x'^2 - A^2}$, on obtient la relation

$$a.a' = -\frac{B^2}{A^2}.$$

182. Soient, *en second lieu*, deux *cordes supplémentaires*, EM', E'M' aboutissant aux extrémités d'un *diamètre quelconque* EE'. FIG. 99.

Appelons x'', y'', les coordonnées du point E; celles du point E' seront (n° 129), $-x''$, $-y''$; et les équations de deux droites menées des points E, E', à un point quelconque M' de la courbe, seront de la forme

$$y - y'' = a(x - x''),$$
$$y + y'' = a'(x + x'').$$

Comme le point M' ou $[x', y']$ appartient à la fois aux deux droites, on a les relations

$$y' - y'' = a(x' - x''), \quad y' + y'' = a'(x' + x''),$$

d'où

$$a.a' = \frac{y'^2 - y''^2}{x'^2 - x''^2}.$$

Mais les points M', E, E', se trouvant aussi sur la courbe, on a également

$$A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2B^2, \quad A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2,$$

d'où

$$\frac{y'^2 - y''^2}{x'^2 - x''^2} = -\frac{B^2}{A^2};$$

et, en égalant les deux valeurs de $\frac{y'^2 - y''^2}{x'^2 - x''^2}$ on arrive à la même relation que ci-dessus,

$$a.a' = -\frac{B^2}{A^2}.$$

N. B. — Dans le cas de B = A, cette relation devient

$$a.a' = -1;$$

ce qui prouve que, DANS LE CERCLE, *les cordes supplémentaires sont à angle droit.*

183. Les deux relations

$$\text{tang}\,\alpha.\text{tang}\,\alpha' = -\frac{B^2}{A^2}, \quad aa' = -\frac{B^2}{A^2},$$

obtenues aux nos 179 et 182, donnent lieu à un rapprochement utile entre les *diamètres conjugués* et les *cordes supplémentaires.*

FIG. 98. Appelons γ, γ', les angles que forment avec le *grand axe* de l'ellipse, les *cordes supplémentaires* MM', M*m* partant des extrémités d'un diamètre quelconque M'*m*; on a

$$\text{tang}\,\gamma.\text{tang}\,\gamma' = -\frac{B^2}{A^2};$$

et comme, pour un système de *diamètres conjugués*, on a pareillement

$$\text{tang}\,\alpha.\text{tang}\,\alpha' = -\frac{B^2}{A^2},$$

il en résulte la nouvelle relation

$$\text{tang}\,\gamma.\text{tang}\,\gamma' = \text{tang}\,\alpha.\text{tang}\,\alpha,$$

qui démontre que l'hypothèse $\gamma = \alpha$, entraîne la condition $\gamma' = \alpha'$.

Cela signifie, en langage ordinaire, que la corde MM' étant supposée *parallèle* au *diamètre* II', par exemple, le CONJUGUÉ de celui-ci est nécessairement *parallèle* à la corde *supplémentaire* M*m*, et n'est autre que le *diamètre* LL', passant par les POINTS MILIEUX de toutes les cordes *parallèles* à MM'.

Cette propriété fournit un moyen simple de construire le *diamètre conjugué* d'un diamètre donné tel que LL':

Tirez un diamètre quelconque M'*m*, et par le point *m*, la corde *m*M *parallèle* au diamètre donné LL'; *tracez* ensuite la *corde supplémentaire* M'M, puis le diamètre II' *parallèle* à cette corde. Vous obtenez ainsi le CONJUGUÉ du diamètre LL'.

N. B. — Il est plus commode, en général, de faire usage, dans cette construction, des cordes supplémentaires qui partent des extrémités du *grand axe.*

184. Proposons nous maintenant de calculer *l'angle que forment entre elles deux cordes supplémentaires menées par les extrémités du grand axe.*

Soient AM, BM, les deux cordes données. Fig. 99.

Pour résoudre la question proposée, il suffit (n° 62) de calculer l'expression

$$\text{tang AMB} = \frac{a - a'}{1 + aa'},$$

a désignant la tangente de l'angle MBX, a' celle de MAX.

Or, on a trouvé (n° 181),

$$a = \frac{y'}{x' - A}, \quad a' = \frac{y'}{x' + A};$$

ce qui donne

$$\frac{a - a'}{1 + aa'} = \frac{\dfrac{y'}{x' - A} - \dfrac{y'}{x' + A}}{1 + \dfrac{y'^2}{x'^2 - A^2}} = \frac{2Ay'}{x'^2 - A^2 + y'^2}.$$

Mais, de la relation $A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2B^2$, on déduit

$$x'^2 - A^2 = -\frac{A^2y'^2}{B^2};$$

d'où, substituant,

$$\frac{a - a'}{1 + aa'} \quad \frac{2Ay'}{\dfrac{-A^2y'^2}{B^2} + y'^2} = -\frac{2AB^2}{(A^2 - B^2)y'};$$

donc enfin,

$$\text{(1)} \qquad \text{tang AMB} = -\frac{2AB^2}{(A^2 - B^2)y'}.$$

L'inspection seule de ce résultat prouve d'abord que, si l'on considère un point quelconque, M, de la courbe, situé *au-dessus* du grand axe, auquel cas, y' est *positif*, la tangente de l'angle AMB est *négative* (car on a toujours $A > B$); donc cet angle est nécessairement *obtus*, ce qui doit être, puisque tous les points de l'ellipse sont *intérieurs* à la *demi-circonférence* décrite sur AB comme diamètre.

On voit, en outre, que, plus y' est *grand*, plus la valeur *numérique* de l'expression (1) est *petite;* par suite, plus l'angle est grand. (On sait qu'un angle *obtus* est d'autant plus grand que sa tangente est *numériquement* plus petite.)

Le *maximum* de cet angle correspond au *maximum* de y', c'est-à-dire à $y' = B$.

Ce qui donne alors pour l'expression (1),

$$\text{tang ACB} = -\frac{2AB}{A^2 - B^2}. \tag{2}$$

Les valeurs de a et de a' deviennent d'ailleurs, pour $y' = B$, d'où $x' = 0$,

$$a = -\frac{B}{A}, \quad a' = +\frac{B}{A}.$$

Fig. 99. On peut vérifier facilement le résultat (2) sur la figure. En effet, on a

$$ACB = 2\,ACO;$$

d'où

$$\text{tang ACB} = \text{tang}.\,2\,ACO = \frac{2\,\text{tang}.\,ACO}{1 - \text{tang}^2\,ACO}$$

(d'après une formule connue de trigonométrie); mais la figure donne

$$\text{tang ACO} = \frac{A}{B};$$

donc

$$\text{tang ACB} = \frac{2.\dfrac{A}{B}}{1 - \dfrac{A^2}{B^2}} = -\frac{2AB}{A^2 - B^2}.$$

185. Conséquence importante pour les *diamètres conjugués*.

Le *maximum* de l'angle de *deux cordes supplémentaires partant des extrémités du grand axe* est, en même temps, le *maximum* de l'angle que peuvent former entre eux *deux diamètres conjugués d'un même système.*

Fig. 100. Car *tout système de diamètres conjugués*, tel que GG', HH', étant (n° 183) *parallèle* à un système de *cordes supplémentaires* AM et BM, l'angle LOI est égal à l'angle AMB.

D'ailleurs, l'angle *maximum*, ACB, a pour *supplément*, soit l'angle A'CB, soit l'angle CBD formé par les deux *cordes supplémentaires* qui, partant des extrémités du *petit axe*, aboutissent à l'une des extrémités du *grand axe*,

puisque BD est parallèle à AC, à cause de la symétrie de l'ellipse.

Donc, dans une ellipse donnée, *l'angle de deux diamètres conjugués*, s'il est OBTUS, *ne saurait surpasser celui que forment entre elles les cordes supplémentaires menées des extrémités du grand axe à l'une des extrémités du petit axe;* et s'il est AIGU, *il ne saurait être moindre que celui qui est formé par les cordes supplémentaires partant des extrémités du petit axe, et aboutissant à l'une des extrémités du grand axe.*

N. B. — Le même *maximum* et le même *minimum* conviennent également à l'angle de deux *cordes supplémentaires* menées des extrémités d'un *diamètre quelconque*, puisqu'on a démontré (n° 183) que ces cordes peuvent être regardées comme respectivement *parallèles* à deux *diamètres conjugués*.

§ II. — DE LA TANGENTE A L'ELLIPSE ET DE SES PROPRIÉTÉS PAR RAPPORT AUX DIAMÈTRES ET AUX RAYONS VECTEURS.

Tangente menée par un point de la courbe.

186. Afin d'obtenir l'équation de la *tangente* menée par un point pris *sur* l'ellipse, nous emploierons la même méthode que pour le cercle (*voyez* le n° 101).

Soient $[x', y']$ le point M par lequel on veut mener une *tangente*, $[x'', y'']$ un second point d'une droite passant par le point M, et considérée d'abord comme *sécante*. FIG. 101.

L'équation de cette droite est de la forme

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x');$$

et il s'agit de déterminer

$$\text{LIM.}\ \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

Or, puisque les deux points $[x', y']$, $[x'', y'']$ se trouvent sur la courbe, on a les relations

$$A^2 y'^2 + B^2 x'^2 = A^2 B^2,$$
$$A^2 y''^2 + B^2 x''^2 = A^2 B^2;$$

d'où l'on déduit, en retranchant la première de la deuxième,

$$A^2 (y'' + y')(y'' - y') + B^2 (x'' + x')(x'' - x') = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = -\frac{B^2(x''+x')}{A^2(y''+y')}.$$

Maintenant, pour passer à la *limite*, il faut supposer $x''=x'$, $y''=y'$; ce qui donne

$$\lim.\frac{y''-y'}{x''-x'} = -\frac{B^2x'}{A^2y'}.$$

Il vient alors pour l'équation de la *tangente* MR

$$(1) \qquad y-y' = -\frac{B^2x'}{A^2y'}(x-x'),$$

pourvu qu'on y joigne la relation

$$(2) \qquad A^2y'^2+B^2x'^2 = A^2B^2,$$

qui exprime que le point M ou $[x', y']$ appartient à l'ellipse.

N. B. — Le *coefficient d'inclinaison*, $-\frac{B^2x'}{A^2y'}$, n'est autre chose (*voir* le n° 102) que la *dérivée* du premier membre de l'équation de la courbe, prise par rapport à x avec un signe contraire, et divisée par la *dérivée* de ce même premier membre, prise par rapport à y, après que l'on a remplacé x et y par les coordonnées x' et y' du *point de contact*.

187. On peut donner à l'équation (1) une forme plus simple, à l'aide de la relation (2).

En effet, si l'on chasse le dénominateur, et que l'on transpose, on a

$$A^2yy'+B^2xx' = A^2y'^2+B^2x'^2,$$

ou, à cause de la relation (2),

$$(3) \qquad A^2yy'+B^2xx' = A^2B^2,$$

résultat remarquable et facile à rappeler au besoin, en ce qu'il suffit, pour l'obtenir, de remplacer dans l'équation de la courbe, les carrés x^2, y^2, par les rectangles xx', yy'.

FIG. 101. 188. EXPRESSION DE LA SOUS-TANGENTE. — Faisons dans l'équation (1), $y=0$; il vient

$$x-x' = \frac{A^2y'^2}{B^2x'}.$$

C'est la différence entre l'abscisse OR correspondante à $y=0$, et l'abscisse OP du *point de contact*; et par conséquent, c'est (n° 104) la valeur de la *sous-tangente* PR.

On arriverait au même résultat en faisant $y = 0$ dans l'équation (3), ce qui donnerait

$$x = \frac{A^2}{x'} = OR;$$

et en retranchant de cette valeur de x, l'abscisse OP ou x' du *point de contact*, il viendrait

$$PR = = \frac{A^2}{x'} - x' = \frac{A^2 - x'^2}{x'},$$

ou, à cause de la relation (2),

$$PR = \frac{A^2 y'^2}{B^2 x'},$$

189. L'*expression* $\frac{A^2 - x'^2}{x'}$, obtenue pour la *sous-tangente*, fournit un moyen simple de *construire la tangente à l'ellipse* en un point M de la courbe. Fig. 101.

En effet, comme elle est *indépendante du second axe* 2B, il s'ensuit que, pour toutes les ellipses ayant même *premier axe* 2A, les *sous-tangentes* qui correspondent à la *même* abscisse *sont égales;* ou, en d'autres termes, si, d'un point P de l'axe des x, on élève une perpendiculaire à cet axe, et que par les points où cette perpendiculaire rencontre les ellipses supposées décrites sur le grand axe AB, on mène des tangentes à ces courbes, *elles viendront aboutir au même point de l'axe des* x.

Or, le *cercle* décrit sur AB comme diamètre peut être considéré comme une de ces ellipses.

Donc, pour obtenir *la tangente à l'ellipse*, en un point M, il suffit de décrire sur AB comme diamètre une demi-circonférence, de mener ensuite au point M', où l'ordonnée PM, prolongée, va rencontrer la demi-circonférence, une tangente à cette courbe, et de joindre au point M le point d'intersection, R, de cette tangente avec l'axe des x.

La droite MR est la *tangente demandée*.

190. Équation de la normale et expression de la sous-normale. — La normale étant (n° 105) une droite MS menée par le *point de contact*, $[x', y']$, *perpendiculaire-* Fig. 101.

ment à la tangente, on a (n° 65) pour son équation

$$(4) \qquad y - y' = \frac{A^2 y'}{B^2 x'}(x - x').$$

Soit fait dans cette équation, $y = 0$, il en résulte

$$x - x' = -\frac{B^2 x'}{A^2};$$

c'est (n° 105) la valeur de la *sous-normale* PS.

Il est à remarquer que, pour x' *positif*, les deux *expressions* de la SOUS-TANGENTE et de la SOUS-NORMALE, savoir:

$$PR = \frac{A^2 y'^2}{B^2 x'}, \quad PS = -\frac{B^2 x'}{A^2},$$

sont, la première, *positive*, et la seconde, *négative;* ce qui doit être, puisque les points R et S sont de côtés *opposés* par rapport au pied P de l'ordonnée du point de contact, et que c'est à partir du point P que l'on compte *les distances* PR et PS.

N. B. — On suppose ici que le point M est situé à la *droite* de OY; s'il en était autrement, les conséquences précédentes auraient lieu en *sens contraire*.

FIG. 101. **191.** La *discussion* des valeurs de PR et de PS correspondant aux *diverses positions* que peut prendre le *point de contact*, offre quelque intérêt.

Considérons d'abord l'expression

$$PR = \frac{A^2 y'^2}{B^2 x'}, \quad \text{ou plutôt} \quad PR = \frac{A^2 - x'^2}{x'},$$

afin de n'avoir que la seule variable x'.

Pour $x' = 0$, on obtient

$$PR = \frac{A^2}{0} = \infty;$$

et cela doit être, puisque la tangente au point C est évidemment *parallèle* à l'axe des x.

Quand x' *augmente* depuis o jusqu'à A qui est la *plus grande* valeur que x' puisse recevoir, l'expression de PR va sans cesse en *diminuant;* et le point R se *rapproche* de *plus en plus* du point P.

Lorsqu'enfin on suppose

$$x' = A,$$

il en résulte

$$PR = 0;$$

ce qui doit être encore, puisque alors la tangente est *perpendiculaire* à l'axe des x.

Passons à l'expression

$$PS = -\frac{B^2 x'}{A^2},$$

qui, comme on le voit, est de *signe contraire* à celui de x'.

Pour $x' = 0$, on a

$$PS = 0;$$

ce qui prouve que le point S tombe au *centre* O de l'ellipse; et en effet, la *normale*, au point C, se confond avec le *petit axe* CO.

A mesure que x' augmente, la valeur de PS, toujours *négative*, augmente *numériquement* jusqu'à ce qu'enfin on ait

$$x' = A,$$

auquel cas, on trouve

$$PS = -\frac{B^2}{A}.$$

Cette valeur, abstraction faite du signe, n'est autre que la *moitié du paramètre* (n° 146) et a pour représentation géométrique, l'*ordonnée passant par le foyer*.

Elle est remarquable en ce que, tandis que les *sous-tangentes* passent par tous les états de grandeur depuis l'*infini* jusqu'à *zéro*, les *sous-normales* croissent *numériquement* depuis *zéro* jusqu'à une *certaine limite, maximum*, qu'elles ne peuvent dépasser.

192. *Discussion* du COEFFICIENT ANGULAIRE de *la tangente*. — Reprenons maintenant le *coefficient d'inclinaison* FIG. 101.

$$a = -\frac{B^2 x'}{A^2 y'},$$

et recherchons *par quels états de grandeur* il est susceptible de passer suivant les *diverses positions* attribuées au *point de contact*.

En faisant d'abord $x' = 0$, auquel cas le point de contact se trouve en C ou en D, on a, en se reportant à la relation $A^2 y'^2 + B^2 x'^2 = A^2 B^2$,

$$y' = \pm B, \quad \text{et} \quad a = 0;$$

c'est-à-dire que la tangente aux points C et D est PARALLÈLE au *grand axe*; ce qui est conforme aux résultats établis n° 191.

Dans le cas où l'on a

$$A^2\beta^2 + B^2\alpha^2 - A^2B^2 = 0,$$

les valeurs de x', y', se réduisent au *système unique*

$$x' = \frac{A^2B^2\alpha}{A^2B^2} = \alpha,$$

$$y' = \frac{B^2A^2\beta}{A^2B^2} = \beta;$$

c'est-à-dire que les *deux* points de contact sont réduits à *un seul* qui *se confond avec le point donné*.

La valeur de a devient, dans ce cas,

$$a = -\frac{B^2\alpha}{A^2\beta}.$$

194. Au lieu d'effectuer l'élimination de x', y', entre les équations (1) et (2), on peut construire les *lieux géométriques* qu'elles expriment, et l'on est alors conduit à des conséquences analogues à celles qui ont été déduites pour le *cercle* (n° 108).

D'*abord*, l'équation (2), en tant que l'on considère x', y' comme des *variables*, n'est autre que celle de l'*ellipse déjà construite*.

En *second lieu*, pour obtenir la *droite* exprimée par l'équation (1), il suffit de chercher les points où elle *rencontre les deux axes*.

Pour $y' = 0$, on trouve

$$x' = \frac{A^2}{\alpha};$$

et pour $x' = 0$,

$$y' = \frac{B^2}{\beta}.$$

FIG. 102. On a donc à construire deux *troisièmes proportionnelles*, et à les porter successivement de O en I, et de O en H. Tirant ensuite la droite IH, qui va rencontrer la courbe en M, m, on obtient les *points de contact des deux tangentes partant du point* N.

Comme la valeur de x', $x' = \frac{A^2}{\alpha}$, est *indépendante de l'ordonnée* β du point donné, il s'ensuit que, pour *un tout autre* point N' pris sur la perpendiculaire NQ abaissée du

point N sur OX, la droite $m'M'H'$, qui doit joindre *les deux points de contact* correspondants, passera nécessairement par le même point I du *grand axe*, que la droite IH.

D'où l'on peut conclure cette propriété remarquable :

Si, des différents points d'une droite perpendiculaire au grand axe d'une ellipse, on mène des tangentes à cette courbe, et que l'on trace les droites qui joignent les deux points de contact des tangentes partant d'un même point, toutes ces droites passent par UN MÊME POINT *situé sur le grand axe.*

On donne le nom de *pôle* au point de concours I, et celui de *polaire* à la droite donnée LL'.

Il résulte d'ailleurs de l'inspection de la valeur $x' = \frac{A^2}{\alpha}$, que, si l'abscisse α de la *polaire* est *plus grande* que A, c'est-à-dire si la polaire est *extérieure* à la courbe, le *pôle* lui est *intérieur*; et *vice versâ*.

N. B. — La relation $y' = \frac{B^2}{6}$, conduit à *la même propriété* par rapport à l'*axe des y*, pour toute droite menée *perpendiculairement à cet axe.*

Tangente menée parallèlement à une droite donnée.

195. Soit

$$y = mx$$

l'équation de la droite donnée, que rien n'empêche de considérer comme passant par l'*origine*.

La tangente demandée devant être *parallèle* à cette droite, son *coefficient d'inclinaison* est m.

Appelons toujours x', y', les coordonnées *inconnues* du *point de contact.*

Pour déterminer x', y', on a (n° 186) les deux relations

$$-\frac{B^2 x'}{A^2 y'} = m, \quad A^2 y'^2 + B^2 x'^2 = A^2 B^2,$$

d'où l'on déduit

$$x' = \frac{A^2 m}{\pm\sqrt{A^2 m^2 + B^2}}, \quad y' = -\frac{B^2}{\pm\sqrt{A^2 m^2 + B^2}}$$

(le double signe montre qu'il y a deux solutions).

Substituant ces valeurs dans l'équation *simplifiée* de la tangente

$$A^2yy' + B^2xx' = A^2B^2,$$

on obtient, toute réduction faite,

$$y = mx \pm \sqrt{A^2m^2 + B^2},$$

pour les équations des *deux* tangentes *parallèles* à la droite donnée.

Les deux valeurs de y sont toujours *réelles;* ce qui s'accorde avec la discussion établie au n° 192.

De la tangente considérée par rapport aux diamètres conjugués.

Fig. 103. 196. Soient MR une *tangente* en un point quelconque de l'ellipse, et MM′ le *diamètre* qui passe par le *point de contact* M.

On a trouvé (n° 186) pour le *coefficient angulaire* de la tangente,

$$a = -\frac{B^2x'}{A^2y'}.$$

D'un autre côté, puisque le *diamètre* MM′, dont l'équation peut être exprimée par $y = a'x$, passe par le point $[x', y']$, on a la relation

$$a' = \frac{y'}{x'}.$$

Si l'on multiplie les deux expressions de a et de a' l'une par l'autre, il vient

$$a.a' = -\frac{B^2}{A^2}.$$

Mais, en désignant par a'' la tangente trigonométrique de l'angle que forme avec l'axe des x le diamètre mm' CONJUGUÉ du diamètre MM′, on a également (n° 179),

$$a'a'' = -\frac{B^2}{A^2}.$$

Les deux égalités précédentes, comparées entre elles, donnent nécessairement

$$a = a'';$$

ce qui veut dire que *la tangente en un point quelconque*

de l'ellipse est PARALLÈLE *au conjugué du diamètre qui passe par le point de contact.*

CONSÉQUENCE. — Si par les extrémités M, M′, *m*, *m*′, de deux *diamètres conjugués*, on mène *quatre tangentes*, ces droites forment un PARALLÉLOGRAMME CIRCONSCRIT à l'ellipse, puisque les tangentes menées aux extrémités du diamètre MM′ par exemple, sont *parallèles* au diamètre *mm*′, et réciproquement.

On déduit de là un procédé assez simple pour mener : 1° une tangente par un point donné *sur* la courbe; 2° deux tangentes *parallèlement* à une droite donnée de position.

Pour la PREMIÈRE CONSTRUCTION, *déterminez* (n° 183) le *diamètre conjugué de celui qui passe par le point donné;* puis, *menez par ce point une parallèle au diamètre ainsi déterminé.*

Vous obtenez la *tangente demandée.*

Pour la SECONDE CONSTRUCTION, *tracez un diamètre parallèle à la droite donnée,* puis, le *conjugué de celui-ci;* et, par les deux extrémités de ce conjugué, *menez deux parallèles au premier.*

Ces deux parallèles satisfont à la question.

Angles que la tangente forme avec les rayons vecteurs menés au point de contact.

197. Soient R′MR la *tangente* en un point M ou $[x', y']$, FIG. 104. FM, F′M les *rayons vecteurs* menés à ce point.

Désignons par *a* le *coefficient d'inclinaison* de la tangente par rapport à l'axe OX, par a', a'', ceux des deux rayons vecteurs, FM, F′M par rapport au même axe, et par V, V′, les angles FMR, F′MR.

La figure donnant évidemment

FMR ou V = MRX − MFX, F′MR ou V′ = MRX − MF′X,

on a (n° 62)

$$\text{tang V} = \frac{a - a'}{1 + aa'}, \quad \text{tang V}' = \frac{a - a''}{1 + aa''}.$$

Cela posé, calculons d'abord l'expression de tang V.

Le rayon vecteur FM devant passer par le point F, on a

l'équation

$$y = a'(x - c);$$

et comme il doit aussi passer par le point $[x', y']$, il en résulte la relation

$$y' = a'(x' - c); \quad \text{d'où} \quad a' = \frac{y'}{x' - c}.$$

D'ailleurs on a (n° 186)

$$a = -\frac{B^2 x'}{A^2 y'};$$

il ne s'agit donc plus que de remplacer a et a' par ces valeurs dans tang V.

On trouve ainsi :

$$\text{tang V} = \frac{-\frac{B^2 x'}{A^2 y'} - \frac{y'}{x' - c}}{1 - \frac{B^2 x' y'}{A^2 y'(x' - c)}} = \frac{-B^2 x'^2 + B^2 c x' - A^2 y'^2}{(A^2 - B^2) x' y' - A^2 c y'},$$

expression qui, à cause des deux relations

$$A^2 y'^2 + B^2 x'^2 = A^2 B^2, \quad A^2 - B^2 = c^2 \ (\text{n° 126})$$

devient

$$\text{tang V} = \frac{B^2 c x' - A^2 B^2}{c^2 x' y' - A^2 c y'} = \frac{B^2 (c x' - A^2)}{c y' (c x' - A^2)};$$

d'où

$$\text{tang V} = \frac{B^2}{c y'}. \tag{1}$$

Quant à l'expression de tang V', on peut l'obtenir sans recommencer le même calcul.

En effet, comme on a pour le rayon vecteur F'M,

$$y = a''(x + c),$$

et, par suite,

$$y' = a''(x' + c), \quad \text{d'où} \quad a'' = \frac{y'}{x' + c},$$

il est évident que, si l'on substituait cette valeur de a'' dans l'expression posée pour tang V', on obtiendrait un résultat ne différant de celui trouvé pour tang V, que par le *changement de signe* de c.

Par conséquent,

$$\text{tang V'} = -\frac{B^2}{c y'}. \tag{2}$$

Fig. 104. Les deux expressions de tang V, tang V', étant *égales* et

de signes contraires, il s'ensuit *que les angles* F'MR, FMR, *sont* SUPPLÉMENTAIRES.

Cette propriété remarquable donne lieu à plusieurs propositions.

D'abord, on a, suivant la figure et d'après ce qui vient d'être démontré,

1°. $F'MR + F'MR' = 180°$, $F'MR + FMR = 180°$,

d'où

$$F'MR' = FMR;$$

2°. Le rayon vecteur F'M étant prolongé en K,

$F'MR + RMK = 180°$, $F'MR + FMR = 180°$,

d'où

$$RMK = FMR.$$

Ce qui montre que *la tangente forme avec les deux rayons vecteurs, de part et d'autre du point de contact, des angles égaux,*

Ou bien que *la tangente divise en deux parties égales l'angle formé par l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre.*

De plus, si l'on mène la *normale* MS, on a ces autres relations

$$F'MS + F'MR' = 90°, \quad FMS + FMR = 90°;$$

d'où, à cause de $F'MR' = FMR$,

$$F'MS = FMS;$$

ce qui signifie que *la normale divise en deux parties égales l'angle formé par les deux rayons vecteurs.*

198. Ces propriétés sont tellement liées entre elles, que, l'une quelconque étant démontrée, les autres s'en déduisent au moyen des principes les plus élémentaires de la géométrie.

Ainsi, par exemple, on peut prouver *directement* la *dernière propriété*, puis en conclure successivement toutes les autres.

Reprenons, à cet effet, l'équation de la *normale* (n° 190), FIG. 104. savoir :

$$y - y' = \frac{A^2 y'}{B^2 x'}(x - x');$$

Fig. 104. et pour obtenir l'abscisse du point S où cette normale coupe l'axe des x, posons $y = 0$; il en résulte

$$x = x' - \frac{B^2 x'}{A^2} = \frac{(A^2 - B^2)x'}{A^2} = \frac{c^2 x'}{A^2};$$

d'où

$$SF' = c + \frac{c^2 x'}{A^2} = \frac{c(A^2 + cx')}{A^2}, \quad \text{et} \quad SF = \frac{c(A^2 - cx')}{A^2};$$

et, par suite,

$$SF' : SF :: A^2 + cx' : A^2 - cx'.$$

D'un autre côté, on a (n° 126) pour les expressions des *rayons vecteurs* F'M, FM,

$$F'M = A + \frac{cx'}{A} = \frac{A^2 + cx'}{A}, \quad \text{et} \quad FM = \frac{A^2 - cx'}{A};$$

d'où

$$F'M : FM :: A^2 + cx' : A^2 - cx'.$$

Comparant entre elles les deux proportions, on en déduit la suivante,

$$SF' : SF :: F'M : FM,$$

qui prouve, d'après un théorème connu de géométrie, que la *normale* MS est BISSECTRICE de l'angle FMF.

Partant de là et remarquant que l'on a

$$F'MR' + F'MS = 90°, \quad SMF + FMR = 90°,$$

on parvient à l'égalité précédemment établie,

$$F'MR' = FMR;$$

et ainsi des autres relations.

199. La propriété de la *tangente* considérée *par rapport aux rayons vecteurs* fournit un moyen très-simple de *mener une tangente* à l'ellipse, 1° par un point pris *sur* la courbe, 2° par un point pris *hors de* la courbe, *les deux foyers* étant supposés *donnés* ou déjà *déterminés*.

Fig. 104. PREMIÈREMENT, soit M un point pris *sur la courbe*.

Tirez les rayons vecteurs FM, F'M, et *prolongez* celui-ci indéfiniment, en K; *prenez* sur ce prolongement, MG = MF, et *joignez* le point F au point G; puis, *abaissez* du point M la droite MIR *perpendiculaire* sur FG.

Vous obtenez ainsi la TANGENTE DEMANDÉE;

Car le triangle MFG étant *isocèle* par construction, il s'ensuit que la droite MIR *divise* l'angle au sommet, M, en *deux parties égales*; propriété *caractéristique* de la tangente à l'ellipse (*).

SECONDEMENT, soit N un point pris *hors de l'ellipse*.

Pour déterminer le *point de contact* M, il suffirait de fixer la *position de la droite* F'K.

Or, sur cette droite se trouve *un point* G qui jouit de la propriété d'être distant, 1° du point F' d'*une longueur connue*, 2A; 2° du point N d'une longueur *également connue*, NF (puisque la tangente NMR est perpendiculaire sur le milieu de FG); d'où résulte la construction suivante :

Décrivez des points F', N, comme *centres*, avec des rayons *respectivement égaux à* 2A et à NF, *deux arcs de cercle* qui se coupent au point G; *tirez* F'G qui rencontre la courbe en M; puis *joignez* le point N au point M.

La droite NM est la TANGENTE DEMANDÉE.

Comme, d'ailleurs, les deux arcs ont, généralement, *un second point d'intersection*, G', il s'ensuit que, si l'on *tire* F'G' et qu'on *joigne* le point N au point M' où la droite F'G' rencontre la courbe, on obtiendra la SECONDE TANGENTE qui peut être menée par le point N.

(*) On peut démontrer *à priori*, et sans se fonder sur cette propriété, que la droite MR qui *divise en deux parties égales* l'angle FMK formé par le *rayon vecteur* FM et le *prolongement* MK de l'autre, est *tangente* à l'ellipse. FIG 104.

Il suffit, pour cela, de faire voir que tout point N de cette droite, autre que M, est situé *hors* de la courbe.

Prenant sur MK une distance MG *égale* à MF, puis, tirant les droites NF', NG, ainsi que FG qui rencontre en I la droite NMR, on a l'inégalité

$$F'N + NG > F'G;$$

mais comme le triangle MFG est *isocèle* par construction, la droite NMR est *perpendiculaire* sur FG et passe par son *milieu* I; donc elle a tous ses points *également distants* de F et de G; par suite, NG = NF.

D'un autre côté, on a

$$F'G = F'M + MG = F'M + MF = 2A;$$

ainsi, l'inégalité précédente devient

$$F'N + NF > 2A;$$

ce qui prouve que le point N est un point *extérieur*.

Cette demonstration *synthétique* est, comme l'on voit, *uniquement* fondée sur la *définition géométrique* de l'ellipse, et sur les *caractères* des points pris *sur* la courbe ou *hors* de la courbe.

Fig. 104. On doit remarquer ici que, tant que le point N sera *extérieur* à l'ellipse, la construction donnera toujours lieu à *deux* solutions; ou, en d'autres termes, que les circonférences décrites des points F' et N, comme centres, *se couperont*.

Or cela peut se prouver de deux manières: soit en faisant voir que la distance des centres est *moindre que* la somme des rayons, et *plus grande que* leur différence, soit en établissant que l'une des circonférences décrites a *deux* points, l'un *intérieur*, l'autre *extérieur* à la seconde.

Démontrons, par exemple, en appliquant ce dernier moyen, que circ. NF a *deux* points, l'un *intérieur*, l'autre *extérieur* à circ. 2A.

En premier lieu, on a évidemment $F'F < 2A$; d'où il résulte que le point F de circ. NF est *intérieur* à circ. 2A.

En second lieu, soit prolongé F'N d'une longueur NF'' *égale à* NF; comme, par hypothèse, le point N est *extérieur* à l'ellipse, on a $NF' + NF > 2A$, et par suite, $NF' + NF''$ ou $F'F'' > 2A$; d'où il suit que le point F'' de circ. NF est *extérieur* à circ. 2A.

Donc, etc.

Il est encore à observer que les constructions précédentes sont, comme la démonstration *synthétique* que nous avons donnée, uniquement fondées sur la *définition* de l'ellipse et sur les *caractères* qui (n° 172) distinguent les points pris *sur* la courbe ou *hors de* la courbe.

Fig. 105. **200.** *Remarque sur les dénominations de* FOYERS *et de* RAYONS VECTEURS. — On peut, en se fondant sur *la loi* connue en Physique, de l'*égalité* des angles d'*incidence* et de *réflexion* pour des rayons de *chaleur* ou de *lumière*, émanant d'un point déterminé, rendre raison des dénominations de *foyers* et de *rayons vecteurs*, données aux points F, F', et aux lignes FM, F'M.

Concevons, en effet, qu'à l'un des *foyers* F d'une ellipse (considérée comme le double de *la génératrice* d'une *surface de révolution* formée par la rotation de AM'MB autour de AB), soit placé un corps *chaud* ou *lumineux* dont émanent des *rayons* de chaleur ou de lumière, se dirigeant sur les points M, M' de l'ellipse, ou de la *surface* dont la

demi-courbe est la *génératrice*. Les rayons FM, FM′, formant avec les tangentes à la courbe, menées par ces points, des angles *d'incidence* FMT, FM′T′, doivent, en vertu du principe de Physique, se *réfléchir* suivant des droites faisant, avec ces mêmes tangentes, des angles de *réflexion* respectivement *égaux* aux premiers.

Ces droites ne peuvent donc être que MF′, M′F′, qui font, avec les tangentes, les angles F′M*t*, F′M′*t*′, *égaux* aux angles FMT, FM′T′; d'où il suit que, si l'on place un charbon ardent au point F, et un corps inflammable au point F′, les rayons partis du premier point iront tous sensiblement se concentrer sur ce corps, qui s'enflammera comme si un *foyer de chaleur* était placé en ce point F′.

Même phénomène se produirait au point F par rapport au point F′ où se trouverait placé le corps chaud.

Conséquences des propriétés de la tangente considérée par rapport aux rayons vecteurs.

201. PREMIÈRE CONSÉQUENCE. — Si l'on se reporte à la construction du n° 199, qui a pour objet de fixer la position de la *tangente* en un point quelconque, M, de l'ellipse, on reconnaît que la droite FG est divisée en *deux parties égales* au point I, et que ce point peut être considéré comme le *pied de la perpendiculaire abaissée de l'un des foyers*, F, *sur la tangente* MR. FIG. 104.

Or, en joignant le point I au *centre* O de la courbe, on forme un triangle FOI qui, à cause de FI=IG, et de FO=OF′, est *semblable* au triangle FF′G; et l'on a la proportion

$$F'G : OI :: F'F : OF.$$

Mais

$$F'G = 2A, \quad F'F = 2OF;$$

donc

$$OI = \frac{F'G}{2} = A.$$

On trouverait de même, à l'aide d'une construction analogue, servant à déterminer le point I′, *pied de la perpendiculaire abaissée du point* F′ *sur la tangente*,

$$OI' = A.$$

D'où l'on peut conclure que le *lieu géométrique des pieds de toutes les perpendiculaires abaissées des foyers sur les tangentes, est la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre.*

Fig. 104. **202.** Seconde conséquence. — Soient abaissées des points F et F′ les deux *perpendiculaires* FI, F′I′ sur la *tangente* RR′; on vient de démontrer que les distances OI, OI′, sont égales à A.

Cela posé, si des points O, F, on mène OL, FL′, *parallèles* à la tangente, on a, d'après la figure,

$$I'F' = I'L + LF',$$
$$IF = I'L' = I'L - LF'$$

(LF′ étant égal à LL′, à cause de OF′ = OF); d'où l'on déduit

$$I'F' \times IF = \overline{I'L}^2 - \overline{LF'}^2.$$

Mais les triangles rectangles I′OL, F′OL, dans lesquels

$$OI' = A \quad \text{et} \quad OF' = c \text{ ou } \sqrt{A^2 - B^2},$$

donnent

$$\overline{I'L}^2 = A^2 - \overline{OL}^2, \quad \overline{F'L}^2 = c^2 - \overline{OL}^2;$$

on obtient donc

$$I'F' \times IF = A^2 - \overline{OL}^2 - c^2 + \overline{OL}^2 = A^2 - c^2 = B^2.$$

Ainsi, le *produit des perpendiculaires abaissées des deux foyers sur une tangente est égal au* carré de la moitié du second axe.

Fig 104. **203.** Troisième conséquence. — Soit mené le diamètre *mm′* conjugué de celui qui passe par le point de contact de la tangente RR′, et tirons les rayons vecteurs FM, F′M, ainsi que la ligne OI qui joint le centre au pied de la perpendiculaire abaissée du foyer F sur la tangente.

On a vu (n° 196) que le diamètre *mm′* est parallèle à la tangente; d'ailleurs OI est parallèle à F′M, à cause de la similitude des triangles FOI, FF′G; donc la figure OIMH est un parallélogramme, et l'on a

$$MH = OI = A;$$

ce qui montre que *la partie d'un rayon vecteur comprise entre la tangente et le diamètre conjugué de celui*

qui passe par le point de contact, est égale à la MOITIÉ DU PREMIER AXE.

Toutes ces propriétés, qui ont été facilement déduites de celles de la *tangente considérée par rapport aux rayons vecteurs*, trouvent leur application dans la résolution des problèmes.

§ III. — PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSE RAPPORTÉE A DES DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

204. La propriété caractéristique de tout système de *diamètres conjugués* consistant (n° 178) en ce que chacun d'eux *divise en deux parties égales* toutes les cordes de la courbe menées *parallèlement* à l'autre, il en résulte que, si l'on rapporte la courbe à un semblable système, la nouvelle équation ne doit renfermer que les *carrés* des coordonnées et une quantité toute connue, c'est-à-dire doit être *de même forme* que celle de la courbe rapportée *à ses axes principaux*.

Nous pourrions donc poser immédiatement, pour l'équation de la courbe rapportée à l'un de ces systèmes,

$$My'^2 + Nx'^2 = P$$

(*voir* le n° 179); et par une transformation analogue à celle du n° 133, nous la ramènerions à celle-ci :

$$A'^2 y'^2 + B'^2 x'^2 = A'^2 B'^2.$$

Mais on conçoit que, pour chaque système dont on donne la direction, les *constantes* A′ et B′ qui, comme il est aisé de le voir, représentent les *demi-diamètres*, doivent avoir avec les *demi-axes* certaines relations. Or, ce sont ces relations qu'il s'agit maintenant de déterminer.

Pour y parvenir d'une manière générale, nous nous proposerons la question suivante :

L'équation d'une ellipse rapportée à ses axes principaux étant donnée, rapporter la courbe à un nouveau système tel, que la nouvelle équation conserve la même forme.

C'est une simple application de la transformation des coordonnées.

Dans l'équation

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2$$

substituons à la place de x, y, les valeurs

$$x = x \cos\alpha + y \cos\alpha',$$
$$y = x \sin\alpha + y \sin\alpha',$$

qui (n° 119) servent à passer d'un système rectangulaire à un système oblique de même origine.

Il vient, par cette substitution,

$$\left.\begin{array}{l}(A^2 \sin^2\alpha' + B^2 \cos^2\alpha')\, y^2 + (A^2 \sin^2\alpha + B^2 \cos^2\alpha)\, x^2 \\ \quad + 2\,(A^2 \sin\alpha \sin\alpha' + B^2 \cos\alpha \cos\alpha')\, xy\end{array}\right\} = A^2 B^2.$$

Mais, d'après l'énoncé, l'équation ne doit renfermer que les *carrés* des variables et la quantité toute connue; il faut donc que le coefficient de xy soit égal à 0; ce qui donne

$$(1) \qquad A^2 \sin\alpha \sin\alpha' + B^2 \cos\alpha \cos\alpha' = 0;$$

et l'équation de la courbe se réduit à

$$(2) \quad (A^2 \sin^2\alpha' + B^2 \cos^2\alpha')\, y^2 + (A^2 \sin^2\alpha + B^2 \cos^2\alpha)\, x^2 = A^2 B^2.$$

Si l'on divise l'équation (1) par $\cos\alpha \cos\alpha'$, elle devient

$$A^2 \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' + B^2 = 0;$$

d'où

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = -\frac{B^2}{A^2}.$$

Comme on n'a qu'*une seule* équation pour déterminer les deux angles α, α', il s'ensuit que *le nombre des systèmes de diamètres conjugués est infini.*

Cette relation est d'ailleurs identique avec celle du n° 179; et les conséquences qui en ont été déduites se reproduisent également ici.

Soit fait successivement dans l'équation (2),

$$y = 0, \qquad x = 0,$$

il en résulte

$$x^2 = \frac{A^2 B^2}{A^2 \sin^2\alpha + B^2 \cos^2\alpha}, \qquad y^2 = \frac{A^2 B^2}{A^2 \sin^2\alpha' + B^2 \cos^2\alpha'}.$$

FIG. 103. Ces expressions représentent les carrés des distances OM, Om, ou des *demi-diamètres conjugués*. Donc, en désignant par 2 A', 2 B', les longueurs totales MM', mm', on a les relations

$$A'^2 = \frac{A^2 B^2}{A^2 \sin^2\alpha + B^2 \cos^2\alpha}, \qquad B'^2 = \frac{A^2 B^2}{A^2 \sin^2\alpha' + B^2 \cos^2\alpha'};$$

d'où

$$A^2\sin^2\alpha + B^2\cos^2\alpha = \frac{A^2B^2}{A'^2}, \quad A^2\sin^2\alpha' + B^2\cos^2\alpha' = \frac{A^2B^2}{B'^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), on obtient enfin

$$A'^2y^2 + B'^2x^2 = A'^2B'^2,$$

pour l'équation de l'ellipse *rapportée à un système quelconque de diamètres conjugués.*

Comme pour $x = \pm A'$ cette équation donne

$$y^2 = 0,$$

et que, de même, pour $y = \pm B'$ on a

$$x^2 = 0,$$

on doit conclure que les droites menées par les points M, M', m, m', *parallèlement aux deux diamètres,* sont *tangentes* à la courbe, propriété qui a déjà été reconnue (n° 196).

205. Les expressions de A'^2 et B'^2 peuvent, à l'aide de formules trigonométriques connues, recevoir une forme qui permet d'établir les relations existantes entre *deux diamètres conjugués quelconques* et les *axes principaux.*

Il suffit, pour cela, d'y remplacer $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha'$ et $\cos^2\alpha'$ par leurs valeurs en fonction de $\tang^2\alpha$ et $\tang^2\alpha'$.

On trouve, par cette substitution,

$$A'^2 = \frac{A^2B^2(1+\tang^2\alpha)}{A^2\tang^2\alpha + B^2}, \quad B'^2 = \frac{A^2B^2(1+\tang^2\alpha')}{A^2\tang^2\alpha' + B^2},$$

équations qui, réunies à l'équation de condition,

$$\tang\alpha.\tang\alpha' = -\frac{B^2}{A^2},$$

renferment les *six* quantités A, B, A', B', $\tang\alpha$, $\tang\alpha'$, en sorte que, si l'on élimine entre ces équations les quantités $\tang\alpha$, $\tang\alpha'$, on doit nécessairement parvenir à une certaine relation entre les *quatre* quantités A, B, A', B'.

Or, des deux premières équations on déduit

$$\tang^2\alpha = \frac{B^2(A^2 - A'^2)}{A^2(A'^2 - B^2)}, \quad \tang^2\alpha' = \frac{B^2(A^2 - B'^2)}{A^2(B'^2 - B^2)};$$

d'où

$$\tang^2\alpha.\tang^2\alpha' = \frac{B^4}{A^4}\cdot\frac{(A^2 - A'^2)(A^2 - B'^2)}{(A'^2 - B^2)(B'^2 - B^2)};$$

D'un autre côté, la troisième équation donne

$$\operatorname{tang}^2\alpha \cdot \operatorname{tang}^2\alpha' = \frac{B^4}{A^4}.$$

On a donc la relation

$$\frac{(A^2 - A'^2)(A^2 - B'^2)}{(A'^2 - B^2)(B'^2 - B^2)} = 1,$$

ou, chassant le dénominateur et développant les calculs,

$$A^4 - A^2A'^2 - A^2B'^2 + A'^2B'^2 = A'^2B'^2 - B^2B'^2 - A'^2B^2 + B^4.$$

Réduisant et transposant, il vient

$$A^4 - B^4 = A'^2(A^2 - B^2) + B'^2(A^2 - B^2);$$

d'où l'on tire, en divisant par $A^2 - B^2$,

$$A'^2 + B'^2 = A^2 + B^2, \quad \text{ou} \quad 4A'^2 + 4B'^2 = 4A^2 + 4B^2;$$

ce qui prouve que *la somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est égale à la somme des carrés des axes.*

206. Cette propriété peut aussi se démontrer à l'aide de la question *inverse* de celle du n° **204**, et ayant pour objet:

L'équation d'une ellipe rapportées à un système de diamètres conjugués étant donnée, trouver l'équation de la courbe rapportée au système de ses axes principaux.

Pour résoudre cette question, nous ferons usage des formules

$$x = \frac{x\sin(\theta - \alpha) - y\cos(\theta - \alpha)}{\sin\theta}, \qquad y = \frac{x\sin\alpha + y\cos\alpha}{\sin\theta},$$

qui servent (n° **117**) à passer d'un système *oblique* à un système *rectangulaire* de *même origine.*

Substituant ces valeurs dans l'équation de la courbe,

$$A'^2y^2 + B'^2x^2 = A'^2B'^2,$$

et chassant le dénominateur, on obtient la transformée

$$\left.\begin{aligned} &[A'^2\cos^2\alpha + B'^2\cos^2(\theta - \alpha)]y^2 \\ &+ [A'^2\sin^2\alpha + B'^2\sin^2(\theta - \alpha)]x^2 \\ +[2A'^2\sin\alpha\cos\alpha &- 2B'^2\sin(\theta - \alpha)\cos(\theta - \alpha)]xy \end{aligned}\right\} = A'^2B'^2\sin^2\theta.$$

Comme le nouveau système d'axes doit jouir de la propriété caractéristique (n° **178**) des *diamètres conjugués*, il faut que le terme en xy disparaisse; ce qui exige que l'on ait

$$(1) \qquad A'^2\sin\alpha\cos\alpha - B'^2\sin(\theta - \alpha)\cos(\theta - \alpha) = 0,$$

et alors l'équation de la courbe se réduit à

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l}[A'^2\cos^2\alpha + B'^2\cos^2(\theta-\alpha)]y^2\\ +[A'^2\sin^2\alpha + B'^2\sin^2(\theta-\alpha)]x^2\end{array}\right\} = A'^2B'^2\sin^2\theta.$$

Il résulte d'ailleurs de la nature de la transformation, que le système *actuel* de *diamètres conjugués* est un système RECTANGULAIRE; donc ce système est celui des *axes principaux*, puisqu'on a reconnu (n° 180) que c'est le *seul* système de diamètres conjugués *perpendiculaires entre eux*.

Ainsi, l'on doit regarder l'équation (2) comme celle de l'ellipse *rapportée à son centre et à ses axes*.

Cependant, pour qu'on puisse la comparer à l'équation

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,$$

il est nécessaire que le second membre soit le produit des coefficients de y^2 et x^2.

Or, pour la ramener à cet état, on sait (n° 133) qu'il suffit de multiplier les deux membres par un facteur K égal à $\frac{P}{MN}$, M, N, désignant les coefficients de y^2, x^2, et P la quantité toute connue qui est dans le second membre.

Calculons donc cette valeur de K relative à l'équation (2); on a

$$K = \frac{A'^2B'^2\sin^2\theta}{[A'^2\cos^2\alpha + B'^2\cos^2(\theta-\alpha)][A'^2\sin^2\alpha + B'^2\sin^2(\theta-\alpha)]}.$$

Effectuant les calculs indiqués au dénominateur, et observant que l'équation de condition (1), étant élevée au carré, donne

$$\begin{aligned}&A'^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha + B'^4\sin^2(\theta-\alpha)\cos^2(\theta-\alpha)\\ &= 2A'^2B'^2\sin\alpha\cos\alpha\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha),\end{aligned}$$

on reconnaît que ce dénominateur prend la forme

$$A'^2B'^2\left[\begin{array}{l}\sin^2\alpha\cos^2(\theta-\alpha) + \sin^2(\theta-\alpha)\cos^2\alpha\\ \quad + 2\sin\alpha\cos(\theta-\alpha)\sin(\theta-\alpha)\cos\alpha\end{array}\right]$$

ou

$$A'^2B'^2[\sin\alpha\cos(\theta-\alpha) + \sin(\theta-\alpha)\cos\alpha]^2,$$

ou bien enfin

$$A'^2B'^2\sin^2(\alpha+\theta-\alpha) = A'^2B'^2\sin^2\theta$$

Ainsi la valeur de K devient

$$K = \frac{A'^2 B'^2 \sin^2 \theta}{A'^2 B'^2 \sin^2 \theta} = 1 ;$$

ce qui prouve que l'équation (2) n'a besoin d'aucune préparation pour être comparée à l'équation

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2.$$

On a donc immédiatement les relations suivantes :

$$A'^2 \cos^2 \alpha + B'^2 \cos^2 (\theta - \alpha) = A^2,$$
$$A'^2 \sin^2 \alpha + B'^2 \sin^2 (\theta - \alpha) = B^2,$$
$$A'^2 B'^2 \sin^2 \theta = A^2 B^2.$$

Les deux premières relations, ajoutées entre elles, donnent

$$A'^2 + B'^2 = A^2 + B^2 ;$$

ce qui démontre *la propriété énoncée*.

Quant à la troisième relation, on en tire

$$A'.B'.\sin\theta = A.B,$$

ou, en remarquant que θ ou l'angle des deux diamètres conjugués est égal à $\alpha' - \alpha$,

$$A'B'.\sin(\alpha' - \alpha) = AB ;$$

d'où

$$4\,A'B'\sin(\alpha' - \alpha) = 4\,AB,$$

expression qu'on peut traduire, en Géométrie, de la manière suivante :

FIG. 103. Soient $MM' = 2A'$, $mm' = 2B'$, deux *diamètres conjugués* par les extrémités desquels on a mené des *tangentes* qui, comme on l'a vu au n° 196, déterminent un *parallélogramme* $TT'tt'$.

Si du point m on abaisse une perpendiculaire ml sur MM', on a évidemment

$$t'T' = MM' = 2A',$$
$$ml = mm'.\sin mm'l = 2B'.\sin(\alpha' - \alpha) ;$$

d'où

$$\text{SURF. } TT'tt' = 4\,A'B'\sin(\alpha' - \alpha) = 4\,AB,$$

ce qui prouve que le *parallélogramme* $TT'tt'$ *est équivalent au rectangle des axes principaux.*

On voit ainsi que l'analyse précédente conduit, non-seu-

lement à la propriété du n° 205, mais encore à cette autre, non moins importante :

Tous les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse et dont les côtés sont respectivement parallèles à deux diamètres conjugués, ont une surface constante et égale au rectangle construit sur les axes.

207. Remarque. — Cette *surface constante* jouit de la propriété d'être un *minimum* parmi celles des différents parallélogrammes qu'on peut, en général, *circonscrire* à une ellipse donnée. Fig. 103.

En effet, considérons, par exemple, un parallélogramme UVV'U', dont deux côtés soient les tangentes menées par les extrémités du diamètre mm' et les deux autres côtés soient les tangentes menées par les extrémités d'un diamètre nn' non conjugué de mm'.

On a, pour l'expression de la *surface* de ce parallélogramme,

$$U'V' \times ml = U'V' \times 2B' \sin(\alpha' - \alpha);$$

or U'V', parallèle à MM', est évidemment *plus grand* que ce diamètre MM' ou 2A', puisque tous les points des lignes UU', VV', autres que n, n', sont *extérieurs* à l'ellipse.

Donc on a

$$\text{surf. } UVU'V' > 2A' \times 2B' \sin(\alpha' - \alpha) \text{ ou } > \text{surf. } TT'tt'.$$

208. Système de diamètres conjugués égaux. — Parmi les systèmes en nombre infini de *diamètres conjugués* d'une ellipse, il y en a un, *différent du système des axes principaux*, qui mérite une attention particulière; c'est celui des deux diamètres *parallèles* aux deux cordes menées d'une des extrémités du *petit axe* aux deux extrémités du *grand axe*. Fig. 100.

Les cordes AC, BC étant *également inclinées* sur ce grand axe AB, il en est de même des diamètres II', LL', qui leur sont *parallèles*, en sorte que les angles IOB, LOA sont *égaux*.

Il résulte de cette égalité des angles et de la symétrie de la courbe par rapport à ses *axes principaux* que ces deux diamètres sont *égaux;* c'est-à-dire que l'on a

$$B' = A';$$

et l'équation de l'ellipse rapportée à ce système *particulier* d'axes *obliques* se réduit à

$$y^2 + x^2 = A'^2,$$

équation identique avec celle du *cercle* rapporté à son centre comme origine et à des axes rectangulaires.

Comme d'ailleurs les angles que deux *diamètres conjugués* de tout autre système forment avec le *grand axe* AB, des deux côtés de CD, sont évidemment *inégaux*, et que, par suite, ces diamètres sont aussi *inégaux*, il en résulte que l'équation précédente ne convient absolument qu'*à ce seul système d'axes*.

Donc, en général, toute équation telle que

$$y^2 + x^2 = M^2$$

quand les axes sont *obliques*, est celle d'une *ellipse rapportée à un système de* DIAMÈTRES CONJUGUÉS ÉGAUX.

209. *Autres propriétés de l'ellipse rapportée à un système de diamètres conjugués.* — Toutes les propriétés de l'ellipse qui ont été démontrées *indépendamment de l'inclinaison des axes*, sont également *vraies*, quand on suppose la courbe rapportée à un système de *diamètres conjugués*.

Ainsi *premièrement*, son équation, dans ce cas, étant

$$A'^2y^2 + B'^2x^2 = A'^2B'^2, \quad \text{ou} \quad A'^2y^2 + B'^2x^2 - A'^2B'^2 = 0,$$

on a

$$A'^2y^2 + B'^2x^2 - A'^2B'^2 > 0,$$

pour *caractériser* les points *extérieurs*, et

$$A'^2y^2 + B'^2x^2 - A'^2B'^2 < 0,$$

pour *caractériser* les points *intérieurs*.

FIG. 106. *Secondement*, l'équation de la courbe pouvant être mise sous la forme

$$\frac{y^2}{(A' + x)(A' - x)} = \frac{B'^2}{A'^2},$$

ou, en langage géométrique,

$$\frac{\overline{PM}^2}{AP \times PB} = \frac{B'^2}{A'^2},$$

on en conclut que :

Le carré d'une ordonnée parallèle à l'un des diamètres conjugués est au rectangle des distances des extrémités de l'autre diamètre au pied de l'ordonnée, dans un rapport constant.

210. Cette dernière propriété, qui correspond à celle du n° 173, montre que la liaison qui existe entre *l'ordonnée* et *l'abscisse* d'un point quelconque de l'ellipse, est *la même*, quel que soit le système de *diamètres conjugués* auquel la courbe est rapportée.

D'où l'on déduit le moyen suivant de *construire une ellipse, connaissant un système de diamètres conjugués en grandeur et en direction.*

Soient OB, OC les *demi-diamètres donnés.* FIG. 106.

Par le point O *tracez* OC′ perpendiculaire à OB et égal à OC; puis, sur les deux lignes OB, OC′ considérées comme les demi-axes principaux d'une ellipse, *décrivez*, par l'un des moyens connus, la courbe AC′BD′A; *élevez* aux points P, P′, etc., des ordonnées PN, P′N′, etc., à cette courbe, et *menez* les lignes PM, P′M′, etc., parallèles à OC et respectivement égales à PN, P′N′, etc.

Les points M, M′, etc., appartiendront *à la courbe cherchée*, qui sera représentée par ACBDA.

Car de la disposition prise pour les axes des coordonnées et de la propriété précédente, il résulte évidemment que, pour *les mêmes abscisses*, les *ordonnées* des deux courbes doivent être *égales*.

De la tangente à l'ellipse rapportée à un système de diamètres conjugués.

211. TANGENTE MENÉE PAR UN POINT PRIS SUR LA COURBE, ET SOUS-TANGENTE. — On reconnaît facilement que les méthodes établies précédemment pour obtenir l'équation de la *tangente* à une courbe, sont tout à fait *indépendantes de l'inclinaison des axes.* FIG. 107.

Ainsi, l'équation de la courbe étant

$$A'^2y^2 + B'^2x^2 = A'^2B'^2,$$

on a, pour l'équation de la tangente au point M, ou $[x', y']$,

$$y - y' = -\frac{B'^2 x'}{A'^2 y'}(x - x'),$$

et pour *l'expression de la sous-tangente*,

$$y = 0 \ldots x - x' = \frac{A'^2 y'^2}{B'^2 x'} = \frac{A'^2 - x'^2}{x'}.$$

Quant à *l'équation de la normale* et à *l'expression de la sous-normale*, comme on aurait à faire entrer en considération la condition de *perpendicularité* dans l'hypothèse d'axes *obliques*, on arriverait à des résultats compliqués, tout différents de ceux qui correspondent aux axes *principaux;* nous ne nous y arrêterons pas.

212. TANGENTE MENÉE PAR UN POINT EXTÉRIEUR. — Si l'on propose de *mener une tangente* par un point donné *hors de* la courbe, on est conduit à l'une des propriétés les plus remarquables de l'ellipse, dont celle du n° **194** n'est qu'un *cas particulier*.

FIG. 107. Soit, en effet, une droite LL′ menée *à volonté* dans le plan d'une ellipse; et concevons que par chacun des points, H, H′, etc., de cette droite on ait mené *deux tangentes* à la courbe.

Supposons, d'ailleurs, l'ellipse rapportée à un système de *diamètres conjugués* OX, OY, dont l'un, celui des y, soit *parallèle à la droite* LL′, ce qui est toujours possible.

Désignons, en outre, par α, 6, les coordonnées du point H par exemple, x', y' exprimant les coordonnées inconnues *du point de contact;* et raisonnons comme au n° **194**.

Pour déterminer x', y', et obtenir, par suite, la valeur du *coefficient d'inclinaison*, $-\frac{B'^2 x'}{A'^2 y'}$ dans l'équation de la *tangente*, on a les deux relations

$$(1) \qquad A'^2 6 y' + B'^2 \alpha x' = A'^2 B'^2,$$

$$(2) \qquad A'^2 y'^2 + B'^2 x'^2 = A'^2 B'^2.$$

Cela posé, au lieu de chercher x', y' par l'élimination, on peut construire les *lieux géométriques* de ces deux équations.

Or, l'équation (2) n'est autre chose que celle de *l'ellipse déjà construite*, en tant que x', y' sont des *variables*.

Quant à l'équation (1) qui représente une *ligne droite*, il faut, pour obtenir les points d'intersection de cette droite avec les axes, poser successivement $y' = 0$, $x' = 0$; et il vient pour

$$y' = 0 \ldots \; x' = \frac{A'^2}{\alpha},$$

$$x' = 0 \ldots \; y' = \frac{B'^2}{6};$$

et ces *troisièmes proportionnelles* étant portées, l'une de O en P sur OX, l'autre de O en G sur OY, si l'on tire la droite PG et qu'on la prolonge, de côté et d'autre, jusqu'à sa rencontre avec l'ellipse, aux points M, m, on aura *les deux points de contact* des *tangentes* menées du point H.

Remarquons maintenant que l'abscisse $\frac{A'^2}{\alpha}$ du point où cette droite rencontre l'axe des x, est *indépendante* de l'ordonnée 6 de ce point; d'où il suit que, si l'on considère un second point H', ayant pour coordonnée α, 6', la *droite de jonction*, M' m', *des deux points de contact* doit passer par *le même point* P de l'axe OX.

Comme un raisonnement analogue pourrait s'appliquer à un tout autre point pris sur LL', on est en droit de conclure que :

Une droite étant tracée arbitrairement dans le plan d'une ellipse, si de chacun de ses points on mène deux tangentes à la courbe, et qu'on joigne les deux points de contact par une droite, ces droites de jonction (qu'on nomme ordinairement LIGNES DE CONTACT) *doivent toutes passer par* UN MÊME POINT; lequel se trouve placé sur le *diamètre conjugué* de celui qui est *parallèle* à la droite donnée.

Le point de concours P est dit le PÔLE de la droite LL', qui reçoit, par contre, la *dénomination* de POLAIRE.

La propriété du n° 194 n'est, comme nous l'avons déjà dit, qu'un cas particulier de celle-ci; car on avait supposé pour la précédente que la droite tracée sur le plan était *perpendiculaire*, soit au *premier*, soit au *second* axe principal de la courbe.

FIG 107. *N. B.* — Tant que la droite donnée est *extérieure* à la courbe, auquel cas l'abscisse α de la droite LL′ est *plus grande que* A′, celle du point P, ou $\frac{A'^2}{\alpha}$, est *moindre que* A′, et le *point de concours* des *lignes de contact* est INTÉRIEUR.

Le *contraire* aurait lieu si la droite donnée *rencontrait* la courbe, et, dans ce cas, il est à remarquer qu'on ne peut mener des *tangentes* que par les points *extérieurs* de la droite.

213. La réciproque de la proposition précédente est également *vraie*, et peut s'énoncer ainsi :

Si d'un point quelconque pris dans le plan d'une ellipse, soit intérieurement, soit extérieurement à la courbe, on mène des cordes ou *sécantes* en nombre quelconque, *et qu'aux deux points où chacune d'elles rencontre la courbe, on mène des tangentes, les points d'intersection de chaque couple de tangentes sont tous placés sur* UNE MÊME DROITE, *extérieure à la courbe* si le *point est intérieur*, et *vice versâ*.

Le point et la droite conservent la dénomination de *pôle* et de *polaire*.

Voici comment on peut démontrer cette *réciproque*, sans aucun calcul :

Concevez la courbe rapportée à un système de *diamètres conjugués* dont l'un, celui sur lequel se comptent les abscisses, soit la droite *joignant le centre au point donné;* puis, menez par les deux points d'intersection avec l'ellipse, de l'une des droites passant par le point donné, *deux tangentes* qui se rencontrent en *un point;* menez également par les points d'intersection d'une seconde corde ou sécante, avec la courbe, *deux autres tangentes* qui se rencontrent en *un point;* et joignez ces *deux points de rencontre.*

Il est clair, d'après la proposition directe, que si, de tous les autres points de cette ligne de *jonction*, on mène des *tangentes* à l'ellipse, toutes les *lignes de contact* correspondantes se réuniront *en* UN MÊME POINT *qui ne pourra être autre que le point donné.*

Donc, etc.

Problème.

214. Comme application de quelques-unes des propriétés que nous venons d'exposer, nous allons résoudre le problème suivant :

Une ellipse étant tracée sur un plan,

1°. *Déterminer son centre et ses axes principaux.* Fig. 108.

2°. *Trouver un système de diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné.*

Solution. — On suppose tracée l'ellipse LHL'H';

1°. *Tirez* deux cordes parallèles, *mm'*, *nn'*, et *joignez* les *milieux* de ces cordes par une droite HH'; cette droite sera (n° 177) un *diamètre* de la courbe; et le *milieu* O de ce diamètre sera le centre cherché.

Ce point étant trouvé, *menez* un diamètre quelconque, LL' (on pourrait aussi se servir du diamètre HH', déjà déterminé); puis *décrivez* sur ce diamètre une *demi-circonférence* qui rencontre la courbe en un point K. *Tirez* les *cordes supplémentaires* LK, L'K, et *tracez* les diamètres AOB, COD, respectivement *parallèles* à ces cordes.

Vous obtiendrez ainsi les deux *axes principaux;*

Car ces diamètres sont nécessairement (n° 183) *conjugués;* de plus ils sont *perpendiculaires entre eux,* puisqu'ils sont parallèles à des cordes formant entre elles un *angle droit* comme inscrit dans une demi-circonférence.

Les quatre *sommets* A, B, C, D se trouvent, par suite, également déterminés; quant aux *foyers* et aux deux *directrices,* on les obtiendrait par les moyens indiqués précédemment (n°s 131 et 151).

2°. Sur le diamètre LL' ou sur son *égal* KK' (n° 208), *décrivez,* au lieu d'une demi-circonférence, *un segment de cercle capable de l'angle donné,* et *opérez,* d'ailleurs, comme pour obtenir les *axes principaux.*

Cette dernière construction exige (n° 185) que l'angle donné, s'il est *obtus,* soit *au plus* égal à l'angle ACB, et, s'il est *aigu, au moins* égal à CBD.

Nous nous dispensons de développer ici la *discussion* à laquelle donnent lieu les constructions précédentes.

CHAPITRE IV.

DE L'HYPERBOLE.

PROPOSITIONS PRÉLIMINAIRES.

215. On a vu (n° 135) que, pour passer de l'équation de l'ellipse à celle de l'hyperbole, il suffit de changer $+B^2$ en $-B^2$, et *vice versâ*. Aussi, quoique ces deux courbes affectent une forme très-différente, y a-t-il une grande analogie dans les énoncés de leurs propriétés, et dans les modes de démonstration de ces propriétés.

C'est pourquoi, en exposant la théorie de l'hyperbole, nous nous bornerons le plus souvent, afin d'éviter des répétitions inutiles, au simple énoncé des propositions; nous aurons soin, toutefois, d'insister sur celles qui peuvent offrir des différences notables, soit dans leur nature, soit dans la manière de les démontrer. On verra, en outre, que l'hyperbole jouit de certaines propriétés qui ne sauraient appartenir ni à l'ellipse, ni à la parabole.

Pour mieux fixer les idées, nous suivrons ici le même ordre que pour l'ellipse.

216. *Caractères analytiques* des points pris *sur* la courbe *au dedans* ou *au dehors*. — L'hyperbole étant rapportée à son *centre* et à ses *axes principaux*, on a :

Fig. 109 pour le point M, *sur* la courbe, $A^2y^2 - B^2x^2 + A^2B^2 = 0$,

N, *au dedans*, $A^2y^2 - B^2x^2 + A^2B^2 < 0$,

N′, *au dehors*, $A^2y^2 - B^2x^2 + A^2B^2 > 0$,

Les deux *inégalités* sont évidentes pour des points tels que N, N′, pour lesquels on a

$$NP < MP, \quad N'P > MP.$$

Quant au point N″, dont l'ordonnée tombe entre les points A et B, comme on a

$$OP'' < OB \quad \text{ou} \quad x < A,$$

il en résulte

$$A^2B^2 - B^2x^2 > 0,$$

d'où, *à fortiori*,

$$A^2y^2 - B^2x^2 + A^2B^2 > 0.$$

217. La définition de l'hyperbole fournit un autre caractère.

Pour tout point *sur* la courbe, on a (n° 134) FIG. 109.

$$F'M - MF = 2A.$$

Soit maintenant un point *intérieur* R, et joignons-le aux points F', F; on a

$$F'R = F'M + MR, \quad \text{et} \quad RF < MF + MR;$$

d'où l'on déduit

$$F'R - RF > F'M - MF,$$

et, par suite,

$$F'R - RF > 2A;$$

mais pour un point *extérieur* R', en le joignant aux points F', F, et tirant F'M, on a

$$F'R' - R'M < F'M;$$

d'où

$$F'R' - R'M - MF, \quad \text{ou} \quad F'R' - R'F < F'M - MF;$$

donc

$$F'R' - R'F < 2A.$$

Ce qui démontre que *pour tous les points* INTÉRIEURS, *la différence de leurs distances aux deux foyers est* PLUS GRANDE *que le premier axe*, et que *pour tous les points* EXTÉRIEURS, *cette différence est* MOINDRE QUE *le premier axe.*

218. De l'équation de l'hyperbole mise sous la forme

$$\frac{y^2}{x^2 - A^2} = \frac{B^2}{A^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{(x+A)(x-A)} = \frac{B^2}{A^2},$$

on déduit, comme pour l'ellipse, que

Le carré de l'ordonnée est au produit des distances du pied de l'ordonnée aux sommets de la courbe dans un rapport constant, celui des CARRÉS *du second et du premier axe.*

La différence à noter, c'est que dans l'ellipse *le pied* FIG. 109.

de l'ordonnée est situé *entre* les sommets A, B, tandis que dans l'hyperbole il est placé *sur le prolongement* de AB, soit *à droite*, soit *à gauche*.

Lorsque pour l'hyperbole, on suppose $B = A$, ce qui donne (n° 136) l'hyperbole *équilatère*, la relation devient

$$y^2 = (x + A)(x - A);$$

ce qui signifie que *le carré de l'ordonnée est égal au rectangle des segments du premier axe, compris entre les sommets de la courbe et le pied de l'ordonnée;* propriété analogue à celle du CERCLE.

219. En comparant l'équation de l'hyperbole *équilatère*,

$$y^2 = x^2 - A^2,$$

à celle du *cercle* décrit *sur le premier axe d'une ellipse*, savoir (n° 174)

$$y^2 = A^2 - x^2,$$

on reconnaît que l'hyperbole *équilatère* est à l'hyperbole quelconque ce que le *cercle* est à *l'ellipse*.

Ainsi l'on démontrerait, comme on l'a fait pour *l'ellipse* (*voyez* la fin du n° 176), par rapport au *cercle* décrit sur le *grand axe* comme diamètre, que les *segments, compris entre deux ordonnées parallèles,* d'une hyperbole quelconque et de l'hyperbole *équilatère* dont les axes principaux sont égaux au *premier axe* de la première, sont entre eux dans le rapport *constant* du *second axe* au *premier*.

Mais, afin de tirer parti de cette relation pour l'évaluation des *aires hyperboliques,* il faudrait savoir évaluer la surface d'un segment d'hyperbole *équilatère*.

§ I. — DIAMÈTRES DANS L'HYPERBOLE. — DIAMÈTRES CONJUGUÉS. — CORDES SUPPLÉMENTAIRES; — LEURS RELATIONS AVEC LES DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

220. *Tous les diamètres de l'hyperbole sont des lignes droites passant par le centre.*

FIG. 110. Même démonstration et mêmes calculs qu'au n° 177, sauf l'échange de B^2 en $-B^2$; ce qui conduit, si l'on désigne par a le *coefficient d'inclinaison* d'une corde quelconque MM′ et de toutes les cordes qui lui sont parallèles,

à l'équation

$$y = \frac{B^2}{A^2 a} x,$$

pour représenter le *diamètre* LL′ passant par les *milieux de ces cordes*.

221. DIAMÈTRES CONJUGUÉS. — Si l'on considère, avec le diamètre LL′, un autre diamètre KK′ *parallèle* à la corde MM′, et représenté en conséquence par l'équation

$$y = ax,$$

on conclut pareillement, 1° que ce dernier passe par les *points milieux* d'un système de cordes *parallèles* au premier; 2° que, par suite, ces deux diamètres, étant tels que *chacun divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre*, sont des *diamètres conjugués*; 3° que l'hyperbole a une *infinité* de systèmes de *diamètres conjugués*; 4° que les *coefficients d'inclinaison* de deux diamètres d'un même système, tels que LL′ et KK′, sont liés par la relation

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = \frac{B^2}{A^2},$$

α et α' étant les angles que ces diamètres forment respectivement avec l'axe des x.

222. On déduit, également, de l'équation de la courbe,

$$A^2 y^2 - B^2 x^2 = -A^2 B^2,$$

que les *axes principaux* forment un système de *diamètres conjugués*.

La relation $\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = \frac{B^2}{A^2}$ montre, d'ailleurs, que ce système de *diamètres conjugués perpendiculaires*, est *le seul rectangulaire* que puisse avoir l'hyperbole, de quelque nature qu'elle soit, puisqu'en aucun cas on ne saurait avoir

$$\frac{B^2}{A^2} = -1.$$

On remarquera seulement que si l'on a $B = A$, auquel cas l'hyperbole est *équilatère*, les angles que font entre eux deux *diamètres conjugués quelconques*, satisfaisant à la

condition

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = 1,$$

sont *complémentaires* l'un de l'autre.

223. Nous savons déjà que dans l'hyperbole, les diamètres ne rencontrent pas tous la courbe; ce qui les a fait distinguer en deux sortes, savoir : *diamètres transverses* et *diamètres non transverses.*

Nous avons vu, d'ailleurs (n° 138, *fig.* 80), que si l'on forme sur les axes 2 A, 2 B le rectangle RR'SS', et que l'on tire les diagonales RS', SR', ces droites prolongées indéfiniment forment, pour les droites passant par le *centre,* deux *lignes de séparation* placées entre celles qui sont susceptibles de *rencontrer la courbe* et celles qui *ne peuvent la rencontrer.*

FIG. 110. Pour construire ces lignes sur la figure actuelle, il suffit d'*élever* au point B une perpendiculaire indéfinie, et de *porter* sur cette perpendiculaire deux distances BR, BS, égales au demi-*second axe* B, puis de *tirer* les droites OR, OS, en les prolongeant indéfiniment; ce qui donne les droites HH', II'.

Cela posé, remarquons que, d'après la relation

$$\operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\alpha' = \frac{B^2}{A^2},$$

qui existe entre les directions de deux *diamètres conjugués,* si l'on suppose

$$\operatorname{tang}\alpha < \frac{B}{A},$$

ce qui donne un diamètre *transverse,* on a nécessairement

$$\operatorname{tang}\alpha' > \frac{B}{A}.$$

Donc le *conjugué* du premier diamètre est *non transverse.*

On voit, de plus, que l'angle α *augmentant* de manière à rester MOINDRE QUE HOX, l'angle α' *diminue* en restant toujours PLUS GRAND QUE HOX.

Ces deux diamètres *se rapprochent* ainsi de plus en plus

de HH′, jusqu'à ce qu'enfin on ait

$$\alpha = \text{HOX},$$

d'où il résulte nécessairement

$$\alpha' = \text{HOX};$$

auquel cas les deux diamètres viennent à se confondre *en un seul* et avec la droite HH′.

N. B. — Nous ajouterons à ce qui vient d'être dit que le *premier axe* 2A est *le plus petit* de tous les diamètres *transverses;* ce qu'on reconnaît en observant que la distance OB est *la plus courte ligne* qu'on puisse mener du *centre* à la *tangente* RBS, et *à fortiori* à un point quelconque de la courbe.

224. CORDES SUPPLÉMENTAIRES. — On donne ce nom à *deux droites,* telles que AM et BM ou AM′ et BM′, *qui, partant des sommets* A *et* B *du premier axe, se rencontrent sur la courbe;* plus généralement, à *deux droites menées des extrémités d'un diamètre* TRANSVERSE *à un point de la courbe.* FIG. 111.

En reprenant, pour l'hyperbole, les mêmes calculs que pour l'ellipse (*voir* les nos 181, 182), on démontrerait :

1°. Que les angles MBX, MAX sont liés entre eux par la relation

$$aa' = \frac{B^2}{A^2},$$

a, a' exprimant les tangentes trigonométriques de ces angles;

2°. Que cette même relation existe entre les angles que forment avec le *premier* axe deux *cordes supplémentaires* partant des extrémités d'un diamètre *transverse quelconque.*

[Pour l'hyperbole *équilatère*, le rapport constant $\frac{B^2}{A^2}$ se réduisant à 1, il s'ensuit que les *cordes supplémentaires* forment avec le *premier axe* des angles COMPLÉMENTS l'un de l'autre.]

D'un autre côté, on a, pour tout système de *diamètres conjugués,* la relation

$$\operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{tang}\alpha' = \frac{B^2}{A^2}.$$

Donc, si l'on suppose

$$\text{tang}\,\alpha = a,$$

c'est-à-dire l'un des diamètres *parallèle* à l'*une* des cordes, il en résulte

$$\text{tang}\,\alpha' = a',$$

ou l'autre diamètre *parallèle* à la *seconde* corde.

De là se déduit, comme pour l'ellipse, un moyen d'obtenir le diamètre CONJUGUÉ d'un diamètre donné.

Soit NK le diamètre donné : *tirez* la corde AM *parallèle* à NK, et *joignez* le point M au point B, puis *tracez* K'N' *parallèle* à BM.

Vous obtenez ainsi le DIAMÈTRE CONJUGUÉ de NK.

FIG. 111. **225.** ANGLE DE DEUX CORDES SUPPLÉMENTAIRES. — Le calcul du n° 184, appliqué à l'hyperbole, donnerait

$$\text{tang AMB} = \frac{2\,AB^2}{(A^2+B^2)\,y'};$$

or ce résultat démontre que l'angle AMB, ou AM'B, de deux *cordes supplémentaires*, correspondant à une valeur *positive de y'*, est toujours *aigu*, et que *y' croissant* depuis *zéro* jusqu'à l'*infini*, cet angle *décroît* depuis 90 degrés jusqu'à 0.

La relation $a.a' = \frac{B^2}{A^2}$, qui existe entre les directions de *deux cordes supplémentaires* par rapport au *premier* axe, conduit au même résultat.

En effet, le produit des deux tangentes a, a' étant *positif*, ces tangentes sont nécessairement de *même signe*; par suite, les angles correspondants MAX, MBX, ou M'AX, M'BX sont tous les deux *aigus*, ou tous les deux *obtus*; donc leur *différence*, AMB ou AM'B, est un ANGLE AIGU.

Comme, d'ailleurs, pour $a = \frac{B}{A}$, on a aussi $a' = \frac{B}{A}$, il s'ensuit que les *cordes supplémentaires* qui correspondent à un point de la courbe situé à l'*infini*, deviennent *parallèles* ou font un angle *nul*.

Elles sont *parallèles*, soit à la droite OH, soit à la droite OI, suivant la branche de courbe que l'on considère.

L'hyperbole étant *symétrique* par rapport à son *premier*

axe, les mêmes conséquences que ci-dessus ont évidemment lieu pour les *parties inférieures* des deux branches, c'est-à-dire pour le cas de y' *négatif*.

Enfin, si l'on se reporte à la relation qui lie deux *diamètres conjugués* et deux *cordes supplémentaires*, on peut conclure de ce qui vient d'être dit, que l'*angle* de deux *diamètres conjugués* d'une hyperbole n'*est pas*, comme dans l'ellipse, *compris entre certaines limites*.

§ II. — De la tangente a l'hyperbole et de ses propriétés par rapport aux diamètres et aux rayons vecteurs.

Tangente menée par un point de la courbe.

226. L'équation de l'hyperbole étant

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2,$$

on trouverait pour l'équation de la *tangente* en un point $[x', y']$ de cette courbe (*voyez* le n° 186),

$$(1) \qquad y - y' = \frac{B^2x'}{A^2y'}(x - x'),$$

pourvu qu'on y joigne la relation

$$A^2y'^2 - B^2x'^2 = -A^2B^2$$

qui exprime que le point $[x', y']$ se trouve *sur* la courbe.

L'équation (1) peut se simplifier au moyen de la relation précédente, et devient

$$(2) \qquad A^2yy' - B^2xx' = -A^2B^2,$$

résultat qui ne diffère de l'équation de l'hyperbole qu'en ce que les *rectangles* yy', xx', remplacent les *carrés* y^2, x^2.

227. Expression de la sous-tangente. — Si dans l'équation (1) *non simplifiée*, on pose $y = 0$, il en résulte Fig. 112.

$$x - x', \quad \text{ou} \quad PR = -\frac{A^2y'^2}{B^2x'} = \frac{A^2 - x'^2}{x'}.$$

Cette valeur est essentiellement *négative* pour toute valeur *positive* de x', puisque l'on a

$$x' > A;$$

et cela doit être, d'après la position qu'occupe nécessaire-

ment par rapport au point P, le point R où la *tangente* rencontre l'axe des x.

Elle devient *nulle*, lorsqu'on suppose $x' = A$, ou le *point de contact* en B.

FIG. 112. **228.** ÉQUATION DE LA NORMALE ET EXPRESSION DE LA SOUS-NORMALE. — On a, d'après l'équation (1) de la tangente, pour celle de la *normale*,

$$y - y' = -\frac{A^2 y'}{B^2 x'}(x - x');$$

et en y faisant $y = 0$, on trouve

$$x - x' \quad \text{ou} \quad PS = \frac{B^2 x'}{A^2},$$

valeur toujours *positive* tant que l'abscisse x' du *point de contact* est elle-même *positive*.

Si l'on fait

$$x' = A,$$

on obtient pour l'*expression* de la SOUS-NORMALE,

$$\frac{B^2}{A},$$

ou la *moitié du paramètre* (n° 146), c'est-à-dire l'*ordonnée qui passe par le foyer*.

Cette valeur est le *minimum* de celles que puisse avoir la SOUS-NORMALE dans l'*hyperbole*, tandis que pour l'*ellipse* (n° 191), la même expression était un *maximum*.

229. Discutons, comme nous l'avons fait pour l'ellipse, le COEFFICIENT ANGULAIRE de la tangente,

$$a = \frac{B^2 x'}{A^2 y'}.$$

Remarquons d'abord que, dans l'*hyperbole*, x' et y' *augmentant* et *diminuant en même temps*, il est impossible de suivre la marche de la valeur de a, considérée dans son expression *actuelle*, et qu'ainsi il est nécessaire d'éliminer l'une des variables, y' par exemple, à l'aide de la relation

$$A^2 y'^2 - B^2 x'^2 = -A^2 B^2.$$

On trouve

$$y' = \pm \frac{B}{A} x' \cdot \sqrt{1 - \frac{A^2}{x'^2}};$$

d'où, substituant dans l'expression de a, et réduisant,

$$a = \pm \frac{B}{A\sqrt{1 - \frac{A^2}{x'^2}}}.$$

Cela posé, ne considérons, pour le moment, que le signe *supérieur*, et faisons *croître* x' depuis o jusqu'à $+\infty$.

Pour $x' = A$, il vient FIG. 112.

$$a = \infty;$$

ce qui démontre qu'au point B la tangente est PERPENDICULAIRE au *premier axe*.

A partir de ce point, x' *augmentant*, $\frac{A^2}{x'^2}$ *diminue*, et le radical *augmente* en se rapprochant de l'*unité*, jusqu'à ce qu'enfin on suppose $x' = \infty$, auquel cas la première valeur de a, actuellement considérée, devient

$$a = +\frac{B}{A}.$$

Si, maintenant, on cherche à quoi se réduit l'abscisse du point où la tangente qui correspond à la valeur *positive* de a, rencontre l'axe des x, et qu'à cet effet on fasse $y = o$ dans l'équation (2) du n° 226, on obtient

$$x = \frac{A^2}{x'},$$

valeur qui devient *nulle* pour $x' = \infty$.

D'où l'on voit que la tangente se confond alors avec la droite HOH′ qui a pour équation

$$y = \frac{B}{A} x.$$

Quant à la valeur *négative* de a, elle devient pour $x' = \infty$,

$$a = -\frac{B}{A};$$

et l'on reconnait que la tangente se confond avec la droite IOI′ représentée par l'équation

$$y = -\frac{B}{A} x.$$

Ainsi, les droites HH′, II′, qui, comme nous l'avons déjà vu au n° 223, sont les LIMITES DE SÉPARATION des diamètres *transverses* d'avec les diamètres *non transverses*, peuvent encore être considérées comme les LIMITES DES TANGENTES.

FIG. 112. 230. En continuant la *discussion* de l'expression

$$a = \pm \frac{B}{A\sqrt{1 - \frac{A^2}{x'^2}}},$$

on voit que le radical étant toujours *moindre que* 1, tant que x' est compris entre A et $+\infty$, la valeur *positive* de a est nécessairement *supérieure* à $\frac{B}{A}$, *limite* qu'elle atteint pour $x' = \infty$.

Donc l'angle HOX est le *minimum* des angles *aigus* que la tangente forme avec le *premier axe*.

Quant à l'abscisse, $\frac{A^2}{x'}$, du point où la tangente, en général, coupe l'axe des x, elle est toujours *positive* et moindre que A, tant que le *point de contact* est sur la branche *positive* de la courbe; ce qui veut dire que *ce point de rencontre* est constamment resserré entre le *sommet* B et le *centre* O; il finit par se *confondre avec le centre* pour $x' = \infty$.

A l'égard de la valeur *négative* de a, comme dans l'hypothèse $x' = \infty$, elle se réduit à $-\frac{B}{A}$, on en conclut que l'angle IOX est le *maximum* des angles *obtus* que la tangente est susceptible de former avec le *premier axe*.

Tangente menée par un point pris hors de la courbe, ou parallèlement à une droite donnée.

231. Nous renvoyons, pour ces questions et celles qui en dépendent, aux n°s 193 et suivants, parce que les raisonnements, les calculs et les résultats ne diffèrent de ceux relatifs à l'*ellipse* que par le changement de $+B^2$ en $-B^2$, et *réciproquement*.

De la tangente considérée par rapport aux diamètres conjugués.

232. Multiplions entre elles les deux expressions FIG. 113.

$$a = \frac{B^2 x'}{A^2 y'}, \quad a' = \frac{y'}{x'},$$

dont la première est le *coefficient d'inclinaison de la tangente*, et la seconde celui du *diamètre* MM′ passant par le *point de contact* $[x', y']$; il vient

$$a.a' = \frac{B^2}{A^2}.$$

Comparant cette relation avec l'égalité

$$\operatorname{tang}\alpha.\operatorname{tang}\alpha' = \frac{B^2}{A^2},$$

qui correspond à *deux diamètres conjugués* (n° 221), on a

$$a.a' = \operatorname{tang}\alpha.\operatorname{tang}\alpha';$$

et si l'on suppose

$$a = \operatorname{tang}\alpha,$$

il en résulte nécessairement

$$a' = \operatorname{tang}\alpha'.$$

Ce résultat démontre que le *diamètre conjugué de celui* qui *passe par le point de contact*, *est* PARALLÈLE *à la tangente.*

D'où l'on tire (comme pour l'ellipse) un moyen de mener une *tangente* : 1° *en un point donné* de la courbe; 2° *parallèlement* à une droite *quelconque.*

Voyez, pour la construction, le n° 196, en observant toutefois que, quant au *second problème*, il ne peut y avoir de *solution* qu'autant que la *droite donnée* forme avec le *premier* axe un angle *au moins* égal à l'angle TOX, ou un angle *au plus* égal à l'angle *t*OX. C'est une conséquence de ce qui a été dit au n° 230.

Propriétés de la tangente par rapport aux rayons vecteurs correspondants.

233. Quoique les calculs soient analogues à ceux qui

ont été exécutés pour l'*ellipse* (n° 197), nous les répéterons parce qu'ils comportent une modification importante.

Fig. 114. Soient MR la *tangente*, et FM, F'M les *rayons vecteurs* qui lui correspondent.

Désignons par a, a', a'', les *coefficients d'inclinaison* de la tangente et des rayons vecteurs, par V, V', les angles FMR, F'MR.

On a, d'après la figure,

$$\text{FMR} \quad \text{ou} \quad \text{V} = \text{MFX} - \text{MRX},$$
$$\text{F'MR} \quad \text{ou} \quad \text{V}' = \text{MRX} - \text{MF'X};$$

d'où

$$\text{tang V} = \frac{a' - a}{1 + aa'}, \quad \text{tang V}' = \frac{a - a''}{1 + aa''}.$$

Calculons d'abord tang V.

Le rayon vecteur FM devant passer par le point F, dont les coordonnées sont o et $+c$, a pour équation

$$y = a'(x - c);$$

et comme il doit aussi passer par le point $[x', y']$, il en résulte la relation

$$y' = a'(x' - c), \quad \text{d'où} \quad a' = \frac{y'}{x' - c}.$$

D'ailleurs on a (n° 226)

$$a = \frac{\text{B}^2 x'}{\text{A}^2 y'};$$

il ne s'agit donc plus que de substituer ces valeurs dans l'expression de tang V.

On trouve ainsi :

$$\text{tang V} = \frac{\dfrac{y'}{x' - c} - \dfrac{\text{B}^2 x'}{\text{A}^2 y'}}{1 + \dfrac{y'}{x' - c} \cdot \dfrac{\text{B}^2 x'}{\text{A}^2 y'}} = \frac{\text{A}^2 y'^2 - \text{B}^2 x'^2 + \text{B}^2 cx'}{(\text{A}^2 + \text{B}^2) x' y' - \text{A}^2 cy'},$$

expression qui, en vertu des relations

$$\text{A}^2 y'^2 - \text{B}^2 x'^2 = -\text{A}^2 \text{B}^2, \quad \text{A}^2 + \text{B}^2 = c^2,$$

devient

$$\text{tang V} = \frac{\text{B}^2 (cx' - \text{A}^2)}{cy' (cx' - \text{A}^2)},$$

ou réduisant,

$$\text{tang V} = \frac{B^2}{cy'},$$

comme pour l'*ellipse*.

Pour obtenir tang V′, remarquons que l'on a

$$\text{tang V}' = \frac{a - a''}{1 + aa''} = -\left(\frac{a'' - a}{1 + aa''}\right);$$

et comme, pour passer de a' à a'', il suffit de changer $+c$ en $-c$ dans l'expression de a', on a

$$\frac{a'' - a}{1 + aa''} = -\frac{B^2}{cy'};$$

donc, à cause du signe — qui est en avant dans l'expression de tang V′,

$$\text{tang V}' = \frac{B^2}{cy'}.$$

(On voit qu'il y a un *double* changement de *signe*, ce qui n'a pas lieu pour l'*ellipse*.)

Les valeurs obtenues pour tang V, tang V′ étant *identiques*, on en conclut que, *dans l'hyperbole, la tangente divise en* DEUX PARTIES ÉGALES *l'angle des deux rayons vecteurs*.

[Il n'y a rien de particulier à dire sur la *normale*.]

234. De la propriété qui vient d'être démontrée résulte un moyen de *mener une tangente* : 1° par un point pris *sur* la courbe; 2° par un point pris *hors* de la courbe.

PREMIÈREMENT. — Soit M le *point donné*.

Tracez les rayons vecteurs F′M et FM; *prenez* sur MF′, une longueur MG *égale* à MF; puis tirez FG et *abaissez* la droite MIR *perpendiculaire* sur FG. FIG. 114.

Vous obtenez ainsi la TANGENTE DEMANDÉE;

Car de ce que le triangle MGF est *isocèle* par construction, on déduit que la *perpendiculaire* MIR divise l'angle FMG ou FMF′ en *deux parties égales;* propriété *caractéristique* de la *tangente à l'hyperbole* (*).

(*) Démontrons *à priori* (comme nous l'avons fait pour l'*ellipse*), que la

Fig. 114. SECONDEMENT.—Soit N un point donné *hors* de la courbe.

Supposons le problème résolu, c'est-à-dire la tangente NMR trouvée; et tirons les droites NF, NF', MF et MF'.

Si, sur la ligne MF', on prend MG = MF, on a

$$F'G = F'M - MG = F'M - MF = 2A;$$

d'autre part, de ce que la *tangente* jouit de la propriété de diviser en *deux parties égales* l'angle F'MF des *deux rayons vecteurs*, il en résulte aussi

$$\text{ang. } F'MN = \text{ang. } FMN;$$

par suite, les deux triangles NMG, NMF, dans lesquels on a, d'ailleurs, NM *commun* et MG = MF, sont égaux et donnent

$$NG = NF.$$

On voit donc que la *position du point* G est fixée par sa distance 2A au point F', et par sa distance NG ou NF au point donné N.

On est ainsi conduit à cette construction :

1°. Du point N comme centre et avec la distance *connue* NF comme rayon, *décrivez un arc de cercle;*

2°. Du point F' comme centre et avec le rayon 2A, *décrivez un second arc de cercle.*

Ces deux arcs se coupent en un point G. *Joignant* ce point au point F' et *prolongeant* F'G jusqu'à sa rencontre

---

Fig. 114. droite MR qui divise en *deux parties égales* l'angle F'MF, est *tangente* à la courbe.

Cela se réduit à faire voir que tout point N de cette droite, autre que M, est situé *hors* de la courbe.

Prenant sur MF' une distance MG égale à MF, puis tirant les droites NF', NG, ainsi que FG qui rencontre en I la droite MR, on a, d'après les principes de Géométrie,

$$F'N - NG < F'G;$$

mais comme le triangle MFG est *isocèle* par construction, la droite NMR est *perpendiculaire* sur FG et passe par son *milieu* I; donc elle a tous ses points *également distants* de F et de G; par suite, NG = NF.

D'un autre côté, on a

$$F'G = F'M - MG = F'M - MF = 2A;$$

ainsi, l'inégalité précédente devient

$$F'N - NF < 2A;$$

ce qui prouve que le point N est un point *extérieur*.

Cette démonstration repose *uniquement* sur la définition géométrique de l'hyperbole et sur les *caractères* des points pris *sur* la courbe, ou *hors* de la courbe.

en M avec l'hyperbole, puis *tirant* NM, vous obtenez la TANGENTE DEMANDÉE ;

Ce qu'on peut démontrer *à posteriori*.

En effet, on a, d'abord, NG = NF par construction ; de plus, puisque F'M — MF = 2A, et que

$$F'G \quad \text{ou} \quad F'M - MG = 2A,$$

il en résulte aussi

$$MG = MF.$$

La droite NM ayant *deux* de ses points, N et M, également distants des extrémités de la droite qui joint les points F et G, est *perpendiculaire* sur le *milieu* de cette droite FG, et divise l'angle GMF en *deux parties égales ;* donc NM est *tangente* à la courbe.

235. DISCUSSION. — Les deux circonférences décrites se coupant *en un second point* G', le problème admet, en général, *deux* solutions. FIG. 114.

Le *second point de contact* se trouve placé tantôt sur *la même* branche UBV de l'hyperbole que le *premier*, tantôt sur la branche *opposée*, U'AV', suivant la position du point donné N.

Dans la figure actuelle, il devrait être placé sur la partie *inférieure* AV' de la branche *de gauche ;* et on l'obtiendrait en tirant G'F', puis prolongeant cette droite jusqu'à sa rencontre avec cette partie *inférieure*.

On peut, d'ailleurs, démontrer que, toutes les fois que le point donné est *extérieur* à la courbe, les deux circonférences doivent se rencontrer en *deux* points, et qu'ainsi les *deux tangentes* existent.

En effet, comme on a toujours

$$F'F > 2A,$$

il s'ensuit, d'abord, que le point F de circ. NF est *extérieur* à circ. 2A.

Soit, ensuite, pris sur NF' une partie NF'' égale à NF ; comme, par hypothèse, le point N est *extérieur* à la courbe, on a (n° 217)

$$F'N - NF < 2A,$$

d'où

$$F'N - NF'' \quad \text{ou} \quad F'F'' < 2A,$$

en sorte que le point F″ de circ. NF est *intérieur* à circ. 2 A.

Donc les deux cercles se coupent.

Fig. 115. **236.** Remarque. — Les *dénominations* de foyers et de rayons vecteurs se justifieraient, comme pour l'*ellipse*, au moyen du principe de Physique sur l'égalité des *angles d'incidence* et de *réflexion*.

Car de l'égalité des angles FMT et TMF′, FM′T′ et T′M′F′, on conclut celle des angles FMT et fMt, FM′T′ et $fM't'$, etc.; d'où il suit que des *rayons de lumière* ou de *chaleur émanés du point* F, et allant frapper la courbe en des points M, M′, etc., se *réfléchiraient* suivant des droites Mf, $M'f'$, etc., qui, prolongées en *sens contraire*, iraient toutes *aboutir au point* F.

Conséquences des propriétés de la tangente considérée par rapport aux rayons vecteurs.

Fig. 114. **237.** Si des *foyers* F, F′, on abaisse des *perpendiculaires* FI, F′I′, sur la *tangente*, on ferait voir, comme pour l'*ellipse* (nos 201 et 202):

1°. Que *les distances du centre aux pieds* I, I′, *des perpendiculaires abaissées de chacun des foyers sur la tangente sont égales au demi-premier axe* A; en d'autres termes, que circ. A *est le lieu géométrique des pieds de toutes les perpendiculaires abaissées de chacun des foyers sur les tangentes;*

2°. Que *le produit des perpendiculaires* FI, F′I′ *abaissées des deux foyers sur une tangente quelconque* MR, *est constant et égal au* carré B^2 de la moitié du second axe.

§ III. — Propriétés de l'hyperbole rapportée a des diamètres conjugués.

238. En répétant pour l'*hyperbole* les calculs et les raisonnements qui ont été faits au n° 204 pour l'*ellipse*, on est conduit aux relations suivantes:

$$A^2 \sin\alpha \sin\alpha' - B^2 \cos\alpha \cos\alpha' = 0, \tag{1}$$

d'où

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = \frac{B^2}{A^2}, \tag{2}$$

$$(3)\quad (A^2\sin^2\alpha' - B^2\cos^2\alpha')y^2 + (A^2\sin^2\alpha - B^2\cos^2\alpha)x^2 = -A^2B^2,$$

$$(4)\quad \text{pour } y = 0, \qquad x^2 = \frac{-A^2B^2}{A^2\sin^2\alpha - B^2\cos^2\alpha},$$

$$(5)\quad \text{pour } x = 0, \qquad y^2 = \frac{-A^2B^2}{A^2\sin^2\alpha' - B^2\cos^2\alpha'},$$

relations qui fournissent le moyen de passer de l'équation de l'hyperbole *rapportée à ses axes* à celle de la même courbe *rapportée à un système de diamètres conjugués*.

Mais avant de former cette dernière équation, commençons par prouver que les valeurs de x^2 et de y^2, correspondant respectivement aux hypothèses $y = 0$, $x = 0$, sont de *signes contraires*.

Ces valeurs (4) et (5) peuvent, en effet, être mises sous la forme

$$x^2 = \frac{-A^2B^2}{\cos^2\alpha\,(A^2\,\mathrm{tang}^2\alpha - B^2)}, \qquad y^2 = \frac{-A^2B^2}{\cos^2\alpha'\,(A^2\,\mathrm{tang}^2\alpha' - B^2)}.$$

Or la relation (2) fait voir que, si l'on a par exemple

$$\mathrm{tang}\,\alpha < \frac{B}{A},$$

ce qui donne évidemment pour l'expression de x^2 une valeur *positive*, il faut, *par compensation*, que l'on ait en même temps

$$\mathrm{tang}\,\alpha' > \frac{B}{A};$$

en sorte que la valeur de y^2 est *négative*.

D'où l'on conclut que, si la valeur de x correspondant à $y = 0$, est *réelle*, la valeur de y correspondant à $x = 0$, est *imaginaire*, et *réciproquement;* en d'autres termes, que l'*un des deux diamètres* auxquels la courbe est actuellement rapportée, *rencontrant* la courbe, ou étant TRANSVERSE, son *conjugué* est NON TRANSVERSE; résultat qui s'accorde avec ce que l'on a établi au n° 223.

Si maintenant on prend le diamètre *transverse* pour *nouvel axe* des x, et que, par suite, on pose

$$\frac{-A^2B^2}{A^2\sin^2\alpha - B^2\cos^2\alpha} = A'^2,$$

comme son *conjugué* est *non transverse*, il faudra poser

$$\frac{-A^2B^2}{A^2\sin^2\alpha' - B^2\cos^2\alpha'} = -B'^2;$$

d'où l'on tire

$$A^2\sin^2\alpha - B^2\cos^2\alpha = -\frac{A^2B^2}{A'^2}, \quad A^2\sin^2\alpha' - B^2\cos^2\alpha' = \frac{A^2B^2}{B'^2};$$

et reportant ces valeurs dans la relation (3), on obtient

$$A'^2y^2 - B'^2x^2 = -A'^2B'^2.$$

Telle est l'équation de l'*hyperbole rapportée à l'un de ses systèmes de diamètres conjugués* (en nombre *infini*, d'après la relation *unique* (2) qui doit servir à déterminer α et α').

239. En remplaçant dans les expressions de A'^2 et de B'^2 les *sinus* et *cosinus* par leurs valeurs en fonction de la tangente, on parvient aux nouvelles relations

$$A'^2 = \frac{A^2B^2(1+\operatorname{tang}^2\alpha)}{B^2 - A^2\operatorname{tang}^2\alpha}, \qquad B'^2 = \frac{A^2B^2(1+\operatorname{tang}^2\alpha')}{A^2\operatorname{tang}^2\alpha' - B^2}$$

et

$$\operatorname{tang}^2\alpha.\operatorname{tang}^2\alpha' = \frac{B^4}{A^4},$$

qui, par l'élimination de $\operatorname{tang}\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha'$ (*voyez* le n° 205), donnent lieu à celle-ci,

$$A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2;$$

d'où l'on conclut que dans l'hyperbole, *la différence des carrés des demi-diamètres conjugués est égale à la différence des carrés des demi-axes.*

240. De même que pour l'ellipse, la résolution du problème *inverse* de celui du n° 238, et ayant pour objet de *remonter de l'équation de l'hyperbole rapportée à un système de diamètres conjugués, à l'équation de la courbe rapportée à ses axes*, conduit à cette même propriété, en même temps qu'à une autre aussi importante.

En suivant, pour le détail des calculs, la même marche qu'au n° 206, on arrive aux résultats suivants :

$$A'^2\cos^2\alpha - B'^2\cos^2(\theta-\alpha) = A^2,$$
$$A'^2\sin^2\alpha - B'^2\sin^2(\theta-\alpha) = -B^2,$$
$$-A'^2B'^2\sin^2\theta = -A^2B^2.$$

L'addition des deux premières relations donne

$$A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2,$$

ou la *propriété déjà démontrée;* et la dernière, qui revient à

$$A'B' \sin\theta = AB, \quad \text{ou} \quad 4A'B' \sin\theta = 4AB,$$

signifie que, comme pour l'ellipse,

Le parallélogramme construit sur un système de diamètres conjugués est constant, quel que soit le système, et équivalent au RECTANGLE *construit sur les axes.*

Nous reviendrons sur cette propriété, pour expliquer la disposition de la *fig.* 113, qui s'y rapporte.

241. REMARQUE. — La relation

$$A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2$$

montre que, si l'on a

$$A = B.$$

on a de même

$$A' = B',$$

et que si A est *différent* de B, on ne *peut pas avoir* A' *égal* à B'.

D'où l'on conclut que, dans l'hyperbole *équilatère*, tout système de *diamètres conjugués* est un système de *diamètres égaux*, et que dans une hyperbole *qui n'est pas équilatère*, il ne saurait exister *aucun* système de *diamètres conjugués égaux*.

Une *ellipse*, au contraire, admet toujours (n° 208) un système de *diamètres conjugués égaux*, et n'en admet qu'*un seul*.

242. AUTRES PROPRIÉTÉS DE L'HYPERBOLE RAPPORTÉE A UN SYSTÈME DE DIAMÈTRES CONJUGUÉS, ET TANGENTE A LA COURBE. — Comme pour l'*ellipse* (n° 209), toutes les propriétés de l'hyperbole démontrées *indépendamment de l'inclinaison des axes*, s'étendent au cas où la courbe est rapportée à un système de *diamètres conjugués*.

C'est ce qu'on peut reconnaître en répétant, notamment pour les propriétés énoncées aux n°s 209 et 210, les mêmes raisonnements.

De même, l'équation de l'hyperbole *rapportée à un système de diamètres conjugués* étant

$$A'^2 y^2 - B'^2 x^2 = -A'^2 B'^2,$$

on trouverait pour l'équation de la *tangente menée par un point* $[x', y']$ *pris sur la courbe*,

$$y - y' = \frac{B'^2 x'}{A'^2 y'}(x - x'),$$

ou, réduisant,

$$A'^2 y y' - B'^2 x x' = -A'^2 B'^2;$$

puis, passant à la *tangente menée par un point extérieur*, on serait conduit à des propriétés analogues à celles qui ont été établies pour l'*ellipse* (*voyez* les n°s 212 et 213).

§ IV. — Des asymptotes de l'hyperbole.

243. Une ligne droite tracée sur le plan d'une courbe est dite ASYMPTOTE de cette courbe, lorsque *celle-ci ou seulement l'une de ses branches s'approche continûment et indéfiniment de cette droite.*

En termes analytiques, une droite *asymptote* à une courbe est une ligne telle que, si l'on suppose la droite et la courbe rapportées *au même* système d'axes, la *différence* entre leurs ordonnées correspondant à une *même* abscisse *décroît de plus en plus* à mesure que l'abscisse *augmente*, et devient *moindre que toute grandeur donnée* quand cette abscisse est *infinie*.

De cette double définition il résulte évidemment qu'une courbe, ou une branche de courbe, ne peut avoir d'*asymptote* qu'autant qu'elle s'étend à l'*infini*.

244. Afin de reconnaître si l'HYPERBOLE a des *asymptotes*, nous établirons, en *premier lieu*, les conditions auxquelles doit satisfaire une droite située dans le plan de la courbe pour la rencontrer à l'*infini*.

A cet effet, il suffit de combiner l'équation

$$A^2 y^2 - B^2 x^2 = -A^2 B^2 \tag{1}$$

avec l'équation générale d'une droite

$$y = mx + n, \tag{2}$$

puis de déterminer les *constantes* m et n de manière que les valeurs de x et de y qui leur satisfont simultanément, deviennent *infinies*.

On trouve, par l'élimination de y, et en ordonnant par rapport à x,

$$(3)\quad (A^2m^2 - B^2)x^2 + 2A^2mnx + A^2(B^2 + n^2) = 0.$$

Or, pour que les *deux* valeurs de x, tirées de cette équation, soient *infinies*, il faut et il suffit, d'après les principes de l'*analyse algébrique*, que l'on ait les deux relations

$$A^2m^2 - B^2 = 0, \qquad 2A^2.m.n = 0;$$

mais la première donnant nécessairement

$$m = \pm\frac{B}{A},$$

la seconde ne peut être satisfaite que par

$$n = 0.$$

L'équation (2) devient alors

$$(4)\qquad y = \pm\frac{B}{A}x.$$

D'où l'on voit que les droites HH′, II′, qui passent par le *centre*, et dont nous avons (n° 138) appris à fixer la position, jouissent toutes deux, et *exclusivement à toute autre droite*, de la propriété d'avoir leurs *deux points d'intersection* avec la courbe situés à *une distance infinie* de l'origine. FIG. 113.

La valeur de y qu'on vient d'obtenir, portée dans l'équation (1) de la courbe, donne

$$(B^2 - B^2)x^2 = -A^2B^2;$$

d'où l'on tire pour x, et, par suite, aussi pour y, des valeurs de la forme

$$x = \pm\frac{M}{0}, \quad y = \pm\frac{N}{0};$$

ce qui vérifie le résultat indiqué.

N. B. — Des mêmes principes algébriques il résulte que, si dans l'équation (3) on posait seulement

$$A^2m^2 - B^2 = 0,$$

n ayant d'ailleurs une valeur quelconque *différente* de *zéro*, les deux valeurs de x seraient, l'une *finie*, l'autre *infinie*.

Même résultat pour les valeurs correspondantes de y.

245. En *second lieu*, comparons l'équation (4), ou

$$y = \pm \frac{B}{A} x,$$

avec l'équation de la courbe

$$A^2 y^2 - B^2 x^2 = - A^2 B^2;$$

et, pour plus de clarté, désignons par Y l'ordonnée qui entre dans l'équation (4) et correspond à une abscisse x *commune aux deux droites et à la courbe;* il vient

$$Y = \pm \frac{B}{A} x;$$

d'où, en élevant les deux membres au carré,

$$Y^2 = \frac{B^2}{A^2} x^2.$$

D'un autre côté, l'équation de la courbe revient à

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2} x^2 - B^2;$$

et, si l'on retranche cette dernière équation de la précédente, il en résulte

$$Y^2 - y^2 = B^2;$$

d'où

$$Y - y = \frac{B^2}{Y + y}.$$

Or, à mesure que x devient *plus grand* à partir de $x = A$, les deux ordonnées Y et y *augmentent* aussi, et il en est nécessairement de même de leur somme $Y + y$; d'où il suit que leur différence $Y - y$ *décroît de plus en plus*, et devient *moindre que toute grandeur donnée*, lorsque x est *infini*.

FIG. 113. Donc *les deux droites* HH', II', *exprimées par l'équation* (4), sont, d'après la définition donnée n° 243, des ASYMPTOTES *à l'hyperbole*.

Remarquons, en outre, que l'équation

$$y = \pm \frac{B}{A} x + n,$$

n étant un nombre quelconque *différent* de o, représente un système de droites respectivement *parallèles* aux *deux asymptotes* qui viennent d'être déterminées.

Or, bien que ces droites aient *un de leurs points* d'intersection avec la courbe, situé à l'*infini*, elles ne sauraient être des *asymptotes*.

Car si l'on considère, par exemple, la branche d'hyperbole BM*m*, l'*asymptote* OH, et une *parallèle* quelconque à cette asymptote, il ne peut arriver que deux cas : *ou* la droite OH et sa *parallèle* sont situées d'*un même* côté par rapport à la courbe, *ou bien* celle-ci se trouve placée *entre* les deux droites. FIG. 113.

Dans le *premier cas*, il est évident que la *perpendiculaire commune* à ces droites est *la moindre distance* qui puisse séparer la branche de la courbe et la parallèle considérée.

Dans le *second cas*, la courbe devant se *rapprocher continûment* et *indéfiniment* de son asymptote OH, *s'écarte*, par cela même, nécessairement, *de plus en plus* de la parallèle à cette droite.

Donc, dans aucun cas, les PARALLÈLES aux asymptotes HH′, II′, ne sauraient être elles-mêmes des *asymptotes* à la courbe.

Comme, d'ailleurs, on a vu que les droites HH′, II′, et leurs parallèles, sont *les seules* qui rencontrent la courbe *à l'infini*, on peut affirmer que *l'hyperbole* N'A QUE DEUX ASYMPTOTES, *qui sont les droites* HH′, II′.

Propriétés de l'hyperbole par rapport à ses asymptotes.

246. L'hyperbole jouit, par rapport à ses *asymptotes*, d'un grand nombre de *propriétés* dont nous allons exposer les plus importantes.

Nous ferons, avant tout, une observation essentielle :

Lorsque les axes, 2 A, 2 B, d'*une hyperbole* sont donnés,

la première chose à faire *pour sa construction*, c'est de *fixer la position des asymptotes* d'après le moyen indiqué au n° 223, parce que, ces lignes une fois tracées, on a déjà le *sentiment* du *cours* de chacune des *branches* de la courbe à partir des deux *sommets*, en raison de la propriété qu'elles ont de *se rapprocher* d'une manière *continue et indéfinie* de leurs *asymptotes* respectives.

Cette observation s'étend à toute espèce de courbe ayant des *asymptotes rectilignes* ou même *curvilignes*, ainsi que nous en verrons des exemples dans la suite.

247. PREMIÈRE PROPRIÉTÉ. — Les asymptotes d'une hyperbole étant construites, *les deux parties d'une tangente menée en un point quelconque de la courbe, et comprises entre les deux asymptotes, sont égales.*

FIG. 116. Soient HH', II' les *asymptotes*, TMT' une *tangente* en un point M.

Tirons le *diamètre* M'OM, et supposons déterminé, d'après le procédé du n° 224, son *diamètre conjugué* YY', lequel est, comme on l'a vu (n° 232), *parallèle* à la *tangente;* concevons, en outre, pour le moment, l'hyperbole rapportée au système de *diamètres conjugués*, XOX', YOY'.

On a pour l'équation de la courbe,

$$A'^2 y^2 - B'^2 x^2 = - A'^2 B'^2;$$

et les *asymptotes* sont, pour *le même système d'axes*, représentées par la double équation

$$y = \pm \frac{B'}{A'} x;$$

car, en combinant ces équations entre elles, on trouve

$$x = \pm \frac{A'}{0}, \quad y = \pm \frac{B'}{0},$$

valeurs qui *conviennent exclusivement* (n°s 244 et 245) *aux deux asymptotes.*

Or, si dans la double équation de ces droites on fait

$$x = A' = OM,$$

il en résulte

$$y = \pm B'.$$

Donc *les deux portions de tangente* MT, MT′ sont *égales.*

De plus, on voit que ces distances MT, MT′ sont, chacune, *égales à la moitié du* DIAMÈTRE CONJUGUÉ *de celui qui passe par le point de contact.*

248. CONSÉQUENCE. — Les droites TT′, *tt′*, étant *parallèles, et égales* à 2B′, la figure TT′*t′t* est un *parallélogramme*; et ce parallélogramme, dont les côtés sont respectivement égaux et parallèles aux diamètres conjugués qui joignent leurs *points milieux*, peut être considéré comme construit sur ces diamètres; ce qui conduit à la proposition suivante : FIG. 116.

Tout parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués a ses quatre sommets placés sur les deux asymptotes.

Les parallélogrammes ainsi construits sont dits *inscrits à l'hyperbole*, tandis que dans l'*ellipse* les parallélogrammes analogues sont *circonscrits* à la courbe.

Il résulte d'ailleurs de ce qui a été établi au n° 240 que *tous les parallélogrammes inscrits à l'hyperbole sont équivalents au* RECTANGLE *construit sur les axes.*

On est maintenant en mesure de comprendre pourquoi, dans la figure 113 qui se rapporte à ce n° 240, le *parallélogramme* 4A′B′ et le *rectangle* 4AB ont, chacun, leurs *sommets* situés sur les droites HH′, II′, qui ne sont autres que les *asymptotes.*

N. B. — Il convient encore de remarquer que le diamètre MM′ est *moindre que* toute corde *mm′* de la courbe, menée parallèlement à ce diamètre; car on a

$$MM' = Tt \quad \text{et} \quad Tt < mm'.$$

Nous ferons plus tard l'application de cette remarque.

249. SECONDE PROPRIÉTÉ. — *Les deux parties d'une sécante quelconque, comprises entre l'hyperbole et ses asymptotes, sont égales.*

Soit RR′ *une droite quelconque* qui rencontre la *courbe* et les *asymptotes* aux points S, S′, R, R′; il s'agit de prou- FIG. 116.

ver que l'on a

$$RS = R'S'.$$

A cet effet, concevons le *diamètre* OP passant par le *milieu* P de la corde SS′; et au point M, où ce diamètre *rencontre la courbe,* menons une *tangente* TMT′

Cette *tangente* étant nécessairement (n° 232) *parallèle* à SS′, et sa partie TT′ se trouvant, *d'après la première propriété,* divisée en *deux parties égales* au point M par la droite OP, il résulte d'un théorème de Géométrie que la droite RR′, base du triangle ROR′, est elle-même partagée *également* au point P. On a ainsi

$$PR = PR';$$

et comme, par construction, on a d'ailleurs

$$PS = PS',$$

il vient

$$PR - PS \text{ ou } RS = PR' - PS' \text{ ou } R'S'.$$

Donc, etc.

FIG. 116. Cette *seconde propriété* peut, du reste, se démontrer *indépendamment de la première,* qui n'en est, à proprement parler, qu'*un cas particulier.*

En effet, supposons la courbe rapportée à un système de *diamètres conjugués,* dont l'un, celui des y, soit *parallèle* à la *sécante* menée à volonté RR′, et dont l'autre passe nécessairement (n° 221) par le *milieu* de la corde SS′.

L'équation de l'hyperbole étant

$$A'^2y^2 - B'^2x^2 = -A'^2B'^2,$$

celle des *asymptotes* rapportées aux mêmes axes est

$$y = \pm \frac{B'}{A'}x.$$

Or, si l'on fait $x = OP$, il vient

$$y = \pm \frac{B'}{A'}.OP;$$

d'où il suit que les deux valeurs de y, PR, PR′, sont *numériquement* égales.

D'un autre côté, on a par construction

$$PS = PS'.$$

Donc

$$RS = R'S'.$$

Si maintenant, au lieu de faire $x = OP$, on pose

$$x = OM,$$

on trouve

$$y = \pm B';$$

et l'on arrive ainsi à l'*énoncé de la première propriété.*

250. TROISIÈME PROPRIÉTÉ. — Le *parallélogramme construit sur un système de coordonnées parallèles aux asymptotes a une surface* CONSTANTE et *égale au* HUITIÈME *du rectangle des axes*, quel que soit le point de la courbe que l'on considère.

Soit M un point quelconque de la courbe; et soient menées les droites MP, MQ, respectivement *parallèles* aux *asymptotes* HH', II'; je dis que le *parallélogramme* OPMQ, ainsi formé, a pour expression de *sa surface* FIG. 117.

$$\frac{2A \times 2B}{8} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}A \times B.$$

En effet, tirons le demi-diamètre OM et la tangente TMT'.

Les deux droites MP, OQ étant *parallèles* par construction, et le point M étant (n° 247) le *milieu* de TMT', les points P et Q sont aussi respectivement les *milieux* de OT' et de OT; d'où il suit que le triangle TOT' se compose de *quatre* triangles *équivalents* comme ayant *même* base et *même* hauteur.

Mais le parallélogramme OPMQ est lui-même composé de deux de ces triangles; ainsi déjà il est la *moitié* du triangle TOT'.

Or ce dernier est le *quart* du *parallélogramme* qui serait construit sur le système de *diamètres conjugués* correspondant au point M, et par suite (n° 248) du rectangle des *axes principaux*.

Donc *le parallélogramme* OPMQ *est le* HUITIÈME *de ce rectangle.*

251. CONSÉQUENCE. — Si l'on construit ce *rectangle* Eee'E', et le *losange* ACBD, dont la surface en est évi-

Fig. 117. demment la *moitié*, on remarque que le *petit* losange OLBL', *quart* du grand, est, par rapport au point particulier B de la courbe, ce que le parallélogramme OPMQ est par rapport à un point quelconque M; en sorte que l'on a, d'après la propriété qui vient d'être démontrée,

$$\text{OPMQ} = \text{OLBL}' = \frac{1}{4}\,\textit{losange}\ \text{ACBD}.$$

Or, si l'on désigne par x et y les coordonnées du point M *rapportées aux asymptotes* comme nouveaux axes, et par θ l'angle HOI' de ces asymptotes, on a, d'après les principes trigonométriques,

$$\text{OPMQ} = x.y.\sin\theta; \quad \text{ACBD} = c \times c.\sin\theta = c^2.\sin\theta,$$

c étant égal à $\sqrt{A^2+B^2}$.

On est donc conduit à la relation

$$xy\sin\theta = \frac{1}{4}c^2.\sin\theta = \frac{1}{4}(A^2+B^2).\sin\theta,$$

d'où

$$xy = \frac{A^2+B^2.}{4}$$

L'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

252. Le résultat simple et remarquable que nous venons d'obtenir, comme conséquence de la troisième propriété, s'appliquant *à tout point de la courbe*, n'est autre chose que l'*équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.*

On peut y parvenir *directement* par une *transformation de coordonnées.*

Fig. 117. Désignons, à cet effet, par α, α' les angles XOI', HOX, que les *asymptotes* font avec le *premier* axe, en prenant OI' pour *nouvel axe* des x et OH pour *nouvel axe* des y.

On a (n° 138)

$$\text{tang}\,\alpha = -\frac{B}{A}, \qquad \text{tang}\,\alpha' = +\frac{B}{A};$$

d'où l'on déduit (l'angle α étant négatif),

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \sin\alpha = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

$$\cos\alpha' = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \sin\alpha' = +\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans les formules

$$x = x\cos\alpha + y\cos\alpha', \quad y = x\sin\alpha + y\sin\alpha',$$

qui se rapportent (n° 119) au passage d'un système *rectangulaire* à un système *oblique de même origine*, on trouve

$$x = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}(x+y), \qquad y = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}(x-y),$$

valeurs qu'il ne s'agit plus que de reporter dans l'équation

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2;$$

et l'on obtient, toute réduction faite,

$$-4xy = -(A^2+B^2);$$

d'où l'on tire

$$xy = \frac{A^2+B^2}{4},$$

pour l'équation de l'*hyperbole rapportée à ses asymptotes.*

Le carré égal à $\frac{A^2+B^2}{4}$ est appelé *puissance* de l'hyperbole. Si l'on représente ce carré par m^2, l'équation devient

$$xy = m^2.$$

253. La *discussion* de cette équation montre que les droites XX′, YY′ ont bien, suivant la définition donnée au n° 243, le caractère d'*asymptotes* à la courbe. Fig. 118.

Car en la résolvant successivement par rapport à y et par rapport à x, on trouve

$$y = \frac{m^2}{x}, \qquad x = \frac{m^2}{y};$$

d'où l'on voit que x AUGMENTANT *numériquement* dans le sens *positif* ou dans le sens *négatif* d'une manière *continue* depuis *zéro* jusqu'à l'*infini*, y DIMINUE d'une manière *continue* depuis l'*infini* jusqu'à *zéro*, et *réciproquement.*

254. L'équation

$$xy = m^2,$$

ayant été obtenue (n° 252), *indépendamment* des propriétés démontrées dans les numéros précédents, on peut s'en servir pour retrouver quelques-unes de ces propriétés, aussi bien que pour en découvrir de nouvelles.

Ainsi, si l'on multiplie les deux membres par $\sin\theta$, θ étant l'angle des asymptotes, il vient

$$xy\sin\theta = m^2\sin\theta.$$

Fig. 117. Or $xy\sin\theta$ est évidemment l'expression du parallélogramme OPMQ construit sur les *coordonnées* d'un point quelconque de la courbe rapportée à ses asymptotes; $m^2\sin\theta$ est, d'ailleurs, une *constante* qui ne dépend que des *axes principaux* et de l'angle θ des asymptotes.

Donc *tous les parallélogrammes construits* sur des *coordonnées parallèles aux asymptotes sont* ÉQUIVALENTS (*voir* le n° 250).

Pour reproduire la relation

$$\text{OPMQ} = \frac{1}{2}\text{A.B},$$

il suffirait de *remplacer*, dans $m^2\sin\theta$, m^2 par sa valeur $\frac{A^2+B^2}{4}$, et de *calculer* $\sin\theta$.

On a, en effet,

$$\sin\theta = \sin 2\,\text{HOX} = \sin 2\alpha';$$

d'où

$$\sin\theta = 2\sin\alpha'\cos\alpha' = \frac{2\text{A.B}}{A^2+B^2};$$

et effectuant la *substitution*,

$$xy\sin\theta = \text{OPMQ} = \frac{A^2+B^2}{4}\cdot\frac{2\text{A.B}}{A^2+B^2} = \frac{1}{2}\text{A.B}.$$

Fig. 118. **255.** ÉQUATION DE LA TANGENTE. — L'hyperbole étant *rapportée à ses asymptotes*, ou son équation étant de la forme

$$xy = m^2, \tag{1}$$

on propose de trouver l'équation de la *tangente* en un point $[x', y']$ de la courbe.

L'équation d'une *sécante* passant par ce point, et par un autre point $[x'', y'']$ de la courbe, serait

$$y - y' = \frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x'),$$

x' et y', x'' et y'', étant liés par les relations

$$x'y' = m^2,$$
$$x''y'' = m^2.$$

Retranchant la première de la seconde, on a

$$y''x'' - y'x' = 0,$$

nouvelle relation qui peut être mise sous la forme

$$y''(x'' - x') + x'(y'' - y') = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{y''}{x'}$$

pour l'expression du *coefficient angulaire* de la *sécante*, dont l'équation devient

$$y - y' = -\frac{y''}{x'}(x - x'). \tag{2}$$

Si maintenant on veut exprimer que cette droite devient *tangente*, il faut faire dans l'équation (2), $y'' = y'$ (par cela même, $x'' = x'$, d'après la relation $y''x'' - y'x' = 0$), et l'on obtient

$$y - y' = -\frac{y'}{x'}(x - x') \tag{3}$$

pour l'*équation demandée*.

N. B. — Pour passer de la sécante à la tangente, il suffit de poser

$$y'' = y',$$

puisque x'' n'entre pas dans l'équation de la sécante.

Il résulte, en effet, de l'équation de la courbe,

$$xy = m^2,$$

qui ne donne qu'une seule valeur de x correspondant à une valeur de y, et réciproquement, que la condition

$$y'' = y',$$

entraîne nécessairement

$$x'' = x'.$$

Il n'en est pas de même lorsque la courbe est rapportée à ses axes ou à un système de diamètres conjugués, parce qu'alors à chaque valeur de y correspondent deux valeurs de x; d'où il suit que l'on doit, dans ce cas, introduire les deux conditions à la fois.

256. Conséquences déduites des équations (2) et (3); 1°. Si dans l'équation (3) on pose $y = 0$, et qu'on

FIG. 118. cherche la valeur de $x - x'$ correspondante, on trouve pour l'*expression de la sous-tangente*,

$$x - x' \text{ ou PR} = \frac{x'y'}{y'} = x' \text{ ou OP}.$$

D'où l'on voit que la distance OR est *double* de l'abscisse du *point de contact*, et que, par suite, en raison du *parallélisme* des droites PM et OY, *la tangente* TR *est divisée en deux parties égales au point de contact* M; propriété déjà établie au n° 247.

2°. Considérons une *sécante quelconque* SS', et désignons encore par x', y' et x'', y'' les coordonnées des points d'intersection N, N' avec la courbe; puis, posons également $y = 0$ dans l'équation (2), qui représente ainsi celle de cette sécante; il vient

$$x - x' = \frac{x'y'}{y''} = x'' \text{ (à cause de } x'y' = x''y''),$$

ou, d'après la figure

$$QS' = OQ';$$

d'où, retranchant des deux membres la partie commune QQ',

$$Q'S' = OQ = NQ''.$$

Les deux triangles NQ''S, N'Q'S', ayant les angles égaux et un côté égal, Q''N = Q'S', sont égaux et donnent

$$NS = N'S'.$$

Donc *les deux parties d'une sécante comprises entre la courbe et les asymptotes sont égales;* propriété qui a fait l'objet du n° 249.

257. Cette propriété de la *sécante à l'hyperbole* fournit un moyen extrêmement simple de *construire une hyperbole, connaissant les deux asymptotes et* UN SEUL *point de la courbe.*

FIG. 119. Soient HH', II' les deux asymptotes et M un point de la courbe.

Menez par ce point des droites en nombre quelconque, qui rencontrent les asymptotes aux points S et s, S' et s', S'' et s'', S''' et s'''; puis, à partir des points s, s', s'', s''', etc.,

portez des distances sm, $s'm'$, $s''m''$, $s'''m'''$, etc., respectivement *égales* à SM, S'M', S''M, S'''M, etc. ; vous obtiendrez ainsi autant de points que vous voudrez, m, m', m'', m''', etc., qui *appartiendront à la courbe ;* et il ne s'agira plus que de lier ces points entre eux par une *ligne continue*, en ayant soin toutefois de ne joindre que les points *situés dans le même angle* HOI' ou IOH'.

Rien n'empêche d'ailleurs, lorsque plusieurs points ont été déjà obtenus, de s'en servir pour en déterminer de nouveaux.

On peut ensuite trouver par le calcul les *axes principaux* de la courbe.

On obtient d'abord *leur direction* en divisant les angles HOI' et HOI *en deux parties égales* par les droites XX' et YY'. Fig. 119.

Pour déterminer *leurs grandeurs*, on a les relations

$$x'y' = \frac{A^2 + B^2}{4}, \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta = \frac{B}{A},$$

dans lesquelles x', y' représentent les coordonnées OP, PM, qui sont *connues*, et θ l'angle des *asymptotes*.

La seconde relation donne

$$B = A \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta,$$

d'où, substituant dans la première, on tire

$$A^2 \left(1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\theta\right) = 4x'y',$$

et, par suite,

$$A^2 = 4x'y' \cdot \cos^2 \frac{1}{2}\theta, \quad A = 2 \cos \frac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{x'y'},$$

ce qui donne

$$B = 2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta \cdot \cos \frac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{x'y'} = 2 \sin \frac{1}{2}\theta \cdot \sqrt{x'y'}.$$

CHAPITRE V.

DE LA PARABOLE.

OBSERVATION PRÉLIMINAIRE.

258. L'analogie qui existe entre les équations de l'*ellipse* et de l'*hyperbole* rapportées à leurs axes principaux devait faire pressentir, ainsi que nous l'avons en effet reconnu, que ces deux courbes jouissent de propriétés presque *identiques*, sauf certaines modifications dans les énoncés, et à l'exception aussi des propriétés qui, se rapportant aux ASYMPTOTES, appartiennent exclusivement à l'*hyperbole*.

Il n'en est pas de même pour la PARABOLE, dont l'équation n'offre qu'une analogie assez éloignée avec celles des deux autres courbes, analogie que l'on reconnaît en transportant l'origine des coordonnées de ces courbes à l'une des extrémités de leur *premier axe*, et qui a été établie aux n°s 144 et 145.

Ainsi la PARABOLE étant, par sa nature, *privée de centre*, et n'ayant qu'un *seul foyer*, on conçoit que toutes les propriétés relatives à *ces points* doivent donner lieu à des différences notables dans l'étude comparée de cette courbe par rapport aux deux premières. De même, la *directrice* a pour la parabole une importance qu'elle n'a pas pour l'ellipse et l'hyperbole.

§ I. — PROPRIÉTÉS DE LA PARABOLE RAPPORTÉE A SES AXES PRINCIPAUX.

259. Commençons par indiquer les caractères analytiques et géométriques qui distinguent les points pris *sur* la courbe, de ceux qui sont placés au *dehors* ou en *dedans*.

FIG. 120. 1°. Soit $y^2 = 2px$ l'équation de la parabole MA*m*.

Considérons les trois points N, M, N′ situés sur une même perpendiculaire à l'axe des x, et dont le premier se trouve hors de la courbe, le second sur la courbe, et le troisième en dedans de la courbe.

On a évidemment

$$NP > MP \quad \text{et} \quad N'P < MP;$$

donc, puisque pour le point M,

$$\overline{MP}^2 = 2p.AP, \quad \text{ou} \quad y^2 - 2px = 0,$$

il s'ensuit qu'on a, pour le point *extérieur* N,

$$y^2 - 2px > 0,$$

et pour le point *intérieur* N,

$$y^2 - 2px < 0.$$

N. B. — Si le point extérieur avait la position N″, l'abscisse AP″ de ce point serait *négative*, et l'on aurait à fortiori

$$y^2 - 2px > 0.$$

2°. Suivant la définition de la parabole (n° 141), chacun de ses points, M, est à *égale distance* du *foyer* F et de la *directrice* DD′.

Mais si l'on considère deux points R et R′, l'un au *dehors* et l'autre en *dedans* de la courbe, en menant par ces points les droites Q′RM′, Q″M″R′, parallèles à AX, puis joignant le point F aux points R et M′, R′ et M″, on a :

Pour le point R,

$$FR + RM' > FM' \text{ ou } M'Q',$$

d'où l'on tire

$$FR > RQ',$$

et pour le point R′,

$$FR' < FM'' + M''R' \quad \text{ou} \quad Q''M'' + M''R';$$

d'où

$$FR' < R'Q'';$$

ce qui montre que, *selon qu'un point est* EXTÉRIEUR *ou* INTÉRIEUR *à la courbe, sa distance au foyer est* PLUS GRANDE *ou* MOINDRE *que sa distance à la directrice.*

260. De l'équation

$$y^2 = 2px$$

on déduit

$$\frac{y^2}{x} = 2p;$$

d'où il résulte que, dans la parabole,

Le carré d'une ordonnée est à l'abscisse correspon-

dante dans un rapport constant appelé *le paramètre* de la courbe;

En d'autres termes, *les carrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses correspondantes;* ou, *les ordonnées croissent comme les racines carrées des abscisses.*

Ce dernier caractère établit une différence sensible entre le cours de la *parabole* et celui de chacune des branches de l'*hyperbole.*

En effet, puisque l'on a pour celle-ci (n° 229)

$$y = \pm \frac{B}{A} x \sqrt{1 - \frac{A^2}{x^2}},$$

il en résulte que les valeurs de y croissent *presque proportionnellement aux abscisses* pour des valeurs de x un peu considérables.

L'hyperbole s'éloigne donc beaucoup plus rapidement de l'axe des x que la parabole.

Lorsque x est *très-grand,* le cours de l'hyperbole est presque celui d'une ligne droite ayant pour équation

$$y = \frac{B}{A} x,$$

tandis que le cours de la parabole tend, alors, à se confondre avec celui d'une ligne droite *parallèle* à l'axe des x.

261. Si l'on combinait, comme on l'a fait au n° 244, l'équation

$$y^2 = 2px$$

avec celle d'une droite

$$y = mx + n,$$

afin de reconnaître si la parabole, qui est une courbe *infinie,* a des *asymptotes,* on parviendrait à l'équation

$$m^2 x^2 + 2(mn - p)x + n^2 = 0,$$

dont *les deux racines* ne peuvent devenir *infinies ensemble,* que lorsqu'on fait

$$m^2 = 0, \quad mn - p = 0; \quad \text{d'où} \quad n = \frac{p}{0};$$

ce qui exprime que les *asymptotes* de la parabole seraient

deux droites parallèles au premier axe principal, mais *situées à une distance infinie;*

C'est dire, en d'autres termes, que la parabole *n'a pas d'asymptotes.*

262. L'équation

$$y^2 = 2px$$

donnant

$$2p : y :: y : x,$$

on peut en conclure le moyen suivant de décrire la parabole par points :

Prenez sur le premier axe principal, et à la gauche de Fig. 121. *l'origine* A, *une distance* AC *égale à* 2p; *élevez sur* AX, *de différents points* P, P′, P″, etc., *des perpendiculaires, puis décrivez sur les lignes* CP, CP′, CP″, etc., *comme diamètres, des circonférences;* enfin, *par les points* Q, Q′, Q″, etc., *où ces circonférences rencontrent le second axe, menez des parallèles au premier.*

Les points M, M′, M″, etc., déterminés par la rencontre de ces parallèles avec les perpendiculaires, sont des points de la parabole demandée.

En effet, pour une abscisse *quelconque* AP, vous avez

$$CA : AQ :: AQ : AP, \quad \text{ou} \quad 2p : MP :: MP : AP;$$

d'où

$$\overline{MP}^2 = 2p.AP.$$

Les points de la partie *inférieure* de la courbe se déterminent en prolongeant les perpendiculaires, de longueurs *égales à elles-mêmes.*

263. Mesure d'un segment parabolique. — Proposons- Fig. 122. nous, comme pour l'ellipse (n° 176), de déterminer l'*aire d'un segment* compris entre un arc de parabole MA*m*, et une corde M*m* perpendiculaire au premier axe, ou simplement, l'*aire du demi-segment* APM.

Pour y parvenir, considérons sur l'arc AM une suite de points M, M′, M″, etc.; et de tous ces points, menons des perpendiculaires et des parallèles à l'axe AX; ces droites déterminent des rectangles RPP′M′, R″P′P″M″, etc., que nous nommerons *rectangles intérieurs*, et d'autres rec-

tangles $R'QQ'M'$, $R'''Q'Q''M''$, etc., qui seront appelés *rectangles extérieurs*.

Fig. 122. Cela posé, en désignant par x et y, x' et y', x'' et y'', etc., les coordonnées des différents points M, M', M'', etc., on a pour la *surface*, s, du rectangle *intérieur* RPP'M',

$$s = y'(x - x'),$$

et pour celle, t, du rectangle *extérieur* correspondant,

$$t = x'(y - y');$$

d'où l'on déduit

$$\frac{s}{t} = \frac{y'(x - x')}{x'(y - y')}.$$

Mais, puisque les points M, M', etc., se trouvent *sur* la courbe, on a les relations

$$y^2 = 2px, \quad y'^2 = 2px',$$

qui donnent

$$x' = \frac{y'^2}{2p}, \quad x - x' = \frac{y^2 - y'^2}{2p};$$

il vient donc, par la substitution,

$$\frac{s}{t} = \frac{y'(y^2 - y'^2)}{y'^2(y - y')} = \frac{y + y'}{y'} = 1 + \frac{y}{y'}.$$

On obtiendrait, pour les deux *rectangles* suivants,

$$\frac{s'}{t'} = 1 + \frac{y'}{y''};$$

et ainsi des autres.

Observons, d'ailleurs, que les points M, M', M'', etc., peuvent être pris sur la courbe, de telle manière qu'on ait la suite de rapports égaux,

$$\frac{y}{y'} = \frac{y'}{y''} = \frac{y''}{y'''} \cdots = 1 + m,$$

m étant une *fraction constante* aussi petite que l'on veut.

Il suffit, pour cela, de prendre sur AY, des parties

$$AQ' = AQ \times \frac{1}{1+m}, \quad AQ'' = AQ' \times \frac{1}{1+m}, \ldots,$$

puis de mener par les points Q', Q'', etc., des parallèles à AX.

Au moyen de cette condition, les rapports $\frac{s}{t}$, $\frac{s'}{t'}$, etc.,

deviennent

$$\frac{s}{t} = 2 + m, \quad \frac{s'}{t'} = 2 + m, \quad \frac{s''}{t''} = 2 + m, \ldots;$$

d'où

$$\frac{s + s' + s'' + \ldots}{t + t' + t'' + \ldots}, \quad \text{ou} \quad \frac{S}{T} = 2 + m;$$

ce qui démontre déjà que *le rapport entre la somme des rectangles intérieurs et celle des rectangles extérieurs est égal à la quantité constante* $2 + m$.

Maintenant, comme il est évident que, si l'on prend pour m une très-petite fraction, la somme des rectangles *intérieurs* différera fort peu du demi-segment AMP; que la somme des rectangles *extérieurs* différera aussi fort peu de la figure mixtiligne AMQ, et que ces différences seront *d'autant plus petites* que la fraction représentée par m aura une *moindre* valeur, on peut conclure qu'*à la limite*, c'est-à-dire lorsqu'on supposera $m = 0$, les deux sommes de rectangles se confondront avec les surfaces AMP, AMQ, et que l'on aura

$$\frac{\text{AMP}}{\text{AMQ}} = 2, \quad \text{d'où} \quad \text{AMP} = 2\text{AMQ};$$

ainsi,

$$\text{APMQ} = 3\text{AMQ},$$

et, par conséquent,

$$\text{AMQ} = \frac{1}{3}\,\text{APMQ}, \quad \text{ou} \quad \text{AMP} = \frac{2}{3}\,\text{APMQ} = \frac{2}{3}\,x.y.$$

Donc, enfin, *la surface du demi-segment parabolique* AMP *est égale aux deux tiers du rectangle construit sur les coordonnées extrêmes*.

Il résulte de là qu'un segment parabolique est une surface *carrable*; ce qui n'a lieu ni pour le cercle ni pour l'ellipse, dont les *aires* sont exprimées en fonction du rapport *approché* de la circonférence au diamètre.

§ II. — De la tangente a la parabole et de ses propriétés par rapport au rayon vecteur.

264. Équation de la tangente et expression de la sous-tangente. — Afin d'obtenir l'équation de la *tangente* en

un point $[x', y']$ *donné sur la courbe*, appliquons, soit la méthode du n° 101 comme pour l'ellipse (n° 186), soit la règle des *dérivées* (n° 102).

Il vient pour le *coefficient d'inclinaison*,

$$a = \frac{p}{y'},$$

et, par suite, pour l'équation cherchée,

$$(1) \qquad y - y' = \frac{p}{y'}(x - x')$$

ou, *simplifiant* à l'aide de la relation $y'^2 = 2px'$,

$$(2) \qquad yy' = p(x + x'),$$

équation que l'on peut déduire de celle de la courbe en y changeant y^2 en yy', et $2px$ ou $p(x + x)$ en $p(x + x')$; ce qui rend cette équation facile à retenir.

FIG. 123. Soit fait $y = 0$ dans l'équation *simplifiée* (2); il en résulte

$$x + x' = 0;$$

d'où

$$x = -x', \quad \text{ou} \quad \text{AR} = -\text{AP}.$$

Ainsi, pour mener une tangente à la parabole en un point donné M *sur* la courbe, il suffit de *prendre une distance* AR *égale à l'abscisse* AP *de ce point, et de joindre le point* M *au point* R.

Si l'on fait, de même, $y = 0$ dans l'équation *non simplifiée* (1), on trouve

$$x - x' = -\frac{y'^2}{p} = -2x',$$

pour l'*expression de la sous-tangente* PR;

Ce qui démontre qu'*abstraction faite du signe, la sous-tangente est* DOUBLE *de l'abscisse du point de contact.*

Le signe dont cette ligne est affectée convient d'ailleurs à sa position actuelle, puisqu'elle se compte *à la gauche* du point P.

265. ÉQUATION DE LA NORMALE et EXPRESSION DE LA SOUS-NORMALE. — L'équation de la tangente étant

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x'),$$

on a, pour celle de la *normale* au même point,

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x');$$

et si l'on fait encore dans cette équation, $y = 0$, il vient

$$x - x' \quad \text{ou} \quad \text{PS} = \frac{py'}{y'} = p.$$

Donc la *sous-normale est constante, quelle que soit la position du point de contact, et égale à la* MOITIÉ *du paramètre.*

266. *Discussion du* COEFFICIENT ANGULAIRE *de la tangente.* — Comme dans le coefficient d'inclinaison

$$a = \frac{p}{y'},$$

l'ordonnée y' peut passer par tous les états de grandeur, il s'ensuit que la tangente est susceptible de prendre toutes les situations possibles par rapport au premier axe. FIG. 123.

Soit

$$y' = 0,$$

on trouve

$$a = \infty ;$$

c'est-à-dire que la tangente menée par le point A est *perpendiculaire* à AX.

Elle est parallèle à cet axe aux points pour lesquels on a

$$y' = \infty .$$

Si l'on veut connaître en quel point la tangente fait avec le premier axe principal un angle de 45 degrés, ou égal à la *moitié* d'un angle *droit*, il suffit de poser

$$\frac{p}{y'} = 1 ; \quad \text{d'où} \quad y' = p,$$

et, par suite,

$$x' = \frac{p^2}{2p} = \frac{p}{2},$$

ce qui est (n° 142) la valeur de l'*abscisse du foyer;*

D'où il suit que, dans la PARABOLE, la tangente menée par le point de la courbe dont l'ordonnée passe par le *foyer,* fait avec l'axe des x un angle de 45 degrés.

Ce serait ici, d'après l'ordre que nous avons adopté pour

les deux premières courbes, le lieu de considérer la *tangente menée par un point extérieur à la courbe;* mais nous déduirons la solution de cette question de la propriété suivante.

Propriété de la tangente par rapport au rayon vecteur.

Fig. 123. **267.** Menons le *rayon vecteur* FM, et calculons l'angle FMR, comme nous l'avons fait pour l'*ellipse*.

En désignant par a et a' les tangentes trigonométriques des angles MRX, MFX, on a évidemment

$$\text{tang FMR} \quad \text{ou} \quad \text{tang V} = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Or l'équation du rayon vecteur passant par le point F pour lequel on a

$$y = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{p}{2},$$

est de la forme

$$y = a'\left(x - \frac{p}{2}\right);$$

et comme il passe en outre par le point de contact (x', y'), il en résulte

$$y' = a'\left(x' - \frac{p}{2}\right); \quad \text{d'où} \quad a' = \frac{2y'}{2x' - p}.$$

Comme on a d'ailleurs

$$a = \frac{p}{y'},$$

l'expression de tang V devient

$$\text{tang V} = \frac{\dfrac{2y'}{2x' - p} - \dfrac{p}{y'}}{1 + \dfrac{2py'}{y'(2x' - p)}} = \frac{2y'^2 - 2px' + p^2}{2x'y' - py' + 2py'}.$$

ou bien, à cause de $y'^2 = 2px'$,

$$\text{tang V} = \frac{2px' + p^2}{2x'y' + py'} = \frac{p(2x' + p)}{y'(2x' + p)} = \frac{p}{y'};$$

d'où l'on voit que l'angle FMR est égal à l'angle MRF.

Ainsi, *la tangente divise en deux parties égales l'angle* FMH *formé par le rayon vecteur* FM *et une parallèle à l'axe des* x, *menée par le point* M.

C'est ce qu'on peut encore reconnaître ainsi qu'il suit :

On a vu (n° 264) que les *distances* AR et AP sont *égales;* d'où résulte

$$FR = \frac{p}{2} + AP;$$

d'un autre côté, DD′ étant la *directrice,* il vient

$$FM = MG = \frac{p}{2} + AP;$$

donc

$$\text{angle } FMR = \text{angle } MRF = \textit{angle } RMH.$$

268. Cette propriété fournit le moyen de *mener une tangente par un point de la courbe,* ou *par un point pris hors de la courbe.*

1°. Pour mener une tangente par le point M, FIG. 123.

Tirez la ligne MH *parallèle à* AX; *joignez le point* F *au point* G, *où cette parallèle rencontre la directrice; puis abaissez* MR *perpendiculaire* sur FG.

Vous aurez la TANGENTE DEMANDÉE; car, le triangle FMG étant *isocèle,* la ligne MR divise en deux parties égales l'angle au sommet FMG.

On peut reconnaître, *à posteriori,* que la *bissectrice* de l'angle FMG n'a que le point M de commun avec la courbe.

En effet, soit N un autre point quelconque de cette ligne, et tirons les droites FN et GN, puis abaissons la perpendiculaire NK sur DD′.

On a, d'après la construction,

$$NF = NG;$$

mais l'oblique NG est plus grande que la perpendiculaire NK; donc NF est plus grand que NK, et, par conséquent (n° 259), le point N est situé *hors* de la courbe.

Il est à remarquer que cette construction dépend uniquement de la *définition* de la parabole.

2°. Pour mener la tangente par un point N situé *hors* de la courbe,

Décrivez de ce point comme centre, avec un rayon égal à la distance NF, *une circonférence de cercle qui coupe la directrice au point* G; *menez* Gf *parallèle à* AX.

Le point d'intersection M, de cette parallèle avec la courbe, est le POINT DE CONTACT.

Car on a, par construction, et d'après la définition de la parabole (n° 141),

$$NG = NF, \quad \text{et} \quad MG = MF;$$

donc la ligne NM est perpendiculaire sur le milieu de la corde FG, et divise l'angle FMG en deux parties égales.

La même circonférence rencontre la directrice *en un second point* G', tel que, si, par ce point, on mène une ligne *parallèle* à AX, le point où cette parallèle rencontre la courbe est le *point de contact* de la *seconde tangente* qu'on peut mener par le point N.

Conséquences de la propriété précédente.

Fig. 123. 269. PREMIÈRE CONSÉQUENCE. — Si l'on suppose un foyer de chaleur placé au point F, tous les rayons qui viennent tomber sur les différents points de la courbe, devant se réfléchir de manière à former un *angle de réflexion* égal à *celui d'incidence*, prendront nécessairement une direction telle que M*f*, *parallèle à l'axe principal.*

Cela explique pourquoi l'on donne à certaines *surfaces réfléchissantes* la FORME PARABOLIQUE.

270. SECONDE CONSÉQUENCE. — On vient de voir que, si l'on joint le point F au point G, la ligne de jonction FG est perpendiculaire sur la tangente, et se trouve divisée en *deux parties égales* par cette tangente.

D'un autre côté, l'axe des y, parallèle à DD', étant mené par le point A *milieu* de BF, passe nécessairement par le *milieu* de FG.

Donc le pied I de la perpendiculaire abaissée du point F sur la tangente, est situé sur l'axe des y.

Ce qui démontre que

Si du foyer on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes, le LIEU GÉOMÉTRIQUE *des pieds de toutes ces perpendiculaires n'est autre chose que le second axe de la parabole.*

Cette propriété correspond à celle du n° 201 relative à l'ellipse.

§ III. — Diamètres de la parabole. — Axes conjugués.

271. En partant de la définition générale du *diamètre* d'une courbe (n° 177), il est facile de reconnaître que, dans la PARABOLE, *tous les diamètres sont des droites parallèles à l'axe principal.* Fig. 124.

En effet, si l'on combine l'équation

$$y^2 = 2px$$

avec l'équation générale

$$y = ax + b$$

d'une corde, telle que MM′, et qu'on élimine d'abord l'abscisse x, il vient

$$y^2 - \frac{2p}{a}y + \frac{2pb}{a} = 0. \qquad (1)$$

Or, en désignant par x' et y', x'' et y'' les coordonnées des points M, M′, *communs* à la courbe et à la corde, puis par X et Y celles du *point milieu* N, on a (n° 96)

$$X = \frac{x' + x''}{2}, \quad Y = \frac{y' + y''}{2};$$

d'un autre côté, l'équation (1) étant du *second degré* en y, la moitié du coefficient de y, pris en signe contraire, est égal à $\frac{y' + y''}{2}$.

D'où résulte la relation

$$Y = \frac{p}{a}. \qquad (2)$$

Comme la quantité a est une *constante* pour toutes les cordes *parallèles* à MM′, il s'ensuit que la valeur de Y est elle-même une *constante*, quel que soit X.

L'équation (2) est donc celle du *lieu géométrique* des *points milieux* de toutes les cordes ; et l'on voit que ce *lieu* n'est autre chose qu'*une droite parallèle à l'axe principal.*

272. Axes conjugués. — De l'équation (2) on déduit

Fig. 125. Donnant à a une valeur *arbitraire*, on tirera de l'équation

$$b^2 - 2pa = 0,$$

la valeur *correspondante* de b; et le point A′, déterminé par ces valeurs, représentera la nouvelle origine.

Enfin, la relation

$$b \sin \alpha' - p \cos \alpha' = 0,$$

donne

$$\operatorname{tang} \alpha' = \frac{p}{b},$$

expression qui, comparée à la valeur

$$\frac{p}{y},$$

trouvée pour le coefficient d'inclinaison de la *tangente* à la parabole, prouve que *le nouvel axe des* y *est tangent à la courbe.*

[Ces résultats s'accordent avec ce qui a été dit au n° 272 sur les *axes conjugués.*]

Reprenant le coefficient de x dans l'équation (3), on voit que la relation

$$\operatorname{tang} \alpha' = \frac{p}{b},$$

donne

$$\cos^2 \alpha' = \frac{b^2}{b^2 + p^2},$$

et, par conséquent,

$$\sin^2 \alpha' \text{ ou } \operatorname{tang}^2 \alpha' \cos^2 \alpha' = \frac{p^2}{b^2 + p^2} = \frac{p}{2a + p};$$

d'où

$$\frac{2p}{\sin^2 \alpha'} = 4a + 2p = 4\left(a + \frac{p}{2}\right).$$

Or, si l'on suppose que AQ soit l'abscisse de la nouvelle origine A′ rapportée aux anciens axes, et qu'on tire le rayon vecteur FA′, on sait (n° 267) que ce rayon vecteur a pour expression

$$a + \frac{p}{2}.$$

Donc

$$\frac{2p}{\sin^2 \alpha'} = 4\,\mathrm{FA}';$$

c'est-à-dire que *le coefficient de* x *dans l'équation* (3), ou *le paramètre de la parabole rapportée à un système d'axes conjugués, est égal au quadruple de la distance du foyer à la nouvelle origine.*

Désignant par $2p'$ *ce nouveau paramètre*, on obtient

$$y^2 = 2p'x$$

pour l'équation de la *parabole rapportée à l'un de ses diamètres.*

Nous pourrions encore ici, comme nous l'avons fait pour l'*ellipse* et l'*hyperbole*, nous proposer, réciproquement, de *passer de l'équation de la parabole rapportée à un système d'axes conjugués, à celle de la courbe rapportée à ses axes principaux;* mais ce calcul ne conduirait à aucun résultat important.

274. L'équation

$$y^2 = 2p'x,$$

d'où l'on tire

$$\frac{y^2}{x} = 2p',$$

prouve que, *pour un système quelconque d'*AXES CONJUGUÉS, *les carrés des ordonnées sont proportionnels aux abscisses correspondantes;* c'est la propriété du n° 260 *généralisée*, puisque les *axes principaux* forment un système particulier d'*axes conjugués.*

Cette propriété étant vraie *quelle que soit l'inclinaison des axes*, on peut, par un procédé analogue à celui qui a été employé (n° 210) pour l'ellipse, construire la PARABOLE, connaissant l'*angle de deux axes conjugués* et *le paramètre correspondant.*

Soient AX, AY les deux axes conjugués donnés.

Élevez au point A *une perpendiculaire* AY′ *à* AX, *et* FIG. 126. *construisez sur* AX, AY′, *considérés comme axes principaux, une parabole* ANN′ *ayant* 2p′ *pour paramètre; menez ensuite de différents points* P, P′, etc., *des parallèles à* AY′ *et à* AY, *et prenez des parties* PM, P′M′, etc., *égales à* PN, P′N′, etc.

Les points M, M′, etc., appartiendront à la courbe demandée.

De la tangente à la parabole rapportée à un système d'axes conjugués.

Fig. 125. **275.** TANGENTE MENÉE PAR UN POINT PRIS SUR LA COURBE, ET SOUS-TANGENTE. — La solution du problème des tangentes étant *indépendante de l'inclinaison des axes*, on a pour l'équation de la tangente en un point M, (x', y'), de la courbe,

$$y - y' = \frac{p'}{y'}(x - x'),$$

ou, *simplifiant* à l'aide de la relation $y'^2 = 2p'x'$,

$$yy' = p'(x + x').$$

Si l'on fait $y = 0$ dans cette *dernière* équation, on trouve

$$x = -x' \quad \text{ou} \quad A'R = -A'P.$$

La même hypothèse introduite dans l'équation *non simplifiée* de la tangente donne

$$x - x' = -\frac{y'^2}{p'} = -2x',$$

pour l'expression de la *sous-tangente* PR; d'où l'on voit que *la sous-tangente est négative et numériquement* DOUBLE *de l'abscisse du point de contact.*

Ces résultats sont conformes à ceux du n° 264.

Quant à la propriété démontrée n° 265 pour la SOUS-NORMALE, elle ne saurait exister par rapport à des *axes conjugués obliques*, puisque le coefficient de x dans l'équation de la NORMALE dépend essentiellement (n° 64) de leur *inclinaison.*

Fig. 127. **276.** TANGENTE MENÉE PAR UN POINT EXTÉRIEUR. — Si l'on propose de mener une tangente par un point N ou $[\alpha, 6]$ donné *hors* de la courbe, on a, pour déterminer les coordonnées x', y', du *point de contact*, les équations

$$y'^2 = 2p'x' \quad \text{et} \quad 6y' = p'(\alpha + x').$$

Mais au lieu d'effectuer l'élimination, on peut, comme au n° 212, en regardant x', y' comme des *variables*, construire les *lieux géométriques* de ces équations.

La *première* représente évidemment la *parabole déjà construite*.

Quant à la *seconde*, qui représente *une ligne droite*, en y faisant successivement

$$y' = 0, \quad x' = 0,$$

on trouve

$$x' = -\alpha, \quad y' = \frac{p'\alpha}{6}.$$

Si l'on porte sur les axes AX, AY, des parties AP, AH, respectivement égales à $-\alpha$, $\frac{p'\alpha}{6}$, et qu'on tire la droite PH, on a le *second lieu géométrique demandé;* ainsi les points M, m, où cette *droite de jonction* coupe la courbe, sont les *points de contact* des deux tangentes qui doivent passer par le point N.

Comme le résultat $x' = -\alpha$ correspondant à $y' = 0$ *ne dépend pas* de l'ordonnée 6 du point N, il s'ensuit que, si l'on prend un *autre point quelconque* N′ sur une droite LL′ *parallèle* à l'axe des y, menée par le point N, et qu'on tire les deux tangentes N′M′, N′m', la *ligne de jonction* des *nouveaux points de contact*, M′, m', doit passer par le *même point* P de l'axe AX.

Cette droite LL′ pouvant être considérée comme située à *volonté* sur le plan de la courbe, on en conclut, comme pour l'*ellipse* et l'*hyperbole* (n°s 212 et 242), la proposition suivante, dont la réciproque (*voyez* le n° 213) est également vraie :

Une droite étant tracée arbitrairement dans le plan d'une parabole, si de chacun de ses points on mène deux tangentes à la courbe, et qu'on joigne les deux points de contact par une droite, ces droites de jonction, appelées LIGNES DE CONTACT, *doivent toutes passer par un* MÊME POINT, *lequel se trouve placé sur l'axe conjugué de celui qui est parallèle à la droite donnée.*

Le point de concours P est le *pôle* de la droite LL′, qui est dite *polaire*.

Il faut observer toutefois que, si la droite donnée était une parallèle LL′ à l'axe principal, c'est-à-dire un *dia-* FIG. 128.

Fig. 128. *mètre*, les *lignes de jonction* des *points de contact* M et *m*, M′ et *m′*, etc., *ne concourraient plus en un même point*, mais elles seraient toutes *parallèles* entre elles; c'est-à-dire qu'alors elles se rencontreraient toutes à *l'infini* sur l'*axe conjugué* de ce diamètre.

En effet, supposons pour un instant la courbe rapportée à ce diamètre et à son axe conjugué AY; comme, pour un point N de la ligne LL′, on a α quelconque, mais β égal à 0, il s'ensuit que les résultats

$$x' = -\alpha, \quad y' = \frac{p'\alpha}{6},$$

obtenus ci-dessus et correspondant respectivement à

$$y' = 0, \quad x' = 0,$$

se réduisent à

$$x' = -\alpha \quad \text{et} \quad y' = \frac{p'\alpha}{0};$$

d'où l'on voit que la *ligne de jonction* des *deux points de contact* M et *m* va rencontrer l'axe *des y* à l'*infini*.

On arriverait à *la même conclusion* en remarquant que la *ligne de jonction* dont l'équation est, généralement, de la forme

$$\beta y' = p'(\alpha + x'),$$

se réduit, dans l'hypothèse de $\beta = 0$, à

$$p'(\alpha + x') = 0;$$

d'où l'on tire

$$x' = -\alpha,$$

ce qui est l'équation d'une droite *parallèle à l'axe* des *y*.

CHAPITRE VI.

DES COORDONNÉES POLAIRES.

Définitions.

277. Jusqu'ici, nous avons supposé une ligne *déterminée de position* sur un plan, au moyen d'une équation entre deux variables exprimant les *distances* de chacun de ses points à *deux droites fixes, comptées parallèlement* à ces droites.

Mais il existe un autre moyen de représenter *analytiquement* les lignes, et ce moyen offre, dans certains cas, des avantages sur le précédent.

Pour fixer les idées sur ce nouveau mode, considérons Fig. 129. une courbe mMm', une droite quelconque OB, et un *point fixe* O sur cette droite.

Menons de ce point, nommé PÔLE, à un point M pris *arbitrairement* sur la courbe, une droite OM appelée *rayon vecteur;* et désignons par ρ ce rayon vecteur, par φ l'angle qu'il forme avec la droite fixe OB.

La courbe sera *déterminée* si l'on parvient à établir une relation entre ρ et φ, qui soit *vraie* pour *tous les points* de la courbe et n'ait lieu *que pour ces points;* car, en donnant à φ une série de valeurs φ', φ'', φ''', etc., on tirera de la relation $f(\rho, \varphi) = 0$, des valeurs correspondantes ρ', ρ'', ρ''', etc., pour ρ.

Formant alors au point O des angles LOB, L'OB, etc., égaux à φ', φ'', etc., et portant sur OL, OL', etc., des parties égales à ρ', ρ'', etc., on obtiendra des points M, M', etc., qui appartiendront *exclusivement* à la courbe.

Les variables ρ et φ sont ce qu'on appelle des *coordonnées polaires;* et l'équation

$$f(\rho, \varphi) = 0$$

est dite l'*équation polaire* de la courbe.

Formules pour la transformation des coordonnées.

278. Une courbe étant définie, on peut se proposer de trouver une équation polaire de cette courbe, en choisissant d'une manière convenable le *pôle* et la *droite fixe* menée par ce point.

Mais souvent on suppose que la courbe est déjà représentée sur son plan par une équation entre coordonnées *rectilignes;* et il s'agit alors d'en déduire une *relation constante* entre des coordonnées *polaires.*

[Lorsque les axes primitifs sont *rectangulaires,* on donne quelquefois aux coordonnées la dénomination de coordonnées *orthogonales.*]

On est ainsi conduit à la question suivante :

Passer d'un système de coordonnées rectilignes (*orthogonales* ou *obliques*) *à un système de coordonnées polaires.*

FIG. 129. Soient pour cela, AX, AY, deux axes par rapport auxquels on ait déjà l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

OB une droite quelconque, et O un point *fixe* pris sur cette droite.

Menons par le point O les lignes OX′, OY′, *parallèles* à ces axes; et désignons par a, b, les coordonnées AH, OH du *pôle* O, par α l'angle BOX′, par θ l'angle des deux axes; le rayon vecteur OM et l'angle MOB sont d'ailleurs, comme nous l'avons dit ci-dessus, représentés par ρ et φ.

Cela posé, la figure donne évidemment

$$\text{AP ou } x = a + \text{OK},$$
$$\text{MP ou } y = b + \text{MK};$$

mais on a dans le triangle MOK,

$$\frac{\text{OK}}{\text{OM}} = \frac{\sin \text{OMK}}{\sin \text{OKM}}, \quad \frac{\text{MK}}{\text{OM}} = \frac{\sin \text{MOK}}{\sin \text{OKM}};$$

d'où l'on déduit

$$\text{OK} = \frac{\rho . \sin(\theta - \varphi - \alpha)}{\sin \theta}, \quad \text{MK} = \frac{\rho . \sin(\varphi + \alpha)}{\sin \theta}.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions de x et de y, on obtient les formules

$$(1)\quad x = a + \frac{\rho.\sin(\theta - \varphi - \alpha)}{\sin\theta}, \qquad y = b + \frac{\rho.\sin(\varphi + \alpha)}{\sin\theta},$$

valeurs qui, reportées dans l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

donneront l'*équation polaire demandée.*

Dans le cas d'*axes rectangulaires*, ce qui a lieu communément, comme on a

$$\theta = 90^\circ,$$

d'où

$$\sin\theta = 1, \quad \sin(\theta - \varphi - \alpha) = \cos(\varphi + \alpha),$$

les formules deviennent

$$(2)\quad x = a + \rho.\cos(\varphi + \alpha), \quad y = b + \rho.\sin(\varphi + \alpha).$$

Outre cette hypothèse, on peut supposer que la droite fixe soit *parallèle* à l'axe des x, c'est-à-dire que l'on ait

$$\alpha = 0;$$

il vient alors

$$(3)\qquad x = a + \rho\cos\varphi, \quad y = b + \rho\sin\varphi.$$

Enfin, il peut se faire que l'*origine primitive* soit prise pour *pôle;* et l'on obtient, dans le cas de coordonnées *orthogonales*,

$$(4)\qquad x = \rho.\cos\varphi, \quad y = \rho.\sin\varphi.$$

Les deux derniers systèmes sont ceux dont l'emploi est le plus fréquent.

N. B. — Dans le dernier cas, si l'on *carre* les deux membres de chaque expression, et qu'on ajoute membre à membre, il vient

$$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi),$$

ou simplement

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

relation qui se trouve toujours intimement liée avec les relations (4).

279. Réciproquement, *une équation polaire étant donnée*, pour *passer à une équation* entre coordonnées

rectilignes, de *même* origine ou d'origine *différente*, il convient de faire d'abord usage des formules

$$x = \rho.\cos\varphi, \quad y = \rho.\sin\varphi, \quad \rho^2 = x^2 + y^2,$$

qui donnent

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

valeurs au moyen desquelles on passe de l'équation proposée à l'équation entre coordonnées *orthogonales* de *même origine*.

Après quoi, l'on a recours aux formules, déjà connues, de la transformation des coordonnées *rectilignes* pour obtenir l'équation de la courbe rapportée à des axes *obliques* et d'origine *différente*.

Exemples d'équations polaires et conséquences qui s'en déduisent.

Fig. 130. **280.** *Équation polaire du cercle.* — Pour montrer le parti qu'on peut tirer de l'*équation polaire* d'une courbe, proposons-nous de déterminer celle du CERCLE, au moyen de la transformation des coordonnées (n° 278), en prenant pour *pôle* un point quelconque O pris *dans son plan*.

L'équation du cercle rapportée à son centre et à des axes rectangulaires, étant

$$y^2 + x^2 = R^2,$$

il suffit de remplacer x et y par leurs valeurs (3); et l'on obtient, toute simplification faite,

$$\rho^2 + 2(a\cos\varphi + b\sin\varphi)\rho + a^2 + b^2 - R^2 = 0.$$

(La droite *fixe*, à partir de laquelle se compte l'angle φ, est une ligne OB *parallèle* à l'axe des x.)

Désignons par ρ', ρ'', les deux racines de cette équation; on a, d'après un principe connu,

$$\rho'\rho'' = a^2 + b^2 - R^2.$$

Or, cette relation étant *indépendante* de l'angle φ que forme la direction du rayon vecteur OM avec la *droite fixe* OB, il s'ensuit que, pour deux lignes quelconques Mm, M'm', menées par le point O, on a

$$OM \times Om = OM' \times Om', \quad \text{ou} \quad OM : OM' :: Om' : Om;$$

ce qui conduit à cette proposition connue, que *deux cordes d'un cercle se coupent en parties inversement proportionnelles*.

On suppose ici le point O *intérieur* au cercle; d'où résulte

$$a^2 + b^2 \text{ ou } \overline{AO}^2 < R^2,$$

et, par suite,

$$a^2 + b^2 - R^2 < 0.$$

Donc, dans ce cas, les deux facteurs OM, Om, correspondant à *une même corde*, sont de *signes contraires;* et cela doit être, puisque ces *distances* sont comptées en *sens contraire* l'une de l'autre.

Lorsque le point est *extérieur* comme en O', on arrive à un résultat analogue, mais se rapportant aux *sécantes entières* et à leurs *parties extérieures*, telles que $O'Nn$ et $O'N$.

Comme on a alors

$$a^2 + b^2 > R^2,$$

d'où

$$a^2 + b^2 - R^2 > 0,$$

les deux facteurs $O'N$, $O'n$ sont *de même* signe; et en effet, les distances se comptent dans *le même sens*.

Enfin, si l'on mène la tangente O'D, et qu'on tire le rayon AD au point de contact, on a la relation

$$\overline{O'D}^2 = \overline{AO'}^2 - \overline{AD}^2 = a^2 + b^2 - R^2;$$

et comme déjà, d'après ce qui vient d'être dit, l'expression $a^2 + b^2 - R^2$ représente le *produit* $O'N \times O'n$, il en résulte

$$\overline{O'D}^2 = O'N \times O'n \quad \text{ou} \quad O'N : O'D :: O'D : O'N.$$

Ainsi, la propriété de la *sécante* au cercle par rapport à une *tangente* issue du *même point* O' se trouve également démontrée.

281. *Équation polaire de l'hyperbole.* — Soit encore proposé de trouver l'équation polaire de l'*hyperbole*, en prenant pour *pôle* le *centre* de la courbe, et pour *droite fixe* le *premier axe*.

Il ne s'agit, pour cela, que de substituer les valeurs

$$(4) \qquad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

dans l'équation

$$A^2 y^2 - B^2 x^2 = -A^2 B^2;$$

ce qui donne la transformée

$$\rho^2 (A^2 \sin^2 \varphi - B^2 \cos^2 \varphi) = -A^2 B^2;$$

d'où l'on tire

$$\rho = \frac{\pm AB}{\cos \varphi . \sqrt{B^2 - A^2 \operatorname{tang}^2 \varphi}}.$$

FIG. 113. Or, l'inspection seule de ce résultat montre :

1°. Que, si par le point O, centre de l'hyperbole, on trace une droite quelconque rencontrant la courbe en deux points M, M', les parties OM, OM' sont *égales et de signes contraires;*

2°. Que la valeur de ρ exige, pour être *réelle*, que l'on ait

$$\operatorname{tang}^2 \varphi < \text{ ou } \textit{tout au plus} = \frac{B^2}{A^2}.$$

Si l'on fait

$$\operatorname{tang}^2 \varphi = \frac{B^2}{A^2}, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} \varphi = \pm \frac{B}{A},$$

on voit que les droites menées du point O, de manière à former les angles dont les tangentes trigonométriques sont $+\frac{B}{A}$ et $-\frac{A}{B}$, sont les LIGNES DE SÉPARATION des droites passant par le centre qui *rencontrent* la courbe, de celles qui *ne la rencontrent pas* (*voyez* le n° 223).

Ces exemples suffisent pour montrer avec quelle facilité les propriétés des courbes se déduisent d'une de leurs équations polaires.

Équations polaires des trois courbes du second degré.

282. Pour établir les équations polaires des trois courbes du second degré, il est d'usage de prendre un *foyer* pour *pôle* et le *premier axe* pour *droite fixe*.

Considérons successivement chacune des trois courbes, et, au lieu d'appliquer les formules (n° 278) de la transformation des coordonnées, servons-nous des expressions trouvées pour les *rayons vecteurs*, d'après la *définition* des courbes.

ELLIPSE. — Soit pris pour *pôle* le *foyer* F; on a obtenu (n° 126), pour l'expression du rayon vecteur FM, Fig. 131.

$$\text{FM ou } \rho = A - \frac{cx}{A};$$

mais la figure donne

$$x \text{ ou } OP = c + FP = c + \rho.\cos\varphi;$$

donc

$$\rho = A - \frac{c(c + \rho.\cos\varphi)}{A},$$

et, par suite,

$$\rho = \frac{A^2 - c^2}{A + c\cos\varphi}.$$

Discussion. — Soit d'abord $\varphi = 0$, auquel cas le rayon vecteur se confond avec le *premier axe;* il en résulte

$$\cos\varphi = 1, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{A^2 - c^2}{A + c} = A - c = FB;$$

on obtient ainsi B pour l'un des points de la courbe.

A mesure que φ *augmente*, $\cos\varphi$ et par suite $A + c.\cos\varphi$ *diminuent*, en sorte que le rayon vecteur devient de *plus en plus grand.*

Soit

$$\varphi = 90°; \quad \text{d'où} \quad \cos\varphi = 0;$$

le rayon vecteur se réduit à

$$\rho = \frac{A^2 - c^2}{A} = \frac{B^2}{A};$$

on retrouve ainsi l'*ordonnée* FN passant par le *foyer* (*voyez* le n° 146).

L'angle φ continuant d'augmenter et devenant *obtus*, $\cos\varphi$ *change de signe* et *augmente* NUMÉRIQUEMENT; donc le dénominateur *diminue* encore, et la valeur de ρ continue elle-même d'*augmenter.*

Supposons φ égal à l'angle CFX dont la tangente trigonométrique a pour expression

$$-\frac{CO}{OF} = -\frac{B}{c},$$

il en résulte

$$\cos\varphi = -\frac{c}{\sqrt{B^2 + c^2}} = -\frac{c}{A};$$

d'où, en substituant dans la valeur de ρ,

$$\rho = \frac{A^2 - c^2}{A - \frac{c^2}{A}} = A;$$

Fig. 131. c'est, en effet, la valeur du rayon vecteur FC (n° 131).

Soit

$$\varphi = 180^\circ; \quad \text{d'où} \quad \cos\varphi = -1,$$

on a

$$\rho = \frac{A^2 - c^2}{A - c} = A + c = FA;$$

c'est le rayon vecteur correspondant au *sommet* A.

Remarquons maintenant que, si l'on change φ en $-\varphi$, $\cos\varphi$ *ne change pas*, et qu'ainsi, l'on retrouve pour les angles cFX, nFX, mFX, DFX, etc., situés *au-dessous* du *premier axe*, les *mêmes rayons vecteurs*.

D'où l'on voit que *tous les points de la courbe* sont représentés par l'*équation polaire* qui a été établie.

Fig. 132. 283. Hyperbole. — En fixant le *pôle* au *foyer* F, on a, d'après la valeur trouvée (n° 135) pour FM,

$$FM \text{ ou } \rho = \frac{cx}{A} - A.$$

D'un autre côté,

$$x \text{ ou } OP = OF - FP = c - \rho.\cos MFP;$$

et si l'on convient, comme *en trigonométrie*, de compter les angles à partir du sens *positif* de la *droite fixe* OX, ce qui donne

$$\cos MFP = -\cos\varphi,$$

il vient

$$x = c + \rho.\cos\varphi.$$

Substituant cette valeur dans celle de ρ, on obtient

$$\rho = \frac{c(c + \rho\cos\varphi)}{A} - A;$$

d'où l'on tire

$$\rho = \frac{c^2 - A^2}{A - c.\cos\varphi}.$$

Discussion. — Pour mieux faire comprendre les détails de cette discussion, nous partirons de l'hypothèse $\varphi = 90^\circ$;

puis nous ferons *décroître* et *augmenter* successivement l'angle φ.

Pour $\varphi = 90°$, on a

$$\cos\varphi = 0;$$

d'où

$$A - c.\cos\varphi = A;$$

donc

$$\rho = \frac{c^2 - A^2}{A} = \frac{B^2}{A} = FN;$$

c'est (n° 146) l'*ordonnée* qui passe par le *foyer* F.

L'angle φ *diminuant* à partir de 90°, $\cos\varphi$ est *positif* et *augmente* sans cesse; et, par suite, la quantité $A - c\cos\varphi$ *diminue* jusqu'à ce qu'elle devienne *nulle*, auquel cas on a

$$\rho = \frac{c^2 - A^2}{0} = \infty,$$

résultat qui a besoin d'être interprété.

Or, de la relation

$$A - c\cos\varphi = 0,$$

on déduit

$$\cos\varphi = \frac{A}{c} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

d'où

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{B}{A}.$$

Ce qui prouve que, si l'on mène par le *pôle* une parallèle GFG′ à l'asymptote LL′, cette droite représente la *direction* que doit prendre, dans l'hypothèse actuelle, le rayon vecteur qui, d'ailleurs, est *infini*, comme on vient de le voir.

Laissant, pour le moment, de côté, les valeurs de φ, *inférieures* à l'angle GFX, faisons *croître* φ à partir de 90 degrés.

Alors $\cos\varphi$ devenant *négatif* et *augmentant* de plus en plus NUMÉRIQUEMENT, $A - c\cos\varphi$ *augmente* également, et, par suite, ρ *diminue*, jusqu'à ce qu'on suppose

$$\varphi = 180°, \quad \text{d'où} \quad \cos\varphi = -1;$$

ce qui donne

$$\rho = \frac{c^2 - A^2}{A + c} = c - A = FB.$$

FIG. 132. D'où nous pouvons conclure que tous les points de la branche *supérieure* BMM″M‴... sont représentés par l'équation polaire qui a été établie ci-dessus, savoir : la *portion* BMN, au moyen des valeurs de φ, depuis 180 jusqu'à 90 degrés, et la *portion* NM‴..., au moyen des valeurs de φ, depuis 90 degrés jusqu'à l'angle GFX, correspondant à $\operatorname{tang}\varphi = \frac{B}{A}$.

Comme, d'ailleurs, en changeant φ en $-\varphi$, on retrouverait, ainsi que cela a eu lieu pour l'*ellipse*, *les mêmes valeurs* de ρ, la branche *inférieure* BM′m‴m″... est également représentée par l'équation dont il s'agit.

Il suffirait, pour une valeur *positive* donnée à φ, M″FX, par exemple, de décrire du point F comme centre, et d'un rayon égal à la valeur correspondante de ρ, un arc de cercle M″Dm‴, puis de prendre Dm‴ = DM″.

Considérons maintenant les valeurs de φ *inférieures* à l'angle *aigu* GFX.

L'angle φ continuant de *diminuer*, $\cos\varphi$ reste encore *positif* et *augmente* sans cesse; par suite, $A - c\cos\varphi$, qui était *nul* pour $\varphi = GFX$, devient *négatif* et va en *augmentant* NUMÉRIQUEMENT; donc ρ, qui est lui-même *négatif*, va sans cesse en *diminuant*, jusqu'à ce qu'on suppose

$$\varphi = 0, \quad \text{d'où} \quad \cos\varphi = 1,$$

ce qui donne

$$\rho = \frac{c^2 - A^2}{A - c} = -(c + A),$$

expression qui, en *valeur absolue*, représente FA, et correspond au *sommet* A.

Ainsi, la partie *inférieure* de la branche de *gauche* de l'hyperbole est déterminée par des rayons vecteurs, tels que Fm', mais en *rayons négatifs*.

La partie *supérieure* de cette même branche se déduit de la partie *inférieure*, d'après l'observation déjà faite, que le changement de φ en $[-\varphi]$ n'altère par l'expression de $\cos\varphi$.

284. *Première remarque.* — L'ELLIPSE est représentée

complétement en rayons positifs par son équation polaire, tandis que, pour l'HYPERBOLE, la branche de *droite* correspond à des rayons *positifs*, et la branche de *gauche* à des rayons *négatifs*.

Cela peut s'expliquer *analytiquement* de la manière suivante :

Dans l'ELLIPSE, le rayon vecteur partant du point F Fig. 131. a pour expression générale

$$A - \frac{cx}{A},$$

valeur qui reste toujours *positive*, quel que soit le signe de x.

Dans l'*hyperbole*, au contraire, l'expression Fig. 132.

$$\frac{cx}{A} - A,$$

qui est *positive* pour tous les points de la branche de *droite*, devient *négative* pour la branche de *gauche*, puisqu'alors x est *négatif*. Si l'on voulait obtenir cette *seconde branche* en *rayons positifs*, il faudrait d'abord changer x en $-x$: ce qui donnerait

$$\rho = -\left(\frac{cx}{A} + A\right);$$

puis, comme on a, d'après la figure, pour le point m', sur la partie *inférieure* de cette branche,

$$x \text{ ou } Op' = Fp' - c = \rho \cos RFX - c = \rho \cos \varphi - c,$$

il viendrait

$$\rho = -\frac{c(\rho \cos \varphi - c)}{A} - A,$$

d'où l'on tirerait

$$\rho = \frac{c^2 - A^2}{A + c \cos \varphi}.$$

Pour la partie *supérieure*, l'expression du rayon vecteur resterait la même, puisque

$$\cos(-\varphi) = \cos \varphi.$$

285. *Deuxième remarque.* — Le changement de signe pour les rayons vecteurs de l'hyperbole est analogue à celui qui a lieu pour les sécantes trigonométriques.

On sait, en effet, que pour une sécante *positive*, l'extrémité de l'arc se trouve placée entre le centre et l'extrémité de la ligne, c'est-à-dire *sur la sécante elle-même*, tandis que, pour une sécante *négative*, l'extrémité de l'arc tombe sur le *prolongement* de la ligne et en *sens contraire* de celui où l'on compte cette sécante.

De même, pour les rayons vecteurs *positifs*, le point correspondant de la courbe se trouve placé *sur la direction même* du rayon; tandis que, pour les rayons *négatifs*, le point de la courbe est situé sur le *prolongement* de ce rayon et en *sens contraire* de sa direction.

FIG. 133. **286.** PARABOLE. — Le *pôle* étant en F, le rayon vecteur FM a (n° 142), pour expression

$$\rho = x + \frac{p}{2};$$

mais on a

$$x \text{ ou } AP = AF - PF = \frac{p}{2} - \rho . \cos MFP,$$

ou bien, à cause de $\cos MFP = -\cos\varphi$,

$$x = \frac{p}{2} + \rho \cos\varphi;$$

ce qui donne

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\varphi}.$$

Discussion. — Pour $\varphi = 180°$, on a

$$\cos\varphi = -1;$$

par suite,

$$\rho = \frac{p}{2} = FA.$$

Le *sommet* A se trouve ainsi *déterminé*.

A mesure que l'angle φ *diminue*, depuis 180 jusqu'à 90 degrés, $\cos\varphi$ ne cesse pas d'être *négatif* et va toujours en *diminuant* NUMÉRIQUEMENT; $1 - \cos\varphi$ va donc sans cesse en *diminuant* et ρ *augmente* continuellement.

Quand on suppose $\varphi = 90°$, d'où $\cos\varphi = 0$, la valeur de ρ devient

$$\rho = p = FN;$$

c'est (n° 143) l'ordonnée qui passe par le foyer.

L'angle φ continuant de *diminuer* à partir de 90 degrés, $\cos\varphi$ est *positif* et *augmente* sans cesse; donc $1 - \cos\varphi$ *diminue*, et, par conséquent, ρ *augmente* de plus en plus, jusqu'à ce qu'enfin on arrive à $\varphi = 0$, auquel cas il vient

$$\rho = \frac{p}{0} = \infty .$$

D'où l'on voit que pour toutes les valeurs de φ, depuis 180 degrés jusqu'à 0, le rayon vecteur *augmente* continuellement de $\frac{p}{2}$ à l'*infini*.

Même conséquence d'ailleurs que pour l'ELLIPSE et l'HYPERBOLE, en ce qui concerne les valeurs *négatives* attribuées à l'angle φ.

Ainsi, la *parabole* est, comme l'*ellipse*, représentée complétement en *rayons positifs* par son équation polaire.

287. ÉQUATION POLAIRE COMMUNE AUX TROIS COURBES DU SECOND DEGRÉ. — On peut comprendre dans une seule *formule polaire* les trois courbes du second degré. Mais, pour cela, il est nécessaire de modifier l'équation polaire de l'ELLIPSE, en prenant pour *pôle* le point F′ au lieu du point F, afin de donner à ce pôle une position analogue à celle qu'il occupe dans les deux autres courbes.

On a (n° 126), pour le rayon vecteur F′M, FIG. 131.

$$\rho = A + \frac{cx}{A};$$

mais

$$x \text{ ou } OP = F'P - OF' = \rho.\cos\varphi - c;$$

donc

$$\rho = A + \frac{c(\rho.\cos\varphi - c)}{A};$$

d'où

$$\rho = \frac{A^2 - c^2}{A - c\cos\varphi}.$$

Cela posé, si, dans cette équation et dans celle de l'HYPERBOLE (n° 283),

$$\rho = \frac{c^2 - A^2}{A - c\cos\varphi},$$

on remplace $A^2 - c^2$ et $c^2 - A^2$ par B^2, il vient, pour l'une

et l'autre,

$$\rho = \frac{B^2}{A - c\cos\varphi} = \frac{\frac{B^2}{A}}{1 - \frac{c}{A}\cos\varphi}.$$

d'où, posant $\frac{B^2}{A} = p$, $\frac{c}{A} = e$,

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}.$$

La quantité e ou $\frac{c}{A}$ (qui exprime, comme on l'a vu au n° 151, le *rapport des distances* d'un point quelconque de la courbe à *l'un des foyers* et à la *directrice* placée du même côté que ce foyer à l'égard du centre), a reçu, dans l'*ellipse* et l'*hyperbole*, le nom d'EXCENTRICITÉ.

Dans la première, on a

$$e = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A}; \quad \text{d'où} \quad e < 1;$$

dans la seconde,

$$e = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{A}; \quad \text{d'où} \quad e > 1.$$

Quant à la *parabole*, comme son équation polaire

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$$

peut être déduite de la précédente, en faisant $e = 1$, il en résulte que l'équation

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$

représente à la fois les trois courbes, savoir :

l'*ellipse*, pour $e < 1$,
l'*hyperbole*, pour $e > 1$,
et la *parabole*, pour $e = 1$.

N. B. — Pour que L'EXCENTRICITÉ e ait une signification dans le cas de la *parabole*, il faut admettre que c et A deviennent *infinis* à la fois; ce qui est vrai (n° 144); et alors on a

$$e = \frac{\infty}{\infty} = 1.$$

Nous renvoyons au *huitième* chapitre la discussion de quelques équations particulières de cette espèce.

CHAPITRE VII.

QUESTIONS SE RAPPORTANT AUX COURBES DU SECOND DEGRÉ.

Après avoir exposé séparément, dans les précédents chapitres, les propriétés de chacune des trois courbes du second degré, nous nous proposons, particulièrement, dans ce chapitre, de traiter des questions qui se rapportent aux trois courbes considérées ensemble.

288. PREMIÈRE QUESTION. — Étant donnée, pour un système d'axes rectangulaires, l'équation

$$y^2 = 2px + qx^2, \tag{1}$$

qui comprend (n° 146) les trois courbes du second degré,

Rechercher, dans le plan de chaque courbe, les points tels que leur distance à un point quelconque de la courbe soit une fonction RATIONNELLE *de l'abscisse de ce dernier point.*

On sait déjà que les *foyers* jouissent de cette propriété, puisque l'expression de leur distance à tout point de la courbe est

$$A + \frac{cx}{A} \quad \text{et} \quad A - \frac{cx}{A} \ldots \text{pour } \textit{l'ellipse},$$

$$\frac{cx}{A} + A \quad \text{et} \quad \frac{cx}{A} - A \ldots \text{pour } \textit{l'hyperbole},$$

$$x + \frac{p}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{pour la } \textit{parabole}.$$

Il s'agit donc de savoir s'il existe *d'autres* points qui satisfassent à la même condition.

Désignons par x', y', les coordonnées du point cherché, x, y représentant d'ailleurs celles d'un point quelconque de la courbe.

On a, pour l'expression générale de la distance entre ces deux points,

$$D = \sqrt{x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2},$$

ou, remplaçant y par sa valeur tirée de l'équation (1),

$$D = \sqrt{x^2 - 2x'x + x'^2 + 2px + qx^2 - 2y'\sqrt{2px + qx^2} + y'^2}.$$

Cette expression, présentant deux radicaux qui se recouvrent, restera nécessairement, d'après les principes de l'Algèbre, *irrationnelle* tant que le petit radical subsistera sous le grand; il faut, par conséquent, que l'on ait

$$2y'\sqrt{2px + qx^2} = 0.$$

Mais cette condition doit, suivant l'énoncé, être satisfaite pour *toute valeur* de la variable x; elle se réduit donc, pour la question qui nous occupe, à la relation

$$y' = 0;$$

d'où l'on voit déjà que, s'il existe sur le plan de la courbe des points dont la distance à un quelconque de ses points soit *rationnelle* en x, ils *doivent être placés sur l'axe des* x.

Dès lors l'expression ci-dessus se réduit à

$$D = \sqrt{x^2 - 2x'x + x'^2 + 2px + qx^2},$$

ou

$$(2) \qquad D = \sqrt{(1+q)x^2 - 2(x'-p)x + x'^2}.$$

Or, il résulte encore des principes de l'analyse algébrique, que la quantité soumise à ce nouveau radical ne peut être un *carré* qu'autant que l'on a

$$4(x'-p)^2 = 4(1+q)x'^2, \quad \text{ou} \quad (x'-p)^2 = (1+q)x'^2,$$

ou bien, en effectuant les calculs et réduisant,

$$(3) \qquad qx'^2 + 2px' - p^2 = 0.$$

Discutons maintenant cette équation de condition en considérant successivement chacune des trois courbes, et en commençant par le cas le plus simple, celui de la PARABOLE.

On a, dans ce cas (n° 146),

$$q = 0;$$

et l'équation (3) se réduit à

$$2px' - p^2 = 0; \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{p}{2}.$$

La valeur de D devient d'ailleurs

$$D = \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = x + \frac{p}{2}.$$

D'où il suit que, pour la parabole, il n'existe qu'*un seul* point susceptible de satisfaire à l'énoncé de la question; et ce point n'est autre que le *foyer*, tel qu'il a été défini au n° 141.

ELLIPSE. — On a (n° 146)

$$p = \frac{B^2}{A}, \quad q = -\frac{B^2}{A^2};$$

ce qui donne, pour l'équation (3),

$$-\frac{B^2}{A^2}x'^2 + \frac{2B^2}{A}x' - \frac{B^4}{A^2} = 0,$$

ou, simplifiant,

$$x'^2 - 2Ax' + B^2 = 0;$$

donc

$$x' = A \pm \sqrt{A^2 - B^2} = A \pm c.$$

Ainsi, pour l'ellipse, il existe *deux* points satisfaisant à l'énoncé; et ces points ne sont autres que les *foyers*, tels qu'ils ont été définis au n° 124.

Si l'on porte la première valeur de x' dans l'expression (2) en même temps que celles de p et de q, on trouve, en désignant par D' la distance qui se rapporte au foyer de droite,

$$D' = \sqrt{\frac{A^2 - B^2}{A^2}x^2 - 2\left(A + c - \frac{B^2}{A}\right)x + (A + c)^2},$$

ou, remplaçant B^2 par $A^2 - c^2$,

$$D' = \sqrt{\frac{c^2x^2}{A^2} - \frac{2c}{A}(A + c)x + (A + c)^2}.$$

La quantité soumise au radical est évidemment le *carré* de $\frac{cx}{A} - (A + c)$, ou de $A + c - \frac{cx}{A}$; et afin de savoir laquelle des deux racines il convient de prendre, pour obtenir, comme cela doit être, une valeur positive de D', il

suffit de remarquer que, pour une valeur de x moindre que A, $\frac{cx}{A} - (A + c)$ serait négatif.

C'est donc $A + c - \frac{cx}{A}$ qu'il faut prendre; et l'on a

$$D' = A + c - \frac{cx}{A}.$$

Quant à la seconde valeur $x' = A - c$, reportée dans l'expression (2), elle donne

$$D'' = \sqrt{\frac{c^2x^2}{A^2} + \frac{2c}{A}(A - c)x + (A - c)^2};$$

d'où l'on tire la racine unique en valeur positive,

$$D'' = \frac{cx}{A} + A - c.$$

En faisant la somme des deux distances D' et D'', on obtient

$$D' + D'' = 2A.$$

Cette propriété constitue, comme on l'a vu au n° 124, la définition géométrique de l'ellipse.

Opérant d'une manière analogue pour l'HYPERBOLE, on parviendrait aux résultats suivants :

$$x'^2 + 2Ax' - B^2 = 0,$$

d'où

$$x' = -A \pm \sqrt{A^2 + B^2} = -A \pm c,$$

$$D' = \frac{cx}{A} + c - A, \quad D'' = \frac{cx}{A} + c + A,$$

$$D'' - D' = 2A;$$

ce dernier résultat n'est autre chose que l'expression de la propriété qui (n° 134) a servi de définition à l'HYPERBOLE.

N. B. — On a supposé, dans l'énoncé de la question qui vient d'être traitée, les axes rectangulaires.

Il en devait être ainsi; car, si les axes étaient obliques, l'équation de la courbe conservant la même forme

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

on aurait (n° 49), *pour l'expression de la distance* D,

$$D = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + 2(x - x')(y - y')\cos\theta};$$

et le terme

$$2xy.\cos\theta, \quad \text{ou} \quad 2x\sqrt{2px+qx^2}.\cos\theta$$

qui entrerait alors sous le grand radical, restant *irrationnel* pour une valeur de x *quelconque*, la valeur de D ne pourrait généralement se réduire à une *fonction rationnelle* de x.

289. SECONDE QUESTION. — *Déterminer la nature et la position des diamètres dans les trois courbes du second degré.*

[Nous avons déjà résolu cette question *séparément* pour chaque courbe, en les traitant toutes les trois par une méthode analogue; nous nous proposons maintenant d'arriver au même résultat, en considérant les trois courbes *simultanément*.]

Rappelons, d'abord, qu'on nomme DIAMÈTRE d'une courbe, le *lieu géométrique des points milieux* d'une série de *cordes parallèles* menées dans une direction quelconque (*voyez* le n° 177).

Cela posé, prenons l'équation générale des courbes du second degré,

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0, \tag{1}$$

les axes étant (n° 154) rectangulaires ou obliques.

Appelons a, b, les coordonnées du *point milieu* d'une corde quelconque de la courbe, et concevons qu'on transporte l'*origine* des coordonnées en ce point, sans changer la direction des axes; il suffit, pour cela (n° 114), de changer dans l'équation (1)

$$x \text{ en } x+a, \quad y \text{ en } y+b;$$

ce qui donne la *transformée*

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+(2Ab+Ba+D)y+(2Ca+Bb+E)x+F'=0;$$
$$(F'=Ab^2+Bab+Ca^2+Db+Ea+F).$$

D'un autre côté, l'équation de la corde rapportée à ce même point comme origine, est nécessairement de la forme

$$y=mx; \tag{2}$$

et, si l'on substitue cette valeur de y dans la *transformée*, on arrivera à une équation en x qui, étant résolue, donnera

les abscisses des *deux points d'intersection* de la corde avec la courbe.

Opérant cette substitution, l'on obtient

$$(Am^2+Bm+C)x^2+[(2Ab+Ba+D)m+2Ca+Bb+E]x+F'=0,$$

équation dont les deux racines doivent être *égales* et de *signes contraires*, puisque le point $[a, b]$, *milieu* de la corde, est supposé, pour le moment, l'*origine* des coordonnées.

Pour exprimer cette condition *analytiquement*, il faut et il suffit, d'après les principes de l'Algèbre, que le coefficient de x, dans l'équation ci-dessus, soit égal à 0, ce qui donne la relation

$$(3) \qquad (2Ab+Ba+D)m+2Ca+Bb+E=0.$$

Les deux valeurs de x étant, sous cette condition, égales et de signes contraires, il en est de même de celle de y, en vertu de l'équation (2).

Remarquons maintenant que, pour toute valeur de m déterminée, la relation (3) convient aux coordonnées des *points milieux* de toutes les cordes *parallèles* à celle que nous avons considérée en premier lieu, et ne peut convenir qu'à ces points; d'où il suit qu'elle représente leur *lieu géométrique*.

Comme cette équation (3) est du *premier degré* en a, b, on peut déjà conclure que

Tous les diamètres des courbes du second degré sont des lignes droites.

De plus, cette équation est évidemment satisfaite lorsqu'on y fait en même temps

$$2Ab+Ba+D=0, \quad 2Ca+Bb+E=0.$$

Or, ces deux nouvelles relations sont précisément (n° 163) celles qui servent à déterminer le *centre* de la courbe.

Donc *tous les diamètres passent par le centre.*

Tant que l'on a

$$B^2-4AC<\text{ ou }>0,$$

les deux valeurs de a, b, sont *réelles* et *finies*; elles deviennent *infinies* pour

$$B^2-4AC=0;$$

ce qui revient à dire que dans la PARABOLE *tous les diamètres sont parallèles.*

290. TROISIÈME QUESTION. — *Une droite étant menée à volonté dans le plan d'une courbe du second degré, si, de chacun de ses points, on mène deux tangentes à la courbe, et qu'on joigne les deux points de contact correspondants, toutes ces lignes de jonction jouissent de la propriété de* CONCOURIR EN UN MÊME POINT. — *Fixer la position de ce point de concours.*

[Cette propriété n'est autre que celle qui a été déjà établie pour chacune des trois courbes (n^os^ **212**, **242** et **276**).]

Concevons que l'on ait mené d'abord *parallèlement* à la droite donnée une tangente à la courbe, puis le diamètre passant par le point de contact; et prenons pour *système d'axes* ce diamètre et cette tangente, en choisissant le diamètre comme axe des x.

L'équation de la courbe rapportée à ce système est nécessairement de la forme

$$y^2 = 2nx + mx^2, \tag{1}$$

m et n ayant des acceptions *déterminées* pour chacune des trois courbes.

Cela posé, le *coefficient d'inclinaison* dans l'équation d'une tangente menée par un point quelconque $[x', y']$ de la courbe, ayant (n° **102**) pour expression

$$\frac{n + mx'}{y'},$$

on a, pour l'équation de cette tangente,

$$y - y' = \frac{n + mx'}{y'}(x - x'),$$

ou, simplifiant,

$$yy' = n(x + x') + mxx'. \tag{2}$$

Maintenant, supposons qu'on veuille mener une tangente par un point $[\alpha, \beta]$ pris *hors* de la courbe et *sur* la droite donnée.

On est conduit, en raisonnant comme au n° **193**, aux deux relations

$$6y' = n(\alpha + x') + m\alpha x', \qquad y'^2 = 2nx' + mx'^2,$$

qui peuvent servir à déterminer x' et y'.

Mais il est plus simple (n° 194) de substituer à l'élimination la construction de ces deux équations, dont la dernière représente la courbe donnée.

Pour construire la première, qui est celle de la droite passant par *les deux points de contact*, il faut faire, dans cette équation, successivement

$$y' = 0 \quad \text{et} \quad x' = 0;$$

ce qui donne

$$x' = -\frac{n\alpha}{m\alpha + n} \quad \text{et} \quad y' = \frac{n\alpha}{6}.$$

Le premier de ces deux résultats, $x' = -\frac{n\alpha}{m\alpha + n}$, étant indépendant de l'ordonnée 6 du point pris à volonté sur la droite donnée, on est en droit de conclure que, quel que soit le point de cette droite par lequel on mène les deux tangentes à la courbe, l'abscisse du point où la ligne de contact rencontre l'axe des x, est *constante* et a pour expression

$$-\frac{n\alpha}{m\alpha + n}.$$

Donc, *toutes les lignes de contact se rencontrent en un même point, qui est situé sur le diamètre pris pour axe des* x.

291. Remarque. — Tant qu'il s'agit d'une ellipse, le *système d'axes* qui a servi pour la démonstration de la proposition peut toujours être employé. Il n'en est pas de même pour les deux autres courbes.

Ainsi, pour la parabole, si la droite donnée est un *diamètre*, on ne peut prendre pour *système d'axes* un diamètre et une tangente parallèle à cette droite, puisque dans cette courbe tous les diamètres sont parallèles.

Mais rien n'empêche alors de choisir *la droite donnée* pour axe des x, en prenant comme axe des y la tangente au point où elle rencontre la courbe; on a ainsi un système d'axes tout à fait analogue au précédent.

Seulement le *point de concours* est, dans ce cas particulier (n° 276), situé à l'*infini*; c'est-à-dire que *toutes les lignes de jonction des points de contact sont parallèles à la tangente*.

A l'égard de l'HYPERBOLE, il y a lieu de distinguer deux cas :

Ou la droite donnée forme avec le premier axe, du côté des x positifs, soit un angle *aigu plus grand* que celui dont la tangente trigonométrique a pour expression $+\frac{B}{A}$, soit un angle *obtus moindre* que celui dont cette tangente est $-\frac{B}{A}$; et alors, comme il est possible (n° 230) de mener une tangente parallèle à la droite donnée, on peut avoir recours au système d'axes indiqué.

Ou BIEN l'angle que la droite donnée forme avec le premier axe, est, suivant qu'il est *aigu* ou *obtus*, MOINDRE OU PLUS GRAND que ceux qui ont respectivement pour tangentes trigonométriques

$$+\frac{B}{A} \quad \text{et} \quad -\frac{B}{A};$$

et alors la construction précédente est impossible.

Dans ce cas, c'est le *diamètre parallèle à la droite donnée* qu'on choisit pour axe des x, en prenant comme axe des y la tangente passant par le point de rencontre du diamètre avec la branche de *droite* de la courbe.

L'équation n'en est pas moins de la forme

$$y^2 = 2nx + mx^2,$$

et l'on reconnaît que le *point de concours est placé sur le diamètre parallèle à la droite donnée.*

292. QUATRIÈME QUESTION. — *Une portion de courbe du second degré étant tracée sur un plan*, — 1° *déterminer sa nature;* — 2° *achever cette courbe et en déterminer les axes ainsi que les éléments principaux, tels que les sommets, les foyers, etc.*

PREMIÈREMENT. — *Tracez* successivement *deux* systèmes de deux cordes parallèles, et *joignez* les *points milieux* de chaque système par une droite; vous obtenez ainsi (n° 177) deux *diamètres* de la courbe.

Il peut alors se présenter TROIS cas :

Ou les deux droites de jonction sont parallèles; auquel cas la courbe est nécessairement une *parabole.*

Ou les deux droites se rencontrent *en dedans* de la courbe, qui est alors une *ellipse*.

Ou BIEN enfin, ces droites se rencontrent du côté de la *convexité* de la courbe qui, dans ce cas, ne saurait être qu'une *hyperbole*.

SECONDEMENT. — Traitons séparément chacun des trois cas :

FIG. 134. Supposons, *en premier lieu*, que la courbe tracée, MAB*m*, soit une portion de *parabole*.

Soient AX un des diamètres *construits*, et M*m* une des cordes que ce diamètre divise en deux parties égales au point P.

Appelons $2p'$ le *paramètre* à ce diamètre pris pour axe des x, la tangente au point A étant l'axe des y.

On a l'équation

$$y^2 = 2p'x; \quad \text{d'où} \quad \frac{y^2}{x} = 2p',$$

ou, remplaçant y et x par les valeurs *particulières* MP et AP que donne la *figure*,

$$2p' = \frac{MP^2}{AP}.$$

D'où l'on voit que le paramètre $2p'$ au système actuel d'axes conjugués est une *troisième proportionnelle* aux lignes connues AP et PM, et doit être lui-même regardé comme déterminé.

Cela posé, élevons au point A, sur la droite AX, une perpendiculaire AY'; puis concevons que l'on ait construit sur le système d'axes AX, AY' une parabole ayant pour son paramètre principal $2p'$ et que l'on ait ainsi obtenu la courbe NAN'.

Maintenant, d'un point quelconque N de cette courbe, abaissons la double ordonnée NP'N', perpendiculaire sur AX; puis, conformément à ce qui a été fait au n° 274, inclinons cette double ordonnée de manière qu'elle soit *parallèle* à AY, et prenons sur cette nouvelle ligne deux parties P'M', P'*m*', égales à P'N, P'N'; les points M' et *m*' appartiendront à la courbe dont *une partie* seulement était déjà construite.

On voit ainsi qu'au moyen de la courbe *auxiliaire*, il est possible d'obtenir autant de points que l'on voudra de la courbe principale.

Il reste encore à déterminer l'*axe principal* et le *paramètre* à cet axe.

Or, si du point M', on abaisse une perpendiculaire sur AX, et que, par le *milieu* de la corde M'D, on mène la droite BIL *parallèlement* au diamètre AX, on obtiendra ainsi l'*axe principal*.

Quant au *paramètre*, il aura pour expression $\frac{M'I^2}{BI}$, ou une *troisième proportionnelle* à l'abscisse BI et à l'ordonnée M'I.

En second lieu, considérons la *portion d'ellipse* MA'AN; FIG. 135. et soit O le *centre* déjà déterminé par la rencontre de deux diamètres, A'X représentant la direction de l'un d'eux.

Prenons sur A'X une distance OB' égale à OA'; nous obtenons ainsi la longueur 2A' d'un diamètre; et si nous menons au point A' la tangente A'Y', qui est *parallèle* à la corde MN divisée en deux parties égales par ce diamètre, nous aurons pour l'équation de la courbe rapportée au système d'axes A'X, A'Y' (*voyez* le n° 144),

$$y^2 = \frac{B'^2}{A'^2}(2A'x - x^2);$$

d'où l'on déduit

$$B' = \frac{A'.y}{\sqrt{x(2A' - x)}},$$

ou, remplaçant y et x par les coordonnées particulières MP et A'P, et A' par la longueur OA',

$$B' = \frac{OA'.MP}{\sqrt{A'P(2OA' - A'P)}},$$

expression homogène qu'il est facile de construire d'après les moyens connus.

[On construit le radical en décrivant sur A'B', comme diamètre, une demi-circonférence, et élevant au point P la perpendiculaire PK; ce qui réduit la valeur de B' à la *quatrième proportionnelle* $\frac{OA'.MP}{PK}$.]

FIG. 135. Connaissant les deux diamètres $2A'$, $2B'$, on peut avoir recours à la construction indiquée au n° 210 pour obtenir l'*ellipse entière* dont MA'AN n'est qu'une partie.

Cette ellipse une fois tracée, on peut en déterminer tous les éléments d'après les moyens exposés au n° 214.

En troisième lieu, si la courbe tracée est une portion d'*hyperbole*, on peut opérer comme pour l'*ellipse*, en rapportant, de même, la courbe à un système d'axes tel, que son équation soit (n° 145) de la forme

$$y^2 = \frac{B'^2}{A'^2}(2A'x + x^2),$$

d'où l'on déduit des constructions analogues aux précédentes.

Les deux questions suivantes se rapportent spécialement à l'*ellipse* et à l'*hyperbole*.

293. CINQUIÈME QUESTION. — *Connaissant les longueurs* $2A'$, $2B'$ *de deux diamètres conjugués d'une* ELLIPSE *ou d'une* HYPERBOLE, *et l'angle* θ *qu'ils font entre eux, trouver les longueurs des axes* $2A$, $2B$.

Traitons la question pour l'ELLIPSE.

On a obtenu (n° 206) les relations

$$A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2, \tag{1}$$

$$A.B = A'.B'.\sin\theta. \tag{2}$$

Si, d'abord, on ajoute, membre à membre, l'équation (1) et l'équation (2) préalablement doublée, et si, ensuite, on retranche de la première la seconde ainsi préparée, il vient

$$(A + B)^2 = A'^2 + B'^2 + 2A'.B'.\sin\theta,$$
$$(A - B)^2 = A'^2 + B'^2 - 2A'.B'.\sin\theta;$$

d'où l'on déduit

$$A + B = \sqrt{A'^2 + B'^2 + 2A'.B'.\sin\theta},$$
$$A - B = \sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'.B'.\sin\theta};$$

et, par suite,

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + 2A'.B'.\sin\theta} + \frac{1}{2}\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'.B'.\sin\theta},$$

$$B = \frac{1}{2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + 2A'.B'.\sin\theta} - \frac{1}{2}\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'.B'.\sin\theta}.$$

Ces valeurs sont toujours réelles; car de la relation évidente $(A' - B')^2 > 0$, on tire

$$A'^2 + B'^2 > 2A'B',$$

et, à plus forte raison,

$$A'^2 + B'^2 > 2A'.B'.\sin\theta.$$

Les quantités $A + B$, $A - B$, sont susceptibles d'une construction assez simple, d'où l'on peut ensuite déduire celle des axes $2A$, $2B$.

A cet effet, remarquons d'abord que $\sin\theta$ peut être remplacé soit par $\cos(90^\circ - \theta)$, soit par $-\cos(90^\circ + \theta)$; ce qui donne

$$A + B = \sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'.B'\cos(90^\circ + \theta)},$$
$$A - B = \sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'.B'.\cos(90^\circ - \theta)}.$$

Cela posé, soient tracées deux droites XX′, YY′, formant entre elles un angle X′OY′ égal à l'angle donné θ, supposé aigu, et soient prises sur ces droites, à partir du point O, les parties FIG. 136.

$$OC = OD = A'; \quad OE = OF = B';$$

abaissons du point F sur XX′, la perpendiculaire FP, et sur cette perpendiculaire prolongée de part et d'autre, portons de F en L et de F en G une longueur égale à OC ou A′; tirons la droite indéfinie LOK, et la droite OG; puis, du point O comme centre, et avec le rayon OG, décrivons une circonférence qui rencontre LK aux points I et H.

Je dis que OL et OI représenteront les valeurs de $A + B$ et de $A - B$.

En effet, l'angle OFP, dans le triangle rectangle OPF, étant égal à $90^\circ - \theta$, son supplément OFL vaut

$$180^\circ - (90^\circ - \theta), \quad \text{ou} \quad 90^\circ + \theta;$$

d'où il suit que les deux triangles LOF, FOG donnent

$$OL = \sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'.B'.\cos(90^\circ + \theta)} = A + B,$$
$$OG = \sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'.B'.\cos(90^\circ - \theta)} = A - B.$$

Par suite, on a

$$LI = OL + OI = OL + OG = 2A,$$
$$LH = OL - OH = OL - OG = 2B.$$

On résoudrait la même question pour l'HYPERBOLE au moyen des relations (n° 240)

$$A^2 - B^2 = A'^2 - B'^2; \quad AB = A'.B'.\sin\theta.$$

294. SIXIÈME QUESTION. — Réciproquement, *étant donnés les axes* 2A, 2B *d'une* ELLIPSE *ou d'une* HYPERBOLE, *trouver deux diamètres conjugués* 2A′, 2B′ *faisant entre eux un angle donné* θ.

Nous nous occuperons encore ici spécialement de l'ELLIPSE.

En combinant, comme au numéro précédent, les deux relations

$$A'^2 + B'^2 = A^2 + B^2,$$
$$A'.B' = \frac{A.B}{\sin\theta},$$

on arrive aux résultats

$$A' = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + 2.\frac{A.B}{\sin\theta}} + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 2.\frac{A.B}{\sin\theta}},$$
$$B' = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + 2.\frac{A.B}{\sin\theta}} - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 2.\frac{A.B}{\sin\theta}}.$$

Pour que ces valeurs soient *réelles*, il faut que l'on ait

$$A^2 + B^2 \geq \frac{2AB}{\sin\theta}; \quad \text{d'où} \quad \sin\theta \geq \frac{2AB}{A^2 + B^2}.$$

Afin d'interpréter géométriquement ce résultat, remarquons que de la condition d'*égalité*

$$\sin\theta = \frac{2AB}{A^2 + B^2}$$

on déduirait

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \frac{4A^2B^2}{(A^2 + B^2)^2}} = \pm\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2},$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang}\theta = \pm\frac{2AB}{A^2 - B^2}.$$

Or, on a vu (n°s 184 et 185) que ces valeurs sont précisément celles qui correspondent au *minimum* et au *maximum* des angles que peuvent faire deux diamètres conjugués d'une ellipse, selon que l'angle de ces diamètres est *aigu* ou *obtus*.

De plus, il résulte de ce qui a été dit mêmes numéros, que

les deux *angles limites* sont représentés (*fig.* 100) par l'angle CBD et son *supplément* ACB.

C'est donc ainsi qu'il faut entendre la condition trouvée pour que les deux valeurs de A′ et de B′ soient *réelles*.

Quant à ces valeurs, si l'angle donné θ est tel que l'on ait

$$\sin\theta = \frac{2AB}{A^2+B^2},$$

elles se réduisent à la valeur

$$A' = B' = \frac{1}{2}\sqrt{2(A^2+B^2)},$$

qui, d'après la relation

$$A'^2 + B'^2 = A^2 + B^2,$$

est bien celle des *deux demi-diamètres conjugués égaux* (*voyez* le n° 208).

Les deux diamètres étant déterminés en *grandeur*, pour en obtenir la *direction*, c'est-à-dire pour trouver l'angle α, que l'un d'eux forme avec le premier axe, il faut recourir à la relation (n° 179)

$$\operatorname{tang}\alpha.\operatorname{tang}\alpha' = -\frac{B^2}{A^2},$$

qui, à cause de

$$\theta = \alpha' - \alpha, \quad \text{d'où} \quad \alpha' = \theta + \alpha,$$

devient

$$A^2 \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}(\theta+\alpha) + B^2 = 0,$$

ou, développant tang $(\theta+\alpha)$,

$$A^2\operatorname{tang}^2\alpha + (A^2 - B^2)\operatorname{tang}\theta.\operatorname{tang}\alpha + B^2 = 0.$$

Cette équation résolue donne

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{(A^2-B^2)\operatorname{tang}\theta}{2A^2} \pm \frac{1}{2A^2}\sqrt{(A^2-B^2)^2\operatorname{tang}^2\theta - 4A^2B^2}.$$

Pour que les racines soient *réelles*, il faut que $\operatorname{tang}^2\theta$ soit *supérieur* ou *au moins égal* à

$$\frac{4A^2B^2}{(A^2-B^2)^2};$$

c'est-à-dire que l'angle θ, s'il est *aigu*, ne soit pas *moindre* que celui dont la tangente est $\frac{2AB}{A^2-B^2}$, et s'il est *obtus*, ne soit pas *plus grand* que celui dont la tangente est $\frac{-2AB}{A^2-B^2}$: résultat conforme à ce qui vient d'être dit.

Si la valeur donnée de l'angle θ est telle que l'on ait

$$\operatorname{tang}^2\theta = \frac{4A^2B^2}{(A^2-B^2)^2}, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{\pm 2AB}{A^2-B^2},$$

les deux valeurs de tang α deviennent

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{A^2-B^2}{2A^2} \times \left(\frac{\pm 2AB}{A^2-B^2}\right) = \mp\frac{B}{A};$$

ce qui donne, à cause de la relation $\operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\alpha' = -\frac{B^2}{A^2}$,

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{B}{A}, \quad \operatorname{tang}\alpha' = +\frac{B}{A},$$

ou bien les tangentes des angles que forment avec le *premier axe*, les diamètres *parallèles* aux cordes supplémentaires BC, AC (*fig.* 100).

Si l'on voulait traiter la question pour l'HYPERBOLE, on se servirait des trois relations

$$A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2; \quad A'B' = \frac{AB}{\sin\theta}; \quad \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\alpha' = +\frac{B^2}{A^2}.$$

295. REMARQUE. — Les deux dernières questions sont comprises dans la question générale qu'on peut se proposer de résoudre, pour l'ELLIPSE et l'HYPERBOLE, au moyen des relations obtenues entre les grandeurs et les directions des *axes principaux* et celles des *diamètres conjugués*, savoir :

1°. Pour l'ELLIPSE,

$$A'^2 + B'^2 = A^2 + B^2, \quad A'B'\sin\theta = AB,$$

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = -\frac{B^2}{A^2}, \quad \theta = \alpha' - \alpha;$$

2°. Pour l'HYPERBOLE,

$$A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2, \quad A'B'\sin\theta = AB,$$

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = +\frac{B^2}{A^2}, \quad \theta = \alpha' - \alpha.$$

Ces relations renfermant *sept* quantités, A, B, A', B', α, α', θ, on peut, étant données *trois* de ces sept quantités, demander de déterminer les *quatre* autres.

CHAPITRE VIII.

§ I. — DISCUSSION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ PAR LA SÉPARATION DES VARIABLES. — § II. APPLICATION DE CETTE MÉTHODE DE DISCUSSION A DES ÉQUATIONS DE DEGRÉ SUPÉRIEUR; ET DISCUSSION DE QUELQUES ÉQUATIONS POLAIRES.

Nous nous proposons principalement, dans ce chapitre, de montrer comment, par la résolution des équations du *second degré à deux variables,* c'est-à-dire par la SÉPARATION DES VARIABLES, on peut déterminer la nature, la forme, et même la position, par rapport à des axes quelconques, de la courbe représentée par ces équations.

Nous appliquerons, ensuite, la même méthode à des équations de *degré supérieur,* susceptibles d'être résolues immédiatement par rapport à l'une des variables; et nous terminerons par la discussion de quelques équations *polaires.*

§ I. — DISCUSSION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ PAR LA SÉPARATION DES VARIABLES.

Division des courbes du second degré en trois genres.

296. L'équation générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \tag{1}$$

(dans laquelle on suppose A différent de *zéro*), étant résolue par rapport à y, donne

$$y = -\frac{(Bx+D)}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF}$$

ou, en posant pour plus de simplicité

$$a = -\frac{B}{2A}, \quad b = -\frac{D}{2A}, \quad m = \frac{B^2-4AC}{4A^2},$$

$$n = \frac{BD-2AE}{4A^2}, \quad p = \frac{D^2-4AF}{4A^2},$$

$$y = ax + b \pm \sqrt{mx^2+2nx+p}; \tag{2}$$

et l'on voit que chaque valeur de y peut être considérée comme se composant de deux parties, l'une *rationnelle* en x, l'*autre* généralement *irrationnelle*, précédée du signe + ou du signe —.

FIG. 137. La partie *rationnelle*, $ax + b$, est évidemment l'ordonnée y' d'une droite

$$y' = ax + b,$$

qu'on peut d'abord *construire* et représenter par une ligne telle que CBL (*), rapportée, ainsi que la courbe, à un système d'axes quelconques, AX, AY.

Cette droite étant construite, il est également clair que, pour obtenir les deux points de la courbe qui correspondent à une abscisse quelconque, $x = AP$, il suffit de porter sur l'ordonnée PN de la droite, et à partir du point N, deux distances NM, NM', en sens contraire, et égales à la valeur numérique du radical. Les points M et M' ainsi obtenus, sont deux points de la courbe.

Comme la même construction peut se répéter pour toute valeur donnée à x, on peut déjà conclure que la droite CBL jouit de la propriété de passer par les *milieux* d'une série de cordes de la courbe, *parallèles* à l'axe des y; donc cette droite est un des *diamètres* de la courbe (n° 177).

Maintenant, il faut examiner sous quelle condition la quantité $mx^2 + 2nx + p$, soumise au radical, est *positive* ou *négative*, ce qui doit déterminer la *réalité* ou l'*imaginarité* des valeurs de y correspondant à une certaine valeur de x.

Or l'Algèbre nous apprend que, dans tout trinôme du second degré en x, le *signe* que reçoit ce trinôme pour des valeurs particulières de x dépend essentiellement de celui du terme en x^2.

Nous sommes ainsi conduits à examiner les différentes circonstances qui peuvent se présenter suivant que m ou $\frac{B^2 - 4AC}{4A^2}$, coefficient de x^2, ou seulement $B^2 - 4AC$, est *négatif* ou *positif*.

(*) *Voir* la note du n° 151 au bas de la page 171.

Mais il est nécessaire aussi de traiter le cas où cette quantité est *nulle;* et c'est par cette hypothèse que nous commencerons, comme donnant lieu à la discussion la plus simple.

Première hypothèse, $B^2 - 4AC = 0$.

297. L'équation (2) se réduit, dans cette hypothèse, à

$$y = ax + b \pm \sqrt{2nx + p}, \tag{3}$$

ou

$$y = ax + b \pm \sqrt{2n\left(x + \frac{p}{2n}\right)}. \tag{4}$$

Soit, d'abord, fait

Fig. 137.

$$x + \frac{p}{2n} = 0, \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{p}{2n};$$

on exprime par là que le radical est *nul,* et, par suite, que, pour l'abscisse particulière

$$AD = -\frac{p}{2n},$$

l'ordonnée de la courbe devient égale à l'ordonnée DE du diamètre; donc E est un point où la courbe rencontre son diamètre.

Maintenant il peut se présenter *trois* cas : la quantité n est *positive, négative* ou *nulle.*

1°. Si n est *positif,* l'inspection de l'équation (4) prouve que toute valeur de x, telle que AP, *plus grande* que $-\frac{p}{2n}$, rend *positif* le second facteur de la quantité soumise au radical, et donne par conséquent pour y des valeurs *réelles.*

D'ailleurs, à l'hypothèse

$$x = -\frac{p}{2n}$$

correspond

$$y = ax + b \pm 0;$$

d'où l'on peut conclure qu'à partir du point E, où la courbe est (n° 98) *tangente* à la droite DEH, cette courbe s'étend indéfiniment tant au-dessus qu'au-dessous de son diamètre, et dans le sens des x *positifs.*

FIG. 137. Si l'on donnait à x des valeurs *plus petites* que $-\frac{p}{2n}$, la quantité soumise au radical deviendrait *négative*, et le radical serait *imaginaire;* ce qui montre que la courbe *ne peut avoir aucun point situé à la gauche* de DEH.

Cette droite DEH peut donc être considérée comme *une limite* de la courbe, dans le sens des x négatifs.

2°. Si n était *négatif*, on serait évidemment conduit à des conséquences tout à fait contraires; c'est-à-dire que, dans ce cas, la courbe *ne pourrait avoir aucun point situé à droite de* DEH; mais elle s'étendrait indéfiniment *à la gauche* de cette même droite.

On voit ainsi que, dans l'un comme dans l'autre cas, la courbe est *illimitée* dans *un seul* sens.

3°. Soit $n = 0$; ce qui réduit l'équation (3) à

$$y = ax + b \pm \sqrt{p}.$$

Il y a lieu, dans ce cas, de faire des hypothèses sur la quantité p elle-même, qui peut être *positive*, *nulle* ou *négative*.

Si p est *positif*, les deux valeurs de y sont constamment *réelles* pour toute valeur donnée à x; mais comme l'équation est alors du premier degré, elle représente un *système de deux droites;* et ces droites sont PARALLÈLES, puisque le coefficient de x est le même dans les deux valeurs de y.

Si p est *nul*, le radical disparaît, et l'équation représente *une seule droite*.

Enfin, si p est *négatif*, le radical est *imaginaire*, et l'équation ne représente plus *rien*.

D'où l'on voit que le cas de $n = 0$ donne, comme *variétés* de la courbe que nous discutons, un système de *deux droites parallèles*, ou *une seule droite*, ou bien, *deux droites imaginaires*.

Deuxième hypothèse, $B^2 - 4AC < 0$.

298. L'équation (2) peut être mise sous la forme

$$(5) \qquad y = ax + b \pm \sqrt{m\left(x^2 + \frac{2n}{m}x + \frac{p}{m}\right)};$$

et si, pour obtenir le point où l'ordonnée de la courbe se réduit à celle de son diamètre, c'est-à-dire le *point de rencontre* de ces deux lignes, on pose

$$x^2 + \frac{2n}{m}x + \frac{p}{m} = 0, \tag{6}$$

il vient

$$x = -\frac{n}{m} \pm \frac{1}{m}\sqrt{n^2 - pm}.$$

Il peut alors se présenter trois cas : les racines de l'équation (6) sont *réelles et inégales*, *réelles et égales*, ou bien, *imaginaires*.

PREMIER CAS. — Désignons par x', x'' les racines qui sont, en général, de signes quelconques, mais que, pour leur construction, nous supposerons, par exemple, toutes deux *positives*. FIG. 138.

Soient $AD = x'$, $AD' = x''$; et menons les droites DG, D'G', parallèles à AY; les points E, E' seront les points d'intersection de la courbe avec son diamètre BL.

D'un autre côté, le trinôme $x^2 + \frac{2n}{m}x + \frac{p}{m}$ pouvant, d'après les principes algébriques, être mis sous la forme $(x - x')(x - x'')$, l'équation (5) devient

$$y = ax + b \pm \sqrt{m(x - x')(x - x'')}. \tag{7}$$

On sait, d'ailleurs, qu'en donnant à x des valeurs comprises entre x' et x'', on obtient pour la quantité sous le radical, des résultats de *signes contraires* à celui de m qui est ici supposé *négatif*; donc ces résultats sont *positifs*, et les valeurs correspondantes de y sont *réelles*.

Au contraire, toute valeur de x, *non comprise* entre x' et x'', donnant des résultats de *même signe* que m, il ne peut correspondre à ces valeurs de x que des valeurs *imaginaires* pour y.

D'où l'on est en droit de conclure que la courbe *est entièrement renfermée* entre les parallèles DG, D'G', qui lui sont *tangentes*, et qui la *limitent* tant dans le sens *positif* que dans le sens *négatif* de l'axe des x.

FIG. 138. La variable x ne pouvant recevoir que des valeurs *finies*, dont la plus grande est AD′ et la plus petite AD, il résulte, de l'expression de y en x, que les valeurs de y correspondant à chaque valeur de x doivent être elles-mêmes des quantités *finies*.

Pour obtenir la *plus petite* et la *plus grande* valeur de cette seconde variable, il suffirait de résoudre l'équation par rapport à x; ce qui donnerait un autre diamètre. En cherchant les points d'intersection de la courbe avec ce diamètre, et menant par ces points des parallèles à l'axe des x, on aurait les *limites*, dans les deux sens des y *positifs* et *négatifs*. — (Nous verrons plus loin qu'il existe deux limites plus avantageuses que celles-ci).

La courbe est donc *limitée dans tous les sens*.

DEUXIÈME CAS. — Si les racines de l'équation (6) sont *réelles* et *égales*, on a, entre les coefficients du trinôme du second degré, la relation

$$n^2 - pm = 0 \text{ (*)}; \quad \text{d'où} \quad p = \frac{n^2}{m},$$

et l'on obtient alors la racine unique

$$x = -\frac{n}{m}.$$

Appelons x' cette racine; l'*équation* (7) devient

$$y = ax + b \pm \sqrt{m\,(x - x')^2},$$

ou

$$y = ax + b \pm (x - x')\sqrt{m}.$$

Or, m étant, par hypothèse, *négatif*, les valeurs de y seront *imaginaires* tant que l'on donnera à x des valeurs autres que x'.

Mais pour $x = x'$ on trouve

$$y = ax' + b;$$

d'où l'on peut conclure que, dans le cas qui nous occupe,

(*) La relation $n^2 - pm = 0$ exprimée au moyen des coefficients A, B, C, D, etc., devient

$$(BD - 2AE)^2 - (D^2 - 4AF)(B^2 - 4AC) = 0,$$

ou, effectuant les calculs et simplifiant,

$$A.E^2 + C\,D^2 + F.B^2 - BDE - 4ACF = 0.$$

la courbe se réduit à *un point* représenté par le système des deux équations

$$x = x', \quad y = ax' + b.$$

Troisième cas. — Les racines étant supposées *imaginaires*, on doit avoir la relation

$$n^2 - pm < 0,$$

d'où

$$n^2 < pm,$$

(p est nécessairement *négatif* comme m); et, par suite, on a

$$\frac{p}{m} > \frac{n^2}{m^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{p}{m} = \frac{n^2}{m^2} + k^2,$$

k^2 désignant un nombre essentiellement *positif*.

Dès lors, l'équation (5) devient

$$y = ax + b \pm \sqrt{m\left(x^2 + \frac{2n}{m}x + \frac{n^2}{m^2} + k^2\right)},$$

ou

$$y = ax + b \pm \sqrt{m\left(x + \frac{n}{m}\right)^2 + mk^2};$$

et cette expression de y est toujours *imaginaire*, quelque valeur qu'on donne à x.

Ainsi, dans ce cas, il n'y a pas de courbe; en d'autres termes, la courbe est *imaginaire*.

Donc, à l'hypothèse générale $B^2 - 4AC < 0$ correspond une courbe *limitée dans tous les sens*, ayant pour variétés un *point* et une courbe *imaginaire*.

N. B. — Le *cercle* ne peut se reconnaître comme *variété* de cette courbe, par la simple séparation des variables; il faut avoir recours aux caractères qui ont été établis au n° 161.

Troisième hypothèse, $B^2 - 4AC > 0$.

299. Dans cette hypothèse, comme dans la précédente, il y a lieu de distinguer *les trois cas* qui se présentent, suivant que les racines du trinôme $x^2 + \frac{2n}{m}x + \frac{p}{m}$ sont *réelles et inégales*, *nulles* ou bien *imaginaires*.

Dans le premier cas, en construisant les deux racines Fig. 139.
$AD = x'$, $AD' = x''$, puis menant les droites indéfinies DG, D'G', parallèles à AY, on obtient E, E' pour les points où la courbe rencontre son diamètre.

FIG. 139. L'équation (2) devient alors, comme précédemment,

$$y = ax + b \pm \sqrt{m(x - x')(x - x'')};$$

et il est facile de reconnaître :

1°. Que toute valeur de x, comprise entre x' et x'', rendant la quantité soumise au radical, de *signe contraire* à celui de m, qui est ici supposé *positif*, donne lieu à des valeurs *imaginaires* pour y, et qu'ainsi la courbe ne peut avoir aucun point situé entre les deux droites DG et D'G';

2°. Qu'au contraire, pour une valeur quelconque de x, *inférieure* ou *supérieure* aux deux racines, les valeurs de y correspondantes sont réelles, et, par suite, qu'à partir des points E, E' où la courbe est (n° 98) *tangente* aux droites DG, D'G' (puisqu'en faisant $x = x'$, ou $x = x''$, on trouve $y = ax + b \pm 0$), la courbe *s'étend indéfiniment tant au-dessus qu'au-dessous de son diamètre, dans le sens positif, comme dans le sens négatif de l'axe des* x.

Elle se compose donc de *deux branches opposées*, ayant pour *limites de séparation* les droites DG, D'G'.

Dans le SECOND CAS, celui où l'on a

$$x'' = x',$$

ce qui entraîne la condition

$$n^2 - pm = 0 \ (*),$$

l'équation ci-dessus se réduit à

$$y = ax + b \pm (x - x')\sqrt{m},$$

équation du premier degré représentant un *système de deux droites qui se coupent* sur le diamètre, au point dont les coordonnées sont

$$x = x', \quad y = ax' + b,$$

puisque pour $x = x'$ le radical disparaît et que l'ordonnée correspondante de chacune de ces deux droites se réduit à celle du diamètre.

(*) La relation $n^2 - pm = 0$ devient, comme dans l'hypothèse $B^2 - 4AC < 0$ (*voir* la note, page 328),

$$A.E^2 + C.D^2 + F.B^2 - BDE - 4ACF = 0.$$

Le TROISIÈME CAS donne lieu à une circonstance remarquable. FIG. 140.

Les racines du trinôme $x^2+\frac{2n}{m}x+\frac{p}{m}$ étant *imaginaires*, on doit avoir la relation

$$n^2-pm<0,$$

d'où

$$n^2<pm,$$

(p est nécessairement *positif* comme m) ; et, par suite, on a

$$\frac{p}{m}>\frac{n^2}{m^2},\quad \text{ou}\quad \frac{p}{m}=\frac{n^2}{m^2}+k^2.$$

L'équation (2) du n° 296 devient alors, comme dans la *deuxième hypothèse* (n° 298),

$$y=ax+b\pm\sqrt{m\left(x+\frac{n}{m}\right)^2+mk^2}.$$

Mise sous cette forme, elle démontre :

1°. Que le radical ne peut jamais être *nul*, quelque valeur qu'on donne à x ; ce qui revient à dire que la courbe *ne rencontre pas* son diamètre BL ;

2°. Que pour toute valeur de x le radical est *réel*, et qu'il augmente indéfiniment jusqu'à l'*infini*, tant dans le sens *positif* que dans le sens *négatif* de l'axe des x ;

3°. Que, pour obtenir le *minimum* du radical, il faut poser

$$x+\frac{n}{m}=0;$$

d'où l'on déduit

$$x=-\frac{n}{m},$$

et, par suite,

$$y=ax+b\pm\sqrt{mk^2}.$$

Les deux quantités

$$-\frac{n}{m},\quad \text{et}\quad \sqrt{mk^2}\quad \text{ou}\quad \sqrt{\frac{mp-n^2}{m}},$$

peuvent être facilement déterminées dans chaque exemple particulier.

Soit $AC=-\frac{n}{m}$; et *menons* du point C une parallèle CF à l'axe AY, puis prenons sur cette parallèle, à partir

Fig. 140. du diamètre, deux distances OH, OH′ égales à $\sqrt{\frac{mp-n^2}{m}}$; les points H, H′ seront les points de la courbe *les plus rapprochés* du diamètre BL; en sorte que, si l'on trace par ces points les droites DG, D′G′, parallèles à ce diamètre, on aura *deux limites* entre lesquelles il ne saurait exister aucun point de la courbe, qui alors *s'étend indéfiniment au-dessus et au-dessous de ces parallèles, tant à droite qu'à gauche de* CF, et de plus *est tangente à ces mêmes parallèles*, aux points H et H′.

Ainsi, pour l'hypothèse de $B^2 - 4AC > 0$, ce qui distingue le cas des *racines imaginaires* de celui des racines *réelles et inégales*, c'est que dans ce dernier cas la courbe rencontre son diamètre BL, qui est un *diamètre transverse*, et que dans le premier, le diamètre est *non transverse*.

300. Remarque. — Dans la discussion précédente, il n'est pas fait mention du cas où l'équation générale *serait privée soit de l'un des carrés des variables, soit de tous deux*.

Il est aisé de voir que ce cas se rapporte à la *troisième hypothèse*, $B^2 - 4AC > 0$, puisque cette quantité se réduit alors à B^2.

Examinons les différentes circonstances qui peuvent se présenter :

1°. $A = 0$, C étant différent de zéro.

Les quantités a, b, m, n, p (n° 296), se présentant sous *forme infinie*, le mode de discussion employé n° 299 semble se trouver en défaut.

Mais rien n'empêcherait de résoudre l'équation par rapport à x, et l'on serait conduit à des résultats analogues.

Observons, du reste, que dans ce cas, la variable y n'entrant dans l'équation qu'au *premier degré*, toute valeur *réelle* de x, *positive* ou *négative*, donnerait toujours une valeur *réelle* pour y.

Ainsi, la courbe existe et *s'étend indéfiniment dans le sens des* x *positifs et dans celui des* x *négatifs*.

2°. $C = 0$, A étant différent de zéro.

La discussion du n° 299 est directement applicable dans ce cas.

3°. $A = 0$, $C = 0$.

Cette circonstance échappe véritablement à la discussion telle que nous l'avons établie.

Mais il faut remarquer qu'alors les deux variables x et y n'entrant qu'au *premier degré* dans l'équation, quelque valeur que l'on donne à l'une, on aura toujours une valeur *réelle* pour l'autre.

Donc encore, dans ce cas, *la courbe s'étend indéfiniment dans tous les sens.*

301. Conclusion générale. — Il résulte de toute cette discussion de l'équation générale du second degré qu'aux *trois hypothèses* faites sur les coefficients, savoir :

$$B^2 - 4AC < 0, \quad B^2 - 4AC = 0, \quad B^2 - 4AC > 0,$$

correspondent *trois genres* de courbes :

1°. Des courbes *limitées dans tous les sens*, ayant pour variétés *un point* ou bien une *courbe imaginaire;*

2°. Des courbes *limitées* dans un sens et *illimitées* dans l'autre, ayant pour variétés *deux droites parallèles*, *une seule droite*, ou bien *deux droites imaginaires;*

3°. Des courbes *illimitées* dans tous les sens, ayant pour variété *un système de deux droites qui se coupent.*

Ces résultats sont d'accord avec ceux que nous avons obtenus en soumettant (n°s 153 et suivants) l'équation générale à *une double transformation de coordonnées*, opération qui nous a conduits aux équations

$$My^2 + Nx^2 = +P, \quad My^2 - Nx^2 = \mp P, \quad My^2 = Qx,$$

dont chacune, considérée séparément, représente, ainsi que nous l'avons démontré, des courbes jouissant des mêmes propriétés, *quelles que soient les valeurs numériques* des coefficients M, N, P, Q.

Nous sommes donc en droit de conclure, 1° que les *trois genres* de courbes auxquelles nous sommes arrivés *par la séparation des variables*, sont des ellipses, des paraboles ou des hyperboles, telles qu'elles ont été définies géométriquement aux n°s 124, 134, 141 ; et 2° qu'on peut, dans les *applications numériques*, afin de faciliter les construc-

tions, faire usage de toutes les propriétés que nous avons successivement établies pour chacune de ces courbes.

La *division* des courbes du second degré *en trois genres* étant ainsi opérée, nous allons voir comment on peut, *dans chaque genre*, déduire de la SÉPARATION DES VARIABLES quelques lignes remarquables qui servent à déterminer la forme et le cours de la courbe.

1°. *Construction d'un système d'axes ou de diamètres conjugués.*

Fig. 137. **302.** PARABOLES. — Reprenons l'équation relative à *la première hypothèse* (n° 297), savoir :

$$y = ax + b \pm \sqrt{2nx + p};$$

le radical peut être regardé comme l'ordonnée de la courbe, comptée à partir du *diamètre* BL; et si l'on prend ce diamètre comme nouvel axe des x, le *conjugué* de cet axe est (n° 272) la tangente DEH.

Transportant l'origine au point E, dont les coordonnées par rapport aux axes primitifs sont

$$y = 0, \quad x = -\frac{p}{2n},$$

et désignant par u l'ordonnée rapportée aux nouveaux axes, on trouve pour l'équation de la courbe

$$u^2 = 2nx.$$

On connaît ainsi le *paramètre* à ce système d'axes conjugués,

$$2n \quad \text{ou} \quad \frac{2(BD - 2AE)}{4A^2},$$

qui peut être représenté sur la *figure* par

$$\frac{MN^2}{EN},$$

EN, MN étant les coordonnées d'un point quelconque de la courbe rapportée au système d'axes EL, EH; et, par suite, on est en mesure de construire complétement la courbe d'après le procédé du n° 292.

Fig. 138. **303.** ELLIPSES. — Comme la courbe est (n° 298) tangente en E, E', aux deux droites DG, D'G', il s'ensuit que

EE′ représente *en grandeur* et *en direction* un diamètre dont le *point milieu* O est le *centre* de la courbe.

Son *conjugué* a donc pour *direction* la droite indéfinie CR menée par ce point *parallèlement* à AY; et il ne reste plus qu'à en trouver la *longueur*.

Or l'abscisse AC du point O, centre de la courbe, a pour expression

$$\frac{AD + AD'}{2} \quad \text{ou} \quad -\frac{n}{m},$$

demi-somme des racines de l'équation

$$x^2 + \frac{2n}{m}x + \frac{p}{m} = 0.$$

Par conséquent, si l'on remplace x par cette valeur particulière dans l'expression de y correspondante, on trouvera pour la valeur de

$$\sqrt{mx^2 + 2nx + p},$$

la quantité

$$\sqrt{\frac{pm - n^2}{m}},$$

dont *le double* représente la distance HH′ entre les points H et H′, où le *second diamètre* doit rencontrer la courbe, ou, en d'autres termes, la *longueur de ce diamètre*.

Connaissant ainsi deux *diamètres conjugués* en grandeur et en direction, on pourra construire la courbe comme il a été dit au n° 292.

N. B. — Si l'on mène par les points H, H′, déterminés comme on vient de le dire, deux parallèles au diamètre EE′, la courbe sera inscrite au parallélogramme IKK′I′.

Les droites IK, I′K′ sont *les deux limites* dont il est fait mention au n° 298.

304. HYPERBOLES. — Il faut traiter séparément le cas où les racines du trinôme $mx^2 + 2nx + p$ sont *réelles et inégales*, et celui où ces racines sont *imaginaires*. FIG. 139.

Premier cas. — On a vu déjà (n° 299) que EE′ représente un diamètre en *grandeur* et en *direction*; d'où il résulte que le point O, *milieu* de ce diamètre, est le *centre* de la courbe.

FIG 139. En raisonnant comme au numéro précédent, on est conduit à faire

$$x = -\frac{n}{m},$$

abscisse du point O, dans l'expression

$$2\sqrt{mx^2 + 2nx + p};$$

ce qui donne

$$2\sqrt{\frac{pm - n^2}{m}}.$$

Mais, comme la droite indéfinie CF est un des diamètres *non transverses* de la courbe, cette valeur est nécessairement *imaginaire* et (n° 139) de la forme

$$2N\sqrt{-1},$$

expression qui, divisée par $\sqrt{-1}$, donne 2N pour la *longueur* du *diamètre conjugué*, dont la *direction* est déjà connue.

Si maintenant on porte sur la droite CF, et à partir du point O, deux distances OH, OH', égales à N, et qu'on mène par les points H, H' deux parallèles au diamètre EE', on obtiendra un parallélogramme IKK'I', *inscrit* à l'*hyperbole* (n° 248).

Puis, si l'on joint le point O aux *quatre* sommets de ce parallélogramme, on aura les *asymptotes* de la courbe, qui peut d'ailleurs être facilement construite, puisque l'on en connaît deux points E, E' (*voir* le n° 257).

FIG. 140. *Second cas.* — La courbe étant (n° 299) tangente à DG, D'G', la droite HH' peut être considérée comme *une corde* de la courbe; et comme elle est la *plus petite* de toutes celles qu'on peut mener parallèlement à AY, il s'ensuit que cette corde est un *diamètre*, dont le *point milieu* O est le *centre* de la courbe.

On a donc déjà un *premier* diamètre en *grandeur* et en *direction*.

Pour avoir son *conjugué*, remarquons que l'abscisse du point O est

$$\text{AC ou } -\frac{n}{m},$$

quantité déjà construite (n° 299) et égale à la *demi-somme*

des racines de l'équation

$$x^2 + \frac{2n}{m}x + \frac{p}{m} = 0,$$

lesquelles sont, par hypothèse, *imaginaires;* mais si l'on divise, comme dans le *premier cas,* par $\sqrt{-1}$ la quantité radicale de la forme

$$2N\sqrt{-1},$$

qu'ensuite on porte, de part et d'autre du point C, deux distances CK, CK′, égales à N, et qu'enfin on mène par les points K, K′, des parallèles à AY, on déterminera sur la droite BL, parallèle aux tangentes DG, D′G′, deux points I, I′; et la portion de droite II′ sera le diamètre *non transverse,* conjugué de HH′.

Les quatre sommets du parallélogramme DGG′D′ *inscrit* à l'hyperbole, étant ainsi obtenus, on passe, comme il vient d'être dit, à la construction des *asymptotes,* et, par suite, à celle de la courbe.

305. *Remarque générale.*— On pourrait également, pour chacun des trois genres de courbes du second degré, appliquer à la détermination des *axes principaux* le mode de *séparation des variables* dans l'équation générale en ayant soin, alors, de considérer les courbes comme rapportées, non plus, comme dans la discussion précédente, à des axes quelconques, mais bien à des axes *rectangulaires,* ce qu'on peut toujours faire (n° 154). Toutefois cette opération présenterait d'assez grandes difficultés, et il est préférable d'avoir recours à la méthode de réduction pour la transformation des coordonnées (n°ˢ 153 et suivants).

2°. *Construction des asymptotes dans l'hyperbole.*

306. On a vu (n° 257) que lorsque l'on connaît les asymptotes de l'hyperbole et *un seul* de ses points, la construction de la courbe s'exécute avec la plus grande promptitude. Il est donc important d'obtenir *directement* ces droites.

Reprenons, à cet effet, l'équation générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

que nous supposons satisfaire à la condition $B^2 - 4AC > 0$.

En conservant les mêmes notations qu'au n° 296, on peut la mettre sous la forme

$$y = ax + b \pm \sqrt{mx^2 + 2nx + p},$$

ou bien (n° 299),

$$(1) \qquad y = ax + b \pm \sqrt{m\left(x + \frac{n}{m}\right)^2 \mp mk^2};$$

le signe *supérieur* de $\mp mk^2$, correspondant au cas où les deux racines sont *réelles* et *inégales*, et le signe *inférieur*, à celui où elles sont *imaginaires*.

Cela posé, si, dans l'expression (1) de y on fait abstraction du terme $\mp mk^2$, elle se réduit à

$$y = ax + b \pm \sqrt{m\left(x + \frac{n}{m}\right)^2},$$

ou

$$(2) \qquad y = ax + b \pm \left(x + \frac{n}{m}\right)\sqrt{m},$$

équation du *premier degré* en x et en y, représentant *un système de deux lignes droites* qui se coupent.

Je dis que ce système est précisément celui des *asymptotes* de la courbe.

En effet, remarquons d'abord que l'ordonnée de chacune des deux droites se réduit à l'ordonnée du diamètre $y' = ax + b$, quand on fait

$$x + \frac{n}{m} = 0, \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{n}{m};$$

ce qui prouve que les droites appartenant à l'équation (2) se coupent sur le diamètre, au point qui a pour coordonnées,

$$x' = -\frac{n}{m}, \quad y' = ax' + b.$$

De plus, comme les expressions (1) et (2) ont une partie commune, $ax + b$, et ne diffèrent que par les quantités radicales dont le signe est le même pour toutes deux, si l'on pose

$$(3) \qquad u = \sqrt{m\left(x + \frac{n}{m}\right)^2 \mp mk^2},$$

$$(4) \qquad u' = \left(x + \frac{n}{m}\right)\sqrt{m},$$

la *différence* entre les ordonnées de la courbe et les ordonnées de chaque droite sera exprimée par

$$u' - u,$$

les deux quantités u et u' étant telles, qu'elles augmentent en même temps à mesure que x augmente.

Ainsi, il s'agit (n° 243) d'établir que *cette différence* peut devenir *moindre qu'aucune grandeur donnée*, et se réduit à 0, quand on fait $x = \infty$.

Opérons comme au n° 245, et élevons au carré les deux membres des équations (3) et (4); il vient

$$u^2 = m\left(x + \frac{n}{m}\right)^2 \mp mk^2,$$

$$u'^2 = m\left(x + \frac{n}{m}\right)^2;$$

d'où l'on déduit

$$u' - u = \frac{\pm mk^2}{u' + u}.$$

Or l'inspection seule de ce résultat fait voir que la différence $u' - u$ *diminue* sans cesse NUMÉRIQUEMENT, à mesure que x *augmente*, et devient *nul* lorsqu'on suppose x *infini*.

Donc l'équation (2) est bien celle des deux asymptotes.

Remarque. — Ce mode de détermination des asymptotes, que nous appliquerons bientôt à des équations de *degré supérieur*, se traduit en une règle pratique fort simple :

Extrayez algébriquement la racine carrée de la quantité soumise au signe radical, dans l'expression générale de l'ordonnée y, *de la courbe, et négligez le reste de l'opération.*

La double ordonnée des deux asymptotes est égale à la *partie rationnelle* de l'y de la courbe, *augmentée* ou *diminuée* de la *partie entière* de la racine carrée.

Ainsi, dans l'équation

$$y = ax + b \pm \sqrt{mx^2 + 2nx + p},$$

comme on trouve pour cette *partie entière*

$$\sqrt{m} + \frac{n}{\sqrt{m}},$$

le *reste* étant $p - \frac{n^2}{m}$, il en résulte pour l'ordonnée des asymptotes

$$y = ax + b \pm \left(x\sqrt{m} + \frac{n}{\sqrt{m}} \right),$$

ou

$$y = ax + b \pm \left(x + \frac{n}{m} \right)\sqrt{m},$$

résultat obtenu ci-dessus.

307. CAS OU L'ÉQUATION GÉNÉRALE EST PRIVÉE, SOIT DE L'UN DES CARRÉS DES VARIABLES, SOIT DE TOUS DEUX. — Ces cas méritent une attention particulière.

1°. Soit $C = 0$. — L'équation générale devient

$$Ay^2 + Bxy + Dy + Ex + F = 0,$$

d'où

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{B^2x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF}.$$

Extrayant la racine carrée et ne tenant compte que des deux premières parties, on obtient successivement, après toute réduction,

$$y = -\frac{E}{B}, \quad y = -\frac{B}{A}x - \frac{D}{A} + \frac{E}{B};$$

ce qui prouve que, dans ce cas, *l'une des asymptotes est parallèle à l'axe des* x.

On peut encore parvenir aux mêmes résultats de la manière suivante :

L'équation, résolue par rapport à x, donne

$$x = -\frac{Ay^2 + Dy + F}{By + E},$$

ou, effectuant la division,

$$x = -\frac{A}{B}y + \frac{AE - BD}{B^2} + \frac{BDE - A.E^2 - B^2.F}{B^2(By + E)}.$$

Premièrement, si l'on fait dans cette expression,

$$y = \pm\infty,$$

la *troisième partie* dont elle est composée s'évanouit, et

l'abscisse générale de la courbe se réduit à celle de *la droite*

$$x = -\frac{A}{B}y + \frac{AE - BD}{B^2},$$

qui, jouissant de la propriété d'avoir ses deux points d'intersection avec la courbe situés à *l'infini*, ne saurait être qu'*une asymptote* (nos 244 et 245).

On déduit, en effet, de cette dernière équation,

$$y = -\frac{B}{A}x + \frac{E}{B} - \frac{D}{A};$$

c'est la *seconde* des asymptotes trouvées par le premier moyen.

Secondement, si l'on pose

$$By + E = 0, \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{E}{B},$$

les deux premières parties de la valeur de x se réduisent à

$$\frac{2AE - BD}{B^2},$$

et la troisième partie devient *infinie*, puisque son numérateur étant une quantité *finie*, généralement différente de *zéro*, son dénominateur est *nul*.

Donc

$$y = -\frac{E}{B}$$

est l'équation d'une droite qui ne peut rencontrer la courbe qu'à une distance *infinie*; cette droite est, par conséquent, une *asymptote* : c'est la *première* obtenue par l'autre méthode.

N. B. — Si, avec l'équation

$$y = -\frac{E}{B},$$

on avait, en même temps, la condition

$$BDE - AE^2 - FB^2 = 0, \quad \text{ou} \quad AE^2 + FB^2 - BDE = 0,$$

la valeur de x se présenterait sous la forme $\frac{0}{0}$, qu'on peut interpréter en remarquant que cette condition s'obtient

comme *cas particulier,* par l'hypothèse $C = o$ introduite dans la relation

$$A.E^2 + C.D^2 + F.B^2 - BDE - 4ACF = o,$$

qui correspond (*voir* la note au bas de la page 330), au cas où la courbe se réduit à *un système de deux droites.*

2°. Soit $A = o$. — Il suffit, pour passer du cas précédent à celui-ci, de changer y, A, D en x, C, E, et réciproquement.

On obtient ainsi

$$x = -\frac{D}{B}, \quad x = -\frac{B}{C}y - \frac{E}{C} + \frac{D}{B};$$

et l'on voit qu'alors *l'une des asymptotes est parallèle à l'axe des* y.

3°. Soient à la fois $A = o$, $C = o$. — L'équation générale se réduit à

$$Bxy + Dy + Ex + F = o,$$

d'où, résolvant par rapport à y, et effectuant la division pour rendre le numérateur indépendant de x,

$$y = -\frac{E}{B} + \frac{DE - BF}{B(Bx + D)};$$

résultat d'où l'on déduit, comme dans le *premier cas* (deuxième moyen), les conséquences suivantes :

Premièrement, si l'on fait

$$x = \pm\infty,$$

la valeur de l'ordonnée y de la courbe se réduit à $-\frac{E}{B}$, puisque la seconde des deux parties dont elle se compose devient *nulle.*

Ainsi

$$y = -\frac{E}{B}$$

est l'équation d'une droite qui rencontre la courbe en deux points situés à l'*infini;* c'est donc une *première asymptote.*

Secondement, soit posé

$$Bx + D = o, \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{D}{B};$$

la valeur de y devient *infinie*, tant que l'on n'a pas

$$DE - BF = 0.$$

L'équation

$$x = -\frac{D}{B}$$

est celle d'une droite qui généralement ne peut rencontrer la courbe qu'à l'*infini*, et est, par conséquent, une *autre asymptote*.

La condition particulière

$$DE - BF = 0,$$

que l'on peut déduire de la relation

$$AE^2 + FB^2 - BDE = 0,$$

en y posant $A = 0$, signifie encore ici, comme dans le *premier cas*, que la courbe se réduit à un *système de deux droites;* ce qui n'infirme pas la conclusion précédente.

Donc enfin les équations

$$y = -\frac{E}{B}, \quad x = -\frac{D}{B}$$

sont celles des *asymptotes* de l'hyperbole représentée par l'équation

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0.$$

Ces asymptotes sont respectivement parallèles aux axes.

On parviendrait au même résultat en faisant disparaître les termes *linéaires en* x et y, par une simple translation d'origine, ce qui ramènerait l'équation à la forme

$$xy = k^2,$$

que l'on sait être (n° 252) l'équation de l'hyperbole *rapportée à ses asymptotes.*

308. *Remarque.* — Ce n'est que sur des exemples numériques, où les véritables signes des coefficients sont connus, qu'il est possible d'entrer dans des détails de discussion propres à donner une idée nette du cours de la courbe, tant par rapport aux axes que par rapport à certaines droites dont on fixe la position, en vue de faciliter

la construction de la courbe elle-même et d'en faire connaître toutes les *affections*.

309. RÉCAPITULATION GÉNÉRALE. — Avant de passer aux applications numériques, nous croyons utile de faire une récapitulation des principaux caractères servant à distinguer les différents *genres* et *variétés* que peut représenter une équation du second degré à *deux variables*.

1°. PARABOLES. $B^2 - 4AC = 0$,

relation qui (n° 160) entraine la condition que les trois premiers termes, $Ay^2 + Bxy + Cx^2$, forment un *carré parfait*.

VARIÉTÉS. $BD - 2AE = 0$, $D^2 - 4AF >$, $=$, ou < 0, savoir :

$$BD - 2AE = 0 \begin{cases} D^2 - 4AF > 0, & \textit{un système de deux droites parallèles;} \\ D^2 - 4AF = 0, & \textit{une seule droite;} \\ D^2 - 4AF < 0, & \textit{deux droites imaginaires.} \end{cases}$$

Le cas d'*un système de deux droites parallèles* est encore caractérisé par une équation de la forme

$$(qy + rx + s)(q'y + r'x + s') = 0,$$

dans laquelle les coefficients q, r, q', r' sont *directement proportionnels;* caractère qui résulte de la forme que prennent les deux valeurs de y (n° 297), lorsqu'on suppose

$$n \text{ ou } BD - 2AE = 0.$$

Et en effet, si l'on égale à 0 chacun des facteurs de l'équation précédente, il vient

$$qy + rx + s = 0, \quad q'y + r'x + s' = 0,$$

d'où

$$y = -\frac{r}{q}x - \frac{s}{q}, \quad y = -\frac{r'}{q'}x - \frac{s'}{q'};$$

et comme, par hypothèse, on a $\frac{r}{q} = \frac{r'}{q'}$, il s'ensuit que les droites correspondantes satisfont à la condition de *parallélisme*.

2°. Ellipses. $B^2 - 4AC < 0$ ou *négatif;*

condition qui exige que A et C soient de *même signe.*

Variétés. $A = C, B = 0$. Le *cercle* (*voir* le n° 161),

$$\left.\begin{array}{c} n^2 - pm = 0 \\ \text{ou} \\ n^2 - pm < 0 \end{array}\right\} \text{(n° 298)} \quad \begin{array}{c} \textit{un point} \\ \text{ou} \\ \textit{une courbe imaginaire.} \end{array}$$

Ces deux dernières relations étant développées (*voir* la *note* au bas de la page 328), donnent

$$A.E^2 + C.D^2 + F.B^2 - BDE - 4ACF \left\{\begin{array}{ll} = 0, & \textit{un point;} \\ < 0, & \textit{une courbe imaginaire.} \end{array}\right.$$

Le *point* et une *courbe imaginaire* sont aussi, respectivement, caractérisés par des équations de la forme

$$(qy + rx + s)^2 + (q'y + r'x + s')^2 = 0,$$
$$(qy + rx + s)^2 + (q'y + r'x + s')^2 + k^2 = 0$$

(k étant une quantité numérique quelconque).

Ces caractères résultent (n° 298) de la double valeur de y correspondant aux cas de deux racines *réelles et égales,* ou de deux racines *imaginaires.*

La première équation ne peut subsister qu'autant que l'on a, à la fois,

$$qy + rx + s = 0, \quad q'y + r'x + s' = 0;$$

système de deux équations à deux inconnues, qui représente généralement *un point.*

Quant à la seconde équation, elle ne peut être satisfaite en valeurs *réelles* d'x et d'y, puisque k est supposé *différent* de 0.

3°. Hyperboles. $B^2 - 4AC > 0$, ou *positif;*

A et C sont indifféremment de *même signe* ou de *signes contraires.*

Variété. — *Un système de deux droites qui se coupent;* et ce système est caractérisé, soit par la condition

$$n^2 - pm = 0 \quad \text{(n° 299)},$$

ou développant,

$$A.E^2 + C.D^2 + F.B^2 - BDE - 4ACF = 0,$$

(*voir* la *note* au bas de la page 330), soit par une équation de la forme

$$(qy + rx + s)(q'y + r'x + s') = 0,$$

les coefficients q, r, q', r' n'étant pas *directement proportionnels*.

Ce dernier caractère se déduit de la valeur générale de y (n° 299), dans le cas où les racines sont *réelles et égales*.

Construction de courbes du second degré données par des équations numériques.

OBSERVATION PRÉLIMINAIRE. — Pour éviter des répétitions inutiles, il nous arrivera, le plus souvent, d'appliquer les principes résultant de la discussion générale, sans entrer dans aucun détail sur les raisonnements; nous laissons aux lecteurs le soin de les reprendre eux-mêmes sur chaque exemple particulier, jusqu'à ce qu'ils se soient bien familiarisés avec tous les principes qui ont été développés dans cette discussion.

En outre, nous supposerons, pour plus de commodité, les axes *rectangulaires*, quoique tous les principes de la discussion précédente soient, ainsi que nous l'avons déjà dit, indépendants de l'inclinaison des axes.

PARABOLES.

FIG. 141. **310.** *Premier exemple :*

$$y^2 - 4xy + 4x^2 + 2y - 7x - 1 = 0.$$

On déduit de cette équation,

$$y = 2x - 1 \pm \sqrt{3x + 2}.$$

Construction du diamètre $y' = 2x - 1$. — On obtient successivement pour $x = 0$,

$$y' = -1,$$

et pour $y' = 0$,

$$x = \frac{1}{2}.$$

Prenant sur les deux axes AY, AX, les distances

$$AB = -1, \quad AC = \frac{1}{2},$$

et *tirant* la droite *indéfinie* BCE, on a le diamètre cherché.

Point d'intersection de la courbe et du diamètre. — Il faut poser

$$3x + 2 = 0; \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{2}{3}.$$

Soit $AG = -\frac{2}{3}$; si l'on *mène* GG′ parallèlement à AY, le point H sera ce point de rencontre.

D'un autre côté, le coefficient de x sous le signe radical de la valeur de y étant *positif*, il s'ensuit (n° 297) que la courbe s'étend indéfiniment à la droite de GG′, tant au-dessus qu'au-dessous de son diamètre, et est *tangente* en H à GG′; donc elle affecte la forme et la position indiquées par la figure.

On peut, du reste, trouver autant de points de la courbe que l'on voudra, en attribuant à x une série de valeurs, et en construisant les deux valeurs de y correspondantes.

Il est d'usage de rechercher, par exemple, les points où la courbe rencontre les axes.

Or, pour $x = 0$, l'équation proposée devient

$$y^2 + 2y - 1 = 0; \quad \text{d'où} \quad y = -1 \pm \sqrt{2},$$

et pour $y = 0$,

$$4x^2 - 7x - 1 = 0; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{7 \pm \sqrt{65}}{8},$$

ou

$$x = 1\frac{7}{8} \quad \text{et} \quad x = -\frac{1}{8}, \quad \text{à moins de } \frac{1}{8} \text{ près.}$$

La double valeur de y est facile à construire.

Si l'on prend, à cet effet, d'abord $AD = 1$, comme on a déjà $AB = 1$, il s'ensuit que $BD = \sqrt{2}$; portant alors BD sur AY, de B en K, et de B en K′, on obtient deux points K, K′, appartenant à la courbe.

Quant aux deux valeurs de x, on prend

$$AI = 1\frac{7}{8}, \quad \text{et} \quad AI' = -\frac{1}{8};$$

les points I, I′ appartiennent encore à la courbe, qui peut ensuite être tracée assez rigoureusement, comme étant assujettie à passer pas les *cinq* points K, I′, H, K′, I.

Deuxième exemple : FIG. 142.

$$y^2 - 2xy + x^2 - 4y + x + 4 = 0;$$

d'où

$$y = x + 2 \pm \sqrt{3x}.$$

Construction du diamètre $y' = x + 2$. — On a pour $x = 0$,

$$y' = 2,$$

Fig. 142. et pour $y' = 0$,

$$x = -2.$$

Prenant AB = AC = 2 et *tirant* CBE, on obtient le diamètre cherché.

Point d'intersection de la courbe et du diamètre. — Ce point étant donné par la relation

$$x = 0,$$

est situé sur AY ; et comme on a

$$y = 2 \pm 0,$$

il en résulte que la courbe est *tangente* en B à cet axe.

De plus, comme le coefficient de x est *positif* sous le radical de la valeur de y, il s'ensuit que la courbe s'étend indéfiniment à partir du point B et à la droite de AY.

En faisant $y = 0$ dans l'équation donnée, on trouve

$$x^2 + x + 4 = 0;$$

équation du second degré en x dont les racines sont *imaginaires*; ce qui prouve que la courbe ne peut rencontrer l'axe des x.

Pour obtenir d'autres points, faisons, par exemple,

$$x = 1 = AP;$$

il vient

$$y = 3 \pm \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad y = 3 \pm 1{,}7 \text{ à moins de } 0{,}1 \text{ près.}$$

Comme, d'après les constructions déjà exécutées, on a

$$CP = PQ = 3,$$

il s'ensuit que, si l'on porte 1,7 sur PQ de Q en M et de Q en m, les points M, m, appartiendront à la courbe.

Soit encore

$$x = AP' = 3;$$

il en résulte

$$y = 5 \pm \sqrt{9} = 5 \pm 3 = P'Q' \pm 3.$$

Portant la distance 3 de Q′ en M′ et de Q′ en m', les points M′, m' appartiennent à la courbe qui peut maintenant être tracée d'une manière suffisamment rigoureuse.

Troisième exemple :

$$y^2 + 6xy + 9x^2 - 2y - 6x - 15 = 0;$$

d'où

$$y = -3x + 1 \pm \sqrt{16} = -3x + 1 \pm 4,$$

et, par suite,

$$y = -3x + 5, \quad y = -3x - 3;$$

équations dont l'ensemble représente un *système de deux droites parallèles* ayant respectivement $+5$ et -3 pour *ordonnées à l'origine*, et -3 pour *coefficient d'inclinaison*.

On reconnaît ainsi que la proposée peut être mise sous la forme

$$(y + 3x - 5)(y + 3x + 3) = 0 \text{ (} \textit{voir} \text{ le n° 309).}$$

311. *Remarque I.* — Dans les deux premiers exemples, les droites HG, HE (*fig.* 141) et BY, BE (*fig.* 142) forment nécessairement un *système d'axes conjugués;* et comme, pour la première courbe, le *paramètre* à ce système est égal à $\frac{BK^2}{HB}$, que, pour la seconde, il a pour expression $\frac{MQ^2}{BQ}$ ou $\frac{M'Q'^2}{B}$, rien n'empêcherait d'appliquer le mode de construction développé au n° 292, ainsi que nous l'avons déjà indiqué (n° 302) dans la discussion générale.

312. *Remarque II.* — Dans chacun de ces exemples, l'équation, résolue par rapport à x, conduirait à un second diamètre que l'on pourrait construire.

Égalant à 0 la quantité soumise au nouveau radical, on en déduirait pour y une valeur qui exprimerait l'ordonnée du point de rencontre de la courbe avec ce diamètre; et, en menant par l'extrémité de cette ordonnée supposée construite, une parallèle à l'axe des x, on obtiendrait une *tangente* à la courbe, qui la *limiterait* dans le sens des y. Le *point de contact*, qui n'est autre que le point de rencontre de la courbe et du diamètre, est dit un POINT LIMITE de la courbe.

Dans la *figure* 141 ce POINT LIMITE est très-voisin du point K', et dans la *figure* 142 il est très-rapproché du point m.

Ce mode de détermination des POINTS LIMITES dans le sens des axes, susceptible d'être employé toutes les fois qu'il s'agit d'une courbe du second degré, n'est pas toujours possible pour des courbes de degré supérieur. Mais voici un autre moyen applicable dans tous les cas :

Soit $f(x, y) = 0$ l'équation proposée.

Déterminez le *coefficient d'inclinaison* de la tangente en un point quelconque x', y' de la courbe, d'après la règle du n° 102.

Égalez à 0 le *numérateur* de ce coefficient, ce qui donne une équation en x', y' qui, combinée par élimination avec l'équation $f(x', y') = 0$, fera connaître tous les points de la courbe où la tangente est *parallèle à l'axe des* x.

En égalant à 0 le *dénominateur*, on obtiendrait d'une manière analogue les points où la tangente est *parallèle à l'axe des* y.

Nous aurons plus tard l'occasion d'appliquer cette règle.

Voici de nouveaux exemples pour la classe des paraboles, sur lesquels on peut s'exercer :

$$y^2 + 2yx + x^2 - 6y + 9 = 0,$$

$$y^2 - 3y + 5x - 2 = 0,$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 + 2y - 4x + 4 = 0,$$

$$y^2 - 2xy + x^2 + 6y - 6x + 9 = 0.$$

ELLIPSES.

FIG. 143. 313. *Premier exemple :*

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Cette équation donne

$$y = x \pm \sqrt{-x^2 + 3x - 2};$$

d'où l'on voit d'abord que le diamètre $y' = x$ est une droite AB passant par l'origine et faisant avec AX un angle de 45 degrés (*moitié* de l'angle des axes).

Si l'on égale à 0 la quantité soumise au radical, il vient

$$x^2 - 3x + 2 = 0;$$

d'où

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = 2:$$

et la valeur de y prend la forme

$$y = x \pm \sqrt{-(x-1)(x-2)}.$$

Prenant sur AX les distances AG = 1, AH = 2, et menant

par les points G, H les *parallèles* GG', HH' à l'axe des y, on obtient D, E pour les points où la courbe rencontre son diamètre.

Maintenant, il résulte de la forme même sous laquelle est mise la quantité soumise au radical, que toute valeur de x *inférieure* à 1 ou *supérieure* à 2 rendrait cette quantité *négative*, et que, par suite, les valeurs correspondantes de y seraient *imaginaires*.

Il ne peut donc y avoir aucun point de la courbe situé en *deçà* et au *delà* des parallèles GG', HH'.

Mais toute valeur de x *supérieure* à 1 et *inférieure* à 2 rendant, au contraire, le produit des deux facteurs $x-1$, $x-2$ *négatif*, et, par conséquent, la quantité sous le radical *positive*, donnera pour y des valeurs *réelles*.

D'où il suit que la courbe est entièrement comprise entre les droites GG', HH' auxquelles elle est d'ailleurs tangente en D, E, et se trouve *limitée* dans les deux sens des x positifs et des x négatifs.

Comme, d'après l'expression générale de y en x, à des valeurs *finies* de x il ne peut correspondre que des valeurs *finies* de y, la courbe est aussi *limitée* dans les deux sens des y positifs et des y négatifs.

Ces dernières limites peuvent s'obtenir (n° 298) en résolvant l'équation proposée par rapport à x.

Mais il existe (n° 303) d'autres limites plus avantageuses.

Puisque DE représente en grandeur et en direction l'un des diamètres de la courbe, le *point milieu* O de DE en est le *centre*, et ce *centre* a pour abscisse

$$\mathrm{AI} = \frac{\mathrm{AG} + \mathrm{AH}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Posant $x = \frac{3}{2}$ dans l'expression de y, ce qui donne

$$y = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}; \quad \text{d'où} \quad y = 2, \quad y = 1,$$

et portant sur la parallèle à AY menée par le point O les deux distances $\mathrm{IN} = 2$, $\mathrm{IN}' = 1$, on obtient NN' pour le *diamètre conjugué* du diamètre DE, et les droites LNM, L'N'M', parallèles à DE, pour les limites de la courbe dans le sens des y; en sorte que la courbe est entièrement comprise en dedans du parallélogramme LL'M'M, et peut, d'ailleurs, être construite d'après le moyen indiqué au n° 303.

FIG. 144. *Deuxième exemple :*

$$y^2 - 2xy + 3x^2 + 2y - 4x - 3 = 0.$$

On déduit de cette équation

$$y = x - 1 \pm \sqrt{-2x^2 + 2x + 4}.$$

Le *diamètre* $y' = x - 1$ peut être facilement construit et se trouve représenté sur la figure par la droite indéfinie BCK.

Points de rencontre de ce diamètre avec la courbe :

$$x^2 - x - 2 = 0;$$

d'où

$$x = 2 \quad \text{et} \quad x = -1;$$

et, par suite,

$$y = x - 1 \pm \sqrt{-2(x+1)(x-2)}.$$

Prenant sur AX,

$$AG = -1, \quad AH = 2;$$

puis, élevant aux points G, H, des parallèles à AY; et portant sur ces droites des distances

$$GI = -2, \quad HI' = +1,$$

on obtient I, I' pour les points d'intersection cherchés.

Ces parallèles sont les *limites* de la courbe dans les deux sens de l'axe des x.

Comme II' représente un diamètre en grandeur et en direction, le *point milieu* O est le centre de la courbe; et AR, ou l'abscisse de ce centre, a pour valeur

$$x = \frac{x' + x''}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Faisant donc $x = \frac{1}{2}$ dans l'expression de y, on trouve

$$y = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{2} = -\frac{1}{2} \pm 2{,}1, \text{ à } \textit{moins de } 0{,}1 \textit{ près};$$

et si l'on porte 2,1 de O en N et de O en N', on obtient NN' pour le *conjugué* du diamètre II', et, par suite, LL'M'M pour le parallélogramme circonscrit à la courbe.

Les hypothèses $y = 0$, $x = 0$, faites successivement dans l'équation proposée, donnent :

Pour $y = 0$,

$$3x^2 - 4x - 3 = 0;$$

d'où

$$x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{13},$$

ou

$$x = 1{,}8, \text{ et } x = -0{,}5, \text{ à } \textit{moins de } 0{,}1 \textit{ près;}$$

Et pour $x = 0$,

$$y^2 + 2y - 3 = 0;$$

d'où

$$y = 1, \quad y = -3.$$

Ces dernières valeurs se construisent facilement et donnent D, D' pour les points où la courbe rencontre l'axe des y.

De même, si l'on prend $AE = 1{,}8$, $AE' = -0{,}5$, on obtient E, E' pour les points d'intersection de l'axe des x avec la courbe qui se trouve ainsi suffisamment déterminée.

Troisième exemple : FIG. 145.

$$y^2 + 2xy + 3x^2 - 4x = 0,$$

$$y = -x \pm \sqrt{-2x(x-2)}.$$

Le diamètre $y' = -x$ est une droite AB qui divise l'angle XAY' en *deux parties égales.*

On voit, en outre, d'après la quantité soumise au radical, que la courbe passe par l'origine et a pour *première limite* l'axe des y, auquel elle est tangente en A.

De plus, si l'on prend

$$AG = 2,$$

qu'on mène par le point G la droite GH parallèle à AY, et que l'on porte sur cette droite une distance

$$GI = -2,$$

on obtient ainsi le point I pour l'autre extrémité du diamètre, et GH pour la *seconde limite* dans le sens des x.

Le point O, *milieu* de AI, étant le *centre* de la courbe et ayant pour abscisse,

$$AR \text{ ou } \frac{AG}{2} = 1,$$

si l'on fait $x = 1$ dans l'expression de y, il vient

$$y = -1 \pm \sqrt{2} = -1 \pm AO.$$

Ainsi il suffit de porter OA de O en N, et de O en N', pour obtenir le *conjugué* NN' du diamètre AI, et, par suite, le parallélogramme LL'M'M circonscrit à la courbe.

N. B. — Il est à remarquer ici que les deux *diamètres conjugués* AI et NN' sont *égaux* et ont pour valeur $2\sqrt{2}$.

FIG. 145. En posant $y = 0$ dans l'équation proposée, on trouve

$$3x^2 - 4x = 0;$$

d'où

$$x = 0, \quad x = \frac{4}{3}.$$

Prenant $AE = \frac{4}{3}$, on obtient le second point de rencontre, E, de la courbe avec l'axe des x.

Quatrième exemple :

$$y^2 - 4xy + 5x^2 - 2y + 5 = 0,$$

$$y = 2x + 1 \pm \sqrt{-x^2 + 4x - 4} = 2x + 1 \pm (x - 2)\sqrt{-1}.$$

Cette expression de y prouve que $x = 2$ est la seule valeur de x à laquelle puisse correspondre une valeur *reelle* pour y.

Donc la courbe se réduit à *un point;* lequel a pour coordonnées

$$x = 2, \quad y = 5.$$

Et, en effet, l'équation peut, dans ce cas, se mettre sous la forme

$$(y - 2x - 1)^2 + (x - 2)^2 = 0,$$

équation qui ne peut être satisfaite que si l'on pose séparément

$$y - 2x - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x - 2 = 0.$$

Autres exemples relatifs à des ellipses.

$$y^2 + 2xy + 2x^2 - 2y - 5x + 1 = 0,$$

$$4y^2 - 2xy + x^2 - 8y + 4x + 4 = 0,$$

$$4y^2 + 2x^2 + 4y - 4x - 5 = 0,$$

$$y^2 + x^2 - 3y + 2x + 1 = 0,$$

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2x + 4 = 0.$$

HYPERBOLES.

FIG. 146 314. *Premier exemple :*

$$y^2 - 2xy - 3x^2 - 2y + 7x - 1 = 0.$$

On tire de cette équation

$$y = x + 1 \pm \sqrt{4x^2 - 5x + 2}.$$

D'abord, la droite CBI, pour laquelle on a

$$AC = -1, \quad AB = 1,$$

représente le diamètre

$$y' = x + 1.$$

Ensuite, le trinôme $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$ égalé à o donne

$$x = \frac{5}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{-7},$$

racines *imaginaires;* ce qui prouve que CBI est un diamètre *non transverse;* et, comme alors, on peut mettre la valeur de y sous la forme

$$y = x + 1 \pm \sqrt{4\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{7}{16}},$$

il s'ensuit que toute valeur de x, *positive* ou *négative,* donnera constamment pour y des valeurs *réelles.* Ainsi la courbe s'étend indéfiniment au-dessus et au-dessous du diamètre CBI, et dans les deux sens de l'axe des x.

Pour obtenir la plus petite valeur que puisse recevoir le radical, et, par suite, les points de la courbe les plus rapprochés du diamètre, il faut évidemment poser

$$x - \frac{5}{8} = 0, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{5}{8};$$

ce qui réduit le radical à

$$\sqrt{\frac{7}{16}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4}\sqrt{7}.$$

Soit donc prise sur AX une distance $AN = \frac{5}{8}$, et soit élevée du point N, NO parallèle à AY; si, sur cette ligne et à partir du point O, on prend

$$OM = OM' = \frac{1}{4}\sqrt{7} = 0{,}6 \text{ } \textit{à moins de } 0{,}1 \textit{ près},$$

les points M, M' seront les points les plus rapprochés du diamètre, de sorte qu'en menant par ces points les parallèles GG', HH' à CBI, on aura deux droites *au-dessus et au-dessous* desquelles seront situés *tous* les points de la courbe.

Observons maintenant (*voyez* le n° 304) que MM', étant *la plus petite* de toutes les cordes de la courbe, menées parallèlement à AY, est un autre diamètre; son *point milieu* O est, par conséquent, le *centre* de la courbe.

On connaît ainsi l'un des diamètres *transverses,* MM', en *grandeur* et en *direction;* et pour avoir en *grandeur* son CONJUGUÉ, qui a pour *direction* CBI, on pourrait avoir recours au procédé du *numéro précité.*

FIG. 146. Mais il est préférable, pour le tracé exact de la courbe, de fixer la position des *asymptotes*.

Appliquons à l'expression de y la règle du n° 506; il vient

$$y = x + 1 \pm \left(2x - \frac{5}{4}\right):$$

ce qui prouve que les asymptotes se rencontrent sur le diamètre, au point O dont l'abscisse est $x = \frac{5}{8}$,

Il suffit donc d'obtenir un autre point de chacune d'elles. Or, en faisant

$$x = 0,$$

on trouve, pour la première,

$$y = -\frac{1}{4},$$

et, pour la seconde,

$$y = \frac{9}{4},$$

quantités faciles à construire sur l'axe des y.

Ces asymptotes sont représentées par les droites LL', KK', passant respectivement par les points O et R, O et R'.

La courbe peut ensuite, au moyen des points M, M', être construite d'après le procédé du n° 257.

FIG. 147. *Deuxième exemple :*

$$y^2 - 4xy - 4x + 3 = 0.$$

Cette équation donne

$$y = 2x \pm \sqrt{4x^2 + 4x - 3};$$

le diamètre est une droite LAL' passant par l'origine et par un point ayant pour coordonnées,

$$x = 1 = AB, \quad y = 2 = BC.$$

Posant

$$x^2 + x - \frac{3}{4} = 0,$$

on obtient

$$x = \frac{1}{2}, \quad x = -\frac{3}{2}.$$

Donc, si l'on prend

$$AD = \frac{1}{2}, \quad AD' = -\frac{3}{2},$$

et que, par les points D, D', on élève des parallèles DG, D'G' à AY, les points M, M', où elles rencontrent le diamètre LL', appartiennent à la courbe qui, d'ailleurs, est tangente aux droites DG, D'G', et s'étend indéfiniment à droite et à gauche de ces deux parallèles, au-dessus et au-dessous de son diamètre.

Si l'on extrait (n° 306) la racine carrée de la quantité soumise au radical, il vient

$$y = 2x \pm (2x + 1),$$

pour l'équation des deux asymptotes, qui se coupent sur le diamètre au point O dont l'abscisse est

$$x = -\frac{1}{2} = \text{AE}.$$

En séparant ces deux valeurs de y, on trouve

$$y = 4x + 1, \quad y = 1,$$

dont la *seconde* représente une droite IOI' *parallèle à l'axe* des x (résultat conforme à ce qui a été établi au n° 307).

Quant à la *première* valeur, elle donne

$$y = 1 \quad \text{pour} \quad x = 0;$$

ce qui prouve que l'asymptote correspondante est une droite KK', passant par le point O et par le point F, pour lequel on a

$$\text{AF} = 1.$$

La courbe peut maintenant, ainsi que nous l'avons dit pour le premier exemple, être facilement construite.

On pourrait ici, pour la *détermination des asymptotes*, appliquer le procédé du n° 307.

Résolvant, à cet effet, l'équation proposée par rapport à x, on trouve

$$x = \frac{y^2 + 3}{4y + 4},$$

ou, effectuant la division,

$$x = \frac{y}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{y + 1}.$$

De cette expression on déduit :

1°. Que pour

$$y = \pm\infty,$$

l'abscisse de la courbe se confond avec celle de la droite représen-

tée par l'équation

$$x = \frac{y}{4} - \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad y = 4x + 1,$$

en sorte que cette équation est (n°s 244 et 245) celle d'une *asymptote* à la courbe;

2°. Que pour la valeur particulière

$$y = -1,$$

qui donne

$$\frac{1}{y+1} = \infty,$$

l'abscisse de la courbe devient *infinie*, c'est-à-dire que la droite $y = -1$, parallèle à l'axe des x, est la *seconde asymptote* de la courbe donnée.

315. Remarque importante. — Le mode particulier de *détermination des asymptotes*, exposé au n° 307, et dont nous avons fait l'application au second exemple, est fondé sur la propriété démontrée n°s 244 et 245, savoir : que, dans l'hyperbole, *toute droite qui rencontre la courbe à l'infini est nécessairement une asymptote.*

Mais cette propriété n'existant pas pour les courbes de *degré supérieur*, il est indispensable, alors, de rechercher si une droite reconnue pour rencontrer la courbe *à l'infini*, satisfait, en outre, à la condition essentielle et caractéristique de *s'en rapprocher indéfiniment et autant que l'on veut* (n° 243).

Avant de passer à ces sortes de courbes, appliquons cette recherche à l'exemple même que nous venons de traiter, en faisant, pour le moment, abstraction de la propriété susmentionnée.

Reprenons à cet effet l'équation

$$y^2 - 4xy - 4x + 3 = 0,$$

qui, résolue par rapport à x, a donné

$$x = \frac{y}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{y+1};$$

les asymptotes déterminées par le mode précédent sont représentées par les équations

$$x = \frac{y}{4} - \frac{1}{4}, \quad y = -1.$$

Supposons, en premier lieu, y *positif*, et prenons la *différence* entre l'abscisse x de la courbe et l'abscisse x' de la droite

$$x' = \frac{y}{4} - \frac{1}{4};$$

il vient

$$x - x' = \frac{1}{y+1}.$$

Faisant d'abord $y = 0$ dans cette expression, on trouve

$$x - x' = 1;$$

c'est la distance RS qui sépare les points R, S, où la branche de courbe RMm et la droite KK′ rencontrent l'axe des x. Fig. 147.

On voit ensuite que plus y *augmente*, plus la différence $\frac{1}{y+1}$ *diminue;* et les points de la courbe *se rapprochent sans cesse* des points de la droite qui correspondent aux mêmes abscisses; lorsqu'enfin y devient *infini*, la *différence* des deux abscisses devient *nulle*.

Ainsi la branche RMm de la courbe a pour *asymptote* la portion SK de la droite KK′.

Donnons maintenant à y des valeurs *négatives*, mais comprises entre 0 et -1.

La première partie, $\frac{y}{4} - \frac{1}{4}$, de l'abscisse x de la courbe, devient *négative*, en restant toujours, *numériquement*, plus petite que $\frac{1}{2}$.

Quant à la seconde partie, elle est constamment *positive* et plus grande que 1.

Donc la valeur de x est toujours *positive* et *augmente* sans cesse à mesure que y *augmente* dans le sens négatif AY′, jusqu'à ce qu'enfin on suppose $y = -1$; auquel cas x devient égal *à l'infini positif*.

D'où l'on déduit que

$$y = -1$$

est l'équation d'une *asymptote* à la branche Rm' de la courbe.

FIG 147. Continuons de faire croître y dans le sens *négatif* à partir de -1.

Soit fait $y = -(1+\delta)$ dans l'expression de x, ce qui donne

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{\delta}{4} - \frac{1}{\delta};$$

on voit que x est constamment *négatif* pour toute valeur de y comprise entre -1 et l'*infini négatif*.

En posant, par exemple, $\delta = 1 = NN'$, on a

$$x = -\frac{3}{4} - 1 = N'n'.$$

Si, pour le moment, on fait décroître δ depuis 1 jusqu'à 0, il est visible que la valeur générale de x va en *croissant numériquement* sans cesser d'être *négative*, et qu'elle croît *indéfiniment*, devenant égale à l'*infini négatif* pour $\delta = 0$.

Donc la courbe remontant vers la droite,

$$y = -1,$$

s'en rapproche continuellement et autant que l'on veut; ce qui prouve que cette droite est *asymptote* à la branche $M'n'm''$.

Revenant ensuite au point n', et prenant la *différence* entre l'abscisse générale de la courbe et l'abscisse de la droite

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{\delta}{4}.$$

différence qui est égale à $-\frac{1}{\delta}$, on reconnaît qu'elle *diminue* sans cesse et indéfiniment à mesure que δ *augmente*, et qu'elle devient 0 pour δ égal à l'*infini*.

Donc $x = \frac{y}{4} - \frac{1}{4}$ est l'équation d'une droite *asymptote* à la branche $n'M'm'''$.

Il est ainsi complétement établi que la droite

$$y = -1$$

est *asymptote* aux deux branches Rm', $n'm''$, et que la

droite

$$x = \frac{y}{4} - \frac{1}{4}$$

est *asymptote* aux deux branches Mm, $n'M'm'''$.

Autres exemples relatifs à l'hyperbole.

$$y^2 - 4xy + 2x^2 + 6y - 9x + 2 = 0,$$

$$y^2 - 2xy - 2 = 0,$$

$$y^2 - x^2 + x = 0,$$

$$2xy - x + 1 = 0,$$

$$y^2 - 2xy + 2y + 4x - 8 = 0.$$

Ce dernier exemple présente une circonstance remarquable lorsqu'on résout l'équation par rapport à la variable x.

On trouve

$$x = \frac{y^2 + 2y - 8}{2y - 4},$$

ou, effectuant la division,

$$x = \frac{y}{2} + 2;$$

d'où il semblerait résulter que la courbe se réduit à *une seule ligne droite.*

Mais observons que, si la division s'est faite exactement, c'est que le numérateur peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{y}{2} + 2\right)(2y - 4).$$

Ainsi la valeur de x devient

$$x = \frac{\left(\frac{y}{2} + 2\right)(2y - 4)}{2y - 4};$$

d'où, chassant le dénominateur et transposant,

$$(2y - 4)\left(x - \frac{y}{2} - 2\right) = 0,$$

équation qui peut être satisfaite par l'une des deux conditions,

$$2y - 4 = 0, \quad \text{d'où} \quad y = 2;$$

$$x - \frac{y}{2} - 2 = 0, \quad \text{d'où} \quad y = 2x - 4.$$

Donc, la courbe se réduit véritablement au *système de deux droites* dont l'une avait disparu par l'effet de la division.

§ II. — Application de la méthode de discussion par la séparation des variables a des équations de degré supérieur; et discussion de quelques équations polaires.

316. *Observations préliminaires.* — 1°. Toutes les fois qu'on se propose de déterminer le *lieu géométrique* d'une équation à deux variables, la détermination des *coefficients d'inclinaison des tangentes* et celle des *asymptotes*, si le *lieu cherché* est susceptible d'en avoir, sont deux questions d'un usage fréquent, parce que ces droites, une fois construites, donnent presque toujours le *sentiment* de la forme et des diverses circonstances du cours de la courbe qu'on a en vue de déterminer.

2°. S'il arrive que l'expression de y en x, ou de x en y, renferme un radical du second degré, on est conduit à la construction d'*un diamètre*, parce qu'il facilite la détermination des différents points de la courbe; il suffit, en effet, pour chaque valeur donnée à l'abscisse, par exemple, de *porter* sur une *parallèle* à l'axe des y, de part et d'autre de ce diamètre, une distance égale à la valeur numérique du radical.

Les diamètres, comme les asymptotes, peuvent être, d'ailleurs, *rectilignes* ou *curvilignes;* mais dans ce dernier cas, ce sont ordinairement des lignes plus faciles à construire que la courbe elle-même.

3°. Les courbes peuvent jouir de la propriété d'avoir *un* ou *plusieurs* CENTRES.

En donnant (n° 130) la définition du *centre*, nous avons fait voir que son caractère analytique consiste en ce que la courbe étant rapportée à ce point, comme *origine* des coordonnées, son équation est telle que, si les quantités $+x'$, $+y'$, la vérifient, les *mêmes* quantités prises en *signe contraire*, $-x'$, $-y'$, la vérifient également; ce qui revient à dire que l'équation reste la même lorsqu'on change $+x$ et $+y$ en $-x$ et en $-y$.

D'après cela, quand il s'agit d'une courbe de degré *pair*,

la somme des exposants des variables dans chaque terme de son équation doit être un *nombre pair;* et le contraire doit avoir lieu si la courbe est de degré *impair.*

Toutes les fois que cette condition n'est pas remplie, on peut affirmer que le point pris pour *origine* n'est pas un *centre* de la courbe.

Mais il reste à savoir si la courbe est douée d'un *centre* ou même de plusieurs.

Voici, à cet effet, le moyen à employer.

Remplacez, dans l'équation, x et y par $x + a$ et $y + b$; puis, *déterminez* les quantités a, b, de manière à faire disparaître les termes dont le degré n'est pas de *même parité* que celui de l'équation (c'est-à-dire de degré *pair* si l'équation est de degré pair ou *vice versâ*).

Comme il n'y a que *deux indéterminées a* et b, on ne peut poser que *deux équations* de condition; mais si la courbe a réellement un *centre,* il arrive nécessairement que les valeurs de a, b, ainsi obtenues, font disparaître à la fois tous les termes qui empêcheraient la condition *caractéristique* d'être satisfaite.

Les deux équations de condition pouvant être de degré *supérieur au premier*, il s'ensuit que certaines courbes sont susceptibles d'avoir *plusieurs centres.* Quelquefois même elles en ont *une infinité* (*), ce qu'on reconnaît au caractère $\frac{0}{0}$, obtenu pour les valeurs de a et de b.

Enfin, la courbe *n'a pas de centre* si l'on obtient des valeurs *imaginaires* ou *infinies.*

Ces notions générales étant établies, nous passons à la discussion d'équations particulières.

317. *Premier exemple :* FIG. 148.

$$y^2 - x^2y + 2xy - x^3 + 2y + 2x = 0. \quad (1)$$

Remarquons d'abord que cette équation étant privée du terme

(*) Ainsi, par exemple, un système de *deux droites parallèles* est doué d'*une infinité de centres*, comme on le reconnaît en remontant à la définition géométrique donnée au n° 130.

FIG. 148

indépendant de x et de y, est satisfaite par

$$x = 0, \quad y = 0;$$

ainsi l'*origine* des coordonnées que nous supposerons, pour plus de simplicité, *rectangulaires*, est un point de la courbe.

On déduit de cette équation

$$(2) \qquad y = \frac{x^2 - 2x - 2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^4 + 4},$$

expression qui se compose de deux parties principales, l'une *rationnelle*, l'autre *irrationnelle* et précédée du double signe $\pm$; d'où il résulte que l'équation

$$y' = \frac{x^2 - 2x - 2}{2}$$

est celle d'un *diamètre* de la courbe.

Ramenons cette équation à la forme ordinaire, et supprimons l'*accent;* il vient

$$(3) \qquad x^2 - 2y - 2x - 2 = 0;$$

d'où

$$x = 1 \pm \sqrt{2y + 3},$$

équation d'une PARABOLE ayant elle-même pour *diamètre* la droite

$$x = 1,$$

c'est-à-dire une *parallèle* FPF' à AY, menée à la distance AP = 1 de l'origine, et rencontrée par la parabole au point pour lequel on a

$$2y + 3 = 0, \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{3}{2} = \text{AD};$$

en sorte que si par le point D on tire la droite DD' qui rencontre FF' en E, la parabole sera *tangente* en ce point à cette droite.

Il est à remarquer ici que les axes étant supposés *rectangulaires*, les droites FF' et DD' sont les *axes principaux* de la parabole; le point E en est le *sommet*.

En posant successivement dans l'équation (3)

$$y = 0, \quad x = 0,$$

on trouve

$$x = 1 \pm \sqrt{3} \quad \text{et} \quad y = -1;$$

ce qui donne *trois* autres points Q, Q' et B' par lesquels cette courbe *auxiliaire* doit passer.

Elle affecte ainsi la forme

$$RQEB'Q'R'.$$

Cherchons maintenant quelques points de la courbe qu'il s'agit de construire.

D'abord, l'origine A étant un de ces points, si l'on prend, à partir du *diamètre*,

$$B'H = B'A,$$

le point H lui appartient également; et c'est ce que donne, en effet, l'hypothèse $x = 0$, introduite dans l'équation (1); il vient

$$y^2 + 2y = 0;$$

d'où

$$y = 0 \quad \text{et} \quad y = -2.$$

Faisons ensuite

$$y = 0;$$

on obtient

$$-x^2 + 2x = 0;$$

d'où

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \pm\sqrt{2} = \pm 1{,}4:$$

ce qui donne, outre l'origine, les points G', G.

Soit encore

$$x = 1 = AP;$$

le radical de l'expression (2) devient

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{5} = \pm 1{,}1, \quad \textit{à moins de } 0{,}1 \textit{ près}.$$

Portant sur la droite FF', à partir du point E, les deux distances EE', EE'', on a deux nouveaux points, E', E'', appartenant à la courbe.

Soit enfin

$$x = 2 = AP';$$

la valeur du radical devient

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{20} = \pm\sqrt{5} = \pm 2{,}2, \textit{ à moins de } 0{,}1 \textit{ près}:$$

ce qui donne les points K et K'.

Ces constructions donnent déjà une première idée de la courbe qui se trouve composée de *quatre* branches s'étendant au-dessus et au-dessous de la *parabole-diamètre*, et toutes les quatre indéfiniment dans tous les sens, puisque l'expression (2) de y est toujours *réelle*, quel que soit x.

FIG. 148

Voyons actuellement si cette courbe a des *asymptotes*.

Le radical $\sqrt{x^4+4}$ revenant à $x^2\sqrt{1+\frac{4}{x^4}}$, si l'on néglige la fraction $\frac{4}{x^4}$, la valeur de y se réduit à

$$y''=\frac{x^2-2x-2}{2}\pm\frac{x^2}{2}; \tag{4}$$

et l'on prouverait, comme on l'a fait au n° **306**, que les *lieux géométriques* exprimés par cette double équation sont des *asymptotes* à la courbe cherchée.

Occupons-nous de leur construction.

Supprimant l'*accent* et séparant les deux équations, on trouve, d'abord pour le signe *inférieur*,

$$y=-x-1,$$

puis pour le signe *supérieur*,

$$y=x^2-x-1.$$

La première équation représente la droite L'B'BL, pour laquelle on a

$$AB'=-1,\quad AB=-1;$$

et ce qu'il y a de particulier, c'est que cette droite est *tangente* en B' à la *parabole-diamètre*.

En effet, si l'on applique la méthode des dérivées (n° 102) à l'équation (3), on trouve pour le *coefficient d'inclinaison* de la tangente en un point quelconque x', y',

$$a=-\frac{2x'-2}{-2}=x'-1.$$

Or, si l'on pose

$$x'=0,$$

valeur qui correspond au point B' de la parabole, on trouve

$$a=-1,$$

qui exprime en même temps le *coefficient d'inclinaison* de la droite

$$y=-x-1.$$

La seconde équation résolue par rapport à x donne

$$x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4y+5},$$

qui représente une AUTRE PARABOLE ayant pour *premier axe* la

parallèle NN′ à AY, menée à la distance $AC = \frac{1}{2}$, et pour ordonnée de son point d'intersection avec cet axe,

$$y = -\frac{5}{4} = AC';$$

en sorte que le *second axe* est C′IC″

D'ailleurs, comme $x = 0$ donne $y = -1$ dans l'équation de la première parabole et dans l'équation de la seconde, il s'ensuit qu'elles passent toutes deux par le même point B′.

Il est alors facile de reconnaître la position de cette seconde parabole, qui est représentée par la courbe S′B′IVS.

Celle-ci est *asymptote* à la portion U′AE′GKU de la courbe cherchée, et la droite LL′ est *asymptote* à l'autre portion H′G′HE″K′H″.

N. B. — Il existe, pour cette seconde partie de la courbe, une espèce d'*inflexion* au point H qui a pour coordonnées

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = -2,$$

inflexion qu'il est important de caractériser.

Formons, à cet effet, le *coefficient général d'inclinaison* d'après l'équation (1); on obtient (n° 192)

$$a = \frac{2x'y' - 2y' + 3x'^2 - 2}{2y' - x'^2 + 2x' + 2};$$

et si l'on pose

$$x' = 0,$$

il en résulte

$$a = \frac{-(2y' + 2)}{2y' + 2} = -1:$$

ce qui prouve que la tangente THT′ au point H est *parallèle à l'asymptote* dont l'équation est

$$y = -x - 1.$$

On justifie ainsi la forme donnée en ce point à la branche H′HH″.

Quant à la première branche U′AE′GKU, on voit qu'elle doit avoir un point où la tangente est *parallèle à l'axe des x*; et, pour l'obtenir, il faut égaler à zéro le numérateur de a; ce qui donne, après la suppression des *accents*,

$$2xy - 2y + 3x^2 - 2 = 0,$$

équation qu'il suffirait de combiner avec l'équation de la courbe

$$y^2 - x^2y + 2xy - x^3 + 2y + 2x = 0.$$

Comme y n'entre qu'au premier degré dans la première, l'élimination de cette inconnue est facile, et l'on parvient ainsi à une équation du *cinquième degré* en x dont le dernier terme est *négatif*, et qui a, par conséquent, au moins une racine *positive*. Nous laissons ce calcul à exécuter.

FIG. 149. *Deuxième exemple :*

$$x^2y + 2xy - x^2 + y + 0. \tag{1}$$

En résolvant cette équation par rapport à x, on a

$$x = -\frac{y}{y-1} \pm \frac{1}{y-1}\cdot\sqrt{y};$$

expression qui montre que la courbe est située tout entière *au-dessus* de l'axe des x, puisque y *négatif* donne pour x des valeurs *imaginaires*.

Posant

$$x' = -\frac{y}{y-1},$$

pour avoir un des diamètres, et chassant le dénominateur, puis, supprimant l'*accent*, on arrive à l'équation

$$xy - x + y = 0,$$

qui est celle d'une hyperbole *équilatère* (les axes étant supposés *rectangulaires*), rapportée à un système de coordonnées *parallèles* à ses asymptotes (n° 307, 3°), et que l'on pourrait construire facilement.

Mais on peut se dispenser d'exécuter cette construction sur la figure, parce que la forme et la position de la courbe se détermineront plus simplement par les considérations suivantes :

L'équation résolue par rapport à y donne

$$y = \frac{x^2}{(x+1)^2} = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2,$$

ou, si l'on effectue la division,

$$y = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^2. \tag{2}$$

Cette dernière forme met immédiatement en évidence deux asymptotes, savoir :

$$y = 1, \quad \text{et} \quad x = -1.$$

Car x étant supposé égal à l'*infini positif* ou à l'*infini négatif*,

$\frac{1}{x+1}$ devient nul, et la valeur de y se réduit à

$$y = 1.$$

D'un autre côté, si l'on pose

$$x + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad x = -1,$$

la valeur de y devient *infinie;* d'où l'on voit que les droites

$$y = 1, \quad x = -1,$$

qui peuvent être représentées par les droites B'BB'', CC', respectivement *parallèles* aux axes AX, AY, et pour lesquelles on a

$$AB = 1, \quad AC = -1,$$

jouissent toutes deux de la propriété de ne pouvoir rencontrer la courbe qu'à l'*infini*.

Il reste à prouver, conformément à la remarque du n° 315, qu'elles satisfont à la condition essentielle de *se rapprocher indéfiniment de la courbe*.

Reprenons, à cet effet, l'équation (2), et faisons d'abord croître x depuis 0 jusqu'à $+\infty$.

Pour $x = 0$, on trouve

$$y = 0;$$

ce qu'indique, d'ailleurs, l'équation (1), qui fait voir, en outre, que la courbe est *tangente* en A à l'axe des x, puisque de cette équation l'on tire, pour $y = 0$,

$$x^2 = 0.$$

Si l'on donne à x des valeurs de *plus* en *plus grandes*, $\frac{1}{x+1}$ *diminue de plus en plus*, et, par suite, $1 - \frac{1}{x+1}$ *ou* y *augmente continuellement* sans toutefois pouvoir dépasser 1; et, quand on suppose enfin

$$x = \infty,$$

$\frac{1}{x+1}$ devient nul, et y se réduit à l'*unité*.

Donc *une des branches* de la courbe, en partant de l'origine A, *se rapproche sans cesse et autant que l'on veut* de la partie BB' de la droite $y = 1$.

Maintenant, faisons croître x dans le sens *négatif*.

Si l'on donne d'abord à x des valeurs comprises depuis 0 jusqu'à -1 et croissant *numériquement*, $x + 1$ se *rapprochera* de plus en plus de 0; donc $\frac{1}{x+1}$, en restant *positif*, deviendra de

FIG. 149. *plus en plus grand* et se *rapprochera continuellement* de l'*infini*; il en sera de même de y, et lorsqu'on supposera

$$x = -1,$$

la valeur de y deviendra *infinie*; ce qui prouve qu'*une seconde branche* de la courbe, partant du point A, va en se rapprochant sans cesse de la droite CC′ qu'elle ne peut rencontrer qu'à l'*infini*.

Ces deux branches se réunissant au point A, et devant être tangentes à l'axe des x, constituent ainsi une première partie de la courbe cherchée, partie qui est représentée par la ligne continue D′AD.

On démontrerait par des raisonnements tout à fait analogues qu'il existe, à la gauche de CC′, *une seconde partie de la courbe* dont les deux branches réunies en une seule ont pour asymptotes la même droite CC′, ou $x = -1$, et la portion BB″ de la droite $y = 1$.

EGE′ figure cette seconde partie de la courbe.

FIG. 150. *Troisième exemple :*

(1) $\qquad y^3 - 3axy + x^3 = 0$ [*Folium de* DESCARTES].

Cette équation ne peut être résolue directement ni par rapport à y, ni par rapport à x; mais la transformation des coordonnées fournit toujours, pour une équation du troisième degré, un moyen de faire disparaître la troisième puissance de l'une des variables, et permet ainsi d'exprimer celle-ci en une fonction *explicite* de l'autre.

En effet, si en supposant les axes *rectangulaires*, on a recours aux formules

$$y = x \sin\alpha + y \cos\alpha,$$

$$x = x \cos\alpha - y \sin\alpha,$$

et qu'on remplace dans l'équation (1) les anciennes coordonnées par leurs valeurs en fonctions des nouvelles, le coefficient de y, par exemple, a pour expression

$$\cos^3\alpha - \sin^3\alpha.$$

Égalant à *zéro* ce coefficient, et divisant par $\cos^3\alpha$, on obtient

$$\operatorname{tang}^3 1 = 1, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang}\alpha = 1, \quad \sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Ces valeurs de $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, reportées dans les formules ci-

dessus, donnent

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x+y),$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(x-y).$$

Par suite, l'équation (1) devient

$$\frac{1}{4}\sqrt{2}\,(x+y)^3 - \frac{3}{2}a\,(x^2-y^2) + \frac{1}{4}\sqrt{2}\,(x-y)^3 = 0,$$

ou bien, toute réduction faite,

$$(2) \qquad 3\left(2x + a\sqrt{2}\right)y^2 + 2x^3 - 3a\sqrt{2}.x^2 = 0.$$

Telle est l'équation de la courbe rapportée au nouveau système d'axes AX′, AY′, formant avec les premiers des angles de 45 degrés.

Cela posé, on déduit de l'équation (2)

$$(3) \qquad y = \pm\sqrt{\frac{3a\sqrt{2}.x^2 - 2x^3}{3\left(a\sqrt{2} + 2x\right)}};$$

et l'on voit déjà que la courbe est *symétrique* par rapport à l'axe AX′, qui peut être considéré comme *un diamètre principal*.

Égalant à *zéro* le numérateur sous le radical, on tire de l'équation résultante

$$x^2 = 0, \quad \text{et} \quad x = \frac{3a}{2}\sqrt{2} = a\sqrt{2} + \frac{1}{2}a\sqrt{2}.$$

Si donc, après avoir construit sur AD $= a$, un carré ADEF, ce qui donne

$$AE = a\sqrt{2},$$

on porte sur AX′ une distance AB égale à AE $+ \frac{1}{2}$ AE, la courbe sera limitée dans le sens positif par la droite IBI′ menée parallèlement a AY′, puisque toute valeur de x supérieure à $\frac{3a}{2}\sqrt{2}$ donnerait des valeurs *imaginaires* pour y.

Mais en attribuant à x des valeurs comprises entre $\frac{3a}{2}\sqrt{2}$ et 0, on aurait une double valeur *réelle* pour y; en sorte que la courbe affecte la forme d'une *boucle* passant par le point A, origine des coordonnées.

D'un autre côté, si l'on pose

$$a\sqrt{2} + 2x = 0, \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{1}{2}a\sqrt{2},$$

FIG. 150. et qu'en prenant

$$AG = -\frac{1}{2}a\sqrt{2} = -\frac{1}{2}AE,$$

on mène la droite LGL' *parallèle* à AY', cette droite est une *asymptote*.

Car, d'abord, elle rencontre la courbe à l'*infini*; et de plus, comme on peut mettre l'expression (3) sous la forme

$$y = \pm x\sqrt{-\frac{1}{3} + \frac{2a\sqrt{2}}{3\left(x + \frac{a}{2}\sqrt{2}\right)}},$$

on reconnaît que, si x croît *négativement* depuis o jusqu'à $-\frac{a}{2}\sqrt{2}$, la quantité soumise au radical croît *indéfiniment*; il en est, par suite, de même pour y.

Ainsi la portion BMA de la courbe se prolonge au delà du point A, en se rapprochant de plus en plus et indéfiniment de la partie GL de la droite LL', tandis que la portion BM'A se prolonge du côté de GL'.

La courbe affecte donc enfin la forme CAMBM'AC'.

Nous ne pousserons pas plus loin la discussion des équations de *degré supérieur*; elle exigerait, pour être établie complétement, la connaissance de principes qui sont plus particulièrement du ressort de l'*analyse infinitésimale*.

On peut, du reste, consulter à ce sujet l'ouvrage de CRAMER, ayant pour titre : *Introduction à l'Analyse des lignes courbes*.

DISCUSSION DE QUELQUES ÉQUATIONS POLAIRES.

FIG. 151. **518.** *Premier exemple :*

$$\rho = a.\cos\varphi \quad (a \text{ étant une ligne } \textit{donnée}).$$

Afin de faciliter la construction des résultats, nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, qu'on ait décrit du point O pris pour *pôle*, comme centre, et avec un rayon égal à 1, une circonférence sur laquelle on devra porter les arcs qui mesurent l'angle φ.

Cela posé, soit $OA = a$ et donnons à l'angle φ une série de valeurs :

Pour $\varphi = 0$, ce qui suppose le rayon vecteur couché d'abord

sur OX, on a

$$\cos\varphi = 1, \quad \text{d'où} \quad \rho = a;$$

ainsi le point A appartient à la courbe.

Pour $\varphi = 30° = \text{LOX}$, on a

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

donc

$$\rho = \frac{1}{2}a\sqrt{3} = 0{,}8.a = \text{OB} < \text{OA}.$$

Pour $\varphi = 45° = \text{L'OX}$, on a

$$\sin\varphi = \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

donc

$$\rho = \frac{1}{2}a\sqrt{2} = 0{,}7.a = \text{OC} < \text{OB}.$$

Pour $\varphi = 60° = \text{L''OX}$, on a

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}; \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{1}{2}a = \text{OD} < \text{OC}.$$

Soit enfin $\varphi = 90°$; il en résulte

$$\cos\varphi = 0, \quad \text{et} \quad \rho = 0:$$

ce qui prouve que la courbe doit passer par le point O.

Comme on a d'ailleurs

$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi,$$

il s'ensuit que la courbe est *symétrique* par rapport à l'*axe polaire* OX, et peut être représentée par la ligne continue ABCDOC'A.

Si l'on transporte le *pôle* O au point O', milieu de OA, et que l'on désigne par ρ' et φ' les nouvelles coordonnées polaires, telles que O'B, BO'X, on a, pour exécuter cette transformation de coordonnées, la relation

$$\rho'^2 = \rho^2 + \frac{1}{4}a^2 - \rho.a.\cos\varphi,$$

ou, remplaçant ρ par sa valeur $a\cos\varphi$,

$$\rho'^2 = a^2\cos^2\varphi + \frac{1}{4}a^2 - a^2\cos^2\varphi,$$

ou, réduisant,

$$\rho'^2 = \frac{a^2}{4}; \quad \text{d'où} \quad \rho' = \frac{a}{2},$$

résultat indépendant de l'angle φ.

FIG. 151. Ce qui démontre que la courbe cherchée est une *circonférence de cercle* décrite sur OA comme diamètre.

Et en effet, si dans l'équation

$$\rho = a \cos \varphi,$$

on remplace ρ et $\cos \varphi$ par les expressions

$$\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{et} \quad \frac{x}{\rho} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

qui (n° 279) servent à transformer une équation *polaire* en une équation entre coordonnées *orthogonales*, il vient

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

ou, simplifiant,

$$x^2 + y^2 - ax = 0;$$

équation d'un cercle rapportée à l'une des extrémités d'un diamètre, comme origine (*voyez* le n° 73).

FIG. 152. *Deuxième exemple :*

$$\rho = \frac{bc}{b \sin \varphi + c \cos \varphi},$$

b et c désignant deux droites données de longueur.

En posant d'abord

$$\varphi = 0, \quad \text{d'où} \quad \sin \varphi = 0, \quad \cos \varphi = 1,$$

on trouve

$$\rho = \frac{bc}{c} = b = \text{OB}.$$

Soit encore

$$\varphi = 90^\circ, \quad \text{d'où} \quad \sin \varphi = 1, \quad \cos \varphi = 0,$$

il en résulte

$$\rho = c = \text{OC}.$$

Tant que l'angle φ est compris entre 0 et 90 degrés, $\sin \varphi$ augmente et $\cos \varphi$ diminue; en sorte qu'il n'est pas possible de savoir, à l'inspection de la valeur de ρ, quand son dénominateur augmente ou diminue.

Mais si l'on met $b \sin \varphi + c \cos \varphi$ sous la forme

$$b \cos \varphi \left(\text{tang } \varphi + \frac{c}{b} \right),$$

on voit qu'en donnant à φ une valeur particulière, φ' ou LOX, telle que l'on ait

$$\text{tang}\,\varphi' = -\frac{c}{b},\quad \text{d'où}\quad \sin\varphi' = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}},\quad \cos\varphi' = -\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

on obtiendra pour ρ une longueur *infinie;* d'où il suit que la ligne cherchée est rencontrée par la droite LOL′ en deux points situés à l'*infini*.

Prenons maintenant un point quelconque M du *lieu géométrique demandé*, et proposons-nous d'évaluer la distance MP de ce point à la droite LL′.

On a

$$\text{MP} = \text{OM}.\sin\text{MOP} = \frac{bc}{b\sin\varphi + c\cos\varphi}\cdot\sin\text{MOP},$$

$$\sin\text{MOP} = \sin\text{LOM} = \sin(\varphi' - \varphi) = \sin\varphi'\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi',$$

d'où, remplaçant $\sin\varphi'$, $\cos\varphi'$ par leurs valeurs,

$$\text{MP} = \frac{bc}{b\sin\varphi + c\cos\varphi}\left(\frac{c\cos\varphi + b\sin\varphi}{\sqrt{b^2+c^2}}\right),$$

ou, supprimant le facteur commun,

$$\text{MP} = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

expression indépendante de la variable φ : ce qui démontre que le *lieu géométrique cherché* a tous ses points à une *distance constante* de la droite LL′, ou, en d'autres termes, est *une parallèle à cette droite*.

Et, en effet, l'équation de la droite BC, en coordonnées *orthogonales*, est (n° 55)

$$cx + by = bc;$$

et si l'on y remplace x et y par leurs valeurs $\rho\cos\varphi$, $\rho\sin\varphi$, exprimées (n° 278) en coordonnées polaires, il vient

$$\rho = \frac{bc}{b\sin\varphi + c\cos\varphi},$$

c'est-à-dire l'équation que l'on avait à discuter.

Troisième exemple : FIG. 153.

$$\rho = \frac{1}{1 + 2\sin\varphi}.$$

Décrivons du *pôle* O comme centre, avec le rayon OA = 1, une

FIG. 153. circonférence de cercle, et menons par ce point les axes rectangulaires XX′, YY′, ainsi que les bissectrices LL′, L″L‴, des angles YOX, YOX′.

Cela fait, calculons et construisons les valeurs de ρ qui correspondent aux angles 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, etc. :

$\varphi = 0, \quad \sin\varphi = 0; \rho = 1 = OA;$

$\varphi = 45°, \sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}; \rho = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 = 0,4 = OM;$

$\varphi = 90°, \sin\varphi = 1; \rho = \frac{1}{3} = OC$, *tiers* de OA;

$\varphi = 135°, \sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}; \rho = \sqrt{2} - 1 = 0,4 = OM' = OM;$

$\varphi = 180°, \sin\varphi = 0; \rho = 1 = OB;$

$\varphi = 225°, \sin\varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}; \rho = \frac{1}{1-\sqrt{2}} = -(\sqrt{2}+1) = -2,4;$

valeur *négative* qui (n° 285) doit être portée sur le *prolongement de* OL′, en M″; de sorte que l'on ait $OM'' = 2,4$;

$\varphi = 270°, \quad \sin\varphi = -1; \quad \rho = \frac{1}{1-2} = -1,$

valeur qu'il faut également porter en *sens contraire de* OY′, ce qui donne OC′;

$\varphi = 315°, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \rho = -2,4 = OM'''$;

enfin,

$\varphi = 360°, \quad \sin\varphi = 0, \quad \rho = 1 = OA.$

Ces différents résultats démontrent que la courbe cherchée doit passer, 1° par les points A, M, C, M′, B; 2° par les points M″, C′, M‴, et qu'ainsi elle se compose de *deux branches opposées*.

De plus, ces branches *s'étendent indéfiniment à droite et à gauche* de AY.

Car la valeur de ρ devenant *infinie* quand on fait

$$\sin\varphi = -\frac{1}{2} = \sin 210° = \sin 330° = -\sin 30°,$$

il en résulte que, si par le point O on mène deux droites, KK′, ll′, formant avec l'*axe polaire* OX, l'une *au-dessus* et l'autre *au-dessous* de ces axes, des angles de 30 degrés, ces droites rencontreront la courbe à l'*infini*.

Si maintenant on fait, dans l'équation donnée,

$$\varphi = 270° - \varphi', \quad \text{d'où} \quad \sin\varphi = -\cos\varphi',$$

elle se change en celle-ci,

$$\rho = \frac{1}{1 - 2\cos\varphi'},$$

qui (n° 287) n'est autre que l'équation d'une hyperbole dont l'un des foyers est pris pour *pôle;* le *demi-paramètre est* $p = 1 = OA$, et l'*excentricité est* $e = 2$.

Pour retrouver l'équation de la courbe en *coordonnées orthogonales*, il suffit (n° 279) de poser

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

et l'équation polaire primitive devient

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} + 2y},$$

ou, après qu'on a supprimé le facteur commun $\sqrt{x^2 + y^2}$, chassé le dénominateur, fait évanouir les radicaux et ordonné,

$$3y^2 - x^2 - 4y + 1 = 0,$$

équation que l'on peut ramener à la forme ordinaire en changeant d'abord y en $y + \frac{2}{3}$, ce qui donne

$$3y^2 - x^2 = \frac{1}{3},$$

puis (n° 140) en multipliant par $\frac{1}{3 \times 3}$; et l'on trouve enfin

$$\frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{9}x^2 = \frac{1}{27}.$$

Sous cette forme, on reconnaît :

1°. Que l'hyperbole est rapportée à son axe *transverse* comme axe des y;

2°. Qu'elle a son centre au point O′ dont l'ordonnée est $\frac{2}{3}$ ou OO′;

3°. Que le *demi-axe transverse* ou $A = \frac{1}{3}$ et que le *demi-axe non transverse* ou $B = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

On déduit de là :

Pour le *demi-paramètre,*

$$\frac{B^2}{A} = 1 = OA,$$

FIG. 153. et pour le *coefficient d'inclinaison* des asymptotes par rapport à l'axe AY,

$$\frac{B}{A} = \pm\sqrt{3}.$$

Désignant cette inclinaison par α, et l'angle *complémentaire* par α', on a

$$\text{tang}\,\alpha = \pm\sqrt{3}, \quad \cos\alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{3+1}} = \pm\frac{1}{2},$$

et, par suite,

$$\sin\alpha' = \pm\frac{1}{2}.$$

En conséquence, si l'on mène par le point O' deux droites qui fassent, avec l'*axe polaire primitif* OA, les angles dont le sinus soit égal à $\pm\frac{1}{2}$, on obtiendra les deux asymptotes, auxquelles les droites II', KK' qu'on avait trouvées dans la discussion de l'équation polaire, sont *parallèles*.

Tous ces résultats sont en parfaite concordance.

Les exemples de discussion que nous venons de traiter, ne peuvent donner qu'une idée très-imparfaite de la méthode de discussion des *équations polaires* en général, parce que la détermination de certains *points* et de certaines *droites* remarquables exige souvent la recherche des *dérivées* de différents ordres des *fonctions circulaires*, question qui dépend plus particulièrement de ce que l'on nomme l'analyse *infinitésimale* ou *transcendante;* mais ces exemples suffisent pour mettre au fait de la marche à suivre, tant qu'il ne s'agit que de *courbes du second degré*.

CHAPITRE IX.

COMPLÉMENT ET APPLICATIONS DE LA THÉORIE GÉNÉRALE DES COURBES DU SECOND DEGRÉ.

§ I. — NOMBRE ET NATURE DES CONDITIONS SERVANT A LA DÉTERMINATION DES COURBES DU SECOND DEGRÉ. — SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES POUR LA CONSTRUCTION DE CES COURBES D'APRÈS DES CONDITIONS DONNÉES. — PROPRIÉTÉ COMMUNE AUX TROIS COURBES.

319. On a vu (n°s 56 et 96) que l'on peut se proposer de déterminer une *ligne droite* ou un *cercle* d'après certaines conditions dont le nombre est fixé.

La même nature de question s'applique aux *trois courbes du second degré*; les coefficients de leurs équations doivent alors être regardés comme des *constantes indéterminées* dont les valeurs dépendent des conditions imposées à la courbe.

Or, en divisant l'équation générale de ces courbes par le terme indépendant des variables, on la ramène à la forme

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + 1 = 0. \qquad (1)$$

Cette équation renfermant *cinq coefficients*, il s'ensuit qu'on peut, généralement, assujettir la courbe à *cinq conditions* différentes; et ces conditions exprimées algébriquement servent à déterminer les coefficients a, b, c, d, e.

Soit, par exemple, proposé de *faire passer une courbe du second degré par cinq points*.

Appelons $[x', y']$, $[x'', y'']$, $[x''', y''']$, $[x^{IV}, y^{IV}]$, $[x^{V}, y^{V}]$ les coordonnées de ces points.

En substituant successivement dans l'équation (1) chacun de ces *cinq* systèmes, on obtiendra *cinq* équations du premier degré en a, b, c, d, e, lesquelles, étant résolues, donneront les valeurs de ces coefficients; et en rapportant ces valeurs dans l'équation (1), on aura celle de la courbe assujettie à passer par les cinq points donnés.

Cette courbe sera d'ailleurs une *ellipse*, une *hyperbole* ou une *parabole*, suivant que l'on aura (n°s 159 et 301)

entre les coefficients a, b, c, des trois premiers termes,

$$b^2 - 4ac < 0, \quad b^2 - 4ac > 0, \quad b^2 - 4ac = 0.$$

Il pourra même se faire que la courbe se réduise à l'une des *variétés;* c'est ce qui arriverait, par exemple, dans le cas où, sur les CINQ points, on en donnerait TROIS *en ligne droite.*

L'équation du *lieu géométrique* passant par les *cinq* points, ne saurait appartenir, alors, qu'à une droite, ou à un système de deux droites.

Car la combinaison des équations d'une courbe du second degré et d'une ligne droite, donnant lieu à une équation de second degré, il s'ensuit que ces deux lignes ne peuvent avoir, *au plus*, que *deux* points communs.

On observera encore que, si la courbe cherchée doit être une PARABOLE, *quatre* points suffisent pour la déterminer; puisqu'on a déjà entre les coefficients de l'équation la relation particulière

$$b^2 - 4ac = 0.$$

Toutefois, comme cette équation est du *second degré,* tandis que les autres sont du premier degré, on devra généralement obtenir *deux paraboles* pour réponse à la question.

320. Au lieu de donner des points de la courbe, on peut *supposer connues de position des droites auxquelles la courbe soit assujettie à être tangente.*

Si, par exemple, on veut que la courbe soit tangente à une droite

$$y = mx + n,$$

m et n étant des quantités connues, il suffit de combiner cette équation avec l'équation (1), et, après avoir formé une équation du second degré en x, d'écrire (n°s 98 et 101) que les deux racines de cette équation sont *égales.*

On obtient ainsi *une relation* entre les indéterminées a, b, c, d, e, et les quantités connues m, n.

Même raisonnement pour une seconde, une troisième, etc.. droite à laquelle la courbe devrait être tangente.

La connaissance d'une *asymptote* équivaut à celle d'*une tangente* et de *son point de contact,* puisque (n° 244) les

asymptotes sont des tangentes à l'infini. Ainsi, il suffit de *trois* autres conditions pour déterminer la courbe.

321. Si la courbe doit avoir un *centre*, et que l'on donne la position de ce point, *trois* autres conditions sont encore suffisantes pour la détermination de la courbe.

En effet, comme rien n'empêche de prendre ce point pour origine, l'équation est alors (n° 162) de la forme

$$ay^2 + bxy + cx^2 + 1 = 0,$$

et ne renferme que *trois* coefficients à déterminer; ainsi la connaissance du *centre* équivaut à *deux* conditions différentes.

Il est vrai que, dans ce cas, la courbe ne peut être qu'une ELLIPSE ou une HYPERBOLE, ou (n° 158) un système de *deux droites parallèles*.

322. Lorsque, pour une ELLIPSE ou une HYPERBOLE, on donne de *position* soit le système des *axes principaux*, soit un système de *diamètres conjugués*, il suffit de *deux* autres conditions pour déterminer la courbe.

Car ces courbes, rapportées à l'un ou à l'autre de ces systèmes, sont représentées par les équations

$$A^2y^2 \pm B^2x^2 = \pm A^2B^2, \quad \text{ou} \quad A'^2y^2 \pm B'^2x^2 = \pm A'^2B'^2,$$

dans lesquelles A et B *ou* A′ et B′ sont *les deux seules* constantes à déterminer.

Quant à la PARABOLE, si l'on donne les *axes principaux* ou un système d'*axes conjugués*, il ne faut plus qu'*une seule* condition pour la déterminer, puisqu'il entre *une seule* constante, p ou p', dans les équations

$$y^2 = 2px, \quad \text{ou} \quad y^2 = 2p'x,$$

qui représentent la courbe rapportée à l'un de ces systèmes.

323. Ces principes étant bien établis, nous allons faire connaître un moyen plus simple que celui qui a été exposé (n°ˢ 274, 210 et 242) pour construire:

1°. Une PARABOLE, connaissant un système d'*axes conjugués* et le *paramètre* à ce système;

2°. Une ELLIPSE ou une HYPERBOLE, étant donné de position et de grandeur un système de *diamètres conjugués*.

Fig. 154. Premièrement. — Soient AX, AY un système d'axes conjugués, $2p'$ le paramètre à ce système.

Prenons sur AY et au-dessous du point A une distance AD égale à $2p'$, et menons par le point D une droite DL parallèle à AX; puis tirons par le point A une droite quelconque AH.

Les équations de la parabole, de la droite AH, et de la parallèle DL, sont

$$y^2 = 2p'x, \quad y = ax, \quad y = -2p'.$$

Or la combinaison des deux dernières équations donne, pour les coordonnées du point E où la droite AH rencontre la ligne DL,

$$y = -2p', \quad x = -\frac{2p'}{a} = \text{DE}.$$

D'un autre côté, en combinant la première et la seconde équation, on trouve pour les coordonnées des deux points d'intersection A et M, de AH avec la courbe,

$$1^\circ.\ x = 0, \quad y = 0; \quad 2^\circ.\ x = \frac{2p'}{a^2}, \quad y = \frac{2p'}{a} = \text{MP};$$

d'où l'on voit que les *distances* DE, *et* MP *ou* AG, *sont égales.*

Cette propriété étant vraie pour toutes les droites menées par le point A, on en déduit le moyen suivant de construire la courbe :

Prenez sur AY, *et au-dessous du point* A, AD $= 2p'$, *et menez* DL *parallèle à* AX; *tirez ensuite des droites indéfinies* AH, AH', *etc.; portez les distances* DE, DE', *etc., de* A *en* G, G', *etc., et par ces derniers points tracez* GK, G'K', *parallèles à* AX.

Les points M, M', etc., où les droites AH et GK, AH' et G'K', etc., se rencontrent, appartiennent nécessairement à la courbe.

Fig. 155. Secondement. — Considérons l'ellipse.

Soient OB $=$ A', OC $=$ B' deux *demi-diamètres conjugués*, AY la tangente au point A, DL une parallèle à AX,

menée à une distance

$$AD = -\frac{2B'^2}{A'},$$

qui représente le *paramètre* au système donné.

Tirons d'ailleurs deux cordes supplémentaires quelconques AM, BM.

Les équations de ces deux droites et de la parallèle DL sont

$$y = ax, \quad y = a'(x - 2A'), \quad y = -\frac{2B'^2}{A'};$$

les quantités a, a' étant (nos 182 et 209) liées entre elles par la relation

$$aa' = -\frac{B'^2}{A'^2}.$$

Or la combinaison de la première et de la troisième équation donne pour les coordonnées du point E,

$$y = -\frac{2B'^2}{A'}, \quad x = -\frac{2B'^2}{A'a} = DE.$$

D'un autre côté, si l'on fait $x = 0$ dans la seconde équation, il vient pour l'ordonnée du point G où la droite BM rencontre AY,

$$y = -2A'a',$$

ou, à cause de la relation $aa' = -\frac{B'^2}{A'^2}$,

$$y = \frac{2B'^2}{A'a} = AG;$$

d'où résulte

$$AG = DE.$$

[Il est à remarquer que cette propriété renferme implicitement celle de la *parabole*, puisque, si l'on suppose le grand axe *infini*, la droite BM devient une parallèle à AX.]

De là on déduit la construction suivante :

Après avoir tracé par l'une des extrémités du diamètre AB *une parallèle à l'autre diamètre* OC, *prenez sur cette parallèle* AY, *et au-dessous du point* A, *une distance* AD *égale à* $\frac{-2B'^2}{A'}$, *puis menez* DL *parallèle à* AB; *tirez ensuite des droites indéfinies* AH, AH', *etc.; portez les distances* DE, DE', *etc., de* A *en* G, G', *etc., et joignez ces derniers points avec le point* B.

FIG. 155. Les points M, M′, etc., où les droites AH et BG, AH′ et BG′, etc., se rencontrent, appartiennent nécessairement à la courbe.

On procéderait d'une manière tout à fait analogue pour l'HYPERBOLE.

324. La question résolue et discutée n°s 147 et suivants pour établir la liaison qui existe entre les trois courbes du second degré, et qui nous a conduits (n° 151) à la détermination de la droite appelée *directrice*, fournit encore d'autres conditions d'après lesquelles on peut déterminer et, par suite, construire ces courbes.

C'est ce que montre la propriété suivante :

FIG. 156. Soient MNAM′... une courbe du second degré, DD′ la *directrice* qu'on suppose donnée de position, et F un *foyer*.

Considérons deux points, M, N, de la courbe, tirons les droites MN, FM, FN, en prolongeant MN jusqu'à sa rencontre en R avec la directrice, et joignons FR.

Je dis que *la droite* FR *divise en deux parties égales l'angle* NFm *formé par le rayon vecteur* FN *et le prolongement* Fm *de l'autre rayon vecteur* FM.

En effet, menons du point N la droite NI parallèle à FM, et abaissons les perpendiculaires MP, NQ sur la directrice.

On a, d'après la propriété caractéristique de la *directrice* (n° 151),

$$MF : MP :: NF : NQ,$$

ou

$$(1) \qquad MF : NF :: MP : NQ;$$

mais les triangles semblables RPM, RQN et RFM, RIN, donnent

$$MP : NQ :: RM : RN,$$
$$RM : RN :: MF : NI;$$

d'où

$$(2) \qquad MP : NQ :: MF : NI;$$

donc, à cause du rapport commun aux proportions (1) et (2),

$$MF : NF :: MF : NI; \text{ et, par conséquent } NF = NI.$$

Le triangle NIF étant isocèle, il s'ensuit que les angles NFI et NIF ou IF*m* sont égaux.

Donc, etc.

325. De cette propriété il résulte qu'une courbe du second degré est *déterminée*, lorsqu'on donne *un foyer et trois points de la courbe;* ce qui revient à dire que la connaissance de *l'un des foyers* équivaut à *deux* conditions différentes. FIG. 157

En effet, soient M, N, P, trois points donnés par lesquels on veut faire passer une courbe du second degré, et F un foyer de cette courbe :

1°. Si l'on tire les lignes MN, MF*m*, FN, et qu'on mène la *bissectrice* FR de l'angle NF*m*, le point R où les deux droites MN, FR se rencontrent, est nécessairement un *premier point* de la directrice;

2°. En exécutant une construction analogue par rapport à l'un des deux mêmes points N ou M et au troisième point P, on détermine un *second point* S de cette directrice, qui est alors la droite DSRD'.

Maintenant, si du point F on abaisse FB perpendiculaire sur RS, on a *la direction* du premier axe. Menant ensuite de l'un des points donnés, N par exemple, NQ perpendiculaire à RS, on obtient NF : NQ pour le *rapport constant* qui doit exister entre la distance d'un point quelconque de la courbe au *foyer*, et sa distance à la *directrice*.

Dès lors on peut facilement (nᵒˢ 147 et suivants) déterminer les grandeurs des axes.

Suivant que le rapport NF : NQ est reconnu *inférieur*, *supérieur*, ou *égal* à l'unité, la courbe est, comme on l'a vu, une *ellipse*, une *hyperbole* ou une *parabole*.

Dans la *fig.* 157, la courbe est une *parabole*, puisque l'on a

$$NF = NQ.$$

326. *N. B.* — Lorsqu'on exige d'avance que la courbe soit une *parabole*, il suffit de donner *deux* points de la courbe avec le *foyer;* et, dans ce cas, voici comment on détermine la *directrice :* FIG. 158.

FIG. 158. Soient M et N les deux points donnés, F le foyer.

Après avoir déterminé le point R, comme précédemment, on décrit de l'un des points donnés, M par exemple, comme centre, et avec le rayon MF une circonférence; puis, du point R, on mène une tangente RT à cette circonférence.

La tangente ainsi tracée n'est autre chose que la *directrice;* car, de la définition de la parabole (n°141), il résulte que sa directrice est tangente à toutes les circonférences décrites des différents points de la courbe, comme centres, et avec des rayons égaux aux rayons vecteurs correspondants.

Puisque par le point R on peut, en général, mener deux tangentes à la circonférence, il s'ensuit qu'on obtient par ce moyen *deux directrices*, et par conséquent *deux paraboles;* l'une est M′ANM, qui a pour directrice RT, et pour premier axe BX; l'autre est $nNaMm'$, dont la directrice est RT′, et le premier axe B′X′.

La question n'aurait qu'*une seule* solution si la circonférence passait par le point R; et il n'y aurait *aucune* solution si le point R se trouvait *en dedans* de la circonférence.

327. Enfin, la connaissance *d'un sommet* de la courbe équivaut, en général, à *deux conditions.*

Car supposons, pour un instant, que l'on donne *les deux sommets* du premier axe, par exemple, d'une ellipse ou d'une hyperbole, et *un point* de la courbe.

En joignant ces sommets par une droite, on aura le premier axe en grandeur et en direction, ainsi que le centre de la courbe.

Dès lors, si dans l'équation

$$A^2y^2 \pm B^2x^2 = \pm A^2B^2$$

on substitue les coordonnées x', y' du point donné, rapportées au premier axe et au second qui est lui-même connu de direction, il viendra

$$A^2y'^2 \pm B^2x'^2 = \pm A^2B^2,$$

équation dans laquelle la quantité B, étant seule inconnue, peut être facilement construite.

La connaissance des *deux sommets* et d'un *seul point* de la courbe suffit donc pour la déterminer; et comme, d'ailleurs, ces sommets sont symétriquement placés sur la courbe, *un seul* doit être compté pour *deux conditions*.

Solutions géométriques pour la détermination d'une courbe du second degré, d'après des conditions données.

328. La détermination d'une courbe du second degré, d'après certaines conditions, est, en général, un problème assez difficile à résoudre par l'analyse, à cause de l'embarras qu'on éprouve souvent dans le choix des axes. Aussi s'est-on attaché principalement à en rechercher des solutions purement *géométriques*, en se fondant toutefois sur les propriétés connues des trois courbes.

Les questions suivantes ont pour objet de mettre au courant de ces sortes de constructions.

PREMIÈRE QUESTION. — *Trois droites et un point étant donnés sur un plan, trouver une courbe du second degré* TANGENTE *à ces trois droites, et qui ait pour* FOYER *le point donné.*

Soient M*m*, N*n*, P*p* les droites données, et F le foyer de la courbe cherchée. FIG. 159.

On a vu (nos 201 et 237) que, dans l'*ellipse* et dans l'*hyperbole*, les pieds des perpendiculaires abaissées d'un foyer sur les tangentes *ont pour lieu géométrique la circonférence de cercle décrite sur le premier axe comme diamètre*, et (n° 270) que, dans la parabole, ces mêmes pieds *se trouvent sur le second axe*.

Cela posé, *abaissez* du point F les trois *perpendiculaires* FG, FH, FK. Il peut arriver *deux* cas : ou les trois points G, H et K forment un triangle, ou bien ils sont en ligne droite.

Dans le PREMIER CAS, *joignez* ces points deux à deux, puis *élevez*, par les milieux des lignes de jonction, des *perpendiculaires* LO, IO; elles se rencontrent en un point O, qui est le CENTRE de la courbe.

Tirez ensuite OF, *et prenez* sur cette droite deux parties OB, OA, *égales à* OG (distance du centre au *pied* de la perpendiculaire abaissée du point F sur M*m*); vous obtenez AB pour le premier axe; et la courbe est une ellipse ou une hyperbole, suivant que le point B se trouve placé sur le prolongement de OF, ou entre les points O et F.

Dans la *fig.* 159 la courbe est une *ellipse*, et le second axe

CD s'obtient (n° 151) en décrivant du point F comme centre, et avec le rayon OB, un arc de cercle.

Si la courbe était une *hyperbole*, le centre de l'arc de cercle serait en B (n° 135), et OF serait le rayon de cet arc.

FIG. 160. Dans le SECOND CAS, c'est-à-dire *lorsque les trois points* G, H, K *sont en ligne droite*, cette ligne KHGY représente le second axe de la courbe, qui est alors une parabole; et pour avoir le premier axe, il suffit d'*abaisser* AFX *perpendiculaire sur* KY. Le quadruple de AF représente d'ailleurs (n° 273) le paramètre; ainsi la courbe peut être construite facilement.

N. B. — Lorsqu'on sait d'avance que la courbe cherchée doit être une parabole, il suffit de connaître *deux tangentes et le foyer*, puisque le second axe est (n° 270) déterminé par les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur ces tangentes; et, en effet, nous savons déjà que *quatre* conditions suffisent pour la parabole, et que la connaissance du foyer compte (n° 325) pour *deux* conditions.

DEUXIÈME QUESTION. — *On demande de construire une ellipse, connaissant le centre, la longueur de son grand axe, une tangente et son point de contact.*

FIG. 161. Soient O le centre donné, A le demi-axe de la courbe, T*t* la tangente et M son point de contact.

Du point O comme centre, avec le rayon A, *décrivez* une circonférence qui coupe généralement T*t* en *deux* points R, R'; puis élevez en ces points les *perpendiculaires* RS, R'S' à cette tangente; elles passent nécessairement (n° 201) par les *foyers* de la courbe.

Tirez ensuite la ligne OR, et par le point de contact M *tracez* MN *parallèle* à OR; il résulte de ce qui a été dit n° 203, que MN passe par le *second* foyer. Donc le point F', où R'S' et MN se rencontrent, n'est autre que le *second* foyer.

Menez enfin la ligne F'O qui rencontre RS en un point F; et vous obtenez ainsi le *premier* foyer.

Les points A et B, où F'F rencontre la circonférence décrite, sont d'ailleurs les sommets de la courbe qui est alors complétement déterminée.

N. B. — Si le point de contact était placé sur la tangente T*t*, en un point M' tel que la droite M'N', parallèle à OR, rencontrât R'S' au point *f'* situé hors de la circonférence décrite avec le rayon A, la courbe, au lieu d'être une *ellipse*, serait une *hyperbole* dont le premier axe aurait pour direction *f'* O, et pour som-

mets a, b. Les foyers seraient les points f', f, où la ligne f'O rencontre R'S' et RS prolongés.

On voit donc que, bien qu'on ait demandé une *ellipse*, il peut arriver que la construction conduise à une *hyperbole*.

TROISIÈME QUESTION. — *Construire une hyperbole, connaissant l'un des foyers, une asymptote, et la longueur du premier axe ou le rapport des axes.*

Soient F le foyer donné, LL' l'une des asymptotes, et A la lon- FIG. 162.
gueur du premier axe, ou m le rapport B : A.

Abaissez du point F une *perpendiculaire sur* LL'; le pied R de cette perpendiculaire est à une distance du centre de la courbe, égale à A (n° 237), puisque l'asymptote LL' peut être considérée comme une tangente.

Ainsi, en supposant que A soit connu, *prenez* à partir du point R sur LL', une distance RO *égale à* A; et le point O est le *centre* de la courbe.

Menant ensuite OF, vous obtenez la direction du *premier* axe; *portant* OR de O en A et B, puis OF de O en F', vous avez les deux *sommets* de la courbe, ainsi que les deux *foyers*. *Tracez enfin* KK', de manière que l'angle FOK soit égal à l'angle LOF; vous obtenez la *seconde asymptote*.

N. B. — Lorsque, au lieu de A, on donne le rapport m ou $\frac{B}{A}$, la tangente trigonométrique de l'angle FOR est connue; ainsi la direction de la ligne FO peut être facilement déterminée. Quant aux grandeurs des *demi-axes*, elles sont évidemment représentées par OR et RF.

On a d'abord OR = A, comme on l'a vu tout à l'heure; et RF = B, d'après la relation

$$OF = c = \sqrt{A^2 + B^2},$$

qui donne nécessairement

$$B^2 = c^2 - A^2 = \overline{RF}^2.$$

QUATRIÈME QUESTION. — *Étant donnés une asymptote, deux points, et le rapport des axes d'une hyperbole, construire la courbe.*

Soient LL', M, M', l'asymptote et les deux points donnés, m le FIG. 163.
rapport $\frac{B}{A}$ que l'on suppose connu.

Menez la droite MM' qui va rencontrer LL' en R, puis, à partir du point M', *prenez* une distance M'R' *égale à* MR; le point R' appartient à la seconde asymptote (n° 249).

Fig. 163. Comme le rapport $\frac{B}{A}$, ou m, est donné, *faites* en un point quelconque I de LL′ un angle LIG dont la tangente *trigonométrique soit égale à m*, *puis* un angle HIL, *double de* LIG.

Tracez enfin par le point R′ la droite KK′ *parallèle à* IH, et vous avez ainsi la seconde asymptote.

La courbe peut donc être tracée facilement d'après la méthode du n° 257.

N. B. — Si, au lieu du rapport des axes, on donnait la position d'un troisième point, en joignant ce point avec l'un des deux points déjà donnés, on obtiendrait un nouveau point de la seconde asymptote, dont la direction serait alors déterminée.

Voici les énoncés de nouvelles questions sur lesquelles on peut s'exercer.

1°. *Construire une parabole, connaissant le foyer, un point et une tangente.*

2°. *Construire une ellipse, connaissant deux tangentes, le centre et la longueur du premier axe* (la courbe peut être une hyperbole).

3°. *Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, un foyer et une tangente.*

Propriété commune aux trois courbes.

Fig. 164. 329. Nous complétons ces considérations par la démonstration d'une propriété qui appartient aux trois courbes du second degré, et dont les géomètres ont tiré parti pour construire ces courbes d'après certaines données.

Reprenons l'équation

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

que nous supposons représenter une des trois courbes, rapportée à un système *rectangulaire* ou *oblique*, AX, AY.

Cette équation peut être mise sous la forme

$$(2) \qquad y^2 + \frac{Bx + D}{A} y + \frac{C}{A}\left(x^2 + \frac{E}{C}x + \frac{F}{C}\right) = 0.$$

Soit fait d'abord $y = 0$, pour obtenir les points où la courbe rencontre l'axe des x; il en résulte

$$(3) \qquad x^2 + \frac{E}{C}x + \frac{F}{C} = 0,$$

équation dont les racines ne sont autre chose que les *abscisses* des points demandés.

Si ces racines sont *imaginaires*, c'est un indice que la courbe n'a aucun point commun avec l'axe des x; et si elles sont *égales*, la courbe est (n° 98) tangente à cet axe.

Mais admettons qu'elles soient *réelles* et *inégales;* et désignons par x', x'', ces deux racines, représentées sur la *figure* par AB, AC.

Le trinôme $x^2 + \frac{E}{C}x + \frac{F}{C}$ revient à $(x - x')(x - x'')$.

Pour exprimer ce produit *géométriquement*, observons que AP représentant une abscisse quelconque, et AB, AC les abscisses x', x'', on a nécessairement

$$(x - x')(x - x'') = \text{PB} \times \text{PC}.$$

D'un autre côté, le dernier terme de l'équation (2), ou $\frac{C}{A}(x - x')(x - x'')$, est égal au produit des deux racines de cette équation résolue par rapport à y; et ces racines sont représentées par PM et Pm.

On a donc la relation

$$\text{PM} \times \text{P}m = \frac{C}{A}(x - x')(x - x'') = \frac{C}{A} \times \text{PB} \times \text{PC};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\text{PM} \times \text{P}m}{\text{PB} \times \text{PC}} = \frac{C}{A}.$$

Pour d'autres abscisses AP', AP'', etc., on aurait également

$$\frac{\text{P}'\text{M}' \times \text{P}'m'}{\text{P}'\text{B} \times \text{P}'\text{C}} = \frac{C}{A}, \quad \frac{\text{P}''\text{M}'' \times \text{P}''m''}{\text{P}''\text{B} \times \text{P}''\text{C}} = \frac{C}{A}, \ldots,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\text{PM} \times \text{P}m}{\text{PB} \times \text{PC}} = \frac{\text{P}'\text{M}' \times \text{P}'m'}{\text{P}'\text{B} \times \text{P}'\text{C}} = \frac{\text{P}''\text{M}'' \times \text{P}''m''}{\text{P}''\text{B} \times \text{P}''\text{C}} = \ldots.$$

Ce qui démontre que, dans toute courbe du second degré, si l'on considère une sécante quelconque AX, puis une série d'autres sécantes parallèles entre elles et menées sous une direction tout à fait arbitraire, *les rectangles des parties de ces parallèles, comprises entre leurs points de rencontre*

FIG. 164. *avec la première sécante et leurs points d'intersection avec la courbe, sont aux rectangles des parties de la première sécante, comprises entre les pieds des parallèles et les points où cette sécante rencontre la courbe, dans un* RAPPORT CONSTANT.

Il est aisé de reconnaître que cette propriété, dite *propriété de transversales*, comprend implicitement celles qui ont été démontrées dans les précédents chapitres (n°s 209, 242 et 274).

En effet, si, la première sécante étant un diamètre quelconque, les autres sécantes sont parallèles au conjugué de ce diamètre, il en résulte PM = Pm, P′M′ = P′m', etc., et la relation ci-dessus devient

$$\frac{\overline{PM}^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}} = \frac{\overline{P'M'}^2}{\overline{P'B}\times\overline{P'C}} = \frac{\overline{P''M''}^2}{\overline{P''B}\times\overline{P''C}} = \dots$$

On fait usage de cette propriété, pour faire passer une courbe du second degré par *cinq points donnés;* mais les détails qu'exige cette construction, nous entraîneraient beaucoup trop loin.

Nous renvoyons, pour ces sortes de constructions, au *Traité des sections coniques, par le Marquis de* L'HÔPITAL.

§ II. — CONSTRUCTION DES RACINES DES ÉQUATIONS DU SECOND, TROISIÈME ET QUATRIÈME DEGRÉ A UNE SEULE INCONNUE; PROBLÈMES DE LA TRISECTION DE L'ANGLE ET DE LA DUPLICATION DU CUBE. — DÉTERMINATION, PAR DES INTERSECTIONS DE COURBES, DU NOMBRE DES RACINES RÉELLES DANS LES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES A UNE SEULE INCONNUE. — PROBLÈMES SUR LES LIEUX GÉOMÉTRIQUES, SE RAPPORTANT AUX COURBES DU SECOND DEGRÉ. — DE QUELQUES COURBES REMARQUABLES, SAVOIR : CISSOÏDE DE DIOCLÈS, CONCHOÏDE DE NICOMÈDE.

Équation du second degré.

330. En résolvant l'équation

$$x^2 + px = q, \tag{1}$$

on parvient, en général, à une expression composée de deux parties, l'une rationnelle et l'autre irrationnelle du second

degré. Or, on a vu dans l'INTRODUCTION les moyens de construire ces sortes d'expressions.

Mais la Géométrie élémentaire fournit des méthodes pour construire les racines de l'équation proposée, sans qu'il soit nécessaire de la résoudre.

D'abord si p et q sont deux *droites* données à priori, x désignant aussi une *ligne*, l'équation (1) n'est pas *homogène;* pour la rendre telle, il faut (n° 15), en supposant que r représente la ligne prise pour *unité*, la rétablir dans cette équation, ce qui donne

$$x^2 + px = q.r;$$

et si l'on met les signes en évidence, l'équation prend définitivement la forme

$$x^2 \pm px = \pm k^2 \tag{2}$$

[k désignant ici une *moyenne proportionnelle* entre r et la valeur absolue de q].

Cela posé, 1° soit à construire les racines de l'équation

$$x^2 + px = + k^2. \tag{3}$$

Sur une droite indéfinie, *prenons* une distance AB égale à p; et sur cette ligne comme diamètre, *décrivons* une circonférence de cercle; *élevons* au point A une perpendiculaire AC égale à k, et *tirons* la droite CD passant par le centre O du cercle. Fig. 165.

Les deux racines demandées seront représentées par CE et par — CD (la racine *négative* étant la plus grande en *valeur absolue*).

En effet, par construction, AC est une tangente, et CD une sécante au cercle; donc, en vertu d'un théorème connu de Géométrie,

$$\text{CE} \times \text{CD} = \overline{\text{AC}}^2 = k^2.$$

Mais CD étant égal à CE + p, l'égalité devient

$$\text{CE}\,(\text{CE} + p) = k^2;$$

d'où l'on voit déjà que l'équation (3), qui revient à

$$x(x + p) = k^2,$$

est satisfaite par $x = \text{CE}$.

Fig. 165. Comme on a pareillement

$$CE = CD - p, \quad \text{ou} \quad -CE = -CD + p,$$

l'égalité prend la forme

$$(-CD + p).(-CD) = k^2;$$

ce qui prouve que l'équation (3), ou

$$(x + p)\,x = k^2,$$

est encore satisfaite par $x = -CD$.

Donc CE et $-CD$ sont les deux racines de l'équation (3).

2°. L'équation

$$x^2 - px = k^2,$$

ne différant de celle-ci que par le signe de x, on en déduit que ses racines sont CD et $-CE$ (la plus grande racine est ici la racine *positive*).

3°. Passons à l'équation $x^2 - px = -k^2$, que l'on peut mettre sous la forme

$$x\,(p - x) = k^2. \tag{4}$$

Fig. 166. Pour obtenir ses racines, *décrivons* sur la droite $AB = p$, considérée comme diamètre, une demi-circonférence; *élevons* en A la droite AC perpendiculaire à AB et égale à k; puis menons CL parallèle à AB; et de chacun des deux points D, où CL rencontre la demi-circonférence, *abaissons* DG *perpendiculaire* sur AB.

Les deux racines demandées seront AG et GB.

Car on a, d'après un théorème de Géométrie,

$$AG \times GB = DG^2 = AC^2 = k^2.$$

Mais

$$GB = AB - AG = p - AG, \quad AG = p - GB;$$

d'où, substituant dans l'égalité précédente,

$$AG\,(p - AG) = k^2, \quad GB\,(p - GB) = k^2;$$

et si l'on compare chacune de ces nouvelles égalités à l'équation (4), on peut conclure que celle-ci est satisfaite, soit par $x = AG$, soit par $x = GB$.

Ainsi AG et GB sont les racines demandées.

N. B. — Pour que ces deux racines soient susceptibles

de détermination, il faut que la *parallèle* CL puisse rencontrer la demi-circonférence; ce qui exige que k soit *tout au plus* égal à OI ou $\frac{p}{2}$.

On sait, en effet, que c'est la condition de réalité des racines dans l'expression

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - k^2},$$

4°. Quant à l'équation $x^2 + px = -k^2$, ses deux racines sont essentiellement *négatives*, et sont représentées par — AG, et — GB, puisque cette équation ne diffère de l'équation (4) que par le signe de x.

Tous les cas relatifs à l'équation

$$x^2 \pm px = \pm k^2$$

se trouvent ainsi traités.

Lorsque les coefficients de l'équation du second degré sont des nombres particuliers, il n'y a rien à changer au mode de construction des racines; seulement, il faut se reporter à ce qui a été dit au n° 11 concernant les *radicaux numériques*.

Équations du troisième et du quatrième degré.

331. On vient de voir que la *ligne droite* et le *cercle* suffisent à la construction des racines d'une équation du *second degré* à une seule inconnue; mais il n'en est pas de même pour les équations du troisième ou du quatrième degré : il faut avoir recours à la construction de deux courbes du second degré dont l'une au moins soit différente du *cercle*.

Le principe fondamental de ces sortes de constructions consiste à regarder l'équation proposée comme *le résultat de l'élimination entre deux équations à deux inconnues dont l'une, supposée l'inconnue primitive, est prise pour* ABSCISSE, *et l'autre pour* ORDONNÉE.

En construisant successivement et sur *les mêmes axes* les *lieux géométriques* de ces équations, on reconnaît que les courbes se rencontrent en *un* ou *plusieurs* points dont les *abscisses* représentent les racines réelles de l'équation proposée.

332. Développons ce principe sur l'équation du quatrième degré

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{1}$$

à la construction de laquelle on peut ensuite ramener facilement celle d'une équation du troisième degré.

Nous supposerons d'ailleurs que les coefficients a, b, c, d sont indifféremment des *lignes* données *à priori*, ou des *nombres*. — [Dans le premier cas, il faudrait (n° 15) commencer par rétablir l'homogénéité.]

Cela posé, faisons dans l'équation (1)

$$x^2 = y; \tag{2}$$

elle devient

$$y^2 + axy + by + cx + d = 0; \tag{3}$$

et comme l'équation (1) résulte évidemment de l'élimination de y entre les équations (2) et (3), il s'ensuit qu'elle renferme toutes les valeurs de x propres à vérifier les équations (2) et (3), en même temps que certaines valeurs de y; donc, si par un moyen quelconque, on peut obtenir les systèmes de valeurs de x et de y *communs* aux équations (2) et (3), en ne tenant compte que de celles de x, on aura les racines de l'équation (1).

Fig. 167. Or, l'équation (2) étant *construite* par rapport à des axes qu'on peut supposer, pour plus de simplicité, *rectangulaires*, représente une PARABOLE dont le *premier axe* est dirigé suivant l'axe des y, l'origine étant le *sommet* de la courbe, et qui a 1 pour *paramètre*.

Cette courbe est facile à construire.

L'équation (3), étant construite sur *les mêmes* axes, a pour lieu géométrique une HYPERBOLE dont l'une des asymptotes est *parallèle* à l'axe des x (n° 307, 1°).

Ces deux courbes se coupent généralement en *quatre* points (puisque l'*équation finale* (1) est du quatrième degré), dont les coordonnées jouissent exclusivement de la propriété de satisfaire en même temps à leurs équations.

Ainsi les *abscisses* de ces points sont les *racines* demandées.

N. B. — Le *nombre* des racines *réelles* de l'équation (1) est égal au *nombre* des points d'intersection.

333. On peut, au moyen de quelques *artifices* de calcul, remplacer l'équation (3) par une autre plus facile à construire, même par celle d'une circonférence de cercle.

Pour cela, il faut supposer que l'équation (1) ait été *préalablement* débarrassée de son *second terme;* ce qui est *toujours possible* d'après la théorie des équations.

Supposons donc l'équation ramenée à la forme

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \tag{1}$$

et faisons, comme précédemment,

$$x^2 = y, \tag{2}$$

l'équation (1) devient

$$y^2 + py + qx + r = 0. \tag{3}$$

On remarque d'abord que, par ces premières opérations, les lieux géométriques sont deux PARABOLES dont la seconde a pour *axes principaux* deux *parallèles* aux axes coordonnés. Une simple translation d'origine suffirait pour la ramener à la forme

$$y^2 = kx.$$

Mais si l'on *ajoute* les deux équations (2) et (3), on obtient la nouvelle équation

$$x^2 + y^2 + (p-1)y + qx + r = 0, \tag{4}$$

qui (n° 85) représente une circonférence de cercle ayant pour coordonnées du centre

$$-\frac{q}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1-p}{2},$$

et pour rayon

$$R = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - r}.$$

D'où l'on voit que *la construction des racines de toute équation du quatrième degré peut toujours être ramenée à celle d'une* PARABOLE *et d'un* CERCLE.

334. Considérons maintenant l'équation du troisième degré.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Fig. 167. on trouve

$$y = \frac{3rx - r.s}{4x} = \frac{3r}{4} - \frac{r.s}{4x};$$

et d'après ce qui a été dit au n° 307, la courbe, qui est une HYPERBOLE, a pour asymptotes les droites

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = \frac{3r}{4},$$

c'est-à-dire l'axe des y et une parallèle FEF′ à l'axe des x, menée à la distance

$$OE = \frac{3r}{4} = \frac{3}{4}OD.$$

Comme d'ailleurs la courbe passe par le point C pour lequel on a, d'après l'équation (3),

$$y = 0, \quad x = \frac{s}{3} = \frac{BP}{3} = OC,$$

on peut la construire au moyen du procédé établi n° 257: ce qui donne les deux branches $nm'mn'$, $n''m''n'''$.

La première de ces branches rencontre la parabole LOL′ en *deux* points m, m'; la seconde en *un seul* point m''; et ces points sont tels, qu'en abaissant mp, $m'p'$, $m''p''$ perpendiculaires à OX, on a Op, Op', Op'', pour les *trois* racines de l'équation (1).

Cela posé, ces valeurs, dont l'une Op'' est *négative*, exprimant des *sinus*, il faut les *porter* sur OY, de O en R, R′, R″, *mener* ensuite RM, R′M′, R″M″ parallèles à OX: et l'on obtient enfin

$$AM, \quad AM', \quad -AM''$$

pour représenter les valeurs des arcs

$$\frac{a}{3}, \quad \frac{\pi - a}{3}, \quad -\frac{\pi + a}{3},$$

que l'on sait être les *trois* valeurs du *tiers* d'un arc dont on donne le *sinus*.

Nous pourrions, comme au n° 334, substituer à l'hyperbole une *circonférence de cercle* qui serait différente de celle déjà tracée; mais nous préférons faire connaître *un autre moyen* de résoudre le problème, qui a l'avantage de

faire servir le cercle donné, comme un des lieux géométriques.

336. AUTRE MODE DE SOLUTION. — Soient toujours AB ou a l'arc qu'il s'agit de diviser en *trois* parties égales et qu'on suppose décrit avec le rayon r égal à celui des Tables, AM *le tiers* de cet arc, supposé connu pour le moment. Faisons d'ailleurs FIG. 168.

$$\text{OP ou } \cos a = c, \quad \text{BP ou } \sin a = s, \quad \text{OQ} = x, \quad \text{MQ} = y.$$

On a, pour *première* relation,

$$y^2 + x^2 = r^2. \tag{1}$$

Maintenant, si l'on prolonge MQ jusqu'à sa rencontre en N avec la circonférence, que par le point N on mène NR *parallèle* à OX, jusqu'à sa rencontre en R avec BP prolongé, on obtient ainsi un triangle BNR *semblable* au triangle OMQ (car ils ont leurs côtés *perpendiculaires*) ; et il en résulte la proportion

$$\text{OQ} : \text{QM} :: \text{BR} : \text{RN},$$

Mais, par construction,

$$\text{BR} = s + y, \quad \text{RN} = \text{PQ} = x - c;$$

donc cette proportion devient

$$x : y :: s + y : x - c;$$

d'où l'on déduit la *seconde* relation

$$y^2 - x^2 + sy + cx = 0, \tag{2}$$

équation qui, combinée avec (1), donnerait par l'élimination de x la valeur de y ou de $\sin \frac{a}{3}$.

Mais au lieu d'effectuer cette élimination, on peut construire les *lieux géométriques* qu'elles représentent.

Or le *lieu* de l'équation (1) est le cercle donné lui-même.

Quant à l'équation (2), elle représente évidemment une HYPERBOLE ÉQUILATÈRE dont les deux axes sont *parallèles* aux axes coordonnés.

Pour en obtenir la position, résolvons cette équation par

FIG. 168. rapport à y; il vient

$$y = -\frac{s}{2} \pm \sqrt{x^3 - cx + \frac{s^2}{4}}.$$

Soit pris sur OY une distance

$$OE = -\frac{s}{2} = -\frac{BP}{2},$$

la ligne GG' *parallèle* à OX est un diamètre de la courbe, et par conséquent un des axes cherchés.

On sait d'ailleurs (n° 304) que la moitié du coefficient de x sous le radical, pris en signe contraire, ou $\frac{c}{2}$, n'est autre chose que l'abscisse du *centre;* donc la ligne HH' menée par le point V, *milieu* de OP, et *parallèlement* à OY, représente l'autre axe.

Maintenant, puisque l'hyperbole est *équilatère,* il s'ensuit que les asymptotes divisent en *deux parties égales* les angles *droits* HIG', HIG.

Ainsi ces droites sont KK', LL'.

Enfin, il résulte de l'inspection de l'équation (2) que la courbe passe par l'origine, et peut facilement être construite. On obtient ainsi les deux branches MHM', B'H'M''.

Ces branches rencontrent la circonférence de cercle en *trois* points, M, M', M'', puis, en un *quatrième,* B', point où le *sinus* BP, prolongé, coupe lui-même la circonférence.

Discussion. — La position des trois premiers points s'explique facilement. On a

1°. $MQ = \sin\frac{AB}{3} = \sin\frac{a}{3}$.

2°. Si l'on prend

$$ABC = \frac{2\pi}{3},$$

d'où

$$CM' = \frac{AB}{3} = \frac{a}{3},$$

il en résulte

$$M'Q' = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{a}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{a}{3}\right) = \sin\frac{\pi - a}{3}.$$

3°. En prenant

$$ABDC' = \frac{4\pi}{3},$$

d'où

$$C'M'' = \frac{a}{3},$$

on en déduit

$$M''Q'' = \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{a}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi + a}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi + a}{3}\right).$$

Quant au quatrième point B' dont les coordonnées sont

$$x = c, \quad y = -s,$$

si l'on substitue ces valeurs dans les équations (1) et (2), on obtient

$$c^2 + s^2 = r^2, \quad s^2 - c^2 - s^2 + c^2 = 0;$$

ce qui prouve que ce point doit, en effet, appartenir aux deux courbes.

Les équations (1) et (2), ajoutées entre elles, donnent

$$2y^2 + sy + cx = r^2,$$

et, par suite,

$$x = \frac{r^2 - 2y^2 - sy}{c};$$

d'où, substituant cette valeur dans l'équation (1),

$$4y^4 + 4sy^3 - 3r^2y^2 - 2r^2sy + r^2s^2 = 0,$$

équation dont le premier membre est divisible par $y + s$, et donne pour quotient

$$4y^3 - 3r^2y + r^2s = 0.$$

Or cette dernière relation est *identique* (au caractère de l'inconnue près) avec l'équation (1) du numéro précédent; mais on voit en même temps que, d'après la *seconde* méthode, on a établi deux équations en x et y, *plus générales* que ne le comporte la question proposée, puisqu'en éliminant x on parvient à l'équation relative à cette question, mais embarrassée d'un *facteur étranger*.

337. *Remarque.* — C'est ainsi qu'on doit interpréter cette circonstance, que *la détermination des racines* d'une équation à une seule inconnue, *par des intersections de courbes, donne lieu quelquefois à un plus grand nombre de* POINTS COMMUNS *aux deux courbes, que la question n'admet de solutions réelles.* Les coordonnées de ces points vérifient les deux équations à deux inconnues; mais leurs *abscisses* peuvent ne pas vérifier la proposée.

Problème de la duplication du cube.

338. *Le côté d'un cube étant donné, trouver le côté d'un autre cube* DOUBLE du premier.

Soient a le côté du premier cube, x le côté du second, on a l'équation

$$x^3 - 2a^3 = 0,$$

qui, multipliée par x, donne

(1) $$x^4 - 2a^3 x = 0.$$

Posons

(2) $$x^2 = ay;$$

il en résulte

(3) $$y^2 = 2ax;$$

et la question se trouve ainsi ramenée à la construction de deux paraboles.

Mais si l'on ajoute les équations (2) et (3) membre à membre, il vient pour nouvelle équation,

(4) $$y^2 + x^2 - ay - 2ax = 0,$$

qui peut remplacer indifféremment l'une d'elles, la première par exemple.

FIG. 169. Or l'équation (3) représente une *parabole* ayant son *premier axe* dirigé suivant AX, et pour *paramètre* $2a$. Le foyer est en F, milieu de $AB = a$.

Soit LAL′ cette courbe construite d'après les procédés connus.

L'équation (4) est celle d'un cercle passant par l'origine, et dont le centre a pour coordonnées (n° 85)

$$x = a = AB, \quad \text{et} \quad y = \frac{a}{2} = \frac{AB}{2} = BO.$$

En décrivant, du point O comme *centre* et avec la distance OA pour *rayon*, une circonférence, on obtient le second lieu géométrique.

Il est visible que les deux courbes ne peuvent se rencontrer qu'en un seul point M (l'origine doit être rejetée comme provenant de l'introduction du facteur x dans l'équation

primitive); et si du point M on abaisse MP perpendiculaire sur AX, l'abscisse AP sera le *côté cherché*.

339. *Remarque.* — Le problème de la *duplication du cube* n'est qu'un cas particulier de celui-ci :

Trouver deux droites MOYENNES PROPORTIONNELLES *entre deux droites données* a, b.

Appelons x et y les deux lignes demandées, on doit avoir, d'après l'énoncé, la progression par quotient

$$\therefore a : x : y : b, \quad \text{ou plutôt,} \quad a : x :: x : y, \quad x : y :: y : b;$$

ce qui donne les deux équations

$$x^2 = ay, \tag{1}$$

$$y^2 = bx; \tag{2}$$

d'où, en éliminant l'une des inconnues, y,

$$x^4 - a^2 bx = 0,$$

et supposant $b = 2a$,

$$x^4 - 2a^2 x = 0, \quad \text{ou} \quad x^3 = 2a^2.$$

La résolution du problème général se réduit d'ailleurs à la construction des deux *paraboles*,

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx,$$

ou bien de l'une d'elles et du cercle

$$y^2 + x^2 - ay - bx = 0,$$

ce qui rentre dans les constructions précédentes.

Détermination, par des intersections de courbes, du NOMBRE *des racines réelles dans les équations numériques à une seule inconnue.*

340. La construction de deux *lieux géométriques* sur les mêmes axes, ayant fait connaître les *longueurs* des *abscisses* de leurs points d'intersection, si, pour chaque abscisse, on cherche ensuite, d'après la règle que donne la Géométrie, le *rapport numérique* de cette longueur à la ligne prise pour unité, on obtient ainsi des valeurs plus ou *moins approchées* des racines *réelles* que renferme l'équation résul-

tant de l'élimination de y entre les équations des deux lieux géométriques.

Mais ce mode d'approximation est loin de valoir, sous le rapport de la rigueur, les méthodes connues de l'*analyse algébrique*.

Il n'en est pas de même quand il ne s'agit que de fixer *le nombre* des racines réelles. On sait que cette recherche exige, soit la formation de l'*équation aux carrés des différences*, soit l'application du *théorème de Sturm;* or les calculs dans lesquels on se trouve alors entraîné, sont souvent *fort laborieux* et même *impraticables* par leur longueur; tandis que, *le plus communément*, on arrive très-vite au but par la considération des *lieux géométriques*.

Donnons quelques exemples.

FIG. 170. **341.** *Premier exemple.* — Soit l'équation

$$x^3 - 6x - 7 = 0. \tag{1}$$

La substitution des nombres 0, 1, 2, 3, etc., — 1, — 2, etc., dans cette équation ne donnant lieu qu'à *un seul* changement de signe, il faudrait avoir recours soit à l'*équation aux différences*, soit à l'application du *théorème de Sturm*.

Faisons usage des lieux géométriques.

Soit posé dans l'équation (1)

$$x^2 = 2y; \tag{2}$$

il en résulte

$$2xy - 6x - 7 = 0; \tag{3}$$

et si l'on construit les équations (2) et (3) sur les mêmes axes, les *abscisses* des points d'intersection de leurs *lieux géométriques* seront les *racines* de l'équation (1).

Or le *premier lieu* est une *parabole* LAL' ayant son *axe principal* dirigé suivant AY, son *sommet* en A, et 2 pour *paramètre*.

Le *second* est une *hyperbole* dont les asymptotes ont pour équations,

$$y = 3 \quad \text{et} \quad x = 0$$

[car l'équation (3) revient à

$$y = 3 + \frac{7}{2x}].$$

D'ailleurs, la courbe doit passer par le point C pour lequel on a

$$y = 0, \quad x = -\frac{7}{6};$$

elle est donc facile à construire (n° 287).

Les deux courbes étant tracées, on reconnaît qu'elles ne se rencontrent qu'en un seul point M dont l'*abscisse* est comprise entre 2 et 3 (et, en effet, ces deux nombres substitués dans l'équation (1) donnent des résultats de *signes contraires*).

Ainsi l'équation (1) ne peut avoir qu'*une racine réelle*.

N. B. — Comme les branches *négatives* des deux courbes sont assez rapprochées l'une de l'autre dans le voisinage des points correspondants à $y = 1$, on pourrait penser qu'il y a de ce côté *quelque point* d'intersection.

Pour s'en assurer, soit posé

$$y = 1 = \text{AS}$$

dans les équations (2) et (3); il vient, pour la première,

$$x = \pm\sqrt{2} = \pm 1{,}4\ldots,$$

et, pour la seconde,

$$x = -\frac{7}{4} = -1{,}75;$$

ce qui fait voir que le point N de l'hyperbole est *extérieur* à la parabole.

Deuxième exemple. — Soit l'équation FIG. 171

$$x^4 - 2x^3 + 8x - 3 = 0, \tag{1}$$

pour laquelle la substitution des nombres 0, 1, 2, etc., — 1, — 2, etc., ne donne que deux changements de signe.

Posons

$$x^2 = y, \tag{2}$$

il en résulte

$$y^2 - 2y + 8x - 3 = 0;$$

d'où, en ajoutant ces deux équations,

$$x^2 + y^2 - 3y + 8x - 3 = 0. \tag{3}$$

Les équations (2) et (3) correspondent :

1°. A la parabole LAL' dont 1 est le *paramètre;*

2°. A une circonférence de cercle, GMM'G', dont le centre O a pour coordonnées

$$x = \text{AB} = -4, \quad y = \text{OB} = \frac{3}{2},$$

Fig. 171. et qui a pour rayon,

$$R = \sqrt{16 + \frac{9}{4} + 3} = \frac{1}{2}\sqrt{85} = 4{,}6\ldots.$$

Or ces deux courbes n'ont évidemment que les deux points communs M, M', dont les abscisses AP, AP' sont respectivement comprises entre 0 et 1, — 2 et — 3.

[Et, en effet, l'équation (1) avait été formée par la multiplication des deux facteurs

$$x^2 - 2x + 3, \quad x^2 + 2x - 1,$$

dont le premier, égalé à zéro, donne lieu à deux racines imaginaires, et le second aux deux valeurs

$$x = -1 \pm \sqrt{2}.]$$

Nous pourrions multiplier les exemples; mais ceux qui précèdent, suffisent pour montrer la marche qu'il faut suivre tant que l'équation proposée ne surpasse pas le quatrième degré.

Un procédé analogue peut être employé lorsque l'équation est d'un degré supérieur; mais alors on est conduit à des constructions un peu plus compliquées. Nous prendrons, pour exemple, une équation du sixième degré.

Fig. 172. *Troisième exemple.* — Soit l'équation

$$(1) \qquad x^6 - 2x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x - 2 = 0.$$

Au lieu de poser $x^2 = y$, ce qui donnerait lieu à une autre équation en x, y du troisième degré, dont la construction présenterait quelques difficultés, on peut faire

$$(2) \qquad x^3 = y;$$

et il vient

$$(3) \qquad y^2 - 2xy + 2y + 3x^2 - x - 2 = 0.$$

Le lieu géométrique de l'équation (2) est une courbe du troisième degré; mais la construction en est très-simple.

Observons d'abord que les valeurs de x et de y étant nécessairement de *même signe*, d'après l'inspection de l'équation, la courbe doit s'étendre indéfiniment à la droite de AY, et au-dessus de l'axe des x, puis à la gauche de AY, mais au-dessous de AX.

De plus, comme, en remplaçant $+x$, $+y$ par $-x$, $-y$, on retrouve la même équation, il s'ensuit (n° 130) que l'origine des coordonnées est le *centre* de la courbe qui passe d'ailleurs par ce point; car $x = 0$, $y = 0$ vérifient l'équation.

Enfin, si l'on forme le *coefficient d'inclinaison* de la tangente

en un point x, y, on trouve pour ce coefficient

$$+3x^2,$$

qui devient ± 0, quand on pose

$$x=0;$$

ce qui démontre (n° 98) que la courbe est tangente à l'axe des x, en A, origine des coordonnées.

Cela suffit à la rigueur pour donner le sentiment de la courbe qui affecte la forme

KAK′;

mais rien n'empêche de donner à x quelques valeurs, et de construire les valeurs de y correspondantes. On trouve ainsi

pour
$$x=\frac{1}{2}=\text{AB}, \quad y=\frac{1}{8}=\text{BN},$$
$$x=1=\text{AD}, \quad y=1=\text{DN}',$$
$$x=\frac{3}{2}=\text{AC}, \quad y=\frac{27}{8}=3\frac{3}{8},$$
$$x=2, \qquad y=8.$$

On voit, d'après les valeurs de y correspondantes aux valeurs de x, qu'à partir de $x=1$, la courbe s'élève très-rapidement au-dessus de l'axe des x; quant à la *partie inférieure*, elle est, comme on l'a vu, *symétrique* par rapport à la partie supérieure.

Occupons-nous maintenant de l'équation (3) pour laquelle on a entre les coefficients (n° 296), la relation

$$\text{B}^2-4\,\text{AC}=4-12=-8,$$

et qui, par conséquent, est celle d'une *ellipse*.

Cette équation, résolue par rapport à y, donne

$$y=x-1\pm\sqrt{-2x^2-x+3};$$

d'où l'on voit :

1°. Que $y=x-1$, ou DD′, est un *diamètre;*

2°. Que les *limites* de la courbe dans le sens des x sont

$$x=1, \quad x=-\frac{3}{2},$$

valeurs tirées de l'équation

$$x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0;$$

elles sont représentées sur la figure par DL, D′L′.

Après avoir déterminé ses points d'intersection avec les axes,

$$\left(y=0,\ x=1,\ x=-\frac{2}{3},\ \text{puis},\ x=0,\ y=1\pm\sqrt{3}\right),$$

FIG. 172. et le diamètre II′ conjugué du diamètre DD′, comme on l'a fait au n° 303, on obtient l'ellipse DID′I′D, qui n'a évidemment que *deux* points communs avec KAK′.

Ainsi, l'équation n'a que *deux racines réelles*, l'une *positive* et comprise entre 0 et 1, l'autre *négative* et comprise entre -1 et -2.

On peut s'exercer sur les équations

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 4 = 0, \quad x^5 - 4x^3 + 5x - 6 = 0;$$

et l'on reconnaîtra que chacune d'elles n'a qu'*une seule* racine réelle.

342. *Première remarque.* — Lorsque l'équation proposée renferme des *racines égales*, on en est averti par le *contact des courbes* en *un* ou *plusieurs* points. Or on sait que les méthodes d'approximation de l'*analyse algébrique* ne peuvent, en général, s'appliquer à ces sortes d'équations qu'après qu'on a d'abord ramené leur résolution à celle d'autres équations dont les racines sont inégales : opérations souvent laborieuses.

343. *Seconde remarque.* — L'équation

$$y = x^3,$$

dont on a fait usage dans le troisième exemple, est un cas particulier de l'équation

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots,$$

qui étant construite pour toutes les valeurs attribuées aux coefficients a, b, c, d, etc., et suivant le terme auquel on arrête la série, conduit à des lieux géométriques désignés généralement sous la dénomination de *courbes paraboliques*.

Ainsi

$$y = a + bx + cx^2$$

est l'équation de la *parabole ordinaire*; et

$$y = x^3$$

est un cas particulier de l'équation des paraboles *cubiques* ou du *troisième degré*.

Les géomètres ont encore tiré parti de la construction de ces courbes, pour expliquer les principes fondamentaux de la résolution des *équations numériques*. (Consulter, à ce sujet, l'*Algèbre* de M. Garnier.)

Problèmes sur les lieux géométriques, se rapportant aux courbes du second degré.

Les questions suivantes ont surtout pour objet de faire connaître certaines propriétés des courbes du second degré, qui n'ont pu trouver place dans le développement de leur théorie.

344. PREMIER PROBLÈME. — Une *ellipse* ou une *hyperbole* étant donnée, *on demande le lieu où se rencontrent deux tangentes perpendiculaires entre elles, quelle que soit la position de la première tangente.*

Considérons d'abord une ELLIPSE, rapportée à son centre et à ses axes,

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2;$$

et désignons par x', y' les coordonnées du point de contact de la première tangente, par x'', y'' celles qui se rapportent à la seconde. On a, pour fixer la position de ces deux tangentes, les systèmes d'équations

$$(1)\quad A^2yy' + B^2xx' = A^2B^2, \quad A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2B^2,$$
$$(2)\quad A^2yy'' + B^2xx'' = A^2B^2, \quad A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2.$$

De plus, comme ces droites sont supposées perpendiculaires l'une à l'autre, il faut (n° 64) y joindre la relation

$$-\frac{B^2x'}{A^2y'} \times -\frac{B^2x''}{A^2y''} + 1 = 0,$$

ou simplifiant,

$$(3)\qquad A^4y'y'' + B^4x'x'' = 0.$$

Ces *cinq* équations devant exister simultanément pour le point *commun* aux deux droites, il s'ensuit (n° 110) que, si l'on élimine les quantités x', y', x'', y'' qui varient d'une position de chaque couple de tangentes à l'autre, l'équation résultante, en x et en y, devra être également satisfaite par les coordonnées de ce point commun, et sera, par conséquent, l'équation du lieu géométrique demandé.

La première des équations (1) donne

$$y' = \frac{B^2(A^2 - xx')}{A^2y},$$

d'où, substituant dans la seconde et réduisant,

$$(4)\quad (A^2y^2 + B^2x^2)x'^2 - 2A^2B^2xx' + A^4(B^2 - y^2) = 0.$$

Par un simple échange de A, x, x', en B, y, y', on trouverait, à cause de la symétrie des équations (1),

$$(5)\quad (A^2y^2+B^2x^2)y'^2-2A^2B^2yy'+B^4(A^2-x^2)=0;$$

et la résolution des équations (4) et (5) ferait connaître séparément x' et y': mais il est facile de voir que ces deux opérations sont inutiles.

En effet, remarquons que les équations (2) ne diffèrent des équations (1) qu'en ce que x'' et y'' remplacent x' et y'; donc, si l'on voulait déterminer x'', y'', au lieu de x', y', on retomberait sur les équations (4) et (5); seulement les caractères des inconnues seraient changés.

Il résulte de là nécessairement que l'équation (4) a pour ses deux racines la valeur de x' et celle de x''.

Même raisonnement pour les valeurs de y', y''.

Or on sait que le *dernier terme* de toute équation du second degré à une seule inconnue, divisé par le coefficient du premier terme, est égal au produit des deux racines.

On a donc les nouvelles relations

$$(6)\quad x'x''=\frac{A^4(B^2-y^2)}{A^2y^2+B^2x^2},$$

$$(7)\quad y'y''=\frac{B^4(A^2-x^2)}{A^2y^2+B^2x^2};$$

et si l'on substitue ces valeurs de $x'x''$, $y'y''$, dans l'équation de condition (3), on obtient, toute réduction faite,

$$x^2+y^2=A^2+B^2,$$

équation qui, ne renfermant plus que x, y, n'est autre, d'après ce qui a été dit ci-dessus, que l'équation du lieu géométrique cherché.

N. B. — On arrive au même résultat, d'une manière plus simple, en substituant aux coordonnées x', y' et x'', y'', des points de contact, les coefficients d'inclinaison m et m' des deux tangentes.

Il résulte, en effet, de ce qui a été dit au n° 195, que les équations des deux tangentes peuvent être mises sous la forme

$$(1)\quad y=mx\pm\sqrt{A^2m^2+B^2},$$

$$(2)\quad y=m'x\pm\sqrt{A^2m'^2+B^2};$$

et comme ces droites doivent être perpendiculaires entre

elles, on a entre m et m' la relation

$$m.m' + 1 = 0. \tag{3}$$

Ces trois équations doivent exister simultanément pour le point de rencontre des deux tangentes; donc l'équation résultant de l'élimination des quantités m et m' conviendra également à ce point, et sera celle du lieu géométrique cherché.

Or, si en ne considérant que l'équation (1) on chasse le radical, et qu'après avoir effectué les calculs, on ordonne par rapport à m, on trouve

$$(A^2 - x^2)\,m^2 + 2xy.m + B^2 - y^2 = 0. \tag{4}$$

Comme l'équation (2) ne diffère de (1) que par le caractère de l'inconnue, m' au lieu de m, on doit conclure que l'équation (4) a pour racines les deux valeurs de m et de m', et par suite, que $\frac{B^2 - y^2}{A^2 - x^2}$ est égal au produit de ces deux valeurs.

On a donc la nouvelle relation

$$\frac{B^2 - y^2}{A^2 - x^2} = m.m';$$

d'où, substituant dans la relation (3), et chassant le dénominateur,

$$x^2 + y^2 = A^2 + B^2,$$

comme ci-dessus.

Pour résoudre la même question à l'égard de l'HYPERBOLE, il suffit de changer B^2 en $-B^2$; ce qui donne pour l'équation finale,

$$x^2 + y^2 = A^2 - B^2.$$

345. *Discussion.* — L'équation à laquelle on est parvenu pour l'ELLIPSE, montre que, dans cette courbe, le lieu géométrique des points de rencontre de chaque couple de tangentes perpendiculaires l'une à l'autre est *une circonférence de cercle* CONCENTRIQUE *avec la courbe, et ayant pour rayon la diagonale du rectangle construit sur les demi-axes.*

Si l'on suppose $A = B$, auquel cas la courbe donnée est un cercle, le lieu géométrique est un autre cercle dont le rayon $A\sqrt{2}$ est la *demi-diagonale du* CARRÉ CIRCONSCRIT au cercle donné.

par suite,

$$m = \frac{y}{2x} + \frac{1}{2x}\sqrt{y^2 - 2px},$$

$$m' = \frac{y}{2x} - \frac{1}{2x}\sqrt{y^2 - 2px};$$

d'où

$$m - m' = \frac{1}{x}\sqrt{y^2 - 2px}, \quad m.m' = \frac{p}{2x}.$$

Portant ces valeurs dans la relation (3), on obtient

$$\text{tang V}.\left(1 + \frac{p}{2x}\right) = \frac{1}{x}\sqrt{y^2 - 2px},$$

ou, chassant le radical et ordonnant,

$$y^2 - x^2\,\text{tang}^2\,\text{V} - p\,(2 + \text{tang}^2\,\text{V}).\,x - \frac{p^2}{4}\,\text{tang}^2\,\text{V} = 0.$$

Telle est l'équation du lieu géométrique demandé.

Ce lieu est une *hyperbole* dont les *axes principaux* sont *parallèles* aux axes primitifs, puisque l'équation est privée du terme en xy; le *centre* de la courbe est d'ailleurs placé sur l'axe des x, le terme en y manquant.

Nous n'insisterons pas sur la construction de cette courbe; ce qui n'offrirait aucun intérêt.

Mais nous chercherons ce que devient l'équation lorsqu'on suppose les deux tangentes à *angle droit*.

Pour cela, il faut diviser tous les termes de cette équation par $\text{tang}^2\,\text{V}$, ce qui donne

$$\frac{y^2}{\text{tang}^2\,\text{V}} - x^2 - \frac{2p}{\text{tang}^2\,\text{V}}\,x - px - \frac{p^2}{4} = 0,$$

équation qui, pour tang V *infini*, se réduit à

$$-x^2 - px - \frac{p^2}{4} = 0; \quad \text{d'où} \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0,$$

par suite,

$$x = -\frac{p}{2};$$

ce qui fait voir (n° 151) que le lieu géométrique est, dans ce cas, la *directrice* de la parabole.

La directrice de la parabole jouit donc de cette propriété

remarquable, que, *si, de chacun de ses points, on mène deux tangentes à la courbe, ces droites sont perpendiculaires entre elles;* ce qu'il serait d'ailleurs facile de démontrer géométriquement.

N. B. — Si l'on voulait résoudre la question qui a fait l'objet de ce *numéro*, pour les deux autres courbes du second degré, on arriverait à une équation du quatrième degré, en x et y; c'est-à-dire que le lieu géométrique serait *une courbe du quatrième degré.*

On peut se proposer cette question comme exercice de calcul.

347. TROISIÈME PROBLÈME. — *Par un point quelconque pris sur le plan d'une* PARABOLE, *on propose de mener une normale à la courbe.*

Ce problème offre un véritable intérêt sous le rapport de la discussion des résultats.

Soient α, 6 les coordonnées d'un point quelconque situé sur le plan de la parabole

$$y^2 = 2px;$$

l'équation d'une droite assujettie à passer par le point $[\alpha, 6]$ est de la forme

$$y - 6 = m(x - \alpha);$$

et si l'on veut que cette droite soit perpendiculaire à la tangente ayant x', y' pour coordonnées du point de contact, il faut (n°s 64 et 264) que l'on ait la relation

$$m = -\frac{y'}{p};$$

ce qui donne pour l'équation de la normale correspondant à ce point,

$$y - 6 = -\frac{y'}{p}(x - \alpha), \tag{1}$$

y' étant une inconnue qu'il s'agit de trouver.

On a, pour cela, les deux relations

$$y'^2 = 2px', \tag{2}$$

$$y' - 6 = -\frac{y'}{p}(x' - \alpha), \tag{3}$$

dont la première exprime que le point $[x', y']$ se trouve sur la courbe, et la seconde, que la normale doit passer par ce même point.

On déduit de l'équation (2),

$$x' = \frac{y'^2}{2p},$$

d'où, substituant dans l'équation (3) et ordonnant par rapport à y,

$$y'^3 + 2p(p-\alpha)y' - 2\delta p^2 = 0, \tag{4}$$

équation qui, résolue, ferait connaître y', dont il suffirait de porter ensuite les valeurs dans l'équation (1) pour obtenir la normale demandée.

Comme l'équation (4) est du troisième degré, on est en droit de conclure qu'en général, *par un point donné de position dans le plan d'une parabole, on peut mener* TROIS *normales à cette courbe.*

Cette équation ne pouvant être résolue immédiatement et sans que l'on donne à p, α, δ, des valeurs *numériques* particulières, rien n'empêche, pour fixer la position de chaque point de contact, de substituer à sa résolution la construction des équations (2) et (3) dont elle est l'*équation finale.*

Or la courbe qui correspond à (2) est la *parabole* déjà tracée.

L'équation (3) ramenée à la forme

$$y'x' + (p-\alpha)y' - 6p = 0, \quad \text{d'où} \quad y' = 0 + \frac{6p}{x' + p - \alpha},$$

représente (n° 307) une *hyperbole* ayant pour asymptotes $y' = 0$, ou l'axe des x, et

$$x' + p - \alpha = 0, \quad \text{ou} \quad x' = \alpha - p,$$

c'est-à-dire *une parallèle* à l'axe des y, menée à la distance $\alpha - p$, de l'origine.

Cette courbe passant d'ailleurs par le point

$$x' = 0, \quad y' = \frac{6p}{p-\alpha},$$

pourrait (n° 257) être facilement construite.

348. *Discussion de l'équation* (4). — L'Algèbre nous apprend que, dans toute équation du troisième degré ramenée à la forme

$$x^3 + px + q = 0,$$

c'est-à-dire privée du second terme, suivant que l'on a

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0, = 0, > 0,$$

les *trois* racines sont *réelles et inégales*, ou *deux* des racines sont *réelles* et *égales à la moitié* de la troisième prise en signe contraire, ou bien *une seule* des racines est *réelle*.

Cela posé, considérons une parabole quelconque LAL' représentée par l'équation FIG. 173.

$$y^2 = 2px.$$

Soit F le foyer; et prenons une distance

$$AO = 2\,AF = p.$$

Pour que le problème proposé admette *trois* solutions, c'est-à-dire pour que l'équation (4)

$$y'^3 + 2p(p-\alpha)y' - 2\beta p^2 = 0,$$

ait ses trois racines réelles, il faut, d'après ce qui vient d'être dit, que l'on ait

$$\beta^2 p^4 + \frac{8p^3}{27}(p-\alpha)^3 \leq 0,$$

ou, supprimant le facteur p^3,

$$p\beta^2 + \frac{8}{27}(p-\alpha)^3 < 0, \tag{5}$$

ou bien,

$$p\beta^2 + \frac{8}{27}(p-\alpha)^3 = 0. \tag{6}$$

Or ces deux conditions exigent, en *premier lieu*, p étant par sa nature un nombre absolu, que l'abscisse α soit *plus grande* que p, ou *au moins* égale à p.

Si l'on fait $\alpha = p = AO$ dans l'équation (4), elle se réduit à

$$y'^3 - 2\beta p^2 = 0,$$

équation du troisième degré à *deux* termes, qui, comme l'on sait, ne peut avoir qu'*une seule* racine *réelle*.

Donc, en *second lieu*, on ne saurait mener du point O qu'*une seule* normale, laquelle passe d'ailleurs par l'ori-

gine; car, en posant $\alpha = p$ dans la relation (6), on trouve

$$6 = 0.$$

Je dis actuellement que les coordonnées 6 et α pouvant être considérées comme deux variables dont les valeurs changent avec la position donnée au point par lequel on veut mener une normale, si l'on construit le *lieu* exprimé par l'équation (6), ou

$$6^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3,$$

ce lieu sera une *limite de séparation* entre les points par chacun desquels on peut mener *trois* normales, et les points par lesquels on ne peut en mener qu'*une seule*.

En effet, il est évident que si, pour une ordonnée de ce lieu géométrique supposé construit, on a

$$p6^2 - \frac{8}{27}(\alpha - p)^3 = 0,$$

pour une ordonnée $6'$ *plus grande* que 6, et correspondant à la même valeur de α, on doit avoir

$$p6'^2 - \frac{8}{27}(\alpha - p)^3 > 0,$$

ce qui est la condition d'*une seule* normale; qu'au contraire, pour une ordonnée $6''$ *moindre* que 6 et correspondant à la même abscisse, on doit avoir

$$p6''^2 - \frac{8}{27}(\alpha - p)^3 < 0,$$

condition relative à l'existence de *trois* normales passant par le point donné.

Il résulte d'ailleurs des principes rappelés au commencement de cette discussion, que, pour chacun des points de la ligne à construire, *deux* des trois normales doivent *se confondre;* en sorte qu'à proprement parler, il ne peut exister que DEUX normales passant par ce point.

Construisons donc ce lieu géométrique.

Pour simplifier, remplaçons les variables 6, α par y, x, ce qui donne

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x - p)^3;$$

puis transportons l'origine au point O, en posant Fig. 173.

$$x = x + p;$$

il vient la nouvelle équation

$$y^2 = \frac{8x^3}{27p};$$

et l'on voit immédiatement que le *lieu géométrique* est une courbe qui s'étend *indéfiniment* dans le sens des x positifs, à partir de la nouvelle origine O, et *symétriquement* au-dessus et au-dessous de l'axe des x.

Les points les plus remarquables de cette courbe sont ceux où elle rencontre la *parabole;* et pour les trouver, il suffit, après avoir posé

$$x = x + p$$

dans l'équation de la parabole, pour que les deux courbes aient la même origine, de combiner entre elles les deux équations

$$y^2 = 2p(x+p), \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{8}{27p}x^3.$$

En égalant les deux valeurs de y^2, et ordonnant, on arrive à l'équation

$$8x^3 - 54p^2x - 54p^3 = 0,$$

qui est *homogène*, et qu'on peut rendre *numérique* en y substituant px au lieu de x; ce qui donne

$$8x^3 - 54x - 54 = 0.$$

L'application de la méthode des *racines commensurables* fait reconnaître facilement que l'équation est satisfaite par

$$x = 3.$$

Donc

$$x = 3p,$$

et, par suite,

$$y = \pm 2p\sqrt{2},$$

sont les coordonnées des points où les deux courbes se rencontrent.

Prenons, à partir du point O, $OC = 3p = 3AO$, et élevons CD perpendiculaire à AX; la courbe cherchée doit passer par les points D, D'.

FIG 173. Pour nous en former une idée plus nette, déterminons le *coefficient d'inclinaison* de la tangente. La règle du n° 102 donne

$$a = \frac{4x'^2}{9py'},$$

qu'il faut tâcher d'exprimer en x' seulement.

Or, de la relation

$$y'^2 = \frac{8x'^3}{27p},$$

on déduit

$$y' = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3p}} \cdot x'\sqrt{x'},$$

ce qui donne, après la suppression du facteur $x'.\sqrt{x'}$, commun aux deux termes,

$$a = k.\sqrt{x'},$$

k étant une constante qu'il est inutile de calculer, pour le but que nous nous proposons.

Soit fait maintenant

$$x' = 0,$$

valeur correspondante à l'origine O : il en résulte

$$a = 0;$$

ce qui prouve que la tangente à l'origine se confond avec l'axe des abscisses.

De là on peut conclure que la courbe a la forme IOI', présentant sa convexité vers le côté *positif* de l'axe des x.

349. *Remarque.* — La courbe qui vient d'être construite est du genre de celles qu'on désigne ordinairement sous le nom de CISSOÏDES.

Leur caractère principal est d'être *symétrique* par rapport à une certaine droite, tangente au point qui lui sert, en quelque sorte, de point de départ, et de s'étendre *indéfiniment* au-dessus ou au-dessous de la droite dans *un même sens*.

Quelquefois les *cissoïdes* ont une *asymptote;* telle est la *cissoïde de* DIOCLÈS, courbe susceptible d'une définition rigoureuse et très-simple.

De quelques courbes remarquables.

350. *Cissoïde de* DIOCLÈS. — Un cercle étant décrit sur une droite AB comme diamètre, et une droite indéfinie BI étant menée perpendiculairement à AB, par l'une des extrémités de ce diamètre, *si de l'autre extrémité* A *on mène une sécante quelconque* AL *rencontrant la circonférence et la perpendiculaire en deux points* C, D, *que sur cette sécante on prenne* AM = CD, *on demande la ligne engendrée par le point* M *dans toutes les situations que peut prendre la sécante.* Fig. 174.

Prenons pour axes le diamètre AB et la perpendiculaire élevée au point A.

Soient d'ailleurs

$$AB = 2r, \quad AP = \alpha, \quad MP = 6.$$

La condition à exprimer *analytiquement* est, d'après l'énoncé,

$$AM = CD = AD - AC.$$

On a d'abord

$$AM = \sqrt{6^2 + \alpha^2}; \tag{1}$$

d'un autre côté, l'équation du cercle, rapportée au sommet A comme origine, est (n° 73)

$$y^2 = 2rx - x^2, \tag{2}$$

celle de la sécante AL,

$$y = mx, \tag{3}$$

et celle de la perpendiculaire BI,

$$x = 2r. \tag{4}$$

Si l'on combine successivement l'équation (3) avec cette dernière et avec l'équation (2), on obtiendra les valeurs des coordonnées des points D, C; d'où il sera facile de conclure les valeurs de AD, AC, et par suite celle de AD — AC.

Or les équations (4) et (3) donnent

$$x = 2r, \quad y = 2mr,$$

d'où

$$AD = 2r\sqrt{m^2 + 1};$$

FIG. 174. et les équations (2) et (3),

$$x = \frac{2r}{m^2+1}, \quad y = \frac{2mr}{m^2+1},$$

d'où

$$AC = \frac{2r}{\sqrt{m^2+1}}.$$

Par conséquent,

$$AD - AC = 2r\sqrt{m^2+1} - \frac{2r}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{2m^2r}{\sqrt{m^2+1}}.$$

Observons maintenant que, d'après le triangle rectangle AMP, on a

$$\text{tang MAP} \quad \text{ou} \quad m = \frac{6}{\alpha},$$

ce qui donne, toute réduction faite, pour la valeur de AD — AC,

$$AD - AC = \frac{2\,6^2 r}{\alpha\sqrt{6^2+\alpha^2}}.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer AM et AD — AC par leurs valeurs dans l'équation de condition, et l'on trouve

$$\sqrt{6^2+\alpha^2} = \frac{2\,6^2 r}{\alpha\sqrt{6^2+\alpha^2}},$$

ou, chassant le dénominateur, et résolvant par rapport à 6,

$$6^2 = \frac{\alpha^3}{2r-\alpha},$$

ou bien, en remplaçant 6 et α par y et x,

$$y^2 = \frac{x^3}{2r-x}.$$

Telle est l'équation de la *cissoïde de Dioclès*.

Discussion. — On prouverait facilement, comme on l'a fait au n° 348, que cette courbe, qui passe par l'origine, est tangente à l'axe des abscisses.

De plus, si l'on pose

$$x = r = AO,$$

il en résulte

$$y^2 = \frac{r^3}{r} = r^2, \quad \text{ou} \quad y = \pm r;$$

ce qui fait voir que la courbe doit rencontrer le cercle aux extrémités du diamètre NN′ perpendiculaire à l'axe des x.

On reconnaît enfin que plus x augmente en se rapprochant de $2r$, plus le dénominateur de la valeur de y^2 diminue, tandis que le numérateur augmente de plus en plus; donc la courbe *se rapproche sans cesse et indéfiniment* de IBI′ qui est, par conséquent, une *asymptote*.

Au delà de $x = 2r = AB$, la valeur de y devient *imaginaire*.

Conchoïde de NICOMÈDE.

331. Au nombre des courbes algébriques, on distingue encore la *conchoïde de* NICOMÈDE dont il existe également une définition géométrique que nous allons énoncer :

On donne une droite *indéfinie* LL′, et un point A dont la distance AB à LL′ est égale à une LIGNE CONNUE a. *Si du point* A, *on mène une droite quelconque* AH, *que sur cette nouvelle droite et à partir du point* D, *où elle rencontre la première* LL′, *on prenne une distance* DM *égale à une* SECONDE LIGNE CONNUE b, *on demande le lieu du point* M *pour toutes les positions qu'on peut donner à la droite* AH. Fig. 175.

Comme rien n'empêche de porter la distance b de D en M′, au lieu de la porter de D en M, il résulte évidemment de la définition précédente, que la courbe cherchée se compose de deux *branches distinctes* qui s'étendent indéfiniment à droite et à gauche de la perpendiculaire AK abaissée du point A sur LL′, et ont pour *asymptote commune* la droite LL′.

La construction de cette courbe, qui n'offre aucune difficulté, a quelque analogie avec celle de l'hyperbole, quand on donne *les asymptotes et un point*.

Pour former son équation algébrique, prenons pour axe des x la droite LL′, et pour axe des y la perpendiculaire AK; l'origine des coordonnées est alors en B.

Posons

$$AB = a, \quad BC = b, \quad BP = x, \quad MP = y;$$

FIG. 175. prolongeons d'ailleurs l'ordonnée MP jusqu'à sa rencontre en R avec une parallèle II' à LL', menée par le point A.

Les deux triangles semblables AMR, DMP, donnent

$$AM : MD :: MR : MP \quad \text{ou} \quad AM : b :: a + y : y;$$

d'où l'on déduit

$$AM = \frac{b(a+y)}{y}.$$

D'un autre côté, on a, d'après le triangle AMR,

$$\overline{AM}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{MR}^2 = x^2 + (a+y)^2;$$

par suite,

$$\frac{b^2(a+y)^2}{y^2} = x^2 + (a+y)^2,$$

ou

$$x^2 = \frac{(b^2 - y^2)(a+y)^2}{y^2}, \tag{1}$$

équation du quatrième degré en y, mais du deuxième degré en x, et à *deux* termes; ce qui prouve que la courbe est *symétrique* par rapport à l'axe des y.

Discussion. — Soit fait

$$y = 0;$$

il en résulte

$$x = \infty :$$

résultat conforme à ce qui a été dit plus haut, que LL' est une *asymptote*.

Pour $x = 0$, l'équation devient

$$(b^2 - y^2)(a+y)^2 = 0; \quad \text{d'où} \quad y = \pm b, \quad y = -a.$$

Les deux premières valeurs $+b$ et $-b$ donnent les points C et C' : ce qui doit être; mais la troisième, qui semble donner le point A pour un point de la courbe, a besoin d'être interprétée.

Or il résulte de la définition que la branche *inférieure* peut avoir son point de départ *entre* les points B et A, en C', ou *sur le prolongement* de BA, ou bien *se confondre* avec le point A, suivant que l'on a

$$b < a, \quad b > a, \quad b = a.$$

Dans le second cas, il est visible que la courbe doit avoir une espèce de *boucle*, analogue à celle du *folium* de DESCARTES (n° 317, 3e *exemple*). FIG. 176.

Quant au troisième cas, puisque pour $x = 0$ on a FIG. 177.

$$y = -b, \quad y = -a,$$

ces deux valeurs deviennent *identiques* quand on suppose les deux distances a et b *égales entre elles*, et l'on a alors le point A pour point de départ de la seconde branche.

Voilà pourquoi $y = -a$ peut être admis comme solution : elle n'est véritablement *étrangère* que dans les deux autres hypothèses :

$$b < a, \quad b > a.$$

L'équation *polaire* de la courbe est assez remarquable par sa simplicité.

Prenons le point A pour *pôle* et la droite AK pour *axe polaire*. FIG. 175.

Le triangle rectangle ABD donne

$$AB = AD.\cos BAD, \quad \text{ou} \quad a = AD.\cos\varphi;$$

d'où

$$AD = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad \text{et} \quad AM = AD + b = \frac{a}{\cos\varphi} + b.$$

Il vient donc pour l'équation polaire

$$\rho = \frac{a}{\cos\varphi} + b;$$

la longueur b pouvant être considérée avec le double *signe* $\pm$.

Si l'on fait dans cette équation,

$$\varphi = 0,$$

il en résulte

$$\cos\varphi = 1, \quad \text{d'où} \quad \rho = a + b;$$

ce qui donne C et C′ comme points de la courbe.

Pour $\varphi = 90^0$, on a

$$\cos\varphi = 0, \quad \text{d'où} \quad \rho = \infty;$$

et le rayon vecteur devient *parallèle* à LL′.

De cette équation polaire, il est facile de déduire l'équation purement algébrique obtenue précédemment.

FIG. 175. Le triangle rectangle ARM donned'abord

$$AM = \sqrt{\overline{AR}^2 + \overline{MR}^2} = \sqrt{\overline{BP}^2 + \left(\overline{PM} + \overline{PR}\right)^2};$$

par suite,

$$\rho = \sqrt{x^2 + (a+y)^2}.$$

Puis on a, d'après le triangle DPM,

$$PM = DM.\cos DMP = b.\cos\varphi; \quad \text{d'où} \quad \cos\varphi = \frac{y}{b}.$$

Ainsi l'équation polaire devient par la substitution des *valeurs* de ρ et de $\cos\varphi$,

$$\sqrt{x^2 + (a+y)^2} = \frac{ab}{y} + b = \frac{b(a+y)}{y},$$

d'où, élevant au carré et transposant,

$$x^2 = \frac{(b^2 - y^2)(a+y)^2}{y^2};$$

c'est l'équation algébrique qu'on avait obtenue directement (*).

§ III. — DES COURBES DU SECOND DEGRÉ SEMBLABLES. — IDENTITÉ DES COURBES DU SECOND DEGRÉ AVEC LES SECTIONS PLANES D'UN CÔNE DROIT OU D'UN CÔNE OBLIQUE A BASE CIRCULAIRE. — DES SECTIONS CONIQUES SEMBLABLES. — DE LA SECTION PLANE DANS UN CYLINDRE DROIT OU OBLIQUE A BASE CIRCULAIRE.

Des courbes du second degré semblables.

352. Deux *ellipses* ou deux *hyperboles* sont dites SEMBLABLES, lorsqu'elles ont *leurs axes proportionnels*.

Ainsi, soient A et B les *demi-axes* d'une première ellipse, a et b ceux d'une seconde ellipse; elles sont *semblables* si l'on a la proportion

$$A : B :: a : b, \quad \text{ou} \quad A : a :: B : b.$$

(*) MONTUCLA, dans son *Histoire des Mathématiques*, tome I, pages 254 et suivantes, expose un moyen de construire cette courbe d'un mouvement *continu*, et en fait connaître l'application à la construction des deux problèmes de la *trisection de l'angle*, et de la *duplication du cube*. (*Voir* les nos 335 et suivants.)

Cette dénomination vient de ce que les deux courbes jouissent alors des mêmes propriétés que les *figures semblables* considérées en géométrie, ainsi que nous allons le démontrer.

ELLIPSES. — Pour faciliter le développement des diverses propositions, nous supposerons les courbes placées l'une sur l'autre de manière qu'elles soient concentriques, et que leurs axes aient la même direction.

Soient donc deux ellipses pour lesquelles OA, Oa, désignent les *moitiés* des grands axes, et OC, Oc les *moitiés* des seconds. FIG. 178.

1°. Si l'on tire les cordes AC, ac, elles seront nécessairement *parallèles*, et l'on aura la suite de rapports égaux

$$\text{AC} : ac :: \text{A} : a :: \text{B} : b. \tag{1}$$

2°. Considérons une ligne quelconque OL menée par le centre, et appelons D, d, les *demi-diamètres* OM, Om; Y, X, les coordonnées du point M; y, x, celles du point m.

Puisque les trois points O, m, M sont en ligne droite, on a la nouvelle suite de rapports égaux

$$\text{Y} : y :: \text{X} : x :: \text{D} : d;$$

et comme les points M, m appartiennent aux deux courbes, on a aussi les deux relations

$$\text{Y}^2 = \frac{\text{B}^2}{\text{A}^2}(\text{A}^2 - \text{X}^2), \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

d'où, à cause de $\frac{\text{B}}{\text{A}} = \frac{b}{a}$,

$$\text{Y}^2 : y^2 :: \text{A}^2 - \text{X}^2 : a^2 - x^2.$$

Mais on a déjà

$$\text{Y}^2 : y^2 :: \text{X}^2 : x^2;$$

donc

$$\text{X}^2 : x^2 :: \text{A}^2 - \text{X}^2 : a^2 - x^2;$$

ce qui donne

$$a^2\text{X}^2 = \text{A}^2 x^2,$$

par suite,

$$\text{X} : x :: \text{A} : a.$$

Par conséquent

$$\text{A} : a :: \text{X} : x :: \text{Y} : y :: \text{D} : d. \tag{2}$$

FIG. 178. 3°. Soient F et *f* les *foyers* de droite dans les deux courbes, et désignons par C, *c* les distances OF, O*f*; puis menons les rayons vecteurs FM = R, *fm* = *r*.

Les relations

$$C^2 = A^2 - B^2, \quad c^2 = a^2 - b^2,$$

reviennent à

$$C^2 = A^2\left(1 - \frac{B^2}{A^2}\right), \quad c^2 = a^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right);$$

d'où l'on déduit, à cause de $\frac{B}{A} = \frac{b}{a}$,

$$C : c :: A : a;$$

et les triangles OMF, O*mf*, qui sont alors nécessairement semblables, donnent aussi

(3) $$FM : fm \text{ ou } R : r :: C : c :: A : a.$$

4°. Aux points M, *m*, menons les tangentes MR, *mr*; ces tangentes sont *parallèles*, car leurs *coefficients d'inclinaison*,

$$-\frac{B^2 X}{A^2 Y}, \quad -\frac{b^2 x}{a^2 y},$$

sont égaux en vertu des relations précédemment établies,

$$\frac{B}{A} = \frac{b}{a}, \quad \frac{X}{Y} = \frac{x}{y};$$

d'où l'on voit que les distances OR, O*r*, et, par suite, les *sous-tangentes* et les *sous-normales* qui correspondent aux points M, *m* sont aussi dans le rapport

(4) $$D : d \text{ ou } A : a.$$

5°. Puisque les tangentes MR, *mr* sont parallèles, il s'ensuit que les deux diamètres *conjugués* des diamètres OM, O*m*, doivent avoir *une même* direction.

Soient donc ON, O*n* ces deux diamètres; comme, en vertu de ce qui a été dit plus haut, on a

$$ON : On :: A : a,$$

et que, d'ailleurs,

$$OM : Om :: A : a,$$

il en résulte

(5) $$OM : Om :: ON : On, \text{ ou } A' : B' :: a' : b'.$$

A′ et B′, a' et b', désignant respectivement deux *demi-diamètres conjugués* pour chaque ellipse.

6°. Enfin tirons une autre droite quelconque OL′ qui rencontre les deux courbes aux points M′, m', et menons les cordes MM′, mm'.

Les triangles OMM′, Omm' sont semblables comme ayant un angle égal, O, compris entre côtés proportionnels, et donnent, par conséquent,

$$\mathrm{MM'} : mm' :: \mathrm{A} : a.$$

Concevons maintenant qu'on ait *inscrit* aux ellipses deux polygones dont les *sommets* soient *deux à deux* en ligne droite avec le centre; il suit de ce qu'on vient de dire, que ces polygones ont leurs côtés parallèles et respectivement *proportionnels;* donc ils sont *semblables.*

Ainsi les contours de ces polygones sont *proportionnels aux demi-axes* des deux ellipses, et leurs surfaces *sont entre elles comme les carrés de ces demi-axes.*

Ces deux résultats étant vrais quel que soit le nombre des côtés des polygones, le sont encore à la *limite.*

Donc les contours E, e des deux ellipses sont entre eux dans le rapport des deux axes, et leurs surfaces S et s dans le rapport des carrés de ces mêmes lignes; c'est-à-dire que l'on a

$$\mathrm{E} : e :: \mathrm{A} : a, \quad \mathrm{S} : s :: \mathrm{A}^2 : a^2. \tag{6}$$

On pourrait multiplier indéfiniment les conséquences qui résultent de la proportionnalité des axes; mais celles qui viennent d'être développées suffisent pour établir que ces ellipses ont *tous leurs éléments homologues proportionnels* à ces *axes* s'ils sont *linéaires,* ou dans le même rapport que les carrés des axes s'ils sont *superficiels.*

Les mêmes propriétés s'appliquent à l'HYPERBOLE et se démontreraient de la même manière.

Mais on voit, en outre, immédiatement, 1° que deux hyperboles SEMBLABLES dont les axes ont *la même* direction, ont aussi *les mêmes asymptotes;* 2° que *deux hyperboles équilatères sont toujours semblables,* puisque les rapports $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, \frac{b}{a}$ sont *identiques* et égaux à 1.

353. Deux PARABOLES quelconques sont toujours des *figures semblables*, parce qu'ainsi que nous allons le faire voir, *leurs éléments homologues sont proportionnels*, et *dans le rapport des paramètres* si ces éléments sont *linéaires*, ou dans le *rapport des carrés de ces paramètres* s'il s'agit de *surfaces*.

La proposition est déjà évidente pour les distances des *foyers* et des *directrices* aux *sommets* respectifs des deux paraboles, puisque $2P$, $2p$, désignant les paramètres, les expressions de ces distances sont $\frac{1}{2}P$, $\frac{1}{2}p$.

FIG. 179. Pour mieux la faire ressortir à l'égard des autres éléments, concevons que les deux courbes soient placées l'une sur l'autre, de manière à avoir *même sommet* A et même *axe principal* AX.

Soient F, f les deux foyers pour lesquels on a

$$(1) \qquad AF : Af :: P : p.$$

Cela posé, tirons une droite quelconque AL, qui rencontre les courbes en M, m; abaissons les ordonnées $MP = Y$, $mp = y$, qui correspondent aux abscisses $AP = X$, $Ap = x$; et menons les rayons vecteurs $MF = R$, $mf = r$.

Les triangles AMP, Amp sont semblables et donnent

$$(2) \qquad AM : Am :: Y : y :: X : x;$$

mais les équations des deux courbes,

$$Y^2 = 2P.X, \quad y^2 = 2p.x,$$

reviennent à

$$\frac{Y}{X} = \frac{2P}{Y}, \quad \frac{y}{x} = \frac{2p}{y};$$

d'où l'on conclut, à cause de la relation (2),

$$\frac{2P}{Y} = \frac{2p}{y}, \quad \text{par suite,} \quad \frac{P}{p} = \frac{Y}{y} = \frac{X}{x}.$$

On a donc aussi

$$(3) \qquad AM : Am :: Y : y :: X : x :: P : p.$$

De cette dernière suite et de la proportion (1) on déduit

$$AM : Am :: AF : Af;$$

ainsi les deux triangles AMF, A*mf* sont eux-mêmes semblables et donnent

(4) $$AM : Am :: MF : mf :: AF : Af :: P : p.$$

Les *sous-tangentes* étant (n° 264) *doubles* des abscisses des points de contact M, *m*, sont aussi dans le *rapport des paramètres*.

Ce même *rapport* existe évidemmeut pour les *sous-normales* dont les expressions sont (n° 265) respectivement P et *p*.

Enfin si, comme on l'a fait pour l'ellipse (n° 352, 6°), on mène une seconde sécante quelconque AL', et qu'on tire les cordes MM', *mm'*, elles sont nécessairement parallèles, et l'on arrivera à la conséquence que *les aires des surfaces comprises entre les droites* AM, A*m et les portions de courbes correspondantes, sont proportionnelles aux carrés des paramètres*.

La proposition est donc complétement démontrée.

354. REMARQUE SUR LES PARAMÈTRES DANS LES COURBES EN GÉNÉRAL. — On se rend compte de la propriété dont jouissent les *paraboles* d'être toutes *semblables*, par cette considération qu'il n'entre dans leur équation simplifiée qu'une *seule constante* nommée PARAMÈTRE.

Dans l'ellipse et l'hyperbole dont les équations simplifiées renferment *deux constantes* A, B, il est nécessaire, pour que les courbes de même genre soient *semblables*, que ces constantes soient *proportionnelles*.

Ce n'est que par analogie avec la parabole qu'on a désigné sous le nom de *paramètre* dans l'ellipse et l'hyperbole la quantité $\frac{2B'}{A}$; mais dans les questions de *haute analyse*, on est généralement convenu d'appeler *paramètre* les constantes dont nous venons de parler, en tant que leur connaissance est *nécessaire et suffisante* pour que la courbe soit complétement déterminée.

Il ne suffit pas que les longueurs de deux *diamètres conjugués* d'une ellipse, par exemple, soient connues pour que la

courbe puisse être tracée ; il faut encore donner l'angle qu'ils font entre eux. Ainsi ces longueurs ne peuvent être considérées comme des *paramètres* qu'autant que l'on y joint une troisième donnée.

Il en serait de même si l'on donnait le *paramètre* $2p'$ pour un système d'*axes conjugués* dans une parabole sans donner en même temps l'angle de ces deux axes.

Identité des courbes du second degré avec les sections planes d'un CÔNE DROIT *ou d'un* CÔNE OBLIQUE *à base circulaire.*

355. L'intersection d'un cône *droit* ou *oblique*, à base *circulaire*, par un plan, donne lieu aux trois courbes du second degré, ou à une de leurs variétés, suivant la position du plan, et ce sont *les seules lignes* qu'on puisse obtenir; ce qui a fait donner à ces courbes le nom de *sections coniques*.

FIG. 180. Soient d'abord SADBE un cône *droit*, SC son axe, CD le rayon de la base, LL′ la trace du plan d'intersection (appelé *plan sécant*) sur celui de la base, et OMO′M′ la courbe d'intersection dont il s'agit de trouver la nature.

Cherchons l'équation de cette ligne.

A cet effet, abaissons, du centre C de la base, CG perpendiculaire sur LL′; puis, par CG et SC, conduisons un nouveau plan, dit *plan principal* (on donne ce nom à tout plan passant par l'axe du cône); son intersection avec le plan *sécant* est une droite GOX perpendiculaire à LL′, en vertu d'un théorème connu de Géométrie.

C'est cette droite OX que nous prendrons pour axe des x; et celui des y sera OY, ou la perpendiculaire élevée par le point O à GX dans le plan de la courbe (la ligne OY est alors parallèle à LL′).

Si, par un point quelconque P de OX, on conçoit un plan *parallèle* à la base, la Géométrie nous apprend que son intersection avec le cône est un *cercle*. Ce même plan coupe le plan *principal* suivant IH parallèle à AB, le plan *sécant* suivant une droite MPM′ parallèle à LL′, et par

conséquent à OY; en sorte que MPM′ est à la fois perpendiculaire sur GX et sur IH.

Cela posé, faisons

$$OP = x, \quad MP = y, \quad SO = a,$$

$$\text{ang SOX} = \alpha, \quad \text{ang ASB ou OSO}' = 6, \quad \text{d'où} \quad \text{ASC} = \frac{1}{2}6.$$

Comme MP, ordonnée de la courbe, est en même temps une ordonnée du cercle, on a, d'après un théorème de Géométrie,

$$y^2 = IP \times PH; \tag{1}$$

et la question est ramenée à exprimer IP, PH en fonction de x et des données 6, α et a.

Or le triangle OPI donne

$$IP : OP :: \sin IOP : \sin OIP,$$

ou, à cause de

$$\sin IOP = \sin SOX = \sin \alpha,$$

et de

$$\sin OIP = \sin SIH = \cos ASC = \cos \frac{1}{2}6,$$

$$IP : x :: \sin\alpha : \cos\frac{1}{2}6;$$

d'où

$$IP = \frac{x \sin \alpha}{\cos \frac{1}{2}6}.$$

Afin d'obtenir PH, cherchons d'abord la valeur de OO′ et de PO′. On a, d'après le triangle SOO′,

$$OO' : SO :: \sin OSO' : \sin OO'S, \text{ ou } OO' : a :: \sin 6 : \sin(\alpha + 6);$$

d'où

$$OO' = \frac{a \sin 6}{\sin(\alpha + 6)}, \quad \text{par suite,} \quad PO' = \frac{a \sin 6}{\sin(\alpha + 6)} - x.$$

Mais le triangle PO′H donne

$$PH : PO' :: \sin PO'H : \sin PHO',$$

c'est-à-dire

$$PH : \frac{a \sin 6}{\sin(\alpha + 6)} - x :: \sin(\alpha + 6) : \cos \frac{1}{2}6;$$

Fig. 180. donc

$$PH = \frac{a \sin 6 - x \sin(\alpha + 6)}{\cos \frac{1}{2} 6}.$$

Substituant les valeurs de IP et de PH dans l'équation (1), on obtient enfin

$$y^2 = \frac{x \sin \alpha}{\cos \frac{1}{2} 6} \times \frac{a \sin 6 - x \sin(\alpha + 6)}{\cos \frac{1}{2} 6},$$

ou

$$(2) \qquad y^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} 6} [a . \sin \alpha . \sin 6 . x - \sin \alpha \sin(\alpha + 6) x^2]$$

pour l'équation générale des *sections coniques*.

Cette équation étant du second degré, il s'ensuit que *toutes les sections coniques sont des courbes du second degré*.

Discussion. — Si l'on compare l'équation (2) à l'équation commune aux trois courbes du second degré (n° 146),

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

après y avoir remplacé $\sin 6$ par sa valeur $2 \sin \frac{1}{2} 6 \cos \frac{1}{2} 6$, on arrive aux deux relations

$$a \sin \alpha . \operatorname{tang} \frac{1}{2} 6 = p, \quad \frac{\sin \alpha . \sin(\alpha + 6)}{\cos^2 \frac{1}{2} 6} = -q.$$

Or $\cos^2 \frac{1}{2} 6$ est essentiellement *positif*, et $\sin \alpha$ peut, comme nous allons le voir, être lui-même supposé *positif*; en sorte que le signe du coefficient de x^2, et, par suite, *le genre* de la courbe, ne dépend que du signe de $\sin(\alpha + 6)$; d'où il résulte que cette courbe est une *ellipse*, une *parabole* ou une *hyperbole*, suivant que l'on a

$$\sin(\alpha + 6) \textit{ positif, nul} \text{ ou } \textit{négatif},$$

ou bien,

$$\alpha + 6 < 180^\circ, \quad \alpha + 6 = 180^\circ, \quad \alpha + 6 > 180^\circ.$$

Traduisons ces résultats *géométriquement* :

1°. La condition Fig. 180.

$$\alpha + 6 < 180°$$

signifie que la droite OX, intersection du plan *sécant* et du plan *principal*, rencontre les deux génératrices opposées, SA, SB, d'un même côté du *sommet* S; et l'on obtient alors une courbe *rentrante* et *fermée*, OMO'M'O : c'est une ELLIPSE qui devient *un cercle*, lorsque le plan *sécant* a une position *parallèle* au plan de la base.

2°. Poser Fig. 181.

$$\alpha + 6 = 180°,$$

c'est dire que la droite OX est *parallèle* à la génératrice SB; donc le plan *sécant* est lui-même parallèle à cette génératrice, ou ne la rencontre qu'à l'*infini*, auquel cas on a une courbe *indéfinie* dans le sens OX : c'est une PARABOLE FOE, la trace du plan *sécant* étant LEGFL'.

3°. Enfin l'hypothèse Fig. 182.

$$\alpha + 6 > 180°$$

correspond au cas où la droite OX va rencontrer la génératrice SB sur son prolongement en O'; c'est-à-dire qu'alors le plan *sécant* coupe les deux *nappes* de la surface conique, et détermine une courbe composée de deux branches *indéfinies* et opposées l'une à l'autre : c'est une HYPERBOLE ayant OO' pour *premier axe*.

Quant aux *variétés* des trois genres de courbes du second degré, on les obtient successivement en supposant que le plan *sécant* passant par la génératrice SA, et ayant d'abord pour trace sur le plan de la base la tangente au point A menée à cette base, *tourne* autour du point O, de manière que l'angle SOX prenne toutes les valeurs *possibles* depuis *zéro* jusqu'à 180 degrés. Fig. 180, 181, 182.

Si ce plan venait à continuer son mouvement autour du point O, et dans le même sens, il reprendrait évidemment les mêmes positions qu'auparavant et, par suite, *reproduirait* les différentes courbes déjà obtenues. Ce nouveau mouvement devient donc inutile, et par conséquent $\sin\alpha$ peut toujours être considéré comme *positif*, ainsi que nous l'avons énoncé en commençant la *discussion*.

FIG. 180, 181, 182. Jusqu'à présent nous avons supposé que le plan sécant était assujetti, dans son mouvement, à passer par un point déterminé O de la génératrice SA; mais rien n'empêche qu'il l'exécute autour du sommet S.

Dans ce cas, on voit encore facilement que la courbe d'intersection se réduira à *un point*, tant que le plan restera dans l'*intérieur* de l'angle BSA'; qu'elle se réduira à *une seule droite*, lorsque le plan conduit suivant SB, sera *extérieur*, à la fois, aux deux angles BSA' et BSA, et qu'elle se transformera en un système de *deux droites qui se coupent* (*deux génératrices* du cône), quand le plan se trouvera dans l'*intérieur* de l'angle BSA.

On voit ainsi que le *point*, *une seule droite*, ou *deux droites qui se coupent*, font partie des *sections* du cône par un plan.

C'est ce qu'on peut reconnaître également au moyen de l'équation (2) en y faisant

$$a \text{ ou } SO = 0.$$

Elle se réduit, dans cette hypothèse, à

$$y^2 = -\frac{\sin\alpha.\sin(\alpha+\theta)}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}.x^2,$$

équation qui, pour $\alpha+\theta<180^\circ$, est de la forme

$$y^2+kx^2=0 \quad (k \text{ étant positif}),$$

et qui ne peut être satisfaite que par $y=0$, $x=0$; pour $\alpha+\theta=180^\circ$, elle devient

$$y^2=0, \quad \text{d'où} \quad y=0;$$

enfin, pour $\alpha+\theta>180^\circ$, elle prend la forme

$$y^2=kx^2 \quad \text{ou} \quad y=\pm x\sqrt{k} \quad (k \text{ étant encore positif}),$$

et représente *un système de deux droites qui se coupent*.

N. B. — Le système de *deux droites parallèles* qui, comme on l'a vu aux n°s 161 et 297, est un cas particulier de *la parabole*, semble faire *exception* tant qu'il s'agit d'un cône proprement dit; mais nous reviendrons bientôt sur ce cas particulier.

356. Pour compléter la démonstration de l'*identité* des

courbes du second degré et des *sections coniques*, il nous reste encore à faire voir qu'une *courbe du second degré* étant donnée *à priori*, il est toujours possible de la *reproduire* au moyen de l'*intersection d'un plan et d'un cône droit*.

A cet effet, reprenons les deux relations établies dans la discussion précédente,

$$a \sin\alpha . \operatorname{tang}\frac{1}{2}6 = p, \qquad \frac{\sin\alpha . \sin(\alpha + 6)}{\cos^2\frac{1}{2}6} = -q,$$

et tâchons de déterminer a et α, connaissant p, q et 6.

Comme la seconde de ces relations ne renferme que l'inconnue α, elle peut servir à la déterminer; après quoi, la première fera connaître l'inconnue a en valeur *réelle*, si la quantité α est susceptible elle-même d'une valeur réelle.

Nous n'avons donc à nous occuper que de la résolution, par rapport à α, de la seconde relation, qui revient d'ailleurs à celle-ci :

$$\sin\alpha . \sin(\alpha + 6) = -q \cos^2\frac{1}{2}6. \tag{1}$$

Pour déterminer l'angle α d'après cette équation, il faut faire subir à celle-ci une transformation.

La Trigonométrie donne la formule

$$\sin\frac{1}{2}(a - b) . \sin\frac{1}{2}(a + b) = \frac{\cos b - \cos a}{2},$$

et, si l'on pose

$$a - b = 2\alpha, \quad a + b = 2\alpha + 26,$$

d'où l'on déduit en ajoutant, puis en soustrayant,

$$a = 2\alpha + 6, \quad b = 6,$$

la formule ci-dessus devient

$$\sin\alpha . \sin(\alpha + 6) = \frac{\cos 6 - \cos(2\alpha + 6)}{2};$$

par suite, on a la nouvelle équation

$$\frac{\cos 6 - \cos(2\alpha + 6)}{2} = -q \cos^2\frac{1}{2}6;$$

ce qui donne enfin

$$\cos(2\alpha + 6) = \cos 6 + 2q \cos^2\frac{1}{2}6 : \tag{2}$$

c'est cette dernière équation qui doit servir à faire connaître α.

Elle donne d'abord immédiatement l'angle $2\alpha + 6$, puisque 6 et q sont connus; retranchant 6, puis divisant par 2, on obtiendra finalement la valeur de α.

Mais pour que l'angle $2\alpha + 6$ (et par conséquent α) soit susceptible d'une détermination *réelle*, il faut que le cosinus de cet angle, ou sa valeur

$$\cos 6 + 2q\cos^2\frac{1}{2}6,$$

ne soit ni supérieur ni inférieur à ses deux *limites* $+1$ et -1; c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\cos 6 + 2q\cos^2\frac{1}{2}6 \leqq 1 \quad \text{et} \quad \geqq -1.$$

Analysons chacune des deux *inégalités*, en leur faisant subir une nouvelle transformation.

On connaît la formule

$$\cos 6 = \cos^2\frac{1}{2}6 - \sin^2\frac{1}{2}6 = 2\cos^2\frac{1}{2}6 - 1;$$

de là on déduit, pour la première inégalité,

$$2\cos^2\frac{1}{2}6 - 1 + 2q\cos^2\frac{1}{2}6 < 1;$$

ou

$$(1+q)\cos^2\frac{1}{2}6 < 1, \quad 1+q < \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}6},$$

ou bien, remplaçant $\dfrac{1}{\cos^2\frac{1}{2}6}$ par sa valeur $1 + \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}6$,

$$q < \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}6. \tag{3}$$

La seconde inégalité devient, par la même substitution,

$$2\cos^2\frac{1}{2}6 - 1 + 2q\cos^2\frac{1}{2}6 > -1,$$

ou

$$(1+q)\cos^2\frac{1}{2}6 > 0;$$

ou bien, divisant par $\cos^2\frac{1}{2}\theta$,

$$1+q>0. \tag{4}$$

Cela posé, considérons successivement chacune des trois courbes.

Pour la PARABOLE, on a $q=0$; les inégalités (3) et (4) se réduisant alors à

$$0<\tang^2\tfrac{1}{2}\theta, \quad 1>0,$$

sont évidemment satisfaites d'elles-mêmes.

Ainsi une *parabole* et un *cône droit* étant donnés, *il est toujours possible de trouver un plan dont l'intersection avec le cône produise la courbe donnée.*

S'il s'agit d'une ELLIPSE, comme q est *négatif*, l'inégalité (3) est satisfaite.

On a d'ailleurs (n° 146)

$$q<-\frac{B^2}{A^2},$$

d'où

$$1+q=1-\frac{B^2}{A^2}=\frac{A^2-B^2}{A^2}, \quad (\text{A étant} > \text{B}).$$

Il en est donc de même de l'inégalité (4).

Ainsi, une *ellipse* et un *cône* étant donnés, il *est toujours possible de trouver un plan qui coupe le cône suivant la courbe donnée.*

Quant à l'HYPERBOLE, comme q est *positif*, l'inégalité (4) est satisfaite d'elle-même.

Mais l'autre devenant, par la substitution de $+\frac{B^2}{A^2}$ à la place de q,

$$\frac{B^2}{A^2}<\tang^2\tfrac{1}{2}\theta,$$

exige que l'angle $\frac{1}{2}\theta$ soit *au moins égal* à l'angle dont la tangente a pour *valeur numérique* $\frac{B}{A}$; ce qui veut dire, en langage géométrique, qu'une *hyperbole* étant donnée *à*

priori, on ne peut la *placer sur un cône* qu'autant que l'angle 6 de deux *génératrices opposées* est *au moins égal* à l'angle que forment entre elles *les deux asymptotes* de la courbe donnée : condition qui peut toujours être remplie.

On doit donc regarder comme complétement démontré que *toute courbe du second degré peut être considérée comme une section conique.*

357. *Remarque.* — La condition particulière à l'hyperbole peut s'expliquer par la Géométrie.

Concevons, en effet, qu'on ait mené dans un cône droit UN PREMIER système de plans parallèles entre eux et, de plus, *parallèles à l'axe* du cône; ces plans donnent lieu à une suite d'*hyperboles* dont les asymptotes forment entre elles *le même* angle; car, dans l'équation (2) du n° 355, le coefficient de x^2 qui, pour le cas de l'hyperbole, a pour expression $\frac{B^2}{A^2}$, est *indépendant* de la distance a du plan sécant au sommet du cône, ce qui prouve que $\frac{B}{A}$ est *constant* pour toutes les hyperboles dont il est ici question.

L'un de ces plans passant par l'axe lui-même, détermine sur la surface conique *deux génératrices* dont l'angle est égal à celui des asymptotes.

Maintenant, considérons UN SECOND système de plans parallèles entre eux, mais *non parallèles à l'axe*, et tel qu'il donne encore lieu à des hyperboles. L'angle des asymptotes de ces hyperboles est aussi constant et égal à l'angle des *deux génératrices* déterminées par celui des plans de ce système, qui passe par le sommet du cône. Or ce nouvel angle est *nécessairement moindre* que celui dont le plan contient l'axe; car dans l'*angle trièdre* formé par l'axe et les deux génératrices dont nous venons de parler, l'angle de celles-ci est moindre que la somme des angles qu'elles forment avec l'axe, somme qui est égale à 6 ou à l'*angle au sommet* du cône.

D'où l'on voit que le *maximum* des angles que forment

entre elles les asymptotes de toutes les hyperboles qu'on peut obtenir sur la surface d'un cône droit, est l'*angle de deux génératrices opposées*, ou l'*angle au sommet* du cône, et qu'ainsi il n'est pas possible *de placer sur un cône droit une hyperbole dont les asymptotes font un angle plus grand que l'angle au sommet de ce cône.*

358. DE LA SECTION ANTIPARALLÈLE OU SOUS-CONTRAIRE DANS LE CÔNE OBLIQUE A BASE CIRCULAIRE. — L'intersection d'un cône *oblique* à base circulaire par un plan, donne également lieu aux trois courbes du second degré; mais elle offre une particularité, c'est que l'on peut obtenir un cercle au moyen de *deux* systèmes différents de plans parallèles : ce qui n'est pas possible dans le cône *droit*.

Pour faire ressortir immédiatement cette propriété, il est d'abord indispensable de prendre le *plan sécant* dans une position spéciale que nous allons déterminer.

Du sommet S abaissons SK perpendiculaire sur la base; FIG. 183.
et par SC, SK conduisons un plan (appelé *plan principal*) qui coupe celui de la base suivant la droite indéfinie GCB représentant la projection de l'axe sur la base. Élevons ensuite en un point quelconque G de GCB, et dans le plan de la base, la droite LL' perpendiculaire à GC; c'est cette droite LL' qu'il faut prendre pour la trace du *plan sécant*. L'intersection de ce plan avec le *plan principal* est une droite quelconque GOX; et la courbe OMO'M' produite par ce même plan sur la surface conique est celle dont il s'agit de former l'équation.

Prenons OX pour l'axe des abscisses, et pour axe des y la droite OY parallèle à LL'; puis, par un point quelconque P de OX, conduisons un plan parallèle à la base, ce qui détermine une circonférence de cercle dont le diamètre est IH, et l'intersection avec le plan sécant une droite MPM', parallèle à OY et à LL', et par conséquent perpendiculaire à la fois à IH et à OX (puisque LL' est en même temps perpendiculaire à GC et à GX, d'après les principes de Géométrie).

FIG. 183.

Puis, posons

$$OP = x, \quad MP = y, \quad SO = a,$$
$$\text{ang}\,SOO' = \alpha, \quad \text{ang}\,OSO' \text{ ou } ASB = 6, \quad \text{ang}\,SAB = \gamma.$$

MP étant une ordonnée du cercle, on a d'abord

$$y^2 = IP \times PH,$$

et il faut calculer IP et PH.

En opérant comme au n° 355, on obtient successivement

$$IP = \frac{x \sin\alpha}{\sin\gamma},$$

$$OO' = \frac{a \sin 6}{\sin(\alpha + 6)}, \quad PO' = \frac{a \sin 6}{\sin(\alpha + 6)} - x,$$

et, par suite,

$$PH = \frac{a \sin 6 - x \sin(\alpha + 6)}{\sin(6 + \gamma)};$$

d'où, substituant dans l'expression de y^2,

$$y^2 = \frac{a \sin\alpha . \sin 6}{\sin\gamma \sin(6 + \gamma)} x - \frac{\sin\alpha \sin(\alpha + 6)}{\sin\gamma \sin(6 + \gamma)} x^2.$$

Comme il résulte des constructions indiquées ci-dessus, que les axes auxquels la courbe est actuellement rapportée sont *rectangulaires*, il s'ensuit (n° 85) qu'elle deviendra *une circonférence de cercle* si l'on fait en sorte que le coefficient de x^2, qui est ici précédé du signe —, soit égal à l'unité.

Or on arrive à ce résultat, soit en posant

$$\alpha = \gamma,$$

soit en posant

$$\alpha = 180^\circ - (6 + \gamma).$$

Car la première hypothèse donne

$$\sin(\alpha + 6) = \sin(6 + \gamma),$$

d'où

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin(\alpha + 6)}{\sin(6 + \gamma)} = 1;$$

la seconde donne

$$\sin\alpha = \sin(6 + \gamma),$$

puis

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + 6), \quad \text{d'où} \quad \sin\gamma = \sin(\alpha + 6),$$

et, par suite,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(6+\gamma)} \times \frac{\sin(\alpha+6)}{\sin\gamma} = 1;$$

en sorte qu'il ne reste plus qu'à traduire sur la figure ces deux conditions

$$\alpha = \gamma, \quad \alpha = 180^\circ - (6+\gamma).$$

La première, qui revient à SOO′ = SAB, indique que le *plan sécant* doit être *parallèle* au plan de la base.

La seconde exprime que l'angle SOO′ doit être *égal à l'angle* SBA, puisque SBA = 180° — (6 + γ).

Cette autre *section circulaire* porte le nom de section *antiparallèle* ou *sous-contraire*.

On fait usage de cette propriété dans la construction des *mappemondes*.

359. Pour obtenir l'équation la plus générale d'une section faite par un plan dans le cône oblique à *base circulaire*, on opère de la manière suivante : FIG. 184.

Soit LL′ la trace du plan sécant sur celui de la base. *Abaissez* du centre C de la base une perpendiculaire CG sur LL′; puis *conduisez* suivant l'axe SC et la perpendiculaire CG un plan qui coupe la surface conique suivant deux droites SA′, SB′; concevez ensuite par LL′ un plan quelconque dont l'intersection avec le plan A′SB′ est une droite GOX, et qui détermine, comme précédemment, une courbe telle que OMO′M′.

En prenant pour axes les droites OX et OY *parallèle* à LL′, et conservant les mêmes notations que précédemment, on parvient à une équation tout à fait *identique;* mais il y a cette différence, c'est que l'ordonnée MP du cercle IMH est bien perpendiculaire au diamètre IH, mais ne l'est pas à l'axe OO′; en sorte que la courbe OMO′M′ se trouve rapportée à un système d'*axes conjugués* dont l'origine est placée à l'une des extrémités d'un diamètre.

Quoi qu'il en soit, il n'en est pas moins démontré que l'intersection du cône oblique à *base circulaire* par un plan donne également lieu aux *trois courbes du second degré*.

Des sections coniques semblables.

360. On appelle *sections coniques semblables* toutes les courbes que l'on obtient *en coupant un cône par une série de plans parallèles entre eux.*

La considération de ces sortes de sections est une suite naturelle de la remarque du n° 357.

En effet, s'il s'agit d'ELLIPSES ou d'HYPERBOLES, comme dans l'équation générale des sections coniques (n° 355), le coefficient de x^2 a (n° 146) pour expression

$$\mp\frac{B^2}{A^2},$$

on voit que, pour un même système de plans parallèles, le rapport

$$\frac{B}{A}$$

est *constant*, et que, par suite, les courbes correspondantes ont *leurs axes proportionnels;* ce qui (n° 352) constitue la définition des ellipses ou des hyperboles *semblables.*

Quant à la PARABOLE, comme on ne peut l'obtenir qu'en coupant le cône par des plans *parallèles à l'une des génératrices,* il s'ensuit que toutes les sections *paraboliques,* dans un cône donné, sont *semblables;* ce qui confirme la proposition précédemment établie (n° 353), que *toutes les paraboles sont semblables.*

Mais ce qu'il importe de remarquer, c'est qu'en général on ne saurait obtenir des *ellipses* ou des *hyperboles semblables* que par les sections planes faites dans des *cônes semblables,* c'est-à-dire dans des cônes engendrés par des triangles rectangles semblables ou ayant *même angle au sommet;* tandis que *toutes les paraboles* auxquelles donnent lieu les intersections planes des cônes ayant *des angles au sommet différents,* sont nécessairement des *courbes semblables.*

De la section plane dans un cylindre droit ou oblique à base circulaire.

361. Recherchons maintenant ce que donne l'intersection d'un cylindre par un plan.

Nous considérerons d'abord un cylindre *oblique* et un plan tout à fait arbitraire.

Soit un cylindre ayant pour *plan principal* le parallélogramme ABB'A'; ce plan est déterminé par l'axe CC' et la projection de l'axe sur le plan de la base; d'où il résulte qu'il est perpendiculaire à cette base. FIG. 185.

Désignons par LL' la trace d'un plan quelconque sur la base, et abaissons du point C une perpendiculaire CG sur LL'; puis conduisons un plan selon CG et CC': ce nouveau plan détermine sur le cylindre une section $abb'a'$, et sur le plan sécant une certaine droite GOO'X que nous prendrons pour axe des x; l'axe des y sera une droite OY parallèle à LL'.

Par un point quelconque P de OX, concevons une section parallèle à la base, et par conséquent *circulaire;* le plan de cette section coupera $ab\,b'a'$ suivant une droite IPH parallèle à GC.

Posons enfin

$$OP = x, \quad MP = y, \quad \text{ang } a'OX = \alpha, \quad \text{ang } OaC = \gamma,$$

et appelons $2r$ le diamètre de la base.

Puisque MP, ligne commune au plan de la section circulaire et de la section dont nous cherchons l'équation, est parallèle à OY et à LL', et que, par construction, LL' est perpendiculaire à CG, il s'ensuit que MP est aussi perpendiculaire au diamètre IH de la section circulaire, et peut être considérée comme *une ordonnée* à ce diamètre; et l'on a

$$MP^2 = y^2 = IP \times PH.$$

Mais le triangle OIP donne

$$IP : OP :: \sin IOP : \sin OIP, \quad \text{ou} \quad IP : x :: \sin\alpha : \sin\gamma;$$

donc

$$IP = \frac{x \sin\alpha}{\sin\gamma},$$

et, par suite,

$$PH = IH - IP = 2r - \frac{x \sin\alpha}{\sin\gamma};$$

Fig. 185. d'où, en substituant dans la relation ci-dessus,

$$y^2 = \frac{x \sin\alpha}{\sin\gamma}\left(2r - x\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right),$$

ou bien,

$$(1) \qquad y^2 = \frac{2r\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot x - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma}\cdot x^2,$$

équation dans laquelle le coefficient de x^2 est essentiellement *négatif*.

Donc *la courbe d'intersection est toujours une ellipse.*

Fig. 186. Si maintenant on considère un cylindre *droit*, on a

$$\sin\gamma = 1;$$

et l'équation (1) devient

$$(2) \qquad y^2 = 2r\sin\alpha . x - x^2\sin^2\alpha;$$

résultat qu'on peut obtenir directement.

Comparons l'équation (2) à celle de l'ellipse rapportée à l'un de ses sommets et à son grand axe comme axe des x, savoir (n° 144) :

$$y^2 = \frac{2B^2}{A}x - \frac{B^2}{A^2}x^2;$$

il vient les deux relations

$$\frac{B^2}{A} = r.\sin\alpha, \quad \frac{B^2}{A^2} = \sin^2\alpha,$$

d'où l'on déduit, en divisant la première par la deuxième,

$$A = \frac{r}{\sin\alpha}, \quad \text{et, par suite,} \quad B = r;$$

ce qu'il est facile de vérifier au moyen de la figure.

En effet, soient OO′ le grand axe et *oo′* le petit axe; si, par le point O, on mène OK parallèle à AB, et que des points *o*, *o′*, on abaisse les perpendiculaires *ok*, *o′k′* sur le plan de la base, on a *premièrement*

$$OK = OO'.\cos O'OK = OO'.\sin\alpha; \quad \text{d'où} \quad OO' = 2A = \frac{2r}{\sin\alpha}.$$

En second lieu, la droite *oo′* étant parallèle à OY et à LL′, est parallèle au plan de la base, et se projette dans sa véritable grandeur suivant le diamètre *kk′*; d'où résulte

$$oo' = 2B = 2r, \quad \text{ou} \quad B = r.$$

362. *Première remarque.* — Si, comme pour le *cône droit*, on conçoit que le plan sécant tourne autour du point O, supposé fixe, de manière à former tous les angles possibles depuis o jusqu'à 180 degrés, il est visible que, tant que le plan rencontrera la génératrice opposée à AA′, on obtiendra une courbe *rentrante* et fermée qui, ainsi qu'on vient de le prouver, est *une ellipse*. Mais, dans les deux cas particuliers de $\alpha = 0$, $\alpha = 180°$, ce qui donne $\sin\alpha = 0$, l'équation se réduisant à Fig. 186.

$$y^2 = 0$$

représente *une seule ligne droite* ou *une variété* de la parabole, qui n'est elle-même autre chose (n° 144) qu'une ellipse *infiniment allongée* ou dont le *grand axe* est *infini*.

Il y a plus : si l'on imagine que le plan sécant, mené suivant la génératrice AA′, se meuve *parallèlement* à lui-même et à AA′, et de manière que sa distance à cette droite soit inférieure au diamètre AB de la base, il est évident que l'intersection de ce plan avec la surface cylindrique sera un système de *deux droites parallèles;* résultat que ne semble pas comporter l'équation (2). Mais on va voir que, par une simple transformation de coordonnées, on peut faire en sorte que l'équation de la section cylindrique comprenne ce *système* comme cas particulier.

Pour cela, il suffit de transporter l'origine des coordonnées au point G, en posant $x = x - \text{OG}$ dans l'équation (2) : ce qui exige qu'on évalue d'abord la distance OG.

Or, si l'on désigne par a la longueur CG qui exprime la distance du centre de la base à la trace du plan sécant sur cette base, on a

$$\text{AG} = a - r, \quad \text{d'où} \quad \text{OG} = \frac{\text{AG}}{\sin \text{GOA}} = \frac{a - r}{\sin\alpha}.$$

Par suite, l'équation (2) devient

$$y^2 = 2r\sin\alpha\left(x - \frac{a-r}{\sin\alpha}\right) - \sin^2\alpha\left(x - \frac{a-r}{\sin\alpha}\right)^2,$$

ou développant,

$$y^2 = 2r\sin\alpha . x - 2r(a-r) - \sin^2\alpha . x^2 + 2(a-r)\sin\alpha\ x - (a-r)^2.$$

Soit fait maintenant $\alpha = 0$; on trouve

$$y^2 = -2r(a-r) - (a-r)^2,$$

ou réduisant,

$$y^2 = -(a^2 - r^2);$$

d'où

$$y = \pm\sqrt{r^2 - a^2}.$$

Ce résultat prouve évidemment que, tant que l'on aura $a < r$, la section cylindrique sera un système de deux *droites parallèles;* pour $a = r$, on a $y = 0$, ou *une seule droite;* et pour $a > r$, un système de *deux droites imaginaires.*

Le cylindre pouvant être considéré comme *un cône* dont l'angle au sommet 6 devient nul, il en résulte que ces trois variétés sont *implicitement* comprises dans les *sections coniques :* ce qu'on aurait pu reconnaître directement par une transformation de coordonnées, exécutées sur l'équation (2) du n° 355.

363. *Seconde remarque.* — Le cylindre *oblique*, comme le cône oblique, donne lieu à deux systèmes de *sections circulaires;* il suffirait, pour le démontrer, d'opérer comme on l'a fait au n° 358 : mais nous ne croyons pas devoir insister sur ce point.

SECONDE SECTION.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS.

CHAPITRE X.

DU POINT, DE LA LIGNE DROITE ET DU PLAN DANS L'ESPACE.

§ Ier. — Du point et de la ligne droite.

Équations du point.

364. De même qu'un point est déterminé de position sur un plan par le moyen de ses distances à deux droites menées à volonté dans ce plan, de même sa position est fixée dans l'espace, dès que l'on connaît ses distances à trois plans.

Soient trois plans YAZ, XAZ, XAY, que nous supposerons d'abord *perpendiculaires entre eux*, et qui se coupent suivant trois droites AZ, AY, AX, dont chacune est nécessairement *perpendiculaire* aux deux autres. Fig. 187.

Appelons a, b, c les distances d'un point de l'espace à ces trois plans, distances qui sont censées connues; je dis que le point est complétement déterminé de position, en admettant toutefois qu'on sache aussi d'avance que ce point se trouve situé, par exemple, dans l'intérieur de l'angle trièdre AXYZ.

En effet, prenons sur les trois droites AX, AY, AZ des distances AB, AC, AD, respectivement égales à a, b, c; et menons par les points B, C, D des plans parallèles aux plans donnés. D'abord, puisque les deux premiers plans parallèles ont leurs points respectivement placés aux distances a, b, des plans YAZ, XAZ, il s'ensuit que tous les points de Mm, intersection commune de ces plans parallèles,

Fig. 187. jouissent, exclusivement à tout autre point, de la propriété d'être à ces mêmes distances de YAZ et de XAZ. Donc déjà le point cherché se trouve sur cette ligne. D'un autre côté, le point doit aussi être situé quelque part sur le troisième plan parallèle, puisque les points de ce plan sont, à l'exclusion de tout autre point, à la distance $AD = c$, du plan XAY.

Donc enfin le point cherché n'est autre chose que le point M où le troisième plan parallèle coupe l'intersection commune des deux premiers, et sa position est tout à fait déterminée.

Nous conviendrons de désigner par x les distances au plan YAZ comptées sur AX, par y les distances au plan XAZ comptées sur AY, et par z les distances au plan XAY comptées sur AZ, en sorte que les droites AX, AY, AZ, intersections des trois plans deux à deux, seront les *axes* des x, des y et des z. On les appelle conjointement *axes coordonnés*, et les distances dont nous venons de parler sont dites les *coordonnées du point*.

Toutes ces dénominations sont analogues à celles que nous avons employées dans la GÉOMÉTRIE A DEUX DIMENSIONS.

Nous nommerons aussi plan des yz, le plan YAZ perpendiculaire à l'axe des x; plan des xz, le plan XAZ perpendiculaire à l'axe des y; et plan des xy, le plan XAY perpendiculaire à l'axe des z. Ce dernier plan est ordinairement représenté dans une position *horizontale*, et les deux autres dans une position *verticale*.

Il résulte de ce qui vient d'être établi, que les équations

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

(a, b, c, étant des quantités connues) suffisent pour fixer la position du point dans l'espace ; elles sont, pour cette raison, nommées les *équations du point*.

On doit remarquer toutefois que, comme les trois plans *coordonnés*, étant prolongés indéfiniment, déterminent *huit* angles trièdres, savoir, *quatre* formés au-dessus du plan des xy et *quatre* au-dessous de ce même plan, il faut

encore exprimer par l'analyse dans lequel de ces huit angles le point se trouve situé. Il suffit, pour cela, d'étendre aux distances à des plans les principes qui ont été établis (n° 27) pour les distances à des points ou à des droites; c'est-à-dire que, si l'*on regarde comme* POSITIVES *les distances comptées sur* AX, *dans un certain sens* AX *par rapport au point* A, *on doit regarder comme* NÉGATIVES *les distances comptées en sens contraire*, c'est-à-dire *dans le sens* AX'.

Même raisonnement pour les deux autres coordonnées.

On doit donc distinguer (n° 46) dans les quantités a, b, c non-seulement les valeurs numériques de ces quantités, mais encore les signes dont elles sont affectées, eu égard aux diverses situations que le point peut avoir dans les angles trièdres formés par les trois plans coordonnés.

D'après ce principe, on a, pour exprimer complétement la position d'un point dans l'espace, les *huit* combinaisons suivantes :

$x=+a, y=+b, z=+c,$ point situé dans l'angle AXYZ,
$x=-a, y=+b, z=+c,$ ..... AX'YZ,
$x=+a, y=-b, z=+c,$ ..... AXY'Z,
$x=+a, y=+b, z=-c,$ ..... AXYZ',
$x=-a, y=-b, z=+c,$ ..... AX'Y'Z,
$x=-a, y=+b, z=-c,$ ..... AX'YZ',
$x=+a, y=-b, z=-c,$ ..... AXY'Z',
$x=-a, y=-b, z=-c,$ ..... AX'Y'Z';

ce qui donne *deux* systèmes dans lesquels les signes des trois coordonnées sont les mêmes, *trois* qui ont un signe négatif et les deux autres positifs, et *trois* pour lesquels un signe est positif et les deux autres négatifs.

365. Le point peut, d'ailleurs, se trouver dans des positions *particulières*. Par exemple, pour exprimer qu'un point est situé dans le plan des xy, il faut écrire que sa distance z à ce plan est *nulle;* et l'on aura pour les équations de ce point,

$$x=a, \quad y=b, \quad z=0;$$

De même, un point placé sur l'axe des x, pour lequel les distances aux plans des xz et des xy sont *nulles* à la fois, aura pour équations,

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

et ainsi des autres points placés, soit sur les plans, soit sur les axes coordonnés.

Fig. 187. 366. *Première remarque.* — Les plans parallèles aux trois plans coordonnés, et qui ont servi à fixer la position du point M, déterminent avec ceux-ci un parallélipipède rectangle, dont les *douze* arêtes, égales quatre à quatre, ne sont autre chose que les trois coordonnées x, y, z du point M.

D'un autre côté, on sait que les pieds m, m', m'', des perpendiculaires abaissées sur les plans coordonnés, sont, en terme de Géométrie descriptive, les *projections* du point M sur ces trois plans.

D'après cela, si l'on suppose que

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

soient les équations du point M, on a pour les coordonnées du point m, les équations

$$x = a, \quad y = b;$$

pour celles du point m',

$$x = a, \quad z = c;$$

ce qui donne pour celles du point m'',

$$y = b, \quad z = c.$$

D'où l'on voit que les projections du point M sur *deux* des plans coordonnés étant connues, la *troisième* projection en est une conséquence.

367. *Seconde remarque.* — On peut expliquer pourquoi, dans la Géométrie descriptive, *il suffit de deux plans de projection* pour fixer la position d'un point, tandis que dans la Géométrie analytique *il faut trois plans coordonnés.*

La connaissance des projections d'un point sur un plan horizontal et sur un plan vertical est en effet suffisante

pour les constructions graphiques; mais si l'on veut fixer analytiquement la position de chacune de ces projections, par exemple des points m, m', il faut, *premièrement*, tracer dans le plan horizontal (xy) deux axes rectangulaires AX, AY; *secondement*, tracer dans le plan vertical (xz) deux axes AX, AZ, en prenant, pour plus de simplicité, pour *axe commun* l'intersection des deux plans de projection. Or il est évident que les deux axes AY, AZ, déterminent un *troisième* plan rectangulaire avec les deux autres. Ainsi, *géométriquement* deux plans suffisent, mais *analytiquement* il en faut trois.

368. Lorsque les plans coordonnés ne sont pas rectangulaires, auquel cas les axes AX, AY, AZ font entre eux des angles quelconques et sont dits des *axes obliques*, les équations d'un point M sont encore FIG. 188.

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

Mais alors a, b, c expriment des distances comptées *parallèlement* à ces axes; et les projections du point M s'obtiennent par les lignes Mm, Mm', Mm'', respectivement parallèles à AZ, AY, AX.

Du reste, tout ce qui a été dit dans les précédents numéros est applicable au cas où les axes sont OBLIQUES.

Expression de la distance entre deux points.

369. La *recherche* de cette expression est, comme celle relative à deux points donnés sur un plan (n° 48), une question essentielle. FIG. 189.

Soient x', y', z' les coordonnées d'un premier point M, x'', y'', z'' celles d'un second point N, rapportées d'abord à trois axes *rectangulaires* AX, AY, AZ.

Si l'on abaisse des points M et N les perpendiculaires Mm, Nn sur le plan des xy, puis des points m, n les perpendiculaires mP, nQ sur l'axe des x, il résulte de la *remarque* (n° 366) que l'on a

$$\text{AP} = x', \; m\text{P} = y', \; \text{M}m = z', \text{ et } \text{AQ} = x'', \; n\text{Q} = y'', \; \text{N}n = z''.$$

Tirons ensuite mn, ce qui détermine un trapèze MNnm;

FIG. 189. et menons dans le plan de ce trapèze NH parallèle à nm, puis, sur le plan de xy, nL parallèle à AX.

Cela fait, les triangles rectangles MNH et mnL donnent

$$\overline{MN}^2 = \overline{NH}^2 + \overline{MH}^2 = \overline{mn}^2 + \overline{MH}^2,$$

et

$$\overline{mn}^2 = \overline{nL}^2 + \overline{mL}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{mL}^2;$$

d'où l'on déduit

$$\overline{MN}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{mL}^2 + \overline{MH}^2.$$

Mais on a évidemment

$$PQ = x' - x'', \quad mL = y' - y'', \quad MH = z' - z'';$$

d'où

$$\overline{PQ}^2 = (x' - x'')^2, \quad \overline{mL}^2 = (y' - y'')^2, \quad \overline{MH}^2 = (z' - z'')^2;$$

donc enfin

$$\overline{MN}^2 \text{ ou } D^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2,$$

et, par conséquent,

$$D = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}.$$

Telle est l'expression générale de la *distance de deux points* en fonction des coordonnées de ces points rapportés à des axes rectangulaires.

Nous verrons plus loin quelle est l'expression de cette distance lorsque les axes sont *obliques*.

N. B. — *Cas particulier.* — Si l'on suppose l'un des deux points à l'*origine*, la valeur de D devient

$$D = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Équations de la ligne droite.

370. Lorsque des points sont en ligne droite dans l'espace, on sait que leurs *projections* sur un même plan sont aussi *en ligne droite;* et cette seconde droite est dite la *projection* de la première sur ce plan. On sait encore que les projections d'une droite sur deux plans suffisent pour déterminer sa position; d'où il suit qu'une droite serait fixée analytiquement si l'on connaissait les équations de ses projections sur *deux* des trois plans coordonnés.

Ordinairement, on considère les projections de la droite

sur les plans des xz et des yz; et comme ces deux plans ont pour axe commun AZ, c'est cette ligne qui, dans chacun des plans, est regardée comme l'axe des abscisses; AX est alors l'axe des ordonnées sur le plan des xz, et AY l'axe des ordonnées sur le plan des yz.

Ainsi, soient MN une droite quelconque dans l'espace, FIG. 190. mn, $m'n'$ ses projections sur les plans des xz et des yz; nous présenterons les équations de ces deux projections sous la forme

$$x = az + \alpha, \tag{1}$$

$$y = bz + 6; \tag{2}$$

a, b sont des constantes qui (n° 51) désignent les tangentes des angles que forment mn, $m'n'$ avec l'axe des z; et α, 6 expriment les distances de l'origine aux points où ces droites rencontrent l'axe des x et l'axe des y.

371. Il est à remarquer que l'équation

$$x = az + \alpha$$

exprime non-seulement une relation entre les x et les z de tous les points de la droite mn, mais encore une relation entre les x et les z de tous les points du plan mnNM imaginé par mn, perpendiculairement au plan des xz; car, pour tout point M de la perpendiculaire nM à ce plan, les coordonnées x et z sont (n° 366) représentées par mP, AP, qui appartiennent aussi à la droite mn.

Pareillement, l'équation

$$y = bz + 6,$$

convient non-seulement à tous les points de la projection $m'n'$, mais encore à tous ceux du plan $m'n'$NM mené perpendiculairement au plan des yz par la droite $m'n'$.

Donc le système de ces deux équations existe pour tous les points de la droite MN, intersection des plans perpendiculaires, et n'existe que pour ces points. Ces équations sont, en ce sens, *les équations de la droite elle-même*, quoique, d'abord, nous ne les ayons établies que comme celles des deux projections.

Il résulte de là évidemment que l'élimination de la variable

Fig. 190. z entre les deux équations donne lieu à une troisième équation en x et y, qui représente la projection $m''n''$ de la droite sur le plan des xy; ou plus généralement, cette équation appartient à tous les points du plan MN $n''m''$ mené par la droite MN perpendiculairement au plan des xy.

372. *Cas particuliers.* — Lorsque la droite passe par l'origine, il en est de même de ses projections; ainsi (n° 370) les distances α, 6 sont nulles, et les équations de la droite se réduisent à

$$x = az, \quad y = bz.$$

Il peut arriver que la droite soit située dans l'un des plans coordonnés, par exemple dans le plan des xz. On a alors, pour tous les points de cette droite, $y = 0$, et les équations deviennent

$$x = az + \alpha, \quad y = 0;$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, on doit avoir

$$b = 0 \quad \text{et} \quad 6 = 0:$$

ce qui est évident d'ailleurs, d'après la figure, puisque la projection de la droite sur le plan des yz se confond avec l'axe des z.

Même raisonnement par rapport aux deux autres plans coordonnés.

373. Tant que les constantes a, b, α, 6 sont données *à priori*, la droite est complétement déterminée de position. Pour en obtenir les différents points, il suffit de donner, dans les deux équations

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + 6,$$

à la variable z par exemple, une valeur particulière z': ce qui entraîne pour chacune des deux autres, x et y, une valeur correspondante, savoir:

$$x' = az' + \alpha, \quad y' = bz' + 6.$$

Fig. 190. Prenant alors sur AX une distance $AP = x'$, on mène Pm'' parallèle à AY et égale à y'; puis au point m'' on conçoit une perpendiculaire au plan des xy qui soit égale à z'.

et le point M ainsi déterminé appartient à la droite. On obtiendrait de la même manière tous les autres points.

Mais on peut se proposer de déterminer les constantes a, b, α, 6, d'après certaines conditions ; ce qui donne lieu à une série de problèmes en trois dimensions, analogues à ceux que nous a présentés la ligne droite considérée sur un plan.

Questions préliminaires relatives à la ligne droite.

374. PREMIÈRE QUESTION. — *Trouver les équations d'une droite assujettie à passer par deux points donnés.*

Appelons x', y', z' les coordonnées du premier point, x'', y'', z'' celles du second point. Les équations de la droite cherchée seront d'abord de la forme

$$x = az + \alpha, \tag{1}$$

$$y = bz + 6, \tag{2}$$

a, b, α, 6 étant des quantités *inconnues* pour le moment.

Or les points (x', y', z'), (x'', y'', z'') appartenant à la droite, leurs coordonnées doivent vérifier les équations (1) et (2), et l'on a les quatre relations

$$x' = az' + \alpha, \tag{3}$$

$$y' = bz' + 6, \tag{4}$$

$$x'' = az'' + \alpha, \tag{5}$$

$$y'' = bz'' + 6. \tag{6}$$

En appliquant à ces six équations la méthode du n° 57, on trouve successivement

$$x - x' = a(z - z'), \quad x' - x'' = a(z' - z''),$$
$$y - y' = b(z - z'), \quad y' - y'' = b(z' - z'');$$

d'où

$$a = \frac{x' - x''}{z' - z''}, \quad b = \frac{y' - y''}{z' - z''},$$

et, par conséquent,

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z'), \quad y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z').$$

Ces deux dernières équations, qui ne renferment plus

que les variables x, y, z, et les quantités connues x', y', z', x'', y'', z'', sont les équations cherchées.

N. B. — Quant aux équations

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z'),$$

obtenues dans le cours du calcul, elles caractérisent une ligne droite passant par le point (x', y', z'), puisqu'elles sont satisfaites par les hypothèses

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

Les quantités a, b, se déterminent ensuite au moyen d'une seconde condition que l'on peut imposer à la droite; dans le problème précédent, cette condition consiste à faire passer la droite par un *second* point.

375. Deuxième question. — *Par un point donné hors d'une droite, mener une parallèle à cette droite.*

Désignons par x', y', z', les coordonnées du point donné; et soient

$$x = az + \alpha,$$
$$y = bz + 6$$

les équations de la droite aussi donnée.

Celles de la droite cherchée sont (n° 374) de la forme

$$x - x' = a'(z - z'),$$
$$y - y' = b'(z - z'),$$

a', b', étant des quantités qu'il s'agit de déterminer.

Or, puisque les droites sont parallèles, les plans qui les projettent respectivement sur les deux plans des xz et des yz doivent être parallèles; donc les intersections de ces plans parallèles avec les plans coordonnés, c'est-à-dire les *projections* des deux droites, sont elles-mêmes *parallèles*. Ainsi l'on a nécessairement (n° 59) les relations

$$a' = a, \quad b' = b;$$

ce qui donne finalement pour les équations de la droite cherchée,

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z').$$

376. Troisième question. — *Deux droites étant données par leurs équations, exprimer par l'analyse que ces droites se rencontrent, et trouver, dans ce cas, les coordonnées de leur point d'intersection.*

Soient

(1) $x = az + \alpha$, (2) $y = bz + 6$,

et

(3) $x = a'z + \alpha'$, (4) $y = b'z + 6'$,

les équations des deux droites.

Si elles se coupent, les coordonnées de leur point d'intersection doivent vérifier à la fois les quatre équations ci-dessus : ainsi ces coordonnées ne sont autre chose que les valeurs de x, y, z, propres à satisfaire en même temps à ces équations; et comme on a trois inconnues à éliminer entre quatre équations, on doit nécessairement parvenir à une relation entre les constantes a, b, α, 6, a', b', α', $6'$.

Les équations (1) et (3), (2) et (4), retranchées successivement l'une de l'autre, donnent

$$0 = (a - a')z + \alpha - \alpha', \quad \text{d'où} \quad z = \frac{\alpha' - \alpha}{a - a'},$$

$$0 = (b - b')z + 6 - 6', \quad \text{d'où} \quad z = \frac{6' - 6}{b - b'}.$$

Or ces deux valeurs de z doivent être égales; on a donc

$$\frac{\alpha' - \alpha}{a - a'} = \frac{6' - 6}{b - b'},$$

ou bien

(5) $$(\alpha' - \alpha)(b - b') - (6' - 6)(a - a') = 0.$$

Telle est la relation qui doit exister entre les constantes, pour que les deux droites se coupent.

En supposant que cette relation soit satisfaite, on obtient pour les coordonnées du point d'intersection,

$$z = \frac{\alpha' - \alpha}{a - a'} \text{ ou } \frac{6' - 6}{b - b'}, \quad x = \frac{a\alpha' - \alpha a'}{a - a'} \text{ et } y = \frac{b6' - 6b'}{b - b'}.$$

Soit, comme *cas particulier*, $a = a'$, $b = b'$, ce qui signifie (n° 375) que les deux droites sont parallèles; l'équation (5) est satisfaite, et les valeurs de x, y, z, se réduisent à la forme $\frac{M}{0}$, résultat analogue à celui du n° 61.

377. QUATRIÈME QUESTION. — *Deux droites étant données par leurs équations, déterminer l'angle qu'elles forment entre elles.*

Soient

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + 6,$$

et

$$x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + 6',$$

les équations des deux droites.

Il peut se présenter deux circonstances : ou les droites se coupent, auquel cas l'équation de condition du numéro précédent est satisfaite; ou bien, *elles ne se rencontrent pas.*

Dans l'un et l'autre cas, si d'un point quelconque de l'espace on conçoit deux autres droites respectivement parallèles aux droites données, c'est l'angle formé par ces parallèles qu'il s'agit de déterminer.

FIG. 191. Pour plus de simplicité, nous prendrons le point dont nous venons de parler, à l'origine même des coordonnées.

Soient donc AL, AL′ des parallèles aux deux droites, on a (n°s 372, 375) pour leurs équations,

(1) $$x = az, \quad y = bz,$$

et

(2) $$x = a'z, \quad y = b'z.$$

Pour obtenir l'angle LAL′, prenons sur les côtés de cet angle deux parties AM, AM′, égales à 1; puis joignons les points M et M′, dont nous désignerons d'ailleurs les coordonnées par x', y', z', et x'', y'', z''.

Cela posé, en appelant D la distance MM′, on a (n° 369), pour l'expression de cette distance,

$$D^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2,$$

ou développant, et observant que les coordonnées du point M et celles du point M′ sont liées (n° 369, *N.B.*) par les relations

(3) $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, (4) $x''^2 + y''^2 + z''^2 = 1$,

$$D^2 = 2 - 2(x'x'' + y'y'' + z'z'').$$

D'un autre côté, le triangle AMM′ donne, d'après un principe de trigonométrie,

$$\cos MAM' \quad \text{ou} \quad \cos V = \frac{\overline{AM}^2 + \overline{AM'}^2 - \overline{MM'}^2}{2\,AM \times AM'} = \frac{2 - D^2}{2};$$

ou, mettant pour D^2 sa valeur dans cette expression,

$$\cos V = x'x'' + y'y'' + z'z''. \tag{5}$$

Donc tout se réduit à obtenir les coordonnées x', y', z', et x'', y'', z'', en fonction des constantes a, b, a', b'.

Or le point (x', y', z') se trouvant sur la droite AL, ses coordonnées doivent vérifier les équations (1); ainsi l'on a les deux relations

$$x' = az', \quad y' = bz',$$

qui, jointes à la relation (3)

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

suffisent pour déterminer les trois quantités x', y', z'.

Portons dans cette dernière relation les valeurs de x' et de y' tirées des deux premières; il vient

$$(a^2 + b^2 + 1)\,z'^2 = 1, \quad \text{d'où} \quad z' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}};$$

ce qui donne ensuite pour y' et x',

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad x' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

On obtiendrait de la même manière pour les coordonnées x'', y'', z'', du point M,

$$z'' = \frac{1}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}, \quad y'' = \frac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}},$$

$$x'' = \frac{a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (5), on obtient enfin pour le *cosinus* de l'angle demandé,

$$\cos V = \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)(a'^2 + b'^2 + 1)}}. \tag{6}$$

Cette expression, renfermant un radical, est susceptible

de deux valeurs; et cela doit être, puisque les deux droites forment entre elles deux angles *suppléments* l'un de l'autre.

378. On peut trouver une autre expression de cos V, au moyen de certaines considérations dont nous ferons souvent usage.

FIG. 191. Abaissons du point M la perpendiculaire Mm au plan des xy, et menons mP parallèle à l'axe des y; on a, d'après cette construction, AP$=x'$, P$m=y'$, M$m=z'$. De plus, le plan MmP étant parallèle au plan des yz, la ligne qui joint le point M au point P est perpendiculaire à AP; et comme on a pris AM$=1$, il s'ensuit que AP ou x' est égal au cosinus de l'angle que forme la droite AM avec l'axe des x.

On démontrerait d'une manière analogue que y' et z' sont respectivement égaux aux *cosinus* des angles que forme la droite avec les axes des y et des z.

Donc, en appelant α, 6, γ, ces trois angles, on a les relations

$$x' = \cos\alpha, \quad y' = \cos 6, \quad z' = \cos\gamma.$$

On obtiendrait de même, par rapport aux angles α', $6'$, γ', que forme la droite AM′ avec les trois axes,

$$x'' = \cos\alpha', \quad y'' = \cos 6', \quad z'' = \cos\gamma'.$$

Ces valeurs étant portées dans l'équation (5) du numéro précédent, donnent

$$(7) \qquad \cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos 6\cos 6' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

379. Les calculs précédents conduisent à des conséquences fort importantes.

1°. La relation (3) du n° 377 donne, lorsqu'on y remplace x', y', z', par $\cos\alpha$, $\cos 6$, $\cos\gamma$,

$$\cos^2\alpha + \cos^2 6 + \cos^2\gamma = 1 :$$

ce qui démontre que *la somme des carrés des cosinus des angles que forme une droite quelconque avec les trois axes, est égale à l'unité;* proposition qui résulte encore de la relation existant entre la diagonale d'un parallé-

lipipède rectangle et les trois arêtes contiguës (*voir* la *fig.* 187).

2°. Des relations $x' = az'$, $y' = bz'$

$$a = \frac{x'}{z'}, \quad b = \frac{y'}{z'},$$

et, par conséquent,

$$a = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad b = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}. \tag{8}$$

Donc les constantes a, b, des équations d'une droite ont respectivement pour valeurs *les rapports des cosinus des angles que forme la droite avec l'axe des* x *et avec l'axe des* y, *au cosinus de l'angle qu'elle forme avec l'axe des* z.

3°. Enfin les équations (8), ou

$$\cos\alpha = a\cos\gamma, \quad \cos\beta = b\cos\gamma,$$

étant élevées au carré et ajoutées avec l'identité

$$\cos^2\gamma = \cos^2\gamma,$$

donnent

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \quad \text{ou} \quad 1 = (a^2 + b^2 + 1)\cos^2\gamma;$$

donc

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}},$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}. \tag{9}$$

Ces dernières formules servent à déterminer les angles que forme une droite avec les trois axes, connaissant les tangentes a, b, des angles que les projections sur les plans des xz et des yz font avec l'axe des z.

Réciproquement, lorsqu'on donne les angles que la droite forme avec les trois axes, les formules (8) font connaître les constantes a, b, des équations de la droite.

Nous observerons à ce sujet que, d'après la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

qui lie les angles α, β, γ, on ne peut donner arbitrairement que deux de ces angles; et la relation donne la valeur correspondante du troisième angle.

380. Reprenons la formule (6), et voyons ce qu'elle devient dans les deux hypothèses où les droites données sont *parallèles* ou *perpendiculaires* entre elles.

Dans le premier cas, on doit avoir $\cos V = 1$, et l'on obtient entre a, b, a', b', la relation

$$aa' + bb' + 1 = \sqrt{(a^2 + b^2 + 1)\,(a'^2 + b'^2 + 1)}.$$

Faisant disparaître le radical, développant et réduisant, on peut la transformer ainsi :

$$(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - ba')^2 = 0;$$

équation qui ne peut évidemment exister, à moins que l'on n'ait séparément,

$$a = a', \quad b = b', \quad ab' = ba'.$$

La dernière de ces trois relations est implicitement comprise dans les deux autres; et l'on sait déjà (n° 375) que celles-ci expriment que deux droites, dans l'espace, sont *parallèles*.

Dans le second cas, $\cos V$ doit être *nul* : ce qui donne nécessairement

$$aa' + bb' + 1 = 0.$$

Telle est la condition qui exprime que deux droites sont *perpendiculaires;* ce qui peut avoir lieu d'ailleurs sans que ces droites se coupent.

En y réunissant l'équation

$$(a - a')\,(6' - 6) - (b - b')\,(\alpha' - \alpha) = 0,$$

trouvée n° 376, on aurait les deux relations qui doivent exister entre les constantes, pour que les droites *se coupent à angle droit.*

La formule (7) devient, dans la même circonstance,

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos 6 \cos 6' + \cos\gamma \cos\gamma' = 0,$$

résultat dont nous ferons souvent usage.

Nous pourrions, à l'aide des principes qui viennent d'être établis, résoudre *en trois dimensions* le problème que nous avons résolu (n° 65) en deux dimensions : *abaisser d'un point donné hors d'une droite une perpendiculaire sur*

cette droite, et trouver la longueur de cette perpendiculaire.

Mais les calculs relatifs à cette question ne laisseraient pas que d'être assez compliqués; et nous verrons bientôt un moyen beaucoup plus simple de la résoudre.

381. *Scolie général.* — Les principes établis sur la ligne droite, depuis le n° 370 jusqu'au n° 376 inclusivement, sont vrais, *quelle que soit l'inclinaison des axes coordonnés.* Ainsi, dans le cas d'axes obliques, les équations d'une droite sont toujours de la forme

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + 6;$$

seulement les droites, au lieu d'être projetées sur les plans coordonnés par des perpendiculaires à ces plans, le sont (n° 368) *parallèlement aux axes*, et les quantités a, b, n'expriment plus des tangentes trigonométriques, mais *des rapports de sinus;* les constantes α, 6 conservent la même acception.

Les équations d'une droite passant par deux points donnés, les conditions de parallélisme de deux droites, etc., sont aussi indépendantes de l'*inclinaison* des axes; mais il n'en est pas de même de la question qui a pour objet la détermination de l'angle de deux droites, et de toutes les conséquences qui en ont été déduites, puisqu'on fait entrer en considération l'expression de la distance entre deux points donnés.

Cette remarque est importante pour ceux qui voudraient faire quelques applications de ces principes.

§ II. — De l'équation du plan et de ses combinaisons avec les équations du point et de la ligne droite.

382. De même qu'une ligne droite est fixée de position sur un plan par une équation du premier degré entre les coordonnées x, y de chacun de ses points rapportés à deux axes, nous allons reconnaître qu'un plan se détermine aussi de position par rapport à trois autres plans, au

moyen d'une équation du premier degré en x, y, z; ces variables désignant les distances de chacun des points du plan aux trois plans coordonnés.

FIG. 192. Soient DB, DC *les traces* d'un plan quelconque, c'est-à-dire les intersections de ce plan avec deux des plans coordonnés (qui peuvent être indifféremment rectangulaires ou obliques).

Parmi les différentes manières de concevoir une *surface plane*, il en est une qui consiste à regarder cette surface comme *engendrée par le mouvement d'une droite indéfinie glissant le long d'une autre droite, aussi indéfinie, sans cesser d'être parallèle à elle-même.*

Ainsi, par exemple, si par les différents points de la droite DB on imagine une suite d'autres droites D′C′, D″C″, etc., parallèles à DC, il est évident que cette suite de droites appartient au plan que nous considérons; par conséquent, ce plan peut être regardé comme engendré par le mouvement de la trace DC le long de la trace DB, de manière à rester constamment parallèle à sa direction primitive.

C'est cette propriété caractéristique que nous allons essayer de traduire en analyse.

Comme la droite DB se trouve tout entière dans le plan de xz, ses équations sont (n° 372) de la forme

$$(1) \qquad y = 0, \quad z = mx + p.$$

Par une raison analogue, les équations de la trace DC sont

$$(2) \qquad x = 0, \quad z = ny + p.$$

(Nous supposons ici les équations résolues par rapport à z, parce que les deux traces doivent passer par un point D, dont le z (ou p) est commun aux seconds membres de ces équations.)

Cela posé, considérons la trace DC dans une situation quelconque, D′C′ par exemple; on a nécessairement (n° 375), pour les équations de cette droite parallèle à DC,

$$(3) \qquad x = \alpha, \quad z = ny + 6;$$

α, 6 sont des quantités *constantes* pour tous les points d'une même position D'C' de la génératrice, mais *variables* d'une position à une autre D''C''.

Il nous reste encore à exprimer que la génératrice rencontre dans toutes ses positions la trace DB; et, pour cela, il faut (n° 376) écrire en analyse que les équations (1) et (3) ont lieu en même temps; ce qui donnera une relation entre les indéterminées α, 6 et les quantités connues m, n, p.

Combinons donc ensemble ces quatre équations.

La seconde des équations (3) devient, à cause de la première des équations (1),

$$z = 6.$$

Portant les deux valeurs

$$x = \alpha, \quad z = 6$$

dans la seconde des équations (1), on obtient pour la relation demandée,

$$6 = m\alpha + p. \tag{4}$$

Observons actuellement que, pour chaque position de la génératrice, les équations (3) et l'équation (4) doivent être satisfaites simultanément; donc, si l'on élimine entre ces équations les indéterminées α, 6, l'équation résultante en x, y, z, et les quantités connues, appartiendra aussi à tous les points du plan.

Or les équations (3) donnant

$$\alpha = x, \quad 6 = z - ny,$$

l'équation (4) devient

$$z - ny = mx + p,$$

ou bien,

$$z = mx + ny + p. \tag{5}$$

Telle est, en général, l'équation qui exprime la position d'un plan dans l'espace, et qui en est, pour ainsi dire, *la représentation analytique.*

Pour faire concevoir comment cette équation représente chacun des points de la surface plane, supposons qu'on ait pris pour les variables x, y, un système de valeurs

$$x = Ad', \quad y = d'c';$$

Fig. 192. si du point c' on élève $c'E'$ perpendiculaire au plan des xy, et égale à la valeur correspondante de z, tirée de l'équation (5), le point E', ainsi déterminé, appartiendra au plan, et ne peut appartenir qu'à lui.

Même raisonnement pour d'autres valeurs attribuées à x et à y.

N. B. — De tous les moyens qu'on emploie ordinairement pour trouver l'équation du plan, nous avons préféré le précédent, d'abord parce qu'il a l'avantage d'être indépendant de l'inclinaison des axes coordonnés, et ensuite parce qu'il s'applique à la recherche des équations d'autres surfaces dont la génération offre de l'analogie avec celle du plan. Nous en verrons des exemples par la suite.

383. Les constantes m, n, p, qui entrent dans l'équation du plan, sont faciles à définir. Ainsi les quantités m et n ne sont autre chose que *les tangentes des angles* que forment les traces DB, DC, avec les axes des x et des y. Quant à la quantité p, on l'appelle le z à l'origine : *c'est la distance de l'origine au point où le plan rencontre l'axe des* z.

Lorsque le plan passe par l'origine, on a

$$p = 0,$$

et l'équation se réduit à

$$z = mx + ny;$$

équation qui est, en effet, vérifiée par $x = 0, y = 0, z = 0$.

384. Je dis que, *réciproquement*, toute équation du premier degré à trois variables,

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

appartient à un plan.

En effet, on en déduit

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}.$$

Or, si l'on considère deux droites dont les équations soient pour la première,

$$y = 0, \quad z = -\frac{A}{C}x - \frac{D}{C},$$

et pour la seconde,

$$x = 0, \quad z = -\frac{B}{C}y - \frac{D}{C},$$

on peut regarder ces droites comme les *traces* d'un plan sur ceux des xz et des yz; et si l'on cherche l'équation de ce plan d'après la méthode du n° 382, on trouvera nécessairement

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C},$$

ou bien,

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1}$$

Donc, réciproquement, etc.

N. B. — Quoique l'équation

$$z = mx + ny + p$$

ne renferme que *trois* constantes, tandis que l'équation (1) en renferme *quatre*, elle n'en est pas moins aussi générale que celle-ci, dont le premier membre peut toujours être divisé par l'un de ses coefficients. Mais nous considérerons presque toujours l'équation du plan sous la forme (1), parce qu'elle est plus symétrique, et qu'en outre, lorsqu'on aura à déterminer un plan d'après certaines conditions, comme l'équation (1) renfermera une *constante arbitraire* de plus que l'équation

$$z = mx + ny + p,$$

on en profitera pour introduire certaines simplifications dans les calculs.

Cette remarque est très-utile.

Faisons successivement $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, dans l'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

il en résulte, pour $x = 0$,

$$By + Cz + D = 0,$$

pour $y = 0$,

$$Ax + Cz + D = 0,$$

et pour $z = 0$,

$$Ax + By + D = 0;$$

ce sont les équations des *traces* du plan sur les trois plans des yz, des xz et des xy.

En posant à la fois $x = 0, y = 0$, on obtient

$$z = -\frac{D}{C};$$

ce qui donne les coordonnées du point où le plan rencontre l'axe des z.

On aurait de même

$$x = 0, \quad z = 0, \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{D}{B},$$

$$y = 0, \quad z = 0, \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{D}{A},$$

pour les coordonnées des points où le plan rencontre l'axe des y et l'axe des x.

385. On peut faire entrer dans l'équation du plan les distances de l'origine à ces trois points d'intersection; et l'équation prend alors une forme très-élégante.

Posons, en effet,

$$AB = -\frac{D}{A} = q, \quad AC = -\frac{D}{B} = r, \quad AD = -\frac{D}{C} = s;$$

il en résulte

$$A = -\frac{D}{q}, \quad B = -\frac{D}{r}, \quad C = -\frac{D}{s};$$

d'où, substituant dans l'équation du plan et réduisant,

$$rs.x + qs.y + qr.z = qrs;$$

équation analogue à celle qui a été obtenue pour la ligne droite (n° 55), ainsi que pour les équations de l'ellipse et de l'hyperbole, rapportées à leurs axes.

Elle ne renferme, comme l'équation

$$z = mx + ny + p,$$

que trois constantes, mais elle est plus symétrique.

Questions préliminaires relatives à la ligne droite et au plan.

386. Nous allons maintenant nous occuper de la résolution d'une série de questions relatives au point, à la ligne droite et au plan, qui, avec celles que nous avons déjà traitées (n°s 374 et suivants), constituent ce qu'on appelle les *préliminaires* de la Géométrie analytique à trois dimensions.

PREMIÈRE QUESTION. — *Faire passer un plan par trois points donnés.*

Désignons par (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z''') les coordonnées des trois points, et par

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

l'équation du plan cherché; A, B, C, D, sont des constantes qu'il s'agit de déterminer.

Puisque le plan est assujetti à passer par les trois points, son équation doit être vérifiée, lorsqu'on y remplace successivement x, y, z, par les coordonnées de chacun de ces points; ainsi l'on a les trois relations

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0, \quad Ax'' + By'' + Cz'' + D = 0,$$
$$Ax''' + By''' + Cz''' + D = 0,$$

qui peuvent être transformées de la manière suivante :

$$\frac{A}{D}x' + \frac{B}{D}y' + \frac{C}{D}z' = -1,$$
$$\frac{A}{D}x'' + \frac{B}{D}y'' + \frac{C}{D}z'' = -1,$$
$$\frac{A}{D}x''' + \frac{B}{D}y''' + \frac{C}{D}z''' = -1.$$

En appliquant à ces relations les formules pour la résolution des équations du premier degré à trois inconnues, et observant que le coefficient D étant tout à fait arbitraire, on peut l'égaler à la quantité qui sert de dénominateur commun aux trois expressions de $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$, on trouve, tout calcul fait,

$$D = x'y''z''' - x'z''y''' + z'x''y''' - y'x''z''' + y'z''x''' - z'y''x''',$$
$$A = -y''z''' + z''y''' - z'y''' + y'z''' - y'z'' + z'y'',$$
$$B = -x'z''' + x'z'' - z'x'' + x''z''' - z''x''' + z'x''',$$
$$C = -x'y'' + x'y''' - x''y''' + y'x'' - y'x''' + y''x'''.$$

Il ne s'agirait plus maintenant que de substituer ces valeurs dans l'équation (1), et l'on aurait l'équation demandée.

Soit, comme cas particulier, à faire passer un plan par les trois points B, C, D, pour lesquels on a les relations FIG. 192.

$$x' = p, \quad y' = 0, \quad z' = 0,$$
$$x'' = 0, \quad y'' = q, \quad z'' = 0,$$
$$x''' = 0, \quad y''' = 0, \quad z''' = r.$$

qui méritent quelque attention, parce qu'elles sont fréquemment employées dans la Géométrie analytique à trois dimensions.

Reprenons les équations de la droite et du plan,

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + 6, \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

et proposons-nous de déterminer le point où la droite rencontre le plan.

Comme on a trois équations entre x, y, z, il suffit de remplacer dans la troisième, x et y par leurs valeurs tirées des deux premières. Il vient, par cette substitution,

$$(Aa + Bb + C)z + A\alpha + B6 + D = 0;$$

d'où

$$z = -\frac{(A\alpha + B6 + D)}{Aa + Bb + C},$$

et, par suite,

$$x = \alpha - \frac{a(A\alpha + B6 + D)}{Aa + Bb + C},$$

ou bien,

$$x = \frac{\alpha(Aa + Bb + C) - a(A\alpha + B6 + D)}{Aa + Bb + C},$$

puis,

$$y = 6 - \frac{b(A\alpha + B6 + D)}{Aa + Bb + C},$$

ou bien,

$$y = \frac{6(Aa + Bb + C) - b(A\alpha + B6 + D)}{Aa + Bb + C}.$$

Cela posé, si l'on veut exprimer que *la droite et le plan sont parallèles*, il faut écrire que les valeurs de x, y, z, correspondant au point d'intersection, sont *infinies;* ce qui se fait en posant

$$Aa + Bb + C = 0,$$

car ces valeurs deviennent alors

$$z = -\frac{(A\alpha + B6 + D)}{0}, \quad x = -\frac{a(A\alpha + B6 + D)}{0},$$

$$y = -\frac{b(A\alpha + B6 + D)}{0}.$$

Si, au lieu de la condition

$$Aa + Bb + C = 0,$$

on établit la suivante,

$$A\alpha + B6 + D = 0,$$

les valeurs de x, y, z se réduisent à

$$z = 0, \quad x = \alpha, \quad y = 6.$$

Or il est aisé de reconnaître que le point correspondant à ce système de coordonnées est celui où la droite rencontre le plan des xy ; car si l'on pose, dans les équations de la droite,

$$z = 0,$$

il en résulte,

$$x = \alpha, \quad y = 6.$$

Supposons maintenant qu'on ait à la fois

$$Aa + Bb + C = 0, \quad A\alpha + B6 + D = 0;$$

les valeurs de x, y, z se réduisent à la forme $\frac{0}{0}$, signe de *l'indétermination;* ce qui prouve qu'alors la droite se trouve *tout entière* dans le plan.

On peut conclure de là que, des deux relations ci-dessus, la première exprime seulement que *la droite et le plan sont parallèles;* la seconde, que le plan *passe par un point déterminé de la droite* (celui où la droite perce le plan des xy); et que, toutes les deux conjointement, expriment que *la droite et le plan se confondent.*

389. Troisième question. — *Un plan et un point hors de ce plan étant donnés,* on demande, 1° *d'abaisser du point une perpendiculaire sur le plan;* 2° *de trouver la longueur de cette perpendiculaire,* c'est-à-dire *la distance du point au plan donné.*

Soient x', y', z', les coordonnées de ce point, et

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation d'un plan supposé connu de position.

Les équations de la droite cherchée seront (n° 374) de la forme

$$(2) \qquad x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z');$$

a, b étant deux constantes qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela, nous rappellerons un des principes de la Géométrie descriptive, lequel consiste en ce que, si une droite est *perpendiculaire* à un plan dans l'espace, *la projection de la droite sur un des plans coordonnés est perpendiculaire à la trace du plan donné sur le même plan coordonné.*

Cela posé, si, pour obtenir *les traces* du plan donné, on fait successivement $y = 0$ et $x = 0$ dans l'équation (1), il vient

$$Ax + Cz + D = 0, \quad By + Cz + D = 0,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$(3) \qquad x = -\frac{C}{A}z - \frac{D}{A}, \quad y = -\frac{C}{B}z - \frac{D}{B}.$$

Or, puisque les droites exprimées par les équations (2) doivent être respectivement perpendiculaires aux droites exprimées par les équations (3), il faut (n° 64) que l'on ait entre les coefficients de z les relations

$$a \times -\frac{C}{A} + 1 = 0;$$

d'où

$$a = \frac{A}{C}, \quad \text{ou bien,} \quad A = aC,$$

et

$$b \times -\frac{C}{B} + 1 = 0;$$

d'où

$$b = \frac{B}{C}, \quad \text{ou bien,} \quad B = bC.$$

Substituant ces valeurs de a, b, dans les équations (2), on obtient pour les équations de la perpendiculaire,

$$(4) \qquad x - x' = \frac{A}{C}(z - z'), \quad y - y' = \frac{B}{C}(z - z').$$

Actuellement, pour résoudre la seconde partie du problème proposé, observons que, d'après l'expression (n° 369), qui donne la distance entre deux points, il suffit de déterminer les valeurs de

$$x - x', \quad y - y', \quad z - z',$$

propres à satisfaire en même temps aux équations (1) et (4), et de substituer ensuite ces valeurs dans l'expression de la distance (puisque, par cette élimination, on obtiendra nécessairement les différences entre les coordonnées du point où la perpendiculaire rencontre le plan et celles du point donné).

A cet effet, nous ferons subir à l'équation (1) la transformation suivante : ajoutons au premier membre la quantité

$$-Ax'-By'-Cz'+Ax'+By'+Cz',$$

qui est identiquement nulle, et posons

$$Ax'+By'+Cz'+D=D'; \tag{5}$$

il vient,

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+D'=0.$$

Or, si l'on met dans cette équation, à la place de $x-x'$, $y-y'$, leurs valeurs (4), on trouve

$$(A^2+B^2+C^2)(z-z')+D'C=0;$$

d'où

$$z-z'=-\frac{D'C}{A^2+B^2+C^2},$$

et, par conséquent,

$$x-x'=-\frac{D'A}{A^2+B^2+C^2},$$

$$y-y'=-\frac{D'B}{A^2+B^2+C^2}.$$

Mais en appelant P la perpendiculaire demandée, on a (n° 369)

$$P=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2};$$

donc

$$P=\frac{D'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

(*Voyez* ce qui a été dit n° 65 sur le double signe dont le radical est affecté.)

390. *Cas particuliers.* — 1°. Le point donné peut être l'origine même des coordonnées. Dans ce cas, on a

$$x'=0, \quad y'=0, \quad z'=0,$$

et l'expression de la perpendiculaire se réduit à

$$P = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Le pied de la perpendiculaire a d'ailleurs pour coordonnées

$$x = -\frac{AD}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad y = -\frac{BD}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$z = -\frac{CD}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

2°. Si le point donné se trouve sur le plan, ses coordonnées doivent vérifier l'équation du plan; c'est-à-dire que l'on a

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0, \quad \text{d'où} \quad P = 0.$$

391. Quatrième question. — Réciproquement, *un point et une droite étant donnés dans l'espace, mener par le point un plan perpendiculaire à la droite, et trouver la longueur de la distance du point à la droite.*

Soient

$$(1) \qquad x = az + \alpha, \quad y = bz + 6,$$

les équations de la droite donnée, et x', y', z' les coordonnées du point.

L'équation du plan cherché sera (n° 387) de la forme

$$(2) \qquad A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0.$$

Or, par hypothèse, la droite et le plan sont perpendiculaires entre eux; on a donc (n° 389) entre les coefficients A, B, C et a, b, les relations

$$A = aC, \quad B = bC;$$

d'où, substituant dans l'équation (2) et divisant par C,

$$(3) \qquad a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0.$$

C'est l'équation du plan cherché.

Maintenant, pour obtenir la distance du point (x', y', z') au point où le plan rencontre la droite, il suffit de chercher les valeurs de $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, propres à satisfaire en même temps aux équations (1) et (3), puis de porter ces valeurs dans l'expression générale de la distance entre deux points donnés.

Afin d'effectuer cette élimination, nous mettrons les équations (1) sous la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} x - x' = a(z - z') + \alpha - x' + az', \\ y - y' = b(z - z') + 6 - y' + bz'. \end{cases}$$

(Cette transformation est analogue à celle du n° 65.)

Cela posé, si l'on substitue pour $x - x'$, $y - y'$, leurs valeurs dans l'équation (3), il vient

$$(a^2 + b^2 + 1)(z - z') + a(\alpha - x' + az') + b(6 - y' + bz') = 0;$$

d'où

$$z - z' = \frac{a(x' - \alpha) + b(y' - 6) + z'}{a^2 + b^2 + 1} - z' = \frac{N}{a^2 + b^2 + 1} - z',$$

en posant, pour simplifier,

$$(5)\qquad N = a(x' - \alpha) + b(y' - 6) + z'.$$

Portons cette valeur de $z - z'$ dans les équations (4); il vient pour valeurs correspondantes de $x - x'$, $y - y'$,

$$x - x' = \frac{Na}{a^2 + b^2 + 1} - az' + \alpha - x' + az'$$

$$= \frac{Na}{a^2 + b^2 + 1} - (x' - \alpha),$$

$$y - y' = \frac{Nb}{a^2 + b^2 + 1} - bz' + 6 - y' + bz'$$

$$= \frac{Nb}{a^2 + b^2 + 1} - (y' - 6).$$

Faisant la *somme des carrés* des valeurs de $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, et observant, 1° que les premières parties élevées au carré donnent pour somme, $\frac{N^2}{a^2 + b^2 + 1}$; 2° que la somme des doubles produits se réduit, d'après la relation (5), à $\frac{-2N^2}{a^2 + b^2 + 1}$, on trouve enfin pour l'expression la plus simple de la distance du point à la droite donnée,

$$P = \sqrt{(x' - \alpha)^2 + (y' - 6)^2 + z'^2 - \frac{N^2}{a^2 + b^2 + 1}}.$$

392. *Conséquence.* — Si l'on joint le point (x', y', z') au point où la droite est rencontrée par le plan qui lui est perpendiculaire, point dont nous désignerons, pour le

moment, les coordonnées par x'', y'', z'', il est évident que cette droite de jonction est perpendiculaire sur la droite donnée.

Or les équations de cette droite sont (n° 374) de la forme

$$x - x' = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}(z - z');$$

et les rapports $\frac{x'' - x'}{z'' - z'}$, $\frac{y'' - y'}{z'' - z'}$, ne sont autre chose que les rapports des valeurs de $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, trouvées dans le numéro précédent. Donc, en effectuant cette substitution, l'on obtiendrait *les équations de la perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite dans l'espace*: question dont nous avons annoncé une solution à la fin du n° 380.

Nous n'achèverons pas ce calcul, qui n'offre aucune difficulté et qui conduit d'ailleurs à des résultats peu élégants.

393. Cinquième question. — *Par un point donné dans l'espace, mener un plan parallèle à un autre.*

Avant de résoudre ce problème, nous commencerons par établir les conditions analytiques qui expriment que deux plans sont parallèles.

Soient

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

les équations de deux plans donnés dans l'espace.

Si ces plans sont parallèles, leurs traces sur le plan des xz et sur celui des yz doivent être aussi parallèles.

Or (n° 384, *N. B.*) les équations de ces traces sont

$Ax + Cz + D = 0$, $By + Cz + D = 0$, pour le premier plan,

$A'x + C'z + D' = 0$, $B'y + C'z + D' = 0$, pour le second;

et pour qu'elles soient respectivement *parallèles*, il faut (n° 375) que l'on ait

$$\frac{A}{C} = \frac{A'}{C'} \quad \text{et} \quad \frac{B}{C} = \frac{B'}{C'};$$

d'où l'on déduit encore

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}.$$

Désignons actuellement par x', y', z' les coordonnées du point donné.

L'équation du premier plan étant

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

celle du second, qui est assujetti à passer par le point (x', y', z'), sera de la forme

$$A'(x - x') + B'(y - y') + C'(z - z') = 0;$$

mais, par hypothèse, les deux plans doivent être *parallèles*; on a donc

$$\frac{A'}{C'} = \frac{A}{C}, \quad \frac{B'}{C'} = \frac{B}{C}; \quad \text{d'où} \quad A' = \frac{A}{C} \cdot C', \quad B' = \frac{B}{C} \cdot C'.$$

Portant ces valeurs de A', B' dans l'équation précédente, et divisant par C', on obtient pour l'équation demandée,

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0,$$

équation dont les trois premiers coefficients sont les mêmes que ceux de l'équation du plan donné; il n'y a que le z de l'origine, c'est-à-dire le premier terme indépendant des variables, qui soit *différent*.

Si le point par lequel on veut faire passer le plan parallèle, est l'origine même des cordonnées, on a

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0;$$

et l'équation ci-dessus se réduit à

$$Ax + By + Cz = 0. \ldots \text{(}\textit{Voyez}\text{ le n° 383.)}$$

394. *Distance de deux plans parallèles.* — Lorsque les équations de deux plans parallèles sont données, savoir :

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$Ax + By + Cz + D' = 0,$$

on peut demander l'*expression analytique* de leur distance.

Pour l'obtenir, abaissons de l'origine des coordonnées une droite *perpendiculaire* à l'un : elle est nécessairement *perpendiculaire* à l'autre; et l'on a (n° 390), pour la distance de l'origine à chacun de ces plans,

$$P = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad P' = \frac{D'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

ce qui donne (P_1 désignant la distance demandée),

$$P_1 = \frac{D' - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

La quantité $D' - D$ exprime une *différence* ou une *somme*, suivant que les deux plans sont situés d'*un même* côté, ou de côtés *différents* par rapport à l'origine.

Comme d'ailleurs le radical est toujours affecté du *double signe*, on doit le prendre, avec le signe + ou le signe —, selon que $D' - D$ est une quantité *positive* ou *négative*.

395. Sixième question. — *Trouver les équations de l'intersection commune de deux plans.*

Soient

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1)$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0 \quad (2)$$

les équations des deux plans donnés.

Nous observerons d'abord que cette intersection est tout aussi bien déterminée par les équations des deux plans donnés que par celles de ses projections, qui ne sont d'ailleurs elles-mêmes (n° 371) que les équations de deux plans perpendiculaires, l'un au plan des xz, et l'autre au plan des yz.

Mais on peut avoir besoin, pour certains problèmes, de connaître les *équations des projections*.

Or, si l'on élimine y entre les équations (1) et (2), l'équation résultante en x et z appartiendra à un plan perpendiculaire au plan des xz, et passant par la droite; donc elle sera l'équation de la projection de la droite sur le plan des xz.

Même raisonnement pour la projection sur le plan des yz.

En effectuant ces calculs, on trouve,

1°. Pour la projection sur le plan des xz,

$$(AB' - BA')x + (CB' - BC')z + DB' - BD' = 0;$$

2°. Pour la projection sur le plan des yz,

$$(AB' - BA')y + (AC' - CA')z + AD' - DA' = 0.$$

L'élimination de z donnerait également l'équation de la projection sur le plan des xy.

396. Septième question. — *Deux plans étant donnés dans l'espace, trouver l'angle qu'ils forment entre eux.*

Le moyen qui se présente au premier abord, pour résoudre cette question, consisterait à rechercher, 1° les équations des projections de l'intersection commune des deux plans; 2° l'équation d'un plan perpendiculaire à cette intersection; 3° celles des *traces* de ce plan sur les deux plans donnés; 4° enfin, l'angle formé par ces traces. Mais on juge aisément que ces calculs, tous exécutables d'après les principes établis précédemment, seraient assez laborieux.

Voici un autre moyen plus simple et plus élégant.

Supposons que les droites OB, OC représentent dans l'espace les intersections des deux plans donnés avec un troisième qui leur soit perpendiculaire. Si du point O l'on élève OB′, OC′, respectivement perpendiculaires aux deux plans, il est clair que ces droites seront situées dans le troisième plan BOC dont nous venons de parler. Fig. 193.

Or, puisque les angles BOB′, COC′ sont égaux comme droits, il en résulte nécessairement B′OC′ = BOC; c'est-à-dire que *l'angle formé par deux droites menées en un point de l'intersection commune de deux plans, perpendiculairement à ces deux plans, est égal à l'angle que ces plans font entre eux.*

Cela posé, soient

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

les équations des deux plans.

Celles des deux droites qui leur sont respectivement perpendiculaires, de quelque manière que ces droites soient d'ailleurs situées dans l'espace, seront de la forme

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + 6,$$

et

$$x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + 6',$$

a, b, a', b' ayant (n° 389) pour valeurs,

$$a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C} \quad \text{et} \quad a' = \frac{A'}{C'}, \quad b' = \frac{B'}{C'}.$$

Or on a trouvé (n° 377) pour l'angle de deux droites,

$$\cos V = \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)\,(a'^2 + b'^2 + 1)}}.$$

Donc, en remplaçant a, a', b, b' par leurs valeurs, on obtient, toute réduction faite,

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)\,(A'^2 + B'^2 + C'^2)}},$$

expression indépendante de D, D'; ce qui doit être, car tous les plans parallèles aux deux plans donnés forment entre eux le même angle que ceux-ci.

Le radical que renferme cette expression, rend *indéterminé* le signe de cos V, parce qu'en effet les deux plans font entre eux deux angles, l'un aigu et l'autre obtus; cette indétermination cesse dès que l'on sait d'avance de quelle espèce est l'angle cherché.

Examinons quelques cas particuliers.

397. Si les deux plans sont perpendiculaires entre eux, on doit avoir $\cos V = 0$; ce qui donne

$$AA' + BB' + CC' = 0,$$

pour la condition de *perpendicularité* de deux plans.

Supposons les deux plans *parallèles entre eux*, auquel cas on a $\cos V = 1$; si l'on égale à l'unité le second membre de la formule ci-dessus, et qu'on développe les calculs, on trouve, toute réduction faite,

$$(AB' - BA')^2 + (AC' - CA')^2 + (BC' - CB')^2 = 0,$$

égalité qui ne peut être vérifiée qu'autant que l'on a séparément

$$AB' - BA' = 0, \quad AC' - CA' = 0, \quad BC' - CB' = 0;$$

d'où

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}, \quad \frac{A}{C} = \frac{A'}{C'}, \quad \frac{B}{C} = \frac{B'}{C'}.$$

Ce sont les conditions déjà obtenues n° 393.

398. *Angles d'un plan avec les plans coordonnés.* — Faisons maintenant coïncider l'un des deux plans avec chacun des trois plans coordonnés. On obtiendra ainsi les cosinus des angles qu'il forme avec chacun d'eux.

Supposons, par exemple, que le second plan soit le plan des xy.

Comme l'équation

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

se réduit alors à

$$z = 0,$$

il faut que l'on ait

$$A' = 0, \quad B' = 0, \quad D' = 0;$$

et la valeur de cos V devient

$$(1) \qquad \cos(xy) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

[$\cos(xy)$, $\cos(xz)$, $\cos(yz)$ sont des notations que nous adopterons pour désigner les cosinus des angles qu'un plan forme avec les plans coordonnés].

Par un raisonnement analogue, on obtiendrait pour les angles que le premier plan forme avec les deux autres plans coordonnés

$$(2) \qquad \cos(xz) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$(3) \qquad \cos(yz) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Si l'on ajoute entre elles les équations (1), (2), (3), après les avoir élevées au carré, on trouve

$$\cos^2(xy) + \cos^2(xz) + \cos^2(yz) = 1;$$

relation analogue à celle qui a été trouvée (n° 379) entre les cosinus des angles qu'une droite forme avec les trois axes.

Désignons par $\cos(xy)'$, $\cos(xz)'$, $\cos(yz)'$ les cosinus des angles qu'un second plan dans l'espace forme avec les trois plans coordonnés; on aurait également

$$\cos(xy)' = \frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}, \quad \cos(xz)' = \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$\cos(yz)' = \frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

En multipliant ces trois expressions respectivement par celles de $\cos(xy)$, $\cos(xz)$, $\cos(yz)$, et ayant égard à la valeur de cos V, on a cette nouvelle relation,

$$\cos(xy).\cos(xy)' + \cos(xz).\cos(xz)' + \cos(yz).\cos(yz)' = \cos V.$$

Enfin, si les deux plans sont perpendiculaires entre eux, on doit avoir

$$\cos(xy).\cos(xy)' + \cos(xz).\cos(xz)' + \cos(yz).\cos(yz)' = 0.$$

Tous ces résultats nous serviront dans le problème général de la transformation des coordonnées en trois dimensions.

399. Huitième question. — *Trouver l'angle d'une droite et d'un plan dans l'espace.*

Si d'un point quelconque de la droite on abaisse une perpendiculaire sur le plan donné, et qu'on joigne le pied de cette perpendiculaire avec le point où la droite rencontre le plan, la ligne de jonction est, comme on sait, *la projection de la droite sur le plan.*

Cela posé, on appelle *angle d'une droite et d'un plan* celui que forme la droite avec sa projection sur le plan. Or il est évident que cet angle est le *complément* de celui que fait la même droite avec la perpendiculaire abaissée sur le plan.

Soient donc

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + 6$$

les équations de la droite donnée,

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

celle du plan.

Les équations d'une droite perpendiculaire à ce plan seront de la forme

$$x = a'z + \alpha', \quad y = b'z + 6',$$

a', b' ayant (n° 389) pour valeurs

$$a' = \frac{A}{C}, \quad b' = \frac{B}{C}.$$

Mais on a (n° 377) pour le cosinus de l'angle de ces deux droites,

$$\frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)\,(a'^2 + b'^2 + 1)}};$$

donc, en remplaçant a', b', par leurs valeurs, on obtient pour le sinus de l'angle cherché,

$$\sin V = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)\,(A^2 + B^2 + C^2)}}.$$

Si la droite est *parallèle* au plan, on doit avoir $\sin V = 0$;

ce qui donne la relation

$$Aa + Bb + C = 0,$$

déjà établie au n° 388.

400. NEUVIÈME QUESTION. — *Plus courte distance de deux droites données par leurs équations.*

Cette question, qui forme avec celles que nous venons de traiter sur la *ligne droite* et le *plan*, ce qu'on appelle les *préliminaires* dans la GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, est une conséquence facile à déduire des principes précédents; nous nous bornerons à indiquer la marche à suivre pour arriver : 1° à l'expression de la *longueur* de cette plus courte distance, 2° aux *équations* de la droite sur laquelle elle est située.

PREMIÈREMENT, *former* les équations de deux *plans parallèles* passant par les deux droites données (n°s 388, 393); puis, *déterminer* (n° 394) la *distance* de ces deux plans, qui n'est autre que la *longueur cherchée;*

SECONDEMENT, *former* les équations de deux autres plans assujettis, l'un à passer par la première droite et à être perpendiculaire au second des deux plans parallèles (n°s 388, 397), l'autre, *vice versâ*. Ces équations fixent ainsi la *position* de la plus courte distance (n° 395); à moins qu'on ne veuille obtenir les équations de ses projections, ce qui se fait (même numéro) en *éliminant* successivement deux des trois variables x, y, z.

401. SCOLIE GÉNÉRAL. — Tels sont les principes à l'aide desquels on peut résoudre toute espèce de questions relatives à la ligne droite et au plan dans l'espace. On ne doit pas toutefois perdre de vue que quelques-uns des résultats obtenus précédemment sont indépendants de l'*inclinaison* des axes, mais que toutes les questions dans lesquelles on a dû faire entrer en considération, soit la distance entre deux points, soit l'angle de deux droites ou de deux plans, et, par conséquent, la condition de *perpendicularité* de deux droites ou de deux plans, toutes ces questions, dis-je, conduiraient à des résultats beaucoup plus compliqués, dans l'hypothèse d'*axes obliques*.

CHAPITRE XI.

DES SURFACES COURBES, ET EN PARTICULIER DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

Notions préliminaires.

402. Une surface courbe étant donnée de forme et de position dans l'espace, si, après avoir traduit algébriquement une de ses propriétés caractéristiques, on parvient à une relation $F(x, y, z) = 0$ entre les coordonnées de chacun de ses points, cette équation est dite l'*équation de la surface*, et la détermine complétement; car, en donnant à deux des variables des valeurs arbitraires, on tire de l'équation une ou plusieurs valeurs pour la troisième variable; et le point correspondant à chaque système de coordonnées se trouve nécessairement sur la surface, puisque, par hypothèse, l'équation convient à tous les points, et ne convient qu'aux points de cette surface.

Réciproquement, toute équation

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

dont les variables x, y, z, expriment les distances à trois plans *rectangulaires* ou *obliques*, comptées *parallèlement* aux intersections de ces plans, *a pour lieu géométrique une certaine surface*, dont la nature et la forme dépendent de la manière dont les variables sont combinées entre elles et avec d'autres quantités constantes, données *à priori*.

Pour démontrer cette seconde proposition rigoureusement, considérons une seconde équation

$$F'(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

et recherchons le lieu de tous les points dont les coordonnées sont susceptibles de vérifier à la fois les équations (1) et (2).

Supposons d'ailleurs, pour plus de simplicité, les axes *rectangulaires*.

D'abord, si l'on élimine entre ces équations une des trois variables, y par exemple, l'équation résultante

$$f(x, z) = 0 \qquad (3)$$

exprime une certaine relation entre des coordonnées de points situés dans le plan des xz, et appartient, par conséquent (n° 371), à une ligne courbe située dans ce plan. Mais en imaginant, par les différents points de cette courbe, des perpendiculaires au plan des xz, on forme, dans l'espace, une surface (dite *surface cylindrique*) pour chacun des points de laquelle les x et z sont les mêmes que ceux de la courbe; ainsi l'équation (3) convient également à tous les points de cette surface, et ne peut convenir qu'à ces points.

De même, l'équation

$$f'(y, z) = 0, \qquad (4)$$

qui résulte de l'élimination de x entre les équations (1) et (2), caractérise tous les points d'une surface cylindrique dont les arêtes sont perpendiculaires au plan des yz, et qui a pour base la courbe représentée par l'équation (4).

Il suit de là que le système des équations (2) et (4), lequel peut remplacer celui des équations (1) et (2), appartient à tous les points qui se trouvent à la fois sur les deux *surfaces cylindriques*, et, par conséquent, à leur intersection commune qui, en général, est une ligne courbe. Donc aussi le lieu des points dont les coordonnées satisfont en même temps aux équations (1) et (2), est une ligne : ce qui exige que les lieux géométriques de ces équations soient *des surfaces*, et non *des solides*, comme on pourrait d'abord se l'imaginer.

On doit remarquer cependant que, si l'équation (1), outre les variables x, y, z, renfermait une ou plusieurs indéterminées, cette équation fournirait autant de surfaces différentes que l'on pourrait donner de valeurs aux indéterminées, en sorte que, dans ce cas, le lieu géométrique serait l'assemblage d'une infinité de surfaces ou de *couches* infiniment minces, qui formeraient alors, à proprement parler, un solide.

403. Supposons actuellement que l'on ait trois équations,

$$F(x, y, z) = 0, \quad F'(x, y, z) = 0, \quad F''(x, y, z) = 0,$$

existant en même temps pour différents points.

Comme les deux premières équations caractérisent tous les points de la ligne d'intersection des surfaces exprimées par ces équations, que la première et la troisième caractérisent la ligne d'intersection des surfaces qui leur appartiennent, il s'ensuit que les trois équations conviennent aux points où ces lignes se rencontrent, c'est-à-dire à ceux qui se trouvent à la fois sur les trois surfaces, et l'on obtiendra les coordonnées de ces points en éliminant x, y, z, entre les équations proposées.

Le *nombre* des points communs est égal au *nombre* des systèmes de valeurs réelles de x, y, z, propres à vérifier ces équations simultanément.

404. On peut conclure des considérations précédentes,

1°. Qu'une seule équation entre trois variables x, y, z détermine analytiquement une surface;

2°. Que le système de deux équations en x, y, z, caractérise une ligne courbe désignée ordinairement sous le nom de *courbe à double courbure* (comme tenant de la nature de l'une et l'autre surface représentées par les deux équations); cette même courbe est encore déterminée par les équations de deux de ses projections : ce sont (n° **402**) les équations qu'on obtient en éliminant successivement x et y entre les équations proposées;

3°. Que le système de trois équations en x, y, z fixe la position d'un certain nombre de points dans l'espace; en sorte qu'il n'est pas toujours nécessaire de se donner explicitement les coordonnées de ces points, mais bien les équations de trois surfaces sur lesquelles ils se trouvent placés.

Ces premières notions étant établies, nous allons nous occuper de la résolution d'un problème analogue à celui par lequel nous avons fait précéder la théorie des courbes du second degré : c'est celui de la transformation des coordonnées en trois dimensions.

§ Ier. — TRANSFORMATION DES COORDONNÉES DANS L'ESPACE.

405. *Etant donnée l'équation d'une surface rapportée à des axes quelconques, trouver l'équation de la même surface rapportée à de nouveaux axes.*

La méthode consiste, comme on l'a vu au n° 111, à exprimer les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles, puis à substituer les valeurs ainsi obtenues dans l'équation donnée.

Nous ne traiterons point ici la question la plus générale, parce que les formules en sont peu usitées, et nous nous bornerons à considérer les cas suivants :

406. PREMIER CAS. — *Passer d'un système de coordonnées rectangulaires ou obliques à un système de coordonnées parallèles d'origine différente.*

Soient AX, AY, AZ, les axes primitifs ; A'X', A'Y', A'Z', les nouveaux que nous supposons *parallèles* aux premiers, et prolongés jusqu'à leur rencontre avec les plans des yz, xz, xy, en B, C, D ; les parties A'B, A'C, A'D, représentent les coordonnées de la nouvelle origine A' rapportée aux anciens axes. FIG. 194.

Si d'un point quelconque M de la surface, nous menons les coordonnées MP, MQ, MR, ces droites perceront les plans $y'z'$, $x'z'$, $x'y'$ aux points P', Q', R', et l'on aura

$$MP = x, \quad MQ = y, \quad MR = z,$$

puis

$$MP' = x', \quad MQ' = y', \quad MR' = z',$$

et

$$P'P = A'B = a, \quad Q'Q = A'C = b, \quad R'R = A'D = c;$$

ce qui donne, par conséquent, les relations

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c.$$

Telles sont les formules au moyen desquelles on passe d'un système quelconque de coordonnées à un système parallèle.

Les signes des quantités a, b, c, font connaître (n° 364) dans lequel des *huit* angles trièdres formés par les trois axes primitifs se trouve la nouvelle origine.

N. B. — Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons

que l'origine reste la même, parce que, si elle était différente, on commencerait par transporter les axes parallèlement à eux-mêmes d'après les formules ci-dessus, et l'on changerait ensuite la direction des axes autour de la nouvelle origine.

407. SECOND CAS. — *Passer d'un système rectangulaire à un système oblique de même origine.*

La méthode que nous emploierons pour obtenir les formules relatives à ce nouveau cas, est fondée sur la proposition suivante :

FIG. 195. Soient LL′, KK′, deux droites indéfinies situées ou non situées dans un même plan. Abaissons de deux points A, B de la première droite des lignes Aa, Bb, perpendiculaires sur la seconde : la partie ab de cette seconde droite est dite *la projection de* AB sur KK′. Cela posé, je dis que l'on a

$$ab = \mathrm{AB}\cos\nu,$$

ν désignant l'angle que les deux droites LL′, KK′ font entre elles.

En effet, soient menées par les points A, B, deux plans MN, PQ, perpendiculaires à KK′; ces plans contiennent les deux perpendiculaires Aa, Bb, déjà abaissées.

Du point A tirons ensuite AI, perpendiculaire sur le plan PQ, et joignons le point B avec le point I où cette perpendiculaire rencontre PQ; le triangle AIB est rectangle en I, et donne

$$\mathrm{AI} = \mathrm{AB}.\cos\mathrm{BAI}.$$

Mais AI $= ab$, comme parties de parallèles comprises entre plans parallèles; d'ailleurs l'angle BAI n'est autre chose que l'angle des deux droites LL′, KK′. Donc enfin

$$ab = \mathrm{AB}\cos\nu;$$

c'est-à-dire que *la projection d'une droite sur une autre est égale au produit de la droite multipliée par le cosinus de l'angle qu'elle forme avec sa projection.*

FIG. 196. Appliquons ce résultat à la question proposée.

Soient AX, AY, AZ, trois axes rectangulaires; AX′, AY′, AZ′, trois axes obliques.

Menons d'un point quelconque M de la surface les an-

ciennes coordonnées MP, PQ, AQ, et les nouvelles MP′, P′Q′, AQ′, puis par les points M, P′, Q′, concevons trois plans perpendiculaires à AX.

Il est évident que le plan mené par le point M coupe AX au point Q, puisqu'il se confond avec le plan MPQ. Quant aux deux autres, soient p', q' leurs points de rencontre avec AX.

Il résulte de cette construction que la distance AQ ou x, se compose de trois parties Aq', $q'p'$, $p'Q$, que l'on peut regarder comme les projections respectives des coordonnées AQ′, P′Q′, MP′, ou x', y', z', sur l'axe des x. Donc, en convenant (*voyez* le n° 398) de désigner par (x', x), (y', x), (z', x) les angles que les nouveaux axes forment avec l'ancien axe des x, on aura, d'après le théorème précédent,

$$(1) \qquad x = x'\cos(x', x) + y'\cos(y', x) + z'\cos(z', x).$$

Concevons actuellement qu'on ait projeté de la même manière les coordonnées x', y', z', sur chacun des deux axes des y et des z, et employons des notations analogues aux précédentes; on obtiendra également

$$(2) \qquad y = x'\cos(x', y) + y'\cos(y', y) + z'\cos(z', y),$$

$$(3) \qquad z = x'\cos(x', z) + y'\cos(y', z) + z'\cos(z', z).$$

Les *neuf* constantes qui entrent dans ces trois formules, sont d'ailleurs liées entre elles (n° 379) par les relations :

$$(4) \qquad \begin{cases} \cos^2(x', x) + \cos^2(x', y) + \cos^2(x', z) = 1, \\ \cos^2(y', x) + \cos^2(y', y) + \cos^2(y', z) = 1, \\ \cos^2(z', x) + \cos^2(z', y) + \cos^2(z', z) = 1. \end{cases}$$

408. Comme application immédiate des formules qui viennent d'être obtenues, proposons-nous de trouver l'*expression de la distance entre deux points*, M, M′, *rapportés à des axes obliques*.

Afin d'éviter toute confusion dans les notations, nous conviendrons, pour la résolution de cette question, d'appeler x, y, z, x', y', z', etc., les coordonnées de points rapportés à un système d'axes *rectangulaires*, et X, Y, Z, X′, Y′, Z′, etc., les coordonnées des mêmes points rapportés à des axes *obliques*.

Les formules précédentes deviennent alors

$$x = \mathrm{X}\cos(\mathrm{X}, x) + \mathrm{Y}\cos(\mathrm{Y}, x) + \mathrm{Z}\cos(\mathrm{Z}, x),$$

$$y = \mathrm{X}\cos(\mathrm{X}, y) + \mathrm{Y}\cos(\mathrm{Y}, y) + \mathrm{Z}\cos(\mathrm{Z}, y),$$

$$z = \mathrm{X}\cos(\mathrm{X}, z) + \mathrm{Y}\cos(\mathrm{Y}, z) + \mathrm{Z}\cos(\mathrm{Z}, z),$$

$$\cos^2(X, x) + \cos^2(X, y) + \cos^2(X, z) = 1,$$
$$\cos^2(Y, x) + \cos^2(Y, y) + \cos^2(Y, z) = 1,$$
$$\cos^2(Z, x) + \cos^2(Z, y) + \cos^2(Z, z) = 1.$$

Cela posé, on a trouvé (n° 369), pour le carré D^2 de la distance entre deux points rapportés à des axes *rectangulaires*,

$$D^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2;$$

et tout se réduit à y remplacer $x', y', z', x'', y'', z''$ par leurs valeurs en fonction des nouvelles coordonnées $X', Y', Z', X'', Y'', Z''$.

Or, d'après les notations convenues, on a nécessairement

$$\begin{aligned} x' - x'' &= (X' - X'')\cos(X, x) + (Y' - Y'')\cos(Y, x) \\ &\quad + (Z' - Z'')\cos(Z, x), \\ y' - y'' &= (X' - X'')\cos(X, y) + (Y' - Y'')\cos(Y, y) \\ &\quad + (Z' - Z'')\cos(Z, y), \\ z' - z'' &= (X' - X'')\cos(X, z) + (Y' - Y'')\cos(Y, z) \\ &\quad + (Z' - Z'')\cos(Z, z), \end{aligned}$$

expressions qu'il faut élever au carré pour faire ensuite la somme de ces carrés.

En exécutant cette double opération, il est facile de reconnaître que le résultat doit se composer de deux parties principales : 1° de la somme des carrés

$$(X' - X'')^2, \quad (Y' - Y'')^2, \quad (Z' - Z'')^2,$$

ayant respectivement pour multiplicateur *la somme des carrés des cosinus des angles que forme chacun des nouveaux axes avec les trois axes primitifs*, laquelle dernière somme est égale à 1, d'après les trois dernières des relations ci-dessus; ce qui réduit la première somme à

$$(X' - X'')^2 + (Y' - Y'')^2 + (Z' - Z'')^2;$$

2° de la somme des doubles produits

$$2(X' - X'')(Y' - Y''), \quad 2(X' - X'')(Z' - Z''),$$
$$2(Y' - Y'')(Z' - Z''),$$

ayant respectivement pour multiplicateurs *la somme des produits deux à deux des cosinus des angles que forment d'abord les nouveaux axes des* x *et des* y *avec les trois axes primitifs, puis les nouveaux axes des* x *et des* z *avec les mêmes axes, et enfin les nouveaux axes des* y *et des* z *avec les mêmes axes.*

Or, en vertu de ce qui a été dit au n° 396, les trois multiplicateurs dont nous venons de parler ont respectivement pour valeurs

$$\cos(X, Y), \quad \cos(X, Z), \quad \cos(Y, Z);$$

donc enfin,

$$\begin{aligned} D^2 = &(X'-X'')^2+(Y'-Y'')^2+(Z'-Z'')^2 \\ &+2(X'-X'')(Y'-Y'')\cos(X,Y) \\ &+2(X'-X'')(Z'-Z'')\cos(X,Z) \\ &+2(Y'-Y'')(Z'-Z'')\cos(Y,Z). \end{aligned}$$

Telle est l'expression la plus générale de la distance entre deux points. C'est en même temps l'expression de *la diagonale d'un parallélipipède oblique.*

409. TROISIÈME CAS. — *Passer d'un système rectangulaire à un autre système rectangulaire de même origine.*

Les formules sont les mêmes que dans le cas du n° 407; mais il faut joindre aux relations déjà établies entre les cosinus, celles qui expriment (n°s 378 et 380) que les nouveaux axes sont perpendiculaires *deux à deux;* ce qui donne,

$$\cos(x',x)\cos(y',x)+\cos(x',y)\cos(y',y)+\cos(x',z)\cos(y',z)=0,$$
$$\cos(x',x)\cos(z',x)+\cos(x',y)\cos(z',y)+\cos(x',z)\cos(z',z)=0,$$
$$\cos(y',x)\cos(z',x)+\cos(y',y)\cos(z',y)+\cos(y',z)\cos(z',z)=0.$$

On voit donc que les constantes qui entrent dans les formules relatives au cas actuel, sont liées entre elles par six relations différentes; d'où il suit que de ces *neuf* cosinus, il n'y en a que trois dont on puisse disposer arbitrairement.

Il existe, en effet, d'autres formules propres à faire passer d'un système rectangulaire à un autre de même espèce, et dans lesquelles on ne fait entrer en considération que *trois constantes*, savoir :

1°. L'angle que *la trace* du plan des $x'y'$ sur le plan des xy forme avec l'ancien axe des x;

2°. L'angle que font entre eux le plan des $x'y'$ et celui des xy;

3°. Enfin l'angle que fait l'axe des x' avec la trace dont nous venons de parler.

Il est aisé de reconnaître que ces données suffisent pour fixer la position des trois nouveaux axes, par rapport aux anciens; mais ces formules étant très-compliquées et peu

symétriques, nous renvoyons, pour leur détermination, au tome II, n° 1er, de la *Correspondance de l'École Polytechnique*, ouvrage dans lequel nous avons puisé également la méthode suivie dans les deux derniers cas de la transformation des coordonnées.

Cas particuliers du précédent.

Fig. 198. **410.** PREMIÈREMENT. — On peut, en conservant l'un des anciens axes, celui des z, par exemple, changer la direction des deux autres axes dans le plan des xy.

Dans ce cas, on a évidemment

$$\cos(y', x) = \cos[90° + (x', x)] = -\sin(x', x),$$
$$\cos(z', x) = 0,$$
$$\cos(x', y) = \sin(x', x), \quad \cos(y', y) = \cos(x', x),$$
$$\cos(z', y) = 0,$$
$$\cos(x', z) = 0, \quad \cos(y', z) = 0, \quad \cos(z', z) = 1;$$

ce qui donne, pour les formules correspondantes,

$$x = x' \cos(x', x) - y' \sin(x', x),$$
$$y = x' \sin(x', x) + y' \cos(x', x),$$
$$z = z'.$$

N. B. — Les deux premières sont identiques avec celles du n° 119, parce qu'en effet tout se réduit à une simple transformation de coordonnées *en deux dimensions*.

411. SECONDEMENT. — On verra plus loin que la discussion d'une surface est fondée principalement sur la détermination de ses intersections par des plans menés sous différentes inclinaisons. Or l'élimination d'une variable, z par exemple, entre l'équation de la surface et celle du plan donne lieu à une équation qui représente (n° 402) la projection de la courbe d'intersection sur le plan des xy, mais qui, en général, n'apprend rien sur la nature de cette courbe; et il serait important de pouvoir *déduire de l'équation proposée une équation de la courbe elle-même rapportée à des coordonnées prises dans son plan.*

Tel est le cas particulier de la transformation des coordonnées, que nous avons à traiter.

Remarquons d'abord que le plan *sécant*, qu'on peut supposer, pour le moment, passant par l'origine A, est complétement déterminé par sa trace AX′ sur le plan des xy, et par l'angle qu'il forme avec celui-ci. FIG. 199.

On obtient cet angle en concevant au point A deux droites AL, AY′, perpendiculaires à la trace AX′, l'une située dans le plan des xy, l'autre dans le plan sécant.

Soit posé

$$X'AX = \varphi \quad \text{et} \quad LAY' = \theta.$$

M étant un point quelconque de la courbe d'intersection, abaissons MN perpendiculaire sur le plan des xy, et tirons NP parallèlement à l'axe AY; AP, PN, NM sont les x, y, z du point M. Prenant ensuite les deux droites AX′, AY′ pour nouveau système d'axes, menons MP′ parallèlement à AY′, on a

$$AP' = x', \quad MP' = y'.$$

Comme les coordonnées x, y, z du point M sont déjà liées entre elles par l'équation de la surface

$$F(x, y, z) = 0,$$

il s'ensuit que si, par un moyen quelconque, on parvient à exprimer x, y, z, en fonction des quantités x', y', φ et θ, et qu'on substitue ces valeurs dans l'équation de la surface, on aura l'équation demandée.

A cet effet, traçons P′N, et menons P′I parallèle à AY, NK parallèle à AX.

Les triangles rectangles P′MN, P′NK, P′AI donnent successivement

$$MN = MP' . \sin MP'N,$$

c'est-à-dire

$$z = y' . \sin\theta;$$

$$P'N = MP' . \cos MP'N, \quad \text{ou} \quad P'N = y' . \cos\theta;$$

$$NK = IP = P'N . \sin KP'N = y' \cos\theta . \sin\varphi$$

(car les angles KP′N, X′AX sont égaux comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires);

$$P'K = P'N \cos KP'N = y' \cos\theta . \cos\varphi;$$

$$AI = AP' . \cos P'AI = x' \cos\varphi;$$

$$P'I = AP' . \sin P'AI = x' \sin\varphi.$$

FIG. 199. Par suite,

$$NP = IK = P'I - P'K, \quad \text{ou} \quad y = x' \sin\varphi - y' \cos\theta \cos\varphi;$$

$$AP = AI + IP = AI + NK, \quad \text{ou} \quad x = x' \cos\varphi + y' \cos\theta \sin\varphi.$$

Ainsi les formules cherchées sont

$$(A) \qquad \begin{cases} x = x' \cos\varphi + y' \cos\theta \sin\varphi, \\ y = x' \sin\varphi - y' \cos\theta \cos\varphi, \\ z = y' \sin\theta; \end{cases}$$

et il ne s'agit plus que de reporter ces valeurs de x, y, z dans l'équation de la surface.

Ordinairement, les angles φ et θ relatifs au plan *sécant* sont donnés *à priori;* mais on peut aussi les déduire de l'équation même du plan

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

On a, en effet (n° 398),

$$\cos\theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

quant à l'angle φ, comme l'équation de la trace sur le plan des xy est

$$Ax + By + D = 0,$$

il en résulte

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B}; \quad \text{d'où} \quad \text{tang}\varphi = -\frac{A}{B}.$$

N. B. — Si le plan *sécant* ne passait pas par l'origine, il suffirait d'augmenter les seconds membres des formules ci-dessus, respectivement des coordonnées a, b, c, de la nouvelle origine, en vertu de ce qui a été dit au n° 406.

La même remarque s'applique à toutes les transformations des coordonnées, exécutées dans les numéros précédents.

Passons à l'étude des différents genres de surfaces.

§ II. — DES DIFFÉRENTS GENRES DE SURFACES.

Quoique nous ayons pour principal but, dans ce chapitre, d'exposer la théorie des surfaces du second degré, nous croyons devoir donner quelques notions sur certaines surfaces auxquelles on est souvent conduit par la

résolution de problèmes indéterminés en *trois dimensions*, parce que, dans la discussion même de l'équation générale du second degré, nous retrouverons les *caractères* qui appartiennent aux surfaces que nous allons faire connaître.

De la surface sphérique et de son plan tangent.

412. Une surface sphérique étant celle dont *tous les points sont également éloignés d'un même point* nommé CENTRE de la surface, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un quelconque de ses points, par $\alpha, 6, \gamma$, celles de son centre, et par r son rayon, on a nécessairement (n°s 369 et 408) pour l'équation de cette surface,

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2+(y-6)^2+(z-\gamma)^2=r^2,$$

lorsque les axes sont *rectangulaires*, et

$$(2) \quad \begin{cases} (x-\alpha)^2+(y-6)^2+(z-\gamma)^2+2(x-\alpha)(y-6).\cos(x,y) \\ +2(x-\alpha)(z-\gamma)\cos(x,z)+2(y-6)(z-\gamma)\cos(y,z)=r^2, \end{cases}$$

lorsque les axes sont *obliques*.

La forme compliquée de cette dernière équation en permet rarement l'usage.

La sphère étant rapportée à son *centre* comme origine, et les axes étant *rectangulaires*, son équation devient

$$(3) \qquad x^2+y^2+z^2=r^2;$$

et c'est principalement dans ce cas qu'on l'emploie.

413. L'équation (1) étant développée, prend la forme

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0.$$

Réciproquement, toute équation de cette forme caractérise une surface sphérique, dont le centre a pour coordonnées

$$-\frac{A}{2}, \quad -\frac{B}{2}, \quad -\frac{C}{2},$$

et qui a pour rayon

$$\sqrt{\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}+\frac{C^2}{4}-D}.$$

Nous renvoyons pour la démonstration de cette réciproque à celle qui a été donnée au n° 85 pour le cercle, comme étant, en tous points, semblable.

414. Pour déterminer la nature de l'intersection d'une sphère par un plan, il suffit de remplacer dans l'équation de la sphère

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

x, y, z, par leurs valeurs tirées des formules du n° 411,

$$x=x'\cos\varphi+y'\cos\theta\sin\varphi+a,$$
$$y=x'\sin\varphi-y'\cos\theta\cos\varphi+b,$$
$$z=y'\sin\theta+c.$$

On obtient ainsi une équation en x', y', dans laquelle le rectangle $x'y'$ disparaît de lui-même, et les coefficients de x'^2 et de y'^2 sont égaux à 1.

Donc (n° 85) cette équation est celle d'un *cercle*.

Les calculs n'offrent aucune difficulté.

415. *Du plan tangent à la sphère.* — On sait, en Géométrie, que ce plan est *perpendiculaire* au rayon qui passe par le point de contact; c'est cette condition qu'il faut traduire en *analyse*.

Soient x', y', z' les coordonnées du point de contact, l'origine étant placée au centre de la sphère, et

$$x=az, \quad y=bz,$$

les équations du rayon passant par ce point.

Comme les coordonnées x', y', z' doivent vérifier les deux équations, on a les relations particulières

$$x'=az', \quad y'=bz';$$

d'où l'on déduit

$$a=\frac{x'}{z'}, \quad b=\frac{y'}{z'}.$$

D'un autre côté, le plan tangent devant passer par le même point, son équation est (n° 387)

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0;$$

et puisque ce plan est perpendiculaire au rayon considéré, on doit avoir (n° 389)

$$A=aC, \quad B=bC;$$

d'où

$$\frac{A}{C}=\frac{x'}{z'}, \quad \frac{B}{C}=\frac{y'}{z'};$$

d'où, substituant dans l'équation du plan,

$$x'(x-x')+y'(y-y')+z'(z-z')=0. \tag{1}$$

Telle est l'équation du plan tangent à la surface sphérique dont l'équation est

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Si on la développe et qu'on ait égard à la relation

$$x'^2+y'^2+z'^2=r^2,$$

elle devient

$$xx'+yy'+zz'=r^2, \tag{2}$$

équation d'une forme plus simple et ne différant de celle de la surface sphérique qu'en ce que les carrés x^2, y^2, z^2 sont remplacés par xx', yy', zz'.

N. B. — Si l'origine était placée ailleurs qu'au centre, il faudrait, en désignant par α, 6, γ les coordonnées du centre, remplacer x, y, z, x', y', z' respectivement par

$$x-\alpha,\quad y-6,\quad z-\gamma,\quad x'-\alpha,\quad y'-6,\quad z'-\gamma,$$

dans l'équation (2); ce qui donnerait

$$(x'-\alpha)(x-\alpha)+(y'-6)(y-6)+(z'-\gamma)(z-\gamma)=r^2. \tag{3}$$

C'est sous cette dernière forme que l'on considère ordinairement l'équation du plan tangent, les axes étant *rectangulaires*, et l'origine étant placée ailleurs qu'au centre.

Des surfaces cylindriques.

416. On nomme ainsi *toute surface engendrée par le mouvement d'une droite qui glisse parallèlement à une autre droite donnée de position le long d'une certaine courbe* appelée la DIRECTRICE de la surface; la droite mobile s'appelle GÉNÉRATRICE.

Tâchons d'exprimer ce caractère général par l'analyse.

Soient

$$x=az+\alpha,\quad y=bz+6,$$

les équations de la génératrice considérée dans une position quelconque, et

$$F(x,\ y,\ z)=0,\quad F'(x,\ y,\ z)=0,$$

celles de la courbe qui sert de directrice.

Puisque la génératrice, dans son mouvement, ne doit pas

cesser d'être parallèle à elle-même, il s'ensuit (n° 375) que les quantités a, b restent les mêmes pour toutes les positions de la génératrice; mais les quantités α, 6, qui (n° 388) expriment les x et les y du point où la génératrice rencontre le plan des xy, sont constantes pour tous les points d'une même position de la génératrice, et varient lorsque le point passe d'une génératrice à une autre. Il doit donc nécessairement exister une *certaine relation* entre ces quantités α, 6, ou leurs égales $x - az$, $y - bz$, puisqu'elles sont *constantes ensemble et variables ensemble.*

Afin de parvenir à cette relation, remarquons que la génératrice devant, dans toutes ses positions, rencontrer la courbe qui sert de directrice, les équations de cette courbe et celles de la génératrice doivent exister simultanément pour tous les points d'intersection; et comme elles sont au nombre de *quatre*, si l'on élimine les coordonnées x, y, z, on parviendra à une équation entre α, 6, et des quantités connues, qui ne sera autre chose que la relation cherchée.

Cette relation, que nous pouvons représenter en général, par

$$f(\alpha, 6) = 0, \quad \text{ou} \quad 6 = f(\alpha),$$

devient, lorsqu'on y remplace α, 6 par leurs valeurs $x - az$, $y - bz$,

$$f(x - az,\ y - bz) = 0, \quad \text{ou} \quad y - bz = f(x - az).$$

Pour fixer les idées, proposons-nous, par exemple, de trouver l'équation du *cylindre oblique à base circulaire.*

Soient

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{et} \quad z = 0 \tag{1}$$

les équations du cercle qui doit servir de directrice, et que nous supposons, pour plus de simplicité, placé dans le plan des xy, le centre étant d'ailleurs situé à l'origine.

Les équations générales de la génératrice sont toujours

$$\begin{cases} x - az = \alpha, \\ y - bz = 6. \end{cases} \tag{2}$$

Or, pour exprimer que la génératrice, dans toutes ses positions, rencontre le cercle, il faut combiner entre elles les *quatre* équations (1) et (2).

D'abord, l'hypothèse $z = 0$, introduite dans les équations (2), donne

$$x = \alpha, \quad y = 6;$$

d'où, substituant ces valeurs dans la première des équations (1),

$$\alpha^2 + 6^2 = r^2; \tag{3}$$

c'est la relation qui lie entre elles les quantités α, 6.

Si, maintenant, on reporte à la place de α, 6, leurs valeurs $x - az$, $y - bz$, dans (3), il vient

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 = r^2$$

pour l'équation du cylindre oblique à base circulaire.

417. Il est facile de reconnaître, *à posteriori*, que l'équation

$$y - bz = f(x - az)$$

appartient à une surface composée d'une infinité de *lignes droites parallèles entre elles*; ce qui caractérise la surface cylindrique.

Prenons, pour plus de généralité, une équation de la forme

$$Mx + Ny + Pz = F(Ax + By + Cz), \tag{1}$$

et dont l'équation

$$y - bz = f(x - az),$$

n'est qu'un cas particulier.

Si l'on coupe la surface par une suite de plans parallèles entre eux, et ayant pour équations

$$Ax + By + Cz = D,\ D',\ D'',\ D''', \ldots,$$

l'équation (1) devient, pour chacune des valeurs D, D', D'', etc

$$Mx + Ny + Pz = Q,\ Q',\ Q'',\ Q''', \ldots,$$

les lettres Q, Q', etc., désignant des quantités indépendantes de x, y, z. Ainsi les lignes d'intersection se trouvent sur une autre suite de plans *parallèles entre eux*, et sont, par conséquent, des droites *parallèles entre elles*.

Des surfaces coniques.

418. On donne cette dénomination à *toute surface engendrée par le mouvement d'une droite qui passe constamment par un point donné* (qu'on nomme CENTRE de la surface) et *assujettie à glisser le long d'une courbe aussi*

donnée de position dans l'espace; cette courbe s'appelle DIRECTRICE, et la droite mobile est dite la GÉNÉRATRICE.

Soient x', y', z', les coordonnées du centre de la surface, et

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0, \quad F'(x, y, z) = 0$$

les équations de la *directrice.*

Celles de la génératrice sont (n° 374) de la forme

$$(2) \qquad x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z').$$

Observons maintenant que, pour toute surface conique, lorsque le point x, y, z, change de position, sans quitter la même génératrice, les quantités a et b, ou leurs égales

$$\frac{x - x'}{z - z'}, \quad \frac{y - y'}{z - z'},$$

sont constantes; mais elles varient toutes deux si le point passe d'une génératrice à une autre. Donc ces quantités, qui *sont constantes et variables ensemble,* dépendent, d'une certaine manière, l'une de l'autre.

Pour obtenir cette relation, il suffit de combiner entre elles les équations (1) et (2), qui, étant au nombre de *quatre,* donnent lieu, par l'élimination de x, y, z, à une *équation de condition* entre a et b.

Substituant dans cette équation, pour ces dernières quantités, leurs valeurs

$$\frac{x - x'}{z - z'}, \quad \frac{y - y'}{z - z'},$$

on obtient enfin pour l'équation de la surface conique,

$$f\left(\frac{x - x'}{z - z'}, \quad \frac{y - y'}{z - z'}\right) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{y - y'}{z - z'} = f\left(\frac{x - x'}{z - z'}\right).$$

N. B. — Si l'origine des coordonnées est au *centre* de la surface, auquel cas on a

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0,$$

l'équation se réduit à

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{z} = f\left(\frac{x}{z}\right).$$

Prenons, par exemple, *le cône oblique à base circulaire,* et supposons que, la base étant située dans le plan des xy, le centre

de la base soit à l'origine, auquel cas on a, pour les équations de la directrice,

$$x^2+y^2=r^2, \quad z=0.$$

Combinons-les avec les équations de la génératrice,

$$x-x'=a(z-z'), \quad y-y'=b(z-z').$$

L'hypothèse $z=0$, introduite dans celles-ci, donne

$$x=x'-az', \quad y=y'-bz';$$

d'où, substituant dans la première équation,

$$(x'-az')^2+(y'-bz')^2=r^2;$$

c'est l'équation de condition qui doit exister entre les quantités a, b, en même temps que les équations de la génératrice.

Substituant pour a, b, leurs valeurs $\frac{x-x'}{z-z'}, \frac{y-y'}{z-z'}$, on obtient

$$[x'(z-z')-z'(x-x')]^2+[y'(z-z')-z'(y-y')]^2 = r^2(z-z')^2,$$

ou réduisant,

$$(x'z-z'x)^2+(y'z-z'y)^2=r^2(z-z')^2$$

pour l'équation demandée.

Dans le cas du *cône droit*, c'est-à-dire lorsque le centre du cône est situé sur l'axe des z, on a à la fois

$$x'=0, \quad y'=0;$$

et l'équation précédente se réduit à

$$z'^2x^2+z'^2y^2=r^2(z-z')^2.$$

On pourrait, en faisant usage des formules du n° 411, obtenir les différents genres d'intersection de la surface conique par un plan; mais nous ne nous arrêterons pas à cette discussion, qui a déjà été traitée dans le dernier chapitre de la Géométrie analytique à *deux dimensions*.

419. *Réciproquement*, toute équation à trois variables, de la forme

$$F\left(\frac{x-x'}{z-z'}, \frac{y-y'}{z-z'}\right)=0,$$

ou

$$\frac{y-y'}{z-z'}=F\left(\frac{x-x'}{z-z'}\right) \tag{1}$$

(x', y', z' désignant les coordonnées d'un point fixe dans l'espace), *caractérise une surface conique*.

En effet, coupons la surface par une suite de plans qui

aient pour équations,

$$\frac{x-x'}{z-z'}=k,\quad \frac{x-x'}{z-z'}=k',\quad \frac{x-x'}{z-z'}=k'',\ldots;$$

comme l'équation (1) devient alors

$$\frac{y-y'}{z-z'}=l,\quad \frac{y-y'}{z-z'}=l',\quad \frac{y-y'}{z-z'}=l'',\ldots,$$

les lignes d'intersection de la surface par les plans correspondant à la première série d'équations se trouveront également situées dans les plans exprimés par la seconde série; d'où il suit que *toutes ces intersections sont des lignes droites.*

D'ailleurs, un système quelconque de deux équations de la première et de la seconde série,

$$\frac{x-x'}{z-z'}=k,\quad \frac{y-y'}{z-z'}=l,$$

par exemple, représente une droite passant par le point qui a pour coordonnées x', y', z'.

On peut donc regarder la surface comme composée d'une infinité de lignes droites qui, toutes, passent par ce même point.

Des surfaces conoïdes.

420. On appelle ainsi *toute surface engendrée par le mouvement d'une droite qui, sans cesser d'être parallèle à un plan donné, glisse à la fois le long d'une droite fixe de position dans l'espace et appelée* PREMIÈRE DIRECTRICE, *puis le long d'une courbe aussi donnée, et appelée* SECONDE DIRECTRICE.

Pour faire concevoir une semblable génération, supposons que l'on ait mené dans l'espace une infinité de plans parallèles au plan donné; chacun d'eux coupe la droite fixe en un point, et la courbe en un ou plusieurs points. En joignant ces derniers points avec celui de la droite fixe, et répétant cette même opération pour tous les plans parallèles, on obtient une infinité de droites dont l'ensemble constitue *la surface conoïde.*

La dénomination de ces sortes de surfaces vient de l'ana-

logie qu'elles ont avec les surfaces coniques. Le *centre* ou le *sommet* du cône se trouve ici remplacé par *la première directrice*.

Passons à la recherche de leur équation.

Pour plus de simplicité, nous prendrons pour axe des z la *première directrice*, pour plan des xy celui auquel la génératrice ou la droite mobile doit être constamment parallèle. Les axes des x et des y seront d'ailleurs deux droites menées à volonté dans le plan dont nous venons de parler, et par le point de rencontre de ce plan avec la droite prise pour axe des z. On voit, d'après cette construction, que la surface se trouve, en général, rapportée à des axes *obliques*.

Cela posé, soient

$$(1) \qquad \begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ F'(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

les équations de la courbe prise pour *seconde directrice*.

Celles de la droite *mobile*, considérée dans une position quelconque, seront de la forme

$$(2) \qquad y = mx, \quad z = n,$$

puisque sa distance au plan des xy, comptée suivant l'axe des z, doit être *constante*, et que sa projection sur le plan des xy passe nécessairement par l'*origine*.

Or il est évident que, pour tous les points d'une certaine position de la génératrice, les quantités m et n, ou leurs valeurs $\frac{y}{x}$ et z, restent les mêmes; mais elles varient d'une position à une autre. Ces quantités étant *constantes ensemble* et *variables ensemble*, sont fonction l'une de l'autre. Ainsi,

$$F\left(\frac{y}{x}, z\right) = 0, \quad \text{ou} \quad z = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

est la forme générale de l'équation des *surfaces conoïdes*.

Pour déterminer la nature de cette fonction, dans chaque cas particulier, il faut éliminer x, y, z entre les équations (1) et (2) qui doivent exister simultanément pour chaque point de la surface; ce qui donne lieu à *une certaine relation* entre m, n. Si l'on remplace ensuite dans cette relation m et n par leurs valeurs $\frac{y}{x}$ et z, on obtient l'équation demandée.

FIG. 200.

421. Comme *application*, supposons que la *seconde directrice* soit aussi une *ligne droite*, et afin d'arriver à une équation d'une forme très-simple, prenons un système d'axes tout particulier.

Soient CC′, DD′ les deux *directrices*.

Imaginons par la première un plan *parallèle* à la seconde, et prenons ce plan pour celui des yz.

L'un des plans auxquels la génératrice doit être parallèle, rencontrant les directrices en A et B, par exemple, rien n'empêche de prendre pour axe des x la ligne AB, représentant une des positions de la *génératrice*.

Ce même plan coupe celui dont nous avons parlé d'abord, suivant une certaine droite qui sera l'axe des y; on conservera d'ailleurs, comme dans la formation de l'équation générale de ces sortes de surfaces, la *première directrice* pour axe des z.

Cela posé, d'après la situation des deux *directrices* par rapport aux plans coordonnés, on a, pour les équations de la *seconde* DD′,

$$(1) \qquad x = a, \quad y = bz,$$

et pour celles de la génératrice, comme au n° 420,

$$(2) \qquad y = mx, \quad z = n;$$

et il ne s'agit que d'éliminer x, y, z entre ces quatre équations.

On arrive ainsi à l'équation de condition

$$ma = bn;$$

d'où, en remplaçant m et n par $\frac{y}{x}$ et z,

$$bxz - ay = 0.$$

Telle est l'équation de la surface engendrée.

Soit fait, dans cette équation, $y = 0$; il en résulte

$$bxz = 0,$$

d'où

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad z = 0.$$

Le premier système $[y = 0, x = 0]$ représente l'axe des z, et le second $[y = 0, z = 0]$ celui des x; ce qui doit être, puisque chacun de ces axes appartient à la surface, d'après sa génération.

Nous aurons occasion de revenir sur cette sorte de surfaces, qu'on trouve dans la *Géométrie* de Legendre sous la dénomination de QUADRILATÈRE GAUCHE, et qu'on désigne également sous le nom de PLAN GAUCHE.

Des surfaces de révolution.

422. On nomme ainsi *toute surface engendrée par la révolution d'une ligne* (*droite* ou *courbe*), *dite la* GÉNÉRATRICE, *autour d'une droite fixe qu'on appelle l'*AXE DE RÉVOLUTION, *de manière que chacun des points de la génératrice décrive une circonférence de cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe, et le centre est situé sur cet axe.*

Pour obtenir l'équation de la surface, remarquons d'abord que l'une quelconque des circonférences dont elle se compose d'après la définition, peut toujours être exprimée analytiquement (n° 414) par le système de deux équations dont l'une est celle d'un plan perpendiculaire à l'axe, l'autre est l'équation d'une surface sphérique ayant son centre placé sur l'axe.

Soient donc

$$x-\alpha=a(z-\gamma),\quad y-6=b(z-\gamma)$$

les équations de l'axe (α, 6, γ désignant les coordonnées d'un point pris à volonté sur l'axe); celles du plan et de la sphère seront (n° 389)

(1) $$ax+by+z=k$$

et (n° 412)

(2) $$(x-\alpha)^2+(y-6)^2+(z-\gamma)^2=r^2.$$

Les quantités k et r^2, qui entrent dans ces équations, sont des quantités *constantes ensemble* pour tous les points d'une même circonférence, et *variables ensemble* lorsque le point de la surface de révolution passe d'une circonférence à une autre; ainsi elles sont *fonction* l'une de l'autre, et l'on a

(3) $$(x-\alpha)^2+(y-6)^2+(z-\gamma)^2=\mathrm{F}(ax+by+z),$$

pour l'équation générale des *surfaces de révolution*.

La nature de la fonction désignée par le caractère F dépend *essentiellement* de la nature de la génératrice, et se détermine facilement dès que l'on connaît les équations de cette génératrice.

Soient en effet

$$f(x, y, z) = 0, \quad f'(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

ces équations. Comme la circonférence représentée par le système des équations (1) et (2) est engendrée par l'un des points de la génératrice, il faut exprimer que celle-ci, dans sa première position, et la circonférence, ont un point commun; ce qui se fait par l'élimination de x, y, z entre leurs équations qui sont au nombre de *quatre*.

On est ainsi conduit à une *relation* entre r^2 et k, dans laquelle il suffit de remplacer ces quantités par leurs valeurs

$$(x-\alpha)^2+(y-6)^2+(z-\gamma)^2 \quad \text{et} \quad ax+by+z.$$

423. On suppose souvent, pour plus de simplicité, que l'*axe de révolution* se confond avec l'un des axes coordonnés, celui des z par exemple.

Dans ce cas, l'une quelconque des circonférences placées sur la surface se trouvant dans un plan parallèle au plan des xy, et ayant son centre sur l'axe des z, peut être représentée par les équations

$$z = k, \quad x^2+y^2 = r^2,$$

dont la première exprime un plan *horizontal*, et la seconde, la surface d'un *cylindre droit* dont l'axe se confond avec l'axe des z.

On a donc, quelle que soit la génératrice de la surface,

$$x^2+y^2 = \mathrm{F}(z), \quad \text{ou} \quad z = \mathrm{F}(x^2+y^2), \tag{5}$$

pour l'équation de cette surface.

On trouverait de même

$$x^2+z^2 = \mathrm{F}(y), \quad \text{ou} \quad y = \mathrm{F}(x^2+z^2),$$
$$y^2+z^2 = \mathrm{F}(x), \quad \text{ou} \quad x = \mathrm{F}(y^2+z^2),$$

pour les équations des surfaces de révolution qui auraient pour axe celui des y ou celui des x.

424. Soit proposé, pour *première* application, de trouver *la surface engendrée par la révolution d'une droite quelconque autour de l'axe des z.*

Si, en vue de simplifier les calculs, on prend pour axe des x la

droite sur laquelle est située la *plus courte distance* entre la génératrice et l'axe des z, auquel cas la génératrice est nécessairement *parallèle* au plan des yz, les équations de cette génératrice sont alors

$$x = \mathrm{M}, \quad y = \mathrm{N}z.$$

Celles de la circonférence étant d'ailleurs, comme on l'a vu au numéro précédent,

$$z = k, \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

l'élimination de x, y, z donne lieu à la *relation*

$$\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2 k^2 = r^2;$$

d'où, en remplaçant r^2 et k par leurs valeurs $x^2 + y^2$ et z,

$$x^2 + y^2 = \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2 z^2,$$

ou bien

$$x^2 + y^2 - \mathrm{N}^2 z^2 = \mathrm{M}^2.$$

Telle est l'équation de la surface engendrée.

425. En *second lieu*, soit prise une *ellipse* pour génératrice, et supposons que son *centre* soit à l'origine, et le *grand axe* sur l'axe des z.

Les équations de la génératrice sont alors

$$x = 0, \quad \mathrm{A}^2 y^2 + \mathrm{B}^2 z^2 = \mathrm{A}^2 \mathrm{B}^2;$$

et en les combinant avec celles de la circonférence

$$z = k, \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

on arrive à l'*équation de condition*

$$\mathrm{A}^2 r^2 + \mathrm{B}^2 k^2 = \mathrm{A}^2 \mathrm{B}^2:$$

d'où, remplaçant r^2 et k par leurs valeurs,

$$\mathrm{A}^2 (x^2 + y^2) + \mathrm{B}^2 z^2 = \mathrm{A}^2 \mathrm{B}^2.$$

La surface ainsi obtenue est celle de l'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION.

Prenons maintenant pour génératrices les *hyperboles* ayant pour équations

$$x = 0, \quad \mathrm{A}^2 y^2 - \mathrm{B}^2 z^2 = -\mathrm{A}^2 \mathrm{B}^2,$$
$$x = 0, \quad \mathrm{A}^2 y^2 - \mathrm{B}^2 z^2 = \mathrm{A}^2 \mathrm{B}^2.$$

(L'axe *transverse* est, dans le premier cas, sur l'axe des z, et dans le second, sur l'axe des y, le centre étant d'ailleurs à l'origine.)

On obtient, pour les équations des deux surfaces,

$$\mathrm{A}^2 (x^2 + y^2) - \mathrm{B}^2 z^2 = -\mathrm{A}^2 \mathrm{B}^2,$$
$$\mathrm{A}^2 (x^2 + y^2) - \mathrm{B}^2 z^2 = \mathrm{A}^2 \mathrm{B}^2.$$

La première équation est celle de l'HYPERBOLOÏDE *à deux nappes*; la seconde, celle de l'HYPERBOLOÏDE *à une seule nappe*.

Il est remarquable que la dernière équation est *identique*, sauf les notations relatives aux constantes, avec celle de la surface obtenue par la *révolution d'une ligne droite*.

426. Considérons enfin une *parabole* ayant pour équations

$$x = 0, \quad y^2 = 2pz.$$

Leur combinaison avec les équations

$$z = k, \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

donne lieu à la *relation*

$$2pk = r^2,$$

par suite, à l'équation

$$x^2 + y^2 = 2pz :$$

c'est celle de la surface d'un PARABOLOÏDE DE RÉVOLUTION autour de l'axe des z.

Cette surface jouit d'une propriété fort curieuse.

Si on la coupe par un plan quelconque

$$z = Ax + By + C,$$

on obtient, pour l'équation de la projection sur le plan des xy,

$$x^2 + y^2 = 2p(Ax + By + C),$$

équation que l'on a vu (n° 88) être celle d'un *cercle*.

Ainsi, quelle que soit la courbe d'*intersection d'un paraboloïde de révolution par un plan, la projection de cette courbe sur un autre plan perpendiculaire à l'axe est constamment une circonférence de cercle*, excepté toutefois le cas où le plan *sécant* est *parallèle* à l'axe; car on obtient alors pour intersection *une ligne droite*.

Nous reviendrons sur les diverses surfaces de révolution dont nous venons de former les équations.

§ III. — DISCUSSION DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

427. Les bornes que nous sommes obligé de mettre à cet ouvrage ne nous permettant pas de donner ici une théorie complète des surfaces du second degré, nous nous attacherons surtout à faire ressortir les circonstances relatives à leur classification, ainsi que les propriétés qui résultent immédiatement des équations les plus simples auxquelles il est toujours possible de ramener une équation quelconque du second degré à trois variables. Nous suivrons d'ailleurs,

pour la discussion de cette équation, une marche analogue à celle que nous avons employée, dans le deuxième chapitre, pour l'équation à deux variables.

L'équation la plus générale des surfaces du second degré étant

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} Az^2+A'y^2+A''x^2+Byz+B'xz+B''xy \\ \quad +Cz+C'y+C''x+D \end{array}\right\}=0,$$

on peut d'abord (n° 154), par une *première* transformation de coordonnées, faire évanouir les trois rectangles yz, xz, xy, c'est-à-dire ramener l'équation à la forme

$$(2)\quad Mz^2+M'y^2+M''x^2+Nz+N'y+N''x+D=0.$$

(*Voyez*, pour cet objet, le deuxième volume de la *Correspondance de l'École Polytechnique*, 3e numéro, ouvrage dans lequel j'ai consigné la démonstration complète de cette proposition, ainsi qu'une Note assez étendue sur les surfaces de révolution du second degré.)

Il résulte de cette proposition, que les surfaces représentées par l'équation (2) sont identiques avec celles que comprend l'équation (1).

Voyons actuellement si, au moyen d'une *translation d'origine*, nous ne pourrions pas (n° 156) faire disparaître les termes linéaires en x, y, z.

Or, en substituant les formules

$$x=x+a,\quad y=y+b,\quad z=z+c$$

dans cette équation, et en égalant à 0 les coefficients de x, y, z, on obtient les équations de condition

$$2M''a+N''=0,\quad 2M'b+N'=0,\quad 2Mc+N=0;$$

d'où l'on déduit

$$a=-\frac{N''}{2M''},\quad b=-\frac{N'}{2M'},\quad c=-\frac{N}{2M}.$$

Tant que la disparition des trois rectangles ne donne lieu à la disparition d'aucun des trois carrés, les quantités M, M', M'' sont différentes de 0, et la nouvelle transformation est possible : en d'autres termes, l'équation peut être ramenée à la forme

$$(3)\qquad Mz^2+M'y^2+M''x^2+P=0$$

(P ayant pour valeur

$$Mc^2 + M'b^2 + M''a^2 + Nc + N'b + N''a + D).$$

428. Si l'on suppose que l'un des carrés s'évanouisse en même temps que les rectangles, que l'on ait, par exemple,

$$M'' = 0,$$

la transformation précédente ne peut être exécutée, puisqu'alors a devient *infini*.

Dans ce cas, l'équation étant de la forme

$$Mx^2 + M'y^2 + Nz + N'y + N''x + D = 0,$$

on peut tâcher de faire disparaître les termes en x et en y, ainsi que la quantité qui en est indépendante.

On obtient, en effet, par la substitution des formules

$$x = x + a, \quad y = y + b, \quad z = z + c,$$

et en égalant à 0 le coefficient de z, celui de y, et la quantité indépendante de x, y, z,

$$2Mc + N = 0, \quad 2M'b + N' = 0,$$
$$Mc^2 + M'b^2 + Nc + N'b + N''a + D = 0;$$

ce qui donne

$$c = -\frac{N}{2M}, \quad b = -\frac{N'}{2M'},$$
$$a = -\frac{(Mc^2 + M'b^2 + Nc + N'b + D)}{N''},$$

valeurs *réelles et finies* tant que N'' n'est pas *nul*; et l'équation se réduit à celle-ci :

$$Mx^2 + M'y^2 + N''x = 0. \tag{4}$$

429. Lorsque l'on a en même temps

$$M'' = 0, \quad N'' = 0,$$

la dernière transformation est impossible, puisque a est encore *infini*; mais dans ce cas particulier l'équation (2) devenant

$$Mx^2 + M'y^2 + Nz + N'y + D = 0,$$

ne renferme plus que deux variables, et représente évidemment (n° 402) UNE SURFACE CYLINDRIQUE dont les génératrices sont perpendiculaires au plan des yz, et qui a pour base, soit une *ellipse*, soit une *hyperbole*, suivant que,

dans l'équation ci-dessus, les coefficients M, M', sont de même signe ou de signe contraire.

430. Supposons encore que deux des carrés, y^2 et x^2, aient disparu en même temps que les trois rectangles, c'est-à-dire que, par la *première* transformation des coordonnées, l'équation ait été réduite à la forme

$$Mz^2 + Nz + N'y + N''x + D = 0;$$

on pourrait, dans ce cas, chercher à opérer l'évanouissement de quelques termes; mais cela est inutile pour la détermination de la surface représentée par cette équation.

En effet, posons successivement

$$z = k, \quad z = k', \quad z = k'', \ldots,$$

ce qui revient à couper la surface par une suite de plans parallèles au plan des xy; l'équation devient, pour ces différentes hypothèses,

$$N'y + N''x = L, \quad N'y + N''x = L', \quad N'y + N''x = L'', \ldots,$$

d'où il suit que les intersections de la surface par des plans horizontaux sont des droites *parallèles entre elles*. Ainsi (n° 417) la surface est encore de la nature des *surfaces cylindriques;* et, si l'on veut connaître une *directrice* de cette surface, il suffit de poser $y = 0$, par exemple, dans son équation.

Il vient, par cette hypothèse,

$$Mz^2 + Nz + N''x + D = 0,$$

équation qui exprime une *parabole* située dans le plan des xz.

Donc, enfin, la surface n'est autre chose qu'*une* SURFACE CYLINDRIQUE à *base parabolique*.

431. En réfléchissant sur la discussion précédente, on doit conclure que toutes les surfaces du second degré se trouvent implicitement renfermées dans les deux classes d'équations

$$Mz^2 + M'y^2 + M''x^2 + P = 0, \quad Mz^2 + M'y^2 + N''x = 0,$$

à l'exception de celles qui correspondent aux équations

$$Mz^2 + M'y^2 + Nz + N'y + D = 0,$$
$$Mz^2 + Nz + N'y + N''x + D = 0,$$

et que nous avons reconnu appartenir à des SURFACES CYLINDRIQUES à base *elliptique*, *hyperbolique*, ou *parabolique*.

432. *N. B.* — Il est bien entendu que nous comprenons dans ces trois variétés générales celles qui (nos 161 et 309) correspondent aux *variétés* de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole.

Ainsi lorsque l'ellipse se réduit à *un cercle* ou à *un point*, la surface cylindrique devient un cylindre à *base circulaire*, ou *une seule droite*.

Si l'hyperbole dégénère en un système de deux droites qui se coupent, la surface cylindrique se réduit à un système de *deux plans qui se coupent*.

Enfin, quand la parabole se réduit à deux droites parallèles ou à une seule droite, la surface cylindrique devient *un système de deux plans parallèles* ou *un plan unique*.

433. Avant de passer à la discussion de chacune des équations

$$Mz^2 + M'y^2 + M''x^2 + P = 0, \tag{1}$$

$$Mz^2 + M'y^2 + N''x = 0, \tag{2}$$

nous ferons quelques observations générales sur la nature des surfaces qu'elles représentent, et sur les systèmes d'axes ou de plans coordonnés auxquels les surfaces sont actuellement rapportées.

PREMIÈREMENT, l'équation (1), ne renfermant plus les termes du premier degré en x, y, z, reste la même lorsqu'on y change $+x, +y, +z$ en $-x, -y, -z$; ce qui prouve que toute droite menée par la nouvelle origine et terminée de part et d'autre par la surface, est divisée en deux parties égales en ce point. Donc (n° 130) toutes les surfaces comprises dans l'équation (1) ont un *centre*, qui n'est autre chose que l'origine actuelle des coordonnées.

Remarquons d'ailleurs que l'équation pourrait renfermer les rectangles des variables ainsi que les carrés, sans que la surface cessât d'avoir un *centre*, et d'être rapportée à ce centre comme origine, puisque la condition caractéristique du centre serait encore remplie. On pourrait

même supposer la surface rapportée à des axes obliques menés par cette origine.

Ainsi, dans le cas d'axes quelconques, une équation telle que

$$Az^2 + A'y^2 + A''x^2 + Byz + B'xz + B''xy + D = 0,$$

dont plusieurs coefficients peuvent être nuls, représente *une surface qui a un centre*, et ce centre est l'origine.

SECONDEMENT, on appelle PLAN DIAMÉTRAL d'une surface, un plan qui divise en *deux parties égales* toutes les cordes de la surface *parallèles entre elles* et menées sous une direction quelconque.

Or, d'après la forme de l'équation (1) qui, étant résolue successivement par rapport à chacune des variables, donne deux valeurs égales et de signes contraires pour cette variable, il est évident que chacun des trois plans coordonnés divise en deux parties égales toutes les cordes menées parallèlement à l'intersection commune des deux autres. Donc ces trois plans sont des *plans diamétraux;* de plus, on peut les regarder comme formant *un système de* PLANS DIAMÉTRAUX CONJUGUÉS PERPENDICULAIRES ENTRE EUX, conformément à la définition donnée (n° 178) d'un système de deux *diamètres conjugués.*

TROISIÈMEMENT. — Considérons l'équation (2) :

Puisque le troisième terme change de signe lorsqu'on remplace $+x$, $+y$, $+z$, par $-x$, $-y$, $-z$, il s'ensuit que l'origine actuelle des coordonnées n'est pas un centre. On a vu d'ailleurs (n° 428) que, dès qu'un des carrés manque en même temps que les rectangles, il est impossible de faire disparaître à la fois les trois termes du premier degré; donc les surfaces représentées par l'équation (2) sont des *surfaces dépourvues de centre.*

Observons encore que, des trois plans coordonnés, deux seulement, les plans des xy et des xz, peuvent être regardés comme des *plans diamétraux,* puisque le premier divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à l'axe des z, et le second toutes les cordes parallèles à l'axe des y.

Concluons de ce qui vient d'être dit, que les surfaces du second degré se partagent en deux classes distinctes, savoir :

les surfaces qui ont* UN CENTRE, *et les surfaces dépourvues de centre.

Surfaces douées d'un centre.

434. Discutons l'équation

$$\text{(1)} \qquad Mz^2 + M'y^2 + M''x^2 + P = 0.$$

Afin de déterminer les différents genres de surfaces représentées par cette équation, nous ferons successivement (n° 411)

$$x = \text{const.}, \quad y = \text{const.}, \quad z = \text{const.};$$

ce qui reviendra à couper la surface par des plans respectivement *parallèles* à chacun des trois plans coordonnés; mais on sait (n° 161) que la nature de ces intersections dépend surtout des signes dont les coefficients M, M', M'' sont affectés; ainsi nous sommes conduits à faire les hypothèses suivantes :

1°. M, M', M'', *positifs* à la fois; ELLIPSOÏDES.

Dans cette hypothèse générale, le dernier terme P peut être lui-même *négatif, nul,* ou *positif.*

Soit d'abord P *négatif,* et mettons le signe en évidence; l'équation devient

$$\text{(2)} \qquad Mz^2 + M'y^2 + M''x^2 = P.$$

Cela posé, faisons successivement dans cette équation,

$$x = \alpha, \quad y = 6, \quad z = \gamma;$$

il en résulte

$$Mz^2 + M'y^2 = P - M''\alpha^2,$$
$$Mz^2 + M''x^2 = P - M'6^2,$$
$$M'y^2 + M''x^2 = P - M\gamma^2;$$

d'où l'on voit que les intersections de la surface par des plans parallèles aux trois plans coordonnés sont des ellipses qui deviennent *imaginaires* lorsqu'on suppose

$$\alpha^2 > \frac{P}{M''}, \quad 6^2 > \frac{P}{M'}, \quad \gamma^2 > \frac{P}{M},$$

c'est-à-dire α, 6, γ positifs ou négatifs, mais numériquement plus grands que

$$\sqrt{\frac{P}{M''}}, \quad \sqrt{\frac{P}{M'}}, \quad \sqrt{\frac{P}{M}}.$$

Ces mêmes ellipses se réduisent à *un point*, pour les hypothèses

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{P}{M''}}, \quad 6 = \pm\sqrt{\frac{P}{M'}}, \quad \gamma = \pm\sqrt{\frac{P}{M}},$$

puisque alors les équations des intersections se réduisent à

$$Mz^2 + M'y^2 = 0, \quad Mz^2 + M''x^2 = 0, \quad M'y^2 + M''x^2 = 0.$$

La surface que nous considérons est donc *limitée* DANS TOUS LES SENS.

De plus, elle est inscrite au parallélipipède qui a pour faces les plans

$$x = \pm\sqrt{\frac{P}{M''}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{P}{M'}}, \quad z = \pm\sqrt{\frac{P}{M}}.$$

La nature des intersections de cette surface avec les plans *parallèles* aux trois plans coordonnés lui a fait donner le nom d'ELLIPSOÏDE.

Pour déterminer *les trois sections principales*, en d'au- FIG. 201.
tres termes, les traces de la surface sur les plans coordonnés, il suffit de poser successivement.

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

ce qui donne

$$Mz^2 + M'y^2 = P, \quad Mz^2 + M''x^2 = P, \quad M'y^2 + M''x^2 = P.$$

Quant aux points d'intersection avec les axes, on obtient pour

$$y = 0, \quad z = 0, \quad M''x^2 = P; \quad \text{d'où} \quad x = \pm\sqrt{\frac{P}{M''}};$$

$$x = 0, \quad z = 0, \quad M'y^2 = P; \quad \text{d'où} \quad y = \pm\sqrt{\frac{P}{M'}};$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad Mz^2 = P; \quad \text{d'où} \quad z = \pm\sqrt{\frac{P}{M}}.$$

Les lignes

$$AA' = 2\sqrt{\frac{P}{M''}}, \quad BB' = 2\sqrt{\frac{P}{M'}}, \quad CC' = 2\sqrt{\frac{P}{M}}$$

sont ce qu'on appelle les *axes principaux* de la surface; et leur introduction dans l'équation lui donne une forme symétrique et analogue à celle de l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes.

des xy, est une *hyperbole* dont l'axe transverse est dirigé suivant une parallèle à l'axe des x.

FIG. 202. Quant à l'équation (3), elle représente évidemment une *ellipse réelle*, tant que l'on donne à α une valeur *positive* ou *négative*, numériquement *plus grande que* $\sqrt{\frac{P}{M''}}$; ce qui veut dire que, si aux deux distances

$$OA = \sqrt{\frac{P}{M''}}, \quad OA' = -\sqrt{\frac{P}{M''}},$$

on imagine deux plans *parallèles* au plan des yz, la surface n'a aucun point compris entre ces plans; mais elle s'étend indéfiniment à droite et à gauche de ces deux plans, dans le sens des x positifs et dans le sens des x négatifs; d'où l'on peut conclure que cette surface *se compose de deux parties distinctes, égales et opposées.*

On l'appelle pour cette raison, et à cause de la nature de ses intersections par des plans parallèles à deux des plans coordonnés, HYPERBOLOÏDE *à deux nappes.*

Les trois sections principales s'obtiennent en faisant successivement dans l'équation (2),

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} Mz^2 + M'y^2 &= -P, \\ Mz^2 - M''x^2 &= -P, \\ M'y^2 - M''x^2 &= -P. \end{aligned}$$

La première section est *imaginaire;* mais les deux autres sont des *hyperboles* MAM′ et $mA'm'$, NAN′ et $nA'n'$, rapportées à l'axe des x comme axe transverse.

Soit posé

$$2A = 2\sqrt{\frac{P}{M''}}, \quad 2B = 2\sqrt{\frac{P}{M'}}, \quad 2C = 2\sqrt{\frac{P}{M}};$$

il en résulte

$$M'' = \frac{P}{A^2}, \quad M' = \frac{P}{B^2}, \quad M = \frac{P}{C^2};$$

d'où, substituant dans l'équation (2) et réduisant,

$$A^2B^2z^2 + A^2C^2y^2 - B^2C^2x^2 = -A^2B^2C^2.$$

Des trois lignes 2A, 2B, 2C, appelées les *axes principaux* de la surface, la première seulement a ses deux extrémités

A, A′ placées sur la surface. Quant aux deux autres, on convient de les représenter sur la figure par deux distances BB′, CC′, comptées sur les axes des y et des z; mais les points B, B′, C, C′, n'appartiennent pas à la surface, comme dans l'ellipsoïde. En un mot, l'hyperboloïde à *deux nappes* a un seul axe *transverse* et deux autres *non transverses*.

437. Soient actuellement M et M′ *positifs*, M″ et P *négatifs*.

L'équation (1) devient

$$Mz^2 + M'y^2 - M''x^2 = +P;$$

et l'on en déduit successivement pour

$$x = \alpha \ldots Mz^2 + M'y^2 = M''\alpha^2 + P,$$
$$y = 6 \ldots Mz^2 - M''x^2 = -M'6^2 + P,$$
$$z = \gamma \ldots M'y^2 - M''x^2 = -M\gamma^2 + P.$$

La première équation représente une *ellipse* toujours *réelle*, quel que soit α; et les deux autres, des *hyperboles* rapportées à l'axe des x, comme axe *transverse* ou *non transverse*, suivant que l'on a

$$6^2 > \frac{P}{M'}, \quad \gamma^2 > \frac{P}{M}, \quad \text{ou} \quad 6^2 < \frac{P}{M'}, \quad \gamma^2 < \frac{P}{M}.$$

On voit donc que, dans le cas actuel, il n'existe aucune discontinuité dans la surface qui, pour cette raison, porte le nom d'HYPERBOLOÏDE *à une nappe*.

Les hypothèses successives FIG. 203.

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

donnent

$$Mz^2 + M'y^2 = P, \quad Mz^2 - M''x^2 = P, \quad M'y^2 - M''x^2 = P.$$

L'*ellipse* représentée par la première équation est la *plus petite* de toutes celles qu'on obtient en coupant la surface par des plans parallèles au plan des yz.

Les deux autres équations expriment des *hyperboles* situées, l'une dans le plan des xz, l'autre dans le plan des xy, et ayant pour axe *non transverse* l'axe des x.

Cela suffit pour donner une idée assez exacte de la surface dont deux axes principaux sont *transverses*, et le troisième est *non transverse*.

pour les deux *sections principales*, suivant les plans des xz et des xy.

D'après ces données, il est facile de se former une idée nette du nouveau genre de surfaces auquel on a donné le nom de PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE.

Soit actuellement N'' *positif*, auquel cas l'équation revient à

$$M z^2 + M' y^2 = -N'' x;$$

comme, en changeant x en $-x$, on la ramène à la forme

$$M z^2 + M' y^2 = N'' x,$$

il s'ensuit que la surface est la même que dans le cas où N'' est négatif : seulement elle s'étend dans le sens des x négatifs, comme elle s'étendait d'abord dans celui des x positifs.

441. Le *paraboloïde elliptique* devient une *surface de révolution* autour de l'axe des x, dans le cas particulier de $M = M'$; car alors on a pour son équation

$$z^2 + y^2 = \frac{N''}{M} x = F(x);$$

ce qui démontre que *toute section faite perpendiculairement* à l'axe des x est *une circonférence de cercle* dont le centre est sur cet axe (*voyez* le n° 423).

2°. M *positif* et M' *négatif*.

442. Il nous suffira de considérer dans cette nouvelle hypothèse, comme dans la précédente, le cas où N'' est *négatif*; puisque, si N'' était positif, on remplacerait x par $-x$, ce qui changerait simplement la situation de la surface, mais non sa nature.

En mettant les signes en évidence, on a l'équation

$$M z^2 - M' y^2 = N'' x.$$

Soit fait successivement

$$x = \alpha, \quad y = 6, \quad z = \gamma,$$

il vient

$$M z^2 - M' y^2 = N'' \alpha, \quad M z^2 = N'' x + M' 6^2, \quad M' y^2 = -N'' x + M \gamma^2.$$

Les deux dernières équations représentent encore des paraboles dont l'axe principal est parallèle à l'axe des x; mais celles qui correspondent à $y = 6$ sont dirigées dans le sens

des x positifs, et ont pour paramètre constant $\frac{N''}{M}$, tandis que les paraboles correspondant à $z = \gamma$, sont au contraire dirigées dans le sens des x négatifs, et ont pour paramètre constant $-\frac{N''}{M'}$.

Quant à la première équation, c'est celle d'une suite d'*hyperboles* ayant pour axe transverse, une parallèle à l'axe des z tant que α est positif, et une parallèle à l'axe des y pour toute valeur négative de α. De là vient la dénomination de PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE donnée à ce genre de surfaces.

Les deux sections principales par les plans des xz et des xy sont

FIG. 205.

$$Mz^2 = N''x, \quad M'y^2 = -N''x;$$

c'est-à-dire deux *paraboles* COC', B'OB.

La section par le plan des yz ayant pour équations

$$x = 0, \quad Mz^2 - M'y^2 = 0, \quad \text{ou} \quad z = \pm y\sqrt{\frac{M'}{M}},$$

se réduit à un système de *deux droites* qui se coupent à l'origine.

Il est remarquable que les *hyperboles* représentées par l'équation

$$Mz^2 - M'y^2 = N''\alpha,$$

ont pour *asymptotes* les deux droites dont l'équation est

$$Mz^2 - M'y^2 = 0;$$

d'où il suit que les plans menés par ces droites et par l'axe des x, déterminent au-dessus et au-dessous du plan des xy deux angles dièdres, qui comprennent la surface tout entière; et l'on peut considérer ces deux plans comme des *plans asymptotes* par rapport à la surface.

Comme les coefficients de z^2 et de y^2 sont de signes contraires, l'hypothèse $M = M'$ ne peut donner lieu à une surface de révolution. D'ailleurs, nous verrons bientôt que, quelle que soit la position du plan par lequel on coupe cette surface, il *est impossible d'obtenir pour section une courbe limitée*, et par conséquent une circonférence de cercle.

443. GÉNÉRATION DES DEUX PARABOLOÏDES. — Le paraboloïde hyperbolique étant une surface assez difficile à se

représenter, nous allons faire connaître un moyen de génération, commun aux deux paraboloïdes, qui sera très-propre à donner une idée exacte de l'un et de l'autre. Ce moyen, qui offre beaucoup d'analogie avec celui que nous avons employé (n° 382) pour le plan, consiste à *faire glisser une parabole* ayant pour équations

$$y = 0, \quad Mz^2 + N''x = 0,$$

parallèlement à elle-même, suivant une autre parabole

$$z = 0, \quad M'y^2 + N''x = 0,$$

de manière que le sommet de la première, appelée *génératrice*, se trouve constamment placé sur la seconde, qu'on peut appeler *la directrice*.

D'après ce mode de génération, il est évident que les équations de la génératrice, considérée dans l'une quelconque de ses positions, seront de la forme

$$y = 6, \quad Mz^2 + N''x + \alpha = 0.$$

Le *paramètre* de cette parabole mobile, ou $-\frac{N''}{M}$, reste *constant;* mais comme le sommet qui, d'abord, est situé à l'origine, occupe ensuite une position quelconque sur la directrice, il s'ensuit que la seconde équation doit renfermer un terme α indépendant de x et de y.

Cela posé, remarquons que, pour tout point de la surface placé sur la même génératrice, la distance au plan des xz et la position du sommet de cette génératrice restent les mêmes; mais lorsque le point passe d'une génératrice à une autre, les deux éléments dont nous venons de parler, changent nécessairement; donc les quantités 6 et α, qui correspondent à ces éléments, sont des quantités *constantes* ensemble et *variables* ensemble; ainsi elles doivent dépendre d'une certaine manière l'une de l'autre. Or, on obtiendra cette relation en exprimant, par l'analyse, que la *génératrice* et la *directrice* se rencontrent; ce qui revient à dire que les équations

$$(1) \qquad y = 6, \quad Mz^2 + N''x + \alpha = 0,$$

$$(2) \qquad z = 0, \quad M'y^2 + N''x = 0,$$

ont lieu en même temps.

D'abord, la valeur $z = 0$, portée dans la seconde des équations (1), donne

$$x = -\frac{\alpha}{N''}.$$

Substituant ensuite les valeurs $y = 6$, $x = -\frac{\alpha}{N''}$, dans la seconde des équations (2), on trouve

$$M'6^2 - \alpha = 0. \tag{3}$$

Telle est la *relation* qui lie entre elles les quantités α, 6, et qui doit exister en même temps que les équations (1) pour toutes les positions de la génératrice, c'est-à-dire pour tous les points de la surface.

Il ne s'agit plus que d'éliminer α, 6 entre ces trois équations, et pour cela il suffit de remplacer α, 6 par leurs valeurs tirées des équations (1); ce qui donne

$$M'y^2 - (-Mz^2 - N''x) = 0, \quad \text{ou} \quad Mz^2 + M'y^2 + N''x = 0;$$

c'est l'équation commune aux deux paraboloïdes.

Lorsqu'on a M, M' *positifs*, et N'' *négatif*, les paramè- Fig. 204.
tres de la parabole *génératrice* et de la parabole *directrice* sont $\frac{N''}{M}$, $\frac{N''}{M'}$, quantités *de même signe*; donc les axes sont dirigés dans le même sens.

Mais si l'on a M *positif*, M' *négatif* et N'' *négatif*, les Fig. 205.
paramètres sont $\frac{N''}{M}$, $\frac{-N''}{M'}$ ou *de signes contraires*; donc les axes de ces paraboles sont dirigés en sens contraire l'un par rapport à l'autre.

444. CONCLUSION GÉNÉRALE. — Il résulte de la discussion précédente que les surfaces du *second degré* se divisent en *cinq* genres : l'ELLIPSOÏDE, ayant pour variétés, l'*ellipsoïde de révolution*, la *sphère*, un *point* ou une *surface imaginaire*;

L'HYPERBOLOÏDE à deux nappes et l'HYPERBOLOÏDE à une nappe, ayant tous deux pour variétés, l'*hyperboloïde de révolution* et la *surface conique de révolution*;

Le PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE, ayant pour variété, le *paraboloïde de révolution*;

Enfin, le PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE, qui n'offre aucune variété, à moins qu'on ne suppose $N'' = 0$, auquel cas l'é-

quation se rèduit à

$$Mz^2 - M'y^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad z = \pm y\sqrt{\frac{M'}{M}}$$

représentant un *système de deux plans qui se coupent.*

Toutefois, les *surfaces cylindriques* à base elliptique, hyperbolique ou parabolique (n°s 429 et 430) sont les surfaces qui se rattachent aux *paraboloïdes*, puisqu'on les a obtenues en supposant que l'*un* des carrés, ou *deux* des carrés, aient disparu en même temps que les rectangles, dans l'équation générale.

Sections planes des surfaces du second degré.

445. Cherchons actuellement de quelle nature peuvent être les *intersections* des surfaces du second degré par un plan quelconque. Il suffit, pour cela, de substituer dans chacune des deux équations

$$(1) \qquad Mz^2 + M'y^2 + M''x^2 + P = 0,$$

$$(2) \qquad Mz^2 + M'y^2 + N''x = 0,$$

à la place de x, y, z, leurs valeurs tirées des formules du n° 411, savoir :

$$x = x'\cos\varphi + y'\cos\theta\sin\varphi + a,$$
$$y = x'\sin\varphi - y'\cos\theta\cos\varphi + b,$$
$$z = y'\sin\theta + c,$$

ce qui donne une équation du deuxième degré en x', y',

$$(3) \qquad Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Ex' + F = 0,$$

qu'il s'agit ensuite de discuter pour chaque genre de surface.

446. SECTIONS CIRCULAIRES. — Nous nous bornerons à faire usage de ces formules pour démontrer une propriété très-remarquable, consistant en ce que *toute surface du second degré* (le PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE excepté) *donne lieu à deux systèmes de* SECTIONS CIRCULAIRES : propriété dont celles qui ont été établies aux n°s 358 et 363 pour le cône et le cylindre *obliques*, à base circulaire, ne sont que des cas particuliers.

On sait déjà (n° 85) que l'équation (3) ne peut représenter un cercle, les axes étant *rectangulaires*, qu'autant que

l'on a entre les trois coefficients A, B, C, les deux relations

$$B = 0, \quad A = C,$$

qui, exprimées en fonction des quantités M, M′, M″, φ et θ, deviennent

$$(4) \qquad (M'' - M').\,2\cos\theta.\sin\varphi.\cos\varphi = 0,$$

$$(5) \qquad \left\{\begin{matrix} M\sin^2\theta + M'.\cos^2\theta.\cos^2\varphi \\ + M''.\cos^2\theta.\sin^2\varphi \end{matrix}\right\} = M'\sin^2\varphi + M''\cos^2\varphi.$$

(Il est inutile de tenir compte des coefficients D, E, F.)

Analysons ces équations de condition, en considérant d'abord les *surfaces douées d'un centre;* ce qui suppose qu'aucun des coefficients M, M′, M″ n'est *nul.*

Comme, en général, M″ est *différent* de M′, il en résulte que la relation (4), pour être satisfaite, exige que l'on ait ou $\cos\theta = 0$, ou $\sin\varphi = 0$, ou bien $\cos\varphi = 0$. Tels sont les cas que nous allons examiner successivement.

1°. $\cos\theta = 0$, d'où $\sin\theta = 1$;

l'équation (5) devient

$$M = M'\sin^2\varphi + M''\cos^2\varphi;$$

ou remplaçant $\sin^2\varphi$, $\cos^2\varphi$, par $\frac{\tan g^2\varphi}{1+\tan g^2\varphi}$, $\frac{1}{1+\tan g^2\varphi}$, et réduisant,

$$\tan g\varphi = \pm\sqrt{\frac{M''-M}{M-M'}}.$$

2°. $\sin\varphi = 0$, d'où $\cos\varphi = 1$;

on trouve pour l'équation (5),

$$M\sin^2\theta + M'\cos^2\theta = M'',$$

ce qui donne

$$\tan g\theta = \pm\sqrt{\frac{M''-M'}{M-M''}};$$

3°. Enfin, $\cos\varphi = 0$, d'où $\sin\varphi = 1$;

l'équation (5) se réduit à

$$M\sin^2\theta + M''\cos^2\theta = M',$$

par suite,

$$\tan g\theta = \pm\sqrt{\frac{M'-M''}{M-M'}}.$$

Discutons ces valeurs de $\tan g\varphi$ et de $\tan g\theta$, qui peuvent être *réelles* ou *imaginaires*, suivant les hypothèses faites sur les coefficients M, M′, M″.

Or, si l'on multiplie entre elles les quantités sous le radical,

$$\frac{M''-M}{M-M'},\quad \frac{M''-M'}{M-M''},\quad \frac{M'-M''}{M-M'},$$

il vient pour produit,

$$\frac{(M'-M'')^2}{(M-M')^2},$$

résultat essentiellement *positif;* ce qui démontre d'abord que l'*une* de ces trois quantités, au moins, est *positive;* mais je dis que si la première, par exemple, est *positive*, les deux autres sont *négatives*.

En effet, pour que $\frac{M''-M}{M-M'}$ soit *positif*, il faut que $M''-M$ et $M-M'$ soient de *même signe*, c'est-à-dire que l'on ait en même temps

$$M''-M > \text{ ou } < 0,$$
$$M-M' > \text{ ou } < 0;$$

d'où, ajoutant ces deux inégalités, membre à membre,

$$M''-M' > \text{ ou } < 0.$$

On voit donc que $M''-M'$ et $M-M''$ sont de *signes contraires;* ainsi $\frac{M''-M'}{M-M''}$ est *négatif*.

Pareillement, $M'-M''$ et $M-M'$ sont de *signes contraires;* ainsi $\frac{M'-M''}{M-M'}$ est *négatif*.

On démontrerait de la même manière que, si la seconde ou la troisième était *positive*, les deux autres seraient *négatives*.

Concluons de là que, sur les trois systèmes

$$\cos\theta = 0,\quad \operatorname{tang}\varphi = \pm\sqrt{\frac{M''-M}{M-M'}},$$
$$\sin\varphi = 0,\quad \operatorname{tang}\theta = \pm\sqrt{\frac{M''-M'}{M-M''}},$$
$$\cos\varphi = 0,\quad \operatorname{tang}\theta = \pm\sqrt{\frac{M'-M''}{M-M'}},$$

il y en a toujours *un* d'essentiellement *réel*, mais que les deux autres sont *imaginaires*.

D'ailleurs, comme, à cause du radical, chacune de

trois hypothèses donne deux valeurs pour la tangente de l'angle réel, il s'ensuit qu'*on peut toujours, par chaque point d'une surface du second degré, douée d'un* CENTRE, *faire passer deux plans sécants qui donnent lieu à une circonférence de cercle.*

Si l'on se rappelle l'acception donnée aux quantités φ et θ (n° 411), on reconnaît sans peine que ces trois hypothèses correspondent à des plans respectivement *perpendiculaires* aux plans des *trois sections* principales.

Ainsi $\cos\theta = 0$ indique que le plan sécant est perpendiculaire au plan des xy; $\cos\varphi = 0$, qu'il est perpendiculaire au plan des xz; et $\sin\varphi = 0$, qu'il est perpendiculaire au plan des yz.

Dans le cas particulier d'une *surface de révolution*, c'est-à-dire lorsque l'on a $M = M'$ par exemple (n°s 435, 438) les trois systèmes se réduisent à

$$\cos\theta = 0, \quad \operatorname{tang}\varphi = \infty, \quad \text{ou} \quad \cos\varphi = 0,$$
$$\sin\varphi = 0, \quad \operatorname{tang}\theta = \pm\sqrt{-1},$$
$$\cos\varphi = 0, \quad \operatorname{tang}\theta = \infty, \quad \text{ou} \quad \cos\theta = 0.$$

Le second est évidemment *imaginaire*. Quant aux deux autres, ils sont identiques, et signifient qu'il n'y a qu'un plan *perpendiculaire à l'axe* des x qui puisse produire une circonférence de cercle.

447. Les conséquences précédentes souffrent quelques modifications pour les *deux paraboloïdes*.

En effet on a, pour ces deux surfaces, $M'' = 0$, par suite, les relations $B = 0$, $A = C$, deviennent

$$\cos\theta \sin\varphi . \cos\varphi = 0,$$
$$M \sin^2\theta = M'(\sin^2\varphi - \cos^2\theta \cos^2\varphi);$$

or l'hypothèse $\sin\varphi = 0$ est *inadmissible;* car, à cause de $C = M' \sin^2\varphi$, il s'ensuivrait aussi $C = 0$, ce qui ne peut être pour que la *courbe d'intersection* soit une circonférence de cercle.

On est donc conduit à faire *deux* hypothèses seulement, savoir :

$$\cos\theta = 0;$$

d'où

$$\sin\theta = 1, \quad M = M' \sin^2\varphi,$$

et, par suite,

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{M}{M'}},$$

ou bien

$$\cos\varphi = 0;$$

d'où

$$\sin\varphi = 1, \quad M\sin\theta = M',$$

et, par suite,

$$\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{M'}{M}}.$$

Dans le cas du *paraboloïde hyperbolique*, ces deux systèmes sont *imaginaires*, puisque M et M′ sont alors de *signes contraires* (n° 442).

Pour le *paraboloïde elliptique*, le premier système seul est admissible si l'on a

$$M < M';$$

le contraire a lieu lorsque l'on a

$$M > M'.$$

Soit

$$M = M',$$

ce qui est (n° 441) le cas du *paraboloïde de révolution* (elliptique), il en résulte

$$\cos\theta = 0, \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \pm 1,$$

par suite,

$$\cos\varphi = 0;$$

ou bien

$$\cos\varphi = 0, \quad \text{et} \quad \sin\theta = \pm 1,$$

par suite,

$$\cos\theta = 0:$$

d'où l'on voit que ces deux systèmes rentrent l'un dans l'autre, et cela signifie que le plan sécant est *perpendiculaire* à l'axe des x.

448. REMARQUES.—1°. Les conditions $B = 0$, $A = C$, ne déterminant que les angles θ, φ, et non les coordonnées a, b, c, il s'ensuit que, pour toute surface du second degré, autre que le *paraboloïde hyperbolique*, il doit exister *deux systèmes* de plans *parallèles entre eux* et en nombre *infini*, qui donnent des *sections circulaires*.

Toutefois, si la surface est de *révolution*, les deux systèmes se réduisent à *un seul*.

2°. On peut alors demander le *lieu des centres de toutes les sections* pour chaque système.

Pour résoudre cette question, remarquons que rien n'empêche, pour chaque section obtenue, de disposer des indéterminées, a, b, c, de manière que l'origine des coordonnées soit placée au centre de la section : ce qui exige (n° 316) que, dans la transformée (3) du n° 445, les coefficients D, E soient *nuls*.

La question se réduit donc à former ces coefficients et à les égaler à *zéro*. On trouve ainsi, pour les surfaces correspondant à $Mz^2 + M'y^2 + M''x^2 + P = 0$,

$$2Mc\sin\theta - 2M'b\cos\theta\cos\varphi + 2M''a\cos\theta\sin\varphi = 0,$$

$$2M'b\sin\theta + 2M''a\cos\varphi = 0,$$

et pour les surfaces correspondant à $Mz^2 + M'y^2 + N''x = 0$,

$$2Mc\sin\theta - 2M'b\cos\theta\cos\varphi + N''\cos\theta\sin\varphi = 0,$$

$$2M'b\sin\theta + N''\cos\varphi = 0.$$

Dans les deux cas, on a, pour déterminer a, b, c, deux équations *linéaires* qui représentent deux *surfaces planes* dont l'intersection est *une ligne droite*.

D'où l'on voit que pour chaque système de plans sécants, *le lieu géométrique des centres de toutes les sections est* UNE DROITE.

Des plans tangents aux surfaces du second degré.

449. De même que nous avons défini (n° 99) la tangente en un point quelconque d'une courbe, l'*élément* de cette courbe, *prolongé indéfiniment*, nous considérerons aussi le *plan tangent en un point déterminé d'une surface, comme l'élément de cette surface prolongé indéfiniment*.

Il résulte de cette définition que, l'élément de la surface en un point quelconque se composant de tous les éléments des courbes que donne l'intersection de la surface par une suite de plans qui passent par ce point, et ces éléments n'étant autre chose que les tangentes aux courbes en ce point, il en résulte, dis-je, que le plan tangent est encore le *lieu de toutes les tangentes aux différentes courbes qu'on peut*

imaginer sur la surface par le point donné, et que sa position est déterminée, dès que l'on connaît celles de deux des tangentes.

C'est cette dernière considération qui va nous servir à trouver l'équation du plan tangent.

Soit d'abord

$$Mz^2 + M'y^2 + M''x^2 + P = 0 \tag{1}$$

l'équation générale des surfaces qui ont *un centre*, et appelons x', y', z' les coordonnées du point par lequel on veut mener un plan tangent à la surface; on a déjà la relation

$$Mz'^2 + M'y'^2 + M''x'^2 + P = 0. \tag{2}$$

Maintenant, si par ce point on imagine successivement deux plans parallèles au plan des xz et au plan des yz, on aura pour les équations des intersections de la surface par ces deux plans,

$$y = y', \quad Mz^2 + M''x^2 + M'y'^2 + P = 0,$$
$$x = x', \quad Mz^2 + M'y^2 + M''x'^2 + P = 0;$$

et pour les équations des tangentes à ces sections, au point x', y', z' (*voyez* le n° 187),

$$y = y', \quad Mzz' + M''xx' + M'y'^2 + P = 0, \tag{3}$$
$$x = x', \quad Mzz' + M'yy' + M''x'^2 + P = 0. \tag{4}$$

Or le plan tangent doit, en vertu de ce qui a été dit ci-dessus, passer par ces deux tangentes : ainsi la question est ramenée à trouver l'équation d'un plan passant par deux droites dont les équations sont données.

D'abord, comme le plan doit passer par le point x', y', z', son équation est de la forme

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0. \tag{5}$$

Il suffit maintenant d'exprimer que ce plan, qui renferme déjà un point commun aux deux droites, est parallèle à chacune d'elles. On a pour cela (n° 388), les deux conditions

$$Aa + Bb + C = 0,$$
$$Aa' + Bb' + C = 0;$$

mais les équations (3) et (4) peuvent se mettre sous la

forme

$$x = -\frac{Mz'}{M''x'}\cdot z - \frac{(M'y'^2+P)}{M''x'},\quad y = o.z + y',$$

$$x = o.z + x',\quad y = -\frac{Mz'}{M'y'}\cdot z - \frac{(M''x'^2+P)}{M'y'};$$

ce qui donne

$$a = -\frac{Mz'}{M''x'},\quad b = o;\quad a' = o,\quad b' = -\frac{Mz'}{M'y'};$$

par suite les deux relations de condition deviennent

$$A\times -\frac{Mz'}{M''x'} + C = o,\quad \text{d'où}\quad A = \frac{M''x'}{Mz'}\cdot C;$$

$$B\times -\frac{Mz'}{M'y'} + C = o,\quad \text{d'où}\quad B = \frac{M'y'}{Mz'}\cdot C.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (5), on obtient

(6) $$Mz'(z-z') + M'y'(y-y') + M''x'(x-x') = o,$$

ou, développant et ayant égard à la relation (2),

(7) $$Mzz' + M'yy' + M''xx' + P = o,$$

équation qui ne diffère de l'équation de la surface, qu'en ce que les carrés z^2, y^2, x^2 sont remplacés par les rectangles zz', yy', xx'.

450. Passons aux surfaces *dépourvues de centre*.

L'équation générale des paraboloïdes étant

(1) $$Mz^2 + M'y^2 + 2N''x = o$$

(on verra bientôt pourquoi l'on pose ici le coefficient de x égal à $2N''$), on a pour le point de la surface dont les coordonnées sont x', y', z',

(2) $$Mz'^2 + M'y'^2 + 2N''x' = o.$$

Les équations des intersections de la surface par deux plans parallèles aux plans des xz et des yz, passant par le point (x', y', z'), sont

$$y = y',\quad Mz^2 + 2N''x + M'y'^2 = o,$$
$$x = x',\quad Mz^2 + M'y'^2 + 2N''x' = o;$$

et celles des tangentes à ces courbes, menées par le même point, sont (n°s 264 et 187)

$$y = y',\quad Mzz' + N''(x+x') + M'y'^2 = o,$$
$$x = x',\quad Mzz' + M'yy' + 2N''x' = o.$$

Maintenant, le plan tangent devant passer par le point

x', y', z', son équation est de la forme

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0; \tag{3}$$

les relations qui expriment que ce plan est parallèle aux deux droites, étant toujours

$$Aa+Bb+C=0, \quad Aa'+Bb'+C=0,$$

on a évidemment ici

$$a=-\frac{Mz'}{N''}, \quad b=0; \quad a'=0, \quad b'=-\frac{Mz'}{M'y'},$$

ce qui donne pour les deux relations de condition,

$$A\times-\frac{Mz'}{N''}+C=0, \quad \text{d'où} \quad A=\frac{N''}{Mz'}\cdot C,$$

$$B\times-\frac{Mz'}{M'y'}+C=0, \quad \text{d'où} \quad B=\frac{M'y'}{Mz'}\cdot C.$$

Il vient ainsi, par la substitution de ces valeurs dans l'équation (3),

$$Mz'(z-z')+M'y'(y-y')+N''(x-x')=0; \tag{4}$$

ce qui donne une première forme de l'équation du plan tangent.

Mais en la simplifiant par le moyen de la relation (2), on obtient finalement.

$$Mzz'+M'yy'+N''(x+x')=0. \tag{5}$$

N. B. — Les équations de la *normale*, c'est-à-dire de la droite élevée par le point de contact *perpendiculairement* au plan tangent, sont faciles à déterminer d'après les principes établis au n° 389; il est donc inutile de s'y arrêter.

451. Soit maintenant proposé de *mener un plan tangent par un point extérieur*, en se bornant à développer la méthode pour les surfaces qui ont *un centre*.

Désignons par x'', y'', z'', les coordonnées du point donné, et conservons x', y', z' pour représenter celles du point de contact *inconnu*.

Le plan tangent devant passer par le point x'', y'', z'', ces coordonnées doivent vérifier l'équation (7) du n° 449; et l'on a la première relation

$$Mz'z''+M'y'y''+M''x'x''+P=0. \tag{1}$$

D'un autre côté, le point x', y', z', se trouvant sur la

surface, on a pour seconde relation

$$(2) \qquad Mz'^2 + M'y'^2 + M''x'^2 + P = 0.$$

Comme ces équations sont les seules qui puissent servir à déterminer les *trois* inconnues x', y', z', on est conduit à cette conséquence, que

Par un point pris hors d'une surface du second degré douée d'un centre, on peut mener une infinité de plans tangents.

[On parviendrait au même résultat pour les surfaces *dépourvues de centre.*]

Si l'on éliminait alternativement y' et x' entre les équations (1) et (2), on obtiendrait deux équations en x', z' et en y', z', qui ne seraient autres que celles des *projections* sur les deux plans des xz et des yz, de la ligne passant par les points de contact de tous les plans tangents; ligne qui, pour cette raison, est appelée la COURBE DE CONTACT.

Cette courbe est nécessairement *plane* et du *second degré,* au plus; car elle provient de l'élimination des inconnues entre l'équation (1) qui est celle d'un plan, et l'équation (2), c'est-à-dire celle de la surface du second degré proposée.

Elle peut être regardée comme la *base* d'une surface conique ayant pour *centre* le point donné, et *enveloppant* la surface proposée.

Enfin, il est facile de reconnaître qu'elle a *les mêmes plans tangents* que la surface, et que ses génératrices sont *les intersections* de tous ces plans considérés deux à deux.

Ces propositions découlent évidemment de la nature de la question qu'on s'était proposé de résoudre.

Génération de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique.

452. Nous terminerons la théorie des surfaces du second degré par la démonstration d'une propriété commune à l'hyperboloïde à *une nappe* et au paraboloïde *hyperbolique,* c'est de *pouvoir être engendrés par le mouvement d'une ligne droite de deux manières différentes.*

Déjà nous avons vu (n°s 424 et 425) que l'équation de la *surface de révolution* engendrée par le mouvement d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace, autour d'un axe fixe, est *identique* avec celle de l'*hyperboloïde de révolution* à *une seule nappe*; et (n° 421) que la surface *conoïde* dont les deux *directrices* sont des *droites*, est une surface du *second degré*, surface qui, d'après la nature de ses intersections par des plans, ne saurait être autre qu'un *paraboloïde hyperbolique*.

Nous allons maintenant généraliser ces propositions au moyen de la considération des *plans tangents*.

Reprenons d'abord l'équation générale des surfaces *douées d'un centre*,

$$Mz^2 + M'y^2 + M''x^2 + P = 0. \tag{1}$$

Celle du plan tangent en un point x', y', z' est

$$Mz'z + M'y'y + M''x'x + P = 0; \tag{2}$$

et l'on a, en outre, la relation

$$Mz'^2 + M'y'^2 + M''x'^2 + P = 0. \tag{3}$$

Cela posé, si l'on double l'équation (2) et qu'on la retranche de la somme des deux autres, il vient

$$M(z - z')^2 + M'(y - y')^2 + M''(x - x')^2 = 0, \tag{4}$$

équation qui peut être substituée à l'équation (1), en ce sens que *les points communs* au plan tangent (2) et à la surface (1) sont aussi *communs* au plan tangent et à la surface représentée par l'équation (4), et *réciproquement*.

La question est ainsi ramenée à chercher quels peuvent être les points qui appartiennent à la fois aux deux surfaces exprimées par les équations (2) et (4).

Remarquons d'abord que si M, M', M'', sont *tous trois positifs*, l'équation (4) ne peut être vérifiée que par

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z';$$

ce qui prouve que, pour un *ellipsoïde*, le plan tangent ne peut jamais avoir qu'*un point commun* avec la surface.

Si l'on suppose M, M' *positifs* et M'' *négatif*, et qu'on mette les signes en évidence, les équations (2), (3) et (4)

deviennent

$$(5) \qquad Mz'z + M'y'y - M''x'x + P = 0,$$

$$(6) \qquad Mz'^2 + M'y'^2 - M''x'^2 + P = 0,$$

$$(7) \qquad M(z-z')^2 + M'(y-y')^2 - M''(x-x')^2 = 0.$$

Cette dernière équation représente (n° 419) une *surface conique* dont le *centre* est le point x', y', z'.

Comme, d'ailleurs, ce même point appartient au plan tangent, il s'ensuit que, si les deux surfaces ont d'autres points communs, ils sont nécessairement en *ligne droite* et constituent *une* ou *deux* des génératrices de la surface conique.

Pour reconnaître si les surfaces exprimées par les équations (5) et (7) ont en effet d'autres points communs que le centre $[x', y', z']$ de la surface conique, on est conduit à combiner les équations

$$(8) \qquad x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z')$$

d'une droite passant par ce même point, avec celles des deux surfaces, et à s'assurer si les constantes a, b peuvent être déterminées de manière que les *quatre* équations s'accordent entre elles.

Or, en substituant les valeurs de $x - x'$, $y - y'$, que donnent immédiatement les équations (8), dans chacune des équations (7) et (5), on trouve

$$(z-z')^2(M + M'b^2 - M''a^2) = 0,$$
$$(z-z')^2(Mz' + M'by' - M''ax') = 0,$$

ou, si l'on supprime le facteur $(z - z')^2$ correspondant au point x', y', z' qu'on sait déjà être *commun* aux deux surfaces,

$$(9) \qquad \begin{cases} M + M'b^2 - M''a^2 = 0, \\ Mz' + M'y' \cdot b - M''x' \cdot a = 0. \end{cases}$$

Telles sont les relations qui expriment que la droite se trouve *tout entière* sur les deux surfaces.

Si l'on élimine a, b, et qu'on ait égard à la relation (6), il vient, toute réduction faite,

$$a = \frac{M'y' \cdot b + Mz'}{M''x'}, \quad b = \frac{MM'y'z' \pm x'\sqrt{-MM'M''P}}{M'(M''x'^2 - M'y'^2)};$$

ce qui fait voir que b étant susceptible d'une détermination *réelle*, il en sera de même de a.

Il reste à savoir dans quel cas la quantité b aura une valeur *réelle*.

Or cela ne peut avoir lieu (M, M′, M″ étant, dans l'expression de cette valeur, essentiellement *positifs*), qu'autant que P est NÉGATIF, condition qui (n° 437) correspond à l'HYPERBOLOÏDE *à une nappe*.

Donc, pour ce genre de surfaces, le plan tangent en un point quelconque, jouit de la propriété d'*avoir* deux droites communes avec la surface conique (7), et, par suite, avec la surface

$$\mathrm{M}z^2 + \mathrm{M}'y^2 - \mathrm{M}''x^2 = +\mathrm{P}.$$

En d'autres termes, *il n'existe pas un point de l'hyperboloïde à une nappe par lequel on ne puisse imaginer deux droites qui s'y trouvent placées tout entières;*

Ou bien encore, l'*hyperboloïde à une nappe peut être considéré comme engendré par une ligne droite de deux manières différentes.*

N. B.—La propriété du plan tangent à cette surface n'infirme pas la définition que nous avons donnée au n° 449 du plan tangent; au contraire, elle en est une conséquence naturelle, car, puisqu'il doit se composer de toutes les tangentes en un point quelconque, si l'un des éléments de la surface est une ligne droite, le plan tangent doit passer par cette droite qui est sa propre tangente.

453. Passons aux *paraboloïdes* dont l'équation est

$$\mathrm{M}z^2 + \mathrm{M}'y^2 + 2\,\mathrm{N}''x = 0. \tag{1}$$

On a obtenu, pour l'équation de leur plan tangent,

$$\mathrm{M}zz' + \mathrm{M}'yy' + \mathrm{N}''(x + x') = 0, \tag{2}$$

x', y', z' étant liés par la relation

$$\mathrm{M}z'^2 + \mathrm{M}'y'^2 + 2\,\mathrm{N}''x' = 0. \tag{3}$$

En ajoutant les équations (1) et (3), puis retranchant de leur somme le double de la seconde, on trouve

$$\mathrm{M}(z - z')^2 + \mathrm{M}'(y - y')^2 = 0, \tag{4}$$

résultat qui peut remplacer l'équation (1) en tant que l'on

cherche les points *communs* à la surface proposée et au plan tangent.

Or, comme dans l'hypothèse où M et M′ sont tous les deux *positifs*, l'équation (4) ne peut être satisfaite que par

$$z = z', \quad y = y',$$

il s'ensuit que le *paraboloïde elliptique* ne saurait avoir qu'un point commun (x', y', z') avec son plan tangent.

Mais supposons M′ *négatif*, et mettons le signe en évidence; l'équation (4) devient

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{M}(z-z')^2 - \mathrm{M}'(y-y')^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$y - y' = \pm (z - z')\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}'}};$$

Ainsi l'équation (5) représente *un système* de *deux plans perpendiculaires* au plan des yz, et ses intersections avec le plan tangent sont, en général, *deux lignes droites*.

Nous sommes donc en droit de conclure immédiatement que *le paraboloïde hyperbolique et son plan tangent en un point quelconque ont deux droites communes* passant par ce point.

Mais, pour fixer la position de ces droites comme on l'a fait pour l'hyperboloïde, il faut combiner l'équation (5) et celle du plan tangent, mise préalablement (n° 450), M′ étant ici *négatif*, sous la forme

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{M}z'(z-z') - \mathrm{M}'y'(y-y') + \mathrm{N}''(x-x') = 0,$$

avec celles d'une droite passant par le point x', y', z',

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} x - x' = a(z - z'), \\ y - y' = b(z - z'). \end{cases}$$

On obtient pour résultat les deux équations

$$a = \frac{\mathrm{M}'y'.b - \mathrm{M}z'}{\mathrm{N}''}, \quad b = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}'}}.$$

La quantité b étant essentiellement *réelle* dans le cas du paraboloïde hyperbolique, il en est de même de la quantité a.

Donc *il n'y a pas de point sur la surface d'un parabo-*

loïde hyperbolique par lequel on ne puisse imaginer deux droites qui s'y trouvent placées tout entières.

La substitution de la valeur de b dans la seconde des équations (7) donne

$$y - y' = \pm (z - z') \sqrt{\frac{M}{M'}};$$

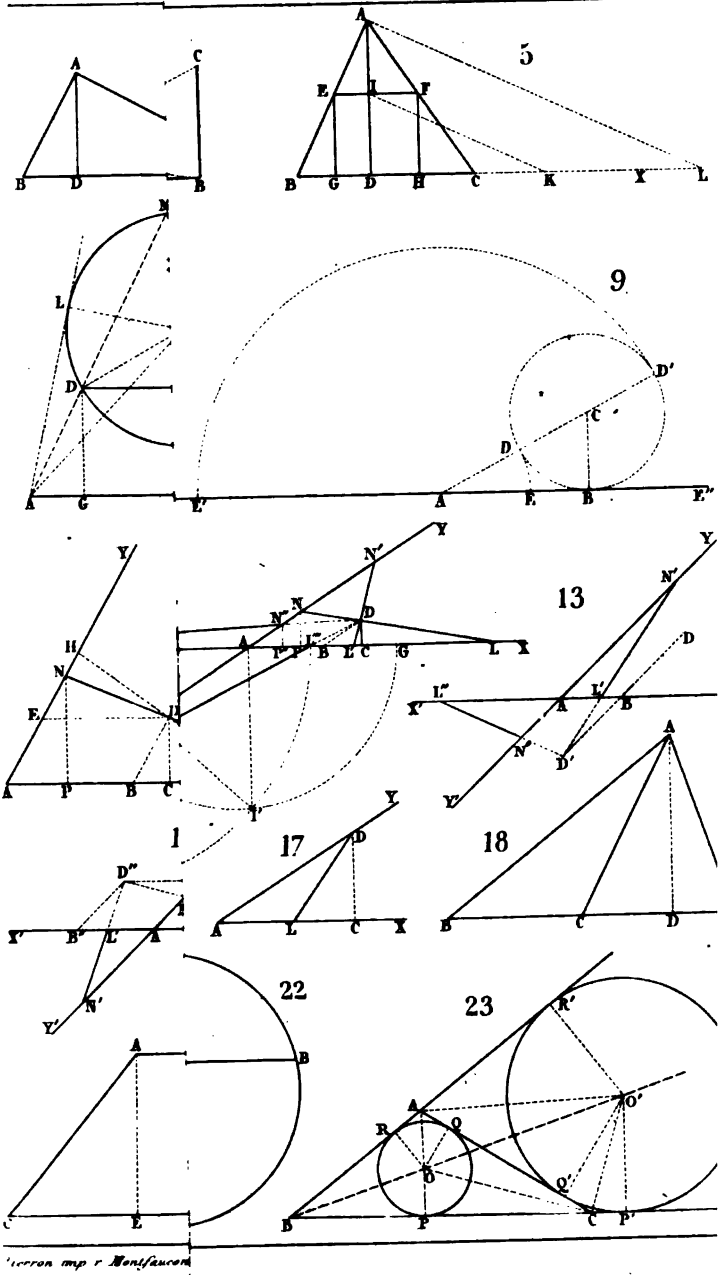
résultat *identique* avec celui qu'avait donné l'équation (5).

454. REMARQUE. — La valeur de b étant indépendant de x', y', z', il en résulte que, dans les deux systèmes de génération du paraboloïde hyperbolique par une droite, les *projections de toutes les droites d'un même système sur le plan des xy sont* PARALLÈLES ENTRE ELLES; ce qui prouve qu'elles sont situées dans des plans PARALLÈLES ENTRE EUX.

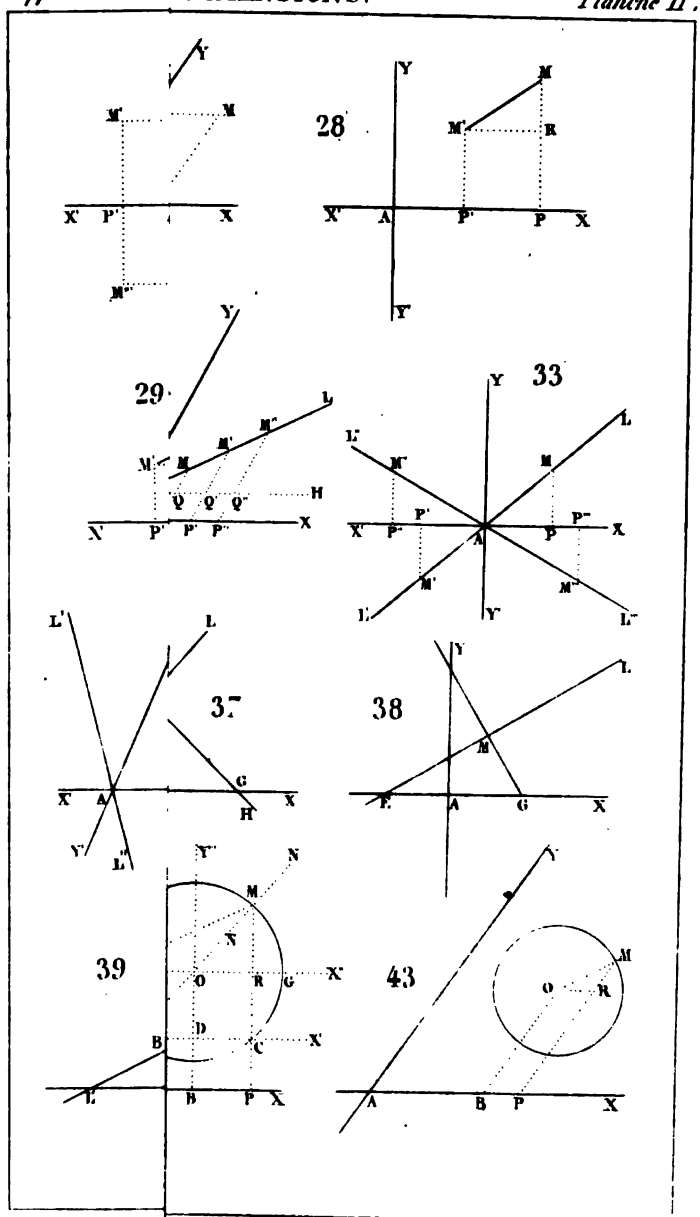
Cette propriété sert à distinguer, dans certains cas, le paraboloïde *hyperbolique* de l'hyperboloïde *à une nappe*, bien qu'ils aient un mode commun de génération. Dans le premier, toutes les droites génératrices d'un même système sont PARALLÈLES A UN MÊME PLAN, tandis que pour l'autre les génératrices ont une direction quelconque dans l'espace.

Il résulte enfin de là que la *surface conoïde*, telle que nous l'avons définie au n° 421, n'est autre, ainsi que nous l'avons déjà dit, que le paraboloïde hyperbolique considéré dans le cas le plus général.

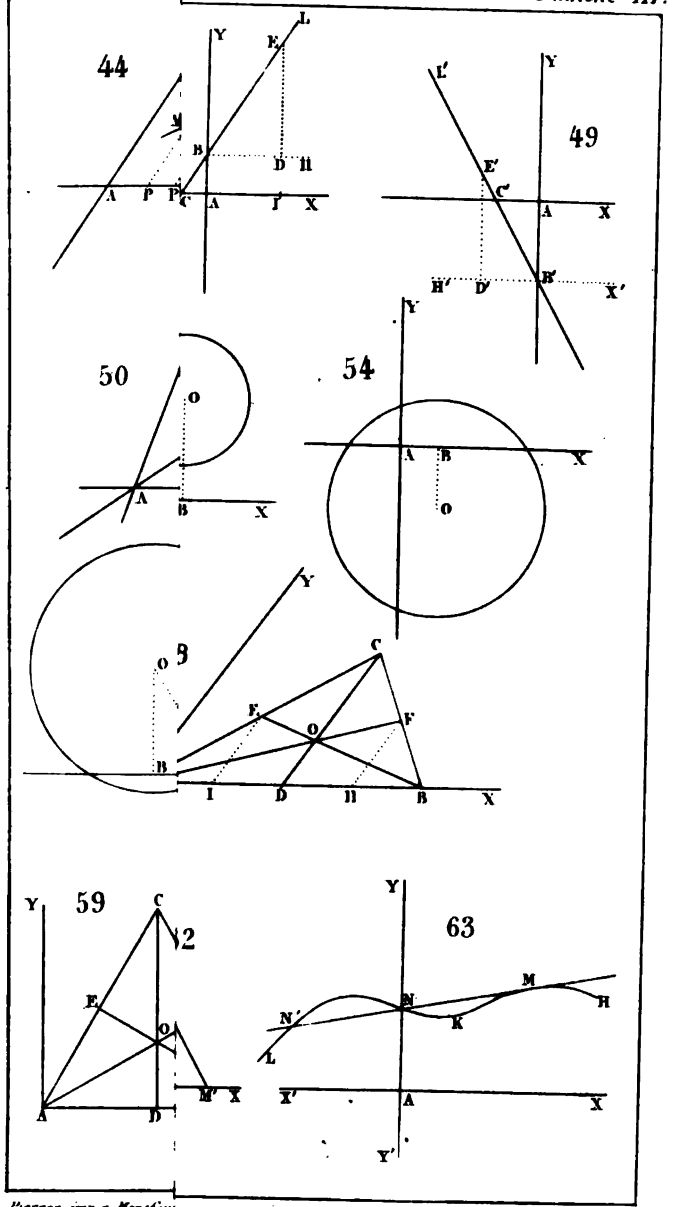
FIN.



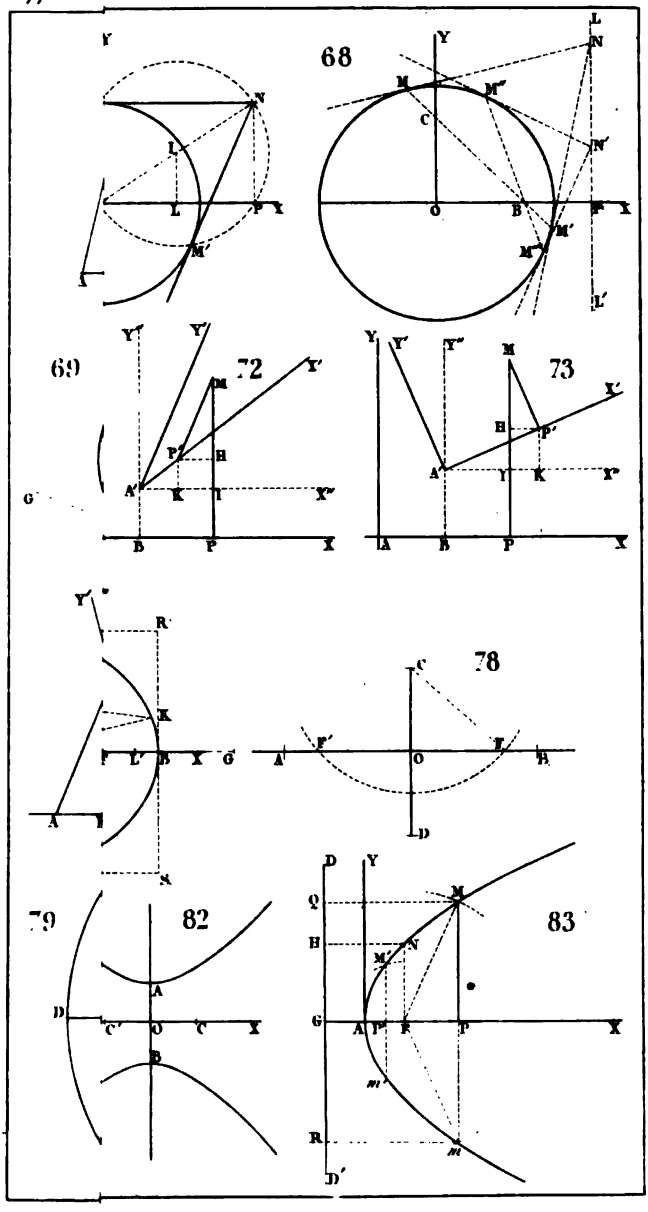
Lerron imp r Montfaucon



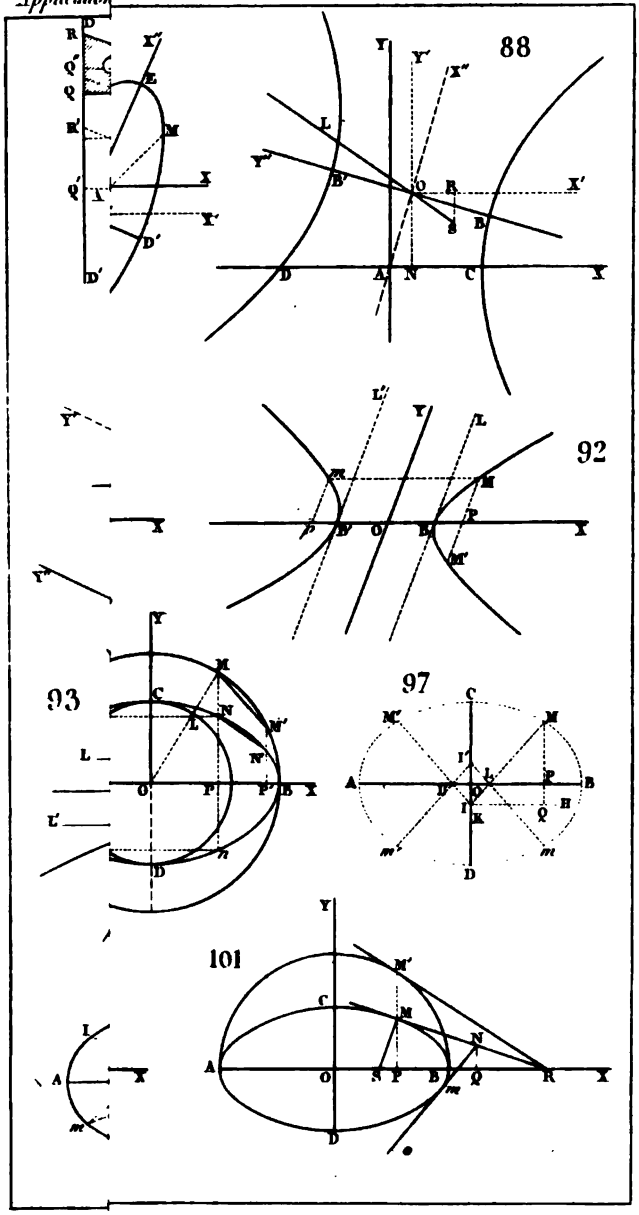
Pierron imp. r Montfau



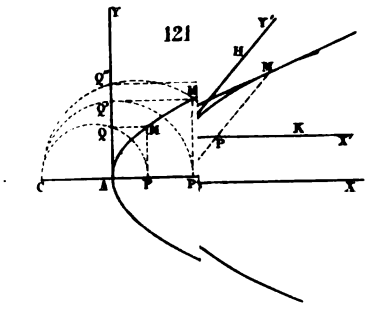
Pierron, imp. r. Monsieur

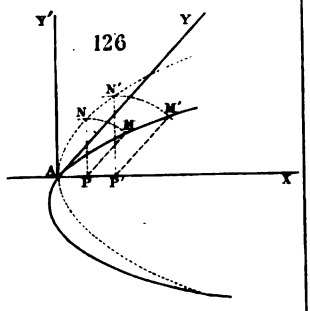


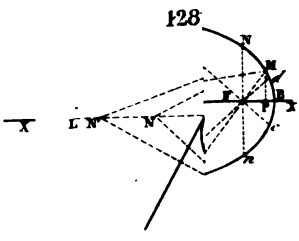
Pierron, imp.

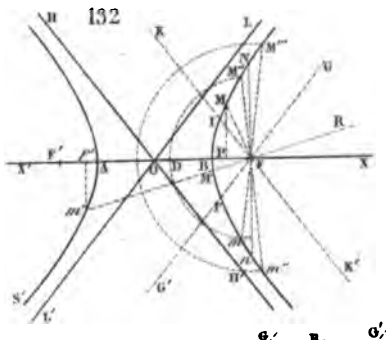


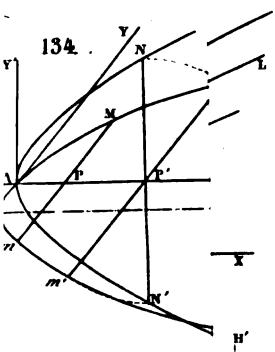
Pierron imp.

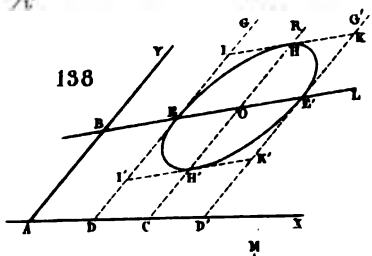

121

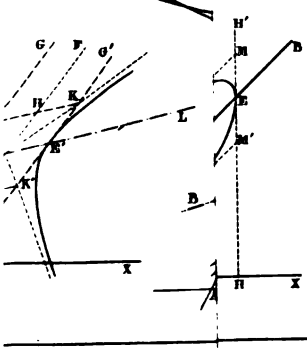

126

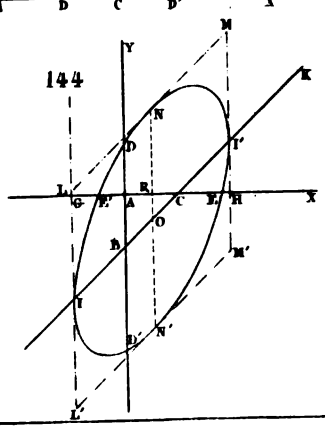

128

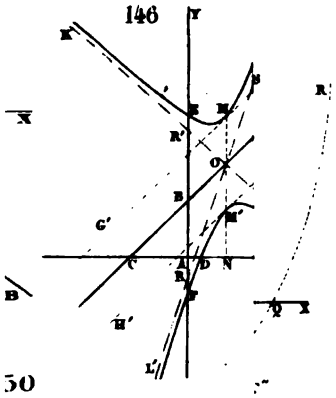

132

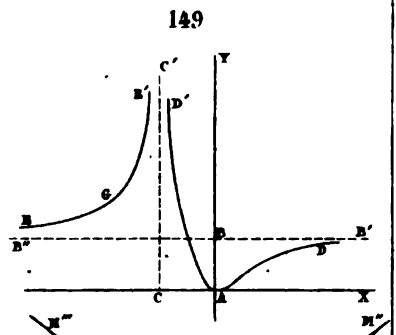

134

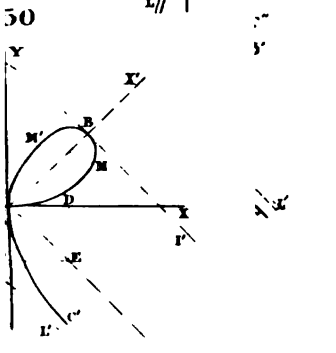

138

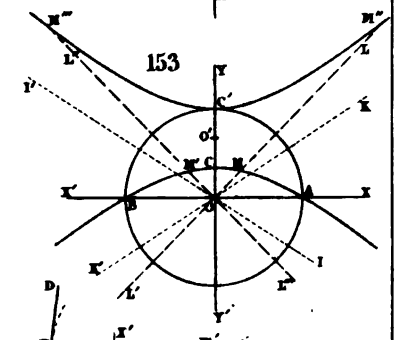


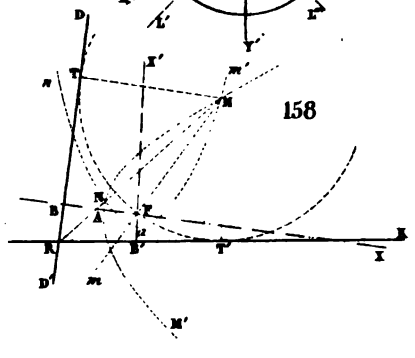

144

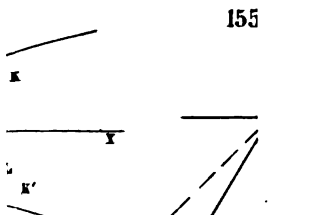

146

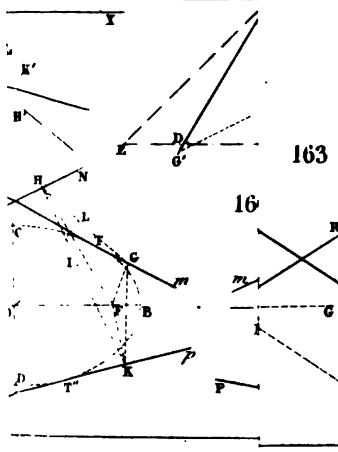

149

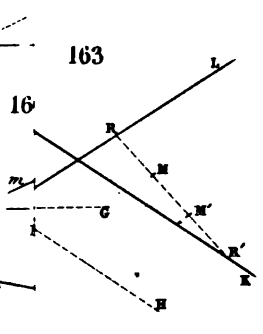

150

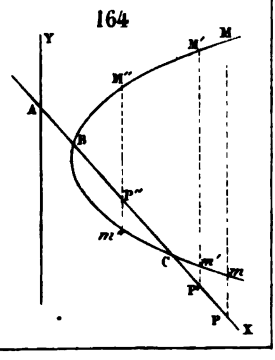

153


158

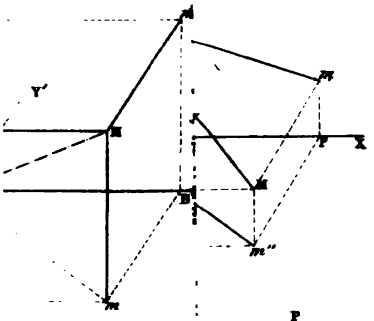

155




163

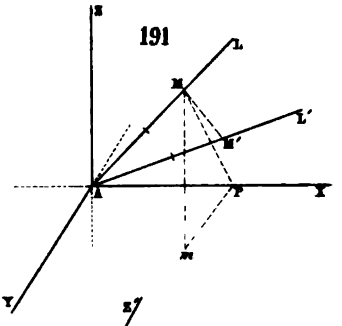

164

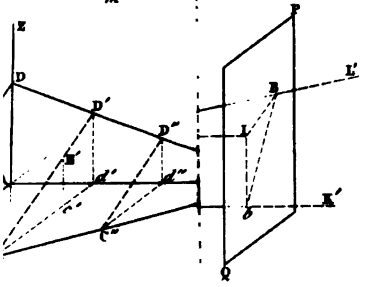
187



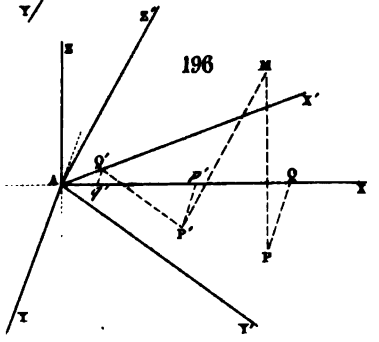
190

191

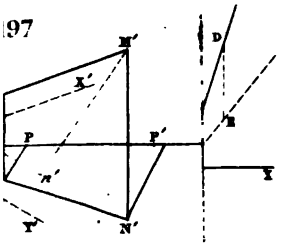




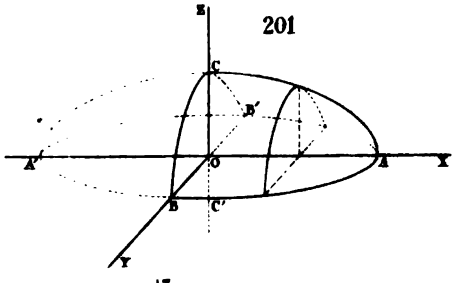
196



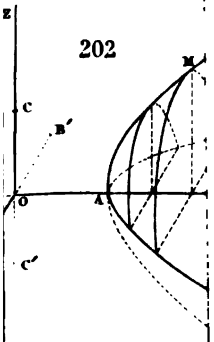
197



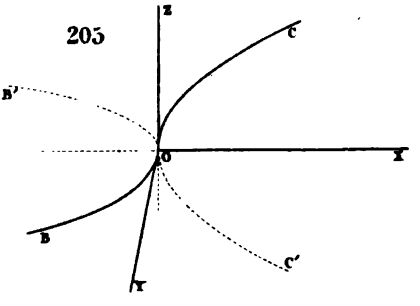
201



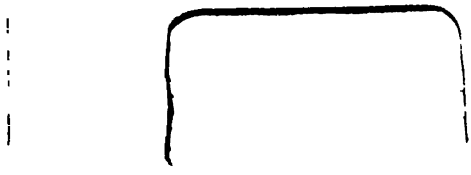
202



205



Acme
Bookbinding Co., Inc.
100 Cambridge St.
Charlestown, MA 02129



Math 8508.54.2
Application de l'algebre a la ge
Cabot Science 003348498
3 2044 091 919 266