
SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG:
CHRISTO ET ECCLESIÆ

George Mercer Stark
July 22, 1922.

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Zwanzigster Theil.

Mit vier lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagshandlung

Th. Kunike.

1853.

1871, July 1.
Haven Fund.

Inhaltsverzeichniss des zwanzigsten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Praktische Geometrie.

Physik.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Literarische Berichte *).

*) Ich bemerke hierbei, dass die literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Zur gründlichen Richtigstellung des Ausdruckes für das Integral

$$\int\frac{dx}{x}.$$

Von

Herrn Dr. Wilhelm Matzka,

Professor der Mathematik an der k. k. Universität zu Prag.

(Vorgetragen in der am 23. Juni 1851. gehaltenen Sitzung der königlich böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag.)

In neuerer und neuester Zeit haben mehrere kritische Analytiker, mit Cauchy an der Spitze, an dem bekannten und so häufig in Anwendung kommenden Integral $\int\frac{dx}{x}$, dessen Differentialquotient das Umgekehrte (der reciproke Werth) der Grundveränderlichen x ist, mancherlei gegründete Anstösse gefunden, die noch nicht zur allseitigen Zufriedenstellung behoben werden konnten. Diese Befriedigung mit treffenden Gründen zu erzielen, ist der Zweck folgender Abhandlung.

§. 1.

Dieses Integral, dessen üblicher Ausdruck

$$(\mathrm{I})\qquad \int\frac{dx}{x} = \mathrm{l}x + C$$

wenn l die Andeutung der natürlichen Logarithmen ist, zeichnet sich durch mehrere auffallende Eigenheiten aus.

1.) Sein Integrand, $\frac{dx}{x}$, bleibt ungeändert, wenn man die Veränderliche, x, durch eine Proportionale, ax, ersetzt, deren constanter Verhältniss-Factor a eine beliebige, positive oder negative, reelle oder imaginäre Zahl ist. Erlaubt man sich diesen Ersatz auch in dem Logarithmand zu vollbringen, so erfolgt

$$(2) \qquad \int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}(ax) + C.$$

In diesen willkührlichen Factor, a, darf man daher auch die arbiträre Integrationsconstante C mit einbegreifen, folglich ihn durch Ca oder durch $\frac{a}{C}$ ersetzen, wodurch sich herausstellt

$$(3) \qquad \int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}(Cax) = \mathrm{l}\frac{ax}{C}.$$

Diese gleichgeltenden dreierlei Ausdrücke sind weit allgemeiner als der ursprüngliche, veranlassen aber den Anstoss, dass sie für negative und imaginäre Logarithmande imaginär ausfallen, während doch der Integrand selbst reell ist.

2.) Führt man an die Stelle der Veränderlichen eine beliebige Potenz derselben, x^n, ein, deren Exponent (n) was immer für eine, positive oder negative, reelle oder imaginäre, ganze, gebrochene oder irrationale Zahl sein mag; so wird das Integral blos durch diesen Exponenten vervielfacht, daher wieder hergestellt, indem man das entstandene Integral durch jenen Exponenten theilt. Es ist nemlich:

$$\int \frac{d(x^n)}{x^n} = \int \frac{nx^{n-1}dx}{x^n} = n \int \frac{dx}{x},$$

daher umgekehrt

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{n} \int \frac{d(x^n)}{x^n};$$

und wenn man diese Abänderung auch in den Integralausdrücken (2) und (3) ausführt, findet man noch allgemeiner

$$(4) \qquad \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{n}\mathrm{l}(ax^n) + C = \frac{1}{n}\mathrm{l}(Cax^n) = \frac{1}{n}\mathrm{l}\frac{ax^n}{C}.$$

3. Jeder Logarithme ist bekanntlich eine unendlich vieldeutige complexe (binomiale imaginäre) Function, daher muss das vollkommen allgemeine Integral auch unendlich vieldeutig

sein. Bedient man sich daher Cauchy's bekannter Bezeichnung, so ist am allgemeinsten

$$(5) \qquad \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{n} \mathrm{l}((ax^n)) + C = \frac{1}{n} \mathrm{l}((Cax^n)) = \frac{1}{n} \mathrm{l}\left(\left(\frac{ax^n}{C}\right)\right).$$

4.) Uebergeht man von diesem unbestimmten Integral auf ein bestimmtes mit algebraisch entgegengesetzten Integrationsgrenzen, so kann die Auswerthung des letzteren nicht so geradehin durch die übliche Einsetzung dieser Grenzen in das allgemeine Integral vollzogen werden; weil bei dem Uebergange der Veränderlichen x aus dem Positiven durch Null ins Negative der Differentialcoefficient $\frac{1}{x}$ an dem Werthe $x=0$ unstetig (unendlich gross), das Integral selbst dagegen für $x=0$ gleichfalls unstetig und dann für negative x imaginär wird, wofern man nicht zum Exponenten n eine gerade Anzahl gewählt hätte.

§. 2.

Diese Wahrnehmungen haben zuerst Cauchy bewogen, in seinem Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal, 4°. t. 1., 1823., an mehreren Stellen, wie S. 87. und 92., die Mathematiker darauf aufmerksam zu machen, dass das gewöhnliche Verfahren

$$(1) \qquad \int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}x + C$$

zu setzen nur da, wo x positiv ist, gestattet sein könne, oder dass man nur so lange

$$(6) \qquad \int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\frac{x}{C}$$

setzen dürfe, als die Constante C mit x gleichstimmig gewählt wird.

Ohne sich in eine tiefere Begründung einzulassen, setzt er sofort, auf S. 104., 107. u. s. f., dort wo x eben so wohl negativ als positiv gedacht werden kann,

$$(7) \qquad \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \mathrm{l}(x^2) + C \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{2} \mathrm{l}.\left(\frac{x}{C}\right)^2.$$

Seither hat er in seinen analytischen Arbeiten überall die letztere Form als die richtige beibehalten.

§. 3.

Von Cauchy's Anhängern dürfte wohl Herr Professor Grunert der Erste dieser Ansicht offen beigetreten sein, indem er in seinen „Elementen der Differential- und Integral-Rechnung", 2. Thl., Leipzig, 1837. S. 34., diesen Fragepunkt folgendermassen bespricht.

„Weil bekanntlich, wenn man unter der Voraussetrung, dass X reell ist, das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem X positiv oder negativ ist,

$$d\,\mathrm{l}(\pm X) = \frac{\pm dX}{\pm X} = \frac{dX}{X}$$

ist; so ist

$$\int \frac{dX}{X} = \mathrm{l}(\pm X) + C,$$

mit derselben Bestimmung wie vorher wegen des Zeichens. Um aber die durch das doppelte Zeichen verursachte Unbequemlichkeit zu vermeiden, wollen wir im Folgenden, was offenbar verstattet ist, immer

$$\int \frac{dX}{X} = \frac{1}{2}\mathrm{l}.X^2 + C$$

setzen."

Hiergegen muss ich jedoch bemerken, dass die hierin versteckte successive Argumentation:

$$\mathrm{l}(\pm X)$$

sei zunächst

$$= \mathrm{l}\sqrt{(\pm X)^2},$$

dann

$$= \mathrm{l}\sqrt{X^2},$$

endlich

$$= \frac{1}{2}\mathrm{l}.X^2$$

auf den Satz:

„Potenzirung und Wurzelziehung nach einerlei Exponenten, unmittelbar nach einander ausgeführt, heben sich auf",

basirt ist, welcher laut des Begriffs der Wurzel zwar da streng gilt, wo einer Wurzelziehung die gleichhohe Potenzirung folgt, der aber unrichtig wird, wenn umgekehrt einer Potenzirung die gleichhohe Wurzelziehung nachfolgt; weil jede Wurzel bekanntlich nicht blos eindeutig, sondern so vieldeutig ist, als ihr Exponent zählt.

Will man jedoch kritisch vorgehend

$$\pm X = (([\pm X]^2))^{\frac{1}{2}} = ((X^2))^{\frac{1}{2}}$$

setzen, so ist es bei dem Uebergange auf die Logarithmen immer gestattet, ohne weiteres

$$\mathrm{l}(\pm X) = \mathrm{l}.((X^2))^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.X^2$$

zu setzen; weil ja der vorletzte Ausdruck zweiförmig, der letzte aber nur einförmig ist.

In seinem „Leitfaden für den ersten Unterricht in der höheren Analysis, Leipzig, 1838., S. 158., Note" wiederholt Herr Professor Grunert anfangs im Wesentlichen das Obige, nur fügt er, um sich gegen den Vorwurf „einer unnöthigen und unüberlegten Neuerung" zu schützen, noch folgende Bemerkungen bei:

„Nach meiner Ueberzeugung ist die Formel

$$\int \frac{dX}{X} = \mathrm{l}X$$

falsch, und gilt blos in dem Falle, wenn X positiv ist, keineswegs aber auch in dem Falle, wenn X negativ ist, wie schon daraus unzweideutig hervorgehen dürfte, dass für ein negatives X bekanntlich $\mathrm{l}X$ imaginär, die Grösse $\frac{dX}{X}$ aber reell ist, und doch wohl auf keinen Fall das Integral $\int \frac{dX}{X}$ des reellen Differentials $\frac{dX}{X}$ der imaginären Grösse $\mathrm{l}X$ gleich sein kann."

Die hier in Frage gestellten Behauptungen hoffe ich im Folgenden (in § 6.) gründlich widerlegt zu haben.

§. 4.

Dieser Ansicht schloss sich auch Herr Professor Schlömilch in mehreren seiner geistreichen und kritischen Aufsätze an, die er im Archiv veröffentlichte. Zuvörderst gehört hieher eine Stelle in einem seiner polemischen Aufsätze gegen Dr. Barfuss, 5. Bd., 1844., S. 388. Den daselbst ausgesprochenen Antithesen zwischen dem Wirklichen und algebraisch Unmöglichen kann ich jedoch, als Mitverfechter der — freilich noch wenig Gnade findenden — Ansichten eines Mourey, Warren und Gauss über die Realität der sogenannten imaginären Grössen meinen Beifall keineswegs zollen.

Darauf gab er für diese Ansichten einen eigenen Beweis im 6. Bde., 1845., S. 326—328. Die Grundlage desselben ist die Unveränderlichkeit des Integrals $\int_0^u \frac{dx}{x}$, wenn x in $-x$ übergeht. Indess gewähren gleichwohl die einleitenden analytischen Kunstgriffe nicht die erwünschte Befriedigung, zumal man über den eigentlichen Grund doch nicht die nöthigen Aufschlüsse erhält. Zudem streitet sein $\varphi(0)$, welches eigentlich $=l(0)=-\infty$ ist, mit der, durch die Bemerkung 4) in §. 1. veranlassten, Lehre Cauchy's von der Werthbestimmung indeterminirter Integrale (Résumé, p. 93—96.).

Gegen diesen Beweis stritt Herr Lehrer Dr. Strauch im 6. Doppelhefte, Nr. 57., der Heidelberger Jahrbücher der Literatur für 1845, S. 911—913., indem er Herrn Schlömilch's Verfahren eine „unnatürliche Künstelei" nennt, und während dieser das begrenzte Integral

$$\int_{-2}^{+3} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} l(3^2) - \frac{1}{2} l(2^2) = \frac{1}{2} l \frac{9}{4},$$

also reell befunden hatte, zu dem Endresultate kommt:

„Es ist richtig:

$$\int_{+2}^{+3} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} l \frac{9}{4}.$$

Dagegen ist

$$\int_{-2}^{+3} \frac{dx}{x} = l(+3) - l(-2)$$

imaginär, und bleibt in alle Ewigkeit imaginär."

Nun wenn diese Ewigkeit an den mancherlei, bereits abgelaufenen, bekannten Ewigkeiten ein gutes Beispiel sich nehmen wollte, so dürfte sie so gar lange wohl nicht mehr dauern.

Ihm entgegnete hierauf Herr Professor Schlömilch im 8. Bde. des Archivs, 1846, Literar. Ber. S. 436. 437., und wies ihm seinen Irrthum nach, indem er — worauf hier Alles ankommt — darlegte, dass allgemein

$$\int_{-a}^{+a}\frac{dx}{x}=0$$

ist; wobei freilich auch seine zwei Beweise noch eine genauere Sicherstellung bedürfen.

So wie er an diesen Stellen nur die begrenzten Integrale dieser Art berücksichtigte, eben so beweist er endlich die Giltigkeit auch für das allgemeine fragliche Integral in seinem „Handbuch der Differential- und Integral-Rechnung, 2. Thl., 1847., S. 6., 7.“ Allein auch da mangelt die unerlässliche vorläufige Nachweisung des Rechtes, die Lehre von den Logarithmen und das Rechnen mit ihnen, obwohl sie lediglich nur für absolute Logarithmande in der Algebra erwiesen werden, so geradezu auch auf negative Logarithmande ausdehnen zu dürfen.

§. 5.

Ausser den genannten haben die anderen neueren und neuesten mathematischen Schriftsteller über Integralrechnung diesen bedenklichen Punkt gar nicht berührt; selbst der um die Sammlung der analytischen Arbeiten Cauchy's verdiente Moigno (1844) begnügt sich mit der blossen Hinstellung des richtigen Integrals.

Vielleicht vermuthen Manche, es sei, wenn irgendwo eine Bedenklichkeit darüber eintreten sollte, leicht durch die Wahl der Integrationsconstante C abzuhelfen. In der That scheint es, als dürfe man, wenn die gewöhnliche Integrationsweise (1) angewendet wird, für negative Werthe von x, bei denen

$$\int\frac{dx}{x}=\mathrm{l}(-x)+C$$

wird, nur

$$\mathrm{l}(-x)=\mathrm{l}x+\mathrm{l}(-1)$$

setzen und $\mathrm{l}(-1)$ in die Constante C mit einbeziehen; oder wenn man die Integration (6) verwendet, bei welcher unter gleicher Annahme

$$\int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\frac{-x}{C}$$

wird, bloss die Constante C negativ nehmen.

Auch hilft dieses Mittel wirklich, wenn die Integration zwischen gleichstimmigen, und zwar — was hier allein zu erforschen bleibt — zwischen zwei negativen Grenzen zu vollziehen ist. Denn soll das Integral bei $x = -a$ anfangen, d. i. $=$ Null sein, so muss vermöge (1)

$$0 = \mathrm{l}(-a) + C = \mathrm{l}a + \mathrm{l}(-1) + C,$$

folglich

$$C = -\mathrm{l}a - \mathrm{l}(-1)$$

sein. Dann ist das unbegrenzte Integral

$$\int_{-a}^{x} \frac{dx}{x} = \mathrm{l}x - \mathrm{l}a - \mathrm{l}(-1).$$

Soll dieses bei $x = -b$ enden, so erfolgt, weil $\mathrm{l}(-b) = \mathrm{l}b + \mathrm{l}(-1)$ gesetzt werden darf, also $+\mathrm{l}(-1)$ mit $-\mathrm{l}(-1)$ sich aufhebt, das bestimmte Integral

$$(8) \qquad \int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = \mathrm{l}b - \mathrm{l}a = \mathrm{l}\frac{b}{a}$$

thatsächlich reell.

Will man, weil die Integrationsconstante bei diesem Hergange ohnehin herausfällt, sie nicht erst bestimmen, sondern einfach die Integrationsgrenzen einsetzen, so erhält man nach (1)

$$\int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = \mathrm{l}(-b) - \mathrm{l}(-a) = \mathrm{l}\frac{-b}{-a} = \mathrm{l}\frac{b}{a}.$$

Allein hier nimmt man überall stillschweigend an, dass man berechtiget sei, mit Logarithmen negativer Zahlen gerade so wie mit denen der positiven zu rechnen, was doch vorerst noch zu erweisen bleibt. Man umgeht diese Schwierigkeit — vielleicht auch nur scheinbar — wenn man nach (6)

$$\int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\frac{-b}{C} - \mathrm{l}\frac{-a}{C}$$

bestimmt und hierin die willkührliche Constante C, um nur positive Logarithmande zu erhalten, in $-C'$ verwandelt, wonach

$$\int_{-a}^{-b}\frac{dx}{x}=l\frac{b}{C'}-l\frac{a}{C'}=l\left(\frac{b}{C'}:\frac{a}{C'}\right)=l\frac{b}{a}$$

wie früher entfällt.

Nimmt man jedoch dieses Integral innerhalb ungleichstimmiger (entgegengesetzter) Grenzen, etwa nur von $-a$ bis $+b$, weil für die gegentheilige Integration von $+a$ bis $-b$, mit der Entgegensetzung der Grenzen, auch das Integral selbst nur entgegengesetzt zu nehmen kommt, folglich

$$\int_{+a}^{-b}\frac{dx}{x}=-\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x}$$

ist; so wird man von beiden Aushilfsmitteln verlassen. Denn gemäss der Integrationsweise (1) erhält man

$$\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x}=l(+b)-l(-a)=l\left(-\frac{b}{a}\right) \tag{9}$$

und nach der Integration (6) ist

$$\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x}=l\frac{+b}{C}-l\frac{-a}{C},$$

so dass man das Beziehungszeichen von C nie so wählen kann, dass beide Logarithmande positiv ausfallen; mithin ist das erwähnte begrenzte Integral nach dieser Darstellung sicher imaginär.

Allein ein begrenztes Integral, dessen Integrand für alle im Integrationsintervall gelegenen Werthe der Veränderlichen, wie im vorliegenden, reell bleibt, kann als Summe von lauter reellen Elementen nimmermehr imaginär ausfallen; mithin ist der zuletzt erhaltene imaginäre Betrag des in Rede stehenden Integrals gewiss unrichtig.

Sonach entsteht die Frage, wie alle erwähnten Widersprüche gründlich zu heben seien, und wie sofort die Integration für alle Fälle gültig durchgeführt werden müsse.

§. 6.

Hierbei muss vor Allem — was auch sonst immer, wenn es nothwendig ist, geschehen sollte, — die allgemeine Integration von der begrenzten sorgfältigst unterschieden werden.

Die allgemeine Integration ist nichts Anderes als der Rückschritt vom Differenziren, indem sie von einem Differential zu der als früher differenzirt vorausgesetzten Function zurückschreitet. Sie nimmt die Bestimmung des Grenzverhältnisses der gleichzeitigen Aenderungen zweier zusammenhängender Veränderlichen als früher geschehen an, und sucht von diesem Verhältnisse der Aenderungen zurückgehend den Zusammenhang jener Veränderlichen selbst, die Abhängigkeitsweise (Function) der einen von der andern wieder herzustellen.

Nun liegt es in dem Begriffe des Differenzirens und wird danach auch in den kritischeren Lehrbüchern über Differentialrechnung, wie in jenen von Cauchy und seiner Anhänger Grunert, Moigno und Schlömilch, noch insbesondere ausführlich erwiesen, dass das Differenziren nicht minder bei imaginären als bei reellen Functionen vollführt werden könne. Hiebei wird nun das Differential einer imaginären Function im Allgemeinen freilich wieder imaginär ausfallen, allein in besonderen Fällen kann es doch auch reell werden. Denn wenn u, v reelle Functionen von x vorstellen und die $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet wird, so ist die allgemeine Form einer imaginären Function dieser Veränderlichen

$$= u + iv,$$

daher ihr Differential

$$d(u + iv) = du + idv = \left(\frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}\right)dx.$$

Dieses wird nun, da $\frac{dv}{dx}$ nicht nothwendig jederzeit Null sein muss, sondern im Gegentheil gewöhnlich von Null verschieden sein wird, im Allgemeinen imaginär werden. Allein weil $\frac{dv}{dx}$ doch auch ausnahmsweise Null sein kann, dann nemlich, wenn die Function v nur annahmsweise nicht aber in der That von x abhängt, oder ein Ausdruck von x ist, aus dem bei zureichender Reduction diese Veränderliche gänzlich herausfällt; so kann das Differential einer imaginären Function doch auch zuweilen reell ausfallen.

Mithin kann auch umgekehrt das *allgemeine* Integral eines reellen Differentials gleichwohl imaginär sein.

Bei dem allgemeinen Integriren ist demnach ein Sichbeschränken auf reelle Integralformen allein ganz und gar ungegründet, sobald nur die Zulässigkeit des Rechnens mit solchen imaginären Formen in früheren Doctrinen gerechtfertigt worden ist.

Nun wird aber in der That in den Lehrbüchern über algebraische Analysis die Befugniss mit den imaginären Logarithmen negativer Zahlen wie mit den reellen Logarithmen positiver Zahlen zu rechnen ausdrücklich dargelegt; somit unterliegt es keinerlei Anstand von dem reellen Differential $\frac{dx}{x}$ das allgemeine Integral in der imaginären Form $l(-x)$ darzustellen, die als vieldeutig auch durch $l((-x))$ ausgedrückt werden kann. Denn indem man

$$\int \frac{dx}{x} = l((-x)) + C$$

setzt, erhält man bekannter Massen noch ferner, wenn man den absoluten Werth der Zahl x durch val. abs. x andeutet,

$$\int \frac{dx}{x} = l(\text{val. abs. } x) + l((-1)) + C$$

oder

$$= l(\text{val. abs. } x) + C + i(2r+1)\pi,$$

wo r eine positive oder negative Grenzzahl vorstellt. Verbindet man damit die Betrachtung, dass auch das für positive x geltende übliche Integral (9) in die ähnliche Form

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} &= l((+x)) + C \\ &= l(\text{val. abs. } x) + l((+1)) + C \\ &= l(\text{val. abs. } x) + i2r\pi + C \end{aligned}$$

gebracht werden kann; so lassen sich beide Integrale vereinen in der Form

$$(10) \qquad \int \frac{dx}{x} = l\,(\text{val. abs. } x) + C' + iC'',$$

wenn man die Constante C complex wählt und das Reelle von dem Imaginären scheidet. Und jedes dieser Integrale gibt differenzirt das zur Integration vorgelegt gewesene Differential $\frac{dx}{x}$.

Für die allgemeine Integration sind sonach auch die gekünstelten Gestaltungen (2) bis (5) des Integrals ohne Werth, weil sie ja alle bei genügender Reduction und bei der Ausscheidung des Constanten doch immer wieder auf die einfache Form (1) zurückgebracht werden können.

Hat man dann auch noch für jede reelle oder imaginäre Form

$$X = \varphi(x) + i\psi(x)$$

erwiesen, dass

$$dlX = \frac{dX}{X}$$

ist; so ist bei allgemeiner Integration auch

$$\int \frac{dX}{X} = lX + C;$$

wie z. B.

$$\int \frac{dx}{x-a \pm ib} = l(x-a \pm ib) + C,$$

wo jedoch die Constante C jederzeit als complex vorauszusetzen ist.

§. 7.

Bei der besonderen oder begrenzten Integration dagegen, wie sie bei der Auflösung zumeist geometrischer, mechanischer und physikalischer Aufgaben vorkommt, sucht man nicht sowohl aus dem gegebenen Differentialverhältnisse diejenige Function wieder zurück, welche differenzirt dieses Verhältniss liefert; sondern man frägt vielmehr nach der Summe — dem Integrum — sämmtlicher successiven Aenderungsbeträge, welche die gesuchte Function erfährt, während die Grundveränderliche von ihrer unteren Grenze zur oberen stetig vorschreitet, und welche einzeln nach Anweisung des zu integrirenden Differentials berechnet werden können. Mithin ist diese Rechnungsweise mit der allgemeinen Integration zwar im üblichen Namen verwandt, allein im Grundbegriffe, in der Tendenz und Ausführung, von ihr wesentlich verschieden.

Bei ihr sind die einzelnen schrittweisen, stetig in einander übergehenden Aenderungsbeträge, die unendlich kleinen Elemente der gesuchten Function, folglich auch die ihnen gleichgeltenden stetig successiven Werthe des Integrands, eben so wie die Veränderliche und ihre Function, durchweg reell zu denken. Um nach der Gauss'ischen Ansicht über die Realität der imaginären Grössen zu sprechen, während man bei der allgemeinen Integration auf einer ganzen unbegrenzten Ebene alle algebraischen Operationen ausführt, zieht man sich bei der begrenzten Integration auf eine einzige Gerade dieser Ebene zusammen. Auf dieser entfällt alles Seitliche (Laterale) — Imaginäre — und nur das Directe (das Geradaus) — das Reelle — bleibt verfügbar; alle Grössen, die beiden zusammenhängenden Veränderlichen, der Differentialcoefficient und das Integral, müssen in den Grenz- und Zwischenwerthen durchgehends reell sein, wenn anders ein solches Summirungsgeschäft der nach einander folgenden Aenderungsbeträge (Zusätze, Elemente) einen klaren Sinn, eine deutliche Auffassung, in der Wirklichkeit zulassen soll.

Mithin darf bei dem begrenzten Integriren kein Satz, der nur für das Rechnen mit reellen Zahlen erwiesen worden ist, ohne weiteres auch für imaginäre Zahlen gelten gelassen werden. Dieser in der höheren Analysis leider noch immer so häufig wahrnehmbare Fehler trägt auch bei der vorliegenden begrenzten Integration des Differentials $\frac{dx}{x}$ die Hauptschuld des eingeschlichenen Irrthums; weil man in ihr die imaginären Logarithmen negativer Zahlen zulässt und mit ihnen anstandslos rechnet, wogegen doch nur absolute logarithmische Grundzahlen, folglich auch nur positive Logarithmande, in den Voraussetzungen und in der algebraischen Lehre vom Logarithmiren zugestanden worden waren.

§. 8.

Nach Aufstellung dieser unbestreitbar richtigen leitenden Principien nehmen wir nun das fragliche Integral $\int \frac{dx}{x}$ nochmal, und zwar zur völligen Sicherstellung auf mehrere Weisen, zu integriren vor.

I. *Erstes Integrations-Verfahren*: Integration mittels unbestimmter Functionen.

Nehmen wir — was bekanntlich genügt — ein particuläres Integral des Differentials $\frac{dx}{x}$ in Betracht, dessen sonst arbiträre Constante hier eine bestimmte Zahl sein soll; so möge der vollständige Ausdruck dieses (particulären) Integrals, mit Einschluss seiner Constante, die dermalen noch unbestimmte Function $f(x)$, also das Integral

$$(11) \qquad \int \frac{dx}{x} = f(x)$$

sein.

Die Bestimmung dieser Function f kann nun auf folgende Weisen geschehen.

a). Erste Bestimmungsweise der Function $f(x)$. Setzen wir für x die Potenz x^n, in welcher der Exponent n jede reelle Zahl vorstellen, jedoch lediglich der reelle Werth der im Allgemeinen vieldeutigen Potenz berücksichtiget werden darf; so wird

$$\int \frac{d.x^n}{x^n} = f(x^n),$$

folglich wenn man differenzirt und reducirt

$$n \int \frac{dx}{x} = f(x^n).$$

Da hier $\int \frac{dx}{x}$ wieder das obige particuläre Integral $f(x)$ vorstellt, so bleibt es verstattet, auch hier dasselbe durch $f(x)$ zu ersetzen und somit erfolgt

$$(12) \qquad nf(x) = f(x^n)$$

als die eigentlich aufzulösende Functionalgleichung.

Um darin die zwei Veränderlichen x und n zu schneiden, sei

$$x^n = z$$

eine neue Veränderliche, und nehmen wir beiderseits die natürlichen Logarithmen. Dann fordert die — ja nicht zu übersehende — Bedingung, dass x und z zwar reell sein sollen, aber gleich wohl eben so gut negativ als positiv sein können, und die Grundbedingung, dass bei durchgängig reellem Rechnen die Logarithmande, gleich den logarithmischen Grundzahlen, nur positiv — oder vielmehr irrelativ (absolut) — gedacht werden können, die unabweisliche Vorbereitung, beide letzten gleichen Zahlen zu einer geraden Potenz, also am einfachsten zur möglich niedersten, d. i. zur zweiten Potenz, zu erheben, also auf

$$(x^n)^2 = z^n$$

zu übergehen. Da bei der ersten Potenzirung, selbst wenn der Exponent n gebrochen oder irrational sein sollte, nur mehr der reelle Werth zu berücksichtigen bleibt, so ist, zufolge der algebraischen Lehren von den Wurzeln und den Potenzen mit gebrochenen Exponenten, die Verwechslung der vorgeschriebenen zwei nach einander folgenden Potenzirungen gestattet, mithin auch

$$(x^2)^n = z^2.$$

Hier nun, wo beide zu logarithmirenden Zahlen positiv sind, dürfen wir mit vollem Recht logarithmiren und erhalten sofort

$$n\mathrm{l}(x^2) = \mathrm{l}(z^2).$$

Obige Functionalgleichung (12) übergeht aber durch die Einführung der z in

$$nf(x) = f(z),$$

folglich, durch die vorangehende Gleichung getheilt, verwandelt sie sich in

$$\frac{f(x)}{\mathrm{l}(x^2)} = \frac{f(z)}{\mathrm{l}(z^2)}$$

wo nun — wie beabsichtiget — die x und z von einander geschieden sind. Da diese beiden Veränderlichen von einander unabhängig sind, so erheischt die letzte Gleichheit, dass beide gleichen

Verhältnisse eine und dieselbe von x und z unabhängige Zahl, z. B. A, seien, folglich

$$\frac{f(x)}{l(x^2)}=A$$

sei. Dann ergibt sich die gesuchte Function

$$(13) \qquad f(x)=A l(x^2).$$

Zur Bestimmung der noch in Frage bleibenden Constante A bemerken wir, dass die Function $f(x)$, vermöge der Gleichung (11) an die Bedingung gebunden ist, dass ihr Differential dem Integrand $\frac{dx}{x}$ gleiche, also auch, dass ihr Differentialverhältniss $f'(x)$ dem Differentialcoefficienten $\left(\frac{1}{x}\right)$ dieses Integrands gleich, nemlich

$$(14) \qquad f'(x)=\frac{1}{x}$$

sei. Wie berechnet man aber hier $f'(x)$ oder $\frac{dl(x^2)}{dx}$?

Es kann nemlich nicht erlaubt sein, wofern unsere Rechnungen stets auf dem Boden der reellen Zahlen sich bewegen sollen, $l(x^2)$ in $2lx$ aufzulösen und danach lx in üblicher Weise zu differenziren, weil ja für ein negatives x der lx imaginär entfiele. Wir müssen also nach der allgemeinen Formel

$$\frac{dlu}{dx}=\frac{dlu}{du}\frac{du}{du}$$

differenziren, in welcher der Logarithmand u eine stets positiv bleibende Function von x vorstellt. Da erhalten wir nun ohne Anstand für $u=x^2$

$$\frac{dlu}{du}=\frac{1}{u}=\frac{1}{x^2}$$

und

$$\frac{du}{dx}=2x,$$

folglich

$$\frac{dl(x^2)}{dx}=\frac{1}{x^2}.2x=\frac{2}{x}.$$

Mithin ist

$$f'(x) = A\frac{d\mathrm{l}(x^2)}{dx} = A\frac{2}{x}.$$

und nach obiger Bedingung (14)

$$A\frac{2}{x} = \frac{1}{x}.$$

Da hier x eine beliebige reelle Veränderliche ist, so muss

$$2A = 1,$$

also

$$A = \frac{1}{2}$$

sein.

Substituiren wir nun diesen Werth in (13), so finden wir die gewünschte Function

$$(15) \qquad f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{l}(x^2),$$

und wenn wir sie in den Ausdruck (11) einführen und zugleich von diesem particulären Integrale auf das vollständige Integral übergehen, finden wir für dieses

$$(16) \qquad \int\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\mathrm{l}(x^2) + C.$$

§. 9.

b). Zweite Bestimmungsweise der Function $f(x)$. Setzen wir in der Gleichung (11) für x das Product uv zweier entweder von einander unabhängigen oder, wenn man lieber will, von einer dritten freien Veränderlichen t zugleich abhängenden reellen Factoren u und v, so übergeht sie in

$$\int\frac{d.uv}{uv} = f(uv).$$

Differenzirt und theilt man, so erfolgt

$$\int\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v}\right) = f(uv),$$

und insofern es gestattet ist, u und v zugleich als Functionen von t anzusehen und sofort die gliederweise Integration vorzunehmen,

$$\int\frac{du}{u}+\int\frac{dv}{v}=f(uv),$$

daher wegen der vorausgesetzten Particularität des Integrals (11)

$$f(u)+f(v)=f(uv).$$

Diese Functionalgleichung in bekannter elementarer Weise (z. B. nach Cauchy Cours d'analyse, 1821, Chap. V. §. 1. Probl. 3.) aufgelöst gibt, jedoch blos für positive Werthe von u und v,

$$f(u)=Alu,$$

worin A constant ist.

Setzt man hierin, weil x eben so wohl negativ als positiv sein kann, eine stets positiv ausfallende gerade, also am einfachsten die zweite, Potenz derselben für u, nemlich $u=x^2$, so ist

$$f(x^2)=Al(x^2).$$

Nun gibt die Gleichung (11), wenn man x in x^2 umsetzt,

$$\int\frac{d.x^2}{x^2}=f(x^2),$$

folglich

$$f(x^2)=\int\frac{2xdx}{x^2}=2\int\frac{dx}{x}$$

und gemäss eben dieser Gleichung (11), weil in ihr $f(x)$ ein particuläres Integral von $\frac{dx}{x}$ vorstellt,

$$f(x^2)=2f(x).$$

Sofort ist

$$2f(x)=Al(x^2)$$

und

$$f(x)=\frac{A}{2}l(x^2).$$

Für die Ermittelung der noch unbestimmten Constante A dient wieder die Bedingung (11) und die ihr daselbst folgende Differentiation, und demgemäss ist

$$\frac{1}{x}=\frac{A}{2}\cdot\frac{dl(x^2)}{dx}=\frac{A}{2}\cdot\frac{2}{x}=\frac{A}{x},$$

mithin, da diese Gleichung für alle reellen Werthe von x identisch sein soll, findet man

$$A=1,$$

und wieder wie früher

$$f(x)=\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,(x^2), \tag{15}$$

und sonach das dortige vollständige Integral (16).

§. 10.

II. *Zweites Integrations-Verfahren.* **Integration durch Substitution.**

Bezeichnen wir, zur Abkürzung, das gesuchte Integral durch y, setzend

$$y=\int\frac{dx}{x}$$

und nehmen wir uns vor, einen Logarithmus der Veränderlichen x einer neuen Veränderlichen gleich zu stellen; so ist es, weil x nicht blos positiv, sondern auch negativ sein kann, keineswegs gestattet, geradezu von x selbst den Logarithmen zu nehmen, wohl aber von ihrer zweiten Potenz, x^2, weil diese jedenfalls positiv, also logarithmirbar ausfällt. Setzen wir demnach, natürliche Logarithmen anwendend,

$$\mathrm{l}(x^2)=z;$$

so ist, wenn e die Grundzahl solcher Logarithmen vorstellt,

$$x^2=e^z.$$

Dies differenzirt liefert

$$2x.dx=e^z.dz,$$

und wenn man dividirt und noch halbirt

$$\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}dz.$$

Somit wird

$$y=\frac{1}{2}\int dz=\frac{1}{2}z+C,$$

daher, wenn man zurück substituirt

$$y = \frac{1}{2} l(x^2) + C,$$

und wie oben

$$(16) \qquad \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} l(x^2) + C.$$

§. 11.

III. *Drittes Integrationsverfahren.* **Individualisirung eines generellen Integrals.**

Schreiben wir das gesuchte Integral, indem wir $\frac{1}{x}$ als die Potenz x^{-1} darstellen, in der Form

$$y = \int x^{-1}.dx,$$

so ist selbes ein individueller Fall des bekannten generellen Integrals

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

für den individuellen Werth $n+1=0$ oder $n=-1$.

Um diesen zu ermitteln, weil der Bruch $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, wenn man so geradehin $n+1=0$ setzen wollte, die unbestimmte Form $\frac{x^0}{0} = \frac{1}{0}$ annehmen würde, schlage ich folgendes Verfahren ein, das ich bisher nirgends verwendet gefunden habe.

Iste Bestimmungsweise. Ich sehe 0 als den Grenzwerth der Veränderlichen $n+1$ an, wonach x^{n+1} der Grenze 1 zustrebt; und benütze die bekannte Erlaubniss, dem veränderlichen Theile jedes Integrals eine beliebige Constante zu addiren oder zu subtrahiren, indem ich von x^{n+1} seinen Grenzwerth 1 abziehe, folglich setze

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}-1}{n+1} + C.$$

Um die Schreibung zu vereinfachen, mache ich

$$n+1=m, \quad \text{also} \quad n=m-1$$

und erhalte

$$\int x^{m-1}dx = \frac{x^m - 1}{m} + C.$$

Zum Uebergang auf das Integral $\int x^{-1}dx$ lasse ich nun die Zahl m der Grenze 0 stetig zueilen oder unendlich abnehmen; daher finde ich

$$\lim_{m=0}\int x^{m-1}dx = \lim_{m=0}\frac{x^m - 1}{m} + C,$$

oder weil die erstere Grenze

$$= \int x^{\lim m-1}.\,dx = \int x^{-1}dx = \int\frac{dx}{x}$$

ist,

$$\int\frac{dx}{x} = \lim_{m=0}\frac{x^m - 1}{m} + C.$$

Nun ist aber bekanntlich, wenn a eine positive von ω unabhängige Zahl vorstellt,

$$\lim_{\omega=0}\frac{a^\omega - 1}{\omega} = \mathrm{l}a.$$

Allein in x^m ist x hier nicht blos positiv, sodern auch negativ, daher darf man diese Grenzform nicht geradehin verwenden. Wohl aber ist x^2 jedenfalls positiv. Setze ich demnach $a = x^2$, so ist $a^\omega = x^{2\omega}$. Wähle ich ferner $2\omega = m$, also $\omega = \frac{m}{2}$; so ist $a^\omega = x^m$ und zugleich mit $\lim m = 0$ auch $\lim\omega = 0$. Sohin erfolgt anstandslos

$$\lim_{m=0}\frac{x^m - 1}{m} = \lim_{\omega=0}\frac{a^\omega - 1}{2\omega} = \frac{1}{2}\lim_{\omega=0}\frac{a^\omega - 1}{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}a = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(x^2),$$

und daher wie früher

$$(16)\qquad \int\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(x^2) + C.$$

§. 12.

2te Bestimmungsweise. Gewöhnlich hat man bisher, die vorher erwähnte Erlaubniss benützend, von x^{n+1} die gleichhohe Potenz einer beliebigen beständigen Zahl b, also b^{n+1}, abgezogen folglich

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1} - b^{n+1}}{n+1} + C.$$

angenommen, dann, weil der entstandene Bruch für $n+1=0$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt, seinen Zähler und Nenner einzeln nach n differenzirt und hierin erst $n+1=0$ gesetzt.

Allein

$$\frac{d(x^{n+1} - b^{n+1})}{dn} = \frac{d(x^{n+1})}{dn} - \frac{d(b^{n+1})}{dn}$$

darf man, weil Alles reell bleiben muss, keineswegs wie gewöhnlich so differenziren, dass man ohne weiteres

$$\frac{d.x^{n+1}}{dn} = x^{n+1}.\mathrm{l}x, \quad \frac{d.b^{n+1}}{dn} = b^{n+1}.\mathrm{l}b$$

setzt. Denn die bekannte Ableitung

$$\frac{d.a^x}{dx} = a^x \mathrm{l}a$$

bedingt für lauter reelle Zahlen, dass in der Exponentiellen a^x die Grundzahl a positiv sei.

Um daher die Exponentiellen x^{n+1}, b^{n+1} auf positive Grundzahlen zurückzuführen, setzen wir $n+1=2m$, folglich

$$x^{n+1} = x^{2m} = (x^2)^m \quad \text{und} \quad b^{n+1} = b^{2m} = (b^2)^m,$$

wonach

$$\int x^n dx = \frac{(x^2)^m - (b^2)^m}{2m} + C$$

wird. Differenziren wir demnach Zähler und Nenner des letzten Bruches nach der mit $n+1$ zugleich verschwindenden Veränderlichen m, so erhalten wir

$$\int x^n dx = \frac{(x^2)^m \mathrm{l}(x^2) - (b^2)^m \mathrm{l}(b^2)}{2} + C$$

giltig für

$$n = -1 \quad \text{und} \quad m = 0;$$

daher nach wirklich vollzogener Substitution

$$\int x^{-1} dx = \frac{\mathrm{l}(x^2) - \mathrm{l}(b^2)}{2} + C.$$

Wenn man endlich die Constante $-\frac{1}{2}\mathrm{l}(b^2)$ in die Constante der Integration mit einbegreift, so erhält man wieder das Integral (16).

Schlussergebniss der Integration. Nach dieser sorgsam sichtenden Beweisführung kann daher, wenn durchweg mit reellen Zahlen gerechnet werden soll, was bei dem s. g. begrenzten oder bestimmten Integriren jederzeit geschehen muss, lediglich blos

$$(16) \qquad \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\mathrm{l}(x^2) + C$$

gesetzt werden.

§. 13.

Wenden wir uns nunmehr zu den begrenzten Integralen, so gewahren wir auf der Stelle, dass in dem vorliegenden Integral (16) sowohl der Differentialcoefficient $\frac{1}{x}$ als auch der Integralausdruck $\frac{1}{2}\mathrm{l}(x^2)$ für $x=0$ unstetig, namentlich $=\pm\infty$ wird; weswegen die gewöhnliche Ermittelung des Werthes eines solchen Integrals in denjenigen Fällen, wo $x=0$ im Intervall der Integrationsgrenzen liegt, folglich diese Grenzen algebraisch entgegengesetzt sind, unstatthaft wird, und wir daher zur ursprünglichen und eigentlichen Bedeutung des begrenzten Integrals unsere Zuflucht nehmen müssen. Nach dieser Bedeutung gilt nun bekanntlich, wenn das begrenzte Integral

$$\int_{x_0}^{X} \varphi(x)dx$$

kurz mit J bezeichnet, der Grenzenunterschied $X-x_0$ in eine, des unendlichen Wachsthums fähige, Anzahl (n) gleicher Theile, deren jeder $=\varepsilon$ sein soll, getheilt gedacht wird, so dass

$$\frac{X-x_0}{n} = \varepsilon$$

und

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon = 0$$

ist, der Ausdruck

$$J=\int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx=\lim_{n=\infty}.\varepsilon[\varphi(x_0)+\varphi(x_0+\varepsilon)+\varphi(x_0+2\varepsilon)+\ldots$$
$$\ldots+\varphi(x_0+\overline{n-1}\varepsilon)]$$
$$=\lim_{n=\infty}.\varepsilon\sum_{r=0}^{r=n-1}\varphi(x_0+r\varepsilon),$$

vorausgesetzt, dass $\varphi(x)$ von $x=x_0$ bis $x=X$ seine Stetigkeit nicht einbüsst.

§. 14.

Um aber für den, gerade in der vorliegenden Frage in Anregung kommenden, Fall der Unterbrechung dieser Stetigkeit das Erforderliche vorzukehren, ändern wir beide Grenzen x_0, X in die algebraisch entgegengesetzten $-x_0$, $-X$ ab, und bezeichnen das entstehende Integral durch J', so dass

$$J'=\int_{-x_0}^{-X}\varphi(x)dx$$

ist. Um wieder auf die früheren Grenzen zurückzukehren, setzen wir

$$x=-z,\quad dx=-dz,\quad z=-x;$$

wonach für

$$x=-x_0 \text{ die } z=x_0$$

und für

$$x=-X \text{ die } z=X$$

entfällt. Demgemäss wird

$$J'=-\int_{x_0}^{X}\varphi(-z)\,dz,$$

oder wenn wir — was erlaubt ist — die Veränderliche z wieder durch x ersetzen,

$$-J'=\int_{x_0}^{X}\varphi(-x)dx,$$

und somit nach dem oben in (17) aufgestellten Ausdrucke

$$(18) \qquad -J' = \lim_{n=\infty} . \varepsilon \{ \varphi(-x_0) + \varphi[-(x_0+\varepsilon)] + \varphi[-(x_0+2\varepsilon)] + \ldots$$
$$\ldots + \varphi[-(x_0 + \overline{n-1}\varepsilon)] \}$$
$$= \lim_{n=\infty} . \varepsilon \sum_{r=0}^{r=n-1} \varphi[-(x_0+r\varepsilon)] .$$

Addiren wir sofort die beiden Ausdrücke (17) und (18), so ergibt sich

$$(19) \qquad J - J' = \lim_{n=\infty} . \varepsilon \sum_{r=0}^{r=n-1} \{ \varphi(x_0+r\varepsilon) + \varphi[-(x_0+r\varepsilon)] \} .$$

So oft aber die Function $\varphi(x)$, wie eben im vorschwebenden Falle, wo

$$(20) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{x}$$

ist, so geartet ist, dass

$$(21) \qquad \varphi(-x) = -\varphi(x)$$

sich ergibt, also

$$(22) \qquad \varphi(x) + \varphi(-x) = 0$$

wird, so muss auch der allgemeine Summand

$$\varphi(x_0+r\varepsilon) + \varphi[-(x_0+r\varepsilon)] = 0$$

werden, d. i. die gleichvielten Elemente

$$\varepsilon\varphi(x_0 + r\varepsilon) \text{ und } \varepsilon\varphi[-(x_0+r\varepsilon)]$$

der zwei Integrale J und $-J'$ müssen gleich, aber entgegengesetzt ausfallen, mithin summirt sich wechselseitig ganz aufheben. Da überdies beide Integrale oder Summen gleichviel Glieder enthalten, so müssen sie vereint sich gänzlich vernichten, folglich streng giltig

$$J - J' = 0$$

sein.

Sonach ist

$$J = J',$$

nemlich

$$(23) \qquad \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx = \int_{-x_0}^{-X} \varphi(x)\,dx .$$

so oft die Function $\varphi(x)$ eine der einander gleichgeltenden Beschaffenheiten (21) und (22) besitzt.

§. 15.

Nachdem wir diese wichtigen Sätze über die Ermittelung der Werthe ins Gedächtniss zurückgerufen haben, kehren wir zu unserem Integral zurück, particularisiren die Gleichung (23) nach der Annahme (20), und erhalten sofort vollkommen richtig

$$(24) \qquad \int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x} = \int_{-x_0}^{-X} \frac{dx}{x}.$$

Seien a, b gewisse Absolutzahlen und setzen wir

$$x_0 = +a, \quad X = +b;$$

also

$$-x_0 = -a, \quad -X = -b;$$

so erfolgt

$$(25) \qquad \int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = \int_{+a}^{+b} \frac{dx}{x}.$$

Bei einstimmigen Grenzen ist daher der Werth des begrenzten Integrals von $\frac{dx}{x}$ der nemliche, mögen die Grenzen beide positiv oder beide negativ sein.

Weil hier die Auswerthung des Integrals durch den gewöhnlichen Uebergang vom allgemeinen Integral zum begrenzten geschehen darf, da im Grenzenintervall weder der Differentialcoefficient noch das Integral die Stetigkeit verliert; so erhält man vermöge des Integralausdruckes (16) anstandslos

$$(26) \qquad \int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = \int_{+a}^{+b} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{l}(b^2) - \frac{1}{2} \mathrm{l}(a^2) = \frac{1}{2} \mathrm{l}.\left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

§. 16.

Um aber das, dem bekannten Anstande unterliegende, **Integral mit entgegengesetzten Grenzen** zu ermitteln, setzen wir, indem wir abermals a und b absolute Zahlen bedeuten lassen, in (28)

$$x_0 = +a, \quad X = -b$$

und erhalten

$$(27) \qquad \int_{+a}^{-b} \frac{dx}{x} = \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x},$$

woraus erhellet, dass es hinreichen werde, nur das zweite Integral mit negativer unterer Grenze zu bestimmen.

Ist nun

$$a > b, \quad \text{also} \quad -a < -b,$$

so ist das noch zu ermittelnde Integral

$$(28) \qquad \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} + \int_{-b}^{+b} \frac{dx}{x},$$

insofern $-b$ zwischen $-a$ und $+b$ liegt.

Ist aber

$$a < b,$$

so findet man für dasselbe Integral

$$(29) \qquad \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} + \int_{+a}^{+b} \frac{dx}{x},$$

weil hier $+a$ zwischen $-a$ und $+b$ liegt.

Es kann demnach jedes Integral mit entgegengesetzten Grenzen auf eines mit gleichstimmigen im Allgemeinen ungleichen Grenzen und auf eines mit entgegengesetzten aber gleichen Grenzen zurückgebracht werden. Da ersteres nach §. 15. berechnet werden kann, so frägt es sich nur noch um das letztere, nemlich um

$$(30) \qquad \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x},$$

weswegen wir dieses umständlich feststellen müssen.

§. 17.

Die Gleichung (25) verwandelt sich, wenn wir den zweiten Theil in den ersten übertragen und anstatt seiner Zeichenänderung die bekanntlich da zulässige Umstellung seiner Grenzen vornehmen, in

$$\int_{-a}^{-b}\frac{dx}{x}+\int_{+b}^{+a}\frac{dx}{x}=0.$$

Addiren wir hiezu beiderseits

$$\int_{-b}^{+b}\frac{dx}{x},$$

so gibt, weil die Integrationsgrenzen $-a$, $-b$; $-b$, $+b$; $+b$, $+a$ an einander hangen, die Summirung in bekannter Weise

$$(31)\qquad \int_{-a}^{+a}\frac{dx}{x}=\int_{-b}^{+b}\frac{dx}{x}.$$

Nun ist jedes begrenzte Integral eine Function seiner Grenzen, mithin haben vermöge dieser Gleichheit die entgegengesetzt gleichen Grenzen bei dem fraglichen Integral keinen Einfluss auf den Werth des begrenzten Integrals; und sonach ist dieser Werth eine constante Zahl, die wir mit A bezeichnen wollen, so dass

$$(32)\qquad \int_{-a}^{+a}\frac{dx}{x}=A$$

von a ganz und gar unabhängig sein soll.

Von der Richtigkeit der Gleichung (31) kann man sich auch auf folgende Weise überzeugen. Setzt man im Integral (30)

$$\frac{x}{a}=\frac{z}{b},$$

unter z eine neue Veränderliche und unter b eine neue ganz beliebige Beständige verstehend; so ist

$$\frac{dx}{a}=\frac{dz}{b},\quad \text{also}\quad \frac{dx}{x}=\frac{dz}{z},$$

und für

$$x = \pm a \quad \text{wird} \quad z = \pm b;$$

folglich findet man

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = \int_{-b}^{+b} \frac{dz}{z},$$

welches wieder die Gleichung (31) ist, da die Bezeichnung der Veränderlichen im begrenzten Integral gleichgiltig ist.

§. 18.

Zur Bestimmung der in Frage gestellten, für unsere Untersuchung höchst wichtigen constanten Zahl A dienen nun mehrerlei Vorgänge.

1ste Bestimmungsweise von A. Da a in (32) willkürlich sein kann, so ist es wohl sehr natürlich, die Annahme $a = 0$ zu versuchen, bei welcher sicher richtig

$$(33) \qquad A = \int_{-0}^{+0} \frac{dx}{x}$$

ist, und nur noch zu entscheiden bleibt, welchen Werth $\int_{-0}^{+0} \frac{dx}{x}$ habe.

Nun setzen Cauchy, Navier, Duhamel und Schlömilch in ihren Untersuchungen über die begrenzten Integrale der unstetig werdenden Differentialformeln, stillschweigend, und ohne zwischen -0 und $+0$ zu unterscheiden, dieses Integral geradezu gleich Null. Jeder kritische Analytiker weiss aber recht wohl, dass diese Unterscheidung zwischen -0 und $+0$ nicht überall ohne weiteres unterlassen werden darf, mögen auch minder sorgsame Rechner solche Distinction — um einen gegen mich gerichtet gewesenen tadelnden Ausdruck eines bereits verewigten mathematischen Collegen zu gebrauchen — eine müssige Haarspalterei zu nennen belieben.

Man kann sich hievon leicht überzeugen, wenn man in (33)

$$x = -\frac{1}{v}, \text{ also } dx = \frac{1}{v^2} dv,$$

und für

$$x = \pm 0 \quad \text{sofort} \quad v = -\frac{1}{x} = \mp \infty$$

setzt. Da erfolgt auf der Stelle

$$(34)\qquad A=\int_{-0}^{+0}\frac{dx}{x}=-\int_{+\infty}^{-x}\frac{dv}{v}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x}.$$

Während also im ersten Integrale die Integrationsgrenzen zusammenfallen, liegen sie im letzten über alle Massen weit aus einander. Ueber die letztere Bedenklichkeit lässt sich aber doch gewiss nicht so unbekümmert hinweggehen.

Eine andere Bedenklichkeit tritt hier der Entscheidung entgegen, wenn man das Integral (33) nach der Formel (17) zu bestimmen versucht. Denn da ist

$$x_0=-0,\quad X=+0,\quad \text{also}\quad \varepsilon=+0,$$

allein

$$\varphi(x_0)=\frac{1}{x_0}=\frac{1}{-0}=-\infty$$

und

$$\varphi(-x_0)=\frac{1}{-x_0}=\frac{1}{+0}=+\infty,$$

folglich die zu summirenden Elemente $\varepsilon\varphi(x_0)$ und $\varepsilon\varphi(-x_0)$ unbestimmt gross, und die, dem begrenzten Integral gleiche, Summengrenze nicht mit entschiedener Sicherheit angebbar.

2te Bestimmungsweise. Da in dem gesuchten Integral A die Grenze a gleichgiltig ist, so setzen wir zur Vereinfachung der Rechnungen $a=1$, und beschäftigen uns daher mit dem, auch von Cauchy (im Résumé p. 95.) erforschten, Integral

$$(35)\qquad A=\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}.$$

Hierin setzen wir

$$x=u^n,$$

vorläufig n willkührlich constant denkend. Dann ist

$$dx=nu^{n-1}du,$$

also

$$\frac{dx}{x}=n\frac{du}{u}.$$

Ferner weil $u=x^{\frac{1}{n}}$ ist, so muss zu $x=\pm1$ die $u=(\pm1)^{\frac{1}{n}}$ gehören. Da nun sehen wir uns aufgefordert die Zahl n zu wählen, und finden sogleich, dass wir jeder Zweideutigkeit ausweichen, wenn wir $\frac{1}{n}$ eine **ungerade** Zahl sein lassen. Setzen wir daher $\frac{1}{n}=2r+1$, indem wir $\pm r=0, 1, 2, ..$ bedingen; so erhalten wir die Integrationsgrenzen $u=\pm 1$, folglich nach vollzogenen Substitutionen

$$A=\frac{1}{2r+1}\int_{-1}^{+1}\frac{du}{u}=\frac{1}{2r+1}A.$$

Hieraus finden wir jedoch sogleich

$$2r.A=0,$$

mithin da $2r$ nicht allein Null, sondern auch jede (positive oder negative) gerade Zahl vorstellen kann, mit Sicherheit

$$A=0.$$

Wählen wir noch vorsichtsweise für $\frac{1}{n}$ eine **gerade** Zahl $2r$, so ist $x^{2r}=u$ sicher positiv,

$$2rx^{2r-1}dx=du,$$

daher

$$2r.\frac{dx}{x}=du,$$

und für $x=\pm 1$ jedenfalls die $u=+1$, folglich

$$A=\frac{1}{2r}\int_{+1}^{+1}du=\frac{1}{2r}(+1-(+1))=0.$$

Also auch da finden wir $A=0$.

3te Bestimmungsweise. Benützen wir wieder die in §. 10. schon gebrauchte Substitution, so erhalten wir für $x=\pm a$ die $z=l(a^2)$, daher allgemein

$$\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\int dz=\frac{1}{2}z,$$

folglich begrenzt

$$A=\frac{1}{2}\int_{l(a^2)}^{l(a^2)}dz=\frac{1}{2}[l(a^2)-l(a^2)]=0.$$

4te Bestimmungsweise. Setzen wir in dem Ausdrucke (17) $x_0=-a$, $X=+a$ und $n=2m$, theilen wir nemlich jede Halbscheid des Intervalls der Integrationsgrenzen in m gleiche Theile; so wird ein solcher Theil

$$\frac{2a}{2m}=\frac{a}{m}=\varepsilon,$$

folglich

$$J=\int_{-a}^{+a}\varphi(x)\,dx=\lim_{m=0}.\varepsilon\sum_{r=0}^{r=2m}\varphi(-a+r\varepsilon).$$

Nehmen wir die von der unteren und oberen Grenze an gezählten gleichvielten ($k$ten) Elemente zusammen, so ist für jenes Element $x=-a+k\varepsilon$, für dieses $x=+a-k\varepsilon$; daher erfolgt

$$J=\int_{-a}^{+a}\varphi(x)dx=\lim_{m=0}.\varepsilon\sum_{k=0}^{k=m}[\varphi(-a+k\varepsilon)+\varphi(a-k\varepsilon)].$$

Ist aber die Function $\varphi(x)$ insbesondere von der in (22) angedeuteten Eigenschaft, so heben sich jede zwei solche gleichstellige Summanden, wie gross oder klein sie auch sein mögen, ja selbst wenn sie gleichzeitig und gleichen Schrittes ins Unendliche steigen würden, vollständig auf, und folglich annullirt sich auch die ganze Summe. Das fragliche begrenzte Integral wird sonach

$$J=\int_{-a}^{+a}\varphi(x)dx=0,$$

wofern

$$(22)\qquad \varphi(x)+\varphi(-x)=0$$

ist.

Nun ist aber in dem zu ermittelnden Integral A

$$(23)\qquad \varphi(x)=\frac{1}{x},$$

also die Bedingung (22) erfüllt, mithin ist auch nach dieser Bestimmung

$$A=\int_{-a}^{+a}\frac{1}{x}dx=0.$$

Schlussfassung. Und so wäre denn streng erhärtet, dass, welchen Werth auch die Grenze a haben möge, jedes zwischen gleichen entgegengesetzten Grenzen genommene Integral der vorliegenden Art gleich Null, nemlich

$$(36) \qquad \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = 0$$

sein muss.

§. 19.

Wenden wir dieses wichtige Ergebniss auf die Integrale (28) und (29) an, so erhalten wir

$$(37) \qquad \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = \int_{+a}^{+b} \frac{dx}{x},$$

d. h.: Entgegengesetzte Grenzen dieses Integrals können durch Abänderung des Vorzeichens der einen oder der anderen Grenze gleichstimmig gemacht werden.

Und danach lässt sich die Auswerthung dieses begrenzten Integrals, durch Einsatz der Grenzen in das richtige allgemeine Integral

$$(16) \qquad \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \, l(x^2) + C$$

ohne Anstand bewerkstelligen.

Hält man sofort die Integrale (26), (27) und (37) zusammen, so findet man für alle möglichen viererlei Zeichenstellungen der Integrationsgrenzen

$$(38) \quad \int_{+a}^{+b} \frac{dx}{x} = \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \int_{+a}^{-b} \frac{dx}{x} = \int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \, l\left(\frac{b^2}{a^2}\right),$$

und insbesondere für $b=0$ wieder wie früher

$$(36) \qquad \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = \int_{+a}^{-a} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \, l1 = 0.$$

Hieraus leuchtet ein, dass der Werth dieses begrenzten Integrals keineswegs von den algebraischen Beziehungen (der Positivität oder Negativität), sondern lediglich von den absoluten Werthen seiner Grenzen abhängt.

Demgemäss lässt sich dieses begrenzte Integral nicht allein nach dem von Cauchy richtig angegebenen allgemeinen Integrale (16), sondern auch nach der von mir aufgestellten allgemeinen Integrationsweise

$$(10)\qquad \int\frac{dx}{x}=\mathrm{l}\,(\text{val. abs. } x)+C'+iC''$$

genau auswerthen, indem man nach der letzteren

$$(39)\qquad \int_{\pm a}^{+b}\frac{dx}{x}=\int_{\pm a}^{-b}\frac{dx}{x}=\mathrm{l}\,\frac{b}{a},$$

oder, wofern x_0 und X positive oder negative Zahlen vorstellen,

$$(40)\qquad \int_{x_0}^{X}\frac{dx}{x}=\mathrm{l}\,\frac{\text{val. abs. } X}{\text{val. abs. } x_0}$$

findet.

Auf diese Weise ist demnach z. B. das in §. 4. citirte Integral

$$(41)\qquad \int_{-2}^{+3}\frac{dx}{x}=\int_{-2}^{-3}\frac{dx}{x}=\int_{+2}^{-3}\frac{dx}{x}=\int_{+2}^{+3}\frac{dx}{x},$$

entweder nach (38)

$$=\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{9}{4},$$

oder nach (39)

$$=\mathrm{l}\,\frac{3}{2}.$$

§. 20.

Sehen wir zum Ueberflusse oder vielmehr zur Beseitigung jedes Zweifels noch nach, ob und wienach diese völlig richtig gestellten Rechnungsergebnisse auch noch mit geometrischen Betrachtungen im Einklang stehen, welcher Prüfstein insgemein für den schärfsten gehalten wird.

Dazu lassen wir in dem bekannten allgemeinen Integralausdrucke des Flächeninhaltes einer von einem ebenen Curvenbogen und den rechtwinkligen Coordinaten seiner Grenzpunkte begrenzten Figur

$$(42)\qquad \mathfrak{f}=\int_{x_0}^{X} y\,dx$$

diese Curve eine gleichaxige Hyperbel $GHH'G'$ (Taf. I. Fig. 1.) von der sogenannten Potenz k^2, folglich, für $OP=x$ und $PM=y$,

$$y=\frac{k^2}{x}$$

sein, wonach allgemein

$$(42)\qquad \mathfrak{f}=k^2\int_{x_0}^{X}\frac{dx}{x}$$

erfolgt.

I. Lassen wir zuvörderst beide Integrationsgrenzen positiv sein, dehnen wir nemlich die Fläche $\mathfrak{f}$ von $x=x_0=OA=+a$ und $y=AB$ bis $x=X=OC=+b$ und $y=CD$ aus, wo

α) als Urfall $b>a$ sein soll, so erhalten wir nach (42) und (38) die Fläche

$$(43)\qquad ABDCA=\mathfrak{f}_1=k^2\int_{+a}^{+b}\frac{dx}{x}=+\frac{1}{2}k^2.\mathrm{l}\left(\frac{b^2}{a^2}\right),$$

wobei wir — hier und im Folgenden — um das betreffende algebraische Beziehungszeichen dem Endausdrucke mit Entschiedenheit vorschreiben zu können, den Logarithmand jederzeit >1 machen. Dagegen erfolgt

β) wenn $b<a$, nemlich $X=b=OE<OA$ ist, die Fläche

$$(44)\qquad ABFEA=\mathfrak{f}_2=k^2\int_{+a}^{+b}\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}k^2.\mathrm{l}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)=-\frac{1}{2}k^2.\mathrm{l}\left(\frac{a^2}{b^2}\right).$$

In der That sind die zwei Flächen $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ algebraisch entgegengesetzt. Denn für eine fixe Fläche $JKBAJ=\mathrm{F}$, welche an einer fixen Ordinate JK anhebt und an der Anfangsordinate AB der zwei Flächen $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ endet, sind die zwei mit den nemlichen Schlussordinaten CD und EF wie die $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ endenden Flächen

$$JKDCJ=JKBAJ+ABDCA=\mathrm{F}+\mathfrak{f}_1$$

und

$$JKFEJ=JKBAJ-ABFEA=\mathrm{F}-\mathfrak{f}_2.$$

Die zwei Flächen f_1 und f_2 werden also der Fläche F entgegengesetzt aggregirt, die f_1 ihr addirt, die f_2 aber ihr subtrahirt; mithin sind sie nicht allein geometrisch entgegengesetzt, insofern sie diesseits und jenseits der gemeinsamen Anfangsordinate AB liegen, sondern auch algebraisch entgegengesetzt. Wählt man zur Vereinfachung der Untersuchung die fixe Fläche F, wie hier, dergestalt, dass die sich ihr anschliessende Fläche f_1 sie vergrössert, und sieht man Vergrösserung als positive Beziehung an, so ist f_1 positiv, folglich f_2 negativ, wie es die Rechnung gab.

II. Wählen wir ferner beide Integrationsgrenzen negativ, dehnen wir nemlich die Fläche f von $x=x_0=OA'=-a$ und $y=A'B'$ bis $x=X=OC'=-b$ und $y=C'D'$ aus; so ist,

α) wenn $b>a$ ist, die Fläche

$$(45)\qquad A'B'D'C'A'=f'=k^2\int_{-a}^{-b}\frac{dx}{x}=+\frac{1}{2}k^2.\mathrm{l}\left(\frac{b^2}{a^2}\right).$$

Dagegen ergibt sich, wenn

β) $b<a$ nemlich $X=-b=OE'$ und $OE'<OA'$ ist, die Fläche

$$(46)\qquad A'B'F'E'A'=f''=k^2\int_{-a}^{-b}\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}k^2.\mathrm{l}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}k^2.\mathrm{l}\left(\frac{a^2}{b^2}\right).$$

Dass f' und f'', als auf entgegengesetzten Seiten ihrer Anfangsordinate $A'B'$ gelegen, ebenfalls algebraisch entgegengesetzt seien, erhellet wie früher leicht, wenn man sie der Fläche $J'K'B'A'J'=F'$ anfügt. Dass aber f' gerade so wie f_1 positiv sein soll, bleibt noch zu rechtfertigen. Dazu müssen sie beide an einerlei Fläche gefügt werden können, welche zum Theil von den Anfangsordinaten AB, $A'B'$ beider Flächen begrenzt wird. Eine solche Fläche ist die Figur

$$ABKL'J'A'B'K'LJA=\mathfrak{F}.$$

Denn an sie wird die Fläche

$$A'B'D'C'A'=f'$$

eben so wie die Fläche

$$ABDCA=f_1$$

hinzugefügt (addirt), also sind sie beide positiv. Dagegen werden der Fläche $\mathfrak{F}$ die zwei Flächen f'' und f_2 entzogen (subtrahirt), mithin sie zugleich negativ.

Ueberdies sind die zwei gemischtlinigen Vierecke $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}'$, wofern $OA=OA'=a$ und $OC=OC'=b$ ist, wie sich leicht durch Aufeinanderlegung beweisen lässt, congruent, also auch in Grösse gleich. Da sie nun auch in algebraischer Beziehung einander gleichen, so sind sie völlig gleich, nemlich $\mathfrak{f}_1=\mathfrak{f}'$. Ein Gleiches gilt auch von $\mathfrak{f}_2$ und $\mathfrak{f}''$, wofern zugleich $OE=OE'$ ist. — Hiedurch ist sofort die Giltigkeit der Gleichung (25) geometrisch bestätiget.

III. Nehmen wir die untere Grenze negativ und die obere positiv, beide aber gleich, lassen wir also die Fläche f von $x=x_0=-a=OA'$ und $y=A'B'$ in Taf. I. Fig. 2. bis $x=X_0=+a=OA$ und $y=AB$ sich ausbreiten. Da ist, wenn man sich vorstellt, dass Oy und $O\bar{y}$ einander stets gleichend, unendlich wachsen, also auch yG und $\bar{y}G$, einander gleich bleibend, unendlich abnehmen, die Grenze der Fläche

$$A'B'G'\bar{y}OyGBAOA'=\int_{-a}^{+a}\frac{dx}{x}=\int_{-a}^{-0}\frac{dx}{x}+\int_{+0}^{+a}\frac{dx}{x}.$$

$$=A'B'G'\bar{y}OA'+ABGyOA$$

$$=\varphi'+\varphi_1.$$

Diese zwei Flächen φ' und φ_1 sind aber offenbar congruent, da sie, wenn man die eine bei festgehaltenem Punkte O um einen gestrekten Winkel herumdreht, zur völligen Deckung gebracht werden können.

Denkt man sich nun auf ein Rechteck $A'N'NA$, von dem zwei parallele Seiten Verlängerungen der Ordinaten AB und $A'B'$ sind und die zur $A'A$ parallele Seite $N'N$ noch über die Fläche φ' hinaus liegt, die Gruppe der zwei congruenten Scheitelvierecke φ' und φ_1, wie in Taf. I. Fig. 2., aufgelegt, so wird diesem Rechtecke $A'N$ einerseits das gemischtlinige Viereck φ' entzogen und andererseits das gemischtlinige Viereck φ_1 an der übrig bleibenden Fläche Φ zugesetzt. Somit zeigt sich φ' subtractiv und φ_1 additiv, oder da in unseren Annahmen die Addition die positive Beziehung ist, die φ_1 positiv, folglich φ' negativ. Weil aber auch noch φ_1 und φ' congruent sind, so ist $\varphi'=-\varphi_1$, folglich $\varphi'+\varphi_1=0$.

Demnach gibt obige Flächenaggregation

$$A'N+(\varphi'+\varphi_1)=A'N+\varphi'+\varphi_1=(A'N-\varphi_1)+\varphi_1=\Phi+\varphi_1$$

oder auch

$$=A'N,$$

und zugleich ist

$$(47)\quad A'B'G'\bar{y}OyGBAOA' = \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = 0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{a^2}{a^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}1.$$

Dadurch wird sonach die Gleichung (36) geometrisch bestätiget.

IV. Nehmen wir endlich, wie früher, die untere Grenze negativ und die obere positiv, jedoch die obere absolut betrachtet grösser als die untere, lassen wir nemlich die Fläche f von $x = x_0 = -a = OA'$ und $y = A'B'$, in Taf. I. Fig. 2., bis $x = X = +b = OC > OA'$ und $y = CD$ sich erstrecken. Da ist, mit Berücksichtigung von Nr. III. und I., die integrirte Fläche

$$(48)\quad A'B'G'\bar{y}OyGDCA' = \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} + \int_{+a}^{+b} \frac{dx}{x}$$

$$= (\varphi' + \varphi_1) + \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_1$$

$$= +\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{b^2}{a^2}\right).$$

In der That, wenn man auf das Rechteck AN' die zwei verbundenen gemischtlinigen nicht congruenten Scheitelvierecke φ' und $OyGDCO = \varphi_1 + \mathfrak{f}_1$ auflegt, so erscheint wieder φ' subtractiv oder negativ, und $\varphi_1 + \mathfrak{f}_1$ additiv oder positiv, also $\varphi' = -\varphi_1$; folglich ist dieses Flächenaggregat

$$A'N + (\varphi' + \varphi_1 + \mathfrak{f}_1) = A'N + (-\varphi_1 + \varphi_1) + \mathfrak{f}_1 = A'N + \mathfrak{f}_1.$$

Und dadurch ist denn auch die Gleichung (29) oder (37) geometrisch bestätiget.

§. 21.

Nachdem wir nunmehr sowohl analytisch als geometrisch aufs Strengste erwiesen haben, dass für jedwede absolute Zahl a

$$(36)\quad \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = 0$$

und für die wie immer algebraisch beziehlichen Grenzzahlen a und b

$$\int_{a}^{b} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\frac{b^2}{a^2}$$

ist; müssen wir noch prüfen, ob mit diesen festgestellten

Thatsachen die von Cauchy, zuerst in seinem bereits mehrmals erwähnten Résumé, 24. leçon, gelehrte Bestimmung der Werthe solcher begrenzter Integrale, die in ihrem Grenzen-Intervall unbestimmt werden, in Einklang stehe. Auf Seite 95, Zeile 7—18 argumentirt er wie folgt:

„Nach der bekannten Zertheilung des Intervalls der Integrationsgrenzen findet man

$$9)\qquad \int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}+\int^{1}\frac{dx}{x}=-\infty+\infty,$$

mithin erscheint dieses Integral unbestimmt. Um sich zu versichern, was dasselbe eigentlich sei, genügt es zu beachten, dass wenn man mit ε eine unendlich kleine Zahl und durch μ, ν zwei willkürliche positive Constanten bezeichnet, gewissen früher erwiesenen Formeln 6) S. 94. gemäss, sich ergibt:

$$10)\qquad \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon=0}\int_{-1}^{-\mu\varepsilon}\frac{dx}{x},$$

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon=0}\int_{\nu\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}.$$

Mithin wird die Formel (9) werden

$$(11)\qquad \int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon=0}\left\{\int_{-1}^{-\mu\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\nu\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right\}$$

$$=\lim\left[l(\mu\varepsilon)+l\left(\frac{1}{\nu\varepsilon}\right)\right]=l\frac{\mu}{\nu},$$

und für das fragliche Integral einen völlig unbestimmten Werth darbieten, weil dieser der Neper'sche Logarithme der willkürlichen Constante $\frac{\mu}{\nu}$ sein wird."

Zum Schluss nennt er auf S. 96., Z. 18 — 22. den für $\mu=\nu$ sich ergebenden Werth eines solchen Integrals den Hauptwerth (valeur principale) desselben, der im vorliegenden Falle Null wird.

Diese Lehre haben auch Duhamel, Moigno und Schlömilch in ihre Lehrbücher der Integralrechnung aufgenommen.

Gegen solchen Vorgang Cauchy's müssen wir jedoch Folgendes bemerklich machen.

1. In seinen Gleichungen 10) sind die angeblichen Grenzen keine wirklichen, d. i. bestimmte fixe endliche Grenzen, sondern nur zur Abkürzung der Rede so genannte (!) unendliche Grenzen; weil ja der Unterschied zwischen derlei unbestimmten, selbst nicht fixirten, Grössen und der gegen sie hinstrebenden Veränderlichen keinesfalls kleiner als jede beliebige noch so klein angenommene Grösse zu werden vermag. Für solche Quasi-Grenzen sind jedoch seine Gleichungen 6) nicht erwiesen. Darum sagen die Gleichungen 10) auch nichts Anderes als die Gleichung 9), nemlich: dass die dortigen Integrale bezugsweise $-\infty$ und $+\infty$ sind, folglich ihre Summe unbestimmbar sei.

Bei der Zerfällung des Grenzen-Intervalls, von -1 bis $+1$, in die beiden engeren Intervalle, von -1 bis $-\mu\varepsilon$ und von $+\nu\varepsilon$ bis $+1$, würde das Zwischen-Intervall von $-\mu\varepsilon$ bis $+\nu\varepsilon$ ausgelassen, da eigentlich wie folgt zerfällt werden sollte:

$$(49)\qquad \int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}=\int_{-1}^{-\mu\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{-\mu\varepsilon}^{+\nu\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{+\nu\varepsilon}^{+1}\frac{dx}{x},$$

weil nur so alle Grenzen genau an einander sich anschliessen. Cauchy nahm daher stillschweigend an, dass das von ihm ausgelassene Mittel-Integral bei unendlicher Abnahme von ε der Grenze Null deshalb zustrebe, weil auch seine beiden Integrationsgrenzen $-\mu\varepsilon$ und $+\nu\varepsilon$ gegen die Null, als ihrer unerreichbaren Grenze, mit einander zugleich unaufhörlich convergiren. Er setzte nemlich

$$(50)\qquad \lim_{\varepsilon=0}\int_{-\mu\varepsilon}^{+\nu\varepsilon}\frac{dx}{x}=\int_{0}^{0}\frac{dx}{x}=0$$

oder auch

$$=\int_{-0}^{+0}\frac{dx}{x}=0.$$

Allein bei dieser Grenzwerth-Bestimmung ward übersehen dass die Integrationsgrenzen $-\mu\varepsilon$, $+\nu\varepsilon$ nicht gleichen Schrittes ihrer gemeinsamen Grenze Null zueilen, was unerlässlich bleibt. Darf man ja bekanntlich auch nicht sich erlauben, etwa

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\sin\mu\varepsilon}{\nu\varepsilon}=\frac{\sin 0}{0}=1$$

oder

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{e^{\mu\varepsilon}-1}{\nu\varepsilon}=\frac{e^{0}-1}{0}=1$$

u. dgl. zu setzen, so lange $\mu\varepsilon$ und $\nu\varepsilon$ also auch μ und ν von einander verschieden sind, wohl aber, wenn sie unter sich völlig gleich sind.

Fordert aber Cauchy's Annahme (50) unbedingt, dass $\mu=\nu$ sei, so verwandelt sich seine Gleichung 11) nothwendig in

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}=l1=0;$$

mithin besitzt dieses Integral keineswegs einen unbestimmten, also auch keinen Hauptwerth, sondern lediglich einen einzigen völlig bestimmten Werth. Und dieser ist Null, wie er auch von uns nach der 2ten Bestimmungsweise in §. 18. gefunden wurde.

Suchen wir zur vollkommenen Vergewisserung noch den richtigen Werth des aus 11) weggelassenen Mittel-Integrals

$$\int_{-\mu\varepsilon}^{+\nu\varepsilon}\frac{dx}{x}$$

bei der Annahme, dass μ und ν ungleich seien. Da finden wir, zufolge der Gleichungen (28), (29) und (36) dann nach §. 5.:

1) wenn $\mu<\nu$, also $\mu\varepsilon<\nu\varepsilon$ ist,

$$\int_{-\mu\varepsilon}^{+\nu\varepsilon}\frac{dx}{x}=\int_{-\mu\varepsilon}^{+\mu\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{+\mu\varepsilon}^{+\nu\varepsilon}\frac{dx}{x}=0+l\frac{\nu\varepsilon}{\mu\varepsilon}=l\frac{\nu}{\mu};$$

2) wenn $\mu>\nu$, also $\mu\varepsilon>\nu\varepsilon$ und $-\mu\varepsilon<-\nu\varepsilon$ ist,

$$\int_{-\mu\varepsilon}^{+\nu\varepsilon}\frac{dx}{x}=\int_{-\mu\varepsilon}^{-\nu\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{-\nu\varepsilon}^{+\nu\varepsilon}\frac{dx}{x}=l\frac{-\nu\varepsilon}{-\mu\varepsilon}+0=l\frac{\nu}{\mu}.$$

Und wirklich, wenn man in Cauchy's Gleichung 11) das mangelnde Mittel-Integral an seine richtige Stelle einschiebt, zeigt sich dieser Werth als die erforderliche Ergänzung. Denn so findet man

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon=0}\left\{\int_{-1}^{-\mu\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{-\mu\varepsilon}^{+\nu\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{+\nu\varepsilon}^{+1}\frac{dx}{x}\right\}$$

$$=\lim_{\varepsilon=0}\left\{\int_{-1}^{-\mu\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{+\nu\varepsilon}^{+1}\frac{dx}{x}\right\}+\lim_{\varepsilon=0}\int_{-\mu\varepsilon}^{+\nu\varepsilon}\frac{dx}{x}$$

$$=l\frac{\mu}{\nu}+l\frac{\nu}{\mu}=l\frac{\mu\nu}{\nu\mu}=l1=0,$$

welcher Werth allein mit allen unseren früheren Ergebnissen übereinstimmt.

Mit Rücksicht auf die, in §. 18. 4te Bestimmungsweise aufgestellten Lehren ist nun leicht wahrnehmbar, dass ähnlich auch überhaupt in allen jenen begrenzten Integralen von der Form

$$\int_{-a}^{+b}\varphi(x)dx,$$

deren Differential-Coefficient $\varphi(x)$ mit seiner Veränderlichen x zugleich sein Vorzeichen ändert und für $x=0$ unstetig wird, Cauchy's Lehre von den sogenannten Hauptwerthen solcher unbestimmt werdender begrenzter Integrale eine strenge Prüfung nicht bestehe.

Bemerkung des Herausgebers.

Da die vorhergehende Abhandlung hauptsächlich gegen eine von Cauchy, Schlömilch und mir vertheidigte Ansicht gerichtet ist, so glaube ich, ohne mich hier irgend in Weitläufigkeiten einlassen zu wollen, doch Folgendes bemerken zu müssen, und zwar um so mehr, weil die in Rede stehende Ansicht wohl bei allen den Mathematikern Eingang und Annahme gefunden hat, welche sich, so zu sagen, der Schule in der Analysis angeschlossen haben, die noch neuerlich erst von einigen verdienten Mathematikern mit dem Namen der neueren kritischen Schule beehrt worden ist; bevorworte aber ausdrücklich, dass ich durch die folgenden, absichtlich möglichst allgemein gehaltenen, ganz kurzen Bemerkungen dem geehrten Herrn Verfasser der obigen Abhandlung keineswegs etwa Behauptungen unterschieben will, die derselbe vielleicht gar nicht gemacht hat oder hat machen wollen. Ich glaube nämlich, dass es weder Cauchy noch irgend einem Anderen eingefallen ist, geradezu zu behaupten oder auch nur stillschweigend anzunehmen, dass es geradezu unmöglich sei, $\int\frac{\partial x}{x}$ unter einen ganz allgemeinen Ausdruck zu bringen. So lange aber Cauchy das Reelle und Imaginäre in der Analysis überall streng von einander sondert und aus einander hält, was nach meiner Ansicht gerade mit einen Hauptpunkt in seiner gesammten so höchst ausgezeichneten Darstellung und Begründung der Analysis, der an wirklicher mathematischer Strenge bis jetzt etwas Anderes nicht gleich kommt, ausmacht; so lange also auch nur von Differentialquotienten im eigentlichen Sinne von reellen Functionen gesprochen, und das Imaginäre mehr nur symbolisch aufgefasst wird, was also natürlich auch umgekehrt in die Integralrechnung zu übertragen ist: so lange wird er berechtigt sein, die Schreibart

$$\int\frac{\partial x}{x}=\frac{1}{2}\mathrm{l}.x^2,$$

welche das Integral eben nur als reell auffasst, für die allein richtige anzusehen. Auch in meinen Schriften über Differential- und Integralrechnung fasse ich ursprünglich durchaus nur das Reelle in's Auge, und weiss in der That auch heute noch nicht, wie ich den Begriff der Gränze als solcher im eigentlichen Sinne auf das Imaginäre ohne Weiteres übertragen soll, eben so wenig wie dies Cauchy wissen wird. Die obige Abhandlung habe ich, um auch entgegengesetzten Ansichten Gelegenheit zu geben, sich geltend zu machen, gern im Archiv abdrucken lassen, bin aber durch dieselbe in meiner Grundansicht von der Sache nicht im Geringsten wankend gemacht worden, so wie ich auch durch die bei vielen analytischen Entwickelungen gemachte Erfahrung längst von der Vortrefflichkeit der obigen, vor allen Fehlgriffen in der kürzesten und einfachsten Weise sicher stellenden

Schreibart überzeugt worden bin. Dass bei allen Anwendungen der Differential- und Integralrechnung Unterbrechungen der Stetigkeit überall vollständig vermieden, und die Fälle, wo sie sich finden, jederzeit besonders discutirt werden müssen, ist eine Sache, die sich jetzt so sehr von selbst versteht, dass sie besonders gar nicht mehr bemerkt zu werden braucht, und deshalb auch immer stillschweigend als selbstverständlich angenommen wird. Im Grunde aber scheint mir der geehrte Herr Verfasser der obigen Abhandlung, wenn ich denselben, was ich ausdrücklich bevorworte, überall richtig verstanden habe, nicht einmal so sehr wesentlich von Cauchy abzuweichen, wobei ich es übrigens jetzt ganz dahin gestellt sein lassen will, ob von demselben ganz gewürdigt worden ist, dass der genannte, namentlich durch höchste Strenge und Evidenz bis jetzt unübertroffene Mathematiker, wie schon vorher bemerkt wurde, überall das Reelle und Imaginäre mit der grössten Strenge und scrupulösesten Genauigkeit aus einander hält. Weitläufiger hierüber zu sein, ist jetzt nicht meine Absicht. Mögen die Leser sich ihr Urtheil selbst bilden. Ich habe hier ein Urtheil über die obige Abhandlung, die ich ganz absichtlich aufgenommen habe, nicht aussprechen wollen und in meiner Eigenschaft als Herausgeber auch füglich nicht aussprechen können; aber so viel glaube ich nochmals wiederholen zu dürfen, dass ich in meiner Grundansicht über die Sache durch diese Abhandlung nicht im Geringsten wankend gemacht worden bin, und mich der nach meiner Ansicht nach wie vorher sehr vortrefflichen Cauchy'schen Schreibart, die in grösster Einfachheit und Eleganz vor allen Fehlgriffen sicher stellt, fortwährend bedienen werde.

Der wissenschaftliche Stand der Sache lässt sich in der einfachsten, kürzesten und bündigsten Weise so aussprechen:

So lange man in der *Differentialrechnung* nur beweist und beweisen kann, dass, den Differentialquotienten als wirkliche Gränze im eigentlichen Sinne aufgefasst, was nur bei reellen Grössen möglich ist, nur für positive x und wenn lx den reellen Werth dieses Logarithmus bezeichnet,

$$\frac{\partial lx}{\partial x}=\frac{1}{x}$$

ist, so lange kann und darf man auch umgekehrt in der *Integralrechnung* nur

$$\int\frac{\partial x}{x}=l(\pm x),$$

das obere oder untere Zeichen genommen, je nachdem x positiv oder negativ ist, oder kürzer und eleganter

$$\int\frac{\partial x}{x}=\frac{1}{2}l.x^2$$

setzen.

Und so lange diese Auffassung richtig ist, hat auch der Herr Verfasser des vorstehenden Aufsatzes das, was ich namentlich in dem Leitfaden für den ersten Unterricht in der höheren Analysis. Leipzig. 1838. S. 158 gesagt habe, nicht widerlegt. G.

II.

Bemerkungen zur Convergenz der unendlichen Reihen.

Von dem
Herrn Doctor F. Arndt,
Lehrer an der Realschule zu Stralsund.

---

1. In den folgenden Blättern beabsichtige ich einige Untersuchungen über die Grenzen der Summen convergenter Reihen zu veröffentlichen. Sie sind hervorgerufen durch das Studium eines Satzes von Cauchy, der so lautet (Cours d'Analyse p. 131.):

„Lorsque les différens termes d'une série sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x."

Die Analysten haben von diesem Satze vielfachen Gebrauch gemacht, namentlich um die Entwickelung der Logarithmen und Kreisfunctionen in unendliche Reihen mit Hülfe der Binomialreihe zu bewerkstelligen, und selbst im Eingange der Differentialrechnung spielt die Anwendung des obigen Satzes eine Rolle, indem man sich nur an die Entwickelung des Differentials der Exponentialgrösse, sowie man selbige in Herrn Cauchy's Schriften liest, zu erinnern braucht.

Ich glaube den grossen Verdiensten Cauchy's um die Wissenschaft nicht zu nahe zu treten, wenn ich den angeregten Satz für unrichtig erkläre, und es dürften die folgenden Betrachtungen geeignet sein, zu zeigen, wie ausserordentlich vorsichtig man mit den unendlichen Reihen, selbst im Falle ihrer Convergenz, umgehen muss.

Die Richtigkeit meiner Behauptung zeigt sich zunächst an mehreren Beispielen. So ist die Function

$$x^{2m}(1-x)+x^{2m+2}(1-x)+x^{2m+4}(1-x)+\text{ etc.},$$

welche bekanntlich für jedes x, dessen numerischer Werth kleiner als 1 ist, die Summe $\frac{x^{2m}}{1+x}$ hat, unstetig für $x=1$, da sie für diesen Werth verschwindet, während $\frac{x^{2m}}{1+x}$ gegen die Grenze $\frac{1}{2}$ convergirt, wenn x sich der Einheit nähert.

Ein anderes Beispiel bietet die folgende Reihe:

$$\frac{1}{2}\varphi=\sin\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\sin 3\varphi-\text{ etc.},$$

welche bekanntlich für alle Werthe von φ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ convergent ist. Diese Function ist unstetig für $\varphi=-\pi$ und $\varphi=+\pi$, denn sie verschwindet für $\varphi=\mp\pi$, während sie für $\varphi=\mp(\pi-\alpha)$, wo α positiv und kleiner als 1, den Werth $\mp\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$ erlangt.

Mit anderen Worten: es ist unrichtig, wenn man, um die Grenze der Summe einer convergenten Reihe zu bestimmen, in jedem einzelnen Gliede zur Grenze übergeht und das Aggregat dieser Grenzen nimmt. Und diese Bemerkung bezieht sich nicht etwa blos auf einzelne Ausnahmen von einer allgemeinen Regel, sondern es wird aus den nachfolgenden Betrachtungen zur Genüge erhellen, dass die beiden Grössen

$$\operatorname{Lim}[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\varphi_3(x)+\ldots] \text{ und } \operatorname{Lim}\varphi_1(x)+\operatorname{Lim}\varphi_2(x)+\ldots$$

nur in besonderen Fällen dieselben Werthe haben, wenn beide Reihen ins Unendliche fortgehen.

Man darf z. B., wie in vielen neueren Schriften zu lesen, aus der Gleichung

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}=1+x+\frac{1}{2}xx(1-\alpha)+\frac{1}{6}x^3(1-\alpha)(1-2\alpha)+\text{ etc.},$$

wo die Convergenz von $x=-\frac{1}{\alpha}$ bis $x=+\frac{1}{\alpha}$ stattfindet, nicht ohne eine anderweitige Untersuchung die folgende Gleichung herleiten:

$$\text{Lim}\,[(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}]=1+x+\frac{1}{2}xx+\frac{1}{6}x^3+\text{ etc.},$$

wo das Zeichen Lim. bedeutet, dass α gegen Null convergiren soll.

Ebenso ist die Differentiation einer unendlichen convergenten Reihe, auch wenn die resultirende Reihe noch convergirt, im Allgemeinen nicht zulässig.

Es sei z. B.

$$F(x)=\varphi(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\ldots\ldots$$

für einen bestimmten Werth γ von x und für die Nachbarwerthe von γ, also

$$F(\gamma)=\varphi(\gamma)+\varphi_1(\gamma)+\varphi_2(\gamma)+\ldots\ldots,$$

$$F(\gamma+i)=\varphi(\gamma+i)+\varphi_1(\gamma+i)+\varphi_2(\gamma+i)+\ldots\ldots;$$

wo i eine endliche Grösse bedeutet, so beschaffen, dass obige Reihe von $x=\gamma$ bis $x=\gamma+i$ fortwährend convergent bleibt. Da die Subtraction zweier convergenter Reihen wieder zu einer convergenten Reihe führt, so kommt

$$\frac{F(\gamma+i)-F(\gamma)}{i}=\frac{\varphi(\gamma+i)-\varphi(\gamma)}{i}+\frac{\varphi_1(\gamma+i)-\varphi_1(\gamma)}{i}+\text{ etc.}$$

Lässt man nun i sich der Null nähern, so gehen die Glieder in ihre Ableitungen über, es folgt aber nicht

$$F'(\gamma)=\varphi'(\gamma)+\varphi'_1(\gamma)+\varphi'_2(\gamma)+\text{ etc.},$$

wenn immerhin die Reihe rechter Hand convergent ist.

2. Um in ein näheres Detail unseres Gegenstandes einzudringen, sei

$$u^0{}_x,\ u^{(1)}{}_x,\ u^{(2)}{}_x,\ u^{(3)}{}_x\text{ etc.}$$

eine von $x=\beta-i$ bis $x=\beta$ convergente Reihe, und alle ihre Glieder für die in Betracht kommenden Werthe von x stetige Functionen dieser Variabeln. Setzt man

$$f(\beta-i)=u^0{}_{\beta-i}+u^{(1)}{}_{\beta-i}+u^{(2)}{}_{\beta-i}+\text{ etc.},$$

so fragt sich, welchen Werth Lim. $f(\beta-i)$ hat, indem i sich der Null nähert. Bezeichnen wir die Grenze von $u^{(p)}{}_x$, indem x gegen β convergirt, mit $u^{(p)}{}_\beta$, setzen

$$s=u^0{}_\beta+u^{(1)}{}_\beta+u^{(2)}{}_\beta+\text{ etc.},$$

und betrachten die Differenz

$$s-f(\beta-i)=(u^0{}_\beta-u^0{}_{\beta-i})+(u^{(1)}{}_\beta-u^{(1)}{}_{\beta-i})+(u^{(2)}{}_\beta-u^{(2)}{}_{\beta-i})+\text{ etc.};$$

die Glieder dieser unendlichen Reihe werden sich mit i zugleich der Null nähern, aber es braucht deswegen $\mathrm{Lim}[s-f(\beta-i)]$ nicht $=0$ zu sein, kann vielmehr einen sehr beträchtlichen Werth haben. Hiernach haben wir uns mit folgender Frage zu beschäftigen:

„Es sei $\varphi(x)=v^0{}_x+v^{(1)}{}_x+v^{(2)}{}_x+$ etc. eine unendliche Reihe, convergent von $x=\beta-i$ bis $x=\beta$, wo i eine endliche Grösse bedeutet, die sehr klein sein kann; es nähern sich ferner alle Glieder der Null, wenn x gegen die Grenze β geht. Unter welchen Bedingungen ist $\varphi(x)$ gleichzeitig mit $\beta-x$ unendlich klein?"

Eine allgemeine Lösung dieser Aufgabe dürfte schwerlich erreicht werden können. Ich werde indessen einige Theoreme über diesen Gegenstand entwickeln, welche bei vielen analytischen Untersuchungen einigen Nutzen gewähren dürften.

3. *Erstes Theorem.* „Es sei $v^0{}_x$, $v^{(1)}{}_x$, $v^{(2)}{}_x$, etc. eine unendliche Reihe, deren Glieder für den Werth β von x und für die Nachbarwerthe von β (nach einer Seite hin ist nur nöthig) stetige Functionen von x sind, und sich der Null nähern, wenn x gegen die Grenze β geht; auch sei die Reihe für die bezeichneten Werthe von x immer convergent. Bezeichnet man nun den absoluten Werth

von $v^{(n)}{}_x+v^{(n+1)}{}_x+v^{(n+2)}{}_x+$ etc. mit $R^{(n)}{}_x$,

so wird die Summe der obigen Reihe mit $\beta-x$ unendlich klein, wenn sich ein Werth ξ von x angeben lässt, so dass der Werth $R^{(n)}{}_\xi$ nicht kleiner ist als alle diejenigen Werthe der Function $R^{(n)}{}_x$, welche sie von $x=\xi$ bis $x=\beta$ erlangt, und zwar unabhängig von den besonderen Werthen der Zahl n, wenigstens nachdem diese eine bestimmte Grenze überstiegen hat."

Beweis. Es bedeute noch $s^{(n)}{}_x$ den numerischen Werth von $v^0{}_x+v^{(1)}{}_x+\ldots+v^{(n-1)}{}_x$, so dass nun

$$\varphi(x)=\pm s^{(n)}{}_x\pm R^{(n)}{}_x$$

ist, wo die Vorzeichen beliebig sein können.

Da die Reihe für $x=\xi$ convergent vorausgesetzt ist, so kann man einen so grossen Werth n' von n angeben, dass $R^{(n')}{}_\xi<\frac{1}{2}\varepsilon$ wird, wo ε eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet; zugleich darf man annehmen, dass der Rest $R^{(n)}{}_x$ die im Lehrsatze ausgesprochene Eigenschaft von $n=n'$ bis $n=\infty$ habe. Wenn nun die Summe $s^{(n')}{}_\xi$ ebenfalls schon $<\frac{1}{2}\varepsilon$ ist, so folgt $s^{(n')}{}_\xi+R^{(n')}{}_\xi<\varepsilon$. Wenn aber jene Bedingung nicht stattfindet, so kann man einen

Werth ξ' zwischen ξ und β angeben, so dass $s^{(n')}\xi'$ wirklich $<\frac{1}{2}\varepsilon$ wird, indem die Summe $s^{(n')}x$ aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, welche mit $\beta-x$ unendlich klein werden; nun ist vermöge der Annahme $R^{(n')}\xi' \overline{\overline{<}} R^{(n')}\xi$, folglich ist auch $R^{(n')}\xi' < \frac{1}{2}\varepsilon$, also wie vorhin $s^{(n')}\xi' + R^{(n')}\xi' < \varepsilon$. — Hieraus folgt weiter, dass der absolute Werth von $\varphi(x)$ für die vorhergehenden Werthe von x und n ebenfalls $<\varepsilon$ ist, und da diese Schlüsse gelten, wie klein ε gedacht werden möge, so folgt, dass $\varphi(x)$ sich der Null nähert, indem x gegen seine Grenze β geht.

4. *Zweites Theorem.* „**Es sei v^0x, $v^{(1)}x$, $v^{(2)}x$ etc. eine unendliche Reihe, deren Glieder für den Werth β von x und für die Nachbarwerthe von β stetige Functionen von x sind, und sich der Null nähern, wenn x gegen die Grenze β geht; alle Glieder seien ferner positiv von einem bestimmten Gliede an, und die Reihe immer convergent, für die bezeichneten Werthe von x. Wenn es nun einen Werth ξ von x giebt, so dass $v^{(n)}\xi$ nicht kleiner ist als alle diejenigen Werthe, welche $v^{(n)}x$ von $x=\xi$ bis $x=\beta$ erlangt, und zwar unabhängig von den besonderen Werthen der Zahl n, wenigstens nachdem diese eine bestimmte Grenze überschritten hat, so wird die Summe der obigen Reihe gegen Null convergiren, wenn x sich der Grenze β nähert.**“

Der Beweis dieses Theorems reducirt sich auf das Vorhergehende.

Man denke sich nämlich einen Werth n' von n, so dass nicht nur $v^{(n')}\xi$ die im Satze ausgesprochene Eigenschaft hat, sondern auch $v^{(p)}\xi$ fortwährend positiv bleibt für $p \overline{\overline{>}} n'$ und für jedes x zwischen ξ und β. Es ist dann, indem ξ' einen beliebigen Werth zwischen ξ und β bedeutet,

$$v^{(n')}\xi \overline{\overline{>}} v^{(n')}\xi', \quad v^{(n'+1)}\xi \overline{\overline{>}} v^{(n'+1)}\xi', \quad v^{(n'+2)}\xi \overline{\overline{>}} v^{(n'+2)}\xi' \text{ etc.},$$

$$v^{(n')}\xi + v^{(n'+1)}\xi + v^{(n'+2)}\xi + \text{etc.} \overline{\overline{>}} v^{(n')}\xi' + v^{(n'+1)}\xi' + v^{(n'+2)}\xi' + \text{etc.},$$

$$\text{d. i. } R^{(n')}\xi \overline{\overline{>}} R^{(n')}\xi',$$

woraus die Richtigkeit unseres Satzes nach dem ersten Theorem erhellt.

5. Untersucht man die Reihe $1-x$, $x(1-x)$, $x^2(1-x)$ etc., so wird man finden, dass die Bedingungen des zweiten Theorems nicht sämmtlich erfüllt sind. In der That ist die Summe dieser Reihe unstetig für $x=1$.

Man hat hier $v^{(n)}_x = x^n(1-x) = \psi(x)$, also die Ableitung $\psi'(x) = (n+1)x^{n-1}\left(\frac{n}{n+1} - x\right)$ Da diese positiv für $x < \frac{n}{n+1}$, negativ für $x > \frac{n}{n+1}$, so folgt bekanntlich, dass die Function $\psi(x)$ bis $x = \frac{n}{n+1}$ fortwährend wächst, von $x = \frac{n}{n+1}$ bis $x = 1$ fortwährend abnimmt. Wie nahe nun auch der bestimmte Werth ξ der Einheit kommen mag, man kann n gross genug nehmen, dass $\psi(x)$ wächst, d. h. es lässt sich kein Werth ξ von x angeben, so dass $v^{(n)}\xi$ alle Werthe von $v^{(n)}_x$ von $x=\xi$ bis $x=1$ übertreffe, unabhängig von n. Also findet das Theorem hier keine Anwendung.

6. Betrachten wir ferner die unendliche Reihe

$$a_0, \; a_1 x, \; a_2 x^2, \; a_3 x^3, \text{ etc.},$$

und nehmen zuerst an, dass alle Coefficienten, sowie auch x, positiv seien. Ist diese Reihe convergent von $x=\gamma$ bis $x=\gamma+i$, wo γ, i positiv sind, so folgt

$$f(\gamma) = a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + \text{etc.}$$

$$f(\gamma+i) = a_0 + a_1(\gamma+i) + a_2(\gamma+i)^2 + \text{etc.}$$

$$f(\gamma+i) - f(\gamma) = a_1 i + a_2[(\gamma+i)^2 - \gamma^2] + \text{etc.}$$

Da $a_n[(\gamma+i)^n - \gamma^n]$ fortwährend positiv bleibt und stets abnimmt, indem i sich der Null nähert, für jedes n, so wird nach dem zweiten Theorem $f(\gamma+i) - f(\gamma)$ mit i unendlich klein, d. h. $f(x)$ ist stetig für $x=\gamma$.

Sind die Coefficienten nicht alle positiv, so seien A_0, A_1, A_2, etc. ihre absoluten Werthe. Wenn alsdann die Reihe

$$A_0, \; A_1 x, \; A_2 x^2, \text{ etc.}$$

von $x=\gamma$ bis $x=\gamma+i$ convergirt, wo γ, i positiv sein sollen, so folgt wie vorhin, dass $A_1 i + A_2[(\gamma+i)^2 - \gamma^2] +$ etc. mit i unendlich klein wird, folglich wird $a_1 i + a_2[(\gamma+i)^2 - \gamma^2]$ ebenfalls unendlich klein mit i.

Unter den nämlichen Voraussetzungen wird $f(\gamma) - f(\gamma - i)$, wo i positiv, sich mit i gleichzeitig der Null nähern.

Der Fall, wo negative Werthe von x in Betracht kommen, lässt sich auf den vorhergehenden zurückführen. Denn macht man $x = -y$, so verwandelt sich die gegebene Reihe in a_0, $-a_1 y$, $a_2 y^2$, $-a_3 y^3$, etc., wo nunmehr y eine positive Grösse ist. Man ist somit zu folgendem Satze gelangt:

Drittes Theorem. „Wenn die unendliche Reihe a_0, $a_1 x$, $a_2 x^2$, etc. von $x = \beta \pm i$ bis $x = \beta$ convergent bleibt,

nachdem alle Glieder auf ihre numerischen Werthe reducirt worden (in welchem Falle die Reihe bekanntlich selbst convergirt), so ist ihre Summe in diesem Intervall überall eine stetige Function von x."

7. Die Schlüsse des vorigen Paragraphen sind immer zulässig, wenn die Reihe

$$a_1 i,\ a_2[(\gamma+i)^2-\gamma^2],\ a_3[(\gamma+i)^3-\gamma^3],\ \text{etc.}$$

noch convergent bleibt, wenn an Stelle der einzelnen Glieder ihre numerischen Werthe gesetzt werden. Findet diese Bedingung aber nicht statt, was sich namentlich an den Grenzen des Intervalls von x häufig ereignet, so scheint mir die Behauptung, dass $a_0+a_1x+a_2x^2+$ etc. für $x=\gamma$ stetig ist, im Allgemeinen nicht zulässig zu sein. — In der Regel genügen aber die nach Potenzen von x fortschreitenden Reihen den Bedingungen des dritten Theorems u. a. immer, wenn das Verhältniss $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ bei unendlich werdendem n gegen eine bestimmte Grenze L geht, da alsdann die Convergenz der Reihe der absoluten Werthe von $x=-\frac{1}{L}$ bis $x=+\frac{1}{L}$ stattfindet, wenn auch nicht immer für die Grenzen selbst.

Ein Fall der Art, wo man zu besonderen Betrachtungen seine Zuflucht nehmen muss, ist folgender:

Angenommen, es sei schon erwiesen, dass

$$l(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\text{etc.}$$

für jedes $x<1$, man wisse aber noch nicht, dass diese Gleichung für $x=1$ gelte. Alsdann setze man

$$s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\text{etc.}$$

und betrachte die Differenz

$$s-l(1+x)=1-x-\frac{1}{2}(1-x^2)+\frac{1}{3}(1-x^3)-\text{etc.}$$

Auf diese Reihe kann aber das zweite Theorem nicht angewandt werden, da die Glieder eine divergente Reihe geben, wenn man sie auf ihre absoluten Werthe reducirt. Wir haben daher einen andern Weg einzuschlagen.

Es sei $s^{(n)}_x$ der absolute Werth von der Summe der $n-1$ ersten Glieder, $R^{(n)}_x$ der absolute Werth des Restes der Reihe, also

$$\pm R^{(n)}_x=\mp\frac{1-x^n}{n}\pm\frac{1-x^{n+1}}{n+1}\mp\frac{1-x^{n+2}}{n+2}\pm\text{etc.},$$

$$s - l(1+x) = \pm s^{(n)}{}_x \pm R^{(n)}{}_x.$$

Zunächst lässt sich zeigen, dass $\frac{1}{n}(1-x^n)$ fortwährend abnimmt, indem n wächst, wenn dieses nur erst eine gewisse Grenze überschritten hat. Die Grösse nx^n nähert sich bekanntlich der Null als Grenze mit unendlich werdendem n (x ist nämlich ein ächter Bruch); es muss sich mithin ein Werth n' von n angeben lassen, so dass nx^n von $n=n'$ bis $n=\infty$ stets kleiner als die Einheit bleibt, alsdann ist um so mehr $nx^n < 1+x+x^2+..+x^{n-1}$, woraus leicht folgt $\frac{n+1}{n} > \frac{1+x+x^2+...+x^{n-1}+x^n}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}$ d. i. $> \frac{1-x^{n+1}}{1-x^n}$, oder $\frac{1-x^n}{n} > \frac{1-x^{n+1}}{n+1}$. — Die Glieder von $R^{(n)}{}_x$ werden demnach, nachdem n den Werth n' erreicht hat, fortwährend kleiner, woraus sich leicht ergiebt

$$R^{(n)}{}_x < \frac{1-x^n}{n}$$

für ein bestimmtes x und von $n=n'$ bis $n=\infty$.

Der angenommene Werth von x heisse ξ; ε bedeute eine beliebig kleine positive Grösse. Man nehme einen Werth ν von n zwischen n' und ∞, so dass $\frac{1-\xi^\nu}{\nu} < \frac{1}{2}\varepsilon$ wird, was immer möglich, alsdann wird auch $R^{(\nu)}{}_\xi < \frac{1}{2}\varepsilon$ sein. Ist nun $s^{(\nu)}{}_\xi$ nicht $< \frac{1}{2}\varepsilon$, so lasse man ξ so lange zunehmen, bis diese Summe wirklich kleiner als $\frac{1}{2}\varepsilon$ wird, so dass z. B. $s^{(\nu)}{}_{\xi'} < \frac{1}{2}\varepsilon$, wo ξ' zwischen ξ und s liegen soll. Da nun offenbar $\frac{1-\xi'^\nu}{\nu} < \frac{1-\xi^\nu}{\nu}$ ist, und $\frac{1-\xi^\nu}{\nu} < \frac{1}{2}\varepsilon$ war, so wird um so mehr $\frac{1-\xi'^\nu}{\nu} < \frac{1}{2}\varepsilon$, folglich auch $R^{(\nu)}{}_{\xi'} < \frac{1}{2}\varepsilon$, $s^{(\nu)}{}_{\xi'} + R^{(\nu)}{}_{\xi'} < \varepsilon$, mithin $s - l(1+x)$ absolut $< \varepsilon$, und da ε beliebig klein sein kann, so folgt $\text{Lim.}\, l(1+x) = s$, oder

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{ etc.}$$

8. Endlich will ich nach den vorhergehenden Principien eine Methode verbessern, deren sich ältere Mathematiker, nach dem Vorgange Eulers, bedient haben, um die unendlichen Reihen für den Sinus und Cosinus eines Bogens zu finden. (Introd. in Analysin inf. P. I. Cap. VIII. p. 98.)

Diese Methode knüpft an die beiden bekannten Reihen an:

$$\cos nx = (1 - n_2 \operatorname{tg}^2 x + n_4 \operatorname{tg}^4 x - \text{etc.}) \cos^n x,$$

$$\sin nx = (n_1 \operatorname{tg} x - n_3 \operatorname{tg}^3 x + n_5 \operatorname{tg}^5 x - \text{etc.}) \cos^n x;$$

wo n_1, n_2, n_3, etc. Binomialcoefficienten bedeuten. Diese Reihen, welche, wenn n keine positive ganze Zahl ist, ins Unendliche fortgehen, convergiren für jedes x, dessen absoluter Werth kleiner als $\frac{1}{4}\pi$ ist.

Setzt man in der ersten dieser Gleichungen $-m$ statt n, wo m positiv sein soll, $y = mx$ und $\frac{1}{m} = \varrho$, so kommt

$$\cos y \cos^{\frac{1}{\varrho}} \varrho y = 1 - \frac{1+\varrho}{1.2}\left(\frac{\operatorname{tg}\varrho y}{\varrho}\right)^2 + \frac{(1+\varrho)(1+2\varrho)(1+3\varrho)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\left(\frac{\operatorname{tg}\varrho y}{\varrho}\right)^4 - \text{etc.}$$

$$\left(\begin{matrix}\text{von} & y = -\frac{\pi}{4\varrho} \\ \text{bis} & y = +\frac{\pi}{4\varrho}\end{matrix}\right).$$

Es sei

$$\sigma = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^6}{1.2...6} + \text{etc.},$$

welche Reihe aus der vorhergehenden resultirt, wenn man in jedem Gliede zu seiner Grenze für $\varphi = 0$ übergeht, und von $y = -\infty$ bis $y = +\infty$ convergent ist. Es bezeichne ferner $\varphi(\varrho)$ die Reihe für $\cos y \cos^{\frac{1}{\varrho}} \varrho y$. Wir wollen beweisen, dass $\sigma - \varphi(\varrho)$ sich mit ϱ gleichzeitig der Null nähert.

Zu dem Ende betrachte man die Differenz der beiden Reihen

$$s = 1 + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \frac{y^6}{1.2..6} + \text{etc.},$$

$$f(\varrho) = 1 + \frac{1+\varrho}{1.2}\left(\frac{\operatorname{tg}\varrho y}{\varrho}\right)^2 + \frac{(1+\varrho)(1+2\varrho)(1+3\varrho)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\left(\frac{\operatorname{tg}\varrho y}{\varrho}\right)^4 + \text{etc.};$$

von denen die erste für jedes y, die andere für alle y zwischen $-\frac{\pi}{4\varrho}$ und $+\frac{\pi}{4\varrho}$ convergirt. Man hat

$$f(\varrho) - s = \left[(1+\varrho)\left(\frac{\operatorname{tg}\varrho y}{\varrho}\right)^2 - y^2\right] \cdot \frac{1}{1.2}$$

$$+ \left[(1+\varrho)(1+2\varrho)(1+3\varrho)\left(\frac{\operatorname{tg}\varrho y}{\varrho}\right)^4 - y^4\right] \cdot \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Diese Reihe genügt allen Bedingungen des zweiten Theorems, denn alle Glieder sind positiv, und werden immer kleiner, wenn ϱ abnimmt, da dies von dem absoluten Werth der Grösse $\frac{\operatorname{tg}\varrho y}{\varrho}$ erwiesen werden kann*). Es convergirt also $f(\varrho)-s$ gleichzeitig mit ϱ gegen Null, folglich auch $\sigma-\varphi(\varrho)$, da diese Grösse absolut niemals grösser als die vorhergehende ist.

Geht man nun zu den Grenzen über**), so kommt

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^6}{1.2\ldots6} + \text{etc.} \begin{pmatrix}\text{von } y=-\infty \\ \text{bis } y=+\infty\end{pmatrix}$$

Auf ähnliche Art gelangt man mit Hülfe der Reihe für $\sin nx$ zu der bekannten Entwickelung von $\sin y$, wobei wir uns nicht länger aufzuhalten brauchen.

Von den Doppelreihen.

9. Doppelreihe heisst jede Verbindung von Horizontal- und Vertikalreihen, deren jede ins Unendliche fortgeht, sie wird also durch folgendes Schema dargestellt:

$$(1) \begin{cases} v^{(1)}{}_1, & v^{(1)}{}_2, & v^{(1)}{}_3, & \text{etc.} \\ v^{(2)}{}_1, & v^{(2)}{}_2, & v^{(2)}{}_3, & \text{etc.} \\ v^{(3)}{}_1, & v^{(3)}{}_2, & v^{(3)}{}_3, & \text{etc.} \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{cases}$$

Als Grundlage unserer Untersuchung diene die Annahme, dass

---

*) Die Ableitung von $\psi(\varrho)=\frac{\operatorname{tg}\varrho y}{\varrho}$ ist $\psi'(\varrho)=\frac{\varrho y-\frac{1}{2}\sin 2\varrho y}{(\varrho\cos\varrho y)^2}$, also >0 für ein positives y, weshalb $\psi(\varrho)$ mit ϱ zugleich wächst und abnimmt.

**) Um die Grenze von $u=\cos^{\frac{1}{\varrho}}\varrho y$ für $\varrho=0$ zu finden, hat man, $\operatorname{l}\cos\varrho y=-\frac{1}{2}\operatorname{l}(1+\operatorname{tg}^2\varrho y)$ gesetzt, nach der logarithmischen Reihe:

$$\operatorname{l}u=\frac{1}{2\varrho}(\operatorname{tg}^2\varrho y-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^4\varrho y+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^6\varrho y-\text{etc.})<\frac{1}{2\varrho}\operatorname{tg}^2\varrho y;$$

aber $\operatorname{tg}\varrho y=0$, $\frac{\operatorname{tg}\varrho y}{\varrho}=y$ für $y=0$, folglich $\operatorname{l}u=0$, $u=1$.

1. **alle Horizontalsummen gegen bestimmte Grenzen $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ etc. convergiren,** und

2. **dass die unendliche Reihe**

$$u^{(1)},\ u^{(2)},\ u^{(3)},\ u^{(4)},\ \text{etc.}$$

wiederum eine convergente sei.

Hiernach ist jede Doppelreihe auf eine einfache Reihe zurückführbar, deren Glieder die Summen der unendlichen Horizontalreihen sind. Unter Voraussetzung jener beiden Bedingungen soll die Doppelreihe **convergent** und die Summe der einfachen Reihe, auf welche wir sie reducirt haben, ihre **Summe** genannt werden.

Umgekehrt, man kann die einfache convergente Reihe $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, etc. in eine Doppelreihe umgestalten dadurch, dass man für jedes Glied eine unendliche convergente Reihe setzt. Man kann hiermit verschiedene Absichten verbinden, z. B. die, um durch Summation der Vertikalreihe eine stärker convergirende Reihe, oder gar die Summe der ursprünglichen einfachen Reihe zu erhalten.

Damit das hier angedeutete Verfahren aber zulässig sei, ist **erstens** nöthig, dass jede Vertikalreihe convergent sei, **zweitens**, dass die Summen der Vertikalreihen wiederum eine convergente Reihe bilden, und **drittens** ist fraglich, ob die Summe der letzten Reihe der Summe der Doppelreihe gleich komme. Dass nun diese drei Bedingungen im Allgemeinen aus der Convergenz der Doppelreihe sich nicht als nothwendige Folge ergeben, werden nachstehende Betrachtungen lehren.

10. Indem die beiden Bedingungen in 9. als erfüllt angenommen werden, setze man allgemein

$$u^{(p)} = v^{(p)}{}_1 + v^{(p)}{}_2 + v^{(p)}{}_3 + \dots + v^{(p)}{}_n + R^{(p)}{}_n,$$

$$\sigma^{(m)}{}_p = v^{(1)}{}_p + v^{(2)}{}_p + v^{(3)}{}_p + \dots + v^{(m)}{}_p;$$

so dass $R^{(p)}{}_n$ die **Ergänzung** der Horizontalreihe, und $\sigma^{(m)}{}_p$ die Summe der m ersten Glieder der Vertikalreihe ist. Dies giebt

$$(2)\quad u^{(1)} + u^{(2)} + \dots + u^{(m)} = \sigma^{(m)}{}_1 + \sigma^{(m)}{}_2 + \dots + \sigma^{(m)}{}_n$$
$$+ R^{(1)}{}_n + R^{(2)}{}_n + \dots + R^{(m)}{}_n.$$

Betrachtet man nun m als constant, und lässt n ins Unendliche wachsen, so convergirt die zweite Summe rechter Hand gegen Null, da dies von jedem ihrer m Glieder in Folge der ersten Bedingung in 9. gilt; die Summe (2) linker Hand bleibt ferner constant, folglich kommt

$$(3)\quad u^{(1)} + u^{(2)} + \dots + u^{(m)} = \sigma^{(m)}{}_1 + \sigma^{(m)}{}_2 + \sigma^{(m)}{}_3 + \text{in inf.}$$

d. h. wenn m Horizontalreihen convergent sind, wo m eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so bilden die m gliedrigen Vertikalsummen ebenfalls eine convergente Reihe, deren Summe dem Aggregat der m Horizontalsummen gleich ist.

Lässt man nun in (3) die Zahl m unendlich werden, so convergirt die Summe linker Hand gegen eine bestimmte Grenze (die Summe der Doppelreihe) in Folge der zweiten Bedingung in 9., folglich wird die Summe rechter Hand sich derselben Grenze nähern, oder, wenn s die Summe der Doppelreihe genannt wird, so kommt

$$(4) \quad s = \text{Lim}\,[\sigma^{(m)}{}_1 + \sigma^{(m)}{}_2 + \sigma^{(m)}{}_3 + \text{in inf.}],$$

wo das Zeichen Lim. bedeutet, dass m unendlich werden soll. Man würde nun einen bedeutenden Fehlschluss machen, wenn man statt des Ausdrucks rechter Hand den folgenden setzte:

$$\text{Lim}\,\sigma^{(m)}{}_1 + \text{Lim}\,\sigma^{(m)}{}_2 + \text{Lim}\,\sigma^{(m)}{}_3 + \text{in inf.}$$

Denn es ist einerseits zu bemerken, dass $\sigma^{(m)}{}_1$, $\sigma^{(m)}{}_2$, etc. sich mit unendlich werdendem m gar keinen bestimmten Grenzen zu nähern brauchen, und andrerseits dass, wenn dies auch stattfindet, die Gleichung $\text{Lim.}[\sigma^{(m)}{}_1+\sigma^{(m)}{}_2+\text{in inf.}]=\text{Lim.}\sigma^{(m)}{}_1+\text{Lim.}\sigma^{(m)}{}_2+\text{etc.}$ dennoch völlig unrichtig sein kann. Der Grund dieser Behauptung ergiebt sich aus den weiter oben angestellten Betrachtungen, und man wird nun übersehen, wie eng die Theorie der Doppelreihen mit unseren früheren Betrachtungen zusammenhängt.

Vermag man die unendliche Reihe $\sigma^{(m)}{}_1$, $\sigma^{(m)}{}_2$, $\sigma^{(m)}{}_3$, etc. zu summiren, so gelangt man zur Summe der Doppelreihe (s), wenn man in jener Summe, die eine Function von m sein wird, die Zahl m unendlich werden lässt. Die Gl. (4) kann also von Nutzen sein.

Beispiel. Die Doppelreihe

$$\left\{\begin{array}{l} 1,\ -x,\ x^2,\ -x^3,\ \text{etc.} \\ 1,\ -2_1x,\ 3_2x^2,\ -4_3x^3\ \text{etc.} \\ 1,\ -3_1x,\ 4_2x^2,\ -5_3x^3\ \text{etc.} \\ \quad\text{etc.}\quad \text{etc.}\quad \text{etc.} \end{array}\right.$$

ist unserer Definition zufolge convergent, wenn x positiv und kleiner als die Einheit; die Summen der Horizontalreihen sind

$$\frac{1}{1+x},\ \left(\frac{1}{1+x}\right)^2,\ \left(\frac{1}{1+x}\right)^3,\ \text{etc.},$$

und diese Reihe convergirt gleichfalls unter der gemachten Voraussetzung, ihre Summe $=\frac{1}{x}$. — Die Vertikalreihen sind aber sämmtlich divergent, indem

$m_1, -(m+1)_2 x, +(m+1)_3 x^2, -$ etc.,

die Werthe für die $m$gliedrigen Vertikalsummen, mit m zugleich $\pm\infty$ werden. Nach (4) ist aber $s = \text{Lim.}\,[m_1 - (m+1)_2\, x + \text{etc.}]$ $= \text{Lim.}\left[\frac{1-(1+x)^{-m}}{x}\right] = \frac{1}{x}$, wie vorhin.

11. Da die Convergenz der Vertikalreihen im Allgemeinen keine nothwendige Folge aus der der Doppelreihe ist, so wollen wir nun annehmen, dass alle Vertikalreihen gegen bestimmte Grenzen convergiren, und die letzteren mit σ_1, σ_2, etc. bezeichnen.

Macht man in (2) $m=\infty$, n als constant betrachtend, so ergiebt sich

$$(5)\quad s = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + \text{in inf.} = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$$
$$+ R^{(1)}{}_n + R^{(2)}{}_n + R^{(3)}{}_n + \text{inf.},$$

d. h. die Ergänzungen der Horizontalreihen bilden eine convergente Reihe. Ob nun die Reihe σ_1, σ_2, σ_3 etc. convergent oder divergent ist, hängt davon ab, was aus $R^{(1)}{}_n + R^{(2)}{}_n +$ in inf. wird, indem n ins Unendliche wächst. In Betreff der Anwendungen, welche von den Doppelreihen gemacht werden, ist nun der Fall besonders wichtig, wo die Vertikalsummen eine convergente Reihe geben; setzen wir unter dieser Voraussetzung $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\text{etc.}=\sigma$, so folgt aus (5)

$$(6)\quad s - \sigma = \lim_{n=\infty}\,[R^{(1)}{}_n + R^{(2)}{}_n + R^{(3)}{}_n + \text{etc.}].$$

Wenn nun auch alle Glieder rechter Hand für $n=\infty$ verschwinden, so folgt keineswegs, dass die Summe dieser Reihe mit unendlich werdendem n ebenfalls verschwindet; sie kann vielmehr einen sehr beträchtlichen Werth haben, oder selbst unendlich werden.

Vorausgesetzt also, dass alle Horizontalreihen in dem Schema (1) convergent sind, und auch ihre Summen eine convergente Reihe geben, dass ferner alle Vertikalreihen convergent sind, und ihre Summen eine convergente Reihe geben, so braucht doch die erste Totalsumme (s) nicht der zweiten (σ) gleich zu sein. Der Unterschied zwischen s und σ lässt sich nach der Formel (4) auch so ausdrücken:

$$(7)\quad s - \sigma = \lim_{m=\infty}\,[(\sigma^{(m)}{}_1 - \sigma_1) + (\sigma^{(m)}{}_2 - \sigma_2) + (\sigma^{(m)}{}_3 - \sigma_3) + \text{etc.}].$$

Als Anwendung dieser Formeln kann folgendes Beispiel dienen, auf welches ich schon im Th. XI. des Archivs p. 319 aufmerksam gemacht habe.

Die Doppelreihe sei

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right), \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right), \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5}\right) \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2, \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^2, \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5}\right)^2 \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^3, \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^3-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^3, \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^3-\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5}\right)^3 \text{ etc.}$$

etc. etc. etc.

Hier sind nun alle Horizontalreihen convergent, ihre Summen

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^2, \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^3 \text{ etc.}$$

bilden eine convergente Reihe, deren Summe $s=\frac{1}{2}$ ist.

Ferner convergiren alle Vertikalreihen, ihre Summen

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}-\frac{5}{6} \text{ etc.}$$

bilden eine convergente Reihe, deren Summe $\sigma=-\frac{1}{2}$ ist, also führen die beiden Summirungen nicht zu demselben Resultat.

In der That kommt hier $R^{(1)}_n + R^{(2)}_n + R^{(3)}_n + \text{etc.} =$ $\frac{1}{n+2}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{n+2}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^2+\frac{1}{n+2}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^3+\text{etc.} =$ $1-\frac{1}{n+2}$, welcher Werth $=1$ wird für $n=\infty$, also nach (5) $s-\sigma=1$, wie es sein muss. — Ebenso erhält man $(\sigma^{(m)}_1-\sigma_1)+(\sigma^{(m)}_2-\sigma_2)+\text{etc.}$

$$=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right]+\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{m+1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}\right]$$
$$+\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{m+1}-\left(\frac{3}{4}\right)^{m+1}\right]+\text{etc.}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1},$$

welcher Werth ebenfalls $=1$ wird für $m=\infty$.

12. Mit Hülfe der vorhergehenden Principien lässt sich nun ein strenger Beweis für einen von Cauchy herrührenden Hauptsatz über Doppelreihen geben.

Man betrachte alle Glieder in dem Schema (1) zunächst als positiv. Es werde angenommen, dass nicht nur alle Horizontalreihen convergiren, sondern auch ihre Summen eine convergente Reihe bilden. Nach (4) convergirt die Summe $\sigma^{(m)}_1+\sigma^{(m)}_2+\sigma^{(m)}_3+$etc. mit unendlich werdendem m gegen eine bestimmte Grenze (s). Nun ist, da alle Glieder positiv sind, allgemein $\sigma^{(m)}_p<s$, und aus demselben Grunde wächst $\sigma^{(m)}_p$ fortwährend mit m zugleich; eine Grösse aber, die fortwährend wächst, ohne eine bestimmte endliche Grenze zu erreichen, muss sich nothwendig einer bestimmten endlichen Grenze nähern, indem es eine kleinste Grösse geben wird, über die sie nicht hinaus wächst, folglich geht $\sigma^{(m)}_p$, wenn m unendlich wird, an eine bestimmte endliche Grenze (σ_p), d. h. alle Vertikalreihen sind convergent.

Nach (5) ist ferner $\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n=s-R^{(1)}_n-R^{(2)}_n-R^{(3)}_n-$etc. In der convergenten Reihe $R^{(1)}_n$, $R^{(2)}_n$, $R^{(3)}_n$, etc. nähern sich alle Glieder der Null, wenn n ins Unendliche zunimmt, und sind sämmtlich positiv. Ferner erhellt leicht, dass die Function $R^{(k)}_n$ überhaupt $> R^{(k)}_{n+p}$ ist, unabhängig von den besonderen Werthen von k. Mithin findet das zweite Theorem Anwendung, nach welchem folgt:

$$\lim_{n=\infty}[R^{(1)}_n+R^{(2)}_n+R^{(3)}_n+\text{etc.}]=0,$$

folglich ist $\lim\limits_{n=\infty}[\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n]=s$, d. h. die Summen der Vertikalreihen bilden eine convergente Reihe, deren Summe $=s$ ist.

Wenn nun die Glieder in (1) nicht sämmtlich positiv sind, die Doppelreihe aber noch die vorhin erwähnten beiden Eigenschaften behält, nachdem alle Glieder auf ihre numerischen Werthe reducirt sind, so convergirt zuerst die Reihe der absoluten Werthe jeder Vertikalreihe, also bekanntlich auch die Vertikalreihe selbst. Zweitens ist $\lim\limits_{n=\infty}[\varrho^{(1)}_n+\varrho^{(2)}_n+\varrho^{(3)}_n+\text{etc.}]=0$, wo $\varrho^{(p)}_n$ die Summe der absoluten Werthe der Glieder in $R^{(p)}_n$ bedeutet, und daraus folgt leicht $\lim\limits_{n=\infty}[R^{(1)}_n+R^{(2)}_n+R^{(3)}_n+\text{etc.}]=0$, folglich wiederum $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\text{etc.}=s$.

Wir haben also Folgendes erwiesen:

„Wenn alle Horizontalreihen convergiren, und auch ihre Summen eine convergente Reihe bilden, deren Summe wir mit s bezeichnen wollen, wenn ferner diese doppelte Eigenschaft noch besteht, nachdem sämmtliche Glieder der Doppelreihe auf ihre numerischen Werthe gebracht sind, so convergiren 1. alle Vertikalreihen, 2. bilden deren Summen eine convergente Reihe und 3. ist die Summe der letzten Reihe ebenfalls $=s$."

13. **Noch wird folgender Satz öfter mit Nutzen angewandt:**

Es seien die Vorzeichen der Glieder der Doppelreihe so beschaffen, wie das folgende Schema zeigt:

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & - & + & - \text{ etc.} \\ + & - & + & - & + & - \text{ etc.} \\ + & - & + & - & + & - \text{ etc.} \\ \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & \end{array}$$

Die Horizontalreihen sollen convergent sein und ihre Summen eine convergente Reihe mit der Summe s bilden. Wenn alsdann alle Vertikalreihen convergiren, ihre Summen eine convergente Reihe bilden, und wenn endlich die numerischen Werthe der Glieder in jeder Horizontalreihe fortwährend abnehmen, so hat die Reihe der Vertikalsummen ebenfalls die Grösse s zur Grenze.

Beweis. Setzt man allgemein, die obigen Bezeichnungen beibehaltend, $\pm v^{(p)}{}_{n+1} \pm v^{(p)}{}_{n+2} \pm v^{(p)}{}_{n+3}\text{etc.} = \pm R^{(p)}{}_n$, so erhellt, dass unter den gemachten Voraussetzungen $R^{(p)}{}_n < v^{(p)}{}_{n+1}$ ist. Die Vertikalreihe $\pm v^{(1)}{}_{n+1}$, $\pm v^{(2)}{}_{n+1}$, $\pm v^{(3)}{}_{n+1}$, etc., wo die Zeichen sich auf einander beziehen, ist convergent, folglich convergirt die Reihe $\pm R^{(1)}{}_n$, $\pm R^{(2)}{}_n$, $\pm R^{(3)}{}_n$ etc. ebenfalls, und man hat

$$R^{(1)}{}_n + R^{(2)}{}_n + R^{(3)}{}_n + \text{etc.} < v^{(1)}{}_{n+1} + v^{(2)}{}_{n+1} + v^{(3)}{}_{n+1} + \text{etc.},$$
$$\text{d. i.} < \sigma_{n+1};$$

da nun wegen der Convergenz der Reihe σ_1, σ_2, σ_3 etc. das allgemeine Glied σ_{n+1} für $n = \infty$ verschwindet, so gilt dasselbe von $R^{(1)}{}_n + R^{(2)}{}_n +$ etc., daher nach (5) $s = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 +$ etc.

III.

Ueber Aristarchs Methode zur Bestimmung der Entfernung der Sonne von der Erde.

Von

dem Herausgeber.

Ueber Aristarchs Methode zur Bestimmung der Entfernung der Sonne von der Erde habe ich schon im Archiv Thl. V. S. 401. eine Abhandlung geliefert, in der ich mich vorzugsweise der Elemente der gewöhnlichen Trigonometrie bedient habe, will nun aber in dem vorliegenden Aufsatze diese Aufgabe noch mit Hülfe der analytischen Geometrie behandeln, weil ich die auf diesem Wege von mir gefundene Auflösung für nicht ganz uninteressant halte. Als eine Uebung für Schüler, selbst in der praktischen Anwendung des Spiegelsextanten zur Messung der Winkel, scheint mir diese Methode immer noch einen wohlbegründeten Werth zu besitzen, und daher die folgende neue Behandlung wohl zu verdienen.

Durch das Auge des Beobachters, durch den Mittelpunkt der Sonne, und den Mittelpunkt des Monds denken wir uns eine Ebene gelegt, in welcher alle folgenden Winkelmessungen ausgeführt werden. Diese Ebene sei in Taf. I. Fig. 5. die Ebene des Papiers. Bemerke ich nun, dass in dieser Figur E das Auge des Beobachters, O der Mittelpunkt des Monds und O_1 der Mittelpunkt der Sonne sein soll, so wird dieselbe im Uebrigen ganz durch sich selbst verständlich sein*). Gemessen wird

---

*) Zur weiteren Erläuterung der Methode Aristarchs verweise ich auf Thl. V. S. 401.

mit dem Spiegelsextanten der Winkel AEB zwischen der Lichtgränze A auf dem Monde und dem äusseren und inneren Sonnenrande B, welchen Winkel ich im Folgenden durch α bezeichnen werde; ferner der scheinbare Halbmesser Δ des Monds, und der scheinbare Halbmesser Δ_1 der Sonne, welchen letzteren wir als positiv oder als negativ betrachten wollen, jenachdem der Winkel α dem äusseren oder inneren Sonnenrande entspricht; endlich die scheinbare Entfernung des erleuchteten Mondrandes respective von dem äusseren oder inneren Sonnenrande, welche ich durch θ bezeichnen werde. Bezeichnen wir nun den Winkel AEO, indem wir denselben als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem die scheinbare Grösse des erleuchteten Theils des Monds grösser oder kleiner als der scheinbare Halbmesser des Monds ist, durch ω; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$\omega = \alpha - \theta - \Delta,$$

und der Winkel ω kann also aus den gemessenen Winkeln α, θ, Δ leicht berechnet werden; man könnte, um den Winkel ω zu erhalten, auch die scheinbare Grösse des erleuchteten Theils des Monds messen, und davon dessen scheinbaren Halbmesser abziehen. Auch ist, das Obige vorausgesetzt, in völliger Allgemeinheit

$$\angle OEO_1 = \alpha - \omega - \Delta_1 = \theta + \Delta - \Delta_1.$$

Die wahren Halbmesser des Monds und der Sonne seien r und r_1, und die Entfernungen der Mittelpunkte dieser beiden Weltkörper von dem Auge des Beobachters wollen wir durch ϱ und ϱ_1 bezeichnen*)

Man nehme jetzt das Auge des Beobachters als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy an; die durch das Auge des Beobachters, den Mittelpunkt des Monds und den Mittelpunkt der Sonne gelegte Ebene sei die Ebene der xy; der positive Theil der Axe der x sei von dem Auge des Beobachters nach dem Mittelpunkte der Sonne hin gerichtet, und der positive Theil der Axe der y werde so genommen, dass er von dem Auge des Beobachters an auf der Seite der Axe der x liegt, auf welcher sich der Mittelpunkt des Monds befindet. Dies vorausgesetzt, sind die Coordinaten des Mittelpunkts des Monds:

$$\varrho\cos(\alpha - \omega - \Delta),\ \varrho\sin(\alpha - \omega - \Delta);$$

und die Coordinaten des Mittelpunkts der Sonne sind:

$$\varrho_1,\ 0.$$

Also sind die Gleichungen der beiden Kreise, in denen von der Ebene der xy die Oberflächen des Monds und der Sonne geschnitten werden, respective:

*) Will man die gemessenen Winkel wegen der Refraction corrigiren, so muss man noch die Höhe des Monds und der Sonne messen.

$$1)\quad \begin{cases} \{x-\varrho\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}^2+\{y-\varrho\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}^2=r^2, \\ (x-\varrho_1)^2+y^2=r_1^2. \end{cases}$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten der Berührungspunkte der an diese beiden Kreise gezogenen gemeinschaftlichen äusseren Tangenten mit diesen beiden Kreisen für den Mond und die Sonne respective durch p, q und p_1, q_1; so haben wir nach 1) die Gleichungen:

$$2)\quad \begin{cases} \{p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}^2+\{q-\varrho\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}^2=r^2, \\ (p_1-\varrho_1)^2+q_1^2=r_1^2. \end{cases}$$

Die gemeinschaftlichen Berührenden werden durch die Gleichung

$$3)\quad \begin{cases} y-q=\dfrac{q-q_1}{p-p_1}(x-p), \text{ oder} \\ y-q_1=\dfrac{q-q_1}{p-p_1}(x-p_1) \end{cases}$$

charakterisirt; und die Gleichungen der nach den Berührungspunkten gezogenen Halbmesser des Monds und der Sonne sind:

$$4)\quad \begin{cases} y-q=\dfrac{q-\varrho\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)}{p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)}(x-p), \\ y-q_1=\dfrac{q_1}{p_1-\varrho_1}(x-p_1). \end{cases}$$

Also ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$5)\quad \begin{cases} 1+\dfrac{q-q_1}{p-p_1}\cdot\dfrac{q-\varrho\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)}{p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)}=0, \\ 1+\dfrac{q-q_1}{p-p_1}\cdot\dfrac{q_1}{p_1-\varrho_1}=0. \end{cases}$$

Aus den vier Gleichungen 2) und 5) müssten die Coordinaten p, q; p_1, q_1 bestimmt werden. Es lassen sich aber aus den in Rede stehenden Gleichungen verschiedene andere Gleichungen herleiten, welche die Rechnung erleichtern, indem es uns übrigens hier nicht eigentlich auf die Kenntniss der Coordinaten p, q; p_1, q_1 selbst ankommt.

Aus den beiden Gleichungen 5) ergiebt sich die Gleichung

$$6)\quad \frac{q-\varrho\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)}{p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)}=\frac{q_1}{p_1-\varrho_1},$$

also

$$q-\varrho\sin(\alpha-\omega-\Delta_1)=\frac{q_1}{p_1-\varrho_1}\{p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\Delta_1)\},$$

und folglich nach der ersten der Gleichungen 2):

$$\{p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\Delta_1)\}^2\{1+\left(\frac{q_1}{p_1-\varrho_1}\right)^2\}=r^2$$

oder

$$\{p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\Delta_1)\}^2\{(p_1-\varrho_1)^2+q_1^2\}=r^2(p_1-\varrho_1)^2;$$

d. i. nach der zweiten der Gleichungen 2):

$$r_1^2\{p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\Delta_1)\}^2=r^2(p_1-\varrho_1)^2.$$

Folglich ist

$$r_1\{p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\Delta_1)\}=\pm r(p_1-\varrho_1).$$

Verbindet man nun mit dieser Gleichung die Gleichung 6), so erhält man mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$r_1\{p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\Delta_1)\}=\pm r(p_1-\varrho_1),$$

$$r_1\{q-\varrho\sin(\alpha-\omega-\Delta_1)\}=\pm rq_1.$$

Für die äusseren Tangenten, auf die es uns hier nur ankommt, haben offenbar

$$p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\Delta_1) \text{ und } p_1-\varrho_1$$

gleiche Vorzeichen, und für diese Tangenten müssen wir daher in den vorstehenden Gleichungen die oberen Zeichen nehmen, wodurch wir erhalten:

$$7)\qquad \begin{cases} r_1\{p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\Delta_1)\}=r(p_1-\varrho_1), \\ r_1\{q-\varrho\sin(\alpha-\omega-\Delta_1)\}=rq_1. \end{cases}$$

Weil, wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem Δ_1 positiv oder negativ ist,

$$8)\qquad r=\varrho\sin\Delta,\quad r_1=\pm\varrho_1\sin\Delta_1$$

ist; so werden die Gleichungen 7):

$$9)\qquad \begin{cases} \varrho_1\{p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\Delta_1)\}\sin\Delta_1=\pm\varrho(p_1-\varrho_1)\sin\Delta, \\ \varrho_1\{q-\varrho\sin(\alpha-\omega-\Delta_1)\}\sin\Delta_1=\pm\varrho q_1\sin\Delta; \end{cases}$$

oder

$$9^*)\quad \begin{cases} \left\{\frac{p}{\varrho}-\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\right\}\sin\varDelta_1=\pm\left(\frac{p_1}{\varrho_1}-1\right)\sin\varDelta, \\ \left\{\frac{q}{\varrho}-\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\right\}\sin\varDelta_1=\pm\frac{q_1}{\varrho_1}\sin\varDelta. \end{cases}$$

Nach 5) haben wir ferner die Gleichungen:

$$(p-p_1)\{p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}+(q-q_1)\{q-\varrho\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}=0,$$

$$(p-p_1)(p_1-\varrho_1)+(q-q_1)q_1=0;$$

oder

$$p^2+q^2=pp_1+qq_1+\varrho\{(p-p_1)\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)+(q-q_1)\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\},$$

$$p_1^2+q_1^2=pp_1+qq_1-\varrho_1(p-p_1).$$

Wegen der Gleichungen 2) ist aber:

$$p^2+q^2=2\varrho\{p\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)+q\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}+r^2-\varrho^2,$$

$$p_1^2+q_1^2=2\varrho_1p_1+r_1^2-\varrho_1^2;$$

oder nach 8):

$$p^2+q^2=2\varrho\{p\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)+q\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}-\varrho^2\cos\varDelta^2,$$

$$p_1^2+q_1^2=2\varrho_1p_1-\varrho_1^2\cos\varDelta_1^2.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden:

$$2\varrho\{p\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)+q\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}-\varrho^2\cos\varDelta^2$$
$$=pp_1+qq_1+\varrho\{(p-p_1)\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)+(q-q_1)\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\},$$

$$2\varrho_1p_1-\varrho_1^2\cos\varDelta_1^2=pp_1+qq_1-\varrho_1(p-p_1);$$

oder

$$pp_1+qq_1=\varrho\{(p+p_1)\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)+(q+q_1)\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}-\varrho^2\cos\varDelta^2,$$

$$pp_1+qq_1=\varrho_1(p+p_1)-\varrho_1^2\cos\varDelta_1^2.$$

Also ist

$$\varrho\{(p+p_1)\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)+(q+q_1)\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}-\varrho^2\cos\varDelta^2$$
$$=\varrho_1(p+p_1)-\varrho_1^2\cos\varDelta_1^2,$$

oder

$$10)\quad \varrho^2\cos\varDelta^2-\varrho_1^2\cos\varDelta_1^2=-\{\varrho_1-\varrho\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}.(p+p_1)$$
$$+\varrho\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1).(q+q_1).$$

Endlich hat man offenbar auch die Gleichung:

11) $$q = p\tang(\alpha - \Delta_1).$$

Nach dem Obigen (9)) ist:

$$p_1 - \varrho_1 = \pm\frac{\varrho_1 \sin\Delta_1}{\varrho\sin\Delta}\{p - \varrho\cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\},$$

$$q_1 = \pm\frac{\varrho_1 \sin\Delta_1}{\varrho\sin\Delta}\{q - \varrho\sin(\alpha - \omega - \Delta_1)\};$$

also

$$p + p_1 = \varrho_1 + p \pm\frac{\varrho_1 \sin\Delta_1}{\varrho\sin\Delta}\{p - \varrho\cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\},$$

$$q + q_1 = \quad q \pm\frac{\varrho_1 \sin\Delta_1}{\varrho\sin\Delta}\{q - \varrho\sin(\alpha - \omega - \Delta_1)\};$$

oder

$$p + p_1 = \varrho_1 + \varrho\cos(\alpha - \omega - \Delta_1) + \{1 \pm\frac{\varrho_1 \sin\Delta_1}{\varrho\sin\Delta}\}\{p - \varrho\cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\},$$

$$q + q_1 = \quad \varrho\sin(\alpha - \omega - \Delta_1) + \{1 \pm\frac{\varrho_1 \sin\Delta_1}{\varrho\sin\Delta}\}\{q - \varrho\sin(\alpha - \omega - \Delta_1)\};$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{aligned}
&\varrho_1^2\cos\Delta_1^2 - \varrho^2\cos\Delta^2 = \varrho_1^2 - \varrho^2\cos(\alpha - \omega - \Delta_1)^2 \\
&+\{1 \pm\frac{\varrho_1 \sin\Delta_1}{\varrho\sin\Delta}\}\{\varrho_1 - \varrho\cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\}\{p - \varrho\cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\} \\
&-\varrho^2\sin(\alpha - \omega - \Delta_1)^2 - \{1 \pm\frac{\varrho_1 \sin\Delta_1}{\varrho\sin\Delta}\}\varrho\sin(\alpha - \omega - \Delta_1)\{q - \varrho\sin(\alpha - \omega - \Delta_1)\} \\
&= \varrho_1^2 - \varrho^2 + \{1 \pm\frac{\varrho_1 \sin\Delta_1}{\varrho\sin\Delta}\}\{\varrho_1 - \varrho\cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\}\{p - \varrho\cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\} \\
&-\{1 \pm\frac{\varrho_1 \sin\Delta_1}{\varrho\sin\Delta}\}\varrho\sin(\alpha - \omega - \Delta_1)\{q - \varrho\sin(\alpha - \omega - \Delta_1)\};
\end{aligned}$$

also, wie sogleich erhellet:

$$\begin{aligned}
&\varrho\sin\Delta(\varrho\sin\Delta \mp \varrho_1\sin\Delta_1) \\
&= \{\varrho_1 - \varrho\cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\}\{p - \varrho\cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\} \\
&\quad - \varrho\sin(\alpha - \omega - \Delta_1)\{q - \varrho\sin(\alpha - \omega - \Delta_1)\}.
\end{aligned}$$

Weil ferner

$$q = p\tang(\alpha - \Delta_1)$$

ist, so ist

$$q-\varrho\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)=p\,\mathrm{tang}(\alpha-\varDelta_1)-\varrho\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\,\mathrm{tang}(\alpha-\varDelta_1)$$
$$+\varrho\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\,\mathrm{tang}(\alpha-\varDelta_1)$$
$$-\varrho\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1),$$

also, wie man leicht findet:

$$-\varrho\sin\omega=\sin(\alpha-\varDelta_1).\{p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}$$
$$-\cos(\alpha-\varDelta_1).\{q-\varrho\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}.$$

Durch Elimination von

$$q-\varrho\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)$$

ergiebt sich:

$$\varrho(\varrho\sin\varDelta\mp\varrho_1\sin\varDelta_1)\sin\varDelta\cos(\alpha-\varDelta_1)+\varrho^2\sin\omega\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}$$
$$=\{\varrho_1\cos(\alpha-\varDelta_1)-\varrho\cos\omega\}\{p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\},$$

und durch Elimination von

$$p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)$$

erhält man:

$$\varrho(\varrho\sin\varDelta\mp\varrho_1\sin\varDelta_1)\sin\varDelta\sin(\alpha-\varDelta_1)+\varrho\{\varrho_1-\varrho\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}\sin\omega$$
$$=\{\varrho_1\cos(\alpha-\varDelta_1)-\varrho\cos\omega\}\{q-\varrho\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}.$$

Quadrirt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichungen und addirt dieselben dann zu einander, so erhält man, weil nach dem Obigen

$$\{p-\varrho\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}^2+\{q-\varrho\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}^2=r^2=\varrho^2\sin\varDelta^2$$

ist, die bemerkenswerthe Gleichung:

$$\{(\varrho\sin\varDelta\mp\varrho_1\sin\varDelta_1)\sin\varDelta\cos(\alpha-\varDelta_1)+\varrho\sin\omega\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}^2$$
$$+\{(\varrho\sin\varDelta\mp\varrho_1\sin\varDelta_1)\sin\varDelta\sin(\alpha-\varDelta_1)+(\varrho_1-\varrho\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1))\sin\omega\}^2$$
$$=\{\varrho_1\cos(\alpha-\varDelta_1)-\varrho\cos\omega\}^2\sin\varDelta^2;$$

oder, wenn man

$$12)\qquad u=\frac{\varrho}{\varrho_1}$$

setzt, die Gleichung:

$$\{(u\sin\varDelta\mp\sin\varDelta_1)\sin\varDelta\cos(\alpha-\varDelta_1)+u\sin\omega\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}^2$$
$$+\{(u\sin\varDelta\mp\sin\varDelta_1)\sin\varDelta\sin(\alpha-\varDelta_1)+(1-u\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1))\sin\omega\}^2$$
$$=\{\cos(\alpha-\varDelta_1)-u\cos\omega\}^2\sin\varDelta^2,$$

oder:

$$\{(\sin\Delta^2\cos(\alpha-\Delta_1)+\sin\omega\sin(\alpha-\omega-\Delta_1))u\mp\sin\Delta\sin\Delta_1\cos(\alpha-\Delta_1)\}^2$$
$$+\{(\sin\Delta^2\sin(\alpha-\Delta_1)-\sin\omega\cos(\alpha-\omega-\Delta_1))u\mp\sin\Delta\sin\Delta_1\sin(\alpha-\Delta_1)+\sin\omega\}^2$$
$$=\sin\Delta^2\{\cos(\alpha-\Delta_1)-u\cos\omega\}^2.$$

Aus dieser Gleichung müsste man das Verhältniss u der Entfernungen ϱ und ϱ_1 des Monds und der Sonne von der Erde bestimmen; die Rechnung wird aber etwas weitläufig, und das folgende Verfahren führt, wie es mir scheint, kürzer zum Zweck. Aus dem Obigen erhält man leicht:

$$\frac{p}{\varrho}=\cos(\alpha-\omega-\Delta_1)$$
$$+\frac{(\varrho\sin\Delta\mp\varrho_1\sin\Delta_1)\sin\Delta\cos(\alpha-\Delta_1)+\varrho\sin\omega\sin(\alpha-\omega-\Delta_1)}{\varrho_1\cos(\alpha-\Delta_1)-\varrho\cos\omega},$$

$$\frac{q}{\varrho}=\sin(\alpha-\omega-\Delta_1)$$
$$+\frac{(\varrho\sin\Delta\mp\varrho_1\sin\Delta_1)\sin\Delta\sin(\alpha-\Delta_1)+\{\varrho_1-\varrho\cos(\alpha-\omega-\Delta_1)\}\sin\omega}{\varrho_1\cos(\alpha-\Delta_1)-\varrho\cos\omega};$$

also, wie man leicht findet:

$$\frac{p}{\varrho}=\cos(\alpha-\Delta_1)\frac{\varrho_1\{\cos(\alpha-\omega-\Delta_1)\mp\sin\Delta\sin\Delta_1\}-\varrho\cos\Delta^2}{\varrho_1\cos(\alpha-\Delta_1)-\varrho\cos\omega},$$

$$\frac{q}{\varrho}=\sin(\alpha-\Delta_1)\frac{\varrho_1\{\cos(\alpha-\omega-\Delta_1)\mp\sin\Delta\sin\Delta_1\}-\varrho\cos\Delta^2}{\varrho_1\cos(\alpha-\Delta_1)-\varrho\cos\omega};$$

wobei man die leicht zu beweisende Relation

$$\sin\omega+\cos(\alpha-\Delta_1)\sin(\alpha-\omega-\Delta_1)=\sin(\alpha-\Delta_1)\cos(\alpha-\omega-\Delta_1)$$

zu beachten hat. Also ist

$$\frac{p^2+q^2}{\varrho^2}=\left\{\frac{\varrho_1\{\cos(\alpha-\omega-\Delta_1)\mp\sin\Delta\sin\Delta_1\}-\varrho\cos\Delta^2}{\varrho_1\cos(\alpha-\Delta_1)-\varrho\cos\omega}\right\}^2.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\frac{p^2+q^2}{\varrho^2}=2\left\{\frac{p}{\varrho}\cos(\alpha-\omega-\Delta_1)+\frac{q}{\varrho}\sin(\alpha-\omega-\Delta_1)\right\}-\cos\Delta^2,$$

also

$$\frac{p^2+q^2}{\varrho^2}=2\cos\omega\frac{\varrho_1\{\cos(\alpha-\omega-\Delta_1)\mp\sin\Delta\sin\Delta_1\}-\varrho\cos\Delta^2}{\varrho_1\cos(\alpha-\Delta_1)-\varrho\cos\omega}-\cos\Delta^2;$$

und setzen wir nun

13) $$v=\frac{\varrho_1\{\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\mp\sin\varDelta\sin\varDelta_1\}-\varrho\cos\varDelta^2}{\varrho_1\cos(\alpha-\varDelta_1)-\varrho\cos\omega}$$
$$=\frac{\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\mp\sin\varDelta\sin\varDelta_1-u\cos\varDelta^2}{\cos(\alpha-\varDelta_1)-u\cos\omega},$$

so ist nach dem Vorhergehenden:

$$v^2=2v\cos\omega-\cos\varDelta^2$$

oder

$$v^2-2\cos\omega\,.\,v+\cos\varDelta^2=0,$$

woraus, wenn man die Quadratwurzel positiv und negativ nimmt,

$$v=\cos\omega+\sqrt{\cos\omega^2-\cos\varDelta^2}$$

oder

$$v=\cos\omega+\sqrt{\sin(\varDelta+\omega)\sin(\varDelta-\omega)}$$

folgt. Aus der Gleichung 13) ergiebt sich aber:

$$u=\frac{\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\mp\sin\varDelta\sin\varDelta_1-v\cos(\alpha-\varDelta_1)}{\cos\varDelta^2-v\cos\omega},$$

also

$$u=\frac{\sin\omega\sin(\alpha-\varDelta_1)\mp\sin\varDelta\sin\varDelta_1-\cos(\alpha-\varDelta_1)\sqrt{\sin(\varDelta+\omega)\sin(\varDelta-\omega)}}{\cos\varDelta^2-\cos\omega^2-\cos\omega\sqrt{\sin(\varDelta+\omega)\sin(\varDelta-\omega)}}$$

oder

$$u=\frac{\sin\omega\sin(\alpha-\varDelta_1)\mp\sin\varDelta\sin\varDelta_1-\cos(\alpha-\varDelta_1)\sqrt{\sin(\varDelta+\omega)\sin(\varDelta-\omega)}}{-\sin(\varDelta+\omega)\sin(\varDelta-\omega)-\cos\omega\sqrt{\sin(\varDelta+\omega)\sin(\varDelta-\omega)}},$$

wo sich nun noch frägt, mit welchem Vorzeichen man in dieser Formel die Quadratwurzel zu nehmen hat, worüber sich auf folgende Art eine Entscheidung geben lässt.

Erstens ist zu bemerken, dass

$$v=\cos\omega+\sqrt{\cos\omega^2-\cos\varDelta^2}$$

immer positiv ist, man mag die Quadratwurzel positiv oder negativ nehmen, weil im vorliegenden Falle $\cos\omega$ immer positiv ist. Ferner ist nach dem Obigen

$$\frac{q}{\varrho}=v\sin(\alpha-\varDelta_1),$$

d. i.
$$\frac{q}{\varrho}=v\sin AEO_1.$$

$$\{(\sin\varDelta^2\cos(\alpha-\varDelta_1)+\sin\omega\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1))u\mp\sin\varDelta\sin\varDelta_1\cos(\alpha-\varDelta_1)\}^2$$
$$+\{(\sin\varDelta^2\sin(\alpha-\varDelta_1)-\sin\omega\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1))u\mp\sin\varDelta\sin\varDelta_1\sin(\alpha-\varDelta_1)+\sin\omega\}^2$$
$$=\sin\varDelta^2\{\cos(\alpha-\varDelta_1)-u\cos\omega\}^2.$$

Aus dieser Gleichung müsste man das Verhältniss u der Entfernungen ϱ und ϱ_1 des Monds und der Sonne von der Erde bestimmen; die Rechnung wird aber etwas weitläufig, und das folgende Verfahren führt, wie es mir scheint, kürzer zum Zweck. Aus dem Obigen erhält man leicht:

$$\frac{p}{\varrho}=\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)$$
$$+\frac{(\varrho\sin\varDelta\mp\varrho_1\sin\varDelta_1)\sin\varDelta\cos(\alpha-\varDelta_1)+\varrho\sin\omega\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)}{\varrho_1\cos(\alpha-\varDelta_1)-\varrho\cos\omega},$$

$$\frac{q}{\varrho}=\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)$$
$$+\frac{(\varrho\sin\varDelta\mp\varrho_1\sin\varDelta_1)\sin\varDelta\sin(\alpha-\varDelta_1)+\{\varrho_1-\varrho\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\}\sin\omega}{\varrho_1\cos(\alpha-\varDelta_1)-\varrho\cos\omega};$$

also, wie man leicht findet:

$$\frac{p}{\varrho}=\cos(\alpha-\varDelta_1)\frac{\varrho_1\{\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\mp\sin\varDelta\sin\varDelta_1\}-\varrho\cos\varDelta^2}{\varrho_1\cos(\alpha-\varDelta_1)-\varrho\cos\omega},$$

$$\frac{q}{\varrho}=\sin(\alpha-\varDelta_1)\frac{\varrho_1\{\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\mp\sin\varDelta\sin\varDelta_1\}-\varrho\cos\varDelta^2}{\varrho_1\cos(\alpha-\varDelta_1)-\varrho\cos\omega};$$

wobei man die leicht zu beweisende Relation

$$\sin\omega+\cos(\alpha-\varDelta_1)\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)=\sin(\alpha-\varDelta_1)\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)$$

zu beachten hat. Also ist

$$\frac{p^2+q^2}{\varrho^2}=\left\{\frac{\varrho_1\{\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\mp\sin\varDelta\sin\varDelta_1\}-\varrho\cos\varDelta^2}{\varrho_1\cos(\alpha-\varDelta_1)-\varrho\cos\omega}\right\}^2.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\frac{p^2+q^2}{\varrho^2}=2\left\{\frac{p}{\varrho}\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)+\frac{q}{\varrho}\sin(\alpha-\omega-\varDelta_1)\right\}-\cos\varDelta^2,$$

also

$$\frac{p^2+q^2}{\varrho^2}=2\cos\omega\frac{\varrho_1\{\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\mp\sin\varDelta\sin\varDelta_1\}-\varrho\cos\varDelta^2}{\varrho_1\cos(\alpha-\varDelta_1)-\varrho\cos\omega}-\cos\varDelta^2;$$

und setzen wir nun

13) $$v=\frac{\varrho_1\{\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\mp\sin\varDelta\sin\varDelta_1\}-\varrho\cos\varDelta^2}{\varrho_1\cos(\alpha-\varDelta_1)-\varrho\cos\omega}$$
$$=\frac{\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\mp\sin\varDelta\sin\varDelta_1-u\cos\varDelta^2}{\cos(\alpha-\varDelta_1)-u\cos\omega},$$

so ist nach dem Vorhergehenden:

$$v^2=2v\cos\omega-\cos\varDelta^2$$

oder

$$v^2-2\cos\omega\,.\,v+\cos\varDelta^2=0,$$

woraus, wenn man die Quadratwurzel positiv und negativ nimmt,

$$v=\cos\omega+\sqrt{\cos\omega^2-\cos\varDelta^2}$$

oder

$$v=\cos\omega+\sqrt{\sin(\varDelta+\omega)\sin(\varDelta-\omega)}$$

folgt. Aus der Gleichung 13) ergiebt sich aber:

$$u=\frac{\cos(\alpha-\omega-\varDelta_1)\mp\sin\varDelta\sin\varDelta_1-v\cos(\alpha-\varDelta_1)}{\cos\varDelta^2-v\cos\omega},$$

also

$$u=\frac{\sin\omega\sin(\alpha-\varDelta_1)\mp\sin\varDelta\sin\varDelta_1-\cos(\alpha-\varDelta_1)\sqrt{\sin(\varDelta+\omega)\sin(\varDelta-\omega)}}{\cos\varDelta^2-\cos\omega^2-\cos\omega\sqrt{\sin(\varDelta+\omega)\sin(\varDelta-\omega)}}$$

oder

$$u=\frac{\sin\omega\sin(\alpha-\varDelta_1)\mp\sin\varDelta\sin\varDelta_1-\cos(\alpha-\varDelta_1)\sqrt{\sin(\varDelta+\omega)\sin(\varDelta-\omega)}}{-\sin(\varDelta+\omega)\sin(\varDelta-\omega)-\cos\omega\sqrt{\sin(\varDelta+\omega)\sin(\varDelta-\omega)}},$$

wo sich nun noch frägt, mit welchem Vorzeichen man in dieser Formel die Quadratwurzel zu nehmen hat, worüber sich auf folgende Art eine Entscheidung geben lässt.

Erstens ist zu bemerken, dass

$$v=\cos\omega+\sqrt{\cos\omega^2-\cos\varDelta^2}$$

immer positiv ist, man mag die Quadratwurzel positiv oder negativ nehmen, weil im vorliegenden Falle $\cos\omega$ immer positiv ist. Ferner ist nach dem Obigen

$$\frac{q}{\varrho}=v\sin(\alpha-\varDelta_1),$$

d. i. $$\frac{q}{\varrho}=v\sin AEO_1.$$

Nähme man nun $\sqrt{\cos\omega^2-\cos\Delta^2}$ positiv, so wäre $\varsigma_1>\cos\omega$, also

$$\frac{q}{\varrho}>\cos\omega\sin AEO_1,$$

d. i.

$$q>\varrho\cos\omega\sin AEO_1,$$

oder

$$q>EO.\cos\omega\sin AEO_1.$$

Es ist aber

$$q=EA.\sin\ AEO_1,$$

also

$$EA.\sin AEO_1>EO.\cos\omega\sin AEO_1,$$

woraus

$$EA>EO.\cos\omega$$

folgt, was offenbar falsch ist, da der Winkel EAO hier jedenfalls stumpf, folglich

$$EA<EO.\cos\omega$$

ist, wie augenblicklich erhellt, wenn man sich von O auf die über A verlängerte EA ein Perpendikel gefällt denkt. Also muss man

$$\sqrt{\cos\omega^2-\cos\Delta^2}=\sqrt{\sin(\Delta+\omega)\sin(\Delta-\omega)}$$

negativ nehmen, und daher nach dem Obigen

13)

$$u=\frac{\sin\omega\sin(\alpha-\Delta_1)\mp\sin\Delta\sin\Delta_1+\cos(\alpha-\Delta_1)\sqrt{\sin(\Delta+\omega)\sin(\Delta-\omega)}}{\cos\omega\sqrt{\sin(\Delta+\omega)\sin(\Delta-\omega)}-\sin(\Delta+\omega)\sin(\Delta-\omega)}$$

setzen. Mittelst dieser Formel, in welcher man das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem Δ_1 positiv oder negativ ist, d. h. jenachdem der Winkel α dem äusseren oder inneren Sonnenrande entspricht, kann man das Verhältniss

$$u=\frac{\varrho}{\varrho_1}$$

unmittelbar aus den gemessenen Winkeln berechnen, und hat man ϱ, d. h. die Entfernung des Monds von der Erde, anderweitig bestimmt, so kennt man auch die Entfernung

$$14)\qquad \varrho_1=\frac{\varrho}{u}$$

der Sonne von der Erde.

IV.

Ueber einige Aufgaben der höhern Geometrie.

Von

dem Herrn Professor Dr. Dienger

an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

1.

Wickelt man einen Faden auf eine ebene Kurve, fasst einen seiner Endpunkte und beschreibt mit demselben eine Kurve, indem man den Faden von der gegebenen Kurve abwickelt, d. h. ihn fortwährend gespannt erhält, so beschreibt er eine Evolvente der gegebenen Kurve.

Geometrisch gesprochen wird also die Erzeugungsweise der Evolvente folgende sein: In einem Punkte $(x_1\, y_1)$ der gegebenen (ebenen) Kurve ziehe man eine Tangente und nehme auf derselben einen Punkt an, dessen Entfernung vom Punkte $(x_1\, y_1)$ gleich a sei; in irgend einem beliebigen andern Punkte (xy) dieser Kurve ziehe man gleichfalls eine Tangente und nehme auf derselben, in derselben Richtung wie vorhin, einen Punkt an, dessen Entfernung vom Punkte $(x\,y)$ gleich $a +$ dem Bogen der Kurve sei, der zwischen dem anfänglich gewählten Punkte $(x_1\, y_1)$ und dem jetzigen Punkte $(x\,y)$ enthalten ist. Der Ort dieser Punkte auf den verschiedenen Tangenten ist nun die Evolvente.

Sei $(\alpha\beta)$ ein Punkt der Evolvente, der dem Punkte $(x\,y)$ der gegebenen Kurve, welche in so ferne Evolute heisst, entspricht, so ist die Bogenlänge vom Punkte $(x_1 y_1)$ zum Punkte (xy) gleich

$$\pm\int_{x_1}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x,$$

je nachdem der Bogen wächst mit wachsendem x oder nicht. Geht nun die Abwickelung so vor sich, dass mit wachsendem x der abgewickelte Bogen wächst, wie in Taf. I. Fig. 3., so ist offenbar $x > \alpha$, während

$$AB = +\int_{x_1}^{x}\sqrt{\quad +\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x,$$

also

$$BB' = a + \int_{x_1}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x.$$

Geht sie aber so vor sich, dass mit wachsendem x der abgewickelte Bogen abnimmt, wie in Taf. I. Fig. 4., so ist

$$x < \alpha \text{ und } AB = -\int_{x_1}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x,$$

also

$$BB' = a - \int_{x_1}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x.$$

Zugleich ist immer

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \left(a \pm \int_{x_1}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x\right)^2, \qquad (1)$$

worin die Zeichen nach obigen Bestimmungen zu wählen sind. Da ferner der Punkt $(\alpha\beta)$ in der Tangente im Punkte (xy) liegt, so ist

$$\beta - y = \frac{\partial y}{\partial x}(\alpha - x); \qquad (2)$$

aus welcher Gleichung, in Verbindung mit (1), folgt, dass im Falle der ersten Figur:

$$\alpha - x = \frac{-a - \int_{x_1}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}},$$

$$\beta - y = \frac{-a - \int_{x_1}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \cdot \frac{\partial y}{\partial x};$$

und im Falle der zweiten:

$$\alpha-x=\frac{a-\int_{x_1}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}},$$

$$\beta-y=\frac{a-\int_{x_1}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}\,\frac{\partial y}{\partial x};$$

welche Formeln sich in eine einzige zusammenfassen lassen:

$$\alpha-x=\frac{\mp a-\int_{x_1}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}},$$

$$\beta-y=\frac{\mp a-\int_{x_1}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}\,\frac{\partial y}{\partial x}; \qquad (3)$$

worin die obern Zeichen im Falle der ersten, die untern im Falle der zweiten Figur gelten.

Die Grösse a hat den Charakter einer willkührlichen Konstante, so dass es also unendlich viele Evolventen einer Kurve giebt. Die allgemeine Gleichung derselben wird erhalten, wenn man in den Gleichungen (3) y durch x ersetzt, vermöge der gegebenen Gleichung der Evolute, und sodann x zwischen beiden Gleichungen eliminirt.

Aus (3) folgt:

$$(\alpha-x)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=\mp a-\int_{x_1}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x,$$

$$\frac{(\beta-y)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}{\frac{\partial y}{\partial x}}=\mp a-\int_{x_1}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x. \qquad (3')$$

Aus (3) folgt ferner, dass α und β Funktionen von x sind, und dass man also die Differentialquotienten $\frac{\partial\alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial\beta}{\partial x}$ aus diesen Gleichungen ziehen kann. Man erhält, wenn man die (3') anwendet:

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-1\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}+\frac{(\alpha-x)\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}=-\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial x}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}{\frac{\partial y}{\partial x}}+\frac{(\beta-y)\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial y}{\partial x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}$$

$$-\frac{(\beta-y)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=-\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

woraus:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]+(\alpha-x)\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial y}{\partial x}-(\beta-y)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0.$$

Beachtet man die Gleichung (2), so ergiebt sich hieraus:

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial x}=0, \text{ d. h. } \frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial x}+1=0; \tag{4}$$

welche Gleichung ausdrückt, dass die Tangente im Punkte $(x\,y)$ der Evolute Normale sei in dem entsprechenden Punkte $(\alpha\,\beta)$ der Evolvente.

Daraus ergiebt sich nun, dass alle Evolventen einer gegebenen Kurve einander parallel seien, so dass die Lehrsätze über parallele Kurven ohne Weiteres auf sie anwendbar sind. (Siehe darüber Crelle: Sammlung mathemathischer Aufsätze und Bemerkungen, zweiter Band. S. 204 ff.). Zugleich ergiebt sich daraus eine andere, oftmals bequemere Art, die Gleichung der Evolventen zu erhalten. Man eliminire nämlich vermittelst der Gleichung der Evolute x, y, $\frac{\partial y}{\partial x}$ aus den zwei Gleichungen

$$(\alpha-x)\frac{\partial y}{\partial x}-(\beta-y)=0\,,\quad \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x}+1=0; \tag{5}$$

so wird das Resultat die Differentialgleichung sämmtlicher Evolventen sein.

Es erhellt aus dem Obigen, dass die Evolute einer gegebenen (ebenen) Kurve nichts Anderes ist, als die einhüllende Kurve aller Normalen dieser letzteren, so dass, wenn (xy) ein Punkt der gegebenen Kurve ist, man die Gleichung ihrer Evolute erhalten wird, wenn man vermittelst der Gleichung der gegebenen Kurve x, y, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ eliminirt zwischen den Gleichungen:

$$\alpha-x+\frac{\partial y}{\partial x}(\beta-y)=0,\quad -1-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\beta-y)=0\,; \tag{6}$$

so dass die erhaltene Gleichung zwischen α und β die gesuchte Gleichung der Evolute ist. Eine gegebene Kurve hat also eine einzige Evolute. Aus den zwei Gleichungen (6) folgt zugleich auch, dass die Evolute die Kurve der Krümmungsmittelpunkte der gegebenen krummen Linie ist.

Es könnte bei dieser Art, die Untersuchung zu führen, die Frage entstehen, ob eine Kurve, die zu einer gegebenen Kurve in einem solchen Verhältniss stehe, dass ihre Punkte sämmtlich auf den Tangenten der gegebenen Kurve liegen, jeder Punkt auf einer andern, und dass diese Tangenten zugleich Normalen an die gesuchte Kurve seien, nothwendig eine Evolvente der gegebenen Kurve sei. Die eben angegebenen Bedingungen, in die analytische Sprache eingekleidet, geben die Gleichungen (5), aus denen unmittelbar die (3′) abgeleitet werden, welche die Frage bejahen. Dass dies so ist, lässt sich leicht beweisen. Aus der ersten Gleichung (5) folgt, wenn man nach x differenzirt:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}+(\alpha-x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial \beta}{\partial x}.$$

Ferner ist das Resultat der Elimination von $\frac{\partial y}{\partial x}$ zwischen den (5):

$$(\alpha-x)\frac{\partial \alpha}{\partial x}+(\beta-y)\frac{\partial \beta}{\partial x}=0,$$

und wenn man obigen Werth von $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ einsetzt und beachtet, dass $\frac{\beta-y}{\alpha-x}=\frac{\partial y}{\partial x}$:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]+(\alpha-x)\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0,\text{ und}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial y}{\partial x}-(\beta-y)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0;$$

welche Gleichungen die Differentialgleichungen von (3′) sind.

Gesetzt, die (gegebene) Gleichung der Evolute sei

$$y^2=\frac{8}{27p}(x-p)^3,$$

so ist

$$y\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{12}{27p}(x-p)^2,$$

$$y=\frac{12}{27p}\cdot\frac{(x-p)^2}{\frac{\partial y}{\partial x}}=-\frac{12}{27p}(x-p)^2\frac{\partial\beta}{\partial\alpha},$$

$$(x-p)^2=\left(\frac{27py^2}{8}\right)^{\frac{2}{3}};$$

also

$$y=-\frac{p}{\left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right)^3},\quad x-p=\frac{3p^{\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right)^2};$$

so dass die gesuchte Differentialgleichung ist:

$$(\alpha-p)\left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right)^2-\frac{p}{2}+\beta\left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right)^3=0,$$

oder wenn man $\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}=\beta'$ setzt:

$$(\alpha-p)\beta'^2+\beta\beta'^3-\frac{p}{2}=0,\quad \beta=\frac{p}{2\beta'^3}-\frac{\alpha-p}{\beta'}.$$

Daraus folgt durch Differentiation nach α:

$$\beta'=-\frac{3p}{2\beta'^4}\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}+\frac{(\alpha-p)\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}}{\beta'^2}-\frac{1}{\beta'},$$

oder

$$\left(\beta'+\frac{1}{\beta'}\right)\partial\alpha+\left(\frac{3p}{2\beta'^4}+\frac{p}{\beta'^2}\right)\partial\beta'-\frac{\alpha}{\beta'^2}\partial\beta'=0,$$

welche Gleichung zwischen den zwei Veränderlichen α und β', indem man sie schreibt:

$$(\beta'^5+\beta'^3)\partial\alpha+\left(\frac{3p}{2}+p\beta'^2\right)\partial\beta'-\alpha\beta'^2\partial\beta'=0,$$

zum Integral hat:

$$\alpha=e^{\int\frac{\partial\beta'}{\beta'^3+\beta'}}\left[C-\int\frac{\frac{3p}{2}+p\beta'^2}{\beta'^5+\beta'^3}e^{-\int\frac{\partial\beta'}{\beta'^3+\beta'}}\partial\beta'.\right].$$

Nun ist

$$\int\frac{\partial\beta'}{\beta'^3+\beta'}=\int\frac{\partial\beta'}{\beta'(\beta'^2+1)}=\int\frac{\partial\beta'}{\beta'}-\int\frac{\beta'\partial\beta'}{1+\beta'^2}=\mathrm{l.}\left(\frac{\beta'}{\sqrt{1+\beta'^2}}\right);$$

also

$$e^{-\int\frac{\partial\beta'}{\beta'^3+\beta'}}=\frac{\sqrt{1+\beta'^2}}{\beta'}$$

und

$$\frac{\frac{3p}{2}+p\beta'^2}{\beta'^5+\beta'^3}e^{-\int\frac{\partial\beta'}{\beta'^3+\beta'}}=\frac{3p}{2}\frac{\sqrt{1+\beta'^2}}{\beta'^4(1+\beta'^2)}+\frac{p\beta'\sqrt{1+\beta'^2}}{\beta'^3(1+\beta'^2)}$$

$$=\frac{3p}{2}\cdot\frac{1}{\beta'^4\sqrt{1+\beta'^2}}+\frac{p}{\beta'^2\sqrt{1+\beta'^2}}.$$

Das Integral dieser Grösse nach β' ist:

$$-\frac{p}{2\beta'^3}\sqrt{1+\beta'^2},$$

so dass also das gesuchte Integral ist:

$$\alpha+\frac{\beta'}{\sqrt{1+\beta'^2}}\left[C-\frac{p}{2\beta'^3}\sqrt{1+\beta'^2}\right]=0;$$

eliminirt man nun zwischen dieser Gleichung und

$$(\alpha-p)\beta'^2+\beta\beta'^3-\frac{p}{2}=0$$

die Grösse β', so erhält man die Gleichung der Evolvente.

Für den Fall, dass $C=0$, erhält man dadurch $\beta^2=2p\alpha$, die Gleichung der Parabel, wie bekannt.

II.

Dehnt man dieselbe Betrachtungsweise auf Kurven doppelter Krümmung aus, so erhält man, wenn man unter einer Evolvente einer doppelt gekrümmten Kurve eine krumme Linie versteht, die durch den einen Endpunkt eines Fadens beschrieben wird, der sich von der gegebenen Kurve abwickelt, die Gleichungen der Evolvente, wenn man vermittelst der Gleichungen der gegebenen Kurve x, y, z eliminirt zwischen:

(7)

$$\alpha - x = \frac{\mp a - \int_{x_1}^{x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,\partial x}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}},$$

$$\beta - y = \frac{\mp a - \int_{x_1}^{x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,\partial x}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}\,\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\gamma - z = \frac{\mp a - \int_{x_1}^{x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}\,\frac{\partial z}{\partial x};$$

in welchen Formeln die obern Zeichen gelten, wenn die Abwickelung so vor sich geht, dass der abgewickelte Bogen wächst mit wachsendem x, die untern im entgegengesetzten Falle.

Durch Differentiation nach x zieht man aus den Gleichungen (7):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] + (\alpha - x)\left[\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]=0,$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$+(\beta - y)\left[\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]=0,$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$+(\gamma - z)\left[\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]=0;$$

während

$$\beta - y = \frac{\partial y}{\partial x}(\alpha - x), \quad \gamma - z = \frac{\partial z}{\partial x}(\alpha - x).$$

Daraus ergiebt sich nun, indem man obige Gleichungen addirt:

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] = 0,$$

d. h.

$$1 + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad (8)$$

welche Gleichung aussagt, dass die Tangente im Punkte (xyz) der gegebenen Kurve (Evolute) eine Normale an die Evolvente im entsprechenden Punkte $(\alpha\beta\gamma)$ ist.

Die Evolvente hat also ebenfalls die Eigenschaft auf den Tangenten an die Evolute senkrecht zu stehen und sie sämmtlich zu schneiden. Nun lässt sich leicht nachweisen, dass jede Kurve, welche diese Eigenschaften hat, nothwendig eine Evolvente der gegebenen Kurve sein muss.

Sei nämlich (xyz) ein Punkt der gegebenen Kurve, α, β, γ die Koordinaten desjenigen Punkts der mit den genannten Eigenschaften begabten Kurve, der in der Tangente an die erste Kurve liegt, so hat man als analytischen Ausdruck der zwei Eigenschaften die Gleichungen:

$$\beta - y = \frac{\partial y}{\partial x}(\alpha - x), \quad \gamma - z = \frac{\partial z}{\partial x}(\alpha - x), \quad 1 + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \qquad (9)$$

welche Gleichungen man auch nach x differenziren darf, indem man α, β, γ als Funktionen von x ansieht. Aus den ersten zwei folgt:

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + (\alpha - x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + (\alpha - x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

während die dritte auch geschrieben werden kann:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Führt man hier obige Werthe von $\frac{\partial \beta}{\partial x}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ ein, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=-(\alpha-x)\,\frac{\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}=-\frac{1}{2}(\alpha-x)\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]}{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}.$$

Daraus folgt durch Integration:

$$\alpha=e^{-\int\frac{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\partial x}{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}\left[C+\int\frac{x\frac{\partial}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]}{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,e^{\frac{1}{2}\int\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\partial x}{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}\,\partial x\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}\left[C+\frac{1}{2}\int\frac{x\frac{\partial}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}\,\partial x\right].$$

Durch theilweise Integration ergiebt sich:

$$\frac{1}{2}\int^x \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}\partial x$$

$$=x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}-\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,\partial x,$$

also endlich:

$$\alpha-x=\frac{C-\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,\partial x}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}},$$

und daraus:

$$\beta-y=\frac{C-\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,\partial x}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\gamma-z=\frac{C-\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,\partial x}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}\frac{\partial z}{\partial x};$$

welche Gleichungen nichts Anderes sind, als die Gleichungen (7), und somit die Behauptung rechtfertigen.

Eine jede Tangente an die Evolute liegt also in der Normalebene der Evolvente, die in dem, dem angenommenen Punkte entsprechenden Punkte errichtet ist. Daraus folgt, dass der Durchschnittspunkt zweier auf einander folgender Tangenten in der Geraden liegen muss, in der zwei auf einander folgende Normalebenen der Evolvente sich schneiden. Daraus ergiebt sich denn der bekannte Satz, dass eine Evolute einer gegebenen Kurve doppelter Krümmung sich in der abwickelbaren Fläche befinden muss, die der Ort aller dieser Durchschnittslinien ist.

Zugleich folgt aber auch, dass eine gegebene Kurve doppelter Krümmung unendlich viele Evoluten habe. Es lässt sich dies geometrisch einfach so nachweisen: Seien $a, b, c, \ldots$ eine Reihe auf einander folgender Punkte der gegebenen Kurve; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die diesen Punkten entsprechenden geraden Linien in der abwickelbaren Fläche (nebenbei gesagt, Gerade, die auf den Krümmungsebenen der gegebenen Kurve und zwar im Mittelpunkte erster Krümmung senkrecht stehen). Von a aus ziehe man nach einem beliebigen Punkte α' von α die Gerade $a\alpha$ und lege durch $a\alpha$ und ab eine Ebene, welche die Gerade β in einem Punkte β' schneiden wird, der (nebst α') ein Punkt der Evolute sein wird; durch $b\beta'$ und bc lege man wieder eine Ebene, welche die Gerade γ im Punkte γ' schneiden wird, der ein dritter Punkt der fraglichen Evolute sein wird, u. s. w. Offenbar ist nämlich $\alpha'\beta'$ die Verlängerung von $a\alpha'$, da $a\alpha'$ in der durch a gehenden Normalebene liegt, in der α und β liegen; eben so ist $\beta'\gamma'$ die Verlängerung von $b\beta'$,......, und $a\alpha'$, $b\beta'$,... sind Normalen an die gegebene Kurve; mithin ist nach dem oben Bewiesenen die gegebene Kurve eine Evolvente der erhaltenen, und folglich letztere eine Evolute der gegebenen. In so ferne α' willkührlich war, giebt es unendlich viele Evoluten einer gegebenen Kurve.

Es lässt sich dies übrigens analytisch in folgender Weise zeigen. Aus den Gleichungen (7) oder (8) folgt, dass wenn (xyz) ein Punkt der Evolvente, $(\alpha\beta\gamma)$ der entsprechende Punkt einer Evolute ist, man haben muss:

$$y-\beta=\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}(x-\alpha),\quad z-\gamma=\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}(x-\alpha),\quad 1+\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial x}=0; \tag{10}$$

welche Gleichungen man nach x differenziren darf, indem man α, β, γ als Funktionen von x ansieht.

Man zieht zunächst aus der Verbindung der drei Gleichungen (10):

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{\partial y}{\partial x}+(z-\gamma)\frac{\partial z}{\partial x}=0. \tag{11}$$

Aus den zwei ersten Gleichungen (10) zieht man:

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}(y-\beta)+\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}(x-\alpha)+\frac{\partial\beta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}(z-\gamma)+\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}(x-\alpha)+\frac{\partial\gamma}{\partial x};$$

während die dritte giebt:

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial\gamma}{\partial x}=0.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe von $\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}$, gezogen aus den vorigen zwei, so erhält man:

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}(x-\alpha)+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial\beta}{\partial x}(x-\alpha)+\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial x}(y-\beta)+\frac{\partial\alpha}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}(z-\gamma)+\frac{\partial\alpha}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial\gamma}{\partial x}(\alpha-x)=0,$$

d. h., wenn man (11) beachtet:

$$(x-\alpha)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}(x-\alpha)=0.$$

Setzt man hier die Werthe von $\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}$ aus den zwei ersten Gleichungen (10), so erhält man:

$$(y-\beta)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(z-\gamma)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+1=0, \qquad (12)$$

indem zufolge der dritten Gleichung (10):

$$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial x}=-1$$

ist.

Die Gleichung (11) zeigt, dass der Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ in der Normalebene an die gegebene Kurve im Punkte (xyz) ist. Da (12) erhalten wird, wenn man in (11) nach x differenzirt, aber α, β, γ als constant ansieht, so folgt aus (11) und (12), dass der Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ in der Durchschnittslinie zweier unmittelbar auf einander folgender Normalebenen enthalten ist. Eliminirt man, unter Zuziehung der Gleichungen der gegebenen Kurve, x zwischen den Gleichungen (11) und (12), so erhält man die Gleichung der wickelbaren Fläche, welche der Ort aller dieser Durchschnittslinien ist. Verbindet man mit dieser Gleichung die aus den zwei ersten Gleichungen hervorgehende Gleichung (nachdem man x eliminirt), so sind diese zwei Gleichungen die einer Evolute. Da aber dieselben Differentialgleichungen sind, so folgt daraus, dass es unendlich viele Evoluten gebe.

Dass dieselben Sätze auch für ebene Kurven bestehen, ist klar; die mehrfach angeführte abwickelbare Fläche ist dann eine Zylinderfläche, die auf der Ebene der Kurve senkrecht steht, und die in I. vorzugsweise so genannte Evolute ist eben die Kurve der Krümmungsmittelpunkte.

Dass bei doppelt gekrümmten Kurven die Kurve der Krümmungsmittelpunkte nicht Evolute der Kurve ist, folgt daraus schon, dass die auf einander folgenden Krümmungshalbmesser (erster Krümmung) einander nicht schneiden, wie dies leicht nachgewiesen werden kann. Sind nämlich α, β, γ die Koordinaten des dem Punkte (x, y, z) entsprechenden Krümmungsmittelpunkts, so müssen dieselben ausser den Gleichungen (11) und (12) noch der Gleichung:

$$(x-\alpha)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)-(y-\beta)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(z-\gamma)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0 \quad (13)$$

genügen.

Sind X, Y, Z laufende Koordinaten, so sind also die Gleichungen des Krümmungshalbmessers:

$$X-x=\frac{\alpha-x}{\gamma-z}(Z-z), \quad Y-y=\frac{\beta-y}{\gamma-z}(Z-z).$$

Lässt man x um ∂x wachsen, wodurch y, z, α, β, γ resp. zu $\frac{\partial y}{\partial x}\partial x, \ldots\ldots, \frac{\partial \gamma}{\partial x}\partial x$ werden, so erhält man die Gleichung des nächstliegenden Krümmungshalbmessers. Damit beide sich schneiden, muss:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta-y}{\gamma-z}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma x-\alpha z}{\gamma-z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha-x}{\gamma-z}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma y-\beta z}{\gamma-z}\right),$$

d. h. nach leichter Reduktion:

$$(\gamma-z)\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right)+(\beta-y)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)$$
$$+(\alpha-x)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0 \quad (14)$$

sein. Zieht man aus (11), (12), (13) die Werthe von $\gamma-z, \beta-y, \alpha-x$ und substiuirt sie in (14), so erhält man nach leichter Reduktion die Gleichung:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial x}\right)+\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0. \quad (15)$$

Differenzirt man nun die Gleichung (13) nach x, indem man α, β, γ als Funktionen dieser Grösse ansieht, so erhält man, wenn man (15) beachtet:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)(x-\alpha)-\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(y-\beta)+\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(z-\gamma)=0,$$

und wenn man hier wieder die Werthe von $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ substituirt und reduzirt:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \quad (16)$$

welche Gleichung bekanntlich ausdrückt, dass die betrachtete Kurve eben ist, so dass also ein Schneiden der Krümmungshalbmesser nur bei solchen Kurven statt hat.

III.

Sei A ein Punkt einer krummen Oberfläche, deren Gleichung $u=0$ sei; man nehme die Tangentialebene im Punkte A als Ebene der xy; A zum Anfangspunkt der Koordinaten und die Normale in A zur Axe der z; zugleich seien die Axen der x und y so gerichtet, dass die Ebenen der xz und yz zusammenfallen mit den beiden Haupt-(krümmungs)-schnitten der krummen Oberfläche im Punkte A. Alsdann ist bekanntlich $x=y=z=0$, d. h. im Punkte A:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial z}{\partial x}=0. \tag{17}$$

Man gehe nun vom Punkte A aus auf der krummen Oberfläche nach einem (unendlich) nahen Punkte B so, dass AB mit der Axe der x den Winkel φ mache und mithin die Gleichungen der Tangente an AB in A sind: $z=0$, $y=x\,\mathrm{tg}\,\varphi$. Sind nun Δx, Δy, Δz die Koordinaten von B, so ist $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\mathrm{tg}\,\varphi$ für ein unendlich abnehmendes Δx; zugleich sind die Gleichungen der im Punkte B an die krumme Oberfläche gezogenen Normale:

$$Z-\Delta z=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\Delta x+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\Delta y+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Delta z}{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Delta y+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\Delta z}(X-\Delta x),$$

$$Z-\Delta z=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\Delta x+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\Delta y+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Delta z}{\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Delta x+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta y+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\Delta z}(Y-\Delta y);$$

wenn man in den vorkommenden Differentialquotienten $x=y=z=0$ setzt, wobei dann die Gleichungen (17) zu beachten sind.

Man lege nun durch die Axe der z und die Tangente AB im Punkte A eine Ebene, so ist deren Gleichung $y-x\,\mathrm{tg}\,\varphi=0$, und die im Punkte A auf dieser Ebene senkrecht stehende Linie hat zu Gleichungen:

$$z=0,\quad x+\mathrm{tg}\,\varphi\,.\,y=0. \tag{18}$$

Ist nun ε der Winkel der Normale an die Fläche im Punkte B und der durch die Axe der z und AB gelegten Ebene; ε' der Winkel zwischen eben dieser Linie und der Linie (18), so ist

$$\sin\varepsilon = \cos\varepsilon' = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\Delta z - \operatorname{tg}\varphi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\Delta z\right)}{\sqrt{\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Delta z\right]^2 + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\Delta z\right]^2 + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\Delta z\right]^2} \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}.$$

Dividirt man beiderseitig mit Δx, bemerkt, dass an der Gränze ($\Delta x = 0$), $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\varphi$, $\frac{\Delta z}{\Delta x} = 0$,

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2} = \Delta x \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \Delta s, \text{ also } \Delta x = \frac{\Delta s}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}};$$

so ergiebt sich, wenn $\sin\varepsilon = \varepsilon$ gesetzt wird:

$$\frac{\varepsilon\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}{\partial s} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\operatorname{tg}\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\operatorname{tg}\varphi}{\frac{\partial u}{\partial z}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial z}} \cdot \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial z}} \cdot \sin\varphi,$$

also

$$\frac{\varepsilon}{\partial s}=\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial z}}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{2}.$$

Ist nun ϱ_1 der Krümmungshalbmesser des Schnitts, den die Ebene der xz in die krumme Oberfläche macht, ϱ_2 der für den Schnitt mit der Ebene der yz, so ist bekanntlich

$$\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}}=\frac{1}{\varrho_1},\qquad \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\frac{\partial u}{\partial z}}=\frac{1}{\varrho_2};$$

wenn man die Krümmungshalbmesser mit dem ihnen gehörenden Vorzeichen nimmt. Demnach ist:

$$\frac{\varepsilon}{\partial s}=\left(\frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\frac{\sin 2\varphi}{2}, \tag{19}$$

ein Satz, den bekanntlich schon Bertrand im Liouville'schen Journale (1844) bewiesen hat, und worin ∂s die Länge des Elements AB bedeutet, dessen Richtung durch den Winkel φ gegeben ist.

Ist AB ein Element einer auf der krummen Oberfläche von A aus gezogenen kürzesten Linie, so ist die Ebene durch AB und die Normale in A eine Krümmungsebene dieser Kurve, so wie die Krümmungsebene derselben in B durch die Normale in B an die Oberfläche geht. Der Winkel ε ist alsdann der Winkel zweier unmittelbar auf einander folgender Krümmungsebenen, während $\frac{\partial s}{\varepsilon}$ der Werth des Halbmessers r der zweiten Krümmung im Punkte A ist. Demnach ist, im Falle einer kürzesten (geodätischen) Linie:

$$r=\frac{2\varrho_1\varrho_2}{(\varrho_1-\varrho_2)\sin 2\varphi}, \tag{20}$$

welchen Satz Tortolini in seiner Abhandlung: Sulla determinazione della Linea Geodesica etc.... (Atti dell' Accademia pontificia de nuovi Lincei, anno IV. — Sessione VI dell' 11. Maggio 1851) S. 33 ff. angewendet hat, um den Halbmesser zweiter Krümmung der geodätischen Linien auf einem dreiaxigen Ellipsoid zu finden.

Für $\varrho_1=\varrho_2$ sind alle kürzesten Linien, die durch den Punkt A gehen, eben; dessgleichen sind diejenigen eben, deren Richtung in die Richtung der Hauptschnitte fällt ($\varphi=0$, oder $\frac{\pi}{2}$). Die kürzesten Linien auf einer krummen Fläche sind also nur dann durchgängig ebene Kurven, wenn die betreffende Fläche eine Kugel ist. In keinem andern Falle werden alle kürzesten Linien ebene Kurven sein, ja selbst dann nicht, wenn auch einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser beständig unendlich gross ist. Eben so werden auch die Krümmungslinien einer krummen Linie nur in so ferne kürzeste Linien sein können, als sie ebene Kurven sind. Umgekehrt, wenn die Krümmungslinien ebene Kurven sind, so müssen sie nothwendig kürzeste Linien auf der Oberfläche sein. Die Krümmungsebene einer solchen Kurve (die Ebene der Kurve selbst) enthält nämlich immer die Normale der krummen Fläche in demselben Punkte, mithin ist die Kurve eine kürzeste Linie.

IV.

Sei $u=0$ die Gleichung einer krummen Oberfläche; $x=az+b$, $y=a'z+b'$ die Gleichungen einer Geraden, welche auf diese Oberfläche projizirt wird: man verlangt die Gleichungen der Projektion dieser Geraden auf die gegebene Oberfläche.

Die Gleichungen der Normale an die gegebene Oberfläche im Punkte (xyz) sind:

$$X-x=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}(Z-z),\quad Y-y=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}(Z-z).$$

Da dieselbe nun durch einen Punkt $(x'y'z')$ der gegebenen Geraden gehen soll, so muss folglich:

$$x'-x=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}(z'-z),\ y'-y=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}(z'-z),\ x'=az'+b,\ y'=a'z'+b' \tag{21}$$

sein. Daraus folgt:

$$(az'+b-x)\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}(z'-z),\ (a'z'+b'-y)\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial y}(z'-z).$$

Setzt man in diesen Gleichungen für $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ ihre Werthe aus der Gleichung der krummen Oberfläche und eliminirt z' aus denselben, so erhält man eine Gleichung in x, y, z, die, verbunden mit $u=0$, die Gleichungen der gesuchten Projektion ausmacht. Demnach sind dieselben:

$$u=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(y-a'z-b')+\frac{\partial u}{\partial y}(az+b-x)+\frac{\partial u}{\partial z}(a'x-ay+ab'-a'b)=0, \quad (22)$$

wie man leicht findet.

Will man den Punkt $(x'y'z')$ haben, der dem Punkte (xyz) der Kurve (22) entspricht, d. h. dessen Projektion letzterer ist, so werden drei der Gleichungen (21) diese Aufgabe lösen.

Für den Fall der Kugel $x^2+y^2+z^2=r^2$ ist $\frac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2y$, $\frac{\partial u}{\partial z}=2z$, also die zweite Gleichung (22):

$$by-b'x+(ab'-a'b)z=0,$$

d. h. die Projektion gehört einem grössten Kreise der Kugel an, wie das zu erwarten war.

V.

Sei g die Beschleunigung der Schwere, s der Bogen einer (ebenen) Kurve, längs der herab ein schwerer Körper fällt, so dass wir uns die Ebene der Kurve vertikal denken, wobei der Bogen vom tiefsten Punkte der Kurve aus gerechnet werden soll. Die Vertikale durch diesen Punkt sei Axe der z und eine in der Ebene der Kurve liegende Horizontale durch jenen Punkt Axe der x, so ist, wenn die Bewegung im leeren Raume vor sich geht:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=-g\frac{\partial z}{\partial s}, \quad (23)$$

wenn t die Zeit bedeutet. Wir wollen nun die Kurve so zu bestimmen suchen, dass sie eine Tautochrone sei, d. h. eine Kurve, in der ein fallender Körper immer in derselben Zeit nach dem tiefsten Punkte gelangt, von welchem Punkte er auch ausgehen möge, in so ferne seine Anfangsgeschwindigkeit Null ist.

Aus (23) folgt:

$$2\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}\frac{\partial s}{\partial t}=-2g\frac{\partial z}{\partial t},\ \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2=-2gz+C;$$

und da für $z=h$, $\frac{\partial s}{\partial t}=0$:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2=2g(h-z),$$

d. h.

$$\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2}{2g(h-z)} = \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2, \quad t\sqrt{2g} = \int_0^h \frac{\frac{\partial s}{\partial z}\cdot\partial z}{\sqrt{h-z}}.$$

Nun soll s als Funktion von z so bestimmt werden, dass letzteres Integral einen konstanten Werth erhält, was auch h sei. Man setze desshalb:

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{z}}\psi(z), \quad s = \int \partial z \cdot \frac{\psi z}{\sqrt{z}};$$

so wird also

$$\int_0^h \frac{\psi(z)\partial z}{\sqrt{z(h-z)}} = \int_0 \frac{\psi(hz)\partial z}{\sqrt{z(1-z)}} = C$$

sein müssen. Nun ist

$$\int_0^1 \frac{\psi(hz)\partial z}{\sqrt{z(1-z)}} = \psi(h\theta)\int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{z(1-z)}} = \pi\psi(h\theta),$$

wenn θ zwischen 0 und 1; also muss, was auch immer h sei, $\psi(h\theta)$ konstant sein, d. h. man wird offenbar $\psi(z)$ selbst gleich einer Konstanten haben müssen. Demnach

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{A}{\sqrt{z}}, \quad s = 2A\sqrt{z}:$$

was bekanntlich eine Zykloide ausdrückt, welches somit die Tautochrone im leeren Raume ist.

VI.

Wenn auf einer krummen Oberfläche eine geodätische Linie gezogen (gemessen) werden soll, so geschieht dies in folgender Weise:

Man lässt die Messstange AB auf die Fläche auflegen (wobei wir, wenn wir uns z. B. die Erde als die krumme Fläche denken, wohl annehmen dürfen, die geradlinige Messstange liege in ihrer ganzen Länge wirklich auf, d. h. AB sei als ein Element der entstehenden krummen Linie zu betrachten); in dem Endpunkte B errichtet man eine Normale an die krumme Fläche, legt sodann eine zweite Messstange BC (etwa gleich AB) in die Verlängerung von AB und dreht nun diese BC so, dass sie beständig in der Ebene bleibt, welche durch die Normale in B und AB geht, und sich auf die krumme Fläche legt; in C verfährt man wieder wie in B u. s. f.*). Daraus folgt, dass die durch die Elemente AB, BC gehende Ebene zugleich die Normale der krummen Fläche in B in sich enthält, aus welcher Eigenschaft es sehr leicht sein wird, die Gleichungen der geodätischen Linie abzuleiten.

Sei nämlich $u=0$ die Gleichung der krummen Oberfläche, so sind die Gleichungen der Normale in dem Punkte (xyz) derselben, wenn X, Y, Z die laufenden Koordinaten bedeuten:

$$\frac{\partial u}{\partial z}(X-x)=\frac{\partial u}{\partial x}(Z-z),\quad \frac{\partial u}{\partial z}(Y-y)=\frac{\partial u}{\partial y}(Z-z). \tag{24}$$

Beziehen sich die Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ auf die geodätische, durch (xyz) gehende Kurve, worin ∂s das Element derselben bedeutet, so ist bekanntlich die Gleichung der durch zwei auf einander folgende Elemente gehenden Ebene — der Krümmungsebene:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}-\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)(X-x)+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}-\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)(Y-y)$$
$$+\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}-\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)(Z-z)=0. \tag{25}$$

Zieht man nun aus (24) die Werthe von $X-x$, $Y-y$ und setzt sie in (25), so muss diese Gleichung erfüllt sein, was auch immer der Werth von $Z-z$ sei, d. h. man muss haben:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}-\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}-\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}-\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)\frac{\partial u}{\partial z}=0. \tag{26}$$

Da die geodätische Kurve aber auf der krummen Oberfläche liegt, so ist auch:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}=0,\quad \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2=1,$$
$$\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}=0;$$

welche letzteren zwei Gleichungen aus einem bekannten allgemeinen Satz der analytischen Geometrie stammen. Eliminirt man ver-

*) Es kömmt dies darauf hinaus, vermittelst des Fernrohrs eines Theodolithen, das sich bloss in einer Ebene bewegt, die einen Normalschnitt der Erde bildet, das Anlegen der Messstangen zu regeln, indem man den Theodolithen jeweils in B, C, ... aufstellt.

mittelst der ersten dieser Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial z}$ aus (26), so erhält man:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}-\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}-\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right]\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+\left[\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}-\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}-\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}-\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right]\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

d. h. wenn man die zweite beachtet:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right]\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+\left[\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}-\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}-\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}-\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right]\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

oder endlich, wenn man die dritte beachtet:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{27}$$

welche Gleichung, in Verbindung mit $u=0$, die geodätische Kurve bezeichnet.

Bekanntlich ist (27) auch die Gleichung der kürzesten Linien auf einer krummen Oberfläche, so dass also die geodätischen Kurven diese Eigenschaft haben.

Für den Fall der Erde ist

$$u=\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{a^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{a^2};$$

also die Gleichung (27):

$$y\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}-x\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}=0,\quad x\frac{\partial y}{\partial s}-y\frac{\partial x}{\partial s}=C;$$

so dass die Gleichungen einer geodätischen Linie auf der Erde sind:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,\quad x\frac{\partial y}{\partial x}-y=C\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}$$

$$\left(\text{oder: } x\frac{\partial y}{\partial s}-y\frac{\partial x}{\partial s}=C\right).$$

VII.

Sei a die halbe grosse Axe des Erdellipsoids, b die halbe kleine, $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$; ferner B die geographische Breite eines Punktes M des Erdellipsoids, dessen Meridian wir als den ersten annehmen wollen, B' die geographische Breite eines zweiten Punktes N, und der Längenunterschied beider gleich λ *). Auf den in M und N errichteten Normalen denken wir uns zwei Punkte M', N', deren Entfernungen von M und N h und h' seien. Alsdann sind die Koordinaten des Punktes M':

$$\left(h+\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\right)\cos B,\ 0,\ \left(h+\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\right)\sin B;$$

Von N':

$$\left(h'+\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right)\cos B'\cos\lambda,\ \left(h'+\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right)\cos B'\sin\lambda,$$

$$\left(h'+\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right)\sin B'.$$

(Vergleiche Archiv, Theil VII., S. 73.) Die Grössen h und h' pflegt man gewöhnlich die Höhen der Punkte M', N' über der Meeresfläche zu heissen. Um nun das Azimuth der geodätischen Linie MN zu bestimmen, pflegt man in der Geodäsie den Winkel zu messen, der gebildet wird von der Projektion der Geraden $M'N'$ auf die in M' auf MM' senkrecht gestellte (Horizontal-) Ebene und der Durchschnittslinie der Meridianebene durch M mit derselben Ebene. Dieser Winkel ist aber, strenge genommen, nicht das wirkliche Azimuth, das man, aus den so eben gemachten Angaben, berechnen könnte, und wir wollen nun jenen Winkel bestimmen, um ihn dann mit dem wahren Azimuthe zu vergleichen.

Die Gleichungen der Normale MM' finden sich leicht:

$$y=0,\ z=x\operatorname{tg}B-\frac{ae^2\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}};$$

*) Die Breite vom Aequator aus nach Norden von 0 bis 90°, nach Süden von 0 bis —90°; die Länge von Westen nach Osten von 0 bis 360° gezählt. Zugleich ist der Mittelpunkt der Erde Anfangspunkt der Koordinaten, die Ebene des Aequators Ebene der xy, die nach dem Nordpol gerichtete Erdaxe Axe der z; die Axe der x liegt im Oten, die der y im 90sten Meridiangrad.

demnach ist die Gleichung der durch MM' und den Punkt N' gehenden Ebene:

$$Z - z' + m(y - y') + n(x - x') = 0,$$

wenn x', y', z' die oben angegebenen Werthe der Koordinaten von N' sind. Soll diese Ebene die Gerade MM' enthalten, so muss, wenn

$$y = 0, \; z = x \operatorname{tg} B - \frac{a e^2 \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}},$$

gesetzt wird, diese Gleichung identisch erfüllt sein. Daraus folgt:

$$n = -\operatorname{tg} B,$$

$$-m = \frac{\left(h' + \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right)\sin B' - \left(h' + \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right)\cos B' \cos\lambda \operatorname{tg} B + \frac{a e^2 \sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}}{\left(h' + \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right)\cos B' \sin\lambda}.$$

Der verlangte Winkel ist nun aber offenbar der Winkel, den die Ebene $MM'N'$ mit der Meridianebene durch M (d. h. mit der Ebene der xz) macht. Der Cosinus desselben ist somit

$$\pm\frac{m}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=\pm\frac{\left(h'+\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2B'}}\right)\sin B'-\left(h'+\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2B'}}\right)\cos B'\cos\lambda\,\mathrm{tg}\,B+\frac{ae^2\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2B}}}{\left\{\left\{\left(h'+\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2B'}}\right)\sin B'-\left(h'+\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2B'}}\right)\cos B'\cos\lambda\,\mathrm{tg}\,B+\frac{ae^2\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2B}}\right\}^2+\left(h'+\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2B'}}\right)^2\frac{\cos^2B'\sin^2\lambda}{\cos^2B}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\mp\frac{\left(h'+\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2B'}}\right)(\sin B'\cos B-\cos B'\sin B\cos\lambda)+\frac{ae^2\sin B\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2B}}-\frac{ae^2\sin B'\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2B'}}}{\left\{\left\{\left(h'+\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2B'}}\right)(\sin B'\cos B-\cos B'\sin B\cos\lambda)+\frac{ae^2\sin B\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2B}}-\frac{ae^2\sin B'\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2B'}}\right\}^2+\left(h'+\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2B'}}\right)^2\cos^2B'\sin^2\lambda\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Das Quadrat der Tangente jenes Winkels ist demnach:

$$\frac{\left(h'+\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right)^2\cos^2 B'\sin^2\lambda}{\left[\left(h'+\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right)(\sin B'\cos B-\cos B'\sin B\cos\lambda)+\frac{a e^2\sin B\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}-\frac{a e^2\sin B'\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right]^2},$$

d. h. die Tangente ist:

$$\frac{\pm\left(h'+\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right)\cos B'\sin\lambda}{\left(h'+\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right)(\sin B'\cos B-\cos B'\sin B\cos\lambda)+\frac{a e^2\sin B\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}-\frac{a e^2\sin B'\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}}$$

$$=\frac{\pm\left(\frac{h'}{a}+\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right)\cos B'\sin\lambda}{\left(\frac{h'}{a}+\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right)(\sin B'\cos B-\cos B'\sin B\cos\lambda)+e^2\cos B\left(\frac{\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}-\frac{\sin B'}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right)}. \quad (28)$$

Die Grösse $\frac{h'}{a}$ wird in der Regel so klein sein, dass man sie wird vernachlässigen können, eben so wird es mit

$$e^2 \cos B\left(\frac{\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}-\frac{\sin B'}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right)$$

der Fall sein, wenn B und B', wie gewöhnlich, wenig von einander verschieden sind.

Will man aber nichts vernachlässigen, so wird man nach (28) immer den betreffenden Winkel berechnen können. Wir wollen den Fall untersuchen, da $B = B'$. Alsdann wird (28) zu:

$$\pm\frac{\cos B \sin\lambda}{\sin B \cos B(1-\cos\lambda)} = \pm\frac{2\sin\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\lambda}{2}}{\sin B.\, 2\sin^2\frac{1}{2}\lambda} = \pm\frac{\operatorname{cotg}\frac{\lambda}{2}}{\sin B}.$$

Wir wollen nun $\lambda = 2^0$, $B = 52^0 42' 2''\cdot 53251$*) annehmen, und den Winkel darnach berechnen.

Es ist alsdann:

$$\begin{aligned} \log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\lambda &= 11\cdot7580785313 \\ -\log\sin B &= \underline{\;0\cdot0993702321} \\ \log\operatorname{tg} x &= 11\cdot8574487634 \\ x &= 89^0 12' 16''\cdot16124. \end{aligned}$$

Wir wollen nun das Azimuth der geodätischen Linie MN direkt berechnen, indem wir dabei von den Gaussischen Formeln (a. a. O.) ausgehen.

Zunächst haben wir nun die Punkte M und N auf die Kugel überzutragen. Die Breite der ihnen entsprechenden Punkte M_1, N_1 auf der Kugel ist $52^0 40' 0''\cdot 00000$ (Gauss, S. 9.).

Was den Längenunterschied λ_1 der Punkte M_1, N_1 auf der Kugel anbelangt, so ist:

$$\lambda_1'' = \alpha\lambda'' \text{ (S. 6)}, \quad \log\alpha = 0\cdot0001966553,$$

also da

*) Vergleiche: Gauss, Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie. Seite 10.

$$\log \lambda'' = 3{\cdot}8573324964$$
$$\log \alpha = 0{\cdot}0001966553$$
$$\log \lambda_1'' = 3{\cdot}8575291517$$
$$\lambda_1'' = 7203{\cdot}26109 = 2^0 0' 3''{\cdot}26109.$$

Man hat also ein sphärisches Dreieck aufzulösen, in dem zwei Seiten gleich $90^0 - 52^0 40'$, und der von ihnen gebildete Winkel $2^0 0' 3''{\cdot}26109$ ist. Der Winkel z, welcher der einen der gleichen Seiten entgegensteht, wird folglich erhalten aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{cotg} 1^0 0' 1''{\cdot}63054}{\sin 52^0 40'}.$$

Nun ist

$$\log \operatorname{cotg} 1^0 0' 1''{\cdot}63054 = 11{\cdot}7578818321$$
$$-\log \sin 52^0 40' = 0{\cdot}0995668873$$
$$\log \operatorname{tg} z = 11{\cdot}8574487194$$
$$z = 89^0 12' 16''{\cdot}16159,$$

welcher Werth von dem oben für x gefundenen erst in der vierten Dezimalstelle der Sekunden abweicht. Es ergiebt sich daraus, dass man den beobachteten Winkel x unbedenklich für den zu suchenden z annehmen kann.

V.

Ueber Foucault's Pendelversuch zum Beweise für die Umdrehung der Erde um ihre Axe.

Von
dem Herausgeber.

I.

Das Archiv hat an seine Leser eine Schuld abzutragen. Denn zu den Zwecken, deren Erreichung diese Zeitschrift sich vorgesetzt hat, gehört namentlich auch die Besprechung aller der Erscheinungen auf dem Gebiete der Wissenschaft, welche in irgend einer Beziehung zu besonderer Geltung gekommen sind; und dass zu diesen Erscheinungen recht eigentlich Foucault's höchst merkwürdiger Pendelversuch zum Beweise für die Umdrehung der Erde um ihre Axe gehört, wird gewiss Niemand, am wenigstens ich selbst, in Abrede zu stellen geneigt sein. Dieser Versuch dürfte aber um so mehr eine Besprechung im Archive für sich in Anspruch zu nehmen berechtigt sein, weil man denselben bekanntlich auch vielfach vor das grosse Publikum zu bringen zweckmässig gefunden hat. Ob man damit recht gethan hat, will ich hier nicht untersuchen, will aber auch nicht verhehlen, dass die Berechtigung zu der bereits so vielfach versuchten öffentlichen Zurschaustellung des wissenschaftlich so überaus merkwürdigen Foucault'schen Versuchs vor den Augen des grossen Publikums mir wenigstens sehr zweifelhaft scheint, und dass ich darin allerdings mehr eine eines wissenschaftlichen Mathematikers oder Physikers nicht sehr würdige Escamotage*), als einen selbst für

*) Insofern nämlich das grosse Publikum leicht zu der Meinung verleitet wird, etwas von der Sache zu verstehen, was in diesem Falle gar nicht möglich ist, und doch leider oft in dergleichen Fällen geglaubt wird.

das sogenannte gebildete grosse Publikum wirklich überzeugenden Versuch zu finden geneigt bin. Dass ich übrigens mit dieser Ansicht keineswegs isolirt dastehe, beweist mir so eben zu meiner grossen Freude die Art und Weise, wie der von mir hochverehrte treffliche Quetelet in Brüssel, durch dessen ununterbrochene Freundschaft ich seit langer Zeit mich so sehr beglückt und geehrt fühle, sich in dem „Rapport", welchen er als beständiger Sekretair der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Brüssel über die Arbeiten der „Classe des sciences" im Jahre 1851 der Akademie erstattet hat, über den Foucault'schen Versuch, namentlich über dessen Popularisirung, ausspricht; und ich kann mir nicht versagen, seine Worte selbst den Lesern des Archivs hier mitzutheilen, wobei ich zu besserem Verständniss bemerke, dass dabei auf ein Memoire eines ausgezeichneten Mathematikers in Gent, Herrn Schaar's, über den Foucault'schen Versuch Bezug genommen ist. Herr Quetelet sagt:

„M. Schaar a étudié, à l'aide de l'analyse, un problème intéressant, qui a eu le privilége d'occuper pendant plusieurs mois l'attention de l'Europe; je veux parler de l'expérience de M. Foucault. A en croire les premiers témoins, on n'avait qu' à ouvrir les yeux pour voir tourner la terre; et quant à l'explication, elle était à la portée de toutes les intelligences. M. Schaar est venu nous dire, et non sans raison, que cette expérience et son explication sont loin d'être aussi simple qu' on le pense, et que des savants fort habiles s'y sont trompés. Il a soumis ce problème de mécanique à un examen approfondi, et il a rendu compte de petites particularités qui avaient été signalées déja par les meilleurs observateurs, et même à une époque reculée, par les disciples de Galilée; car il s'est trouvé, comme il arrive frequemment dans les sciences, que l'expérience nouvelle avait été signalée depuis longtemps. Une pareille rencontre, du reste, ne diminue en rien le mérite de celui qui montre l'importance d'un fait que toutes les autres ont méconnu ou perdu de vue."

Der Grund, warum das Archiv, mit Ausnahme eines Aufsatzes von Herrn Director Eschweiler in Cöln in Thl. XIX. Nr. IV., dessen Darstellung, wie ich gehört aber nicht selbst gesehen habe, auch in eine von Herrn Garthe in Cöln herausgegebene Schrift übergegangen ist, über den Foucault'schen Versuch bisher geschwiegen hat, ist der, weil ich die Acten über denselben noch lange nicht für vollständig spruchreif, viel weniger für geschlossen halte. Eine sehr tiefgehende analytisch-mathematische Behandlung scheint mir jedenfalls nöthig zu sein, wenn man sich eine vollständige Einsicht in die eigenthümliche Natur dieses merkwürdigen Versuchs verschaffen will, und ich kann in dieser Beziehung die Leser des Archivs auf nichts Besseres verweisen, als auf die schon oben erwähnte, nach dem Urtheil competenter Richter sehr ausgezeichnete Abhandlung von Herrn Schaar in Gent, die in den „Mémoires de l'Académie des sciences, des lettres et des beaux-arts de

Belgique"*) nächstens erscheinen wird oder schon erschienen ist; und auf eine treffliche Abhandlung von Herrn Hofrath Clausen in Dorpat, die unter dem Titel: „Ueber den Einfluss der Umdrehung der Erde auf die scheinbaren Bewegungen an der Oberfläche derselben; von Herrn Observator Clausen in Dorpat" sich in dem „Bulletin phys. mathém. T. X. Nr. 2." der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Petersburg abgedruckt findet.

So sehr ich aber auch aus vollkommenster Ueberzeugung nur dem Studium dieser tief gehenden analytischen Untersuchungen das Wort reden kann, so scheint mir doch bei dem vorliegenden Gegenstande, selbst für den Mathematiker, und namentlich für den Lehrzweck, eine vorläufige einfachere Darstellung wünschenswerth zu sein, was auch schon vielfach gefühlt worden ist, wie z. B. der schon oben erwähnte Aufsatz des Herrn Director Eschweiler in Cöln, und noch mehr zwei andere ganz neuerlich erschienene, treffliche Mathematiker und Physiker zu Verfassern habende Abhandlungen beweisen. Die eine dieser beiden Abhandlungen rührt von Herrn Crahay in Löwen her, und findet sich in dem „Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Tome XIX. — I[re] Partie. 1852. p. 537." unter dem Titel: Démonstration élémentaire de la vitesse de déviation du plan d'oscillation du pendule, à diverses latitudes; par M. Crahay, Membre de l'Académie"; die andere, welche unter allen über diesen Gegenstand mir bekannt gewordenen Arbeiten die neueste ist, hat Herrn Pagani in Löwen zum Verfasser, und findet sich in demselben „Bulletin. Tome XIX. — II[e] Parte. p. 161." unter dem Titel: „Sur le théorème d'Euler, relatif à la décomposition du mouvement de rotation des corps. Note par M. Pagani, Membre de l'Académie." Herrn Crahay's Darstellung *scheint* sich der von Herrn Director Eschweiler gebrauchten Darstellung einigermassen zu nähern, ohne dass ich im Entferntesten die Absicht habe, mich hier auf ein Urtheil über diese Arbeiten einzulassen. Herr Pagani geht auf Euler's Theorem über die Zerlegung der Umdrehungsbewegung eines Körpers zurück, und leitet seinen Aufsatz mit den folgenden Worten ein: „Les experiences récentes, par lesquelles on a constaté la déclinaison du plan d'oscillation du pendule, ont ramené l'attention des géomètres sur le beau théorème d'Euler, au moyen duquel on peut expliquer assez simplement la loi de cette déclinaison. Mais pour mettre lexplication de ce phénomène à la portée de ceux qui ne sont point familiarisés avec les calculs supérieurs, il manquait à la science une démonstration élémentaire de ce théorème, que l'on doit considérer comme le corrélatif de celui qui porte le nom de parallélogramme des forces, et qui sert aussi à la compo-

---

*) Bis jetzt ist Tome XXVI. erschienen, den ich aber noch nicht gesehen habe.

sition et à la décomposition du mouvement d'un point matériel*). Hierbei ist zu erwähnen, dass auch Herr Director v. Littrow in Wien in der trefflichen vierten Auflage der „Wunder des Himmels von J. J. v. Littrow. S. 55.". von welcher bis jetzt die beiden ersten Lieferungen erschienen sind, im Grunde eigentlich das Euler'sche Theorem, auf welches Herr Pagani hinweist, in sehr schöner und wahrhaft populärer, aber doch wissenschaftlicher Weise, zur Erklärung des Foucault'schen Versuchs benutzt hat, ohne natürlich, dem Zwecke seines Buchs ganz gemäss und entsprechend, dasselbe auf seinen kürzesten mathematischen Ausdruck zu bringen, weshalb wir uns wegen dieser populären Darstellung hier auf das genannte ausgezeichnete Werk, das populär, dabei aber doch ächt wissenschaftlich ist, zu verweisen erlauben, wie wir auch schon im Literarischen Berichte Nr. LXXIV. S. 940. gethan haben.

Wenn wir nun aber auch, wie schon oben erwähnt, die Acten über den Foucault'schen Versuch, namentlich über die beste möglichst elementar-mathematische Darstellung**) der Gründe desselben, noch keineswegs für vollkommen spruchreif, viel weniger für geschlossen erachten, und wenn wir auch zu glauben Ursach haben, dass in dieser Beziehung die Ansichten der Mathematiker und Physiker noch vielfach aus einander gehen, namentlich auch was die geeignetste Darstellung für die Zwecke des mathematischen und physikalischen Unterrichts betrifft: so sind wir, wenn wir die bisherigen literarischen Erscheinungen über den genannten merkwürdigen Versuch betrachten, doch der Meinung, dass jetzt die Zeit gekommen ist, wo das Archiv über denselben nicht mehr schweigen darf. Wir glauben aber am Meisten im Interesse unserer geehrten Leser zu handeln, und am Meisten den Zwecken, welche das Archiv zu erreichen strebt, zu dienen, wenn wir ihnen namentlich die uns bemerkenswerth scheinenden

---

) Herr C. Wheatstone in einer in dem Philosophical Magazine, fourth series, Vol. I. p. 572. befindlichen Abhandlung, die man auch in Krönigs Journal für Physik und physikalische Chemie des Auslandes. Band II. Heft 3. S. 358. übersetzt findet, sagt S. 362. auch: „Nach der zuerst von Frisi aufgestellten und durch Euler und Poinsot vollständiger entwickelten Theorie der Drehung kann die Rotationsgeschwindigkeit der Erde als die Resultante von zwei Winkelgeschwindigkeiten betrachtet werden, wo die eine Drehung um die Vertikale des Punktes erfolgt, an welchem sich der Beobachter befindet, und die andere um den Meridian oder die nach Norden und Süden gerichtete Horizontallinie — „(welches Letztere freilich etwas undeutlich und auch nicht ganz richtig ist)." — Die erstere Componente ist gleich $n \sin y$ — „(s. unten II. 12) und 12))" — und da die Schwingungsebene an dieser Bewegung nicht Theil nimmt, so bleibt sie in Bezug auf dieselbe in Ruhe, und einen mit jenem Punkte sich bewegenden Beobachter scheint sie deshalb mit derselben Geschwindigkeit in der entgegengesetzten Richtung sich zu drehen."

**) Von elementar-mathematischen Darstellungen rede ich in diesem Aufsatze vorzugsweise immer.

elementar-mathematischen Behandlungen dieses Versuchs, insbesondere wenn sie von anerkannten Mathematikern und Physikern herrühren, in möglichst unveränderter und unverkürzter Gestalt nach und nach mittheilen, was von nun an geschehen soll. Dabei bevorworten wir aber ausdrücklich, dass wir uns bei diesen Mittheilungen jeder Kritik enthalten werden, was wir bei diesem Gegenstande, d. h. natürlich hauptsächlich nur in Bezug auf seine möglichst elementare Darstellung, wo „adhuc sub judice lis est“ für das die Sache am Meisten fördernde Verfahren halten, indem wir auch, hier den „Iudex“ abzugeben, für jetzt wenigstens uns noch nicht herbeilassen wollen und dürfen. Aus diesem Gesichtspunkte bitten wir die Leser die über den Foucault'schen Versuch im Archive von jetzt an erscheinenden, von uns mitgetheilten, Aufsätze aufzufassen, und ihr Urtheil über dieselben sich selbst zu bilden. — Prüfet Alles und das Beste behaltet!

Indem ich nun nach dieser vorläufigen etwas weitläufigen, in diesem Falle aber von mir für nöthig gehaltenen Expectoration, mich insbesondere zu dem vorliegenden Aufsatze wende, mit welchem ich die Reihe der Aufsätze über den Foucault'schen Versuch eröffne, so bemerke ich, dass derselbe im Folgenden eine von mir selbst herrührende möglichst elementar gehaltene analytisch-geometrische Darstellung des in dem oben erwähnten Aufsatze von Herrn Pagani in Erinnerung gebrachten Euler'schen Theorems enthalten, und daran einige Bemerkungen über die Art und Weise anschliessen wird, wie man dieses Theorem zur Erklärung des Foucault'schen Versuchs benutzt hat. Ich gehe daher jetzt sogleich zu der Entwickelung des Euler'schen Theorems in der erwähnten Weise über.

II.

Wir denken uns einen festen Körper und drei auf einander senkrecht stehende Axen der x, y, z, die sich in dem Punkte O schneiden mögen, der also der Anfang der Coordinaten ist. Diesem Körper werden gleichzeitig um die drei Axen der x, y, z drei Winkelgeschwindigkeiten ertheilt, die wir respective durch v_1, v_2, v_3 bezeichnen wollen, wobei wir unter Winkelgeschwindigkeit den mit der Längeneinheit als Halbmesser beschriebenen Kreisbogen verstehen, welchen jeder von der betreffenden Drehungsaxe um die Längeneinheit entfernte Punkt des Körpers in der Zeiteinheit beschreibt. Diese Winkelgeschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 sollen aber als positiv oder als negativ betrachtet werden, jenachdem ihnen respective um die Axe der x, y, z eine Drehung respective in der Richtung von dem positiven Theile der Axe der y an durch den rechten Winkel (yz) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der z hin, in der Richtung von dem positiven Theile der Axe der z an durch den rechten Winkel (zx) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der x hin, in der Richtung von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten

Winkel (xy) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der y hin entspricht.

Fassen wir nun einen beliebigen, aber bestimmten Punkt unsers Körpers in's Auge, dessen Coordinaten in Bezug auf die drei Axen respective $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, sein mögen. Die Entfernung dieses Punktes von der Axe der x sei r_1. Dann ist mit gehöriger Rücksicht auf das Vorzeichen der als geradlinig zu betrachtende Weg, welchen in der unendlich kleinen Zeit τ der Punkt ($\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$) bei der Drehung des Körpers um die Axe der x vermöge der Winkelgeschwindigkeit v_1 zurücklegen würde, oder die der als Zeiteinheit betrachteten unendlich kleinen Zeit τ entsprechende Geschwindigkeit des Punktes ($\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$), offenbar $r_1 v_1 \tau$. Bezeichnen wir den spitzen Winkel, unter welchem die auf r_1 senkrecht stehende Richtung der Bewegung des Punktes ($\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$) gegen die Ebene der xy geneigt ist, durch θ_1; so sind, wie mittelst einer einfachen geometrischen Betrachtung aus Taf. II. Fig. I*., welche eine Darstellung aller möglichen Fälle liefert, auf der Stelle erhellen wird, die Composanten von $r_1 v_1 \tau$ nach den Axen der y und z, mit gehöriger Rücksicht auf ihre Vorzeichen,

im 1sten rechten Winkel:

$$-r_1 v_1 \tau \cos\theta_1, \quad +r_1 v_1 \tau \sin\theta_1;$$

im 2ten rechten Winkel:

$$-r_1 v_1 \tau \cos\theta_1, \quad -r_1 v_1 \tau \sin\theta_1;$$

im 3ten rechten Winkel:

$$+r_1 v_1 \tau \cos\theta_1, \quad -r_1 v_1 \tau \sin\theta_1:$$

im 4ten rechten Winkel:

$$+r_1 v_1 \tau \cos\theta_1, \quad +r_1 v_1 \tau \sin\theta_1.$$

Ferner ist aber offenbar

im 1sten rechten Winkel:

$$\mathfrak{y} = +r_1 \sin\theta_1, \quad \mathfrak{z} = +r_1 \cos\theta_1;$$

im 2ten rechten Winkel:

$$\mathfrak{y} = -r_1 \sin\theta_1, \quad \mathfrak{z} = +r_1 \cos\theta_1;$$

im 3ten rechten Winkel:

$$\mathfrak{y} = -r_1 \sin\theta_1, \quad \mathfrak{z} = -r_1 \cos\theta_1;$$

im 4ten rechten Winkel:

$$\mathfrak{y} = +r_1 \sin\theta_1, \quad \mathfrak{z} = -r_1 \cos\theta_1.$$

Hält man dies mit dem Obigen zusammen, so ergiebt sich, dass ganz allgemein die Composanten von $r_1 v_1 \tau$ nach den Axen der y und z, mit gehöriger Rücksicht auf ihre Vorzeichen, respective

$$-\mathfrak{z} v_1 \tau \text{ und } +\mathfrak{y} v_1 \tau$$

sind.

Stellt man eine ähnliche Betrachtung über den Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ rücksichtlich der beiden Axen der y und z an, und bezeichnet die Entfernungen des Punktes $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ von diesen zwei Axen respective durch r_2 und r_3; so ist aus dem Vorhergehenden klar, dass die Composanten von $r_2 v_2 \tau$ nach den Axen der z und x, mit gehöriger Rücksicht auf ihre Vorzeichen, respective

$$-\mathfrak{x} v_2 \tau \text{ und } +\mathfrak{z} v_2 \tau;$$

die Composanten von $r_3 v_3 \tau$ nach den Axen der x und y, mit gehöriger Rücksicht auf ihre Vorzeichen, respective

$$-\mathfrak{y} v_3 \tau \text{ und } +\mathfrak{x} v_3 \tau$$

sind. Also sind offenbar die Geschwindigkeiten des Punktes $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ nach den drei Axen der x, y, z respective:

$$\frac{+\mathfrak{z} v_2 \tau - \mathfrak{y} v_3 \tau}{\tau} = \mathfrak{z} v_2 - \mathfrak{y} v_3,$$

$$\frac{+\mathfrak{x} v_3 \tau - \mathfrak{z} v_1 \tau}{\tau} = \mathfrak{x} v_3 - \mathfrak{z} v_1,$$

$$\frac{+\mathfrak{y} v_1 \tau - \mathfrak{x} v_2 \tau}{\tau} = \mathfrak{y} v_1 - \mathfrak{x} v_2.$$

Mittelst dieser Formeln lassen sich nun die folgenden Fragen leicht beantworten.

Zunächst lässt sich fragen, ob bei der Bewegung unseres Körpers gewisse Punkte desselben in Ruhe bleiben. Soll aber der Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ in Ruhe bleiben, so muss, wie auf der Stelle erhellet, zugleich

$$\mathfrak{z} v_2 - \mathfrak{y} v_3 = 0,\ \mathfrak{x} v_3 - \mathfrak{z} v_1 = 0,\ \mathfrak{y} v_1 - \mathfrak{x} v_2 = 0;$$

also

$$\frac{\mathfrak{x}}{v_1} = \frac{\mathfrak{y}}{v_2} = \frac{\mathfrak{z}}{v_3}$$

oder

$$\mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \mathfrak{z} = v_1 : v_2 : v_3$$

sein; und man sieht also, dass überhaupt alle die Punkte unsers

Körpers in Ruhe bleiben, welche in der durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt O der drei Axen gehenden, durch die Gleichungen

$$1)\qquad \frac{\mathfrak{x}}{v_1}=\frac{\mathfrak{y}}{v_2}=\frac{\mathfrak{z}}{v_3}$$

charakterisirten geraden Linie liegen, so dass folglich die Bewegung unsers Körpers gerade so vor sich geht, als wenn er sich um die durch diese Gleichungen charakterisirte gerade Linie wie um eine feste Axe drehte.

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der eine der beiden Theile dieser durch die Gleichungen 1) charakterisirten Axe, in welche dieselbe durch den Punkt O getheilt wird, mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, respective durch α, β, γ; so sind nach den Lehren der analytischen Geometrie die Gleichungen der in Rede stehenden Axe:

$$2)\qquad \frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma}.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den derselben Axe entsprechenden Gleichungen 1), indem man diese beiden Systeme von Gleichungen auf die Formen

$$y=\frac{v_2}{v_1}x,\quad z=\frac{v_3}{v_1}x$$

und

$$y=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}x,\quad z=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}x$$

bringt; so erhält man auf der Stelle die Gleichungen:

$$3)\qquad \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\frac{v_2}{v_1},\quad \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{v_3}{v_1}.$$

Nimmt man nun zu diesen beiden Gleichungen noch die bekannte Gleichung:

$$4)\qquad \cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,$$

so erhält man, mittelst eines hinreichend bekannten Verfahrens, sogleich mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen in den folgenden Formeln auf einander:

$$5)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \pm \dfrac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}, \\ \cos\beta = \pm \dfrac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}, \\ \cos\gamma = \pm \dfrac{v_3}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die wirkliche Winkelgeschwindigkeit unsers Körpers in Bezug auf seine durch die Gleichungen 1) charakterisirte Drehungsaxe durch v, die Entfernung des beliebigen Punktes $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ des Körpers von dieser Drehungsaxe durch r. und die 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche die Richtung der Bewegung des Punktes $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, respective durch φ, ψ, χ; so ist, wenn τ wieder eine unendlich kleine Zeit bezeichnet, nach dem Obigen offenbar:

$$rv\tau.\cos\varphi = (\mathfrak{z}v_2 - \mathfrak{y}v_3)\tau,$$

$$rv\tau.\cos\psi = (\mathfrak{x}v_3 - \mathfrak{z}v_1)\tau,$$

$$rv\tau.\cos\chi = (\mathfrak{y}v_1 - \mathfrak{x}v_2)\tau;$$

also

$$6)\quad \begin{cases} rv\cos\varphi = \mathfrak{z}v_2 - \mathfrak{y}v_3, \\ rv\cos\psi = \mathfrak{x}v_3 - \mathfrak{z}v_1, \\ rv\cos\chi = \mathfrak{y}v_1 - \mathfrak{x}v_2. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2 = 1,$$

auf der Stelle:

$$7)\quad rv = \sqrt{(\mathfrak{z}v_2 - \mathfrak{y}v_3)^2 + (\mathfrak{x}v_3 - \mathfrak{z}v_1)^2 + (\mathfrak{y}v_1 - \mathfrak{x}v_2)^2}.$$

Weil aber r das von dem Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ auf die durch die Gleichungen 1) charakterisirte Drehungsaxe des Körpers gefällte Perpendikel ist, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$8)\quad r = \frac{\sqrt{(\mathfrak{z}v_2 - \mathfrak{y}v_3)^2 + (\mathfrak{x}v_3 - \mathfrak{z}v_1)^2 + (\mathfrak{y}v_1 - \mathfrak{x}v_2)^2}}{v_1^2+v_2^2+v_3^2};$$

also ist nach 7):

$$9)\quad v = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}.$$

Ferner ist nach 6):

$$10)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\mathfrak{z}v_2 - \mathfrak{y}v_3}{\sqrt{(\mathfrak{z}v_2 - \mathfrak{y}v_3)^2 + (\mathfrak{x}v_3 - \mathfrak{z}v_1)^2 + (\mathfrak{y}v_1 - \mathfrak{x}v_2)^2}}, \\ \cos\psi = \dfrac{\mathfrak{x}v_3 - \mathfrak{z}v_1}{\sqrt{(\mathfrak{z}v_2 - \mathfrak{y}v_3)^2 + (\mathfrak{x}v_3 - \mathfrak{z}v_1)^2 + (\mathfrak{y}v_1 - \mathfrak{x}v_2)^2}}, \\ \cos\chi = \dfrac{\mathfrak{y}v_1 - \mathfrak{x}v_2}{\sqrt{(\mathfrak{z}v_2 - \mathfrak{y}v_3)^2 + (\mathfrak{x}v_3 - \mathfrak{z}v_1)^2 + (\mathfrak{y}v_1 - \mathfrak{x}v_2)^2}}. \end{cases}$$

In den vorhergehenden Formeln ist das Theorem von Euler enthalten, welches man in möglichster Kürze auf folgende Art aussprechen kann:

Lehrsatz.

Wenn einem Körper um drei in einem gemeinschaftlichen Punkte O sich rechtwinkig durchschneidende Axen gleichzeitig drei Winkelgeschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 ertheilt werden, so dreht sich derselbe mit der Winkelgeschwindigkeit $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ um eine durch den Punkt O gehende mittlere Axe, deren Lage gegen die drei ersten Axen durch die der Proportion

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = v_1 : v_2 : v_3$$

genügenden Winkel α, β, γ bestimmt wird*).

Warum Herr Pagani dieses Theorem „le corrélatif de celui, qui porte le nom de *parallélogramme des forces*"**) nennen konnte, erhellet jedem Kundigen nun gewiss auf der Stelle, und bedarf einer weiteren Erläuterung hier nicht. Man kann mittelst dieses Theorems allerdings drei drehende Bewegungen eines Körpers um drei senkrecht auf einander stehende Axen in eine drehende Bewegung um eine mittlere Axe zusammensetzen, und auch sowohl die Lage dieser mittleren Axe gegen die drei ersten Axen, als auch die Winkelgeschwindigkeit der mittleren Bewegung aus den gegebenen Winkelgeschwindigkeiten der Bewegungen um die drei sich rechtwinklig durchschnei-

---

*) So findet sich der Satz z. B. ausgedrückt in dem zwar älteren, aber immer noch sehr empfehlenswerthen System der reinen und angewandten Mechanik fester Körper. Von J. J. A. Ide. Zweiter Theil. Berlin. 1802. S. 324. §. 290. Auf neuere Lehrbücher der Mechanik will ich absichtlich nicht weiter verweisen.

**) Oder vielmehr noch allgemeiner le corrélatif de celui, qui porte le nom *de parallélépipède des forces.*

denden Axen leicht bestimmen. Eben so kann man aber nun natürlich auch umgekehrt eine drehende Bewegung um eine Axe in drei drehende Bewegungen um drei sich in einem Punkte dieser Axe rechtwinklig durchschneidende Axen zerlegen, was einer weiteren Erläuterung hier nicht bedürfen wird.

Wir wollen, unserm eigentlichen Zwecke jetzt näher tretend, hier nur noch den folgenden besonderen Fall etwas genauer betrachten. In Taf. II. Fig. II*. sei der um O als Mittelpunkt in der Ebene des Papiers beschriebene Kreis ein Meridian der als eine Kugel betrachteten Erde, deren Halbmesser wir durch r bezeichnen wollen. Der Durchschnitt der Ebene des Erdäquators mit der Ebene dieses Meridians sei AB, die Erdaxe, um welche die Erde sich dreht, sei PQ, und P sei der Nordpol, Q dagegen sei der Südpol der Erde. Ein unter dem in Rede stehenden Meridiane in der nördlichen Hälfte der Erdoberfläche liegender Ort, dessen geographische Breite wir durch L bezeichnen wollen, sei M, so dass also Ox die Vertikale dieses Orts ist; die Mittagslinie desselben sei NS, und Oy sei durch den Mittelpunkt O der Erde mit NS parallel gezogen. Die Linien Ox und Oy wollen wir als die positiven Theile der Axen der x und y eines durch den Mittelpunkt O der Erde als Anfang gelegten rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz annehmen, dessen dritte Axe der z in dem Mittelpunkte O der Erde auf der Ebene des Meridians des Orts M senkrecht steht, und wollen nun nach dem Euler'schen Theorem die Rotationsbewegung der Erde um die Erdaxe PQ in drei Bewegungen um die Axen der x, y, z zu zerlegen, oder jene eine Bewegung durch diese drei Bewegungen zu ersetzen suchen, wobei wir uns der im Vorhergehenden entwickelten Formeln bedienen, und allen dort gebrauchten Symbolen ihre frühere Bedeutung lassen, indem die Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sich jetzt auf den Punkt M, dessen geographische Breite L ist, beziehen.

Wenn wir, was nach dem Obigen offenbar verstattet ist, die Winkel α, β, γ jetzt dem nach dem Nordpole P der Erde gerichteten Theile OP der Erdaxe entsprechen lassen, so ist offenbar:

$$\alpha=90^0-L,\ \beta=L,\ \gamma=90^0;$$

also:

$$\cos\alpha=\sin L,\ \cos\beta=\cos L,\ \cos\gamma=0;$$

folglich nach 5):

$$\sin L=\pm\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}},$$

$$\cos L=\pm\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}},$$

$$0=\pm\frac{v_3}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}.$$

Weil $\sin L$ und $\cos L$ beide positiv sind, und in diesen Formeln sich bekanntlich die oberen und unteren Zeichen auf einander beziehen, so haben v_1 und v_2 offenbar gleiche Vorzeichen, und man muss in diesen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem v_1 und v_2 beide positiv oder beide negativ sind. Aus der dritten der drei vorhergehenden Gleichungen folgt $v_3=0$, eine Bewegung um die Axe der z findet also nicht Statt, und mit derselben Bedingung wegen der Vorzeichen wie vorher ist:

$$\sin L=\pm\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}},\quad \cos L=\pm\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}};$$

also, weil nach 9)

$$v=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$$

ist:

$$11)\qquad v_1=\pm v\sin L,\quad v_2=\pm v\cos L;$$

immer mit derselben Bedingung wegen der Vorzeichen wie vorher.

Offenbar ist im vorliegenden Falle

$$\mathfrak{x}=r,\ \mathfrak{y}=0,\ \mathfrak{z}=0.$$

Also ist nach 10), wenn man beachtet, dass auch $v_3=0$ ist:

$$\cos\varphi=0,\ \cos\psi=0,\ \cos\chi=-\frac{rv_2}{\sqrt{r^2v_2^2}}$$

oder

$$\cos\varphi=0,\ \cos\psi=0,\ \cos\chi=-\frac{v_2}{\sqrt{v_2^2}}.$$

Ist nun in Folge der Richtung der Bewegung der Erde um ihre Axe $\chi=0$ zu setzen, so ist, wie uns die dritte der drei vorstehenden Gleichungen zeigt, v_2 negativ, da $\cos\chi$ positiv ist. Also muss man nach dem Obigen in diesem Falle in den Formeln 11) die unteren Zeichen nehmen, folglich

$$12)\qquad v_1=-v\sin L,\quad v_2=-v\cos L$$

setzen.

Ist dagegen in Folge der Richtung der Bewegung der Erde um ihre Axe $\chi=180^0$ zu setzen, so ist, wie uns die dritte der drei in Rede stehenden obigen Gleichungen zeigt, v_2 positiv, da $\cos\chi$ negativ ist. Also muss man nach dem Obigen in diesem Falle in den Formeln 11) die oberen Zeichen nehmen, und daher

$$12^*)\qquad v_1 = v\sin L,\quad v_2 = v\cos L$$

setzen.

Ob man in Folge der Richtung der Bewegung der Erde um ihre Axe $\chi = 0$ oder $\chi = 180^0$ zu setzen hat, hängt natürlich von der Annahme des positiven Theils der Axe der z ab, worüber im Vorhergehenden nichts festgesetzt worden ist, und nichts festgesetzt zu werden brauchte. Bei der Anwendung der obigen Regeln muss man sich aber den positiven Theil der Axe der z immer in einer bestimmten Weise angenommen denken, worüber ein Jeder die ihm selbst am Meisten zusagende Bestimmung festsetzen mag.

Im Allgemeinen sieht man aus dem Vorhergehenden, dass man sich die Bewegung der Erde um ihre Axe immer durch zwei Bewegungen, die eine um die Vertikale Ox des beliebigen Orts M, die andere um die durch den Mittelpunkt der Erde mit seiner Mittagslinie gezogene Parallele Oy, ersetzt denken kann. Die näheren Umstände dieser beiden Bewegungen werden durch die obigen Formeln bestimmt.

III.

Zur Erklärung des Foucault'schen Versuchs hat man nun das Euler'sche Theorem auf folgende Art benutzt, wobei ich im Allgemeinen der von Herrn Director v. Littrow a. a O. gegebenen Darstellung folge, natürlich mit Weglassung alles Dessen, was Herr v. Littrow dort in sinnreicher Weise zur möglichst populären, aber doch wissenschaftlich gehaltenen, Erläuterung des Eulers'chen Theorems selbst beigebracht hat, da es mir ja jetzt nur noch auf dessen Anwendung zur Erläuterung des merkwürdigen Foucault'schen Versuchs ankommen kann, nachdem ich vorher einen möglichst elementaren analytischen Beweis des genannten Theorems zu geben versucht habe.

Wir denken uns zuerst einen Beabachter in einem der beiden Erdpole, grösserer Bestimmtheit wegen etwa in dem Nordpole, und das Pendel so aufgehängt, dass sein Aufhängepunkt in der Verlängerung der Erdaxe über den Nordpol hinaus liegt, aber an der Bewegung der Erde um ihre Axe nicht Theil nehmen kann. Unter diesen Voraussetzungen wird nun natürlich, auch wenn sich die Erde um ihre Axe dreht, die Schwingungsebene des Pendels eine unveränderliche Lage im Raume behalten; dem Beobachter aber auf der um ihre Axe sich drehenden Erde, der von der Bewegung der Erde nichts fühlt und dieselbe als ruhend voraussetzt, muss die Schwingungsebene des Pendels sich nothwendig um seine eigne Vertikale mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie die Erde um ihre Axe, nach einer der Richtung der Bewegung der letzteren entgegengesetzten Richtung hin, zu drehen scheinen. So stellt unter den gemachten Voraussetzungen das Phänomen unter einem der beiden Erdpole in der allereinfachsten Weise sich dar. Nehmen wir nun aber für irgend einen anderen Punkt auf der Erdoberfläche, grösserer Bestimmtheit wegen in der nördlichen Hälfte der Erde, dessen geographische Breite L ist, das Euler'sche Theorem zu Hülfe, so ist klar, dass die Sache im Allgemeinen und im Wesentlichen für jeden Punkt auf der Erdoberfläche ganz dieselbe ist und bleibt wie für die beiden Erdpole. Nur ist die scheinbare Winkelgeschwindigkeit der Schwingungsebene des Pendels jetzt nicht mehr wie vorher der ganzen Winkelgeschwindigkeit der Erde bei ihrer Axendrehung gleich, sondern, wenn jene durch v_1, letztere durch v bezeichnet wird, so ist nach dem Euler'schen Theorem der absolute Werth von v_1 gleich $v \sin L$, d. h. man muss die Winkelgeschwindigkeit der Axendrehung der Erde mit dem Sinus der geographischen Breite des Beobachtungsorts multipliciren, um den absoluten Werth von v_1 zu finden. Was die Richtung der scheinbaren Bewegung der Schwingungsebene betrifft, so lässt sich dieselbe nach den oben von mir gegebenen Regeln auf die einfachste und sicherste Weise bestimmen. Ist nämlich in Folge der Bewegung der Erde um ihre Axe $\chi = 0$ zu setzen, so ist v_1 negativ; ist dagegen in Folge der Bewegung der Erde um ihre Axe $\chi = 180^0$ zu setzen, so ist v_1 positiv. Für den Mathematiker bedarf die Anwendung dieser ganz bestimmten Regeln keiner weiteren Erläuterung, und ein Jeder wird, wenn er die Anwendung dieser Regeln nur einmal versucht, sogleich übersehen, dass auch in Beziehung auf die Richtung der scheinbaren Bewegung der Schwingungsebene des Pendels Alles auf jedem Punkte der Erdoberfläche im Allgemeinen und Wesentlichen ganz eben so vor sich geht wie wir oben unter den Polen gesehen haben.

Alles Obige beruhte nun aber lediglich auf der Annahme, dass das Pendel so aufgehängt sei, dass sein Aufhängepunkt an der Bewegung der Erde selbst gar nicht Theil nehme, eine Forderung, die natürlich in der Wirklichkeit niemals erfüllt werden kann. Nun haben aber von Foucault wirklich angestellte Versuche gezeigt, was wir nicht für das geringste Verdienst derselben von ihrer praktischen Seite halten, dass, wenn nur der Pendelfaden rund und homogen ist, man ihn beliebig rasch um sich selbst drehen lassen kann, ohne dadurch einen wesentlichen Einfluss auf die Lage der Schwingungsebene auszuüben, so dass das Experiment an jedem beliebigen Beobachtungsorte gelingen muss. Ueber das bei den Versuchen anzuwendende praktische Verfahren erlaube ich mir im Interesse der Leser des Archivs im Folgenden Herrn v. Littrow sprechen zu lassen.

„Foucault hat in dem höchsten Punkte eines Gewölbes ein starkes Metallstück angebracht, welches als Aufhängepunkt für den Pendelfaden dienen sollte. Dieser geht durch eine kleine Platte von gehärtetem Stahl, deren freie Oberfläche genau horizontal ist. Der Pendelfaden selbst ist von Eisendraht, sein Durchmesser im Mittel $\frac{8}{10}$ Millimeter und seine Länge 2 Meter. Am unteren Ende trägt er eine polirte Messingkugel von 5 Kilogrammen Gewicht, nach unten mit einer Spitze versehen, die gewissermassen die Verlängerung des Pendelfadens ist.

Will man an das Experiment gehen, so wird man zuerst die etwaige Torsion des Fadens, so wie die drehenden Oscillationen der Kugel wegzubringen suchen. Um dann das Pendel aus der Gleichgewichtslage herauszubringen, umfasst man die Kugel mit einer Schlinge aus Bindfaden, dessen anderes Ende an einem Punkte der Mauer in einer geringen Höhe über dem Boden befestigt ist. Giebt man dem Faden die gehörige Länge, so wird man die Amplitude der Schwingungen des Pendels nach Belieben abändern können. Bei Foucault's Eyperimente umfassten die Schwingungen in der Regel Anfangs einen Bogen von 15 bis 20 Graden. Hat man also mit Hülfe des Fadens und der Schlinge das Pendel aus der vertikalen Lage entfernt, und ist die Kugel zur Ruhe gekommen, so brennt man den Faden ab, wodurch die Schlinge zur Erde fällt, und das Pendel sich in Bewegung setzt. Nach einer halben Stunde ist der Betrag der Drehung in unsern Breiten schon 5°.39′, so dass diese deutlich in die Augen fällt. Um sich zu überzeugen, ob diese Drehung wirklich mit Continuität vor sich geht, wie es sein soll, kann man sich eines vertikalen Stiftes bedienen, den man so aufstellt, dass die nach abwärts gerichtete Spitze an der Kugel des Pendels bei der grössten Ausweichung desselben von der Gleichgewichtslage jenen Stift fast berührt. In weniger als einer Minute findet das genaue Zusammentreffen beider Spitzen nicht mehr Statt; die Spitze an der Pendelkugel weicht auf der dem Beobachter zugekehrten Seite der Schwingung immer mehr gegen die Linke des Beobachters ab, was darauf hindeutet, dass die Drehung der Schwingungsebene im Sinne von Süd gegen West u. s. w. erfolgt, wie es auch sein soll. Die mittlere Grösse jener Drehung, mit Rücksicht auf die Zeit, zeigt übereinstimmend mit der Theorie, dass die Schwingungsebene unter der geographischen Breite von Paris in 24 Stunden einen Winkel von 271° zurücklegt*). Foucault hat später das Experiment im Saale des Pariser Observatoriums mit einem

---

*) Für Paris ist

$$L = 48^\circ.50'.13''$$

also

$$\log\sin L = 0{,}8767024 - 1.$$

Nun kann man für die Axendrehung der Erde, wenn man 24 Stunden als Zeiteinheit annimmt, $v = 360^\circ$, also

$$\log v = 2{,}5563025$$

setzen. Daher ist für Paris der Logarithmus des absoluten Werths von v_1

$$\begin{array}{rr} = & 0{,}8767024-1 \\ & +\underline{2{,}5563025} \\ = & 2{,}4330049 \end{array}$$

welches den absoluten Werth von $v_1 = 271^\circ{,}02$ giebt.

Pendel von 11 Meter Länge ausgeführt; wo sich schon nach zwei Schwingungen eine Ablenkung der Schwingungsebene erkennen liess."

Herr v. Littrow bemerkt noch, dass man schon im Jahre 1661 in Florenz bei Gelegenheit von Pendelversuchen die hier besprochene Ablenkung der Schwingungsebene beobachtet hat, ohne jedoch eine Erklärung davon zu geben.

Was etwa noch weiter über das bei den Versuchen zu beobachtende praktische Verfahren zu bemerken sein möchte, werden die Leser in den späteren im Archive mitzutheilenden Aufsätzen finden. In den Münchener Gelehrten Anzeigen. 1852. Nr. 30. 31. finden sich verschiedene hierher gehörende sehr beachtenswerthe Bemerkungen, insbesondere auch von Herrn Conservator Lamont, der sich mit diesem Versuch mehrfach praktisch beschäftigt hat.

Schliesslich bemerke ich, dass der Foucault'sche Versuch natürlich auch ein ganz neues Mittel zur Bestimmung der geographischen Breite an die Hand giebt, und, so viel ich gehört habe, beschäftigt man sich auch schon mit der Construction dazu dienender Apparate. Aber auch diese Anwendung wird eine bis in das kleinste Detail gehende Entwickelung der Theorie des genannten schönen Versuchs voraussetzen, wenn sie wirklich fruchtbar werden soll.

Unter dem Aequator lässt sich der Versuch gar nicht mehr anstellen, da dort $v_1 = 0$ ist. Ueberhaupt wird derselbe desto unsicherer, desto weniger anschaulich, jemehr man sich dem Aequator nähert. Je näher am Pol, desto besser.

VI.

Apparat zu Inductionsversuchen mit der Nebenbatterie.

Von

Herrn Director Knochenhauer

zu Meiningen.

Die neuen Versuche über die Inductionserscheinungen an der Nebenbatterie, die ich im vergangenen Sommer angestellt habe und demnächst publiciren werde, haben mich die Bedingungen kennen gelehrt, unter welchen diese Inductionen am stärksten hervortreten und mit der Entfernung der Inductordrähte am langsamsten abnehmen. Diese Bedingungen sind: lange, gut leitende Inductordrähte, kurzer Schliessungsdraht der Hauptbatterie, Flaschen von sehr starkem Glase, sorgfältige Verbindung der Drähte mit den Belegungen der Flaschen. Für diejenigen demnach, die diese Erscheinungen nur auf eine bequeme Weise sehen, aber keine strengen Messungen anstellen wollen, erlaube ich mir den folgenden Apparat zu beschreiben, der ihren Wünschen entsprechen wird. — Zum Ausspannen der Inductordrähte verwende man zwei hölzerne, zerlegbare Rahmen, wie einen Taf. II. Fig. 1. darstellt; die Seitenwangen *AC* und *BD* seien 10′ hoch, aus 4 Zoll breiten, $^3/_8$ Zoll starken tannenen Brettchen bestehend, gegen welche nach aussen drei $1^1/_2$ Zoll breite, $^3/_8$ Zoll starke Latten in gleichen Abständen von einander mit den hohen Kanten geleimt und mit Stiften befestigt sind; die 8′ langen Querstäbe *NM* und *OL*, von denen der unterste 2′ über *C* und *D* steht, bilden 2 Zoll breite, $^3/_8$ Zoll starke Latten, gegen deren Mitte man andere $1^1/_2$ Zoll breite wie vorher befestigt. Die beiden Querstäbe enden mit 2 Zoll im Quadrat starken Klötzen *E*, *F*, *G*, *H*, die in Holzschrauben übergehen; man legt den obern Stab in einen kurzen Schlitz zwischen den beiden vordern Querleisten auf den Wangen *AC* und *BD*, den untern durch einen längern Schlitz zwischen denselben Querleisten, und zieht die Schraubmutter *x* an. In den Klötzen *E*, *F*, *G*, *H* stecken starke, etwa um 2 Zoll nach vorn hervorragende Glaspflöcke, zwei dergleichen etwas kürzere in den 2' von einander abstehenden Holzklötzen *J* und *K*. Die zwei letzten haben vorn eine Messingfassung *A* (Taf. II. Fig. 2.), gegen welche die mit Plättchen endigenden Drähte *C* und *D* sich mittelst der Druckschraube *B* fest klemmen lassen; die andern 4 Glaspflöcke sind vorn mit einigen gefirnissten Fäden umwickelt. Die 30' langen Inductordrähte von etwa $^3/_4$ Linien starkem, ausgeglühtem Kupferdraht werden mit ihren Enden bei *J* und *K* festgeklemmt, über die Glaspflöcke gelegt und darauf durch Herabdrücken von *GH* mässig stark angespannt. — Flaschen wird man 4 gebrauchen; man lasse sie zu $1^1/_4$ bis $1^1/_2$ Quadr.-Fuss äusserer Belegung aus sehr dickem, etwa 3 Linien starkem Glase mit senkrechten Wänden wie *ABCD* (Taf. II. Fig. 3.) anfertigen, und einen kurzen Messingstab auf dem Boden einer jeden mit der Belegung durch Ankitten und Ueberkleben sicher metallisch verbinden; die Druckschraube *F* dient dann zur Befestigung des Schliessungsdrahts *FGH*. Mit einer Flasche der Nebenbatterie verbindet man den Funkenmesser *NM*; in ihm laufen zwei Messingstäbe *NP* und *MQR* auf 4 Zoll Distanz neben einander und werden durch die in Hülsen fest eingekittete Glassäule *JK* getrennt; etwa 4 Zoll über *JK* trägt der eine Stab die Kugel *N*, der andere an einer Schraube *L* die Kugel *M*, beide mindestens von $^3/_4$ Zoll Durchmesser. Die Schraubmutter zu *L* ist durchschnitten, um sie mit der Schraube *O* fest anzuziehn. Der innere Messingstab drückt mit der Platte *P* gegen die innere Belegung, durch den äussern geht die Schraube *Q*, welche die an einen Draht gelöthete Platte *W* an die äussere Belegung andrückt. Um den Stand dieses Funkenmessers sicherer zu machen, greift das obere Ende des Stabes *LQ* in die Hülse bei *R* ein. Wenn sich zwei Flaschen in der Nebenbatterie befinden, so wird die zweite mit einem ähnlichen Apparat armirt, dem nur die Kugeln *MN* und der Fortsatz *QR* fehlen; man verbindet sie durch Drähte, die zu den Klemmschrauben *J* und *K* führen, natürlich so, dass die beiden innern und ebenso die beiden äussern Stäbe mit einander zusammenkommen. Die Nebenbatterie steht am besten isolirt auf einer Glastafel *V*, an die unten 4 Standgläser (*T*, *U*....) gekittet sind. Da fürs Maximum der Induction bei unverändertem Schliessungsdraht der Hauptbatterie die Länge des Schliessungsdrahts der Nebenbatterie durch Probiren ermittelt werden muss (denn starke Flaschen sind selten an Kraft einander gleich), so ist es bequem zwei an Glassäulen befestigte Klemmen *H* und *S* anzubringen, die erste verbunden mit dem Draht zur innern Belegung *HGF*, der bei zwei zur Nebenbatterie combinirten Flaschen sich bei *G* spaltet, die andere verbunden mit der Hülse *R* und einem längern Metallstreifen, auf welchen die eine oder beide Flaschen gesetzt werden. — Von der nicht isolirten Hauptbatterie, die durch Zuleitung der Elektricität auf einem einige Fuss langen Draht geladen wird, führt der mit der innern Belegung verbundene Schliessungsdraht (überall der gleiche $^3/_4$ Linien starke Kupferdraht) zur Klemmschraube *D* (Taf. II. Fig. 4.) des Ausladers *ABFG*; in diesem sind die beiden Kugeln *A* und *B*, diese fest, jene durch die Schraube *C* verstellbar, auf die gläsernen Säulen *F* und *G* gekittet und zur Sicherung ihres Standes durch den gläsernen Querstab *ED* gestützt.

Bei den Versuchen möge zuerst jede der beiden Batterien 2 Flaschen enthalten. Man stellt die Rahmen *AB* und *CD* (Taf. II. Fig. 5.) parallel zu einander um etwa 2′ getrennt auf; die Hauptbatterie *J* erhält vom Conductor *K* ihre Ladung; ihr Schliessungsdraht führt zur Klemmschraube *D* (Taf. II. Fig. 4.) oder zu den Kugeln *L* des Ausladers, von da nämlich von der Klemmschraube *E* (Taf. II. Fig. 4.) in einer horizontalen Drahtlänge von 3′ nach *M* (der Schraube *K* Taf. II. Fig. 1.), geht durch den Inductordraht bis *N* und von hier in etwa 4′ zur äussern Belegung. Von den Schrauben *V* und *W* (*J*, *K*, Taf. II. Fig. 1.) des zweiten Rahmens laufen die etwa 8′ langen Kupferdrähte *VS* und *WU* horizontal aus, die bei *R* und *Q* durch die Klemmschrauben (*H*, *S* Taf. II. Fig. 3.) hindurchgehen und fest gefasst werden. Man schraubt nun die Kugeln *M* und *N* (Taf. II. Fig. 3.) des Funkenmessers nach und nach so nahe an einander, bis zwischen ihnen in dem Moment, wo sich die Hauptbatterie über *L* entladet, der Inductionsfunken erscheint. Hierauf rückt man die Nebenbatterie *P* näher oder weiter vom Rahmen *AB*, indem man die Drahtlänge *VR* und *WQ* verkürzt oder verlängert, bis man bei unverändertem Stand der Kugeln *L* den längsten Funken zwischen *N* und *M* erhält. Ist die Länge des Schliessungsdrahts der Nebenbatterie für das Maximum der Induction auf diese Weise festgestellt, so kann man die Rahmen näher an einander bringen und nach und nach wieder von einander entfernen; dies zeigt die allmählige Abnahme der inducirten Ladung der Nebenbatterie, und man wird sicher die Rahmen bis auf 4′ aus einander rücken müssen, ehe die Länge des inducirten Funkens bis auf $^1/_2$ Linie herabkommt, sofern die Distanz zwischen den Kugeln des Ausladers gegen 2 Linien beträgt. — Will man sich ferner von dem Gesetze überzeugen, dass die Längen der beiden Schliessungsdrähte sich umgekehrt wie die Zahl der Flaschen in beiden Batterien verhalten, so lasse man die Hauptbatterie aus 2 Flaschen bestehen und setze in die Nebenbatterie nur eine; man wird dann hier, wo der Schliessungsdraht der Hauptbatterie ungefähr 38′ lang ist, jeden der Drähte *VR* und *WQ* noch etwa um 19′ zu verlängern haben, ehe die Nebenbatterie das Maximum ihrer Ladung erlangt. Eine kleine Störung tritt dadurch ein, dass die Drähte *VS* und *WU* einander zu nahe sind; indess lässt sich das Gesetz deshalb doch nicht verkennen. Auch kann man 3 Flaschen in die Hauptbatterie nehmen und den Nebendraht bis zum Maximum der Induction noch um etwa 38′ verlängern. In den beiden letzten Zusammenstellungen der Batterien hat man die überraschende Erscheinung, dass bei kleinen Distanzen der Inductordrähte von einander (1 bis 2 Zoll) der inducirte Funke über *NM* (Taf. II. Fig. 3.) länger ist als der Funken über *L* (Taf. II. Fig. 5.) und viel stärker schallt.

VII.

Miscellen.

Den in Thl. XIX. Heft IV. Nr. XXXIII. abgedruckten schönen Aufsatz übersendete Herr Lector Lindman mir mit dem folgenden Briefe. Die höchst liebenswürdige Bescheidenheit, mit welcher Herr Lindman sich in diesem Briefe über seine Leistungen ausspricht, veranlasst mich, denselben ganz abdrucken zu lassen, weil ich dadurch zugleich den durch die Worte: „Si in Archivo mentionem hujus rei facere Tibi placuerit, gratissimum mihi erit." ausgesprochenen Wunsche meines verehrten Freundes am Besten zu entsprechen hoffe. Was derselbe am Schluss seines Briefes von Sich Selbst sagt, ist nur der Ausdruck der liebenswürdigsten Bescheidenheit; denn wer schon mehrere so schöne Arbeiten geliefert hat, wie Herr Lindman, hat nicht nöthig, sich „nulla ratione divitem" zu nennen; wäre doch schon eben diese anspruchslose Bescheidenheit ein grosser Reichthum! Was aber mein verehrter Freund in diesem Briefe über mich sagt, nehme ich nur als den Ausdruck seiner freundschaftlichen Gesinnungen gegen mich auf, wofür ich ihm zu dem herzlichsten Danke verpflichtet bin und ihn bitte, dieselben mir stets zu bewahren.

„Johanni Augusto Grunert

Christianus Fredericus Lindman, Lector Strengnesensis S. P. D."

„Ut in Archivum Tuum, si placeat, recipias, problemata quaedam geometrica nunc mitto. Quod ad primum attinet, non possum, quin mirer, me id nusquam reperire potuisse. Quod si Tu, qui doctrina rerumque cognitione me millies superas, hoc problema antea vidisti, oro, ut id supprimas. Problemata tertium et quartum melius forsitan ac rectius „Uebungsaufgaben für Schüler" apellantur, quamquam in utroque est, quod initio exspectandum non videatur.

Posteriores Archivi Tui tomos perlegens quaedam animadverti, quae et ad Te et ad me pertinent. In tom. XVI. pagg. 424. seqq. Dus Scheffler Brunsvicensis solutionem problematis Malfattini dedit, quae a Tua in suppl. Lexici Klügeliani (Pars prior. pag. 29. seqq.) vix et ne vix quidem differat. In tomi XVIII. pag. 39. seqq. Doctor Werner theorema de differentiatione sub signo $\int$ repetita proposuit, quod a me quattuor fere abhinc annis in dissertatione pro munere Lectoris propositum est posteaque usurpatum in tractatu, cui Regia Academia Scient. Holmiensis in Actis suis locum dare dignata est. - Rogo Te ut opuscula, epistolam sequentia tamquam documentum hujus rei accipias. Si in Archivo mentionem hujus rei facere Tibi placuerit, gratissimum mihi erit. Fortasse num venit Tibi in mentem Horatianum illud:

„Multi rixantur de lana saepe caprina"

sed memineris, eum, qui non multum habet, nihil sine damno perdere meque, nulla ratione divitem, hac esse pauperrimum. Indicem erratorum in tractatulo de $\int^{\infty}\frac{\text{Sin}^n x}{x^m}dx$ adjeci. Valeas."

Was die von Herrn Lindman in diesem Briefe mir gemachten Mittheilungen betrifft, so erlaube ich mir zuerst zu bemerken, dass ich allerdings recht gut wusste, dass die von Herrn Scheffler in Braunschweig in Thl. XVI. S. 424. gegebene Auflösung des Malfatti'schen Problems mit meiner eignen Auflösung in den Supplementen zum Klügelschen Wörterbuche. Thl. I. S. 29. im Wesentlichen übereinstimmt. Ich bin aber eben so sehr überzeugt, dass Herr Scheffler diese Auflösung ganz selbstständig gefunden hat, und meine eigne Auflösung gar nicht gekannt hat. Einestheils deshalb, anderntheils aber auch, um diese Auflösung bekannter zu machen, liess ich Herrn Scheffler's Aufsatz im Archiv a. a. O. abdrucken, ohne das zu bemerken, worauf mich jetzt Herr Lindman aufmerksam macht. Herr Scheffler wird mir das nicht übel nehmen, indem es ihm, wie ich wenigstens hoffe, wohl nicht geradezu unangenehm sein wird, bei einer kleinen wissenschaftlichen Untersuchung mit mir zusammengetroffen zu sein.

Ferner bemerke ich, dass das von Herrn Werner in Theil XVIII. Nr. IV. S. 39. gegebene Theorem allerdings schon früher von Herrn Lindman gefunden worden ist, wie aus den beiden folgenden mir mit obigem Briefe gütigst übersandten Schriften deutlich hervorgeht:

Theses quas pro munere Lectoris publicae censurae modeste subjicit Mag. C. F. Lindman, Ad Reg. Acad. Ups. Docens. Upsaliae. 1848. 4.

Om några definita integraler; af C. F. Lindman, Inlemnad d. 31. Januarii 1851.

(Aus den Schriften der Stockholmer Akademie der Wissenschaften.)

Leider habe ich diese beiden Schriften nur erst jetzt kennen gelernt, indem Herr Lindman dieselben mir gütigst übersandt hat; hätte ich früher von denselben Kenntniss gehabt, so würde ich natürlich bei dem Aufsatze des Herrn Werner bemerkt haben, dass Herr Lindman die betreffenden Sätze schon früher gefunden habe, welche Schuld Herrn Lindman nun nachträglich abtragen zu können, mir zur grössten Freude gereicht.

G.

In seinen „Grösstentheils neuen Aufgaben aus dem Gebiete der Géométrie descriptive. Zürich. 1845." die wir als sehr empfehlenswerth den Lesern des Archivs bei dieser Gelegenheit wieder in Erinnerung bringen, theilt Herr Professor L. Mossbrugger in Aarau auf S. 123. folgende, ihm selbst von Herrn Professor Rytz in Aarau mitgetheilte Construction der Achsen der Ellipse aus zwei gegebenen conjugirten Durchmessern mit, für welche der analytische Beweis von Herrn Mossbrugger selbst herrührt.

Es seien Taf. I. Fig. 6. Am und Bm die der Lage und Grösse nach gegebenen zugeordneten Durchmesser. Wir errichten im Durchschnitt m beider Durchmesser auf den grössern Am ein Perpendikel $mD=Am$, verbinden D mit B durch die Linie BD, halbiren BD in M und beschreiben aus M mit der Entfernung Mm einen Halbkreis, welcher die Linie BD in zwei Punkten E und F schneiden wird; ziehen endlich durch m und E, m und F die Linien $mEHG$, $mFLN$, so dass $mL=DF$ und $mH=BF$ ist, so sind mL die halbe grosse und mH die halbe kleine Achse der Ellipse in ihren erforderlichen Grössen und Lagen. Die Deduktion dieser Construktion ist folgende:

Es ist zu zeigen, dass $DF=a$ und $BF=b$ ist, wenn $2a$ und $2b$ die grosse und kleine Achse der Ellipse bezeichnen. Es seien daher $Am=f$, $Bm=g$, $\angle NmK=\angle AML=\varphi$, $\angle LmB=w$, $DF=x$, $BF=y$, so ist:

$$(x+y)^2=f^2+g^2-2fg\cos[90^0+(\varphi+w)]$$

oder

$$(x+y)^2=f^2+g^2+2fg\sin(\varphi+w).$$

Da aber nach den Eigenschaften der Ellipse

$$a^2+b^2=f^2+g^2, \quad ab=fg\sin(\varphi+w)$$

ist, so folgt sogleich, dass

$$(x+y)^2=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$

also

$$x+y=a+b \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 1)$$

ist. Ferner ist in den Dreiecken FmB und FmD

$$y : g=\sin w : \sin BFC$$

$$\begin{cases} x : f=\sin(90^0+\varphi):\sin(180^0-BFC) \\ x : f=\cos\varphi : \sin BFC \end{cases}$$

mithin

$$\sin BFC=\frac{g}{y}\sin w, \quad \text{und} \quad \sin BFC=\frac{f}{x}\cos\varphi;$$

folglich

$$\frac{y}{x}=\frac{g\sin w}{f\cos\varphi}, \quad \text{oder auch} \quad \frac{y^2}{x^2}=\frac{g^2\sin x^2}{f^2\cos\varphi^2};$$

nun ist aber nach den Eigenschaften der Ellipse:

$$\frac{g^2}{f^2}=\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin w\cos w},$$

daher wird auch:

$$\frac{y^2}{x^2}=\text{tg}\varphi\,\text{tg}w.$$

Endlich ist ebenfalls aus den Eigenschaften der Ellipse bekannt, dass

$$\frac{b^2}{a^2}=\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}w,$$

mithin ist auch

$$\frac{y}{x}=\frac{b}{a}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Aus 1) und 2) folgt aber, dass $y=b$ und $x=a$ sei, was in Beziehung auf die Grösse dieser Linien zu beweisen war. Aus der Construktion selbst geht aber hervor, dass diese Linien auf einander senkrecht stehen; mithin haben sie auch unter sich die erforderliche Lage.

Druckfehler.

In Theil XIX. S. 441. Z. 3. muss die Gleichung 30) heissen:

$$=-\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2}\lg 2-\frac{(2^1-1)\alpha B_1}{1.1.2}+\frac{(2^3-1)\alpha^3 B_3}{3.1.2.3.4}-\frac{(2^5-1)\alpha^5 B_5}{5.1.2..6}+\ldots$$

und auf derselben Seite Z. 11. und 12. muss die Gleichung 31) heissen:

$$=-\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\lg\frac{2\alpha}{\pi}-\frac{(2^2-1)\alpha B_1}{1.1.2}+\frac{(2^4-1)\alpha^3 B_3}{3.1.2.3.4}-\frac{(2^6-1)\alpha^5 B_5}{5.1.2..6}+\ldots$$

VIII.

Ueber die Lehre von den imaginären Grössen, als Fortsetzung und weitere Ausführung der Abhandlung Nr. XL. III. S. 295. im ersten Theile des Archivs.

Von
dem Herausgeber.

---

§. 1.

In der Abhandlung über den Binomischen Lehrsatz*) (49.) ist gezeigt worden, dass für jedes reelle α und β

$$1)\quad e^{\alpha}(\cos\beta+\sin\beta\sqrt{-1})=1+\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{1}+\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^2}{1.2}+\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^3}{1.2.3}+\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4}+\ldots\ldots$$

*) Hierunter wird immer die Abhandlung Thl. VIII. Nr. XXV. verstanden, in welcher (S. 273.) schon auf die vorliegende Abhandlung über die imaginären Grössen hingewiesen worden ist; der Abdruck derselben ist verspätet worden, weil eine grössere Anzahl anderer Abhandlungen vorlag, deren Abdruck dringender erschien.

ist. Also ist, wenn a eine beliebige positive Grösse bezeichnet:

$$2)\quad e^{\alpha la}\{\cos(\beta la)+\sin(\beta la).\sqrt{-1}\}$$

$$=1+\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})la}{1}$$

$$+\frac{\{(\alpha+\beta\sqrt{-1})la\}^2}{1.2}$$

$$+\frac{\{(\alpha+\beta\sqrt{-1})la\}^3}{1.2.3}$$

$$+\frac{\{(\alpha+\beta\sqrt{-1})la\}^4}{1.2.3.4}$$

$$+\ldots\ldots\ldots$$

Weil nun nach dem allgemeinen Begriffe der Logarithmen

$$a=e^{la},$$

und folglich

$$a^x=e^{xla}$$

ist, wo unter allen Potenzen deren reelle positive Werthe zu verstehen sind, so ist nach der Abhandlung über den Binomischen Lehrsatz (44.) für jedes reelle x:

$$3)\quad a^x=1+\frac{xla}{1}+\frac{(xla)^2}{1.2}+\frac{(xla)^3}{1.2.3}+\frac{(xla)^4}{1.2.3.4}+\ldots..$$

Vergleicht man die beiden Reihen auf den rechten Seiten der Gleichungen 2) und 3) mit einander, so bemerkt man auf der Stelle, dass die erste aus der zweiten hervorgeht, wenn man $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ für x setzt. Deshalb versteht man der Analogie wegen unter der Potenz

$$a^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$$

der positiven Grösse a mit dem imaginären Exponenten $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ die Summe der stets convergirenden Reihe

$$1,\quad \frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})la}{1},\quad \frac{\{(\alpha+\beta\sqrt{-1})la\}^2}{1.2},\quad \frac{\{(\alpha+\beta\sqrt{-1})la\}^3}{1.2.3},\ \ldots.;$$

und setzt also in Folge der Gleichung 2):

$$4)\qquad a^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=e^{\alpha la}\{\cos(\beta la)+\sin(\beta la).\sqrt{-1}\},$$

wo den Grössen α und β alle reellen Werthe beigelegt werden können, die Grösse a aber nur positiv genommen werden darf.

Für $\alpha=0$ erhält man aus der vorhergehenden Gleichung

$$5)\qquad a^{\beta\sqrt{-1}}=\cos(\beta la)+\sin(\beta la).\sqrt{-1},$$

und für $\beta=0$ ergiebt sich aus derselben

$$6)\qquad a^{\alpha}=e^{\alpha la}.$$

Also ist offenbar immer

$$7)\qquad a^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=a^{\alpha}.a^{\beta\sqrt{-1}}.$$

Weil nach 4)

$$a^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=e^{\alpha la}\{\cos(\beta la)+\sin(\beta la).\sqrt{-1}\},$$

$$a^{\gamma+\delta\sqrt{-1}}=e^{\gamma la}\{\cos(\delta la)+\sin(\delta la).\sqrt{-1}\}$$

ist, so ist nach dem Moivre'schen Theoreme

$$a^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}\,.\,a^{\gamma+\delta\sqrt{-1}}$$

$$=e^{(\alpha+\gamma)la}\{\cos((\beta+\delta)la)+\sin((\beta+\delta)la).\sqrt{-1}\};$$

und weil nun nach 4)

$$a^{\alpha+\gamma+(\beta+\delta)\sqrt{-1}}=a^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})+(\gamma+\delta\sqrt{-1})}$$

$$=e^{(\alpha+\gamma)la}\{\cos((\beta+\delta)la)+\sin((\beta+\delta)la).\sqrt{-1}\}$$

ist, so ist

$$8)\qquad a^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}.a^{\gamma+\delta\sqrt{-1}}=a^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})+(\gamma+\delta\sqrt{-1})}.$$

Für $a=e$ ist nach 4)

$$9)\qquad e^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=e^{\alpha}(\cos\beta+\sin\beta\sqrt{-1}),$$

und folglich für $\alpha=0$:

$$10)\quad e^{\beta\sqrt{-1}}=\cos\beta+\sin\beta\sqrt{-1}.$$

Also ist, wenn wir $\beta=\pm x$ setzen:

$$11)\quad e^{\pm x\sqrt{-1}}=\cos x\pm\sin x\sqrt{-1}.$$

Durch Addition und Subtraction der beiden Gleichungen

$$\cos x+\sin x\sqrt{-1}=e^{x\sqrt{-1}},$$

$$\cos x-\sin x\sqrt{-1}=e^{-x\sqrt{-1}}$$

erhält man:

$$12)\quad \begin{cases} \cos x=\dfrac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \\ \sin x=\dfrac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Also ist

$$13)\quad \begin{cases} \tang x=\dfrac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{(e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}})\sqrt{-1}}, \\ \cot x=\dfrac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}\sqrt{-1}; \end{cases}$$

oder

$$14)\quad \begin{cases} \tang x=-\dfrac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}\sqrt{-1}, \\ \cot x=\dfrac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}\sqrt{-1}; \end{cases}$$

oder

$$15)\quad \begin{cases} \tang x = \dfrac{e^{2x\sqrt{-1}}-1}{(e^{2x\sqrt{-1}}+1)\sqrt{-1}}, \\ \cot x = \dfrac{1+e^{2x\sqrt{-1}}}{(1-e^{2x\sqrt{-1}})\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

oder auch

$$16)\quad \begin{cases} \tang x = \dfrac{1-e^{2x\sqrt{-1}}}{1+e^{2x\sqrt{-1}}}\sqrt{-1}, \\ \cot x = \dfrac{e^{2x\sqrt{-1}}+1}{e^{2x\sqrt{-1}}-1}\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Aehnliche Formeln würden sich auch für die übrigen goniometrischen Functionen entwickeln lassen, wobei wir jedoch hier uns nicht aufhalten wollen, weil die Sache gar keine Schwierigkeit darbietet.

§. 2.

Unter dem natürlichen Logarithmus der imaginären Grösse $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, d. i. in der aus der Abhandlung über den Binomischen Lehrsatz bekannten Bezeichnung unter der Grösse $\mathrm{l}(\alpha+\beta\sqrt{-1})$, verstehen wir eine Grösse von solcher Beschaffenheit, dass

$$17)\quad e^{\mathrm{l}(\alpha+\beta\sqrt{-1})} = \alpha+\beta\sqrt{-1}$$

ist. Setzen wir nun

$$18)\quad \mathrm{l}(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = p+q\sqrt{-1},$$

so muss also

$$e^{p+q\sqrt{-1}} = \alpha+\beta\sqrt{-1},$$

folglich nach 9)

$$e^p(\cos q+\sin q\sqrt{-1}) = \alpha+\beta\sqrt{-1}$$

sein, woraus sich zur Bestimmung der Grössen p und q die beiden Gleichungen

$$19)\quad e^p \cos q = \alpha,\quad e^p \sin q = \beta$$

ergeben. Quadrirt man diese beiden Gleichungen, und addirt sie dann zu einander, so erhält man

$$20)\quad e^{2p} = \alpha^2 + \beta^2,$$

folglich $2p = \mathrm{l}(\alpha^2+\beta^2)$ oder

$$21)\quad p = \frac{1}{2}\mathrm{l}(\alpha^2+\beta^2).$$

Also ist

$$e^p = e^{\frac{1}{2}\mathrm{l}(\alpha^2+\beta^2)} = e^{\mathrm{l}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

d. i. nach dem allgemeinen Begriffe der Logarithmen:

$$e^p = \sqrt{\alpha^2+\beta^2};$$

und wegen der Gleichungen 19) muss folglich q so bestimmt werden, dass zugleich

$$\cos q.\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \alpha,\quad \sin q.\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \beta$$

oder

$$22)\quad \cos q = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad \sin q = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}};$$

oder dass

$$23)\quad q = \mathrm{Arc}\cos\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \mathrm{Arc}\sin\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

ist, welches offenbar jederzeit möglich ist, weil

$$\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 = 1$$

ist. Uebrigens kann man, da nach 22)

$$24)\quad \mathrm{tang}\, q = \frac{\beta}{\alpha}$$

ist, q auch mittelst der Gleichung

$$25)\quad q = \mathrm{Arctang}\frac{\beta}{\alpha}$$

bestimmen, hat dann aber zu bemerken, dass sich der Bogen q im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigen muss, wenn respective α positiv und β positiv, α negativ und β positiv, α negativ und β negativ, α positiv und β negativ ist, weil nur, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, zugleich

$$q = \text{Arccos}\,\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \text{Arcsin}\,\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

sein kann, wie es nach dem Obigen erfordert wird.

Ist nun q gehörig bestimmt, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar die Gleichung

$$26)\quad \mathrm{l}(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\mathrm{l}(\alpha^2+\beta^2)+q\sqrt{-1}.$$

Auf ähnliche Art wie vorher verstehen wir, wenn B eine beliebige positive Grösse bezeichnet, überhaupt unter dem Logarithmus der imaginären Grösse $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ für die Basis B, welcher durch $\log(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ bezeichnet werden mag, eine Grösse von solcher Beschaffenheit, dass

$$27)\quad B^{\log(\alpha+\beta\sqrt{-1})} = \alpha+\beta\sqrt{-1}$$

ist.

Setzen wir nun $e=B^M$, so ist

$$e^{\mathrm{l}(\alpha+\beta\sqrt{-1})} = (B^M)^{\mathrm{l}(\alpha+\beta\sqrt{-1})},$$

also nach 26)

$$e^{\mathrm{l}(\alpha+\beta\sqrt{-1})} = (B^M)^{\frac{1}{2}\mathrm{l}(\alpha^2+\beta^2)+q\sqrt{-1}}.$$

Nach 4) ist aber

$$(B^M)^{\frac{1}{2}\mathrm{l}(\alpha^2+\beta^2)+q\sqrt{-1}}$$
$$= e^{\frac{1}{2}\mathrm{l}(\alpha^2+\beta^2).M\mathrm{l}B}\{\cos(Mq\mathrm{l}B)+\sin(Mq\mathrm{l}B).\sqrt{-1}\}$$

und

$$B^{\frac{1}{2}M\mathrm{l}(\alpha^2+\beta^2)+Mq\sqrt{-1}}$$
$$= e^{\frac{1}{2}M\mathrm{l}(\alpha^2+\beta^2).\mathrm{l}B}\{\cos(Mq\mathrm{l}B)+\sin(Mq\mathrm{l}B).\sqrt{-1}\},$$

so dass also offenbar

$$(B^M)^{\frac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2)+q\sqrt{-1}} = B^{\frac{1}{2}Ml(\alpha^2+\beta^2)+Mq\sqrt{-1}},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$e^{l(\alpha+\beta\sqrt{-1})} = B^{\frac{1}{2}Ml(\alpha^2+\beta^2)+Mq\sqrt{-1}}$$

ist. Weil nun aber nach 17)

$$e^{l(\alpha+\beta\sqrt{-1})} = \alpha+\beta\sqrt{-1}$$

ist, so ist

$$B^{\frac{1}{2}Ml(\alpha^2+\beta^2)+Mq\sqrt{-1}} = \alpha+\beta\sqrt{-1}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung 27), so ergiebt sich auf der Stelle

$$28)\quad \log(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}Ml(\alpha^2+\beta^2)+Mq\sqrt{-1}$$

oder

$$29)\quad \log(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = M\{\frac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2)+q\sqrt{-1}\},$$

also nach 26):

$$30)\quad \log(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = Ml(\alpha+\beta\sqrt{-1}).$$

Die Grösse M, mit welcher man hiernach den natürlichen Logarithmus $l(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ multipliciren muss, um den Logarithmus $\log(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ für die Basis B zu erhalten, nennt man den Modulus des logarithmischen Systems, dessen Basis B ist.

Weil nach dem Obigen bekanntlich $e=B^M$ ist, so ist

$$le=1=MlB,\quad \log e=M\log B=M;$$

also

$$31)\quad M=\frac{1}{lB}=\log e.$$

Setzt man also natürlich auch

$$\log(\alpha^2+\beta^2)=Ml(\alpha^2+\beta^2),$$

so ist nach 28):

$$32)\quad \log(\alpha+\beta\sqrt{-1})=\frac{1}{2}\log(\alpha^2+\beta^2)+Mq\sqrt{-1}.$$

Da q offenbar unendlich viele verschiedene Werthe haben kann, so hat auch $\log(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ jederzeit unendlich viele verschiedene Werthe.

Für $\alpha=+1$ und $\beta=0$ muss q so bestimmt werden, dass

$$q=\mathrm{Arccos}(+1)=\mathrm{Arcsin}\,0$$

ist. Dies giebt, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, $q=2k\pi$.

Für $\alpha=-1$ und $\beta=0$ muss q so bestimmt werden, dass

$$q=\mathrm{Arccos}(-1)=\mathrm{Arcsin}\,0$$

ist. Dies giebt, wenn k wieder eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, $q=(2k+1)\pi$.

Also ist nach der Gleichung 32), wenn man nur bemerkt, dass man in dieser Gleichung für $\log(\alpha^2+\beta^2)$ natürlich immer den reellen Werth dieses Logarithmus setzen muss, welcher für $\alpha=\pm1$, $\beta=0$ bekanntlich 0 ist, für jedes positive oder negative ganze k:

$$33)\quad \log(+1)=2kM\pi\sqrt{-1}$$

und

$$34)\quad \log(-1)=(2k+1)M\pi\sqrt{-1}.$$

Ueberhaupt erhält man aus der Gleichung 32) für $\beta=0$:

$$35)\quad \log\alpha=\frac{1}{2}\log.\alpha^2+Mq\sqrt{-1},$$

wo $\log.\alpha^2$ den reellen Werth, welchen dieser Logarithmus, weil α^2 positiv ist, nothwendig jederzeit haben muss, bezeichnet. Auch erhellet leicht, dass in diesem Falle

$$q=\mathrm{Arccos}(\pm1)=\mathrm{Arcsin}\,0$$

und das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem α positiv oder negativ ist, welches darin seinen Grund hat, dass in den allgemeinen Gleichungen

$$q=\text{Arccos}\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\text{Arc sin}\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

die Quadratwurzel $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ immer positiv genommen werden muss. Ist also α positiv, so ist $q=2k\pi$; ist dagegen α negativ, so ist $q=(2k+1)\pi$, wo k immer jede beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet. Ist also α positiv, so ist

$$36)\quad \log\alpha=\frac{1}{2}\log.\alpha^2+2kM\pi\sqrt{-1}\,;$$

ist dagegen α negativ, so ist

$$37)\quad \log\alpha=\frac{1}{2}\log.\alpha^2+(2k+1)M\pi\sqrt{-1}\,.$$

Hieraus sieht man, dass der Logarithmus jeder reellen Grösse unendlich viele verschiedene Werthe hat. Ist diese reelle Grösse positiv, so findet sich unter den unendlich vielen verschiedenen Werthen ihres Logarithmus immer ein reeller Werth, welchen man aus der Gleichung 36) erhält, wenn man $k=0$ setzt. Dagegen sind alle Werthe des Logarithmus einer negativen reellen Grösse imaginär.

Ist nicht $\beta=0$, so kann wegen

$$q=\text{Arccos}\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\text{Arcsin}\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

offenbar nie $q=0$ sein, und aus der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$\log(\alpha+\beta\sqrt{-1})=\frac{1}{2}\log(\alpha^2+\beta^2)+Mq\sqrt{-1}$$

geht also hervor, dass die unendlich vielen verschiedenen Werthe, welche der Logarithmus einer imaginären Grösse haben kann, jederzeit sämmtlich imaginär sind.

§. 3.

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist, wenn wir der Kürze wegen, die Quadratwurzel natürlich positiv genommen,

$$38)\quad \varrho=\sqrt{a^2+b^2}$$

und

$$39)\quad \varphi = \text{Arccos}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \text{Arc}\sin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

setzen:

$$40)\quad l(a+b\sqrt{-1}) = l\varrho + \varphi\sqrt{-1}.$$

Also ist

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,l(a+b\sqrt{-1}) = \alpha l\varrho - \beta\varphi + (\beta l\varrho + \alpha\varphi)\sqrt{-1}.$$

Nach §. 1. ist, wie aus der Vergleichung der Gleichungen 2) und 3) auf der Stelle hervorgeht:

$$e^{\alpha l\varrho - \beta\varphi + (\beta l\varrho + \alpha\varphi)\sqrt{-1}}$$

$$= 1 + \frac{\alpha l\varrho - \beta\varphi + (\beta l\varrho + \alpha\varphi)\sqrt{-1}}{1}$$

$$+ \frac{\{\alpha l\varrho - \beta\varphi + (\beta l\varrho + \alpha\varphi)\sqrt{-1}\}^2}{1.2}$$

$$+ \frac{\{\alpha l\varrho - \beta\varphi + (\beta l\varrho + \alpha\varphi)\sqrt{-1}\}^3}{1.2.3}$$

$$+ \frac{\{\alpha l\varrho - \beta\varphi + (\beta l\varrho + \alpha\varphi)\sqrt{-1}\}^4}{1.2.3.4}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$e^{\alpha l\varrho-\beta\varphi+(\beta l\varrho+\alpha\varphi)\sqrt{-1}}$$

$$=1+\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,l(a+b\sqrt{-1})}{1}$$

$$+\frac{\{(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,l(a+b\sqrt{-1})\}^2}{1.2}$$

$$+\frac{\{(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,l(a+b\sqrt{-1})\}^3}{1.2.3}$$

$$+\frac{\{(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,l(a+b\sqrt{-1})\}^4}{1.2.3.4}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzen wir nun der Analogie mit der bekannten Gleichung

$$a^x=1+\frac{xla}{1}+\frac{(xla)^2}{1.2}+\frac{(xla)^3}{1.2.3}+\frac{(xla)^4}{1.2.3.4}+\ldots\ldots$$

wegen:

$$(a+b\sqrt{-1})^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=1+\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,l(a+b\sqrt{-1})}{1}$$

$$+\frac{\{(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,l(a+b\sqrt{-1})\}^2}{1.2}$$

$$+\frac{\{(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,l(a+b\sqrt{-1})\}^3}{1.2.3}$$

$$+\frac{\{(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,l(a+b\sqrt{-1})\}^4}{1.2.3.4}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

so erhalten wir, wenn wir dies mit dem Obigeñ vergleichen, die Gleichung

$$(a+b\sqrt{-1})^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=e^{\alpha l\varrho-\beta\varphi+(\beta l\varrho+\alpha\varphi)\sqrt{-1}},$$

d. i. nach 7) die Gleichung

41) $$(a+b\sqrt{-1})^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=e^{\alpha l\varrho-\beta\varphi}\,.\,e^{(\beta l\varrho+\alpha\varphi)\sqrt{-1}}.$$

Nach 11) ist aber

$$e^{(\beta l\varrho+\alpha\varphi)\sqrt{-1}}=\cos(\beta l\varrho+\alpha\varphi)+\sin(\beta l\varrho+\alpha\varphi).\sqrt{-1},$$

und folglich

$$42)\quad (a+b\sqrt{-1})^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$$
$$=e^{\alpha l\varrho-\beta\varphi}\{\cos(\beta l\varrho+\alpha\varphi)+\sin(\beta l\varrho+\alpha\varphi).\sqrt{-1}\},$$

wo die Werthe von ϱ und φ aus 38) und 39) bekannt sind.

§. 4.

Wir wollen jetzt die beiden Reihen

$$1,\ -\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^2}{1.2},\ \frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^4}{1....4},\ -\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^6}{1....6},\ ....$$

und

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\ -\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^3}{1.2.3},\ \frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^5}{1...5},\ -\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^7}{1...7},\ ...$$

zu summiren suchen.

In der Abhandlung über den Binomischen Lehrsatz (43.) ist gezeigt worden, dass für jedes x

$$e^{x\cos\theta}\{\cos(x\sin\theta)+\sin(x\sin\theta).\sqrt{-1}\}$$
$$=1+\frac{x}{1}(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^2}{1.2}(\cos2\theta+\sin2\theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}(\cos3\theta+\sin3\theta\sqrt{-1})$$
$$+\frac{x^4}{1...4}(\cos4\theta+\sin4\theta\sqrt{-1})$$
$$+\ ....$$

ist. Setzt man in dieser Gleichung zuerst $x=\varrho$, dann $x=-\varrho$, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$e^{\varrho\cos\theta}\{\cos(\varrho\sin\theta)+\sin(\varrho\sin\theta).\sqrt{-1}\}$$

$$=1+\frac{\varrho}{1}(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1})$$

$$+\frac{\varrho^2}{1.2}(\cos2\theta+\sin2\theta\sqrt{-1})$$

$$+\frac{\varrho^3}{1.2.3}(\cos3\theta+\sin3\theta\sqrt{-1})$$

$$+\frac{\varrho^4}{1....4}(\cos4\theta+\sin4\theta\sqrt{-1})$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und

$$e^{-\varrho\cos\theta}\{\cos(\varrho\sin\theta)-\sin(\varrho\sin\theta).\sqrt{-1}\}$$

$$=1-\frac{\varrho}{1}(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1})$$

$$+\frac{\varrho^2}{1.2}(\cos2\theta+\sin2\theta\sqrt{-1})$$

$$-\frac{\varrho^3}{1.2.3}(\cos3\theta+\sin3\theta\sqrt{-1})$$

$$+\frac{\varrho^4}{1...4}(\cos4\theta+\sin4\theta\sqrt{-1})$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Durch Addition und Subtraction dieser beiden Gleichungen erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

43) $$\frac{e^{\varrho\cos\theta}+e^{-\varrho\cos\theta}}{2}\cos(\varrho\sin\theta)+\frac{e^{\varrho\cos\theta}-e^{-\varrho\cos\theta}}{2}\sin(\varrho\sin\theta).\sqrt{-1}$$

$$=1$$

$$+\frac{\varrho^2}{1.2}(\cos2\theta+\sin2\theta\sqrt{-1})$$

$$+\frac{\varrho^4}{1...4}(\cos4\theta+\sin4\theta\sqrt{-1})$$

$$+\frac{\varrho^6}{1...6}(\cos6\theta+\sin6\theta\sqrt{-1})$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und

$$44)\quad \frac{e^{\varrho\cos\theta}-e^{-\varrho\cos\theta}}{2}\cos(\varrho\sin\theta)+\frac{e^{\varrho\cos\theta}+e^{-\varrho\cos\theta}}{2}\sin(\varrho\sin\theta).\sqrt{-1}$$

$$=\frac{\varrho}{1}(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1})$$

$$+\frac{\varrho}{1.2.3}(\cos 3\theta+\sin 3\theta\sqrt{-1})$$

$$+\frac{\varrho^5}{1\ldots 5}(\cos 5\theta+\sin 5\theta\sqrt{-1})$$

$$+\frac{\varrho^7}{1\ldots 7}(\cos 7\theta+\sin 7\theta\sqrt{-1})$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzen wir nun, was offenbar verstattet ist:

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\varrho(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}),$$

$$\beta+\alpha\sqrt{-1}=\varrho(\cos\theta+\sin\theta\sqrt{-1});$$

so ist

$$\varrho\cos\omega=\alpha,\quad \varrho\sin\omega=\beta;\quad \varrho\cos\theta=\beta,\quad \varrho\sin\theta=\alpha$$

oder

$$\cos\omega=\frac{\alpha}{\varrho},\quad \sin\omega=\frac{\beta}{\varrho};\quad \cos\theta=\frac{\beta}{\varrho},\quad \sin\theta=\frac{\alpha}{\varrho};$$

folglich

$$\cos\theta=\sin\omega,\quad \sin\theta=\cos\omega.$$

Also ist

$$\cos(\theta+\omega)=\cos\theta\cos\omega-\sin\theta\sin\omega=0,$$

$$\sin(\theta+\omega)=\sin\theta\cos\omega+\cos\theta\sin\omega=1;$$

und folglich, indem k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$\theta + \omega = (2k + \frac{1}{2})\pi.$$

Also ist

$$\theta = (2k + \frac{1}{2})\pi - \omega,$$

$$2\theta = (4k + 1)\pi - 2\omega,$$

$$3\theta = (6k + \frac{3}{2})\pi - 3\omega,$$

$$4\theta = (8k + 2)\pi - 4\omega,$$

$$5\theta = (10k + \frac{5}{2})\pi - 5\omega,$$

$$6\theta = (12k + 3)\pi - 6\omega,$$

$$7\theta = (14k + \frac{7}{2})\pi - 7\omega,$$

$$8\theta = (16k + 4)\pi - 8\omega,$$

u. s. w.

und folglich

$$\cos\theta = +\sin\omega, \quad \sin\theta = +\cos\omega;$$

$$\cos 2\theta = -\cos 2\omega, \quad \sin 2\theta = +\sin 2\omega;$$

$$\cos 3\theta = -\sin 3\omega, \quad \sin 3\theta = -\cos 3\omega;$$

$$\cos 4\theta = +\cos 4\omega, \quad \sin 4\theta = -\sin 4\omega;$$

$$\cos 5\theta = +\sin 5\omega, \quad \sin 5\theta = +\cos 5\omega;$$

$$\cos 6\theta = -\cos 6\omega, \quad \sin 6\theta = +\sin 6\omega;$$

$$\cos 7\theta = -\sin 7\omega, \quad \sin 7\theta = -\cos 7\omega;$$

$$\cos 8\theta = +\cos 8\omega, \quad \sin 8\theta = -\sin 8\omega;$$

u. s. w. u. s. w.

Also ist nach 43) und 44)

$$\frac{e^{\varrho\sin\omega}+e^{-\varrho\sin\omega}}{2}\cos(\varrho\cos\omega)+\frac{e^{\varrho\sin\omega}-e^{-\varrho\sin\omega}}{2}\sin(\varrho\cos\omega).\sqrt{-1}$$

$$\begin{aligned}
=\ & 1\\
& -\frac{\varrho^2}{1.2}(\cos2\omega-\sin2\omega\sqrt{-1})\\
& +\frac{\varrho^4}{1..4}(\cos4\omega-\sin4\omega\sqrt{-1})\\
& -\frac{\varrho^6}{1...6}(\cos6\omega-\sin6\omega\sqrt{-1})\\
& +\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und

$$\frac{e^{\varrho\sin\omega}-e^{-\varrho\sin\omega}}{2}\cos(\varrho\cos\omega)+\frac{e^{\varrho\sin\omega}+e^{-\varrho\sin\omega}}{2}\sin(\varrho\cos\omega).\sqrt{-1}$$

$$\begin{aligned}
=\ & \frac{\varrho}{1}(\sin\omega+\cos\omega\sqrt{-1})\\
& -\frac{\varrho^3}{1.2.3}(\sin3\omega+\cos3\omega\sqrt{-1})\\
& +\frac{\varrho^5}{1....5}(\sin5\omega+\cos5\omega\sqrt{-1})\\
& -\frac{\varrho^7}{1...7}(\sin7\omega+\cos7\omega\sqrt{-1})\\
& +\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\frac{e^{\varrho\sin\omega}+e^{-\varrho\sin\omega}}{2}\cos(\varrho\cos\omega)$$

$$=1-\frac{\varrho^2}{1.2}\cos2\omega+\frac{\varrho^4}{1...4}\cos4\omega-\frac{\varrho^6}{1...6}\cos6\omega+\ldots..$$

$$\frac{e^{\varrho\sin\omega}-e^{-\varrho\sin\omega}}{2}\sin(\varrho\cos\omega)$$

$$=\frac{\varrho^2}{1.2}\sin2\omega-\frac{\varrho^4}{1...4}\sin4\omega+\frac{\varrho^6}{1...6}\sin6\omega-\ldots..,$$

$$\frac{e^{\varrho \sin\omega} - e^{-\varrho \sin\omega}}{2} \cos(\varrho\cos\omega)$$

$$= \frac{\varrho}{1} \sin\omega - \frac{\varrho^3}{1.2.3} \sin 3\omega + \frac{\varrho^5}{1.....5} \sin 5\omega - \frac{\varrho^7}{1...7} \sin 7\omega + \ldots..,$$

$$\frac{e^{\varrho \sin\omega} + e^{-\varrho \sin\omega}}{2} \sin(\varrho\cos\omega)$$

$$= \frac{\varrho}{1} \cos\omega - \frac{\varrho^3}{1.2.3} \cos 3\omega + \frac{\varrho^5}{1....5} \cos 5\omega - \frac{\varrho^7}{1....7} \cos 7\omega + \ldots..;$$

also

$$\frac{e^{\varrho \sin\omega} + e^{-\varrho \sin\omega}}{2} \cos(\varrho\cos\omega) - \frac{e^{\varrho \sin\omega} - e^{-\varrho \sin\omega}}{2} \sin(\varrho\cos\omega) . \sqrt{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \\
&- \frac{\varrho^2}{1.2} (\cos 2\omega + \sin 2\omega \sqrt{-1}) \\
&+ \frac{\varrho^4}{1..4} (\cos 4\omega + \sin 4\omega \sqrt{-1}) \\
&- \frac{\varrho^6}{1..6} (\cos 6\omega + \sin 6\omega \sqrt{-1}) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und

$$\frac{e^{\varrho \sin\omega} + e^{-\varrho \sin\omega}}{2} \sin(\varrho\cos\omega) + \frac{e^{\varrho \sin\omega} - e^{-\varrho \sin\omega}}{2} \cos(\varrho\cos\omega) . \sqrt{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varrho}{1} (\cos\omega + \sin\omega \sqrt{-1}) \\
&- \frac{\varrho^3}{1.2.3} (\cos 3\omega + \sin 3\omega \sqrt{-1}) \\
&+ \frac{\varrho^5}{1...5} (\cos 5\omega + \sin 5\omega \sqrt{-1}) \\
&- \frac{\varrho^7}{1...7} (\cos 7\omega + \sin 7\omega \sqrt{-1}) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Weil nun

$$\varrho\cos\omega=\alpha,\quad \varrho\sin\omega=\beta$$

und

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\varrho(\cos\omega+\sin\omega\sqrt{-1}),$$

also für jedes positive ganze n

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^n=\varrho^n(\cos n\omega+\sin n\omega\sqrt{-1}$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden für jedes reelle α und β:

$$45)\qquad \frac{e^\beta+e^{-\beta}}{2}\cos\alpha-\frac{e^\beta-e^{-\beta}}{2}\sin\alpha\sqrt{-1}$$

$$=1-\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^2}{1.2}+\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^4}{1...4}-\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^6}{1...6}+......$$

und

$$46)\qquad \frac{e^\beta+e^{-\beta}}{2}\sin\alpha+\frac{e^\beta-e^{-\beta}}{2}\cos\alpha\sqrt{-1}$$

$$=\alpha+\beta\sqrt{-1}-\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^3}{1.2.3}+\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^5}{1...5}-\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^7}{1.....7}+..$$

Der Analogie mit den beiden in der Abhandlung über den Binomischen Lehrsatz (47. und 48.) bewiesenen, für jedes reelle x geltenden Gleichungen

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1...4}-\frac{x^6}{1...6}+......,$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1...5}-\frac{x^7}{1...7}+.....$$

wegen setzt man nun:

$$\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1})$$

$$=1-\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^2}{1.2}+\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^4}{1..4}-\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^6}{1...6}+.....,$$

$$\sin(\alpha+\beta\sqrt{-1})$$

$$=\alpha+\beta\sqrt{-1}-\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^3}{1.2.3}+\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^5}{1...5}-\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^7}{1....7}+..;$$

und erhält also nach 45) und 46) die beiden folgenden Gleichungen:

47) $$\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1})=\frac{e^\beta+e^{-\beta}}{2}\cos\alpha-\frac{e^\beta-e^{-\beta}}{2}\sin\alpha\sqrt{-1},$$

48) $$\sin(\alpha+\sqrt{-1})=\frac{e^\beta+e^{-\beta}}{2}\sin\alpha+\frac{e^\beta-e^{-\beta}}{2}\cos\alpha\sqrt{-1}.$$

Ueberträgt man ferner die bekannten Begriffe der übrigen goniometrischen Functionen auch auf imaginäre Bogen, so erhält man aus den beiden vorhergehenden Gleichungen:

49) $$\tang(\alpha+\beta\sqrt{-1})=\frac{(e^\beta+e^{-\beta})\sin\alpha+(e^\beta-e^{-\beta})\cos\alpha\sqrt{-1}}{(e^\beta+e^{-\beta})\cos\alpha-(e^\beta-e^{-\beta})\sin\alpha\sqrt{-1}},$$

50) $$\cot(\alpha+\beta\sqrt{-1})=\frac{(e^\beta+e^{-\beta})\cos\alpha-(e^\beta-e^{-\beta})\sin\alpha\sqrt{-1}}{(e^\beta+e^{-\beta})\sin\alpha+(e^\beta-e^{-\beta})\cos\alpha\sqrt{-1}};$$

und folglich, wenn man Zähler und Nenner des ersten Bruchs mit

$$(e^\beta+e^{-\beta})\cos\alpha+(e^\beta-e^{-\beta})\sin\alpha\sqrt{-1},$$

Zähler und Nenner des zweiten Bruchs mit

$$(e^\beta+e^{-\beta})\sin\alpha-(e^\beta-e^{-\beta})\cos\alpha\sqrt{-1}$$

multiplicirt:

51) $$\tang(\alpha+\beta\sqrt{-1})=\frac{2\sin2\alpha+(e^{2\beta}-e^{-2\beta})\sqrt{-1}}{2\cos2\alpha+e^{2\beta}+e^{-2\beta}},$$

52) $$\cot(\alpha+\beta\sqrt{-1})=-\frac{2\sin2\alpha-(e^{2\beta}-e^{-2\beta})\sqrt{-1}}{2\cos2\alpha-e^{2\beta}-e^{-2\beta}}.$$

Ferner findet man leicht:

53) $$\sec(\alpha+\beta\sqrt{-1})=2\frac{(e^\beta+e^{-\beta})\cos\alpha+(e^\beta-e^{-\beta})\sin\alpha\sqrt{-1}}{e^{2\beta}+e^{-2\beta}+2\cos2\alpha},$$

54) $\operatorname{cosec}(\alpha+\beta\sqrt{-1})=2\,\frac{(e^{\beta}+e^{-\beta})\sin\alpha-(e^{\beta}-e^{-\beta})\cos\alpha\sqrt{-1}}{e^{2\beta}+e^{-2\beta}-2\cos2\alpha}$.

Auch ist endlich:

55) $\operatorname{sinv}(\alpha+\beta\sqrt{-1})=1-\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\cos\alpha+\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\sin\alpha\sqrt{-1}$,

56) $\operatorname{cosv}(\alpha+\beta\sqrt{-1})=1-\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\sin\alpha-\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\cos\alpha\sqrt{-1}$.

§. 5.

Weil nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\sin(\alpha+\beta\sqrt{-1})=\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\sin\alpha+\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\cos\alpha\sqrt{-1},$$

$$\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1})=\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\cos\alpha-\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\sin\alpha\sqrt{-1}$$

und

$$\sin(\gamma+\delta\sqrt{-1})=\frac{e^{\delta}+e^{-\delta}}{2}\sin\gamma+\frac{e^{\delta}-e^{-\delta}}{2}\cos\gamma\sqrt{-1},$$

$$\cos(\gamma+\delta\sqrt{-1})=\frac{e^{\delta}+e^{-\delta}}{2}\cos\gamma-\frac{e^{\delta}-e^{-\delta}}{2}\sin\gamma\sqrt{-1}$$

ist; so erhält man leicht durch Multiplication

$$\sin(\alpha+\beta\sqrt{-1})\cos(\gamma+\delta\sqrt{-1})+\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1})\sin(\gamma+\delta\sqrt{-1})$$

$$=\left\{\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^{\delta}+e^{-\delta}}{2}+\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^{\delta}-e^{-\delta}}{2}\right\}\sin(\alpha+\gamma)$$

$$+\left\{\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^{\delta}+e^{-\delta}}{2}+\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^{\delta}-e^{-\delta}}{2}\right\}\cos(\alpha+\gamma).\sqrt{-1}$$

und

$$\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1})\cos(\gamma+\delta\sqrt{-1})-\sin(\alpha+\beta\sqrt{-1})\sin(\gamma+\delta\sqrt{-1})$$

$$=\left\{\frac{e^\beta+e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^\delta+e^{-\delta}}{2}+\frac{e^\beta-e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^\delta-e^{-\delta}}{2}\right\}\cos(\alpha+\gamma)$$

$$-\left\{\frac{e^\beta-e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^\delta+e^{-\delta}}{2}+\frac{e^\beta+e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^\delta-e^{-\delta}}{2}\right\}\sin(\alpha+\gamma).\sqrt{-1};$$

also, wie sich hieraus ferner leicht ergiebt:

$$\sin(\alpha+\beta\sqrt{-1})\cos(\gamma+\delta\sqrt{-1})+\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1})\sin(\gamma+\delta\sqrt{-1})$$
$$=\frac{e^{\beta+\delta}+e^{-(\beta+\delta)}}{2}\sin(\alpha+\gamma)+\frac{e^{\beta+\delta}-e^{-(\beta+\delta)}}{2}\cos(\alpha+\gamma).\sqrt{-1},$$

$$\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1})\cos(\gamma+\delta\sqrt{-1})-\sin(\alpha+\beta\sqrt{-1})\sin(\gamma+\delta\sqrt{-1})$$
$$=\frac{e^{\beta+\delta}+e^{-(\beta+\delta)}}{2}\cos(\alpha+\gamma)-\frac{e^{\beta+\delta}-e^{-(\beta+\delta)}}{2}\sin(\alpha+\gamma).\sqrt{-1}.$$

Weil nun nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\sin\{\alpha+\gamma+(\beta+\delta)\sqrt{-1}\}=\sin\{(\alpha+\beta\sqrt{-1})+(\gamma+\delta\sqrt{-1})\}$$
$$=\frac{e^{\beta+\delta}+e^{-(\beta+\delta)}}{2}\sin(\alpha+\gamma)+\frac{e^{\beta+\delta}-e^{-(\beta+\delta)}}{2}\cos(\alpha+\gamma).\sqrt{-1},$$

$$\cos\{\alpha+\gamma+(\beta+\delta)\sqrt{-1}\}=\cos\{(\alpha+\beta\sqrt{-1})+(\gamma+\delta\sqrt{-1})\}$$
$$=\frac{e^{\beta+\delta}+e^{-(\beta+\delta)}}{2}\cos(\alpha+\gamma)-\frac{e^{\beta+\delta}-e^{-(\beta+\delta)}}{2}\sin(\alpha+\gamma).\sqrt{-1}$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden:

$$57)\quad \sin\{(\alpha+\beta\sqrt{-1})+(\gamma+\delta\sqrt{-1})\}$$
$$=\sin(\alpha+\beta\sqrt{-1})\cos(\gamma+\delta\sqrt{-1})+\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1})\sin(\gamma+\delta\sqrt{-1}),$$

$$58)\quad \cos\{(\alpha+\beta\sqrt{-1})+(\gamma+\delta\sqrt{-1})\}$$
$$=\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1})\cos(\gamma+\delta\sqrt{-1})-\sin(\alpha+\beta\sqrt{-1})\sin(\gamma+\delta\sqrt{-1}).$$

Aus dem vorhergehenden Paragraphen ergeben sich aber auch leicht die beiden folgenden Gleichungen:

$$59)\quad \sin(-\alpha-\beta\sqrt{-1})=-\sin(\alpha+\beta\sqrt{-1}),$$

$$60)\quad \cos(-\alpha-\beta\sqrt{-1}) = \cos(\alpha+\beta\sqrt{-1});$$

also ist nach 57) und 58), wenn man $-\gamma$ und $-\delta$ für γ und δ setzt:

$$61)\quad \sin\{(\alpha+\beta\sqrt{-1})-(\gamma+\delta\sqrt{-1})\}$$

$$=\sin(\alpha+\beta\sqrt{-1})\cos(\gamma+\delta\sqrt{-1})-\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1})\sin(\gamma+\delta\sqrt{-1}),$$

$$62)\quad \cos\{(\alpha+\beta\sqrt{-1})-(\gamma+\delta\sqrt{-1})\}$$

$$=\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1})\cos(\gamma+\delta\sqrt{-1})+\sin(\alpha+\beta\sqrt{-1})\sin(\gamma+\delta\sqrt{-1}).$$

Setzt man in dieser letzten Gleichung $\alpha+\beta\sqrt{-1}=\gamma+\delta\sqrt{-1}$, und bemerkt, dass nach 47) und 48) offenbar

$$63)\quad \cos 0=1,\quad \sin 0=0$$

ist, so erhält man

$$64)\quad (\sin(\alpha+\beta\sqrt{-1}))^2+(\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1}))^2=1.$$

Auf ähnliche Art ergiebt sich aus 57) und 58)

$$65)\quad \sin 2(\alpha+\beta\sqrt{-1})=2\sin(\alpha+\beta\sqrt{-1})\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1}),$$

$$66)\quad \cos 2(\alpha+\beta\sqrt{-1})=(\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1}))^2-(\sin(\alpha+\beta\sqrt{-1}))^2.$$

Es ist hier nicht meine Absicht, die Zahl dieser Relationen zu erschöpfen, und man hat das Vorhergehende nur als eine Anleitung zu betrachten, wie die aus der Goniometrie bekannten Relationen zwischen den goniomntrischen Functionen reeller Bogen auf die goniometrischen Functionen imaginärer Bogen erweitert werden können.

§. 6.

Setzen wir jetzt

$$67)\quad \mathrm{Arc}\sin(\alpha+\beta\sqrt{-1})=x+y\sqrt{-1},$$

so muss

$$\sin(x+y\sqrt{-1})=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

d. i. nach 48)

$$\frac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x+\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x\sqrt{-1}=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

und folglich

$$68)\quad \frac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x=\alpha,\quad \frac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x=\beta$$

oder

$$69)\quad (e^y+e^{-y})\sin x=2\alpha,\quad (e^y-e^{-y})\cos x=2\beta$$

sein, weshalb es jetzt also darauf ankommt, die Grössen x und y so zu bestimmen, dass diesen beiden Gleichungen genügt wird.

Quadrirt man die Gleichungen 69), so erhält man:

$$70)\quad \begin{cases}(e^{2y}+e^{-2y}+2)\sin x^2=4\alpha^2,\\ (e^{2y}+e^{-2y}-2)\cos x^2=4\beta^2;\end{cases}$$

also

$$71)\quad \begin{cases}(e^{2y}+e^{-2y}+2)\sin x^2\cos x^2=4\alpha^2\cos x^2,\\ (e^{2y}+e^{-2y}-2)\sin x^2\cos x^2=4\beta^2\sin x^2;\end{cases}$$

und folglich, wenn man subtrahirt:

$$72)\quad \sin x^2\cos x^2=\alpha^2\cos x^2-\beta^2\sin x^2,$$

woraus sich leicht die Gleichung

$$73)\quad \sin x^4-(1+\alpha^2+\beta^2)\sin x^2+\alpha^2=0,$$

folglich

$$74)\quad \sin x^2=\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}$$

ergiebt.

Weil

$$(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2=(1-\alpha^2)^2+2\beta^2(1+\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2)$$

ist, so ist die Grösse

$$\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2$$

offenbar immer positiv, also die Grösse

$$\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}$$

stets reell.

Ferner ist immer

$$\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}\geqq 1,$$

welches sich auf folgende Art beweisen lässt. Die vorstehende Bedingung ist nämlich jederzeit erfüllt, wenn die Bedingung

$$1+\alpha^2+\beta^2+\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2}\geqq 2,$$

d. i. wenn die Bedingung

$$\alpha^2+\beta^2+\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2}\geqq 1$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist aber offenbar jederzeit erfüllt, wenn

$$\alpha^2+\beta^2\geqq 1$$

ist. Wenn

$$\alpha^2+\beta^2<1$$

ist, so ist

$$1-\alpha^2-\beta^2>0,$$

und die Bedingung

$$\alpha^2+\beta^2+\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2}\geqq 1$$

ist erfüllt, wenn die Bedingung

$$\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2} \overline{\gtrless} 1-\alpha^2-\beta^2$$

oder

$$(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2 \overline{\gtrless} (1-\alpha^2-\beta^2)^2,$$

d. i. wenn die Bedingung

$$1+\alpha^4+\beta^4-2\alpha^2+2\beta^2+2\alpha^2\beta^2$$
$$\overline{\gtrless} 1+\alpha^4+\beta^4-2\alpha^2-2\beta^2+2\alpha^2\beta^2,$$

welche mit der Bedingung

$$2\beta^2 \overline{\gtrless} -2\beta^2$$

identisch ist, erfüllt ist. Da nun diese Bedingung offenbar jederzeit erfüllt ist, so ist auch in dem Falle, wenn

$$\alpha^2+\beta^2<1$$

ist, die Bedingung

$$\alpha^2+\beta^2+\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2} \overline{\gtrless} 1$$

immer erfüllt. Hieraus ergiebt sich nun mit völliger Deutlichkeit, dass immer

$$\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2} \overline{\gtrless} 1$$

ist, wie behauptet wurde.

Eben so leicht lässt sich zeigen, dass immer

$$\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}-\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2} \overline{\lessgtr} 1$$

ist, wobei man nicht zu übersehen hat, dass die Grösse

$$\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}-\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}$$

offenbar immer positiv ist. Die Bedingung

$$\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}-\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2} \overline{\overline{<}}\, 1$$

ist nämlich jederzeit erfüllt, wenn die Bedingung

$$1+\alpha^2+\beta^2-\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2} \overline{\overline{<}}\, 2,$$

d. i. wenn die Bedingung

$$\alpha^2+\beta^2-\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2} \overline{\overline{<}}\, 1$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist jederzeit erfüllt, wenn

$$\alpha^2+\beta^2 \overline{\overline{<}}\, 1$$

ist. Wenn

$$\alpha^2+\beta^2>1$$

ist, so ist

$$\alpha^2+\beta^2-1>0,$$

und die Bedingung

$$\alpha^2+\beta^2-\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2} \overline{\overline{<}}\, 1$$

ist erfüllt, wenn die Bedingung

$$\alpha^2+\beta^2-1 \overline{\overline{<}} \sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2}$$

oder

$$(\alpha^2+\beta^2-1)^2 \overline{\overline{<}}\, (1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2,$$

d. i. wenn die Bedingung

$$1+\alpha^4+\beta^4-2\alpha^2-2\beta^2+2\alpha^2\beta^2$$
$$\overline{\overline{<}}\, 1+\alpha^4+\beta^4-2\alpha^2+2\beta^2+2\alpha^2\beta^2,$$

welche mit der Bedingung

$$-2\beta^2 \overset{=}{<} 2\beta^2$$

identisch ist, erfüllt ist. Da nun diese Bedingung offenbar immer erfüllt ist, so ist auch in dem Falle, wenn

$$\alpha^2+\beta^2>1$$

ist, die Bedingung

$$\alpha^2+\beta^2-\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2} \overset{=}{<} 1$$

erfüllt. Hieraus ergiebt sich jetzt mit völliger Deutlichkeit, dass immer

$$\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}-\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2} \overset{=}{<} 1$$

ist, wie behauptet wurde.

Weil nun immer

$$\sin x^2 \overset{=}{<} 1$$

sein muss, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dass man im Obigen im Allgemeinen die untern Zeichen zu nehmen, und folglich

$$75)\quad \sin x^2=\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}-\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}$$

oder

$$76)\quad \sin x^2=\frac{\alpha^2}{\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}},$$

also

$$77)\quad \sin x=\pm\frac{\alpha}{\left\{\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

zu setzen hat, wo sich nun noch frägt, wie in dieser Gleichung das Zeichen zu nehmen ist, was sich leicht auf folgende Art bestimmen lässt. Da nämlich nach 69)

$$(e^y + e^{-y})\sin x = 2\alpha$$

und $e^y + e^{-y}$ stets eine positive Grösse ist, so hat $\sin x$ mit α gleiches Vorzeichen, und man muss also in der Gleichung 77) das obere Zeichen nehmen, d. h.

$$78)\quad \sin x = \frac{\alpha}{\left\{\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

setzen.

Mittelst der Gleichung 75) erhält man sogleich

$$79)\quad \cos x^2 = \frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1\;\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}$$

oder

$$\cos x^2 = \frac{\left(\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2 + \alpha^2}{\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}},$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung

$$\cos x^2 = \frac{-\beta^2}{\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}}$$

oder

$$80)\quad \cos x^2 = \frac{\beta^2}{\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2\;\beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}};$$

und wir haben also jetzt

$$81)\quad \begin{cases} \sin x = \dfrac{\alpha}{\left\{\dfrac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}, \\[2ex] \cos x = \pm\dfrac{\beta}{\left\{\dfrac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}; \end{cases}$$

wo wegen des doppelten Vorzeichens in der zweiten dieser beiden Gleichungen noch die folgenden Bestimmungen zu geben sind.

Wenn der Bogen

$$x = \operatorname{Arcsin} \frac{\alpha}{\left\{\dfrac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, so muss man in der zweiten der beiden obigen Gleichungen das Zeichen so nehmen, dass $\pm\beta$ positiv wird, d. h. man muss das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem β positiv oder negativ ist.

Wenn der Bogen

$$x = \operatorname{Arcsin} \frac{\alpha}{\left\{\dfrac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

sich im zweiten oder dritten Quadranten endigt, so muss man in der zweiten der beiden obigen Gleichungen das Zeichen so nehmen, dass $\pm\beta$ negativ wird, d. h. man muss das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem β negativ oder positiv ist.

Es ist nun

$$\frac{\alpha}{\sin x}+\frac{\beta}{\cos x}$$

$$= \left\{\frac{\alpha+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\pm\left\{\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\alpha}{\sin x}-\frac{\beta}{\cos x}$$

$$=\left\{\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\mp\left\{\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

oder der Kürze wegen

$$\frac{\alpha}{\sin x}+\frac{\beta}{\cos x}=M\pm N,$$

$$\frac{\alpha}{\sin x}-\frac{\beta}{\cos x}=M\mp N.$$

Weil aber nach 68)

$$\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\frac{\alpha}{\sin x},\quad \frac{e^y-e^{-y}}{2}=\frac{\beta}{\cos x}$$

und folglich

$$e^y=\frac{\alpha}{\sin x}+\frac{\beta}{\cos x},\quad e^{-y}=\frac{\alpha}{\sin x}-\frac{\beta}{\cos x}$$

ist, so ist

$$\left(\frac{\alpha}{\sin x}+\frac{\beta}{\cos x}\right)\left(\frac{\alpha}{\sin x}-\frac{\beta}{\cos x}\right)=1,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$(M+N)(M-N)=1,$$

woraus sich

$$l(M+N)+l(M-N)=0,$$

folglich

$$l(M-N)=-l(M+N)$$

ergiebt. Daher ist

$$l(M\pm N)=\pm l(M+N),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\mathrm{l}\left(\frac{\alpha}{\sin x}+\frac{\beta}{\cos x}\right)=\pm\mathrm{l}(M+N),$$

d. i.

$$y=\pm\mathrm{l}(M+N)$$

oder

$$y=\pm\mathrm{l}\left\{\left[\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Nehmen wir dies mit dem Obigen zusammen, so ergiebt sich die folgende Gleichung:

$$82)\quad \mathrm{Arcsin}(\alpha+\beta\sqrt{-1})$$

$$=\mathrm{Arc\,sin}\frac{\alpha}{\left\{\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\pm\mathrm{l}\left\{\left[\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.\sqrt{-1},$$

in welcher man, wenn

$$\mathrm{Arcsin}\frac{\alpha}{\left\{\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem β positiv oder negativ ist, dagegen, wenn

$$\mathrm{Arcsin}\frac{\alpha}{\left\{\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

sich im zweiten oder dritten Quadranten endigt, das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem β negativ oder positiv ist.

§. 7.

Auf ähnliche Weise wie im vorhergehenden Paragraphen wollen wir nun auch

$$83)\quad \mathrm{Arccos}(\alpha+\beta\sqrt{-1})=x+y\sqrt{-1}$$

behandeln. Aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$\cos(x+y\sqrt{-1})=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

d. i. nach 47)

$$\frac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x-\frac{e^y-e^{-y}}{2}\sin x\sqrt{-1}=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

und folglich

$$84)\quad \frac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x=\alpha,\quad \frac{e^y-e^{-y}}{2}\sin x=-\beta$$

oder

$$85)\quad (e^y+e^{-y})\cos x=2\alpha,\quad (e^y-e^{-y})\sin x=-2\beta;$$

wo es also jetzt wieder darauf ankommt, die Grössen x und y so zu bestimmen, dass diesen beiden Gleichungen genügt wird.

Quadrirt man die Gleichungen 85), so erhält man:

$$86)\quad \begin{cases}(e^{2y}+e^{-2y}+2)\cos x^2=4\alpha^2,\\ (e^{2y}+e^{-2y}-2)\sin x^2=4\beta^2;\end{cases}$$

also

$$87)\quad \begin{cases}(e^{2y}+e^{-2y}+2)\sin x^2\cos x^2=4\alpha^2\sin x^2,\\ (e^{2y}+e^{-2y}-2)\sin x^2\cos x^2=4\beta^2\cos x^2;\end{cases}$$

und folglich, wenn man subtrahirt:

$$88)\quad \sin x^2\cos x^2=\alpha^2\sin x^2-\beta^2\cos x^2,$$

woraus sich leicht die Gleichung

$$89)\quad \cos x^4-(1+\alpha^2+\beta^2)\cos x^2+\alpha^2=0,$$

folglich

$$90)\quad \cos x^2=\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}$$

ergiebt.

Hieraus leitet man auf ganz ähnliche Art wie im vorhergehenden Paragraphen die beiden folgenden Gleichungen ab:

$$91)\quad \begin{cases} \cos x=\dfrac{\alpha}{\left\{\dfrac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}, \\ \sin x=\pm\dfrac{\beta}{\left\{\dfrac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}; \end{cases}$$

bei denen die folgenden Bedingungen wegen der Vorzeichen zu beachten sind.

Wenn der Bogen

$$x=\mathrm{Arccos}\frac{\alpha}{\left\{\dfrac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

sich im ersten oder zweiten Quadranten endigt, so muss man in der zweiten der beiden obigen Gleichungen das Zeichen so nehmen, dass $\pm\beta$ positiv wird, d. h. man muss das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem β positiv oder negativ ist.

Wenn der Bogen

$$x=\mathrm{Arccos}\frac{\alpha}{\left\{\dfrac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

sich im dritten oder vierten Quadranten endigt, so muss man in der zweiten der beiden obigen Gleichungen das Zeichen so nehmen, dass $\pm\beta$ negativ wird, d. h. man muss das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem β negativ oder positiv ist.

Ferner ist nun auch

$$\frac{\alpha}{\cos x}-\frac{\beta}{\sin x}$$

$$=\left\{\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\mp\left\{\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\alpha}{\cos x}+\frac{\beta}{\sin x}$$

$$=\left\{\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\pm\left\{\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

oder der Kürze wegen

$$\frac{\alpha}{\cos x}-\frac{\beta}{\sin x}=M\mp N,$$

$$\frac{\alpha}{\cos x}+\frac{\beta}{\sin x}=M\pm N.$$

Weil aber nach 84)

$$\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\frac{\alpha}{\cos x},\quad \frac{e^y-e^{-y}}{2}=-\frac{\beta}{\sin x}$$

und folglich

$$e^y=\frac{\alpha}{\cos x}-\frac{\beta}{\sin x},\quad e^{-y}=\frac{\alpha}{\cos x}+\frac{\beta}{\sin x}$$

ist, so ist

$$\left(\frac{\alpha}{\cos x}-\frac{\beta}{\sin x}\right)\left(\frac{\alpha}{\cos x}+\frac{\beta}{\sin x}\right)=1,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$(M+N)(M-N)=1,$$

woraus sich

$$\mathrm{l}(M+N)+\mathrm{l}(M-N)=0,$$

und folglich

$$\mathrm{l}(M-N)=-\mathrm{l}(M+N)$$

ergiebt. Daher ist

$$\mathrm{l}(M\mp N)=\mp\mathrm{l}(M+N),$$

und folglich nach dem Obigen

$$\mathrm{l}\left(\frac{\alpha}{\cos x}-\frac{\beta}{\sin x}\right)=\mp\mathrm{l}(M+N),$$

d. i.

$$y=\mp\mathrm{l}(M+N)$$

oder

$$y=\mp\mathrm{l}\left\{\left[\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Nehmen wir dies mit dem Obigen zusammen, so ergiebt sich die folgende Gleichung:

$$92)\quad \mathrm{Arccos}(\alpha+\beta\sqrt{-1})$$
$$=\mathrm{Arccos}\frac{\alpha}{\left\{\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$
$$\mp\mathrm{l}\left\{\left[\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.\sqrt{-1},$$

in welcher man, wenn

$$\mathrm{Arccos}\frac{\alpha}{\left\{\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

sich im ersten oder zweiten Quadranten endigt, das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem β positiv oder negativ ist, dagegen, wenn

$$\mathrm{Arccos}\frac{\alpha}{\left\{\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta+1}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

sich im dritten oder vierten Quadranten endigt, das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem β negativ oder positiv ist.

§. 8.

Wir wollen nun

$$93)\quad \mathrm{Arctang}(\alpha+\beta\sqrt{-1})=x+y\sqrt{-1}$$

betrachten. Aus dieser Gleichung folgt

$$\mathrm{tang}(x+y\sqrt{-1})=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

d. i. nach 51)

$$\frac{2\sin 2x+(e^{2y}-e^{-2y})\sqrt{-1}}{2\cos 2x+e^{2y}+e^{-2y}}=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

also

$$94)\quad \begin{cases} \alpha=\dfrac{2\sin 2x}{2\cos 2x+e^{2y}+e^{-2y}}, \\ \beta=\dfrac{e^{2y}-e^{-2y}}{2\cos 2x+e^{2y}+e^{-2y}}. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\sin 2x}{e^{2y}-e^{-2y}},$$

oder

$$e^{2y}-e^{-2y}=\frac{2\beta\sin 2x}{\alpha},$$

oder

$$e^{4y}-1=\frac{2\beta\sin 2x}{\alpha}e^{2y},$$

d. i.

$$95)\quad e^{4y}-\frac{2\beta\sin 2x}{\alpha}e^{2y}-1=0.$$

Löst man diese Gleichung in Bezug auf e^{2y} als unbekannte Grösse auf, so erhält man

$$96)\quad e^{2y} = \frac{\beta\sin 2x \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}}{\alpha}$$

$$= -\frac{\alpha}{\beta\sin 2x \mp \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}}$$

oder

$$97)\quad e^{-2y} = \frac{\alpha}{\beta\sin 2x \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}}$$

$$= -\frac{\beta\sin 2x \mp \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}}{\alpha}.$$

Folglich ist

$$98)\quad \begin{cases} e^{2y} + e^{-2y} = \pm \dfrac{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}}{\alpha}, \\ e^{2y} - e^{-2y} = \dfrac{2\beta\sin 2x}{\alpha}; \end{cases}$$

mit der Bestimmung, dass man, weil $e^{2y} + e^{-2y}$ offenbar immer eine positive Grösse ist, in der ersten dieser beiden Gleichungen, und also natürlich auch überhaupt in allen vorhergehenden Gleichungen, das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem α eine positive oder eine negative Grösse ist.

Nach 94) ist also immer mit derselben Bedingung wegen der Vorzeichen

$$\alpha = \frac{\alpha\sin 2x}{\alpha\cos 2x \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}},$$

folglich

$$\sin 2x - \alpha\cos 2x = \pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2},$$

oder, wenn man auf beiden Seiten quadrirt, nach einigen leichten Verwandlungen:

$$\tan 2x - 2\alpha = (\alpha^2 + \beta^2)\tan 2x,$$

und folglich

$$99)\quad \tan 2x = \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2 - \beta^2}.$$

Weil nun

$$\sin 2x^2 = \frac{\tan g 2x^2}{1 + \tan g 2x^2}, \quad \cos 2x^2 = \frac{1}{1 + \tan g 2x^2}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$100) \begin{cases} \sin 2x^2 = \dfrac{4\alpha^2}{4\alpha^2 + (1-\alpha^2-\beta^2)^2}, \\ \cos 2x^2 = \dfrac{(1-\alpha^2-\beta^2)^2}{4\alpha^2 + (1-\alpha^2-\beta^2)^2}. \end{cases}$$

Nach dem Obigen war aber

$$\sin 2x - \alpha \cos 2x = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}$$

oder

$$\cos 2x(\tan g 2x - \alpha) = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem α positiv oder negativ ist. Also ist

$$\cos 2x\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2} - \alpha\right) = \pm \sqrt{\alpha^2 + \frac{4\alpha^2\beta^2}{4\alpha^2 + (1-\alpha^2-\beta^2)^2}},$$

d. i.

$$\frac{\alpha(1+\alpha^2+\beta^2)}{1-\alpha^2-\beta^2} \cos 2x = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2(1+\alpha^2+\beta^2)^2}{4\alpha^2 + (1-\alpha^2-\beta^2)^2}},$$

und folglich

$$101) \quad \cos 2x = \pm \frac{1-\alpha^2-\beta^2}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\alpha^2 + (1-\alpha^2-\beta^2)^2}}$$

oder nach 99)

$$102) \quad \cos 2x = \pm \frac{2}{\tan g 2x} \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\alpha^2 + (1-\alpha^2-\beta^2)^2}}.$$

Weil nun

$$\sin 2x = \cos 2x \tan g 2x$$

ist, so ist

$$103) \quad \sin 2x = \pm 2 \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\alpha^2 + (1-\alpha^2-\beta^2)^2}}.$$

Da man aber bekanntlich in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem α positiv oder negativ ist, so ist offenbar

$$104)\quad \sin 2x = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}},$$

und folglich, weil

$$\cos 2x = \frac{\sin 2x}{\tan 2x}$$

ist:

$$105)\quad \cos 2x = \frac{1-\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}}.$$

Wir müssen also, damit die Gleichung

$$\sin 2x - \alpha\cos 2x = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2\sin 2x^2}$$

zugleich mit den oben rücksichtlich der Vorzeichen ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werde, den Bogen x so bestimmen, dass zugleich

$$106)\quad x = \frac{1}{2}\operatorname{Arc\,sin}\frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Arc\,cos}\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}}$$

ist, welches offenbar immer möglich ist.

Weil nun, dies vorausgesetzt,

$$\sin 2x - \alpha\cos 2x = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2\sin 2x^2}$$

ist, so ist nach 98)

$$107)\quad \begin{cases} e^{2y}+e^{-2y} = \dfrac{2(\sin 2x-\alpha\cos 2x)}{\alpha}, \\[2ex] e^{2y}-e^{-2y} = \dfrac{2\beta\sin 2x}{\alpha}; \end{cases}$$

folglich

$$\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{e^{2y}-e^{-2y}} = \frac{\sin 2x-\alpha\cos 2x}{\beta\sin 2x}$$

oder

$$\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{e^{2y}-e^{-2y}}=\frac{1-\alpha\cot 2x}{\beta};$$

also, weil

$$\cot 2x=\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}$$

ist:

$$\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{e^{2y}-e^{-2y}}=\frac{e^{4y}+1}{e^{4y}-1}=\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2\beta}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man

$$e^{4y}=\frac{1+\alpha^2+\beta^2+2\beta}{1+\alpha^2+\beta^2-2\beta},$$

d. i.

$$e^{4y}=\frac{\alpha^2+(1+\beta)^2}{\alpha^2+(1-\beta)^2},$$

und folglich

$$108)\quad y=\frac{1}{4}\,\mathrm{l}\,\frac{\alpha^2+(1+\beta)^2}{\alpha^2+(1-\beta)^2}.$$

Also hat man jetzt

$$109)\quad \mathrm{Arctang}(\alpha+\beta\sqrt{-1})=x+\frac{1}{4}\,\mathrm{l}\,\frac{\alpha^2+(1+\beta)^2}{\alpha^2+(1-\beta)^2}\cdot\sqrt{-1},$$

wo x so bestimmt werden muss, dass zugleich

$$x=\frac{1}{2}\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\,\mathrm{Arc\,cos}\,\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}}$$

ist. Man kann aber offenbar auch

$$110)\quad \mathrm{Arctang}(\alpha+\beta\sqrt{-1})$$

$$=\frac{1}{2}\,\mathrm{Arctang}\,\frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2}+\frac{1}{4}\,\mathrm{l}\,\frac{\alpha^2+(1+\beta)^2}{\alpha^2+(1-\beta)^2}\cdot\sqrt{-1}$$

setzen, wenn man nur den Bogen

$$\text{Arctang}\,\frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2}$$

so nimmt, dass er sich im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigt, jenachdem α positiv und $1-\alpha^2-\beta^2$ positiv, α positiv und $1-\alpha^2-\beta^2$ negativ, α negativ und $1-\alpha^2-\beta^2$ negativ, α negativ und $1-\alpha^2-\beta^2$ positiv ist.

§. 9.

Auf ähnliche Art wie vorher wollen wir jetzt auch

$$111)\quad \text{Arccot}(\alpha+\beta\sqrt{-1})=x+y\sqrt{-1}$$

betrachten. Aus dieser Gleichung folgt

$$\cot(x+y\sqrt{-1})=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

d. i. nach 52)

$$\frac{2\sin 2x-(e^{2y}-e^{-2y})\sqrt{-1}}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

und folglich

$$112)\quad \begin{cases} \alpha=\dfrac{2\sin 2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}, \\[2ex] \beta=-\dfrac{e^{2y}-e^{-2y}}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{2\sin 2x}{e^{2y}-e^{-2y}},$$

oder

$$e^{2y}-e^{-2y}=-\frac{2\beta\sin 2x}{\alpha},$$

oder

$$e^{4y}-1=-\frac{2\beta\sin 2x}{\alpha}\,e^{2y},$$

d. i.

$$113)\quad e^{4y}+\frac{2\beta\sin2x}{\alpha}e^{2y}-1=0.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung in Bezug auf e^{2y} als unbekannte Grösse erhält man

$$114)\quad e^{2y}=\frac{-\beta\sin2x\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2\sin2x^2}}{\alpha}$$

$$=\frac{\alpha}{\beta\sin2x\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2\sin2x^2}},$$

oder

$$115)\, e^{-2y}=-\frac{\alpha}{\beta\sin2x\mp\sqrt{\alpha^2+\beta^2\sin2x^2}}$$

$$=\frac{\beta\sin2x\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2\sin2x^2}}{\alpha}.$$

Also ist

$$116)\quad \begin{cases} e^{2y}+e^{-2y}=\pm\dfrac{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2\sin2x^2}}{\alpha}, \\ e^{2y}-e^{-2y}=-\dfrac{2\beta\sin2x}{\alpha}; \end{cases}$$

wo wieder in der ersten dieser beiden Gleichungen, und also natürlich auch überhaupt in allen vorhergehenden Gleichungen, das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem α eine positive oder eine negative Grösse ist.

Nach 112) ist also

$$\alpha=\frac{\alpha\sin2x}{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2\sin2x^2}-\alpha\cos2x},$$

folglich

$$\sin2x+\alpha\cos2x=\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2\sin2x^2},$$

und, wenn man nun auf beiden Seiten quadrirt, nach einigen leichten Verwandlungen:

$$\tan g2x+2\alpha=(\alpha^2+\beta^2)\tan g2x,$$

also

$$117) \quad \tang 2x = -\frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2}.$$

Ganz auf dieselbe Art wie im vorigen Paragraphen findet man hieraus

$$118) \quad \begin{cases} \sin 2x^2 = \dfrac{4\alpha^2}{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}, \\ \cos 2x^2 = \dfrac{(1-\alpha^2-\beta^2)^2}{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}. \end{cases}$$

Nun war aber

$$\sin 2x + \alpha\cos 2x = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2\sin 2x^2}$$

oder

$$\cos 2x(\tang 2x + \alpha) = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2\sin 2x^2},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem α positiv oder negativ ist. Also ist

$$\cos 2x\left(-\frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2}+\alpha\right) = \pm\sqrt{\alpha^2+\frac{4\alpha^2\beta^2}{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}},$$

d. i.

$$-\frac{\alpha(1+\alpha^2+\beta^2)}{1-\alpha^2-\beta^2}\cos 2x = \pm\sqrt{\frac{\alpha^2(1+\alpha^2+\beta^2)^2}{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}},$$

und folglich

$$119) \quad \cos 2x = \mp\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha^2}{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}}.$$

Weil nun

$$\sin 2x = \cos 2x \tang 2x$$

ist, so ist

$$120) \quad \sin 2x = \pm 2\sqrt{\frac{\alpha^2}{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}},$$

also, da man in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem α positiv oder negativ ist:

$$121)\quad \sin 2x = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}},$$

und folglich, weil

$$\cos 2x = \frac{\sin 2x}{\operatorname{tang} 2x}$$

ist:

$$122)\quad \cos 2x = -\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}}.$$

Wir müssen also, damit die Gleichung

$$\sin 2x + \alpha\cos 2x = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2\sin 2x^2}$$

zugleich mit den oben rücksichtlich der Vorzeichen ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werde, den Bogen x so bestimmen, dass zugleich

$$123)\quad x = \frac{1}{2}\operatorname{Arc}\sin\frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Arc}\cos -\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}}$$

ist, welches offenbar immer möglich ist.

Weil nun, dies vorausgesetzt,

$$\sin 2x + \alpha\cos 2x = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2\sin 2x^2}$$

ist, so ist nach 116)

$$124)\quad \begin{cases} e^{2y}+e^{-2y} = \dfrac{2(\sin 2x+\alpha\cos 2x)}{\alpha}, \\ e^{2y}-e^{-2y} = -\dfrac{2\beta\sin 2x}{\alpha}; \end{cases}$$

folglich

$$\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{e^{2y}-e^{-2y}} = -\frac{\sin 2x+\alpha\cos 2x}{\beta\sin 2x}$$

oder

$$\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{e^{2y}-e^{-2y}}=-\frac{1+\alpha\cot 2x}{\beta},$$

also, weil

$$\cot 2x=-\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}$$

ist:

$$\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{e^{2y}-e^{-2y}}=\frac{e^{4y}+1}{e^{4y}-1}=-\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2\beta}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man

$$e^{4y}=\frac{1+\alpha^2+\beta^2-2\beta}{1+\alpha^2+\beta^2+2\beta},$$

d. i.

$$e^{4y}=\frac{\alpha^2+(1-\beta)^2}{\alpha^2+(1+\beta)^2},$$

und folglich

$$125)\quad y=\frac{1}{4}\,\mathrm{l}\,\frac{\alpha^2+(1-\beta)^2}{\alpha^2+(1+\beta)^2}.$$

Also hat man jetzt

$$126)\quad \mathrm{Arccot}(\alpha+\beta\sqrt{-1})=x+\frac{1}{4}\,\mathrm{l}\,\frac{\alpha^2+(1-\beta)^2}{\alpha^2+(1+\beta)^2}.\sqrt{-1},$$

wo x so bestimmt werden muss, dass zugleich

$$x=\frac{1}{2}\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\,\mathrm{Arccos}-\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{4\alpha^2+(1-\alpha^2-\beta^2)^2}}$$

ist. Man kann aber offenbar auch

$$127)\quad \mathrm{Arccot}(\alpha+\beta\sqrt{-1})$$

$$=\frac{1}{2}\,\mathrm{Arctang}-\frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2}+\frac{1}{4}\,\mathrm{l}\,\frac{\alpha^2+(1-\beta)^2}{\alpha^2+(1+\beta)^2}.\sqrt{-1}$$

setzen, wenn man nur den Bogen

$$\text{Arctang} - \frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2}$$

so nimmt, dass er sich im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigt, jenachdem α positiv und $1-\alpha^2-\beta^2$ negativ, α positiv und $1-\alpha^2-\beta^2$ positiv, α negativ und $1-\alpha^2-\beta^2$ positiv, α negativ und $1-\alpha^2-\beta^2$ negativ ist,

§. 10.

Die Entwickelung von

$$\text{Arcsec}(\alpha+\beta\sqrt{-1}) \text{ und } \text{Arccosec}(\alpha+\beta\sqrt{-1})$$

hat keine Schwierigkeit, wenn man nur überlegt, dass

$$\text{Arcsec}(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \text{Arccos}\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$$

$$\text{Arccosec}(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \text{Arcsin}\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$$

oder

$$\text{Arcsec}(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \text{Arccos}\frac{\alpha-\beta\sqrt{-1}}{\alpha^2+\beta^2},$$

$$\text{Arccosec}(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \text{Arcsin}\frac{\alpha-\beta\sqrt{-1}}{\alpha^2+\beta^2}$$

sein muss.

Nach gehöriger Entwickelung findet man leicht:

$$128)\quad \text{Arcsec}(\alpha+\beta\sqrt{-1})$$

$$= \text{Arccos}\frac{\alpha}{\left\{\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$\mp 1\left\{\left[\frac{1+\alpha^2+\beta^2+\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2}}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1-\alpha^2-\beta^2+\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2}}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\cdot\sqrt{-1}$$

mit folgenden Bestimmungen wegen der Vorzeichen.

Wenn der Bogen

$$\operatorname{Arccos} \frac{\alpha}{\left\{\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

sich im ersten oder zweiten Quadranten endigt, so muss man das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem β negativ oder positiv ist.

Wenn der Bogen

$$\operatorname{Arccos} \frac{\alpha}{\left\{\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

sich im dritten oder vierten Quadranten endigt, so muss man das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem β positiv oder negativ ist.

Auf ähnliche Art ist

$$129)\quad \operatorname{Arccosec}(\alpha+\beta\sqrt{-1})$$

$$= \operatorname{Arcsin} \frac{\alpha}{\left\{\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$\pm l\left\{\left[\frac{1+\alpha^2+\beta^2+\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2}}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right]^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1-\alpha^2-\beta^2+\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2}}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.\sqrt{-1},$$

mit folgenden Bestimmungen wegen der Vorzeichen.

Wenn der Bogen

$$\operatorname{Arcsin} \frac{\alpha}{\left\{\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, so muss man das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem β negativ oder positiv ist.

Wenn der Bogen

$$\text{Arcsin}\,\frac{\alpha}{\left\{\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2-\alpha^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

sich im zweiten oder dritten Quadranten endigt, so muss man das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem β positiv oder negativ ist.

Mittelst der Gleichungen

$$\text{Arcsinv}(\alpha+\beta\sqrt{-1})=\text{Arccos}(1-\alpha-\beta\sqrt{-1}),$$

$$\text{Arccosv}(\alpha+\beta\sqrt{-1})=\text{Arcsin}(1-\alpha-\beta\sqrt{-1})$$

würden sich endlich auch leicht

$$\text{Arcsinv}(\alpha+\beta\sqrt{-1}) \text{ und } \text{Arccosv}(\alpha+\beta\sqrt{-1})$$

entwickeln lassen, indem man die entwickelten Ausdrücke auf der Stelle erhält, wenn man in den bekannten Ausdrücken von

$$\text{Arccos}(\alpha+\beta\sqrt{-1}) \quad \text{und} \quad \text{Arcsin}(\alpha+\beta\sqrt{-1})$$

$1-\alpha$ für α und $-\beta$ für β setzt.

§. 11.

Es scheint nicht unzweckmässig zu sein, dem Obigen die folgenden kurzen Bemerkungen über die Differentialquotienten imaginärer Functionen hinzuzufügen.

Erklärung.

Unter dem Differentialquotienten einer imaginären Function

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x).\sqrt{-1},$$

wo $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ reelle Functionen von x bezeichnen sollen, welchen man wie bei reellen Functionen auch durch

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

zu bezeichnen pflegt, versteht man die Grösse

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}.\sqrt{-1},$$

die man also aus der Gleichung

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x).\sqrt{-1}$$

immer leicht durch Differentiation der reellen Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ erhalten kann.

In der That enthält die vorstehende Erklärung Alles, was bei der Entwickelung der Differentialquotienten imaginärer Functionen zu wissen nöthig ist; dieselbe ist durch diese Erklärung unmittelbar auf die Entwickelung der Differentialquotienten reeller Functionen zurückgeführt, mit welcher man nur die in dieser Abhandlung entwickelte Theorie der imaginären Grössen zu verbinden hat, um in allen Fällen die Differentialquotienten imaginärer Functionen mit Leichtigkeit und ohne allen Anstoss entwickeln zu können. Nur hat man wohl fest zu halten, dass die aus der Gleichung

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x).\sqrt{-1}$$

abgeleitete Gleichung

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}.\sqrt{-1},$$

oder in anderer Bezeichnung

$$f'(x)=\varphi'(x)+\psi'(x).\sqrt{-1},$$

durchaus nur das Resultat der obigen Erklärung ist, und dass in vorstehender Gleichung

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x},$$

seinem eigentlichen, mit Willkührlichkeit in der obigen Erklärung aufgestellten Begriffe nach, durchaus nicht mit den in obiger Gleichung in ganz ähnlicher Weise bezeichneten Grössen

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial\psi(x)}{\partial x},$$

verwechselt werden darf. Als die Differentialquotienten reeller Functionen sind dem eigentlichen und ursprünglichen Begriffe des Differentialquotienten nach

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial\psi(x)}{\partial x}$$

die Gränzen, denen die Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} \text{ und } \frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x}$$

sich bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn Δx sich der Null nähert. Dass aber von einer wirklichen Annäherung an eine bestimmte Gränze nur zwischen reellen Grössen die Rede sein kann, versteht sich wohl von selbst, da ja dabei von wirklichen Grössenvergleichungen, in Bezug auf das Grössere und Kleinere, immer nothwendig die Rede sein muss. Und da von einer solchen Grössenvergleichung in Bezug auf das Grössere und Kleinere, nach meinen Begriffen wenigstens, bei oder zwischen imaginären Grössen gar keine Rede sein kann, so darf auch, wie schon erinnert, in der aus

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x).\sqrt{-1}$$

gezogenen Gleichung

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} + \frac{\partial\psi(x)}{\partial x}.\sqrt{-1}$$

gewiss

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x},$$

seinem Begriffe nach, nie mit

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} \text{ oder } \frac{\partial\psi(x)}{\partial x}$$

verwechselt werden. In der That ist auch $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ eigentlich nur etwas Symbolisches, und nur das Resultat oder das Product der obigen an sich willkührlichen Erklärung der Differentialquotienten imaginärer Functionen.

Die Erklärung der Differentialquotienten reeller Functionen als der Gränzen, denen die entsprechenden Differenzenquotienten sich bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn das Increment der unabhängigen veränderlichen Grösse sich der Null nähert, ist etwas ganz für sich Bestehendes und bildet die eigenthümliche Grundlage der gesammten Differentialrechnung.

Die Erklärung der Differentialquotienten imaginärer Functionen, so wie dieselbe oben gegeben worden ist, ist auch etwas für sich Bestehendes, entspringt aber erst aus der Erklärung der Differentialquotienten reeller Functionen, oder setzt dieselbe voraus.

Beide Erklärungen dürfen nicht mit einander verwechselt werden, und am allerwenigsten dürfen

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x},$$

jenachdem $f(x)$ eine reelle oder eine imaginäre Function ist, als gleichbedeutende Dinge betrachtet werden.

Wenn nun der verehrte Verfasser des Aufsatzes Nr. I. in diesem XXsten Theile des Archivs, Herr Professor Dr. *Matzka* in *Prag*, in diesem zunächst gegen *Cauchy*, *Schlömilch* und *mich* gerichteten Aufsatze darauf besonderes Gewicht zu legen scheint, *dass eine imaginäre Function in besonderen Fällen einen reellen Differentialquotienten haben könne*, so muss ich mir darauf zu erwidern erlauben, dass ich daran seit meinem ersten Studium der Differentialrechnung noch nie einen Augenblick gezweifelt habe. Denn warum sollte denn in der aus der Gleichung

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x).\sqrt{-1}$$

gezogenen Gleichung

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}+\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}.\sqrt{-1}$$

nicht in *gewissen besonderen Fällen* der Differentialquotient $\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}$ der reellen Function $\psi(x)$ verschwinden können? Um aber in der Kürze den Grundfehler und den Grundirrthum aufzudecken, welcher, nach meiner unmaassgeblichen Ansicht wenigstens, der ganzen Auffassungs- und Anschauungsweise des verehrten Herrn Verfassers des oben erwähnten Aufsatzes beiwohnt, erlaube ich mir Folgendes zu bemerken:

Eine imaginäre Function kann in besonderen Fällen allerdings einen reellen Differentialquotienten haben*), *aber durchaus nur*

---

*) Woran am wenigsten ich selbst jemals gezweifelt habe.

in dem Sinne, *in welchem* (der obigen Erklärung zufolge) *eine imaginäre Function überhaupt bloss einen Differentialquotienten haben kann*; nie und nimmermehr aber in dem Sinne eines wirklichen und eigentlichen Differentialquotienten einer reellen Function, als der Gränze nämlich, welcher der betreffende Differentialquotient sich bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn die Veränderung der unabhängigen veränderlichen Grösse sich der Null nähert.

Oder ganz kurz gesagt:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

sind, jenachdem $f(x)$ eine reelle oder imaginäre Function ist, an sich ganz verschiedene Dinge, die nie mit einander verwechselt werden dürfen.

Dass Herr Professor Dr. Matzka Beides, wie es mir wenigstens scheint, mit einander verwechselt, und Beides gleichbedeutend nimmt: darin liegt der Grundfehler seiner ganzen Auffassungs- und Anschauungsweise. *Noch einmal*: Eine imaginäre Function kann sehr wohl einen reellen Differentialquotienten haben, aber nur in dem Sinne, in welchem eine imaginäre Function überhaupt nur einen (sogenannten) Differentialquotienten haben kann, keineswegs in dem Sinne eines (wirklichen oder eigentlichen) Differentialquotienten einer reellen Function.

Hiermit ist aber für mich wenigstens vollständig aufgeklärt, wie Herr Professor Dr. Matzka in dem erwähnten Aufsatze zu den von ihm gemachten sogenannten Einwürfen gekommen ist. Wer in die oben mehrfach hervorgehobenen Verwechslungen verfällt, wird sich allemal nothwendig in ähnlicher Weise aussprechen müssen. Widerlegt hat daher auch Herr Professor Dr. Matzka von allen dem, was ich in der von ihm angeführten Stelle meines „Leitfadens für den ersten Unterricht in der höheren Analysis. Leipzig. 1838." und anderwärts gesagt habe, *gar Nichts*, vielmehr dürften alle Bemerkungen aus einer verfehlten Grundansicht hervorgegangen sein, wie ich schon in der seinem Aufsatze am Ende beigefügten Bemerkung anzudeuten mir erlaubt habe. Und deshalb wird denn auch des trefflichen Cauchy vortreffliche Schreibart:

$$\int \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.x^2,$$

insofern man das Differential $\frac{\partial x}{x}$ in dem eigentlichen und ursprünglichen Sinne des wirklichen Differentials, oder vielmehr den Differentialquotienten $\frac{1}{x}$ in dem eigentlichen und ursprünglichen Sinne des wirklichen Differentialquotienten, als einer Gränze, welcher sich der Differenzenquotient bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn Δx sich der Null nähert*), was nur bei reellen Functionen möglich ist, nicht in dem abgeleiteten mehr bloss symbolischen Sinne des Differentialquotienten einer imaginären Function, der mit jenem an sich gar nichts zu thun hat, auffasst, *auch fortan ganz unangetastet stehen bleiben.* Weshalb ich, obgleich ich Herrn Professor Dr. Matzka's Ansichten in keiner Weise theilen konnte, seinen Aufsatz doch habe abdrucken lassen, findet sich schon in meiner Schlussbemerkung zu diesem Aufsatze angedeutet; hauptsächlich aber geschah es auf seinen mehrmals in sehr dringender Weise gegen mich wiederholten Wunsch. Auch muss ja das Archiv zur Austauschung entgegengesetzter Ansichten Gelegenheit darbieten. Nur darf ich als Herausgeber im Interesse meiner Leser mir nicht erlauben, dergleichen Controversen zu weit auszudehnen. Daher betrachte ich die Verhandlungen über diesen Gegenstand jetzt auch vorläufig geschlossen, indem ich glaube, dass dieselben vollständig hinreichen, damit jeder Leser sich selbst ein Urtheil zu bilden im Stande ist; und weiter ist zunächst nichts erforderlich.

---

*) Und dass nur dieser Sinn an der angeführten Stelle meines „Leitfadens" von mir festgehalten worden ist, hätte Herr Professor Dr. Matzka schon aus dem Orte selbst, wo meine Bemerkungen sich im Systeme befinden, entnehmen können.

IX.

Ueber die Fusspunktcurven der Kegelschnitte.

Von dem

Herrn Doctor Schütte,

Lehrer an dem Pädagogium zu Putbus.

Ist eine Curve in der Ebene gegeben, ausgedrückt durch eine Gleichung zwischen ihren rechtwinkligen Coordinaten, und ausser ihr ein Punkt, dessen Coordinaten seien α und β; zieht man ferner an die Curve alle nur möglichen Tangenten und fällt von dem festen Punkte auf jede derselben Perpendikel, so liegen die Durchschnittspunkte der einzelnen Tangenten und der respectiven Perpendikel auf einer neuen Curve, welche die Fusspunktencurve genannt wird, und in Bezug auf welche der feste Punkt der Pol heisst. Die Coordinaten des Fusspunktes des Perpendikels seien ξ und η; hat man diese als Functionen der Variablen x und y und ihrer respectiven Ableitungen dargestellt, so dass sie unter der Form

$$\xi=\varphi(x,\,y),\quad \eta=\psi(x,\,y)$$

erscheinen, so kann man aus diesen beiden Gleichungen und der Gleichung der gegebenen Curve x und y eliminiren, so dass man eine Gleichung zwischen ξ und η gewinnt, die gesuchte Gleichung der Fusspunktcurve. Es sind also zunächst ξ und η als Functionen von x und y und deren Ableitungen darzustellen.

Die Gleichung der Tangente ist bekanntlich

$$(\xi-x)\frac{dy}{dx}=\eta-y;$$

die Gleichung des vom Pol auf die Tangente gefällten Perpendikels sei

$$\eta=m\xi+\mu,$$

in welcher die Coefficienten m und μ zu bestimmen sind. Da die Linie durch den Pol geht, so muss die Gleichung stattfinden

$$\beta=m\alpha+\mu,$$

woraus durch Subtraction sich ergiebt:

$$\eta-\beta=m(\xi-\alpha).$$

Der Coefficient m wird sein $m=1:-\frac{dy}{dx}$, weil diese Linie auf der Tangente senkrecht steht, so dass die Gleichung des Perpendikels gefunden wird:

$$\xi-\alpha=-(\eta-\beta)\frac{dy}{dx}.$$

Die beiden Gleichungen zur Bestimmung der Coordinaten ξ und η kann man schreiben:

$$(\xi-x)\frac{dy}{dx}-(\eta-y)=0,$$

$$(\xi-\alpha)+(\eta-\beta)\frac{dy}{dx}=0.$$

Multiplicirt man die erste mit $\frac{dy}{dx}$ und addirt, so erhält man:

$$(y-\beta)\frac{dy}{dx}+(\xi-x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\xi-\alpha=0,$$

woraus sich ergiebt:

$$\xi=\frac{\alpha+(\beta-y)\frac{dy}{dx}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Multiplicirt man dagegen die zweite mit $\frac{dy}{dx}$ und subtrahirt, so erhält man:

$$\eta - y + (\eta - \beta)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x - \alpha)\frac{dy}{dx} = 0,$$

woraus folgt

$$\eta = \frac{y + \beta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (\alpha - x)\frac{dy}{dx}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Nachdem die Coordinaten des Fusspunktes auf diese Weise als Functionen der Veränderlichen x und y, und ihrer Ableitungen dargestellt sind, können zwischen diesen Gleichungen und der Curvengleichung

$$f(x, y) = 0$$

die Veränderlichen x und y eliminirt werden, so dass man die Fusspunktcurve erhält, ausgedrückt durch eine Gleichung von der Form

$$F(\xi, \eta) = 0.$$

Es ist nicht immer nöthig, die Coordinaten des Fusspunktes zu berechnen, sondern es genügt, die Veränderlichen x und y zwischen den Gleichungen der Tangente, des Perpendikels, und der gegebenen Curve zu eliminiren, da aus den beiden ersteren die Werthe für ξ und η abgeleitet waren.

Die allgemeine Gleichung der Curven zweiten Grades ist

$$ax^2 + by^2 + 2cx = 0,$$

wenn die Abscissenaxe mit der Hauptaxe des Kegelschnitts zusammenfällt, und die Oordinatenaxe durch den Scheitel geht. Aus jener Gleichung folgt

$$x = \frac{-c + \sqrt{c^2 - aby^2}}{a}.$$

Um die Veränderlichen zu eliminiren, setze man sie als Functionen einer dritten Variablen, wodurch elegantere Formeln erhalten werden. Man setze

$$y = \frac{c}{\sqrt{ab}} \sin\varphi,$$

alsdann wird

$$x = \frac{-c + c . \cos\varphi}{a},$$

woraus man durch Differentiiren erhält:

$$dx = -\frac{c}{a}\sin\varphi d\varphi, \qquad dy = \frac{c}{\sqrt{ab}}\cos\varphi d\varphi$$

und

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen des Perpendikels und der Tangente, so gehen diese über in:

$$1)\quad -\sqrt{\frac{a}{b}}(\eta-\beta)\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}+(\xi-\alpha)=0,$$

$$2)\quad \eta-\frac{c.\sin\varphi}{\sqrt{ab}}+\left(\xi-\frac{c.\cos\varphi-c}{a}\right)\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}=0;$$

oder, wenn man die erstere mit $\sqrt{b}\sin\varphi$, die zweite mit $\sqrt{ab}\sin\varphi$ multiplicirt:

$$3)\quad -\sqrt{a}(\eta-\beta)\cos\varphi+\sqrt{b}(\xi-\alpha)\sin\varphi=0,$$

$$4)\quad \eta\sqrt{ab}\sin\varphi+(a\xi+c)\cos\varphi-c=0.$$

Multiplicirt man die Gleichung 4) mit $\xi-\alpha$, die Gleichung 3) aber mit $\eta\sqrt{a}$ und subtrahirt, so erhält man:

$$5)\quad (\xi-\alpha)(a\xi+c)\cos\varphi-c(\xi-\alpha)+a\eta(\eta-\beta)\cos\varphi=0;$$

und multiplicirt man die erstere mit $a\xi+c$, die zweite mit $\sqrt{a}(\eta-\beta)$ und addirt, so ergiebt sich:

$$6)\quad a\eta\sqrt{b}(\eta-\beta)\sin\varphi-c\sqrt{a}(\eta-\beta)+\sqrt{b}(\xi-\alpha)(a\xi+c)\sin\varphi=0.$$

Aus der Gleichung 5) wird gefunden:

$$\cos\varphi=\frac{c(\xi-\alpha)}{a\eta(\eta-\beta)+(\xi-\alpha)(a\xi+c)},$$

aus der Gleichung 6):

$$\sin\varphi=\frac{c\sqrt{a}(\eta-\beta)}{a\sqrt{b}\eta(\eta-\beta)+\sqrt{b}(\xi-\alpha)(a\xi+c)}.$$

Substituirt man diese beiden Werthe in die Gleichung:

$$\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 = 1,$$

so erhält man

$$\frac{c^2(\xi-\alpha)^2}{\{a\eta(\eta-\beta)+(\xi-\alpha)(a\xi+c)\}^2} + \frac{ac^2(\eta-\beta)^2}{b\{a\eta(\eta-\beta)+(\xi-\alpha)(a\xi+c)\}^2} = 1,$$

oder

$$bc^2(\xi-\alpha)^2 + ac^2(\eta-\beta)^2 = b\{a\eta(\eta-\beta)+(\xi-\alpha)(a\xi+c)\}^2.$$

Die Gleichung für die Fusspunktcurven der Kegelschnitte ist also im Allgemeinen vom vierten Grade; in dem Falle jedoch, dass der Pol im Brennpunkte liegt, wird sie vom zweiten und ersten Grade, was an den einzelnen Kegelschnitten gezeigt werden soll.

I. Die Parabel.

Die Gleichung der Parabel aus dem Scheitel ist

$$y^2 = 2px.$$

Setzt man in derselben $x = 2p\cos\varphi^2$, so wird $y = 2p\cos\varphi$, so dass man durch Differentiiren erhält:

$$dx = -4p\cos\varphi\sin\varphi d\varphi,$$

$$dy = -2p\sin\varphi d\varphi,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\cos\varphi}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen des Perpendikels und der Tangente, so gehen dieselben über in:

$$1)\quad (\eta-\beta)\frac{1}{2\cos\varphi} + (\xi-\alpha) = 0,$$

$$2)\quad 2\eta\cos\varphi - 2p\cos\varphi^2 - \xi = 0.$$

Aus der Gleichung 1) erhält man

$$\cos\varphi = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\eta-\beta}{\xi-\alpha},$$

und wenn man diesen Werth in die Gleichung 2) setzt, so geht dieselbe über in:

$$-\frac{2\eta(\eta-\beta)}{2(\xi-\alpha)}-\frac{p(\eta-\beta)^2}{2(\xi-\alpha)^2}-\xi=0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $2(\xi-\alpha)^2$, so erhält man die Gleichung der Fusspunktcurve:

$$2\eta(\eta-\beta)(\xi-\alpha)+p(\eta-\beta)^2+2\xi(\xi-\alpha)^2=0.$$

Um die Gestalt dieser Curven dritten Grades genauer zu untersuchen, verlege man die Coordinatenaxen den alten parallel in den Pol selbst, so dass zu setzen ist:

$$\xi=x+\alpha,\quad \eta=y+\beta;$$

worauf die Gleichung übergeht in:

$$2(y+\beta)xy+py^2+2x^2(x+\alpha)=0.$$

Diese Curve kann nicht symmetrisch auf beiden Seiten der Ordinatenaxe liegen, da x in der höchsten Potenz einen ungeraden Exponenten hat. Es sei zu untersuchen, wann die Ordinate imaginär werde. Löst man die Klammern auf, so wird:

$$(p+2x)y^2+2\beta xy+2x^2(x+\alpha)=0,$$

woraus man erhält:

$$y=\frac{-\beta x\pm\sqrt{-2x^2(x+\alpha)(p+2x)+\beta^2x^2}}{p+2x}$$

$$=\frac{-\beta x\pm x\sqrt{\beta^2-2(x+\alpha)(p+2x)}}{p+2x}.$$

Es behält also die Ordinate nur dann einen reellen Werth, wenn

$$\beta^2>2(x+\alpha)(p+2x).$$

Es sei zu untersuchen, ob die Fusspunktcurven der Parabel Asymptoten haben. Die Asymptote kann man betrachten als eine Tangente, deren Berührungspunkt im Unendlichen liegt, während sie selbst im Endlichen bleibt. Setzt man in der Gleichung der Tangente eine der Coordinaten gleich unendlich, und substituirt den zugehörigen Werth der andern Coordinate, so wird diese Gleichung, wenn sie endlich bleibt, die Asymptote ausdrücken.

Differentiirt man die Gleichung der Fusspunktcurve, so wird:

$$(4xy+2\beta x+2py)\frac{dy}{dx}+2y^2+2\beta y+4x(x+\alpha)+2x^2=0,$$

woraus

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2+\beta y+3x^2+2\alpha x}{2xy+\beta x+py}.$$

Dies in die Gleichung der Tangente gesetzt giebt:

$$(x_1-x)\frac{y^2+\beta y+3x^2+2\alpha x}{2xy+\beta x+py}+(y_1-y)=0,$$

oder

$$(x_1-x)(y^2+\beta y+3x^2+2\alpha x)+(y_1-y)(2xy+\beta x+py)=0.$$

Dividirt man durch y^2, so wird

$$(x_1-x)\left(1+\frac{\beta}{y}+\frac{3x^2+2\alpha x}{y^2}\right)+\left(\frac{y_1}{y}-1\right)\left(2x+p+\frac{\beta x}{y}\right)=0.$$

Es war gefunden:

$$y=\frac{-\beta x\pm x\sqrt{\beta^2-2(x+\alpha)(p+2x)}}{p+2x}.$$

Damit dies unendlich werde, ist zu setzen:

$$p+2x=0,$$

so dass die beiden zusammengehörigen Werthe von x und y sind:

$$x=-\frac{p}{2},\quad y=\infty.$$

Dies in die Tangentengleichung substituirt, giebt, da die y im Nenner enthaltenden Glieder gleich 0 werden:

$$x_1+\frac{p}{2}=0$$

als Gleichung der Asymptote. Die Fusspunktcurven der Parabel haben daher immer eine Asymptote, welche, wie aus der Gleichung hervorgeht, der Ordinatenaxe parallel und um den halben Parameter vom Pol entfernt ist.

Es sollen jetzt einzelne Curven betrachtet werden, welche man dadurch erhält, dass man den Coordinaten des Pols bestimmte Werthe beilegt.

Setzt man in der ursprünglichen Gleichung der Fusspunktcurve $\beta=0$, $\alpha=\frac{p}{2}$, so fällt der Pol mit dem Brennpunkte der Parabel zusammen und die Gleichung geht über in

$$2\eta^2\left(\xi-\frac{p}{2}\right)+p\eta^2+2\xi\left(\xi-\frac{p}{2}\right)^2=0$$

oder

$$2\eta^2\xi + 2\xi(\xi - \frac{p}{2})^2 = 0,$$

welcher Gleichung genügt wird durch $\xi = 0$. In diesem Falle ist also die Fusspunktcurve eine gerade Linie und zwar die Ordinatenaxe selbst. Die Asymptote sollte der Ordinatenaxe parallel und um den halben Parameter vom Pol entfernt sein, fällt also hier ebenfalls mit der Ordinatenaxe zusammen.

Setzt man $\alpha = 0$, $\beta = 0$, so liegt der Pol im Scheitel der Parabel und man erhält die Gleichung

$$2\eta^2\xi + p\eta^2 + 2\xi^3 = 0.$$

Die Asymptote, gegeben durch die Gleichung

$$x_1 = -\frac{p}{2},$$

ist in diesem Fall die Directrix der Parabel. Es werde untersucht, ob diese Curve einen Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt habe. Schneidet eine Curve sich selbst, so dass ein Doppelpunkt entsteht, so muss es in diesem Punkte zwei Tangenten geben, und da die trigonometrische Tangente des von der Abscissenaxe und der geometrischen Tangente gebildeten Winkels durch den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ ausgedrückt wird, so muss dieser zwei verschiedene Werthe haben. Es muss daher eine quadratische Gleichung gefunden werden, aus welcher sich jene beiden Werthe bestimmen lassen. Wenn die Curve gegeben ist durch die Gleichung

$$f(x, y) = 0,$$

deren partielle Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ für zwei zusammengehörige Werthe von x und y verschwinden, so nimmt der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, so dass es keinen bestimmten Werth der Tangente zu geben scheint. Das vollständige Differential wird:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Durch abermaliges Differentiiren erhält man eine quadratische Gleichung, aus der man zwei Werthe von $\frac{dy}{dx}$ findet. Es wird nemlich:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{d^2 y}{dx^2}=0,$$

oder da

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

vorausgesetzt war:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

Wenn aus dieser Gleichung sich zwei reelle Werthe für $\frac{dy}{dx}$ ergeben, so schneidet die Curve sich selbst in dem durch jene zusammengehörigen Coordinatenwerthe angedeuteten Punkte. Ergeben sich zwei gleiche reelle Werthe, so fallen die beiden Tangenten zusammen und die Curve hat einen Rückkehrpunkt oder berührt sich selbst.

Es war die Gleichung gefunden

$$2y^2x+2x^3+py^2=0,$$

woraus durch Differentiiren gefunden wird:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2y^2+6x^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=4yx+2py.$$

Diese partiellen Differentialquotienten verschwinden für die zusammengehörigen Werthe $x=0$, $y=0$. Die abermalige Differentiation giebt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4x+2p;$$

welche partiellen Differentialquotienten für jene Coordinatenwerthe übergehen in:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2p.$$

Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

wird also verwandelt in:

$$2p\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

woraus sich die beiden gleichen Werthe ergeben:

$$\frac{dy}{dx}=\pm 0.$$

Die Curve hat also entweder einen Rückkehrpunkt, oder sie berührt sich selbst.

Es ist der Krümmungshalbmesser zu betrachten, der bekanntlich ist

$$\varrho=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Wenn die Curve sich selbst berührt, so muss ϱ für diesen Punkt einen endlichen Werth behalten und darf auch nicht gleich Null werden. Denn wenn der Krümmungshalbmesser unendlich gross wird, so ist die Curve in jenem Punkte eine gerade Linie, d. h. sie hat einen Inflectionspunkt; wird er dagegen gleich Null, so ist gar keine Krümmung vorhanden, d. h. die Curve hat einen Inflectionspunkt.

Die Gleichung

$$\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=0$$

wird erfüllt, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich wird, während $\frac{dy}{dx}$ einen endlichen Werth bewahrt. Durch Differentiation der Gleichung

$$2y^2x+2x^3+py^2=0$$

erhält man

$$1)\qquad y(2x+p)\frac{dy}{dx}+y^2+3x^2=0$$

und durch abermalige Differentiation:

$$2)\qquad y(2x+p)\frac{d^2y}{dx^2}+(2x+p)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2y\frac{dy}{dx}+6x=0.$$

Aus der Gleichung 1) wird gefunden:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2+3x^2}{y(2x+p)},$$

welches Differential für jene Coordinatenwerthe $x=0$, $y=0$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Aus der quadratischen Gleichung war bereits für dasselbe der bestimmte Werth $\frac{dy}{dx}=0$ gefunden, und wenn man diesen in die Gleichung 2) substituirt, so geht dieselbe über in

$$3)\qquad y(2x+p)\frac{d^2y}{dx^2}+6x=0.$$

Löst man die Gleichung der Curve

$$2y^2x+2x^3+py^2=0$$

nach y auf, so wird

$$y=x\sqrt{\frac{-2x}{2x+p}};$$

und dies in die Gleichung 3) substituirt liefert:

$$x\sqrt{-2x(2x+p)}\,\frac{d^2y}{dx^2}+6x=0,$$

woraus folgt:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{6}{\sqrt{-2x(2x+p)}}.$$

Setzt man jetzt $x=0$, so wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich, daher der Krümmungshalbmesser gleich Null.

Der Pol ist daher selbst ein Rückkehrpunkt der Curve, und da $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des von der Abscissenaxe und der geometrischen Tangente gebildeten Winkels ist, so folgt, dass dieser Winkel gleich Null und die Abscissenaxe selbst die geometrische Tangente ist.

Es soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen überhaupt die Fusspunktcurven der Parabel einen Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt haben. Es sind daher die partiellen Differentialquotienten zu bilden. Die allgemeine Gleichung war:

$$2y(y-\beta)(x-\alpha)+p(y-\beta)^2+2x(x-\alpha)^2=0.$$

Durch Differentiiren erhält man aus derselben:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2y(y-\beta)+4x(x-\alpha)+2(x-\alpha)^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y(x-\alpha)+2(y-\beta)(x-\alpha)+2p(y-\beta);$$

welche partiellen Differentialquotienten für $x=\alpha$ und $y=\beta$ verschwinden. Durch abermaliges Differentiiren gewinnt man:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4x+8(x-\alpha),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=2(y-\beta)+2y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4(x-\alpha)+2p;$$

welche für jene Werthe übergehen in:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4\alpha, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=2\beta, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2p;$$

so dass die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

die Form annimmt:

$$4\alpha+4\beta\frac{dy}{dx}+2p\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

woraus gefunden wird:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-2p\alpha}}{p}.$$

Ob eine oder zwei oder gar keine reelle Tangente vorhanden ist, das hängt offenbar von der Wurzel $\sqrt{\beta^2-2p\alpha}$ ab. Ist dieselbe grösser als Null, so giebt es zwei reelle verschiedene Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und somit zwei verschiedene Tangenten, d. h. der Pol ist ein Doppelpunkt; ist dagegen $\beta^2-2p\alpha=0$, so erhält man nur eine reelle Tangente und der Pol ist ein Rückkehrpunkt. Ist endlich $\beta^2-2p\alpha$ negativ, so wird die Wurzel imaginär, und es schneiden sich im Pol zwei imaginäre Tangenten, und derselbe ist ein isolirter Punkt. Liegt nun der Pol auf der Parabel, so ist alle Mal $\beta^2-2p\alpha=0$, und der Pol ist ein Rückkehrpunkt; dagegen wird $\beta^2-2p\alpha$ positiv, wenn der Pol ausserhalb, negativ wenn er innerhalb der Parabel liegt, was sich folgendermassen beweisen lässt.

Es liege der Pol ausserhalb der Parabel; dann sind nur diejenigen Fälle zu betrachten, wo er auf der positiven Seite der Abscissenaxe liegt, da für ein negatives α die Grösse $\beta^2-2p\alpha$ alle Mal positiv wird. Man ziehe die Ordinate β, welche die Parabel in irgend einem Punkte schneiden wird. Die Ordinate dieses Punktes sei m und es sei ferner $\beta=m+\gamma$. Es wird die Gleichung entstehen $m^2-2p\alpha=0$. Substituirt man den für β gefundenen Werth, so wird

$$\beta^2-2p\alpha=m^2+2m\gamma+\gamma^2-2p\alpha=2m\gamma+\gamma^2,$$

welcher Ausdruck immer positiv ist, da γ und m beide positiv sind.

Es liege der Pol innerhalb der Parabel. Man ziehe wieder die Ordinate β und verlängere sie über den Pol hinaus bis zum Durchschnitt mit der Parabel. Alsdann wird $\beta=m-\gamma$ zu setzen sein, daher der Ausdruck

$$\beta^2-2p\alpha=m^2+\gamma^2-2m\gamma-2p\alpha,$$

und da auch hier $m^2-2p\alpha=0$ ist, so wird:

$$\beta^2-2p\alpha=\gamma^2-2m\gamma.$$

Es ist aber γ ein Theil von m, daher $2m\gamma>\gamma^2$, also wird $\beta^2-2p\alpha$ eine negative Grösse, der Pol ist daher ein Doppel-Rückkehr- oder isolirter Punkt für die Curve, jenachdem er ausserhalb, auf oder innerhalb der Parabel liegt.

Es sollen nun einige dieser Curven quadrirt werden. Für den Fall, dass der Pol im Scheitel der Parabel liegt, ist die Gleichung der Fusspunktcurve:

$$2y^2x+py^2+2x^2=0,$$

woraus man erhält:

$$y=\sqrt{\frac{-2x^3}{p+2x}}.$$

Da die Ordinate nur dann einen reellen Werth hat, wenn die Abscisse negativ ist, so kann man $-x$ statt x schreiben, worauf man erhält:

$$y=\sqrt{\frac{2x^3}{p-2x}}.$$

Bezeichnet F die Fläche, welche von der Abscissenaxe, der Curve und den Ordinaten y_1, y_2 eingeschlossen wird, so ist, wenn x_1, x_2 die zu jenen Ordinaten gehörigen Abscissen sind:

$$F=\int_{x_1}^{x_2} y dx.$$

In diesem Falle wird daher

$$F=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{2x^3}{p-2x}}\,dx.$$

Den zu integrirenden Ausdruck kann man schreiben:

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{x^2}{\sqrt{\frac{p}{2}x-x^2}}\,dx,$$

so dass man durch Integration erhält:

$$\int_{x_1}^{x_2} ydx=-\frac{{}^3\!/_4 p+x_1}{2}\sqrt{\frac{p}{2}x_1-x_1^2}+\frac{{}^3\!/_4 p+x_2}{2}\sqrt{\frac{p}{2}x_2-x_2^2}$$

$$+\frac{3}{32}p^2\left\{\arcsin\left(\frac{x_1-\frac{p}{4}}{\frac{p}{4}}\right)-\arcsin\left(\frac{x_2-\frac{p}{4}}{\frac{p}{4}}\right)\right\}.$$

Um die zwischen der Abscissenaxe der Curve und der Asymptote liegende Fläche zu berechnen, setze man $x_1=0$, $x_2=\frac{p}{2}$, worauf man gewinnt:

$$F=\frac{3}{32}p^2\{\arcsin(-1)-\arcsin(+1)\}$$

$$=\frac{3p^2\pi}{32},$$

woraus sich die zwischen der Curve und der Asymptote liegende Fläche ergiebt:

$$2F=\frac{3}{16}p^2\pi.$$

Für $\alpha=-\frac{p}{2}$, $\beta=0$ geht die Gleichung der Fusspunktcurve über in:

$$2y^2\left(x+\frac{p}{2}\right)+py^2+2x\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0,$$

woraus man gewinnt:

$$y=\sqrt{\frac{-2x\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}{2\left(x+\frac{p}{2}\right)+p}}=\left(x+\frac{p}{2}\right)\sqrt{\frac{-x}{x+p}}.$$

Da auch hier die Ordinate nur dann einen reellen Werth bewahrt, wenn die Abscisse negativ ist, so schreibe man $-x$ statt $+x$, so dass man erhält:

$$y=\left(\frac{p}{2}-x\right)\sqrt{\frac{x}{p-x}},$$

woraus folgt:

$$F=\int_{x_1}^{x_2}\frac{x\left(\frac{p}{2}-x\right)}{\sqrt{px-x^2}}\,dx.$$

Dies Integral lässt sich zerlegen, so dass man erhält:

$$\int y\,dx=\frac{p}{2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{px-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{px-x^2}}.$$

Es ist aber

$$\int\frac{x}{\sqrt{px-x^2}}\,dx=-\sqrt{px-x^2}+\frac{p}{4}\arcsin\left(\frac{x-\frac{p}{4}}{\frac{p}{4}}\right),$$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{px-x^2}}\,dx=-\frac{\frac{3}{4}p+x}{2}\sqrt{px-x^2}+\frac{3p^2}{32}\arcsin\left(\frac{x-\frac{p}{4}}{\frac{p}{4}}\right);$$

so dass man nach Substitution dieser. Ausdrücke erhält:

$$\int ydx = -\frac{p}{2}\sqrt{px-x^2} + \frac{p^2}{8}\arcsin\left(\frac{x-\frac{p}{4}}{\frac{p}{4}}\right) - \frac{{}^3\!/\!_4 p + x}{2}\sqrt{px-x^2}$$

$$+\frac{3}{32}p^2 \arcsin\left(\frac{x-\frac{p}{4}}{\frac{p}{4}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{px-x^2}\left(\frac{7}{4}p + x\right) + \frac{7}{32}p^2 \arcsin\left(\frac{x-\frac{p}{4}}{\frac{p}{4}}\right),$$

und wenn man zwischen den Grenzen x_1 und x_2 integrirt:

$$\int_{x_1}^{x_2} ydx = -\frac{1}{2}\sqrt{px_1-x_1^2}\left(\frac{7}{4}p + x_1\right) + \frac{1}{2}\sqrt{px_2-x_2^2}\left(\frac{7}{4}p + x_2\right)$$

$$+\frac{7}{32}p^2\left(\arcsin\frac{x_1-\frac{p}{4}}{\frac{p}{4}} - \arcsin\frac{x_2-\frac{p}{4}}{\frac{p}{4}}\right).$$

Da der Pol ausserhalb der Parabel liegt, so muss er, wie oben bewiesen wurde, ein Doppelpunkt der Curve sein. Der halbe Flächeninhalt des geschlossenen Theils der Curve wird mithin gewonnen, wenn man in obiger Formel setzt: $x_1=0$, $x_2=\frac{p}{2}$, so dass man erhält:

$$F = \frac{7}{32}p^2\{\arcsin(-1) - \arcsin(+1)\} + \frac{9}{8}p^2$$

$$= \frac{7}{32}p^2\pi + \frac{9}{8}p^2 = \frac{p^2}{8}\left(\frac{7}{4}\pi + 9\right),$$

mithin der gesammte Flächeninhalt:

$$2F = \frac{p^2}{4}\left(\frac{7}{4}\pi + 9\right).$$

Die Ellipse.

Die Gleichung der Ellipse aus dem Scheitel der grossen Axe ist:

$$b^2x^2+a^2y^2-2ab^2x=0,$$

woraus man erhält:

$$y=\frac{ab+a\sqrt{b^2-y^2}}{b}.$$

Setzt man $y=b\sin\varphi$, so wird $x=a+a\cos\varphi$, und wenn man differentiirt:

$$dx=-a\sin\varphi d\varphi,\quad dy=b\cos\varphi d\varphi,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi}.$$

Die Gleichung der Tangente geht nach gehöriger Substitution über in:

$$(\xi-a-a\cos\varphi)\frac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi}+(\eta-b\sin\varphi)=0,$$

die des Perpendikels in:

$$-(\eta-\beta)\frac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi}+(\xi-\alpha)=0,$$

oder wenn man beide mit $a\sin\varphi$ multiplicirt:

$$1)\qquad -b(\eta-\beta)\cos\varphi+a(\xi-\alpha)\cos\varphi=0,$$

$$2)\qquad a\eta\sin\varphi+b(\xi-a)\cos\varphi-ab=0.$$

Multiplicirt man die Gleichung 2) mit $\xi-\alpha$, die Gleichung 1) mit η und subtrahirt, so wird

$$-b\eta(\eta-\beta)\cos\varphi-b(\xi-\alpha)(\xi-a)\cos\varphi+ab(\xi-\alpha)=0$$

oder

$$3)\qquad \{\eta(\eta-\beta)+(\xi-\alpha)(\xi-a)\}\cos\varphi-a(\xi-\alpha)=0.$$

Multiplicirt man dagegen die Gleichung 1) mit $\xi-\alpha$, die Gleichung 2) mit $\eta-\beta$ und addirt, so ergiebt sich:

$$a(\xi-\alpha)(\xi-a)\sin\varphi+a\eta(\eta-\beta)\sin\varphi-ab(\eta-\beta)=0$$

oder

$$4)\qquad \{(\xi-\alpha)(\xi-a)+\eta(\eta-\beta)\}\sin\varphi-b(\eta-\beta)=0.$$

Aus den Gleichungen 3) und 4) erhält man:

$$\cos\varphi=\frac{a(\xi-\alpha)}{\eta(\eta-\beta)+(\xi-\alpha)(\xi-a)},$$

$$\sin\varphi=\frac{b(\eta-\beta)}{\eta(\eta-\beta)+(\xi-\alpha)(\xi-a)}.$$

Mittelst der Gleichung $\cos\varphi^2+\sin\varphi^2=1$ gewinnt man:

$$\frac{a^2(\xi-\alpha)^2+b^2(\eta-\beta)^2}{\{\eta(\eta-\beta)+(\xi-a)(\xi-\alpha)\}^2}=1$$

oder

$$a^2(\xi-\alpha)^2+b^2(\eta-\beta)^2=\{\eta(\eta-\beta)+(\xi-a)(\xi-\alpha)\}^2.$$

Die Fusspunktcurven der Ellipse werden daher durch eine Gleichung vom vierten Grade, ausgedrückt. Diese sind sämmtlich geschlossene Curven, da für keinen reellen Werth von x die Ordinate y unendlich wird, oder umgekehrt, daher auch niemals Asymptoten vorkommen.

Setzt man in der gefundenen Gleichung

$$\alpha=a-e,\quad \beta=0,$$

d. h. liegt der Pol in dem Brennpunkte der Ellipse, so erhält man eine Gleichung zweiten Grades. Es wird nemlich:

$$\{(\xi-\alpha+e)(\xi-a)+\eta^2\}^2=a^2(\xi-a+e)^2+b^2\eta^2.$$

Verlegt man die Coordinatenaxen den früheren parallel in den Brennpunkt, so ist zu substituiren:

$$\xi=x+a-e,\quad \eta=y;$$

worauf man erhält:

$$\{x(x-e)+y^2\}^2=a^2x^2+b^2y^2.$$

Löst man die Klammern auf, so wird

$$x^4+e^2x^2+y^4+2x^2y^2-2ex^3-2exy^2-a^2x^2-b^2y^2=0,$$

und wenn man für e^2 seinen Werth $e^2=a^2-b^2$ substituirt:

$$x^2(x^2+y^2)+y^2(x^2+y^2)-2ex(x^2+y^2)-b^2(x^2+y^2)=0,$$

woraus folgt:

$$x^2-2ex+y^2=b^2$$

oder

$$(x-e)^2+y^2=a^2.$$

Man erhält also die Gleichung eines Kreises, dessen Centrum der Mittelpunkt der Ellipse, dessen Radius die halbe grosse Axe ist.

Wird in der ursprünglichen Gleichung gesetzt $\alpha=0$, $\beta=0$, d. h. liegt der Pol im Scheitel der grossen Axe, so geht die Gleichung über in:

$$a^2x^2+b^2y^2=\{y^2+x(x-a)\}^2,$$

welche eine den Epicycloiden ähnliche Curve darstellt. Fragt man nach dem Flächeninhalt derselben, so wird es bequem sein, Polarcoordinaten einzuführen. Setzt man zu dem Ende

$$x=\varrho\cos\varphi,\quad y=\varrho\sin\varphi;$$

wo ϱ den vom Pol an irgend einen Punkt der Curve gezogenen Radius vector, φ dagegen den Winkel bezeichnet, den dieser mit der Abscissenaxe bildet, so geht die Gleichung über in:

$$a^2\varrho^2\cos\varphi^2+b^2\varrho^2\sin\varphi^2=(\varrho^2-a\varrho\cos\varphi)^2$$

oder

$$b^2\sin\varphi^2=\varrho^2-2a\varrho\cos\varphi.$$

Der Flächeninhalt eines von den beiden Rad. vect. ϱ_1 und ϱ_2 begrenzten Sectors wird bekanntlich ausgedrückt durch die Formel

$$F=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\varrho^2d\varphi.$$

Es muss daher ϱ als Function von φ dargestellt werden. Durch Auflösen jener Gleichung ergiebt sich

$$\varrho=a\cos\varphi+\sqrt{a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2}$$

und

$$\varrho^2=2a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2+2a\cos\varphi\sqrt{a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2},$$

daher

$$F=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(2a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2+2a\cos\varphi\sqrt{a^2\cos\varphi^2+b^2\sin\varphi^2})\,d\varphi$$

oder

$$F=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\{2a^2-(a^2+e^2)\sin\varphi^2+2a\cos\varphi\sqrt{a^2-e^2\sin\varphi^2}\}\,d\varphi,$$

welcher Ausdruck in die einzelnen Integrale zerfällt:

$$F=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}2a^2d\varphi-\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(a^2+e^2)\sin\varphi^2d\varphi$$
$$+a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos\varphi\sqrt{a^2-e^2\sin\varphi^2}\,d\varphi.$$

Es ist aber

$$\int 2a^2d\varphi=2a^2\varphi,$$

$$\int(a^2+e^2)\sin\varphi^2d\varphi=-(a^2+e^2)\left(\frac{1}{4}\sin 2\varphi-\frac{1}{2}\varphi\right).$$

Um das dritte Integral zu finden, setze man $\sin\varphi=z$, also $\cos\varphi d\varphi=dz$, so dass der Ausdruck übergeht in

$$a\int\sqrt{a^2-e^2z^2}\,dz \quad \text{oder} \quad \int\frac{a^3-ae^2z^2}{\sqrt{a^2-e^2z^2}}dz,$$

woraus man die beiden Integrale gewinnt:

$$a^3\int\frac{dz}{\sqrt{a^2-e^2z^2}}-ae^2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{a^2-e^2z^2}}.$$

Es ist aber

$$a^3\int\frac{dz}{\sqrt{a^2-e^2z^2}}=\frac{2a^3}{e}\arccos\left(-\frac{e^2z}{ae}\right),$$

und da $\cos(-\varphi)=\cos\varphi$ ist:

$$a^3\int\frac{dz}{\sqrt{a^2-e^2z^2}}=\frac{2a^3}{e}\arccos\left(\frac{ez}{a}\right).$$

Ferner ist

$$\int\frac{z^2dz}{\sqrt{a^2-e^2z^2}}=\frac{z\sqrt{a^2-e^2z^2}}{3e^2}-\frac{a^2}{2e^2}\int\frac{zdz}{\sqrt{a^2-e^2z^2}}$$

$$=\frac{1}{3e^2}\sqrt{a^2-e^2z^2}\left(z+\frac{a^2}{2e^2}\right).$$

Substituirt man auf gehörige Weise, so wird

$$a\int\cos\varphi\sqrt{a^2-e^2\sin\varphi^2}\,d\varphi=\frac{2a^3}{e}\arccos(\frac{e}{a}\sin\varphi)$$

$$-\frac{1}{3}a\sqrt{a^2-e^2\sin\varphi^2}\left(\sin\varphi+\frac{a^2}{2e^2}\right).$$

Daher gewinnt man endlich:

$$F=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\varrho^2d\varphi=a^2(\varphi_2-\varphi_1)+\frac{a^2+e^2}{8}(\sin2\varphi_2-\sin2\varphi_1)$$

$$-\frac{1}{4}(a^2+e^2)(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$-\frac{1}{3}a\sqrt{a^2-e^2\sin\varphi_2{}^2}\left(\sin\varphi_2+\frac{a^2}{2e^2}\right)$$

$$+\frac{1}{3}a\sqrt{a^2-e^2\sin\varphi_1{}^2}\left(\sin\varphi_1+\frac{a^2}{2e^2}\right)$$

$$+\frac{2a^3}{e}\{\arccos(\frac{e}{a}\sin\varphi_2)-\arccos(\frac{e}{a}\sin\varphi_1)\}.$$

Setzt man nun $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi$, so wird

$$F=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\varrho^2d\varphi=a^2\pi-\frac{1}{4}(a^2+e^2)\pi$$

$$=\frac{1}{4}\pi(3a^2-e^2).$$

Da dies die Hälfte des gesammten durch die Curve eingeschlossenen Flächenraumes ist, so wird dieser selbst:

$$2F=\frac{1}{2}\pi(3a^2-e^2).$$

Es sei zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Fusspunktcurven der Ellipse einen Doppel-Rückkehr- oder isolirten Punkt haben. Bildet man die partiellen Differentialquotienten aus der Gleichung

$$\{(x-a)(x-\alpha)+y(y-\beta)\}^2-a^2(x-\alpha)^2-b^2(y-\beta)^2=0,$$

so erhält man:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2\{(x-a)(x-\alpha)+y(y-\beta)\}(2x-a-\alpha)-2a^2(x-\alpha),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2\{(x-a)(x-\alpha)+y(y-\beta)\}(2y-\beta)-2b^2(y-\beta).$$

Diese partiellen Differentialquotienten verschwinden für $x=\alpha$, $y=\beta$; die abermalige partielle Differentiation liefert:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4\{(x-a)(x-\alpha)+y(y-\beta)\}+2(x-a-\alpha)^2-2a^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=2(2x-a-\alpha)(2y-\beta),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4\{(x-a)(x-\alpha)+y(y-\beta)\}+2(2y-\beta)^2-2b^2.$$

Für $x=\alpha$, $y=\beta$ gehen diese Differentialquotienten über in:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\alpha^2-4a\alpha,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2(\alpha-a)\beta,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2(\beta^2-b^2).$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

so erhält man

$$\alpha^2-2a\alpha+2(a-\alpha)\beta\frac{dy}{dx}+(\beta^2-b^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

woraus man gewinnt:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-2ab^2\alpha}-(\alpha-a)\beta}{\beta^2-b^2}.$$

Der Werth von $\frac{dy}{dx}$ hängt offenbar von der Wurzel ab; jenachdem die Grösse

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - 2ab^2\alpha$$

positiv, negativ, Null ist, giebt es zwei, keine, eine Tangente. Jene Grösse wird aber offenbar Null, wenn der Pol auf der Ellipse liegt, sie wird positiv, wenn der Pol ausserhalb, negativ, wenn er innerhalb der Ellipse sich befindet. Dies lässt sich ähnlich wie bei der Parabel beweisen. Der Pol liege ausserhalb der Ellipse. Man ziehe die Ordinate β, welche grösser wird als die zu der Abscisse gehörige Ordinate der Ellipse m; es sei also $\beta = m + \gamma$. Ferner wird die Gleichung stattfinden:

$$a^2m^2 + b^2\alpha^2 - 2ab^2\alpha = 0.$$

Nachdem der Werth für β substituirt ist, geht der Ausdruck

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - 2ab^2\alpha$$

über in

$$a^2m^2 + 2a^2m\gamma + a^2\gamma^2 + b^2\alpha^2 - 2ab^2\alpha$$

oder

$$2a^2m\gamma + a^2\gamma^2,$$

ist mithin positiv. Schneidet die Ordinate β die Ellipse gar nicht, so muss α entweder negativ oder grösser als $2a$ sein. In beiden Fällen bleibt der Ausdruck positiv.

Es liege der Pol innerhalb der Ellipse. Man ziehe wieder die Ordinate β und verlängere sie über den Pol hinaus bis zum Durchschnitt mit der Ellipse. Dann wird zu setzen sein

$$\beta = m - \gamma,$$

während

$$a^2m^2 + b^2\alpha^2 - 2b^2a\alpha = 0.$$

Substituirt man den Werth für β, so wird der fragliche Ausdruck übergehen in:

$$a^2(m^2 - 2m\gamma + \gamma^2) + b^2\alpha^2 - 2b^2a\alpha,$$

der sich mit Berücksichtigung obiger Gleichung verwandelt in

$$a^2(\gamma^2 - 2m\gamma)$$

und, da γ ein Theil von m ist, immer negativ bleibt.

Je nachdem daher der Pol ausserhalb, auf oder innerhalb der Ellipse liegt, ist er für die Fusspunktcurve ein Doppel-Rückkehr- oder isolirter Punkt.

Der Kreis.

Setzt man in der für die Fusspunktcurven der Ellipse gefundenen Gleichung $a=b=r$, so erhält man die Gleichung für die Fusspunktcurven des Kreises:

$$r^2\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\}=\{(x-r)(x-\alpha)+y(y-\beta)\}^2.$$

Setzt man hier $\alpha=r$, $\beta=0$, d. h. fällt der Pol in den Mittelpunkt des Kreises, so wird

$$r^2\{(x-r)^2+y^2\}=\{(x-r)^2+y^2\}^2,$$

woraus man

$$r^2=(x-r)^2+y^2,$$

die Gleichung des Kreises selbst, erhält. Setzt man $\alpha=\beta=0$, d. h. liegt der Pol auf der Peripherie des Kreises, so wird die Gleichung der Fusspunktcurve:

$$r^2(x^2+y^2)=\{x(x-r)+y^2\}^2,$$

welches die Gleichung der einfachsten Epicycloide, der Cardioide ist.

Um den Flächeninhalt dieser Curve zu bestimmen, ist es bequem, Polarcoordinaten einzuführen. Setzt man $y=\varrho\sin\varphi$, $x=\varrho\cos\varphi$, so geht die Gleichung über in:

$$r^2\varrho^2=(\varrho^2-r\varrho\cos\varphi)^2$$

oder

$$r^2\sin\varphi^2=\varrho^2-2r\varrho\cos\varphi,$$

woraus sich ergiebt:

$$\begin{aligned}\varrho&=r\cos\varphi+\sqrt{r^2\sin\varphi^2+r^2\cos\varphi^2}\\&=r+r\cos\varphi;\end{aligned}$$

mithin

$$\varrho^2=r^2+2r^2\cos\varphi+r^2\cos\varphi^2$$

Die Fläche wird daher ausgedrückt durch

$$F=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\varrho^2 d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}r^2 d\varphi+r^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos\varphi d\varphi$$

$$+\frac{1}{2}r^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos\varphi^2 d\varphi,$$

und wenn man die Integrationen ausführt:

$$F=\frac{1}{2}r^2(\varphi_2-\varphi_1)+r^2(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)$$

$$+\frac{1}{2}r^2\left\{\frac{1}{4}(\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1)+\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)\right\}.$$

Setzt man $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi$, so erhält man den halben Flächeninhalt der Curve ausgedrückt durch:

$$F=\frac{3}{4}r^2\pi,$$

mithin den gesammten Flächeninhalt:

$$2F=\frac{3}{2}r^2\pi.$$

Dasselbe gewinnt man aus der Formel jener oben betrachteten Fusspunktcurve der Ellipse, wenn man in derselben $e=0$ setzt.

Da man den Kreis ansehen kann als eine Ellipse mit der Excentricität 0, so gelten hier die für die Fusspunktcurven der Ellipse gefundenen Sätze: die Fusspunktcurven des Kreises sind geschlossene Curven, haben mithin niemals Asymptoten, der Pol ist entweder ein Doppel-Rückkehr- oder isolirter Punkt, jenachdem er ausserhalb, auf oder innerhalb der Peripherie des Kreises liegt.

Hyperbel.

Da man die Gleichung der Hyperbel aus der Ellipsengleichung erhält, wenn man statt b^2 setzt $-b^2$, und $-a$ statt a, so gewinnt man durch dieselbe Substitution die Gleichung für die Fusspunktcurven der Hyperbel aus der Gleichung für die Fusspunktcurven der Ellipse. Dieselbe wird:

$$a^2(\xi-\alpha)^2-b^2(\eta-\beta)^2=\{(\xi+a)(\xi-\alpha)+\eta(\eta-\beta)\}^2.$$

Setzt man $\beta=0$, $\alpha=a-e$, d. h. verlegt man den Pol in den Brennpunkt, so geht die Gleichung über in:

$$a^2(\xi-a+e)^2-b^2\eta^2=\{(\xi+a)(\xi-a+e)+\eta^2\}^2.$$

Verlegt man die Coordinatenaxen in den Brennpunkt, so wird zu setzen sein:

$$\xi=x+a-e,\quad \eta=y;$$

und man erhält:

$$a^2x^2-b^2y^2=\{(x+e)x+y^2\}^2,$$

und nach Auflösung der Klammern:

$$x^4+2ex^3+e^2x^2+y^4+2x^2y^2+2exy^2-a^2x^2+b^2y^2=0.$$

Substituirt man $e^2=a^2+b^2$, so wird

$$x^4+2ex^3+b^2x^2+y^4+2x^2y^2+2exy^2+b^2y^2=0$$

oder

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2+2ex+b^2)=0,$$

woraus man gewinnt

$$x^2+y^2+2ex+b^2=0,$$

und endlich

$$(x-e)^2+y^2=b^2+e^2=a^2,$$

die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Hyperbel, dessen Radius die halbe grosse Axe ist.

Setzt man $\beta=0$, $\alpha=-a$, d. h. liegt der Pol im Mittelpunkt der Hyperbel, so erhält man die Gleichung

$$a^2(\xi+a)^2-b^2\eta^2=\{(\xi+a)^2+\eta^2\}^2,$$

und wenn man die Coordinatenaxen in den Mittelpunkt verlegt, so dass zu setzen ist

$$\xi = x - a, \quad \eta = y;$$

so erhält man

$$a^2x^2 - b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

Für die gleichseitige Hyperbel, für welche $a=b$ ist, geht diese Gleichung über in

$$a^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2,$$

die Gleichung einer Lemniscate.

Da die allgemeine Gleichung aus der Gleichung für die Fusspunktcurve der Ellipse gewonnen war, so gelten auch hier die über die Fusspunktcurven der Ellipse gefundenen Sätze.

Nachschrift des Herausgebers.

Der Herr Verfasser des obigen Aufsatzes schreibt mir, dass sich ein Aufsatz über denselben Gegenstand von Herrn Wolf in Bern im 20sten Bande des Crelle'schen Journals befinde, und dass die von ihm gefundenen Resultate von denen des Herrn Wolf nicht verschieden seien, ja dass selbst der von Herrn Wolf eingeschlagene Weg der kürzere sei. Wenn dies nun aber auch der Fall ist, so scheint mir doch, dass der obige Aufsatz, abgesehen von dem unbestreitbaren Verdienst des Aufsatzes des Herrn Wolf, ein selbstständiges Verdienst besitze, und Anfängern eine gute Uebung in der Anwendung der allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie darbieten könne. Daher habe ich von dem von dem Herrn Verfasser mir eingeräumten Rechte, nach Gutdünken über seinen Aufsatz verfügen zu können, Gebrauch gemacht, und denselben in dem Archive abdrucken lassen.

X.

Drei geometrische Theoreme.

Von

Herrn Doctor Beer

zu Bonn.

Bei einer dioptrischen Berechnung bin ich zu drei interessanten geometrischen Sätzen gelangt, welche ich mir in der Unterstellung, dass sie neu sind, hier mitzutheilen erlaube, wenngleich ihre Ableitung sehr einfach ist.

1.

Theorém. Legt man an eine Curve des zweiten Grades und eine Fläche des zweiten Grades, die concentrisch sind, Tangentialebenen, so liegen die Berührungspunkte auf einem den beiden Oertern concentrischen Kegel des zweiten Grades.

Beweis. Bei orthogonalen Coordinaten sei die Gleichung eines centrischen Kegelschnittes:

$$C \equiv \alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0,$$

und die Gleichung einer mit ihm concentrischen Fläche des zweiten Grades:

$$F \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz - 1 = 0.$$

In dem Punkte (x', y', z') lege man an letztere eine Tangentialebene; ihre Gleichung wird:

$$\frac{dF}{dx'}x+\frac{dF}{dy'}y+\frac{dF}{dz'}z-\frac{dF}{dx'}x'-\frac{dF}{dy'}y'-\frac{dF}{dz'}z'=0.$$

Und sie schneidet die Ebene des Kegelschnittes C in der Geraden:

$$G\equiv\frac{dF}{dx'}x+\frac{dF}{dy'}y-2=0,$$

wofür wir setzen wollen:

$$px+qy-2=0.$$

Für die Coordinaten der Durchschnitte von G und C hat man:

$$x^2(\alpha q^2+\beta p^2)-(4\beta p)x+(4\beta-q^2)=0,$$

wofür wir setzen:

$$Ax^2+Bx+C=0.$$

Sollen nun G und C sich berühren, so müssen die Wurzeln der letztgefundenen Gleichung einander gleich werden, d. h. es muss sein:

$$B^2-4AC=0,$$

oder:

$$\alpha q^2+\beta p^2-4\alpha\beta=0,$$

oder:

$$\alpha(by'+dx'+fz')^2+\beta(ax'+dy'+ez')^2-\alpha\beta=0,$$

oder endlich:

$$F'\equiv\frac{(by'+dx'+fz')^2}{\beta}+\frac{(ax'+dy'+ez')^2}{\alpha}-1=0.$$

Diese Gleichung stellt eine den Oertern C und F concentrische Fläche des zweiten Grades dar, die durch jene Oerter vollständig bestimmt wird. Ihr Durchschnitt mit F ist der Ort aller Berührungspunkte der an C und F gelegten Tangentialebenen. Und diese Punkte liegen hiernach auch auf dem mit C und F concentrischen Conus zweiten Grades, der folgende Gleichung hat:

$$F-F'=0.$$

Hierin liegt aber der Beweis unseres Satzes.

2.

Theorem. **Beschreibt man um die Tangenten eines centrischen Kegelschnittes als Axen Rotationscylinder von demselben Radius und legt durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes an die Cylinder Tangentialebenen, so umhüllen diese einen Kegel des zweiten Grades, so wie auch die im Mittelpunkte auf die Tangentialebenen errichteten Normalen einen Kegelmantel, den Supplementskegel des erst erwähnten, bilden.**

Beweis. Die Gleichung des centrischen Kegelschnittes sei:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1.$$

In dem Punkte $(x', y', 0)$ lege man eine Tangente an ihn; sie hat die Gleichung:

$$\alpha x x' + \beta y y' = 1.$$

Bedeutet nun v den Winkel zwischen der Abscissenaxe und dem aus dem Centrum auf die Tangente herabgelassenen Perpendikel, sowie n die Länge des letzteren, so hat man:

$$x' = \frac{\cos v}{\alpha n}, \quad y' = \frac{\sin v}{\beta n}.$$

Folglich ist auch:

$$\frac{\cos v^2}{\alpha} + \frac{\sin v^2}{\beta} = n^2.$$

Um unsere Tangente werde nun ein Rotationscylinder gelegt, für dessen Radius wir der Einfachheit wegen die Längeneinheit nehmen wollen. Die an diesen Cylinder durch den Mittelpunkt der Curve gelegte Berührungs-Ebene schliesse mit der xy-Ebene den Winkel i ein; denselben Winkel bildet dann auch das im Centrum auf sie errichtete Perpendikel. Ein Punkt dieses Perpendikels habe die Coordinaten x_1, y_1, z_1 und seine Entfernung vom Centrum sei r; dann ist:

$$x_1 = r \sin i \cos v, \quad y_1 = -r \sin i \cos v, \quad z_1 = r \cos i.$$

Nun ist aber:

$$n \sin i = 1,$$

wir haben also auch:

$$x_1^2 = \frac{r^2}{n^2}\cos v^2, \quad y_1^2 = \frac{r^2}{n^2}\sin v^2.$$

Hieraus und aus der oben für v, n, α und β gefundenen Relation leitet man ab:

$$\frac{x_1^2}{\alpha} + \frac{y_1^2}{\beta} = r^2.$$

Durch den Punkt (x_1, y_1, z_1) legen wir eine Ebene E mit der xy-Ebene parallel; ihr Abstand von der letzteren sei d; so ist:

$$r^2 = d^2 + x_1^2 + y_1^2.$$

Sonach ist:

$$x_1^2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + y_1^2\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = d^2.$$

Diese Gleichung gilt für die in der Ebene E gelegenen Punkte aller Normalen der erwähnten Tangentialebenen. Jene Normalen bilden also einen Conus des zweiten Grades; seine Hauptaxe steht auf dem Kegelschnitte senkrecht, seine Nebenaxen fallen mit den Axen des Kegelschnittes zusammen. Weitere Consequenzen liegen nahe.

3.

Theorem. **Legt man in den Punkten der Durchschnittslinie zweier Flächen des zweiten Grades mit demselben Mittelpunkte an die eine und andere von ihnen Tangentialebenen, so bilden die vom gemeinsamen Mittelpunkte auf diese Ebenen herabgelassenen Perpendikel zwei Kegel des zweiten Grades.**

Beweis. Die Gleichungen der Flächen seien:

$$F_1 = 0 \quad \text{und} \quad F_2 = 0.$$

Für einen Punkt (x', y', z') der Durchschnittslinie hat man also:

$$F_1' - F_2' \equiv K' = 0,$$

und K' ist eine homogene Function vom zweiten Grade, wenn wiederum unterstellt wird, dass das Centrum der betrachteten Oerter der Anfangspunkt der Coordinaten sei. Lassen wir von dem letzteren ein Perpendikel auf die Ebene herab, welche eine der Flächen, z. B. F_1, in dem Punkte (x', y', z') berührt, so hat man für die Gleichungen dieses Perpendikels:

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{dF_1'}{dx'}}{\frac{dF_1'}{dy'}},\quad \frac{z}{y}=\frac{\frac{dF_1'}{dz'}}{\frac{dF_1'}{dy'}}.$$

Die hier rechts stehenden Ausdrücke sind gleichnamige Quotienten aus homogenen linearen Functionen von x', y' und z'. Entwickeln wir daher aus den letzten Gleichungen die Verhältnisse $\frac{x'}{y'}$ und $\frac{z'}{y'}$, so finden wir dafür gleichnamige Quotienten aus homogenen linearen Functionen von x, y und z. Ihre Substitution in die Gleichung $K'=0$ liefert folglich eine homogene Gleichung des zweiten Grades mit den Variabeln x, y und z, woraus dann folgt, dass die Perpendikel der an die Fläche F_1 gelegten Berührungsebenen einen Kegel des zweiten Grades bilden. Gleiches gilt von F_2 und überhaupt für alle Flächen des zweiten Grades, die durch die Durchschnittslinie von F_1 und F_2 gehen, und deren allgemeine Gleichung $F_1+\mu F_2=0$ ist.

Aus den mitgetheilten drei Problemen leitet sich der folgende bemerkenswerthe dioptrische Lehrsatz ab:

Beschreibt ein Lichtstrahl, der auf eine optisch einaxige, doppeltbrechende Krystallplatte trifft, um das Einfallsloth als Axe einen Kegel des zweiten Grades, so beschreiben der ordentlich und ausserordentlich gebrochene Strahl, sowie die Normalen der ordentlich und ausserordentlich gebrochenen Wellen, ebenfalls einen Kegel des zweiten Grades.

XI.

Ueber die Quadratur elliptischer Sectoren.

Fortsetzung der Abhandlung Theil XVII. Nr. XI.

Von

dem Herausgeber.

Ausser den in der oben genannten Abhandlung von mir entwickelten Ausdrücken für den Flächeninhalt elliptischer Sectoren giebt es noch einen anderen sehr bemerkenswerthen Ausdruck für den Flächeninhalt eines solchen Sectors, der von Lambert gefunden worden ist, und in naher Beziehung steht zu dem in dem Aufsatze Theil XVI. Nr. XXXIX. entwickelten merkwürdigen Ausdrucke für den Flächeninhalt eines parabolischen Sectors. Bei Lambert erscheint der in Rede stehende Ausdruck für den Flächeninhalt eines elliptischen Sectors als ein Ausdruck für die Zeit bei der Bewegung der Planeten um die Sonne, weshalb dieser Ausdruck bis jetzt auch eigentlich nur in der Astronomie bekannt ist, ohne in die Geometrie, wohin er doch eigentlich gehört, Eingang gefunden zu haben. Ich will daher in diesem Aufsatze versuchen, den Lambert'schen Ausdruck für den Flächeninhalt eines elliptischen Sectors bloss in geometrischem Sinne aufzufassen, und in diesem Sinne einen Beweis für denselben zu geben, wobei ich mich an die in dem Aufsatze Thl. XVII. Nr. XI. entwickelten Ausdrücke anschliessen werde. Vielleicht wird dadurch bewirkt, dass der in Rede stehende Ausdruck, wie er so sehr verdient, mehr Eingang in die Geometrie findet, als dies bis jetzt der Fall zu sein scheint.

In Taf. II. Fig. III*. sei über der Hauptaxe AB eine Ellipse beschrieben, deren grosse und kleine Halbaxe wir, wie gewöhnlich, durch a und b bezeichnen wollen. Der Mittelpunkt dieser Ellipse sei C, und F sei ihr einer Brennpunkt. F und C wollen wir als die Anfangspunkte zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme der xy und x_1y_1 annehmen; die positiven Theile der Axen der x und x_1 seien respective FA und CA; die positiven Theile der Axen der y und y_1 sollen von AB an nach oben hin genommen werden. Ueber AB als Durchmesser denken wir uns einen Kreis beschrieben, und wollen nun in der Ellipse und in diesem Kreise zwei Punkte wie P und P_1 in der Figur annehmen, so nämlich, dass diese Punkte auf derselben Seite von AB liegen, und die durch sie bestimmte gerade Linie auf AB senkrecht steht, so dass ihnen also in den beiden obigen Coordinatensystemen dieselben Abscissen entsprechen. Die Coordinaten des Punktes P in dem Coordinatensysteme mit dem Anfangspunkte F bezeichnen wir durch x, y; die Coordinaten des Punktes P_1 in dem Coordinatensysteme mit dem Anfangspunkte C mögen durch x_1, y_1 bezeichnet werden. Ziehen wir nun noch die Linien $FP = r$ und $CP_1 = a$, so soll der von der Linie FP mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossene Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch von 0 bis 360° zählt, durch φ bezeichnet werden; und eben so wollen wir den von der Linie CP_1 mit dem positiven Theile der Axe der x_1 eingeschlossenen Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x_1 an durch den rechten Winkel (x_1y_1) hindurch von 0 bis 360° zählt, durch ω bezeichnen.

Setzen wir nun wie gewöhnlich

$$e = \sqrt{a^2 - b^2},$$

und bezeichnen den Flächeninhalt des seine Spitze in F habenden, dem Winkel φ entsprechenden elliptischen Sectors durch S; so ist, wie wir in der Abhandlung Theil XVII. Nr. XI. gefunden haben:

$$1)\qquad S = \frac{1}{2}ab\left\{\operatorname{Arccos}\frac{a-r}{e} - \frac{e}{a}\sin\operatorname{Arccos}\frac{a-r}{e}\right\},$$

mit den folgenden Bestimmungen:

Wenn die Grösse

$$\frac{a-r}{e}$$

positiv ist, so muss man

$$0 < \operatorname{Arccos}\frac{a-r}{e} < \frac{1}{2}\pi \quad \text{oder} \quad \frac{3}{2}\pi < \operatorname{Arc\,cos}\frac{a-r}{e} < 2\pi$$

nehmen, jenachdem

$$0<\varphi<180^0 \quad \text{oder} \quad 180^0<\varphi<360^0$$

ist; wenn dagegen die Grösse

$$\frac{a-r}{e}$$

negativ ist, so muss man

$$\frac{1}{2}\pi<\text{Arccos}\,\frac{a-r}{e}<\pi \quad \text{oder} \quad \pi<\text{Arccos}\,\frac{a-r}{e}<\frac{3}{2}\pi$$

nehmen, jenachdem

$$0<\varphi<180^0 \quad \text{oder} \quad 180^0<\varphi<360^0$$

ist.

Offenbar ist in völliger Allgemeinheit

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi;\quad x_1=a\cos\omega,\ y_1=a\sin\omega;$$

und nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten und einem bekannten Satze von der Ellipse ist:

$$x_1=e+x,\quad y_1=\frac{a}{b}y.$$

Also ist

$$2)\qquad a\cos\omega=e+r\cos\varphi,\quad a\sin\omega=\frac{ar}{b}\sin\varphi;$$

woraus umgekehrt

$$3)\qquad \cos\varphi=\frac{a\cos\omega-e}{r},\qquad \sin\varphi=\frac{b}{r}\sin\omega$$

folgt. Quadrirt man diese Gleichungen, und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung

$$(a\cos\omega-e)^2+b^2\sin\omega^2=r^2$$

oder

$$(a^2-b^2)\cos\omega^2-2ae\cos\omega=r^2-(b^2+e^2),$$

d. i.

$$e^2\cos\omega^2-2ae\cos\omega=r^2-a^2.$$

Löst man nun diese quadratische Gleichung in Bezug auf $e\cos\omega$ als unbekannte Grösse auf, so ergiebt sich

$$e\cos\omega = a \pm r \text{ oder } \cos\omega = \frac{a \pm r}{e},$$

wo aber das obere Zeichen offenbar unzulässig ist, weil immer $a > e$, also um so mehr $a + r > e$, folglich

$$\frac{a+r}{e} > 1$$

ist. Daher ist in völliger Allgemeinheit:

$$4) \quad \cos\omega = \frac{a-r}{e}.$$

Bezeichnen wir von jetzt an durch ω den Kreisbogen in einem mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreise, welcher den bisher durch ω bezeichneten Winkel misst, und überlegen, dass offenbar immer gleichzeitig

$$0 < \varphi < 180^0, \quad 0 < \omega < \pi$$

und

$$180^0 < \varphi < 360^0, \quad \pi < \omega < 2\pi$$

ist, so wird leicht aus dem Vorhergehenden erhellen, dass man in der Formel 1) in völliger Allgemeinheit

$$\mathrm{Arccos}\frac{a-r}{e} = \omega$$

zu setzen hat, und daher aus 1) die folgende völlig allgemein gültige Formel erhält:

$$5) \quad S = \frac{1}{2}ab\left(\omega - \frac{e}{a}\sin\omega\right).$$

Ist jetzt r_1 ein anderer Radius Vector der Ellipse, welchem an dem Mittelpunkte C der durch den Bogen ω_1 gemessene Winkel entspricht, und bezeichnen wir den diesem Radius Vector entsprechenden, wie vorher genommenen elliptischen Sector durch S_1, so ist auf ganz ähnliche Art wie vorher:

$$6) \quad S_1 = \frac{1}{2}ab\left(\omega_1 - \frac{e}{a}\sin\omega_1\right).$$

Bezeichnen wir aber den dem Radius Vector r_1 am Brennpunkte F entsprechenden Winkel durch φ_1, und unter der Voraussetzung, dass $\varphi_1 > \varphi$ ist, den dem Winkel $\varphi_1 - \varphi$ am Brennpunkte F entsprechenden elliptischen Sector, welcher von den Vectoren r und r_1 und dem, dem Winkel $\varphi_1-\varphi$ am Brennpunkte entsprechenden elliptischen Bogen begränzt wird, durch $\mathfrak{S}$; so ist offenbar $\mathfrak{S}=S_1-S$, also nach 5) und 6):

$$7)\quad \mathfrak{S}=\frac{1}{2}ab\{\omega_1-\omega-\frac{e}{a}(\sin\omega_1-\sin\omega)\}.$$

Die Sehne der Ellipse, welche die Endpunkte der Vectoren r und r_1 mit einander verbindet, sei s; so erhellet leicht, dass in völliger Allgemeinheit

$$8)\quad s^2=r^2+r_1^2-2rr_1\cos(\varphi_1-\varphi),$$

also, wie man leicht findet:

$$9)\quad (r+r_1)^2-s^2=4rr_1\cos\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi)^2$$

ist.

Nach 2) ist:

$$r\cos\varphi=a\cos\omega-e,\quad r\sin\varphi=b\sin\omega;$$

$$r_1\cos\varphi_1=a\cos\omega_1-e,\quad r_1\sin\varphi_1=b\sin\omega_1;$$

also

$$rr_1\cos(\varphi-\varphi_1)=(a\cos\omega-e)(a\cos\omega_1-e)+bb\sin\omega\sin\omega_1.$$

Nach 4) ist

$$r=a-e\cos\omega,\quad r_1=a-e\cos\omega_1;$$

also

$$rr_1=(a-e\cos\omega)(a-e\cos\omega_1).$$

Folglich ist

$$2rr_1\cos\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi)^2=rr_1\{1+\cos(\varphi_1-\varphi)\}$$

$$\begin{aligned}
= &\ (a-e\cos\omega)(a-e\cos\omega_1)\\
&+(a\cos\omega-e)(a\cos\omega_1-e)+bb\sin\omega\sin\omega_1\\
= &\ aa+ee\cos\omega\cos\omega_1-ae(\cos\omega+\cos\omega_1)\\
&+aa\cos\omega\cos\omega_1+ee-ae(\cos\omega+\cos\omega_1)\\
&+aa\sin\omega\sin\omega_1-ee\sin\omega\sin\omega_1\\
= &\ aa\{1+\cos(\omega_1-\omega)\}+ee\{1+\cos(\omega_1+\omega)\}-2ae(\cos\omega+\cos\omega_1)
\end{aligned}$$

$$= 2\left\{\begin{array}{l} aa\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)^2+ee\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)^2 \\ \quad -2ae\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega) \end{array}\right\},$$

also

$$rr\cos\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi)^2=\{a\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)-e\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)\}^2.$$

Folglich ist nach 9):

$$(r+r_1)^2-s^2=4\{a\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)-e\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)\}^2;$$

und wenn wir nun der Kürze wegen

$$10)\quad r+r_1+s=2p,\quad r+r_1-s=2q$$

setzen, so ist:

$$11)\quad pq=\{a\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)-e\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)\}^2.$$

Ferner ist nach 10)

$$p+q=r+r_1,$$

also, weil nach 4)

$$r=a-e\cos\omega,\quad r_1=a-e\cos\omega_1$$

ist:

$$p+q=2a-e(\cos\omega+\cos\omega_1)$$

oder

$$p+q=2a-2e\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega),$$

und folglich

$$4a^2-2a(p+q)=4ae\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega).$$

Addirt man nun diese Gleichung zu der Gleichung 11), so erhält man

$$4a^2-2a(p+q)+pq$$
$$=\{a\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)+e\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)\}^2,$$

d. i.

$$12)\quad (2a-p)(2a-q)=\{a\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)+e\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)\}^2.$$

Daher haben wir jetzt nach 11) und 12) die beiden folgenden Gleichungen:

$$13)\quad \begin{cases} pq=\{a\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)-e\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)\}^2, \\ (2a-p)(2a-q)=\{a\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)+e\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)\}^2; \end{cases}$$

oder eleganter:

$$14)\quad \begin{cases} \left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)=\{\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)-\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)\}^2, \\ \left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)=\{\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)+\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)\}^2. \end{cases}$$

Multipliciren wir diese beiden Gleichungen mit einander, so erhalten wir die Gleichung:

$$15)\quad \left\{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2\right\}$$
$$=\{\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)^2-\frac{e^2}{a^2}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)^2\}^2.$$

Aus dieser Gleichung erhellet, dass das Product

$$\left\{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2\right\}$$

stets eine positive Gröse, und daher immer zugleich

$$\left(\frac{a-p}{a}\right)^2>1,\quad \left(\frac{a-q}{a}\right)^2>1$$

oder

$$\left(\frac{a-p}{a}\right)^2<1, \quad \left(\frac{a-q}{a}\right)^2<1$$

ist. Wäre aber

$$\left(\frac{a-p}{a}\right)^2>1, \quad \left(\frac{a-q}{a}\right)^2>1;$$

so wäre entweder $\frac{a-q}{a}>1$ oder $\frac{q-a}{a}>1$. Im ersten Falle wäre

$$a-q>a, \quad q<0$$

was ungereimt ist, weil nach dem Obigen $2q=r+r_1-s$, und immer $r+r_1>s$ ist. Im zweiten Falle wäre

$$q-a>a, \quad q>2a$$

was wieder ungereimt ist, weil immer $r<2a$, $r_1<2a$, also $r+r_1<4a$, folglich um so mehr $r+r_1-s<4a$, also $2q<4a$, d. i. $q<2a$ ist. Daher kann nicht

$$\left(\frac{a-p}{a}\right)^2>1, \quad \left(\frac{a-q}{a}\right)^2>1$$

sein, und es ist also nach dem Obigen immer

$$\left(\frac{a-p}{a}\right)^2<1, \quad \left(\frac{a-q}{a}\right)^2<1;$$

d. h. die absoluten Werthe der Brüche

$$\frac{a-p}{a} \quad \text{und} \quad \frac{a-q}{a}$$

sind immer kleiner als die Einheit.

Weil nach der Voraussetzung $\varphi_1>\varphi$ ist, so ist, wie aus einer einfachen Betrachtung der Figur auf der Stelle erhellet, auch immer $\omega_1>\omega$, und die Differenz $\omega_1-\omega$, so wie natürlich auch die Summe $\omega_1+\omega$, ist daher immer eine positive Grösse.

Weil ferner

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)^2-\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)^2$$

$$=\{\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)-\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)\}\{\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)+\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)\}$$

$$=2\sin\frac{1}{2}\omega\sin\frac{1}{2}\omega_1.2\cos\frac{1}{2}\omega\cos\frac{1}{2}\omega_1=\sin\omega\sin\omega_1$$

ist, so ist die Differenz

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)^2-\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)^2$$

positiv oder negativ, also

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)^2>\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)^2 \text{ oder } \cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)^2<\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)^2,$$

jenachdem $\sin\omega$ und $\sin\omega_1$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, d. h. jenachdem die beiden Vectoren r und r_1 auf einer und derselben oder auf verschiedenen Seiten der Hauptaxe der Ellipse liegen.

Nehmen wir also jetzt an, dass die beiden Vectoren r und r_1 auf derselben Seite der Hauptaxe der Ellipse liegen, so ist den absoluten Werthen nach

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)>\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega).$$

Zugleich erhellet aber sehr leicht, dass in diesem Falle immer

$$\omega_1-\omega<\pi,\quad \frac{1}{2}(\omega_1-\omega)<\frac{1}{2}\pi$$

also $\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)$ positiv ist. Weil nun $a>e$ ist, so ist den absoluten Werthen nach auch

$$a\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)>e\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

oder

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)>\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

und die erste dieser beiden Grössen ist positiv. Also sind offenbar die Grössen

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)-\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega),$$

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)+\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

beide positiv, und nach 14) ist folglich:

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)-\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=\sqrt{\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)},$$

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)+\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=\sqrt{\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)};$$

woraus sich

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)}\right\},$$

$$\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)}-\sqrt{\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)}\right\}$$

ergiebt.

Weil bekanntlich

$$2\cos(\omega_1-\omega)=4\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)^2-2$$

ist, so erhält man aus der ersten der beiden vorstehenden Gleichungen:

$$2\cos(\omega_1-\omega)=\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)+\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)-2$$
$$+2\sqrt{\left\{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2\right\}},$$

woraus sich leicht

$$\cos(\omega_1-\omega)=\frac{a-p}{a}\cdot\frac{a-q}{a}+\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2}$$

ergiebt.

Weil nach dem Obigen die absoluten Werthe der Brüche

$$\frac{a-p}{a} \text{ und } \frac{a-q}{a}$$

kleiner als die Einheit sind, so ist es verstattet

$$16)\quad \cos u=\frac{a-p}{a},\quad \cos v=\frac{a-q}{a}$$

zu setzen, und zugleich ist es immer möglich, u und v so zu nehmen, dass

$$0<u<\pi,\quad 0<v<\pi$$

ist. Dann ist

$$17)\quad \sin u=\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2},\quad \sin v=\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2};$$

also nach dem Obigen

$$\cos(\omega_1-\omega)=\cos u\cos v+\sin u\sin v,$$

d. i.

$$18)\quad \cos(\omega_1-\omega)=\cos(u-v).$$

Nach 10) ist

$$r+r_1+s=2p,\quad r+r_1-s=2q;$$

also $p>q$, folglich

$$\frac{a-p}{a}<\frac{a-q}{a},$$

d. i. $\cos u<\cos v$; und weil nun

$$0<u<\pi,\quad 0<v<\pi$$

ist, so ist $u>v$, also $u-v$, eben so wie $\omega_1-\omega$, positiv. Deshalb ergiebt sich aus der Gleichung 18), weil $\omega_1-\omega$ und $u-v$ auch beide zwischen 0 und π liegen:

$$\omega_1-\omega=u-v.$$

Weil

$$\sin\omega_1-\sin\omega=2\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

ist, so ist

$$\frac{e}{a}(\sin\omega_1-\sin\omega)=\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)\,.\,2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega),$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{e}{a}(\sin\omega_1-\sin\omega)=\sin\frac{1}{2}(u-v)\,.\,2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega).$$

Nun ist aber

$$\sin\frac{1}{2}u=\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)\right\}},$$

$$\cos\frac{1}{2}u=\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{a-p}{a}\right)\right\}};$$

$$\sin\frac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1-\cos v}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)\right\}},$$

$$\cos\frac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1+\cos v}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{a-q}{a}\right)\right\}};$$

also

$$\sin\frac{1}{2}(u-v)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)}-\sqrt{\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)}\right\};$$

und nach dem Obigen ist:

$$2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

$$=\sqrt{\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)}-\sqrt{\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)}.$$

Multiplicirt man nun, so erhält man:

$$\sin\frac{1}{2}(u-v).2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a-q}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{a-q}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2}$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2},$$

also:

$$\sin\frac{1}{2}(u-v).2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=\sin u-\sin v,$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\frac{e}{a}(\sin\omega_1-\sin\omega)=\sin u-\sin v.$$

Weil nun auch $\omega_1-\omega=u-v$ war, so ist nach 7):

$$19)\quad S=\frac{1}{2}ab\{u-v-(\sin u-\sin v)\}.$$

Will man den Inhalt E der ganzen Ellipse haben, so muss man in dieser Formel

$$r+r_1=2a,\quad s=2a$$

setzen, was $p=2a$, $q=0$ giebt; also ist

$$\cos u=\frac{a-p}{a}=-1,\qquad \cos v=\frac{a-q}{a}=+1;$$

folglich

$$u=\pi,\quad v=0;$$

daher nach 19):

$$\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}ab\pi,$$

also

$$20)\qquad E = ab\pi,$$

wie bekannt.

Nach 19) und 20) ist

$$S:E = u - v - (\sin u - \sin v) : 2\pi.$$

Weil nun u und v mittelst der Formeln 10) und 16) bloss aus a, $r+r_1$, s berechnet werden können, ohne b oder e zu kennen, so kann man auch das Verhältniss $S:E$ bloss aus der halben Hauptaxe a, der Summe $r+r_1$ der beiden Vectoren r und r_1, und der Sehne s berechnen, ohne dass man die halbe Nebenaxe b oder die Excentricität e zu kennen braucht.

Wenn die beiden Vectoren r und r_1 auf verschiedenen Seiten der Hauptaxe der Ellipse liegen, so ist den absoluten Werthen nach

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) < \cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega).$$

Weil in diesem Falle

$$0 < \omega < \pi, \quad \pi < \omega_1 < 2\pi$$

ist, so ist

$$\pi < \omega_1 + \omega < 3\pi, \quad \frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) < \frac{3}{2}\pi;$$

also $\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$ stets negativ.

Wir wollen nun zuerst annehmen, dass

$$0 < \omega_1 - \omega < \pi, \quad 0 < \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) < \frac{1}{2}\pi;$$

also $\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega)$ positiv sei.

Ist dann den absoluten Werthen nach

$$a\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) > e\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

oder

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) > \frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega),$$

so bleibt offenbar Alles wie in dem vorher betrachteten Falle, wenn die beiden Vectoren auf derselben Seite der Hauptaxe der Ellipse liegen, und eine neue Entwickelung der betreffenden Formeln ist daher nicht nöthig.

Wenn aber den absoluten Werthen nach

$$a\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega) < e\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

oder

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega) < \frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

ist; so ist von den beiden Grössen

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)-\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega),$$

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)+\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

die erste positiv, die zweite negativ. Also ist nach 14):

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)-\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=\sqrt{\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)},$$

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)+\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=-\sqrt{\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)};$$

woraus sich

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)}-\sqrt{\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)}\right\},$$

$$\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)}\right\}$$

ergiebt.

Weil bekanntlich

$$2\cos(\omega_1-\omega)=4\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)^2-2$$

ist, so erhält man aus der ersten der beiden vorstehenden Gleichungen:

$$2\cos(\omega_1-\omega)=\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)+\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)-2$$
$$-2\sqrt{\left\{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2\right\}},$$

woraus sich leicht

$$\cos(\omega_1-\omega)=\frac{a-p}{a}\cdot\frac{a-q}{a}-\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2}$$

ergiebt.

Weil nach dem Obigen die absoluten Werthe der Brüche

$$\frac{a-p}{a} \text{ und } \frac{a-q}{a}$$

kleiner als die Einheit sind, so ist es verstattet

$$21)\quad \cos u=\frac{a-p}{a},\quad \cos v=\frac{a-q}{a}$$

zu setzen, und zugleich ist es immer möglich, u und v so zu nehmen, dass

$$0<u<\pi,\quad 0<v<\pi$$

ist. Dann ist

$$22)\quad \sin u=\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2},\quad \sin v=\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2};$$

also nach dem Obigen

$$\cos(\omega_1-\omega)=\cos u\cos v-\sin u\sin v,$$

d. i.

$$23)\quad \cos(\omega_1-\omega)=\cos(u+v).$$

Hieraus ergiebt sich

$$\omega_1-\omega=u+v \quad\text{oder}\quad \omega_1-\omega=2\pi-(u+v),$$

jenachdem

$$0 < u + v < \pi \quad \text{oder} \quad \pi < u + v < 2\pi$$

ist.

Weil

$$\sin\omega_1 - \sin\omega = 2\sin\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega)\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

ist, so ist

$$\frac{e}{a}(\sin\omega_1 - \sin\omega) = \sin\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega).2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega),$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{e}{a}(\sin\omega_1 - \sin\omega) = \sin\frac{1}{2}(u + v).2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega).$$

Nun ist aber

$$\sin\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)\right\}},$$

$$\cos\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{a-p}{a}\right)\right\}};$$

$$\sin\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)\right\}},$$

$$\cos\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1 + \cos v}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{a-q}{a}\right)\right\}};$$

also

$$\sin\frac{1}{2}(u + v)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right)} + \sqrt{\left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right)}\right\};$$

und nach dem Obigen ist:

$$2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

$$=-\sqrt{\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)}-\sqrt{\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)}.$$

Multiplicirt man nun, so erhält man:

$$\sin\frac{1}{2}(u+v).2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{a-q}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{a-q}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2}$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2}$$

$$=-\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2},$$

also

$$\sin\frac{1}{2}(u+v).2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=-\sin u-\sin v,$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\frac{e}{a}(\sin\omega_1-\sin\omega)=-\sin u-\sin v.$$

Weil nun auch $\omega_1-\omega=u+v$ oder $\omega_1-\omega=2\pi-(u+v)$ war, jenachdem

$$0<u+v<\pi \quad \text{oder} \quad \pi<u+v<2\pi$$

ist, so ist nach 7):

$$24)\quad \left\{\begin{array}{l} S=\frac{1}{2}ab\{u+v+(\sin u+\sin v)\} \\ \qquad\qquad \text{oder} \\ S=\frac{1}{2}ab\{2\pi-(u+v)+(\sin u+\sin v)\}, \end{array}\right.$$

jenachdem

$$0<u+v<\pi \quad \text{oder} \quad \pi<u+v<2\pi$$

ist.

Ferner wollen wir annehmen, dass

$$\pi < \omega_1 - \omega < 2\pi, \quad \frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) < \pi;$$

also $\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega)$ negativ sei.

Ist dann den absoluten Werthen nach

$$a\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) > e\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

oder

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) > \frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega),$$

so sind die Grössen

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) - \frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega),$$

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) + \frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

beide negativ. Also ist nach 14):

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) - \frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) = -\sqrt{\left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right)},$$

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) + \frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) = -\sqrt{\left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right)};$$

woraus sich

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega)$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right)}\right\},$$

$$\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right)} - \sqrt{\left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right)}\right\}$$

ergiebt.

Weil bekanntlich

$$2\cos(\omega_1-\omega)=4\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)^2-2$$

ist, so erhält man aus der ersten der beiden vorstehenden Gleichungen:

$$2\cos(\omega_1-\omega)=\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)+\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)-2$$
$$+2\sqrt{\left\{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2\right\}},$$

woraus sich leicht

$$\cos(\omega_1-\omega)=\frac{a-p}{a}\cdot\frac{a-q}{a}+\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2}$$

ergiebt.

Weil nach dem Obigen die absoluten Werthe der Brüche

$$\frac{a-p}{a} \quad \text{und} \quad \frac{a-q}{a}$$

kleiner als die Einheit sind, so ist es verstattet

$$25)\quad \cos u=\frac{a-p}{a},\qquad \cos v=\frac{a-q}{a}$$

zu setzen, und zugleich ist es immer möglich, u und v so zu nehmen, dass

$$0<u<\pi,\quad 0<v<\pi$$

ist. Dann ist

$$26)\quad \sin u=\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2},\quad \sin v=\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2};$$

also nach dem Obigen

$$\cos(\omega_1-\omega)=\cos u\cos v+\sin u\sin v,$$

d. i.

$$27)\quad \cos(\omega_1-\omega)=\cos(u-v).$$

Hieraus ergiebt sich, weil

$$\pi < \omega_1 - \omega < 2\pi, \quad 0 < u - v < \pi$$

ist:

$$\omega_1 - \omega = 2\pi - (u - v).$$

Weil

$$\sin\omega_1 - \sin\omega = 2\sin\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega)\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

ist, so ist

$$\frac{e}{a}(\sin\omega_1 - \sin\omega) = \sin\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) . 2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega),$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{e}{a}(\sin\omega_1 - \sin\omega) = \sin\frac{1}{2}(u - v) . 2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega).$$

Nun ist aber

$$\sin\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1-\cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)\right\}},$$

$$\cos\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1+\cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{a-p}{a}\right)\right\}};$$

$$\sin\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1-\cos v}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)\right\}},$$

$$\cos\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+\cos v}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{a-q}{a}\right)\right\}};$$

also

$$\sin\frac{1}{2}(u-v)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)} - \sqrt{\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)}\right\};$$

und nach dem Obigen ist:

$$2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

$$=-\sqrt{\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)}.$$

Multiplicirt man nun, so erhält man:

$$\sin\frac{1}{2}(u-v).2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{a-q}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{a-q}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2}$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2}$$

$$=-\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2},$$

also:

$$\sin\frac{1}{2}(u-v).2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=-(\sin u-\sin v),$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\frac{e}{a}(\sin\omega_1-\sin\omega)=-(\sin u-\sin v).$$

Weil nun auch $\omega_1-\omega=2\pi-(u-v)$ war, so ist nach 7):

$$28)\quad S=\frac{1}{2}ab\{2\pi-(u-v)+(\sin u-\sin v)\}.$$

Wenn den absoluten Werthen nach

$$a\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)<e\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

oder

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)<\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

ist; so ist von den beiden Grössen

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)-\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega),$$

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)+\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

die erste positiv, die zweite negativ. Also ist nach 14):

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)-\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=\sqrt{\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)},$$

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)+\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=-\sqrt{\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)};$$

woraus sich

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)}-\sqrt{\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)}\right\},$$

$$\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)}\right\}$$

ergiebt.

Weil bekanntlich

$$2\cos(\omega_1-\omega)=4\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)^2-2$$

ist, so erhält man aus der ersten der beiden vorstehenden Gleichungen:

$$2\cos(\omega_1-\omega)=\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)+\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)-2$$

$$-2\sqrt{\left\{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2\right\}},$$

woraus sich leicht

$$\cos(\omega_1-\omega)=\frac{a-p}{a}\cdot\frac{a-q}{a}-\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2}$$

ergiebt.

Weil nach dem Obigen die absoluten Werthe der Brüche

$$\frac{a-p}{a} \text{ und } \frac{a-q}{a}$$

kleiner als die Einheit sind, so ist es verstattet

$$29)\quad \cos u=\frac{a-p}{a},\quad \cos v=\frac{a-q}{a}$$

zu setzen, und zugleich ist es immer möglich, u und v so zu nehmen, dass

$$0<u<\pi,\quad 0<v<\pi$$

ist. Dann ist

$$30)\quad \sin u=\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2},\quad \sin v=\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2};$$

also nach dem Obigen

$$\cos(\omega_1-\omega)=\cos u\cos v-\sin u\sin v,$$

d. i.

$$31)\quad \cos(\omega_1-\omega)=\cos(u+v).$$

Hieraus ergiebt sich

$$\omega_1-\omega=u+v \quad\text{oder}\quad \omega_1-\omega=2\pi-(u+v),$$

jenachdem

$$\pi<u+v<2\pi \quad\text{oder}\quad 0<u+v<\pi$$

ist.

Weil

$$\sin\omega_1-\sin\omega=2\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

ist, so ist

$$\frac{e}{a}(\sin\omega_1-\sin\omega)=\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega).2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega),$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{e}{a}(\sin\omega_1-\sin\omega)=\sin\frac{1}{2}(u+v).2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega).$$

Nun ist aber

$$\sin\frac{1}{2}u=\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)\right\}},$$

$$\cos\frac{1}{2}u=\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{a-p}{a}\right)\right\}};$$

$$\sin\frac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1-\cos v}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)\right\}},$$

$$\cos\frac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1+\cos v}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{a-q}{a}\right)\right\}};$$

also

$$\sin\frac{1}{2}(u+v)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)}+\sqrt{\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)}\right\};$$

und nach dem Obigen ist:

$$2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

$$=-\sqrt{\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\left(1+\frac{a-q}{a}\right)}-\sqrt{\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\left(1-\frac{a-q}{a}\right)}.$$

Multiplicirt man nun, so erhält man:

$$\sin\frac{1}{2}(u+v).2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{a-q}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{a-q}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2}$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{a-p}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{a-p}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2}$$

$$=-\sqrt{1-\left(\frac{a-p}{a}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{a-q}{a}\right)^2},$$

also

$$\sin\frac{1}{2}(u+v).2\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=-\sin u-\sin v,$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\frac{e}{a}(\sin\omega_1-\sin\omega)=-\sin u-\sin v.$$

Weil nun auch $\omega_1-\omega=u+v$ oder $\omega_1-\omega=2\pi-(u+v)$ war, jenachdem

$$\pi<u+v<2\pi \quad \text{oder} \quad 0<u+v<\pi$$

ist, so ist nach 7):

$$32)\quad \left\{\begin{array}{l} S=\frac{1}{2}ab\{u+v+(\sin u+\sin v)\} \\ \qquad\qquad \text{oder} \\ S=\frac{1}{2}ab\{2\pi-(u+v)+(\sin u+\sin v)\}, \end{array}\right.$$

jenachdem

$$\pi<u+v<2\pi \quad \text{oder} \quad 0<u+v<\pi$$

ist.

Wir wollen das Vorhergehende durch einige Beispiele erläutern.

Soll der Flächeninhalt E der ganzen Ellipse bestimmt werden, so müssen wir

$$r=a-e,\quad r_1=a-e,\quad s=0$$

setzen. Also ist

$$2p=r+r_1+s=2(a-e),\quad p=a-e;$$

$$2q=r+r_1-s=2(a-e),\quad q=a-e;$$

folglich

$$\cos u=\frac{a-p}{a}=\frac{e}{a},\quad \cos v=\frac{a-q}{a}=\frac{e}{a};$$

also $u=v$. Ferner ist $\omega=0$, $\omega_1=2\pi$, also

$$\omega_1-\omega=2\pi,\quad \omega_1+\omega=2\pi;$$

$$\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)=\pi,\quad \frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=\pi;$$

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)=-1,\quad \cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=-1;$$

und daher offenbar den absoluten Werthen nach

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)>\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega).$$

Weil nun, da $\omega_1-\omega=2\pi$ ist, dieser Fall offenbar dem allgemeinen Falle, wenn

$$\pi<\omega_1-\omega<2\pi$$

ist, untergeordnet werden muss, so ist jetzt

$$\pi<\omega_1-\omega<2\pi$$

und den absoluten Werthen nach

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)>\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega).$$

Wir haben also die Formel 28) anzuwenden. Dadurch erhalten wir, weil $u=v$, $\sin u=\sin v$ ist, auf der Stelle

$$E=\frac{1}{2}ab.2\pi,\quad \text{also}\quad E=ab\pi;$$

wie es sein muss.

Wir wollen annehmen, dass die beiden Vectoren r und r_1 auf der Hauptaxe der Ellipse senkrecht stehen; so ist

$$r=r_1=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-e^2}=\frac{b^2}{a},\quad s=\frac{2b^2}{a};$$

also

$$2p=r+r_1+s=\frac{4b^2}{a},\quad p=\frac{2b^2}{a};$$

$$2q=r+r_1-s=0,\quad q=0;$$

folglich

$$\cos u=\frac{a-p}{a}=1-\frac{2b^2}{a^2},\quad \cos v=\frac{a-q}{a}=1;$$

woraus sich

$$u=\mathrm{Arccos}\left(1-\frac{2b^2}{a^2}\right),\quad v=0$$

ergiebt, natürlich $\mathrm{Arccos}\left(1-\frac{2b^2}{a^2}\right)$ zwischen 0 und π genommen. Nun ist aber in diesem Falle offenbar

$$\cos\omega=\frac{e}{a},\quad \sin\omega=\frac{b}{a}.$$

Ferner ist $\omega_1=2\pi-\omega$, also $\cos\omega_1=\cos\omega$, $\sin\omega_1=-\sin\omega$; folglich

$$\cos\omega_1=\frac{e}{a},\quad \sin\omega_1=-\frac{b}{a}.$$

Weil

$$\omega_1-\omega=2\pi-2\omega,\quad \omega_1+\omega=2\pi$$

ist, so ist

$$\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)=\pi-\omega,\quad \frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=\pi;$$

also

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)=-\cos\omega,\quad \cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=-1;$$

d. i.

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)=-\frac{e}{a},\quad \cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=-1.$$

In diesem Falle ist folglich den absoluten Werthen nach

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)=\frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega),$$

und weil nun

$$\pi<\omega_1-\omega<2\pi$$

ist, so kann man sowohl die Formel 28), als auch die Formel 32) anwenden. Weil aber offenbar

$$0<u+v<\pi$$

ist, so muss man die zweite der Formeln 32) anwenden. Sowohl aus der Formel 28), als auch aus der zweiten der Formeln 32) erhält man aber

$$S=\frac{1}{2}ab\left\{2\pi-\operatorname{Arccos}\left(1-\frac{2b^2}{a^2}\right)+\sqrt{1-\left(1-\frac{2b^2}{a^2}\right)^2}\right\}$$

oder

$$S=\frac{1}{2}ab\left\{2\pi-\operatorname{Arccos}\left(1-\frac{2b^2}{a^2}\right)+\frac{2b}{a}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right\},$$

oder

$$S=\frac{1}{2}ab\left\{2\pi-\operatorname{Arccos}\left(1-\frac{2b^2}{a^2}\right)+\frac{2eb}{a^2}\right\}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Formeln mit anderen aus der Lehre von der Quadratur der Ellipse sich ergebenden Formeln übereinstimmen, oder wenigstens ohne Schwierigkeit auf dieselben zurückgeführt werden können.

Für den Kreis ist $a=b$, $e=0$; also

$$S=\frac{1}{2}a^2\{2\pi-\operatorname{Arccos}(-1)\}=\frac{1}{2}a^2(2\pi-\pi),$$

d. i. $S=\frac{1}{2}a^2\pi$, wie es sein muss, da im vorliegenden Falle das Segment S offenbar dem Halbkreise gleich ist.

Setzen wir $r=r_1=a$, also $s=2b$, so ist

$$2p=r+r_1+s=2a+2b,\quad p=a+b;$$

$$2q = r + r_1 - s = 2a - 2b, \quad q = a - b;$$

also

$$\cos u = \frac{a-p}{a} = -\frac{b}{a}, \quad \cos v = \frac{a-q}{a} = +\frac{b}{a}.$$

Ferner ist $\omega = \frac{1}{2}\pi$, $\omega_1 = \frac{3}{2}\pi$; also

$$\omega_1 - \omega = \pi, \qquad \omega_1 + \omega = 2\pi;$$

$$\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) = \frac{1}{2}\pi, \quad \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) = \pi.$$

Also kann dieser Fall dem allgemeinen Falle, wenn

$$0 < \omega_1 - \omega < \pi$$

ist, untergeordnet werden; und da nun den absoluten Werthen nach

$$\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) < \frac{e}{a}\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

ist, so muss man die Formeln 24) anwenden. Weil aber offenbar $u + v = \pi$ ist, so muss es gleichgültig sein, ob man die erste oder die zweite der beiden Formeln 24) anwendet. Die erste Formel giebt

$$S = \frac{1}{2}ab\left\{\pi + 2\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right\}.$$

Die zweite Formel giebt

$$S = \frac{1}{2}ab\left\{2\pi - \pi + 2\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right\},$$

also wieder

$$S = \frac{1}{2}ab\left\{\pi + 2\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right\}.$$

Das Segment S besteht in diesem Falle offenbar aus der halben Ellipse und einem gleichschenkligen Dreiecke mit der Grundlinie $2b$ und der Höhe e. Also ist nach bekannten Sätzen

$$S = \frac{1}{2}ab\pi + \frac{1}{2}.2b.e,$$

d. i.

$$S = \frac{1}{2} ab\pi + eb.$$

Aber $e = \sqrt{a^2 - b^2} = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$; also

$$S = \frac{1}{2} ab\pi + ab\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

oder

$$S = \frac{1}{2} ab \left\{ \pi + 2\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right\},$$

ganz wie vorher.

Schon diese wenigen Beispiele werden hinreichen, den Gebrauch der von mir im Vorhergehenden entwickelten Formeln vollständig zu erläutern.

XII.

Gleichungen der Bewegung eines Pendels auf der sich um ihre Axe drehenden Erde.

Von

Herrn Doctor Haedenkamp,

Lehrer am Gymnasium zu Hamm.

Um den Foucault'schen Versuch, der den directen Beweis de Umdrehung der Erde liefern soll, erläutern zu können, habe ich mir die allgemeinen Formeln der Bewegung eines Pendels, wenn dabei die Rotation der Erde berücksichtigt wird, entwickelt, und theile sie hier mit. Ich habe dabei den Weg verfolgt, den Gauss zur Bestimmung des Falles der Körper auf der sich drehenden Erde eingeschlagen hat.

1.

Seien X, Y, Z die rechtwinklichen Coordinaten des Endpunkts A eines Pendels, deren Anfangspunkt der Mittelpunkt der Erde ist, und zwar sei die Axe der X senkrecht auf der Ebene des Aequators und die Axe der Y senkrecht auf demjenigen Meridian, in welchem sich A im Anfange der Bewegung befindet. Für den Aufhängepunkt des Pendels, den wir mit B bezeichnen, sei $X=X'$, $Y=Y'$ und $Z=Z'$. Um nun auch die Bewegung des Pendels auf den mit dem Beobachter beweglichen Horizont zu beziehen, seien ferner für dieselben Punkte A und B x, y, z und α, β, γ die Coordinaten auf ein anderes Coordinatensystem bezogen, deren Anfangspunkt auch der Mittelpunkt der Erde ist. Wir wollen die Ebene der Axen von x und y in der dem Horizonte parallelen und durch den Mittelpunkt der Erde gehenden Ebene annehmen, und zwar soll die Axe der x in die Richtung von Norden nach Süden und die der y in die Richtung von Westen nach Osten fallen; z fällt also in die Richtung des Lothes. Um von dem einen Coordinaten-Systeme zum andern übergehen zu können, setze man

$$X = ax + by + cz,$$

$$Y = a'x + b'y + c'z,$$

$$Z = a''x + b''y + c''z;$$

dann wird auch bekanntlich umgekehrt:

$$x = aX + a'Y + a''Z,$$

$$y = bX + b'Y + b''Z,$$

$$z = cX + c'Y + c''Z.$$

Für die Punkte A und B kann man ohne Fehler X mit X', Y mit Y' und Z mit Z' parallel setzen, so dass auch

$$X' = a\alpha + b\beta + c\gamma,$$

$$Y' = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma,$$

$$Z' = a''\alpha + b''\beta + c''\gamma.$$

Wenn die Länge des Pendels l gesetzt wird, so wird noch

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = l^2.$$

Was die Grössen a, a', a'', b, b' etc. betrifft, so werden diese bekanntlich, wenn die Länge und Breite der Punkte A und B durch ψ und μ bezeichnet werden, folgendermassen ausgedrückt:

$$1)\quad\begin{cases} a\;=\sin\mu\cos\psi, \\ a'\;=\sin\mu\sin\psi, \\ a''=-\cos\mu; \\ b\;=-\sin\psi, \\ b'\;=\cos\psi, \\ b''=0; \\ c\;=\cos\mu\cos\psi, \\ c'\;=\cos\mu\sin\psi, \\ c''=\sin\mu. \end{cases}$$

Da durch ψ auch zugleich der Winkel bezeichnet wird, um welchen sich die Erde in der Zeit t gedreht hat, so kann man auch, wenn n die Winkelgeschwindigkeit der Drehung der Erde bedeutet, $\psi=nt$ und also $\frac{\partial\psi}{\partial t}=n$ setzen.

2.

Wir wollen jetzt die Gleichungen, welche die Bewegung des Pendels unter dem Einflusse der Drehung der Erde darstellen, entwickeln. Ich betrachte der Kürze wegen hier das Pendel als ein einfaches. Wenn die Anziehungskraft der Erde in dem Punkte A oder B durch g und der Radius der Erde durch r bezeichnet wird, dann werden die Kräfte, die auf das Pendel nach den Richtungen X, Y, Z wirken, durch $\frac{gX}{r}$, $\frac{gY}{r}$, $\frac{gZ}{r}$ ausgedrückt; diese geben in Verbindung mit der Bedingung, dass die Bewegung des Punktes A nur auf der Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser l vor sich gehen kann, folgende Fundamentalgleichungen für die Bewegung:

$$0=\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}+\frac{gX}{r}+\frac{N(X-X')}{l},$$

$$0=\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}+\frac{gY}{r}+\frac{N(Y-Y')}{l},$$

$$0=\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}+\frac{gZ}{r}+\frac{N(Z-Z')}{l}.$$

Um die Bewegung des Pendels gegen die im Raume bewegliche Ebene des Horizonts kennen zu lernen, müssen in diesen

Gleichungen die Grössen X, Y, Z durch x, y, z ausgedrückt werden. Zu diesem Ende multiplizire man die erste dieser Gleichungen mit a, die zweite mit a', die dritte mit a'' und addire; dann multiplizire man ferner dieselben drei Gleichungen mit b, b', b'' und endlich mit c, c', c'' und addire jedesmal; dadurch erhält man statt der vorhergehenden diese drei Gleichungen:

$$2)\quad \begin{cases} 0 = a\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} + a'\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + a''\dfrac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \dfrac{gx}{r} + \dfrac{N(x-\alpha)}{l}, \\ 0 = b\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} + b'\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + b''\dfrac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \dfrac{gy}{r} + \dfrac{N(y-\beta)}{l}, \\ 0 = c\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} + c'\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + c''\dfrac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \dfrac{gz}{r} + \dfrac{N(z-\gamma)}{l}. \end{cases}$$

Jetzt drücken wir vermittelst der Gleichungen 1) die Werthe für $\partial^2 X$, $\partial^2 Y$, $\partial^2 Z$ durch x, y, z, a, b, c u. s. w. und deren Differenziale aus: setzt man dann die erhaltenen Werthe für $\partial^2 X$ u. s. w. in die Gleichungen 2), so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$3)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 2n\sin\mu\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right) + \dfrac{g'x}{r} - n^2\cos\mu Z + \dfrac{N(x-\alpha)}{l}, \\ 0 = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2n\sin\mu\left(\dfrac{\partial x}{\partial t}\right) + 2n\cos\mu\left(\dfrac{\partial z}{\partial t}\right) + \dfrac{g'y}{r} + \dfrac{N(y-\beta)}{l}, \\ 0 = \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 2n\cos\mu\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right) + \dfrac{g'z}{r} + n^2\sin\mu Z + \dfrac{N(z-\gamma)}{l}. \end{cases}$$

Der Kürze wegen ist $g - rn^2 = g'$ gesetzt und bedeutet die wirkliche Schwere unter dem Aequator. Wollte man die Abplattung der Erde noch berücksichtigen, so müsste

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\sin\mu^2}{a^2} + \frac{\cos\mu^2}{b^2}$$

gesetzt werden. Ich bemerke noch, dass $n^2\sin\mu Z$ die Schwungkraft für die Breite μ nach der Richtung der Schwere und $n^2\cos\mu Z$ die nach der Richtung des Meridians zerlegt, bedeutet; beide Kräfte sind also hier kleine Grössen. Ist, wie wir hier annehmen, die Erde eine Kugel, dann ist auch noch $\alpha=0$, $\beta=0$.

Die Grössen $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r}$ kann man in den vorhergehenden Gleichungen ohne Fehler vernachlässigen und $\frac{z}{r}$ gleich 1 setzen; dadurch werden dieselben folgende:

$$4)\quad \begin{cases} 0=\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}-2n\sin\mu\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)-n^2\cos\mu Z+\dfrac{Nx}{l}, \\ 0=\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}+2n\sin\mu\left(\dfrac{\partial x}{\partial t}\right)+2n\cos\mu\left(\dfrac{\partial z}{\partial t}\right)+\dfrac{Ny}{l}, \\ 0=\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}-2n\cos\mu\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)+g''+\dfrac{Nz}{l}. \end{cases}$$

Hierin ist für $z-\gamma$ noch z und

$$g''=g'+n^2\sin\mu Z=g-rn^2\cos^2\mu$$

gesetzt, und es bedeutet g'' die wirkliche Schwere im Punkte A oder B, da $rn^2\cos^2\mu$ die Schwungkraft nach der der Schwere entgegensetzten Richtung ist. Diese Gleichungen integrirt beantworten alle Fragen, die man über die Bewegung eines Pendels auf der rotirenden Erde stellen kann. Indessen sind diese Integrale in endlicher Form nicht zu erhalten, obgleich ein Integral, nemlich

$$\frac{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}{2\partial t^2}=g''z-n^2\cos\mu Zx+C,$$

sich leicht aus 4) ergiebt. Hier kömmt es zunächst nur darauf an, die Grösse der Drehung der Schwingungsebene, wie sie beim Foucault'schen Versuche beobachtet wird, kennen zu lernen. Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, dass für $t=0$ der Schwerpunkt des Pendels in der Ebene des Meridians liege, und die Geschwindigkeit $=0$ sei. Multiplizirt man nun die erste der Gleichungen 4) mit y und die zweite mit x und subtrahirt, so erhält man:

$$\partial\left(\frac{y\partial x-x\partial y}{\partial t^2}\right)=n\sin\mu\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial t}+2n\cos\mu x\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Die Projection der Pendellänge auf die Ebene des Horizonts sei ϱ und bilde mit den Axen x und y die Winkel φ und $\frac{\pi}{2}-\varphi$, so dass also:

$$x=\varrho\cos\varphi,\quad y=\varrho\sin\varphi$$

und

$$y\partial x-x\partial y=\varrho^2\partial\varphi:$$

dann ist

$$\partial\left(\frac{\varrho^2\partial\varphi}{\partial t^2}\right)=n\sin\mu\frac{\partial\varrho^2}{\partial t}+2n\cos\mu x\frac{\partial z}{\partial t}$$

und

$$5)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = n\sin\mu + \frac{2n\cos\mu}{\varrho^2}\int x\partial z.$$

Sind die Schwingungen des Pendels klein, so dass $\partial z = 0$ gesetzt werden kann, so hat man

$$\varphi = nt.\sin\mu.$$

In diesem Falle kann man also die Drehung der Schwingungsebene des Pendels der Zeit proportional setzen, und während die Schwingungsebene sich um 360^0 dreht, dreht sich die Erde um den Winkel

$$\frac{2\pi}{\sin\mu}.$$

Wir sehen aus der Gleichung 5), dass bei grösseren Schwingungsbogen die Geschwindigkeit, womit die Schwingungsebene sich dreht, nicht ganz constant sei, sondern um die periodische Grösse

$$\frac{2n\cos\mu}{\varrho^2}\int x\partial z$$

grösser oder kleiner als $n\sin\mu$ werden kann. Für eine kurze Dauer der Schwingungen kann man, wie leicht zu sehen,

$$\int x\partial z = \cos\varphi\int \varrho\partial z.$$

setzen. Hieraus folgt, dass bei gleichen Schwingungsbogen für $+\varphi$ und $-\varphi$ die Geschwindigkeit der Drehung der Schwingungsebene gleich sei. Finden die Schwingungen in der auf dem Meridian senkrechten Richtung statt, so ist

$$\cos\varphi\int \varrho\partial z = 0 \text{ und } \frac{\partial\varphi}{\partial t} = n\sin\mu.$$

Wenn die grösste Abweichung des Pendels vom Lothe durch u bezeichnet wird, dann ist näherungsweise für eine ganze Schwingung:

$$\frac{2n\cos\mu\cos\varphi}{\varrho^2}\int x\partial z = \frac{n\cos\mu\sin u}{3}.\cos\varphi;$$

diese Grösse ist zwar gegen $n\sin\mu$ klein, genaue Versuche aber mit dem Foucault'schen Pendel könnten doch dieselbe noch vielleicht herausstellen.

Nachschrift des Herausgebers.

Bei Uebersendung des obigen Aufsatzes schreibt mir Herr Doctor Haedenkamp Folgendes, was ich hier noch mitzutheilen für meine Pflicht halte, indem ich zugleich dem geehrten Herrn Verfasser für die Uebersendung seines Aufsatzes danke, und mich freue, dass mein eigner Aufsatz über diesen Gegenstand im ersten Hefte dieses Bandes den Hauptzweck, welchen ich bei Mittheilung desselben hatte, nämlich die Mittheilung weiterer Untersuchungen über den schönen Foucault'schen Versuch zu veranlassen, schon erfüllt hat. Möge die obige Mittheilung nicht die letzte sein!

„So eben erhalte ich von Ihrem Journal das Heft, welches die Abhandlung von Ihnen über den Foucault'schen Versuch enthält. Bei Durchlesung derselben fiel mir meine schon vor $^1/_2$ Jahr gemachte und schon fast vergessene Abhandlung ein, die ich über denselben Gegenstand geschrieben. Da ich nun keine andere Auflösung als die Ihrige und die von Eschweiler kenne und meine Lösung des Problems eine ganz andere ist, so glaube ich, dass dieselbe Interesse hat, und übermache sie Ihnen hierneben mit der Bitte, solche in Ihr Journal bald möglichst einrücken lassen zu wollen. Zugleich ersuche ich Sie, mir einige besondere Abdrücke der Abhandlung demnächst auf geeignetem Wege zukommen zu lassen. Sie werden sehen, dass, wie ich gefunden, die Drehung der Schwingungsrichtung gegen den Horizont nicht ganz constant, sondern von einem, wenn auch kleinen periodischen Gliede noch abhängig ist. Dieses kleine Glied müsste sich, wenn die Versuche mit möglichster Schärfe angestellt würden, herausstellen. Ich kenne keinen andern Versuch, bei dem sich dieses in der That wirklich herausgestellt hätte, als den in Minden gemachten."

Die Herren Physiker, welche sich mit Foucault'schen Pendelversuchen beschäftigen würden, also hierauf besonders zu achten haben.

XIII.

Miscellen.

Beitrag zur Buchstabenrechnung.

Von Herrn Professor G. Decher an der polytechnischen Schule zu Augsburg.

Bisher hat man sich in den Lehrbüchern der Algebra darauf beschränkt, nur solche zweigliedrige irrationale Nenner rational zu machen, deren Wurzelgrössen Potenzen von 2 zu Exponenten haben, wie

$$\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}},\quad \frac{a}{\sqrt[4]{b}\pm\sqrt[4]{c}},\quad \frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt[4]{c}},\quad \text{u. s. f.}$$

Das Verfahren besteht bekanntlich darin, den Zähler und Nenner mit der Differenz oder Summe der Wurzelgrössen des Nenners zu multipliziren, jenachdem dieser selbst eine Summe oder eine Differenz ist. Mit Nennern von der Form

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c}},\quad \frac{a}{\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[5]{c}},\quad \text{u. s. w.}$$

hat man sich nicht befasst. Das vorhergehende Verfahren ist aber in einem allgemeineren enthalten, durch welches alle binome Nenner rational gemacht werden können.

Beachtet man nämlich, dass, wenn n eine ganze Zahl ist, der Quotient von

$\frac{a^n-b^n}{a-b}$ immer eine geschlossene Reihe gibt; von

$\frac{a^n-b^n}{a+b}$ nur, wenn n eine gerade Zahl ist; von

$\frac{a^n+b^n}{a+b}$ nur, wenn n eine ungerade Zahl ist; von

$\frac{a^n+b^n}{a-b}$ dagegen niemals;

so wird man leicht finden, dass man den Bruch $\frac{a}{\sqrt[2n]{b}\pm\sqrt[2n]{c}}$ im Zähler und Nenner nur mit $b-c$ multipliziren darf, um den irrationalen Nenner zu beseitigen; denn man hat

$$\frac{a}{\sqrt[2n]{b}\pm\sqrt[2n]{c}}=\frac{a}{b-c}\cdot\frac{b-c}{\sqrt[2n]{b}\pm\sqrt[2n]{c}}$$

$$=\frac{a}{b-c}\left(\sqrt[2n]{b^{2n-1}}\mp\sqrt[2n]{b^{2n-2}c}+\text{etc.}+\sqrt[2n]{bc^{2n-2}}\mp\sqrt[2n]{c^{2n-1}}\right).$$

Ebenso wird der Nenner des Bruches $\frac{a}{\sqrt[2n+1]{b}-\sqrt[2n+1]{c}}$ rational werden, wenn man Zähler und Nenner mit $b-c$ multiplizirt; der Nenner des Bruches $\frac{a}{\sqrt[2n+1]{b}+\sqrt[2n+1]{c}}$, wenn man Zähler und Nenner mit $b+c$ multiplizirt; man hat also

$$\frac{a}{\sqrt[2n+1]{b}\pm\sqrt[n+1]{c}}=\frac{a}{b\pm c}\cdot\frac{b\pm c}{\sqrt[2n+1]{b}\pm\sqrt[2n+1]{c}}$$

$$=\frac{a}{b\pm c}\left(\sqrt[2n+1]{b^{2n}}\mp\sqrt[2n+1]{b^{2n-1}c}+\text{etc.}\mp\sqrt[2n+1]{bc^{2n-1}}+\sqrt[2n+1]{c^{2n}}\right).$$

Um endlich den Nenner des Bruches $\frac{a}{\sqrt[m]{b}\pm\sqrt[n]{c}}$ rational zu machen, verwandelt man die Wurzelgrössen in solche mit gleichen Exponenten, und hat dadurch den Ausdruck:

$$\frac{a}{\sqrt[m]{b}\pm\sqrt[n]{c}}=\frac{a}{\sqrt[mn]{b^n}\pm\sqrt[mn]{c^m}},$$

welcher wieder auf einen der vorhergehenden Fälle zurückkommt.

Durch dieses Verfahren kann demnach jeder binome irrationale Nenner unmittelbar rational gemacht werden, und es ist dabei nicht nothwendig, vierte Wurzeln erst in zweite, u. s. f. zu verwandeln.

Bemerkung zu Eulers Integralrechnung.

Von Herrn Professor Dr. Wolfers zu Berlin.

In Eulers Institutionum calculi integralis volumen primum. §. 233. findet sich folgende Stelle: Veluti si proponeretur haec formula

$$\frac{e^x x\partial x}{(1+x)^2},$$

facile est suspicari integrale, si datur, talem formam esse habiturum:

$$\frac{e^x z}{1+x}.$$

Hujus ergo differentiale

$$\frac{e^x\{\partial z(1+x)+xz\partial x\}}{(1+x)^2}$$

cum illo comparatum dat:

$$\partial z(1+x)+xz\partial x=x\partial x,$$

ubi statim patet esse $z=1$, quod nisi per se pateret, ex regulis difficulter cognosceretur.

Nun scheint es mir, als ob das vorgelegte Differential ziemlich direct integrirt werden kann, und zwar folgendermassen: Ich setze zur Vereinfachung $1+x=z$, also $x=z-1$ und $\partial x=\partial z$; alsdann wird, wenn ich das gesuchte Integral durch y bezeichne:

$$y=\int\frac{e^{z-1}(z-1)\partial z}{z^2}=\int e^{z-1}\frac{\partial z}{z}-\int e^{z-1}\frac{\partial z}{z^2},$$

also, weil $\frac{\partial z}{z}=\partial.lz$ und $\frac{\partial z}{z^2}=-\partial.\frac{1}{z}$ ist, durch theilweise Integration:

$$y=e^{z-1}.lz-\int lz.e^{z-1}\partial z+\frac{e^{z-1}}{z}-\int\frac{1}{z}e^{z-1}\partial z,$$

und da wieder

$$\int\frac{1}{z}e^{z-1}\partial z=e^{z-1}.lz-\int lz.e^{z-1}\partial z:$$

$$y=e^{z-1}.lz-\int lz.e^{z-1}\partial z+\frac{e^{z-1}}{z}-\{e^{z-1}lz-\int lz.e^{z-1}\partial z\}$$

$$=\frac{e^{z-1}}{z}=\frac{e^x}{1+x}.$$

Druckfehler.

In Theil XX. S. 11 Z. 9. lese man Ganzzahl,

S. 14. Z. 6. lese man scheiden,

S. 15. Z. 19. für $\frac{du}{du}$ lese man $\frac{du}{dx}$,

S. 23. Z. 3. fehlt (17),

S. 25. Z. 3. nach Werthe fehlt begrenzter Integrale,

S. 30. Z. 16. und 18. statt du setze man $\frac{du}{u}$,

S. 30. Z. 18. statt $+1-(+1)$ setze man $l(+1)-l(+1)$.

XIV.

Ueber Leitlinien.

Von

Herrn Doctor M. Cantor

in Heidelberg.

Der Name Leitlinie oder Directrix ist von verschiedenen Mathematikern in verschiedener Bedeutung benutzt worden. Wir fassen ihn hier in derselben Bedeutung wie Raabe in einem Aufsatze im zweiten Bande von Crelle's Journal, der folgende Definition giebt: Leitlinie einer gegebenen krummen Linie ist diejenige Linie, welche die Eigenschaft besitzt, dass die Normale, welche von irgend einem Punkte jener Curve auf sie gefällt wird, gleich der Entfernung jenes Punktes von einem gegebenen festen Punkte der Ebene ist. An diese Definition uns anschliessend wollen wir hier die Untersuchung aufnehmen, und neben einigen interessanten Einzelheiten namentlich noch allgemeine Formeln in Bezug auf Polarcoordinaten mittheilen, so wie auch eine Erweiterung des Begriffes, der zu Leitflächen führt, andeuten.

1.

Wir wollen zur deutlicheren Verständniss die Curve, deren Leitlinie in dem eben angegebenen Sinne eine andere Curve ist, immer die Curve ohne weitere Bezeichnung nennen; ferner werden wir für alle Grössen, die sich auf die Curve beziehen, lateinische Buchstaben gebrauchen, für alle Grössen aber, die sich auf die Leitlinie beziehen, griechische Buchstaben.

Um möglich einfache Formeln zu erhalten, nehmen wir den gegebenen festen Punkt zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems, und in Beziehung auf dieses seien die Gleichungen der Leitlinie und der Curve:

$$1.\quad \varphi.(\xi,\ \eta) = 0,$$

$$2.\quad f(x,\ y) = 0.$$

Die Normale zur Leitlinie, welche zugleich durch einen Punkt $x,\ y$ geht, hat die Gleichung

$$3.\quad (y-\eta)\frac{d\eta}{d\xi} + (x-\xi) = 0.$$

Und endlich ist die Entfernung der Punkte $x,\ y$ und $\xi,\ \eta$ der Entfernung des Punktes $x,\ y$ vom Coordinatenanfangspunkte gleich zu setzen, d. h. $\sqrt{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}} = \sqrt{\{x^2+y^2\}}$ oder

$$4.\quad \xi^2 + \eta^2 = 2(\xi x + \eta y).$$

2.

Nun sind zwei Aufgaben möglich. Entweder die Leitlinie ist gegeben (Gleichung 1.) und man sucht die zugehörige Curve (Gleichung 2.) oder umgekehrt. Die erste Aufgabe ist eine ganz bestimmte, indem aus 1. der Differentialquotient $\frac{d\eta}{d\xi}$ gesucht und in 3. substituirt wird, worauf zwischen der so umgewandelten Gleichung 3., der Gleichung 1. und der Gleichung 4. die Unbekannten ξ, η eliminirt werden können; und die übrig bleibende Gleichung zwischen x und y ist die gesuchte Gleichung 2.

Auch geometrisch kann man sich die Bestimmtheit dieser Aufgabe leicht versinnlichen. Denn es sei o in Taf. III. Fig. 1. der feste Coordinatenanfangspunkt und μ ein Punkt der Leitlinie $\alpha\beta$, man sucht den zugehörigen Punkt m der Curve. Die Auflösung besteht einfach darin, dass man in μ an $\alpha\beta$ die Normale $\mu\mu'$ zieht, ferner die Verbindungslinie μo und in deren Mitte die Senkrechte $\delta\delta'$ errichtet. Der Durchschnittspunkt der $\delta\delta'$ mit der $\mu\mu'$ ist der gesuchte Punkt m.

Anders verhält es sich, wenn die umgekehrte Aufgabe gestellt ist; nämlich zu einer gegebenen Curve die Leitlinie zu finden. Denn ist (Taf. III. Fig. 2.) ab die Curve, so ist zur Bestimmung des Punktes μ nur die Bedingung $mo = m\mu$ gegeben, d. h. der Ort des Punktes μ ist die Peripherie des um m mit dem Halbmesser mo beschriebenen Kreises, oder es giebt unendlich viele Leitlinien, die einer Curve zugehören. Die weitere Bedingung, dass $m\mu$ zur Leitlinie normal sein soll, kommt allerdings auch in Betracht; aber bei dem ersten Punkte der Curve, zu welchem der entsprechende Punkt der Leitlinie gesucht wird, ist es jedenfalls ganz willkührlich, wohin wir in der Peripherie des erwähnten Kreises μ verlegen. Indessen wird die ganze Schaar der Leitlinien stetig auf einander folgen und dem gemäss in der Regel eine einhüllende Linie haben, die alsdann selbst auch Leitlinie der Curve ist. Denn jeder ihrer Punkte ist zugleich Punkt einer Leitlinie, welche sie tangirt, mit welcher sie also eine gemeinschaftliche Normale hat.

Zu derselben Bemerkung gelangen wir auch analytisch. Sind nämlich die Gleichungen 2., 3., 4. gegeben, so folgt aus 3. und 4., wenn zur Abkürzung $\frac{d\eta}{d\xi}=\eta'$ gesetzt wird:

$$5. \quad x=\frac{(\eta^2-\xi^2)\eta'+2\xi\eta}{2(\eta-\xi\eta')}, \qquad y=\frac{(\eta^2-\xi^2)-2\xi\eta\eta'}{2(\eta-\xi\eta')};$$

und durch Substitution in 2.:

$$f\left(\frac{(\eta^2-\xi^2)\eta'+2\xi\eta}{2(\eta-\xi\eta')},\ \frac{(\eta^2-\xi^2)-2\xi\eta\eta'}{2(\eta-\xi\eta')}\right)=\psi(\xi,\eta,\eta')=0,$$

welches die Differentialgleichung der gesuchten Leitlinie ist. Bei deren Integration erscheint nun eine willkührliche Constante, welche, als veränderlicher Parameter angesehen, unendlich viele Leitlinien giebt. Im Allgemeinen wird sich aber ausser dem allgemeinen Integral: $\varphi(\xi,\eta,\text{const.})=0$ auch noch ein singuläres Integral $\varphi_1(\xi,\eta)=0$ ergeben, welches keinen veränderlichen Parameter mehr enthält; und dessen Bedeutung ist alsdann bekanntlich die Einhüllende der durch das allgemeine Integral angegebenen krummen Linien.

3.

Schon der Umstand, dass die Entfernung eines Punktes vom Coordinatenanfangspunkte zum Ausdrucke eines wesentlichen Theiles unserer Aufgabe dient, scheint darauf hinzudeuten, dass es angemessener wäre zu Polarcoordinaten überzugehen; und in der That treten dabei weit einfachere Formeln hervor. Zum Pole der neuen Coordinaten nehmen wir wieder den festen Punkt, d. h. den früheren Coordinatenanfangspunkt, und zur Achse die frühere Abscissenachse. Nun ist, wenn ϱ, θ; r, t die neuen Coordinaten bezeichnen sollen:

$$\xi=\varrho.\cos\theta,\quad \eta=\varrho.\sin\theta,\quad \varphi(\xi,\eta)=\Phi(\varrho,\theta);$$

$$x=r.\cos t,\quad y=r.\sin t,\quad f(x,y)=F(r,t).$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen 1. bis 4. und schreibt $\frac{d\varrho}{d\theta}=\varrho'$, so ist:

$$6.\quad \Phi(\varrho,\ \theta)=0,$$

$$7.\quad F(r,\ t)=0,$$

$$8.\quad \varrho'(\varrho-r.\cos(t-\theta))=\varrho.r.\sin(t-\theta),$$

$$9.\quad \varrho=2r.\cos(t-\theta).$$

Durch Verbindung der Gleichungen 8., 9. ist

$$\varrho'\left(\varrho-\frac{\varrho}{2}\right)=\varrho.r.\sin(t-\theta)$$

oder

$$10.\quad \varrho'=2r.\sin(t-\theta).$$

Aus 9. und 10. ergeben sich alsdann die Zusammenhänge:

$$11.\quad \frac{\varrho'}{\varrho}=\mathrm{tg}(t-\theta),$$

$$12.\quad \varrho'^2+\varrho^2=4r^2;$$

worauf man aus 11. noch folgende Gleichung ableiten kann:

$$13.\quad \mathrm{tg}t=\frac{\varrho'+\varrho.\mathrm{tg}\theta}{\varrho-\varrho'.\mathrm{tg}\theta}.$$

Die Gleichungen 9., 10. können auch folgendermassen geschrieben werden:

$$\varrho=2r.\cos t.\cos\theta+2r.\sin t.\sin\theta,$$

$$\varrho'=-2r.\cos t.\sin\theta+2r.\sin t.\cos\theta.$$

Wird einmal die obere mit $\sin\theta$, die untere mit $\cos\theta$, und das andere Mal die obere mit $\cos\theta$, die untere mit $\sin\theta$ multiplicirt und die Producte mit einander verbunden, so ergiebt sich:

$$\sin\theta.\varrho+\cos\theta.\varrho'=2r.\sin t,$$

$$\cos\theta.\varrho-\sin\theta.\varrho'=2r.\cos t.$$

Aber $2r.\sin t=2y$, $2r.\cos t=2x$. Folglich ist:

$$14.\quad y=\frac{\sin\theta.\varrho+\cos\theta.\varrho'}{2},\qquad x=\frac{\cos\theta.\varrho-\sin\theta.\varrho'}{2};$$

eine Formel von grosser Geschmeidigkeit, um zu einer in rechtwinkligen Coordinaten gegebenen Curve die Differentialgleichung der Leitlinie in Polarcoordinaten zu finden.

Die Formeln, die dazu dienen, zu einer in Polarcoordinaten gegebenen Curve die Differentialgleichung der Leitlinie in rechtwinkligen Coordinaten zu finden, sind nicht so einfach. Der Vollständigkeit wegen mögen sie indessen beigefügt werden. Setzt man nämlich in 5. $x = r.\cos t$, $y = r.\sin t$, so erhält man:

$$15.\quad \mathrm{tg}\,t = \frac{(\xi^2-\eta^2)+2\xi\eta\eta'}{(\xi^2-\eta^2)\eta'-2\xi\eta}, \qquad r = \frac{\xi^2+\eta^2}{2\xi\eta'-2\eta}\sqrt{(1+\eta'^2)}.$$

Zur Vereinfachung kann man allenfalls den Bogen σ der Leitlinie einführen. Denn es ist

$$\sqrt{\left(1+\frac{d\eta^2}{d\xi^2}\right)} = \frac{d\sigma}{d\xi},$$

und daher

$$r = \frac{(\xi^2+\eta^2)d\sigma}{2\xi d\eta - 2\eta d\xi}.$$

4.

Wir wollen von den gewonnenen Formeln einige specielle Anwendungen machen.

Es sei die gegebene Curve eine grade Linie, die durch den Coordinatenanfangspunkt geht; also ihre Gleichung $x = ay$. Die Gleichung der Leitlinie ist sofort:

$$\cos\theta.\varrho - \sin\theta.\varrho' = a.\sin\theta.\varrho + a.\cos\theta.\varrho',$$

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{\cot\theta - a}{a.\cot\theta + 1}\,d\theta,$$

$$\varrho = c(a.\cos\theta + \sin\theta).$$

In rechtwinkligen Coordinaten:

$$\xi^2 + \eta^2 = c(a\xi + \eta),$$

d. i. die Gleichung eines Kreises, dessen Halbmesser $= \frac{c}{2}\sqrt{a^2+1}$ und die Coordinaten des Mittelpunktes $\alpha = -\frac{ac}{2}$, $\beta = -\frac{c}{2}$, wo α die Abscisse, β die Ordinate bedeutet. Es ist klar, dass dieser Kreis durch den Coordinatenanfangspunkt geht, so wie auch, dass der Halbmesser nach dem Coordinatenanfangspunkte dieselbe Richtung wie die Linie $x=ay$ hat. Diese Linie ist also selbst normal zu dem Kreise im Coordinatenanfangspunkte, der Kreis also in der That ihre Leitlinie.

5.

Die gegebene Curve sei eine Linie zweiter Ordnung und der Coordinatenanfangspunkt ein Brennpunkt derselben. Ihre Gleichung ist alsdann $x^2+y^2-(p+ex)^2=0$, die Gleichung der Leitlinie:

$$(\cos\theta.\varrho-\sin\theta.\varrho')^2+(\sin\theta.\varrho+\cos\theta.\varrho')^2-(2p+e.\cos\theta.\varrho-e.\sin\theta.\varrho')^2=0$$

oder

$$\text{A.}\quad (1-e^2\sin\theta^2)\varrho'^2+(2e^2.\sin\theta.\cos\theta.\varrho+4pe.\sin\theta)\varrho' \\ +\varrho^2-e^2.\cos\theta^2.\varrho^2-4pe.\cos\theta.\varrho-4p^2=0.$$

Diese Gleichung lässt sich nicht allgemein integriren. Die Herleitung des singulären Integrals unterliegt hingegen keiner Schwierigkeit, indem man nach bekannten Regeln die Gleichung A. nach ϱ' differentiirt, den Differentialquotienten $=0$ setzt, und den so erhaltenen Werth

$$\varrho'=-\frac{e^2.\sin\theta.\cos\theta.\varrho+2pe.\sin\theta}{1-e^2.\sin\theta^2}$$

in A. substituirt. Nach gehöriger Reduction ist sodann:

$$(1-e^2)\varrho^2=4pe.\cos\theta.\varrho+4p^2,$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten:

$$(1-e^2)(\xi^2+\eta^2)=4pe\xi+4p^2.$$

Die allgemeine Gleichung der zweiten Ordnung specialisirt sich, je nachdem e verschiedene Werthe erhält. Stellen wir diese specielleren Gleichungen mit denen der Leitlinien zusammen, so ist:

$e=1$; $y^2-2px=p^2$ eine Parabel;

$\xi=-p$ eine gerade Linie;

$e\gtrless 1$; $x^2+y^2-(p+ex)^2=0$ eine $\begin{matrix}\text{Hyperbel}\\ \text{Ellipse}\end{matrix}$;

$(1-e^2)(\xi^2+\eta^2)=4pe\xi+4p^2$ ein Kreis;

$e=\sqrt{2}$; $y^2-x^2-2\sqrt{2}px=p^2$ eine gleichseitige Hyperbel;

$-\xi^2-\eta^2=4\sqrt{2}p\xi+4p^2$ ein Kreis;

$e=0$; $x^2+y^2=p^2$ ein Kreis;

$\xi^2+\eta^2=4p^2$ ein concentrischer Kreis vom doppelten Halbmesser.

6.

Für den speciellen Fall, dass die Curve zweiter Ordnung ein Kreis ist, lässt sich auch das allgemeine Integral, d. h. die verschiedenen Leitlinien finden. Die Polargleichung des Kreises sei nämlich $r=p$, so ist $4r^2=4p^2$. Diesen Werth führen wir in die Gleichung 12. ein:

$$\varrho'^2+\varrho^2=4p^2,$$

$$\frac{d\varrho}{\sqrt{4p^2-\varrho^2}}=d\theta;$$

und das allgemeine Integral dieser Gleichung ist $\theta=-c+\arcsin\frac{\varrho}{2p}$, oder

$$\varrho=2p.\sin(\theta+c).$$

In rechtwinkligen Coordinaten:

$$\xi^2+\eta^2=2p.\cos c.\eta+2p.\sin c.\xi.$$

Das ist die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt die Coordinaten $\alpha=p.\sin c$, $\beta=p.\cos c$ entsprechen; d. h. die Gleichung eines Kreises von gleichem Halbmesser wie die Curve und dessen Mittelpunkt die Curve selbst zum Orte hat. Will man hingegen die einhüllende Leitlinie finden, so differentiirt man $\varrho'^2+\varrho^2=4p^2$ nach ϱ', woraus $\varrho'=0$ und durch Einführung dieses Werthes

$$\varrho^2=4p^2;$$

das ist derselbe concentrische Kreis vom doppelten Halbmesser, den wir auch in der vorigen Nummer fanden.

7.

Ist die gegebene Curve eine gleichseitige Hyperbel und der Mittelpunkt derselben der Coordinatenanfangspunkt, so haben wir die Gleichung $x^2 - y^2 = a^2$. Daraus folgt als Differentialgleichung der Leitlinie:

$$\text{A.}\quad \varrho'^2 + 2\text{tg}2\theta.\varrho.\varrho' = \varrho^2 - \frac{4a^2}{\cos 2\theta}.$$

Hier müssen wir uns wieder mit der singulären Auflösung begnügen: $2\varrho' + 2\text{tg}2\theta.\varrho = 0$, folglich

$$\varrho' = -\text{tg}2\theta.\varrho$$

in A. substituirt giebt:

$$\frac{4a^2}{\varrho^2.\cos 2\theta} = 1 - \text{tg}2\theta^2 + 2\text{tg}2\theta^2 = \frac{1}{\cos 2\theta^2}$$

oder

$$\varrho = 2a\sqrt{\cos 2\theta};$$

in rechtwinkligen Coordinaten:

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 = 4a^2(\xi^2 - \eta^2),$$

welches bekanntlich die Gleichung der Lemniscate ist.

8.

Die gegebene Curve sei wieder die Parabel; aber zum Coordinatenanfangspunkt sei der Scheitel der Parabel gewählt, deren Gleichung demnach $y^2 = ax$ ist. Die Leitlinie hat die Gleichung:

$$\text{A.}\quad (\sin\theta.\varrho + \cos\theta.\varrho')^2 = 2a.\cos\theta.\varrho - 2a.\sin\theta.\varrho'.$$

Um das singuläre Integral zu finden, setzen wir

$$2(\sin\theta.\varrho + \cos\theta.\varrho')\cos\theta = -2a.\sin\theta.\varrho'$$

oder

$$\varrho' = -\text{tg}\theta\left(\varrho + \frac{a}{\cos\theta}\right).$$

Substitution dieses Werthes in die Gleichung A. verwandelt dieselbe in

$$\varrho = -\frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\theta.\sin\theta,$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten:

$$\xi(\xi^2+\eta^2)+\frac{a}{2}\,\eta^2=0.$$

Die Bedeutung dieser Gleichung wird klar, wenn man $\xi = -\xi_1$ setzt, wodurch sie sich in

$$\xi_1(\xi_1{}^2+\eta^2)-\frac{a}{2}\,\eta^2=0$$

verwandelt, oder in die Gleichung einer Cissoide, deren Lage gegen die Parabel so ist, dass die Ordinatenrichtung beiden gemeinschaftlich, die Abscissenrichtung entgegengesetzt ist.

9.

Die gegebene Curve sei die logarithmische Linie $y=e^x$. Die Differentialgleichung der Leitlinie ist:

$$\frac{\varrho}{2}\cdot\sin\theta+\frac{\varrho'}{2}\cdot\cos\theta=e^{\frac{\varrho}{2}\cos\theta-\frac{\varrho'}{2}\sin\theta}.$$

Daraus findet man die singuläre Auflösung:

$$-\cot\theta=e^{1+\frac{\varrho}{2\cos\theta}},$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten:

$$-\frac{\xi}{\eta}=e^{\frac{\xi^2+\eta^2+\xi}{2\xi}},$$

wo offenbar die zusammen gehörigen Abscissen und Ordinaten entgegengesetzte Zeichen führen.

10.

Als letztes Beispiel wollen wir zur Curve die logarithmische Spirale nehmen, deren Gleichung $r=e^t$. Nun war

$$\varrho'^2+\varrho^2=4r^2=4e^{2t},$$

also

$$t=\frac{1}{2}\log\frac{\varrho'^2+\varrho^2}{4};$$

ferner

$$t-\theta=\operatorname{arctg}\frac{\varrho'}{\varrho}.$$

Also durch Verbindung der beiden Gleichungen:

$$\operatorname{arctg}\frac{\varrho'}{\varrho}=\frac{1}{2}\log\frac{\varrho'^2+\varrho^2}{4}-\theta.$$

Die Differentiation dieser Gleichung nach ϱ' zeigt, dass

$$\frac{\frac{1}{\varrho}}{1+\frac{\varrho'^2}{\varrho^2}}=\frac{1}{2}\,\frac{\frac{2\varrho'}{4}}{\frac{\varrho'^2+\varrho^2}{4}},$$

folglich $\varrho'=\varrho$; und nun erhalten wir die Gleichung:

$$\operatorname{arctg}1=\frac{1}{2}\log\frac{\varrho^2}{2}-\theta,$$

oder wenn $\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}}=\alpha$ gesetzt wird:

$$\varrho=\alpha.e^{\theta},$$

wieder eine logarithmische Spirale. Diese merkwürdige Curve erzeugt sich also auch hier selbst, eine Eigenschaft, die sie bekanntlich bei jeder Gelegenheit zeigt.

11.

So wie wir bisher eine krumme Linie als Leitlinie einer anderen betrachtet haben, so können wir auch von Leitflächen reden, indem wir die Definition aufstellen: Die Leitfläche einer Fläche charakterisirt sich durch die Eigenschaft, dass die Normale, welche von irgend einem Punkte der ersten Fläche auf sie gefällt wird, gleich der Entfernung dieses Punktes von einem festen Punkte im Raume ist, den wir der Einfachheit wegen wieder zum Coordinatenanfangspunkte nehmen. Die Gleichung der gegebenen Fläche sei $f(x,y,z)=0$, die Gleichung der Leitfläche $\varphi(\xi,\eta,\zeta)=0$.

Die Gleichungen der Normale auf die Leitfläche, welche zugleich durch einen Punkt x, y, z geht, sind

$$x-\xi=-\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}(z-\zeta), \qquad y-\eta=-\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}(z-\zeta);$$

indem wir die partiellen Differentiale durch geschwungene ∂ bezeichnen. Ausserdem muss nun die Entfernung der Punkte x, y, z und ξ, η, ζ gleich der Entfernung des Punktes x, y, z vom Coordinatenanfangspunkte sein, also:

$$\sqrt{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\}}=\sqrt{\{x^2+y^2+z^2\}}.$$

Wir haben daher folgende fünf Gleichungen:

I. $\varphi(\xi, \eta, \zeta)=0)$,

II. $f(x, y, z)=0$,

III. $x-\xi=-\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}(z-\zeta)$,

IV. $y-\eta=-\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}(z-\zeta)$,

V. $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=2(x\xi+y\eta+z\zeta)$.

In Bezug auf Leitflächen lassen wir es vorläufig bei diesen Andeutungen bewenden, uns weitere Ausführung vorbehaltend.

XV.

Die Nichtigkeit des Neuton'schen Luftwiderstands-Gesetzes, so wie Vorschläge zur Auffindung des wahren.

Von

Herrn Brenner,

Lehrer zu Tuttlingen in Würtemberg.

Wie wünschenswerth es für die Wissenschaft, ja wie ausserordentlich wichtig es für die Ballistik wäre, das Gesetz zu kennen, nach welchem die atmosphärische Luft einem in ihr befindlichen Mobile einen Widerstand entgegensetzt, ist schon längst klar erkannt, und sind auch zu dessen Entdeckung sehr bedeutende Anstrengungen gemacht worden. Da die Luft in denjenigen Räumen, für die man jenen Widerstand gleichzeitig zu wissen nöthig hat, gleichzeitig auch vollkommen gleich vertheilt ist und gleiche Elasticität besitzt, so kann es nicht anders sein — sie muss in ihrem Widerstand ein ganz bestimmtes, vielleicht sehr einfaches, Gesetz befolgen, und es ist nur zu verwundern, dass bis Dato dieses Gesetz noch nicht hat entdeckt werden können.

Ich will nicht behaupten, dass durch eine Theorie, bei der man ein vollständig gleich dichtes und vollkommen elastisches Fluidum anzunehmen hat, nichts geleistet werden könne — aber das glaube ich, dass die Beobachtung sicherer und schneller zum Ziele führt, und dann mag die Theorie, wie diess in Beziehung auf die Lehren der Astronomie, Mechanik, Physik fast immer der Fall ist, ihre tiefere Begründung hintennach folgen lassen.

Wenn der Verfasser nicht den Versuch macht, vorliegendes Problem zum Ende zu führen, so liegt der Grund darin, dass ihm nicht die Mittel zu Gebot standen, die hier nöthigen Experimente mit der nöthigen Schärfe zu veranstalten.

Offenbar am wichtigsten ist der Widerstand, den die Luft der Kugel entgegensetzt, und darum werden sich die Vorschläge, die ich zu machen gedenke, auch nur auf jene beschränken. Dabei bin ich von der Zuversicht weit entfernt, dass der Zweck gerade auf den von mir vorgezeichneten Wegen erreicht werden kann, sondern glaube vielmehr, dass es nöthig werden möchte, auch die von mir entworfene detaillirte Theorie vielfältig zu modificiren, möglicher Weise gar zu verwerfen. Allein Beruhigung wird mirs gewähren und mit Freude mich erfüllen, wenn ich auch nur eine Idee aufgedeckt haben sollte, welche endlich zur Darstellung des fraglichen Gesetzes führen könnte.

Laplace gibt in seiner Mécanique céleste eine einfache Formel für jenes Gesetz an, wofern die von der Kugel beschriebene Curve bekannt ist. Bezeichnet man mit z die vertikalen Ordinaten, mit s den Bogen der Curve, mit g die örtliche Schwere und mit β den Widerstand, so ist

$$\beta = g \cdot \frac{\partial s . \partial^3 z}{2(\partial^2 z)^2},$$

wo sich die Differentiale auf die Abscissen x beziehen.

Wäre man im Stande, einer durch die Luft geworfenen grossen Kugel (Bombe) ein sehr intensives Licht mitzutheilen, welches weder die Dichtigkeit und Elasticität der die Kugel umgebenden Luft, noch die Masse und Oberfläche der Kugel veränderte, so könnte die Bahn auf folgende Weise gewonnen werden.

In der Seitenwand eines dunkeln Zimmers ist durch ein papierdünnes Blech eine sehr kleine, nicht eine halbe Linie im Durchmesser haltende kreisrunde Oeffnung angebracht, durch welche ein leuchtender Körper auf eine gegenüberstehende Wand einen hellen Punkt wirft. Hinter dieser Wand, welche aus durchscheinendem, auf ein sehr feines Drahtgeflecht aufgezogenem Papier besteht, steht ein Zeichner. Dieser kann sich vor dem Experiment üben, die Bahn eines durch ein bewegtes Licht hervorgebrachten hellen Punktes auf seiner Papierwand mit Genauigkeit zu zeichnen. Hierauf lässt man Nachts bei Windstille und in geeigneter (bedeutender) Entfernung vor der dunkeln Kammer vermittelst eines groben Geschützes (Bombe) die oben beschriebene leuchtende Kugel ihre Bahn durch die Luft beschreiben und der Zeichner zeichnet solche auf seine Wand, welche zu diesem Behuf vertikal stehen und mit der Ebene der von der Kugel beschriebenen Curve parallel sein muss. Die gezeichnete Bahn wird dadurch der wirklichen vollständig ähnlich und zeigt sich bloss in umgekehrter Lage. Beschreibt der helle Punkt auf der Wand in einer Sekunde den Weg von einem Fuss, so kann ein auch nicht sehr geübter Zeichner die Bahn gar wohl mit Genauigkeit aufzeichnen.

Es ist klar, dass der gesuchte Widerstand eine Funktion von der Geschwindigkeit v des Mobils ist. Die Formel

$$\beta = g \cdot \frac{\partial s . \partial^3 z}{2(\partial^2 z)^2} = \frac{1}{2} g v \cdot \frac{\partial^3 z}{(\partial^2 z)^2}$$

gibt jedoch denselben nicht als reine Funktion von v, sondern untermischt mit den Abscissen x. Man hat jedoch z in Funktion von x, oder $z = f(x)$, wodurch auch v sich als eine solche darstellt, d. h.

$$v = \sqrt{1 + \partial z^2} = \varphi(x).$$

Man wird daher aus dieser Gleichung und aus

$$\beta = \frac{1}{v} g v \cdot \frac{\partial^3 z}{(\partial^2 z)^2}$$

x eliminiren, um β in Funktion von v dargestellt zu sehen. — Wenn auch nicht die Gleichung der Bahn, so könnte vielleicht doch schon nach kurzem Ueberblick, vielleicht erst nach grosser Mühe, vielleicht auch gar nicht, eine endliche Form für den Widerstand hergestellt werden.

Praktischer noch und der Probe werth erscheint folgendes Verfahren, welches zu gleicher Zeit eine sehr einfache Analysis zulässt:

Indem man ein gutes Feuergewehr 10 — 15mal mit derselben Ladung versieht, bestimme man vermittelst des ballistischen Pendels auf einer horizontalen Ebene (Thal) bei Windstille und nach jedesmaligem Abfeuern die Geschwindigkeit der Kugel für verschiedene Entfernungen*). Um möglichste Gleichheit der Umstände herbeizuführen, wird man ein gutes, trockenes und gut gemischtes Pulver in völlig gleichen Quantitäten gebrauchen. Die Kugeln müssen vollständig rund und gleich schwer sein und dürfen nicht aus einem solchen Rohr geschossen werden, welches dieselben angreift. Nach jedem Schuss muss die Flinte wieder

---

*) Für die ersten Schüsse wähle man die kürzesten und gradationsweise für die später folgenden die grösseren Entfernungen. Beim ersten Schuss jedoch stelle man das Pendel nicht unmittelbar vor die Mündung des Rohrs, wegen des noch auf einige Weite wirkenden Pulverdampfes.

gereinigt werden, so wie man auch den ersten Schuss leer, d. h. nicht zur Beobachtung gehörig, thut. Das Pflaster muss passend und für alle Schüsse gleich sein; die Flinte oder auch nur deren Rohr werde sehr fest angeschraubt. — Um sich aber von der Gleichheit der Umstände zu überzeugen, wird man 4—6 Schüsse in gleicher Entfernung thun und zusehen, ob sich stets die gleiche Geschwindigkeit zeigt.

Die Bahn der Kugel kann man geradlinig und als Abscissenaxe x annehmen, wo man den Anfang vom Schiessstandpunkt aus zählt. Je kleiner die Geschwindigkeit v wird, desto grösser ist die Abscisse x, und wir können desswegen die letztere in Funktion der erstern ausdrücken, und zwar durch

$$x = \frac{1}{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 v^2 + \varepsilon_3 v^3 \ldots.}$$

oder

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 v^2 + \varepsilon_3 v^3 \ldots = \frac{1}{x}.$$

Bezeichnet man die zusammengehörigen Beobachtungswerthe von x und v je durch x_1 und v_1; x_2 und v_2; x_3 und v_3 u. s. w., so lassen sich folgende Gleichungen formiren, aus denen die Coefficienten ε_0, ε_1, $\varepsilon_2 \ldots$ berechnet werden können:

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_1^2 + \varepsilon_3 v_1^3 \ldots. = \frac{1}{x_1},$$

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 v_2 + \varepsilon_2 v_2^2 + \varepsilon_3 v_2^3 \ldots. = \frac{1}{x_2},$$

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 v_3 + \varepsilon_2 v_3^2 + \varepsilon_3 v_3^3 \ldots.. = \frac{1}{x_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nun ist aber, wenn man den Luftwiderstand durch γ bezeichnet, nach den bekannten Lehren der Mechanik

$$\partial v = -\gamma,$$

$$v = \partial x.$$

Stellt man x durch $\varphi(v)$ dar, und $\partial_v \varphi(v)$ durch $\varphi'(v)$, so hat man

$$\partial x = \varphi'(v)\,\partial v.$$

oder

$$v = -\varphi'(v)\gamma$$

und

$$\gamma = -\frac{v}{\varphi'(v)}.$$

Es ist aber

$$\varphi(v) = \frac{1}{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 v^2 + \varepsilon_3 v^3 \ldots\ldots}$$

und

$$\varphi'(v) = -\frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 v + 3\varepsilon_3 v^2 \ldots\ldots}{(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 v^2 + \varepsilon_3 v^3 \ldots\ldots)^2},$$

folglich

$$\gamma = \frac{v(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 v^2 + \varepsilon_3 v^3 \ldots\ldots)^2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 v + 3\varepsilon_3 v^2 \ldots\ldots},$$

welchem sich leicht die Form geben lässt:

$$\gamma = pv + p_2 v^2 + p_3 v^3 + p_4 v^4 + \ldots\ldots$$

Nehmen wir auf einen Augenblick an, γ enthalte bloss das Glied Pv^m, so können wir auf die zwischen x und v existirende Gleichung dadurch zurücksteigen, dass wir die beiden obigen Gleichungen der Bewegung mit einander multipliciren. Sie geben

$$v\partial v = -\gamma \partial x$$

und

$$\partial x = -\frac{v\partial v}{\gamma} = -\frac{1}{P}\frac{v\partial v}{v^m},$$

deren Integral ist:

$$x = C + \frac{1}{P(m-2)} \cdot \frac{1}{v^{m-2}}.$$

Es ist zu gleicher Zeit $x = x_1$ und $v = v_1$, und desswegen

$$x - x_1 = \frac{1}{P(m-2)}\left(\frac{1}{v^{m-2}} - \frac{1}{v_1^{\,m-2}}\right).$$

Ist $m > 2$, so wird für $v = 0$ die Entfernung $x = \infty$.

Ist $m = 2$, so wird der Nenner $m - 2 = 0$. Allein die unmittelbare Integration gibt

$$x - x_1 = \frac{1}{P} \log \frac{v_1}{v}.$$

Auch in diesem Fall ist für $v=0$ die Entfernung $x=\infty$, d. h. in beiden Fällen wird die Kugel nie zum Stillstand kommen. Ist aber $m<2$, so hat man

$$x - x_1 = \frac{1}{P(2-m)} (v_1^{2-m} - v^{2-m}).$$

Hier ist nun für $v=0$ die Entfernung

$$x = x_1 + \frac{v_1^{2-m}}{P(2-m)},$$

wird aber desto grösser, je mehr sich m dem Werthe 2 nähert.

In der That, je grösser m wird, desto kleiner wird der Widerstand $\gamma = Pv^m$ bei abnehmender Geschwindigkeit v, und ist diese Geschwindigkeit eine unendlich kleine Grösse der ersten Ordnung geworden, so ist schon bei $m=2$ der Widerstand eine unendlich kleine Grösse der zweiten Ordnung.

Hat daher der Widerstand γ die Form

$$\gamma = Pv^m + P_2 v^n + P_3 v^o \ldots,$$

wo keiner der Exponenten $m, n, o \ldots$ kleiner ist als 2, so wird auch noch in diesem Fall die Kugel nie zum Stillstand kommen. Könnte nun durch Beobachtung nachgewiesen werden, dass ein Mobil durch den Widerstand der Luft allein wirklich zum Stillstand gebracht wird, so würde daraus folgen, dass γ wenigstens ein Glied enthalten muss, in welchem der Coefficient von v kleiner ist als 2.

Lasse ich aber einen Pendel schwingen, bei dem die Schwere bekanntlich das Bestreben äussert, dasselbe fortwährend die gleichen Schwingungen beschreiben zu lassen, und bei dem ich die Reibung durch eine Messerschärfe nach der Vorrichtung Taf. III. Fig. 3. wohl gänzlich beseitige, so wird man schon nach einigen Stunden völlige Ruhe gewahren*), ein Beweis dass das Neuton'sche Gesetz, welches $m=2$ setzt, unrichtig ist.

---

*) Eine mittelst einer hölzernen Kugel gemachte Beobachtung hat die Ruhe nach Verfluss von 5 St. 2 M. nachgewiesen. Das Pendel war 70,4 Par. Zoll lang, die Kugel hatte im Durchmesser 5,09'' und wog 3 Pfd. 12 Lth. Württembergisch; das Pendel wurde Anfangs um den Winkel von 5° 56' aus der vertikalen Lage gebracht.

Die leichteste und schärfste Beobachtung lässt das Pendel zu, allein sie führt eine sehr schwierige Theorie im Gefolge.

Man lasse nemlich eine Kugel an einem möglichst dünnen Drathe, mit angemessenen Dimensionen und an geeignetem Orte, schwingen, und beobachte die durch den Luftwiderstand stetig verringerten Ausschlagwinkel.

Es sei (Taf. III. Fig. 4.) A der Aufhängepunkt, AZ eine Vertikale, $AC=r$ die Verbindungslinie des erstern mit dem Centrum C der Kugel, AM eine andere Gerade an ein ganz beliebiges Element dM derselben.

Dieses Element dM wird von der Schwere g nach der vertikalen Richtung MG sollicitirt, und zwar mit der bewegenden Kraft $g\varrho dM$, wenn wir die Dichtigkeit der Masse $=\varrho$ setzen. Die Bewegung der Kugel aber können wir vermittelst der Momentengleichung bestimmen. Wir zerlegen daher die Kraft $g\varrho dM$ in zwei Kräfte, die eine nach der Verlängerung von AM, die andere nach der auf derselben Senkrechten ML. Die erstere wird im Aufhängepunkt zernichtet, die andere aber ist

$$g\varrho dM.\sin w,$$

wenn wir den Winkel MAZ gleich w setzen. Setzen wir $AM=R$, so ist die Geschwindigkeit des Elements dM gleich $R\partial w$, wobei wir uns die Kugel von der Vertikalen AZ sich entfernend, oder kurz steigend, denken. Folglich ist das Wachsthum an bewegender Kraft

$$=g\varrho R dM\partial^2 w,$$

welche Grösse nach D'Alembert's Lehrsatz negativ in Rechnung zu bringen ist. Da wir die von AZ sich entfernende Richtung positiv nehmen, so ist die Kraft

$$g\varrho dM.\sin w$$

gleichfalls negativ zu nehmen.

Die von diesen Kräften herrührenden Momentensummen sind daher

$$-\varrho\int dM(R^2\partial^2 w+Rg\sin w).$$

Ueberdiess wirkt auf die Kugel noch der Widerstand der Luft, und zwar verzögernd. Setzen wir den absoluten Luftwiderstand $=\gamma$, so können wir uns denselben im Centrum der Kugel angebracht denken und somit haben wir für dessen Moment

$$r\gamma.$$

Somit haben wir endlich die Gleichung

$$\varrho\int dMR^2\partial^2 w + \varrho g\int RdM\sin w + r\gamma = 0\,.$$

Ziehe ich aber die senkrechte Linie MN, so ist $MN = R\sin w$ und das Glied

$$\varrho\int RdM\sin w = \varrho\int MN.dM\,.$$

Bekanntlich ist aber $\varrho\int MN.dM$ gleich dem statischen Momente der ganzen bewegten Masse ϱM in Beziehung auf den Schwerpunkt. Ziehe ich daher CP senkrecht auf AZ, so ist

$$\varrho\int RdM\sin w = \varrho M.CP = \varrho Mr\sin\theta,$$

wenn wir den Winkel $CAZ = \theta$ setzen.

Da nun auch $\partial^2 w = \partial^2\theta$, so gestaltet sich unsere Gleichung wie folgt:

$$\varrho\partial^2\theta\int R^2 dM + \varrho gMr\sin\theta + r\gamma = 0\,.$$

$\varrho\int R^2 dM$ ist aber das Trägheitsmoment der Kugel in Beziehung auf eine durch A gehende Axe. Ist die Kugel hohl und ihr äusserer Durchmesser $= A$, so wie ihr innerer $= a$, so hat man

$$\varrho\int R^2 dM = \varrho\left[\frac{8}{15}\pi(A^5 - a^5) + \frac{4}{3}\pi r^2(A^3 - a^3)\right].$$

Setzt man das Verhältniss $\frac{a}{A} = k$, so ist

$$\varrho\int R^2 dM = \frac{4}{3}\varrho\pi A^3(1-k^3)\left[\frac{2}{5}A^2\cdot\frac{1-k^5}{1-k^3} + r^2\right].$$

Gleicherweise ist

$$\varrho M = \frac{4}{3}\varrho\pi A^3(1-k^3)\,.$$

Setze ich nun

$$r + \frac{2}{5}\cdot\frac{A^2}{r}\cdot\frac{1-k^5}{1-k^3} = l,$$

so nimmt die Differentialgleichung die Form an:

$$1)\quad \partial^2\theta + \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{1}{\varrho Ml}\gamma = 0.$$

Ist A gegen r sehr klein, so ist beinahe $l = r$. Es ist aber l die Länge des mathematischen Pendels, d. h. desjenigen, bei dem man sich die Masse in Einem Punkt vereinigt denken kann, und der mit dem physikalischen gleiche Schwingungen macht.

Ist die Kugel im Sinken begriffen, so nimmt der Zuwachs $\partial^2\theta$, so wie auch die Schwere g, das entgegengesetzte Zeichen an, während γ das seinige beibehält. Diess lauft aber darauf hinaus, die Zeichen der beiden ersten Grössen zu belassen, hingegen dasjenige von γ zu ändern. Demnach hat man für die fallende Kugel die Differentialgleichung

$$2)\quad \partial^2\theta + \frac{g}{l}\sin\theta - \frac{1}{\varrho Ml}\gamma = 0.$$

Der Luftwiderstand γ ist, wie wir oben gesehen haben, eine Funktion von v, und wir setzen sie auch in obiger Form, nemlich

$$\gamma = p_1 v + p_2 v^2 + p_3 v^3 + p_4 v^4 \ldots\ldots$$

Für unsern Fall haben wir aber

$$v = r\partial\theta,$$

demnach

$$\gamma = p_1 r\partial\theta + p_2 r^2\partial\theta^2 + p_3 r^3\partial\theta^3 + \ldots\ldots$$

Das Neuton'sche Gesetz kennt nur das zweite Glied dieser Reihe, und es ist auch zu vermuthen, dass bei weitem der grösste Theil des Widerstandes auf Rechnung dieses Gliedes kommt. Wir suchen daher vorerst unsere Differentialgleichungen für den Fall des Neuton'schen Gesetzes zu integriren. Setzen wir daher

$$\gamma = P_2 v^2 = P_2 r^2\partial\theta^2 \quad \text{und} \quad \frac{P_2 r^2}{\varrho Ml} = \frac{1}{2}u;$$

so ergeben sich

$$3)\quad \partial^2\theta + \frac{g}{l}\sin\theta - \frac{1}{2}u\partial\theta^2 = 0$$

für die fallende, und

$$4)\quad \partial^2\theta + \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{1}{2}u\partial\theta^2 = 0$$

für die steigende Kugel.

Das Integral der erstern ist:

$$\partial\theta^2 = uCe^{u\theta} + \frac{2g}{(1+u^2)l}(\cos\theta + u\sin\theta),$$

und der letztern:

$$\partial\theta^2 = -uC^{-u\theta} + \frac{2g}{(1+u^2)l}(\cos\theta - u\sin\theta),$$

wo C die willkührlichen Constanten vorstellen.

Für das erste Integral bestimmt sich die Constante aus der Anfangsgeschwindigkeit $\partial\theta$, die man $=0$ nimmt, und für das andere aus der Endgeschwindigkeit, die ebenfalls $=0$ ist. Ist für den ersten Fall der beobachtete Winkel $\theta=\theta_n$ und im andern $\theta=\theta_{n+1}$, so ergibt sich

$$5)\quad \partial\theta^2 = \frac{2g}{(1+u^2)l}[\cos\theta + u\sin\theta - (\cos\theta_n + u\sin\theta_n)e^{-u(\theta_n-\theta)}]$$

und

$$6)\quad \partial\theta^2 = \frac{2g}{(1+u^2)l}[\cos\theta - u\sin\theta - (\cos\theta_{n+1} - u\sin\theta_{n+1})e^{u(\theta_{n+1}-\theta)}].$$

Betrachtet man die Geschwindigkeiten zweier auf einander folgenden Zweige, so müssen dieselben im tiefsten Punkte, wo $\theta=0$ ist, einander gleich sein. Diess liefert die Gleichung

$$\frac{\cos\theta_n + u\sin\theta_n}{\cos\theta_{n+1} - u\sin\theta_{n+1}} = e^{u(\theta_n+\theta_{n+1})}.$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung von u. Gibt man n aber verschiedene Werthe, d. h. zieht man nach und nach viele oder alle Beobachtungen herein, so kann u vermittelst verschiedener Gleichungen bestimmt werden. Weisen sich alle u gleich aus, so ist das Neuton'sche Gesetz das wahre, wo nicht, so ist es unrichtig.

Zu diesem Zwecke sind mit einer Hohlkugel in der grossen Stadtkirche zu Tuttlingen zwei Beobachtungen gemacht worden, und ich halte es nicht für überflüssig, die dabei beobachtete Methode auseinanderzusetzen. Der Drath wurde so dünn genommen, dass dessen Einfluss auf die Oscillationen unmerklich sind, jedoch nicht in solchem Grade, dass er durch die verschiedenen Anspannungen verschiedene Dimensionen angenommen hätte. Um die Ausschlagwinkel mit Schärfe zu bestimmen, war es durchaus nothwendig, dass nach jedem Zurücksinken der Kugel durch irgend eine Vorrichtung sich eine Ruhe einstellte (die Ruhe des zurückgehenden Drathes ist nur momentan), in der man an einem Lineal den Schenkel jenes Winkels zeichnen kann. Diesen Zweck unterstützte der glückliche Umstand, dass man die kleineren Ausschlagwinkel als weniger brauchbar verwerfen kann, weil nur die grössern wegen ihrer grössern Differenzen sichere Resultate gewähren.

Man schlägt nemlich in ein vollkommen geebnetes, mit seiner Ebene vertikal stehendes und gut befestigtes Brett einen möglichst dünnen Stift völlig senkrecht auf die Brettebene. An diesen Stift wird, etwa eine Linie vom Brett entfernt, der die Kugel tragende Drath mit einer einfachen Schlaufe angehängt, und der Kugel eine solche Schwingung gegeben, dass der Drath stets mit dem Brett parallel lauft. Vorher aber wird auf den Stift folgende Vorrichtung geschoben:

Man verfertige sich aus Kartenpapier oder starkem doppelt zusammengeleimten Notenpapier eine zweifach ausgeschnittene Scheibe in angemessenen Dimensionen. *A* (Taf. III. Fig. 5.) ist der kreisrunde kleine Ausschnitt, durch den der Stift kommt und in dem eben dieser Stift noch einige Spannung hat. Durch den Mittelpunkt in *A* werden zwei einen Winkel von etwa 30° bildende Gerade *DC* und *BE* gezogen. In *B* und *C* werden zwei ebenfalls von Papierstreifen gemachte Stifte, deren Seitenansicht *L* zeigt, angeleimt, wobei aber die durch die Dreieckchen bestimmten Flächen genau senkrecht auf der Ebene der Scheibe und übrigens so stehen, dass die Linien *DC* und *BE* durch diese Dreiecksflächen gehen. Der Winkel *DAE* wird durch die Linie *FG* ungefähr in zwei gleiche Theile getheilt und das Dreieckchen *FGH* heraus geschnitten, wo dann *FG* das Lineal bildet. Diese Scheibe wird ganz an das befestigte ebene Brett angelehnt und kann sich leicht um den Zapfen *A* bewegen, bleibt aber augenblicklich stehen, so bald die auf dieselbe wirkende Kraft aufhört. Hierauf lasse man die Kugel in völliger Ruhe (vertikal) hängen, und bewege die Scheibe *DEBC* zweimal so, dass die Stifte *B* und *C* den Drath berühren, drücke dieselbe (die Scheibe) jedesmal mit der linken Hand an das Brett und mache mit einem fein gespitzten Bleistift an dem Lineal *FG* eine Linie auf das an das Brett aufgeleimte Papier. Diese Linien verlängere man zur Unterscheidung noch etwas über *F* hinaus, weil sie die Fundamentalschenkel der zu messenden Winkel bilden. Hierauf lasse man die Kugel unter einem Winkel von etwa 60° so in die Höhe halten, dass der Drath bei fortwährender Anspannung durch den Mittelpunkt derselben geht. Der Drath aber wird die bewegliche Scheibe an einem der Stifte *B* oder *C* seitwärts ziehen, und in der Ruhe angelangt, wird man sie mit den Fingern der linken

Hand andrücken, und am Lineal seine dritte Linie ziehen. Hierauf lässt man die Kugel ruhig fallen, und im Fall wird der Drath am andern Stift die Scheibe auf die andere Seite schieben, und nach seiner Zurückweichung dieselbe auf einige Zeit in Ruhe lassen. Diese Ruhe benutzt man, um am Lineal die vierte Linie zu ziehen; dabei aber wird man sich beeilen, der Scheibe durch Aufheben der linken Hand die Freiheit wieder zu geben, damit sie abermal geschoben werden kann, um wieder in Ruhe zu gelangen. So wird man sich so viele Linien zeichnen, als man Winkel nöthig zu haben glaubt, ja man wird für eine zweite, dritte u. s. w. Beobachtung stets nur ein neues Papier an seinen vier Ecken auf das Brett ankleben. Das jedesmalige Schieben der Scheibe bedarf einer so geringen Kraft, dass der Drath nicht merklich gebogen wird, wovon man sich leicht überzeugen kann. Zuletzt wird sich folgende Zeichnung (Taf. III. Fig. 6.) darstellen: *AB* und *CD* sind die beiden Fundamentalschenkel. Die von der Vertikalen rechts abliegenden Winkel des Pendels liegen hier von *CD* links und werden auch von *CD* an gemessen. Die übrigen liegen rechts von *AB* und werden auch von *AB* an gemessen. — Auf solche Weise wurden folgende Resultate erzielt:

Beobachtung den 24. September 1849.

Erste Winkelbeobachtung.		Zweite Winkelbeobachtung.	
$\theta_1 = 55^0 45'$	$\theta_{21} = 25^0 30'$	$\theta_1 = 63^0 50'$	$\theta_{21} = 27^0$
$\theta_2 = 52^0 30'$	$\theta_{22} = 25^0$	$\theta_2 = 59^0 30'$	$\theta_{22} = 26^0 30'$
$\theta_3 = 50^0 15'$	$\theta_{23} = 24^0 15'$	$\theta_3 = 56^0$	$\theta_{23} = 25^0 45'$
$\theta_4 = 47^0 10'$	$\theta_{24} = 23^0 45'$	$\theta_4 = 52^0 45'$	$\theta_{24} = 25^0$
$\theta_5 = 45^0 15'$	$\theta_{25} = 23^0$	$\theta_5 = 50^0$	$\theta_{25} = 24^0 20'$
$\theta_6 = 43^0$	$\theta_{26} = 22^0 30'$	$\theta_6 = 48^0$	$\theta_{26} = 23^0 40'$
$\theta_7 = 41^0 15'$	$\theta_{27} = 21^0 45'$	$\theta_7 = 45^0 15'$	$\theta_{27} = 23^0$
$\theta_8 = 39^0 30'$	$\theta_{28} = 21^0 30'$	$\theta_8 = 43^0 15'$	$\theta_{28} = 22^0 30'$
$\theta_9 = 37^0 50'$	$\theta_{29} = 20^0 45'$	$\theta_9 = 41^0$	$\theta_{29} = 22^0$
$\theta_{10} = 36^0 20'$	$\theta_{30} = 20^0 20'$	$\theta_{10} = 39^0 45'$	$\theta_{30} = 21^0 30'$
$\theta_{11} = 35^0$	$\theta_{31} = 19^0 45'$	$\theta_{11} = 37^0 50'$	$\theta_{31} = 21^0$
$\theta_{12} = 33^0 45'$	$\theta_{32} = 19^0 30'$	$\theta_{12} = 36^0 45'$	$\theta_{32} = 20^0 30'$
$\theta_{13} = 32^0 40'$	$\theta_{33} = 18^0 45'$	$\theta_{13} = 35^0 10'$	$\theta_{33} = 20^0$
$\theta_{14} = 31^0 20'$	$\theta_{34} = 18^0 30'$	$\theta_{14} = 33^0 45'$	$\theta_{34} = 19^0 45'$
$\theta_{15} = 30^0 15'$	$\theta_{35} = 18^0$	$\theta_{15} = 32^0 40'$	$\theta_{35} = 19^0 15'$
$\theta_{16} = 29^0 30'$	$\theta_{36} = 17^0 50'$	$\theta_{16} = 31^0 30'$	$\theta_{36} = 19^0$
$\theta_{17} = 28^0 30'$	$\theta_{37} = 17^0 25'$	$\theta_{17} = 30^0 30'$	$\theta_{37} = 18^0 30'$
$\theta_{18} = 28^0$	$\theta_{38} = 17^0 15'$	$\theta_{18} = 29^0 30'$	$\theta_{38} = 18^0 15'$
$\theta_{19} = 27^0$		$\theta_{19} = 28^0 45'$	$\theta_{39} = 17^0 45'$
$\theta_{20} = 26^0 15'$		$\theta_{20} = 28^0$	$\theta_{40} = 17^0 30'$

Pendellänge (bis zum Centrum der Kugel) $= 27',577$ Württemb.
Aeusserer Durchmesser der Kugel $= 1',034$.
Gewicht derselben = 8 Pfund $12\frac{1}{2}$ Loth Württemb.
Barometerstand $24'' 4\frac{1}{2}'''$.
Thermometerstand $+ 11^0$ Reaumur.

Es wurde auch mit einer zweiten massiven Kugel in der Grösse einer Kegelkugel eine dritte Beobachtung angestellt; allein sie bietet wegen der dabei vorgekommenen Eile so wenig Zuverlässigkeit dar, dass ihre Angabe hier füglich weg bleiben mag.

Vergleicht man die beiden obigen Beobachtungen mit einander, so bemerkt man, dass θ_1 der zweiten nur um 15′ grösser ist als θ_1 der ersten, und dass die nachfolgenden Differenzen selten um mehr als 15′ schwanken, und zwar hat die zweite Beobachtung das stete Bestreben, ihre θ um 15′ höher anzugeben; ja die letztbeobachteten Winkel zeigen dieselbe Differenz (15′), ein Beweis, wie gut die Kugel geschwungen hat. Die einzige Ausnahme machen $\theta_4 = 47^0\,10'$ und $\theta_6 = 48^0$, wo sich ein grösserer Beobachtungsfehler eingeschlichen hat.

Die vorkommenden Abweichungen von der Differenz $= 15'$ rühren überhaupt von Beobachtungsfehlern, so wie auch von der nicht strengen Messung her, denn die letztere geschah mittelst eines Transporteurs, welcher bloss in halbe Grade abgetheilt war.

Bildet man für beide Beobachtungen eine erste Differenzenreihe, indem stets θ_{n+1} von θ_n abgezogen wird, so überzeugt man sich bald, dass diejenige der zweiten Beobachtung mehr Regelmässigkeit zeigt, als diejenige der ersten. Wir benutzen daher für unsere Untersuchung die zweite Beobachtung als die zuverlässigere. — Formirt man aus der ersten Differenzenreihe nochmals eine zweite, so kommt in derselben ein gar unregelmässiges Schwanken, d. h. ein solches Fallen und Steigen zum Vorschein, welches in Wirklichkeit unmöglich existiren kann. Diese Bemerkung bietet ein ziemlich genaues Correktionsmittel dar. Man bildet sich nemlich aus der zweiten Differenzenreihe eine neue zweite Differenzenreihe, welche fallend ist, aber beim Ansteigen auf die erste Differenzenreihe und von dieser auf die ursprüngliche Reihe, in der letztern keine Winkel erzeugt, welche von den beobachteten zu sehr verschieden wären. Wir gewinnen demnach unsere corrigirten θ vermittelst folgender Reihen:

Ursprüngliche Werthe.			Neue Werthe.		
θ	$\Delta\theta$	$\Delta^2\theta$	$\Delta^2\theta$	$\Delta\theta$	θ
$\theta_1 = 63^\circ 50'$					$\theta_1 = 63^\circ 50'$
$\theta_2 = 59^\circ 30'$	$4^\circ 20'$			$4^\circ 20'$	$\theta_2 = 59^\circ 30'$
$\theta_3 = 56^\circ$	$3^\circ 30'$	$50'$	$50'$	$3^\circ 30'$	$\theta_3 = 56^\circ$
$\theta_4 = 52^\circ 45'$	$3^\circ 15'$	$15'$	$30'$	3°	$\theta_4 = 53^\circ$
$\theta_5 = 50^\circ$	$2^\circ 45'$	$30'$	$18'$	$2^\circ 42'$	$\theta_5 = 50^\circ 18'$
$\theta_6 = 48^\circ$	2°	$45'$	$12'$	$2^\circ 30'$	$\theta_6 = 47^\circ 48'$
$\theta_7 = 45^\circ 15'$	$2^\circ 45'$	$-45'$	$10'$	$2^\circ 20'$	$\theta_7 = 45^\circ 28'$
$\theta_8 = 43^\circ 15'$	2°	$45'$	$10'$	$2^\circ 10'$	$\theta_8 = 43^\circ 18'$
$\theta_9 = 41^\circ$	$2^\circ 15'$	$-15'$	$10'$	2°	$\theta_9 = 41^\circ 18'$
$\theta_{10} = 39^\circ 45'$	$1^\circ 15'$	1°	$10'$	$1^\circ 50'$	$\theta_{10} = 39^\circ 28'$
$\theta_{11} = 37^\circ 50'$	$1^\circ 55'$	$-40'$	$9'$	$1^\circ 41'$	$\theta_{11} = 37^\circ 47'$
$\theta_{12} = 36^\circ 45'$	$1^\circ 5'$	$50'$	$9'$	$1^\circ 32'$	$\theta_{12} = 36^\circ 15'$
$\theta_{13} = 35^\circ 10'$	$1^\circ 35'$	$-30'$	$9'$	$1^\circ 23'$	$\theta_{13} = 34^\circ 52'$
$\theta_{14} = 33^\circ 45'$	$1^\circ 25'$	$10'$	$9'$	$1^\circ 14'$	$\theta_{14} = 33^\circ 38'$
$\theta_{15} = 32^\circ 40'$	$1^\circ 5'$	$20'$	$8'$	$1^\circ 6'$	$\theta_{15} = 32^\circ 32'$
$\theta_{16} = 31^\circ 30'$	$1^\circ 10'$	$-5'$	$6'$	1°	$\theta_{16} = 31^\circ 32'$
$\theta_{17} = 30^\circ 30'$	1°	$10'$	$4'$	$56'$	$\theta_{17} = 30^\circ 36'$
$\theta_{18} = 29^\circ 30'$	1°	0	$2'$	$54'$	$\theta_{18} = 29^\circ 42'$
$\theta_{19} = 28^\circ 45'$	$45'$	$15'$	$2'$	$52'$	$\theta_{19} = 28^\circ 50'$
$\theta_{20} = 28^\circ$	$45'$	0	$2'$	$50'$	$\theta_{20} = 28^\circ$
$\theta_{21} = 27^\circ$	1°	$-15'$	$2'$	$48'$	$\theta_{21} = 27^\circ 12'$
$\theta_{22} = 26^\circ 30'$	$30'$	$30'$	$2'$	$46'$	$\theta_{22} = 26^\circ 26'$
$\theta_{23} = 25^\circ 45'$	$45'$	$-15'$	$2'$	$44'$	$\theta_{23} = 25^\circ 42'$
$\theta_{24} = 25^\circ$	$45'$	0	$2'$	$42'$	$\theta_{24} = 25^\circ$
$\theta_{25} = 24^\circ 20'$	$40'$	$5'$	$2'$	$40'$	$\theta_{25} = 24^\circ 20'$
$\theta_{26} = 23^\circ 40'$	$40'$	0	$2'$	$38'$	$\theta_{26} = 23^\circ 42'$
$\theta_{27} = 23^\circ$	$40'$	0	$2'$	$36'$	$\theta_{27} = 23^\circ 6'$
$\theta_{28} = 22^\circ 30'$	$30'$	$10'$	$2'$	$34'$	$\theta_{28} = 22^\circ 32'$
$\theta_{29} = 22^\circ$	$30'$	0	$2'$	$32'$	$\theta_{29} = 22^\circ$
$\theta_{30} = 21^\circ 30'$	$30'$	0	$2'$	$30'$	$\theta_{30} = 21^\circ 30'$
$\theta_{31} = 21^\circ$	$30'$	0	$1'$	$29'$	$\theta_{31} = 21^\circ 1'$
$\theta_{32} = 20^\circ 30'$	$30'$	0	$1'$	$28'$	$\theta_{32} = 20^\circ 33'$
$\theta_{33} = 20^\circ$	$30'$	0	$1'$	$27'$	$\theta_{33} = 20^\circ 6'$
$\theta_{34} = 19^\circ 45'$	$15'$	$15'$	$1'$	$26'$	$\theta_{34} = 19^\circ 40'$
$\theta_{35} = 19^\circ 15'$	$30'$	$-15'$	$1'$	$25'$	$\theta_{35} = 19^\circ 15'$
$\theta_{36} = 19^\circ$	$15'$	$15'$	$1'$	$24'$	$\theta_{36} = 18^\circ 51'$
$\theta_{37} = 18^\circ 30'$	$30'$	$-15'$	$1'$	$23'$	$\theta_{37} = 18^\circ 28'$
$\theta_{38} = 18^\circ 15'$	$15'$	$15'$	$1'$	$22'$	$\theta_{38} = 18^\circ 6'$
$\theta_{39} = 17^\circ 45'$	$30'$	$-15'$	$1'$	$21'$	$\theta_{39} = 17^\circ 45'$
$\theta_{40} = 17^\circ 30'$	$15'$	$15'$	$1'$	$20'$	$\theta_{40} = 17^\circ 25'$

Ist nun u_n ein Werth, der die Gleichung

$$\frac{\cos\theta_n + u\sin\theta_n}{\cos\theta_{n+1} - u\sin\theta_{n+1}} = e^{u(\theta_n+\theta_{n+1})}$$

beinahe befriedigt, so ist der Correktionswerth

$$h = \frac{e^{u(\theta_n+\theta_{n+1})}(\cos\theta_{n+1} - u\sin\theta_{n+1}) - \cos\theta_n - u\sin\theta_n}{\sin\theta_n + \sin\theta_{n+1} \,.\, e^{u(\theta_n+\theta_{n+1})} - (\theta_n+\theta_{n+1})e^{u(\theta_n+\theta_{n+1})}(\cos\theta_{n+1} - u\sin\theta_{n+1})}\,.$$

Auf solche Weise arbeitet man sich zu den Werthen hin:

$$
\begin{array}{llcl}
u_1 & =0{,}090184 & \text{zwischen} & \theta_1 - \theta_2, \\
u_2 & =0{,}083951 & ,, & \theta_2 - \theta_3, \\
u_3 & =0{,}081468 & ,, & \theta_3 - \theta_4, \\
u_4 & =0{,}082195 & ,, & \theta_4 - \theta_5, \\
u_5 & =0{,}084885 & ,, & \theta_5 - \theta_6, \\
u_6 & =0{,}088096 & ,, & \theta_6 - \theta_7, \\
u_7 & =0{,}090690 & ,, & \theta_7 - \theta_8, \\
u_8 & =0{,}092548 & ,, & \theta_8 - \theta_9, \\
u_9 & =0{,}093397 & ,, & \theta_9 - \theta_{10}, \\
u_{10} & =0{,}094023 & ,, & \theta_{10} - \theta_{11}, \\
u_{11} & =0{,}093487 & ,, & \theta_{11} - \theta_{12},
\end{array}
$$

so wie noch

$$u_{16}=0{,}0814792 \quad ,, \quad \theta_{16}-\theta_{17}$$

und

$$u_{21}=0{,}0902923 \quad ,, \quad \theta_{21}-\theta_{22}.$$

Aus der Verschiedenheit dieser Werthe von u geht klar hervor, dass das Neuton'sche Gesetz nicht das richtige ist, und es handelt sich nun darum, das wahre Gesetz der Natur darzustellen.

Den sichersten Weg, der uns zu unserm Zwecke führen kann, bietet der Umstand dar, dass der niedersteigende und aufsteigende Zweig der Bahn, wofern beide aufeinanderfolgend oder zusammengehörig sind, in ihren tiefsten Punkten gleiche Winkelgeschwindigkeiten $\partial\theta$ haben.

Hierzu bedürfen wir aber der vollständigen Integrale der beiden Gleichungen 2) und 1). Für 2) (niedersteigend) setzen wir

$$7) \quad \partial\theta^2 = X_n + \alpha_1(\theta_n - \theta) + \alpha_2(\theta_n^2 - \theta^2) + \alpha_3(\theta_n^3 - \theta^3) + \dots\dots$$

und für 1) (aufsteigend)

$$8) \quad \partial\theta^2 = Y_{n+1} + \beta_1(\theta_{n+1} - \theta) + \beta_2(\theta^2_{n+1} - \theta^2) + \beta_3(\theta^3_{n+1} - \theta^3) + \dots\dots$$

indem

$$X_n = \frac{2g}{(1+u^2)l}[\cos\theta + u\sin\theta - (\cos\theta_n + u\sin\theta_n)e^{-u(\theta_n - \theta)}],$$

$$Y_{n+1} = \frac{2g}{(1+u^2)l}[\cos\theta - u\sin\theta - (\cos\theta_{n+1} - u\sin\theta_{n+1})e^{u(\theta_{n+1} - \theta)}];$$

und wo n jede ganze Zahl vorstellen kann, hingegen α_m und β_m, so wie u noch zu bestimmende Coefficienten sind. Für $\theta=0$ sind je beide Werthe von $\partial\theta$ einander gleich. So viele Werthe man daher n zuweist, so viele Gleichungen werden aus 7) und 8) entspringen, welche zur Bestimmung der Coefficienten α_m und β_m dienen. Diese Gleichungen sind:

$$9)\quad \begin{cases} X_1 + \alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta^2_1 + \alpha_3\theta^3_1 \ldots = Y_2 + \beta_1\theta_2 + \beta_2\theta^2_2 + \beta_3\theta^3_2 \ldots, \\ X_2 + \alpha_1\theta_2 + \alpha_2\theta^2_2 + \alpha_3\theta^3_2 \ldots = Y_3 + \beta_1\theta_3 + \beta_2\theta^2_3 + \beta_3\theta^3_3 \ldots, \\ X_3 + \alpha_1\theta_3 + \alpha_2\theta^2_3 + \alpha_3\theta^3_3 \ldots = Y_4 + \beta_1\theta_4 + \beta_2\theta^2_4 + \beta_3\theta^3_4 \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots \\ X_n + \alpha_1\theta_n + \alpha_2\theta^2_n + \alpha_3\theta^3_n \ldots = Y_{n+1} + \beta_1\theta_{n+1} + \beta_2\theta^2_{n+1} + \beta_3\theta^3_{n+1} \ldots; \end{cases}$$

wobei aber jetzt

$$X_n = \frac{2g}{(1+u^2)l}[1 - (\cos\theta_n + u\sin\theta_n)e^{-u\theta_n}],$$

$$Y_{n+1} = \frac{2g}{(1+u^2)l}[1 - (\cos\theta_{n+1} - u\sin\theta_{n+1})e^{u\theta_{n+1}}].$$

Die oben gefundenen Werthe von u sind offenbar grösser als das wahre u, denn jene geben den ganzen Widerstand $\gamma = \frac{1}{2}u_m v^2$, während $\frac{1}{2}uv^2$ nur einen Theil desselben darstellt. Das wahre u ist demnach kleiner anzurechnen, als der kleinste Werth u_m. Gesetzt, es sei ein Werth u, der dem wahren so nahe kommt, dass man von der Correktion h alle höheren Potenzen vernachlässigen kann, so gehen dadurch obige Gleichungen 9) über in:

10)

$$\begin{cases} X_1+\partial_u X_1 h+\alpha_1\theta_1+\alpha_2\theta^2{}_1 \ldots = Y_2+\partial_u Y_2 h+\beta_1\theta_2+\beta_2\theta^2{}_2 \ldots\ldots \\ X_2+\partial_u X_2 h+\alpha_1\theta_2+\alpha_2\theta^2{}_2 \ldots = Y_3+\partial_u Y_3 h+\beta_1\theta_3+\beta_2\theta^2{}_3 \ldots\ldots \\ X_3+\partial_u X_3 h+\alpha_1\theta_3+\alpha_2\theta^2{}_3 \ldots = Y_4+\partial_u Y_4 h+\beta_1\theta_4+\beta_2\theta^2{}_4 \ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n+\partial_u X_n h+\alpha_1\theta_n+\alpha_2\theta^2{}_n \ldots = Y_{n+1}+\partial_u Y_{n+1} h+\beta_1\theta_{n+1}+\beta_2\theta^2{}_{n+1} \ldots \end{cases}$$

Diese Gleichungen verschaffen uns zuerst eine Relation zwischen α_1 und β_1. Je mehr nemlich die Winkel θ_m abnehmen, desto kleiner werden auch die Differenzen zwischen je zweien unmittelbar auf einander folgenden; und sind sie unendlich klein geworden, so sind jene Differenzen unendlich kleine Grössen der zweiten Ordnung. Demnach kann man, wenn θ_n und θ_{n+1} unendlich klein gedacht werden, setzen

$$\theta_n = \theta_{n+1},$$

so wie

$$\sin\theta_n = \sin\theta_{n+1} = \theta_n, \quad \cos\theta_n = \cos\theta_{n+1} = 1.$$

Macht man in X_n und Y_{n+1}, so wie in den entwickelten Werthen $\partial_u X_n$ und $\partial_u Y_{n+1}$, diese Substitutionen, so erscheint in denselben θ weder in der Potenz Null noch Eins, sondern nur in höhern Potenzen. Die letzte der Gleichungen 10) wird daher, da gegen $\theta^1{}_n$ alle übrigen Potenzen verschwinden:

$$\alpha_1\theta_n = \beta_1\theta_{n+1} \text{ oder } \alpha_1 = \beta_1.$$

Zieht man unter den Gleichungen 10) die zweite von der ersten, die dritte von der zweiten und so je die nachfolgende von der vorhergehenden ab, so erzeugen sich unter anderen die Differenzen:

$$X_{n-1} - X_n,$$

$$Y_n - Y_{n+1},$$

$$\partial_u X_{n-1} - \partial_u X_n,$$

$$\partial_u Y_n - \partial_u Y_{(n+1)}.$$

X_{n-1} und $\partial_u X_{n-1}$ entstehen beziehungsweise aus X_n und $\partial_u X_n$ dadurch, dass in letztern θ_n einen Zuwachs $\theta_{n-1}-\theta_n$, so wie Y_n und $\partial_u Y_n$ aus Y_{n+1} und $\partial_u Y_{n+1}$ dadurch, dass in letztern θ_{n+1} einen Zuwachs $\theta_n - \theta_{n+1}$ erlitten hat. Wir können daher obige Differenzen nach dem Taylor'schen Lehrsatze entwickeln, wobei wir die dritten und höhern Potenzen vernachlässigen können, dagegen die Quadrate desswegen noch beibehalten müssen, weil die ersten Differenzen $\theta_1-\theta_2$, $\theta_2-\theta_3$, u. s. w. nicht so sehr klein sind $\left(\theta_1-\theta_2=\frac{1}{13}\right)$.

Es ist daher:

$$
11)\quad \left\{
\begin{aligned}
X_{n-1}-X_n &= \partial_{\theta_n}X_n(\theta_{n-1}-\theta_n)+\partial^2_{\theta_n}X_n\frac{(\theta_{n-1}-\theta_n)^2}{2},\\
Y_n-Y_{n+1} &= \partial_{\theta_{n+1}}Y_{n+1}(\theta_n-\theta_{n+1})+\partial^2_{\theta_{n+1}}Y_{n+1}\frac{(\theta_n-\theta_{n+1})^2}{2},\\
\partial_u X_{n-1}-\partial_u X_n &= \partial^2_{u,\theta_n}X_n(\theta_{n-1}-\theta_n)+\partial_u[\partial^2_{\theta_n}X_n].\frac{(\theta_{n-1}-\theta_n)^2}{2},\\
\partial_u Y_n-\partial_u Y_{n+1} &= \partial^2_{u,\theta_{n+1}}Y_{n+1}(\theta_n-\theta_{n+1})+\partial_u[\partial^2_{\theta_{n+1}}Y_{n+1}]\frac{(\theta_n-\theta_{n+1})^2}{2}.
\end{aligned}\right.
$$

Nun aber ist unter Vernachlässigung derjenigen Glieder, welche die Coefficienten $\frac{(\theta_{n-1}-\theta_n)^2}{2}u$ und $\frac{(\theta_n-\theta_{n+1})^2}{2}u$ haben:

$$\partial_{\theta_n} X_n = \frac{2g}{l} e^{-u\theta_n} \sin\theta_n ,$$

$$\partial^2_{\theta_n} X_n = \frac{2g}{l} e^{-u\theta_n} . \cos\theta_n ;$$

$$\partial_{\theta_{n+1}} Y_{n+1} = \frac{2g}{l} e^{u\theta_{n+1}} \sin\theta_{n+1} ,$$

$$\partial^2_{\theta_{n+1}} Y_{n+1} = \frac{2g}{l} e^{u\theta_{n+1}} . \cos\theta_{n+1} ;$$

$$\partial^2_{u,\theta_n} X_n = -\frac{2g}{l} \theta_n e^{-u\theta_n} \sin\theta_n ,$$

$$\partial_u[\partial^2_{\theta_n} X_n] = -\frac{2g}{l} e^{-u\theta_n} (\sin\theta_n + \theta_n \cos\theta_n) ;$$

$$\partial^2_{u,\theta_{n+1}} Y_{n+1} = \frac{2g}{l} \theta_{n+1} e^{u\theta_{n+1}} \sin\theta_{n+1} ,$$

$$\partial_u[\partial^2_{\theta_{n+1}} Y_{n+1}] = \frac{2g}{l} e^{u\theta_{n+1}} (\sin\theta_{n+1} + \theta_{n+1} \cos\theta_{n+1}) .$$

So ergibt sich endlich die, alle aus 10) entstehenden Gleichungen repräsentirende Gleichung:

$$
12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{2g}{l}e^{-u\theta_n}.(\theta_{n-1}-\theta_n)\left[\sin\theta_n+\frac{1}{2}\cos\theta_n(\theta_{n-1}-\theta_n)\right]\\
&\qquad -\frac{2g}{l}he^{-u\theta_n}(\theta_{n-1}-\theta_n)\left[\theta_n\sin\theta_n+\frac{1}{2}(\theta_{n-1}-\theta_n)(\sin\theta_n+\theta_n\cos\theta_n)\right]\\
&\qquad +\alpha_1(\theta_{n-1}-\theta_n)+\alpha_2(\theta^2_{n-1}-\theta^2_n)\,\ldots\ldots\\
=&\frac{2g}{l}e^{u\theta_{n+1}}(\theta_n-\theta_{n+1})\left[\sin\theta_{n+1}+\frac{1}{2}\cos\theta_{n+1}(\theta_n-\theta_{n+1})\right]\\
&\qquad +\frac{2g}{l}he^{u\theta_{n+1}}(\theta_n-\theta_{n+1})\left[\theta_{n+1}\sin\theta_{n+1}+\frac{1}{2}(\theta_n-\theta_{n+1})(\sin\theta_{n+1}+\theta_{n+1}\cos\theta_{n+1})\right]\\
&\qquad +\alpha_1(\theta_n-\theta_{n+1})+\beta_2(\theta^2_n-\theta^2_{n+1})\,\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Ich multiplicire diese Gleichung mit $\frac{l}{2g}$, lasse aber $\frac{\alpha_m l}{2g}$ und $\frac{\beta_m l}{2g}$ dennoch durch α_m und β_m dargestellt sein, wobei man hernach, um die ursprünglichen α_m und β_m wieder herzustellen, die gefundenen Werthe noch mit $\frac{2g}{l}$ zu multipliciren hat. Hierauf setze ich

$$-e^{-u\theta_n}(\theta_{n-1}-\theta_n)\left[\sin\theta_n+\frac{1}{2}\cos\theta_n(\theta_{n-1}-\theta_n)\right]$$
$$+e^{u\theta_{n+1}}(\theta_n-\theta_{n+1})\left[\sin\theta_{n+1}+\frac{1}{2}\cos\theta_{n+1}(\theta_n-\theta_{n+1})\right]=A_n,$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{-u\theta_n}(\theta_{n-1}-\theta_n)\left[\theta_n\sin\theta_n+\frac{1}{2}(\sin\theta_n+\theta_n\cos\theta_n)(\theta_{n-1}-\theta_n)\right] \\ +e^{u\theta_{n+1}}(\theta_n-\theta_{n+1})\left[\theta_{n+1}\sin\theta_{n+1}+\frac{1}{2}(\sin\theta_{n+1}+\theta_{n+1}\cos\theta_{n+1})(\theta_n-\theta_{n+1})\right] \end{array}\right\}$$
$$=B_n.$$

Diese beiden Grössen nehmen durch Entwickelung der Exponentialfunktionen $e^{-u\theta_n}$ und $e^{u\theta_{n+1}}$ in $1-u\theta_n$ und $1+u\theta_{n+1}$ und unter Vernachlässigung der Produkte $u(\theta_{n-1}-\theta_n)^2$ und $u(\theta_n-\theta_{n+1})^2$ eine zur Auswerthung bequemere Form an. Setze ich nemlich

$$(\theta_{n-1}-\theta_n)\left[\sin\theta_n+\frac{1}{2}\cos\theta_n(\theta_{n-1}-\theta_n)\right]=P_n,$$

$$(\theta_{n-1}-\theta_n)\left[\theta_n\sin\theta_n+\frac{1}{2}(\theta_n\cos\theta_n+\sin\theta_n)(\theta_{n-1}-\theta_n)\right]=Q_n;$$

$$u\theta_n(\theta_{n-1}-\theta_n)\sin\theta_n=p_n,$$
$$u\theta^2_n(\theta_{n-1}-\theta_n)\sin\theta_n=q_n;$$

so ist

$$A_n=P_{n+1}+p_{n+1}-P_n+p_n,$$
$$B_n=Q_{n+1}+q_{n+1}+Q_n-q_n;$$

und dabei kann man noch bemerken, dass

$$Q_n=\theta_n.P_n+\frac{1}{2}(\theta_{n-1}-\theta_n)^2\sin\theta_n,$$
$$q_n=\theta_n p_n;$$

setze ich ferner

$$\theta_{n-1} - \theta_n = \Delta^1{}_n,$$

$$\theta^2{}_{n-1} - \theta^2{}_n = \Delta^2{}_n,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\theta^m{}_{n-1} - \theta^m{}_n = \Delta^m{}_n;$$

wo aber, wie man sieht, $\Delta^m{}_n$ nicht mit der $m$ten Potenz von Δ_n zu verwechseln ist, so geht endlich die Gleichung 12) über in

$$13) \quad A_n + B_n h + \Delta^1{}_{n+1}\alpha_1 + \Delta^2{}_{n+1}\beta_2 + \Delta^3{}_{n+1}\beta_3 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots - \Delta^1{}_n\alpha_1 - \Delta^2{}_n - \Delta^3{}_n\alpha_3 \ldots\ldots = 0.$$

Dies ist die Gleichung, aus der ich nach und nach durch Setzung aller ganzen Zahlen, von 2 an gerechnet, für n, alle diejenigen Gleichungen herholen kann, vermittelst deren sich die Coefficienten h, α_m und β_m bestimmen lassen.

Ich nehme an, dass die Coefficienten α_m und β_m alle positiv sind — eine Annahme, die sich in der Folge rechtfertigen oder verwerfen wird —, so folgt hieraus, dass dieselben convergirende Reihen bilden. Denn da jede der Seiten der Gleichungen 10) das Quadrat der jeweiligen Winkelgeschwindigkeit $(\partial\theta^2)$ im tiefsten Punkte ausdrückt, so würde diese Geschwindigkeit für den Fall der Divergenz ungemein wachsen, wenn die Winkel θ zunehmen, besonders, wenn letztere einmal die Einheit überschritten haben.

Unter dieser Voraussetzung können wir uns also auf eine gewisse Anzahl jener Coefficienten beschränken.

Hat man auf diese Weise endlich h, die α_m und β_m bestimmt, so sind diese letztern Werthe, wie oben bemerkt, noch mit $\frac{2g}{l}$ zu multipliciren.

Die örtliche Schwere ist

$$g = G\left(1 - \frac{1}{200}\cos\psi^2\right),$$

wo G die Schwere unter dem Pol und ψ die Breite des Orts ist. Für Paris aber ist $g = 30{,}1958$ Par. Fuss, $\psi = 48^0\, 40'$, während für Tuttlingen ist $\psi = 48^0$. Daraus folgt, dass man auch für Tuttlingen annehmen kann

$$g = 30{,}1958.$$

Wir haben ferner gesetzt:

$$l = r + \frac{2}{5} \cdot \frac{A^2}{r} \cdot \frac{1-k^5}{1-k^3}.$$

In Par. Fuss findet sich

$$r = 24,32138$$

und

$$A = 0,455965.$$

Nun ist das Volumen der Hohlkugel

$$= \frac{4}{3}\pi A^3(1-k^3),$$

die Dichtigkeit des Tannenholzes

$$= 0,555;$$

der Par. Cubikfuss reines Wasser wiegt 73 Pfd. 5 L. 1 Q. Württembergisch, während das Gewicht unserer Hohlkugel ist:

8 Pfd. 12½ Loth.

Demnach ist

$$\frac{4}{3}\pi A^3(1-k^3).0,555.9365 = 1074.$$

Daraus berechnet man

$$\log(1-k^5) = 0,71632033 - 1$$

und

$$\log(1-k^3) = 0,84888153 - 1.$$

Diess Alles gibt

$$l = 24,326019$$

und

$$\frac{2g}{l} = 2,482593.$$

Um aus den so gewonnenen Werthen α_m und β_m auf die Coefficienten p_m zurückzusteigen, wird man für n einen beliebigen Werth annehmen, und aus 7) die verschiedenen Potenzen von $\partial\theta$, so wie auch das Differential $\partial^2\theta$ in die Gleichung 2) setzen und alle Coefficienten der verschiedenen Potenzen oder auch Funktionen von θ für sich der Null gleich machen. Zu grosser gegenseitiger Unterstützung mag es gereichen, wenn man zwischen 8) und 1) dasselbe thut.

Das letzte Geschäft aber wird sein, nachzusehen, ob die Funktion

$$y = p_1 v + p_2 v^2 + p_3 v^3 + p_4 v^4 + \dots$$

nicht die Entwickelung einer geschlossenen Funktion von v ist — möglicher Weise ein leichtes Geschäft.

Die einfachste und vielleicht beste Art, zum Zweck zu gelangen, möchte aber folgende sein:

Man nehme eine gut gearbeitete aus papierdünnem Blech bestehende Hohlkugel von $\frac{1}{2}$ bis 1 Schuh im Durchmesser, lasse sie bei Windstille von verschiedenen gemessenen Höhen fallen und beobachte die Fallzeit.

Hält man eine gewöhnliche Taschenuhr an das Ohr, deren Picken $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{8}$ Sekunden anzeigt*), so kann man mit dem Zählen der Schläge ganz bequem nachkommen, wofern man nur von 1 bis 12 zählt. Will man aber noch weiter zählen, so fängt man abermal mit 1 an und addirt die neue Zahl zu 12 u. s. w. Verschafft man sich nun einen sehr guten und genau regulirten Chronometer dieser Art, so wird man präcis auf einen Schlag desselben die Kugel fallen lassen und die Zeitabschnitte bis dahin zählen, wo die Kugel auffällt. Trifft aber der Moment des Auffallens nicht mit einem Schlag des Chronometers zusammen, so wiederhole man das Experiment unter Vergrösserung oder Verkleinerung der Fallhöhe so lange, bis ein Zutreffen erfolgt. Fünf bis acht Beobachtungen, die man in einer Kirche und von einem Thurme herab machen kann, genügen. Damit die Kugel nicht beschädigt werde, fange man sie durch ein Falltuch, besser durch ein weitgestricktes Fallnetz, auf.

Zählt man die Fallhöhe x vom Anfang des Falls an, und setzt die Zeit gleich t, so kann man die Gleichung aufstellen:

$$x = \alpha_1 t^1 + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \dots$$

*) Die Uhr des Verfassers z. B. macht in 1 Minute genau 288 Schläge; folglich kann man vermittelst derselben $\frac{60}{288}$ oder $\frac{5}{24}$ Secunden unterscheiden.

deren Coefficienten a_n aus den Beobachtungen leicht zu bestimmen sind. Der Kürze wegen setzen wir

$$x=f(t).$$

Bezeichnen wir noch den Widerstand der Luft durch $\varphi(v)$, so hat man bekanntlich die Bewegungsgleichung

$$\partial v=g-\varphi(v),$$

wo ∂v die in Beziehung auf t genommene Ableitung ist. Daraus folgt

$$\varphi(v)=g-\partial v.$$

Setzen wir ferner

$$\partial f(t)=f'(t) \quad \text{und} \quad \partial^2 f(t)=f''(t);$$

so leiten wir aus $x=f(t)$ ab:

$$v=\partial x=f'(t)$$

und

$$\partial v=f''(t).$$

Demnach haben wir

$$\varphi(v)=g-f''(t).$$

Wollen wir aber $\varphi(v)$ in v dargestellt sehen, so müssen wir zwischen dieser und der Gleichung

$$v=f'(t)$$

t eliminiren.

Bemerkung. Ist $\varphi(v)=mv^2$, so hat man (nach Ohm's Mechanik I. Thl. S. 342.)

$$x=\frac{k^2}{g}\cdot\log\left(\frac{e^{\frac{gt}{k}}+e^{-\frac{gt}{k}}}{2}\right),$$

wo $k=\sqrt{\frac{g}{m}}$.

Entwickelt man x in eine Reihe, die nach Potenzen von $\frac{1}{k}$ fortgeht, so hat man

$$x = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{g^3 . t^4}{12} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \ldots\ldots$$

Hat man Grund anzunehmen, dass $\frac{1}{k}$ eine sehr kleine Zahl ist, so kann füglich mit dem zweiten Gliede abgebrochen werden, und sind x_1 und t_1 zwei zusammengehörige Beobachtungswerthe, so hat man

$$\left(\frac{1}{k}\right)^2 = \frac{m}{g} = 12\,\frac{\frac{1}{2}gt^2_1 - x_1}{g^3 t^3_1}.$$

Sind t_2 und x_2 zwei andere Beobachtungswerthe, so muss, wenn das Neuton'sche Gesetz richtig ist, sein:

$$\frac{\frac{1}{2}gt_1{}^2 - x_1}{t^3_1} = \frac{\frac{1}{2}gt^2_2 - x_2}{t^3_2}.$$

XVI.

Venus im grössten Glanze.

Von

dem Herausgeber.

Das vorige Jahr (1852) bot uns das interessante Schauspiel dar, dass Venus bei hellem Tage am Himmel glänzte. Im Jahre 1716 betrachtete das Volk in London diese Erscheinung als ein Wunder und als ein drohendes Vorzeichen nahen Unglücks, und im Jahre 1750 wurde der nicht minder unwissende Pöbel von Paris durch dieses Phänomen so aufgeregt, dass es nöthig wurde, die Hülfe der Polizei in Anspruch zu nehmen, um dem Tumulte Einhalt zu thun*). Der berühmte Halley hat in den Philosophical Transactions. Nr. 349. die Zeit des grössten Glanzes der Venus zu bestimmen gelehrt. Weil dieser Gegenstand nur in wenigen astronomischen Werken behandelt worden ist, weil derselbe eine interessante Aufgabe für die Lehre von den Maximis und Minimis darbietet, und weil dabei vielleicht noch Einiges zu bemerken sein dürfte, was man bis jetzt unbeachtet gelassen hat, so will ich die betreffende Aufgabe im Folgenden auflösen.

Der Einfachheit wegen nehmen wir an, dass sowohl die Entfernung der Venus von der Sonne, als auch die Entfernung der Erde von der Sonne constant sei, was wegen der geringen Excentricitäten der Bahnen dieser beiden Weltkörper bei diesem

---

*) S. Wunder des Himmels von Littrow. Vierte Auflage. S. 290.

Gegenstande mit hinreichender Annäherung verstattet ist. Ausserdem werden wir zu der näherungsweisen Annahme berechtigt sein, dass die Venus halb von der Sonne erleuchtet wird, und dass dasselbe auch der Fall sein würde, wenn die Erde ein selbstleuchtender Körper wäre, welcher der Venus sein Licht zusendete. Alle anderen genaueren Betrachtungen würden im vorliegenden Falle die Aufgabe unnöthigerweise compliciren. Dies vorausgesetzt, wird nun gewiss alles Folgende vollständig verständlich sein.

In Taf. III. Fig. 7. sei die Ebene des Papiers die durch die Mittelpunkte S_1, E_1, V_1 der Sonne, der Erde und der Venus gelegte Ebene. Diese Ebene werde in dem Halbkreise ACB von der erleuchteten Hälfte der Oberfläche der Venus geschnitten. Denken wir uns nun eine den um V beschriebenen Kreis in D berührende Parallele mit EV gezogen, so wird die in Rede stehende Ebene in dem Bogen BCD von dem der Erde zu Gesicht kommenden Theile der erleuchteten Hälfte der Venus geschnitten. Die von der Sonne erleuchtete Hälfte der Venus und den der Erde zu Gesicht kommenden Theil derselben wollen wir jetzt respective auf die grössten Kreise der Venus, deren Durchmesser AB und DE sind, projiciren, so ist das Verhältniss dieser Projectionen, wenn wir den Winkel $S_1V_1E_1$ durch ω bezeichnen, offenbar

$$1:\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\omega=1:\frac{1}{2}(1+\cos\omega)=1:\cos\frac{1}{2}\omega^2.$$

Denken wir uns überhaupt eine erleuchtete Ebene F in zwei verschiedenen Entfernungen e und e_1 von dem Auge, und bezeichnen den Glanz, mit welchem dieselbe dem Auge erscheint, respective durch g und g_1, so verhalten sich g und g_1 offenbar eben so zu einander wie die Grundflächen f und f_1 der durch die Pupille auf die Netzhaut fallenden Strahlenkegel von derselben Höhe h, so dass also

$$g:g_1=f:f_1$$

ist. Nun ist aber nach den Lehren der Geometrie bekanntlich offenbar

$$F:f=e^2:h^2,$$

$$F:f_1=e_1{}^2:h^2;$$

also $fe^2=f_1e_1{}^2$, woraus

$$f:f_1=e_1{}^2:e^2,$$

daher nach dem Obigen

$$g:g_1=e_1{}^2:e^2$$

folgt; d. h. g und g_1 verhalten sich zu einander umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen der Ebene F von dem Auge. Bezeichnen wir daher den Glanz der erleuchteten Hälfte der Venus in einer der Längeneinheit gleichen Entfernung von der Erde durch $\mathfrak{G}$, den Glanz der erleuchteten Hälfte der Venus in der Entfernung E von der Erde dagegen durch $\mathfrak{G}_1$; so ist

$$\mathfrak{G}:\mathfrak{G}_1 = E^2:1.$$

Bezeichnet aber G den Glanz des der Erde zu Gesicht kommenden Theils der erleuchteten Hälfte der Venus in der Entfernung E derselben von der Erde, so ist nach dem Obigen offenbar

$$\mathfrak{G}_1 : G = 1 : \cos\frac{1}{2}\omega^2.$$

Durch Zusammensetzung der beiden Proportionen

$$\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_1 = E^2 : 1,$$

$$\mathfrak{G}_1 : G = 1 : \cos\frac{1}{2}\omega^2$$

erhält man

$$\mathfrak{G} : G = E^2 : \cos\frac{1}{2}\omega^2,$$

also

$$G = \frac{\cos\frac{1}{2}\omega^2}{E^2}.\mathfrak{G},$$

oder wenn man, was offenbar verstattet ist, $\mathfrak{G}$ als Einheit des Glanzes annimmt:

$$G = \frac{\cos\frac{1}{2}\omega^2}{E^2}.$$

Indem wir nun die constante Entfernung der Erde von der Sonne durch R, die constante Entfernung der Venus von der Sonne durch r, den Winkel $E_1 S_1 V_1$ an der Sonne durch θ, den Winkel $S_1 E_1 V_1$ an der Erde durch ϖ bezeichnen, wollen wir uns die Frage vorlegen, wie gross der Winkel θ, den wir im Folgenden als die unabhängige veränderliche Grösse betrachten werden, sein muss, wenn der Glanz

$$G = \frac{\cos\frac{1}{2}\omega^2}{E^2}$$

ein Maximum werden soll.

Bringen wir die vorstehende Gleichung auf die Form

$$G = E^{-2}\cos\frac{1}{2}\omega^2,$$

und differentiiren dann in Bezug auf θ als unabhängige veränderliche Grösse, so erhalten wir

$$\frac{\partial G}{\partial\theta} = 2E^{-2}\cos\frac{1}{2}\omega\,\frac{\partial\cos\frac{1}{2}\omega}{\partial\theta} - 2E^{-3}\cos\frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial E}{\partial\theta}$$

oder

$$\frac{\partial G}{\partial\theta} = -E^{-2}\sin\frac{1}{2}\omega\cos\frac{1}{2}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\theta} - 2E^{-3}\cos\frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial E}{\partial\theta},$$

also

$$\frac{\partial G}{\partial\theta} = -\frac{\sin\omega}{2E^2}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\theta} - \frac{2\cos\frac{1}{2}\omega^2}{E^3}\cdot\frac{\partial E}{\partial\theta}.$$

Nun ist

$$R:r = \sin\omega : \sin(\omega+\theta)$$

oder

$$r\sin\omega = R\sin(\omega+\theta),$$

also

$$r\cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial\theta} = R\cos(\omega+\theta).\left(1+\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right),$$

oder

$$r\cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial\theta} = -R\cos\overline{\omega}.\left(1+\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right),$$

woraus

$$\frac{\partial\omega}{\partial\theta} = -\frac{R\cos\overline{\omega}}{r\cos\omega + R\cos\overline{\omega}},$$

oder auch, weil

$$E = r\cos\omega + R\cos\bar{\omega}$$

ist:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\theta} = -\frac{R\cos\bar{\omega}}{E}$$

folgt. Ferner ist

$$E^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta,$$

also

$$E\frac{\partial E}{\partial\theta} = Rr\sin\theta,\quad \frac{\partial E}{\partial\theta} = \frac{Rr\sin\theta}{E}.$$

Führt man die gefundenen Ausdrücke von $\frac{\partial\omega}{\partial\theta}$ und $\frac{\partial E}{\partial\theta}$ in den obigen Ausdruck von $\frac{\partial G}{\partial\theta}$ ein, so erhält man

$$\frac{\partial G}{\partial\theta} = \frac{R\sin\omega\cos\bar{\omega}}{2E^3} - \frac{2Rr\cos\frac{1}{2}\omega^2\sin\theta}{E^4};$$

und weil nun die gemeinschaftliche Bedingung des Maximums und Minimums

$$\frac{\partial G}{\partial\theta} = 0$$

ist, so ergiebt sich die Gleichung

$$E\sin\omega\cos\bar{\omega} = 4r\cos\frac{1}{2}\omega^2\sin\theta$$

oder

$$E\sin\frac{1}{2}\omega\cos\bar{\omega} = 2r\cos\frac{1}{2}\omega\sin\theta.$$

Bekanntlich ist aber

$$E : r = \sin\theta : \sin\bar{\omega}$$

oder

$$E\sin\bar{\omega} = r\sin\theta;$$

also ist, wenn man mit dieser Gleichung in die vorstehende Gleichung

$$E\sin\frac{1}{2}\omega\cos\varpi=2r\cos\frac{1}{2}\omega\sin\theta$$

dividirt:

$$\sin\frac{1}{2}\omega\cot\varpi=2\cos\frac{1}{2}\omega,$$

oder

$$\cot\varpi=2\cot\frac{1}{2}\omega,$$

oder

$$\tan\frac{1}{2}\omega=2\tan\varpi.$$

Diese schon von Halley gefundene Gleichung drückt die gemeinschaftliche Bedingung des Maximums und Minimums aus, und mittelst derselben muss also der Winkel θ, so wie auch die Winkel ω, ϖ bestimmt werden.

Um nun den Winkel ϖ zu bestimmen, verbinden wir mit der Gleichung

$$\tan\frac{1}{2}\omega=2\tan\varpi$$

die Gleichung

$$r\sin\omega=R\sin\varpi.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$R\sin\varpi=\frac{2r\tan\frac{1}{2}\omega}{1+\tan\frac{1}{2}\omega^2},$$

also wegen der Halley'schen Gleichung:

$$R\sin\varpi=\frac{4r\tan\varpi}{1+4\tan\varpi^2},$$

folglich

$$R=\frac{4r\cos\varpi}{\cos\varpi^2+4\sin\varpi^2}=\frac{4r\cos\varpi}{4-3\cos\varpi^2},$$

woraus sich

$$\cos\overline{\omega}^2 + \frac{4}{3}\cdot\frac{r}{R}\cos\overline{\omega} = \frac{4}{3}$$

ergiebt. Löst man nun diese Gleichung in Bezug auf $\cos\overline{\omega}$ als unbekannte Grösse auf, so erhält man:

$$\cos\overline{\omega} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{r}{R} \pm \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{4}{9}\cdot\frac{r^2}{R^2}}$$

oder

$$\cos\overline{\omega} = \frac{2}{3}\cdot\frac{r}{R}\left\{-1 \pm \sqrt{1 + 3\left(\frac{R}{r}\right)^2}\right\}.$$

Setzt man

$$\operatorname{tang} x = \frac{R}{r}\sqrt{3},$$

wo man immer x zwischen 0 und 90° nehmen kann, so ist

$$\cos\overline{\omega} = \frac{2}{3}\cdot\frac{r}{R}(-1 \pm \sec x),$$

oder, weil

$$\frac{r}{R} = \sqrt{3}.\cot x, \quad \frac{2}{3}\cdot\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{4}{3}}.\cot x$$

ist:

$$\cos\overline{\omega} = \sqrt{\frac{4}{3}}.\cot x(-1 \pm \sec x).$$

Nun ist aber

$$-1 + \sec x = \frac{1-\cos x}{\cos x} = \operatorname{tang} x \operatorname{tang}\frac{1}{2}x,$$

$$-1 - \sec x = -\frac{1+\cos x}{\cos x} = -\operatorname{tang} x \cot\frac{1}{2}x;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\cos\overline{\omega} = \begin{cases} +\sqrt{\frac{4}{3}}.\operatorname{tang}\frac{1}{2}x, \\ -\sqrt{\frac{4}{3}}.\cot\frac{1}{2}x. \end{cases}$$

Da x zwischen 0 und 90°, also $\frac{1}{2}x$ zwischen 0 und 45° liegt, so ist

$$\tang\frac{1}{2}x < 1,$$

also

$$\cot\frac{1}{2}x > 1,$$

weil

$$\tang\frac{1}{2}x\cot\frac{1}{2}x = 1$$

ist. Folglich ist auch um so mehr

$$\sqrt{\frac{4}{3}}\,.\cot\frac{1}{2}x > 1,$$

und daher die Gleichung

$$\cos\overline{\omega} = -\sqrt{\frac{4}{3}}\,.\cot\frac{1}{2}x$$

jedenfalls unzulässig, weshalb man zur Bestimmung von $\overline{\omega}$ bloss die beiden folgenden Formeln hat:

$$\tang x = \frac{R}{r}\sqrt{3},\quad \cos\overline{\omega} = \sqrt{\frac{4}{3}}\,.\tang\frac{1}{2}x;$$

wo man x zwischen 0 und 90° nimmt. Hat man aber mittelst dieser Formeln $\overline{\omega}$ gefunden, so ergiebt sich ω mittelst der Formel

$$\tang\frac{1}{2}\omega = 2\tang\overline{\omega}$$

ohne alle Zweideutigkeit, und θ findet man endlich mittelst der Formel

$$\theta = 180^0 - (\omega + \overline{\omega}).$$

Die Entfernung E berechnet man leicht mittelst der Formel

$$E = \frac{r\sin\theta}{\sin\overline{\omega}},$$

oder auch mittelst der Formel

$$E = r\cos\omega + R\cos\overline{\omega}.$$

Uebrigens kann man E auch noch auf folgende Art ausdrücken. Weil

$$R=\frac{r\tang x}{\sqrt{3}}, \quad \cos\bar{\omega}=\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\tang\frac{1}{2}x$$

ist, so ist

$$R\cos\bar{\omega}=\frac{2}{3}r\tang x\tang\frac{1}{2}x,$$

oder auch

$$R\cos\bar{\omega}=\frac{4}{3}r\cdot\frac{\tang\frac{1}{2}x^2}{1-\tang\frac{1}{2}x^2}.$$

Ferner ist

$$\cos\omega=\frac{1-\tang\frac{1}{2}\omega^2}{1+\tang\frac{1}{2}\omega^2}=\frac{1-4\tang\bar{\omega}^2}{1+4\tang\bar{\omega}^2}$$

oder

$$\cos\omega=\frac{\cos\bar{\omega}^2-4\sin\bar{\omega}^2}{\cos\bar{\omega}^2+4\sin\bar{\omega}^2}=\frac{5\cos\bar{\omega}^2-4}{4-3\cos\bar{\omega}^2},$$

also nach dem Obigen:

$$\cos\omega=\frac{20\tang\frac{1}{2}x^2-12}{12(1-\tang\frac{1}{2}x^2)}.$$

Daher ist nun

$$E=r\cos\omega+R\cos\bar{\omega}$$

$$=r\left\{\frac{20\tang\frac{1}{2}x^2-12}{12(1-\tang\frac{1}{2}x^2)}+\frac{4\tang\frac{1}{2}x^2}{3(1-\tang\frac{1}{2}x^2)}\right\},$$

also, wie man leicht findet:

$$E=r\frac{3\tang\frac{1}{2}x^2-1}{1-\tang\frac{1}{2}x^2}=r\left\{\frac{2\tang\frac{1}{2}x^2}{1-\tang\frac{1}{2}x^2}-1\right\},$$

d. i.

$$E=r(\tang x\tang\frac{1}{2}x-1),$$

welche bemerkenswerthe Formel man nach dem Obigen auch auf folgende Art schreiben kann:

$$E=\frac{3}{2}R\cos\overline{\omega}-r.$$

Nach Delambre (Astronomie théorique et pratique. T. II. p. 516.) ist für die Venus:

$$R=1 \quad \text{und} \quad r=0{,}7233153$$

woraus man mittelst der obigen Formeln findet:

$$x=\ \ 67^0.20'.\ 3''$$

$$\overline{\omega}=\ \ 39^0.43'.26''$$

$$\omega=117^0.55'.22''$$

$$\theta=\ \ 22^0.21'.12''$$

$$E=\ \ 0{,}4304$$

$$G=\ \ 1{,}435.$$

Der an der Erde liegende Winkel $\overline{\omega}$ heisst die Elongation der Venus von der Sonne, welche also ungefähr 40^0 betragen muss, wenn der Glanz der Venus ein Maximum sein soll, vorausgesetzt nämlich, dass wirklich ein Maximum Statt findet, was wir nun noch untersuchen wollen.

Zu dem Ende müssen wir den zweiten Differentialquotienten $\frac{\partial^2 G}{\partial\theta^2}$ entwickeln. Nach dem Obigen war aber

$$\frac{\partial G}{\partial\theta}=\frac{R\sin\omega\cos\overline{\omega}}{2E^3}-\frac{2Rr\cos\frac{1}{2}\omega^2\sin\theta}{E^4}$$

oder

$$2\frac{E^4}{R}\cdot\frac{\partial G}{\partial\theta}=E\sin\omega\cos\varpi-4r\cos\frac{1}{2}\omega^2\sin\theta,$$

oder weil nach dem Obigen

$$\sin\theta=\frac{E\sin\varpi}{r}$$

ist:

$$2\frac{E^3}{R}\cdot\frac{\partial G}{\partial\theta}=\sin\omega\cos\varpi-4\cos\frac{1}{2}\omega^2\sin\varpi.$$

Hieraus erhalten wir durch fernere Differentiation nach θ:

$$2\frac{E^3}{R}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial\theta^2}+6\frac{E^2}{R}\cdot\frac{\partial E}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial G}{\partial\theta}$$

$$=\quad(\cos\omega\cos\varpi+2\sin\omega\sin\varpi)\frac{\partial\omega}{\partial\theta}$$

$$-(\sin\omega\sin\varpi+4\cos\frac{1}{2}\omega^2\cos\varpi)\frac{\partial\varpi}{\partial\theta}.$$

Es ist aber $\theta+\omega+\varpi=\pi$, also

$$1+\frac{\partial\omega}{\partial\theta}+\frac{\partial\varpi}{\partial\theta}=0,\qquad\frac{\partial\varpi}{\partial\theta}=-1-\frac{\partial\omega}{\partial\theta},$$

und folglich

$$2\frac{E^3}{R}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial\theta^2}+6\frac{E^2}{R}\cdot\frac{\partial E}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial G}{\partial\theta}$$

$$=\quad\sin\omega\sin\varpi+4\cos\frac{1}{2}\omega^2\cos\varpi$$

$$+(\cos\omega\cos\varpi+3\sin\omega\sin\varpi+4\cos\frac{1}{2}\omega^2\cos\varpi)\frac{\partial\omega}{\partial\theta}.$$

Weil nun für $\tang\frac{1}{2}\omega=2\tang\varpi$, d. h. bei der Venus für die oben angegebenen Werthe von ω und ϖ, der Differentialquotient $\frac{\partial G}{\partial\theta}$ verschwindet, so können wir für diese Werthe von ω und ϖ

$$2\frac{E^3}{R}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial\theta^2}$$

$$= \sin\omega\sin\overline{\omega} + 4\cos\frac{1}{2}\omega^2\cos\overline{\omega}$$

$$+ (\cos\omega\cos\overline{\omega} + 3\sin\omega\sin\overline{\omega} + 4\cos\frac{1}{2}\omega^2\cos\overline{\omega})\frac{\partial\omega}{\partial\theta}$$

setzen, und werden nun zur beurtheilen haben, ob die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens positiv oder negativ ist, weil dann auch respective $\frac{\partial^2 G}{\partial\theta^2}$ positiv oder negativ sein wird.

Zu dem Ende drücken wir zuerst die obige Gleichung auf folgende Art aus:

$$2\frac{E^3}{R}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial\theta^2}$$

$$= \sin\omega\sin\overline{\omega} + 4\cos\frac{1}{2}\omega^2\cos\overline{\omega}$$

$$+\{\sin\omega\sin\overline{\omega} + 4\cos\frac{1}{2}\omega^2\cos\overline{\omega} + \sin\omega\sin\overline{\omega} + \cos(\omega-\overline{\omega})\}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\omega-\overline{\omega}=78^0.11'.56''$$

ist, so sind, mit Berücksichtigung der obigen Werthe von ω und $\overline{\omega}$, die Grössen

$$\sin\omega\sin\overline{\omega},\quad 4\cos\frac{1}{2}\omega^2\cos\overline{\omega},\quad \cos(\omega-\overline{\omega})$$

offenbar sämmtlich positiv, und es ist augenscheinlich

$$\sin\omega\sin\overline{\omega} + 4\cos\frac{1}{2}\omega^2\cos\overline{\omega} + \sin\omega\sin\overline{\omega} + \cos(\omega-\overline{\omega})$$

$$> \sin\omega\sin\overline{\omega} + 4\cos\frac{1}{2}\omega^2\cos\overline{\omega}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\frac{\partial\omega}{\partial\theta} = -\frac{R\cos\overline{\omega}}{E} = -\frac{\sin\omega\cos\overline{\omega}}{\sin\theta},$$

also, wie man leicht findet:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = -1{,}787$$

d. h. negativ und dem absoluten Werthe nach grösser als die Einheit ist, so ist nach dem Obigen

$$-\{\sin\omega\sin\varpi + 4\cos\frac{1}{2}\omega^2\cos\varpi + \sin\omega\sin\varpi + \cos(\omega-\varpi)\}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}$$
$$> \sin\omega\sin\varpi + 4\cos\frac{1}{2}\omega^2\cos\varpi,$$

folglich

$$\left.\begin{array}{c} \sin\omega\sin\varpi + 4\cos\frac{1}{2}\omega^2\cos\varpi \\ +\{\sin\omega\sin\varpi + 4\cos\frac{1}{2}\omega^2\cos\varpi + \sin\omega\sin\varpi + \cos(\omega-\varpi)\}\frac{\partial\omega}{\partial\theta} \end{array}\right\} < 0,$$

also $\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2}$ negativ, welches die Bedingung des Maximums ist.

XVII.

Ueber den Inhalt der Fässer.

Von

dem Herausgeber.

Der Bestimmung des Inhalts der Fässer haben mehrere grosse Mathematiker ihre Aufmerksamkeit gewidmet. Schon Kepler hat neben seinen unsterblichen astronomischen Arbeiten eine Stereometria doliorum geschrieben, und nach ihm haben vorzüglich Lambert, Kästner, Oberreit und Andere sich um diesen Gegenstand verdient gemacht. Kästner möchte es freilich fast tadeln, dass die Mathematiker sich zu der Beschäftigung mit solchen ganz praktischen Dingen herablassen, und spricht sich darüber in seiner bekannten scherzhaften Weise auf folgende Art aus *):

„Ich dächte man könnte von den Leuten, die mit mathematischen Ausübungen Geld erwerben wollen, immer fordern, dass sie ihren Kopf zu etwas Theorie anstrengten. Haben sie dazu Kopf, Fleiss nicht, so dürfen sie nur solche Geschäfte Leuten überlassen, die sich dazu geschickt machen. Warum sollen die Mathematikverständigen Arbeit und Nachdenken anwenden, dem sogenannten Praktiker Vorschriften zu geben, die dieser nun ohne Arbeit und Nachdenken brauchen mag? Nicht einmal Dank wird

---

*) Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von J. Bernoulli und C. F. Hindenburg. Jahrgang 1787. S. 6. 7.

mit dieser Gutherzigkeit erworben. Denn eben, weil sich die Mathematiker häufig so herabgelassen haben, wird vergessen, dass Mathematik, oft tiefe, zur Erfindung und bequemen Einkleidung dieser Regeln nöthig war, und nun hält jeder, vom Cameralisten bis zum Weinvisirer herunter, Mathematik für unnütze Grillenfängerei."

„So einfältig sind die Rechtsgelehrten nicht gewesen, was zur gesetzmässigen Sicherheit der menschlichen Gesellschaft gehört, so populär vorzutragen, dass Bürger und Bauer es ohne weitere Nachfrage brauchen könnten. Lieber haben sie Vorsichtigkeiten, die schon die natürliche Vernunft lehrt, in feierliche Formeln verhüllt, damit selbst die künftigen Notarien, noch vielmehr was höher hinauf steigen will, die Pandecten hören müssen."

„Die gewöhnliche Beschuldigung, dass die mathematischen Theorieen in der Ausübung nicht brauchbar sein sollen, rührt eben daher, dass man zu Ausübungen, die oft für das gemeine Wesen wichtig sind, Leute gut genug hält, denen man keine Theorie anmuthen darf, die also weder bekannte Theorie gehörig anzubringen wissen, noch viel weniger sich einfallen lassen, praktische Fragen, z. E. hier: von Gestalt und Ausmessung der Fässer, mit neuen Anwendungen der Theorie zu untersuchen."

„Dass Mathematikverständige, wenigstens seit Keplers Zeiten, gerade bei diesem Gegenstande, Gebrauch tieferer Theorie häufig gezeigt haben, ist jedem bekannt, der etwas von der litterarischen Geschichte der Visirkunst weiss."

„Aber eben so bekannt ist, wie unmathematisch in der Ausübung eines Geschäftes ist verfahren worden, das in Handel und Wandel so viel Einfluss hat, und bei dessen unrichtiger Verwaltung jeder leidet, der nicht bloss Wassertrinker ist."

Ich meine, dass jede Gelegenheit, welche sich dem Mathematiker zur Anwendung seiner Wissenschaft darbietet, ihm schon deshalb erwünscht und angenehm sein muss, weil sich dabei oft Schwierigkeiten zeigen, deren Ueberwindung die Wissenschaft selbst weiter führt, auch abgesehen von dem grossen Nutzen, welchen dergleichen Anwendungen oft dem Gemeinwesen zu bringen geeignet sind.

Unter den vielen Regeln, welche, oft mittelst sehr scharfsinniger analytischer Methoden gefunden, zur Berechnung des Inhalts der Fässer gegeben worden sind, hat sich jetzt nur noch die folgende von Lambert angegebene Methode zur Inhaltsbestimmung der Fässer erhalten:

Der Inhalt eines Fasses wird erhalten, wenn man zu $\frac{2}{3}$ des Cylinders, welcher die Spundtiefe zum Durchmesser und die Höhe des Fasses zur Höhe hat, $\frac{1}{3}$ des Cylinders, welcher den Bodendurchmesser zum

Durchmesser und die Höhe des Fasses zur Höhe hat, addirt.

Diese Regel wird allgemein für die genaueste gehalten, und besitzt auch den grossen Vorzug der Leichtigkeit bei der praktischen Anwendung. Die Vorlesungen, welche ich in jedem Wintersemester an der Königlichen staats- und landwirthschaftlichen Akademie zu Eldena über praktische Stereometrie zu halten habe, bieten mir vielfache Gelegenheit zur praktischen Anwendung der obigen Regel dar, weil der Zweck dieser in jeder Rücksicht ausgezeichneten Lehranstalt erfordert, dass, ohne einer gesunden, möglichst einfachen und leichtverständlichen Theorie im Geringsten ihr Recht zu vergeben, der theoretischen Betrachtung doch überall die vielfachste praktische Anwendung und Ausführung auf dem Fusse folge, damit die Einführung der Theorie in das Leben nie aus dem Auge verloren werde, eine wahrhaft theoretisch-praktische Richtung, welche hauptsächlich der jetzige Director der genannten für das gegenwärtige Zeitbedürfniss so hochwichtigen Lehranstalt dem ganzen Unterrichte an derselben in höchst anerkennungswerther Weise mit dem sichtbarsten Erfolge zu geben bestrebt gewesen ist, und diese Richtung immer noch bis zu ihrem Höhepunkte zu führen sich eifrigst bemühet. Eine solche Richtung erfordert freilich in allen Unterrichtsgegenständen auch Lehrer, die, selbst auf der Höhe der Wissenschaft stehend, gerade dadurch erst vollkommen befähigt werden, sich den Bedürfnissen ihrer, bei nicht selten sehr ausgezeichneter geistiger Befähigung, doch zuweilen mit verhältnissmässig geringeren materiellen Vorkenntnissen ausgerüsteten Zuhörer vollkommen anzubequemen, und die Wissenschaft für das Leben in jeder Weise fruchtbar zu machen. Die Lambert'sche Fassregel, um dieses Beispiels mich zu bedienen, ist ein Product höherer mathematischer Untersuchungen und Rechnungen, und erfordert zu ihrer Entwickelung manche analytische Kunstgriffe, die selbst ihr zu den berühmtesten Mathematikern des vorigen Jahrhunderts gehörender Erfinder nicht in ganz zweckmässiger Weise in Anwendung zu bringen verstand. Ein Lehrer der praktischen Stereometrie an einer landwirthschaftlichen Akademie wird nun freilich nicht so unverständig sein, seine Zuhörer mit einer Menge von Differential- und Integralformeln zu quälen; nur sollte er selbst sich nicht einfallen lassen, das Katheder zu betreten, wenn er seinen Gegenstand nicht bis zu dessen kleinsten und feinsten Nuancen kennt, denn nur, wenn dies der Fall ist, wird er befähigt sein, denselben seinen Zuhörern zu möglichster Anschauung zu bringen, verschiedene dazu erforderliche Kunstgriffe sich selbst zu erfinden, und, weil er die Vorzüge und Mängel seiner Vorschriften bis in's kleinste Detail vollkommen kennt, dieselben in wahrhaft fruchtbringender Weise anzuwenden, und die Anwendung in eben solcher Weise seinen Zuhörern vor die Augen zu führen. Nur ein solcher Unterricht kann auch geistig befähigte Zuhörer auf die Dauer befriedigen, und denselben für ihre künftige Bestimmung wahrhaft Nutzen bringend sein.

Bei meinen Vorlesungen über praktische Stereometrie an der Königlichen staats- und landwirthschaftlichen Akademie zu Eldena machte ich die Bemerkung, dass die Lambert'sche Regel den Fassinhalt fast durchgängig etwas zu gross gab, und ich musste meine Zuhörer, welche unter meinen Augen die Nachmessung des Fasses auf nassem Wege, um das Ergebniss der theoretischen Inhaltsbestimmung zu controliren, bewerkstelligten, öfters auf diesen Umstand aufmerksam machen. Bei weiterem Nachsuchen fand ich dieselbe Erscheinung auch meistens bei den von Lambert selbst und namentlich bei den von Oberreit angestellten Versuchen, ohne dass diese Mathematiker darauf besondern Werth gelegt zu haben scheinen. Dadurch entstand bei mir die Vermuthung, dass dieser Umstand in der Lambert'schen Formel selbst, die in mehreren Beziehungen eine blosse Näherungsformel ist, begründet sein möge. Und da nun Lambert, ganz gegen die sonstige Gewohnheit dieses grossen Mathematikers, eine vollständige Entwickelung und theoretische Begründung seiner Formel eigentlich nirgends gegeben hat; da das, was er in den beiden Abhandlungen, die er über die Visirkunst veröffentlicht hat*), darüber sagt, streng genommen nur auf einer Art von Tatonnement beruhet; da ferner, wie schon Kästner und Hindenburg, so wie auch J. T. Mayer bemerkt haben**), seine analytischen Rechnungen und Entwickelungen nicht ganz von Fehlern frei sind; da mir endlich überhaupt noch keine völlig strenge und mit möglichster Eleganz durchgeführte Entwickelung der Lambert'schen Fassregel bekannt ist***): so entschloss ich mich, selbst eine Entwickelung dieser höchst wichtigen Regel zu versuchen, um möglicherweise dadurch zugleich den oben erwähnten Umstand, dass die Regel den Inhalt öfters zu gross giebt, aufzuklären. Die Resultate dieser Untersuchung will ich nun im Folgenden mittheilen.

Da die Fassdauben nach keinem auf einen strengen mathematischen Ausdruck zu bringenden Gesetze gekrümmt sind, so bleibt nichts weiter übrig, als dafür eine bestimmte mathematische Curve anzunehmen, und dann durch Versuche zu ermitteln, in wie weit die gemachte Annahme sich der Wirklichkeit anschliesst. Auch sind in der That sehr verschiedene Curven zu diesem Zwecke in Vorschlag gebracht worden. Ueber diese verschiedenen Vorschläge uns weiter zu verbreiten, ist jetzt nicht unsere Absicht,

---

*) Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung durch J. H. Lambert. Thl. I. Berlin. 1765. S. 314. Thl. III. Berlin. 1772. S. 12.

**) Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik. Jahrgang 1787. S. 13. 14.

***) Insofern man sich nicht mit bloss elementaren Hülfsmitteln begnügen will, wie ich in meinem Lehrbuch der Mathematik und Physik für Kameralisten. Thl. II. Abth. I. Leipzig. 1843. S. 323. zu thun genöthigt war, wovon aber bei einer solchen ganz allgemeinen, zugleich kritischen, Untersuchung, wie ich hier zu geben beabsichtige, natürlich nicht die Rede sein kann.

da wir es hier vorzugsweise mit der Lambert'schen Fassregel, die auch eigentlich nur allein in der Praxis Beifall gefunden hat, zu thun haben. Lambert aber lässt das Fass auf folgende Art entstehen.

In Taf. III. Fig. 8. sei M der Mittelpunkt der Linie AB, auf welcher in A, B, M die Linien AC, BD, ME senkrecht stehen. Ist nun CED ein zwischen den Linien AC und BD liegender Kreisbogen, dessen Mittelpunkt der in der Verlängerung der Linie ME über den Punkt M hinaus liegende Punkt O ist, und dreht sich die Figur $ABCD$ um die Linie AB wie um eine feste Axe herum, so heisst der dadurch entstandene Körper ein Fass, dessen Inhalt zu bestimmen, wir jetzt versuchen wollen.

Zu dem Ende bezeichnen wir die Höhe AB des Fasses durch $2a$, den halben Spund-Durchmesser ME durch b, und den halben Boden-Durchmesser AC oder BD durch c, wo bekanntlich immer b grösser als c ist; den gesuchten körperlichen Inhalt des Fasses aber wollen wir durch F bezeichnen. Nehmen wir nun M als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy an, dessen x-Axe die Linie AB ist, und bezeichnen die Linie MO durch q, so ist $b+q$ der Halbmesser des Kreisbogens CD, und die Gleichung dieses Kreisbogens in Bezug auf das angenommene Coordinatensystem ist folglich offenbar:

$$1)\quad x^2+(y+q)^2=(b+q)^2.$$

Also ist, weil unser Kreisbogen durch die Punkte C und D geht:

$$2)\quad a^2+(c+q)^2=(b+q)^2,$$

woraus sich mittelst leichter Rechnung

$$3)\quad q=\frac{a^2-b^2+c^2}{2(b-c)},$$

folglich, wie man leicht findet:

$$4)\quad b+q=\frac{a^2+(b-c)^2}{2(b-c)}$$

ergiebt. Aus der Gleichung 1) folgt

$$y+q=\sqrt{(b+q)^2-x^2},$$

also

$$y=\sqrt{(b+q)^2-x^2}-q,$$

woraus man ferner sogleich

$$y^2 = (b+q)^2 + q^2 - x^2 - 2q\sqrt{(b+q)^2 - x^2}$$

erhält; und weil nun nach den Lehren der Integralrechnung bekanntlich

$$F = \pi \cdot \int_{-a}^{+a} y^2 \partial x$$

ist, so ist

$$5) \quad F = \{(b+q)^2 + q^2\} \int_{-a}^{+a} \partial x - \int_{-a}^{+a} x^2 \partial x - 2q \int_{-a}^{+a} \partial x \sqrt{(b+q)^2 - x^2}.$$

Es ist aber ferner nach den Lehren der Integralrechnung:

$$\int_{-a}^{+a} \partial x = 2a, \quad \int_{-a}^{+a} x^2 \partial x = \frac{2}{3} a^3$$

und allgemein

$$\int \partial x \sqrt{(b+q)^2 - x^2}$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{(b+q)^2 - x^2} + \frac{1}{2} (b+q)^2 \operatorname{Arc\,sin} \frac{x}{b+q},$$

also, indem man die Arcus absolut nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ nimmt:

$$\int_{-a}^{+a} \partial x \sqrt{(b+q)^2 - x^2}$$

$$= a\sqrt{(b+q)^2 - a^2} + \frac{1}{2}(b+q)^2 \left\{ \operatorname{Arc\,sin} \frac{+a}{b+q} - \operatorname{Arc\,sin} \frac{-a}{b+q} \right\},$$

oder kürzer:

$$\int_{-a}^{+a} \partial x \sqrt{(b+q)^2 - x^2}$$

$$= a\sqrt{(b+q)^2 - a^2} + (b+q)^2 \operatorname{Arc\,sin} \frac{a}{b+q}.$$

Daher ist nach dem Obigen, wie man leicht findet:

$$6)\quad F=$$
$$2a\pi\left\{(b+q)^2+q^2-\frac{1}{3}a^2-q\sqrt{(b+q)^2-a^2}-\frac{q(b+q)^2}{a}\operatorname{Arcsin}\frac{a}{b+q}\right\}.$$

Nach 4) ist aber, wie man leicht findet:

$$(b+q)^2-a^2=\frac{\{a^2-(b-c)^2\}^2}{4(b-c)^2},$$

also, weil bei allen Fässern $b-c$ eine gegen a sehr kleine Grösse, folglich $a^2-(b-c)^2$ stets positiv ist:

$$\sqrt{(b+q)^2-a^2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2(b-c)},$$

also, wie sich leicht mittelst 3) ergiebt:

$$q-\sqrt{(b+q)^2-a^2}=-c.$$

Daher ist nach 6):

$$7)\quad F=2a\pi\left\{(b+q)^2-cq-\frac{1}{3}a^2-\frac{q(b+q)^2}{a}\operatorname{Arcsin}\frac{a}{b+q}\right\},$$

oder auch:

$$8)\quad F=2a\pi\left\{(b+q)^2-cq-\frac{1}{3}a^2-q(b+q)\frac{\operatorname{Arcsin}\dfrac{a}{b+q}}{\dfrac{a}{b+q}}\right\}.$$

Es würde keine Schwierigkeit haben, diese Formeln durch Einführung der Werthe 3) und 4) von q und $b+q$ ganz entwickelt bloss in den Grössen a, b, c auszudrücken, was aber, wie es mir scheint, für die numerische Rechnung nicht von wesentlichem Nutzen sein würde, indem man am Leichtesten q nach der unmittelbar aus 3) fliessenden Formel:

$$9)\quad q=\frac{a^2-(b-c)(b+c)}{2(b-c)}=\frac{a^2}{2(b-c)}-\frac{1}{2}(b+c),$$

und dann F unmittelbar nach einer der beiden obigen Formeln 7) oder 8) berechnen dürfte. Noch eine andere Formel werden wir indess weiter unten erhalten.

Für den Gebrauch im gemeinen Leben sind aber alle diese Formeln viel zu weitläufig, und man muss zu diesem Zwecke einfachere Näherungsformeln suchen, die jedoch eine hinreichende Genauigkeit darbieten. Die Möglichkeit der Entwickelung solcher Näherungsformeln wird durch den Umstand dargeboten, dass bei allen im gemeinen Leben vorkommenden Fässern der Bruch $\frac{b-c}{a}$ immer eine sehr kleine Grösse ist. Wir wollen daher auf diesen Bruch jetzt besonders unser Augenmerk richten, und zu dem Ende

$$10)\quad \frac{b-c}{a}=u,\quad b-c=au$$

setzen. Dann ist, wie man leicht mittelst des Obigen findet:

$$11)\quad q=\frac{a-(b+c)u}{2u},\quad b+q=a\frac{1+u^2}{2u};$$

also

$$12)\quad \frac{a}{b+q}=\frac{2u}{1+u^2};$$

und setzen wir nun der Kürze wegen noch

$$13)\quad v=\frac{a}{b+q}=\frac{2u}{1+u^2};$$

so ist nach 8):

$$14)\quad F=2a\pi\left\{(b+q)^2-cq-\frac{1}{3}a^2-q(b+q)\frac{\operatorname{Arc}\sin v}{v}\right\},$$

oder, wenn wir

$$15)\quad \frac{\operatorname{Arc}\sin v}{v}=1+w$$

setzen:

$$16)\quad F=2a\pi\{b^2-\frac{1}{3}a^2+(b-c)q-q(b+q)w\},$$

oder

$$17)\quad F=2a\pi\{b^2-\frac{1}{3}a^2+aqu-q(b+q)w\},$$

oder nach 11):

$$18)\quad F=2a\pi\,\{b^2+\frac{1}{6}a^2-\frac{1}{2}a(b+c)u-q(b+q)w\},$$

oder auch

$$19)\quad F=2a\pi\left\{\begin{array}{l} b^2+\frac{1}{6}a^2-\frac{1}{2}a(b+c)u \\ -a\,\frac{(a-(b+c)u)(1+u^2)}{4u^2}\,w \end{array}\right\}.$$

Nach einer sehr bekannten analytischen Reihe ist aber, weil hier

$$v=\frac{2u}{1+u^2}$$

gewiss immer kleiner als die Einheit ist:

$$\text{Arcsin}v=v+\frac{1}{2}\cdot\frac{v^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{v^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{v^7}{7}+\ldots..,$$

also

$$\frac{\text{Arcsin}v}{v}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{v^4}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{v^6}{7}+\ldots..,$$

und folglich

$$w=\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{v^4}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{v^6}{7}+\ldots..$$

Daher ist nach 19):

$$20)\quad F=$$

$$2a\pi\left\{\begin{array}{l} b^2+\frac{1}{6}a^2-\frac{1}{2}a(b+c)u \\ \qquad -\frac{1}{4}a(a-(b+c)u)(1+u^2)\left(\frac{v}{u}\right)^2\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}v^2 \\ +\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}v^4 \\ +\ldots\ldots \end{array}\right\}\end{array}\right\}.$$

Lässt man bei unverändertem a den Bodenhalbmesser c sich dem Halbmesser b am Spund nähern, so nähert

$$u=\frac{b-c}{a}$$

sich der Null. Also nähert sich auch

$$v=\frac{2u}{1+u^2}$$

der Null, und

$$\frac{v}{u}=\frac{2}{1+u^2}$$

nähert sich der Gränze 2. Daher nähert nach 20) offenbar F sich der Gränze

$$2a\pi\left(b^2+\frac{1}{6}a^2-\frac{1}{4}a.a.4.\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)=2ab^2\pi,$$

d. i. dem Cylinder, welcher die Höhe des Fasses zur Höhe und den Spund-Durchmesser zum Durchmesser hat, wie es ganz der Natur der Sache gemäss ist.

Wir wollen nun aber F nach den Potenzen der Grösse u entwickeln, was, insofern wir uns dabei nur auf die ersten Glieder der betreffenden Reihe beschränken, bei der Form, die wir dem Ausdrucke 20) gegeben haben, keine Schwierigkeit mehr hat.

Es ist

$$\begin{aligned}&(a-(b+c)u)(1+u^2)\\&=a-(b+c)u+au^2-(b+c)u^3.\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\frac{v}{u}=2(1+u^2)^{-1},\quad \left(\frac{v}{u}\right)^2=4(1+u^2)^{-2};$$

also allgemein

$$\left(\frac{v}{u}\right)^2.v^{2n}=2^{2(n+1)}u^{2n}(1+u^2)^{-2(n+1)}.$$

Daher ist nach dem Binomischen Lehrsatze, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}\left(\frac{v}{u}\right)^2&=2^2(1+u^2)^{-2}\\&=4-8u^2+12u^4-16u^6+\ldots..,\end{aligned}$$

$$\left(\frac{v}{u}\right)^2 . v^2 = 2^4 u^2 (1+u^2)^{-4}$$
$$= 16u^2 - 64u^4 + 160u^6 - 320u^8 + \ldots\ldots,$$

$$\left(\frac{v}{u}\right)^2 . v^4 = 2^6 u^4 (1+u^2)^{-6}$$
$$= 64u^4 - 384u^6 + 1344u^8 - 3584u^{10} + \ldots\ldots,$$

$$\left(\frac{v}{u}\right)^2 . v^6 = 2^8 u^6 (1+u^2)^{-8}$$
$$= 256u^6 - 2048u^8 + 9216u^{10} - 30720u^{12} + \ldots\ldots,$$

u. s. w.

Führt man nun diese Ausdrücke in die Gleichung 20) ein, bleibt aber, da es uns hier nur auf eine Näherung ankommt, bei Gliedern, welche die vierte Potenz von u enthalten, stehen, so erhält man:

$$\frac{F}{2a\pi} =$$
$$b^2 + \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{2}a(b+c)u$$
$$-\frac{1}{4}a\{a-(b+c)u+au^2-(b+c)u^3\}\left\{\begin{array}{r}\frac{2}{3} - \frac{4}{3}u^2 + 2u^4 \\ + \frac{6}{5}u^2 - \frac{24}{5}u^4 \\ + \frac{20}{7}u^4\end{array}\right\}$$

$$= \quad b^2 + \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{2}a(b+c)u$$
$$-\frac{1}{4}a\{a-(b+c)u+au^2-(b+c)u^3\}\left\{\frac{2}{3} - \frac{2}{15}u^2 + \frac{2}{35}u^4\right\}$$

$$= \quad b^2 + \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{2}a(b+c)u$$
$$-\frac{1}{2}a\{a-(b+c)u+au^2-(b+c)u^3\}\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{15}u^2 + \frac{1}{35}u^4\right\}.$$

Führt man nun die Multiplication aus, indem man immer bei den die vierte Potenz von u enthaltenden Gliedern stehen bleibt, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$21)\quad F=$$

$$2a\pi\{b^2-\frac{1}{3}a(b+c)u-\frac{2}{15}a^2u^2+\frac{2}{15}a(b+c)u^3+\frac{2}{105}a^2u^4\}.$$

Aus dieser Formel ergeben sich nun die folgenden Näherungsformeln.

Bleibt man bei dem ersten Gliede stehen, so erhält man:

$$22)\quad F=2ab^2\pi.$$

Geht man bis zu der ersten Potenz von u, so ergiebt sich:

$$F=2a\pi\{b^2-\frac{1}{3}a(b+c)u\}.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$au=b-c;$$

also wird vorstehende Formel:

$$F=2a\pi\{b^2-\frac{1}{3}(b+c)(b-c)\},$$

oder

$$F=2a\pi\{b^2-\frac{1}{3}(b^2-c^2)\},$$

oder

$$23)\quad F=2a\pi\left(\frac{2}{3}b^2+\frac{1}{3}c^2\right),$$

Drückt man diese Formel auf folgende Art aus:

$$24)\quad F=\frac{2}{3}(2ab^2\pi)+\frac{1}{3}(2ac^2\pi),$$

so erhält man unmittelbar die Lambert'sche Regel zur Berechnung der Fässer, und sieht also, dass diese Regel bis auf die erste Potenz von $u=\frac{b-c}{a}$ genau ist.

Geht man in der Formel 21) bis zu der zweiten Potenz von u, so erhält man:

$$F=2a\pi\{b^2-\frac{1}{3}a(b+c)u-\frac{2}{15}a^2u^2\},$$

also

$$25)\quad F=2a\pi\left\{\frac{2}{3}b^2+\frac{1}{3}c^2-\frac{2}{15}(b-c)^2\right\}$$

oder

$$26)\quad F=\frac{2}{3}(2ab^2\pi)+\frac{1}{3}(2ac^2\pi)-\frac{2}{15}(2a(b-c)^2\pi).$$

Die in dieser Formel enthaltene Regel kann man auf folgende Art aussprechen:

Der Inhalt eines Fasses wird erhalten, wenn man zu $^2/_3$ des Cylinders, welcher die Spundtiefe zum Durchmesser und die Höhe des Fasses zur Höhe hat, $^1/_3$ des Cylinders, welcher den Bodendurchmesser zum Durchmesser und die Höhe des Fasses zur Höhe hat, addirt, und von der Summe $^2/_{15}$ des Cylinders, welcher den Unterschied zwischen der Spundtiefe und dem Bodendurchmesser zum Durchmesser und die Höhe des Fasses zur Höhe hat, subtrahirt.

Vergleicht man diese Regel, welche bis auf die zweite Potenz von $u=\frac{b-c}{a}$ genau ist, mit der Lambert'schen Regel, so sieht man, dass diese letztere allerdings den Inhalt des Fasses etwas zu gross liefert, was auch, wie schon erinnert, mit meinen und anderen Versuchen ganz übereinstimmt. Ich glaube daher, dass es zweckmässig ist, sich statt der Lambert'schen Regel lieber der obigen Regel, die nur ein wenig mehr Rechnung erfordert und sich auch leicht im Gedächtniss behalten lässt, zu bedienen, wenigstens in den Fällen, wo es auf eine grössere Genauigkeit ankommt.

Geht man in der Formel 21) bis zu der dritten Potenz von u, so erhält man:

$$F=2a\pi\{b^2-\frac{1}{3}a(b+c)u-\frac{2}{15}a^2u^2+\frac{2}{15}a(b+c)u^3\},$$

also

$$27)\quad F=2a\pi\left\{\frac{2}{3}b^2+\frac{1}{3}c^2-\frac{2}{15}(b-c)^2+\frac{2}{15}\cdot\left(\frac{b-c}{a}\right)^2(b^2-c^2)\right\}.$$

Vergleicht man diese Formel mit den Formeln 25) oder 26), so sieht man, dass diese letzteren, oder die oben aus denselben abgeleitete Regel, den Inhalt des Fasses schon etwas zu klein liefern; und berechnet man also den Fassinhalt nach der Formel

$$F = \frac{2}{3}(2ab^2\pi) + \frac{1}{3}(2ac^2\pi) - \frac{2}{15}(2a(b-c)^2\pi),$$

so muss man dem Resultat eigentlich noch die Correction

$$+\frac{4}{15}\cdot\left(\frac{b-c}{a}\right)^2\cdot a(b^2-c^2)\pi$$

oder

$$+\frac{4}{15}\cdot\left(\frac{b-c}{a}\right)^2\cdot a(b-c)(b+c)\pi$$

beifügen, was aber natürlich die Rechnung weitläufiger macht.

Ginge man endlich bis zu der vierten Potenz von u, so müsste man die neue Correction

$$+\frac{4}{105}\cdot\left(\frac{b-c}{a}\right)^2\cdot a(b-c)^2\pi$$

beifügen.

Vereinigt man die beiden vorhergehenden Correctionen in eine, so erhält man als dem nach der Formel

$$F = \frac{2}{3}(2ab^2\pi) + \frac{1}{3}(2ac^2\pi) - \frac{2}{15}(2a(b-c)^2\pi)$$

berechneten Fassinhalte beizufügende Correction:

$$+\frac{8}{105}\cdot\left(\frac{b-c}{a}\right)^2\cdot a(b-c)(4b+3c)\pi.$$

Die Formel

$$F = \frac{2}{3}(2ab^2\pi) + \frac{1}{3}(2ac^2\pi) - \frac{2}{15}(2a(b-c)^2\pi),$$

welche, ohne weitere Correction, die Berechnung der Inhalte dreier Cylinder erfordert, scheint mir mit hinreichender Genauigkeit die nöthige Leichtigkeit der numerischen Rechnung zu verbinden. Sehr zur Erleichterung dieser und anderer stereometrischer Rechnungen dient eine Tafel cylindrischer Räume mit dem Durchmesser und der Höhe des Cylinders als Argument, der man keine zu grosse, aber doch hinreichende Ausdehnung zu geben hat. Aus dieser Tafel kann man die erforderlichen cylindrischen Räume

$$2ab^2\pi,\quad 2ac^2\pi,\quad 2a(b-c)^2\pi$$

entnehmen, und hat dieselben dann bloss noch nach der Reihe mit $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{15}$ zu multipliciren, hierauf die beiden ersten Producte zu addiren, das letzte von der Summe zu subtrahiren, was Alles nicht die mindeste Schwierigkeit hat.

Es ist in mehrfacher Beziehung von Interesse, noch einige andere von der kreisförmigen Krümmung unterschiedene Krümmungen der Fassdauben einer näheren Betrachtung zu unterwerfen.

Wir wollen daher, die im Obigen eingeführten Bezeichnungen auch jetzt beibehaltend, annehmen, in Taf. III. Fig. 9. sei *A'B'CD* eine halbe Ellipse, und das Fass entstehe, indem sich der Theil *ABCD* dieser halben Ellipse um *AB* herum dreht. In Bezug auf das bei der Ellipse gewöhnliche Coordinatensystem ist

$$y^2 = \frac{b^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x^2)$$

die Gleichung dieser Ellipse; also ist

$$y^2\partial x = b^2\partial x - \frac{b^2}{\alpha^2}x^2\partial x,$$

folglich

$$\int y^2\partial x = b^2x - \frac{b^2}{3\alpha^2}x^3;$$

also

$$F = \pi\int_{-a}^{+a} y^2\partial x = \pi(2b^2a - \frac{2b^2}{3\alpha^2}a^3).$$

Nun ist aber

$$c^2 = \frac{b^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - a^2) = b^2 - \frac{b^2}{\alpha^2}a^2,$$

also

$$\frac{b^2}{\alpha^2} = \frac{b^2 - c^2}{a^2}.$$

Daher ist

$$F = \pi(2b^2a - \frac{2}{3}\cdot\frac{b^2 - c^2}{a^2}a^3),$$

d. i.

$$28)\quad F = 2a\pi\left(\frac{2}{3}b^2 + \frac{1}{3}c^2\right).$$

oder

$$29)\quad F = \frac{2}{3}(2ab^2\pi) + \frac{1}{3}(2ac^2\pi),$$

welches genau die Lambert'sche Fassregel ist. Hieraus sieht man, dass diese Regel eigentlich die Fassdauben von elliptischer Krümmung voraussetzt. Man sollte nun durch Versuche und genaue Rechnung ermitteln, welche von den beiden Voraussetzungen einer kreisförmigen oder einer elliptischen Krümmung der Fassdauben sich der Wirklichkeit genauer anschliesst. Dass die Lambert'sche Regel, also, wie wir jetzt wissen, die Voraussetzung einer elliptischen Krümmung der Fassdauben, den Inhalt des Fasses meistens etwas zu gross giebt, ist uns schon bekannt.

Wir wollen jetzt annehmen, dass in Taf. III. Fig. 9. die Bogen $A'CE$ und $B'DE$ Bogen zweier über der Axe $A'B'$ beschriebener Parabeln seien, welche ihre Scheitel respective in A' und B' haben, und dass das Fass wieder durch Umdrehung von $ABCD$ um AB entstehe. Ist nun überhaupt

$$y^2 = px$$

die Gleichung der Parabel $A'CE$ und $A'A = u$, so ist

$$c^2 = pu,\quad b^2 = p(a+u);$$

also

$$\frac{b^2}{c^2} = 1 + \frac{a}{u},\quad u = \frac{ac^2}{b^2 - c^2},\quad a + u = \frac{ab^2}{b^2 - c^2};$$

$$p = \frac{c^2}{u} = \frac{b^2 - c^2}{a}.$$

Folglich ist

$$\frac{1}{2}F = \pi\int_{\frac{ac^2}{b^2-c^2}}^{\frac{ab^2}{b^2-c^2}} \frac{b^2 - c^2}{a}\, x\partial x,$$

also

$$F = 2\pi\frac{b^2 - c^2}{a}\int_{\frac{ac^2}{b^2-c^2}}^{\frac{ab^2}{b^2-c^2}} x\partial x,$$

d. i.

$$F=\pi\frac{b^2-c^2}{a}\left\{\left(\frac{ab^2}{b^2-c^2}\right)^2-\left(\frac{ac^2}{b^2-c^2}\right)^2\right\},$$

also

$$F=a\pi\frac{b^4-c^4}{b^2-c^2},$$

d. i.

$$30)\quad F=a\pi(b^2+c^2),$$

oder

$$31)\quad F=\frac{1}{2}\{(2ab^2\pi)+(2ac^2\pi)\}.$$

Unter der gemachten Voraussetzung wäre also das Fass das arithmetische Mittel zwischen den beiden Cylindern, welche die Spundtiefe und den Bodendurchmesser zu Durchmessern und die Höhe des Fasses zur gemeinschaftlichen Höhe haben. Auch diese Regel hat man wohl zur Berechnung des Inhalts der Fässer in Vorschlag gebracht; sie weicht aber namentlich bei grossen Fässern von der Wahrheit merklich ab.

Wenn in Taf. III. Fig. 9. die Linie CED ein Bogen einer Parabel ist, die ihren Scheitel in E hat und deren Axe EM ist, so ist in Bezug auf E als Anfang und EM als Axe der Abscissen die Gleichung dieser Parabel:

$$y_1^2=px_1.$$

Nehmen wir aber M als Anfang und AB als Axe der Abscissen eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy an, so ist offenbar

$$x_1=b-y,\quad y_1=x;$$

also die Gleichung der Parabel:

$$x^2=p(b-y)$$

oder

$$y=b-\frac{x^2}{p},$$

folglich

$$y^2=b^2-2\frac{b}{p}x^2+\frac{x^4}{p^2},$$

also

$$\int y^2 \partial x = b^2 x - \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{p} x^3 + \frac{x^5}{5p^2};$$

und da nun

$$F = \pi \int_{-a}^{+a} y^2 \partial x$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$F = 2a\pi \left(b^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{p} a^2 + \frac{a^4}{5p^2} \right).$$

Es ist aber

$$c = b - \frac{a^2}{p}, \quad \frac{1}{p} = \frac{b-c}{a^2}, \quad \frac{1}{p^2} = \frac{(b-c)^2}{a^4};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$32) \quad F = 2a\pi \left\{ b^2 - \frac{2}{3} b(b-c) + \frac{1}{5} (b-c)^2 \right\}$$

oder

$$33) \quad F = 2a\pi \left(\frac{8}{15} b^2 + \frac{4}{15} bc + \frac{1}{5} c^2 \right).$$

Diese Formel kann man auch auf folgende Art darstellen:

$$34) \quad F = 2a\pi \left\{ \left(\frac{2}{3} b^2 + \frac{1}{3} c^2 \right) - \frac{2}{15} (b-c)^2 \right\},$$

oder auch auf folgende Art:

$$35) \quad F = 2a\pi \left\{ \left(\frac{2}{3} b + \frac{1}{3} c \right)^2 + \frac{4}{45} (b-c)^2 \right\}.$$

Die Formel 34) lässt sich auch auf folgende Art schreiben:

$$36) \quad F = \frac{2}{3} (2ab^2\pi) + \frac{1}{3} (2ac^2\pi) - \frac{2}{15} (2a(b-c)^2 \pi),$$

und führt also, was ich als besonders bemerkenswerth hervorhebe, wieder auf die von mir oben für das kreisförmige Fass gegebene Regel.

Aus angestellten vergleichenden Versuchen schliesst Oberreit*): „dass eigentlich die *parabolische* Krümmung der Dauben es ist, die der Wahrheit am nächsten kommt“, wobei er ganz die vorher betrachtete Gestalt des Fasses zu Grunde legt; und da ich im Obigen gezeigt habe, dass auch die kreisförmige Krümmung der Dauben, wenn man noch die zweite Potenz der Grösse $\frac{b-c}{a}$ berücksichtigt, ganz zu derselben Regel führt, so glaube ich allerdings, dass diese Regel überhaupt die genaueste ist, welche man bei der jetzigen Lage der Sache geben kann, wenn man zugleich von der Leichtigkeit der Rechnung nicht zu viel aufopfern will.

Interessant und wichtig scheint mir nun aber immer noch die Frage, ob die kreisförmige oder die parabolische Krümmung der Fassdauben der Wahrheit am nächsten kommt, was sich natürlich nur durch möglichst genaue Versuche ermitteln lässt. Dann muss man aber natürlich das kreisförmige Fass nicht nach einer der obigen Näherungsformeln, sondern ganz genau berechnen, weshalb ich jetzt noch die obigen ganz genauen Formeln so umgestalten will, wie sie mir die leichteste und bequemste Rechnung zu gestatten scheinen.

Man berechne den Hülfswinkel ω mittelst der Formel

$$37)\quad \operatorname{tang}\omega=\frac{b-c}{a},$$

wo bekanntlich $\frac{b-c}{a}=u$ ist. Dann ist

$$v=\frac{2u}{1+u^2}=\frac{2\operatorname{tang}\omega}{1+\operatorname{tang}\omega^2}=2\sin\omega\cos\omega=\sin 2\omega.$$

Nehmen wir nun an, dass ω in Secunden ausgedrückt sei, so ist

$$\operatorname{Arcsin} v=\operatorname{Arcsin}\sin 2\omega=2\omega\sin 1''.$$

Daher ist nach 7) und 13):

$$F=2a\pi\{(b+q)^2-cq-\frac{1}{3}a^2-\frac{2q(b+q)^2}{a}\omega\sin 1''\},$$

oder

---

*) Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik. Jahrgang 1786. S. 454.

$$38)\quad F=2a^3\pi\left\{\left(\frac{b+q}{a}\right)^2\left(1-2\frac{q}{a}\omega\sin 1''\right)-\frac{c}{a}\cdot\frac{q}{a}-\frac{1}{3}\right\}.$$

Weil

$$\frac{b+q}{a}=\frac{1}{v}=\operatorname{cosec}2\omega$$

ist, so kann man die Gleichung 38) auch auf folgende Art schreiben:

$$39)\quad F=2a^3\pi\left\{\left(1-2\frac{q}{a}\omega\sin 1''\right)\operatorname{cosec}2\omega^2-\frac{c}{a}\cdot\frac{q}{a}-\frac{1}{3}\right\},$$

wo man q am Leichtesten mittelst der aus dem Obigen sogleich sich ergebenden Formel

$$40)\quad q=a\operatorname{cosec}2\omega-b$$

berechnet. Mittelst der vorhergehenden Formeln wird man immer den Inhalt des kreisförmigen Fasses ganz genau berechnen können, wenn man es mit dem parabolischen Fasse vergleichen will.

XVIII.

Begründung eines Lehrsatzes zur Bestimmung höherer Integrale zusammengesetzter Functionen.

Von

Herrn Hofrath L. Oettinger,

zu Freiburg i. B.

§. 1.

Sind X und Z zwei unter sich verschiedene Functionen von x, so gilt für die Darstellung höherer Differenziale zusammengesetzter Functionen von x die bekannte Gleichung

$$1)\quad \frac{\partial^r XZ}{(\partial x)^r}=\frac{X\partial^r Z}{(\partial x)^r}+(r)_1\frac{\partial X\partial^{r-1}Z}{(\partial x)^r}+(r)_2\frac{\partial^2 X\partial^{r-2}Z}{(\partial x)^r}+\ldots\ldots$$
$$+(r)_p\frac{\partial^p X\partial^{r-p}Z}{(\partial x)^r}+\ldots\ldots(r)_r\frac{\partial^r X.Z}{(\partial x)^r},$$

wenn hierin die Binomialcoefficienten durch

$$(r)_p=\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\ldots(r-p+1)}{1.2.3\ldots\ldots p}$$

bezeichnet werden*).

*) Häufig werden die Binomialcoefficienten durch die Symbole r_1, r_2, $r_3\ldots\ldots r_p$ bezeichnet. Ich halte diese Bezeichnung weder für consequent noch für systematisch richtig, denn r_1, r_2, $r_3\ldots\ldots r_p\ldots$ deuten bekanntlich unter sich verschiedene Monome oder Elemente an. Verschie-

Dass diese Gleichung auch unmittelbar für die Darstellung der Integrale zusammengesetzter Functionen gelte, ist, soviel mir bekannt, bisher weder behauptet noch bewiesen worden. Es dürfte daher für den innern Zusammenhang der Differenzial- und Integral-Rechnung nicht unwichtig sein, wenn dieser Beweis gegeben wird.

Für die Differenzen- und Summenrechnung gilt der unmittelbare Uebergang von den Gleichungen für positive Unterschiede einfacher und zusammengesetzter Functionen auf die Gleichungen mit negativen Unterschieden (Summenrechnung oder Integralcalcul mit endlichen Differenzen). Diess habe ich in Crelle's Journal 11.—16. Band (Lehre von den aufsteigenden Functionen) und 33. Band S. 117 und ff. (in der Fakultäten-Theorie) und in diesem Archiv 13. Bd. S. 36 und ff. nachzuweisen versucht.

Wenn nun in der Differenzen- und Summenrechnung, welche die Grundlage der Differenzial- und Integralrechnung bildet, diese Gesetze nachgewiesen werden können und auch nachgewiesen wurden, so leitet schon die Analogie darauf hin, dass auch der Beweis auf die Differenzial- und Integralrechnung sich ausdehnen lassen werde.

Für die Differenziale und Integrale der meisten einfachen Functionen habe ich diese Nachweisung in einer Abhandlung „Ueber Differenziale und Integrale höherer Ordnung und mit gebrochenen Exponenten" (Crelle's Journ. 44. Bd. 1. und 2. Heft) gegeben. Dass nun die oben unter Nr. 1) für höhere Differenziale zusammengesetzter Functionen aufgestellte Gleichung auch unmittelbar für höhere Integrale zusammengesetzter Functionen gelte, soll hier nachgewiesen werden.

Unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{\partial^{-r} fx}{(\partial x)^{-r}} = \int^r fx(\partial x)^r$$

ist, stellt sich die Gleichung 1), wenn $-r$ statt $+r$ gesetzt wird, so dar:

$$2)\quad \int^r XZ(\partial x)^r = X\int^r Z(\partial x)^r - [r]_1 \partial X \int^{r+1} Z(\partial x)^r$$
$$+ [r]_2 \partial^2 X \int^{r+2} Z(\partial x)^r - [r]_3 \partial^3 X \int^{r+3} Z(\partial x)^r$$
$$+ \ldots . (-)^p [r]_p \partial^p X \int^{r+p} Z(\partial x)^r \ldots ..$$

---

dene Begriffe aber können ohne Gefahr der Verwechslung nicht wohl auf gleiche Art bezeichnet werden; daher scheint die oben angenommene Bezeichnungsweise die bessere zu sein.

worin

$$[r]_p = \frac{r(r+1)(r+2)\,.....\,(r+p-1)}{1.2.3\,.....\,p} = \frac{r^{p|1}}{1^{p|1}}$$

andeutet.

Diese Gleichung trägt die Integration einer zusammengesetzten Function auf die Integrale der einen und die Differenziale der andern Function (beide für sich betrachtet) über.

Um nun den fraglichen Beweis zu führen, gehen wir von folgender bekannten Gleichung aus:

$$3)\quad \int XZ\partial x = X\int Z\partial x - \int(\partial X\int Z\partial x).$$

Hierin liegt folgendes Gesetz:

4) Um das Integral einer zusammengesetzten Function zu erhalten, vervielfache man die erste ungeänderte Function mit dem Integrale der zweiten, ferner nehme man das Differenzial der ersten Function, verbinde es mit dem Integrale der zweiten und nehme nun von der so erhaltenen zusammengesetzten Function als Ganzes das Integral und ziehe letzteres ab.

Wendet man nun das so eben aufgestellte Gesetz auf das zweite Glied in 3) selbst wieder an, so erhält man

$$-\int(\partial X\int Z\partial x) = -\partial X\int^2 Z\partial x + \int(\partial^2 X\int^2 Z\partial x).$$

Wird nun das zweite Glied dieser Darstellung selbst wieder nach 4) behandelt, so entsteht

$$\int(\partial^2 X\int^2 Z\partial x) = \partial^2 X\int^3 Z\partial x - \int(\partial^3 X\int^3 Z\partial x).$$

Ebenso wird auf gleiche Weise

$$-\int(\partial^3 X\int^3 Z\partial x) = -\partial^3 X\int^4 Z\partial x + \int(\partial^4 X\int^4 Z\partial x)$$

u. s. w. Mit jeder Darstellung wird ein neues Glied gewonnen, dessen Differenzial und Integral getrennt sind. Bei Fortsetzung dieser Entwickelungsweise erhält man

$$5)\quad \int XZ\partial x = X\int Z\partial x - \partial X\int^2 Z\partial x + \partial^2 X\int^3 Z\partial x$$
$$-\partial^3 X\int^4 Z\partial x + \ldots\ \ldots (-)^p.\partial^p X\int^p Z\partial x \ldots$$

Diese Reihe bricht ab, wenn die höheren Differenziale einer Function auf 0 führen. Ist diess nicht der Fall, so läuft sie ins Unendliche.

Die Glieder dieser Reihe enthalten vom 2ten an scheinbar etwas Undarstellbares, denn

$$\int^p Z\partial x$$

kann für sich nicht dargestellt werden, wenn $p>1$ ist. Der Exponent des Integralzeichens und der von ∂x müssen nämlich gleich gross sein, wenn das Integral darstellbar sein soll. Diese Bedingung ist aber auch bei allen Gliedern vorhanden, denn das beigefügte Differenzial ergänzt die erforderliche Potenz von ∂x. Die Glieder dieser Reihe unterliegen nämlich folgendem allgemeinen Gesetze:

$$\partial^p X \int^{p+1} Z\partial x.$$

Wird nun das p^{te} Differenzial von X durch $X_p(\partial x)^p$ bezeichnet, so hat man den darstellbaren Ausdruck

$$\partial^p X \int^{p+1} Z\partial x = X_p \int^{p+1} Z(\partial x)^{p+1}.$$

Die in 5) erhaltene Darstellung fällt mit 2) zusammen, wenn $r=1$ gesetzt wird.

Um nun das zweite Integral zu erhalten, hat man Nr. 5) mit $\int \partial x$ zu verbinden. Hiedurch entsteht

$$\int^2 XZ(\partial x)^2 = \int (X \int Z\partial x)\partial x - \int (\partial X \int^2 Z\partial x)\partial x$$
$$+ \int (\partial^2 X \int^3 Z\partial x)\partial x - \ldots$$

Wird nun jeder Ausdruck auf der rechten Seite nach dem Gesetze 5) selbst wieder behandelt, so ergibt sich für jedes Glied eine Reihe. Werden nun ferner die hieraus fliessenden Reihen gehörig geordnet, so entsteht:

$$\int^{2} XZ(\partial x)^{2}$$

$$=X\int^{2} Z(\partial x)^{2}-\partial X\int^{3} Z(\partial x)^{2}+\partial^{2} X\int^{4} Z(\partial x)^{2}-\partial^{3} X\int^{5} Z(\partial x)^{2}+\ldots$$

$$-\partial X\int^{3} Z(\partial x)^{2}+\partial^{2} X\int^{4} Z(\partial x)^{2}-\partial^{3} X\int^{5} Z(\partial x)^{2}+\ldots$$

$$+\partial^{2} X\int^{4} Z(\partial x)^{2}-\partial^{3} X\int^{5} Z(\partial x)^{2}+\ldots$$

$$-\partial^{3} X\int^{5} Z(\partial x)^{2}+\ldots$$

und hieraus durch Zusammenzählen:

$$6) \quad \int^{2} XZ(\partial x)^{2}$$

$$=X\int^{2} Z(\partial x)^{2}-2\partial X\int^{3} Z(\partial x)^{2}+3\partial^{2} X\int^{4} Z(\partial x)^{2}-4\partial^{3} X\int^{5} Z(\partial x)^{2}\ldots$$

$$\ldots\ldots(-)^{p}.\frac{p+1}{1}\partial^{p} X\int^{p+2} Z(\partial x)^{2}\ldots.$$

Diese Darstellung fällt mit 2) zusammen, wenn dort $r=2$ gesetzt wird, denn es ist

$$[2]_{p}\partial^{p} X\int^{2+p} Z(\partial x)^{2}=\frac{p+1}{1}\partial^{p} X\int^{p+2} Z(\partial x)^{2}.$$

Wird nun Nr. 6) mit $\int\partial x$ verbunden, werden die hieraus sich ergebenden Glieder der rechten Seite selbst wieder nach 5) behandelt, und die hieraus fliessenden Reihen geordnet und zusammengezählt, so erhält man

$$\int^{3} XZ(\partial x)^{3}$$

$$=X\int^{3} Z(\partial x)^{3}-\partial X\int^{4} Z(\partial x)^{3}+\partial^{2} X\int^{5} Z(\partial x)^{3}-\partial^{3} X\int^{6} Z(\partial x)^{3}+\ldots$$

$$-2\partial X\int^{4} Z(\partial x)^{3}+2\partial^{2} X\int^{5} Z(\partial x)^{3}-2\partial^{3} X\int^{6} Z(\partial x)^{3}+\ldots$$

$$+3\partial^{2} X\int Z(\partial x)^{3}-3\partial^{3} X\int^{6} Z(\partial x)^{3}+\ldots$$

$$-4\partial^{3} X\int^{6} Z(\partial x)^{3}+\ldots$$

$$=X\int^3 Z(\partial x)^3-\frac{2.3}{1.2}\partial X\int^4(\partial x)^3$$

$$+\frac{3.4}{1.2}\partial^2 X\int^5 Z(\partial x)^3-\frac{4.5}{1.2}\partial^3 X\int^6 Z(\partial x)^3+\ldots$$

$$\ldots(-)^p\frac{(p+1)(p+2)}{1.2}\partial^p X\int^{p+3} Z(\partial x)^3\ldots.$$

Diese Darstellung fällt mit Nr. 2) zusammen, wenn dort $r=3$ gesetzt wird, denn es ist

$$\frac{3^{p|1}}{1^{p|1}}\partial^p X\int^{3+p} Z(\partial x)^3=\frac{(p+1)(p+2)}{1.2}\partial^p X\int^{p+3} Z(\partial x)^3.$$

Führt man nun auf die angedeutete Weise den Calcul weiter, und steigt durch die höhern Integrale auf, und ist man endlich zu dem $(r-1)$ten Integrale gelangt, so hat dasselbe folgende Form:

$$\int^{r-1} XZ(\partial x)^{r-1}$$

$$=X\int^{r-1} Z(\partial x)^{r-1}-[2]_{r-2}\partial X\int^{r} Z(\partial x)^{r-1}+[3]_{r-2}\partial^2 X\int^{r+1} Z(\partial x)^{r-1}$$

$$-[4]_{r-2}\partial^3 X\int^{r+2} Z(\partial x)^{r-1}\ldots(-)^p[p+1]_{r-2}\partial^p X\int^{r-1+p} Z(\partial x)^{r-1}.$$

Werden nun die Glieder dieser Darstellung mit $\int\partial x$ verbunden und die auf der rechten Seite nach 5) behandelt, so entsteht

$$\int^r XZ(\partial x)^r=X\int^r Z(\partial x)^r$$

$$-\partial X\int^{r+1} Z(\partial x)^r+\qquad\partial^2 X\int^{r+2} Z(\partial x)^r$$

$$-[2]_{r-2}\partial X\int^{r+1} Z(\partial x)^r+[2]_{r-2}\partial^2 X\int^{r+2} Z(\partial x)^r$$

$$+[3]_{r-2}\partial^2 X\int^{r+2} Z(\partial x)^r$$

$$-\qquad\partial^3 X\int^{r+3} Z(\partial x)^r+\ldots\ldots\ldots$$

$$-[2]_{r-2}\partial^3 X\int^{r+3} Z(\partial x)^r+\ldots\ldots\ldots$$

$$-[3]_{r-2}\partial^3 X\int^{r+3} Z(\partial x)^r+\ldots\ldots\ldots$$

$$-[4]_{r-2}\partial^3 X\int^{r+3} Z(\partial x)^r+\ldots\ldots\ldots$$

und hieraus durch Zusamenzählen:

$$7) \quad \int^r XZ(\partial x)^r$$

$$= X\int^r Z(\partial x)^r - [2]_{r-1}\partial X\int^{r+1} Z(\partial x)^r + [3]_{r-1}\partial^2 X\int^{r+2} Z(\partial x)^r$$

$$- [4]_{r-1}\partial^3 X\int^{r+3} Z(\partial x)^r \ldots (-)^p[p+1]_{r-1}\partial^p X\int^{r+p} Z(\partial x)^r \ldots$$

Diese Darstellung fällt mit 2) zusammen, denn es ist:

$$[2]_{r-1} = \frac{2.3.4.....r}{1.2.3...(r-1)} = \frac{r}{1},$$

$$[3]_{r-1} = \frac{3.4.5...r(r+1)}{1.2.3...(r-1)} = \frac{r(r+1)}{1.2} = [r]_2,$$

$$[4]_{r-1} = \frac{4.5.6....r(r+1)(r+2)}{1.2.3....(r-1)} = \frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3} = [r]_3,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$[p+1]_{r-1} = \frac{(p+1)(p+2)...(p+r-1)}{1.2.3...(r-1)} = \frac{r(r+1)...(r+p-1)}{1.2...p} = [r]^p.$$

Hiernach ist der fragliche Beweis geliefert und es folgt, dass die Gleichung 1) nicht nur für ein **positives**, sondern auch für ein **negatives** r gilt, und dass man diese Gleichung nicht nur zur Darstellung höherer Differenziale, sondern auch für die **höherer Integrale** zusammengesetzter Functionen benutzen kann.

Hiemit ist zugleich der **unmittelbare Zusammenhang** zwischen den Grundgesetzen der Differenzial- und Integral-Rechnung auch für zusammengesetzte Functionen nachgewiesen.

Bezeichnet man nun die verschiedenen Functionen von x durch f_1x, f_2x, $f_3x ... f_mx$, so hat man aus der Differenzial-Rechnung folgende Gesetze:

$$8) \quad \partial^r f_1xf_2x = (\partial_1 + \partial_2)^r f_1xf_2x,$$

$$\partial^r f_1xf_2xf_3x = (\partial_1 + \partial_2 + \partial_3)^r f_1xf_2xf_3x,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\partial^r f_1xf_2x....f_mx = (\partial_1 + \partial_2 + ... \partial_m)^r f_1xf_2x....f_mx;$$

und es ist durch das Gesagte gezeigt, dass diese Darstellungen für ein **positives** und **negatives** r, also nicht nur für **höhere Differenziale**, sondern auch für **höhere Integrale** unmittelbar gelten. Kennt man daher die einen, so kennt man nach den gehörigen Reductionen auch die andern.

§. 2.

Die im vorigen Paragraphen gegebenen Nachweisungen enthalten, wie vor Augen liegt, eine wesentliche Erweiterung in den Fundamentalsätzen der Differenzial- und Integral-Rechnung. Sie erheben die Lehren dieser Doctrinen auf einen höheren Standpunkt und eröffnen ein reiches Feld zu Anwendungen. Sie verallgemeinern die Entwickelungsmethoden dieses Zweiges der Mathematik und haben dabei den grossen Vortheil, dass sie eine unabhängige Ableitungsweise sichern.

Bisher war die Grundgleichung für die Integration zusammengesetzter Functionen nur in der beschränkten Form

$$\int XZ\partial x = X\int Z\partial x - \int\left(\partial X\int Z\partial x\right),$$

also nur für das erste Integral und nur in zurücklaufender Bildungsweise gegeben.

Diese Form ist sehr beengt, sie erzeugt durch fortgesetzte Wiederholung immer nur je ein Glied und führt bei jeder wiederholten Operation wieder auf die Integration einer zusammengesetzten Function. — Dasselbe Geschäft muss daher so lange wiederholt werden, bis durch fortgesetztes Integriren der Zweck erreicht ist, und aus einem auf mühsame Weise errungenen Resultate für jeden speciellen Fall irgend ein Gesetz erschlossen werden kann.

Diese Beschränkung wird durch die hier mitgetheilte Methode aufgehoben. Es wird ein Ueberblick gewährt, der die Geschäfte nicht nur ungemein erleichtert, sondern das Endziel auf einmal vor Augen rückt, und alle besondern Fälle unter ein allgemeines Gesetz subsumirt.

Es werden sogar zwei bisher immer getrennt und auf schwierige Weise ausgeführte Geschäfte (Differenziren und Integriren) in eines zusammen gezogen und auf einmal ausgeführt, denn man hat nach ausgeführter Differenziation nichts weiter zu thun als $-r$ statt $+r$ zu setzen, um alsbald das fragliche Integral zu erhalten. Mit einem Worte: die Gleichung 1) §. 1. differenzirt und integrirt in einem und demselben Acte.

Hierin ist eine wesentliche Erleichterung in Ausführung der Geschäfte zu erkennen, wenn man auch von der Bedeutung dieser Sätze in wissenschaftlicher Beziehung ganz absehen will, welche den Zusammenhang zwischen der Differenzial- und Integral-Rechnung so klar und einfach vor Augen legt.

Ein Beispiel mag das Gesagte verdeutlichen. Hierzu soll vorerst ein ganz einfacher Fall dienen, und das r^{te} Differenzial und Integral der zusammengesetzten Function

$$x^m(ax+b)^p$$

bestimmt werden.

Setzt man $Z=x^m$ und $(ax+b)^p=X$, so ist:

$$\partial^r x^m(ax+b)^p$$
$$=(ax+b)^p\partial^r x^m+r\partial(ax+b)^p\partial^{r-1}x^m+(r)_2\partial^2(ax+b)^p\partial^{r-2}x^m+\ldots.$$

Nun ist

$$\partial^s X=\partial^s(ax+b)^p=p^{s|-1}a^s(ax+b)^{p-s}(\partial x)^s,$$
$$\partial^s Z=\partial^s x^m \qquad =m^{s|-1}x^{m-s}(\partial x)^s.$$

Durch Einführung der gehörigen Werthe entsteht:

$$\begin{aligned}
1)\quad \partial^r(ax+b)^p x^m = {} & (ax+b)^p m^{r|-1}x^{m-r}(\partial x)^r\\
& +r.p.a(ax+b)^{p-1}m^{r-1|-1}x^{m-r+1}(\partial x)^r\\
& +\frac{r(r-1)}{1.2}p^{2|-1}a^2(ax+b)^{p-2}m^{r-2|-1}x^{m-r+2}(\partial x)^r\\
& +(r)_3p^{3|-1}a^3(ax+b)^{p-3}m^{r-3|-1}x^{m-r+3}(\partial x)^r\\
& \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
& (r)_p p^{p|-1}a^p.m^{r-p|-1}x^{m-r+p}(\partial x)^r.
\end{aligned}$$

Setzt man hierin $-r$ statt r, so geht das Differenzial in das Integral über und man erhält unter Berücksichtigung, dass

$$m^{-r-s|-1}=\frac{1}{(m+r+s)^{r+s|-1}}=\frac{1}{(m+1)^{r+s|1}}$$

ist, unmittelbar aus 1) folgendes Integral:

$$\begin{aligned}
2)\quad \int^r(ax+b)^p x^m(\partial x)^r = {} & \frac{(ax+b)^p.x^{m+r}}{(m+1)^{r|1}}\\
& -\frac{r}{1}.\frac{pa(ax+b)^{p-1}x^{m+r+1}}{(m+1)^{r+1|1}}\\
& +\frac{r(r+1)}{1.2}.\frac{p^{2|-1}a^2(ax+b)^{p-2}x^{m+r+2}}{(m+1)^{r+2|1}}
\end{aligned}$$

$$+\frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3}\cdot\frac{p^{3|-1}a^3(ax+b)^{p-3}x^{m+r+3}}{(m+1)^{r+3|1}}$$

$$\vdots$$

$$(-)^{s}_{p}\cdot\frac{r^{p|1}}{1^{p|1}}\cdot\frac{p^{p|-1}a^p\,.\,x^{m+r+p}}{(m+1)^{r+p|1}}$$

$$+\frac{C_1x^{r-1}}{1^{r-1|1}}+\frac{C_2x^{r-2}}{1^{r-2|1}}+\frac{C_3x^{r-3}}{1^{r-3|1}}+\ldots C_{r-1}x+C_r.$$

Die nämliche Darstellung erhält man auch, wenn man vom ersten zum zweiten, von diesem zum dritten und sofort bis zum r^{ten} allmälig aufsteigt, jedoch nach langer Arbeit.

Das vorstehende Integral hat r Constanten. Sie werden gefunden, wenn in der vorstehenden Darstellung $x=0$ gesetzt, und allmälig die Werthe 1, 2, 3, ...r statt r eingeführt werden. S. Crelle's Journ. 44. Bd. p. 149 u. ff.

Das nämliche Resultat, welches die vorstehende Gleichung 2) enthält, wird gewonnen, wenn man die Integralgleichung 2) oder 7) §. 1. benutzt und die Werthe

$$\partial^s(ax+b)^p=p^{s|-1}a^s(ax+b)^{p-s}(\partial x)^s,$$

$$\int x^m(\partial x)^s=\frac{x^{m+s}}{(m+1)^{s|1}}$$

einführt. Differenzial und Integral unterliegen also dem gleichen Gesetze.

Eine zweite Form für die entwickelte Darstellung wird gewonnen, wenn man $X=x^m$ und $Z=(ax+b)^p$ setzt. Es entsteht dann unter Benutzung der oben aufgestellten Differenzialcoefficienten:

$$3)\quad \partial^r x^m(ax+b)^p = x^m.p^{r|-1}a^r(ax+b)^{p-r}(\partial x)^r$$
$$+r.mp^{r-1|-1}a^{r-1}x^{m-1}(ax+b)^{p-r+1}(\partial x)^r$$
$$+(r)_2m^{2|-1}p^{r-2|-1}a^{r-2}x^{m-2}(ax+b)^{p-r+2}(\partial x)^r$$
$$+(r)_3m^{3|-1}p^{r-3|-1}a^{r-3}x^{m-3}(ax+b)^{p-r+3}(\partial x)^r$$
$$\vdots$$
$$+(r)_m m^{m|-1}p^{r-m|-1}a^{r-m}(ax+b)^{p-r+m}(\partial x)^r.$$

Wird hierin $-r$ statt r gesetzt und bemerkt, dass

$$p^{-r-s|-1} = \frac{1}{(p+r+s)^{r+s|-1}} = \frac{1}{(p+1)^{r+s|1}}$$

ist, so ergibt sich hieraus unmittelbar das nachstehende r^{te} Integral:

$$4) \int^r x^m(ax+b)^p(\partial x)^r = \frac{x^m(ax+b)^{p+r}}{(p+1)^{r|1}a^r}$$

$$- \frac{r.m.x^{m-1}(ax+b)^{p+r+1}}{(p+1)^{r+1|1}a^{r+1}}$$

$$+ [r]_2 \frac{m^{2|-1}x^{m-2}(ax+b)^{p+r+2}}{(p+1)^{r+2|1}a^{r+2}}$$

$$- [r]_3 \frac{m^{3|-1}x^{m-3}(ax+b)^{p+r+3}}{(p+1)^{r+3|1}a^{r+3}}$$

$$\vdots$$

$$(-)^p . [r]_m . \frac{m^{m|-1}(ax+b)^{p+m+r}}{(p+1)^{r+m|1}a^{r+m}}$$

$$+ \frac{C_1x^{r-1}}{1^{r-1|1}} + \frac{C_2x^{r-2}}{1^{r-2|1}} + \frac{C_3x^{r-3}}{1^{r-3|1}} + \ldots. C_{r-1}x + C_r.$$

Das r^{te} Differenzial liefert, wie man leicht erkennt, auch bei verschiedener Anordnung in den beiden Darstellungen 1) und 3) ein und dasselbe Resultat. Das r^{te} Integral liefert aber in 2) und 4) zwei der Form nach verschiedene Resultate.

In der ersten Darstellung entstehen p Glieder mit r Constanten, in der zweiten m Glieder mit r Constanten. Der Inhalt aber wird und muss gleich sein, da er eine und dieselbe Sache bedeutet. In der Darstellung 2) führen alle Constanten für $x=0$ auf 0. In der Darstellung 4) ist diess nicht der Fall.

Man findet die Constanten für 4) auf die oben bezeichnete Weise, wenn $x=0$ und dann $r=1,2,3\ldots..r$ gesetzt wird.

Bezeichnet man das r^{te} Integral für die Grenzen von 0 bis x durch $\int_{0,x}^r$, so hat man

$$5) \int_{0,x}^r x^m(ax+b)^p(\partial x)^r = \frac{x^m(ax+b)^p}{(p+1)^{r|1}a^r} - \frac{r.mx^{m-1}(ax+b)^{p+r+1}}{(p+1)^{r+1|1}a^{r+1}}$$

$$+ [r]_2 \frac{m^{2|-1}x^{m-2}(ax+b)^{p+r+2}}{(p+1)^{r+2|1}a^{r+2}}$$

$$-[r]_3\frac{m^{3|-1}x^{m-3}(ax+b)^{p+r+3}}{(p+1)^{r+3|1}a^{r+3}}$$

$$\vdots$$

$$(-)^m[r]_m\frac{m^{m|-1}x^0(ax+b)^{p+r+m}}{(p+1)^{r+m|1}a^{r+m}}$$

$$(-)^{m+1}\frac{1^{m|1}b^{p+m+1}x^{r-1}}{(p+1)^{m+1|1}1^{r-1|1}a^{m+1}}(-)^{m+1}\frac{2^{m|1}b^{p+m+2}x^{r-2}}{(p+1)^{m+2|1}1^{r-2|1}a^{m+2}}$$

$$(-)^{m+1}\frac{3^{m|1}b^{p+m+3}x^{r-3}}{(p+1)^{m+3|1}1^{r-3|1}a^{m+3}}(-)^{m+1}\frac{4^{m|1}b^{p+m+4}x^{r-4}}{(p+1)^{m+4|1}1^{r-4|1}a^{m+4}}$$

$$\ldots(-)^{m+1}\frac{r^{m|1}b^{p+m+r}}{(p+1)^{m+r|1}a^{m+r}}.$$

Die hier gefundenen Gleichungen gelten nicht nur für ein ganzes, sondern auch für ein gebrochenes r und sind daher grosser Anwendung fähig. Man kann sie zu dem Ende durch Ausscheidung gemeinschaftlicher Faktoren unter bequemere Formen setzen. Aus 2) wird sofort:

$$6)\quad \int_{0,\,x}^{r}(ax+b)^p x^m(\partial x)^r=\frac{1^{m|1}x^{m+r}}{1^{m+r|1}}\Big[(ax+b)^p-r\frac{p(ax+b)^{p-1}ax}{(m+r+1)}$$

$$+[r]_2\frac{p^{2|-1}(ax+b)^{p-2}.a^2x^2}{(m+r+1)^{2|1}}-[r]_3\frac{p^{3|-1}a^3(ax+b)^{p-3}x^3}{(m+r+1)^{3|1}}$$

$$\ldots.(-)^p\frac{[r]_p p^{p|-1}a^p x^p}{(m+r+1)^{p|1}}\Big]:$$

Aus 4) oder 5) wird dann

$$7)\quad \int_{0,\,x}^{r}x^m(ax+b)^p(\partial x)^r=\frac{1^{p|1}(ax+b)^{p+r}}{1^{p+r|1}a^r}\Big[x^m-\frac{r.mx^{m-1}(ax+b)}{(p+r+1).a}$$

$$+[r]_2\frac{m^{2|-1}x^{m-2}(ax+b)^2}{(p+r+1)^{2|1}a^2}-[r]_3\frac{m^{3|-1}x^{m-3}(ax+b)^3}{(p+r+1)^{3|1}a^3}\ldots..$$

$$\ldots(-)^m[r]_m\frac{m^{m|-1}(ax+b)^m}{(p+r+1)^{m|1}a^m}\Big]$$

$$(-)^{m+1}\frac{1^{p|1}b^{p+m+1}}{1^{p+m+1|1}a^{m+1}}\Big[\frac{1^{m|1}x^{r-1}}{1^{r-1|1}}+\frac{2^{m|1}bx^{r-2}}{(p+m+2)1^{r-2|1}a}$$

$$+\frac{3^{m|1}b^2x^{r-2}}{(p+m+2)^{2|1}a^2 1^{r-3|1}}\ldots+\frac{(r-1)^{m|1}b^{r-2}x}{(p+m+2)^{r-2|1}a^{r-2}}+\frac{r^{m|1}b^{r-1}}{(p+m+2)^{r-1|1}a^{r-1}}\Big].$$

Hierin kann r eine ganze Zahl, einen ächten oder unächten Bruch bedeuten. So ist

$$8)\quad \int_{0,x}^{\frac{r}{q}} x^m(ax+b)^p(\partial x)^{\frac{r}{q}} = \frac{1^{p|1}(ax+b)^{p+\frac{r}{q}}}{1^{\frac{r}{q}+p}\sqrt[q]{a^r}}\Bigg[x^m - \frac{r.mx^{m-1}(ax+b)}{q(1+p+\frac{r}{q})a}$$

$$+\frac{r(r+q)}{1.2.q^2}\frac{m^{2|-1}x^{m-2}(ax+b)^2}{(1+p+\frac{r}{q})^{2|1}a^2} - \frac{r^{3|q}m^{3|-1}x^{m-3}(ax+b)^3}{1^{3|1}q^3(1+p+\frac{r}{q})^{3|1}a^3} + \ldots.$$

$$\ldots\ldots(-)^m\frac{r(r+q)(r+2q)\ldots(r+(m-1)q)m^{m|-1}(ax+b)^m}{1.2\ldots.m.q^m(1+p+\frac{r}{q})^{m|1}a^m}\Bigg]$$

$$(-)^{m+1}\frac{1^{m|1}.1^{p|1}b^{m+p+\frac{r}{q}}}{1^{p+m+\frac{r}{q}|1}a^{m+\frac{r}{q}}}.$$

Hieraus lassen sich eine Menge specieller Fälle ableiten und in Tafeln bringen, welche die hierher gehörigen Integraltafeln ergänzen und erweitern. Diess Geschäft wird aber nicht mehr nöthig, da die hier gegebenen Darstellungen alle besonderen Fälle schon entwickelt dem Auge vorlegen. So ist sofort

$$9)\quad \int_{0,x}^{\frac{1}{2}} x(ax+b)^p(\partial x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2.1^{p|1}(ax+b)^p\sqrt{ax+b}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{p|1}\sqrt{a\pi}}\left[x - \frac{(ax+b)}{(2p+3)a}\right]$$

$$+\frac{2.1^{p|1}b^{p+1}\sqrt{b}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{p+1|1}a\sqrt{a\pi}},$$

$$\int_{0,x}^{\frac{1}{2}} x^2(ax+b)^p(\partial x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2.1^{p|1}(ax+b)^p\sqrt{ax+b}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{p|1}\sqrt{a\pi}}\left[x^2 - \frac{2x(ax+b)}{(2p+3)a} + \frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{(ax+b)^2}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^{2|1}.a^2}\right]$$

$$-\frac{2.1^{2|1}1^{p|1}b^{p+2}\sqrt{b}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{p+2|1}\cdot a^2\sqrt{a\pi}},$$

u. s. w. Nicht uninteressante Resultate ergeben sich, wenn man auf noch speciellere Fälle zurückgeht und die vorliegenden Gleichungen zur Darstellung des bekannten Eulerschen Integrals höherer Ordnung benutzt.

Setzt man nämlich $b=1$, $a=-1$ und nimmt das Integral zwischen den Grenzen 0 und 1, so hat man aus 6), da alle Glieder mit Ausnahme des letzten verschwinden:

$$10)\quad \int_{0,1}^{r} x^m(1-x)^p(\partial x)^r = \frac{r^{p|1}1^{m|1}}{1^{m+p+r|1}} = \frac{1^{r+p-1|1}1^{m|1}}{1^{r-1|1}\,1^{m+p+r|1}}$$

$$= \frac{\Gamma(r+p)\Gamma(m+1)}{\Gamma(r)\Gamma(m+p+r+1)} = \frac{(1,1)^{r+p-1}.(1,1)^m}{(1,1)^{r-1}.(1,1)^{m+p+r}}.$$

Aus 7) wird bei den gleichen Grenzen:

$$11)\quad \int_{0,1}^{r} x^m(1-x)^p(\partial x)^r$$

$$= \frac{1^{p|1}}{1^{p+m+1|1}}\left[\frac{1^{m|1}}{1^{r-1|1}} - \frac{2^{m|1}}{1^{r-2|1}(p+m+2)} + \frac{3^{m|1}}{1^{r-3|1}(p+m+2)^{2|1}} \cdots\right.$$

$$\left.\cdots(-)^{r-2}\frac{(r-1)^{m|1}}{(p+m+2)^{r-2|1}}(-)^{r-1}\frac{r^{m|1}}{(p+m+2)^{r-1|1}}\right].$$

Beide Werthe in 10) und 11) sind, obgleich in der Form verschieden, an Inhalt gleich, wie sich leicht zeigen lässt. Scheidet man nämlich im Zähler die Facultät $1^{m|1}$, im Nenner $1^{p+m+r|1}$ und $1^{r-1|1}$ aus, so geht 11) über in

$$\int_{0,1}^{r} x^m(1-x)^p(\partial x)^r$$

$$= \frac{1^{p|1}1^{m|1}}{1^{p+m+r|1}\,1^{r-1|1}}\left[(p+m+r)^{r-1|-1} - \frac{r-1}{1}(p+m+r)^{r-2|-1}(m+1)\right.$$

$$-(r-1)_2(p+m+r)^{r-3|-1}(m+1)^{2|1}+(r-1)_3(p+m+r)^{r-4|-1}(m+1)^{3|1}\cdots$$

$$\left.\cdots(-)^{r-1}(r-1)_{r-1}(m+1)^{r-1|1}\right].$$

Die eingeklammerte Reihe lässt sich auf folgende Weise behandeln:

$$(a-b)^{n|-d} = a^{n|-d} - n.a^{n-1|-d}b^{1|d} + (n)_2 a^{n-2|-d}b^{2|d} - \ldots$$

$$\ldots(-)^n(n)_n b^{n|d}.$$

Wird nämlich $p+m+r=a$, $m+1=b$, $d=1$, $r-1=n$ gesetzt, so geht die eingeschlossene Reihe über in

$$(p+r-1)^{r-1|-1} = (p+1)^{r-1|1}.$$

Die Einführung dieses Werthes führt zu folgender Darstellung:

$$12) \quad \int_{0,1}^{r} x^m(1-x)^p(\partial x)^r = \frac{1^{p|1}1^{m|1}(p+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}1^{p+m+r|1}} = \frac{1^{m|1}.1^{p+r-1|1}}{1^{r-1|1}1^{p+m+r|1}}.$$

Diess fällt mit 10) zusammen, und somit sind die Eigenschaften dieses Eulerschen Integrals höherer Ordnung ermittelt.

Setzt man $r=1$, so ist wie bekannt:

$$13) \quad \int_0^1 x^m(1-x)^p\partial x = \frac{1^{m|1}1^{p|1}}{1^{p+m+1|1}} = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+m+2)} = \frac{(1,1)^m.(1,1)^p}{(1,1)^{p+m+1}}.$$

Setzt man $r+\frac{s}{q}$ statt r, so wird

$$14) \quad \int_{0,1}^{r+\frac{s}{q}} x^m(1-x)^p(\partial x)^{r+\frac{s}{q}} = \frac{1^{m|1}.1^{p+r+\frac{s}{q}-1|1}}{1^{p+m+r+\frac{s}{q}|1}.1^{r+\frac{s}{q}-1|1}}$$

$$= \frac{1^{m|1}(s+rq)^{p|q}.q^{m+r}}{1^{\frac{s}{q}|1}(s+q)^{p+m+r|q}}.$$

Hieraus entsteht für

$$\frac{s}{q}=\frac{1}{2} \text{ und } r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots..:$$

$$15) \quad \int_{0,1}^{\frac{1}{2}} x^m(1-x)^p(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1^{m|1}1^{p|2}.2^{m+1}}{3^{p+m|2}\sqrt{\pi}},$$

$$\int_{0,1}^{\frac{3}{2}} x^m(1-x)^p(\partial x)^{\frac{3}{2}} = \frac{1^{m|1}3^{p|2}2^{m+2}}{3^{p+m+1|2}\sqrt{\pi}},$$

$$\int_{0,1}^{\frac{5}{2}} x^m(1-x)^p(\partial x)^{\frac{5}{2}} = \frac{1^{m|1}5^{p|2}2^{m+3}}{3^{p+m+2|2}\sqrt{\pi}}.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\int_{0,1}^{r+\frac{1}{2}} x^m(1-x)^p(\partial x)^{r+\frac{1}{2}} = \frac{1^{m|1}.(2r+1)^{p|2}2^{m+r+1}}{3^{p+m+r|2}\sqrt{\pi}}.$$

Die in 10) und 12) gefundene Gleichung lässt sich auch unmittelbar aus dem r^{ten} Differenzial Nr. 1) ableiten. Setzt man nämlich wie vorhin $b=1$, $a=-1$ und 1 statt x, so hat man aus dieser Gleichung, da alle Glieder mit Ausnahme des $(p+1)^{ten}$ verschwinden:

$$16) \quad \partial^r x^m(1-x)^p = (-)^p.r^{p|-1}m^{r-p|-1}(\partial x)^r.$$

Wird hierin $-r$ statt r gesetzt, so erhält man

$$\int_{0,1}^{r} x^m(1-x)^p(\partial x)^r = \frac{r^{p|1}}{(m+1)^{r+p|1}} = \frac{1^{m|1}.1^{p+r-1|1}}{1^{r-1|1}1^{m+r+p|1}}.$$

Die hier gegebenen Nachweisungen dürften in so weit nicht ohne Bedeutung sein, als sie den Zusammenhang zwischen den Fundamentalsätzen der Differenzial- und Integral-Rechnung unzweifelhaft aufdecken, und deswegen für eine systematische Begründung dieser wichtigen Doctrinen sich geltend machen. Sie zeigen, wie diess in der Natur der Sache liegt, dass die bestimmten Integrale denselben Gesetzen unterliegen, wie die Differenziale, wenn diess auch bisher nicht gezeigt wurde. Wäre diess die einzige Ausbeute, welche hier gewonnen wurde, so möchte es schon genügen, um die Aufmerksamkeit der hier mitgetheilten Methode zuzuwenden. Sie gewährt aber ausserdem den Vortheil grosser Einfachheit und Leichtigkeit in Handhabung des Calculs, und eine nicht verkennbare Allgemeinheit für den Ueberblick in den zu gewinnenden Resultaten.

Es mag hier genügen auf diese Sätze aufmerksam gemacht zu haben. Das reiche Material, welches hier zur Verarbeitung vorliegt, wird uns Veranlassung bieten, wieder auf diesen Gegenstand zurückzukommen.

XIX.

Einige Bemerkungen über die näherungsweise Auflösung einer Gleichung mit einer unbekannten Grösse und zweier Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen.

Von

dem Herausgeber.

Es giebt bekanntlich eine sehr einfache annähernde Auflösung der Gleichungen mit **einer** unbekannten Grösse, vorausgesetzt nämlich, dass man schon einen ersten Näherungswerth der unbekannten Grösse kennt. Diese Auflösung stellt man gewöhnlich als eine Art von Regula Falsi dar. Indess lässt sich dieselbe auch in sehr einfacher Weise aus einem geometrischen Gesichtspunkte auffassen, wie ich jetzt zeigen will.

Die aufzulösende Gleichung sei überhaupt

$$f(x)=0,$$

und ξ sei ein schon bekannter erster Näherungswerth der gesuchten unbekannten Grösse. Man nehme nun zwei dem ξ sehr nahe kommende Werthe x_1 und x_2 an, und berechne die entsprechenden Werthe der Function $f(x)$, welche wir durch

$$u_1=f(x_1),\quad u_2=f(x_2)$$

bezeichnen wollen. Die Gleichung

$$u = f(x)$$

kann man sich überhaupt durch eine Curve dargestellt denken, und die durch die Coordinaten x_1, u_1 und x_2, u_2 bestimmten Punkte werden zwei sehr nahe bei einander liegende Punkte dieser Curve sein. Bezeichnen wir aber den wahren Werth der gesuchten unbekannten Grösse durch $\mathfrak{r}$, so dass

$$f(\mathfrak{r}) = 0$$

ist, so wird, wie aus allen vorher gemachten Voraussetzungen sich auf der Stelle ergiebt, auch der durch die Coordinaten $\mathfrak{r}$, 0 bestimmte Punkt $(\mathfrak{r}0)$ unserer Curve sehr nahe bei den Punkten $(x_1 u_1)$ und $(x_2 u_2)$ liegen. Der durch die drei Punkte $(\mathfrak{r}0)$, $(x_1 u_1)$, $(x_2 u_2)$ gehende Theil der Curve wird also, eben weil diese drei Punkte sehr nahe bei einander liegen, näherungsweise mit der durch die beiden Punkte $(x_1 u_1)$ und $(x_2 u_2)$ der Lage nach bestimmten geraden Linie zusammenfallen; und entwickelt man also die Gleichung

$$u = ax + b$$

dieser geraden Linie, so wird man $\mathfrak{r}$ näherungsweise erhalten, wenn man es aus der Gleichung

$$0 = a\mathfrak{r} + b$$

bestimmt. Weil aber unsere gerade Linie durch die beiden Punkte $(x_1 u_1)$ und $(x_2 u_2)$ geht, so haben wir zur Bestimmung der Constanten a, b die beiden Gleichungen

$$u_1 = ax_1 + b, \quad u_2 = ax_2 + b;$$

aus denen sich

$$u_1 - u_2 = a(x_1 - x_2), \quad a = \frac{u_1 - u_2}{x_1 - x_2}$$

ergiebt. Nun erhält man aber aus dem Obigen auch die Gleichung

$$u - u_1 = a(x - x_1)$$

oder

$$u - u_2 = a(x - x_2);$$

also ist die Gleichung unserer geraden Linie

$$u-u_1=\frac{u_1-u_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$$

oder

$$u-u_2=\frac{u_1-u_2}{x_1-x_2}(x-x_2);$$

und zur Bestimmung von $\mathfrak{r}$ hat man also die Gleichung

$$-u_1=\frac{u_1-u_2}{x_1-x_2}(\mathfrak{r}-x_1) \quad \text{oder} \quad -u_2=\frac{u_1-u_2}{x_1-x_2}(\mathfrak{r}-x_2),$$

woraus sich

$$\mathfrak{r}=x_1-\frac{x_1-x_2}{u_1-u_2}u_1 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{r}=x_2-\frac{x_1-x_2}{u_1-u_2}u_2,$$

also

$$\mathfrak{r}=\frac{u_1x_2-u_2x_1}{u_1-u_2}$$

ergiebt.

Dies sind die aus der Algebra bekannten Näherungsformeln. Wie man sich derselben zur successiven Annäherung bedient, braucht hier nicht weiter erläutert zu werden.

Es war mir interessant zu untersuchen, ob sich mittelst einer ähnlichen geometrischen Auffassungsweise nicht auch Näherungsformeln zur Auflösung zweier Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen finden lassen. Was eine von mir angestellte desfallsige kleine Untersuchung ergeben hat, will ich im Folgenden mittheilen.

Die zwei aufzulösenden Gleichungen seien überhaupt

$$f(x,y)=0, \quad F(x,y)=0;$$

und ξ, η seien zwei schon bekannte erste Näherungswerthe der gesuchten unbekannten Grössen. Man nehme nun drei Systeme den ξ, η sehr nahe kommender Werthe an, welche wir durch

$$x_1,\ y_1;\quad x_2,\ y_2;\quad x_3,\ y_3$$

bezeichnen wollen, und berechne die entsprechenden Werthe der Functionen $f(x,y)$ und $F(x,y)$, die durch

$$u_1 = f(x_1, y_1), \quad U_1 = F(x_1, y_1);$$
$$u_2 = f(x_2, y_2), \quad U_2 = F(x_2, y_2);$$
$$u_3 = f(x_3, y_3), \quad U_3 = F(x_3, y_3)$$

bezeichnet werden mögen, wo also

$$u_1, u_2, u_3; \quad U_1, U_2, U_3$$

sämmtlich der Null sehr nahe kommende Grössen sind. Die Gleichungen

$$u = f(x, y), \quad U = F(x, y)$$

kann man überhaupt als die Gleichungen zweier auf dasselbe Coordinatensystem bezogener krummer Flächen betrachten, und die gesuchten Werthe der beiden unbekannten Grössen, welche wir durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bezeichnen wollen, so dass

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0, \quad F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

ist, sind dann eigentlich die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden Curven, in denen die Ebene der xy von den beiden in Rede stehenden krummen Flächen geschnitten wird. Hält man aber alle obigen Voraussetzungen fest, so wird auf der Stelle erhellen, dass man näherungsweise $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ als die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden geraden Linien betrachten kann, in denen von den beiden durch die drei Punkte

$$(x_1 y_1 u_1), \quad (x_2 y_2 u_2), \quad (x_3 y_3 u_3)$$

und durch die drei Punkte

$$(x_1 y_1 U_1), \quad (x_2 y_2 U_2), \quad (x_3 y_3 U_3)$$

gelegten Ebenen die Ebene der xy geschnitten wird.

Bezeichnen wir nun die Gleichungen dieser beiden Ebenen durch

$$ax + by + cu + 1 = 0,$$
$$Ax + By + Cu + 1 = 0;$$

so sind

$$ax + by + 1 = 0,$$
$$Ax + By + 1 = 0$$

die Gleichungen der Durchschnittslinien dieser beiden Ebenen mit der Ebene der xy, und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ müssen daher aus den beiden Gleichungen

$$a\mathfrak{x}+b\mathfrak{y}+1=0,$$
$$A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+1=0$$

bestimmt werden, was nicht die mindeste Schwierigkeit hat, wenn man die constanten Coefficienten a, b und A, B kennt. Zur Bestimmung dieser constanten Coefficienten hat man aber nach dem Obigen die Gleichungen

$$ax_1+by_1+cu_1+1=0,$$
$$ax_2+by_2+cu_2+1=0,$$
$$ax_3+by_3+cu_3+1=0$$

und

$$Ax_1+By_1+CU_1+1=0,$$
$$Ax_2+By_2+CU_2+1=0,$$
$$Ax_3+By_3+CU_3+1=0.$$

Aus dem ersten dieser beiden Systeme von Gleichungen ergeben sich zuvörderst durch Elimination von a die beiden folgenden Gleichungen:

$$b(x_1y_2-x_2y_1)+c(x_1u_2-x_2u_1)+x_1-x_2=0,$$
$$b(x_2y_3-x_3y_2)+c(x_2u_3-x_3u_2)+x_2-x_3=0;$$

und wenn man nun aus diesen beiden Gleichungen b eliminirt, so erhält man:

$$c=-\frac{(x_1-x_2)(x_2y_3-x_3y_2)-(x_2-x_3)(x_1y_2-x_2y_1)}{(x_1u_2-x_2u_1)(x_2y_3-x_3y_2)-(x_2u_3-x_3u_2)(x_1y_2-x_2y_1)}.$$

Den Zähler dieses Bruchs bringt man leicht auf die Form:

$$-x_2\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)\},$$

und den Nenner auf die Form:

$$-x_2\{u_1(x_2y_3-x_3y_2)+u_2(x_3y_1-x_1y_3)+u_3(x_1y_2-x_2y_1)\}.$$

Setzt man also der Kürze wegen

$$\Omega_{1,2}=x_1y_2-x_2y_1,$$
$$\Omega_{2,3}=x_2y_3-x_3y_2,$$
$$\Omega_{3,1}=x_3y_1-x_1y_3;$$

so ist

$$c=-\frac{\Omega_{1,2}+\Omega_{2,3}+\Omega_{3,1}}{u_1\Omega_{2,3}+u_2\Omega_{3,1}+u_3\Omega_{1,2}},$$

und ganz ebenso:

$$C=-\frac{\Omega_{1,2}+\Omega_{2,3}+\Omega_{3,1}}{U_1\Omega_{2,3}+U_2\Omega_{3,1}+U_3\Omega_{1,2}}.$$

Hat man mittelst dieser beiden Formeln c und C bestimmt, so erhält man

$$a,\ b;\quad A,\ B;\quad \mathfrak{x},\ \mathfrak{y}$$

mittelst der folgenden Gleichungen:

$$ax_1+by_1=-(1+cu_1),$$
$$ax_2+by_2=-(1+cu_2);$$

$$Ax_1+By_1=-(1+CU_1),$$
$$Ax_2+By_2=-(1+CU_2);$$

$$a\mathfrak{x}+b\mathfrak{y}=-1,$$
$$A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}=-1;$$

wo

$$1+cu_1=-\frac{(u_1-u_2)\Omega_{3,1}+(u_1-u_3)\Omega_{1,2}}{u_1\Omega_{2,3}+u_2\Omega_{3,1}+u_3\Omega_{1,2}},$$
$$1+cu_2=-\frac{(u_2-u_1)\Omega_{2,3}+(u_2-u_3)\Omega_{1,2}}{u_1\Omega_{2,3}+u_2\Omega_{3,1}+u_3\Omega_{1,2}}$$

und

$$1+CU_1=-\frac{(U_1-U_2)\Omega_{3,1}+(U_1-U_3)\Omega_{1,2}}{U_1\Omega_{2,3}+U_2\Omega_{3,1}+U_3\Omega_{12}},$$
$$1+CU_2=-\frac{(U_2-U_1)\Omega_{2,3}+(U_2-U_3)\Omega_{1,2}}{U_1\Omega_{2,3}+U_2\Omega_{3,1}+U_3\Omega_{1,2}}$$

ist.

Man kann natürlich die Grössen a, b; A, B; $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ auch leicht völlig entwickelt darstellen; für die praktische Rechnung scheinen mir aber die folgenden Formeln die bequemsten zu sein:

$$\Omega_{1,2} = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

$$\Omega_{2,3} = x_2 y_3 - x_3 y_2,$$

$$\Omega_{3,1} = x_3 y_1 - x_1 y_3;$$

$$c = -\frac{\Omega_{1,2} + \Omega_{2,3} + \Omega_{3,1}}{u_1 \Omega_{2,3} + u_2 \Omega_{3,1} + u_3 \Omega_{1,2}},$$

$$C = -\frac{\Omega_{1,2} + \Omega_{2,3} + \Omega_{3,1}}{U_1 \Omega_{2,3} + U_2 \Omega_{3,1} + U_3 \Omega_{1,2}};$$

$$ax_1 + by_1 = -(1 + cu_1),$$

$$ax_2 + by_2 = -(1 + cu_2);$$

$$Ax_1 + By_1 = -(1 + CU_1),$$

$$Ax_2 + By_2 = -(1 + CU_2);$$

$$a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} = -1,$$

$$A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} = -1.$$

Ohne Schwierigkeit erhält man:

$$a = -\frac{y_1(u_2 - u_3) + y_2(u_3 - u_1) + y_3(u_1 - u_2)}{u_1 \Omega_{2,3} + u_2 \Omega_{3,1} + u_3 \Omega_{1,2}},$$

$$b = \frac{x_1(u_2 - u_3) + x_2(u_3 - u_1) + x_3(u_1 - u_2)}{u_1 \Omega_{2,3} + u_2 \Omega_{3,1} + u_3 \Omega_{1,2}};$$

und

$$A = -\frac{y_1(U_2 - U_3) + y_2(U_3 - U_1) + y_3(U_1 - U_2)}{U_1 \Omega_{2,3} + U_2 \Omega_{3,1} + U_3 \Omega_{1,2}},$$

$$B = \frac{x_1(U_2 - U_3) + x_2(U_3 - U_1) + x_3(U_1 - U_2)}{U_1 \Omega_{2,3} + U_2 \Omega_{3,1} + U_3 \Omega_{1,2}};$$

oder

$$a = c\frac{y_1(u_2 - u_3) + y_2(u_3 - u_1) + y_3(u_1 - u_2)}{\Omega_{1,2} + \Omega_{2,3} + \Omega_{3,1}},$$

$$b = -c\frac{x_1(u_2-u_3)+x_2(u_3-u_1)+x_3(u_1-u_2)}{\Omega_{1,2}+\Omega_{2,3}+\Omega_{3,1}};$$

und

$$A = C\frac{y_1(U_2-U_3)+y_2(U_3-U_1)+y_3(U_1-U_2)}{\Omega_{1,2}+\Omega_{2,3}+\Omega_{3,1}},$$

$$B = -C\frac{x_1(U_2-U_3)+x_2(U_3-U_1)+x_3(U_1-U_2)}{\Omega_{1,2}+\Omega_{2,3}+\Omega_{3,1}}.$$

Zur Bestimmung von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ hat man die Formeln:

$$\mathfrak{x} = \frac{b-B}{aB-bA}, \quad \mathfrak{y} = -\frac{a-A}{aB-bA}.$$

Hiermit will ich diese kurze Skizze schliessen, indem ich die weitere Entwickelung dem Leser überlasse.

Sehr bemerkenswerthe Formeln zur näherungsweisen Auflösung zweier Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen hat bekanntlich Gauss in der Theoria motus. p. 136. gegeben, die ich in meinen Optischen Untersuchungen. Theil II. §. 28. S. 175. mittelst der Differentialrechnung bewiesen und in §. 40. S. 288. auf n Gleichungen mit n unbekannten Grössen zu erweitern gesucht habe. Ich benutze diese Gelegenheit, diese Formeln den Lesern in Erinnerung zu bringen.

XX.

Demonstration élémentaire de la vitesse de déviation du plan d'oscillation du pendule, à diverses latitudes.

Par

M. Crahay,

membre de l'Académie.

(Aus den Bulletins de l'Académie Royale des sciences etc. de Belgique. Tome XIX. I. Partie. 1852. p. 537.)

La présente note a pour but unique de montrer, à l'aide des mathématiques élémentaires, la relation qui existe entre la vitesse de déviation du plan d'oscillation et la latitude du lieu où se fait l'expérience. Je considère le phénomène dans sa plus grande simplicité, sans m'occuper des causes qui peuvent modifier périodiquement le mouvement du plan, dont je supposerai constante la vitesse angulaire autour de la verticale. C'est dans le travail de mon savant confrère, M. Schaar, que la question, envisagée sous toutes ses faces, a été traitée à fond.

Soit (Tab. III. Fig. 10.) $PEP'F$ une section de la terre, supposée sphérique, par un plan méridien, O son centre, PP' l'axe du mouvement diurne, et soit L un lieu situé sur le parallèle ELF, de l'hémisphère boréal. La droite OLl représente, à un instant donné, la position de la verticale du lieu, dont PLP' est le cercle méridien, tandis que la droite LM, perpendiculaire en L à la verticale, et comprise dans le plan du méridien, est la ligne méridienne du lieu; elle recontre en M le prolongement de l'axe.

Dans l'espace d'un jour sidéral, la rotation de la terre fait décrire à la verticale Ol et à la méridienne LM, autour de l'axe

PP', des surfaces de cônes droits, qui ont le cercle EF pour base commune, et dont les sommets sont placés respectivement en O et en M. Après un certain temps, que nous supposerons très-court, le lieu L aura parcouru l'arc LL' du parallèle; la verticale du lieu aura pris la position $OL'l'$, le méridien celle $PL'P'$, tandis que la méridienne se trouvera en $L'M$.

Admettons qu'au départ en L, le plan d'oscillation soit dirigé suivant le plan du méridien, c'est-à-dire dans celui qui passe par la verticale Ol et par la méridienne LM. Ce plan d'oscillation serait toujours exactement parallèle à lui-même, malgré son déplacement dans l'espace par la rotation du globe, si la pesanteur ne le ramenait continuellement à passer par le centre de la terre; mais c'est là aussi la seule modification que sa position éprouve par suite du mouvement diurne, de sorte que lorsque le lieu L est arrivé en L', le plan d'oscillation sera déterminé par la verticale Ol' et par une droite $L'M'$ parallèle à la méridienne LM. Ainsi à l'arrivée en L', le plan d'oscillation $M'L'l'$ forme avec le plan $ML'l'$ du méridien du lieu un angle horizontal $ML'M'$, lequel, à cause de la petitesse que nous supposons à l'arc LL', peut être considéré comme égal à l'angle LML' des lignes méridiennes aux deux endroits L et L'. C'est l'angle de déviation apparente que l'on observe au plan d'oscillation, mais, dans la réalité, c'est l'angle dont la méridienne LM a changé de position dans l'espace par la rotation de la terre.

Pour déterminer cet angle, menons les droites LN, $L'N$ vers le centre du parallèle, celles LO, $L'O$ vers le centre de la terre, enfin, par le milieu R de la corde LL', menons des droites vers N et vers M, elles sont perpendiculaires à cette corde, et divisent les angles opposés en N et en M en deux parties égales.

Désignons par r le rayon de la terre, par h l'angle horaire LNL', par H l'angle de déviation LML' du plan d'oscillation, par λ la latitude du lieu.

Le triangle LNO, rectangle en N et dans lequel l'angle NOL est le complément de la latitude, donne

$$NL = r.\cos\lambda;$$

Du triangle LNR, rectangle en R, on déduit

$$LR = NL.\sin\tfrac{1}{2}LNL' = r.\cos\lambda.\sin\tfrac{1}{2}h.$$

Le triangle MLO, rectangle en L, donne

$$ML = r.\text{cotang}\lambda.$$

Enfin le triangle LMR, rectangle en R, fournit la relation

$$\sin{}^1\!/_2 LML' = \frac{LR}{LM},$$

ou

$$\sin{}^1\!/_2 H = \frac{\cos\lambda \sin{}^1\!/_2 h}{\cot\text{ang}\gamma} = \sin{}^1\!/_2 h \sin\lambda.$$

Maintenant, comme dans le passage de L en L', la méridienne LM décrit une portion de la surface convexe du cône, il faut, pour que l'angle plan LML' représente, sans erreur sensible, l'espace angulaire parcouru réellement par cette génératrice, que cet angle, de même que celui LNL', soit très-petit, et tellement que les arcs qui les mesurent puissent être substitués à leurs sinus; ce qui conduit, après suppression du facteur commun $^1\!/_2$, à l'expression

$$H = h.\sin\lambda.$$

Ainsi, pour un arc h parcouru par le point L de la terre, le plan d'oscillation semble se mouvoir autour de la verticale, dans le sens du mouvement apparent du ciel, d'un angle H, dont la valeur est $h \sin\lambda$.

Nous avons supposé que le plan d'oscillation coïncidait, au départ, avec le plan du méridien; mais on se convaincra facilement que s'il formait alors avec ce dernier un angle azimutal quelconque, sa déviation de cette position aurait la même valeur H après le parcours de l'arc h. D'où il suit aussi qu'à chaque instant la même relation existe entre les arcs H et h; et comme le mouvement de rotation est uniforme, celui du plan d'oscillation l'est pareillement.

La rotation complète de la terre s'exécutant en 24 heures sidérales ou en $23^h56'4'',09$ de temps solaire moyen, il s'ensuit qu'en une seconde de temps moyen l'arc parcouru est de $15'',041$. Tel est aussi aux pôles, le mouvement angulaire du plan d'oscillation, tandis qu'à notre latitude, supposée de 51^o, le mouvement angulaire du plan n'est que de 0,77715 de cette valeur; ce chiffre étant le sinus naturel de la latitude; par conséquent le mouvement du plan y est de $11'',689$ seulement. — Et pour faire le tour entier, il faudrait $30^h47'52''$ de temps moyen, tandis qu'aux pôles, il est exécuté en un jour sidéral. — Pour que le plan décrive un angle de n secondes à notre latitude, il lui faut $\frac{n}{11,689}$ secondes de temps moyen.

Dans l'hémisphère austral du globe, la déviation du plan d'oscillation a lieu dans le sens opposé de son mouvement dans l'hémisphère boréal; c'est-à-dire qu'il y suit encore la direction du mouvement apparent du ciel.

La construction graphique, d'accord avec la formule $H = h.\sin\lambda$, montre qu'à mesure que le lieu L est situé plus près de l'équateur, les deux méridiennes LM, $L'M$ s'approchent de plus en plus du parallélisme, l'angle de déviation H diminue, et il est nul à l'équateur; qu'au contraire, il augmente quand la distance à l'un des pôles diminue, et qu'au pôle il est égal à l'angle horaire h lui-même.

La construction montre encore comment le mouvement angulaire LNL', autour de l'axe PP', peut être rapporté à un autre axe OLl incliné au premier, à l'aide de deux composantes rotatives, l'une autour du nouvel axe Ol, l'autre d'une droite LM, méridienne du point L; la première de ces composantes est l'angle MLM' ou H, dont la valeur est $h\sin\lambda$; l'autre composante est l'angle LOL', dont la pesanteur fait tourner le plan d'oscillation, pour le diriger constamment vers le centre de la terre. La valeur de ce dernier angle, que nous désignerons par C, se déduit du triangle LOR, rectangle en R, qui donne

$$\sin{}^1\!/_2 C = \frac{LR}{LO} = \sin{}^1\!/_2 h \cos\lambda,$$

substituant les arcs aux sinus, et effacant le facteur commun $^1/_2$, on a

$$C = h.\cos\lambda.$$

XXI.

Sur le théorème d'Euler, relatif à la décomposition du mouvement de rotation des corps.

Note par

M. Pagani,

membre de l'Académie.

(Aus den Bulletins de l'Académie Royale des sciences etc. de Belgique. Tome XIX. II. Partie. 1852. p. 161.)

Les expériences récentes, par lesquelles on a constaté la déclinaison du plan d'oscillation du pendule, ont ramené l'attention des géomètres sur le beau théorème d'Euler, au moyen duquel on peut expliquer assez simplement la loi de cette déclinaison. Mais pour mettre l'explication de ce phénomène à la portée de ceux qui ne sont point familiarisés avec les calculs supérieurs, il manquait à la science une démonstration élémentaire de ce théorème, que l'on doit considérer comme le corrélatif de celui qui porte le nom de parallélogramme des forces, et qui sert aussi à la composition et à la décomposition du mouvement d'un point matériel. Cette corrélation est formulée dans les théorèmes suivants:

Théorème I. Si l'on a (Tab. III. Fig. 11.) un point matériel C, animé dans la direction CA d'une vitesse $P=CA$, et si l'on imprime, par un moyen quelconque, au point C une vitesse $Q=CB$ dans la direction CB; le point C ira dans la direction CD avec une vitesse $R=CD$, en désignant par CD la diagonale du parallélogramme construit sur les droites CA et CB, considérées comme côtés adjacents. En outre, si l'on désigne l'angle ACD par α, et l'angle BCD par β, on aura les relations:

$$P:Q:R::\sin\beta:\sin\alpha:\sin(\alpha+\beta).$$

Ce théorème renferme, comme on sait, toute la théorie de la composition et de la décomposition du mouvement de translation.

Théorème II. Si l'on a un corps qui tourne autour de la droite CA avec une vitesse angulaire p proportionnelle à CA, et si l'on imprime, par un moyen quelconque, au même corps, autour de la droite CB, une vitesse angulaire q proportionnelle à CB, le corps tournera autour de la droite CD avec une vitesse angulaire n proportionnelle à la diagonale CD du parallélogramme construit sur les droites CA et CB, considérées comme côtés adjacents. En outre, si l'on désigne l'angle ACD par α, et l'angle BCD par β, on aura les relations

$$p:q:n::\sin\beta:\sin\alpha:\sin(\alpha+\beta).$$

Démonstration. Du point C comme centre, et avec un rayon égal à l'unité de longueur, traçons, dans le plan de la figure un cercle qui coupe en a, d, b les droites CA, CD, CB.

En vertu de la vitesse angulaire p, le point d s'élèvera au-dessus du plan de la figure, et décrira, dans un temps excessivement court τ un arc de cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite CA, et dont le rayon est égal à $\sin\alpha$. Donc le point d s'élèvera perpendiculairement au plan de la figure d'une quantité égale à $\tau p\sin\alpha$. Mais en vertu de la vitesse angulaire q, le point d, pendant le temps τ, s'abaissera, perpendiculairement au plan de la figure, d'une quantité égale à $\tau q\sin\beta$. D'ailleurs, on doit avoir, d'après les définitions des quantités p, q, α et β, et les propriétés connues des triangles:

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad p:q::\sin\beta:\sin\alpha,$$

d'où l'on tire

$$\tau p\sin\alpha = \tau q\sin\beta;$$

donc, en vertu des vitesses angulaires simultanées p et q, le point d restera en repos. Mais ceci ne peut avoir lieu que si le corps tourne autour de la droite CD; donc la première partie du théorème est démontrée.

Maintenant, le corps tournant autour de CD avec une vitesse angulaire n, le point b s'élèvera perpendiculairement au plan de la figure et décrira dans le temps τ un espace égal à $\tau n\sin\beta$. Or, cette quantité doit être égale à l'espace $\tau p\sin(\alpha+\beta)$ que le point b décrirait en vertu de la vitesse angulaire p autour de CA, puisque ce point ne change pas de position en vertu de la vitesse angulaire q. On aura donc

$$\tau n\sin\beta = \tau p\sin(\alpha+\beta).$$

En combinant cette équation avec l'équation (1), on en déduit immédiatement

$$(2).\quad p:q:n::\sin\beta:\sin\alpha:\sin(\alpha+\beta).\ C.Q.F.D.$$

Corollaire I. Si l'on imprime à un corps trois mouvements simultanés de rotation autour des arêtes contiguës d'un parallélipipède, et que les vitesses angulaires de ces mouvements soient proportionnelles à ses trois arêtes, il en résultera une rotation unique autour de la diagonale du parallélipipède, avec une vitesse angulaire proportionnelle à cette diagonale.

Corollaire II. Réciproquement, tout mouvement de rotation autour de la diagonale d'un parallélipipède avec une vitesse angulaire proportionnelle à la longueur de cette diagonale peut toujours se décomposer, à chaque instant, en trois rotations simultanées autour des arêtes du parallélipipède avec des vitesses angulaires proportionnelles aux longueurs de ces arêtes.

Ces propositions se démontrent de la même manière que leurs corrélatives dans la théorie de la composition et de la décomposition du mouvement de translation.

Corollaire III. En supposant le parallélipipède rectangle, on aura les relations

$$p=n\cos\lambda,\quad q=n\cos\mu,\quad r=n\cos\nu,$$

dans lesquelles p, q, r désignent les vitesses angulaires composantes, n la vitesse angulaire résultante, et λ, μ, ν les angles que font les arêtes avec la diagonale.

Corollaire IV. Si l'angle ν est droit, on aura $\cos\nu=0$, $\cos\mu=\sin\lambda$, et les dernieres équations donneront

$$(3)\ \ldots\ p=n\cos\lambda,\quad q=n\sin\lambda.$$

Donc, le mouvement de rotation de la terre autour de l'axe du monde avec la vitesse angulaire n, peut être considéré à chaque instant comme le résultat de deux rotations instantanées autour de l'horizontale menée par le centre de la terre dans le plan du méridien d'un lieu quelconque, et autour de la verticale du même lieu avec les vitesses angulaires respectives p et q, fournies par les équations (3).

XXII.

Miscellen.

Problem.

Jahre lang fortgesetzte Beobachtungen bei der Sprengung von Felsen in den Steinbrüchen, so wie endlich ein eigens zu diesem Zweck angestelltes Experiment haben den Unterzeichneten auf folgende Sätze geführt:

1) Eine solide, d. h. eine nach Dichtigkeit und Cohäsion in allen ihren Theilen durchaus gleiche Kugel, wird vermittelst einer durch ein elastisches Fluidum (Pulver- oder Wasserdampf) bewirkte Explosion vom Centrum aus in vier gleiche Stücke zersprengt, und zwar spitzen sich die vier Stücke im Mittelpunkt dreiseitig-pyramidalförmig zu, so dass die Bruchflächen wirkliche Ebenen sind und die Kugeloberfläche in ihrer Zerreissung genau das tetraedrische Kugelnetz zeigt.

2) Geschieht die Sprengung, unter übrigens denselben Voraussetzungen, nicht vom Centrum aus, so entstehen dennoch nur vier, jedoch ungleiche Stücke.

3) Kleinere Abweichungen nach Cohäsion und Dichtigkeit liefern eben so nur vier Hauptstücke, die etwas ungleich ausfallen können; neben einer grössern oder geringern Anzahl von Splittern, die sämmtlich mit weit grösserer Geschwindigkeit fortgeschleudert werden.

Es wird nun das Problem gestellt, diese Sätze auf theoretischem Wege zu beweisen, so wie die Frage aufgeworfen, ob sich nicht aus diesen Sätzen gewisse Folgerungen ziehen liessen in Beziehung auf die zahlreiche Gruppe der Asteroiden, so wie in Beziehung auf unsere Meteore, worunter namentlich der Steinregen?

Brenner in Tuttlingen.

In Bezug auf obige Aufgabe bemerke ich, dass Herr Brenner im Württembergischen Schulwochenblatt. 1852. Nr. 10. einen Aufsatz unter folgendem Titel veröffentlicht hat:

Einiges über die Zertrümmerungen fester Körper, so wie besonders über die Vermuthung der Astronomen, dass die Gruppe der kleinen Planeten die Trümmerstücke eines einzigen seien.

In diesem Aufsatze sind Anwendungen der in obigem Problem zur theoretischen Beweisführung vorgelegten Sätze, von deren Richtigkeit Herr Brenner sich durch Versuche überzeugt hat, auf die Asteroiden gemacht. Da indess Herr Brenner in einem an mich gerichteten Briefe vom 20. November 1852 selbst sagt, dass der in Rede stehende Aufsatz jetzt, wo bereits 20 und mehr Asteroiden entdeckt seien, weniger Werth habe als früher, wo diess noch nicht der Fall war, so lasse ich diesen Aufsatz nicht wiederholt im Archive abdrucken, sondern begnüge mich vorläufig mit der Mittheilung des obigen von Herrn Brenner gestellten Problems und insbesondere des nicht uninteressanten Erfahrungsresultats über das Sprengen von Steinen, von dem in diesem Problem die Rede ist.

Absichtlich stelle ich aber dieses Problem nicht unter die Rubrik „Uebungsaufgaben“, sondern theile es unter den „Miscellen“ mit, womit sich ja wohl Herr Brenner einverstanden erklären wird.

Der Herausgeber.

Jeder weiss, wie störend z. B. bei Sextantenbeobachtungen u. s. w. das Zittern des Quecksilberhorizonts bei Erschütterungen des Gebäudes durch vorüberfahrende Wagen u. dergl. ist. In dem Magazin für die Literatur des Auslandes. 1853. No. 27. S. 106. wird folgende dasselbe völlig beseitigen sollende Vorrichtung angegeben, die ihre Erfindung den Herren Mauvais und Seguin verdankt:

„Ein starker eiserner Haken war an der Decke des Zimmers befestigt; an diesem Haken war mittelst eines Doppelseiles ein Ring von Kautschuk angehängt, der aus einem Kautschukstreifen gebildet war, dessen Enden über einander gebogen und mit Bindfaden zusammengebunden waren. An diesem Kautschukringe hing an Stricken das Brett, auf welchem das mit Quecksilber gefüllte Gefäss wie auf einer Wagschaale stand. Man wartete, bis Alles an dieser Vorrichtung in's Gleichgewicht und zur Ruhe gekommen war und betrachtete dann mit einem auf die Quecksilberfläche gerichteten Fernrohre die Spiegelbilder verschiedener irdischer Gegenstände; ihre Umrisse waren vollkommen feststehend und scharf begränzt."

Es wird vulkanisirtes Kautschuk empfohlen und bemerkt, dass man darunter Kautschuk verstehe, welches längere Zeit in geschmolzenem Schwefel oder Schwefelarsenik gelegen; dieses behalte seine Elastacität bei jeder Temperatur, während das gewöhnliche Kautschuk bei 3° hart werde.

Man weiss, dass, wenn in einen Kegelschnitt ein beliebiges Sechseck *ABCDEF* beschrieben ist, die Durchschnittspunkte der Seiten

$$AB \text{ und } DE, \quad BC \text{ und } EF, \quad CD \text{ und } FA$$

immer in einer und derselben geraden Linie liegen. In dem Briefwechsel zwischen W. Olbers und F. W. Bessel. Zweiter Band. Leipzig. 1852. S. 133. ff. zeigt Bessel, dass, wenn A, B, C, D, E, F sechs auf einem Kegelschnitt liegende Punkte in beliebiger Lage sind, immer die Durchschnittspunkte der Linien

$$AB \text{ und } CD, \quad AE \text{ und } CF, \quad BF \text{ und } DE$$

in einer und derselben geraden Linie liegen.

In dem „Briefwechsel zwischen W. Olbers und F. W. Bessel. Herausgegeben von A. Erman. Zweiter Band. Leipzig. 1852. S. 135. und S. 137." findet man (von Bessel) folgende trigonometrische Relationen angeführt:

$$\sin(a-b)\cos(A+B+C)+\sin(A-B)\cos(a+b+C)$$
$$=\cos(B-b)\sin(A+a+C)-\cos(A-a)\sin(B+b+C)$$

und

$$-\sin(a-b)\sin(A+B+C)-\sin(A-B)\sin(a+b+C)$$
$$=\cos(B-b)\cos(A+a+C)-\cos(A-a)\cos(B+b+C).$$

In dem mehr erwähnten Briefwechsel zwischen Olbers und Bessel. Thl. I. S. 363. theilt Bessel seinem Freunde folgenden Satz mit:

„Wenn in dem rechten Winkel *abc* eine Ellipse so gedreht wird, dass *ab* und *bc* immer Tangenten von ihr sind: so ist der Ort ihres Mittelpunktes ein Kreisbogen, um *b* mit dem Halbmesser $a\sqrt{2-ee}$ beschrieben, dessen Sehne gleich

$$a\sqrt{2}(1-\sqrt{1-ee})$$

ist.

In den „Kurzen Erinnerungen an Momente meines Lebens. Jugendzeit — erste 25 Jahre“ welche Bessel in seiner letzten schmerzhaften Krankheit geschrieben hat, die ihn wenige Wochen später am 17. März 1846 den Seinigen und der Wissenschaft entriss, und die in dem Briefwechsel zwischen W. Olbers und F. W. Bessel. Erster Theil. Leipzig. 1852. S. IX — S. XXX. abgedruckt sind, findet sich auf S. XXIII. die in dem Munde eines solchen Mannes wichtige und deshalb von Lehrern zu beherzigende pädagogisch-mathematische Aeusserung:

„In Untertertia des Mindener Gymnasiums“ — bis zu welcher Klasse nämlich Bessel gekommen war, bevor er zum Kaufmannsstande überging — „wurde zwar Unterricht in den ersten Anfangsgründen der Geometrie ertheilt, allein ich glaube, dass dieser

Anfang, wenn er ohne Fortsetzung bleibt, nicht geeignet ist, einen Begriff von dem eigentlichen Wesen der Mathematik zu erzeugen. Die Anfangsgründe der allgemeinen Rechenkunst und Algebra würden dies schon eher leisten."

Lehrsatz.

Wenn $x^2+y^2=z^2$ ist, so ist $x^m+y^m<z^m$ oder $x^m+y^m>z^m$, jenachdem $m>2$ oder $m<2$ ist.

Beweis.

Man setze $x=az$, $y=bz$, so ist nach der Voraussetzung

$$a^2z^2+b^2z^2=z^2, \quad \text{also} \quad a^2+b^2=1;$$

folglich ist

$$a<1, \quad b<1$$

indem wir den Fall, wenn eine der beiden Grössen x, y oder a b der Null gleich wäre, ausschliessen wollen.

Ist nun $m>2$, so ist, weil $a<1$, $b<1$ ist, offenbar

$$a^m<a^2, \quad b^m<b^2; \quad \text{also} \quad a^m+b^m<a^2+b^2;$$

folglich nach dem Obigen

$$a^m+b^m<1,$$

also

$$a^mz^m+b^mz^m<z^m, \text{ d. i. } (az)^m+(bz)^m<z^m;$$

folglich nach dem Obigen:

$$x^m+y^m<z^m.$$

Ist aber $m<2$, so ist, weil $a<1$, $b<1$ ist, offenbar

$$a^m>a^2, \quad b^m>b^2; \quad \text{also} \quad a^m+b^m>a^2+b^2;$$

folglich nach dem Obigen

$$a^m + b^m > 1,$$

also

$$a^m z^m + b^m z^m > z^m, \text{ d. i. } (az)^m + (bz)^m > z^m;$$

folglich nach dem Obigen

$$x^m + y^m > z^m.$$

Anmerkung. Der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ genügen die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks.

G.

In den „Astronomischen Nachrichten. Nr. 849." findet man einen interessanten Aufsatz von Herrn Doctor G. Schweizer, Astronomen des Konstantin'schen Messinstitutes zu Moskau, in welchem Herr Dr. Schweizer in sehr überzeugender Weise einen Zusammenhang der bei totalen Sonnenfinsternissen beobachteten Protuberanzen mit den Sonnenfackeln nachweiset. Die grosse Sonnenfinsterniss vom 28sten Juli 1851 hat Herr Dr. Schweizer in Machnowka im Kiew'schen Gouvernement beobachtet. Schon vom $\frac{\text{27. Juni}}{\text{9. Juli}}$ an liess Herr Dr. Schweizer von den damaligen Zöglingen des genannten Instituts, jetzigen Offizieren Herrn Petschkowski und Troizki, sehr sorgfältige Zeichnungen der Sonnenflecken und Sonnenfackeln anfertigen, und theils die nachherigen Beobachtungen der Sonnenfinsterniss in Machnowka, theils von anderen Orten her bekannt gewordene Beobachtungen zeigten Protuberanzen bei gleichen Positionen wie die vorher gezeichneten Sonnenflecken, ja es liess sich auch selbst eine Aehnlichkeit in den Gestalten erkennen. Wir können hier uns nicht weiter über diesen Gegenstand auslassen, verweisen aber unsere Leser dringend auf den jedenfalls höchst interessanten Aufsatz des Herrn Doctor Schweizer, den wir für sehr wichtig halten.

In dem lesenswerthen Programm der Ritterakademie zu Liegnitz von Ostern 1853 (m. s. Literar. Bericht Nr. LXXIX.) hat Herr Inspector Gent daselbst den folgenden einfachen Beweis des Lhuilier'schen Ausdrucks für den vierten Theil des sphärischen Excesses gegeben.

Nach den Gauss'schen Gleichungen ist:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)\mp\cos(90^0-\frac{1}{2}C)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\mp\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)\mp\sin(90^0-\frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\mp\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}c};$$

also nach bekannten Zerlegungen:

$$\frac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-180^0)\sin\frac{1}{4}(A+B-C+180^0)}{\sin\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-180^0)\cos\frac{1}{4}(A+B-C+180^0)}{\sin\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

und

$$\frac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-180^0)\cos\frac{1}{4}(A+B-C+180^0)}{\cos\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{4}(-a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a-b+c)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-180^0)\sin\frac{1}{4}(A+B-C+180^0)}{\cos\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{4}(-a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a-b+c)}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

Aus den beiden ersten und den beiden letzten Gleichungen folgt durch Division:

$$\tang\frac{1}{4}(A+B+C-180^0)\tang\frac{1}{4}(A+B-C+180^0)$$

$$=\tang\frac{1}{4}(a+b+c)\tang\frac{1}{4}(a+b-c),$$

$$\tang\frac{1}{4}(A+B+C-180^0)\cot\frac{1}{4}(A+B-C+180^0)$$

$$=\tang\frac{1}{4}(-a+b+c)\tang\frac{1}{4}(a-b+c).$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen in einander, so erhält man:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{4}(A+B+C-180^0)^2$$

$$=\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(-a+b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a-b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a+b-c),$$

also

$$\operatorname{tang}\frac{1}{4}(A+B+C-180^0)$$

$$=\sqrt{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(-a+b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a-b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a+b-c)},$$

welches der gesuchte Ausdruck ist.

XXIII.

Ueber Interpolation und mechanische Quadratur.

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

In meiner der mechanischen Quadratur gewidmeten Abhandlung, welche im Archiv Thl. XIV. Nr. XX. abgedruckt ist, habe ich zunächst vorzüglich eine strenge Entwickelung der berühmten Formeln von Cotes und der nicht minder wichtigen und berühmten Correctionsformeln von Stirling, welche früher überhaupt noch nicht streng entwickelt und bewiesen worden waren, zu geben versucht, dann aber auch gezeigt, wie man zu den Formeln von Gauss, wenigstens in so weit dieselben hauptsächlich Anwendung finden dürften, gelangen kann, ohne übrigens, wie Gauss in höchst scharfsinniger Weise gethan hat, diese wichtigen Formeln ganz allgemein zu entwickeln. Alle so eben genannten Formeln zeichnen vor allen übrigen zur mechanischen Quadratur in Vorschlag gebrachten Formeln besonders dadurch sich vortheilhaft aus, dass sie, um in geometrischem Sinne zu sprechen, nicht unbedingt erfordern, die Ordinaten in gleichen Abständen zu nehmen. Ausser diesen Formeln giebt es zur mechanischen Quadratur noch andere besonders zum Gebrauche in der Astronomie und in den Naturwissenschaften überhaupt geeignete Formeln, welche die Ordinaten in gleichen Abständen zu nehmen erfordern, unter denen sich hauptsächlich eine Formel durch grosse Eleganz und Leichtigkeit der Anwendung auszeichnet, welche Laplace in der Mécanique céleste. Tome IV. Livre IX. No. 5. anführt, ohne zu bemerken, dass diese Formel wohl eigentlich ursprünglich von Lagrange (Mémoires de Berlin. 1772.) herrührt*). Laplace gelangt zu dieser Formel in seiner bekannten gewöhnlichen Weise mittelst seiner Fonctions génératrices. Der gewöhnlichen Differenzenrechnung bedienen sich Lacroix im Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. Tome III. p. 182. und in ganz gleicher Weise Pontécoulant in der Théorie analytique du système du monde. Tome II. p. 105. Alle diese Entwickelungen lassen aber besonders rücksichtlich der Allgemeinheit jedenfalls noch Manches zu wünschen übrig, und namentlich scheint mir auch die in Rede stehende, nach meiner Meinung sehr bemerkenswerthe Formel, überhaupt noch nicht unter dem richtigen Gesichtspunkte und in gehöriger Allgemeinheit dargestellt worden zu sein, weshalb ich versuchen will, in der vorliegenden Abhandlung eine möglichst strenge und allgemeine Entwickelung dieser höchst wichtigen und merkwürdigen Formel zu geben, die hauptsächlich für die Berechnung der Störungen der Planeten und Cometen grosse Vortheile darzubieten scheint, weshalb sie auch dazu von Laplace und Pontécoulant vorzüglich in Vorschlag gebracht worden ist. Besonders scheint dies aber der Fall zu sein, wenn man die Störungsrechnungen nicht mehr in der älteren Weise, sondern in der neuen an sich ganz elementaren Form führt, welche neuerlich besonders von Encke in den Astronomischen Nachrichten. Nr. 791. 792., früher, wie Encke in Nr. 814. desselben Journals selbst bemerkt, schon von George P. Bond, Gehülfen an der Sternwarte zu Cambridge in Nordamerika, in Vorschlag gebracht worden ist, wobei ich jedoch zu bemerken nicht unterlassen darf, dass Encke in den angeführten Abhandlungen auch ausführlich und in eigenthümlicher Weise gezeigt hat, wie die mechanische Quadratur bei der neuen Form der Störungsrechnungen nach seiner Meinung am besten in Ausführung zu bringen ist.

Die Entwickelung der erwähnten Laplace'schen oder Lagrange'schen Quadraturformel, welche ich in dieser Abhandlung geben werde, steht aber in so enger Verbindung mit der Theorie der Interpolation bei gleich weit von einander abstehenden Ordinaten, dass ich auch diese Theorie in ihren Hauptmomenten zu entwickeln genöthigt bin, hoffe aber, dass meine Entwickelung derselben durch ihre Eigenthümlichkeit das Interesse der Leser einigermassen in Anspruch zu nehmen geeignet sein wird. Die berühmten Newton'schen Interpolationsformeln, zu deren Entwickelung sich Laplace in der Théorie analytique des probabilités Livre I. Chap. I. No. 4. gleichfalls der Théorie des fonctions génératrices bedient hat, werde ich, um diese Abhandlung für jetzt nicht zu sehr auszudehnen, in einer späteren Abhandlung in möglichst einfacher und elementarer Weise zu entwickeln suchen.

---

*) M. s. Mathematisches Wörterbuch. Thl. IV. S. 165.

§. 1.

Das Interpolationsproblem kann im Allgemeinen auf folgende Art ausgesprochen werden:

Es sei eine Reihe von Grössen

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots.\ x_n$$

und eine zweite Reihe gleich vieler Grössen

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots.\ y_n$$

gegeben. Man soll eine Function $y=f(x)$ von x von solcher Beschaffenheit finden, dass dieselbe, wenn man der unabhängigen veränderlichen Grösse x die Werthe

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots.\ x_n$$

beilegt, respective die Werthe

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots.\ y_n$$

erhält, so dass also

$$y_0=f(x_0),\quad y_1=f(x_1),\quad y_2=f(x_2),\ \ldots. y_n=f(x_n)$$

ist.

Man kann sich die gegebenen $n+1$ Werthe

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots.\ x_n$$

der unabhängigen veränderlichen Grösse x als Abscissen, die gegebenen Werthe

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n$$

der Function $y=f(x)$ als die diesen Abscissen entsprechenden Ordinaten in einem beliebigen Coordinatensystem denken, und wird dann sogleich übersehen, dass das allgemeine Interpolationsproblem, aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, auf die folgende geometrische Aufgabe zurückkommt:

Durch $n+1$ gegebene Punkte in einer Ebene eine Curve zu ziehen, oder die Gleichung einer Curve zu finden, welche durch $n+1$ gegebene Punkte in einer Ebene geht.

Aus dieser geometrischen Fassung der Aufgabe ergiebt sich auf der Stelle, dass das Interpolationsproblem im Allgemeinen eine unbestimmte Aufgabe ist, weil durch $n+1$ gegebene Punkte offenbar unendlich viele eben so vielen verschiedenen Gesetzen unterworfene Curven gezogen werden können.

§. 2.

Wegen der Uebestimmtheit des Interpolationsproblems im Allgemeinen ist es nöthig, dasselbe durch Hinzufügung besonderer Bedingungen zu einer bestimmten Aufgabe zu machen. Dass auch hierin dem mathematischen Scharfsinne wieder ein grosser Spielraum verstattet ist, bedarf kaum einer besonderen Bemerkung. Um uns aber für jetzt der Form anzuschliessen, unter welcher das Interpolationsproblem vorzugsweise in der Astronomie und in den Naturwissenschaften Anwendung findet, wollen wir uns die folgende Aufgabe vorlegen:

Man soll eine ganze rationale algebraische Function $y=f(x)$ des $n$ten Grades von solcher Beschaffenheit finden, dass dieselbe, wenn man ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse x die $n+1$ gegebenen Werthe

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$$

beilegt, respective die n ebenfalls gegebenen Werthe

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n$$

erhält, so dass

$$y_0=f(x_0),\quad y_1=f(x_1),\quad y_2=f(x_2),\ \ldots\ y_n=f(x_n)$$

ist.

Der Auflösung dieser in jeder Beziehung höchst wichtigen Aufgabe werden unsere folgenden Untersuchungen lediglich gewidmet sein.

§. 3.

Zuerst und vor allen Dingen muss man zeigen, dass das Interpolationsproblem unter der ihm im vorhergehenden Paragraphen gegebenen Fassung eine völlig bestimmte Aufgabe ist. Die folgenden Betrachtungen werden geeignet sein, uns hiervon vollkommen zu überzeugen.

Ueberhaupt sei

$$X = a_0x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \ldots\ldots + a_{k-1}x + a_k$$

eine beliebige ganze rationale algebraische Function des $k$ten Grades von x, welche für $x = x_0$ verschwindet, so dass also

$$0 = a_0x_0^k + a_1x_0^{k-1} + a_2x_0^{k-2} + \ldots + a_{k-1}x_0 + a_k$$

ist. Aus den beiden vorstehenden Gleichungen ergiebt sich durch Subtraction auf der Stelle:

$$X = a_0(x^k - x_0^k) + a_1(x^{k-1} - x_0^{k-1}) + \ldots + a_{k-1}(x - x_0),$$

und die Function X ist also, weil bekanntlich allgemein

$$\frac{a^\mu - b^\mu}{a - b} = a^{\mu-1} + a^{\mu-2}b + a^{\mu-3}b^2 + \ldots\ldots + ab^{\mu-2} + b^{\mu-1}$$

ist, durch die Grösse $x - x_0$ ohne Rest theilbar, so dass nämlich der Quotient, welchen man erhält, wenn man in X mit $x - x_0$ dividirt, jederzeit eine ganze rationale algebraische Function des $(k-1)$sten Grades ist.

Hieraus lässt sich ferner leicht herleiten, dass die ganze rationale algebraische Function X, wenn dieselbe verschwindet, wenn man für x irgend einen der sämmtlich unter einander ungleichen Werthe

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$$

setzt, wo die Anzahl $n+1$ dieser Werthe nicht grösser als k sein soll, jederzeit durch das Product

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_n)$$

ohne Rest theilbar, und dass der Quotient eine ganze rationale algebraische Function des $(k-n-1)$sten Grades ist.

Weil nämlich nach der Voraussetzung X für $x = x_0$ verschwindet, so ist nach dem Vorhergehenden, wenn man

$$X = (x - x_0)X_0$$

setzt, X_0 eine ganze rationale algebraische Function des $(k-1)$sten Grades von x.

Nach der Voraussetzung verschwindet aber X auch für $x = x_1$. Also muss das Product

$$(x - x_0)X_0$$

für $x=x_1$ verschwinden, und da nun nach der Voraussetzung x_0 und x_1 ungleich sind, also $x-x_0$ für $x=x_1$ nicht verschwindet, so muss X_0 für $x=x_1$ verschwinden, so dass also nach dem Obigen, wenn man

$$X_0=(x-x_1)X_1$$

setzt, X_1 eine ganze rationale algebraische Function des $(k-2)$ten Grades von x ist. Daher ist nun nach dem Vorhergehenden

$$X=(x-x_0)(x-x_1)X_1.$$

Nach der Voraussetzung verschwindet aber X auch für $x=x_2$. Also muss das Product

$$(x-x_0)(x-x_1)X_1$$

für $x=x_2$ verschwinden, und da nun nach der Voraussetzung x_0, x_1 und x_2 unter einander ungleich sind, also $(x-x_0)(x-x_1)$ für $x=x_2$ nicht verschwindet, so muss X_1 für $x=x_2$ verschwinden, so dass also nach dem Obigen, wenn man

$$X_1=(x-x_2)X_2$$

setzt, X_2 eine ganze rationale algebraische Function des $(k-3)$ten Grades von x ist. Daher ist nach dem Obigen

$$X=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)X_2.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist folglich unter den gemachten Voraussetzungen:

$$X=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)....(x-x_n)X_n,$$

wo X_n eine ganze rationale algebraische Function des $(k-n-1)$-sten Grades bezeichnet, so dass also X jederzeit durch das Product

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)....(x-x_n)$$

ohne Rest theilbar ist, wie behauptet wurde.

Wir wollen nun annehmen, dass die beiden beliebigen ganzen rationalen algebraischen Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ von x für die sämmtlich unter einander verschiedenen Werthe

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ ....\ x_n$$

von x, deren Anzahl $n+1$ grösser sein soll als der Grad jeder der beiden Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, gleiche Werthe erhalten; so lässt sich leicht zeigen, dass die beiden Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ identisch, d. h. für jeden Werth von x, einander gleich sein müssen.

Wäre nämlich nicht identisch, d. h. für jeden Werth von x, $\varphi(x)=\psi(x)$, so wäre

$$\varphi(x)-\psi(x)$$

eine ganze rationale algebraische Function von x, die nicht identisch, d. h. für jeden Werth von x, gleich Null wäre, und der Grad dieser Function, welchen wir durch k bezeichnen wollen, wäre unter den gemachten Voraussetzungen jedenfalls kleiner als $n+1$. Nach der Voraussetzung erhalten aber die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für die $n+1$ ungleichen Werthe

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots.\ x_n$$

von x gleiche Werthe; also verschwindet die ganze rationale algebraische Function

$$\varphi(x)-\psi(x)$$

des $k$ten Grades von x, wo k kleiner als $n+1$ ist, für die $n+1$ ungleichen Werthe

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots.\ x_n$$

von x. Daher ist nach dem Obigen

$$\varphi(x)-\psi(x)$$
$$=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots..(x-x_{k-1})X_{k-1},$$

wo X_{k-1} eine ganze rationale algebraische Function des $(k-k)$-ten oder 0ten Grades, d. h. eine constante Grösse ist; und da nun $\varphi(x)-\psi(x)$ nicht identisch gleich Null ist, so verschwindet offenbar diese constante Grösse X_{k-1} nicht.

Nun verschwindet aber nach dem Obigen

$$\varphi(x)-\psi(x)$$

auch für die Werthe

$$x_k,\ x_{k+1},\ x_{k+2},\ \ldots.\ x_n$$

von x. Also ist nach dem Vorhergehenden:

$$0=(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2)\ldots.(x_k-x_{k-1})X_{k-1},$$

$$0=(x_{k+1}-x_0)(x_{k+1}-x_1)(x_{k+1}-x_2)\ldots.(x_{k+1}-x_{k-1})X_{k-1},$$

$$0=(x_{k+2}-x_0)(x_{k+2}-x_1)(x_{k+2}-x_2)\ldots.(x_{k+2}-x_{k-1})X_{k-1},$$

u. s. w.

$$0=(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots.(x_n-x_{k-1})X_{k-1};$$

und da nun nach der Voraussetzung die Werthe

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$$

sämmtlich unter einander ungleich sind, so verschwindet keines der Producte

$$(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2)\ldots(x_k-x_{k-1}),$$

$$(x_{k+1}-x_0)(x_{k+1}-x_1)(x_{k+1}-x_2)\ldots(x_{k+1}-x_{k-1}),$$

$$(x_{k+2}-x_0)(x_{k+2}-x_1)(x_{k+2}-x_2)\ldots(x_{k+2}-x_{k-1}),$$

u. s. w.

$$(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{k-1}).$$

Also muss offenbar X_{k-1} verschwinden.

Da dies dem Vorhergehenden widerspricht, so muss unsere obige Annahme, dass die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nicht identisch, d. h. für jedes x, einander gleich wären, falsch sein, und diese beiden Functionen sind daher unter den gemachten Voraussetzungen jederzeit identisch einander gleich, wie behauptet wurde.

Hieraus ergiebt sich aber unmittelbar, dass das Interpolationsproblem unter der im vorhergehenden Paragraphen ihm gegebenen Fassung eine vollständig bestimmte Aufgabe ist, d. h. dass jede ganze rationale algebraische Function y des $n$ten Grades von x vollständig bestimmt ist, wenn man die den $n+1$ ungleichen Werthen

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$$

von x entsprechenden Werthe

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n$$

dieser Function kennt, weil nämlich nach dem Vorhergehenden alle ganze rationale algebraische Functionen des $n$ten Grades von x, welche für die $n+1$ ungleichen Werthe

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$$

von x die Werthe

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n$$

erhalten, unter einander identisch sind. Kann man, was hierbei immer vorausgesetzt wird, nur eine ganze rationale algebraische Function y des $n$ten Grades von x finden, welche für die $n+1$ ungleichen Werthe

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$$

von x die gegebenen Werthe

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n$$

erhält, so ist dadurch die Function y, welche bei dem Interpolationsproblem gesucht wird, ganz im Allgemeinen gefunden. Wie nun aber eine solche Function jederzeit gefunden werden kann, soll im Folgenden gezeigt werden.

§. 4.

Unseren ferneren Untersuchungen über das Interpolationsproblem schicken wir die folgende Betrachtung über die Functionen überhaupt voraus.

Es sei $f(x)$ eine ganz beliebige Function von x, so hat man für jedes x und ω die folgende identische Gleichung:

$$f(x+\omega)=f(x)+\omega\frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\varphi(x)=\frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega}$$

setzen, die Gleichung

$$1)\quad f(x+\omega)=f(x)+\omega\varphi(x).$$

In dieser Gleichung setze man nun, was offenbar verstattet ist, für x und ω respective $x+\Delta x$ und $\omega-\Delta x$, wo Δx ebenfalls eine ganz beliebige Grösse bezeichnet; so erhält man

$$f(x+\omega)=f(x+\Delta x)+(\omega-\Delta x)\varphi(x+\Delta x).$$

Zieht man von dieser Gleichung die Gleichung 1) ab, so ergiebt sich:

$$0=f(x+\Delta x)-f(x)+(\omega-\Delta x)\varphi(x+\Delta x)-\omega\varphi(x).$$

oder

$$0=f(x+\Delta x)-f(x)+(\omega-\Delta x)\{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\}-\varphi(x)\Delta x,$$

also

$$2)\quad 0=\Delta f(x)+(\omega-\Delta x)\Delta\varphi(x)-\varphi(x)\Delta x.$$

Setzen wir in dieser Gleichung für x und ω wieder respective $x+\Delta x$ und $\omega-\Delta x$, so erhalten wir

$$0=\Delta f(x+\Delta x)+(\omega-2\Delta x)\Delta\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x+\Delta x)\Delta x,$$

also, wenn wir von dieser Gleichung die Gleichung 2) abziehen:

$$\begin{aligned}0= & \;\Delta f(x+\Delta x)-\Delta f(x)\\ & +(\omega-2\Delta x)\Delta\varphi(x+\Delta x)-(\omega-\Delta x)\Delta\varphi(x)\\ & -\{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\}\Delta x\\ = & \;\Delta f(x+\Delta x)-\Delta f(x)\\ & +(\omega-2\Delta x)\{\Delta\varphi(x+\Delta x)-\Delta\varphi(x)\}-\Delta\varphi(x)\Delta x\\ & -\{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\}\Delta x,\end{aligned}$$

folglich

$$3)\quad 0=\Delta^2 f(x)+(\omega-2\Delta x)\Delta^2\varphi(x)-2\Delta\varphi(x)\Delta x.$$

Wird in dieser Gleichung für x und ω wieder respective $x+\Delta x$ und $\omega-\Delta x$ gesetzt, so ergiebt sich:

$$0=\Delta^2 f(x+\Delta x)+(\omega-3\Delta x)\Delta^2\varphi(x+\Delta x)-2\Delta\varphi(x+\Delta x)\Delta x,$$

also, wenn man von dieser Gleichung die Gleichung 3) abzieht:

$$\begin{aligned}0= & \;\Delta^2 f(x+\Delta x)-\Delta^2 f(x)\\ & +(\omega-3\Delta x)\Delta^2\varphi(x+\Delta x)-(\omega-2\Delta x)\Delta^2\varphi(x)\\ & -2\{\Delta\varphi(x+\Delta x)-\Delta\varphi(x)\}\Delta x\\ = & \;\Delta^2 f(x+\Delta x)-\Delta^2 f(x)\\ & +(\omega-3\Delta x)\{\Delta^2\varphi(x+\Delta x)-\Delta^2\varphi(x)\}-\Delta^2\varphi(x)\Delta x\\ & -2\{\Delta\varphi(x+\Delta x)-\Delta\varphi(x)\}\Delta x,\end{aligned}$$

folglich

$$4)\quad 0=\Delta^3 f(x)+(\omega-3\Delta x)\Delta^3\varphi(x)-3\Delta^2\varphi(x)\Delta x.$$

Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, ist klar. Auch erhellet die Richtigkeit des allgemeinen Gesetzes auf der Stelle, ohne dass man dasselbe erst durch den Bernoulli'schen Schluss allgemein zu beweisen braucht. Es ist nämlich allgemein:

$$5)\quad 0=\Delta^n f(x)+(\omega-n\Delta x)\Delta^n\varphi(x)-n\Delta^{n-1}\varphi(x)\Delta x.$$

Hieraus erhält man aber die folgenden Gleichungen:

$$f(x+\omega)=f(x)+\omega\varphi(x),$$

$$\varphi(x)=\frac{\Delta f(x)}{1\Delta x}+\frac{\omega-\Delta x}{1\Delta x}\Delta\varphi(x),$$

$$\Delta\varphi(x)=\frac{\Delta^2 f(x)}{2\Delta x}+\frac{\omega-2\Delta x}{2\Delta x}\Delta^2\varphi(x),$$

$$\Delta^2\varphi(x)=\frac{\Delta^3 f(x)}{3\Delta x}+\frac{\omega-3\Delta x}{3\Delta x}\Delta^3\varphi(x),$$

u. s. w.

$$\Delta^{n-2}\varphi(x)=\frac{\Delta^{n-1}f(x)}{(n-1)\Delta x}+\frac{\omega-(n-1)\Delta x}{(n-1)\Delta x}\Delta^{n-1}\varphi(x),$$

$$\Delta^{n-1}\varphi(x)=\frac{\Delta^n f(x)}{n\Delta x}+\frac{\omega-n\Delta x}{n\Delta x}\Delta^n\varphi(x);$$

welche ferner durch ein einfaches Substitutionsverfahren sogleich zu der folgenden Gleichung führen:

$$\begin{aligned}
f(x+\omega)=f(x)&+\frac{\omega}{1\Delta x}\Delta f(x)\\
&+\frac{\omega(\omega-\Delta x)}{1.2\Delta x^2}\Delta^2 f(x)\\
&+\frac{\omega(\omega-\Delta x)(\omega-2\Delta x)}{1.2.3\Delta x^3}\Delta^3 f(x)\\
&\text{u. s. w.}\\
&+\frac{\omega(\omega-\Delta x)(\omega-2\Delta x)\ldots(\omega-(n-1)\Delta x)}{1.2.3\ldots n\Delta x^n}\Delta^n f(x)\\
&+\frac{\omega(\omega-\Delta x)(\omega-2\Delta x)\ldots(\omega-n\Delta x)}{1.2.3\ldots n\Delta x^n}\Delta^n\varphi(x),
\end{aligned}$$

oder

$$
\begin{aligned}
f(x+\omega) = \ & f(x) \\
& + \frac{\frac{\omega}{\Delta x}}{1} \Delta f(x) \\
& + \frac{\frac{\omega}{\Delta x}\left(\frac{\omega}{\Delta x}-1\right)}{1.2} \Delta^2 f(x) \\
& + \frac{\frac{\omega}{\Delta x}\left(\frac{\omega}{\Delta x}-1\right)\left(\frac{\omega}{\Delta x}-2\right)}{1.2.3} \Delta^3 f(x) \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& + \frac{\frac{\omega}{\Delta x}\left(\frac{\omega}{\Delta x}-1\right)\cdots\left(\frac{\omega}{\Delta x}-n+1\right)}{1.2.3 \ldots n} \Delta^n f(x) \\
& + \frac{\frac{\omega}{\Delta x}\left(\frac{\omega}{\Delta x}-1\right)\cdots\left(\frac{\omega}{\Delta x}-n+1\right)}{1.2.3 \ldots n} (\omega - n\Delta x)\Delta^n \varphi(x).
\end{aligned}
$$

Bezeichnen wir aber in dieser Abhandlung die Binomialcoefficienten für den Exponenten k immer durch

$$(k)_0,\ (k)_1,\ (k)_2,\ (k)_3,\ (k)_4,\ \ldots;$$

so können wir die obige Formel kürzer auf folgende Art ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
6)\quad f(x+\omega) = f(x) + \left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_1 \Delta f(x) & + \left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_2 \Delta^2 f(x) \\
& + \left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_3 \Delta^3 f(x) \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& + \left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_n \Delta^n f(x) \\
& + (\omega - n\Delta x)\left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_n \Delta^n \varphi(x).
\end{aligned}
$$

Wenn $\Delta^n \varphi(x) = 0$ ist, so ist:

$$7)\quad f(x+\omega)=f(x)+\left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_1\Delta f(x)+\left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_2\Delta^2 f(x)$$
$$+\left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_3\Delta^3 f(x)$$
u. s. w.
$$+\left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_n\Delta^n f(x).$$

Ist z. B. $f(x)=x^n$, indem n eine positive ganze Zahl bezeichnet, so ist

$$\varphi(x)=\frac{(x+\omega)^n-x^n}{\omega}=\frac{(x+\omega)^n-x^n}{(x+\omega)-x},$$

also nach einem bekannten, schon oben angewandten Satze:

$$\varphi(x)=(x+\omega)^{n-1}+(x+\omega)^{n-2}x$$
$$+(x+\omega)^{n-3}x^2$$
u. s. w.
$$+(x+\omega)x^{n-2}$$
$$+x^{n-1},$$

woraus sich ergiebt, dass in diesem Falle $\varphi(x)$ eine ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades von x, und folglich nach einem bekannten Satze $\Delta^n\varphi(x)=0$ ist. Also ist nach 7):

$$8)\quad (x+\omega)^n=x^n+\left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_1\Delta.x^n+\left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_2\Delta^2.x^n$$
$$+\left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_3\Delta^3.x^n$$
u. s. w.
$$+\left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_n\Delta^n.x^n.$$

§. 5.

Wir wollen nun die Reihe

$$(n)_\lambda,\quad -(\lambda+1)_1(n)_{\lambda+1},\quad (\lambda+2)_2(n)_{\lambda+2},\quad \ldots\ldots(-1)^\mu(\lambda+\mu)_\mu(n)_{\lambda+\mu},$$

wo n eine ganz beliebige Grösse bezeichnet, dagegen λ und μ positive ganze Zahlen sein sollen, zu summiren suchen, indem wir der Kürze wegen

$$\varphi(\lambda,n)$$
$$=(n)_\lambda-(\lambda+1)_1(n)_{\lambda+1}+(\lambda+2)_2(n)_{\lambda+2}+\ldots\ldots+(-1)^\mu(\lambda+\mu)_\mu(n)_{\lambda+\mu}$$

setzen.

Nach einem sehr bekannten Satze von der Zerlegung der Binomialcoefficienten in zwei andere Binomialcoefficienten ist:

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda,n)= \;& (n-1)_{\lambda-1}+(n-1)_\lambda \\
& -(\lambda+1)_1(n-1)_\lambda-(\lambda+1)_1(n-1)_{\lambda+1} \\
& +(\lambda+2)_2(n-1)_{\lambda+1}+(\lambda+2)_2(n-1)_{\lambda+2} \\
& -(\lambda+3)_3(n-1)_{\lambda+2}-(\lambda+3)_3(n-1)_{\lambda+3} \\
& \qquad \text{u. s. w.} \\
& +(-1)^\mu(\lambda+\mu)_\mu(n-1)_{\lambda+\mu-1}+(-1)^\mu(\lambda+\mu)_\mu(n-1)_{\lambda+\mu} \\
= \;& (n-1)_{\lambda-1} \\
& -\{(\lambda+1)_1-(\lambda)_0\}(n-1)_\lambda \\
& +\{(\lambda+2)_2-(\lambda+1)_1\}(n-1)_{\lambda+1} \\
& -\{(\lambda+3)_3-(\lambda+2)_2\}(n-1)_{\lambda+2} \\
& \qquad \text{u. s. w.} \\
& +(-1)^\mu\{(\lambda+\mu)_\mu-(\lambda+\mu-1)_{\mu-1}\}(n-1)_{\lambda+\mu-1} \\
& +(-1)^\mu(\lambda+\mu)_\mu(n-1)_{\lambda+\mu}
\end{aligned}$$

$$=(n-1)_{\lambda-1}-(\lambda)_1(n-1)_\lambda+(\lambda+1)_2(n-1)_{\lambda+1}-(\lambda+2)_3(n-1)_{\lambda+2}+\ldots\ldots$$
$$\ldots.+(-1)^\mu(\lambda+\mu-1)_\mu(n-1)_{\lambda+\mu-1}+(-1)^\mu(\lambda+\mu)_\mu(n-1)_{\lambda+\mu}.$$

Also hat man die Relation:

$$\varphi(\lambda,n)=\varphi(\lambda-1,n-1)+(-1)^\mu(\lambda+\mu)_\mu(n-1)_{\lambda+\mu}.$$

Nun ist aber

$$(\lambda+\mu)_\mu(n-1)_{\lambda+\mu}$$
$$=\frac{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1)\ldots(\lambda+1)}{1.2.3.\ldots\mu}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-\lambda-\mu)}{1.2.3\ldots(\lambda+\mu)}$$

$$=\frac{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1)\ldots 3.2.1}{1.2.3..\lambda.1.2.3..\mu}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-\lambda-\mu)}{1.2.3\ldots(\lambda+\mu)}$$

$$=\frac{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1)\ldots(\mu+1)}{1.2.3\ldots\lambda}\cdot\frac{(n-1)..(n-\lambda)(n-\lambda-1)..(n-\lambda-\mu)}{1.2.3\ldots\mu(\mu+1)\ldots(\lambda+\mu)}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-\lambda)}{1.2.3\ldots\lambda}\cdot\frac{(n-\lambda-1)(n-\lambda-2)..(n-\lambda-\mu)}{1.2.3\ldots\mu},$$

also

$$(\lambda+\mu)_\mu(n-1)_{\lambda+\mu}=(n-1)_\lambda(n-\lambda-1)_\mu,$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\varphi(\lambda,n)=\varphi(\lambda-1,n-1)+(-1)^\mu(n-1)_\lambda(n-\lambda-1)_\mu.$$

Leicht erhellet, dass

$$\begin{aligned}\varphi(0,n)&=(n)_0-(n)_1+(n)_2-(n)_3+\ldots+(-1)^\mu(n)_\mu\\&=(n)_0-(n-1)_0+(n-1)_1-(n-1)_2+\ldots+(-1)^\mu(n-1)_{\mu-1}\\&\qquad-(n-1)_1+(n-1)_2-(n-1)_3+\ldots+(-1)^\mu(n-1)_\mu,\end{aligned}$$

also

$$\varphi(0,n)=(-1)^\mu(n-1)_\mu$$

ist. Also ist nach der obigen Relation:

$$\begin{aligned}\varphi(1,n)&=\varphi(0,n-1)+(-1)^\mu(n-1)_1(n-2)_\mu\\&=(-1)^\mu(n-2)_\mu+(-1)^\mu(n-1)_1(n-2)_\mu\\&=(-1)^\mu\{(n-1)_0+(n-1)_1\}(n-2)_\mu\\&=(-1)^\mu(n)_1(n-2)_\mu.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(2,n)&=\varphi(1,n-1)+(-1)^\mu(n-1)_2(n-3)_\mu\\&=(-1)^\mu(n-1)_1(n-3)_\mu+(-1)^\mu(n-1)_2(n-3)_\mu\\&=(-1)^\mu\{(n-1)_1+(n-1)_2\}(n-3)_\mu\\&=(-1)^\mu(n)_2(n-3)_\mu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(3,n)&=\varphi(2,n-1)+(-1)^\mu(n-1)_3(n-4)_\mu\\&=(-1)^\mu(n-1)_2(n-4)_\mu+(-1)^\mu(n-1)_3(n-4)_\mu\\&=(-1)^\mu\{(n-1)_2+(n-1)_3\}(n-4)_\mu\\&=(-1)^\mu(n)_3(n-4)_\mu,\end{aligned}$$

u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist folglich allgemein:

$$\varphi(\lambda,n)=(-1)^{\mu}(n)_{\lambda}(n-\lambda-1)_{\mu};$$

also

$$(-1)^{\mu}(n)_{\lambda}.(n-\lambda-1)_{\mu}$$
$$=(n)_{\lambda}-(\lambda+1)_{1}(n)_{\lambda+1}+(\lambda+2)_{2}(n)_{\lambda+2}+\ldots+(-1)^{\mu}(\lambda+\mu)_{\mu}(n)_{\lambda+\mu}.$$

§. 6.

Indem wir dem eigentlichen Interpolationsproblem nun näher treten, wollen wir annehmen, dass die gesuchte ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades von x, welche für

$$x=x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots.\ x_n$$

respective die Werthe

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots.\ y_n$$

erhalten soll, die Function

$$y=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots.+A_nx^n$$

sei, wollen aber jetzt, wie wir schon früher bemerkt haben, die besondere Voraussetzung zum Grunde legen, dass die gegebenen Werthe

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots..\ x_n$$

der unabhängigen veränderlichen Grösse x eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden, deren beständige Differenz durch Δx_0 bezeichnet werden mag.

Nach den Bedingungen der Aufgabe haben wir die Gleichung

$$y_0=A_0+A_1x_0+A_2x_0^2+A_3x_0^3+\ldots.+A_nx_0^n,$$

aus welcher sich nach bekannten Principien überhaupt die folgenden Gleichungen ergeben:

$$
\begin{array}{ll}
y_0 = & A_0 + A_1 x_0 + A_2 x_0^2 + A_3 x_0^3 + \ldots + A_n x_0^n, \\
\Delta y_0 = & A_1 \Delta x_0 + A_2 \Delta . x_0^2 + A_3 \Delta . x_0^3 + \ldots + A_n \Delta . x_0^n, \\
\Delta^2 y_0 = & A_2 \Delta^2 . x_0^2 + A_3 \Delta^2 . x_0^3 + \ldots + A_n \Delta^n . x_0^n, \\
\Delta^3 y_0 = & A_3 \Delta^3 . x_0^3 + \ldots + A_n \Delta^3 . x_0^n, \\
\text{u. s. w.} & \text{u. s. w} \\
\Delta^{n-1} y_0 = & A_{n-1} \Delta^{n-1} . x_0^{n-1} + A_n \Delta^{n-1} . x_0^n, \\
\Delta^n y_0 = & A_n \Delta^n . x_0^n;
\end{array}
$$

wo die Grössen

$$y_0,\ \Delta y_0,\ \Delta^2 y_0,\ \Delta^3 y_0,\ \ldots\ \Delta^{n-1} y_0,\ \Delta^n y_0$$

aus der gegebenen Reihe

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots.\ y_n$$

nach dem folgenden bekannten Schema berechnet werden müssen:

$$
\begin{array}{lllll}
y_0 & & & & \\
 & y_1 - y_0 & & & \\
y_1 & & y_2 - 2y_1 + y_0 & & \\
 & y_2 - y_1 & & y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 & \\
y_2 & & y_3 - 2y_2 + y_1 & & \text{u. s. w.} \\
 & y_3 - y_2 & & y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1 & \\
y_3 & & y_4 - 2y_3 + y_2 & \vdots & \\
 & y_4 - y_3 & \vdots & \vdots & \\
y_4 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
y_{n-4} & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & y_{n-3} - y_{n-4} & \vdots & \vdots & \\
y_{n-3} & & y_{n-2} - 2y_{n-3} + y_{n-4} & \vdots & \\
 & y_{n-2} - y_{n-3} & & y_{n-1} - 3y_{n-2} + 3y_{n-3} - y_{n-4} & \\
y_{n-2} & & y_{n-1} - 2y_{n-2} + y_{n-3} & & \text{u. s. w.} \\
 & y_{n-1} - y_{n-2} & & y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3} & \\
y_{n-1} & & y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} & & \\
 & y_n - y_{n-1} & & & \\
y_n & & & &
\end{array}
$$

wo also

$$y_0 = y_0,$$

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,$$

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0,$$

u. s. w.

$$\Delta^n y_0 = y_n - (n)_1 y_{n-1} + (n)_2 y_{n-2} - (n)_3 y_{n-3} + \ldots + (-1)^n (n)_n y_0$$

ist. Natürlich wird man aber bei praktischen Anwendungen

$$y_0, \quad \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_0, \quad \Delta^3 y_0, \ldots\ldots \Delta^n y_0$$

nicht nach diesen Formeln, sondern in bekannter Weise durch successive Subtraction nach dem obigen Schema berechnen.

Zur Bestimmung der Coefficienten

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$$

der gesuchten Function

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n$$

erhält man nun aber aus den obigen Gleichungen unmittelbar die folgenden recurrirenden Formeln:

$$A_n = \frac{\Delta^n y_0}{\Delta^n . x_0^n},$$

$$A_{n-1} = \frac{\Delta^{n-1} y_0}{\Delta^{n-1} . x_0^{n-1}} - \frac{\Delta^{n-1} . x_0^n}{\Delta^{n-1} . x_0^{n-1}} A_n,$$

$$A_{n-2} = \frac{\Delta^{n-2} y_0}{\Delta^{n-2} . x_0^{n-2}} - \frac{\Delta^{n-2} . x_0^{n-1}}{\Delta^{n-2} . x_0^{n-2}} A_{n-1} - \frac{\Delta^{n-2} . x_0^n}{\Delta^{n-2} . x_0^{n-2}} A_n,$$

u. s. w. u. s. w.

$$A_1 = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} - \frac{\Delta . x_0^2}{\Delta x_0} A_2 - \frac{\Delta . x_0^3}{\Delta x_0} A_3 - \ldots - \frac{\Delta . x_0^n}{\Delta x_0} A_n,$$

$$A_0 = y_0 - x_0 A_1 - x_0^2 A_2 - x_0^3 A_3 - \ldots - x_0^{n-1} A_{n-1} - x_0^n A_n.$$

In diesen Formeln ist die erste Auflösung des Interpolationsproblems enthalten.

Häufig kommt bei Anwendungen der Fall vor, dass $x_0 = 0$ ist. In diesem Falle hat man z. B. für $n = 5$ die folgenden recurrirenden Formeln, mittelst welcher sich die Coefficienten

$$A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$$

bestimmen lassen:

$$A_5 = \frac{1}{120} \cdot \frac{\Delta^5 y_0}{\Delta x_0^5},$$

$$A_4 = \frac{1}{24} \cdot \frac{\Delta^4 y_0}{\Delta x_0^4} - 10 A_5 \Delta x_0 ,$$

$$A_3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta x_0^3} - 6 A_4 \Delta x_0 - 25 A_5 \Delta x_0^2 ,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x_0^2} - 3 A_3 \Delta x_0 - 7 A_4 \Delta x_0^2 - 15 A_5 \Delta x_0^3 ,$$

$$A_1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} - 1 A_2 \Delta x_0 - 1 A_3 \Delta x_0^2 - 1 A_4 \Delta x_0^3 - 1 A_5 \Delta x_0^4 ,$$

$$A_0 = y_0 .$$

Sich ähnliche Formeln für noch grössere Werthe von n zu berechnen, hat nicht die mindeste Schwierigkeit. Für den praktischen Gebrauch ist es natürlich vortheilhaft und nothwendig, dieselben bis zu einer möglichst hohen Gränze hin vorräthig zu haben.

§. 7.

Eine neue Auflösung unserer Aufgabe ergiebt sich auf folgende Art.

Wenn wir die im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Ausdrücke von

$$y_0, \quad \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_0, \quad \Delta^3 y_0, \ldots \Delta^n y_0$$

nach der Reihe mit

$$1, \quad \left(\frac{x - x_0}{\Delta x_0}\right)_1, \quad \left(\frac{x - x_0}{\Delta x_0}\right)_2, \quad \left(\frac{x - x_0}{\Delta x_0}\right)_3, \ldots \left(\frac{x - x_0}{\Delta x_0}\right)_n$$

multipliciren und die erhaltenen Gleichungen dann zu einander addiren, so erhalten wir die Gleichung:

$$y_0 + \left(\frac{x - x_0}{\Delta x_0}\right)_1 \cdot \Delta y_0 + \left(\frac{x - x_0}{\Delta x_0}\right)_2 \cdot \Delta^2 y_0 + \left(\frac{x - x_0}{\Delta x_0}\right)_3 \cdot \Delta^3 y_0 + \ldots$$
$$+ \left(\frac{x - x_0}{\Delta x_0}\right)_n \cdot \Delta^n y_0$$

$$= \quad A_0$$

$$+ A_1 \{ x_0 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1 . \Delta x_0 \}$$

$$+ A_2 \{ x_0^2 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1 . \Delta . x_0^2 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2 . \Delta^2 . x_0^2 \}$$

$$+ A_3 \{ x_0^3 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1 . \Delta . x_0^3 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2 \Delta^2 . x_0^3 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_3 . \Delta^3 . x_0^3 \}$$

u. s. w.

$$+ A_n \{ x_0^n + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1 . \Delta . x_0^n + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2 . \Delta^2 . x_0^n + \ldots \ldots + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n . \Delta^n . x_0^n \}.$$

Setzen wir nun in der Gleichung §. 4. 8) für x und ω respective x_0 und $x-x_0$, also $x_0+(x-x_0)=x$ für $x+\omega$, so erhalten wir den Ausdruck:

$$x^n = x_0^n + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1 . \Delta . x_0^n + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2 . \Delta^2 . x_0^n + \ldots \ldots + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n . \Delta^n . x_0^n,$$

und folglich, wenn wir in dieser Formel nach und nach

$$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots\ n$$

setzen, nach dem Vorhergehenden:

$$y_0 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1 . \Delta y_0 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2 . \Delta^2 y_0 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_3 . \Delta^3 y_0 + \ldots \ldots + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n . \Delta^n y_0$$

$$= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n,$$

also, weil bekanntlich

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n$$

ist:

$$y = y_0 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1 \cdot \Delta y_0 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2 \cdot \Delta^2 y_0 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_3 \cdot \Delta^3 y_0 + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n \cdot \Delta^n y_0,$$

welche Formel eine neue sehr bemerkenswerthe Auflösung des Interpolationsproblems liefert.

§. 8.

Eine dritte Auflösung ergiebt sich auf folgende Art.

Bekanntlich ist:

$$y_0 = y_0,$$
$$\Delta y_0 = y_1 - (1)_1 y_0,$$
$$\Delta^2 y_0 = y_2 - (2)_1 y_1 + (2)_2 y_0,$$
$$\Delta^3 y_0 = y_3 - (3)_1 y_2 + (3)_2 y_1 - (3)_3 y_0,$$

u. s. w.

$$\Delta^n y_0 = y_n - (n)_1 y_{n-1} + (n)_2 y_{n-2} + \ldots + (-1)^n (n)_n y_0.$$

Also ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$y = y_0$$
$$+ \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1 \{y_1 - (1)_1 y_0\}$$
$$+ \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2 \{y_2 - (2)_1 y_1 + (2)_2 y_0\}$$
$$+ \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_3 \{y_3 - (3)_1 y_2 + (3)_2 y_1 - (3)_3 y_0\}$$

u. s. w.

$$+ \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n \{y_n - (n)_1 y_{n-1} + (n)_2 y_{n-2} + \ldots + (-1)^n (n)_n y_0\}$$

$$= \Big\{1-(1)_1\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1+(2)_2\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2-(3)_3\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_3+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n(n)_n\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n\Big\}\,y_0$$

$$+\Big\{\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1-(2)_1\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2+(3)_2\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_3-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}(n)_{n-1}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n\Big\}\,y_1$$

$$+\Big\{\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2-(3)_1\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_3+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-2}(n)_{n-2}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n\Big\}\,y_2$$

$$+\Big\{\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_3-\ldots+(-1)^{n-3}(n)_{n-3}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n\Big\}\,y_3$$

u. s. w.

$$+\Big\{\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_{n-1}-(n)_1\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n\Big\}\,y_{n-1}$$

$$+\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n y_n;$$

also nach dem in §. 5. bewiesenen Satze von den Binomialcoefficienten:

$$y = (-1)^n\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_0\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-1\right)_n y_0$$

$$+(-1)^{n-1}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-2\right)_{n-1} y_1$$

$$+(-1)^{n-2}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-3\right)_{n-2} y_2$$

$$+(-1)^{n-3}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_3\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-4\right)_{n-3} y_3$$

u. s. w.

$$+(-1)^1\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_{n-1}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-n\right)_1 y_{n-1}$$

$$+(-1)^0\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-n-1\right)_0 y_n.$$

Es ist aber allgemein:

$$\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_k\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-k-1\right)_{n-k}$$

$$=\frac{(x-x_0)(x-x_0-1\Delta x_0)\ldots(x-x_0-(k-1)\Delta x_0)}{1.2.3\ldots k\Delta x_0{}^k}$$

$$\times\frac{(x-x_0-(k+1)\Delta x_0)(x-x_0-(k+2)\Delta x_0)\ldots(x-x_0-n\Delta x_0)}{1.2.3\ldots(n-k)\Delta x_0{}^{n-k}},$$

und weil nun bekanntlich

$$x_k-x_0=k\Delta x_0,$$

$$x_k-x_1=(k-1)\Delta x_0,$$

$$x_k-x_2=(k-2)\Delta x_0,$$

u. s. w.

$$x_k-x_{k-2}=\ \ 2\Delta x_0,$$

$$x_k-x_{k-1}=\ \ 1\Delta x_0,$$

$$x_k-x_{k+1}=-1\Delta x_0,$$

$$x_k-x_{k+2}=-2\Delta x_0,$$

$$x_k-x_{k+3}=-3\Delta x_0,$$

u. s. w.

$$x_k-x_n=-(n-k)\Delta x_0;$$

also, wenn man multiplicirt:

$$(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)$$

$$=1.2.3\ldots k\Delta x_0{}^k\,.\,1.2.3\ldots(n-k)\Delta x_0{}^{n-k}.(-1)^{n-k}$$

ist, so ist nach dem Obigen offenbar:

$$\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_k\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-k-1\right)_{n-k}$$

$$=(-1)^{n-k}.\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

oder

$$(-1)^{n-k}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_k\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-k-1\right)_{n-k}$$

$$=\frac{(x-x_0)(x-x_1)..(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}.$$

Insbesondere hat man noch zu merken, dass

$$(-1)^n\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_0\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-1\right)_n$$

$$=(-1)^n\frac{(x-x_0-\Delta x_0)(x-x_0-2\Delta x_0)...(x-x_0-n\Delta x_0)}{1.2.3..n\Delta x_0{}^n},$$

und folglich, weil

$$x_0-x_1=-1\Delta x_0,$$

$$x_0-x_2=-2\Delta x_0,$$

$$x_0-x_3=-3\Delta x_0,$$

u. s. w.

$$x_0-x_n=-n\Delta x_0;$$

also

$$(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)....(x_0-x_n)$$
$$=(-1)^n.1.2.3....n\Delta x_0{}^n$$

ist,

$$(-1)^n\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_0\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-1\right)_n$$

$$=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)....(x_0-x_n)}$$

ist.

Daher ist jetzt nach dem Obigen:

$$y=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)....(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)...(x_0-x_n)}y_0$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)...(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)...(x_1-x_n)}y_1$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots(x_2-x_n)}y_2$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\ldots(x-x_n)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\ldots(x_3-x_n)}y_3$$

u. s. w.

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n.$$

Diese merkwürdige, zuerst von Lagrange gefundene Interpolationsformel ist freilich hier eigentlich bloss für den Fall bewiesen worden, wenn die Grössen

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$$

eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden. Indess übersieht man auf den ersten Blick, dass die Grösse, durch welche wir vorher y ausgedrückt haben, ganz allgemein für

$$x=x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$$

respective die Werthe

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n$$

erhält, so dass also die obige Formel eine ganz allgemeine Interpolationsformel ist, d. h. dass durch dieselbe das Interpolationsproblem in der ihm in §. 2. gegebenen Fassung ganz allgemein, was auch die Grössen

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$$

sein mögen, aufgelöst wird.

Aus der vorher bewiesenen Formel

$$y=(-1)^n\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_0\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-1\right)_n y_0$$

$$+(-1)^{n-1}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-2\right)_{n-1} y_1$$

$$+(-1)^{n-2}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-3\right)_{n-2} y_2$$

$$+(-1)^{n-3}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_3\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-4\right)_{n-3} y_3$$

u. s. w.

$$+(-1)^1\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_{n-1}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-n\right)_1 y_{n-1}$$

$$+(-1)^0\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-n-1\right)_0 y_n$$

erhält man sogleich die folgende bemerkenswerthe Formel:

$$x^n = (-1)^n\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_0\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-1\right)_n x_0^n$$

$$+(-1)^{n-1}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-2\right)_{n-1}(x_0+\Delta x_0)^n$$

$$+(-1)^{n-2}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-3\right)_{n-2}(x_0+2\Delta x_0)^n$$

$$+(-1)^{n-3}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_3\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-4\right)_{n-3}(x_0+3\Delta x_0)^n$$

u. s. w.

$$+(-1)^1\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_{n-1}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-n\right)_1(x_0+(n-1)\Delta x_0)^n$$

$$+(-1)^0\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-n-1\right)_0(x_0+n\Delta x_0)^n$$

oder

$$(-1)^n x^n = \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_0\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-1\right)_n x_0^n$$

$$-\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-2\right)_{n-1}(x_0+\Delta x_0)^n$$

$$+\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-3\right)_{n-2}(x_0+2\Delta x_0)^n$$

$$-\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_3\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-4\right)_{n-3}(x_0+3\Delta x_0)^n$$

u. s. w.

$$+(-1)^{n-1}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_{n-1}\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-n\right)_1(x_0+(n-1)\Delta x_0)^n$$

$$+(-1)^n\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n\left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}-n-1\right)_0(x_0+n\Delta x_0)^n,$$

wo für x_0 und Δx_0 alle beliebige Grössen gesetzt werden können.

§. 9.

Gehen wir jetzt zu der mechanischen Quadratur über, so können wir die dieselbe betreffende Aufgabe im Allgemeinen auf folgende Art fassen:

Man soll eine ganze rationale algebraische Function $Y=F(x)$ des $(n+1)$sten Grades von solcher Beschaffenheit finden, dass der Differentialquotient $y=f(x)$ derselben, wenn ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse x die $n+1$ gegebenen Werthe

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots.\ x_n$$

beigelegt werden, respective die $n+1$ ebenfalls gegebenen Werthe

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots.\ y_n$$

erhält.

Um diese Aufgabe aufzulösen, brauchen wir, indem wir wieder annehmen, dass die gegebenen Grössen

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots.\ x_n$$

eine arithmetische-Reihe des ersten Grades mit der constanten Differenz Δx_0 bilden, nur etwa nach §. 6. die ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades

$$y=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n$$

so zu bestimmen, dass dieselbe, wenn man für x die Werthe

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots.\ x_n$$

setzt, respective die Werthe

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n$$

erhält. Denn dann wird die gesuchte Function Y offenbar im Allgemeinen durch die Formel

$$Y = \int y \partial x,$$

also wegen des Obigen, wenn C eine willkührliche Constante bezeichnet, welche jederzeit aus den besonderen Bedingungen der jedesmaligen Aufgabe bestimmt werden muss, durch die Formel

$$Y = C + \frac{1}{1} A_0 x + \frac{1}{2} A_1 x^2 + \frac{1}{3} A_2 x^3 + \ldots + \frac{1}{n+1} A_n x^{n+1}$$

dargestellt, und daher unser Problem hierdurch vollständig gelöst sein, weil die Bestimmung der Coefficienten

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$$

schon in §. 6. vollständig gelehrt worden ist.

§. 10.

Zu einer anderen Auflösung des Problems der mechanischen Quadratur führt die in §. 7. gegebene Bestimmung der Function $y = f(x)$. Dort ist nämlich gezeigt worden, dass immer

$$y = y_0 + \left(\frac{x - x_0}{\Delta x_0}\right)_1 \Delta y_0 + \left(\frac{x - x_0}{\Delta x_0}\right)_2 \Delta^2 y_0 + \left(\frac{x - x_0}{\Delta x_0}\right)_3 \Delta^3 y_0 + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{x - x_0}{\Delta x_0}\right)_n \Delta^n y_0$$

ist. Also kann offenbar

$$Y = C + y_0 \int_{x_0}^{x} \partial x + \Delta y_0 \int_{x_0}^{x} \left(\frac{x - x_0}{\Delta x_0}\right)_1 \partial x$$
$$+ \Delta^2 y_0 \int_{x_0}^{x} \left(\frac{x - x_0}{\Delta x_0}\right)_2 \partial x$$
$$+ \Delta^3 y_0 \int_{x_0}^{x} \left(\frac{x - x_0}{\Delta x_0}\right)_3 \partial x$$

u. s. w.

$$+ \Delta^n y_0 \int_{x_0}^{x} \left(\frac{x - x_0}{\Delta x_0}\right)_n \partial x$$

gesetzt werden, und die den einzelnen Werthen

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots.\ x_n$$

von x entsprechenden Werthe von Y erhält man, wenn man für die obere Gränze in den Integralen der obigen Formel nach und nach die vorstehenden Werthe setzt.

Setzen wir aber der Kürze wegen

$$\frac{x-x_0}{\Delta x_0}=u,$$

also

$$x=x_0+u\Delta x_0,\quad \partial x=\Delta x_0 \partial u;$$

wobei man zu bemerken hat, dass, weil

$$\begin{aligned}
x_0&=x_0,\\
x_1&=x_0+1\Delta x_0,\\
x_2&=x_0+2\Delta x_0,\\
x_3&=x_0+3\Delta x_0,\\
&\text{u. s. w.}\\
x_n&=x_0+n\Delta x_0
\end{aligned}$$

ist, wenn

$$x=x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots.\ x_n$$

ist, respective

$$u=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ n$$

ist; so ist offenbar

$$Y=C+\Delta x_0\left\{\begin{array}{r}y_0\int_0^u (u)_0\partial u+\Delta y_0\int_0^u (u)_1\,\partial u\\
+\Delta^2 y_0\int_0^u (u)_2\partial u\\
\text{u. s. w.}\\
+\Delta^n y_0\int_0^u (u)_n\,\partial u\end{array}\right\}$$

und die den Werthen

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots. x_n$$

von x entsprechenden Werthe von Y erhält man, wenn man für die obere Gränze in den Integralen der vorstehenden Formel nach der Reihe

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots n$$

setzt.

Bezeichnen wir also jetzt die den Werthen

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots. x_n$$

von x entsprechenden Werthe von Y nach der Reihe durch

$$Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \ldots. Y_n;$$

so ist allgemein, wenn μ eine beliebige der positiven ganzen Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, \ldots n$ bezeichnet:

$$Y_\mu = C + \Delta x_0 \left\{ \begin{array}{r} y_0 \int_0^\mu (u)_0 \partial u + \Delta y_0 \int_0^\mu (u)_1 \partial u + \Delta^2 y_0 \int_0^\mu (u)_2 \partial u \\ + \Delta^3 y_0 \int_0^\mu (u)_3 \partial u \\ \text{u. s. w.} \\ + \Delta^n y_0 \int_0^\mu (u)_n \partial u \end{array} \right\}.$$

Nehmen wir aber grösserer Bestimmtheit wegen an, dass das Integral so bestimmt sein soll, dass es für $x=x_0$, d. i. für $u=0$ verschwindet, was jedenfalls der Allgemeinheit nicht schadet, weil man ja immer zu dem so bestimmten Integrale sich wieder eine willkührliche Constante addirt denken kann, so ist offenbar $C=0$, und folglich nach dem Obigen:

$$Y_\mu = \Delta x_0 \left\{ y_0 \int_0^\mu (u)_0 \partial u + \Delta y_0 \int_0^\mu (u)_1 \partial u + \Delta^2 y_0 \int_0^\mu (u)_2 \partial u \right.$$
$$+ \Delta^3 y_0 \int_0^\mu (u)_3 \partial u$$
u. s. w.
$$\left. + \Delta^n y_0 \int_0^\mu (u)_n \partial u \right\}.$$

Die Werthe, welche die Function

$$y = y_0 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1 \Delta y_0 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2 \Delta^2 y_0 + \dots + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n \Delta^n y_0$$

oder

$$y = y_0 + (u)_1 \Delta y_0 + (u)_2 \Delta^2 y_0 + (u)_3 \Delta^3 y_0 + \dots + (u)_n \Delta^n y_0$$

erhält, wenn man für x die Werthe

$$x_{n+1} = x_0 + (n+1)\Delta x_0,$$
$$x_{n+2} = x_0 + (n+2)\Delta x_0,$$
$$x_{n+3} = x_0 + (n+3)\Delta x_0,$$
$$x_{n+4} = x_0 + (n+4)\Delta x_0,$$
u. s. w.

d. h. für u die Werthe

$$n+1, \quad n+2, \quad n+3, \quad n+4, \dots$$

setzt, wollen wir respective durch

$$y_{n+1}, \quad y_{n+2}, \quad y_{n+3}, \quad y_{n+4}, \dots$$

bezeichnen. Nun ist bekanntlich

$$y_1 + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_0}\right)_1 \Delta y_1 + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_0}\right)_2 \Delta^2 y_1 + \dots + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_0}\right)_n \Delta^n y_1$$

oder

$$y_1 + (u-1)_1 \Delta y_1 + (u-1)_2 \Delta^2 y_1 + \dots + (u-1)_n \Delta^n y_1$$

eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades von x, welche für

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_{n+1}$$

respective die Werthe

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots\ y_{n+1}$$

erhält. Weil aber nach dem Obigen auch y für

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_{n+1}$$

respective die Werthe

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots\ y_{n+1}$$

erhält, so muss nach dem in §. 3. bewiesenen Satze

$$y = y_1 + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_0}\right)_1 \Delta y_1 + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_0}\right)_2 \Delta^2 y_1 + \ldots + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_0}\right)_n \Delta^n y_1$$

oder

$$y = y_1 + (u-1)_1 \Delta y_1 + (u-1)_2 \Delta^2 y_1 + \ldots + (u-1)_n \Delta^n y_1$$

sein. In ganz ähnlicher Weise ist

$$y_2 + \left(\frac{x-x_2}{\Delta x_0}\right)_1 \Delta y_2 + \left(\frac{x-x_2}{\Delta x_0}\right)_2 \Delta^2 y_2 + \ldots + \left(\frac{x-x_2}{\Delta x_0}\right)_n \Delta^n y_2$$

oder

$$y_2 + (u-2)_1 \Delta y_2 + (u-2)_2 \Delta^2 y_2 + \ldots + (u-2)_n \Delta^n y_2$$

eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades von x, welche für

$$x = x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \ldots\ x_{n+2}$$

respective die Werthe

$$y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ \ldots\ y_{n+2}$$

erhält. Nach dem Obigen erhält aber auch y für

$$x = x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \ldots\ x_{n+2}$$

respective die Werthe

$$y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ \ldots\ y_{n+2}.$$

Also ist nach dem in §. 3. bewiesenen Satze:

$$y=y_2+\left(\frac{x-x_2}{\Delta x_0}\right)_1\Delta y_2+\left(\frac{x-x_2}{\Delta x_0}\right)_2\Delta^2 y_2+\ldots+\left(\frac{x-x_2}{\Delta x_0}\right)_n\Delta^n y_2$$

oder

$$y=y_2+(u-2)_1\Delta y_2+(u-2)_2\Delta^2 y_2+\ldots+(u-2)_n\Delta^n y_2.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und man erhält daher überhaupt die folgenden Gleichungen:

$$y=y_0+(u)_1\Delta y_0+(u)_2\Delta^2 y_0+\ldots+(u)_n\Delta^n y_0,$$

$$y=y_1+(u-1)_1\Delta y_1+(u-1)_2\Delta^2 y_1+\ldots+(u-1)_n\Delta^n y_1,$$

$$y=y_2+(u-2)_1\Delta y_2+(u-2)_2\Delta^2 y_2+\ldots+(u-2)_n\Delta^n y_2,$$

$$y=y_3+(u-3)_1\Delta y_3+(u-3)_2\Delta^2 y_3+\ldots+(u-3)_n\Delta^n y_3,$$

u. s. w.

$$y=y_{\mu-1}+(u-\mu+1)_1\Delta y_{\mu-1}+(u-\mu+1)_2\Delta^2 y_{\mu-1}+\ldots\ldots+(u-\mu+1)_n\Delta^n y_{\mu-1}.$$

Nun ist nach dem Obigen allgemein

$$Y_\mu=\Delta x_0\int_0^\mu y\partial u,$$

also nach einem bekannten Satze der Integralrechnung:

$$Y_\mu=\Delta x_0\left\{\int_0^1 y\partial u+\int_1^2 y\partial u+\int_2^3 y\partial u+\ldots+\int_{\mu-1}^\mu y\partial u\right\},$$

wo man in die einzelnen μ Integrale nach der Reihe für y die obigen μ Ausdrücke dieser Function einführen kann. Setzen wir aber überhaupt in dem Integrale

$$\int_{p-1}^p (u-p+1)_q\partial u$$

die Grösse

$$u-p+1=v,\quad \text{also}\quad \partial u=\partial v;$$

und überlegen, dass für $u=p-1$, $u=p$ respective $v=0$, $v=1$ ist; so erhalten wir auf der Stelle die Gleichung

$$\int_{p-1}^{p}(u-p+1)_q\,\partial u=\int_{0}^{1}(v)_q\,\partial v,$$

oder, was natürlich Dasselbe ist:

$$\int_{p-1}^{p}(u-p+1)_q\,\partial u=\int_{0}^{1}(u)_q\,\partial u.$$

Nach dem Obigen ist also

$$\int_{p-1}^{p}y\partial u$$

$$=y_{p-1}\int_{0}^{1}(u)_0\partial u+\Delta y_{p-1}\int_{0}^{1}(u)_1\partial u+\Delta^2 y_{p-1}\int_{0}^{1}(u)_2\partial u+\ldots$$

$$\ldots+\Delta^n y_{p-1}\int_{0}^{1}(u)_n\partial u,$$

also

$$
\begin{aligned}
Y_\mu = \Delta x_0 \Big\{ & y_0 \int_0^1 (u)_0 \partial u + \Delta y_0 \int_0^1 (u)_1 \partial u + \Delta^2 y_0 \int_0^1 (u)_2 \partial u + \ldots + \Delta^n y_0 \int_0^1 (u)_n \partial u \\
& + y_1 \int_0^1 (u)_0 \partial u + \Delta y_1 \int_0^1 (u)_1 \partial u + \Delta^2 y_1 \int_0^1 (u)_2 \partial u + \ldots + \Delta^n y_1 \int_0^1 (u)_n \partial u \\
& + y_2 \int_0^1 (u)_0 \partial u + \Delta y_2 \int_0^1 (u)_1 \partial u + \Delta^2 y_2 \int_0^1 (u)_2 \partial u + \ldots + \Delta^n y_2 \int_0^1 (u)_n \partial u \\
& + y_3 \int_0^1 (u)_0 \partial u + \Delta y_3 \int_0^1 (u)_1 \partial u + \Delta^2 y_3 \int_0^1 (u)_2 \partial u + \ldots + \Delta^n y_3 \int_0^1 (u)_n \partial u \\
& \qquad \text{u. s. w.} \\
& + y_{\mu-1} \int_0^1 (u)_0 \partial u + \Delta y_{\mu-1} \int_0^1 (u)_1 \partial u + \Delta^2 y_{\mu-1} \int_0^1 (u)_2 \partial u + \ldots + \Delta^n y_{\mu-1} \int_0^1 (u)_n \partial u \Big\}
\end{aligned}
$$

woraus sich ferner sogleich die folgende Formel ergiebt:

$$
Y_\mu = \Delta x_0 \left\{ \begin{aligned}
&(y_0+y_1+y_2+y_3+\ldots+y_{\mu-1})\int_0^1 (u)_0\partial u \\
&+(\Delta y_0+\Delta y_1+\Delta y_2+\Delta y_3+\ldots\ldots+\Delta y_{\mu-1})\int_0^1 (u)_1\partial u \\
&+(\Delta^2 y_0+\Delta^2 y_1+\Delta^2 y_2+\Delta^2 y_3+\ldots+\Delta^2 y_{\mu-1})\int_0^1 (u)_2\partial u \\
&+(\Delta^3 y_0+\Delta^3 y_1+\Delta^3 y_2+\Delta^3 y_3+\ldots+\Delta^3 y_{\mu-1})\int_0^1 (u)_3\partial u \\
&\qquad\text{u. s. w.} \\
&+(\Delta^n y_0+\Delta^n y_1+\Delta^n y_2+\Delta^n y_3+\ldots+\Delta^n y_{\mu-1})\int_0^1 (u)_n\partial u
\end{aligned} \right\}.
$$

Es ist aber

$$
\begin{aligned}
&\Delta y_0+\Delta y_1+\Delta y_2+\Delta y_3+\ldots+\Delta y_{\mu-1} \\
&=(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+(y_3-y_2)+\ldots\ldots+(y_\mu-y_{\mu-1}) \\
&=y_\mu-y_0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta^2 y_0+\Delta^2 y_1+\Delta^2 y_2+\Delta^2 y_3+\ldots+\Delta^2 y_{\mu-1} \\
&=(\Delta y_1-\Delta y_0)+(\Delta y_2-\Delta y_1)+(\Delta y_3-\Delta y_2)+\ldots\ldots+(\Delta y_\mu-\Delta y_{\mu-1}) \\
&=\Delta y_\mu-\Delta y_0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta^3 y_0+\Delta^3 y_1+\Delta^3 y_2+\Delta^3 y_3+\ldots\ldots+\Delta^3 y_{\mu-1} \\
&=(\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0)+(\Delta^2 y_2-\Delta^2 y_1)+(\Delta^2 y_3-\Delta^2 y_2)+\ldots+(\Delta^2 y_\mu-\Delta^2 y_{\mu-1}) \\
&=\Delta^2 y_\mu-\Delta^2 y_0,
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Also ist

$$Y_\mu = \Delta x_0 \left\{ \begin{array}{l} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{\mu-1} \\ + (y_\mu - y_0) \int_0^1 (u)_1 \partial u \\ + (\Delta y_\mu - \Delta y_0) \int_0^1 (u)_2 \partial u \\ + (\Delta^2 y_\mu - \Delta^2 y_0) \int_0^1 (u)_3 \partial u \\ \text{u. s. w.} \\ + (\Delta^{n-1} y_\mu - \Delta^{n-1} y_0) \int_0^1 (u)_n \partial u \end{array} \right\},$$

in welcher Formel man, um die gesuchten Grössen

$$Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\ldots Y_n$$

zu erhalten, nach und nach

$$\mu = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots n$$

setzen muss. Für $\mu = 0$ ist freilich die obige Formel eigentlich nicht mehr anwendbar; man weiss aber aus dem Obigen, dass $Y_0 = 0$ ist.

Die obige Formel muss nun aber noch so umgeformt werden, dass man zu der Berechnung der sämmtlichen Grössen

$$Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \ldots Y_n$$

bloss der gegebenen Grössen

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$$

und ihrer Differenzen, nicht auch der oben durch

$$y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}, y_{n+4}, \ldots$$

bezeichneten Grössen und deren Differenzen bedarf, wozu wir aber zuerst den folgenden Satz von den Binomialcoefficienten beweisen müssen.

§. 11.

Lehrsatz.

Wenn u eine beliebige Grösse ist, aber k und μ positive ganze Zahlen bezeichnen, so ist immer

$$(u)_\mu + (k)_1 (u)_{\mu+1} + (k)_2 (u)_{\mu+2} + \dots + (k)_k (u)_{\mu+k}$$
$$= (u+k)_{\mu+k}.$$

Beweis.

I. Für $k=1$ ist

$$(u)_\mu + (1)_1 (u)_{\mu+1} = \frac{u(u-1)\dots(u-\mu+1)}{1.2.3\dots\mu}$$
$$+ \frac{u(u-1)\dots(u-\mu+1)(u-\mu)}{1.2.3\dots(\mu+1)}$$
$$= \frac{(u+1)u(u-1)\dots(u-\mu+1)}{1.2.3\dots(\mu+1)} = (u+1)_{\mu+1}.$$

In dem besonderen Falle $\mu=0$ ist

$$(u)_0 + (1)_1 (u)_1 = 1 + u = (u+1)_1.$$

Man sieht also, dass der Satz für jedes positive ganze μ und $k=1$ gilt.

II. Wir wollen nun annehmen, dass der Satz für jedes positive ganze μ und $k-1$ gelte, und wollen daraus abzuleiten suchen, dass er dann auch für jedes positive ganze μ und k gelten muss, wodurch seine allgemeine Gültigkeit bewiesen sein wird.

Nach einem bekannten Satze von den Binomialcoefficienten ist:

$$(k)_1 = 1 + (k-1)_1,$$
$$(k)_2 = (k-1)_1 + (k-1)_2,$$
$$(k)_3 = (k-1)_2 + (k-1)_3,$$

u. s. w.

$$(k)_{k-1}=(k-1)_{k-2}+(k-1)_{k-1},$$

$$(k)_k=(k-1)_{k-1}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}&(u)_\mu+(k)_1(u)_{\mu+1}+(k)_2(u)_{\mu+2}+\dots+(k)_k(u)_{\mu+k}\\ =\;&(u)_\mu+(k-1)_1(u)_{\mu+1}+(k-1)_2(u)_{\mu+2}+\dots+(k-1)_{k-1}(u)_{\mu+k-1}\\ &+(u)_{\mu+1}+(k-1)_1(u)_{\mu+2}+(k-1)_2(u)_{\mu+3}+\dots\dots\\ &\qquad\dots+(k-1)_{k-1}(u)_{\mu+1+(k-1)},\end{aligned}$$

und da nun nach der Annahme der Satz für jedes μ, folglich auch für $\mu+1$, und $k-1$ gilt, so ist:

$$\begin{aligned}&(u)_\mu+(k)_1(u)_{\mu+1}+(k)_2(u)_{\mu+2}+\dots+(k)_k(u)_{\mu+k}\\ &=(u+k-1)_{\mu+k-1}+(u+k-1)_{\mu+k},\end{aligned}$$

also nach einem bekannten Satze von den Binomialcoefficienten:

$$\begin{aligned}&(u)_\mu+(k)_1(u)_{\mu+1}+(k)_2(u)_{\mu+2}+\dots+(k)_k(u)_{\mu+k}\\ &=(u+k)_{\mu+k},\end{aligned}$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 12.

In dem in §. 10. gefundenen Ausdrucke von Y_μ, wo bekanntlich μ nicht grösser als n ist, kommen ausser der bekannten Grösse Δx_0 und den bestimmten Integralen

$$\int_0^1(u)_1\partial u,\ \int_0^1(u)_2\partial u,\ \int_0^1(u)_3\partial u,\dots\dots\int_0^1(u)_n\partial u,$$

deren Werthe immer ohne Schwierigkeit berechnet werden können, die Grössen

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \dots\ y_\mu;$$

$$\Delta y_0,\ \Delta^2y_0,\ \Delta^3y_0,\ \Delta^4y_0,\ \dots\ \Delta^{n-1}y_0;$$

$$\Delta y_\mu,\ \Delta^2y_\mu,\ \Delta^3y_\mu,\ \Delta^4y_\mu,\ \dots\ \Delta^{n-1}y_\mu$$

vor. Die bei unserer Aufgabe eigentlich gegebenen Grössen sind in dem folgenden Schema enthalten:

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \ldots & y_{n-1} & y_n \\ & \Delta y_0 & \Delta y_1 & \Delta y_2 & \Delta y_3 \ldots & \Delta y_{n-1} & \\ & & \Delta^2 y_0 & \Delta^2 y_1 & \Delta^2 y_2 \ldots & \Delta^2 y_{n-2} & \\ & & & \Delta^3 y_0 & \Delta^3 y_1 \ldots & \Delta^3 y_{n-3} & \\ & & & \Delta^4 y_0 \ldots & \Delta^4 y_{n-4} & & \end{array}$$

u. s. w.

$$\Delta^{n-1} y_0 \quad \Delta^{n-1} y_1$$

$$\Delta^n y_0$$

Weil μ nicht grösser als n ist, so sind in diesem Schema offenbar die Grössen

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_\mu;$$

$$\Delta y_0,\ \Delta^2 y_0,\ \Delta^3 y_0,\ \Delta^4 y_0 \ldots \Delta^{n-1} y_0$$

jedenfalls enthalten und können aus demselben sämmtlich entnommen werden. Was aber die Grössen

$$\Delta y_\mu,\ \Delta^2 y_\mu,\ \Delta^3 y_\mu,\ \Delta^4 y_\mu,\ \ldots\ \Delta^{n-1} y_\mu$$

betrifft, so sind dieselben unter der allgemeinen Form

$$\Delta^k y_\mu,$$

wo

$$0 < k \leqq n-1$$

ist, enthalten; und weil nun in dem obigen Schema offenbar bloss die folgenden $k$ten Differenzen vorkommen:

$$\Delta^k y_0,\ \Delta^k y_1,\ \Delta^k y_2,\ \Delta^k y_3,\ \ldots\ \Delta^k y_{n-k};$$

so ist in dem obigen Schema der wirklich gegebenen Grössen die Grösse $\Delta^k y_\mu$ enthalten oder nicht enthalten, jenachdem

$$\mu \leqq n-k \text{ oder } \mu > n-k$$

ist. Hieraus ergiebt sich, dass von den Grössen

$$\Delta y_\mu,\ \Delta^2 y_\mu,\ \Delta^3 y_\mu,\ \Delta^4 y_\mu,\ \ldots\ \Delta^{n-1} y_\mu$$

die Grössen

$$\Delta y_\mu,\ \Delta^2 y_\mu,\ \Delta^3 y_\mu,\ \Delta^4 y_\mu,\ \ldots\ \Delta^{n-\mu} y_\mu$$

in dem obigen Schema der wirklich gegebenen Grössen enthalten, dagegen die Grössen

$$\Delta^{n-\mu+1} y_\mu,\ \Delta^{n-\mu+2} y_\mu,\ \Delta^{n-\mu+3} y_\mu,\ \ldots\ \Delta^{n-1} y_\mu$$

in diesem Schema nicht enthalten sind. Die ersteren Grössen können daher aus dem obigen Schema unmittelbar entnommen werden, die letzteren müssen wir durch die in diesem Schema vorkommenden Grössen auszudrücken suchen, wozu wir jetzt übergehen wollen.

Zu dem Ende bemerken wir zuvörderst, dass, weil

$$y_{n+1},\ y_{n+2},\ y_{n+3},\ y_{n+4},\ \ldots\ldots$$

die Werthe einer ganzen rationalen algebraischen Function für

$$u = n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ \ldots\ldots$$

sind, welche für

$$u = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ n$$

respective die Werthe

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n$$

erhält, die Reihe

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n,\ y_{n+1},\ y_{n+2},\ y_{n+3},\ \ldots$$

offenbar eine arithmetische Reihe der $n$ten Ordnung ist, deren $n$te Differenzen

$$\Delta^n y_0,\ \Delta^n y_1,\ \Delta^n y_2,\ \Delta^n y_3,\ \Delta^n y_4,\ \ldots\ldots$$

unter einander gleich sind, und deren höhere Differenzen folglich sämmtlich verschwinden.

Nun ist:

$$\Delta^{n-\mu+1} y_\mu = \Delta^{n-\mu+1} y_{\mu-1} + \Delta^{n-\mu+2} y_{\mu-1},$$

$$\Delta^{n-\mu+2} y_{\mu-1} = \Delta^{n-\mu+2} y_{\mu-2} + \Delta^{n-\mu+3} y_{\mu-2},$$

$$\Delta^{n-\mu+3} y_{\mu-2} = \Delta^{n-\mu+3} y_{\mu-3} + \Delta^{n-\mu+4} y_{\mu-3},$$

u. s. w.

$$\Delta^{n-1} y_2 = \Delta^{n-1} y_1 + \Delta^n y_1,$$

$$\Delta^n y_1 = \Delta^n y_0;$$

also, wenn man auf beiden Seiten addirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\Delta^{n-\mu+1}y_\mu = \Delta^{n-\mu+1}y_{\mu-1} + \Delta^{n-\mu+2}y_{\mu-2} + \ldots + \Delta^{n-1}y_1 + \Delta^n y_0 .$$

In dieser Gleichung kann man, weil sich die Reihe

$$y_0, \; y_1, \; y_2, \; y_3, \; y_4, \ldots\ldots$$

auch als eine arithmetische Reihe der $(n+1)$sten Ordnung betrachten lässt, auch $n+1$ für n setzen, wodurch man die Gleichung

$$\Delta^{n-\mu+2}y_\mu = \Delta^{n-\mu+2}y_{\mu-1} + \Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-2} + \ldots\ldots + \Delta^n y_1 + \Delta^{n+1}y_0 ,$$

also, weil $\Delta^{n+1}y_0 = 0$ ist, die Gleichung

$$\Delta^{n-\mu+2}y_\mu = \Delta^{n-\mu+2}y_{\mu-1} + \Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-2} + \ldots\ldots + \Delta^n y_1$$

erhält; und wenn man nun auf die Differenzen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens den oben entwickelten Ausdruck von $\Delta^{n-\mu+1}y_\mu$ anwendet, indem man darin für μ nach und nach $\mu-1$, $\mu-2$, $\mu-3$ .... 1 setzt, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
&\Delta^{n-\mu+2}y_\mu \\
= &\Delta^{n-\mu+2}y_{\mu-2} + \Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-3} + \Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4} + \ldots\ldots + \Delta^n y_0 \\
&\qquad + \Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-3} + \Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4} + \ldots\ldots + \Delta^n y_0 \\
&\qquad\qquad + \Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4} + \ldots\ldots + \Delta^n y_0 \\
&\qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \Delta^n y_0
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
&\Delta^{n-\mu+2}y_\mu \\
= &(1)_1 \Delta^{n-\mu+2}y_{\mu-2} + (2)_1 \Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-3} + (3)_1 \Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4} + \ldots\ldots \\
&\qquad \ldots\ldots + (\mu-1)_1 \Delta^n y_0 .
\end{aligned}$$

Setzen wir in dieser Gleichung $n+1$ für n und bemerken, dass $\Delta^{n+1}y_0 = 0$ ist, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\Delta^{n-\mu+3}y_\mu \\
= &(1)_1 \Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-2} + (2)_1 \Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-3} + (3)_1 \Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-4} + \ldots\ldots \\
&\qquad \ldots\ldots + (\mu-2)_1 \Delta^n y_1 .
\end{aligned}$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$\Delta^{n-\mu+3}y_\mu$$

$$=(1)_1\Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-3}+(1)_1\Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4}+(1)_1\Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-5}+\ldots+(1)_1\Delta^n y_0$$
$$+(2)_1\Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4}+(2)_1\Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-5}+\ldots+(2)_1\Delta^n y_0$$
$$+(3)_1\Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-5}+\ldots+(3)_1\Delta^n y_0$$
u. s. w.
$$+(\mu-2)_1\Delta^n y_0$$

also, wenn man addirt, nach der Lehre von den figurirten Zahlen:

$$\Delta^{n-\mu+3}y_\mu$$

$$=(2)_2\Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-3}+(3)_2\Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4}+(4)_2\Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-5}+\ldots\ldots$$
$$\ldots+(\mu-1)_2\Delta^n y_0.$$

Setzt man hierin $n+1$ für n und bemerkt, dass $\Delta^{n+1}y_0=0$ ist, so ergiebt sich:

$$\Delta^{n-\mu+4}y_\mu$$

$$=(2)_2\Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-3}+(3)_2\Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-4}+(4)_2\Delta^{n-\mu+6}y_{\mu-5}+\ldots$$
$$\ldots+(\mu-2)_2\Delta^n y_1,$$

also nach dem Obigen:

$$\Delta^{n-\mu+4}y_\mu$$

$$=(2)_2\Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4}+(2)_2\Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-5}+(2)_2\Delta^{n-\mu+6}y_{\mu-6}+\ldots+(2)_2\Delta^n y_0$$
$$+(3)_2\Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-5}+(3)_2\Delta^{n-\mu+6}y_{\mu-6}+\ldots+(3)_2\Delta^n y_0$$
$$+(4)_2\Delta^{n-\mu+6}y_{\mu-6}+\ldots+(4)_2\Delta^n y_0$$
u. s. w.
$$+(\mu-2)_2\Delta^n y_0$$

also, wenn man addirt, nach der Lehre von den figurirten Zahlen:

$$\Delta^{n-\mu+4}y_\mu$$

$$=(3)_3\Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4}+(4)_3\Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-5}+(5)_3\Delta^{n-\mu+6}y_{\mu-6}+\ldots$$
$$\ldots+(\mu-1)_3\Delta^n y_0.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet hier schon mit völliger Deutlichkeit, und es ist daher allgemein:

$$\Delta^{n-\mu+\lambda} y_\mu = (\lambda-1)_{\lambda-1}\,\Delta^{n-\mu+\lambda} y_{\mu-\lambda}$$
$$+ (\lambda)_{\lambda-1}\,\Delta^{n-\mu+\lambda+1} y_{\mu-\lambda-1}$$
$$+ (\lambda+1)_{\lambda-1}\,\Delta^{n-\mu+\lambda+2} y_{\mu-\lambda-2}$$
u. s. w.
$$+ (\mu-1)_{\lambda-1}\,\Delta^n y_0.$$

Den in §. 10. gefundenen Ausdruck von Y_μ wollen wir jetzt, was offenbar verstattet ist, auf folgende Art darstellen:

$$Y_\mu = \Delta x_0 \left\{ \begin{array}{l} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_{\mu-1} \\ + (y_\mu - y_0) \int_0^1 (u)_1 \partial u \\ + (\Delta y_\mu - \Delta y_0) \int_0^1 (u)_2 \partial u \\ + (\Delta^2 y_\mu - \Delta^2 y_0) \int_0^1 (u)_3 \partial u \\ \text{u. s. w.} \\ + (\Delta^{n-1} y_\mu - \Delta^{n-1} y_0) \int_0^1 (u)_n \partial u \\ + (\Delta^n y_\mu - \Delta^n y_0) \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u \end{array} \right\},$$

und haben nun nach den vorhergehenden Entwickelungen offenbar den folgenden Ausdruck:

$$\Delta^{n-\mu+1}y_\mu\int_0^1(u)_{n-\mu+2}\partial u+\Delta^{n-\mu+2}y_\mu\int_0^1(u)_{n-\mu+3}\partial u+\Delta^{n-\mu+3}y_\mu\int_0^1(u)_{n-\mu+4}\partial u+\ldots.+\Delta^n y_\mu\int_0^1(u)_{n+1}\partial u$$

$$=\Delta^{n-\mu+1}y_{\mu-1}\int_0^1(u)_{n-\mu+2}\partial u+\Delta^{n-\mu+2}y_{\mu-2}\int_0^1(u)_{n-\mu+2}\partial u+\Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-3}\int_0^1(u)_{n-\mu+2}\partial u+\ldots+\Delta^n y_0\int_0^1(u)_{n-\mu+2}\partial u$$

$$+\Delta^{n-\mu+2}y_{\mu-2}\int_0^1(1)_1(u)_{n-\mu+3}\partial u+\Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-3}\int_0^1(2)_1(u)_{n-\mu+3}\partial u+\ldots+\Delta^n y_0\int_0^1(\mu-1)_1(u)_{n-\mu+3}\partial u$$

$$+\Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-3}\int_0^1(2)_2(u)_{n-\mu+4}\partial u+\ldots+\Delta^n y_0\int_0^1(\mu-1)_2(u)_{n-\mu+4}\partial u$$

u. s. w.

$$+\Delta^n y_0\int_0^1(\mu-1)_{\mu-2}(u)_n\partial u$$

$$+\Delta^n y_0\int_0^1(\mu-1)_{\mu-1}(u)_{n+1}\partial u.$$

Summirt man aber die in den Vertikalreihen stehenden Integrale mittelst des in §. 11. bewiesenen Satzes von den Binomialcoefficienten, so erhält man:

$$\Delta^{n-\mu+1}y_\mu \int_0^1 (u)_{n-\mu+2}\partial u \quad = \quad \Delta^{n-\mu+1}y_{\mu-1}\int_0^1 (u)_{n-\mu+2}\partial u$$

$$+\,\Delta^{n-\mu+2}y_\mu \int_0^1 (u)_{n-\mu+3}\partial u \qquad +\,\Delta^{n-\mu+2}y_{\mu-2}\int_0^1 (u+1)_{n-\mu+3}\partial u$$

$$+\,\Delta^{n-\mu+3}y_\mu \int_0^1 (u)_{n-\mu+4}\partial u \qquad +\,\Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-3}\int_0^1 (u+2)_{n-\mu+4}\partial u$$

u. s. w. u. s. w.

$$+\,\Delta^{n}y_\mu \int_0^1 (u)_{n+1}\partial u \qquad +\,\Delta^{n}y_0\int_0^1 (u+\mu-1)_{n+1}\partial u.$$

Führt man dies in den obigen Ausdruck von Y_μ ein, so erhält man mit gehöriger Berücksichtigung aller im Obigen gemachten Bemerkungen für Y_μ die folgende Formel:

$$Y_\mu = \Delta x_0 \left\{ \begin{aligned} & y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{\mu-1} \\ & \qquad + (y_\mu - y_0) \int_0^1 (u)_1 \partial u \\ & \qquad + (\Delta y_\mu - \Delta y_0) \int_0^1 (u)_2 \partial u \\ & \qquad + (\Delta^2 y_\mu - \Delta^2 y_0) \int_0^1 (u)_3 \partial u \\ & \qquad \text{u. s. w.} \\ & \qquad + (\Delta^{n-\mu} y_\mu - \Delta^{n-\mu} y_0) \int_0^1 (u)_{n-\mu+1} \partial u \\ & + \Delta^{n-\mu+1} y_{\mu-1} \int_0^1 (u)_{n-\mu+2} \partial u - \Delta^{n-\mu+1} y_0 \int_0^1 (u)_{n-\mu+2} \partial u \\ & + \Delta^{n-\mu+2} y_{\mu-2} \int_0^1 (u+1)_{n-\mu+3} \partial u - \Delta^{n-\mu+2} y_0 \int_0^1 (u)_{n-\mu+3} \partial u \\ & + \Delta^{n-\mu+3} y_{\mu-3} \int_0^1 (u+2)_{n-\mu+4} \partial u - \Delta^{n-\mu+3} y_0 \int_0^1 (u)_{n-\mu+4} \partial u \\ & \qquad \text{u. s. w.} \\ & + \Delta^n y_0 \int_0^1 (u+\mu-1)_{n+1} \partial u - \Delta^n y_0 \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u \end{aligned} \right\},$$

und alle in dieser Formel enthaltenen Grössen kommen jetzt wirklich in dem obigen Schema der gegebenen Grössen vor, können also auch aus diesem Schema unmittelbar entnommen werden. Dass $Y_0 = 0$ ist, wissen wir aus dem Obigen.

Wenn man in der vorhergehenden Formel $\mu = n$ setzt, so erhält man:

$$
\left.\begin{aligned}
Y_n = \Delta x_0 \{ y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} \\
+ (y_n - y_0) \int_0^1 (u)_1 \partial u \\
+ \Delta y_{n-1} \int_0^1 (u)_2 \partial u - \Delta y_0 \int_0^1 (u)_2 \partial u \\
+ \Delta^2 y_{n-2} \int_0^1 (u+1)_3 \partial u - \Delta^2 y_0 \int_0^1 (u)_3 \partial u \\
+ \Delta^3 y_{n-3} \int_0^1 (u+2)_4 \partial u - \Delta^3 y_0 \int_0^1 (u)_4 \partial u \\
\text{u. s. w.} \\
+ \Delta^n y_0 \int_0^1 (u+n-1)_{n+1} \partial u - \Delta^n y_0 \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u
\end{aligned}\right\} .
$$

Mittelst leichter Rechnung findet man aber:

$$\int_0^1 (u)_1 \partial u = +\frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 (u)_2 \partial u = -\frac{1}{12},$$

$$\int_0^1 (u)_3 \partial u = +\frac{1}{24},$$

$$\int_0^1 (u)_4 \partial u = -\frac{19}{720},$$

$$\int_0^1 (u)_5 \partial u = +\frac{3}{160},$$

$$\int_0^1 (u)_6 \partial u = -\frac{863}{60480},$$

u. s. w.

und

$$\int_0^1 (u)_2 \partial u = -\frac{1}{12},$$

$$\int_0^1 (u+1)_3 \partial u = -\frac{1}{24},$$

$$\int_0^1 (u+2)_4 \partial u = -\frac{19}{720},$$

$$\int_0^1 (u+3)_5 \partial u = -\frac{3}{160},$$

$$\int_0^1 (u+4)_6 \partial u = -\frac{863}{60480},$$

u. s. w.

Daher kann man die Anfangsglieder des obigen Ausdrucks von Y_n auf folgende Art schreiben, wodurch man ganz denselben Ausdruck von Y_n erhält, welchen Laplace a. a. O. gegeben hat:

$$Y_n = \Delta x_0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n \\ -\frac{1}{12}(\Delta y_{n-1} - \Delta y_0) \\ -\frac{1}{24}(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0) \\ -\frac{19}{720}(\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0) \\ -\frac{3}{160}(\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0) \\ -\frac{863}{60480}(\Delta^5 y_{n-5} - \Delta^5 y_0) \\ \text{u. s. w.} \end{array} \right\}$$

Dieser Laplace'sche Ausdruck von Y_n ist also als ein besonderer Fall unter unserm obigen allgemeinen Ausdrucke von Y_μ enthalten.

§. 13.

Aus dem vorhergehenden Paragraphen ergeben sich unmittelbar die folgenden Gleichungen:

$$\int_0^1 (u)_2 \partial u = +\int_0^1 (u)_2 \partial u,$$

$$\int_0^1 (u+1)_3 \partial u = -\int_0^1 (u)_3 \partial u,$$

$$\int_0^1 (u+2)_4 \partial u = +\int_0^1 (u)_4 \partial u,$$

$$\int_0^1 (u+3)_5 \partial u = -\int_0^1 (u)_5 \partial u,$$

$$\int_0^1 (u+4)_6 \partial u = +\int_0^1 (u)_6 \partial u$$

u. s. w.

Bringen wir das in diesen Gleichungen auf der Stelle sich zeigende Gesetz auf einen allgemeinen analytischen Ausdruck, so erhalten wir, indem k eine positive ganze Zahl bezeichnet, die folgende Gleichung:

$$\int_0^1 (u+k)_{k+2} \partial u = (-1)^k \int_0^1 (u)_{k+2} \partial u.$$

Es frägt sich nun, ob die Richtigkeit dieser Gleichung sich allgemein beweisen lässt. Ein Weg, diesen allgemeinen Beweis zu führen, scheint mir aber der folgende zu sein.

Aus dem Obigen wissen wir, dass wir im Vorhergehenden eigentlich die folgende Aufgabe aufgelöst haben:

Wir haben eine ganze rationale algebraische Function von x des $(n+1)$sten Grades

$$Y = C + \frac{1}{1} A_0 x + \frac{1}{2} A_1 x^2 + \frac{1}{3} A_2 x^3 + \ldots + \frac{1}{n+1} A_n x^{n+1}$$

von solcher Beschaffenheit gesucht, dass deren Differentialquotient

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n$$

für

$$x = x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$$

respective die Werthe

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots.\ y_n$$

erhält und haben zugleich die Constante C so bestimmt, dass Y für $x=x_0$ verschwindet.

Wir wollen nun die Ordnung der Grössen

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots.\ x_n;$$

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots.\ y_n$$

umkehren, und wollen also eine ganze rationale algebraische Function von x des $(n+1)$sten Grades

$$\mathfrak{Y}=\mathfrak{C}+\frac{1}{1}\mathfrak{A}_0x+\frac{1}{2}\mathfrak{A}_1x^2+\frac{1}{3}\mathfrak{A}_2x^3+\ldots.+\frac{1}{n+1}\mathfrak{A}_nx^{n+1}$$

von solcher Beschaffenheit suchen, dass deren Differentialquotient

$$\mathfrak{y}=\mathfrak{A}_0+\mathfrak{A}_1x+\mathfrak{A}_2x^2+\mathfrak{A}_3x^3+\ldots+\mathfrak{A}_nx^n$$

für

$$x=x_n,\ x_{n-1},\ x_{n-2},\ x_{n-3},\ \ldots..\ x_0$$

respective die Werthe

$$y_n,\ y_{n-1},\ y_{n-2},\ y_{n-3},\ \ldots.\ y_0$$

erhält, indem wir zugleich die Constante $\mathfrak{C}$ so bestimmen, dass $\mathfrak{Y}$ für $x=x_n$ verschwindet.

Zuerst ergiebt sich nun aus dem in §.3. bewiesenen Satze unmittelbar, dass die Functionen y und $\mathfrak{y}$ identisch sein müssen, also

$$A_0=\mathfrak{A}_0,\ A_1=\mathfrak{A}_1,\ A_2=\mathfrak{A}_2,\ \ldots..\ A_n=\mathfrak{A}_n;$$

folglich

$$Y=C+\frac{1}{1}A_0x+\frac{1}{2}A_1x^2+\frac{1}{3}A_2x^3+\ldots.+\frac{1}{n+1}A_nx^{n+1},$$

$$\mathfrak{Y}=\mathfrak{C}+\frac{1}{1}A_0x+\frac{1}{2}A_1x^2+\frac{1}{3}A_2x^3+\ldots.+\frac{1}{n+1}A_nx^{n+1}$$

ist. Daher haben wir jetzt wegen der aus dem Obigen bekannten Bestimmung der Constanten C und $\mathfrak{C}$ die beiden folgenden Gleichungen:

$$0 = C + \frac{1}{1}A_0x_0 + \frac{1}{2}A_1x_0^2 + \frac{1}{3}A_2x_0^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}A_nx_0^{n+1},$$

$$0 = \mathfrak{C} + \frac{1}{1}A_0x_n + \frac{1}{2}A_1x_n^2 + \frac{1}{3}A_2x_n^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}A_nx_n^{n+1}.$$

Wegen der aus dem Obigen bekannten Bedeutung der Grössen Y_n und $\mathfrak{Y}_n$ ist aber ferner:

$$Y_n = C + \frac{1}{1}A_0x_n + \frac{1}{2}A_1x_n^2 + \frac{1}{3}A_2x_n^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}A_nx^{n+1},$$

$$\mathfrak{Y}_n = \mathfrak{C} + \frac{1}{1}A_0x_0 + \frac{1}{2}A_1x_0^2 + \frac{1}{3}A_2x_0^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}A_nx_0^{n+1}.$$

Also ist nach den zwei vorhergehenden Gleichungen offenbar

$$Y_n = C - \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{Y}_n = \mathfrak{C} - C;$$

woraus sich die Gleichung

$$Y_n + \mathfrak{Y}_n = 0$$

ergiebt.

Bezeichnen wir die Differenzen für die Reihe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$$

wie gewöhnlich durch Δ, die Differenzen für die Reihe

$$y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3}, \ldots y_0$$

dagegen durch ∇; so haben wir nach dem vorhergehenden Paragraphen offenbar die beiden folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
Y_n = \Delta x_0 \Big\{ y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} & \\
+ (y_n - y_0) \int_0^1 (u)_1 \partial u & \\
+ \Delta y_{n-1} \int_0^1 (u)_2 \partial u - \Delta y_0 \int_0^1 (u)_2 \partial u & \\
+ \Delta^2 y_{n-2} \int_0^1 (u+1)_3 \partial u - \Delta^2 y_0 \int_0^1 (u)_3 \partial u & \\
+ \Delta^3 y_{n-3} \int_0^1 (u+2)_4 \partial u - \Delta^3 y_0 \int_0^1 (u)_4 \partial u & \\
+ \Delta^4 y_{n-4} \int_0^1 (u+3)_5 \partial u - \Delta^4 y_0 \int_0^1 (u)_5 \partial u & \\
\text{u. s. w.} & \\
+ \Delta^n y_0 \int_0^1 (u+n-1)_{n+1} \partial u - \Delta^n y_0 \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u & \Big\}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Y}_n = -\Delta x_0 \Big\{ y_n + y_{n-1} + y_{n-2} + y_{n-3} + \dots + y_1 & \\
+ (y_0 - y_n) \int_0^1 (u)_1 \partial u & \\
+ \nabla y_1 \int_0^1 (u)_2 \partial u - \nabla y_n \int_0^1 (u)_2 \partial u & \\
+ \nabla^2 y_2 \int_0^1 (u+1)_3 \partial u - \nabla^2 y_n \int_0^1 (u)_3 \partial u & \\
+ \nabla^3 y_3 \int_0^1 (u+2)_4 \partial u - \nabla^3 y_n \int_0^1 (u)_4 \partial u & \\
+ \nabla^4 y_4 \int_0^1 (u+3)_5 \partial u - \nabla^4 y_n \int_0^1 (u)_5 \partial u & \\
\text{u. s. w.} & \\
+ \nabla^n y_n \int_0^1 (u+n-1)_{n+1} \partial u - \nabla^n y_n \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u & \Big\},
\end{aligned}
$$

indem man sich auf der Stelle überzeugen wird, dass in letzterem Falle $-\Delta x_0$ statt $+\Delta x_0$ im ersteren Falle gesetzt werden muss.

Aus einer Vergleichung der beiden folgenden Schemata zur Berechnung der Differenzen:

$$\begin{array}{lllll}
y_0 & & & & \\
 & y_1-y_0 & & & \\
y_1 & & y_2-2y_1+y_0 & & \\
 & y_2-y_1 & & y_3-3y_2+3y_1-y_0 & \\
y_2 & & y_3-2y_2+y_1 & & \text{u. s. w.} \\
 & y_3-y_2 & & y_4-3y_3+3y_2-y_1 & \\
y_3 & & y_4-2y_3+y_2 & \vdots & \\
 & y_4-y_3 & \vdots & \vdots & \\
y_4 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
y_{n-4} & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & y_{n-3}-y_{n-4} & \vdots & \vdots & \\
y_{n-3} & & y_{n-2}-2y_{n-3}+y_{n-4} & \vdots & \\
 & y_{n-2}-y_{n-3} & & y_{n-1}-3y_{n-2}+3y_{n-3}-y_{n-4} & \\
y_{n-2} & & y_{n-1}-2y_{n-2}+y_{n-3} & & \text{u. s. w.} \\
 & y_{n-1}-y_{n-2} & & y_n-3y_{n-1}+3y_{n-2}-y_{n-3} & \\
y_{n-1} & & y_n-2y_{n-1}+y_{n-2} & & \\
 & y_n-y_{n-1} & & & \\
y_n & & & &
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{lllll}
y_n & & & & \\
 & y_{n-1}-y_n & & & \\
y_{n-1} & & y_{n-2}-2y_{n-1}+y_n & & \\
 & y_{n-2}-y_{n-1} & & y_{n-3}-3y_{n-2}+3y_{n-1}-y_n & \\
y_{n-2} & & y_{n-3}-2y_{n-2}+y_{n-1} & & \text{u. s. w.} \\
 & y_{n-3}-y_{n-2} & & y_{n-4}-3y_{n-3}+3y_{n-2}-y_{n-1} & \\
y_{n-3} & & y_{n-4}-2y_{n-3}+y_{n-2} & \vdots & \\
 & y_{n-4}-y_{n-3} & \vdots & \vdots & \\
y_{n-4} & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
y_4 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & y_3-y_4 & \vdots & \vdots & \\
y_3 & & y_2-2y_3+y_4 & \vdots & \\
 & y_2-y_3 & & y_1-3y_2+3y_3-y_4 & \\
y_2 & & y_1-2y_2+y_3 & & \text{u. s. w.} \\
 & y_1-y_2 & & y_0-3y_1+3y_2-y_3 & \\
y_1 & & y_0-2y_1+y_2 & & \\
 & y_0-y_1 & & & \\
y_0 & & & &
\end{array}$$

mit einander ergeben sich aber unmittelbar die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{ll}
\nabla y_1 = -\Delta y_0, & \nabla y_n = -\Delta y_{n-1}; \\
\nabla^2 y_2 = +\Delta^2 y_0, & \nabla^2 y_n = +\Delta^2 y_{n-2}; \\
\nabla^3 y_3 = -\Delta^3 y_0, & \nabla^3 y_n = -\Delta^3 y_{n-3}; \\
\text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \\
\nabla^n y_n = (-1)^n \Delta^n y_0, & \nabla^n y_n = (-1)^n \Delta^n y_0.
\end{array}$$

Also ist nach dem Obigen:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Y}_n = -\Delta x_0 \{ y_n + y_{n-1} + y_{n-2} + y_{n-3} + \ldots + y_1 \\ + (y_0 - y_n)\int_0^1 (u)_1 \partial u \\ + \Delta y_{n-1}\int_0^1 (u)_2 \partial u - \Delta y_0 \int_0^1 (u)_2 \partial u \\ - \Delta^2 y_{n-2}\int_0^1 (u)_3 \partial u + \Delta^2 y_0 \int_0^1 (u+1)_3 \partial u \\ + \Delta^3 y_{n-3}\int_0^1 (u)_4 \partial u - \Delta^3 y_0 \int_0^1 (u+2)_4 \partial u \\ - \Delta^4 y_{n-4}\int_0^1 (u)_5 \partial u + \Delta^4 y_0 \int_0^1 (u+3)_5 \partial u \\ \text{u. s. w.} \\ -(-1)^n \Delta^n y_0 \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u + (-1)^n \Delta^n y_0 \int_0^1 (u+n-1)_{n+1} \partial u\end{aligned}\right\}.$$

Ueberlegt man jetzt, dass

$$\int_0^1 (u)_1 \, \partial u = \frac{1}{2}$$

und nach dem Obigen

$$Y_n + \mathfrak{Y}_n = 0$$

ist, so erhält man durch Addition der beiden obigen Ausdrücke von Y_n und $\mathfrak{Y}_n$ die folgenden Gleichungen:

Für ein gerades n ist:

$$\left.\begin{aligned}0 = \Delta x_0 \{ & (\Delta y_{n-1} + \Delta y_0)\{\int_0^1 (u)_2 \partial u - \int_0^1 (u)_2 \partial u\} \\ & +(\Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_0)\{\int_0^1 (u+1)_3 \partial u + \int_0^1 (u)_3 \partial u\} \\ & +(\Delta^3 y_{n-3} + \Delta^3 y_0)\{\int_0^1 (u+2)_4 \partial u - \int_0^1 (u)_4 \partial u\} \\ & +(\Delta^4 y_{n-4} - \Delta^4 y_0)\{\int_0^1 (u+3)_5 \partial u + \int_0^1 (u)_5 \partial u\} \\ & +(\Delta^5 y_{n-5} + \Delta^5 y_0)\{\int_0^1 (u+4)_6 \partial u - \int_0^1 (u)_6 \partial u\} \\ & \text{u. s. w.} \\ & +(\Delta^{n-1} y_1 + \Delta^{n-1} y_0)\{\int_0^1 (u+n-2)_n \partial u - \int_0^1 (u)_n \partial u\} \\ & +(\Delta^n y_0 - \Delta^n y_0)\{\int_0^1 (u+n-1)_{n+1} \partial u - \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u\}\end{aligned}\right\}.$$

Für ein ungerades n ist:

$$
0=\Delta x_0 \left\{
\begin{aligned}
&(\Delta y_{n-1}+\Delta y_0)\Big\{\int_0^1 (u)_2\partial u-\int_0^1 (u)_2\partial u\Big\}\\
&+(\Delta^2 y_{n-2}-\Delta^2 y_0)\Big\{\int_0^1 (u+1)_3\partial u+\int_0^1 (u)_3\partial u\Big\}\\
&+(\Delta^3 y_{n-3}+\Delta^3 y_0)\Big\{\int_0^1 (u+2)_4\partial u-\int_0^1 (u)_4\partial u\Big\}\\
&+(\Delta^4 y_{n-4}-\Delta^4 y_0)\Big\{\int_0^1 (u+3)_5\partial u+\int_0^1 (u)_5\partial u\Big\}\\
&+(\Delta^5 y_{n-5}+\Delta^5 y_0)\Big\{\int_0^1 (u+4)_6\partial u-\int_0^1 (u)_6\partial u\Big\}\\
&\qquad\qquad\text{u. s. w.}\\
&+(\Delta^{n-1} y_1-\Delta^{n-1} y_0)\Big\{\int_0^1 (u+n-2)_n\partial u+\int_0^1 (u)_n\partial u\Big\}\\
&+(\Delta^n y_0+\Delta^n y_0)\Big\{\int_0^1 (u+n-1)_{n+1}\partial u-\int_0^1 (u)_{n+1}\partial u\Big\}
\end{aligned}
\right\}.
$$

Weil nun aber diese Gleichungen ganz unabhängig von besonderen Werthen von Δx_0 und

$$\Delta y_0,\ \Delta^2 y_0,\ \Delta^3 y_0,\ \Delta^4 y_0,\ldots \Delta^n y_0;$$

$$\Delta y_{n-1},\ \Delta^2 y_{n-2},\ \Delta^3 y_{n-3},\ \Delta^4 y_{n-4},\ldots \Delta^n y_0$$

bestehen, vielmehr immer ihre Richtigkeit behalten, was auch diese Grössen für Werthe erhalten mögen, und weil ferner auch in den obigen Gleichungen n beliebig gross werden kann, so muss offenbar

$$\int_0^1 (u)_2\partial u-\int_0^1 (u)_2\partial u=0,$$

$$\int_0^1 (u+1)_3\partial u+\int_0^1 (u)_3\partial u=0,$$

$$\int_0^1 (u+2)_4\partial u-\int_0^1 (u)_4\partial u=0,$$

$$\int_0^1 (u+3)_5\partial u+\int_0^1 (u)_5\partial u=0,$$

$$\int_0^1 (u+4)_6\partial u-\int_0^1 (u)_6\partial u=0,$$

u. s. w. u. s. w.

oder

$$\int_0^1 (u)_2 \partial u = +\int_0^1 (u)_2 \partial u,$$

$$\int_0^1 (u+1)_3 \partial u = -\int_0^1 (u)_3 \partial u,$$

$$\int_0^1 (u+2)_4 \partial u = +\int_0^1 (u)_4 \partial u,$$

$$\int_0^1 (u+3)_5 \partial u = -\int_0^1 (u)_5 \partial u,$$

$$\int_0^1 (u+4)_6 \partial u = +\int_0^1 (u)_6 \partial u,$$

u. s. w. u. s. w.

folglich für jedes positive, ganze k

$$\int_0^1 (u+k)_{k+2} \partial u = (-1)^k \int_0^1 (u)_{k+2} \partial u$$

sein.

Hiernach kann man nun, indem man zugleich wieder bemerkt, dass

$$\int_0^1 (u)_1 \partial u = \frac{1}{2}$$

ist, die oben für Y_n gefundene Formel allgemein auch auf folgende Art ausdrücken.

Für ein gerades n ist:

$$Y_n = \Delta x_0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \\ \quad + (\Delta y_{n-1} - \Delta y_0) \int_0^1 (u)_2 \partial u \\ \quad - (\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0) \int_0^1 (u)_3 \partial u \\ \quad + (\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0) \int_0^1 (u)_4 \partial u \\ \quad - (\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0) \int_0^1 (u)_5 \partial u \\ \quad \text{u. s. w.} \\ \quad + (\Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0) \int_0^1 (u)_n \partial u \\ \quad - (\Delta^n y_0 + \Delta^n y_0) \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u \end{array} \right\}.$$

Für ein ungerades n ist:

$$Y_n = \Delta x_0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n \\ + (\Delta y_{n-1} - \Delta y_0)\int_0^1 (u)_2 \partial u \\ - (\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0)\int_0^1 (u)_3 \partial u \\ + (\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0)\int_0^1 (u)_4 \partial u \\ - (\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0)\int_0^1 (u)_5 \partial u \\ \text{u. s. w.} \\ - (\Delta^{n-1} y_1 + \Delta^{n-1} y_0)\int_0^1 (u)_n \partial u \\ + (\Delta^n y_0 - \Delta^n y_0)\int_0^1 (u)_{n+1} \partial u. \end{array} \right\}$$

Ich gestehe, dass es mir wünschenswerth scheint, noch einen andern Beweis der Gleichung

$$\int_0^1 (u+k)_{k+2}\partial u = (-1)^k \int_0^1 (u)_{k+2}\partial u$$

zu besitzen, und werde vielleicht späterhin auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Setzt man $u+k=v$, also $\partial u = \partial v$, so ist für $u=0$, $u=1$ respective $v=k$, $v=k+1$; also ist

$$\int_k^{k+1} (v)_{k+2}\partial v = (-1)^k \int_0^1 (u)_{k+2}\partial u,$$

oder, wenn man, was hier offenbar verstattet ist, für v wieder u schreibt:

$$\int_k^{k+1} (u)_{k+2}\partial u = (-1)^k \int_0^1 (u)_{k+2}\partial u.$$

XXIV.

Der Winter von 1853 in Berlin, im Vergleich mit den 16 vorhergehenden Wintern, besprochen

von

Herrn Professor Dr. Wolfers in Berlin.

In zwei Aufsätzen, welche in dieser Zeitschrift abgedruckt sind, hatte ich mir die Aufgabe gestellt, die einzelnen Winter in Berlin nach der Vertheilung der hohen und niedern Temperatur mit einander zu vergleichen und zu untersuchen, ob in diesem Sinne sich Aehnlichkeiten zwischen ihnen ergeben werden. In dem zweiten Aufsatze, welcher dem 18. Bande einverleibt ist, hat sich unter andern Resultaten das folgende ergeben: In den strengen Wintern pflegen wenige, aber zusammenhängende Mengen niederer Temperatur, in den nicht strengen viele, aber kleinere Mengen vorzukommen; in jenen finden demnach wenige, in diesen viele Uebergänge durch Null statt. Es ist die Aufgabe, aus dem ersten Theile eines Winters eine Aehnlichkeit mit dem entsprechenden Theile eines frühern Winters, in Bezug auf die vorhin angeführte Eigenschaft, zu entdecken, um daraus auf seinen weitern Verlauf schliessen zu können. Wie weit mir diess in dem verflossenen Winter gelungen ist, will ich hier darstellen und lasse zunächst eine Zusammenstellung seines Verlaufes vom 1. November bis zum 31. März, der Tafel A. in meinem Aufsatze entsprechend, folgen.

	Summe der Temperatur:			
	+	Tage	—	Tage
	70,6	12	1,1	2
	158,9	38	3,5	2
	78,6	25	0,1	1
	24,3	13	2,8	3
	1,6	6	68,5	23
	8,3	8	53,6	16
	0,5	1		
Summe	342,8	103	129,6	47

Bis Ende December fand eine auffallende Aehnlichkeit mit dem Anfange des Winters von 1842 statt, während nämlich in diesem folgende Werthe vorkamen:

	+ 75,1	18	—0,8	1
	130,4	42		
Summe	+ 205,5	60	—0,8	1

beträgt in diesem Winter die Summe der ersten drei Abschnitte

+ 229,5	50	—1,1	2.

Diese Uebereinstimmung, welche sich natürlich in der Curve gleich deutlich herausstellt, brachte mich bereits in der Mitte des Decembers auf die Vermuthung, dass dieser Winter dem von 1842 ähnlich werden, und ich sprach mich dahin namentlich aus, dass wahrscheinlich eine mehrere Wochen anhaltende Kälteperiode eintreten würde. Meine Vermuthung schien lange Zeit sich nicht bewahrheiten zu wollen. Während im Winter von 1842 auf die angeführten 61 Tage sogleich die 27 Tage ununterbrochen anhaltende Kälteperiode eintrat, hatten wir in dem letzten Winter nach den angeführten 52 Tagen nur 2 Tage Frost, worauf noch 39 Tage vergingen, unter denen nur an einem einzigen Tage die mittlere Temperatur ganz wenig unter Null sank, ehe es sich zum anhaltenden Frost hinneigte. Auf diese Weise war der ganze Januar in diesem Winter wärmer, als in jedem der 16 vorhergehenden Winter. Gerade aber diese anhaltende hohe Temperatur, welche nur am 19. Januar durch das bereits erwähnte verschwindend kleine Minus unterbrochen wurde, das Ausbleiben aller, nach meinen frühern Untersuchungen einem nicht strengen Winter eigenthümlichen, häufigen Temperaturwechsel liessen mich in meiner Vermuthung, dass uns noch anhaltende Kälte bevorstehe, nicht irre werden. Die obigen, der Tafel A. für 1853 entsprechenden Werthe zeigen, wie weit ich richtig vermuthet hatte.

In der Tafel B. meines Aufsatzes waren die Winter nach der, den 150 Tagen vom 1. November bis 31. März zukommenden Summe der Temperatur geordnet, und in Betreff dieser Tafel will ich hier nur bemerken, dass der Winter von 1853 darin mit den Werthen

Ueberschuss der Temperatur:	im Mittel für 1 Tag:
+ 213,2	+ 1,42

seinen Platz zwischen den Wintern von 1844 und 1843 findet.

Die Tafel C. hingegen erlaube ich mir hier, mit Hinzufügung der beiden Winter von 1852 und 1853, wieder darzustellen.

Tafel C.

Winter.	Summe der Temperatur. +	Tage.	—	Tage.	Ueberschuss der Temperatur.	Dauer in Tagen.	im Mittel für 1 Tag.
1852	217,2	89	46,0	42	+171,2	131	+1,31
1843	240,1	107	64,4	36	+175,7	143	+1,23
1853	271,7	90	129,6	47	+142,1	137	+1,11
1842	248,9	82	122,9	43	+126,0	125	+1,01
1851	165,3	68	69,9	47	+ 95,4	115	+0,83
1837	243,2	86	138,6	52	+104,6	138	+0,76
1840	293,6	99	177,7	56	+115,9	155	+0,75
1846	96,3	46	55,7	23	+ 40,6	69	+0,59
1849	187,3	59	159,6	37	+ 27,7	96	+0,29
1839	163,9	76	132,5	58	+ 31,4	134	+0,23
1844	116,7	58	93,2	45	+ 23,5	104	+0,23
1850	185,2	54	324,2	88	—139,0	142	—0,98
1847	86,9	39	265,5	77	—178,6	116	—1,54
1848	83,7	27	293,9	57	—210,2	84	—2,50
1838	49,1	42	382,1	69	—333,0	111	—3,00
1845	14,6	14	394,8	100	—380,2	114	—3,34
1841	31,2	17	352,1	78	—320,9	95	—3,38

Nach dieser Tafel erscheint der letzte Winter, im Ganzen betrachtet, dem von 1842 nahe ähnlich und mit ihm übereinstimmend. Wie damals trat auch jetzt nach anhaltender, durch wenige Tage unterbrochener hoher Temperatur eine anhaltende niedrige Temperatur ein; im letzten Winter aber um etwa einen Monat später als in dem von 1842.

In meinem vorigen Aufsatze war ich bei der Discussion stehen geblieben, deren Resultat in der Tafel C. durch Zahlen dargestellt ist. Schon damals habe ich bemerkt, dass diese Art der Discussion kein durchgehends befriedigendes Resultat liefere, jetzt erlaube ich mir, die Winter noch nach einer andern Weise zu ordnen, wozu ich die Data der Tafel C. entnehme. Unbedingt wird man nämlich zugeben, dass ein Winter um so strenger ist, je grösser die in der vierten Rubrik enthaltene Summe der negativen Temperatur ist; gibt man ausserdem zu, dass ein Winter um so strenger ist, je grösser die in der fünften Rubrik enthaltene Anzahl der Frosttage ist, so werden die Winter überhaupt, ihrer Strenge nach im direkten zusammengesetzten Verhältniss dieser beiden Zahlen stehen. Indem ich daher der Tafel C. diese Werthe entnehme und für den Winter, welcher der am wenigsten strenge, die Verhältnisszahl 1,00000 annahm, erhielt ich die folgende Darstellung der einzelnen 17 Winter:

Tafel D.

Winter.	Summe der negativen Temperatur.	Zahl der Frosttage.	Zusammengesetzte Verhältnisszahl der Strenge.
1846	55,7	23	1,0000
1852	46,0	42	1,5081
1843	64,4	36	1,8097
1851	69,9	47	2,5644
1844	93,2	45	3,2737
1842	122,9	43	4,1345
1849	159,6	37	4,6093
1853	129,6	47	4,7457
1837	138,6	52	5,6256
1839	132,5	58	6,0001
1840	177,7	56	7,7677
1848	293,9	57	13,0760
1847	265,5	77	15,9576
1838	382,1	69	20,5895
1841	352,1	78	21,4375
1850	324,2	88	22,2690
1845	394,8	100	30,8171

Zur Vergleichung dieser Tafel mit der Tafel C. füge ich einige Bemerkungen hinzu. Der in jeder Beziehung sehr milde Winter von 1846 nimmt in D. die ihm gebührende oberste, in C. erst die achte Stelle ein. Die drei durch anhaltende Kälteperioden einander ähnlichen Winter von 1842, 1849 und 1853 folgen in D. unmittelbar auf einander, in C. waren sie getrennt. Die sechs strengsten Winter stehen in beiden Tafeln beisammen, nur ist die Reihenfolge derselben eine verschiedene.

Alle meine bisherigen Untersuchungen bestanden darin, unter den einzelnen Wintern nach einem bestimmten Grundsatze Aehnlichkeiten aufzusuchen und die Aufgabe zu stellen, ob man eine solche Aehnlichkeit bereits im ersten Theile einer Curve entdecken könne. In meinem vorigen Aufsatze habe ich auch bereits Regeln aufgestellt, welche ich aus den frühern Wintern für strenge und nicht strenge entnommen hatte; wenn ich aber damals schon ausdrücklich bemerkte, dass der Winter von 1842 eine Ausnahme von jener aufgestellten Regel bilde, so darf man sich nicht wundern, dass auch der letzte, jenem ähnliche Winter sich jener Regel nicht unterworfen hat. Wenn es mir aber gelungen ist, diese Aehnlichkeit frühzeitig und zwar nach dem frühern Grundsatze zu entdecken, so steht zu hoffen, dass sich eine solche Aehnlichkeit in der Folge desto leichter auffinden lassen werde, je mehr bereits untersuchte Winter zur Betrachtung vorliegen. Während früher eine Regel für strenge und eine für nicht strenge Winter aufgestellt worden ist, wird man künftig vielleicht in den Stand gesetzt werden, die Winter in drei Klassen zu zerlegen und für diese drei Regeln aufzustellen.

XXV.

Démonstration de quelques théorèmes sur la courbure des surfaces.

Par
Monsieur A. W. Alings,
docteur-ès-sciences à Groningue.

Parmi les théorèmes qui, dans les dernières années, ont pris un développement remarquable, sans doute il convient de placer ceux, qui se rapportent à la somme des courbures ou des rayons de courbure de certaines sections normales en un point d'une surface. Pour s'en convaincre il suffira de rapprocher des communications de MM. Babinet, Breton et Chasles [1]) l'énoncé beaucoup moins général, que Mlle. Sophie Germain [2]) même avait laissé aux théorèmes de M. Ch. Dupin [3]). Cependant ces auteurs n'ont pas publié, que je sache, les démonstrations de leurs propositions; dont même je n'ai rencontré nullepart d'exposition, si ce n'est celle, qui a été fournie par M. Dienger [4]), mais qui ne se rapporte qu'au cas particulier considéré par M. Babinet. C'est ce qui m'a inspiré le désir d'y suppléer en vérifiant aussi les cas plus généraux renfermés dans les théorèmes de MM. Breton et Chasles. Dans ce qui va suivre j'offre au lecteur les résultats de mes recherches, à peu près dans la même forme, qui leur a été donnée dans ma dissertation sur la courbure des surfaces [5]). La aussi j'ai commencé à chercher une formule pour la sommation de puissances homologues de cosinus d'angles équidifférents; formule, que je n'avais vue nullepart, et qui me parut nécessaire, pour atteindre le but que je me fus proposé.

---

[1]) Comptes rendus T. XXV. p. 441. T. XXVI. p. 494, 531 et 577.

[2]) Crelle, Journ. Bd. VII. p. 1. Bulletin des scienc. mathem., Janv. 1831, p. 17.

[3]) Développements de géom., p. 102 et 108.

[4]) Grunert, Archiv. Thl. XI. p. 328. Thl. XIX. p. 317.

[5]) Dissertatio de superficierum curvatura. Gron. Hoitsema; Leer, Prätorius & Seyde.

I.

A partir d'un point donné, situé dans un plan quelconque, traçons m droites, qui divisent le plan autour de ce point en m angles égaux; et nommons ϑ_1 l'angle qu'une quelconque de ces droites forme avec un axe mené arbitrairement dans le même plan. Les angles qu'il y a entre les autres droites et cet axe seront alors

$$\vartheta_1+\frac{2\pi}{m},\ \vartheta_1+2\frac{2\pi}{m},\ \ldots,\ \vartheta_1+(m-1)\frac{2\pi}{m},$$

que nous désignerons, pour abréger, par $\vartheta_2, \vartheta_3, \ldots, \vartheta_m$. Elevons les cosinus de tous ces angles à une même puissance paire, représentée par $2p$; et de toutes ces puissances cherchons la somme

$$\Sigma=\cos^{2p}\vartheta_1+\cos^{2p}\vartheta_2+\ldots+\cos^{2p}\vartheta_m.$$

En développant la puissance $\cos^{2p}\vartheta_1$ en une série, dont les termes contiennent les cosinus de multiples de l'angle ϑ_1, on aura

$$\cos^{2p}\vartheta_1=\frac{1}{2^{2p-1}}\left\{\begin{array}{l}\cos 2p\vartheta_1+\frac{2p}{1}\cos 2(p-1)\vartheta_1+\ldots\\ \ldots+\frac{2p(2p-1)\ldots(p+2)}{1.2\ldots(p-1)}\cos 2\vartheta_1\end{array}\right\}+\frac{1}{2^{2p}}\frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2\ldots p};$$

et si l'on agit de la même manière à l'égard des autres puissances, on parviendra facilement à la somme de toutes ces expressions, qui sera

$$(1)\quad \Sigma=\frac{1}{2^{2p-1}}\left\{\begin{array}{l}[\cos 2p\vartheta_1+\cos 2p\vartheta_2+\ldots+\cos 2p\vartheta_{m-1}+\cos 2p\vartheta_m]\\ +\frac{2p}{1}[\cos 2(p-1)\vartheta_1+\ldots+\cos 2(p-1)\vartheta_m]\\ +\frac{2p(2p-1)}{1.2}[\cos 2(p-2)\vartheta_1+\ldots+\cos 2(p-2)\vartheta_m]\\ +\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ +\frac{2p(2p-1)\ldots(p+2)}{1.2\ldots(p-1)}[\cos 2\vartheta_1+\ldots+\cos 2\vartheta_m]\end{array}\right\}+\frac{m}{2^{2p}}\frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2\ldots p}.$$

Maintenant, pour sommer la série

$$(2)\qquad \cos 2p\vartheta_1+\cos 2p\vartheta_2+\ldots+\cos 2p\vartheta_{m-1}+\cos 2p\vartheta_m,$$

employons une formule fournie par le calcul des différences finies

$$S.\cos(a+bx)=\frac{\sin(a+bx+\tfrac{1}{2}b\Delta x)-\sin(a-\tfrac{1}{2}b\Delta x)}{2\sin\tfrac{1}{2}b\Delta x}$$
$$=\frac{\sin\tfrac{1}{2}(bx+b\Delta x).\cos\tfrac{1}{2}(bx+2a)}{\sin\tfrac{1}{2}b\Delta x}$$

à l'aide de laquelle la somme des termes de cette série (2) revient à

$$(3)\qquad S=\frac{\sin 2p\pi.\cos 2(p\pi-\frac{p\pi}{m}+p\vartheta)}{\sin\frac{2p}{m}\pi}.$$

Parceque p représente un nombre entier, le numérateur de cette fraction est toujours nul; le dénominateur au contraire ne disparaît que lorsque $2p$ est égal à m ou à un multiple de m. Dans ces cas d'exception on parviendra à la valeur de la fraction $\frac{0}{0}$ par la différentiation, au moyen de laquelle on trouvera $m.\cos 2p\vartheta$; ce qu'il faudrait nécessairement obtenir, puisqu'alors chaque terme de la série (2) sera égal à $\cos 2p\vartheta$. Mais si $2p$ n'est pas égal à m ou à un multiple de m, la somme de la série (2) est toujours nulle, et par conséquent ne dépend point de la valeur de l'angle ϑ_1.

En examinant de la même manière les autres séries qui se trouvent en (1), on reconnaîtra facilement qu'elles s'évanouissent toutes, à moins qu'un ou plusieurs des nombres $2(p-1)$, $2(p-2)$,... ...., 4, 2 ne soient égaux à m ou à quelque multiple de m. Si nous excluons ces relations entre p et m, nous trouvons immédiatement

$$(4)\qquad \Sigma=\frac{m}{2^{2p}}\,\frac{2p(2p-1)(2p-2)\dots(p+1)}{1.2.3\dots p}.$$

II.

Concevons que par la normale à une surface quelconque soient menés m plans, dont chacun à partir de cette normale ne s'étend que dans un sens, et qui font entre eux des angles dièdres égaux; appelons ϑ_1 l'angle qu'un quelconque de ces plans forme avec le plan normal contenant la section principale dont la courbure est un maximum; et désignons les angles

$$\vartheta_1+\frac{2\pi}{m},\ \vartheta_1+2\frac{2\pi}{m},\dots,\ \vartheta_1+(m-1)\frac{2\pi}{m},$$

qui déterminent la position des autres plans, par ϑ_2, ϑ_3, ... ϑ_m, de même que nous l'avons fait en I. Si nous nommons les rayons de courbure des sections normales, que ces m plans contiennent [ou plutôt dont ces plans ne contiennent que les moitiés], respectivement par ϱ_1, ϱ_2,...., ϱ_m, et si nous représentons par n un nombre entier, la formule connue

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\cos^2\vartheta, \tag{5}$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux, nous conduit à l'équation

$$\frac{1}{\varrho_1^n} + \frac{1}{\varrho_2^n} + \dots + \frac{1}{\varrho_m^n} = \left[\frac{1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\cos^2\vartheta_1\right]^n + \dots$$
$$\dots + \left[\frac{1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\cos^2\vartheta_m\right]^n;$$

que le développement du second membre ramène à la forme suivante:

$$\frac{1}{\varrho_1^n} + \dots + \frac{1}{\varrho_m^n} = \frac{m}{R_2^n} + \left\{\begin{array}{l} + \frac{n}{1}\frac{1}{R_2^{n-1}}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)[\cos^2\vartheta_1 + \dots + \cos^2\vartheta_m] \\ + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{R_2^{n-2}}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2[\cos^4\vartheta_1 + \dots + \cos^4\vartheta_m] \\ + \dots \\ + \frac{n}{1}\frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{n-1}[\cos^{2(n-1)}\vartheta_1 + \dots + \cos^{2(n-1)}\vartheta_m] \\ + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^n[\cos^{2n}\vartheta_1 + \dots + \cos^{2n}\vartheta_m] \end{array}\right\}.$$

Du résultat obtenu en I. on conclura, que la somme de toutes les séries contenues dans le second membre de cette équation ne dépend nullement de l'angle ϑ_1, excepté le cas où un ou plusieurs des nombres 2, 4,...., $2(n-1)$, $2n$ sont égaux à m ou à un multiple de m. Par conséquent, pour que cette somme ne dépende point de l'angle ϑ_1, il faut absolument que n soit inférieur à m, parceque l'hypothèse $n > m$ rendrait toujours un des nombres 2, 4,...., $2n$ le double de m; tandisque la supposition $n = m$ conduirait au même résultat. Or, la condition $n < m$ ne suffit que lorsque m est un nombre impair; si m est pair, il faut prendre

$n < \frac{1}{2}m$, afin qu'aucun des nombres 2, 4, ..., $2n$ ne soit égal à m. Quand ces conditions sont remplies, on parvient aux sommes des différentes séries de la dernière équation en attribuant successivement à p dans la formule (4) les valeurs 1, 2, 3,...., $n-1$, n; ce qui donne

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{\varrho_1^n}+\ldots+\frac{1}{\varrho_m^n}\right)=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{R_2^n}+\frac{n}{1.2^2}\frac{2}{1}\frac{1}{R_2^{n-1}}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{n(n-1)}{1.2.2^4}\frac{4.3}{1.2}\frac{1}{R_2^{n-2}}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)^2+\ldots \\ \ldots+\frac{n}{1.2^{2(n-1)}}\frac{(2n-2)(2n-3)\ldots n}{1.2\ldots(n-1)}\frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)^{n-1}+\frac{1}{2^{2n}}\frac{2n\ldots(n+1)}{1.2\ldots n}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)^n\end{array}\right\},$$

ou bien, après le développement des binomes,

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{\varrho_1^n}+\ldots+\frac{1}{\varrho_m^n}\right)=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{R_2^n}\left\{1-\frac{n}{1.2^2}\frac{2}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2.2^4}\frac{4.3}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.2^6}\frac{6.5.4}{1.2.3}+\text{etc.}\right\} \\ +\frac{n}{1}\frac{1}{R_2^{n-1}R_1}\left\{\frac{1}{2^2}\frac{2}{1}-\frac{n-1}{1.2^4}\frac{4.3}{1.2}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.2^6}\frac{6.5.4}{1.2.3}-\text{etc.}\right\} \\ +\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{R_2^{n-2}R_1^2}\left\{\frac{1}{2^4}\frac{4.3}{1.2}-\frac{n-2}{1.2^6}\frac{6.5.4}{1.2.3}+\ldots\text{etc.}\right\} \\ \qquad\qquad + \text{etc.}\end{array}\right\}.$$

Ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que cette équation ne contient ni ϑ ni m dans le second membre, lequel est toujours symétrique par rapport à R_2 et R_1.

Comme la plus petite valeur qu'on puisse attribuer à n est l'unité, le nombre m ne peut être inférieur à 3, sans qu'il y ait $2n=m$. La substitution de cette valeur $n=1$ réduit la dernière équation à

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\ldots+\frac{1}{\rho_m}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right).$$

Ce que nous venons de démontrer peut évidemment s'énoncer ainsi:

Si, à partir de la normale en un point d'une surface quelconque, on mène m plans qui divisent l'espace autour de cette normale en m angles dièdres égaux, les puissances entières n des courbures des sections normales [ou plutôt des semi-sections normales] contenues dans ces plans fourniront une somme, dont la partie $\frac{1}{m}$ ne dépend nullement du nombre de ces plans, ni de leur position par rapport aux sections principales; pourvu qu'il y ait $n<m$, si m est un nombre impair; et $n<\frac{1}{2}m$, si m est un nombre pair.

Si l'on a $n=1$, c'est à dire si ces m courbures ne sont prises qu'à la première puissance, la partie $\frac{1}{m}$ de leur somme sera égale à la moitié de la somme des courbures principales. Dans ce cas le plus petit nombre de plans qu'il soit permis d'employer, est 3.

III.

Supposons qu'on ait construit l'indicatrice appartenant à un point où la surface a ses deux courbures dirigées dans le même sens; et concevons qu'à partir du centre de cette ellipse on ait tracé m rayons vecteurs de manière qu'ils divisent l'aire de cette courbe en m secteurs égaux. Appelons ces rayons vecteurs ζ_1, $\zeta_2,\ldots\zeta_m$; et désignons par ρ_1, $\rho_2,\ldots,$ ρ_m les rayons de courbure des sections normales, dont ces rayons vecteurs sont respectivement les tangentes. Si les rayons de courbure principaux de la surface au point que nous considérons sont répresentés par R_1 et R_2, l'aire de l'ellipse indicatrice sera $\pi\sqrt{R_1R_2}$, et chaque secteur par conséquent en contiendra $\frac{\pi}{m}\sqrt{R_1R_2}$. Or, l'aire du secteur situé entre les rayons vecteurs ζ_1 et ζ_2 peut aussi s'exprimer au moyen de l'intégrale

$$\int_{\zeta=\zeta_1}^{\zeta=\zeta_2}\tfrac{1}{2}\zeta^2 d\theta,$$

qui, à cause de la relation $\zeta^2=\varrho$, ne diffère pas de

$$(6)\qquad \int_{\varrho=\varrho_1}^{\varrho=\varrho_2} \tfrac{1}{2}\varrho d\vartheta;$$

où ϑ représente l'angle qui détermine la position des rayons vecteurs $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ par rapport à l'axe polaire, que nous supposerons ici tangente à la section principale dont le rayon de courbure est R_1. En vertu de cette définition il est permis de se servir de l'équation (5), qu'on peut aussi mettre sous la forme

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\cos 2\vartheta+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right\},$$

et qui donne

$$\vartheta=\tfrac{1}{2}\arccos\left\{\frac{2R_1R_2}{(R_2-R_1)\varrho}-\frac{R_2+R_1}{R_2-R_1}\right\};$$

d'où l'on tire en différentiant

$$d\vartheta=\frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{[-R_1R_2+(R_2+R_1)\varrho-\varrho^2]}}\times\tfrac{1}{2}\sqrt{R_1R_2}.$$

En substituant cette valeur de $d\vartheta$, et en effectuant ensuite l'intégration de (6) entre les limites indiquées, on trouvera une expression de l'aire du secteur énoncé, qui, comparée à la première, fournira l'équation

$$\frac{1}{4}\left\{\arcsin\frac{2\varrho_2-(R_2+R_1)}{R_2-R_1}-\arcsin\frac{2\varrho_1-(R_2+R_1)}{R_2-R_1}\right\}\sqrt{R_1R_2}=\frac{\pi}{m}\sqrt{R_1R_2}$$

ou

$$\arcsin\frac{2\varrho_2-(R_2+R_1)}{R_2-R_1}=\arcsin\frac{2\varrho_1-(R_2+R_1)}{R_2-R_1}+\frac{4\pi}{m}.$$

Puisque les sinus d'arcs égaux sont égaux, on en déduit

$$\frac{2\varrho_2-(R_2+R_1)}{R_2-R_1}=\frac{2\varrho_1-(R_2+R_1)}{R_2-R_1}\cos\frac{4\pi}{m}$$
$$+\sin\frac{4\pi}{m}\times\sqrt{\left\{1-\left[\frac{2\varrho_1-(R_2+R_1)}{R_2-R_1}\right]^2\right\}};$$

d'où il suit

$$\varrho_2=\tfrac{1}{2}(R_2+R_1)+[\varrho_1-\tfrac{1}{2}(R_2+R_1)]\cos 2\frac{2\pi}{m}$$
$$+\sqrt{[-R_1R_2+(R_2+R_1)\varrho_1-\varrho_1^2]}\times\sin 2\frac{2\pi}{m}.$$

Si l'on agit de la même manière à l'égard des secteurs qui se trouvent entre les rayons vecteurs ζ_1 et ζ_3, ζ_1 et ζ_4,....ζ_1 et ζ_m, on parvient aux équations

$$\rho_3=\frac{1}{2}(R_2+R_1)+[\rho_1-\frac{1}{2}(R_2+R_1)]\cos 4\frac{2\pi}{m}$$
$$+\sqrt{[-R_1R_2+(R_2+R_1)\rho_1-\rho_1^2]}\times\sin 4\frac{2\pi}{m},$$

. . . .

$$\rho_m=\frac{1}{2}(R_2+R_1)+[\rho_1-\frac{1}{2}(R_2+R_1)]\cos 2(m-1)\frac{2\pi}{m}$$
$$+\sqrt{[-R_1R_2+(R_2+R_1)\rho_1-\rho_1^2]}\times\sin 2(m-1)\frac{2\pi}{m};$$

tandis qu'on a identiquement

$$\rho_1=\frac{1}{2}(R_2+R_1)+[\rho_1-\frac{1}{2}(R_2+R_1)]\cos 0$$
$$+\sqrt{[-R_1R_2+(R_2+R_1)\rho_1-\rho_1^2]}\times\sin 0.$$

En appliquant la formule (3) pour sommer les cosinus des angles 0, $2\frac{2\pi}{m}$,...., $2(m-1)\frac{2\pi}{m}$, et en observant qu'un procédé analogue à celui de I. conduit à l'équation

$$\sin 2p\theta+\sin 2p(\theta+\frac{2\pi}{m})+....+\sin 2p\{\theta+(m-1)\frac{2\pi}{m}\}$$
$$=\frac{\sin 2p\pi.\sin 2(p\pi-\frac{p\pi}{m}+p\theta)}{\sin\frac{2p}{m}\pi},$$

on obtiendra facilement

$$\frac{1}{m}(\rho_1+....+\rho_m)=\frac{1}{2}(R_2+R_1),$$

à condition qu'il y ait $m>2$.

De ce qui précède il résulte évidemment que, si à partir de la normale en un point d'une surface où les deux courbures sont dirigées dans le même sens, on mène m plans de manière que leurs traces sur le plan tangent en ce point interceptent, deux à deux consécutivement, des secteurs égaux dans l'ellipse indicatrice en ce point, la partie $\frac{1}{m}$ de la somme des rayons de courbure des semi-sections normales faites par ces plans dans la surface ne dépendra nullement du nombre de ces semi-sections, ni de leur position par rapport aux sections principales, pourvu que m soit un nombre entier plus grand que 2. Cette partie $\frac{1}{m}$ de la dite somme sera toujours égale à la moitié de la somme des rayons de courbure principaux.

Quant à la derniere partie de cette discussion, on voit que je ne suis parvenu qu'à vérifier un théorème, qui n'est qu'un cas particulier de celui dont MM. Chasles et Breton ont publié l'énoncé. Pour démontrer ce théorème général, il resterait encore d'élever les expressions de ϱ_1, ϱ_2,...., ϱ_m à quelque puissance n; de développer les produits de la forme $\sin p\vartheta \cos q\vartheta$, qui se trouveraient dans ces puissances, en séries contenant les sinus ou les cosinus de multiples d'un même angle; et de sommer ensuite ces séries à l'aide des formules que nous avons employées ci-dessus. Or, comme ces calculs sont d'une extrême longueur, je n'ai pas osé les entreprendre, et je me suis décidé à publier simplement le résultat de mes recherches tel que je viens de le présenter ici.

XXVI.

Referat über: „Traité de Géométrie supérieure par M. Chasles, membre de l'Institut, Professeur de Géométrie supérieure à la Faculté des Sciences de Paris. (Paris, Bachelier, 1852. S. 603.)"

Von

Herrn Doctor Burghardt,

Lehrer am Gymnasium zu Greifswald.

Erste Abhandlung.

Dieses Werk ist durch frühere Arbeiten des Verf., welche sich an seine geschichtliche Darstellung des Ursprungs und der Entwickelung der geometrischen Methoden (Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne par M. Chasles etc. Bruxelles 1837.) knüpfen, vorbereitet und durch die Ueberzeugung desselben hervorgerufen, der reinen Geometrie in dieser Form der Bearbeitung eine freiere und erfolgreichere Entwickelung ihres Gegenstandes möglich zu machen und damit zugleich das Studium der Geometrie von Neuem zu beleben und deren Einfluss auf wissenschaftliche Geistesbildung allgemeiner zu machen. Der Mangel der üblichen geometrischen Methoden besteht nach der Ansicht des Verfassers darin, dass dieselben nicht ausschliesslich auf den wesentlichen Eigenschaften der räumlichen Gestalten beruhen, sondern zugleich durch die zufälligen Eigenthümlichkeiten der Figur bestimmt werden, oder, wenn dieses nicht der Fall ist und dieselben, wie z. B. das Princip der Continuität, allgemeiner und umfassender sind, in der unzureichenden Begründung des Principes dieser Methoden. Es sind daher in die geometrischen Entwickelungen allgemeinere Methoden einzuführen und deren Anwendung — in ähnlicher Weise, wie dieses in der analytischen Geometrie geschieht — durch Einführung der Vorzeichen und des Begriffs des Imaginären ausgedehnter und fruchtbarer zu machen.

Es soll in dem Folgenden — so weit es der Raum dieser Zeitschrift zulässt — das System der drei Theorien, welche der Verfasser als Grundlage seines geometrischen Beweisverfahrens in dem ersten Abschnitte seines Werkes aufstellt, wenigstens in den Umrissen mitgetheilt und einige interessante Anwendungen dieser allgemeineren geometrischen Methoden, welche in den drei übrigen Abschnitten des Werkes enthalten sind, angeführt werden.

Das System dieser drei Theorien kann als die Entwickelung eines und desselben Begriffes betrachtet werden, welcher eine bestimmte Function von Segmenten oder Winkeln umfasst und als das anharmonische Verhältniss von vier Punkten oder eines Strahlenbündels von vier Geraden (rapport anharmonique de quatre points ou d'un faisceau de quatre droites) bezeichnet wird.

A. Theorie des anharmonischen Verhältnisses von vier Punkten oder eines Strahlenbündels von vier Geraden.

Wenn vier Punkte a, b, c, d in gerader Linie liegen, so bezeichnet man als anharmonisches Verhältniss dieser Punkte eine Function von vier Segmenten, wie folgende:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}.$$

Diese Bezeichnung*) ist von dem Verfasser bereits in seinem

*) Diese Function von vier Segmenten ist von dem Verfasser aus dem Grunde als anharmonisches Verhältniss bezeichnet worden, weil in dem besonderen Falle, wo ihr Werth gleich -1 ist, die vier Punkte gewöhnlich als solche betrachtet werden, die ein harmonisches Verhältniss bilden.

historischen Werke über geometrische Methoden mitgetheilt und von mehreren anderen Geometern beibehalten worden. Schon Pappus behandelt die Eigenschaft dieses Quotienten zweier Verhältnisse von Segmenten in mehreren auf einander folgenden Lehrsätzen, welche im 7. Buche als Hülfssätze für das leichtere Verständniss der Porismen des Euklid bewiesen sind. Der 129ste Satz sagt:

„Wenn vier Linien von einem Punkte ausgehen, so bilden sie auf einer Transversale, die willkürlich in derselben Ebene gezogen wird, vier Segmente, welche unter sich ein bestimmtes constantes Verhältniss haben, wie auch die Transversale gezogen werden mag.“ Es seien a, b, c, d die Punkte, in welchen die vier Geraden von einer beliebigen Transversale getroffen werden, und ac, ad, bc, bd die vier Segmente, so wird das Verhältniss $\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}$ dasselbe bleiben, welches auch die Transversale sein mag. Die darauf folgenden Sätze des Pappus sind entweder besondere Fälle oder das Umgekehrte dieses Satzes. Da der Satz von Pappus unter so vielen Formen wiederholt wird, so scheint er in den Porismen des Euklid von besonderem Nutzen gewesen zu sein; die späteren Geometer scheinen indess die Fruchtbarkeit dieses Lehrsatzes nicht beachtet zu haben. Denn obgleich Pascal in seiner Schrift über die Kegelschnitte, Desargues in seiner Praktik der Perspective, R. Simson in seiner Schrift über die Porismen denselben benutzten und Brianchon und Poncelet ihn anführen, so hat derselbe doch erst durch Moebius und Steiner, in der neuesten Zeit vorzugsweise durch Chasles, in dessen Entwickelung der Theorie der anharmonischen Function, eine höhere Bedeutung erhalten, welche der Verfasser in der Anwendung seiner Theorie auf geometrische Beweisführung auch praktisch durchführt. Die von Pappus nachgewiesene Eigenschaft der anharmonischen Function ist aber nur eine Folge einer anderen, welche Chasles in folgendem Lehrsatze ausdrückt:

„Wenn man von einem willkürlich gewählten Punkte nach vier in gerader Linie liegenden Punkten a, b, c, d Gerade zieht, so wird die anharmonische Function dieser Punkte genau dasselbe zu ihrem Werthe haben, was diese Function wird, wenn man statt der vier darin vorkommenden Segmente die Sinusse der diesen Segmenten gegenüberliegenden Winkel substituirt, oder: das anharmonische Verhältniss jener vier Geraden wird dem der vier Punkte gleich sein und auch dasselbe Zeichen haben.“ Es ist also

$$(1)\qquad \frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}=\frac{\sin(A,C)}{\sin(A,D)}:\frac{\sin(B,C)}{\sin(B,D)},$$

wenn $A, B, \ldots$ die nach den Punkten $a, b, \ldots$ gehenden Geraden, (A, C), $(A, D), \ldots$ die von diesen Geraden gebildeten Winkel sind und sowohl die Segmente, als auch die Winkel stets in einem bestimmten, durch ihre Entstehung gegebenen Sinne aufgefasst und demgemäss durch Vorzeichen bezeichnet werden, so dass also stets

$$ab+ba=0,\ (A,B)+(B,A)=0,$$
$$ab=-ba,\ (A,B)=-(B,A).$$

Der Beweis für die numerische Gleichheit der beiden anharmonischen Functionen ergiebt sich sofort durch Anwendung des Satzes von der Proportionalität der Seiten und der Sinusse der Gegenwinkel auf die Dreiecke, welchen die Segmente der anharmonischen Function angehören. Dass die beiden Functionen dasselbe Zeichen haben, geht, mit Rücksicht auf das Vorhergesagte, aus der Bezeichnung der Segmente und Winkel deutlich hervor.

Aus diesem Lehrsatze folgt nun sofort jene von Pappus angeführte Eigenschaft der anharmonischen Function von vier Segmenten. Die so einflussreiche, aus den Sinussen gebildete Function ist von Chasles als die anharmonische Function von vier Geraden oder des Strahlenbündels von vier Geraden bezeichnet worden.

Vier Punkte, welche auf einer geraden Linie liegen, a, b, c, d, geben drei verschiedene anharmonische Verhältnisse, nämlich:

$$\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd},\quad \frac{ad}{ab}:\frac{cd}{cb},\quad \frac{ab}{ac}:\frac{db}{dc},$$

deren gegenseitige Beziehungen folgende Eigenthümlichkeiten haben *).

Das aus den drei zusammengehörigen anharmonischen Verhältnissen von vier Punkten zusammengesetzte Verhältniss ist $=-1$.

$$\left(\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}\right):\left(\frac{ad}{ab}:\frac{cd}{cb}\right).\left(\frac{ab}{ac}:\frac{db}{dc}\right)$$
$$=(ac.bd:ad.bc).(ad.bc:ab.dc).(ab.dc:ac.db)$$
$$=ac.bd:ac.db$$
$$=-1.$$

Wird eine Gerade in vier Punkten a, b, c, d von vier Geraden eines Strahlenbündels getroffen, eine zweite Transversale aber in den Punkten a', b', c', d', so ist

$$\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}=\frac{a'c'}{a'd'}:\frac{b'c'}{b'd'},\quad \frac{ab}{ad}:\frac{cb}{cd}=\frac{a'b'}{a'd'}:\frac{c'b'}{c'd'}$$
$$=\frac{a'c'.b'd'}{a'd'.b'c'}\qquad =\frac{a'b'.c'd'}{a'd'.c'b'}.$$

Ist die zweite Transversale dem vierten nach d und d' gehenden Strahle parallel, so liegt der Punkt d' unendlich entfernt, und es ist in diesem Falle

---

*) Die einfache geometrische Beweisführung möchte an dieser Stelle durch Einschaltung eines Hülfssatzes gefördert werden, welcher zugleich zu einem anderen Ausdrucke für das anharmonische Verhältniss Veranlassung giebt und so lautet: Jedes anharmonische Verhältniss von vier Segmenten ist dem Verhältniss des Rechteckes der beiden äusseren Segmente zu dem Rechteck aus den beiden inneren gleich:

$$\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}=\frac{ac.bd}{ad.bc}.$$

$$\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}=\frac{a'c'}{b'c'},\quad \frac{ab}{ad}:\frac{cb}{cd}=\frac{a'b'}{c'b'}.$$

Nun ist aber

$$a'c'+c'b'+b'a'=0,$$

$$a'c'+b'a'=b'c',$$

$$\frac{a'c'}{b'c'}+\frac{a'b'}{c'b'}=1;$$

folglich auch

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{ac}{ad}:\dfrac{bc}{bd}+\dfrac{ab}{ad}:\dfrac{cb}{cd}=1, \\ \dfrac{ad}{ab}:\dfrac{cd}{cb}+\dfrac{ac}{ab}:\dfrac{dc}{db}=1, \\ \dfrac{ab}{ac}:\dfrac{db}{dc}+\dfrac{ad}{ac}:\dfrac{bd}{bc}=1. \end{cases}$$

Bezeichnet man die anharmonischen Verhältnisse wie folgt:

$$\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}=v_1,\quad \frac{ad}{ab}:\frac{cd}{cb}=v_2,\quad \frac{ab}{ac}:\frac{db}{dc}=v_3;$$

so können die vorhergehenden drei Relationen auch folgende Form erhalten:

$$v_1+\frac{1}{v_2}=1,\quad v_2+\frac{1}{v_3}=1,\quad v_3+\frac{1}{v_1}=1.$$

Hieraus folgt noch eine andere merkwürdige Eigenschaft der sechs Segmente von vier Punkten $a, b; c, d$, die auf einer geraden Linie liegen. Es ist nämlich, mit Benutzung des früheren Hülfssatzes,

$$\frac{ac.db}{ad.cb}+\frac{ab.cd}{ad.cb}=1$$

oder

$$(3)\qquad ab.cd+ac.db+ad.bc=0.$$

Hieraus folgt, dass auch

$$\sin(A,B).\sin(C,D)+\sin(A,C).\sin(D,B)+\sin(A,D).\sin(B,C)=0.$$

Gehen die Strahlen von dem Mittelpunkte eines Kreises aus und schneiden die Peripherie desselben in den Punkten a, b, c, d, so lässt sich die letzte Relation auch so ausdrücken:

$$\sin ab . \sin cd + \sin ac . \sin db + \sin ad . \sin bc = 0.$$

Ist nun arc bd positiv und gleich 90°, so ist

$$\sin db = -1, \ \sin ad = \cos ab, \ \sin cd = \cos cb;$$

folglich

$$\sin ac = \sin ab . \cos cb + \sin bc . \cos ab,$$

und da für die Folge der Punkte: a, b, c, d

$$ac = ab + bc,$$

so ist

$$\sin (ab + bc) = \sin ab . \cos bc + \sin bc . \cos ab,$$

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha . \cos \beta + \sin \beta . \cos \alpha.$$

In ähnlicher Weise lassen sich auch die übrigen hierher gehörigen trigonometrischen Formeln ableiten.

Sind die anharmonischen Verhältnisse zweier Systeme von vier Punkten, welche a, b, c, d und a', b', c', d' heissen, gleich, so ist

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'}.$$

. . . .

Da aber $v_1 + \frac{1}{v_2} = 1$ (2), so wird die Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse zweier Systeme von vier Punkten auch noch auf folgende Weise ausgedrückt werden können:

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{ac}{ad} : \dfrac{bc}{bd} + \dfrac{a'b'}{a'd'} : \dfrac{c'b'}{c'd'} = 1, \\[2ex] \dfrac{ad}{ab} : \dfrac{cd}{cb} + \dfrac{a'c'}{a'b'} : \dfrac{d'c'}{d'b'} = 1, \\[2ex] \dfrac{ab}{ac} : \dfrac{db}{dc} + \dfrac{a'd'}{a'c'} : \dfrac{b'd'}{b'c'} = 1. \end{cases}$$

B. Theorie der homographischen Eintheilung.

Wenn zwei Gerade durch Punkte, welche einander einzeln entsprechen, in der Weise getheilt sind, dass das anharmonische Verhältniss von vier beliebigen Punkten der einen gleich ist dem anharmonischen Verhältniss der vier entsprechenden Punkte der anderen, so werden diese zwei Geraden als homographisch getheilte oder die Folgen ihrer Theilpunkte als zwei homographische Eintheilungen (divisions homographiques) bezeichnet.

Wenn zwei Strahlenbündel, deren Gerade einander einzeln entsprechen, die Eigenschaft haben, dass vier beliebige Gerade des ersteren ein gleiches anharmonisches Verhältniss haben, wie dasjenige der vier entsprechenden Geraden des zweiten Bündels, so werden die beiden Strahlenbündel als homographische (faisceaux homographiques) bezeichnet. Zwei Linien L und L' sind also homographisch getheilt in den Punkten

$$a, b, c, d, e \ldots,$$
$$a', b', c', d', e' \ldots,$$

wenn

$$\frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} = \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{d'b'}{d'c'},$$
$$\frac{ab}{ac} : \frac{eb}{ec} = \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{e'b'}{e'c'},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

so dass also auch

$$\frac{db}{dc} : \frac{eb}{ec} = \frac{d'b'}{d'c'} : \frac{e'b'}{e'c'},$$
$$\frac{ec}{ed} : \frac{fc}{fd} = \frac{e'c'}{e'd'} : \frac{f'c'}{f'd'},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Das Entsprechende gilt natürlich von homographischen Strahlenbündeln, so dass also jedes von zwei solchen Strahlenbündeln von einer beliebigen Transversalen immer in solchen Punkten durchschnitten wird, welche mit den entsprechenden der andern Transversale zwei homographische Eintheilungen bilden. Dasselbe wird aber natürlich auch von einem Strahlenbündel gelten, welches von zwei Transversalen getroffen wird, und der Durchschnittspunkt der beiden Transversalen, welcher zwei zusammenfallende homologe Punkte der beiden homographischen Eintheilungen darstellt, wird desshalb ein **gemeinschaftlicher Punkt** genannt. Wenn daher zwei Gerade in der Weise homographisch getheilt sind, dass ihr Durchschnittspunkt ein gemeinschaftlicher Punkt beider Eintheilungen ist, so werden die Geraden, welche die homologen Punkte der beiden Eintheilungen verbinden, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben.

Zwei Strahlenbündel, deren Gerade sich paarweise in solchen Punkten schneiden, die in gerader Linie liegen, sind homographische Strahlenbündel. Die Gerade, welche die Centra der beiden Strahlenbündel verbindet und zwei zusammenfallende homologe Strahlen der beiden Bündel darstellt, wird **gemeinschaftlicher Strahl** der beiden Bündel genannt. Wenn daher zwei homographische Strahlenbündel eine solche Lage haben, dass die ihre Centra verbindende Gerade ein gemeinschaftlicher Strahl der beiden Bündel ist, so werden die Durchschnittspunkte der übrigen homologen Strahlen der beiden Bündel auf einer geraden Linie liegen.

Bedingungsgleichungen für homographische Eintheilungen.

Die Punkte a, b, c, m einer Geraden und die homologen einer zweiten a', b', c', m' bilden zwei homographische Eintheilungen, wenn

$$\frac{am}{bm} : \frac{ac}{bc} = \frac{a'm'}{b'm'} : \frac{a'c'}{b'c'}$$

oder

$$\frac{am}{bm} = \frac{a'm'}{b'm'} \cdot \left(\frac{ac}{bc} : \frac{a'c'}{b'c'}\right).$$

Betrachten wir die homologen Punkte m und m' als variabele auf jenen beiden Geraden, die übrigen aber nicht, und setzen den constanten Werth

$$\frac{ac}{bc} : \frac{a'c'}{b'c'} = \lambda,$$

so erhalten wir aus der obigen Gleichung folgende Bedingungsgleichung zweier homographischen Eintheilungen, welche die Punkte m und m' auf den Geraden ab, $a'b'$ bewirken:

$$(1) \qquad \frac{am}{bm} = \lambda \cdot \frac{a'm'}{b'm'}.$$

Bezeichnen M und M' auf der einen und auf der andern Geraden die beiden Punkte, welche dem unendlich entfernten m' und dem unendlich entfernten m auf der zweiten und auf der ersten Geraden entsprechen, so gelten für die ersteren beiden Punkte folgende Gleichungen:

$$\frac{aM}{bM} = \lambda, \quad \frac{b'M'}{a'M'} = \lambda.$$

Ist $\lambda = +1$, so folgt aus der ersteren der beiden Gleichungen, dass M, welches dem unendlich entfernten m' als homologer Punkt entspricht, ebenfalls unendlich entfernt sein muss, und die Gleichung dieser besonderen homographischen Eintheilung:

$$(a) \qquad \frac{am}{bm} = \frac{a'm'}{b'm'}$$

drückt aus, dass die beiden Geraden in proportionale Stücke getheilt sind.

Aus der Form der Gleichung (1)

$$am = \frac{a'm'}{b'm'} \cdot \frac{bm}{bc}\left(ac : \frac{a'c'}{b'c'}\right).$$

folgt, dass für ein unendlich entferntes b auf der einen Geraden und für ein unendlich entferntes a' auf der anderen Geraden

$$am = \frac{\lambda}{b'm'}$$

wird. Bezeichnen wir mit B' und A die beiden Punkte, welche den unendlich entfernten b und a' entsprechen, so erhalten wir aus der vorhergehenden Gleichung folgende Bedingungsgleichung einer homographischen Eintheilung:

(2) $$Am \, . \, B'm' = \lambda,$$

in welcher A und B zwei feste Punkte auf zwei geraden Linien bezeichnen.

Vermittelst der früher erwähnten Ausdrücke für die Gleichheit anharmonischer Verhältnisse (4) lassen sich noch andere Bedingungsgleichungen für homographische Eintheilungen entwickeln. Sind nämlich die anharmonischen Verhältnisse der beiden Systeme von Punkten a, b, c, m und a', b', c', m' gleich, so ist

$$\frac{am}{bm} : \frac{ac}{bc} + \frac{c'm'}{b'm'} : \frac{c'a'}{b'a'} = 1,$$

und, wenn

$$\frac{bc}{ac} = \lambda, \quad \frac{b'a'}{c'a'} = \mu,$$

(3) $$\lambda \, . \, \frac{am}{bm} + \mu \, . \, \frac{c'm'}{b'm'} = 1.$$

Sind die beiden Geraden ähnlich oder in proportionale Stücke getheilt, so sind die auf jeder Geraden in unendlicher Entfernung befindlichen Theilpunkte zugleich zwei homologe Punkte der homographischen Eintheilung, und nehmen wir als solche Punkte die beiden Punkte b und b' an, so erhalten wir folgende besondere Form der Gleichung (3):

(a) $$\lambda \, . \, am + \mu \, . \, c'm' = 1.$$

Die Gleichung (1) lässt sich noch zur Entwickelung eines anderen Ausdrucks für zwei homographische Eintheilungen gebrauchen, wenn man derselben folgende Gestalt giebt:

$$am \, . \, b'm' - \varkappa \, . \, bm \, . \, a'm' = 0.$$

Da

$$bm = am - ab, \quad a'm' = b'm' - b'a',$$

so ergiebt sich durch Einführung dieser Werthe in die vorhergehende Gleichung vermittelst einer leichten Umformung:

(4) $$am \, . \, b'm' + \lambda \, . \, am + \mu \, . \, b'm' + \nu = 0.$$

Homographische Eintheilungen auf einer einzigen Geraden.

Die vorhergehende Gleichung (4) ist der Ausdruck zweier homographischen Eintheilungen auf zwei Geraden. Denken wir uns diese letzteren der Richtung nach und zugleich die Punkte a und b' beider Geraden zusammenfallend, so wird die Gleichung (4) auch in der neuen Form

$$am . am' + \lambda . am + \mu . am' + \nu = 0$$

der Ausdruck zweier homographischen Eintheilungen sein. Durch die besondere Annahme, dass unter den Theilpunkten ein Punkt mit seinem homologen zusammenfalle, gewinnt die Gleichung endlich folgende Gestalt:

$$(5) \ldots \quad \overline{am}^2 + (\lambda + \mu) . am + \nu = 0,$$

woraus sich ergiebt, dass es für zwei so gelegene homographische Eintheilungen zwei (reelle oder imaginäre) Punkte giebt, welche die Eigenschaft haben, dass jeder derselben, wenn er als einer der beiden Eintheilungen angehörig betrachtet wird, mit seinem homologen in der anderen zusammenfällt. Solche Punkte werden doppelte Punkte genannt.

Sind m und m' unendlich entfernt und die denselben in beiden Eintheilungen entsprechenden Punkte M' und M, so folgt im ersten Falle aus (4):

$$-b'M' = \lambda,$$

im zweiten:

$$-aM = \mu,$$

so dass

$$am . b'm' - b'M' . am - aM . b'm' + \nu = 0.$$

Fällt m mit a zusammen und ist m' in diesem Falle der Punkt a', so ist in Folge der letzten Gleichung:

$$\nu = aM . b'a',$$

und unter den früheren Voraussetzungen die Form der Gleichung (5):

$$\overline{am}^2 - (aM + aM') am + aM . aa' = 0.$$

Die Summe der Entfernungen des Punktes a von den beiden doppelten Punkten ist also so gross als $aM + aM'$. Bezeichnen wir daher mit O den Mittelpunkt des von den beiden doppelten Punkten begrenzten Segments, so ist

$$aO = \frac{aM + aM'}{2},$$

und die Form der Gleichung (5) daher auch folgende:

$$am^2 - 2aO.am + aM.aa' = 0.$$

Fällt der Punkt a mit O zusammen und entspricht dem O in der zweiten Eintheilung der Punkt O', so ist

$$Om^2 + OM.OO' = 0,$$

und da für O, als Mittelpunkt zwischen M und M',

$$OM = -OM',$$

so ist

(6) $$Om^2 = OM'.OO',$$

$$Om = \pm\sqrt{OM'.OO'},$$

woraus sich die Art und Weise und die Bedingungen der Möglichkeit der Construction der beiden doppelten Punkte von selbst ergeben.

Aehnliche Bedingungsgleichungen lassen sich für die Homographie zweier Strahlenbündel entwickeln; dahin gehören die folgenden:

(7) $$\frac{\sin(A,M)}{\sin(B,M)} = \lambda.\frac{\sin(A',M')}{\sin(B',M')}.$$

(8) $$\lambda.\frac{\sin(A,M)}{\sin(B,M)} + \mu.\frac{\sin(C',M')}{\sin(B',M')} = 1.$$

C. Theorie der Involution.

Involution von sechs Punkten. Wenn drei Systeme von je zwei zusammengehörigen Punkten, die in gerader Linie liegen, so beschaffen sind, dass das anharmonische Verhältniss von vier Punkten aus den drei Systemen gleich dem anharmonischen Verhältniss ihrer conjugirten Punkte ist, so sind diese sechs Punkte in Involution.

Wenn sechs Punkte in Involution sind, so ist das anharmonische Verhältniss von irgend welchen vier unter ihnen, die den drei Paaren conjugirter Punkte angehören, stets dem anharmonischen Verhältniss der conjugirten Punkte gleich.

Sind die drei Systeme a, a'; b, b'; c, c' und das anharmonische Verhältniss der vier Punkte a, b, c, c' gleich dem der conjugirten a', b', c', c, so wird auch das anharmonische Verhältniss jedes anderen Systemes von vier Punkten, welche jenen drei Paaren angehören, dem anharmonischen Verhältniss der conjugirten Punkte gleich sein.

Aus der durch die Voraussetzung gegebenen Gleichung

$$\frac{c'c}{c'a}:\frac{bc}{ba} = \frac{cc'}{ca'}:\frac{b'c'}{b'a'}$$

folgt zunächst, durch Einführung des Segmentes $a'a$ für $c'c$, die Gleichung

$$\frac{a'c}{a'a}:\frac{bc}{ba}=\frac{ac'}{aa'}:\frac{b'c'}{b'a'}$$

und hieraus die Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse der Punkte a, b, c, a' und der conjugirten a', b', c', a. Aus der Gleichung

$$\frac{ca}{cb}:\frac{c'a}{c'b}=\frac{c'a'}{c'b'}:\frac{ca'}{cb'}$$

ergiebt sich durch einfache Umformung die Gleichung:

$$\frac{ca}{cb'}:\frac{c'a}{c'b'}=\frac{c'a'}{c'b}:\frac{ca'}{cb},$$

und hieraus die Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse der Punkte a, b', c, c' und der conjugirten $a', b, c' c$. Auf die eine oder die andere Weise lassen sich auch die übrigen, durch die Voraussetzung gegebenen Gleichungen umformen.

Wenn drei Systeme von je zwei conjugirten Punkten: a, a'; b, b'; c, c' in Involution sind, so finden folgende sieben Gleichungen statt, und umgekehrt wird jede dieser Gleichungen die Involution bedingen und die sechs übrigen zur Folge haben:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{ab.ab'}{ac.ac'}=\dfrac{a'b.a'b'}{a'c.a'c'}, \\[2ex] \dfrac{bc.bc'}{ba.ba'}=\dfrac{b'c.b'c'}{b'a.b'a'}, \\[2ex] \dfrac{ca.ca'}{cb.cb'}=\dfrac{c'a.c'a'}{c'b.c'b'}, \\[2ex] ab'.bc'.ca'=-a'b.b'c.c'a, \\ ab'.bc.c'a'=-a'b.b'c'.ca, \\ ab.b'c'.ca'=-a'b'.bc.c'a, \\ ab.b'c.c'a'=-a'b'.bc'.ca. \end{cases}$$

Da jede dieser Gleichungen sich in eine Gleichung zweier anharmonischen Verhältnisse von vier Punkten der drei Systeme umformen lässt, z. B. die erste Gleichung in folgende:

$$\frac{ab}{ac}:\frac{a'b}{a'c}=\frac{a'b'}{a'c'}:\frac{ab'}{ac'},$$

so folgt hieraus die Richtigkeit des Lehrsatzes, die Umkehrung lässt sich aber leicht aus dem vorhergehenden Lehrsatze ableiten.

Sind die vier Punkte a, a'; b, b' gegeben, so lässt sich, vermittelst der sieben vorhergehenden Gleichungen, für ein beliebig angenommenes c das zugehörige c' leicht bestimmen. Der Punkt

c kann daher auch in unendlicher Entfernung liegen oder mit seinem conjugirten c' zusammenfallen. In dem letzteren Falle gehen die obigen sieben Gleichungen in folgende vier über:

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{ab.ab'}{a'b.a'b'}=\frac{\overline{ae}^2}{\overline{a'e}^2},\\
&\frac{ba.ba'}{b'a.b'a'}=\frac{\overline{be}^2}{\overline{b'e}^2},\\
&ab'.be.ea'=-a'b.b'e.ea,\\
&ab.b'e.ea'=-a'b'.be.ea;
\end{aligned}\right.
$$

in welchen e die beiden zusammenfallenden Punkte bezeichnet. Aus der Beschaffenheit dieser Gleichungen ergiebt sich, dass es zwei Punkte e, f giebt, von welchen jeder die Eigenschaft hat, mit den Punkten a, a'; b, b' eine Involution zu bilden, in welcher der Punkt e oder f jedesmal mit seinem conjugirten zusammenfällt. Da beide Punkte, e, f z. B., der ersten Gleichung genügen werden, so ist

$$\frac{\overline{ae}^2}{\overline{a'e}^2}=\frac{\overline{af}^2}{\overline{a'f}^2},$$

folglich

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{ae}{a'e}=-\frac{af}{a'f},\\
\text{und ebenso}\quad &\frac{be}{b'e}=-\frac{bf}{b'f},
\end{aligned}\right\}\quad (3)
$$

woraus sich ergiebt, dass die beiden Punkte, von welchen jeder mit seinem conjugirten zusammenfällt, die beiden Segmente aa', bb' harmonisch theilen.

Ist der Punkt c in unendlicher Entfernung angenommen und der conjugirte Punkt desselben O, so erhalten die Gleichungen (1) folgende Gestalt:

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{ab.ab'}{a'b.a'b'}=\frac{aO}{a'O},\\
&\frac{ba.ba'}{b'a.b'a'}=\frac{bO}{b'O},\\
&Oa.Oa'=Ob.Ob',\\
&\frac{Oa}{Ob}=\frac{ab'}{ba'},\quad \frac{Oa'}{Ob'}=\frac{a'b}{b'a},\\
&\frac{Oa}{Ob'}=\frac{ab}{b'a'},\quad \frac{Oa'}{Ob}=\frac{a'b'}{ba};
\end{aligned}\right.
$$

von welchen insbesondere die dritte eine weitere Beachtung verdient.

Wenn nämlich sechs Punkte a, a'; b, b'; c, c' in Involution sind und man zwei andere d, d' so nimmt, dass sie mit den ersten Paaren a, a'; b, b' eine Involution bilden, so lässt sich leicht durch Vergleichung der von der Involution bedingten gleichen anharmonischen Verhältnisse nachweisen, dass die Punkte d, d' auch mit dem dritten Paare und einem der ersteren eine Involution bilden werden.

Wenn daher jener Punkt O eine solche Lage hat, dass für sechs in Involution befindliche Punkte a, a'; b, b'; c, c'

$$Oa \,.\, Oa' = Ob \,.\, Ob',$$

so ist offenbar auch

$$Ob \,.\, Ob' = Oc \,.\, Oc',$$

woraus sich der Satz ergiebt:

Wenn drei Systeme von je zwei Punkten in Involution sind, so giebt es immer einen gewissen Punkt (Centralpunkt der Involution) von der Beschaffenheit, dass seine Entfernungen von je zwei conjugirten Punkten ein constantes Product geben.

Wenn zwei Segmente aa', bb' ein gemeinschaftliches Stück haben, so kann der zu diesen Paaren a, a'; b, b' gehörige Centralpunkt O, wenn wir die Gleichheit und die Vorzeichen der Producte $Oa.Oa'$ und $Ob.Ob'$ beachten, nothwendiger Weise nur auf diesem gemeinschaftlichen Stücke liegen, woraus sich die Construction des Punktes O sehr leicht ergiebt.

Wenn man nämlich über zwei theilweise auf einanderliegenden Segmenten aa', bb', als Durchmessern, zwei Kreise construirt, so wird ihre gemeinschaftliche Sehne stets durch den Centralpunkt O gehen.

Liegen die Segmente aa', bb' nicht theilweise auf einander, so kann man immer durch einen beliebigen und ausserhalb der Geraden befindlichen Punkt g zwei Kreisperipherien so construiren, dass die eine aa', die andere bb' zur Sehne hat; die gemeinschaftliche Sehne gg' der Kreise durchschneidet alsdann ab im Centralpunkt O, weil

$$Og \,.\, Og' = Oa \,.\, Oa' = Ob \,.\, Ob'.$$

Drei Kreise, die man über drei in Involution befindlichen Segmenten, als Durchmessern dieser Kreise, construirt, haben zwei gemeinschaftliche Durchschnittspunkte, welche in dem Falle, dass die Segmente nicht theilweise aufeinander fallen, imaginär sind. Die Kreise haben alsdann in dem letzteren Falle keine gemeinschaftliche Sehne, sondern eine gemeinschaftliche Chordale (axe radical).

Wenn drei Systeme von paarweise conjugirten Punkten a, a'; b, b'; c, c' in Involution sind und zwei Punkte e, f die Beschaffenheit haben, dass jeder derselben mit den beiden ersteren Paaren a, a'; b, b' eine Involution von fünf Punkten bildet, in welcher der Punkt e oder f mit seinem conjugirten zusammenfällt, so werden die Punkte e und f diese Eigenschaft auch in Beziehung auf die Systeme b, b'; c, c' besitzen. Dasselbe wird aber auch von der Eigenschaft der Punkte e und f gelten, welche durch die Gleichungen $\frac{ae}{a'e} = -\frac{af}{a'f}$ etc. ausgedrückt ist. Hieraus ergiebt sich leicht folgender Satz:

Wenn drei Systeme von paarweise conjugirten Punkten a, a'; b, b'; c, c' in Involution sind, so giebt es stets zwei (reelle oder imaginäre) Punkte (doppelte Punkte der Involution), welche die drei Segmente aa', bb', cc' harmonisch theilen.

Diese Punkte befinden sich zu beiden Seiten des Centralpunktes in gleicher Entfernung von demselben, indem

$$Oa \,.\, Oa' = Ob \,.\, Ob' = \overline{Oe^2} = \overline{Of^2}.$$

Es ergiebt sich zugleich aus der Gleichung

$$\overline{Oe^2} = Oa \,.\, Oa',$$

dass die doppelten Punkte imaginär sind, wenn der Punkt O innerhalb der Segmente aa' und bb' liegt.

Die Beziehung, in welche ein beliebiger Punkt zu sechs in Involution befindlichen Punkten gebracht werden kann, führt zu andern wichtigen Eigenschaften der Involution. Sind nämlich aa', bb', cc' drei beliebige Segmente einer Geraden und α, β, γ ihre Mittelpunkte, m und M zwei andere Punkte, so ist

$$ma = Ma - Mm, \quad ma' = Ma' - Mm,$$

$$ma \,.\, ma' = Ma \,.\, Ma' - 2 \,.\, M\alpha \,.\, Mm + \overline{Mm^2},$$

$$mb \,.\, mb' = Mb \,.\, Mb' - 2 \,.\, M\beta \,.\, Mm + \overline{Mm^2},$$

$$mc \,.\, mc' = Mc \,.\, Mc' - 2 \,.\, M\gamma \,.\, Mm + \overline{Mm^2};$$

folglich

$$\begin{aligned} &ma \,.\, ma' \,.\, \beta\gamma + mb \,.\, mb' \,.\, \gamma\alpha + mc \,.\, mc' \,.\, \alpha\beta \\ = &Ma \,.\, Ma' \,.\, \beta\gamma + Mb \,.\, Mb' \,.\, \gamma\alpha + Mc \,.\, Mc' \,.\, \alpha\beta \\ &-2(M\alpha \,.\, \beta\gamma + M\beta \,.\, \gamma\alpha + M\gamma \,.\, \alpha\beta)\, Mm + (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)\overline{Mm^2}. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach einem früheren Lehrsatze sowohl

$$M\alpha \,.\, \beta\gamma + M\beta \,.\, \gamma\alpha + M\gamma \,.\, \alpha\beta = 0,$$

als auch

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = 0,$$

folglich

$$\begin{aligned} &ma \,.\, ma' \,.\, \beta\gamma + mb \,.\, mb' \,.\, \gamma\alpha + mc \,.\, mc' \,.\, \alpha\beta \\ &\qquad = Ma \,.\, Ma' \,.\, \beta\gamma + Mb \,.\, Mb' \,.\, \gamma\alpha + Mc \,.\, Mc' \,.\, \alpha\beta. \end{aligned}$$

Ist daher M der Centralpunkt von sechs in Involution befindlichen Punkten a, a'; b, b'; c, c', so ist

$$ma.ma'.\beta\gamma + mb.mb'.\gamma\alpha + mc.mc'.\alpha\beta = 0.$$

Fällt der Punkt m mit dem Punkte a zusammen, so ist

$$ab.ab'.\gamma\alpha + ac.ac'.\alpha\beta = 0,$$

folglich

$$\frac{ab.ab'}{ac.ac'} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}; \quad \frac{a'b.a'b'}{a'c.a'c'} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}$$

und ebenso:

$$\frac{bc.bc'}{ba.ba'} = \frac{\beta\gamma}{\beta\alpha}; \quad \frac{b'c.b'c'}{b'a.b'a'} = \frac{\beta\gamma}{\beta\alpha}, \tag{5}$$

$$\frac{ca.ca'}{cb.cb'} = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}; \quad \frac{c'a.c'a'}{c'b.c'b'} = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}.$$

Homographische Eintheilungen in Involution. Für zwei Paare von Punkten a, a'; b, b' lassen sich unzählig viele andere Paare c, c'; d, d';.... bestimmen, welche mit jenen ersteren eine Involution bilden. Betrachten wir nun hierbei die Punkte a, b, a' und a', b', a als fest, die Punkte c, c' als variabele und gleichsam die übrigen Paare beschreibend, so werden die Punkte c, c' offenbar zwei homographische Eintheilungen bilden. Aus der zugleich stattfindenden Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse a, b, a', c' und a', b', a, c wird aber folgen, dass der variabele Punkt c', man mag denselben als der einen oder der anderen Reihe der homographisch vertheilten Punkte angehörig betrachten, stets denselben homologen Punkt c hat. Solche homographische Eintheilungen werden als **Eintheilungen in Involution** bezeichnet.

Zwei homographische Eintheilungen auf derselben Geraden sind in Involution, wenn ein beliebiger Punkt auf dieser Geraden, den man als der einen und der anderen Eintheilung angehörig betrachtet, in beiden Fällen denselben homologen Punkt hat. Sind a, b, c und a', b', c' homologe Punkte der ersten und zweiten Eintheilung und entsprechen sich nach Voraussetzung

$$a, \; b, \; c, \; c',$$
$$a', \; b', \; c', \; c;$$

so sind die anharmonischen Verhältnisse dieser Punkte gleich und daher a, a'; b, b'; c, c' in Involution, so dass auch a, a', b, c und a', a, b', c' gleiche anharmonische Verhältnisse haben, und was von den Punkten c, c' galt, auch von den Punkten a, a' erwiesen ist.

Als Ausdruck zweier homographischen Eintheilungen gilt folgende Gleichung (4):

$$am.b'm' + \lambda.am + \mu.b'm' + \nu = 0,$$

und wenn m und m' unendlich entfernt und die ihnen entsprechenden Punkte M' und M sind,

$$-b'M'=\lambda, \quad -aM=\mu.$$

Nehmen wir nun an, dass von einem der in unendlicher Entfernung befindlichen Punkte das im Vorigen von dem Punkte c Gesagte gelte, so wird derselbe in beiden Eintheilungen denselben homologen Punkt haben müssen, woraus sich ergiebt, dass in diesem Falle M' und M zusammenfallen. Dann ist aber

$$\lambda-\mu=aM-b'M=ab',$$

und wenn die beiden Eintheilungen einen gemeinschaftlichen Ausgangspunkt haben,

$$\lambda=\mu.$$

Die doppelten Punkte zweier homographischen Eintheilungen auf derselben Geraden stehen in einer merkwürdigen Beziehung zu gewissen Paaren ihrer Punkte. Sind nämlich a, b; a' b' homologe Punkte zweier Eintheilungen und e, f die beiden doppelten Punkte, so sind die anharmonischen Verhältnisse der folgenden Systeme von vier Punkten gleich, nämlich von

$$a, b, e, f \text{ und } a', b', e, f.$$

Hieraus folgt, dass dasselbe auch von folgenden Systemen gilt:

$$a, b, e, f \text{ und } b', a', f, e,$$

oder dass ab', $a'b$, ef drei in Involution befindliche Segmente sind. Die doppelten Punkte zweier homographischen Eintheilungen a, b, c.... und a', b', c',.... bilden also stets mit zwei solchen Paaren von Punkten, wie a, b' und a', b eine Involution. Diese Eigenschaft der doppelten Punkte giebt uns ein Mittel an die Hand, dieselben zu construiren. Man construire zwei durch einen beliebigen Punkt g gehende Kreisperipherien, von denen die eine ab', die andere $a'b$ als Sehne in sich fasst, so werden sich dieselben noch in einem anderen Punkte g' schneiden. Durch denselben Punkt g construire man ferner ein anderes Paar von Kreisperipherien, von denen die eine ac', die andere $a'c$ zur Sehne hat, so werden dieselben sich in einem zweiten Punkte g'' durchschneiden. Der Kreis, dessen Peripherie durch die Punkte g, g', g'' geht, wird alsdann die Gerade in den gesuchten doppelten Punkten durchschneiden; denn beide Punkte werden sowohl mit a, b' und a', b, als auch mit a, c' und a', c in Involution sein.

Strahlenbündel von sechs Geraden in Involution sind solche, deren paarweise conjugirte Gerade die Eigenschaft haben, dass vier den drei Paaren angehörige Gerade ein gleiches anharmonisches Verhältniss, wie das der vier conjugirten Geraden haben. Solche Strahlenbündel werden von jeder Transversale in sechs Punkten geschnitten, die sich in Involution befinden, und alle Relationen, welche sich auf diese Durchschnittspunkte beziehen und durch Betrachtung der anharmonischen Verhältnisse dieser Punkte abgeleitet werden, gelten auch für die sechs Geraden z. B. folgende:

$$\frac{\sin(A,B)\,.\,\sin(A,B')}{\sin(A,C)\,.\,\sin(A,C')}=\frac{\sin(A',B)\,.\,\sin(A',B')}{\sin(A',C)\,.\,\sin(A',C')},$$

$$\sin(A,B)\,.\,\sin(B',C)\,.\,\sin(C',A')=-\sin(A',B')\,.\,\sin(B,C')\,.\,\sin(C,A).$$

Den doppelten Punkten der Involution eines Systemes von sechs Punkten entsprechen hier zwei doppelte Strahlen der Involution eines Strahlenbündels von sechs Geraden.

Eine ähnliche Analogie findet noch zwischen zwei homographischen Eintheilungen in Involution und zwei homographischen Strahlenbündeln in Involution statt.

Anwendung der vorhergehenden Theorien.

Die übrigen drei Abschnitte des Werkes enthalten hauptsächlich die Bestimmung, die Eigenschaften der wichtigsten geometrischen Figuren vermittelst der in dem ersten Abschnitte mitgetheilten Theorien zu entwickeln. Der zweite Abschnitt ist vorzugsweise den Eigenschaften der geradlinigen Figuren gewidmet und beginnt mit der Behandlung mehrerer geschichtlich merkwürdiger Aufgaben, welche den Gegenstand folgender Werke des Apollonius bilden: „de sectione determinata“, „de sectione rationis“ und „de sectione spatii.“

Die Aufgabe der sectio determinata ist folgende:

Wenn auf einer Geraden vier Punkte gegeben sind, einen fünften Punkt auf derselben so zu bestimmen, dass das Product seiner Entfernungen von zweien jener vier Punkte zu dem Producte seiner Entfernungen von den beiden anderen Punkten ein gegebenes Verhältniss hat.

Sind die gegebenen Punkte a, a'; b, b'; λ die Verhältnisszahl, so ist ein Punkt m von der Beschaffenheit zu suchen, dass

$$\frac{am\,.\,a'm}{bm\,.\,b'm}=\lambda.$$

Aus der Theorie der Involution (1) geht sofort hervor, dass ausser einem Punkte m, welcher der Gleichung Genüge leistet, noch ein anderer m' von derselben Beschaffenheit vorhanden ist, nämlich derjenige, welcher, als der conjugirte des Punktes m, mit den beiden Systemen a, a'; b, b' eine Involution bildet.

Bezeichnen wir nun mit μ, α, β die Mittelpunkte der Segmente mm', aa', bb', so ist

$$\frac{am\,.\,a'm}{bm\,.\,b'm}=\frac{\alpha\mu}{\beta\mu}, \tag{5}$$

folglich

$$\frac{\alpha\mu}{\beta\mu}=\lambda.$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich der Mittelpunkt μ und damit zugleich die einfache Construction, welche auf die beiden Punkte m und m' führt.

Construirt man nämlich zwei Kreise, welche durch einen beliebigen Punkt g gehen und von denen der eine aa', der andere bb' als Sehne enthält, ferner durch die beiden Durchschnittspunkte dieser Kreisperipherien g und g' einen dritten Kreis so, dass der Mittelpunkt desselben auf dem in μ auf aa' errichteten Perpendikel liegt, so durchschneidet derselbe die Gerade in den gesuchten Punkten m und m' (4).

Aus der allgemeinen Form der Gleichung, welcher die Auflösung genügen muss, lassen sich leicht die besonderen Fälle der Aufgabe ableiten, und aus den Eigenschaften der Involution diejenigen Bedingungen, unter welchen m und m' imaginär werden. Wenn wir daher erwägen, wie schwierig die Auflösungsmethode des Apollonius ist, die uns R. Simson in seiner Wiederherstellung des betreffenden Werkes von Apollonius mittheilt, so möchte schon dies Beispiel einer Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten geometrischen Principien hinreichen, die Allgemeinheit und Fruchtbarkeit derselben an den Tag zu legen.

Aufgabe der sectio rationis:

Wenn zwei Gerade AL, BL gegeben sind, eine Transversale durch einen Punkt ϱ so zu ziehen, dass die auf den beiden Geraden gebildeten Segmente, welche von den beiden festen Punkten dieser Geraden A und B ausgehen, ein gegebenes Verhältniss λ haben.

Nehmen wir auf beiden Geraden zwei zusammengehörige und variabele Punkte a und a' an, deren Lage in Beziehung auf die Punkte A und B folgende Beziehung gestattet:

$$\frac{Aa}{Ba'} = \lambda,$$

so bilden diese Punkte eine homographische Eintheilung (I, a.), und die Aufgabe ist gelöst, wenn wir durch ϱ eine Gerade so ziehen können, dass sie durch zwei homologe Punkte der Eintheilungen geht. Ziehen wir durch jeden Punkt a' und ϱ Gerade, deren Durchschnittspunkte mit AL im Allgemeinen mit α' bezeichnet werden sollen, so bilden α' und a' ebenfalls zwei homographische Eintheilungen und desshalb auch a und α'. Es folgt hieraus, dass nur diejenige Gerade $a'\varrho$ der Aufgabe genügt, welche einen der doppelten Punkte dieser letzten beiden Eintheilungen trifft und dass es zwei solche Gerade giebt. Nun sind zur Construction der beiden doppelten Punkte im Allgemeinen drei Paare zusammengehöriger Punkte der beiden Eintheilungen auf AL nöthig (6), es folgt also hieraus, dass man zur gesuchten Geraden $a'\varrho$ erst dann gelangt, wenn man, gleichsam versuchsweise, drei andere construirt hat, und dass diese geometrische Behandlung der Aufgabe, hinsichtlich der Methode, dem arithmetischen Verfahren der positio falsi nicht unähnlich ist.

In derselben Weise wird auch die Aufgabe der sectio spatii behandelt, deren Auflösung folgender allgemeinen Gleichung

$$Aa . Ba' = \lambda,$$

welche zugleich der Ausdruck zweier homographischen Eintheilungen ist (2), genügen muss.

Der Verfasser wendet diese Methode der Auflösung in der Folge noch auf einige andere geometrische Aufgaben an, deren Gegenstand von den erwähnten ganz verschieden ist, und zuletzt noch auf die Auflösung eines Systemes von Gleichungen des ersten oder des zweiten Grades.

Die Form eines Systemes von Gleichungen ersterer Art wird auf folgende specielle Form reducirt:

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y + \nu &= 0, \\ \lambda_1 y + \mu_1 z + \nu_1 &= 0, \\ \cdots\cdots & \\ \lambda_n v + \mu_n x + \nu_n &= 0. \end{aligned}$$

Nimmt man alsdann an, dass x, y,.... die Entfernungen von eben so vielen Punkten X, Y,...., die auf derselben Geraden liegen, in Beziehung auf einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt, bezeichnen und dass an der Stelle von x in der letzten Gleichung sich x' befinde, so drückt jede der einzelnen Gleichungen, wenn X, Y als variabel betrachtet werden, zwei ähnliche (homographische) Eintheilungen aus (3, a.), und es folgt aus denselben, dass auch die Punkte X und X', welcher letztere dem x' in der letzten Gleichung entspricht, solchen Eintheilungen angehören werden. Erwägt man nun, dass, nach der Form der obigen Gleichungen, von allen willkürlichen Werthen, welche x ertheilt werden mögen, nur derjenige der gesuchte ist, welcher bewirkt, dass für x' in der letzten Gleichung derselbe Werth erhalten wird, so wird hieraus, wenn wir auf die erwähnte geometrische Auffassung der Werthe x, y.... zurückgehen, folgen müssen, dass der doppelte Punkt der durch die letzte Gleichung ausgedrückten homographischen Eintheilung dem gesuchten Werthe von x angehört. Da nun zur Bestimmung derselben in diesem besonderen Falle zwei Systeme homologer Punkte nöthig sind, so werden zwei willkürliche Annahmen für x in der ersteren Gleichung zur Bestimmung des wahren Werthes von x genügen, und die geometrische Betrachtung führt ganz auf dasselbe Resultat, welches die Regel der positio falsi für die gesuchte Grösse angiebt.

I. Vom Viereck.

In der Entwickelung der allgemeinen Eigenschaften der geradlinigen Figuren beginnt der Verfasser mit dem Viereck und weist für dasselbe einen von Pappus in anderer Form (Buch 7, Satz 130) mitgetheilten und bewiesenen Lehrsatz nach, nämlich folgenden:

1. Jede Transversale, welche man in der Ebene eines Viereckes zieht, trifft die vier Seiten und die beiden Diagonalen in sechs Punkten, welche in Involution sind. Der Beweis ergiebt sich durch Betrachtung gleicher anharmonischer Verhältnisse.

In dem besonderen Falle, wo die Transversale durch die zwei Durchschnittspunkte jedes Paares der Gegenseiten geht, ist jeder dieser Punkte ein doppelter Punkt der Involution und desshalb theilen die Diagonalen in diesem Falle die Transversale in Beziehung auf jene Punkte harmonisch.

2. Der analoge Satz zu dem Vorhergehenden bezieht sich auf ein Strahlenbüschel von sechs Geraden, welche nach den vier Ecken und den beiden Durchschnittspunkten der Gegenseiten eines Viereckes gehen.

3. Liegt das Centrum der Strahlen unendlich entfernt, so projiciren die Strahlen die sechs Punkte eines Viereckes so auf jede Gerade, dass die sechs Projectionen sich in Involution befinden.

4. In Folge dieses Satzes lässt sich auch die Eigenschaft der Involution auf die beiden Paare von Gegenecken eines Viereckes und auf die Durchschnittspunkte der Gegenseiten eines Viereckes übertragen.

5. Denken wir uns die Transversale, welche die Seiten eines Viereckes durchschneidet, unendlich entfernt, so kommt die Richtung der Strahlen eines nach den Durchschnittspunkten der Transversale auslaufenden Strahlenbüschels mit der Richtung der Seiten und Diagonalen des Viereckes überein, so dass auch diese Seiten des Viereckes in Hinsicht auf ihre Winkel die Involutionsgleichungen von sechs Geraden zulassen.

II. Vom Dreieck.

Die vorhergehenden Sätze lassen sich theilweise auf das Dreieck übertragen.

1. Werden die Seiten eines Dreieckes von einer Transversale durchschnitten, die Durchschnittspunkte der letzteren nach den Ecken A, B, C, welche den Seiten gegenüberliegen, mit a, b, c bezeichnet und das durch die Transversale abgeschnittene Viereck als ursprünglicher Figurentheil betrachtet, so lässt sich auf die ganze Figur Satz (I., 4.) übertragen und es ist

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}=+1.$$

2. Zieht man durch jede Ecke eines Dreieckes eine beliebige Gerade nach der Gegenseite, so lässt sich durch Betrachtung der Dreiecke leicht nachweisen, dass jene Function der Segmente der analog gebildeten Function der Sinusse der an jenen Geraden gelegenen Winkel gleich ist. Unter Beibehaltung der angegebenen Bezeichnung ist also

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}=\frac{\sin aAB}{\sin aAC}\cdot\frac{\sin bBC}{\sin bBA}\cdot\frac{\sin cCA}{\sin cCB},$$

so dass

$$\frac{\sin aAB\,.\sin bBC\,.\sin cCA}{\sin aAC\,.\sin bBA\,.\sin cCB}=+1$$

ist, wenn jene Geraden nach den drei Durchschnittspunkten einer Transversale gehen.

3. Drei von den Ecken eines Dreiecks in einen Punkt O zusammenlaufende Gerade bilden ebenfalls mit den Seiten des Dreiecks ein Viereck, welches einen bei O einspringenden Winkel hat. Für die Seiten und Diagonalen des Viereckes gelten also die Involutionsgleichungen, welche aus (I.; 5.) folgen, und es ist mithin

$$\text{(a)} \qquad \frac{\sin OAB \cdot \sin OBC \cdot \sin OCA}{\sin OAC \cdot \sin OBA \cdot \sin OCB} = -1.$$

Nun findet aber zwischen den Segmenten der Dreiecksseiten und den Sinussen ihrer Gegenwinkel jene Relation (II., 2.) statt, folglich gilt auch für diese Segmente folgende Involutionsgleichung:

$$\text{(b)} \qquad \frac{aB.bC.cA}{aC.bA.cB} = -1.$$

4. Diese Lehrsätze erscheinen dann weiter als besondere Fälle eines allgemeineren Lehrsatzes, welcher sich auf zwei Dreiecke bezieht, von denen das eine dem anderen umschrieben ist. Ist nämlich abc das eine Dreieck und bezeichnet man die Ecken des ihm eingeschriebenen Dreiecks gleichmässig nach einer der zu beiden Seiten liegenden Ecken des um dasselbe beschriebenen Dreiecks mit A, B, C, so ist

$$\frac{Aa}{Ac} \cdot \frac{Bb}{Ba} \cdot \frac{Ca}{Cb} = -\frac{\sin aAC . \sin bBA . \sin cCB}{\sin aAB . \sin bBC . \sin cCA}.$$

Es folgt hierauf eine kurze Betrachtung der Homologie der Dreiecke, in welcher der Verfasser auf eine einfache Weise, vermittelst der Grundeigenschaften homographischer Strahlenbündel, die Bedingungen der Homologie und ihre gegenseitige Abhängigkeit nachweist.

Liegen nämlich zwei Dreiecke so, dass die ihre Spitzen verbindenden Geraden in einem Punkte zusammenlaufen, so durchschneiden sich ihre Seiten paarweise in Punkten, die auf einer einzigen Geraden liegen, und umgekehrt.

Der Satz lässt sich dadurch nachweisen, dass man zwei Ecken als Centra homographischer Strahlenbündel auffasst, je zwei von diesen Ecken auslaufende Seiten als Strahlen dieser Bündel und den Durchschnittspunkt des dritten Seitenpaares gleichzeitig als Durchschnittspunkt eines dritten Paares von Strahlen; es müssen dann die Durchschnittspunkte sämmtlicher Seitenpaare, nach den in (B.) mitgetheilten Erläuterungen, in einer Geraden liegen.

Den Durchschnittspunkt jener Geraden, auf welchen die Ecken der Dreiecke liegen, bezeichnet der Verfasser nach Poncelet als Centrum der Homologie, die Gerade, welche die Durchschnittspunkte der Seitenpaare enthält, als Axe der Homologie. Zwei homothetische oder ähnliche und zugleich ähnlich gelegene Dreiecke sind solche, deren Axe der Homologie sich in unendlicher Entfernung befindet.

Aus den im Vorhergehenden mitgetheilten allgemeinen Lehrsätzen vom Dreieck, welche als Grundlage der Theorie der Transversalen angesehen werden können, leitet der Verfasser mehrere besondere Eigenschaften des Dreiecks ab, deren Abhängigkeit von jenen allgemeineren Eigenschaften nur in zwei Fällen a. d. O. nachgewiesen werden soll.

Schneidet eine Transversale die Seiten eines Dreiecks, im Sinne der früheren Bezeichnungsweise, in den Punkten a, b, c, und sind die conjugirten harmonischen Punkte der letzteren a', b', c', so schneiden sich die drei Geraden, welche die letzteren Punkte beziehungsweise mit A, B, C verbinden, in einem Punkte.

Denn einmal ist

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1, \qquad \text{(II., 1.)}$$

ferner

$$\frac{aB}{aC} = -\frac{a'B}{a'C}, \quad \frac{bC}{bA} = -\frac{b'C}{b'A} \text{ etc.},$$

folglich

$$\frac{a'B}{a'C} \cdot \frac{b'C}{b'A} \cdot \frac{c'A}{c'B} = -1,$$

und desshalb schneiden sich Aa', Bb', Cc' in einem Punkte. (II., 3. b.)

Liegt die Transversale unendlich entfernt, so bezeichnen die Punkte a', b', c', wie sich aus der Betrachtung des harmonischen Verhältnisses leicht ergiebt, die Mitten der drei Dreiecksseiten, woraus sich der bekannte Satz ergiebt, dass die drei von den Ecken eines Dreieckes nach den Mitten der Gegenseiten gehenden Geraden sich in einem Punkte schneiden.

Aus dem allgemeinen Lehrsatz, welcher die Relation zwischen den Sinussen der Winkel dreier von den Ecken eines Dreiecks in einen Punkt zusammenlaufender Geraden enthält, ergeben sich sofort folgende Lehrsätze:

In einem Dreiecke treffen die drei Geraden, welche die Winkel des Dreiecks halbiren, in einem Punkte zusammen; dasselbe gilt auch von den drei Geraden, welche die Supplemente zweier Winkel und den dritten Winkel des Dreieckes halbiren.

In einem Dreiecke treffen die drei Geraden, welche die Supplemente der Dreieckswinkel halbiren, die Gegenseiten in drei Punkten, die in einer Geraden liegen; dasselbe gilt von den drei Geraden, welche zwei Dreieckswinkel und das Supplement des dritten halbiren.

III. Von den Vielecken.

Die Eigenschaften der Vielecke führen auf ähnliche Relationen, wie die am Dreieck entwickelten, so dass diese letzteren sich als besondere den folgenden allgemeineren unterordnen lassen.

1. Wenn eine Transversale, die in regelmässiger Aufeinanderfolge genommenen Seiten eines Vielecks $ABC\ldots.$ in den in derselben Ordnung genommenen Punkten $a, b, c\ldots.$ trifft, so findet stets folgende Relation statt:

$$\frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\ldots. = +1.$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass, wenn der Lehrsatz für ein Vieleck von n Seiten wahr ist, derselbe auch für ein Vieleck von $n+1$ Seiten gelten muss, woraus, mit Rücksicht darauf, dass derselbe für das Dreieck erwiesen ist, seine allgemeine Gültigkeit folgt.

In ähnlicher Weise ergiebt sich auch eine andere allgemeine Relation für das Vieleck, welche einer früheren am Dreieck nachgewiesenen entspricht, und folgender allgemeine Satz, in welchen sich beide zusammenfassen lassen:

Wenn man durch die Ecken eines Vieleckes $ABCDEF$ beliebige Gerade Aa, $Bb,\ldots.$ zieht, welche sich in den Ecken eines zweiten, dem ersteren eingeschriebenen Vieleckes von gleichviel Seiten schneiden, so findet stets folgende Relation statt, in welcher die Zeichen $+$ und $-$ sich auf eine gerade und ungerade Seitenanzahl beziehen:

$$\frac{Aa}{Af}\cdot\frac{Bb}{Ba}\ldots.\frac{Ff}{Fe} = \pm\frac{\sin aAF}{\sin aAB}\cdot\frac{\sin bBA}{\sin bBC}\ldots.\frac{\sin fFE}{\sin fFA}.$$

Aus den erwähnten Relationen leitet der Verfasser zwei andere Sätze ab, von denen der eine folgender ist:

Wenn man durch die Ecken eines Vieleckes $ABC\ldots$ beliebige Gerade Aa, Bb, $Cc\ldots.$ zieht und eine Transversale, welche die Seiten des ersteren in den Punkten α, β, $\gamma,\ldots.$ und jene Geraden in den Punkten $a, b, c,\ldots.$ trifft, so findet stets zwischen den Sinussen der Winkel, welche die Geraden mit den Seiten des Vielecks bilden, und den zwischen den Schenkeln dieser Winkel gelegenen Segmenten der Transversale folgende Relation statt:

$$\frac{\sin aAB}{\sin aAF}\cdot\frac{\sin bBC}{\sin bBA}\cdot\frac{\sin cCD}{\sin cCB}\ldots. = \pm\frac{a\alpha}{a\varphi}\cdot\frac{b\beta}{b\alpha}\cdot\frac{c\gamma}{c\beta}\ldots.$$

in welcher die Zeichen $+$ und $-$ sich auf eine gerade und ungerade Seitenanzahl des Vieleckes beziehen.

Der zweite Lehrsatz lässt sich so ausdrücken:

Nimmt man auf den Seiten eines Vieleckes $ABC\ldots.$ die Punkte a, b, $\ldots.$ und zieht von einem Punkte O Gerade nach den Ecken des Vielecks und nach jenen Punkten $a, b, \ldots.$, so findet zwischen den Sinussen der Winkel, welche diese Geraden unter sich bilden, und den bezüglichen Segmenten der Vielecksseiten folgende Relation statt:

$$\frac{\sin aOA}{\sin aOB}\cdot\frac{\sin bOB}{\sin bOC}\ldots. = \frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\ldots.$$

IV. Gleichungen für die gerade Linie und den Punkt.

Sind EA und $E'B'$ zwei feste Axen, auf welchen die Punkte A und B' willkürlich angenommen und die Punkte E und E' die Durchschnittspunkte sind, in welchen eine dritte Gerade PP' diese Axen trifft, so werden die Durchschnittspunkte zweier um die Pole P und P' sich drehender und jene beiden Axen schneidender Geraden eine gerade Linie beschreiben, wenn je zwei zusammengehörige Durchschnittspunkte auf den beiden Axen stets eine solche Lage zu den festen Punkten A und E, B' und E' haben, dass

$$\alpha\frac{Am}{Em}+\beta\frac{B'm'}{E'm'}=\nu, \tag{1}$$
(B., 3.)

ist und α, β, ν constante Coëfficienten sind.

Unter den gemachten Voraussetzungen gehört also Gleichung (1) einer geraden Linie an.

Liegt die Gerade, auf welcher sich die Pole befinden, in unendlicher Entfernung, so dass die Pm unter sich und ebenso die $P'm'$ parallel werden, so nimmt die Gleichung der geraden Linie folgende Gestalt an:

$$\alpha . Am+\beta . B'm'=\nu. \qquad \text{(B., 3. a.)}$$

Fallen die Punkte A und B' in einen Punkt O, den Durchschnittspunkt der Axen, zusammen, und ist jede der beiden Geraden, deren Durchschnittspunkte die gerade Linie erzeugen, einer der beiden Axen parallel, so stimmen die beiden Segmente Om und Om' durchaus mit den von **Descartes** in die analytische Geometrie eingeführten Coordinaten überein und es ergiebt sich aus dem Vorigen, dass die Gleichung des ersten Grades:

$$\alpha . x+\beta . y=\nu$$

die der geraden Linie ist.

Die Gleichung (1) lässt sich auch auf mehrere Axen AE, BE', CE'',.... und auf mehrere Pole P, P', P'',...., welche sich auf derselben Geraden befinden, ausdehnen, wodurch eine Gleichung von folgender Form entsteht:

$$\alpha\frac{Am}{Em}+\beta\frac{Bm'}{E'm'}+\gamma\frac{Cm''}{E''m''}+\ldots=\nu, \tag{2}$$

in welcher alle Coëfficienten bis auf zwei willkürlich sein können. Die Gültigkeit der Relation ergiebt sich, mit Rücksicht auf (1), daraus, dass dieselbe immer für $n+1$ Axen gilt, wenn sie für n Axen erwiesen ist.

Nimmt man auf den Axen AE, BE',.... beziehungsweise die festen Punkte R, R',.... an und setzt an die Stelle der Coëfficienten α, β,.... in der letzten Gleichung die Werthe

$$\left(\alpha_1 : \frac{AR}{ER}\right), \quad \left(\beta_1 : \frac{BR'}{E'R'}\right), \ldots,$$

so erhält man für die letzte Gleichung:

$$\alpha_1 \left(\frac{Am}{Em} : \frac{AR}{ER}\right) + \beta_1 \left(\frac{Bm'}{E'm'} : \frac{BR'}{E'R'}\right) + \ldots = \nu.$$

Aber auch die anharmonischen Verhältnisse der Gleichung lassen sich durch andere ersetzen, welche solchen Transversalen angehören, von denen jede durch denselben Punkt der dieser Gleichung angehörigen geraden Linie geht und ausserdem durch drei solche Strahlen, welche von einem Pole P nach den zugehörigen Punkten A, E, R gehen. Bezeichnet man ein solches neues anharmonisches Verhältniss, z. B. das mit dem ersten in der letzten Gleichung übereinstimmende, mit

$$\frac{aM}{eM} : \frac{a\varrho}{e\varrho},$$

so erhält die vorige Gleichung folgende Gestalt:

$$\alpha_1 \left(\frac{aM}{eM} : \frac{a\varrho}{e\varrho}\right) + \beta_1 \left(\frac{bM}{e'M} : \frac{b\varrho'}{e'\varrho'}\right) + \ldots = \nu.$$

Nehmen wir nun die Punkte ϱ, ϱ',.... als feste Pole und die Geraden A, B,...., auf welchen die Durchschnittspunkte der Transversalen a, b,.... liegen, als gegeben an, ferner diejenige Gerade, auf welcher die Punkte e, e',.... liegen, in unendlicher Entfernung, so erhält die Gleichung, mit Rücksicht darauf, dass jedes solches Verhältniss, wie $\frac{aM}{a\varrho}$, gleich dem Verhältniss der von den Punkten M und ϱ auf die Linie A gefällten Senkrechten ist, von welchen die letztere als constanter Werth in die Constanten der Gleichung aufgenommen werden kann, folgende Form:

$$\alpha . p + \beta . p' + \gamma . p'' + \ldots = \nu,$$

in welcher p, p',.... die von einem Punkte der geraden Linie auf die Geraden A, B,.... gefällten Senkrechten bezeichnen, und alle Coëfficienten, bis auf zwei, willkürlich genommen werden können.

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die von jedem Punkte einer geraden Linie auf feste Axen gefällten Senkrechten unter sich eine Relation vom ersten Grade bilden.

Gleichung für den Punkt. Wenn auf zwei Axen SA, SB, auf welchen A und B zwei feste Punkte bezeichnen, zwei variabele und zusammengehörige Punkte m, m' folgender Relation:

$$(1) \qquad \alpha . \frac{Am}{Sm} + \beta . \frac{Bm'}{Sm'} = \nu,$$

in welcher α, β, ν constant sind, Genüge leisten, so geht jede den

Punkten m, m' angehörige Gerade stets durch denselben Punkt ϱ, (B). Man kann daher die Gleichung (1) als Gleichung eines Punktes ϱ ansehen.

Sind die Axen SA, SB parallel, so ist die Gleichung folgende:

$$\alpha . Am + \beta . Bm' = \nu.$$

Ist $\nu = 0$, so drückt die Gleichung

$$\frac{Am}{Sm} = \mu . \frac{Bm'}{Sm'}$$

aus, dass A und B, als zwei homologe Punkte, eine Lage der sich um ϱ drehenden Geraden bezeichnen und dass der Punkt ϱ auf der Geraden AB liegt.

Die Gleichung (1) lässt sich, wie eine frühere, auch auf mehrere Axen SA, SB,.... ausdehnen und nimmt dann folgende Form an:

$$\alpha . \frac{Am}{Sm} + \beta . \frac{Bm'}{Sm'} + \gamma . \frac{Cm''}{Sm''} + ... = \nu,$$

in welcher alle Coëfficienten, bis auf zwei, willkürlich genommen werden können.

Erwägt man nun, dass alle solche Verhältnisse, wie $\frac{Am}{Sm}$, dem Verhältnisse der von den Punkten A, S auf die durch ϱ gehende Gerade gefällten Senkrechten gleich sind und bezeichnet die Distanzen der Punkte A, B, C, ... S von der Geraden ϱm mit p, p', p'', ... q, so wird die vorige Gleichung folgende Form erhalten:

$$\alpha . p + \beta . p' + \gamma . p'' + ... - \nu . q = 0.$$

Wenn sich also eine Gerade um einen Punkt bewegt, so bilden ihre Distanzen von mehreren anderen beliebigen Punkten eine homogene Relation des ersten Grades, in welcher alle Coëfficienten, bis auf zwei, willkürlich genommen werden können. Umgekehrt wird eine bewegliche Gerade in allen ihren Lagen durch denselben Punkt gehen, wenn die Distanzen derselben von mehreren festen Punkten stets unter sich eine homogene Relation des ersten Grades bilden.

Sind mehrere Punkte A, B, C,.... und die Constanten α, β, γ,.... gegeben, so kann man eine beliebig grosse Menge solcher Geraden ziehen, welche die Eigenschaft haben, dass die Summen derjenigen Producte, welche ihre Distanzen von diesen Punkten A, B,.... mit den zugehörigen Constanten α, β,.... bilden, gleich Null sind.

Denn fällt man von diesen Punkten auf eine Gerade Perpendikel, deren Fusspunkte a, b, c,.... sind, so lässt sich auf dieser Geraden immer ein Punkt ϱ_1 bestimmen, welcher folgender Gleichung genügt:

$$\alpha . a\varrho_1 + \beta . b\varrho_1 + \gamma . c\varrho_1 + \ldots = 0\ ^{*)}.$$

Zieht man nun durch den Punkt ϱ_1 eine mit jenen Perpendikeln parallele Linie, so wird für diese gerade Linie offenbar die Gleichung gelten:

$$\alpha . p + \beta . p' + \gamma . p'' + \ldots = 0,$$

in welcher $p, p', \ldots$ die Distanzen der Geraden von den Punkten $A, B, \ldots$ bezeichnen. Es folgt dann aus dem vorigen Satze zugleich, dass alle auf diese Weise bestimmten Linien einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt ϱ haben werden.

Sind also mehrere beliebige Punkte $A, B, C, \ldots$ und die Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gegeben, so giebt es immer einen gewissen Punkt ϱ von der Beschaffenheit, dass, wenn man durch diesen Punkt eine beliebige Gerade zieht, die Summe der Producte, welche man aus ihren Distanzen von jenen Punkten $A, B, \ldots$ und den zugehörigen Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ bilden kann, immer gleich Null ist.

Sind die Punkte $A, B, \ldots$ materielle Punkte, deren Massen durch die Constanten α, β, γ bezeichnet werden, so ist ϱ der Schwerpunkt dieses Systems von Punkten.

Projicirt man ein System solcher Punkte $A, B, \ldots$ und den Schwerpunkt ϱ durch parallele Gerade auf eine andere Gerade, und sind die Projectionen $a, b, \ldots \varrho_1$, so gilt für die Abstände der Punkte $a, b, \ldots$ von ϱ_1 offenbar die Gleichung

$$\alpha . a\varrho_1 + \beta . b\varrho_1 + \gamma . c\varrho_1 + \ldots = 0,$$

durch welche sich ϱ_1 als Schwerpunkt der Projectionen von jenen Punkten $A, B, \ldots$ zu erkennen giebt, und zugleich ein Verfahren, den Schwerpunkt eines Systems von Punkten $A, B, \ldots$ dadurch zu finden, dass man diese Punkte auf zwei Gerade projicirt und die Schwerpunkte der erhaltenen Projectionen bestimmt. Die beiden so erhaltenen Punkte sind die Projectionen des gesuchten Schwerpunktes.

---

*) Die in obiger Gleichung enthaltene Behauptung möchte sich wohl am einfachsten aus folgender Gleichung ableiten lassen, deren Richtigkeit sich von selbst versteht:

$$\alpha . (a\varrho_1 + \varrho_1 a) + \beta . (b\varrho_1 + \varrho_1 a + ab) + \gamma . (c\varrho_1 + \varrho_1 a + ac) + \ldots = 0,$$

oder

$$\alpha . a\varrho_1 + \beta . b\varrho_1 + \gamma . c\varrho_1 + \ldots + \beta . ab + \gamma . ac + \ldots + (\alpha + \beta + \gamma + \ldots) . \varrho_1 a = 0,$$

so dass für

$$\alpha . a\varrho_1 + \beta . b\varrho_1 + \gamma . c\varrho_1 + \ldots = 0$$

sich von selbst ergiebt:

$$\beta . ab + \gamma . ac + \ldots = (\alpha + \beta + \gamma + \ldots) . a\varrho_1 .$$

XXVII.

Beweis des Lehmus'schen Satzes: „Wenn die Geraden, die die zwei Winkel eines Dreiecks halbiren und die gegenüberliegenden Seiten schneiden, bis zu diesen Durchschnitten gleich sind und gleichartig liegen, so sind die beiden halbirten Winkel sich gleich."

Von

Herrn Hofrath Dr. Clausen zu Dorpat.

Die Beweise dieses Satzes, der vor etwa 10 Jahren aufgestellt wurde, sind so mannichfaltig und von so Vielen versucht, dass sie fast eine eigene kleine Literatur bilden, ähnlich denen des Pythagoräischen Lehrsatzes und der Theorie der Parallellinien. Noch neulich ist im letzten November-Heft des „Philosophical Magazine" von vielen Beweisen dieses Satzes die Rede, die vor Kurzem in England als ganz neu aufgestellt wurden. Es ist daher nicht leicht möglich, alle Beweise desselben zu kennen, weshalb ich eine billige Entschuldigung hoffe, falls ich schon Bekanntes wiederholen sollte.

Es seien die Winkel DAB und CBA (Taf. IV. Fig. 1.) durch die Geraden AC und BD halbirt, der Durchschnitt dieser beiden Geraden sei G. Nach der Aussage des Satzes ist

$$AG+GC=BG+GD;$$

also

$$AG-GD=BG-GC.$$

Hinfolglich ist immer gleichzeitig AG grösser als GD und BG grösser als GC; oder AG kleiner als GD und BG kleiner als GC.

Erster Fall. Wenn $AG > GD$.

Sei $GF = GD$, $GE = GC$. Zieht man DF und CE, so entstehen zwei gleichschenklichte Dreiecke FGD und EGC, die gleiche Scheitelwinkel in G haben und also auch gleiche Winkel an der Grundlinie. Es ist also auch Winkel AFD = Winkel BEC.

Gesetzt nun, die Winkel DAB und CBA wären nicht gleich, sondern Winkel $CBA >$ Winkel DAB; also auch die Hälften, Winkel $DBA >$ Winkel CAB. In diesem Falle wäre $AG > GB$, und also, da $AF = AG - GD = BG - GC = BE$, wäre auch $FG > GE$. Mithin, da beide Dreiecke FGD und EGC ähnlich sind: $FD > CE$. Es sei $FH = EC$, dann ist in den Dreiecken HFA und CEB: $AF = BE$, $FH = EC$, Winkel AFD = Winkel BEC, also beide Dreiecke gleich und Winkel HAF = Winkel CBE. Demnach Winkel $DAF >$ Winkel CBE, und also auch Winkel $DAB >$ Winkel CBA, welches unserer Annahme widerstreitet. Es muss also Winkel DAB = Winkel CBA sein.

Zweiter Fall. Wenn $AG \overline{<} GD$.

Es sei also (Taf. IV. Fig. 2.) Winkel DAC = Winkel CAB, Winkel CBD = Winkel DBA und $AC = BD$. Die Winkel DBC und CAD sind immer spitz, weil jeder doppelt genommen kleiner als zwei Rechte ist. Ebenfalls da DG nicht kleiner als AG und CG nicht kleiner als BG, so ist der Winkel GDA nicht grösser als GAD und der Winkel GCB nicht grösser als GBC, mithin beide spitze Winkel. Die Senkrechten GJ auf DA und GK auf BC fallen also, jene zwischen A und D, und diese zwischen B und C. Es sei GH senkrecht auf AB, so ist, weil Winkel GBH = Winkel GBK, $GH = GK$. Ebenso, weil Winkel GAH = Winkel GAJ: $GH = GJ$. Demnach $GK = GJ$.

Ich gebrauche jetzt folgenden, sehr leicht zu beweisenden Hülfssatz:

„Wenn in zwei rechtwinklichten Dreiecken eine Cathete des einen der entsprechenden Cathete des andern gleich ist, so ist von den diesen Catheten gegenüber liegenden Winkeln derjenige der kleinere, der an der grössern Hypotenuse liegt."

Da in unserer Figur $AG + GC = BG + GD$, so ist ebenfalls $AG - BG = DG - CG$. Es sei also, wenn möglich, $AG > BG$, so ist auch $DG > CG$. Weil nun $GJ = GK$, so ist vermöge des Hülfssatzes:

$$\text{Winkel } GAD < \text{Winkel } GBC;$$
$$\text{„} \quad GDA < \text{„} \quad GCB.$$

Es ist aber auch

$$\text{Winkel } DGA = \text{Winkel } CGB.$$

Addirt man diese drei Bestimmungen, so erhält man die Summe der drei Winkel des Dreiecks AGD kleiner als die Summe der drei Winkel des Dreiecks BGC, welches widersinnig ist. Es muss also $AG=BG$ sein, wie im ersten Falle.

Wenn die äussern Winkel halbirt sind und die halbirenden Geraden sich blos auf ihrer Verlängerung schneiden, sei (Taf. IV. Fig. 3.) Winkel $CAM=$ Winkel CAD; Winkel $DBL=$ Winkel DBC; und $AC=BD$. Es schneiden sich die verlängerten AC und BD in G. Fällt man von G auf AD, BC und AB die senkrechten Geraden GJ, GK, GH, so ist, da Winkel $DBL=$ Winkel GBH $=$ Winkel $DBC=$ Winkel GBK: $GH=GK$. Eben so, weil Winkel $CAM=$ Winkel $HAG=$ Winkel $CAD=$ Winkel GAJ: $GH=GJ$. Also auch $GJ=GK$. Es sei nun, wenn möglich, $AG>BG$, also auch, da $CA=BD$, $GC>GD$. Hinfolglich in den rechtwinklichten Dreiecken CGK und DGJ, da $GK=GJ$, vermöge des Hülfssatzes: Winkel $GCK<$ Winkel GDJ. Eben so ist in den rechtwinklichten Dreiecken GAJ und GBK Winkel $GAJ=$ Winkel $CAD<$ Winkel GBK oder Winkel DBC. Da nun in den Dreiecken ANC und BND die Winkel an N sich gleich sind, so würde die Summe der drei Winkel des Dreiecks ANC kleiner als die Summe der drei Winkel des Dreiecks BND sein, welches widersinnig ist. Es muss also $AG=BG$ sein, also auch Winkel $GAB=$ Winkel GBA oder Winkel $CAM=$ Winkel $CAD=$ Winkel $DBL=$ Winkel CBD, mithin Winkel $CBL=$ Winkel DAM.

Für diese drei Fälle, welches die einzigen sind, in denen die gleichen halbirenden Geraden gleichartig liegen, ist also die Richtigkeit des Satzes erwiesen.

XXVIII.

Neues Theorem über den Grenzübergang in unendlichen Reihen.

Von
Herrn Doctor F. Arndt,
Lehrer an der Realschule zu Stralsund.

Zu den drei in diesem Theile des Archivs S. 43 von mir entwickelten Theoremen, betreffend die Grenzübergänge in unendlichen convergenten Reihen, füge ich noch ein viertes von ziemlich ausgedehnter Anwendung.

„Es seien $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, etc. Funktionen von x, die sich bestimmten endlichen Grenzen $\mathrm{Lim}\,\varphi_1(x)$, $\mathrm{Lim}\,\varphi_2(x)$, $\mathrm{Lim}\,\varphi_3(x)$ etc. nähern, wenn x gegen die Grenze ξ geht und von einem gewissen Werth des x an immer positiv ausfallen, jede dieser Funktionen sei ferner kleiner als die vorhergehende, und $\varphi_n(x)$ werde unendlich klein, indem n unendlich gross wird, so dass also die Reihe

$$(1) \qquad \varphi_1(x) - \varphi_2(x) + \varphi_3(x) - \text{etc.}$$

für alle x in der Nähe von ξ convergent ist. Wenn nun

$$(2) \qquad \mathrm{Lim}\,\varphi_1(x) - \mathrm{Lim}\,\varphi_2(x) + \mathrm{Lim}\,\varphi_3(x) - \text{etc.}$$

ebenfalls eine convergente Reihe ist, so wird ihre Summe $= \mathrm{Lim} f(x)$ sein, indem $f(x)$ die Summe der Reihe (1) ist."

Um dies zu erweisen, bezeichnen wir allgemein

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) + \ldots \pm \varphi_m(x) \text{ mit } s_m,$$

$$\mathrm{Lim}\,\varphi_1(x) - \mathrm{Lim}\,\varphi_2(x) + \ldots \pm \mathrm{Lim}\,\varphi_m(x) \text{ mit } \sigma_m.$$

Für beliebige Werthe von n und x ist dann $s_{2n} < f(x) < s_{2n+1}$. Da σ_m sich der Grenze $L = \mathrm{Lim}\,\varphi_1(x) - \mathrm{Lim}\,\varphi_2(x) + \text{in inf.}$ nähert, wenn m ins Unendliche wächst, so kann man, indem ε eine beliebig kleine positive, aber constante Grösse bedeutet, n so gross nehmen, dass gleichzeitig $\sigma_{2n} > L - \frac{1}{2}\varepsilon$ und $\sigma_{2n+1} < L + \frac{1}{2}\varepsilon$ ist. Da ferner $s_m - \sigma_m$ bei constant bleibendem m mit $\xi - x$ unendlich klein gemacht werden kann, so kann man $\xi - x$ hinreichend klein nehmen, damit gleichzeitig $s_{2n} > \sigma_{2n} - \frac{1}{2}\varepsilon$ und $s_{2n+1} < \sigma_{2n+1} + \frac{1}{2}\varepsilon$ werde. Hieraus folgt $s_{2n} > L - \varepsilon$ und $s_{2n+1} < L + \varepsilon$, also ist nach dem Obigen auch

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \text{ oder } -\varepsilon < f(x) - L < +\varepsilon.$$

Dies Resultat zeigt an, dass $f(x) - L$ beliebig klein gemacht werden kann, wenn man nur $\xi - x$ hinreichend klein macht; folglich ist $L = \mathrm{Lim} f(x)$.

Ein ähnliches Theorem ist das folgende:

„Es sei $f(x, n) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) + \varphi_3(x) - \ldots \pm \varphi_n(x)$ eine endliche Reihe, deren Glieder Funktionen von x sind, es sei aber die Anzahl der Glieder (n) eine Funktion von x, so dass n immerwährend wächst und unendlich gross wird, indem x sich dem Werthe ξ nähert; wie viel Glieder die Reihe nun auch haben mag, wir nehmen an, dass sie abwechselnde Vorzeichen haben, absolut immer kleiner und unendlich klein werden. Wenn unter diesen Voraussetzungen

$$\mathrm{Lim}\,\varphi_1(x) - \mathrm{Lim}\,\varphi_2(x) + \mathrm{Lim}\,\varphi_3(x) - \text{etc.}$$

eine unendliche convergente Reihe ist, so wird ihre Summe $= \operatorname{Lim} f(x, n)$ sein.“

Dies zu erweisen, bezeichnen wir, wie oben, allgemein $f(x, m)$ mit s_m und $\operatorname{Lim} \varphi_1(x) - \operatorname{Lim} \varphi_2(x) + \ldots \pm \operatorname{Lim} \varphi_m(x)$ mit σ_m. Bedeutet nun m eine ganze Zahl, so dass $2m + 1 < n$ ist, so hat man $s_{2m} < s_n < s_{2m+1}$. Ist die Summe der unendlichen Reihe $\operatorname{Lim} \varphi_1(x) - \operatorname{Lim} \varphi_2(x) + \text{etc.} = L$, ε eine positive beliebig kleine Grösse, so kann man m gross genug nehmen, dass gleichzeitig $\sigma_{2m} > L - \frac{1}{2}\varepsilon$ und $\sigma_{2m+1} < L + \frac{1}{2}\varepsilon$ werde; ferner kann man bei constant bleibendem m die Grösse $\xi - x$ klein genug nehmen, dass gleichzeitig $s_{2m} > \sigma_{2m} - \frac{1}{2}\varepsilon$ und $s_{2m+1} < \sigma_{2m+1} + \frac{1}{2}\varepsilon$ werde. Hienach ist $s_{2m} > L - \varepsilon$ und $s_{2m+1} < L + \varepsilon$; wenn nun n grösser als $2m+1$ gedacht wird, so folgt nach dem Obigen

$$L - \varepsilon < s_n < L + \varepsilon \text{ oder } -\varepsilon < s_n - L < +\varepsilon,$$

folglich

$$L = \operatorname{Lim} s_n = \operatorname{Lim} \{\varphi_1(x) - \varphi_2(x) + \ldots \pm \varphi_n(x)\}.$$

Eine specielle Anwendung von diesem Theoreme kommt in der Abhandlung von Dirichlet vor, betitelt: „Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.“ (Crelle's Journal Band IV. p. 157.) Bedeutet nämlich h eine positive Zahl nicht grösser als $\frac{\pi}{2}$, $f(\beta)$ eine von $\beta = 0$ bis $\beta = h$ stetige, positiv bleibende und fortwährend abnehmende Funktion von β, so kommt es in dieser Abhandlung darauf an, die Grenze des bestimmten Integrals

$$\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} f(\beta) \partial\beta$$

zu bestimmen, indem die positive Grösse i ins Unendliche wächst. Zu dem Ende theilt Dirichlet das Integral wie folgt:

$$\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} f(\beta)\partial\beta = \int_0^{\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} f(\beta)\partial\beta + \int_{\frac{\pi}{i}}^{\frac{2\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} f(\beta)\partial\beta + \ldots$$

$$\ldots + \int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\nu\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} f(\beta)\partial\beta + \int_{\nu\frac{\pi}{i}}^{h} \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} f(\beta)\partial\beta,$$

wo $\frac{\nu\pi}{i}$ das grösste in h enthaltene Vielfache von $\frac{\pi}{i}$ ist.

Die Integrale rechter Hand sind abwechselnd positiv und negativ, jedes derselben ist absolut kleiner als das vorhergehende.

Wird i grösser, so ändern sie immerwährend ihre Werthe, während ihre Anzahl in's Unendliche wächst.

Die Grenze des Integrals $\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\nu\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta$ findet sich

$$=f(0)\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin\gamma}{\gamma}\partial\gamma.$$

Nach unserm Theorem ist folglich

$$\mathrm{Lim}\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta$$

$$=f(0)\left(\int_0^{\pi}\frac{\sin\gamma}{\gamma}\partial\gamma+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin\gamma}{\gamma}\partial\gamma+\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin\gamma}{\gamma}\partial\gamma+\text{ in inf.}\right)$$

$$=f(0)\int^{\infty}\frac{\sin\gamma}{\gamma}\partial\gamma=\frac{\pi}{2}f(0).$$

Abel hat in seinen Untersuchungen über die Binomialreihe (Crelle's Journal Band I. p. 311 ff.) einige Sätze über die Stetigkeit und Convergenz der unendlichen Potenzreihen aufgestellt, die wir in dem Umfange, der ihnen dort gegeben wird, gegenwärtig noch nicht für begründet halten können. Abel sagt erstens (Lehrsatz IV.): „Wenn die unendliche Reihe $a_0 + a_1x + a_2x^2 +$ etc. für einen gewissen Werth von x (δ) convergent ist, so wird sie auch für jeden (absolut) kleineren Werth von x convergiren.“ Zweitens: „Innerhalb der Grenzen der Convergenz ist die Reihe überall eine stetige Funktion von x.“ — Die gegebenen Beweise sind entschieden unrichtig, wie der Leser leicht finden wird; aus dem Beweise für den ersten Satz geht u. A. blos hervor, dass die Reihe nicht unendlich gross ist, wobei sie aber oscilliren kann.

Nach meinen bisherigen Untersuchungen über diesen Gegenstand in diesem Bande des Archivs a. a. O. ist nur festgestellt, dass die unendliche Potenzenreihe $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)$ in dem Intervall der Convergenz überall eine stetige Funktion von x ist, wenn die Convergenz noch statt findet, nachdem alle Glieder auf ihre numerischen Werthe reducirt sind. Nach dem ersten Theorem kann man diese letztere Bedingung fallen lassen, wenn die Glieder abwechselnde Zeichen haben, fortwährend kleiner und unendlich klein werden.

Die erwähnte Bedingung wird indessen in der Regel erfüllt sein. Sind nämlich $A_0, A_1, A_2, \ldots$ die absoluten Werthe der Coefficienten, so können drei Fälle unterschieden werden, nämlich

1) Das Verhältniss $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ bleibt bei unendlich werdendem n kleiner als eine bestimmte endliche Grösse L (wobei es sich einer Grenze nicht zu nähern braucht), alsdann convergirt die Reihe der absoluten Werthe sicher zwischen $x = -\frac{1}{L}$ und $x = +\frac{1}{L}$, und unser Theorem findet Anwendung.

2) Das Verhältniss wird unendlich gross; alsdann convergirt die Reihe für keinen Werth von x und von Stetigkeit kann demnach auch nicht die Rede sein. Dahin gehört z. B. die Reihe $x + 1.2x^2 + 1.2.3x^3 + 1.2.3.4x^4 +$ etc.

3) Es findet weder der erste Fall statt, noch der zweite. Unter dieser Voraussetzung können wir gegenwärtig weder über die Convergenz noch über die Stetigkeit etwas Allgemeines feststellen. Reihen dieser Art kommen in der Analysis freilich selten vor. Eine solche Reihe wäre $x + \frac{1}{2}x^2 + 2x^3 + \frac{1}{4}x^4 + 3x^5 + \frac{1}{6}x^6 +$ etc., welche offenbar convergent ist von $x = -1$ bis $x + 1$.

Es wird häufig behauptet, dass zwei unendliche Reihen $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$, $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$ identisch sein müssen, also $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ etc., wenn sie in einem Intervall von $x = 0$ bis $x = i$ convergent bleiben und für dieselben Werthe von x immer gleiche Werthe haben. Dies müsste darauf beruhen, dass die Summe der unendlichen convergenten Reihe $\gamma_1x + \gamma_2x^2 + \gamma_3x^3 + \ldots$ mit x zugleich gegen Null convergirt. Aber dies muss noch zweifelhaft bleiben in den Fällen (ob solche Fälle möglich, ist freilich auch noch fraglich), wo die Reihe nicht mehr convergent bleibt, wenn man alle Glieder auf die numerischen Werthe reducirt.

XXIX.

Lösung einer Aufgabe aus der Zahlentheorie auf geometrischem Wege.

Von

Herrn Dr. H. Burhenne,

Lehrer der Mathematik an der höheren Gewerbeschule in Cassel.

Auf drei sich rechtwinklig schneidenden Axen werden vom gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte aus die den ganzen Zahlen x, y, z entsprechenden Längen abgetragen, und zwar kann dies in jedem der durch die sechs Axen-Abschnitte bestimmten acht Raumoctanten geschehen. Drei solche Axenabschnitte in irgend einem Octanten bestimmen die Dimensionen eines rechtwinkligen Parallelepipedes, dessen Eckdurchmesser mit R bezeichnet werde, so dass

$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

ist. Denkt man sich x, y, z als Grössen von Kräften in den Richtungen der drei Axen, so stellt R die Resultirende vor. Der Strahl R bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinus in demselben Verhältnisse wie die Grössen x, y, z stehen. Indem x, y, z sich ändern, resultiren vom Durchschnittspunkte der Axen als Anfangspunkte aus unzählig viele Strahlen, deren Längen R theils rational, theils irrational sind und welche untereinander theils in rationalem, theils in irrationalem Verhältnisse stehen. Es sollen nun allgemein zwei Strahlen, deren Verhältniss ein rationales ist, untersucht werden. Wir betrachten irgend einen Strahl R', für welchen die Grössen x, y, z die bestimmten Werthe a, b, c haben, so dass

$$R'=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

ist, und suchen dazu alle möglichen Resultirenden

$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

unter der Bedingung, dass R und R' in einem rationalen Verhältnisse zu einander stehen, das heisst, wir verlangen die Auflösung der unbestimmten Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=(a^2+b^2+c^2)v^2$$

in ganzen Zahlen, wo a, b, c constante und x, y, z, v veränderliche ganze Zahlen bedeuten.

Um diese Aufgabe auf geometrischem Wege zu lösen, haben wir nur die einfachsten Eigenschaften eines solchen Strahlenvereines in's Auge zu fassen.

Jeden der unzähligen Strahlen, für welchen das Verhältniss der x, y, z ein rationales, also in ganzen Zahlen ausdrückbares ist, wollen wir kurz einen gesetzlichen Strahl nennen. Zwei Strahlen, welche in derselben geraden Linie auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes liegen, haben gleiche Länge. Sind zwei Strahlen gesetzliche, so ist auch der zu beiden senkrechte Strahl ein gesetzlicher. Zerlegt man einen gesetzlichen Strahl (wie beim Parallelogramme oder Parallelepipede der Kräfte) in irgend andere gesetzliche Strahlen, so werden von diesen rationale (ganze oder gebrochene) Vielfache ihrer Länge abgeschnitten. Nimmt man von gesetzlichen Strahlen rationale Vielfache ihrer Länge, so ist der resultirende Strahl ein gesetzlicher und seine Länge ist ein Vielfaches derjenigen Länge, womit er aus den Grundaxen resultirt. Nun ergiebt sich leicht Folgendes:

Sind irgend zwei Strahlen R und R' gesetzliche von gleicher Grundlänge, so ist auch der ihren Winkel halbirende Strahl R'' ein gesetzlicher.

Wird der Winkel zweier Strahlen R und R' vom Strahle R'' halbirt und es sind R und R'' gesetzliche Strahlen, so ist auch R' ein gesetzlicher Strahl, welcher mit R in einem rationalen Verhältnisse steht. Nämlich da R und R' symmetrisch liegen in Beziehung auf R'', so zerlegt sich R in den Strahl R'' und den dazu senkrechten Strahl r, der auch ein gesetzlicher ist, auf gleiche Weise, wie eine gleiche Länge von R' sich zerlegt in R'' und den Gegenstrahl von r, der auch ein gesetzlicher ist.

Um also zu einem gegebenen Strahle R' sämmtliche Strahlen R zu finden, welche zu R' in rationalem Verhältnisse stehen, braucht man nur irgend einen gesetzlichen Strahl R'' zu nehmen und R so zu legen, dass R'' den Winkel von R und R' halbirt.

Die Projectionen des Strahles R' auf die Axen seien a, b, c, die des Strahles R'' seien m, n, p, wo m, n, p beliebige ganze Zahlen vorstellen und die Projectionen des Strahles R seien x, y, z. Wenn nun R'' den Winkel der beiden anderen Strahlen halbirt, so erhält man für das Verhältniss der x, y, z aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie:

$$x=2m(am+bn+cp)-a(m^2+n^2+p^2),$$
$$y=2n(am+bn+cp)-b(m^2+n^2+p^2),$$
$$z=2p(am+bn+cp)-c(m^2+n^2+p^2).$$

Diese Werthe lösen die obige Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=(a^2+b^2+c^2)v^2$$

in ganzen Zahlen auf, wobei es natürlich nur auf das Verhältniss der x, y, z (abgesehen vom Vorzeichen) ankommt.

Man erhält:

$$x^2+y^2+z^2=(a^2+b^2+c^2)(m^2+n^2+p^2)^2.$$

Da in demselben Raumoctanten Strahlen von jeder Länge auftreten, so braucht man für m, n, p keine negativen, sondern nur alle möglichen positiven ganzen Zahlen zu setzen.

Die vorstehende Betrachtung könnte auch auf eine verallgemeinerte Weise dargestellt werden, aber ich wollte hier nur auf die Idee hindeuten, wie die geometrischen Eigenschaften eines solchen Strahlenvereines zur Auffindung numerischer Gesetze benutzt werden können.

XXX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von
Herrn Professor Dr. Oskar Schlömilch,
an der polytechnischen Schule zu Dresden.

In der zweiten Auflage von Herrn Professor Kunze's schätzbarem Lehrbuche der Geometrie findet sich S. 231 nachstehende historische Notiz:

„Albert Gerhard stellt in seinen Zusätzen zu Stevin's Werken (Les Oeuvres Mathématiques de Simon Stevin etc. par Albert Girard. A Leyde 1634, fol. pag. 169) folgende Reihe von Zahlen auf, in welcher jedes Glied, vom dritten an, durch Addition der beiden vorhergehenden (Glieder) gebildet wird:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

und behauptet von ihr, dass je drei aufeinander folgende Zahlen näherungsweis die Verhältnissglieder einer nach stetiger Proportion getheilten Linie darstellen. Wenn z. B. die ganze Linie 89 ist, so ist näherungsweis 55 der grössere und 34 der kleinere Abschnitt, indem beinahe die Proportion gilt 89:55 = 55:34 u. s. w.

Bezeichnen wir die obigen Zahlen der Reihe nach mit T_0, T_1, T_2, etc., so ist einerseits

$$(1)\qquad T_0=0,\ T_1=1,\ T_{n+2}=T_{n+1}+T_n;$$

andererseits für unendlich wachsende n:

$$(2)\qquad \operatorname{Lim}\frac{T_n}{T_{n+1}}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\ \text{ oder }\ \operatorname{Lim}\frac{T_{n+1}}{T_n}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Für den Beweis der letzteren Eigenschaft beruft sich Herr Professor Kunze auf die Verwandlung von $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ in einen Kettenbruch, doch ist dies ein unnöthiger Umweg, denn die Gleichung (2) folgt unmittelbar aus der Beziehung $T_{n+2}=T_{n+1}+T_n$. Einiges Interesse dürfte vielleicht die independente Form der obigen Zahlen besitzen; ich theile sie hier mit, weil sie in dem obigen Werke nicht angegeben ist und weil ihre Herleitung insofern eine passende Schüleraufgabe bildet, als es dazu nur der Kenntniss des binomischen Satzes für ganze positive Exponenten und der unendlichen Reihe für $\frac{1}{1-z}$ bedarf.

Bezeichnen wir die Binomialcoëfficienten 1, m, $\frac{1}{2}m(m-1)$, u. s. w. mit $(m)_0$, $(m)_1$, $(m)_2$ etc., so ist

$$(3)\qquad T_{n+1}=(n)_0+(n-1)_1+(n-2)_2+(n-3)_3+\dots$$

oder auch

$$(4)\qquad T_n=\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

Etwas allgemeiner wird die Sache, wenn man die Zahlenreihe U_0, U_1, U_2, etc. nach dem Gesetze

$$(5)\qquad U_0=0,\ U_1=1,\ U_{n+2}=\alpha U_{n+1}+\beta U_n$$

bildet; es ist dann für positive α und β:

$$(6)\qquad U_{n+1}=(n)_0\alpha^n+(n-1)_1\alpha^{n-2}\beta+(n-2)_2\alpha^{n-4}\beta^2 + (n-3)_3\alpha^{n-6}\beta^3+\dots$$

und auch

$$(7)\qquad U_n = \frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta})^n-(\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta})^n}{2^n\sqrt{\alpha^2+4\beta}}.$$

Bildet man endlich die Zahlenreihe V_0, V_1, V_2,.... auf die Weise, dass V_0 und V_1 ganz beliebig bleiben und die übrigen Glieder nach der Formel $V_{n+2}=\alpha V_{n+1}+\beta V_n$ bestimmt werden, so gilt die Gleichung:

$$(8)\qquad V_n = V_0 U_{n+1} + (V_1-\alpha V_0)U_n,$$

worin U die vorige Bedeutung hat. Man kann dafür auch schreiben:

$$(9)\qquad V_n = V_0 P_n + V_1 Q_n,$$

und darin ist

$$(10)\qquad \begin{cases} P_n=(n-2)_0\alpha^{n-2}\beta+(n-3)_1\alpha^{n-4}\beta^2+(n-4)_2\alpha^{n-6}\beta^3+\ldots \\ Q_n=(n-1)_0\alpha^n+(n-2)_1\alpha^{n-2}\beta+(n-3)_2\alpha^{n-4}\beta^2+\ldots \end{cases}$$

wie aus dem Obigen unmittelbar folgt; ebenso leicht findet man geschlossene Formen für P_n und Q_n.

XXXI.

Miscellen.

Schreiben des Herrn Director Nagel an der Realschule zu Ulm an den Herausgeber.

Der bekannte Lehrsatz: **Wenn die Halbirungslinien zweier Winkel eines Dreiecks einander gleich sind, so ist das Dreieck gleichschenklig**, hat seiner Zeit viele Federn in Bewegung gesetzt, ohne dass, so viel mir bekannt ist, ein Beweis gefunden worden wäre, welcher den Namen eines wahrhaft elementaren vom Standpunkte der reinen Geometrie aus verdiente. Ich glaube, dass es mir gelungen ist, einen solchen zu finden, und bitte Sie, denselben in Ihre geschätzte Zeitschrift aufzunehmen, wenn Sie ihn für werth halten, die Aufmerksamkeit Anderer auf sich zu ziehen.

Ich gehe von zwei bekannten Eigenschaften der Halbirungslinie eines Winkels aus, welche in Beziehung auf die nebenstehende Figur sich wie folgt ausdrücken lassen:

Wenn (Taf. IV. Fig. 4.) im Δ *ABC* ein Winkel *ABC* durch *BD* halbirt, die Halbirungslinie verlängert wird, bis sie den um Δ *ABC* beschriebenen Kreis in *E* trifft und *CE* gezogen wird, so ist

$$1)\ BD.BE = AB.BC,\quad 2)\ BE.DE = CE^2.$$

Das erste ergibt sich bekanntlich einfach aus der Aehnlichkeit der Dreiecke *BCE* und *ABD*, das zweite ebenso aus der Aehnlichkeit von Δ *CDE* und Δ *BCE*.

Beides vorausgesetzt ergeben sich folgende zwei einfache Lehrsätze:

Lehrsatz I.

Wenn (Taf. IV. Fig. 5.) die Halbirungslinien *BD*, *CF* der beiden Winkel *ABC*, *ACB* eines Dreiecks *ABC* einander gleich sind, so sind auch ihre Verlängerungen *DE*, *FG* bis an die Peripherie des um Δ *ABC* beschriebenen Kreises einander gleich.

Beweis.

Wäre *DE* nicht $=FG$, so wäre $DE \gtrless FG$. Im ersten Falle wäre auch $BE > CG$, weil $BD = CF$ ist, also wäre $BE.BD > CG.CF$ und $BE.DE > CG.FG$. Daher wäre auch $AB.BC > AC.BC$ (s. oben Satz 1.) und $CE^2 > BG^2$ (s. oben Satz 2.). Wegen des ersten wäre $AB > AC$, wegen des zweiten aber $CE > BG$, also auch $\angle CBE < \angle BCG$ *), folglich auch $2\angle CBE > 2\angle BCG$, d. h. $\angle ABC > \angle ACB$, und daher $AC > AB$; folglich, da nicht beides zugleich stattfinden kann, kann auch *DE* nicht $> FG$ sein. Ebenso wird bewiesen, dass *DE* nicht $< FG$ sein kann, weil sonst wieder zugleich $AB < AC$ und $AC < AB$ sein müsste. Folglich muss $DE = FG$ sein.

Lehrsatz II.

Wenn die Halbirungslinien *BD*, *CF* der beiden Win-

---

*) Weil nämlich *CBE* als Peripheriewinkel auf einem grösseren Bogen steht als der Peripheriewinkel *BCG*. G.

kel ABC, ACB eines Dreiecks ABC einander gleich sind, so sind diese Winkel selbst einander gleich oder $\Delta\, ABC$ ist gleichschenklig.

Beweis.

Da $BD = CF$ ist, so ist (nach dem vorigen Lehrsatze) auch $DE = FG$, also auch $BE = CG$, folglich $BE.DE = CG.FG$, d. h. $CE^2 = BG^2$, also ist auch $CE = BG$, und daher $\angle\, CBE = \angle\, BCG$, also auch $2\angle\, CBE = 2\angle\, BCG$, d. h. $\angle\, ABC = \angle\, ACB$ oder $\Delta\, ABC$ gleichschenklig.

Einige kleine Notizen von Herrn Hofrath Dr. Clausen zu Dorpat.

Im 15ten Bande des Archivs p. 476 fehlt die Determinante $D = 397$. Es ist

$$(3447)^2 - 397\,(173)^2 = -4.$$

Doctor Arndt hat die Gaussischen Zahlen Disquis. arithm. p. 400, vermuthlich nicht nachgerechnet, wo diese Determinante sich fehlerhaft eingeschlichen hat.

Ich habe durch eine eigene Methode die Zahl $\frac{10^{17}-1}{9}$ in ihre Factoren

$$2071723 \text{ und } 5363222357$$

zerlegt. (S. Archiv Bd. 16. p. 56.)

Vom Herausgeber.

Es ist im sphärischen Dreieck

$$\frac{\sin(b-c)}{\sin a}\cos\tfrac{1}{2}A^2 + \frac{\sin(c-a)}{\sin b}\cos\tfrac{1}{2}B^2 + \frac{\sin(a-b)}{\sin c}\cos\tfrac{1}{2}C^2$$

$$= \frac{\sin(b-c)}{\sin a}\cdot\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c} + \frac{\sin(c-a)}{\sin b}\cdot\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin c\sin a}$$

$$+ \frac{\sin(a-b)}{\sin c}\cdot\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}$$

$$= \frac{\sin s}{\sin a \sin b \sin c}\{\sin(b-c)\sin(s-a)+\sin(c-a)\sin(s-b)$$
$$+\sin(a-b)\sin(s-c)\}$$

$$=\frac{\sin s}{\sin a \sin b \sin c}\left\{\begin{array}{l}[\cos a\sin(b-c)+\cos b\sin(c-a)+\cos c\sin(a-b)]\sin s\\ -[\sin a\sin(b-c)+\sin b\sin(c-a)+\sin c\sin(a-b)]\cos s\end{array}\right\}.$$

Aber, wie man sogleich durch Entwickelung der Sinus der Winkelbinomien findet:

$$\cos a\sin(b-c)+\cos b\sin(c-a)+\cos c\sin(a-b)=0,$$

$$\sin a\sin(b-c)+\sin b\sin(c-a)+\sin c\sin(a-b)=0.$$

Also

$$\frac{\sin(b-c)}{\sin a}\cos\frac{1}{2}A^2+\frac{\sin(c-a)}{\sin b}\cos\frac{1}{2}B^2+\frac{\sin(a-b)}{\sin c}\cos\frac{1}{2}C^2=0.$$

Aus dieser Gleichung zwischen allen sechs Stücken des sphärischen Dreieckes müssen sich die Gauss'schen Gleichungen ableiten lassen. Wie ist dies möglich? G.

Vom Herausgeber.

Ich hatte neulich eine zufällige Veranlassung, mich mit dem Beweise des folgenden geometrischen Satzes zu beschäftigen:

Wenn man von einem Punkte ausserhalb eines gleichseitigen Dreiecks gerade Linien nach den Ecken des Dreiecks zieht, so ist die Summe der Quadrate dieser drei Linien dreimal so gross als die Summe der Quadrate der beiden Entfernungen des Durchschnittspunkts der drei Höhenperpendikel des Dreiecks von einer seiner Ecken und von dem ausserhalb des Dreiecks angenommenen Punkte.

Unter den verschiedenen Beweisarten, welche ich bald fand, scheint mir namentlich eine für Anfänger lehrreich zu sein; auch kann man bei dem Beweise zweckmässig neben rein geometrischen Betrachtungen trigonometrische und arithmetische Betrachtungen in Anwendung bringen; und weil ich nun Sätze, die solche sehr verschiedenartige Betrachtungsweisen zulassen, für besonders instructiv für Anfänger und zu deren Uebung vorzugsweise geeignet halte, so will ich, so unbedeutend die Sache an sich ist, hier mittheilen, was ich über den mir früher ganz unbekannten Satz fand.

Das gegebene gleichseitige Dreieck sei ABC (Taf. IV. Fig. 6.); der Durchschnittspunkt seiner drei Höhenperpendikel sei O, wo also bekanntlich $AO = BO = CO$ ist; der gegebene Punkt ausserhalb des Dreiecks sei G.

Sehr leicht und wohl zuerst wird Jeder auf den folgenden Beweis verfallen.

Von dem Punkte G fälle man auf die drei Höhenperpendikel des gegebenen gleichseitigen Dreiecks ABC die Perpendikel GH, GJ, GK; so ist nach einem allgemein bekannten geometrischen Satze:

$$GA^2 = AO^2 + GO^2 - 2AO \times HO \text{ *)},$$
$$GB^2 = BO^2 + GO^2 + 2BO \times JO,$$
$$GC^2 = CO^2 + GO^2 - 2CO \times KO.$$

Addirt man nun diese drei Gleichungen zusammen, so erhält man, weil, wie schon bemerkt, $AO = BO = CO$ ist, die Gleichung:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2$$
$$= 3(AO^2 + GO^2) + 2AO \times (JO - HO - KO),$$

und der zu beweisende Satz würde also bewiesen sein, wenn man zeigen könnte, dass

$$JO - HO - KO = 0 \text{ oder } JO = HO + KO$$

ist.

Einem mit den ersten Elementen der ebenen Trigonometrie bekannten Anfänger wird nun wahrscheinlich die sich sogleich darbietende Bemerkung nicht entgehen, dass die Linien HO, JO, KO die Cosinus der Winkel GOH, GOJ, GOK für den Halbmesser GO sind, so dass also, wenn wir die in Rede stehenden drei Winkel der Reihe nach durch y, x, z bezeichnen, der Beweis darauf ankommt, zu zeigen, dass

$$\cos x = \cos y + \cos z$$

*) Der Anfänger würde wahrscheinlich zuerst geneigt sein, die ihm geläufigere Gleichung

$$GO^2 = AO^2 + GA^2 + 2AO \times AH$$

anzuwenden; aus dieser Gleichung folgt aber

$$GA^2 = GO^2 - AO^2 - 2AO \times AH$$
$$= GO^2 - AO^2 - 2AO \times (HO - AO)$$
$$= GO^2 - AO^2 + 2AO^2 - 2AO \times HO$$
$$= AO^2 + GO^2 - 2AO \times HO.$$

Dergleichen Bemerkungen wie vorstehende sollte der geometrische Elementarunterricht immer sorgfältig berücksichtigen.

ist. Nun betragen aber die beiden Winkel AOE und COE bekanntlich 60°, und es ist also

$$y=60^{\circ}-x,\ z=60^{\circ}+x;$$

so dass der Beweis sich jetzt darauf reducirt, zu zeigen, dass die Gleichung

$$\cos x=\cos(60^{\circ}-x)+\cos(60^{\circ}+x)$$

allgemein richtig ist. Weil nun aber

$$\cos(60^{\circ}-x)=\cos 60^{\circ}.\cos x+\sin 60^{\circ}.\sin x,$$
$$\cos(60^{\circ}+x)=\cos 60^{\circ}.\cos x-\sin 60^{\circ}.\sin x$$

ist, so reducirt sich die obige Gleichung auf

$$\cos x=2\cos 60^{\circ}.\cos x.$$

Bekanntlich ist aber

$$\cos 60^{\circ}=\sin(90^{\circ}-60^{\circ})=\sin 30^{\circ}=\frac{1}{2},$$

also

$$\cos x=2.\frac{1}{2}.\cos x=\cos x.$$

Da dies eine identische Gleichung ist, so ist wirklich allgemein

$$\cos x=\cos(60^{\circ}-x)+\cos(60^{\circ}+x)$$

und folglich auch

$$JO=HO+KO \text{ oder } JO-HO-KO=0,$$

also nach dem Obigen

$$GA^2+GB^2+GC^2=3(AO^2+GO^2),$$

folglich die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes dargethan.

Vielleicht wird der mit dem obigen Satze sich beschäftigende Anfänger sich nun sagen, dass bei einem solchen rein geometrischen Satze wie dem in Rede stehenden die Anwendung trigonometrischer Formeln einer guten geometrischen Methode nicht ganz gemäss ist; er wird also versuchen, dieser trigonometrischen Rechnung eine geometrische Form zu geben. Sieht er nun, wie das Jeder, wer einen solchen Versuch wagt, sogleich thun wird, seine Figur an, so wird ihm gewiss bald einfallen, dass, weil die Winkel GHO, GJO, GKO rechte Winkel sind, die drei Punkte H, J, K in dem Kreise liegen müssen, den er sich über GO als Durchmesser beschrieben denken kann. Die Linien OH, OJ, OK sind dann drei von dem in diesem Kreise liegenden Punkte O ausgehende Sehnen dieses Kreises; die beiden äussersten Sehnen OH und OK schliessen einen Winkel von 120° ein, und dieser Winkel wird von der mittleren Sehne OJ halbirt. Hält nun der Anfänger diese Bemerkung, die bei einigem Geschick ihm schwerlich entgehen wird, mit dem Obigen zusammen, so wird er leicht darauf kommen, dass es sich um den Beweis eines geometrischen Satzes handelt, welcher also lautet:

Wenn von einem beliebigen Punkte O (Taf. IV. Figur 7.) in der Peripherie eines Kreises zwei beliebige, einen Winkel von 120° $(=\frac{4}{3}R.)$ einschliessende Sehnen OH und OK ausgezogen werden und dieser Winkel durch eine dritte Sehne OJ halbirt wird, so ist diese dritte Sehne immer der Summe der beiden anderen Sehnen gleich.

Der Beweis dieses Satzes kann nicht schwer fallen. Denn zieht der Anfänger HJ, JK, KH, so bemerkt er auf der Stelle, dass, in Folge des Satzes von den Peripheriewinkeln, die Winkel JHK und JKH respective den Winkeln JOK und JOH gleich, also wie die letzteren selbst einander gleich sind, so dass jeder der beiden Winkel JHK und JKH zwei Drittheile eines rechten Winkels oder 60° beträgt, folglich das Dreieck HJK bekanntlich gleichseitig, also $HJ=HK$ ist. Wird nun OK auf OJ abgetragen, nämlich $JL=OK$ gemacht, so sind, weil die Winkel HJL und HKO einander gleich sind, in den Dreiecken HJL und HKO offenbar zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich, diese Dreiecke folglich einander congruent. Also ist $LH=OH$. Daher ist das Dreieck OHL gleichschenklig, und folglich, weil $\angle HOL = \frac{2}{3}R$ ist, gleichseitig, also $OL=OH$. Daher ist $OJ=OL+LJ=OH+OK$, wie bewiesen werden sollte.

Auf eine andere Art kann aber unser Satz auf folgende Art bewiesen werden, und dies ist eigentlich der Beweis, auf den ich hier aufmerksam machen wollte, da er mir für Anfänger besonders lehrreich scheint.

Man ziehe in Taf. IV. Fig. 8. die Linien DE, EF, FD, wodurch das gleichseitige Dreieck DEF entsteht; ausserdem ziehe man die Linien GD, GE, GF; so ist in den Dreiecken BGC, CGA, AGB, deren Seiten BC, CA, AB in D, E, F halbirt sind, nach einem bekannten Satze:

$$GB^2+GC^2=2(GD^2+BD^2),$$
$$GC^2+GA^2=2(GE^2+CE^2),$$
$$GA^2+GB^2=2(GF^2+AF^2);$$

also, wenn man addirt und nach der Addition zugleich durch 2 dividirt:

$$GA^2+GB^2+GC^2=GD^2+GE^2+GF^2+BD^2+CE^2+AF^2,$$

oder, wie sogleich erhellet:

$$GA^2+GB^2+GC^2=GD^2+GE^2+GF^2+\tfrac{1}{4}(AB^2+BC^2+CA^2).$$

Setzen wir aber

$$S=GA^2+GB^2+GC^2,\ \Sigma=AB^2+BC^2+CA^2;$$
$$S_1=GD^2+GE^2+GF^2,\ \Sigma_1=DE^2+EF^2+FD^2$$

und brauchen ähnliche Bezeichnungen für die gleichseitigen Dreiecke, die sich aus dem Dreiecke DEF u. s. w. eben so construiren lassen, wie das Dreieck DEF aus dem Dreiecke ABC construirt worden ist; so erhalten wir überhaupt eine Reihe von Gleichungen von der folgenden Form:

$$\begin{aligned}
S &= S_1 + \tfrac{1}{4}\Sigma,\\
S_1 &= S_2 + \tfrac{1}{4}\Sigma_1,\\
S_2 &= S_3 + \tfrac{1}{4}\Sigma_2,\\
&\text{u. s. w.}\\
S_{n-2} &= S_{n-1} + \tfrac{1}{4}\Sigma_{n-2},\\
S_{n-1} &= S_n + \tfrac{1}{4}\Sigma_{n-1}.
\end{aligned}$$

Addirt man diese Gleichungen zusammen und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man die Gleichung:

$$S=S_n+\tfrac{1}{4}(\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_{n-2}+\Sigma_{n-1}).$$

Nun erhellet aber sehr leicht, dass

$$\Sigma_1=\tfrac{1}{4}\Sigma,\quad \Sigma_2=\tfrac{1}{4}\Sigma_1,\quad \Sigma_3=\tfrac{1}{4}\Sigma_2,\ldots \Sigma_{n-1}=\tfrac{1}{4}\Sigma_{n-2};$$

also

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \tfrac{1}{4}.\Sigma,\\
\Sigma_2 &= (\tfrac{1}{4})^2.\Sigma,\\
\Sigma_3 &= (\tfrac{1}{4})^3.\Sigma,\\
&\text{u. s. w.}\\
\Sigma_{n-1} &= (\tfrac{1}{4})^{n-1}.\Sigma;
\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}
&\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_{n-2}+\Sigma_{n-1}\\
&=\{1+\tfrac{1}{4}+(\tfrac{1}{4})^2+(\tfrac{1}{4})^3+\ldots+(\tfrac{1}{4})^{n-1}\}\,\Sigma
\end{aligned}$$

ist. Daher ist nach dem Obigen

$$S=S_n+\tfrac{1}{4}\{1+\tfrac{1}{4}+(\tfrac{1}{4})^2+(\tfrac{1}{4})^3+\ldots+(\tfrac{1}{4})^{n-1}\}\,\Sigma.$$

Nach der Lehre von den geometrischen Progressionen ist aber

$$1+\tfrac{1}{4}+(\tfrac{1}{4})^2+(\tfrac{1}{4})^3+\ldots+(\tfrac{1}{4})^{n-1}=\frac{1-(\tfrac{1}{4})^n}{1-\tfrac{1}{4}}=\tfrac{4}{3}\{1-(\tfrac{1}{4})^n\},$$

also

$$S = S_n + \tfrac{1}{3}\{1 - (\tfrac{1}{4})^n\}\Sigma.$$

Lässt man jetzt n in's Unendliche wachsen, so nähert offenbar S_n sich der Gränze

$$GO^2 + GO^2 + GO^2 = 3 . GO^2,$$

weil die gleichseitigen Dreiecke wie DEF u. s. w. sich immer genauer und genauer auf einen blossen Punkt zusammenziehen; und $(\tfrac{1}{4})^n$ nähert sich der Gränze Null. Geht man also in der Gleichung

$$S = S_n + \tfrac{1}{3}\{1 - (\tfrac{1}{4})^n\}\Sigma$$

für in's Unendlich wachsende n zu den Gränzen über, so erhält man offenbar die Gleichung:

$$S = 3 . GO^2 + \tfrac{1}{3}\Sigma,$$

d. h. die Gleichung:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3 . GO^2 + \tfrac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} AB^2 &= AO^2 + BO^2 + 2AO \times DO, \\ BC^2 &= BO^2 + CO^2 + 2BO \times EO, \\ CA^2 &= CO^2 + AO^2 + 2CO \times FO; \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CA^2 &= 6 . AO^2 + 2 . AO \times (DO + EO + FO) \\ &= 6 . AO^2 + 6 . AO \times DO; \end{aligned}$$

und weil nun DO die Hälfte von AO ist, weil das Dreieck BDO offenbar die Hälfte des Dreiecks ABO von gleicher Höhe mit ersterem ist, so ist

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CA^2 &= 6 . AO^2 + 6 . AO \times \tfrac{1}{2}AO \\ &= 6 . AO^2 + 3 . AO^2 = 9 . AO^2, \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 3 . AO^2;$$

also nach dem Obigen

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3(AO^2 + GO^2),$$

welches der zu beweisende Satz ist.

Weil der Begriff der Gränze eigentlich der Grundbegriff der gesammten höheren Mathematik in ihrer neueren Darstellung ist und sich durch diese ganze Wissenschaft hindurch zieht, ja immer wiederkehrt, so oft man in derselben nur ein Blatt umschlägt, überhaupt eine strenge Darstellung namentlich der höheren Analysis, ohne immer auf diesen Begriff zurückzukommen, gar nicht möglich ist; so scheinen Betrachtungen wie die obigen, auf elementare geometrische Sätze angewandt, für den Unterricht von Anfängern, die in der Mathematik weiter gehen wollen, einen sehr wohl begründeten Werth zu haben, und sollten sorgfältig benutzt werden, wo sie nur irgend sich darbieten, um den Anfänger so früh als möglich mit dem strengen Begriffe der Gränze und der strengen Anwendung desselben bekannt zu machen. G.

Resultate meteorologischer Beobachtungen vom Herrn Professor der Physik Thomas Egid Heller dahier und dem Unterzeichneten von einem halben Jahrhunderte.

Grösste Kälte.		Grösste Wärme.	
1798, 26. Januar . . .	-20^{0} R.	1798, 17. Aug. des Mittags	$+22^{0}$ R.
1798, 30. Januar . .	$-24{,}6$	1790, 16. Juni . . .	$+22{,}0$
1820, 15. Februar . . .	$-20{,}3$	1799, 17. August . .	$+26{,}3$
1823, 23. Januar . .	$-23{,}8$	1800, 30. Mai . . .	$+22{,}0$
1830, 2. Februar . .	$-25{,}0$	1800, 15. Juli . . .	$+23{,}0$
1849, 3. Januar . .	$-27{,}0$	1800, 15. August . .	$+26{,}3$
		1802, 9. August . .	$+27{,}0$
		1807, 31. Juli . . .	$+25{,}7$
		1807, 31. August . .	$+25{,}6$
		1808, 31. Juli . . .	$+25{,}4$
		1811, 29. Juli . . .	$+25{,}1$
		1819, 8. Juli	$+24{,}2$
		1822, 2. Juli . . .	$+26{,}1$
		1823, 27. August . .	$+26{,}3$
		1824, 4. Juli . . .	$+25{,}0$
		1825, 8. Juli	$+26{,}0$
		1826, 2. August . .	$+26{,}8$
		1827, 2. August . .	$+25{,}3$
		1828, 5. Juli	$+28{,}0$
		1829, 25. Juli . . .	$+25{,}0$
		1832, 14. Juli . . .	$+26{,}2$
		1833, 26. Juli . . .	$+26{,}0$
		1834, 13. Juli . . .	$+27{,}0$
		1842, 5. Juli	$+24{,}0$
		1844, 23. Juni . . .	$+24{,}0$

Fulda, den 26. Februar 1853.

Dr. Schneider, Geheimer Medizinalrath.

Vom Herausgeber.

In dem in England sehr beliebten Schiffahrtslehrbuche von E. Riddle *) finde ich S. 33. den folgenden sehr einfachen Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes, der wenigstens mir bis jetzt unbekannt war. Da mancher Leser des Archivs sich wahrscheinlich mit mir in demselben Falle befinden wird, so theile ich den Beweis hier mit, ohne erst, was vielleicht meine Pflicht als Herausgeber wäre, wozu es mir aber gerade jetzt an Zeit und auch an Lust gebricht, alle möglichen geometrischen Lehrbücher durchzumustern, hier mit.

Man fälle (Taf. IV. Fig. 9.) von A auf die Hypotenuse BC das gewöhnliche Perpendikel AL, verlängere es nach beiden Seiten hin, bis HK in M, das verlängerte DE in O geschnitten wird, und verlängere dann auch BH über B hinaus, bis DE in N geschnitten wird. Dann ist offenbar $\triangle BDN \cong \triangle ABC$, weil $BD=AB$, $\angle BDN=\angle BAC$ und offenbar $\angle DBN=\angle ABC$ ist, da ABD und CBN rechte Winkel sind, die den Winkel ABN als gemeinschaftlichen Theil enthalten. Also ist $BN=BC=BH$ und die Parallelogramme $ABNO$ und $BLMH$ haben daher gleiche Grundlinie und Höhe, sind also einander gleich. Weil nun aber auch AB^2 offenbar dem Parallelogramme $ABNO$ wegen gleicher Grundlinie und Höhe gleich ist, so ist $AB^2=$ Rechteck $BLMH$. Ganz eben so auf der anderen Seite $AC^2=$ Rechteck $CLMK$. Also $BC^2=AB^2+AC^2$, w. z. b. w.

Dass FG, wenn man es über F hinaus verlängert, auch auf den Punkt O treffen muss, erhellet auf der Stelle, weil offenbar $EO=DN=AC=AF$ ist.

Mir scheint dieser Beweis wohl werth zu sein, beim Unterrichte in den Elementen der Geometrie benutzt zu werden. G.

---

*) A Treatise on Navigation and Nautical Astronomy. By Edward Riddle. Fifth Edition. London 1849.

Berichtigung.

In Taf. IV. Fig. 3. Theil XVI. muss noch die Linie AC gezogen werden.

Theil XIX. Seite 228. Z. 5 statt J setze man G.

" " " " Z. 6 " $\dot{a}$ " " $\mathring{a}$.

" " " 230. Z. 5 v. u. statt k setze man $2k$.

LXXVII.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Almanach der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (zu Wien). Zweiter Jahrgang. 1852. Wien. Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei.

Den ersten Jahrgang dieses Almanachs der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien haben wir im Literar. Ber. Nr. LXVIII. S. 873 angezeigt, und freuen uns, jetzt den zweiten Jahrgang anzeigen zu können. Der Grund, weshalb wir diesen Almanach besonders anzeigen, ist schon a. a. O. angegeben: weil derselbe nämlich eine Angabe der wichtigsten Lebensumstände und der Schriften einer ziemlich grossen Anzahl trefflicher Mathematiker und Physiker enthält. Was in dieser Beziehung der erste Jahrgang wegen der Kürze der bis zu seiner Herausgabe verstatteten Zeit noch nicht leisten konnte, ist in diesem zweiten Jahrgange mit möglichster Vollständigkeit nachgeholt worden, und wir halten daher diesen Almanach, besonders in seiner jetzigen Gestalt, für einen nicht unwichtigen Beitrag zur Literaturgeschichte der Mathematik und Physik, so wie der Naturwissenschaften überhaupt, weshalb wir die Leser unserer Zeitschrift wiederholt auf denselben aufmerksam zu machen nicht verfehlen. Ausserdem ist derselbe natürlich auch in so fern von grossem allgemeinen Interesse, weil er sehr vollständige Nachrichten über die Einrichtung und die Arbeiten einer der ersten Akademieen der Wissenschaften enthält, welche, ungeachtet ihres bis jetzt nur kurzen Bestehens, doch schon eine sehr grosse und sehr erfolgreiche wissenschaftliche Thätigkeit entfaltet hat.

In dem Journal des savants. Mai. 1852. findet man den dritten und letzten Theil des Berichts von dem trefflichen Biot über die Correspondance of Sir Isaac Newton and Professor Cotes. Dieser dritte Theil ist in mehrfacher Beziehung besonders interessant, hauptsächlich aber deshalb, weil Biot darin die vielbesprochene Frage discutirt, ob Newton die Principien ursprünglich in derselben Weise, wie er sie der Nachwelt übergeben hat, d. h. auf synthetischem Wege verfasst, oder ob er die Resultate ursprünglich analytisch gefunden, und dann der Darstellung nur eine synthetische Fassung gegeben habe, wofür als Grund angegeben wird: l'habitude qu'avait Newton, de voiler sa pensée, et de cacher sa personne, mêmes dans les lettres scientifiques, où il prenait la part la plus active. Biot entscheidet sich, wie zu erwarten stand, für die zweite Alternative, dass nämlich alle in den Principien niedergelegten Resultate ursprünglich analytisch gefunden worden sind. Dass eben diese ganz synthetische Fassung die Lectüre der Principien sehr schwierig macht, ist eine jedem Mathematiker bekannte Sache, und Biot führt in dieser Beziehung ein sehr merkwürdiges und offenes Geständniss von Euler an, welches wir, allen den Mathematikern, die gleichfalls Schwierigkeiten bei dem Studium der Principien fanden, zum Trost, hier vollständig mittheilen. Euler sagt nämlich über sich selbst: „Quod omnibus scriptis, quae sine analysi sunt composita, id potissimum mechanicis obtingit, ut lector, etiam si de veritate eorum, quae proferuntur, convincatur, tamen non satis claram et distinctam eorum cognitionem assequatur, ita ut easdem quaestiones, si tantillum immutentur proprio marte vix resolvere valeat; nisi ipse in analysin inquirat, easdemque propositiones analytica methodo evolvat. Idem omnino cum Newtoni principia perlustrare coepissem, usu venit, ut quamvis plurium problematum solutiones satis percepisse mihi viderer, tamen parum tantum discrepentia problemata resolvere non potuerim. Illo igitur jam tempore, quantum potui, conatus sum analysin ex synthetica illa methodo elicere, easdemque propositiones ad meam utilitatem analytice pertractare, quo negotio insigne cognitionis meae augmentum percepi." — Schliesslich spricht Biot sein allgemeines Urtheil über Newton unumwunden aus, und schliesst, Bezug nehmend auf die theologischen Untersuchungen, mit denen Newton sich bekanntlich gleichfalls vielfach beschäftigt hat, mit den folgenden bemerkenswerthen Worten: „Mon savant ami, le Docteur Brewster, m'a formellement déclaré, que „l'interpretation donnée par Newton des prophéties, indépendamment de l'évidence historique et morale sur „laquelle elle repose, peut être développée jusqu'à la plénitude d'une démonstration." Vingt ans se sont écoulés depuis que j'ai reçu de lui cet avertissement charitable, que j'ai dû regarder comme une promesse de m'éclairer. Je supplie instamment le Docteur Brewster, de ne pas tarder à le faire, et rendre bientôt sa démonstration publique; car, à l'âge auquel nous sommes tous deux parvenus, il pourrait arriver d'un moment à l'autre, qu'il ne se trouvât plus en position de me la donner, ou moi de la recévoir. Il devrait même se faire scrupule de l'avoir gardée pour lui seul, pendant si longtemps."

Für Biot ist Newton un homme, qui, comme géomètre, et comme expérimenteur, est sans égal. Par la réunion de ces deux genres de génie, à leur plus haut degré, il est sans exemple. Sur ses travaux scientifiques, qui ont reculé les bornes de l'esprit humain, repose sa gloire tout entière. Ses écrits sur la chronologie et les prophèties sont de tours de force d'erudition, sans résultat. Les premiers sont impérissables; des autres il ne reste rien.

Arithmetik.

Lehrbuch der Arithmetik und niedern Analysis zum Gebrauche bei Vorlesungen und zum Selbst-Unterrichte bearbeitet von Dr. G. Radicke, Professor an der Rhein. Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn. Zweite mit einer Zulage vermehrte Ausgabe. Berlin. (Nicolai'sche Buchhandlung.) 1853. 8. 2 Thlr. 15 Sgr.

Einer Buchhandlung, die einen so geachteten Namen in ihrem Schilde führt, wie die Nicolai'sche Buchhandlung in Berlin, hätten wir es in der That nicht zugetrauet, dass sie sich dazu entschliessen könnte, solche alte verlegene Waare wie die obige, mit einem vorgeklebten neuen Titelblatte, und einem auf dem Titel übrigens komischerweise mit dem in literarischen Dingen ganz ungewöhnlichen Namen einer „Zulage" bezeichneten Anhange versehen, zu dem im vorliegenden Falle enormen Preise von 2 Thlr. 15 Sgr. als eine „Zweite Ausgabe" wieder zu Markte zu bringen. Müsste das Archiv nicht fürchten, sich vielleicht gar einen Injurienprozess zuzuziehen, so würde ein solches Verfahren hier ohne Weiteres mit dem Namen bezeichnet werden, mit welchem es jeder rechtlich denkende Mann, auch ohne dass wir den Namen hier aussprechen, für sich belegt. Aber wenigstens die Leser des Archivs dringend zu warnen vor dieser Speculation, ist, diesen gegenüber, unsere Pflicht, der wir also hiermit nachzukommen nicht verfehlen, ohne dieselben übrigens sonst von dem Ankaufe des manches Gute enthaltenden Buches abhalten zu wollen, auf dessen weitere Besprechung wir aber bei einem solchen Verfahren, wie es hier unzweifelhaft vorliegt*), nicht eingehen können.

Logarithmorum VI decimalium nova Tabula Berolinensis et numerorum vulgarium ab 1 usque ad 100000 et functionum trigonometricarum ad decades minutorum secundorum, auctore Carolo Bremiker, Dr. Ph. Berolini (Nicolai). 1852. 8. 4 Thlr.

*) Die Vorrede z. B. ist unterzeichnet: Bonn, den 3. August 1847.

Es ist bekannt, dass man bei den meisten astronomischen und anderen Rechnungen mit sechsstelligen Logarithmen gerade, aber auch vollkommen ausreicht, indem fünf Stellen zu wenig, sieben Stellen zu viel sind. Daher ist auch schon oft von mit dem astronomischen Calcul innigst vertrauten Gelehrten, die zu unsern grössten Mathematikern und Astronomen gehören, der Wunsch ausgesprochen worden, dass solche sechsstellige Logarithmentafeln in recht zweckmässiger Weise angefertigt werden möchten. Auch hat man diesem so oft und so dringend ausgesprochenen Wunsche schon in mehrfacher Weise zu entsprechen gesucht. Da die betreffende Literatur unsern Lesern gewiss im Allgemeinen hinreichend bekannt ist, so wollen wir nur beispielsweise auf eine Tafel hinweisen, die, wie es wenigstens scheint, fast ganz übersehen worden ist, aus welchem Grunde, wissen wir nicht. Dies sind die Tabulae Logarithmorum notis decimalibus sex expressorum. Auctore G. A. Jahn. Lipsiae. 1844. Diese sechsstelligen Tafeln geben die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100000, die Logarithmen der trigonometrischen Functionen für den ersten Grad von Secunde zu Secunde, für die übrigen Grade von drei zu drei Secunden. Die letztere Einrichtung, die freilich für den Gebrauch in so fern sehr bequem ist und alle Anerkennung verdient, weil dadurch die Möglichkeit gegeben ist, die Proportionaltheile immer ganz leicht und sicher bloss im Kopfe zu berechnen, hat auf der andern Seite den Nachtheil herbeigeführt, dass die Tafel sehr voluminös geworden ist, weil die ganze Tafel 541 Seiten in Quart umfasst. Vielleicht ist es gerade dieser Umstand, welcher der Verbreitung der Jahn'schen Tafel hinderlich gewesen ist, vielleicht auch ausserdem das ziemlich graue Papier, was aber wenigstens unsern Augen gerade sehr zusagt. Denn gegen die Correctheit der Tafel haben wir wenigstens keinen Grund Zweifel zu erheben, und, haben wir sie auch nicht viel gebraucht, so ist sie uns doch nicht gerade unbequem vorgekommen. Indem wir diese Tafel, deren Preis von 1 Thlr. 5 Sgr. auch äusserst niedrig gestellt ist, gelegentlich in Erinnerung bringen wollten, kehren wir nun wieder zu dem vorliegenden Werke des Herrn Bremiker zurück.

Wir halten diese Tafel für in jeder Beziehung höchst ausgezeichnet, überlassen es aber natürlich den Lesern, sich mit ihrer Einrichtung aus ihr selbst genauer bekannt zu machen, die übrigens von der gewöhnlichen zwar nicht wesentlich abweicht, indess doch auch einige, wenn auch nur kleine, aber den sichern Gebrauch fördernde Abänderungen enthält. Hauptsächlich anerkennungswerth ist es, dass der Herr Vf. in der trigonometrischen Tafel die goniometrischen Functionen bis zu $0^{\circ}.20'$ von Secunde zu Secunde, für die übrigen Grade von 10 zu 10 Secunden hat fortschreiten lassen, welche höchst empfehlenswerthe Einrichtung sich z. B. in der trefflichen Callet'schen siebenstelligen Tafel eben so findet, und von der neuen Ausgabe der Vega'schen Tafel sich gleichfalls anzueignen leider mit Unrecht unterlassen worden ist. Druck und Papier der Bremiker'schen Tafel lassen für uns nicht das Geringste zu wünschen übrig, und erinnern an die besten derartigen Erzeugnisse der englischen Presse. Mancher dürfte indess noch wünschen, dass zu den Tafeln ein grünliches Papier genommen worden wäre, wie dies z. B. in den trefflichen englischen Tafeln von Shortrede, die Bessel so sehr empfahl, geschehen ist. Das Intervall von 10 zu 10 Secunden scheint uns für die Bequemlichkeit des praktischen Gebrauchs ganz hinreichend zu sein, das Volumen der Tafeln bleibt in Folge dieser Einrichtung ein sehr mässiges, und wird nicht ein allerdings einigermassen unbequemes, wie das der vorher erwähnten Jahn'schen Tafel, bei aller sonstigen Verdienstlichkeit dieser letzteren. Die sehr lehrreiche Einleitung, die Arcuum Longitudines pro radio 1, die Transmutatio arcuum in horas earumque partes, die Tabula temporis siderei mutandi in tempus medium und die Logarithmi constantes sind natürlich nicht bloss sehr angenehme, sondern auch nöthige Zugaben, und beweisen, wie vollkommen Herr Bremiker mit allen an ein solches Werk zu stellenden Forderungen bekannt ist, und wie sehr er allen etwaigen Wünschen entgegen zu kommen versteht. Wir wünschen diesem trefflichen Werke aus vollkommenster Ueberzeugung die weiteste Verbreitung. Freilich wird der Preis von 4 Thlrn., wenn er auch im Verhältniss zu der höchst eleganten und trefflichen Ausstattung nicht zu hoch erscheint, doch vielleicht Manchen abhalten, sich in den Besitz eines Werkes zu setzen, von dem man dringend wünschen muss, dass ein möglichst niedriger Preis jeden auch nur wenig bemittelten Mathematiker in den Stand setzen möchte, sich dessen Gebrauch nicht entziehen zu müssen.

Mechanik.

Leonhard Euler's Theorie der Bewegung fester und starrer Körper mit Anmerkungen und Erläuterungen herausgegeben von J. Ph. Wolfers, Dr. und Professor (zu Berlin). Erste Abtheilung. Mit 5 Figuren-Tafeln. Greifswald. C. A. Koch's Verlagshandl. (Th. Kunike.) 1853. 8.

Als wir im Literar. Ber. Nr. LI. S. 707. das Erscheinen des zweiten Theils der von Herrn Professor Wolfers in Berlin unternommenen Uebersetzung von Euler's Mechanica sive motus scientia analytice exposita, worin Euler die Bewegung eines Punktes behandelt, anzuzeigen das Vergnügen hatten, sprachen wir am Ende jener Anzeige den Wunsch aus, dass es Herrn Professor Wolfers gefallen möchte, auch Euler's Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. Ed. nov. Gryphisw. 1790. 4., welche der Bewegung eines Körpers gewidmet ist, zu übersetzen. Wir freuen uns sehr, anzeigen zu können, dass dieser Wunsch schon jetzt in Erfüllung gegangen ist, indem uns wenigstens die erste Abtheilung einer von Herrn Professor Wolfers verfertigten Uebersetzung des genannten schönen und wichtigen Werkes vorliegt. Dass Euler's Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum in wissenschaftlicher Beziehung noch wichtiger ist, als die Mechanica sive motus scientia analytice exposita, ist jedem, Euler's Leistungen zu würdigen verstehenden Mathematiker bekannt, und Herr Professor **Wolfers** hat sich daher nach unserer Ueberzeugung durch die Uebersetzung jenes Werkes fast noch ein grösseres Verdienst um die Wissenschaft erworben als durch seine frühere Arbeit, weil durch diese Uebersetzung die, wie es scheint, namentlich von jüngeren Mathematikern nicht nach Verdienst gekannte und beachtete **Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum** gewiss — woran wir keinen Augenblick zweifeln — wieder ganz in ihre alten Rechte eingesetzt werden wird. Denn **Euler's** Werke veralten nie, und müssen für alle Zeiten die Hauptgrundlagen des mathematischen Studiums bleiben, so viele und so grosse Fortschritte auch, weniger in materieller Rücksicht, als in Bezug auf wahrhafte mathematische Strenge und Evidenz, namentlich die analytische Wissenschaft in neuester Zeit gemacht hat. Dass Herrn Professor **Wolfers's** Uebersetzung allen Anforderungen, die man an dergleichen Arbeiten zu machen berechtigt ist, vollständig genügt, brauchen wir jetzt nicht erst zu versichern, da die Mathematiker aus seinen früheren Leistungen wissen, wie genau er sich mit dem in **Euler's** Schriften herrschenden Geiste bekannt und vertraut gemacht hat. Ausserdem hat er aber auch wieder durch eine Reihe höchst zweckmässiger Anmerkungen, die mit richtigem Takte auch hier vom eigentlichen Werke gesondert sind, so dass **Euler's** Werk ganz rein vor uns liegt, alle sich etwa findenden Schwierigkeiten vollständig beseitigt, und dadurch dem Bedürfniss der weniger Geübten in sehr geeigneter Weise entsprochen. Die äussere Ausstattung lässt nichts zu wünschen übrig, und die Verlagshandlung hat jedenfalls auch Anspruch auf den Dank der Mathematiker, indem sie dem grossen wissenschaftlichen Eifer des Herrn Uebersetzers durch ihre Bereitwilligkeit, das Werk zu verlegen, freundlich entgegen kam. Mögen daher Alle, welche für das Studium der Mechanik sich interessiren, dieses Werk sich angelegentlichst empfohlen sein lassen, und möge dasselbe eben so wie sein Vorgänger dazu beitragen, **Euler's** Geist stets unter uns zu erhalten! Namentlich auch jüngern Mathematikern empfehlen wir dieses Werk zum eifrigsten Studium, wobei wir noch bemerken, dass dasselbe das Studium des frühern Werks keineswegs unbedingt voraussetzt, sondern dass dasselbe durch und in sich selbst verständlich ist, wofür **Euler** durch eine dem Werke vorangesetzte, in der vorliegenden Uebersetzung 126 Seiten umfassende, Einleitung gesorgt hat. Dem Erscheinen der zweiten Abtheilung sehen wir mit Verlangen entgegen.

Vermischte Schriften.

In dem **Bulletin phys.-mathém. der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Petersburg** finden sich einige ausgezeichnete Abhandlungen des Herrn Observator Dr. **Clausen zu Dorpat**, auf die wir unsere Leser aufmerksam machen müssen:

T. IX. Nr. 23. **Ueber den Werth des Kettenbruchs**

$$a+\cfrac{b}{a+1+\cfrac{b+1}{a+2+\cfrac{b+2}{a+3+\text{ etc.}}}}$$

wenn b grösser als $a+1$ ist.

Schon Euler und später Stern in Crelle's Journal T. VIII. S. 42. haben diesen Kettenbruch untersucht. Wenn es auch Herrn Clausen, wie er selbst sagt, nicht gelungen ist, die Theorie desselben in aller Allgemeinheit zu entwickeln, so hat er doch mehrere bemerkenswerthe Resultate gefunden, die zum Theil zur Berichtigung der früheren Untersuchungen dienen.

T. IX. Nr. 24. **Ueber die Form architektonischer Säulen.**

Diese früher von Euler und Lagrange untersuchte Frage hat der Herr Vf. einer neuen Untersuchung unterworfen, wobei es ihm wider Erwarten gelungen ist, die Differentialgleichung, deren allgemeine Integration Lagrange nicht versucht hatte, auf elliptische Transcendenten zurückzuführen. Dabei zeigte es sich, dass die zweckmässigste Form vom Cylinder abweicht, und dass das Volumen dieses bei gleicher Höhe und Tragkraft sich zum Volumen jener Form wie $1 : \sqrt{\frac{3}{4}}$ verhält.

T. X. Nr. 2. Ueber den Einfluss der Umdrehung und der Gestalt der Erde auf die scheinbaren Bewegungen an der Oberfläche derselben.

Die sinnreiche Idee Foucault's, die Umdrehung der Erde durch ein einfaches um einen Punkt schwingendes Pendel Jedem anschaulich zu machen, die in neuester Zeit bekanntlich so viel Aufsehen gemacht hat, so dass man die betreffenden Versuche selbst vielfach vor das grosse Publikum gebracht hat, veranlasste Herrn Hofrath Clausen, diese Bewegung in der vorliegenden Abhandlung einer strengen und ausführlichen analytischen Untersuchung zu unterwerfen, bei der er von den Formeln ausgeht, die Gauss in Benzenberg's bekanntem Werke über die Umdrehung der Erde gegeben hat. Wir empfehlen diese gründliche analytisch-mechanische Untersuchung, in der auch auf die sphäroidische Gestalt der Erde Rücksicht genommen worden ist, allen denen sehr, welche an dem Foucault'schen Versuche das gebührende Interesse nehmen; nur muss man nicht etwa glauben, mit bloss elementar-mathematischen Kenntnissen an das Studium dieser Abhandlung gehen zu können, indem dieselbe vielmehr den analytischen Scharfsinn und analytische Kenntnisse vielfach in Anspruch nimmt. Aber ohne diese Kenntnisse wird man auch nie eine vollkommene Einsicht in Foucault's Versuch erlangen können, wobei wir indess auch nicht die Versuche tadeln wollen, sondern denselben vielmehr das Wort reden, welche dazu bestimmt sind, in möglichst elementarer oder populärer Weise die Gründe des Foucault'schen Versuchs möglichst zur Anschauung zu bringen, eben weil dieser Versuch bereits vielfach vor's grosse Publikum gebracht worden ist. Den Mathematiker kann aber nur eine solche Entwickelung, wie wir sie in der vorliegenden gründlichen Abhandlung des Herrn Verfassers finden, vollkommen befriedigen, und ist auch allein geeignet, ein wahres Verständniss dieses höchst interessanten Gegenstandes zu vermitteln.

Mélanges mathématiques et astronomiques. *T. I.*

Ueber die Olbers'sche Methode Cometenbahnen zu berechnen.

Jedem, der sich mit der Berechnung der Cometenbahnen beschäftigt hat, sagt der Herr Verf., ist es bekannt, welche grosse Erleichterung durch die Olbers'sche sehr sinnreiche Methode erlangt wurde, und dass wir einen grossen Theil der berechneten Bahnen dieser Methode verdanken. Einige Astronomen haben die Behauptung aufgestellt, dass die durch die Olbers'sche Methode erlangte erste Annäherung viel grösser sei, als die erste Annäherung durch die übrigen bekannten Methoden, und zwar, dass jene die Annäherung bis auf Grössen der zweiten Ordnung excl. geben, wenn man die Grössen erster Ordnung den Zwischenzeiten proportional setzt; während die Laplace'sche und andere Methoden diese Annäherung nur bis auf Grössen erster Ordnung excl. geben. Diese letztere Behauptung sucht der Herr Vf. in diesem lesenswerthen Aufsatze zu widerlegen, wobei er mit Recht ganz im Geiste seines verewigten Gönners, des trefflichen Olbers, zu handeln glaubt, der, aller Eitelkeit fremd, jeden auf einen Irrthum gegründeten Ruhm gewiss von sich zu entfernen gesucht hätte. Kein Leser wird auch diesen Aufsatz des verehrten Herrn Verfassers ohne vielfache Belehrung aus der Hand legen.

LXXVIII.

Literarischer Bericht.

Geometrie und Trigonometrie.

Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Ebene und körperliche Geometrie. Zum Selbstunterricht mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens bearbeitet von H. B. Lübsen. Mit 190 Figuren im Text. Hamburg. Perthes, Besser & Mauke. 1851. 8. 1 Thlr.

Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Zum Selbstunterricht mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens bearbeitet von H. B. Lübsen. Hamburg. Perthes, Besser & Mauke. 1852. 8. 21 Ngr.

Herr Lübsen in Hamburg hat sich schon durch seine früher erschienenen Lehrbücher der Arithmetik und Algebra und der analytischen Geometrie von ganz ähnlicher Tendenz wie die beiden obigen verdient gemacht. Alle diese Lehrbücher, auch die beiden obigen hier anzuzeigenden, zeichnen sich durch eine ungemeine Deutlichkeit sehr vortheilhaft aus, und enthalten überall in sehr verständiger Auswahl von den betreffenden Wissenschaften allemal das, was für das praktische Bedürfniss nöthig ist und zu demselben in nächster Beziehung steht, ohne die für tüchtige praktische Anwendung der Mathematik bestimmte Kraft des Knabens und Jünglings durch eine Menge oft sehr unnützer Sätze und Sätzchen eher zu schwächen und zu ermüden als zu stärken, wie leider viele unserer Lehrer immer noch thun. In dem nördlichsten Theile unsers deutschen Vaterlands, in Hamburg, Bremen, Holstein, Schleswig, Ostfriesland u. s. w. scheint man in dieser Beziehung einen viel richtigern und sicherern Takt zu besitzen als in vielen andern Theilen desselben. Deshalb giebt es aber auch dort so ungemein viele tüchtige, namentlich praktische Mathematiker, und namentlich sollen die Friesen in dieser Beziehung sich auszeichnen. „In Ostfriesland" pflegte mein verewigter Freund Dirksen in Berlin, dem die Strenge in der Mathematik das Höchste war, oft zu sagen, „ist jeder Bauer ein Mathematiker", und er selbst war, so viel ich mich erinnere, ursprünglich ein gewöhnlicher ostfriesischer Landschulmeister gewesen, wenn mich auch meine Erinnerung vielleicht trügen kann. Herrn Lübsen's Bücher sind der deutlichste Ausdruck dieses wahrhaft tüchtigen praktischen mathematischen Sinnes, ohne übrigens der Strenge der Darstellung wesentlich etwas zu vergeben, und wir empfehlen sie daher recht sehr zur Beachtung. Wer ihren Inhalt sich vollständig angeeignet hat, wird zu den vielfachsten praktischen Anwendungen der Mathematik befähigt sein, insofern er vorläufig auf die Anwendung der höheren Theile der Wissenschaft verzichtet. Die Geometrie enthält auch schon die Grundzüge der Feldmesskunst, des Nivellirens, und der praktischen Körpermessung, auch der Ausmessung der Fässer, u. s. w.

Knaben und Jünglinge, welche für ein praktisches Fach, das auf einer mathematischen Basis ruhet, bestimmt sind, müssen, natürlich bei völliger Strenge, so schnell als möglich durch die Theorie hindurch geführt, und nicht mit Gott weiss was für geometrischen Theoremen und Problemen, direkten und reciproken, — so viel Vergnügen dieselben auch zuweilen dem eigentlichen theoretischen Mathematiker darbieten können, sollten sie auch für die Wissenschaft selbst oft nicht von besonderer Bedeutung sein, — gequält werden. Dann muss möglichst schnell die vielfachste und allseitigste praktische Anwendung folgen, und die sogenannte formelle Geistesbildung, die man durch jene Sätze und Sätzchen zu fördern meint, wird bei diesen tüchtigen praktischen Naturen sich dann schon von selbst finden, wenn nur, was wir immer voraussetzen, die theoretische Grundlage eine völlig strenge und für die künftige praktische Anwendung völlig ausreichende war. Herrn Lübsen's in vieler Beziehung sehr zu empfehlende Lehrbücher scheinen uns ein interessanter und sehr ansprechender Ausdruck dieses gewiss sehr richtigen pädagogischen und methodischen Grundsatzes zu sein, weshalb wir sie hier allen Lehrern, die solche Knaben und Jünglinge, wie oben von uns näher bezeichnet worden sind, auf Real- und anderen ähnlichen Schulen zu unterrichten haben, was gewiss für den, der selbst praktischen Sinn hat, ein sehr anziehender und seegensreicher Lebensberuf ist, bestens haben empfehlen wollen. Schliesslich möchten wir noch wünschen, dass Herr Lübsen sein Talent zu einer ähnlichen Bearbeitung der Differential- und Integralrechnung anwenden möchte.

Compendium der darstellenden Geometrie nebst einiger Anwendung derselben auf Schattenbestimmung und Perspective. Für Realschulen als auch zum Selbstunterricht verfasst von Justus Nigris, Architekten und Professor der darstellenden Geometrie, des geometrischen Zeichnens u. s. w. an der öffentlichen städtischen Ober-Realschule zu Presburg. Mit eilf Steintafeln. Presburg. Krapp. 1853. 8.

Dieses Lehrbuch enthält nicht bloss die Elemente der eigentlichen descriptiven Geometrie, sondern auch die Elemente des geometrischen Zeichnens mit Einschluss der Perspective und der Schattenconstruction, Alles, namentlich die letzteren Gegenstände, nicht etwa, wie öfters geschieht, bloss praktisch dargestellt, sondern aus strengen geometrischen Betrachtungen abgeleitet. Viele Lehrbücher der descriptiven Geometrie enthalten, wie es uns scheint, namentlich für die Zwecke, denen sie dienen sollen, zu viel. Das vorliegende, welches für den Unterricht auf einer Realschule bestimmt ist, scheint uns eine richtige Mitte sehr gut getroffen zu haben, und enthält, wie schon erinnert, ausser der eigentlichen Géométrie déscriptive noch manches Andere, was für den Unterricht auf einer Realschule von Wichtigkeit sein kann. Da wir längst sehr gewünscht haben, dass der Unterricht in der descriptiven Geometrie, welcher für künftige mathematische Praktiker von der grössten Wichtigkeit, und zugleich für die Bildung des mathematischen Geistes gewiss eben so fruchtbringend ist wie die übrige Geometrie, daher auch auf den Lehrplänen der sogenannten höheren Bürger-, Real- und Gewerbschulen namentlich in Oesterreich, Baiern, Würtemberg mit Recht längst das volle Bürgerrecht erhalten hat*), unter die Unterrichtsgegenstände aller solcher Schulen aufgenommen werden möge: so empfehlen wir das vorliegende, wie es uns scheint, recht praktische Buch, allen Lehrern an solchen Schulen zur Beachtung.

Mechanik.

Beitrag zur Theorie der Seilpolygone und der Kettenlinie von Dr. Th. Spieker. Programm des Herzogl. Carlsgymnasium zu Bernburg. Bernburg. 1852. 4.

In diesem lesenswerthen Programm hat der Herr Ver-

*) In Frankreich versteht sich dies seit dem berühmten Erfinder der Géométrie déscriptive natürlich ganz von selbst.

fasser diejenigen Seilpolygone einer besonderen Untersuchung unterzogen, an denen lauter parallele Kräfte wirken, wozu nur elementare Sätze nöthig waren. Aus den auf diesem elementaren Wege gewonnenen Sätzen hat er dann gleichfalls durch elementare Betrachtungen die meisten Eigenschaften der Kettenlinie abgeleitet, indem man dabei sonst gewöhnlich unmittelbar von der Differentialgleichung der Kettenlinie ausgeht, und die ganze Betrachtung gleich von vorn herein in das Gebiet der Differential- und Integralrechnung hinüber führt. Er ist dabei selbst bis zur Rectification und dem Krümmungshalbmesser fortgeschritten, und bedient sich überhaupt in seiner ganzen Schrift der höheren Analysis sonst gar nicht, als nur bei dem Satze §. 22. über den Schwerpunkt des Seilpolygons, wo die Anwendung derselben wohl auch nicht leicht umgangen werden konnte, da es bei dieser Untersuchung auf die Bestimmung eines Maximums ankam. Wir haben allen Untersuchungen, welche Betrachtungen, die sonst nur mittelst der höheren Analysis angestellt zu werden pflegen, in das Gebiet des sogenannten Elementaren hinüber führen, überhaupt immer das Wort geredet; um so mehr thun wir dies bei einem praktisch so wichtigen Gegenstande wie die Kettenlinie ist, und wenn es in so ansprechender und strenger Weise geschieht wie in dem vorliegenden Programm, von dem wir daher recht sehr wünschen, dass es, wie leider oft bei solchen Schriften geschieht, nicht unbeachtet bleiben möge. Möge der Herr Verfasser fortfahren, seine schönen Kräfte in demselben strengen mathematischen Sinne andern derartigen Untersuchungen zu widmen.

Astronomie.

Wunder des Himmels oder gemeinfassliche Darstellung des Weltsystems. Von J. J. v. Littrow. Vierte Auflage. Nach dem neuesten Zustande der Wissenschaft bearbeitet von Carl v. Littrow, Director der k. k. Sternwarte in Wien. Dritte und Vierte Lieferung. Stuttgart. Hoffmann. $12\frac{1}{2}$ Ngr.

Indem die beiden ersten Abtheilungen dieses ausgezeichneten Werks, welche wir im Literarischen Berichte Nr. LXXIV. S. 938. angezeigt haben, hauptsächlich die Einleitung, und die Erste Haupt-Abtheilung. Theorische Astronomie oder allgemeine Erscheinung des Himmels, enthielten, enthalten das vorliegende dritte und vierte Heft die Zweite Haupt Abtheilung. Beschreibende Astronomie oder Topographie des Himmels und den Anfang der Dritten Haupt-Abtheilung. Physische Astronomie oder Gesetze der himmlischen Bewegungen. Hauptsächlich hat uns die jetzt vollständig vor uns liegende Topographie des Himmels sehr grosses Vergnügen gemacht und grosse Belehrung gewährt, weil wir darin alle am Himmel in älterer, neuerer und neuester Zeit gemachten Entdeckungen mit grosser Sorgfalt und Genauigkeit zusammengestellt, und oft mit höchst interessanten Betrachtungen begleitet gefunden haben. Dass dem verdienten neuen Herausgeber des Werks hier zu Zusätzen ein grosses Feld eröffnet war, weiss Jeder, wer die neuere Geschichte der Astronomie kennt, und dass Herr Carl v. Littrow diese Gelegenheit, das Werk seines verewigten Vaters in der in Rede stehenden Beziehung auf eine dem jetzigen Zustande der Wissenschaft ganz entsprechende Weise zu vervollständigen, nicht ungenutzt gelassen hat, brauchen wir unsern Lesern wohl nicht erst zu versichern, da seine Genauigkeit in solchen Arbeiten sich schon bei anderer Gelegenheit in der vielfachsten Weise bewährt hat, und ihm die umfassendste Kenntniss des Gegenstandes zur Seite steht. Der Herr Herausgeber beginnt natürlich mit der Sonne. Dass er sich hier auch über die namentlich bei Gelegenheit der grossen Sonnenfinsterniss vom Jahre 1851 vielfach discutirte Frage über die Sonnen-Atmosphäre ausspricht, versteht sich von selbst. „Weit unmittelbarer aber“ sagt er „wird die Existenz einer Sonnenatmosphäre durch die merkwürdigen Erscheinungen dargethan, die man bei totalen Sonnenfinsternissen beobachtet. Gäbe es ausser der Photosphäre keine Hülle der Sonne, so müsste, da der Mond, wie wir bald sehen werden, wahrscheinlich keine oder doch eine sehr dünne Atmosphäre hat, in dem Augenblicke, wo der Mond die Sonne ganz bedeckt, die Stelle des Himmels, welche von beiden Gestirnen eingenommen wird, lichtlos und höchstens durch ihre völlige Dunkelheit von dem übrigen Firmamente zu unterscheiden sein. Dem ist aber nicht so, sondern es zeigt sich eine sehr helle Glorie um beide Himmelskörper. Mit dem Fernrohre entdeckt man an der inneren Grenze dieser Glorie röthliche Flecke, theils unmittelbar auf dem Mondrande wurzelnd, theils in Wolkenform von demselben getrennt, wie sie Fig. 45. auf Taf. III. nach einer Zeichnung von Biela vom 8. Juli 1842 und Fig. 46. a. b. nach einer Beobachtung des Herausgebers im Jahre 1851 darstellt. *Die Glorie sowohl als die rothen Flecke gehören unzweifelhaft der Sonne an*, da beide Erscheinungen, wie der Mond über die Sonne hingeht, auf der einen Seite der Scheibe an Grösse ab-, auf der andern zunehmen*). Da unmittelbar nach dem Verschwinden, so wie unmittelbar vor dem Wiedererscheinen der Sonne und gerade an

*) Resultat aller vorurtheilsfreien und den Gegenstand gehörig zu würdigen verstehenden Beobachter. G.

den Stellen des Mondrandes, wo diese kleinsten Phasen der Sonne Statt finden, also beider Körper Ränder sich am nächsten stehen, sich ein rother, sichelförmiger Saum zeigt, so muss man vermuthen, dass die Photosphäre der Sonne von zwei Schalen umgeben ist, deren eine ihr zunächst liegende in rothem Lichte leuchtet, deren zweite, weit umfangreichere, weisses Licht hat. Jene rothe Schichte würde dann an gewissen Stellen emporgetrieben, und bildete so die unter dem Namen Protuberanzen bekannten Lichtbüschel. Ueber die Ursachen dieses Emportreibens ist es bis jetzt nicht gelungen, etwas Bestimmtes zu erforschen; indess haben die Beobachtungen von 1851 einen Zusammenhang zwischen den Protuberanzen und den Sonnenflecken und Fackeln wahrscheinlich gemacht, da sich mehrere Protuberanzen an Stellen gezeigt haben, wo kurz vor oder nach der Finsterniss Flecken und Fackeln gesehen waren. Da wir nach dem Obigen die Sonnenflecken als Krater in der Photosphäre annehmen müssen, so liegt auch die Voraussetzung nahe, dass Gasströmungen aus diesen Kratern Statt finden, und jene Emporhebungen der rothen Schichte bewirken." Wir hoffen durch die Mittheilung der vorstehenden ungemein klaren und einleuchtenden Darstellung uns den Dank unserer geehrten Leser erworben zu haben, und hoffen, dass dieselben daraus zugleich entnehmen werden, was sie von den übrigen Partieen dieses ausgezeichneten Werkes zu erwarten haben. Die oben gegebenen Erklärungen sind in der unmittelbarsten Weise aus genauen Beobachtungen geschöpft, und tragen eben deshalb, gerade bei einem solchen Gegenstande, wie dem vorliegenden, den Charakter ächter Naturforschung an sich. Ganz in derselben schönen Weise wie die Sonne werden nach der Reihe besprochen: Merkur; Venus; Mars; die Asteroiden; Jupiter; Saturn; Uranus; Neptun (bei welchem die Geschichte seiner Entdeckung ausführlich erzählt wird); der Mond; die Monde der vier äussersten Planeten; die Kometen; die Anzahl, Entfernung und Grösse der Fixsterne; die Doppelsterne; die veränderlichen Sterne; die Sterngruppen und Nebelmassen des Himmels. Unsere Literatur hat kein Werk aufzuweisen, welches eine so vollständige und so ansprechende Darstellung der Topographie des Himmels enthielte wie das vorliegende, und der Herr Herausgeber hat sich durch dasselbe den Dank aller Freunde, sowohl der Astronomie überhaupt, als auch der beschauenden Astronomie insbesondere, in hohem Maasse erworben, und wird dieser herrlichen Wissenschaft durch sein ausgezeichnetes Werk auch gewiss immer noch mehr Freunde erwerben.

Den beiden letzten Lieferungen, welche der physischen Astronomie gewidmet sein werden, sehen wir mit Verlangen entgegen und werden nicht säumen, dieselben unmittelbar nach ihrem Erscheinen anzuzeigen.

Ueber die Fortschritte der Astronomie in dem letzten Decennium. Besonders abgedruckt aus C.

v. Littrow's Kalender für alle Stände für die Jahre 1851, 1852, 1853.

Der von Herrn C. v. Littrow herausgegebene Kalender für alle Stände enthält in seinen Jahrgängen 1851, 1852, 1853 eine sehr interessante Darstellung der Geschichte der astronomischen Entdeckungen in dem letzten Decennium, welche wir unsern Lesern aus vollkommenster Ueberzeugung recht sehr zur Beachtung empfehlen, da sie schwerlich an einem anderen Orte das an astronomischen Entdeckungen so reiche letzte Decennium in eben so vollständiger und interessanter Weise charakterisirt finden werden als in den drei letzten Jahrgängen des obigen überhaupt sehr empfehlenswerthen Kalenders für alle Stände. Der Jahrgang 1851 bespricht die Kometen, der Jahrgang 1852 die neu entdeckten Planeten, der Jahrgang 1853 die Fixsterne; und wir wüssten in der That nicht, was uns bei diesen höchst lehrreichen historischen Darstellungen, die ausserdem noch manche einzelne besonders interessante Notizen enthalten, wie z. B. die im Jahrgang 1851. S. 24. mitgetheilte Stelle aus Hevel's Cometographia. pag. 326. über den Kometen von 1652, nach welcher die Duplicität des Biela'schen Kometen keineswegs isolirt dasteht, noch hätte zu wünschen übrig bleiben sollen.

De magnitudine relativa numeroque accurato stellarum quae solis oculis conspiciuntur fixarum. Commentatio qua orationem ex lege publica a se habendam, ad munus Mathematum Professoris ordinarii in Academia Regia Manasteriensi adeundum, indicit Eduardus Heis, Philos. Doctor et Prof. Publ. Ord. Monasterii Guestphalorum. 1852. 4.

Der Herr Vf. des vorliegenden Programms hat sich bekanntlich durch seine Beobachtungen der Sternschnuppen, seine theoretischen Untersuchungen über dieselben, und seine Beobachtungen der veränderlichen Sterne schon anerkannte Verdienste erworben. In diesem sehr lehrreichen Programm unterwirft er die relative Grösse der mit blossem Auge sichtbaren Sterne einer ausführlichen Besprechung, beschreibt seine Beobachtungs- und Rechnungs-Methode, vergleicht die Resultate seiner Beobachtungen mit Argelander's und J. Herschel's Bestimmungen u. dgl., so dass wir dieses Programm aus vollkommenster Ueberzeugung unsern für die in demselben so lehrreich besprochenen Gegenstände sich interessirenden Lesern zur sorgfältigen Beachtung empfehlen können, namentlich allen denjenigen, welche dergleichen, Liebhabern der Astronomie besonders deshalb, weil sie einen besonderen Instrumentenapparat gar nicht in Anspruch nehmen, dringend zu empfehlende Beobachtungen selbst anzustellen beabsichtigen.

Physik.

Die Physik in ihren wichtigsten Resultaten dargestellt von Friedrich Zamminer, Dr. Phil. und ausserordentl. Prof. an der philosophischen Universität zu Giessen. Mit 11 lithographirten Tafeln. Stuttgart. Frankh. 1852. 8. 2 Thlr. 8 Ngr.

Dieses neue Handbuch der Physik bildet eine Abtheilung der „Neuen Encyklopädie der Wissenschaften und Künste“ welche die auf dem Titel genannte Buchhandlung herausgiebt. Der Zweck desselben ist hauptsächlich eine Vorbereitung zum Verständniss der praktischen Anwendungen der Physik, eine Vorbereitung, welche jedoch eine gründlich - wissenschaftliche sein soll. Wir sind der Meinung, dass der Herr Verfasser diesem Zweck zunächst dadurch in sehr verständiger Weise zu entsprechen gesucht hat, dass er sein Augenmerk hauptsächlich auf die gründliche Darstellung und Erläuterung derjenigen Lehren der Physik richtete, welche in ihren Resultaten als ausgemacht und feststehend angesehen werden können, so dass er also das noch Hypothetische weit weniger berücksichtigte. Da nur Ersteres, nicht Letzteres, für die praktische Anwendung Werth haben kann, so ist das von ihm in dieser Beziehung eingeschlagene Verfahren jedenfalls als ein sehr zweckmässiges zu bezeichnen. Was ferner die Darstellung selbst betrifft, so hat er sich, was dem Zwecke des Buchs gleichfalls vollständig entspricht, überall einer einfachen Sprache und grösster Deutlichkeit befleissigt, so wie denn endlich auch von den Elementen der Mathematik, wo es der beabsichtigte Zweck erforderte, ein häufiger und sehr verständiger Gebrauch gemacht worden ist. Wir glauben daher das vorliegende Buch als seinem Zweck recht wohl entsprechend empfehlen zu können, und machen alle diejenigen, welche die Lehren der Physik nach irgend einer Richtung hin praktisch anzuwenden beabsichtigen, auf dasselbe aufmerksam. Den Inhalt hier besonders anzugeben, ist nicht nöthig, weil er der übliche ist. Dass der mechanische Theil besondere Berücksichtigung gefunden hat, versteht sich von selbst; aber auch der optische Theil wird dem künftigen Optiker, die Abtheilung über Elektricität dem künftigen Telegraphisten, u. s. w. eine gute Vorbereitung auf ihr künftiges Fach gewähren. Möge dem Buche daher die verdiente Beachtung zu Theil werden.

LXXIX.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Compendium der höheren Analysis von Dr. Oskar Schlömilch, Professor an der polytechnischen Schule zu Dresden. Braunschweig. Vieweg. 1853. 2 Rthlr.

Ein gutes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung gehört nach unserer Meinung zu den Seltenheiten. Selbst nach Cauchy's trefflichen Vorarbeiten, durch welche diesen Disciplinen bekanntlich eine ganz neue Grundlage gegeben worden, bleibt, wie wir aus dem Munde berühmter Gelehrten gehört haben, immer noch Vieles zu thun übrig. Cauchy's Methoden sind zwar im Wesentlichen streng und gründlich (dass sie dies nicht überall sind, wird sich im Verlauf unserer Recension zeigen), aber in vielen Punkten gewiss noch der Vereinfachung fähig. Gründlichkeit und möglichste Einfachheit ist das Ziel, welches der Bearbeiter einer wissenschaftlichen Disciplin überhaupt zu erstreben hat. Inwieweit der Verfasser des in der Ueberschrift genannten Buchs diese Aufgabe gelöst hat, wollen wir einer kritischen Beleuchtung unterwerfen.

Die erste Section, die Differentialrechnung, verbreitet sich in neun Capiteln der Reihe nach über Differentiation der Funktionen mit einer und mehreren Variabeln, über Anwendungen auf höhere Geometrie, vieldeutige Symbole, Maxima und Minima, die Reihen von Taylor und Maclaurin, Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen und über imaginäre Funktionen, während in einem Anhange noch von den höheren Differentialquotienten der zusammengesetzten Funktionen die Rede ist. Vermissen könnte man hier die Reihenentwickelung der impliciten Funktionen, namentlich die Reihe von Lagrange, ferner Cauchy's Theorie über die Kennzeichen der Entwickelung der Funktionen in convergente Reihen (Moigno Leçons p. 150), endlich Fourier's Methode, die Wurzeln der numerischen Gleichungen zu entdecken. Doch wird sich die Reichhaltigkeit des Materials immer nach dem jedesmaligen Bedürfniss und dem Zweck des Buches zu richten haben. — Die Vertheilung des Stoffs betreffend, fällt am meisten auf, dass die durch den Rest begrenzte Taylor'sche Reihe nicht in den Vordergrund gestellt ist; sie muss bei vielen Untersuchungen, die im Buche vorhergehen, z. B. bei der Betrachtung der Funktionen mit mehreren Variabeln, die Grundlage bilden, wie sich weiterhin zeigen wird. Eine bedeutende Abweichung von den sonst üblichen Darstellungen besteht darin, dass der Verfasser bei der Entwickelung der Funktionen in unendliche Reihen nach dem Maclaurin'schen Satze die, wie er sich in der Vorrede ausdrückt, immer umständlichen Restbetrachtungen vermieden hat. Dem gewöhnlichen Kennzeichen für die Gültigkeit der Entwickelung substituirt er nämlich zunächst pag. 128 ein anderes, und dann pag. 130 noch ein einfacheres, was freilich für die Reihenentwickelungen eine sehr grosse Bequemlichkeit darbieten würde, wenn es nur richtig wäre. Wir kommen weiter unten darauf zurück. Diese Theoreme über die Gültigkeit der Entwickelung werden, merkwürdig genug, erwiesen, ohne dass von Convergenz der Reihe irgend ein Wort gesagt wird. Ohne diesen vorläufigen Begriff kann man doch weder mit der Entwickelung irgend eine Vorstellung verbinden, noch halten wir einen Beweis für ihre Gültigkeit für möglich. In Cap. VIII. p. 155 wird sodann gezeigt, wie das frühere Kennzeichen für den Bestand der Maclaurin'schen Reihe mit dem über die Convergenz derselben übereinstimmt. Darnach würde folgen, dass diese Reihe immer richtig ist, wenn sie convergirt, was aber durchaus falsch ist. Nach dieser allgemeinen Uebersicht wollen wir nun in ein näheres Detail eingehen.

Der Begriff der Stetigkeit ist anders gefasst als bei Cauchy. Die von letzterem aufgestellte Definition, nach welcher $y=f(x)$ eine von $x=a$ bis $x=b$ stetige Funktion von x ist, wenn sie für jeden Werth von x in diesem Intervall einen einzigen, endlichen, reellen Werth erlangt, und wenn ausserdem für jeden Werth von x zwischen a und b die Differenz $f(x+i)-f(x)$ mit i unendlich klein wird, ist einzig und allein natürlich und richtig. Ebenso verändert sich $f(x)$ von $x=a$ an stetig, sobald $f(a)$ einen einzigen, endlichen, reellen Werth hat und $f(a+i)-f(a)$ mit i unendlich klein wird. Schlömilch stellt (Seite 5 und 6) zwei Definitionen der Stetigkeit auf, deren eine er aus geometrischen Betrachtungen ableitet. Zuerst heisst es: „Die Funktion $y=f(x)$ verläuft stetig von $x=a$ bis $x=b$, wenn der Uebergang von $y=\alpha$ bis $y=\beta$ mit Durchlaufung aller zwischen α und β einschaltbaren Zwischenstufen geschehen ist, wo α und β die Werthe der y für $x=a$, $x=b$ resp. bedeuten sollen.“ Dies beruht jedenfalls auf einem Irrthum. Man denke sich $b>a$, $\beta>\alpha$, c als einen Werth zwischen a und b, endlich eine Funktion, die für $x=c$ ebenfalls den Werth β erlangt. Dieselbe kann nun von $x=a$ bis $x=c$ alle Zwischenstufen zwischen α und β durchlaufen (was sicher geschehen muss, wenn sie nach Cauchy's Begriff stetig von $x=a$ bis $x=c$), aber von $x=c$ bis $x=b$ kann sie imaginär, unendlich, vieldeutig u. dgl. werden, und unter diesen Voraussetzungen würde man sie doch nicht für stetig halten können von $x=a$ bis $x=b$. Der obigen Definition kann nur dann ein Sinn untergelegt werden, wenn y von $x=a$ bis $x=b$ fortwährend wächst, falls

$\beta > \alpha$, oder fortwährend abnimmt, wenn $\beta < \alpha$ ist. Die Umkehrung, dass $f(x)$ unstetig wird, wenn es Grössen zwischen α und β giebt, welche nicht als Zwischenwerthe der Variabeln erscheinen, enthält wenigstens nichts Unrichtiges. Auf Seite 6 heisst es: „Die Funktion $f(x)$ bleibt an der Stelle $x=\xi$ continuirlich oder erleidet daselbst eine Unterbrechung der Stetigkeit, jenachdem die Differenz $f(\xi+\delta)-f(\xi-\varepsilon)$ mit δ und ε gleichzeitig verschwindet oder nicht." Zunächst kann gar nicht die Rede sein von Stetigkeit an einer Stelle, sondern nur von Stetigkeit von der Stelle an oder in der Nähe derselben; man wird vielmehr bestimmter sagen: die Funktion wird für den speciellen Werth von x imaginär oder unendlich oder unbestimmt etc. Andererseits stelle man sich vor, dass $f(\xi+\delta)-f(\xi)$, $f(\xi-\varepsilon)-f(\xi)$ sich derselben von Null verschiedenen Grenze A nähere, wenn δ und ε gegen die Null convergiren, in welchem Falle $f(x)$ in der Nähe von ξ unstetig sein wird; die Differenz $f(\xi+\delta)-f(\xi-\varepsilon)=f(\xi+\delta)-f(\xi)-\{f(\xi-\varepsilon)-f(\xi)\}$ wird dann mit δ und ε unendlich klein, und folglich würde die Funktion in der Nähe von ξ nach Schlömilch stetig sein, was dem Vorhergehenden widerspricht. Schlömilch ist auf diesen Begriff durch Betrachtung einer Kurve geführt, an der dem Werth $x=\xi$ zwei verschiedene Ordinaten entsprechen, während sie sonst stetig verläuft. Er scheint überhaupt der Meinung zu sein, dass die geometrische Darstellung einer zwischen zwei Grenzen von x stetigen Funktion in einem ununterbrochenen Zuge zwischen diesen Grenzen bestehen müsste; selbst Cauchy sagt (Leçons pag. 9): „Ces conditions ne peuvent être satisfaites, qu'autant que les différents points forment une ligne continue entre les limites." Dass diese Vorstellung aber unrichtig ist, kann man an der Funktion $y=x\sin\frac{1}{x}$ sehen. Diese verschwindet für $x=0$, behält immer bestimmte reelle Werthe, auch wird $f(0+i)-f(0)$ $=i\sin\frac{1}{i}$ mit i unendlich klein, folglich ist die Funktion immer stetig, und doch ist der Zug von $x=-\xi$ bis $x=+\xi$ durch den Werth $x=0$ unterbrochen. Zwischen $x=0$ und $x=+\xi$ oder auch $x=-\xi$ und $x=0$ zeigt diese Funktion unendlich viele Maxima und Minima, wenn ξ eine gewisse Kleinheit erreicht hat. Man kann weder sagen, dass sie von $x=0$ an wächst, noch dass sie abnimmt. Folgendes Bild (Taf. III. Fig. 12.) veranschaulicht den Lauf der Funktion.

Sieht man von den Fällen ab, wo eine Funktion zwischen zwei Grenzen imaginäre, unendliche oder vieldeutige Werthe erlangt, so scheint übrigens noch keine unstetige analytische Funktion bekannt zu sein, wenn man nicht etwa manche unendliche convergente Reihen oder bestimmte Integrale anführen will. So ist die Funktion $x^{2m}(1-x)+x^{2m+2}(1-x)+x^{2m+4}(1-x)$ in inf. unstetig in der Nähe von $x=1$, denn für diesen Werth ist sie $=0$, während sie gegen die Grenze $\frac{1}{2}$ convergirt, wenn x sich der Einheit nähert.

Das Kapitel über Differenzirung der einfachen Funktionen ist insofern gut abgehandelt, als wenig vorausgesetzt wird, nicht einmal der Binomische Satz für positive ganze Exponenten. Nur bei der Differenzirung der Potenz (p. 18) ist uns eine Ungenauigkeit aufgestossen. Aus der Gleichung $\frac{\partial(x^\lambda)}{\partial x} = \lambda x^{\lambda-1}$, die für alle rationalen λ bereits erwiesen, soll unmittelbar hervorgehen, dass sie auch für irrationale λ gilt, insofern man für λ successive Brüche setzen kann, die sich dem Irrationalwerth ohne Ende nähern. Dieser Behauptung kann jedenfalls nur die Vorstellung zu Grunde liegen, dass ganz allgemein $\frac{\partial f(x, l)}{\partial x} = \text{Lim.} \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial x}$ sei, indem der veränderliche Bruch λ gegen die Grenze l convergirt, d. h. $\underset{i}{\text{Lim.}} \frac{f(x+i, l)-f(x, l)}{i} = \underset{\lambda}{\text{Lim.}}\underset{i}{\text{Lim.}} \frac{f(x+i, \lambda)-f(x, \lambda)}{i}$. Es müsste also erwiesen werden, dass man zu demselben Resultat gelangt, wenn man in dem Ausdruck $\frac{f(x+i, \lambda)-f(x, \lambda)}{i}$ einerseits zuerst i gegen Null und dann λ gegen l, andererseits zuerst λ gegen l und dann i gegen Null convergiren lässt. Dies ist aber im Allgemeinen gar nicht einmal richtig, wie an Beispielen leicht gezeigt werden könnte. Wie man im gegenwärtigen Falle diesen Zweifel heben kann, wollen wir hier der Kürze wegen nicht weiter zeigen.

Ganz ähnliche Zweifel erweckt der Beweis des auf Seite 34 vorgetragenen Satzes. Ist nämlich $z = f(u, v)$, wo u und v wiederum Funktionen der unabhängigen Variabeln x sind, so soll erwiesen werden, dass $\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$, wo $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ partielle Differentialquotienten bedeuten. Aendert sich x um Δx, so werden u und v die Aenderungen Δu, Δv erfahren, und man hat
$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u, v)-f(u, v)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u+\Delta u, v)}{\Delta v}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$
Nähert sich nun Δx der Null, also auch Δu, Δv, so ist zunächst klar, dass der erste Theil rechter Hand sich der Grenze $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$ nähert. Bliebe in dem zweiten Theil rechter Hand Δu zunächst constant, während Δv an die Null geht, so erhielte man die Grenze $\frac{\partial f(u+\Delta u, v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$; da aber auch Δu gegen die Null geht, so ist die richtige Grenze $\frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$. Allein diesen Schlüssen liegt offenbar eine unrichtige Hypothese zu Grunde. Während nämlich Δv sich der Null nähert, kann Δu nicht einstweilen constant bleiben, denn da u und v Funktionen von x sind, so ist immer eine gleichzeitige Aenderung dieser abhängigen Variabeln vorhanden, und wenn man die Sache aus diesem Gesichtspunkt betrachtet, so lässt sich schlechterdings nicht absehen, was aus dem Ausdruck
$$\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u+\Delta u, v)}{\Delta v}$$
wird, wenn Δu und Δv gleichzeitig gegen Null convergiren. Uebrigens glaubt Referent noch nirgends einen richtigen Beweis

des obigen Theorems gelesen zu haben. Wir würden den Gegenstand etwa auf folgende Weise behandeln: Für drei abhängige Variabele z. B. sei

$$u = f(x, y, z),$$

wo x, y, z Funktionen von der unabhängigen Variabeln s sein sollen. Bezeichnen wir die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ resp. mit $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$, $\chi(x,y,z)$, so ist bekanntlich

$$f(x+\varDelta x, y+\varDelta y, z+\varDelta z) = f(x, y+\varDelta y, z+\varDelta z) + \varphi(x+\Theta\varDelta x, y+\varDelta y, z+\varDelta z)\varDelta x,$$
$$f(x, y+\varDelta y, z+\varDelta z) = f(x, y, z+\varDelta z) + \psi(x, y+\Theta'\varDelta y, z+\varDelta z)\varDelta y,$$
$$f(x, y, z+\varDelta z) = f(x, y, z) + \chi(x, y, z+\Theta''\varDelta z)\varDelta z;$$

folglich

$$\begin{aligned}\frac{f(x+\varDelta x, y+\varDelta y, z+\varDelta z) - f(x,y,z)}{\varDelta s} &= \varphi(x+\Theta\varDelta x, y+\varDelta y, z+\varDelta z)\frac{\varDelta x}{\varDelta s}\\ &+ \psi(x, y+\Theta'\varDelta y, z+\varDelta z)\frac{\varDelta y}{\varDelta s}\\ &+ \chi(x, y, z+\Theta''\varDelta z)\frac{\varDelta z}{\varDelta s}.\end{aligned}$$

Hier ist Θ eine Funktion von x, y, z, $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$; Θ' eine Funktion von x, y, z, $\varDelta y$, $\varDelta z$; Θ'' eine Funktion von x, y, z, $\varDelta z$, so aber, dass jede dieser Funktionen zwischen 0 und 1 bleibt, welche Werthe man auch den Grössen, von denen sie abhängen, beilegen mag. Lässt man nun $\varDelta s$ sich der Null nähern, so werden $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$ gleichzeitig unendlich klein, und man wird auf der Stelle übersehen, dass die vorhergehende Gleichung übergeht in die Grenzgleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial s} &= \varphi(x,y,z)\frac{\partial x}{\partial s} + \psi(x,y,z)\frac{\partial y}{\partial s} + \chi(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial s}\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}.\end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt aber nur so lange, als die Funktionen und ihre ersten Differentialquotienten stetig bleiben.

Etwas zu kurz ist die Differenzirung der impliciten Funktionen abgehandelt, indem nur der eine Fall beleuchtet wird, wo eine Gleichung von der Form $f(x, y) = 0$ gegeben ist.

Die Theorie der Differentiation der Funktionen mit mehreren unabhängigen Variabeln, welche S. 38—40 absolvirt wird, ist uns ganz unverständlich geblieben. Wir wollen dies dem Herrn Verfasser nicht so sehr zum Vorwurf machen, da uns die meisten Schriftsteller in diesem Punkte unklar zu sein scheinen; wenigstens ist der Begriff des Differentials einer Funktion von mehreren unabhängigen Variabeln in der Regel ein sehr willkührlicher, so dass man gar nicht absieht, was mit einem solchen Begriffe ausgerichtet werden kann. Die Sache gestaltet sich ganz einfach, wenn man den Begriff eines solchen Differentials erst dann fixirt, wenn die Anwendungen, z. B. die Theorie der Maxima und Minima mit mehreren unabhängigen Variabeln, darauf führen. Wenn man nur in allen Fällen weiss, was man will, so kann keine Unklarheit entstehen.

Hat man es nämlich mit einer unabhängigen Variabeln zu thun, so ist nach der Taylorschen Reihe

$$f(x+i)=f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{1.2}f''(x)+\dots+\frac{i^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x)+\frac{i^n}{n!}f^n(x+\Theta i),$$

d. h. wenn $f(x+i)$ nach Potenzen von i entwickelt wird, so sind $if'(x)$, $i^2f''(x)$, $i^3f'''(x)$ etc. die successiven Differentiale von $f(x)$, wo i ganz willkührlich. In ähnlicher Weise findet sich

$$\begin{aligned} f(x+\alpha h, y+\alpha h', z+\alpha h'') = f(x,y,z) &+ \alpha \left\{\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}h'+\frac{\partial u}{\partial z}h''\right\}^1 \\ &+\frac{\alpha^2}{1.2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}h'+\frac{\partial u}{\partial z}h''\right\}^2 \\ &+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}h'+\frac{\partial u}{\partial z}h''\right\}^{n-1} \\ &+\frac{\alpha^n}{n!}\varphi(x+\Theta\alpha h,\ y+\Theta\alpha h',\ z+\Theta\alpha h''), \end{aligned}$$

wo $\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}h'+\frac{\partial u}{\partial z}h''\right)^k$ die bekannte symbolische Bedeutung hat, wo ferner $\varphi(x+\Theta\alpha h,\ y+\Theta\alpha h',\ z+\Theta\alpha h'')$ denjenigen Werth bedeutet, welchen die Funktion $\varphi(x,y,z)=\left\{\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}h'+\frac{\partial u}{\partial z}h''\right\}^n$ erlangt, indem man $x+\Theta\alpha h$ an die Stelle von x etc. setzt. Θ ist ein Werth zwischen 0 und 1. Macht man in vorstehender Formel $\alpha=1$, so ist die Funktion $f(x+h,\ y+h',\ z+h'')$ in eine nach Potenzen und Produkten von h, h', h'' fortschreitende Reihe entwickelt, und der obigen Betrachtung analog nennt man

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}h'+\frac{\partial u}{\partial z}h'',\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}h'+\frac{\partial u}{\partial z}h''\right)^2 &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}h'^2 \\ +\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}h''^2+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}hh'+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}hh''&+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}h'h'' \end{aligned}$$

etc. die successiven Differentiale von $f(x,y,z)$, wo h, h', h'' ganz willkührliche Grössen bedeuten. Die obige Formel findet man in dem Compendium von Schlömilch (p. 146.) nur für den Fall, dass $\alpha=1$ und zwei Variabele x, y vorhanden sind, entwickelt, doch ohne Angabe des Restausdruckes.

Auf Seite 42 wird die Ableitung $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ zuerst als die Grenze definirt, gegen welche der *n*te Differenzenquotient convergirt, wenn Δx sich der Null nähert. Da fehlt nun der gar nicht leicht zu gebende Nachweis, dass diese Grenze mit dem durch successive Differenzirung gewonnenen *n*ten Differentialquotienten identisch ausfällt.

Auf Seite 50 ist der Beweis für die Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ nicht streng genug, wie man nach dem, was oben gesagt worden, leicht finden wird. Nach einem richtigen Beweise dieser Gleichung sucht man in den meisten Lehrbüchern vergebens.

Der Satz p. 60: „Verschwindet $f''(x)$ für einen speciellen Werth von x, ohne dass zugleich $fx = 0$ wird, so findet in dem betreffenden Punkt der Kurve ein Inflexionspunkt statt", ist falsch. Es ist vielmehr erforderlich, dass die erste der Ableitungen $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$ etc., welche nicht verschwindet, von ungerader Ordnung sei. Würde also z. B. $f'''(x) = 0$, $f^{IV}(x) \gtrless 0$, so fände kein Wendepunkt statt, wie bei der Funktion $f(x) = a + bx + \frac{1}{4}x^4$ für $x = 0$.

Die Theorie des Krümmungskreises wird wohl am besten aus der allgemeinern Theorie der Berührung höherer Ordnungen, von welcher sich in diesem Buche keine Spur findet, hergeleitet. Denn die allgemeinen Methoden verdienen immer den Vorzug. Es ist auch nicht geradezu nachgewiesen, dass der Osculationskreis sich unter allen denkbaren Kreisen am Engsten an die Kurve anschliesst, auf welchen Punkt es doch gerade ankommt. Herr Prof. Schlömilch betrachtet den Krümmungsmittelpunkt als den Durchschnitt zweier unendlich benachbarter Normalen der Kurve.

Von der Evolute einer ebenen Kurve hätten die beiden Eigenschaften erwiesen werden sollen: 1) dass der Krümmungsradius die Evolute immer tangirt, und namentlich 2) dass die Differenz zweier Krümmungsradien immer dem zwischenliegenden Bogen der Evolute gleich ist; die letztere Eigenschaft deshalb, weil es pag. 73 heisst: „Die Benennung Evolute kommt daher, dass man sich die ursprüngliche Kurve durch Abwickelung eines um die Evolute gelegten Fadens entstanden denken kann."

In der Theorie der Linien von doppelter Krümmung vermissen wir die Bestimmung der Osculationsebene, der Hauptnormale, des Torsionsmaasses. Das letztere ist besonders wichtig, wenn es sich um die Frage handelt, ob eine räumliche Kurve von einfacher oder von doppelter Krümmung ist. Den Begriff der anschliessenden Ebene und der Hauptnormale kann man nicht wohl entbehren, um eine deutliche Ansicht vom Krümmungskreis zu erlangen. Die von Schlömilch gegebene Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes einer doppelt gekrümmten Linie ist ziemlich willkührlich. Er sucht nämlich den Durchschnitt zweier unendlich benachbarten Normalebenen und fällt auf denselben ein Perpendikel von dem betrachteten Punkte aus, welches dann der

Krümmungsradius ist; oder auch der Krümmungsradius ist die Grenze, gegen welche das Verhältniss des Bogendifferentials zum Contingenzwinkel convergirt, wenn beide unendlich klein werden. Uebrigens vereinfacht sich die Formel 10) Seite 82, indem man findet

$$\pm\varrho = \frac{\partial s^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Die Behauptung auf Seite 86, dass der Ort der Krümmungsmittelpunkte eine Evolute der gegebenen Curve sei, beruht wohl auf einer Uebereilung. Das Gegentheil hiervon ist schon lange erwiesen; bei einer Kurve von doppelter Krümmung berühren die Krümmungshalbmesser weder den Ort der Krümmungsmittelpunkte, noch ist das Differential des Krümmungshalbmessers dem Differential des Bogens dieser Kurve gleich. Die letztere ist somit keine Evolute.

Die bei der Bestimmung der so wichtigen Lehre von den Maximis und Minimis angewandte Methode führt, weiter entwickelt, nicht auf die einfachen Bedingungen hin, auf welche es in diesem Gebiete in letzter Instanz ankommt. Ist nämlich $u = f(x, y, z....)$ die zu untersuchende Funktion, so betrachtet der Herr Verfasser $x, y, z....$ als Funktionen der unabhängigen Variabeln t, wonach nun das Problem zufolge der Theorie für Funktionen mit einer unabhängigen Variabeln auf die Untersuchung der successiven Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ etc. zurückkommt. Diese höheren Differentialquotienten fallen nun immer verwickelter aus, je weiter man geht, z. B. für zwei Variabele:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

u. s. w.

und wenn auch nachher immer einzelne Glieder wegfallen, wie z. B. $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ sein muss, so muss man doch vorher die obigen Ableitungen vollständig entwickeln. Basirt man aber die Theorie vom Grössten und Kleinsten auf die oben entwickelte endliche Reihe für $f(x + \alpha h,\ y + \alpha h',\ z + \alpha h''$, etc.), so stellt sich für beliebig viele Variabele ein einfaches Resultat heraus, nach welchem es nur auf die Betrachtung des Differentials

$$\partial^n u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}h' + ...\right)^n$$

(nach der symbolischen Bezeichnung) ankommt; wenngleich die Bedingungen dafür, dass eine ganze homogene Funktion mehrerer Variabeln ihr Zeichen nicht ändert, sich allgemein nur schwer entwickeln lassen.

Wir sehen uns nun im Interesse der Wissenschaft leider genöthigt, die Hauptirrthümer in dem Buche zu berühren. Auf Seite 127 und 128 finden sich folgende Theoreme:

1) Bleiben die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ etc. endlich und stetig innerhalb des Intervalls x bis $x+h$, so gilt die Formel

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots\ldots$$

und zwar für alle x und h, welche der Bedingung

$$\text{Lim}\,\frac{h^{n-1}f^n(x)}{1.2.3\ldots(n-1)}=0$$

Genüge leisten.

2) Bleiben die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ etc. endlich und stetig innerhalb des Intervalls 0 bis x, so ist

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{1.2}x^2+\ldots$$

und zwar für alle x, welche der Bedingung

$$\text{Lim}\,\frac{f^n(0)\,x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}=0$$

Genüge leisten.

Dass diese Bedingungen unzureichend sind, zeigen wir an der Reihe

$$\begin{aligned}f(x)&=1+x+\frac{1}{2\log 2}x^2+\frac{1}{3\log 3}x^3+\frac{1}{4\log 4}x^4+\ldots\\&=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots\end{aligned}$$

Hier ist $nA_nx^{n-1}=\frac{1}{\log n}x^{n-1}$, also für $x=1$, $\text{Lim}(nA_nx^{n-1})=0$; also müsste die obige Reihe für $x=1$ gelten, was keinen Sinn hat, indem Abel in Crelle's Journal, Bd. 3. bewiesen hat, dass $\frac{1}{2\log 2}$, $\frac{1}{3\log 3}$, $\frac{1}{4\log 4}$ etc. eine divergente Reihe ist. Damit überhaupt die Maclaurin'sche Reihe Gültigkeit habe, muss sie vor allen Dingen convergent sein; dies drückt aber die Bedingung $\text{Lim}(nA_nx^{n-1})=0$ keineswegs aus. Auf Seite 130 beweist Herr Prof. Schlömilch, dass man der Bedingung $\text{Lim}(nA_nx^{n-1})=0$ die folgende val num $x<\text{Lim}\frac{A_n}{A_{n+1}}$ substituiren könne. Diese Bedingungen sind aber durchaus nicht identisch, aus der zweiten folgt allerdings die erste, aber nicht umgekehrt. Die letztere Bedingung drückt bekanntlich die Convergenz der Reihe aus; wäre sie richtig, so würde folgen, dass die Maclaurin'sche Reihe immer $f(x)$ zur Summe hat, wenn sie convergent ist. Aber auch dies ist falsch, wie Cauchy (Leçons pag. 105) an folgendem Beispiel gezeigt hat. Entwickelt man die Funktion $e^{-x^2}+e^{-\frac{1}{x^2}}$ nach dem Maclaurin'schen Satze, so findet sich

$$e^{-x^2}+e^{-\frac{1}{x^2}}=1-x^2+\frac{x^4}{1.2}-\frac{x^6}{1.2.3}+\frac{x^8}{1.2.3.4}-\text{etc.};$$

alle Differentialquotienten der Funktion sind stetig, die Reihe ist für alle Werthe von x convergent, und doch ist die obige Gleichung falsch, denn die Summe der unendlichen Reihe ist $=e^{-x^2}$, d. h. nur dem ersten Gliede linker Hand gleich. Entwickelt man also $f(x)$ nach dem Satze von Maclaurin in die unendliche Reihe

$$f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots,$$

so genügt es nicht, die Bedingungen der Convergenz dieser Reihe festzustellen, um sie der Funktion gleichsetzen zu können. So verfährt aber Schlömilch bei allen seinen Reihenentwickelungen. Die Sache ist auch ganz klar. Bezeichnet nämlich $\varphi(x, n)$ den Rest der Reihe, so ist genau

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\ldots+\frac{f^{n-1}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\varphi(x, n).$$

Convergirt nun bei unendlich wachsendem n die Summe der Reihe gegen die Grenze $\Theta(x)$, der Rest gegen die Grenze $\psi(x)$, so folgt $\Theta(x)+\psi(x)=f(x)$, also kann $\Theta(x)$ nur dann $=f(x)$ sein, wenn $\psi(x)$ verschwindet.

Eine zweite Frage ist die, ob eine nach aufsteigenden ganzen Potenzen von x geordnete convergente Reihe mit der Maclaurin'schen identisch sein muss? Cauchy und Schlömilch behaupten dies (Leçons p. 105; Compendium p. 147); aber die gegebenen Beweise sind nicht streng. Cauchy's Beweis besteht darin, dass er die Gleichung $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ succ. differenzirt und dann immer $x=0$ setzt, wo es sich fragt, ob man x klein genug nehmen kann, dass die Summen $a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots$, $1.2a_2+2.3a_3x+3.4a_4x^2+\ldots$, etc. den Grenzen a_1, $1.2a_2$ etc. beliebig nahe kommen. Schlömilch's Verfahren kommt im Wesentlichen eben darauf hinaus. Es ist

$$\frac{f(x)-a_0-a_1x-\ldots-a_{n-1}x^{n-1}}{x^n}=a_n+a_{n+1}x+a_{n+2}x^2+\text{etc.};$$

wenn nun die Reihe a_1x, a_2x^2, a_3x^3, etc. immer convergent bleibt von $x=0$ bis $x=i$, so ist zu beweisen, dass die Summe der Reihe mit x unendlich klein wird. In meiner Abhandlung: „Bemerkungen zur Convergenz etc.“ (Archiv XX. p. 45) habe ich gezeigt, dass dies immer der Fall ist, wenn das Verhältniss $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ eine endliche Grösse nicht übersteigt. Wie die Sache sich in den übrigen Fällen verhält, bleibt einstweilen zweifelhaft.

Auf Seite 131 heisst es: „Die aus dem Theorem von Maclaurin abgeleiteten Gleichungen dürfen auf gewöhnliche Weise differenzirt werden, ohne dass das Gültigkeitsintervall der Variabeln zu ändern wäre." Dies ist falsch, denn wenn die Reihe $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ convergent ist, so braucht nicht $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots$ eine convergente Reihe zu sein.

Auf Seite 135—36 ist die Entwickelung von $\sec x$ fehlerhaft. Man hat freilich

$$\sec x = 1 + (1-\cos x) + (1-\cos x)^2 + \ldots \text{ für } -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2};$$

jetzt aber die einzelnen Glieder nach Potenzen von x entwickeln und dann in irgend einer Ordnung die Glieder zu vereinigen, ist nicht erlaubt. (vergl. meine Abhandlung Archiv XX.). Ebenso steht der Grenzübergang auf Seite 142 nicht frei.

Auf Seite 156 ist bewiesen, dass $u_0, u_1, u_2, \ldots$ eine convergente Reihe ist, wenn $\mathrm{Lim}\left[\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)n\right] > 1$. Es hätte hier auch bewiesen werden sollen, dass die Reihe divergent ist, wenn jene Grenze kleiner als die Einheit ausfällt. Dies konnte sehr leicht durch die Ungleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{a+1} + \ldots + \frac{n+1}{a+n} = \left(1+\frac{1-a}{a}\right)\left(1+\frac{1-a}{a+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1-a}{a+n}\right)$$
$$> 1 + (1-a)\left(1+\frac{1}{a+1}+\ldots+\frac{1}{a+n}\right)$$

bewerkstelligt werden, indem man beachtet, dass die harmonische Reihe divergent ist.

Bei dem Satze Seite 158 fehlt der wichtige Zusatz: „dass die Glieder fortwährend abnehmen."

Der Satz auf Seite 161 ist falsch, wo es heisst: „Der Differentialquotient von der Summe einer unendlichen Reihe ist die Summe von den Differentialquotienten der einzelnen Glieder, jedoch nur dann, wenn sowohl die ursprüngliche, als die abgeleitete Reihe convergirt." Es ist z. B.

$$\log(1+x) = \left[x\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right] + \left[x^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x\right)\right] + \left[x^5\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}x\right)\right] + \text{etc.}$$

für $x=1$, dagegen

$$\frac{1}{1+x} = [1-x] + [x^2(1-x)] + [x^4(1-x)] + \ldots$$

nicht richtig für $x=1$. Die Differentiation einer unendlichen convergenten Reihe ist im Allgemeinen niemals erlaubt, wenn auch die abgeleitete Reihe immerhin convergent ist. Der Fehler in Schlömilch's Beweis liegt in dem Ausdruck: „es vermindern sich alle ϱ."

Dass das Resultat unserer bisherigen Betrachtungen über die Differentialrechnung des Herrn Verfassers für denselben nicht sehr günstig ausgefallen ist, bedauert Referent um so mehr, als ihm das mathematische Talent des Herrn Professor Schlömilch, der sich bereits durch andere ausgezeichnete Arbeiten einen wohlbegründeten Ruf erworben, nicht verborgen ist. Wir würden uns geschmeichelt fühlen, wenn Herr Schlömilch unsere Ansichten nicht geradezu verwerflich fände und vielleicht bei einer späteren Bearbeitung des Buches darauf Rücksicht nähme. Gespannt sind wir auf die Integralrechnung, über welche sich hoffentlich ein günstigeres Urtheil wird fällen lassen.

Stralsund im April 1853.

Dr. Arndt.

(Das Referat über die Integralrechnung im nächsten Hefte.)

LXXX.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Compendium der höhern Analysis von Dr. Oskar Schlömilch, Professor an der polytechnischen Schule zu Dresden. 2te Section. (Integralrechnung.) Braunschweig. Vieweg. 1853. 2 Rthlr. (Vgl. Liter. Ber. Nr. LXXIX.)

Die Integralrechnung zeichnet sich durch Reichhaltigkeit des Materials aus. Man findet hier Gegenstände abgehandelt, die man in den meisten derartigen Werken gänzlich vermisst, z. B. die nach den Sinussen und Cosinussen der vielfachen Bogen fortschreitenden Reihen von Fourier, die Fourier'schen Doppelintegrale, den Integrallogarithmus und Integralsinus, endlich den freilich nur sehr kurzen Abriss einer Theorie der elliptischen Funktionen. Die Darstellung ist übersichtlich gehalten, und überall, wo es angeht, an geometrische Betrachtungen angeknüpft worden, was dem Verständniss der Sachen ohne Zweifel sehr förderlich ist. Referent hat auch mehrere dem Verfasser eigenthümliche Betrachtungen wahrgenommen; dahin gehören die Theorie der periodischen Reihen von Lagrange und Fourier, die Capitel über Integrallogarithmus und Integralsinus, der Beweis für den Ausdruck der Betafunktion durch drei Gammafunktionen, für welchen Jacobi (Crelle Bd. II. S. 307.), Dirichlet und Poisson andere Herleitungen gegeben haben.

Was jedoch die in dem Werke befolgten Methoden anbetrifft, so kann Referent sich nicht enthalten, auf einzelne Darstellungen aufmerksam zu machen, die nach seiner Ansicht einer strengeren Begründung bedürfen.

Die Herleitung des Summenausdrucks für ein bestimmtes Integral giebt manchen Zweifeln Raum. Es kommt (S. 192) darauf an, zu zeigen, dass die Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ beliebig klein gemacht werden, indem man weiss, dass ϱ_1 mit δ_1 unendlich klein wird, ϱ_2 mit δ_2, während δ_1 constant bleibt, ϱ_3 mit δ_3, während δ_1 und δ_2 constant bleiben u. s. w. Könnte man über alle δ willkührlich verfügen, so wäre die Sache klar. Nun muss aber die Summe aller δ stets $= b - a$ sein, also kann man nur über $n-1$ der Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ willkührlich verfügen, und es folgt nun nicht, dass man jede der n Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ beliebig klein machen kann. An Moigno's Beweis ist eben dasselbe auszusetzen. Es ist merkwürdig, dass die meisten der uns bekannten

Schriftsteller über höhere Analysis nicht einmal für einen so einfachen Satz einen richtigen Beweis gegeben haben. Seite 203 ist ein kleiner Irrthum. Bei der Integration der Gleichung

$$\frac{f(x, r + \Delta r) - f(x, r)}{\Delta r} = \frac{\partial f(x, r)}{\partial r} + \varepsilon$$

ist ε als Constante behandelt, während es in der Regel eine Funktion von x ist; statt $\varepsilon \int \partial x$ muss also $\int \varepsilon \partial x$ gesetzt und gezeigt werden, dass $\int \varepsilon \partial x$ mit ε unendlich klein wird, wenn die Integrationsgrenzen endlich sind. Dieser Nachweis erfordert einen Satz von den bestimmten Integralen, und erst in dieser, im Buche später vorkommenden Theorie kann der Satz über das Differenziren unter dem Integralzeichen vorkommen.

Die Darstellung der Zerlegung der gebrochenen rationalen Funktionen in Partialbrüche hat uns wenig zugesagt. Es ist nämlich nirgends die Möglichkeit der angenommenen Formen für die Zerlegung nachgewiesen, denn daraus, dass man nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten immer ebenso viele Gleichungen erhält, als Coëfficienten vorhanden sind, folgt doch nicht, dass sich aus diesen Gleichungen (wenn auch linear) immer bestimmte und endliche Werthe ergeben. Uebrigens giebt es in dem Falle, wo der Nenner imaginäre Factoren hat, eine viel einfachere Zerlegungsart, als die allgemeine.

Seite 239 vermissen wir einen wichtigen Beweis. Auch konnte der Satz sogleich verallgemeinert werden, nämlich, wenn u_1, u_2, u_3,.... eine Reihe von Grössen, deren Glieder stetige Funktionen von x zwischen den Grenzen a und b sind, und wenn die Reihe für alle x zwischen a und b convergent ist, also eine Summe $f(x)$ hat, so ist

$$\int_a^b u_1 \partial x + \int_a^b u_2 \partial x + \text{etc.}$$

ebenfalls eine convergente Reihe, deren Summe $= \int_a^b f(x) \partial x$ ist.

Setzt man $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = s_n$, $u_{n+1} + u_{n+2} +$ in inf. $= R_n$, so ist

$$\int_a^b f(x) \partial x = \int_a^b s_n \partial x + \int_a^b R_n \partial x;$$

daraus nun, dass R_n mit $n = \infty$ verschwindet, muss bewiesen werden, dass $\int_a^b R_n \partial x$ ebenfalls unendlich klein wird. Dieser Nachweis ist wiederum mit Hülfe eines bekannten Satzes über bestimmte Integrale zu geben. Uebrigens dürfen a und b nicht unendlich gross sein.

Zur approximativen Quadratur entwickelt der Verfasser die Simpson'sche Regel; dieselbe ist zwar praktisch sehr bequem, doch fehlt es an der Bestimmung der Fehlergrenze. Referent bedient sich gewöhnlich der schönen Methode von Newton, welche vortrefflich in Minding's „Integralrechnung" auseinandergesetzt ist und nach der Verbesserung von Gauss sehr grosse Genauigkeit giebt. (Jacobi in Crelle's Journal Bd. I. p. 301 ff.)

Seite 306 ff. wird mit Recht darauf aufmerksam gemacht, dass das Differenziren unter dem Integralzeichen nicht erlaubt sei, wenn eine der Integrationsgrenzen unendlich ist. Der Verfasser will nun $\frac{\partial u}{\partial r}$ ermitteln aus

$$u = \int_0^\infty e^{-kx} \sin rx \frac{\partial x}{x}.$$

Er findet

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \int_0^\infty e^{-kx} \cos rx \partial x + \int_0^\infty \varrho e^{-kx} \partial x,$$

indem er

$$\frac{\Delta \sin xr}{\Delta r} = x(\cos xr + \varrho)$$

setzt. Er betrachtet nun aber wieder ϱ als Constante, indem er

$$\int_0^\infty \varrho e^{-kx} \partial x = \varrho \int_0^\infty e^{-kx} \partial x$$

nimmt, was offenbar falsch ist, da ϱ der obigen Gleichung zufolge eine Funktion von x ist.

S. 316 ist Missbrauch getrieben mit dem Differenziren einer unendlichen Reihe, worauf wir schon öfter aufmerksam gemacht haben. S. 317 ist eine einfache Reihe ohne Weiteres in eine Doppelreihe umgestaltet, welche Methode häufig fehlerhafte Resultate giebt.

Die Herleitung der periodischen Reihen von Fourier gehört im Wesentlichen Dirichlet (Crelle's Journal Bd. 4.); der Verfasser hat es indessen auf Vereinfachung dieser so schönen und strengen Methode abgesehen. Herrn Schlömilch's Beweis würde sich in der That durch seine Einfachheit sehr empfehlen, wenn er nicht erheblichen Zweifeln ausgesetzt wäre. Diese Zweifel bestehen in folgenden Punkten: 1) Indem gezeigt wurde, dass $\int_a^b f'(t) \cos kt \partial t$ einen endlichen Werth behält, wenn k unendlich gross wird, musste auf die Fälle Bezug genommen werden, wo $f'(t)$ zwischen den Grenzen a und b unendlich, unbestimmt oder unstetig wird. 2) Nachdem bewiesen worden, dass $\int_a^b f(t) \sin kt \partial t$ mit $k = \infty$ verschwindet, falls $f(t)$ von a bis b endlich bleibt, setzt Schlömilch

$$f(t) = \frac{F(x+t) - F(x)}{\sin t};$$

auf diesen Fall kann aber das vorhergehende Theorem nicht angewandt werden, da $f(t)$ für $t=0$ unendlich werden kann, dann nämlich, wenn $F'(x)$ unendlich gross ist. — Uebrigens gilt die Formel (5) p. 332 der gegebenen Herleitung gemäss nur für ein ganzes ungerades k, mithin ist der Dirichlet'sche Satz weit allgemeiner.

Bei Abhandlung der Euler'schen Integrale hätte wohl der Legendre'sche Satz, von dem Dirichlet einen so meisterhaften und einfachen Beweis gegeben, nicht fehlen dürfen.

Von Seite 365—95 werden die einfachsten Eigenschaften der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung entwickelt. Referent vermisst die elliptischen Funktionen der dritten Art, sowie die elliptischen Funktionen mit imaginärem Argument; auch dürften wohl Anwendungen auf die Lemniscaten am Orte gewesen sein.

Die Herleitung der Additionsformeln hätte manche weitläufige Transformationen überflüssig gemacht, wenn der Herr Verfasser die Formel (15) p. 368 zum Ausgangspunkt gewählt hätte. Uebrigens hat er nicht nachgewiesen, dass diese Formel immer reelle Werthe von ω liefert. Die Division der elliptischen Funktionen betreffend, hat sich ein Irrthum eingeschlichen, indem es Seite 372 heisst, dass zur Bestimmung der Amplitude $\varphi_{\frac{1}{m}}$ immer die Auflösung einer algebraischen Gleichung vom Grade m^2 nöthig sei. Ist nämlich m eine gerade Zahl $=2n$, so hat man bekanntlich $\sin\mathrm{am}\,2n\beta = \frac{P_{2n}}{S_{2n}}xyz$, wo $x=\sin\mathrm{am}\beta$, $y=\cos\mathrm{am}\beta$, $z=\Delta\mathrm{am}\beta$, P_{2n}, S_{2n} ganze algebraische Funktionen von x^2, die erste vom Grade $(2n)^2-4$, die andere vom Grade $(2n)^2$; macht man nun die Gleichung

$$\sin\mathrm{am}\,2n\beta = \frac{P_{2n}}{S_{2n}}x\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}$$

(k der Modulus) rational, so kommt $\sin^2\mathrm{am}\,2n\beta = \Theta(x^2)$, wo die Funktion Θ vom Grade $8n^2$ ist. Um also $\sin\mathrm{am}\frac{\beta}{2n}$ zu bestimmen, ist die Auflösung einer Gleichung vom Grade $2(2n)^2$ erforderlich. Wollte Herr Schlömilch auf diesen Gegenstand nicht ausführlicher eingehen, so musste die Bemerkung über den Grad der aufzulösenden Gleichung wohl überhaupt wegfallen. Damit nämlich dieser Grad der kleinstmöglichste werde, darf die Bestimmung von $\sin\mathrm{am}\,m\beta$, $\cos\mathrm{am}\,m\beta$, $\Delta\mathrm{am}\,m\beta$ mit Hülfe des Additionstheorems nicht durch willkührliche Zerfällung des Arguments $m\beta$ vorgenommen werden. Setzt man z. B. 6β zusammen aus 2β und 4β, so steigt der Nenner S in $\sin\mathrm{am}\,6\beta = \frac{P}{S}x\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}$ auf den 40sten Grad, dagegen nur auf den 36sten Grad, wenn 6β aus $3\beta+3\beta$ zusammengesetzt wird. Nur unter der besonderen Voraussetzung, dass $2n\beta$ immer aus $n\beta+n\beta$, $(2n+1)\beta$ aus $n\beta+(n+1)\beta$ zusammengesetzt wird, führt die Bestimmung von $\sin\mathrm{am}\frac{1}{m}\beta$,

$\cos \operatorname{am} \frac{1}{m}\beta$, $\Delta \operatorname{am} \frac{1}{m}\beta$ auf eine Gleichung vom Grade m^2 (oder $2m^2$, wenn es sich um sinam handelt und m gerade ist). Der Beweis dieses Theorems erfordert jedoch ein näheres Eingehen auf den Gegenstand.

Bei der Landen'schen Substitution haben wir ebenfalls einige Bemerkungen zu machen. Es ist

$$F(k,\varphi)=\frac{2}{1+k}\cdot\frac{2}{1+k_1}\cdots\frac{2}{1+k_{n-1}}F(k_n,\varphi_n),$$

wo

$$k_1=\frac{2\sqrt{k}}{1+k},\quad k_2=\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1},\ \text{etc.}$$

$$\sin(2\varphi_1-\varphi)=k\sin\varphi,\quad \sin(2\varphi_2-\varphi_1)=k_1\sin\varphi_1\ \text{etc.}$$

Dass nun k_n gegen die Einheit convergirt, wenn n unendlich wird, hat der Verfasser nicht erwiesen. Auch fehlt die Bestimmung der Fehlergrenze bei Anwendung dieser Formeln. Setzt man nämlich

$$F(k,\varphi)=\frac{2}{1+k}\cdot\frac{2}{1+k_1}\cdots\frac{2}{1+k_{n-1}}\operatorname{l}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}\varphi_n\right),$$

so ist leicht zu erweisen, dass der begangene Fehler kleiner als $\frac{2}{1+k}\cdot\frac{2}{1+k_1}\cdots\frac{2}{1+k_{n-1}}\cdot\frac{2\sin^2\frac{1}{2}(\varphi_{n-1}-\varphi_n)}{\cos\varphi_n}\varphi_n$, welche Grösse beliebig klein gemacht werden kann. Ebenso ist im Fall der Verkleinerung des Modulus nicht gezeigt, dass der letztere sich der Null nähert. Macht man hier

$$k_{-1}=\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}},\quad k_{-2}=\frac{1-\sqrt{1-k_{-1}^2}}{1+\sqrt{1-k_{-1}^2}}\ \text{etc.,}$$

$$\operatorname{tang}\varphi_{-1}=\frac{\sin 2\varphi}{k_{-1}+\cos 2\varphi},\ \text{etc.}$$

$$F(k,\varphi)=\frac{1+k_{-1}}{2}\cdot\frac{1+k_{-2}}{2}\cdots\frac{1+k_{-n}}{2}\varphi_{-n}+\Gamma;$$

so findet sich der Fehler

$$\Gamma<(1+k_{-1})(1+k_{-2})\cdots(1+k_{-n})\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-k_{-n}^2}}-1\right),$$

convergirt also gegen Null.

Die Werthbestimmung der Fourier'schen Doppelintegrale (S. 409) beruht auf der Umkehrung der Integration; mir scheint aber eine solche Umkehrung nicht immer zulässig, wenn die Grenzen der Integration unendlich sind. Die Formel

$$\frac{\pi}{2}f(s)=\int_0^\infty \cos s\omega\,d\omega\int_0^\infty f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\,d\vartheta$$

scheint einer genauen und gründlichen Untersuchung zu bedürfen. Ist z. B. $f(\vartheta)=1$, so hat sie wohl keinen rechten Sinn, da in diesem Falle $\int_0^\infty \cos \omega\vartheta d\vartheta$ unbestimmt ist.

Die Existenz des Integrals einer Differentialgleichung von der Form $\frac{\partial y}{\partial x}=\chi(x,y)$ wird zuerst durch geometrische Betrachtungen dargethan. Diese Ansicht der Sache (p. 437) ist jedenfalls wohl nicht die rechte. Die Differentialgleichung sei nämlich

$$y^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+y^2=r^2.$$

Geht man von den Anfangswerthen $x=0$, $y=r$ aus, so ergiebt sich durch Wiederholung der Tangentenconstruction die Gerade $y=r$, welche bekanntlich das singuläre Integral der Gleichung darstellt. Der Kreis $x^2+y^2=r^2$ geht ebenfalls durch den Punkt $x=0$, $y=r$, er genügt auch der Differentialgleichung und repräsentirt ein particuläres Integral. Wäre nun die geometrische Ansicht der Sache die angemessene, so müssten sich doch, wenn man die Construction von einem bestimmten Punkte an beginnt, gleichzeitig das singuläre und particuläre Integral ergeben, wenn beide vorhanden sind. Ebenso gehen durch den Punkt $x=0$, $y=\frac{1}{2}a$ der Kreis $y=\sqrt{ax-x^2+\frac{1}{4}a^2}$, und die Parabel $y=\sqrt{ax+\frac{1}{4}a^2}$, deren Gleichungen resp. das particuläre und das singuläre Integral der Gleichung $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{a}{2y}-\frac{1}{y}\sqrt{ax-y^2+\frac{1}{4}a^2}$ darstellen, während die Tangentenconstruction wiederum nur das singuläre Integral liefert. Uebrigens konnte der Herr Verfasser analytisch sehr leicht nachweisen, dass der Differentialgleichung $\frac{\partial y}{\partial x}=\chi(x,y)$ nicht mehr als zwei Integrale genügen, deren eines das allgemeine, das andere das singuläre ist.

Seite 447 vermissen wir den Beweis dafür, dass ein integrirender Factor immer existirt, wenn $\varphi\partial x+\psi\partial y$ kein vollständiges Differential ist.

Die Integration der linearen Differentialgleichungen wird zuerst an dem Falle durchgeführt, wo die Gleichung von der zweiten Ordnung ist. Um Wiederholungen zu vermeiden, hätte der Verfasser das Problem von Anfang an allgemein behandeln können. Sehr sonderbar ist die Herleitung des Integrals der Gleichung $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+a\frac{\partial y}{\partial x}+by=0$ für den Fall, dass die Wurzeln der Gleichung $z^2+az+b=0$ einander gleich sind. Sind die Wurzeln zuerst verschieden (λ_1 und λ_2), so setzt Schlömilch $\lambda_2=\lambda_1+\delta$ und hat $y=e^{\lambda_1 x}(C_1+C_2e^{\delta x})$. Macht man $\delta=0$, so kann immer nur herauskommen $y=\text{Const. } e^{\lambda_1 x}$; der Verfasser verwandelt aber $e^{\delta_1 x}$ nach der Exponentialreihe, findet $y=e^{\lambda_1 x}(C+C'x+\frac{1}{2}C'\delta x^2+\ldots)$ und gelangt nun zu der Form $y=(C+C'x)e^{\lambda_1 x}$. Da er aber $C'=C_2\delta$ gesetzt hat, so ist $C'=0$ mit $\delta=0$, und somit kann keine neue Form herauskommen.

Uebrigens hat Referent bei der Integration der linearen Differentialgleichungen in den ihm bekannten Werken überall den Beweis dafür vermisst, dass das Integral immer auf die bekannte angenommene Form gebracht werden kann, was doch sehr wesentlich ist.

Die Integration der totalen Differentialgleichungen mit mehreren Variabeln ist sehr kurz behandelt. Referent ist der Meinung, dass dieser Gegenstand ganz wegbleiben konnte, denn mit Halbheiten ist doch nichts anzufangen.

Die Integration der partiellen Differentialgleichungen, welche den Schluss des Buches bildet, wird auf die Integration von simultanen Gleichungen zurückgeführt. Die ganze Herleitung (p. 528 ff.) ist aber dem Referenten ganz unverständlich geblieben (namentlich p. 529) und muss auf ganz andere Weise gegeben werden.

Stralsund, den 17. April 1853.

Dr. Arndt.

Ueber eine Sammlung von bestimmten Integralen.

Dass dem Mathematiker Tafeln nöthig sind, bedarf wohl nicht eines Beweises; insbesondere braucht er solche, die ihm die Resultate verschiedener, oft mühseliger Forschungen in der Ordnung vor die Augen bringen sollen, wie er sie zu benutzen Anleitung findet. Wer ist nicht froh, dass Andere vor ihm die Logarithmen berechnet haben; sonst würde ihr Gebrauch ihm wohl versagt sein, und doch könnte er sie selbst berechnen nach festgesetzter, gleichförmiger Behandlungsweise. Diese aber fehlt gänzlich bei einer anderen Art von Ausdrücken, den bestimmten Integralen, und desshalb dürfte bei deren häufigem Gebrauche eine Tafel wohl nicht fehlen unter den mathematischen Hülfsmitteln. Es ist aber dem nicht so: obschon bei anderen Sammlungen auch wohl Tafeln mit einigen bestimmten Integralen mit aufgenommen sind, so ist doch, meines Wissens, nicht da, was man einigermassen vollständig nennen könnte. Woran aber kann dies wohl liegen?

Erstens: Ist die Methode der ganzen Integralrechnung gewissermassen eine indirecte, so gilt diess namentlich von der Lehre von den bestimmten Integralen. Es ist nur durch eine grosse Anzahl ganz verschiedener Methoden gelungen, die Formeln zu sammeln, die uns jetzt zu Gebote stehen. Nachdem für diese von Euler, Cauchy, Legendre, Poisson, Laplace der Grund gelegt wurde, sind seitdem die Methoden vermehrt und durch eine Menge Mathematiker zur Ermittelung neuer Formeln angewandt worden. Diese Arbeiten sind überall in Journalen und in den Abhandlungen der verschiedenen Academien zerstreut. Daher ist wohl nicht ein Jeder in der Lage, diese verschiedenen Resultate zu benutzen, weit weniger sie alle bei einander zu haben.

Noch führt dasselbe Indirecte in der Methode zu einem anderen nothwendigen Uebel, welches, wie in der Integralrechnung überhaupt, weit stärker in diesem Theile hervorragt: dass es in dem Bekannten zuweilen kleinere, öfter auch grössere Lücken giebt, dass Ausdrücke, oft nur um ein Weniges verschieden, doch mittelst anderer Methoden und bisweilen gar nicht zu ermitteln sind; ja, man könnte hier fast sagen, dass es noch gar kein Ganzes gebe und lauter einzelne Bruchstücke da stehen, welche zu einem Ganzen zusammenzubringen noch nicht gelungen ist. Diess hat seinen Grund, wie gesagt, in der ganzen indirecten Behandlungsweise und auch wohl in deren Verschiedenheit.

Einen eigenthümlichen Vortheil gewährt zu haben kann aber der Ungleichartigkeit der Methoden nicht abgesprochen werden; oft ist man auf von einander ganz unabhängigen Wegen zu denselben Resultaten gelangt, und man konnte also die eine Methode mittelst der anderen prüfen und ihre Gültigkeit beweisen. Nicht immer indessen war dieses der Fall, sondern nicht selten waren die Resultate mit einander im Streit und also die Unzulässigkeit der betretenen Wege, wenigstens eines derselben, ausser Zweifel gesetzt, wodurch man also die Grundideen aus der Theorie der Functionen näher zu prüfen, genauer zu bestimmen, wo nöthig zu berichtigen sich gezwungen sah; und so lernte man einsehen, was unzulässig oder auch wohl falsch war in der Lehre von den unbestimmten Coëfficienten, in der Theorie der Reihen ohne Berücksichtigung ihrer Convergenz, d. h. ihrer Wahrheit. Auch in den Methoden der Ableitung bestimmter Integrale selbst ist auf demselben Wege Vieles mehr bestimmt und beschränkt, aber dadurch auch der Gebrauch vor Fehlern gesichert worden.

Die drei Umstände: die Zerstreuung, der Mangel an Einheit und die theilweise Unsicherheit vieler Resultate sind wohl Schuld daran, dass man solche Tafeln bis jetzt noch entbehrt. Sie wären aber nicht nur nützlich, sondern sogar nothwendig, denn ausser ihrer stetigen Anwendung in der Analysis überhaupt, können sie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in der Mechanik, in der mathematischen Physik wohl nicht entbehrt werden. Aber eben jene Sammlung würde auch noch den nicht geringen Nutzen gewähren, den Zustand dieser Theorie klar vor die Augen zu bringen; was wirklich schon bekannt ist, von dem Unbekannten zu trennen, die Lücken aber aufzuweisen, die noch oftmals wahrzunehmen sind.

Durch diese Bemerkungen veranlasst, habe ich mich seit einigen Jahren mit der Sammlung von bestimmten Integralen beschäftigt — so dass diese Sammlung schon zwischen zwei und drei Tausend Formeln enthält — und dazu ausser den Hauptwerken von Euler, Cauchy, Legendre, Schlömilch die wissenschaftlichen Journale von Crelle, Grunert, Liouville und der polytechnischen Schule zu Paris, sowie die Abhandlungen der Academien benutzt, wozu ich dann und wann vorzügliche Gelegenheit hatte. Ausser diesen Quellen aber wird es wohl noch mehrere Monographien geben, die mir unbekannt blieben oder die ich mir zu verschaffen nicht im Stande war; und doch ist zur möglichst grossen Vollständigkeit meiner Arbeit diese Kenntniss nothwendig. Wenn also die geehrten Herren Verfasser meine Unbekanntheit zu übersehen die Güte haben wollten, so ersuche ich sie, zum Nutzen der Wissenschaft mir (etwa auf dem Wege des Buchhandels) solche Monographien zuschicken zu wollen, wogegen ich von meiner Seite verspreche, Alles aufzubieten, eine vollständige und correcte Sammlung zu liefern.

Eben dadurch könnte es mir auch gelingen, ein Nebenziel zu erreichen, das ich mir vorgesetzt habe, um namentlich in diesen Tafeln den Gang der Wissenschaft getreu darzulegen. Dies soll dadurch erreicht werden, dass bei jeder Formel notirt wird, welcher Autor sie abgeleitet habe und wo diess zu finden sei: bei verschiedener Ableitung ist auch die dazu gehörige Literatur dabei anzugeben. Eine solche Einrichtung wird noch obendrein den Vortheil haben, um, wenn man es verlangt, die Quelle selbst nachschlagen und die Ableitung einzelner Formeln nebst dem Zusammenhange mit anderen Formeln selbst prüfen zu können.

Wenn ich mich der gewünschten Unterstützung Seitens der Mathematiker zu erfreuen die Hoffnung hege, so traue ich meiner Arbeit zu, nicht als blosse Compilation zu erscheinen und der Wissenschaft und ihren Arbeitern Nutzen zu bringen.

Deventer in den Niederlanden, 8. Mai 1853.

D. Bierens de Haan, Math. Mag., Phil. Nat. Doct.

Wie sehr sich dieses Unternehmen durch sich selbst und durch die bekannte Geschicklichkeit des Hrn. B. de Haan empfiehlt, brauche ich wohl nicht erst zu bemerken.
Der Herausgeber.

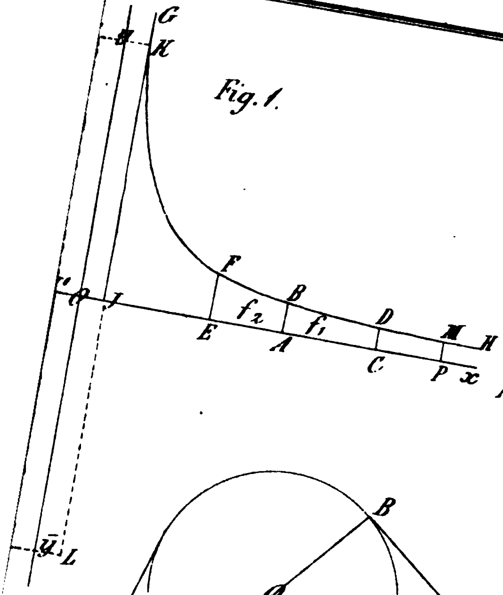


Fig. 1.

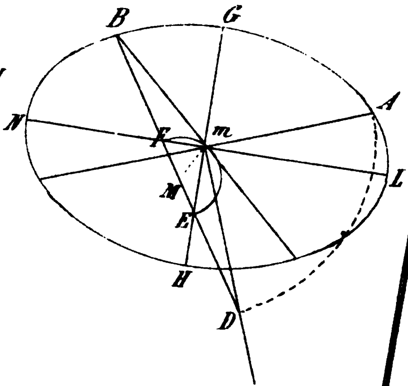


Fig. 6.

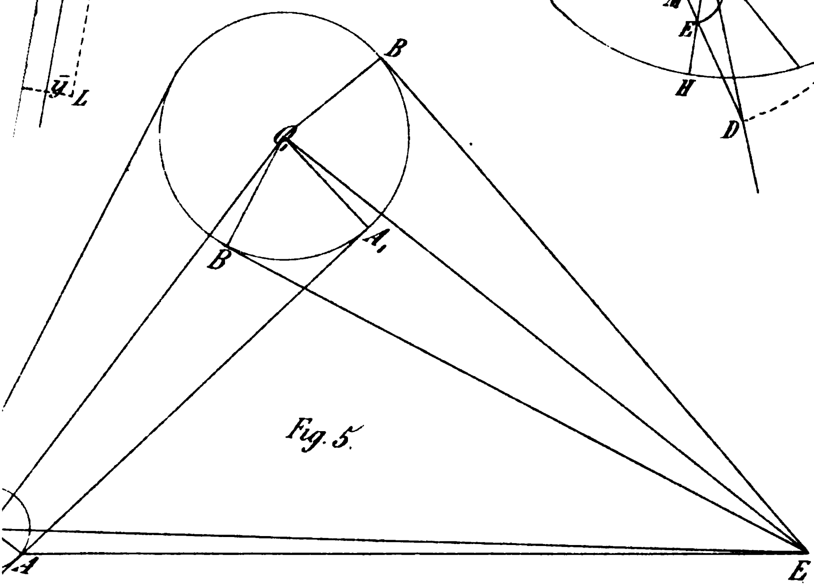


Fig. 5.

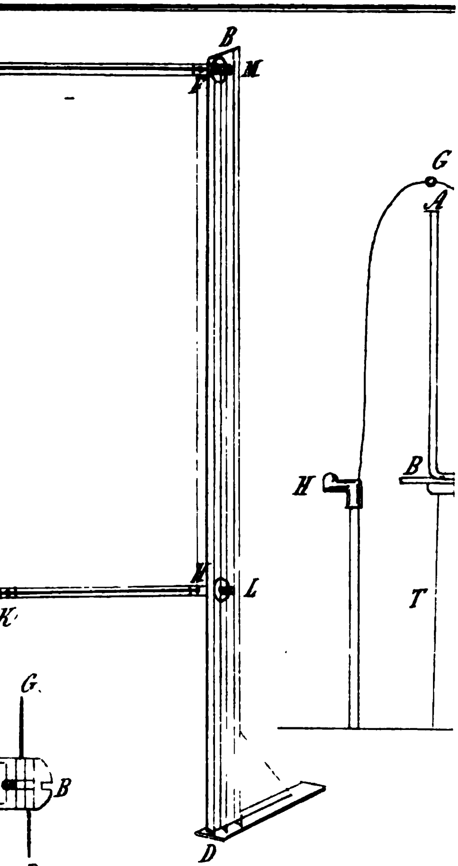


Fig. 1

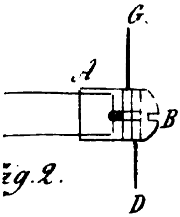


Fig. 2.

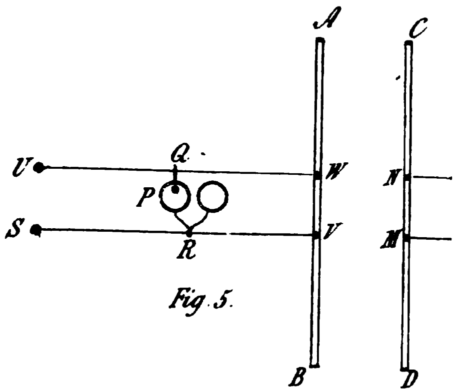
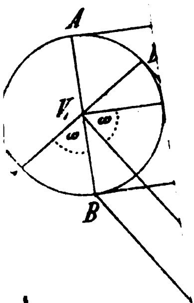


Fig. 5.

v'



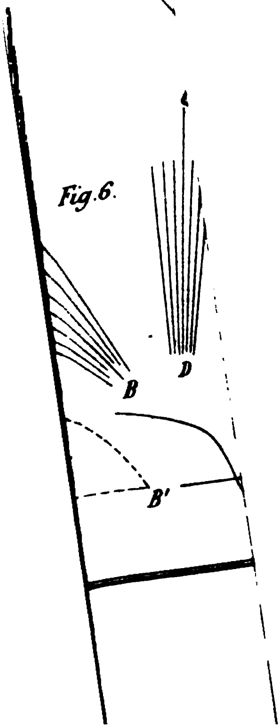


Fig. 6.

Fig. 3.