
SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG:
CHRISTO ET ECCLESIÆ

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Vierzehnter Theil.

Mit acht lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Separat-Conto.

1850.

1871, July 1.
Haven Fund.

Inhaltsverzeichniss des vierzehnten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Mechanik.

Astronomie.

(M. s. auch Nautik.)

Nautik.

Physik.

Uebungs-Aufgaben für Schüler.

Literarische Berichte*).

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Ueber die nautische Aufgabe: Aus den gemessenen Höhen zweier Sterne, deren Rectascensionen und Declinationen bekannt sind, und der Zwischenzeit der beiden Beobachtungen die Polhöhe und die Zeit zu bestimmen.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Eine der wichtigsten Methoden, zur See die Polhöhe, oder die Breite, und die Zeit zu bestimmen, bietet wegen der Allgemeinheit ihrer Anwendung und der Leichtigkeit der anzustellenden Beobachtungen jedenfalls die Aufgabe dar:

Aus den gemessenen Höhen zweier Sterne, deren Rectascensionen und Declinationen bekannt sind, und der Zwischenzeit der beiden Beobachtungen die Polhöhe und die Zeit zu bestimmen;

weshalb auch für diese Aufgabe theils directe und völlig genaue, theils indirecte und bloss annähernde Auflösungen in ziemlich grosser Anzahl schon gegeben worden sind.

Ursprünglich wurde jedoch diese Aufgabe nicht in der obigen erweiterten Gestalt, sondern in der folgenden viel eingeschränkteren Gestalt zur Breiten- und Zeitbestimmung auf der See in Vorschlag gebracht:

Aus zwei gemessenen Höhen eines Sterns, dessen Position auf der Sphäre bekannt ist, insbesondere aus zwei gemessenen Sonnenhöhen, und der Zwischenzeit der beiden Beobachtungen die Polhöhe und die Zeit zu bestimmen.

Wer diese wichtige Methode, die Breite und die Zeit zur See zu bestimmen, zuerst in Vorschlag gebracht hat, habe ich mit völliger Bestimmtheit nicht ermitteln können, und muss mich daher begnügen, was zwei geachtete astronomische und nautische Schriftsteller hierüber sagen, im Nachstehenden anzuführen:

In der Sammlung astronomischer Abhandlungen, Beobachtungen und Nachrichten, herausgegeben von J. E. Bode. Erster Supplement-Band zu dessen astronomischen Jahrbüchern. Berlin. 1793. S. 42. sagt v. Zach in einer Note zu einer von Peter Nieuwland unter dem Titel: Ueber die Methode des Herrn Douwes, aus zweien ausser dem Mittagskreis beobachteten Sonnenhöhen die Breite eines Ortes zu finden, veröffentlichten sehr guten Abhandlung über unser Problem über dasselbe Folgendes: „Peter Nonius oder Nunnez und Robert Hues, ein Magus des Earl of Northumberland und Thomas Harriot's vertrautester Freund, haben meines Wissens diese Aufgabe zuerst vorgetragen: ersterer in seinem Werke De Crepusculis*), letzterer in seinem Tractat De Globis et eorum usu. Lugduni. 8vo. Von einem gewissen John Chilmead Mr. of A. of. Christ-Church in Oxon. wurde 1659 eine von Joh. Jsac. Pontanus mit Anmerkungen versehene, aber verstümmelte Ausgabe in's Englische übersetzt, unter dem Titel: A learned Treatise of Globes: both coelestiall and terrestriall: with their several uses, written first in latine by Mr. Robert Hues: and by him so published etc. Lond. 8vo. Daselbst stehet die Aufgabe auf der 188sten Seite Cap. VI. und wird vermittelst des Globus aufgelöst.“

Dagegen spricht sich Don Josef de Mendoza y Rios in der Abhandlung: Recherches sur les Principaux Problèmes de l'Astronomie Nautique (Philosophical Transactions. 1797. Part. I. p. 45.) auf folgende Art über den ersten Erfinder unserer Aufgabe in ihrer obigen eingeschränkteren Gestalt aus: „Le celébre Pierre Nunnez (ou Nonius) s'occupa beaucoup des moyens de déterminer la latitude, et après avoir démontré la fausseté des règles publiées par Pierre Appian (Cosmographia) et Jacob Ziegler (Commentarium in secundum librum Naturalis Historiae Plinii) il donne différens problèmes de son invention, et entre eux celui qu'on résout par deux hauteurs et l'arc d'horizon compris par les verticaux de l'astre (De Arte atque Ratione Navigandi. 1573.

---

*) Nach anderen Angaben soll sich eine Auflösung mit Hülfe des Globus von Peter Nonius in dessen Buche: De Observ. Regul. et Jnstrum. Geometr. Lib. II. Cap. XIV. befinden.

— De Observ. Regul. et Instrum. Geometr. etc.) Je n'ai pas pu éclaircir celui qui le premier substitua au lieu du dernier élément l'arc de l'équateur compris entre les horaires, ou bien l'intervalle de tems entre les observations; mais on trouve cette solution énoncé comme une chose connue quoique peu utile dans le traité De Globis et eorum Usu par Robert Hues. (Je n'ai jamais vu la première édition de ce livre; celles que je connois, outre les traductions en Anglois et en François, sont une cum Annott. J. Jsaaci Pontani. Amst. 1617. et une autre Oxon. 1663.). Le procédé mentionné par Hues éxige l'usage des globes."

Nach diesen Zeugnissen scheint also in der That der vorher erwähnte Robert Hues der erste Erfinder unserer Aufgabe in ihrer eingeschränkteren Gestalt zu sein, obgleich zu wünschen wäre, dass in den Schriften des Nonius selbst, deren Einsicht mir leider nicht zu Gebote steht, genaue Nachforschungen angestellt würden, mit welcher Aufgabe derselbe sich eigentlich beschäftigt hat, wozu ich daher Leser, denen reichere literarische Hülfsquellen als mir, namentlich in der älteren astronomischen und nautischen Literatur, zugänglich sind, aufzufordern mir erlauben möchte, zugleich mit der Bitte, dieselben im Archiv der Mathematik und Physik mitzutheilen.

In der oben gleich im Eingange angegebenen sehr erweiterten Form ist aber das Problem zuerst behandelt worden von Gauss in dem Programm: Methodum peculiarem elevationem poli determinandi explicat simulque praelectiones suas proximo semestri habendas indicat D. Carolus Fridericus Gauss, Astronomiae P. P. O. Gottingae. 1808., von welchem ein ziemlich ausführlicher Auszug sich auch in der Monatlichen Correspondenz. 1809. Februar. S. 134. befindet.

Es ist nun keineswegs meine Absicht, alle bekannten theils völlig genauen, theils nur annähernden Auflösungen unserer Aufgabe in ihrer eingeschränkteren oder erweiterten Gestalt von Douwes, Gauss, Mollweide, Littrow, Hazewinkel, Lobatto, Caillet (Vater), Pagel und Andern in diesem Aufsatze zusammenzustellen, indem man darüber in den meisten Lehrbüchern der Schifffahrtskunde, namentlich in dem Handbuche der Schifffahrtskunde von C. Rümker. Vierte Auflage. Hamburg. 1844. S. 141. ff. S. 193. ff.; in dem nur erst ganz neuerlich erschienenen, wegen seiner streng wissenschaftlichen Abfassung und Darstellung sehr zu empfehlenden Traité élémentaire de Navigation. Par V. Caillet, Examinateur de la Marine. Cours de l'école navale. — 1re année d'études. T. I. Texte. Brest. 1848. p. 191. T. II. Tables. Brest. 1846., auch in dem Handbuche der praktischen Seefahrtskunde von Dr. Eduard Bobrik. Band II. Zürich und Hamburg. 1846. S. 1477. sehr genügende Auskunft findet. Vielmehr ist es meine Absicht, in diesem Aufsatze ein Paar neue analytische Auflösungen zu geben, vorzüglich aber auch eine, wie ich glaube, sehr einfache und elegante

Construction unserer Aufgabe auf analytischem Wege zu entwickeln, die ich wenigstens in theoretischer Rücksicht, namentlich auch weil sie ganz allgemein für die Aufgabe in ihrer erweiterten Gestalt gilt, für sehr bemerkenswerth und interessant halte. Das Weitere über diese Construction, namentlich auch was das Historische und Literarische betrifft, wird späterhin vorkommen.

§. 2.

Die bekannten Rectascensionen und Declinationen der beiden beobachteten Sterne wollen wir durch α, α' und δ, δ', die beiden gemessenen, wegen der Strahlenbrechung und, wo es nöthig ist, auch wegen der Parallaxe auf bekannte Weise gehörig verbesserten Höhen derselben durch h, h' bezeichnen; ferner seien t, t' die gleichzeitig beobachteten in Stunden ausgedrückten Zeiten der Uhr, und ω, ω' seien die entsprechenden Stundenwinkel. Nehmen wir nun zuerst an, dass die Uhr genau nach Sternzeit gehe, bei der Sonne nach mittlerer Sonnenzeit, so ist, wie durch eine einfache Betrachtung, wenn man nur gehörig erwägt, wie in der Astronomie die Stundenwinkel und geraden Aufsteigungen genommen zu werden pflegen, sogleich erhellen wird:

$$\omega = 15t - \alpha \text{ oder } \omega = 15t - \alpha + 360^0,$$

jenachdem

$$15t - \alpha \geqq 0 \text{ oder } 15t - \alpha < 0,$$

d. h. jenachdem $15t - \alpha$ positiv oder negativ ist; und ganz eben so

$$\omega' = 15t' - \alpha' \text{ oder } \omega' = 15t' - \alpha' + 360^0,$$

jenachdem

$$15t' - \alpha' \geqq 0 \text{ oder } 15t' - \alpha' < 0,$$

d. h. jenachdem $15t' - \alpha'$ positiv oder negativ ist. Die Rectascensionen α, α' müssen hierbei, da t, t' in Stunden ausgedrückt angenommen worden sind, in Graden ausgedrückt sein, und die Stundenwinkel ω, ω' sind dann natürlich auch in Graden ausgedrückt. Folglich ist entweder

$$\omega - \omega' = 15(t - t') - (\alpha - \alpha'),$$

oder

$$\omega - \omega' = 15(t - t') - (\alpha - \alpha') - 360^0;$$

oder

$$\omega - \omega' = 15(t - t') - (\alpha - \alpha') + 360^0;$$

und setzen wir also allgemein

$$1)\quad \theta = 15(t - t') - (\alpha - \alpha'),$$

wo die Grösse θ aus den beobachteten Zeiten der Uhr und den bekannten Rectascensionen der beiden beobachteten Sterne immer leicht berechnet werden kann, und daher eine bekannte Grösse ist; so ist

$$2)\quad \omega - \omega' = \theta + \lambda . 360^0,$$

wo

$$\lambda = 0, \text{ oder } \lambda = -1, \text{ oder } \lambda = +1$$

ist. Also ist, wie leicht mittelst der bekannten goniometrischen Formeln erhellet, in völliger Allgemeinheit:

$$3)\quad \cos(\omega - \omega') = \cos\theta, \ \sin(\omega - \omega') = \sin\theta.$$

Bisher ist der Einfachheit wegen angenommen worden, dass die bei den Beobachtungen gebrauchte Uhr genau nach Sternzeit gehe, wofür bei der Sonne immer mittlere Sonnenzeit zu setzen ist. Weil aber vermöge der Gleichung 1) die Grösse θ, um deren Bestimmung es sich hier zunächst handelt, bloss von der Differenz $t - t'$ der beiden beobachteten Zeiten abhängt, so ist klar, dass es hier gar nicht auf den sogenannten Stand, sondern nur auf den sogenannten täglichen Gang der Uhr ankommt; und geht also die Uhr nicht genau nach Sternzeit, so muss man wenigstens ihren täglichen Gang aus anderweitigen Beobachtungen genau kennen, um danach die erforderlichen Correctionen vornehmen zu können. Unter dem täglichen Gange einer Uhr versteht man aber bekanntlich das Zeitintervall, welches die Uhr in einem Tage mehr oder weniger als 24 Stunden weist, indem man zugleich dieses Zeitintervall im ersten Falle, wenn nämlich die Uhr in einem Tage mehr als 24 Stunden weiset, d. h. voreilet oder accelerirt, als positiv, im zweiten Falle dagegen, wenn nämlich die Uhr in einem Tage weniger als 24 Stunden weiset, d. h. nachbleibt oder retardirt, als negativ betrachtet. Bezeichnen wir also mit Rücksicht hierauf den aus anderweitigen Beobachtungen genau bekannten täglichen Gang der bei unseren jetzigen Beobachtungen gebrauchten Uhr gegen Sternzeit oder bei der Sonne gegen mittlere Sonnenzeit durch G, das dem aus den beobachteten Zeiten t, t' abgeleiteten Zeitintervalle $t - t'$ entsprechende, in wirklicher Sternzeit oder bei der Sonne in wirklicher mittlerer Sonnenzeit ausgedrückte wahre Zeitintervall aber durch $\tau - \tau'$; so haben wir offenbar die Proportion

$$24 : \tau - \tau' = 24 + G : t - t',$$

wobei immer alle Zeiten in Stunden ausgedrückt angenommen werden, und es ist also nach dieser Proportion:

$$4)\quad \tau-\tau'=\frac{24}{24+G}(t-t')=\frac{t-t'}{1+\frac{G}{24}},$$

oder, unter der Voraussetzung, dass die Uhr nahe berichtigt und also $\frac{G}{24}$ ein sehr kleiner Bruch ist:

$$5)\quad \tau-\tau'=\left\{1-\frac{G}{24}+\left(\frac{G}{24}\right)^2-\left(\frac{G}{24}\right)^3+\ldots\right\}(t-t'),$$

also näherungsweise:

$$6)\quad \tau-\tau'=\left(1-\frac{G}{24}\right)(t-t').$$

Geht demnach die bei den Beobachtungen gebrauchte Uhr nicht genau nach Sternzeit oder mittlerer Sonnenzeit, ist aber, wie hier vorausgesetzt werden muss, der tägliche Gang aus anderweitigen Beobachtungen genau bekannt, so muss man mittelst der obigen Formeln $\tau-\tau'$ berechnen, und dieses $\tau-\tau'$ statt $t-t'$ in den Ausdruck 1) von θ einführen, wodurch sich

$$7)\quad \theta=15(\tau-\tau')-(\alpha-\alpha');$$

oder völlig entwickelt

$$8)\quad \theta=\frac{15.24}{24+G}(t-t')-(\alpha-\alpha')=\frac{15(t-t')}{1+\frac{G}{24}}-(\alpha-\alpha');$$

oder, wenn $\frac{G}{24}$ ein sehr kleiner Bruch ist,

$$9)\quad \theta=15\left\{1-\frac{G}{24}+\left(\frac{G}{24}\right)^2-\left(\frac{G}{24}\right)^3+\ldots\right\}(t-t')-(\alpha-\alpha'),$$

oder näherungsweise

$$10)\quad \theta=15\left(1-\frac{G}{24}\right)(t-t')-(\alpha-\alpha')$$

ergiebt.

Nachdem man die Grösse θ nach der vorhergehenden Anleitung genau berechnet hat, kann man nun zu der Auflösung unserer Aufgabe selbst schreiten, wie jetzt in den folgenden Paragraphen gezeigt werden soll.

§. 3.

Bezeichnen wir die Polhöhe des Beobachtungsorts, deren Bestimmung der nächste und hauptsächlichste Zweck unserer Aufgabe ist, durch φ, so haben wir nach den Lehren der sphärischen Astronomie bekanntlich die beiden folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$11)\quad \begin{cases} \sin h = \sin\delta\sin\varphi + \cos\omega\cos\delta\cos\varphi, \\ \sin h' = \sin\delta'\sin\varphi + \cos\omega'\cos\delta'\cos\varphi; \end{cases}$$

und nehmen wir also zu diesen beiden Gleichungen noch die aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannte Gleichung

$$12)\quad \omega - \omega' = \theta + \lambda.360^\circ,$$

wo $\lambda = 0,\ -1,\ +1$; oder statt derselben eine der beiden ganz allgemein gültigen Gleichungen

$$13)\quad \cos(\omega-\omega') = \cos\theta,\quad \sin(\omega-\omega') = \sin\theta;$$

so haben wir offenbar zwischen den drei unbekannten Grössen φ, ω, ω', drei ausser diesen unbekannten Grössen nur bekannte Grössen enthaltende Gleichungen, mittelst welcher sich also die drei in Rede stehenden unbekannten Grössen bestimmen lassen müssen, weshalb es jetzt bloss auf die Auflösung dieser drei Gleichungen ankommen wird, was auf verschiedene Arten möglich ist, von denen wir einige in den folgenden Paragraphen kennen lernen werden.

§. 4.

Zuerst wollen wir auf völlig directe Weise die Polhöhe φ unmittelbar aus den durch die Beobachtungen gegebenen Stücken zu bestimmen suchen.

Weil nach der ersten der beiden Gleichungen 13)

$$\cos\theta = \cos\omega\cos\omega' + \sin\omega\sin\omega'$$

und nach den Gleichungen 11)

$$\cos\omega = \frac{\sin h - \sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi},\quad \cos\omega' = \frac{\sin h' - \sin\delta'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi}$$

ist; so erhält man zur Bestimmung von φ unmittelbar die bloss noch diese unbekannte Grösse enthaltende Gleichung

$$\cos\theta = \frac{\sin h - \sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi}\cdot\frac{\sin h' - \sin\delta'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi}$$

$$\pm\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\sin h-\sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi}\right)^2\right\}},$$

oder, wie man leicht findet:

$$\cos\delta\cos\delta'\cos\theta\cos\varphi^2-(\sin h-\sin\delta\sin\varphi)(\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi) =$$

$$\pm\sqrt{\{\cos\delta^2\cos\varphi^2-(\sin h-\sin\delta\sin\varphi)^2\}\{\cos\delta'^2\cos\varphi^2-(\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi)^2\}}.$$

Wenn man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung quadrirt, aufhebt, was sich aufheben lässt, dann dieselbe durch $\cos\varphi^2$ dividirt, was wenigstens unter der Voraussetzung, dass nicht $\varphi=90^0$ ist, jedenfalls verstattet ist, so erhält man nach einigen ganz leichten Transformationen zur Bestimmung von φ die Gleichung:

$$14)\quad 0 = \cos\delta^2\cos\delta'^2\sin\theta^2\cos\varphi^2$$
$$-\cos\delta^2(\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi)^2$$
$$-\cos\delta'^2(\sin h-\sin\delta\sin\varphi)^2$$
$$+2\cos\delta\cos\delta'\cos\theta(\sin h-\sin\delta\sin\varphi)(\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi),$$

oder nach gehöriger Entwickelung, wenn man zugleich $\cos\varphi^2$ durch $\sin\varphi^2$ ausdrückt:

$$15)\quad 0 = \cos\delta^2\sin h'^2$$
$$+\cos\delta'^2\sin h^2$$
$$-\cos\delta^2\cos\delta'^2\sin\theta^2$$
$$-2\cos\delta\cos\delta'\sin h\sin h'\cos\theta$$
$$-2\left\{\begin{array}{l}\cos\delta^2\sin\delta'\sin h'\\ +\cos\delta'^2\sin\delta\sin h\\ -\sin\delta\cos\delta\cos\delta'\sin h'\cos\theta\\ -\sin\delta'\cos\delta\cos\delta'\sin h\cos\theta\end{array}\right\}\sin\varphi$$
$$+\left\{\begin{array}{l}\cos\delta^2\sin\delta'^2\\ +\cos\delta'^2\sin\delta^2\\ +\cos\delta^2\cos\delta'^2\sin\theta^2\\ -2\sin\delta\cos\delta\sin\delta'\cos\delta'\cos\theta\end{array}\right\}\sin\varphi^2.$$

Das von $\sin\varphi$ unabhängige Glied dieser Gleichung ist:

$$
\begin{aligned}
&-\cos\delta^2\cos\delta'^2\\
&+\sin h^2\cos\delta'^2\\
&+\cos\delta^2\sin h'^2\\
&-\sin h^2\sin h'^2\\
&+\sin h^2\sin h'^2\\
&-2\sin h\sin h'\cos\delta\cos\delta'\cos\theta\\
&+\cos\delta^2\cos\delta'^2\cos\theta^2\\
=&-(\cos\delta^2-\sin h^2)(\cos\delta'^2-\sin h'^2)\\
&+(\sin h\sin h'-\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2.
\end{aligned}
$$

Der Coefficient von $-2\sin\varphi$ ist:

$$
\begin{aligned}
&\cos\delta\sin h'(\cos\delta\sin\delta'-\sin\delta\cos\delta'\cos\theta)\\
+&\cos\delta'\sin h(\sin\delta\cos\delta'-\cos\delta\sin\delta'\cos\theta).
\end{aligned}
$$

Der Coefficient von $\sin\varphi^2$ ist endlich:

$$
\begin{aligned}
&\sin\delta^2\sin\delta'^2\\
&+\cos\delta^2\sin\delta'^2\\
&+\sin\delta^2\cos\delta'^2\\
&+\cos\delta^2\cos\delta'^2\\
&-\sin\delta^2\sin\delta'^2\\
&-2\sin\delta\cos\delta\sin\delta'\cos\delta'\cos\theta\\
&-\cos\delta^2\cos\delta'^2\cos\theta^2\\
=&(\sin\delta^2+\cos\delta^2)(\sin\delta'^2+\cos\delta'^2)\\
&-(\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2\\
=&1-(\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2.
\end{aligned}
$$

Folglich ist unsere obige quadratische Gleichung:

$$
\begin{aligned}
16)\quad 0=&-(\cos\delta^2-\sin h^2)(\cos\delta'^2-\sin h'^2)\\
&+(\sin h\sin h'-\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2\\
&-2\left\{\begin{array}{l}\cos\delta\sin h'(\cos\delta\sin\delta'-\sin\delta\cos\delta'\cos\theta)\\+\cos\delta'\sin h(\sin\delta\cos\delta'-\cos\delta\sin\delta'\cos\theta)\end{array}\right\}\sin\varphi\\
&+\{1-(\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2\}\sin\varphi^2.
\end{aligned}
$$

Nimmt man mit dieser Gleichung die gewöhnliche Verwandlung der quadratischen Gleichungen vor, so wird dieselbe:

$$\left\{\sin\varphi-\frac{\begin{array}{c}\cos\delta\sin h'(\cos\delta\sin\delta'-\sin\delta\cos\delta'\cos\theta)\\+\cos\delta'\sin h(\sin\delta\cos\delta'-\cos\delta\sin\delta'\cos\theta)\end{array}}{1-(\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2}\right\}^2$$

$$=\frac{(\cos\delta^2-\sin h^2)(\cos\delta'^2-\sin h'^2)-(\sin h\sin h'-\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2}{1-(\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2}$$

$$+\left\{\frac{\begin{array}{c}\cos\delta\sin h'(\cos\delta\sin\delta'-\sin\delta\cos\delta'\cos\theta)\\+\cos\delta'\sin h(\sin\delta\cos\delta'-\cos\delta\sin\delta'\cos\theta)\end{array}}{1-(\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2}\right\}^2.$$

Der Zähler des Bruchs, in welchen sich die beiden Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in dieser Gleichung zusammenziehen lassen, ist:

$$\begin{array}{l}(\cos\delta^2-\sin h^2)(\cos\delta'^2-\sin h'^2)\\-(\sin h\sin h'-\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2\\-(\cos\delta^2-\sin h^2)(\cos\delta'^2-\sin h'^2)(\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2\\+(\sin h\sin h'-\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2(\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2\\+\cos\delta^2\sin h'^2(\cos\delta\sin\delta'-\sin\delta\cos\delta'\cos\theta)^2\\+\cos\delta'^2\sin h^2(\sin\delta\cos\delta'-\cos\delta\sin\delta'\cos\theta)^2\\+2\cos\delta\cos\delta'\sin h\sin h'(\cos\delta\sin\delta'-\sin\delta\cos\delta'\cos\theta)\\\qquad\qquad\times(\sin\delta\cos\delta'-\cos\delta\sin\delta'\cos\theta).\end{array}$$

Entwickelt man nun in diesem Zähler das Glied, welches $\sin h$ und $\sin h'$ gar nicht enthält, ferner jedes der Glieder, welche

$$\sin h^2,\ \sin h'^2,\ \sin h\sin h',\ \sin h^2\sin h'^2$$

enthalten, für sich, so findet man mittelst einiger leichten goniometrischen Transformationen, deren Ausführung füglich dem Leser überlassen bleiben kann, dass sich dieser Zähler auf die Form

$$\cos\delta^2\cos\delta'^2\sin\theta^2\left\{\begin{array}{l}1-(\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2-\sin h^2-\sin h'^2\\\quad+2\sin h\sin h'(\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)\end{array}\right\}$$

bringen lässt.

Also ist nach dem Obigen

$$17)\quad\{1-(\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2\}\sin\varphi$$
$$=\cos\delta\sin h'(\cos\delta\sin\delta'-\sin\delta\cos\delta'\cos\theta)$$
$$+\cos\delta'\sin h(\sin\delta\cos\delta'-\cos\delta\sin\delta'\cos\theta)$$
$$\pm\cos\delta\cos\delta'\sin\theta\sqrt{\begin{array}{l}1-(\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)^2-\sin h^2-\sin h'^2\\\quad+2\sin h\sin h'(\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos\theta)\end{array}},$$

wodurch $\sin\varphi$ vollständig entwickelt, durch die unmittelbar durch die Beobachtungen gegebenen Grössen ausgedrückt ist.

Zugleich sieht man hieraus, dass $\sin\varphi$, und folglich auch φ, welches übrigens immer positiv und nicht grösser als 90^0 ist, im Allgemeinen zwei Werthe hat, und dass also bei der Anwendung dieser Methode zur Bestimmung der Polhöhe im Allgemeinen eine vorläufige genäherte Kenntniss derselben erforderlich ist.

Um den vorher für $\sin\varphi$ gefundenen Ausdruck zur logarithmischen Rechnung bequemer einzurichten, wollen wir, was bekanntlich immer verstattet ist:

$$\begin{aligned}\sin\xi &= \cos\delta\sin\delta' - \sin\delta\cos\delta'\cos\theta\\ &= \sin\delta'(\cos\delta - \sin\delta\cot\delta'\cos\theta),\\ \sin\xi' &= \sin\delta\cos\delta' - \cos\delta\sin\delta'\cos\theta\\ &= \sin\delta(\cos\delta' - \sin\delta'\cot\delta\cos\theta),\\ \sin i &= \sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos\theta\\ &= \sin\delta(\sin\delta' + \cos\delta'\cot\delta\cos\theta)\\ &= \sin\delta'(\sin\delta + \cos\delta\cot\delta'\cos\theta)\end{aligned}$$

setzen; und setzen wir dann ferner

$$18)\quad \cot\chi = \cot\delta\cos\theta,\ \cot\chi' = \cot\delta'\cos\theta;$$

so ist

$$19)\quad \begin{cases}\sin\xi = \dfrac{\sin\delta'\sin(\chi'-\delta)}{\sin\chi'}, & \sin\xi' = \dfrac{\sin\delta\sin(\chi-\delta')}{\sin\chi};\\ \sin i = \dfrac{\sin\delta\cos(\chi-\delta')}{\sin\chi} = \dfrac{\sin\delta'\cos(\chi'-\delta)}{\sin\chi'}; & \end{cases}$$

oder auch

$$20)\quad \begin{cases}\sin\xi = \dfrac{\sin\delta'\sin(\chi'-\delta)}{\sin\chi'}, & \sin\xi' = \dfrac{\sin\delta\sin(\chi-\delta')}{\sin\chi};\\ \sin i = \sin\xi\cot(\chi'-\delta) = \sin\xi'\cot(\chi-\delta'); & \end{cases}$$

mittelst welcher Formeln die Hülfswinkel χ, χ', ξ, ξ', i ohne alle Schwierigkeit berechnet werden können. Zu bemerken hat man jedoch, dass man, was aus dem Vorhergehenden und dem Nachfolgenden sogleich erhellet, gar nicht nöthig hat, die Winkel ξ, ξ' selbst zu kennen, indem man bloss $\sin\xi$, $\sin\xi'$ zu berechnen und die Winkel ξ, ξ' selbst gar nicht aufzusuchen braucht, was natürlich die Rechnung erleichtert.

Führt man aber die Hülfswinkel ξ, ξ', i in die Gleichung 17) ein, so wird dieselbe:

$$21)\quad \cos i^2 \sin\varphi$$
$$= \cos\delta \sin h' \sin\xi + \cos\delta' \sin h \sin\xi'$$
$$\pm \cos\delta \cos\delta' \sin\theta \sqrt{1 - \sin h^2 - \sin h'^2 - \sin i^2 + 2\sin h \sin h' \sin i}\,.$$

Nach einem bekannten goniometrischen Satze ist aber für jedes α, β, γ:

$$1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$= 4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma),$$

also

$$1 - \sin h^2 - \sin h'^2 - \sin i^2 + 2\sin h \sin h' \sin i$$
$$= 1 - \cos(90^0-h)^2 - \cos(90^0-h')^2 - \cos(90^0-i)^2$$
$$+ 2\cos(90^0-h)\cos(90^0-h')\cos(90^0-i)$$
$$= 4\sin\frac{1}{2}(270^0 - h - h' - i)$$
$$\times \sin\frac{1}{2}(90^0 + h - h' - i)$$
$$\times \sin\frac{1}{2}(90^0 - h + h' - i)$$
$$\times \sin\frac{1}{2}(90^0 - h - h' + i)$$
$$= 4\sin\{45^0 + \frac{1}{2}(h+h'+i)\}$$
$$\times \sin\{45^0 + \frac{1}{2}(h-h'-i)\}$$
$$\times \sin\{45^0 - \frac{1}{2}(h-h'+i)\}$$
$$\times \sin\{45^0 - \frac{1}{2}(h+h'-i)\}.$$

Setzen wir aber

$$22)\quad 2s = 90^0 + h + h' + i,$$

so ist

$$90^0 + (h+h'+i) = 2s,$$
$$90^0 + (h-h'-i) = 2(s-h'-i),$$
$$90^0 - (h-h'+i) = 2(s-h-i),$$
$$90^0 - (h+h'-i) = 2(s-h-h');$$

also

$$1-\sin h^2-\sin h'^2-\sin i^2+2\sin h\sin h'\sin i$$
$$=4\sin s\sin(s-h-h')\sin(s-h-i)\sin(s-h'-i),$$

und folglich nach 21):

$$23)\quad \cos i^2\sin\varphi$$
$$=\cos\delta\sin h'\sin\xi+\cos\delta'\sin h\sin\xi'$$
$$\pm 2\cos\delta\cos\delta'\sin\theta\sqrt{\sin s\sin(s-h-h')\sin(s-h-i)\sin(s-h'-i)}.$$

Es werden freilich im Obigen fast alle Winkel durch ihre Sinus bestimmt, was bekanntlich nicht immer mit der erforderlichen Genauigkeit möglich ist. Sollte aber die Bestimmung des beliebigen Winkels η mittelst einer der beiden Gleichungen

$$\sin\eta=A \text{ oder } \cos\eta=A$$

nicht mit der erforderlichen Schärfe möglich sein, so brauchte man bloss den Hülfswinkel ζ mittelst der Formel

$$\tan\zeta=A$$

zu berechnen, was immer mit der erforderlichen Schärfe möglich ist, und hätte dann

$$\frac{1-\sin\eta}{1+\sin\eta}=\frac{1-\cos(90^0-\eta)}{1+\cos(90^0-\eta)}=\frac{1-\tan\zeta}{1+\tan\zeta},$$

$$\tan(45^0-\frac{1}{2}\eta)^2=\tan(45^0-\zeta),\quad \tan(45^0-\frac{1}{2}\eta)=\sqrt{\tan(45^0-\zeta)};$$

oder

$$\frac{1-\cos\eta}{1+\cos\eta}=\frac{1-\tan\zeta}{1+\tan\zeta},$$

$$\tan\frac{1}{2}\eta^2=\tan(45^0-\zeta),\quad \tan\frac{1}{2}\eta=\sqrt{\tan(45^0-\zeta)};$$

durch welche Methode immer eine völlig genaue Berechnung des Winkels η möglich gemacht wird.

§. 5.

Wenn man einen und denselben Stern zwei Mal beobachtet hat, so ist, wenn dieser Stern ein Fixstern ist oder wenigstens ohne merklichen Fehler als ein Fixstern betrachtet werden kann, im Obigen $\alpha=\alpha'$, $\delta=\delta'$ zu setzen, also nach 1) in diesem Falle

$$24)\quad \theta = 15(t-t'),$$

oder, wenn der Gang der Uhr nicht genau berichtigt ist, nach 8), 9), 10):

$$25)\quad \theta = \frac{15.24}{24+G}(t-t') = \frac{15(t-t')}{1+\frac{G}{24}},$$

oder, wenn $\frac{G}{24}$ ein sehr kleiner Bruch ist:

$$26)\quad \theta = 15\left\{1 - \frac{G}{24} + \left(\frac{G}{24}\right)^2 - \left(\frac{G}{24}\right)^3 + \ldots\right\}(t-t'),$$

oder näherungsweise:

$$27)\quad \theta = 15\left(1 - \frac{G}{24}\right)(t-t'),$$

so dass man also in diesem Falle die Rectascension des beobachteten Sterns gar nicht zu kennen braucht.

Ferner hat man nach 17) zur Bestimmung von $\sin\varphi$ die folgende Gleichung:

$$28)\quad \{1-(\sin\delta^2+\cos\delta^2\cos\theta)^2\}\sin\varphi$$
$$= 2\sin\delta\cos\delta^2\sin\tfrac{1}{2}\theta^2(\sin h+\sin h')$$
$$\pm\cos\delta^2\sin\theta\sqrt{\begin{array}{c}1-(\sin\delta^2+\cos\delta^2\cos\theta)^2-\sin h^2-\sin h'^2\\ +2\sin h\sin h'(\sin\delta^2+\cos\delta^2\cos\theta)\end{array}}$$

Setzt man nun ähnlich wie vorher

$$\sin i = \sin\delta^2 + \cos\delta^2\cos\theta,$$

so ist

$$1-\sin i = 2\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}i)^2 = 2\cos\delta^2\sin\tfrac{1}{2}\theta^2,$$

also

$$\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}i)^2 = \cos\delta^2\sin\tfrac{1}{2}\theta^2,$$

und man wird daher den Hülfswinkel i immer aus der Gleichung

$$29)\quad \sin(45^0 - \tfrac{1}{2}i) = \cos\delta\sin\tfrac{1}{2}\theta$$

zu bestimmen haben, was nie der geringsten Schwierigkeit unterliegt. Wird ferner eben so wie im vorhergehenden Paragraphen auch jetzt wieder

$$30)\quad 2s = 90^0 + h + h' + i$$

gesetzt, so ist

$$31)\quad \cos i^2 \sin\varphi$$

$$= 4\sin\delta\cos\delta^2 \sin\frac{1}{2}\theta^2 \sin\frac{1}{2}(h+h')\cos\frac{1}{2}(h-h')$$

$$\pm 2\cos\delta^2 \sin\theta \sqrt{\sin s \sin(s-h-h')\sin(s-h-i)\sin(s-h'-i)}.$$

Weil aber

$$\cos i = \sin(90^0 - i) = 2\sin(45^0 - \frac{1}{2}i)\cos(45^0 - \frac{1}{2}i),$$

also nach 29)

$$\cos i^2 = 4\cos\delta^2 \sin\frac{1}{2}\theta^2 \cos(45^0 - \frac{1}{2}i)^2$$

ist, so ist auch

$$32)\quad \cos(45^0 - \frac{1}{2}i)^2 \sin\varphi$$

$$= \sin\delta \sin\frac{1}{2}(h+h')\cos\frac{1}{2}(h-h')$$

$$\pm \cot\frac{1}{2}\theta \sqrt{\sin s \sin(s-h-h')\sin(s-h-i)\sin(s-h'-i)}.$$

Setzt man, was immer verstattet ist:

$$33)\quad \begin{cases} \sin u = \sin\delta \sin\frac{1}{2}\theta \sin\frac{1}{2}(h+h')\cos\frac{1}{2}(h-h'), \\ \sin v = \cos\frac{1}{2}\theta \sqrt{\sin s \sin(s-h-h')\sin(s-h-i)\sin(s-h'-i)}, \end{cases}$$

so ist

$$\sin\frac{1}{2}\theta \cos(45^0 - \frac{1}{2}i)^2 \sin\varphi = \sin u \pm \sin v,$$

also

$$34)\quad \sin\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}(u \pm v)\cos\frac{1}{2}(u \mp v)}{\sin\frac{1}{2}\theta\cos(45^0 - \frac{1}{2}i)^2}.$$

§. 6.

Wenn man die Polhöhe φ gefunden hat, so erhält man die Stundenwinkel ω, ω' mittelst der aus 11) fliessenden Formeln:

$$35)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\omega &= \frac{\sin h - \sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi}, \\ \cos\omega' &= \frac{\sin h' - \sin\delta'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi} \end{aligned}\right.$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich aber:

$$2\sin\frac{1}{2}\omega^2 = 1 - \cos\omega = \frac{\cos(\delta-\varphi) - \sin h}{\cos\delta\cos\varphi},$$

$$2\sin\frac{1}{2}\omega'^2 = 1 - \cos\omega' = \frac{\cos(\delta'-\varphi) - \sin h'}{\cos\delta'\cos\varphi};$$

also nach einer bekannten Zerlegung:

$$\sin\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{\sin\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta+h-\varphi)\}\cos\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta-h-\varphi)\}}{\cos\delta\cos\varphi},$$

$$\sin\frac{1}{2}\omega'^2 = \frac{\sin\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta'+h'-\varphi)\}\cos\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta'-h'-\varphi)\}}{\cos\delta'\cos\varphi};$$

folglich, weil $\frac{1}{2}\omega$ und $\frac{1}{2}\omega'$ immer zwischen 0 und 180° liegen:

$$36)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\frac{1}{2}\omega &= \sqrt{\frac{\sin\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta+h-\varphi)\}\cos\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta-h-\varphi)\}}{\cos\delta\cos\varphi}}, \\ \sin\frac{1}{2}\omega' &= \sqrt{\frac{\sin\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta'+h'-\varphi)\}\cos\{45^0 - \frac{1}{2}(\delta'-h'-\varphi)\}}{\cos\delta'\cos\varphi}}. \end{aligned}\right.$$

Auch ist

$$2\cos\frac{1}{2}\omega^2 = 1 + \cos\omega = \frac{\cos(\delta+\varphi) + \sin h}{\cos\delta\cos\varphi},$$

$$2\cos\frac{1}{2}\omega'^2 = 1 + \cos\omega' = \frac{\cos(\delta'+\varphi) + \sin h}{\cos\delta'\cos\varphi};$$

also nach einer bekannten Zerlegung:

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega^2=\frac{\sin\{45^0-\frac{1}{2}(\delta-h+\varphi)\}\cos\{45^0-\frac{1}{2}(\delta+h+\varphi)\}}{\cos\delta\cos\varphi},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega'^2=\frac{\sin\{45^0-\frac{1}{2}(\delta'-h'+\varphi)\}\cos\{45^0-\frac{1}{2}(\delta'+h'+\varphi)\}}{\cos\delta'\cos\varphi};$$

folglich

$$37)\quad\begin{cases}\cos\tfrac{1}{2}\omega=\pm\sqrt{\dfrac{\sin\{45^0-\frac{1}{2}(\delta-h+\varphi)\}\cos\{45^0-\frac{1}{2}(\delta+h+\varphi)\}}{\cos\delta\cos\varphi}},\\[2ex]\cos\tfrac{1}{2}\omega'=\pm\sqrt{\dfrac{\sin\{45^0-\frac{1}{2}(\delta'-h'+\varphi)\}\cos\{45^0-\frac{1}{2}(\delta'+h'+\varphi)\}}{\cos\delta'\cos\varphi}};\end{cases}$$

wenn man die obern oder untern Zeichen nimmt, jenachdem ω, ω' zwischen 0 und 180° oder zwischen 180° und 360° liegen, d. h. jenachdem die Sterne auf der westlichen oder östlichen Seite des Meridians beobachtet worden sind, was also aus den besonderen Umständen der Beobachtungen in jedem einzelnen Falle entschieden werden muss, wozu man bei wirklichen Anwendungen gewiss auch immer hinreichende Data haben wird.

Dass man, wenn man die Stundenwinkel kennt, auch den Stand der Uhr bestimmen kann, weiss Jeder aus den Elementen der Astronomie, so dass dies hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

§. 7.

Bevor wir zu einer anderen Auflösung unserer Aufgabe übergehen, wollen wir zuerst die Umstände untersuchen, unter denen die Beobachtungen am vortheilhaftesten, d. h. mit der meisten Aussicht auf hinreichende Genauigkeit und Schärfe der aus denselben abzuleitenden Resultate, angestellt werden.

Die Grundlage für die Auflösung unserer Aufgabe bilden die drei Gleichungen:

$$\omega-\omega'=\theta+\lambda.360^0,$$

$$\sin h=\sin\delta\sin\varphi+\cos\delta\cos\omega\cos\varphi,$$

$$\sin h'=\sin\delta'\sin\varphi+\cos\delta'\cos\omega'\cos\varphi;$$

wobei alle Grössen als völlig fehlerfrei angenommen werden. Nehmen wir aber die Rectascensionen und Declinationen als fehlerfrei an, wozu wir bei der grossen Genauigkeit unserer jetzigen Sternverzeichnisse und astronomischen Tafeln wohl berechtigt sind, und bezeichnen die Fehler von h, h', θ, ω, ω', φ respective durch ∂h, $\partial h'$, $\partial\theta$, $\partial\omega$, $\partial\omega'$, $\partial\varphi$; so sind die richtigen Gleichungen:

$$(\omega+\partial\omega)-(\omega'+\partial\omega')=\theta+\partial\theta+\lambda.360^0,$$

$$\sin(h+\partial h)=\sin\delta\sin(\varphi+\partial\varphi)+\cos\delta\cos(\omega+\partial\omega)\cos(\varphi+\partial\varphi),$$

$$\sin(h'+\partial h')=\sin\delta'\sin(\varphi+\partial\varphi)+\cos\delta'\cos(\omega'+\partial\omega')\cos(\varphi+\partial\varphi);$$

aus denen, in Verbindung mit den drei obigen Gleichungen, nach den Regeln der Differentialrechnung sich die drei folgenden Gleichungen ergeben:

$$\partial\omega-\partial\omega'=\partial\theta,$$

$$\cos h\,\partial h=(\sin\delta\cos\varphi-\cos\delta\cos\omega\sin\varphi)\partial\varphi-\cos\delta\sin\omega\cos\varphi\partial\omega,$$

$$\cos h'\partial h'=(\sin\delta'\cos\varphi-\cos\delta'\cos\omega'\sin\varphi)\partial\varphi-\cos\delta'\sin\omega'\cos\varphi\partial\omega'.$$

Aus diesen drei Gleichungen erhält man durch Elimination von $\partial\omega$ und $\partial\omega'$ die Gleichung:

$$\partial\theta=\frac{(\sin\delta\cos\varphi-\cos\delta\cos\omega\sin\varphi)\partial\varphi-\cos h\partial h}{\cos\delta\sin\omega\cos\varphi}$$
$$-\frac{(\sin\delta'\cos\varphi-\cos\delta'\cos\omega'\sin\varphi)\partial\varphi-\cos h'\partial h'}{\cos\delta'\sin\omega'\cos\varphi}.$$

Bezeichnen wir nun die Azimuthe der beiden beobachteten Sterne oder des einen zwei Mal beobachteten Sterns, indem wir dieselben von Süden an durch Westen hindurch von 0 bis 360° zählen, durch $\overline{\omega}$, $\overline{\omega}'$; so haben wir nach bekannten Formeln der sphärischen Astronomie (Archiv. Thl. VIII. S. 90.) die folgenden Gleichungen:

$$\sin\delta\cos\varphi-\cos\delta\cos\omega\sin\varphi=-\cos h\cos\overline{\omega},$$

$$\sin\delta'\cos\varphi-\cos\delta'\cos\omega'\sin\varphi=-\cos h'\cos\overline{\omega}'$$

und

$$\cos\delta\sin\omega=\cos h\sin\overline{\omega},$$

$$\cos\delta'\sin\omega'=\cos h'\sin\overline{\omega}';$$

also ist nach dem Obigen

$$\partial\theta=-\frac{\cos\overline{\omega}\partial\varphi+\partial h}{\sin\overline{\omega}\cos\varphi}+\frac{\cos\overline{\omega}'\partial\varphi+\partial h'}{\sin\overline{\omega}'\cos\varphi}$$

oder

$$\sin\bar{\omega}\sin\bar{\omega}'\cos\varphi\,\partial\theta=\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')\partial\varphi-\sin\bar{\omega}'\partial h+\sin\bar{\omega}\partial h',$$

also

$$38)\quad \partial\varphi=\frac{\sin\bar{\omega}'}{\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')}\partial h-\frac{\sin\bar{\omega}}{\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')}\partial h'+\frac{\sin\bar{\omega}\sin\bar{\omega}'}{\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')}\cos\varphi\,\partial\theta.$$

Ferner ist nach dem Obigen, wie man leicht findet:

$$\partial h=-\cos\bar{\omega}\partial\varphi-\sin\bar{\omega}\cos\varphi\,\partial\omega,$$

$$\partial h'=-\cos\bar{\omega}'\partial\varphi-\sin\bar{\omega}'\cos\varphi\,\partial\omega';$$

oder

$$\partial h+\cos\bar{\omega}\partial\varphi=-\sin\bar{\omega}\cos\varphi\,\partial\omega,$$

$$\partial h'+\cos\bar{\omega}'\partial\varphi=-\sin\bar{\omega}'\cos\varphi\,\partial\omega';$$

folglich, wenn man den obigen Werth von $\partial\varphi$ einführt:

$$\frac{\cos\bar{\omega}'}{\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')}\partial h-\frac{\cos\bar{\omega}}{\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')}\partial h'+\frac{\cos\bar{\omega}\sin\bar{\omega}'}{\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')}\cos\varphi\,\partial\theta=-\cos\varphi\,\partial\omega,$$

$$\frac{\cos\bar{\omega}'}{\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')}\partial h-\frac{\cos\bar{\omega}}{\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')}\partial h'+\frac{\sin\bar{\omega}\cos\bar{\omega}'}{\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')}\cos\varphi\,\partial\theta=-\cos\varphi\,\partial\omega';$$

also

$$39)\quad \left\{\begin{aligned}\partial\omega&=-\frac{\cos\bar{\omega}'}{\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')\cos\varphi}\partial h+\frac{\cos\bar{\omega}}{\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')\cos\varphi}\partial h'-\frac{\cos\bar{\omega}\sin\bar{\omega}'}{\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')}\partial\theta,\\ \partial\omega'&=-\frac{\cos\bar{\omega}'}{\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')\cos\varphi}\partial h+\frac{\cos\bar{\omega}}{\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')\cos\varphi}\partial h'-\frac{\sin\bar{\omega}\cos\bar{\omega}'}{\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')}\partial\theta.\end{aligned}\right.$$

Aus den Formeln 38) und 39), namentlich aber zunächst aus der Formel 38) in Betreff der Polhöhe, sieht man, dass man die Beobachtungen jederzeit so anstellen muss, dass nicht nahe $\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')=0$, sondern dass vielmehr möglichst nahe $\sin(\bar{\omega}-\bar{\omega}')=\pm 1$ ist, d. h. dass der absolute Werth der Differenz der Azimuthe der beiden beobachteten Sterne oder des einen zwei Mal beobachteten Sterns möglichst nahe 90° oder 270° ist. Dies vorausgesetzt, erhellet zugleich ferner aus den Gleichungen 39) in Betreff der Stundenwinkel, dass auf dieselben die Fehler in den gemessenen Höhen einen desto geringeren Einfluss ausüben, je näher $\cos\varphi=1$, d. h. je kleiner die Polhöhe ist; unter einer sehr grossen Polhöhe, wo nahe $\cos\varphi=0$ ist, kann der Einfluss der Fehler in den gemessenen Höhen auf die Stundenwinkel sehr bedeutend werden.

Ueberhaupt hat man sich also die praktische Regel zu merken, welche als eine Hauptregel für die erfolgreiche Anwendung unserer Aufgabe zur Bestimmung der Polhöhe oder der Breite zu betrachten ist, dass man bei den Beobachtungen die Umstände mit aller nur möglichen Sorgfalt so wählen muss, dass der absolute Werth der Azimuthe der beiden beobachteten Sterne oder des einen zwei Mal beobachteten Sterns möglichst nahe 90° oder 270° beträgt.

§. 8.

Wir wollen jetzt unsere Aufgabe auf eine andere Art wie vorher aufzulösen suchen, und setzen zu dem Ende

$$40)\quad \Theta=\omega-\omega',\ \Omega=\omega+\omega';$$

indem wir zugleich bemerken, dass Θ vermöge der Gleichungen 1) und 2) eine bekannte Grösse ist, und daher die beiden Stundenwinkel ω, ω' gefunden sein werden, wenn man Ω zu finden im Stande ist.

Setzen wir nun ferner

$$41)\quad \begin{cases} h+\delta=2u, & h-\delta=2v; \\ h'+\delta'=2u', & h'-\delta'=2v'; \end{cases}$$

so ist

$$h=u+v,\quad \delta=u-v;$$

$$h'=u'+v',\quad \delta'=u'-v';$$

und folglich, weil bekanntlich

$$\cos\omega=\frac{\sin h-\sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi},$$

$$\cos\omega'=\frac{\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi}$$

ist:

$$\cos\omega=\frac{\sin(u+v)-\sin(u-v)\sin\varphi}{\cos(u-v)\cos\varphi},$$

$$\cos\omega'=\frac{\sin(u'+v')-\sin(u'-v')\sin\varphi}{\cos(u'-v')\cos\varphi};$$

oder

$$\cos\omega=\frac{\sin u\cos v(1-\sin\varphi)+\cos u\sin v(1+\sin\varphi)}{\cos(u-v)\cos\varphi},$$

$$\cos\omega'=\frac{\sin u'\cos v'(1-\sin\varphi)+\cos u'\sin v'(1+\sin\varphi)}{\cos(u'-v')\cos\varphi}.$$

Setzen wir nun

$$42)\quad x=\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi},$$

so ist

$$43)\quad \sin\varphi=\frac{1-x}{1+x}$$

und

$$\cos\varphi^2=1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2=\frac{4x}{(1+x)^2},$$

also, weil offenbar x, $1+x$ und, da φ nicht grösser als 90° ist, $\cos\varphi$ positiv sind:

$$44)\quad \cos\varphi=\frac{2\sqrt{x}}{1+x};$$

auch ist

$$1+\sin\varphi=\frac{2}{1+x},\quad \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}=\sqrt{x}.$$

Nach dem Obigen ist

$$\cos\omega=\frac{\sin u\cos v\dfrac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}+\cos u\sin v}{\cos(u-v)\dfrac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}},$$

$$\cos\omega'=\frac{\sin u'\cos v'\dfrac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}+\cos u'\sin v'}{\cos(u'-v')\dfrac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}};$$

also

$$\cos\omega=\frac{x\sin u\cos v+\cos u\sin v}{\cos(u-v).\sqrt{x}},$$

$$\cos\omega'=\frac{x\sin u'\cos v'+\cos u'\sin v'}{\cos(u'-v').\sqrt{x}}$$

oder

$$\cos\omega.\sqrt{x}=\frac{x\sin u\cos v+\cos u\sin v}{\cos(u-v)},$$

$$\cos\omega'.\sqrt{x}=\frac{x\sin u'\cos v'+\cos u'\sin v'}{\cos(u'-v')}.$$

Folglich ist

$$(\cos\omega+\cos\omega')\sqrt{x}=2\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega').\sqrt{x}$$

$$=\left[\frac{\sin u\cos v}{\cos(u-v)}+\frac{\sin u'\cos v'}{\cos(u'-v')}\right]x+\frac{\cos u\sin v}{\cos(u-v)}+\frac{\cos u'\sin v'}{\cos(u'-v')},$$

$$(\cos\omega-\cos\omega')\sqrt{x}=-2\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega')\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega').\sqrt{x}$$

$$=\left[\frac{\sin u\cos v}{\cos(u-v)}-\frac{\sin u'\cos v'}{\cos(u'-v')}\right]x+\frac{\cos u\sin v}{\cos(u-v)}-\frac{\cos u'\sin v'}{\cos(u'-v')};$$

oder, wenn wir

$$45)\quad\left\{\begin{array}{l} M=\dfrac{\sin u\cos v}{\cos(u-v)},\quad M'=\dfrac{\sin u'\cos v'}{\cos(u'-v')};\\[2ex] N=\dfrac{\cos u\sin v}{\cos(u-v)},\quad N'=\dfrac{\cos u'\sin v'}{\cos(u'-v')}\end{array}\right.$$

setzen:

$$2\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\frac{1}{2}\Omega.\sqrt{x}=(M+M')x+N+N',$$

$$-2\sin\frac{1}{2}\Theta\sin\frac{1}{2}\Omega.\sqrt{x}=(M-M')x+N-N'$$

oder

$$2\cos\frac{1}{2}\Omega.\sqrt{x}=\frac{M+M'}{\cos\frac{1}{2}\Theta}x+\frac{N+N'}{\cos\frac{1}{2}\Theta},$$

$$-2\sin\frac{1}{2}\Omega.\sqrt{x}=\frac{M-M'}{\sin\frac{1}{2}\Theta}x+\frac{N-N'}{\sin\frac{1}{2}\Theta};$$

d. i., wenn wir der Kürze wegen

$$46)\quad \begin{cases} M_1 = \dfrac{M+M'}{\cos\frac{1}{2}\Theta}, \quad M_1' = \dfrac{M-M'}{\sin\frac{1}{2}\Theta}; \\[2ex] N_1 = \dfrac{N+N'}{\cos\frac{1}{2}\Theta}, \quad N_1' = \dfrac{N-N'}{\sin\frac{1}{2}\Theta} \end{cases}$$

setzen:

$$47)\quad \begin{cases} 2\cos\frac{1}{2}\Omega.\sqrt{x} = M_1 x + N_1, \\[1ex] -2\sin\frac{1}{2}\Omega.\sqrt{x} = M_1' x + N_1'; \end{cases}$$

aus welchen zwei Gleichungen die beiden unbekannten Grössen x und Ω bestimmt werden müssen.

Quadrirt man, um Ω zu eliminiren, die beiden Gleichungen 47), und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung

$$4x = (M_1^2 + M_1'^2)x^2 + 2(M_1 N_1 + M_1' N_1')x + N_1^2 + N_1'^2$$

oder

$$48)\quad (M_1^2 + M_1'^2)x^2 + 2(M_1 N_1 + M_1' N_1' - 2)x + N_1^2 + N_1'^2 = 0,$$

und löst man nun diese quadratische Gleichung auf gewöhnliche Weise auf, so ergiebt sich:

$$49)\quad x=\frac{-(M_1N_1+M_1'N_1'-2)\pm\sqrt{(M_1N_1+M_1'N_1'-2)^2-(M_1^2+M_1'^2)(N_1^2+N_1'^2)}}{M_1^2+M_1'^2}$$

oder, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$50)\quad x=\frac{-(M_1N_1+M_1'N_1'-2)\pm\sqrt{-(M_1N_1'-M_1'N_1)^2-4(M_1N_1+M_1'N_1'-1)}}{M_1^2+M_1'^2}.$$

Hat man x gefunden, so kennt man auch φ, weil man nach 43) und 44) die Formeln

$$51)\quad \sin\varphi=\frac{1-x}{1+x},\quad \cos\varphi=\frac{2\sqrt{x}}{1+x},\quad \operatorname{tang}\varphi=\frac{1-x}{2\sqrt{x}}$$

hat.

Bestimmt man $\sqrt{x}$ aus den beiden Gleichungen 47), so erhält man

$$52)\quad \sqrt{x}=\frac{M_1'N_1-M_1N_1'}{2(M_1'\cos\frac{1}{2}\Omega+M_1\sin\frac{1}{2}\Omega)},$$

und bestimmt man x aus denselben Gleichungen, so ergiebt sich

$$53)\quad x = -\frac{N_1 \sin\frac{1}{2}\Omega + N_1' \cos\frac{1}{2}\Omega}{M_1 \sin\frac{1}{2}\Omega + M_1' \cos\frac{1}{2}\Omega}.$$

Also hat man zur Bestimmung von Ω die Gleichung:

$$(M_1N_1' - M_1'N_1)^2$$
$$= -4\left(M_1 \sin\frac{1}{2}\Omega + M_1' \cos\frac{1}{2}\Omega\right)\left(N_1 \sin\frac{1}{2}\Omega + N_1' \cos\frac{1}{2}\Omega\right),$$

oder

$$(M_1N_1' - M_1'N_1)^2 \left(\sin\frac{1}{2}\Omega^2 + \cos\frac{1}{2}\Omega^2\right)$$
$$= -4\left(M_1 \sin\frac{1}{2}\Omega + M_1' \cos\frac{1}{2}\Omega\right)\left(N_1 \sin\frac{1}{2}\Omega + N_1' \cos\frac{1}{2}\Omega\right),$$

also

$$(M_1N_1' - M_1'N_1)^2 \left(1 + \tang\frac{1}{2}\Omega^2\right)$$
$$= -\left(M_1' + M_1 \tang\frac{1}{2}\Omega\right)\left(N_1' + N_1 \tang\frac{1}{2}\Omega\right),$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung die Gleichung:

$$54)\quad 0 = \{4M_1N_1 + (M_1N_1' - M_1'N_1)^2\} \tang\frac{1}{2}\Omega^2$$
$$+ 4(M_1N_1' + M_1'N_1) \tang\frac{1}{2}\Omega$$
$$+ 4M_1'N_1' + (M_1N_1' - M_1'N_1)^2,$$

oder

$$55)\quad \tang\frac{1}{2}\Omega^2 + \frac{4(M_1N_1' + M_1'N_1)}{4M_1N_1 + (M_1N_1' - M_1'N_1)^2} \tang\frac{1}{2}\Omega$$
$$= -\frac{4M_1'N_1' + (M_1N_1' - M_1'N_1)^2}{4M_1N_1 + (M_1N_1' - M_1'N_1)^2},$$

mittelst welcher Gleichung $\tang\frac{1}{2}\Omega$ bestimmt werden muss.

Löst man aber diese Gleichung auf gewöhnliche Weise auf, so erhält man nach einigen leichten Transformationen:

und bestimmt man x aus denselben Gleichungen, so ergiebt sich

$$53)\quad x = \frac{N_1 \sin\frac{1}{2}\Omega + N_1' \cos\frac{1}{2}\Omega}{M_1 \sin\frac{1}{2}\Omega + M_1' \cos\frac{1}{2}\Omega}.$$

Also hat man zur Bestimmung von Ω die Gleichung:

$$(M_1N_1' - M_1'N_1)^2 = -4(M_1 \sin\tfrac{1}{2}\Omega + M_1' \cos\tfrac{1}{2}\Omega)(N_1 \sin\tfrac{1}{2}\Omega + N_1' \cos\tfrac{1}{2}\Omega),$$

oder

$$(M_1N_1' - M_1'N_1)^2(\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2 + \cos\tfrac{1}{2}\Omega^2)^2 = -4(M_1 \sin\tfrac{1}{2}\Omega + M_1' \cos\tfrac{1}{2}\Omega)(N_1 \sin\tfrac{1}{2}\Omega + N_1' \cos\tfrac{1}{2}\Omega),$$

also

$$(M_1N_1' - M_1'N_1)^2(1 + \tan\tfrac{1}{2}\Omega^2)^2 = -4(M_1' + M_1 \tan\tfrac{1}{2}\Omega)(N_1' + N_1 \tan\tfrac{1}{2}\Omega),$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung die Gleichung:

$$54)\quad 0 = \ldots \{4M_1N_1 + 2(M_1N_1' - M_1'N_1)^2\} \tan\tfrac{1}{2}\Omega^2 + 4(M_1N_1' + M_1'N_1) \tan\tfrac{1}{2}\Omega + 4M_1'N_1' + (M_1N_1' - M_1'N_1)^2,$$

oder

$$55)\quad \tan\tfrac{1}{2}\Omega^4 + \frac{4M_1N_1 + 2(M_1N_1' - M_1'N_1)^2}{(M_1N_1' - M_1'N_1)^2} \tan\tfrac{1}{2}\Omega^2 + \frac{4(M_1N_1' + M_1'N_1)}{(M_1N_1' - M_1'N_1)^2} \tan\tfrac{1}{2}\Omega = -\frac{4M_1'N_1' + (M_1N_1' - M_1'N_1)^2}{(M_1N_1' - M_1'N_1)^2},$$

mittelst welcher Gleichung $\tan\frac{1}{2}\Omega$ bestimmt werden muss.

Lässt man nun diese Gleichung ... so erhält man nach ...

Für die wirkliche Anwendung ist diese völlig directe Auflösung nicht geeignet. Jedoch kann man auf folgende Art zu Formeln gelangen, die für die logarithmische Rechnung sehr bequem sind.

Wir haben vorher die Gleichung

$$(M_1N_1'-M_1'N_1)^2$$
$$=-4(M_1\sin\frac{1}{2}\Omega+M_1'\cos\frac{1}{2}\Omega)(N_1\sin\frac{1}{2}\Omega+N_1'\cos\frac{1}{2}\Omega)$$

gehabt, die sich auf die Form

$$(\cos\frac{1}{2}\Omega+\frac{M_1}{M_1'}\sin\frac{1}{2}\Omega)(\cos\frac{1}{2}\Omega+\frac{N_1}{N_1'}\sin\frac{1}{2}\Omega)$$
$$=-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{4M_1'N_1'}$$

bringen lässt. Setzen wir nun

$$57)\quad \operatorname{tang}P=\frac{M_1}{M_1'},\ \operatorname{tang}Q=\frac{N_1}{N_1'};$$

so wird die vorhergehende Gleichung:

$$\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)$$
$$=-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{4M_1'N_1'}\cos P\cos Q=-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{4M_1N_1}\sin P\sin Q$$

d. i. nach einer bekannten goniometrischen Formel:

$$\cos(P-Q)+\cos(P+Q-\Omega)$$
$$=-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{2M_1'N_1'}\cos P\cos Q=-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{2M_1N_1}\sin P\sin Q,$$

und folglich

$$\cos(P+Q-\Omega)=-\cos(P-Q)-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{2M_1'N_1'}\cos P\cos Q$$
$$=-\cos(P-Q)-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{2M_1N_1}\sin P\sin Q,$$

oder

$$\cos(P+Q-\Omega)=-\cos(P-Q)-\frac{1}{2}M_1'N_1'\left(\frac{M_1}{M_1'}-\frac{N_1}{N_1'}\right)^2\cos P\cos Q$$
$$=-\cos(P-Q)-\frac{1}{2}M_1N_1\left(\frac{M_1'}{M_1}-\frac{N_1'}{N_1}\right)^2\sin P\sin Q,$$

und bestimmt man x aus denselben Gleichungen, so ergiebt sich

$$53)\quad x = \frac{N_1 \sin\frac{1}{2}\Omega + N_1'\cos\frac{1}{2}\Omega}{M_1\sin\frac{1}{2}\Omega + M_1'\cos\frac{1}{2}\Omega}.$$

Also hat man zur Bestimmung von Ω die Gleichung:

$$(M_1N_1' - M_1'N_1)^2$$
$$= -4(M_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega + M_1'\cos\tfrac{1}{2}\Omega)(N_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega + N_1'\cos\tfrac{1}{2}\Omega),$$

oder

$$(M_1N_1' - M_1'N_1)^2(\sin\tfrac{1}{2}\Omega^2 + \cos\tfrac{1}{2}\Omega^2)$$
$$= -4(M_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega + M_1'\cos\tfrac{1}{2}\Omega)(N_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega + N_1'\cos\tfrac{1}{2}\Omega),$$

also

$$(M_1N_1' - M_1'N_1)^2(1 + \tan\tfrac{1}{2}\Omega^2)$$
$$= -4(M_1' + M_1\tan\tfrac{1}{2}\Omega)(N_1' + N_1\tan\tfrac{1}{2}\Omega),$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung die Gleichung:

$$54)\quad 0 = \{4M_1N_1 + (M_1N_1' - M_1'N_1)^2\}\tan\tfrac{1}{2}\Omega^2$$
$$+ 4(M_1N_1' + M_1'N_1)\tan\tfrac{1}{2}\Omega$$
$$+ 4M_1'N_1' + (M_1N_1' - M_1'N_1)^2,$$

oder

$$55)\quad \tan\tfrac{1}{2}\Omega^2 + \frac{4(M_1N_1' + M_1'N_1)}{4M_1N_1 + (M_1N_1' - M_1'N_1)^2}\tan\tfrac{1}{2}\Omega$$
$$= -\frac{4M_1'N_1' + (M_1N_1' - M_1'N_1)^2}{4M_1N_1 + (M_1N_1' - M_1'N_1)^2},$$

mittelst welcher Gleichung $\tan\frac{1}{2}\Omega$ bestimmt werden muss.

Löst man nun diese Gleichung auf, ... so erhält man nach einigen leichten Transformationen:

$$56)\quad \tan\tfrac{1}{2}\Omega = \frac{-2(M_1N_1' + M_1'N_1) \pm (M_1N_1' - M_1'N_1)\sqrt{-(M_1N_1' - M_1'N_1)^2 - 4(M_1N_1 + M_1'N_1' - 1)}}{4M_1N_1 + (M_1N_1' - M_1'N_1)^2}$$

Für die wirkliche Anwendung ist diese völlig directe Auflösung nicht geeignet. Jedoch kann man auf folgende Art zu Formeln gelangen, die für die logarithmische Rechnung sehr bequem sind.

Wir haben vorher die Gleichung

$$(M_1N_1'-M_1'N_1)^2$$

$$=-4(M_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega+M_1'\cos\tfrac{1}{2}\Omega)(N_1\sin\tfrac{1}{2}\Omega+N_1'\cos\tfrac{1}{2}\Omega)$$

gehabt, die sich auf die Form

$$(\cos\tfrac{1}{2}\Omega+\frac{M_1}{M_1'}\sin\tfrac{1}{2}\Omega)(\cos\tfrac{1}{2}\Omega+\frac{N_1}{N_1'}\sin\tfrac{1}{2}\Omega)$$

$$=-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{4M_1'N_1'}$$

bringen lässt. Setzen wir nun

$$57)\quad \operatorname{tang}P=\frac{M_1}{M_1'},\ \operatorname{tang}Q=\frac{N_1}{N_1'};$$

so wird die vorhergehende Gleichung:

$$\cos(P-\tfrac{1}{2}\Omega)\cos(Q-\tfrac{1}{2}\Omega)$$

$$=-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{4M_1'N_1'}\cos P\cos Q=-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{4M_1N_1}\sin P\sin Q$$

d. i. nach einer bekannten goniometrischen Formel:

$$\cos(P-Q)+\cos(P+Q-\Omega)$$

$$=-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{2M_1'N_1'}\cos P\cos Q=-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{2M_1N_1}\sin P\sin Q,$$

und folglich

$$\cos(P+Q-\Omega)=-\cos(P-Q)-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{2M_1'N_1'}\cos P\cos Q.$$

$$=-\cos(P-Q)-\frac{(M_1N_1'-M_1'N_1)^2}{2M_1N_1}\sin P\sin Q,$$

oder

$$\cos(P+Q-\Omega)=-\cos(P-Q)-\tfrac{1}{2}M_1'N_1'\left(\frac{M_1}{M_1'}-\frac{N_1}{N_1'}\right)^2\cos P\cos Q$$

$$=-\cos(P-Q)-\tfrac{1}{2}M_1N_1\left(\frac{M_1'}{M_1}-\frac{N_1'}{N_1}\right)^2\sin P\sin Q,$$

d. i. nach dem Obigen

$$\cos(P+Q-\Omega)=-\cos(P-Q)-\frac{1}{2}M_1'N_1'(\tang P-\tang Q)^2\cos P\cos Q$$

$$=-\cos(P-Q)-\frac{1}{2}M_1N_1(\cot P-\cot Q)^2\sin P\sin Q$$

oder

$$58)\quad \cos(P+Q-\Omega)=-\cos(P-Q)-M_1'N_1'\frac{\sin(P-Q)^2}{2\cos P\cos Q}$$

$$=-\cos(P-Q)-M_1N_1\frac{\sin(P-Q)^2}{2\sin P\sin Q},$$

mittelst welcher Formeln Ω leicht berechnet werden kann.

Nach 53) ist

$$x=-\frac{N_1}{M_1}\cdot\frac{1+\frac{N_1'}{N_1}\cot\frac{1}{2}\Omega}{1+\frac{M_1'}{M_1}\cot\frac{1}{2}\Omega}$$

$$=-\frac{N_1'}{M_1'}\cdot\frac{1+\frac{N_1}{N_1'}\tang\frac{1}{2}\Omega}{1+\frac{M_1}{M_1'}\tang\frac{1}{2}\Omega},$$

also

$$x=-\frac{N_1}{M_1}\cdot\frac{1+\cot Q\cot\frac{1}{2}\Omega}{1+\cot P\cot\frac{1}{2}\Omega}$$

$$=-\frac{N_1'}{M_1'}\cdot\frac{1+\tang Q\tang\frac{1}{2}\Omega}{1+\tang P\tang\frac{1}{2}\Omega},$$

d. i.

$$59)\quad x=-\frac{N_1}{M_1}\cdot\frac{\sin P\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)}{\sin Q\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)}$$

$$=-\frac{N_1'}{M_1'}\cdot\frac{\cos P\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)}{\cos Q\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)}.$$

Nach 52) ist

$$\sqrt{x}=\frac{N_1}{2\cos\frac{1}{2}\Omega}\cdot\frac{1-\frac{M_1}{M_1'}\cdot\frac{N_1'}{N_1}}{1+\frac{M_1}{M_1'}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega}$$

$$=\frac{N_1'}{2\sin\frac{1}{2}\Omega}\cdot\frac{\frac{M_1'}{M_1}\cdot\frac{N_1}{N_1'}-1}{\frac{M_1'}{M_1}\cot\frac{1}{2}\Omega+1},$$

also

$$\sqrt{x}=\frac{N_1}{2\cos\frac{1}{2}\Omega}\cdot\frac{1-\operatorname{tang}P\cot Q}{1+\operatorname{tang}P\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega}$$

$$=\frac{N_1'}{2\sin\frac{1}{2}\Omega}\cdot\frac{\cot P\operatorname{tang}Q-1}{\cot P\cot\frac{1}{2}\Omega+1},$$

d. i.

$$60)\quad \sqrt{x}=-\frac{N_1}{2\sin Q}\cdot\frac{\sin(P-Q)}{\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)}$$

$$=-\frac{N_1'}{2\cos Q}\cdot\frac{\sin(P-Q)}{\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)}.$$

Auch ist

$$\frac{1-x}{1+x}=\frac{(M_1+N_1)\sin\frac{1}{2}\Omega+(M_1'+N_1')\cos\frac{1}{2}\Omega}{(M_1-N_1)\sin\frac{1}{2}\Omega+(M_1'-N_1')\cos\frac{1}{2}\Omega}$$

$$=\frac{M_1(\sin\frac{1}{2}\Omega+\cot P\cos\frac{1}{2}\Omega)+N_1(\sin\frac{1}{2}\Omega+\cot Q\cos\frac{1}{2}\Omega)}{M_1(\sin\frac{1}{2}\Omega+\cot P\cos\frac{1}{2}\Omega)-N_1(\sin\frac{1}{2}\Omega+\cot Q\cos\frac{1}{2}\Omega)},$$

d. i.

$$61)\quad \sin\varphi=\frac{M_1\sin Q\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)+N_1\sin P\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)}{M_1\sin Q\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)-N_1\sin P\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)},$$

und setzt man also

$$62)\quad \tang R = \frac{N_1 \sin P \cos(Q - \frac{1}{2}\Omega)}{M_1 \sin Q \cos(P - \frac{1}{2}\Omega)},$$

so ist

$$63)\quad \sin\varphi = \tang(45^0 - R),$$

also

$$\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} = \frac{1-\tang(45^0-R)}{1+\tang(45^0-R)},$$

d. i.

$$\tang(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)^2 = \tang R,$$

und folglich

$$64)\quad \tang(45^0 - \frac{1}{2}\varphi) = \sqrt{\tang R},$$

oder nach dem Obigen,

$$65)\quad \tang(45^0 - \frac{1}{2}\varphi) = \sqrt{\frac{N_1 \sin P \cos(Q - \frac{1}{2}\Omega)}{M_1 \sin Q \cos(P - \frac{1}{2}\Omega)}},$$

auch

$$66)\quad \tang(45^0 - \frac{1}{2}\varphi) = \sqrt{\frac{N_1' \cos P \cos(Q - \frac{1}{2}\Omega)}{M_1' \cos Q \cos(P - \frac{1}{2}\Omega)}}.$$

Wenn man Ω mittelst einer der beiden Formeln 58), nämlich mittelst einer der beiden Formeln

$$\cos(P+Q-\Omega) = -\cos(P-Q) - M_1' N_1' \frac{\sin(P-Q)^2}{2\cos P \cos Q}$$

$$= -\cos(P-Q) - M_1 N_1 \frac{\sin(P-Q)^2}{2\sin P \sin Q}$$

berechnet, so hat man noch Folgendes zu bemerken.

Bezeichnen wir den kleinsten positiven Bogen, dessen Cosinus

$$-\cos(P-Q) - M_1' N_1' \frac{\sin(P-Q)^2}{2\cos P \cos Q}$$

oder

$$-\cos(P-Q)-M_1N_1\frac{\sin(P-Q)^2}{2\sin P\sin Q}$$

ist, durch U, so ist, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, bekanntlich

$$P+Q-\Omega-2k\pi=\pm U,$$

also

$$\Omega=P+Q\mp U-2k\pi.$$

Weil nun aber

$$\Omega=\omega+\omega'$$

ist, so ist

$$0<\Omega<4\pi,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$0<P+Q\mp U-2k\pi<4\pi,$$

folglich

$$-(P+Q\mp U)<-2k\pi<4\pi-(P+Q\mp U),$$

und hieraus

$$\frac{P+Q\mp U}{2\pi}-2<k<\frac{P+Q\mp U}{2\pi}.$$

Aus

$$\frac{P+Q-U}{2\pi}-2<k<\frac{P+Q-U}{2\pi}$$

ergeben sich zwei um die Einheit verschiedene Werthe von k, welche wir durch λ, $\lambda+1$ bezeichnen wollen; und eben so ergeben sich aus

$$\frac{P+Q+U}{2\pi}-2<k<\frac{P+Q+U}{2\pi}$$

zwei um die Einheit verschiedene Werthe von k, welche wir durch μ, $\mu+1$ bezeichnen wollen. Also haben wir nach dem Obigen für Ω die folgenden vier Werthe:

$$\Omega=\begin{cases}P+Q-U-2\lambda\pi\\P+Q-U-2(\lambda+1)\pi\end{cases}$$

und

$$\Omega=\begin{cases}P+Q+U-2\mu\pi\\ P+Q+U-2(\mu+1)\pi.\end{cases}$$

Diesem entsprechend ist:

$$P-\frac{1}{2}\Omega=\begin{cases}\frac{1}{2}(P-Q+U)+\lambda\pi\\ \frac{1}{2}(P-Q+U)+(\lambda+1)\pi\end{cases}$$

und

$$P-\frac{1}{2}\Omega=\begin{cases}\frac{1}{2}(P-Q-U)+\mu\pi\\ \frac{1}{2}(P-Q-U)+(\mu+1)\pi;\end{cases}$$

ferner

$$Q-\frac{1}{2}\Omega=\begin{cases}\frac{1}{2}(Q-P+U)+\lambda\pi\\ \frac{1}{2}(Q-P+U)+(\lambda+1)\pi\end{cases}$$

und

$$Q-\frac{1}{2}\Omega=\begin{cases}\frac{1}{2}(Q-P-U)+\mu\pi\\ \frac{1}{2}(Q-P-U)+(\mu+1)\pi;\end{cases}$$

folglich

$$\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)=\begin{cases}(-1)^{\lambda}.\cos\frac{1}{2}(P-Q+U)\\ (-1)^{\lambda+1}.\cos\frac{1}{2}(P-Q+U)\end{cases}$$

und

$$\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)=\begin{cases}(-1)^{\mu}.\cos\frac{1}{2}(P-Q-U)\\ (-1)^{\mu+1}.\cos\frac{1}{2}(P-Q-U);\end{cases}$$

ferner

$$\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)=\begin{cases}(-1)^{\lambda}.\cos\frac{1}{2}(Q-P+U)\\ (-1)^{\lambda+1}.\cos\frac{1}{2}(Q-P+U)\end{cases}$$

und

$$\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)=\begin{cases}(-1)^{\mu}.\cos\frac{1}{2}(Q-P-U)\\ (-1)^{\mu+1}.\cos\frac{1}{2}(Q-P-U).\end{cases}$$

Folglich ist nach 60)

$$\sqrt{x}=\begin{cases}-(-1)^{\lambda}.\dfrac{N_1}{2\sin Q}\cdot\dfrac{\sin(P-Q)}{\cos\frac{1}{2}(P-Q+U)}\\[2ex] -(-1)^{\lambda+1}.\dfrac{N_1}{2\sin Q}\cdot\dfrac{\sin(P-Q)}{\sin\frac{1}{2}(P-Q+U)}\end{cases}$$

und

$$\sqrt{x}=\begin{cases}-(-1)^{\mu}.\dfrac{N_1}{2\sin Q}\cdot\dfrac{\sin(P-Q)}{\cos\frac{1}{2}(P-Q-U)}\\[2ex] -(-1)^{\mu+1}.\dfrac{N_1}{2\sin Q}\cdot\dfrac{\sin(P-Q)}{\cos\frac{1}{2}(P-Q-U)}\end{cases}.$$

Sowohl die beiden ersten, als auch die beiden letzten Werthe von $\sqrt{x}$ haben entgegengesetzte Vorzeichen. Nun ist aber im Obigen $\sqrt{x}$ immer als positiv betrachtet worden, und man hat daher hierin offenbar ein sicheres Kriterium, ob man $k=\lambda$ oder $k=\lambda+1$, und ob man $k=\mu$ oder $k=\mu+1$, d. h. ob man

$$\Omega=P+Q-U-2\lambda\pi$$

oder

$$\Omega=P+Q-U-2(\lambda+1)\pi,$$

und ob man

$$\Omega=P+Q+U-2\mu\pi$$

oder

$$\Omega=P+Q+U-2(\mu+1)\pi$$

setzen soll, so dass man also für Ω immer nur zwei Werthe erhält, wie es die Natur der Aufgabe erfordert. Als einfache Regel hat man sich zu merken, dass man von den vier Werthen, welche Ω nach dem Obigen haben kann, jederzeit die beiden zu nehmen hat, welche für

$$\sqrt{x} = -\frac{N_1}{2\sin Q} \cdot \frac{\sin(P-Q)}{\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)}$$

$$= \frac{N_1'}{2\cos Q} \cdot \frac{\sin(P-Q)}{\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)}$$

positive Werthe liefern.

Nach dem Vorhergehenden ist, wie man leicht findet, immer

$$\frac{\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)}{\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(Q-P+U)}{\cos\frac{1}{2}(P-Q+U)}$$

oder

$$\frac{\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)}{\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(Q-P-U)}{\cos\frac{1}{2}(P-Q-U)},$$

also

$$\frac{\cos(Q-\frac{1}{2}\Omega)}{\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(Q-P\pm U)}{\cos\frac{1}{2}(P-Q\pm U)},$$

und folglich nach 66):

$$67)\quad \tang(45^0-\frac{1}{2}\varphi) = \sqrt{-\frac{N_1'\cos P\cos\frac{1}{2}(Q-P\pm U)}{M_1'\cos Q\cos\frac{1}{2}(P-Q\pm U)}}$$

oder nach 65):

$$68)\quad \tang(45^0-\frac{1}{2}\varphi) = \sqrt{-\frac{N_1\sin P\cos\frac{1}{2}(Q-P\pm U)}{M_1\sin Q\cos\frac{1}{2}(P-Q\pm U)}},$$

wo, wie wir wissen, U den kleinsten positiven Bogen bezeichnet, welcher der Gleichung

$$69)\quad \cos U = -\cos(P-Q) - M_1'N_1'\frac{\sin(P-Q)^2}{2\cos P\cos Q}$$
$$= -\cos(P-Q) - M_1N_1\frac{\sin(P-Q)^2}{2\sin P\sin Q}$$

genügt. Bei der Bestimmung von φ mittelst der Gleichung 67) oder 68) kann keine Zweideutigkeit bleiben, da offenbar

$$0 < 45^0 - \frac{1}{2}\varphi < 90^0,$$

d. h. $45^0 - \frac{1}{2}\varphi$ immer im ersten Quadranten zu nehmen ist.

§. 9.

Annähernde oder indirecte Auflösungen unserer Aufgabe lassen sich mehrere finden; auf der See wird jedoch meistens die Methode von Douwes gebraucht, weshalb es sich der Mühe verlohnen wird, diese Methode hier, jedoch in verallgemeinerter Gestalt, weil das Verfahren von Douwes nur für das Problem in seiner einfacheren Gestalt gilt, ausführlich zu entwickeln, was um so nöthiger sein dürfte, weil die gewöhnlichen Entwickelungen dieser Methode, wie es mir scheint, keine ganz deutliche Einsicht in das eigentliche Wesen derselben gewähren.

Wir wollen daher jetzt annehmen, dass φ, ω, ω' nur Näherungswerthe der Polhöhe und der beiden Stundenwinkel seien, und wollen die genauen Werthe dieser Elemente durch $\varphi+\Delta\varphi$, $\omega+\Delta\omega$, $\omega'+\Delta\omega'$ bezeichnen. Dann haben wir nach 11) die beiden Gleichungen:

$$70)\quad \begin{cases} \cos(\omega+\Delta\omega) = \dfrac{\sin h - \sin\delta\sin(\varphi+\Delta\varphi)}{\cos\delta\cos(\varphi+\Delta\varphi)}, \\ \cos(\omega'+\Delta\omega') = \dfrac{\sin h' - \sin\delta'\sin(\varphi+\Delta\varphi)}{\cos\delta'\cos(\varphi+\Delta\varphi)}; \end{cases}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$71)\quad (\varphi) = \varphi+\Delta\varphi,\ (\omega) = \omega+\Delta\omega,\ (\omega') = \omega'+\Delta\omega'$$

setzen, die beiden Gleichungen:

$$72)\quad \begin{cases} \cos(\omega) = \dfrac{\sin h - \sin\delta\sin(\varphi)}{\cos\delta\cos(\varphi)}, \\ \cos(\omega') = \dfrac{\sin h' - \sin\delta'\sin(\varphi)}{\cos\delta'\cos(\varphi)}. \end{cases}$$

Entwickeln wir nun die Grössen auf den rechten Seiten dieser Gleichungen nach den Potenzen von $\Delta\varphi$ und bleiben bei den ersten Potenzen von $\Delta\varphi$ stehen, so erhalten wir zuerst:

$$\cos(\omega)=\frac{\sin h-\sin\delta\sin\varphi-\sin\delta\cos\varphi\Delta\varphi}{\cos\delta\cos\varphi-\cos\delta\sin\varphi\Delta\varphi},$$

$$\cos(\omega')=\frac{\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi-\sin\delta'\cos\varphi\Delta\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi-\cos\delta'\sin\varphi\Delta\varphi};$$

also ferner

$$\cos(\omega)=$$
$$\frac{(\sin h-\sin\delta\sin\varphi-\sin\delta\cos\varphi\Delta\varphi)(\cos\delta\cos\varphi+\cos\delta\sin\varphi\Delta\varphi)}{(\cos\delta\cos\varphi-\cos\delta\sin\varphi\Delta\varphi)(\cos\delta\cos\varphi+\cos\delta\sin\varphi\Delta\varphi)},$$

$$\cos(\omega')=$$
$$\frac{(\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi-\sin\delta'\cos\varphi\Delta\varphi)(\cos\delta'\cos\varphi+\cos\delta'\sin\varphi\Delta\varphi)}{(\cos\delta'\cos\varphi-\cos\delta'\sin\varphi\Delta\varphi)(\cos\delta'\cos\varphi+\cos\delta'\sin\varphi\Delta\varphi)};$$

d. i., wenn wir immer bei den ersten Potenzen von $\Delta\varphi$ stehen bleiben:

$$\cos(\omega)=\frac{\sin h-\sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi}$$
$$-\frac{\sin\delta\cos\varphi^2-\sin\varphi(\sin h-\sin\delta\sin\varphi)}{\cos\delta\cos\varphi^2}\Delta\varphi,$$

$$\cos(\omega')=\frac{\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi}$$
$$-\frac{\sin\delta'\cos\varphi^2-\sin\varphi(\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi)}{\cos\delta'\cos\varphi^2}\Delta\varphi;$$

also, wie sich hieraus leicht ergiebt:

$$73)\quad\begin{cases}\cos(\omega)=\dfrac{\sin h-\sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi}-\dfrac{\sin\delta-\sin h\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi^2}\Delta\varphi,\\[2ex]\cos(\omega')=\dfrac{\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi}-\dfrac{\sin\delta'-\sin h'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi^2}\Delta\varphi.\end{cases}$$

Hieraus erhält man ferner leicht:

$$\cos(\omega)-\cos(\omega')=-2\sin\frac{1}{2}\{(\omega)-(\omega')\}\sin\frac{1}{2}\{(\omega)+(\omega')\}$$
$$=\frac{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}{\cos\delta\cos\delta'\cos\varphi}$$
$$-\frac{\sin(\delta-\delta')-(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{\cos\delta\cos\delta'\cos\varphi^2}\Delta\varphi,$$

$$\cos(\omega)+\cos(\omega')=2\cos\frac{1}{2}\{(\omega)-(\omega')\}\cos\frac{1}{2}\{(\omega)+(\omega')\}$$

$$=\frac{\sin h\cos\delta'+\sin h'\cos\delta-\sin(\delta+\delta')\sin\varphi}{\cos\delta\cos\delta'\cos\varphi}$$

$$-\frac{\sin(\delta+\delta')-(\sin h\cos\delta'+\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{\cos\delta\cos\delta'\cos\varphi^2}\Delta\varphi.$$

Nach 40) ist aber

$$(\omega)-(\omega')=\Theta,$$

wo Θ nach den Gleichungen 1) und 2) eine bekannte Grösse ist; also werden die beiden vorhergehenden Gleichungen:

$$\sin\frac{1}{2}\{(\omega)+(\omega')\}=-\frac{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi}$$

$$+\frac{\sin(\delta-\delta')-(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi^2}\Delta\varphi,$$

$$\sin\frac{1}{2}\{(\omega)+(\omega')\}=\frac{\sin h\cos\delta'+\sin h'\cos\delta-\sin(\delta+\delta')\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi}$$

$$-\frac{\sin(\delta+\delta')-(\sin h\cos\delta'+\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi^2}\Delta\varphi;$$

oder, wenn man die Grössen auf den linken Seiten der Gleichheitszeichen nach Potenzen von $\Delta\omega+\Delta\omega'$ entwickelt, und bei den ersten Potenzen dieser Grösse stehen bleibt:

$$\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega')+\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega').(\Delta\omega+\Delta\omega')$$

$$=-\frac{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi}$$

$$+\frac{\sin(\delta-\delta')-(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi^2}\Delta\varphi,$$

$$\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega').(\Delta\omega+\Delta\omega')$$

$$=\frac{\sin h\cos\delta'+\sin h'\cos\delta-\sin(\delta+\delta')\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi}$$

$$-\frac{\sin(\delta+\delta')-(\sin h\cos\delta'+\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi^2}\Delta\varphi.$$

Legt man nun der Rechnung einen bekannten Näherungswerth der Polhöhe zum Grunde, den wir wie bisher durch φ bezeichnen wollen, und bestimmt die Näherungswerthe ω, ω' der beiden Stundenwinkel mittelst der beiden Gleichungen:

$$74)\quad\begin{cases}\omega-\omega'=\Theta,\\ \sin\frac{1}{2}(\omega+\omega')=-\dfrac{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi};\end{cases}$$

so ist, weil die richtige Gleichung

$$(\omega)-(\omega')=(\omega+\Delta\omega)-(\omega'+\Delta\omega')=\omega-\omega'+\Delta\omega-\Delta\omega'=\Theta$$

ist,

$$\Delta\omega-\Delta\omega'=0,\ \Delta\omega=\Delta\omega';$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$75)\quad\Delta\omega=\Delta\omega'=\frac{\sin(\delta-\delta')-(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')\cos\varphi^2}\Delta\varphi$$

Man könnte mit demselben Grade der Genauigkeit auch ω, ω' mittelst der Gleichungen

$$76)\quad\begin{cases}\omega-\omega'=\Theta,\\ \cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')=\dfrac{\sin h\cos\delta'+\sin h'\cos\delta-\sin(\delta+\delta')\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\cos\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi}\end{cases}$$

bestimmen, und hätte dann nach dem Vorhergehenden:

$$77)\quad\Delta\omega=\Delta\omega'=\frac{\sin(\delta+\delta')-(\sin h\cos\delta'+\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\cos\frac{1}{2}\Theta\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega')\cos\varphi^2}\Delta\varphi.$$

Die erste Methode ist jedoch in dem Falle, wenn $\delta=\delta'$ ist, ihrer grösseren Einfachheit wegen vorzuziehen, weil in diesem Falle das Glied $\sin(\delta-\delta')$ verschwindet, und wird daher im Folgenden vorzugsweise in's Auge gefasst werden. Bei der zweiten Methode verschwindet nämlich in dem in Rede stehenden Falle das Glied $\sin(\delta+\delta')$ nicht, weshalb dieselbe in diesem Falle nicht so einfache und zur Rechnung bequeme Ausdrücke wie die erste Methode liefert, was sich weiter unten deutlich zeigen wird. In dem allgemeinen Falle, wenn nicht $\delta=\delta'$ ist, würde keiner der beiden Methoden ein besonderer Vorzug vor der anderen zukommen.

Ferner ist nach 72)

$$1-\cos(\omega)=2\sin\frac{1}{2}(\omega)^2=\frac{\cos\{\delta-(\varphi)\}-\sin h}{\cos\delta\cos(\varphi)},$$

$$1-\cos(\omega')=2\sin\frac{1}{2}(\omega')^2=\frac{\cos\{\delta'-(\varphi)\}-\sin h'}{\cos\delta'\cos(\varphi)}$$

und

$$1+\cos(\omega)=2\cos\frac{1}{2}(\omega)^2=\frac{\cos\{\delta+(\varphi)\}+\sin h}{\cos\delta\cos(\varphi)},$$

$$1+\cos(\omega')=2\cos\frac{1}{2}(\omega')^2=\frac{\cos\{\delta'+(\varphi)\}+\sin h'}{\cos\delta'\cos(\varphi)};$$

also

$$\cos\{\delta-(\varphi)\}=\sin h+2\cos\delta\cos(\varphi)\sin\frac{1}{2}(\omega)^2,$$

$$\cos\{\delta'-(\varphi)\}=\sin h'+2\cos\delta'\cos(\varphi)\sin\frac{1}{2}(\omega')^2$$

und

$$\cos\{\delta+(\varphi)\}=-\sin h+2\cos\delta\cos(\varphi)\cos\frac{1}{2}(\omega)^2,$$

$$\cos\{\delta'+(\varphi)\}=-\sin h'+2\cos\delta'\cos(\varphi)\cos\frac{1}{2}(\omega')^2;$$

von welchen vier Gleichungen wir aber jetzt der Kürze wegen nur die erste etwas weiter betrachten wollen.

Entwickeln wir nämlich die rechte Seite der ersten dieser vier Gleichungen nach Potenzen von $\Delta\omega$ und $\Delta\varphi$, und bleiben bei den die ersten Potenzen von $\Delta\omega$ und $\Delta\varphi$ enthaltenden Gliedern stehen, so erhalten wir

$$\cos\{\delta-(\varphi)\}=\sin h+2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$
$$+\cos\delta\cos\varphi\sin\omega\Delta\omega-2\cos\delta\sin\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2\Delta\varphi,$$

und wenn wir nun für $\Delta\omega$ seinen Werth aus 75) einführen, so ergiebt sich:

$$78)\quad \cos\{\delta-(\varphi)\}=\sin h+2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

$$-2\cos\delta\sin\frac{1}{2}\omega\left\{\sin\varphi\sin\frac{1}{2}\omega-\cos\frac{1}{2}\omega\,\frac{\sin(\delta-\delta')-(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{2\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')\cos\varphi}\right\}\Delta\varphi.$$

Weil aber nach 74)

$$2\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi=-\frac{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}{\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega')}$$

ist, so wird vorstehende Gleichung:

$$79)\quad \cos\{\delta-(\varphi)\}=\sin h+2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

$$-2\cos\delta\sin\frac{1}{2}\omega\left\{\sin\varphi\sin\frac{1}{2}\omega+\cos\frac{1}{2}\omega\tan\!g\frac{1}{2}(\omega+\omega')\,\frac{\sin(\delta-\delta')-(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}\right\}\Delta\varphi,$$

oder auch, wie man mittelst einiger Transformationen leicht findet:

$$80)\quad \cos\{\delta-(\varphi)\}=\sin h+2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

$$-2\cos\delta\sin\frac{1}{2}\omega\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin(\delta-\delta')\sin\frac{1}{2}\omega\cos\varphi^2}{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}\\[2ex]+\dfrac{\sin(\delta-\delta')-(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}\cdot\dfrac{\sin\frac{1}{2}\omega'}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\end{array}\right\}\Delta\varphi.$$

Weil aber

$$\cos\{\delta-(\varphi)\}=\cos(\delta-\varphi)+\sin(\delta-\varphi)\Delta\varphi$$

ist, so ist auch

$$81)\quad \cos(\delta-\varphi)-\sin h-2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

$$=-2\cos\delta\sin\frac{1}{2}\omega\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin(\delta-\varphi)}{2\cos\delta\sin\frac{1}{2}\omega}\\[2ex]+\dfrac{\sin(\delta-\delta')\sin\frac{1}{2}\omega\cos\varphi^2}{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}\\[2ex]+\dfrac{\sin(\delta-\delta')-(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}\cdot\dfrac{\sin\frac{1}{2}\omega'}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\end{array}\right\}\Delta\varphi.$$

Auch ist nach 79), wie man mittelst einiger einfachen Transformationen leicht findet:

$$82)\quad \cos(\delta-\varphi)-\sin h-2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\,\omega^2$$

$$=-\left\{\begin{array}{l}\sin\delta\cos\varphi-\cos\delta\sin\varphi\cos\omega\\ +\cos\delta\sin\omega\tan g\frac{1}{2}(\omega+\omega')\dfrac{\sin(\delta-\delta')+(\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta)\sin\varphi}{\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta-\sin(\delta-\delta')\sin\varphi}\end{array}\right\}\Delta\varphi.$$

Für $\delta=\delta'$, d. h. wenn man einen und denselben Stern zwei Mal beobachtet hat, werden alle obigen Formeln ungemein viel einfacher.

Die Formeln 74), aus denen ω, ω' bestimmt werden müssen, werden in diesem Falle:

$$83)\quad \left\{\begin{array}{l}\omega-\omega'=\Theta,\\ \sin\frac{1}{2}(\omega+\omega')=\dfrac{\sin h'-\sin h}{2\cos\delta\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi};\end{array}\right.$$

oder

$$84)\quad \left\{ \begin{aligned} &\omega - \omega' = \Theta, \\ &\sin\frac{1}{2}(\omega + \omega') = \frac{\sin\frac{1}{2}(h'-h)\cos\frac{1}{2}(h'+h)}{\cos\delta\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi}. \end{aligned} \right.$$

Die Formel 80) wird:

$$85)\quad \cos\{\delta+(\varphi)\}$$

$$= \sin h + 2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2 + 2\cos\delta\sin\varphi\,\frac{\sin\frac{1}{2}\omega\sin\frac{1}{2}\omega'}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\,\Delta\varphi,$$

und die Gleichung 81) wird:

$$86)\quad \cos(\delta-\varphi) - \sin h - 2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

$$= -\left\{\sin(\delta-\varphi) - 2\cos\delta\sin\varphi\,\frac{\sin\frac{1}{2}\omega\sin\frac{1}{2}\omega'}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\right\}\Delta\varphi;$$

oder, wie man hieraus leicht findet:

$$87)\quad \cos(\delta-\varphi) - \sin h - 2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

$$= \frac{\sin(\delta+\varphi)\sin\frac{1}{2}\omega\sin\frac{1}{2}\omega' - \sin(\delta-\varphi)\cos\frac{1}{2}\omega\cos\frac{1}{2}\omega'}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\,\Delta\varphi;$$

oder auch

$$88)\quad \cos(\delta-\varphi) - \sin h - 2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

$$= \frac{\cos\delta\sin\varphi\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega') - \sin\delta\cos\varphi\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\,\Delta\varphi;$$

oder

$$89)\quad \cos(\delta-\varphi)-\sin h-2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

$$=-\left\{\sin\delta\cos\varphi-\cos\delta\sin\varphi\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\right\}\Delta\varphi.$$

Also ist:

$$90)\quad \Delta\varphi=-\frac{\cos(\delta-\varphi)-\sin h-2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2}{\sin(\delta-\varphi)-2\cos\delta\sin\varphi\,\dfrac{\sin\frac{1}{2}\omega\sin\frac{1}{2}\omega'}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}}$$

$$=\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')\,\frac{\cos(\delta-\varphi)-\sin h-2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2}{\sin(\delta+\varphi)\sin\frac{1}{2}\omega\sin\frac{1}{2}\omega'-\sin(\delta-\varphi)\cos\frac{1}{2}\omega\cos\frac{1}{2}\omega'}$$

$$=\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')\,\frac{\cos(\delta-\varphi)-\sin h-2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2}{\cos\delta\sin\varphi\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')-\sin\delta\cos\varphi\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}$$

$$=-\frac{\cos(\delta-\varphi)-\sin h-2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2}{\sin\delta\cos\varphi-\cos\delta\sin\varphi\,\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega')}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}}.$$

Endlich ist nach 75):

$$91)\quad \Delta\omega=\Delta\omega'=\frac{(\sin h'-\sin h)\sin\varphi}{2\cos\delta\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')\cos\varphi^2}\Delta\varphi$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(h'-h)\cos\frac{1}{2}(h'+h)\sin\varphi}{\cos\delta\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')\cos\varphi^2}\Delta\varphi,$$

oder nach 84):

$$92)\quad \Delta\omega=\Delta\omega'=\tang\frac{1}{2}(\omega+\omega')\tang\varphi\,\Delta\varphi.$$

Wie man sich nun der vorhergehenden Formeln zur Auflösung unserer Aufgabe zu bedienen hat, wollen wir jetzt bloss in dem Falle zeigen, wenn $\delta=\delta'$ ist, weil daraus dann von selbst hervorgehen wird, wie man sich in dem allgemeineren Falle, wenn nicht $\delta = \delta'$ ist, zu verhalten hat.

Mit einem genäherten Werthe φ der Polhöhe berechnet man mittelst der Formeln 83) oder 84) die genäherten Werthe ω, ω' der Stundenwinkel; dann sucht man die Verbesserung $\Delta\varphi$ der Polhöhe mittelst der Formeln 90), und hierauf die Verbesserungen $\Delta\omega = \Delta\omega'$ der Stundenwinkel mittelst der Formel 92), und findet auf diese Weise die zweiten Näherungswerthe $\varphi + \Delta\varphi$, $\omega + \Delta\omega$, $\omega' + \Delta\omega'$ der Polhöhe und der Stundenwinkel. Dass man dann ganz auf dieselbe Weise von diesen zweiten Näherungswerthen zu dritten Näherungswerthen u. s. w. übergehen kann, versteht sich von selbst und bedarf hier keiner weiteren Erläuterung.

So wie so eben gezeigt worden ist, welches nach meiner Meinung das allein wirklich richtige Verfahren sein dürfte, verfährt man aber bei der Methode von Douwes nicht, sondern auf folgende Art.

Dabei hat man zuerst und vor allen Dingen als eine Hauptbedingung bei dieser Methode, durch deren Erfüllung derselben allein ein einigermassen glücklicher Erfolg gesichert werden kann, zu merken, dass die eine Höhe des beobachteten Sterns, etwa die oben durch h bezeichnete Höhe desselben, so nahe wie irgend möglich bei dem Durchgange dieses Sterns durch den Meridian genommen werden muss, wobei es sich dann nach §. 7. ferner ganz von selbst versteht, dass die andere oben durch h' bezeichnete Höhe so nahe wie möglich bei einem Azimuth des Sterns von 90^0 oder 270^0 genommen werden muss, welche Regeln man bei der Anwendung der Methode von Douwes hauptsächlich beobachten und in keinem Falle aus den Augen verlieren darf.

Dies vorausgesetzt, berechnet man nun aus der genäherten Polhöhe φ zuerst die genäherten Stundenwinkel ω, ω' mittelst der Formeln

$$\omega - \omega' = \Theta,$$

$$\sin\frac{1}{2}(\omega + \omega') = \frac{\sin h' - \sin h}{2\cos\delta \sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi}$$

oder

$$\omega - \omega' = \Theta,$$

$$\sin\frac{1}{2}(\omega + \omega') = \frac{\sin\frac{1}{2}(h' - h)\cos\frac{1}{2}(h' + h)}{\cos\delta\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi};$$

oder auch, was ganz dasselbe ist, mittelst der Formeln

$$\omega' - \omega \pm \Theta,$$

$$\sin\frac{1}{2}(\omega' + \varphi) = \frac{\sin\frac{1}{2}(h-h')\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi},$$

wo nur Θ jetzt in einer etwas andern Bedeutung wie vorher genommen worden ist, was aber ganz verstattet ist, wie sogleich erhellen wird.

Weil man nun, was nie zu vergessen ist, annimmt, dass die eine Höhe h des Sterns sehr nahe bei dem Durchgange des Sterns durch den Meridian genommen worden ist, so ist in der Formel 85), nämlich in der Formel

$$\cos\{\delta - (\varphi)\}$$

$$= \sin h + 2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2 + 2\cos\delta\sin\varphi\frac{\sin\frac{1}{2}\omega\sin\frac{1}{2}\omega'}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\Delta\varphi,$$

da $\sin\frac{1}{2}\omega$ der Null sehr nahe kommt, und, wenn man die zweite Höhe h' sehr nahe bei einem Azimuth von 90^0 oder 270^0 genommen hat, $\cos\frac{1}{2}(\omega + \omega')$ immer, wie leicht erhellet, eine von Null merklich verschiedene Grösse sein wird, der absolute Werth des Gliedes

$$2\cos\delta\sin\varphi\frac{\sin\frac{1}{2}\omega\sin\frac{1}{2}\omega'}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega')}\Delta\varphi$$

jederzeit sehr klein, so dass man dieses Glied in der obigen Formel vernachlässigen, und ohne merklichen Fehler

$$\cos\{\delta - (\varphi)\} = \sin h + 2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

setzen, mittelst dieser Formel also unmittelbar den zweiten Näherungswerth $(\varphi) = \varphi + \Delta\varphi$ der Polhöhe berechnen kann. Hat man aber auf diese Weise $\Delta\varphi$ gefunden, so kann mann ferner auch, wozu übrigens Douwes, der sein Hauptaugenmerk auf die Bestimmung der Polhöhe oder der Breite richtet, eine besondere Anleitung nicht ertheilt, die Correctionen $\Delta\omega = \Delta\omega'$ der Stundenwinkel sehr leicht mittelst der Formel

$$\Delta\omega = \Delta\omega' = \tan\frac{1}{2}(\omega + \omega')\tan\varphi\,\Delta\varphi$$

berechnen. Wie nöthig es, wenn die Methode von Douwes einen einigermaassen glücklichen Erfolg versprechen soll, ist, dass die beiden Höhen h, h' nach der oben gegebenen Anweisung genommen werden, wird aus der obigen Darstellung mit hinreichender Deutlichkeit hervorgehen.

Douwes hat seine Methode zuerst in dem ersten Bande der Abhandl. der Gesellsch. d. Wissenschaften zu Harlem*) bekannt gemacht, und sie ist auf der See allgemein in Gebrauch und findet sich in allen Lehrbüchern der Schiffahrtskunde, weshalb wohl auch zuweilen das ganze Problem die Aufgabe von Douwes genannt wird, obgleich, wie in §. 1. gezeigt worden ist, keineswegs Douwes der erste Erfinder der Aufgabe ist, sondern nur zuerst eine für den praktischen Gebrauch zweckmässige Auflösung derselben gegeben hat. Hauptsächlich bekannt scheint aber die Methode von Douwes zuerst durch den Beweis geworden zu sein, welchen für dieselbe Pemberton in einer in den Philosophical Transactions. Vol. LI. Part II. 1760. p. 910. unter dem Titel: Some Considerations on a late Treatise intituled: *A new Set of Logarithmic Solar Tables etc.* intended for a more commodious Method of finding the Latitude at Sea, by Two Observations of the Sun; *by H. Pemberton, M. D. R. S. Lond. et R. A. Berol. S.* erschienenen Abhandlung gegeben hat.

Douwes hat die Anwendung seiner Methode durch Tafeln erleichtert, die man z. B. in den Tables requisite to be used with the nautical ephemeris for finding the latitude and longitude at sea. II edition. p. 58.—p. 80., worauf ich mich hier beziehen will, findet.**) Um die Einrichtung und den Gebrauch dieser Tafeln einigermassen zu erläutern, stelle man die obigen Formeln, indem man sich nur erinnert, dass im Folgenden $\omega - \omega'$ immer den Werth Θ hat, unter der Form

$$2\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega) = \sec\delta\sec\varphi(\sin h - \sin h')\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(\omega'-\omega),$$

$$\cos(\delta-(\varphi)) = \sin h + \frac{2\sin\frac{1}{2}\omega^2}{\sec\delta\sec\varphi};$$

oder unter der Form

*) M. s. die Uebersetzung von Kästner. Theil I. Altenburg. 1758. S. 87.

**) Man findet diese oder ähnliche Tafeln aber auch in den meisten Schiffahrtslehrbüchern, z. B. in dem schon in §. 1. angeführten Buche von Bobrik. Thl. III. Taf. LXI. und in andern bekannten Werken dieser Art.

$$\log.2\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega)$$

$$=(\log\sec\delta+\log\sec\varphi)+\log(\sin h-\sin h')+\log\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(\omega'-\omega),$$

$$\cos\{\delta-(\varphi)\}=\sin h+\frac{2\sin\frac{1}{2}\omega^2}{\sec\delta\sec\varphi}$$

dar. Die Summe $\log\sec\delta+\log\sec\varphi$ heisst Log. ratio, $\log\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(\omega'-\omega)$ heisst Log. half elapsed time, $\log.2\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega)$ wird Log. middle time genannt, und $\log.2\sin\frac{1}{2}\omega^2$ heisst Log. rising. Für die in Zeit ausgedrückten Stundenwinkel enthalten die Tafeln von Douwes eine Tafel für Log. half elapsed time von 0^u bis $5^u.50^m$, eine Tafel für Log. middle time ebenfalls von 0^u bis $5^u.50^m$, und eine Tafel für Log. rising für 8 Stunden von 10 zu 10 Secunden. Der Halbmesser ist 100000. Die Argumente der Tafeln sind respective $\frac{1}{2}(\omega'-\omega)$, $\frac{1}{2}(\omega'+\omega)$, ω in Zeit. Man berechne nun mittelst der gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln Log. ratio, ziehe den natürlichen $\sin h'$ von dem natürlichen $\sin h$ ab und schlage $\log(\sin h-\sin h')$ in der Logarithmentafel auf, nehme Log. half elapsed time aus den Tafeln von Douwes, und addire die auf diese Weise erhaltenen Zahlen zusammen, so ist nach dem Obigen die Summe Log. middle time. Mit diesem Log. middle time gehe man in die betreffende Tafel von Douwes ein, und nehme aus derselben $\frac{1}{2}(\omega'+\omega)$, worauf es, da man auch $\frac{1}{2}(\omega'-\omega)$ kennt, leicht ist, ω zu berechnen. Hierauf nehme man aus der betreffenden Tafel von Douwes den entsprechenden Log. rising, ziehe davon Log. ratio ab, und schlage zu dem durch diese Differenz dargestellten Logarithmus in der Logarithmentafel die zugehörige Zahl auf, welche man hierauf zu dem natürlichen $\sin h$ addirt, welches den natürlichen $\cos\{\delta-(\varphi)\}$ giebt, woraus man dann leicht $\delta-(\varphi)$, und hieraus den gesuchten zweiten Näherungswerth (φ) der Polhöhe berechnen kann. Es war hier nur meine Absicht, die Einrichtung und den Gebrauch der Tafeln von Douwes, die man in den meisten nautischen Tafeln in grösserer oder geringerer Ausführlichkeit findet, im Allgemeinen kennen zu lehren, indem ich wegen des Näheren auf die Tafeln selbst zu verweisen mich begnügen muss, da ausführlichere Auseinandersetzungen an diesem Orte zu weit führen würden.

§. 10.

Auch auf folgende Art kann man unsere Aufgabe näherungsweise auflösen.

Bekanntlich haben wir die drei folgenden Gleichungen:

$$(\omega+\Delta\omega)-(\omega'+\Delta\omega')=\Theta,$$

$$\cos(\omega+\Delta\omega)=\frac{\sin h-\sin\delta\sin(\varphi+\Delta\varphi)}{\cos\delta\cos(\varphi+\Delta\varphi)},$$

$$\cos(\omega'+\Delta\omega')=\frac{\sin h'-\sin\delta'\sin(\varphi+\Delta\varphi)}{\cos\delta'\cos(\varphi+\Delta\varphi)};$$

also, wie man leicht mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes findet, indem man bei Gliedern, die $\Delta\varphi$, $\Delta\omega$, $\Delta\omega'$ nur in der ersten Potenz enthalten, stehen bleibt:

$$\Delta\omega-\Delta\omega'=\Theta-\omega+\omega',$$

$$\cos\omega-\sin\omega\Delta\omega=\frac{\sin h-\sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi}-\frac{\sin\delta-\sin h\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi^2}\Delta\varphi,$$

$$\cos\omega'-\sin\omega'\Delta\omega'=\frac{\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi}-\frac{\sin\delta'-\sin h'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi^2}\Delta\varphi.$$

Bestimmt man nun ω, ω' mittelst der Formeln:

$$93)\quad \cos\omega=\frac{\sin h-\sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi},\quad \cos\omega'=\frac{\sin h'-\sin\delta'\sin\varphi}{\cos\delta'\cos\varphi};$$

oder mittelst der Formeln:

$$94)\quad\left\{\begin{array}{l}\sin\frac{1}{2}\omega=\sqrt{\dfrac{\sin\{45^0-\frac{1}{2}(\delta+h-\varphi)\}\cos\{45^0-\frac{1}{2}(\delta-h-\varphi)\}}{\cos\delta\cos\varphi}},\\[2ex] \sin\frac{1}{2}\omega'=\sqrt{\dfrac{\sin\{45^0-\frac{1}{2}(\delta'+h'-\varphi)\}\cos\{45^0-\frac{1}{2}(\delta'-h'-\varphi)\}}{\cos\delta'\cos\varphi}},\end{array}\right.$$

so ist

$$95)\quad \begin{cases} \Delta\omega = \dfrac{\sin\delta - \sin h \sin\varphi}{\cos\delta \sin\omega \cos\varphi^2}\Delta\varphi, \\ \Delta\omega' = \dfrac{\sin\delta' - \sin h' \sin\varphi}{\cos\delta' \sin\omega' \cos\varphi^2}\Delta\varphi. \end{cases}$$

Weil nun nach 93)

$$\sin h = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\omega\cos\varphi,$$

$$\sin h' = \sin\delta'\sin\varphi + \cos\delta'\cos\omega'\cos\varphi$$

ist, so ist

$$\sin\delta - \sin h\sin\varphi = \cos\varphi(\sin\delta\cos\varphi - \cos\delta\cos\omega\sin\varphi),$$
$$\sin\delta' - \sin h'\sin\varphi = \cos\varphi(\sin\delta'\cos\varphi - \cos\delta'\cos\omega'\sin\varphi);$$

also nach 95):

$$96)\quad \begin{cases} \Delta\omega = (\operatorname{tang}\delta\operatorname{cosec}\omega - \cot\omega\operatorname{tang}\varphi)\Delta\varphi, \\ \Delta\omega' = (\operatorname{tang}\delta'\operatorname{cosec}\omega' - \cot\omega'\operatorname{tang}\varphi)\Delta\varphi. \end{cases}$$

Führt man aber diese Werthe von $\Delta\omega$, $\Delta\omega'$ in die Gleichung

$$\Delta\omega - \Delta\omega' = \Theta - \omega + \omega'$$

ein, so erhält man:

$$97)\quad \Delta\varphi = \frac{\Theta - \omega + \omega'}{(\operatorname{tang}\delta\operatorname{cosec}\omega - \cot\omega\operatorname{tang}\varphi) - (\operatorname{tang}\delta'\operatorname{cosec}\omega' - \cot\omega'\operatorname{tang}\varphi)}.$$

Wenn man also für einen genäherten Werth φ der Polhöhe mittelst der Formeln 94) die genäherten Werthe ω, ω' der Stundenwinkel berechnet hat, so berechne man die Hülfsgrössen G, G' mittelst der Formeln:

$$98)\quad \begin{cases} G = \operatorname{tang}\delta\operatorname{cosec}\omega - \cot\omega\operatorname{tang}\varphi, \\ G' = \operatorname{tang}\delta'\operatorname{cosec}\omega' - \cot\omega'\operatorname{tang}\varphi; \end{cases}$$

dann ist

$$99)\quad \begin{cases} \Delta\varphi = \dfrac{\Theta - \omega + \omega'}{G - G'}, \\ \Delta\omega = G\Delta\varphi, \\ \Delta\omega' = G'\Delta\varphi; \end{cases}$$

oder

$$100)\quad \begin{cases} \Delta\varphi = \dfrac{\Theta - \omega + \omega'}{G - G'}, \\[2ex] \Delta\omega = G\,\dfrac{\Theta - \omega + \omega'}{G - G'}, \\[2ex] \Delta\omega' = G'\,\dfrac{\Theta - \omega + \omega'}{G - G'}. \end{cases}$$

Nach 97) ist auch

$$101)\quad \Delta\varphi = \frac{\Theta - \varphi + \omega'}{\operatorname{tang}\delta \operatorname{cosec}\omega - \operatorname{tang}\delta' \operatorname{cosec}\omega' - (\cot\omega - \cot\omega')\operatorname{tang}\varphi},$$

oder

$$102)\quad \Delta\varphi = \frac{(\Theta - \varphi + \omega')\sin\omega\sin\omega'}{\operatorname{tang}\delta\sin\omega' - \operatorname{tang}\delta'\sin\omega + \sin(\omega - \omega')\operatorname{tang}\varphi}.$$

Für $\delta = \delta'$ ist

$$103)\quad \Delta\varphi = \frac{(\Theta - \omega + \omega')\sin\omega\sin\omega'}{\sin(\omega - \omega')\operatorname{tang}\varphi - (\sin\omega - \sin\omega')\operatorname{tang}\delta}$$

oder

$$104)\quad \Delta\varphi = \frac{(\Theta - \omega + \omega')\sin\omega\sin\omega'}{2\sin\frac{1}{2}(\omega - \omega')\,\{\cos\frac{1}{2}(\omega - \omega')\operatorname{tang}\varphi - \cos\frac{1}{2}(\omega + \omega')\operatorname{tang}\delta\}}.$$

Die Formeln 98) und 99) oder 100) scheinen mir aber die bequemsten zu sein.

§. 11.

Wir wollen uns jetzt zwei in einem gewissen Punkte O sich schneidende gerade Linien MN, $M'N'$ denken. Die Theile OM, OM' dieser Linien wollen wir als ihre positiven Theile, die Theile ON, ON' derselben als ihre negativen Theile annehmen, so dass alle von O aus auf OM, OM' abgeschnittenen Linien als positiv, dagegen alle von O aus auf ON, ON' abgeschnittenen Linien als negativ betrachtet werden. Den mit OM von OM' eingeschlossenen, von OM an nach einer gewissen Seite hin von 0 bis 360° gezählten Winkel bezeichnen wir durch α, und nehmen auf jeder der beiden Linien MN und $M'N'$ zwei beliebige Punkte A, B und A', B' an, deren nach dem Vorhergehenden gehörig als positiv oder negativ betrachtete Abstände von dem Punkte O respective durch a, b und a', b' bezeichnet werden sollen. Nun wollen wir über den Linien AB und $A'B'$ als Durchmessern zwei Kreise beschreiben, und uns die Aufgabe stellen, aus den als gegeben betrachteten Grössen α und a, b; a', b' die Durchschnittspunkte dieser beiden Kreise zu bestimmen.

Zu dem Ende bezeichnen wir die Halbmesser dieser beiden Kreise durch r, r', und nehmen OM, für O als Anfang der Coordinaten, als den positiven Theil der Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy, und den positiven Theil der Axe der y so an, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, nach derselben Seite hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegt, wenn man von der Linie OM an den Winkel α durchläuft. Dann sind offenbar $a,0$; $b,0$ die Coordinaten der Punkte A, B, und, wie mittelst einer einfachen Betrachtung sogleich erhellen wird, in völliger Allgemeinheit $a'\cos\alpha$, $a'\sin\alpha$; $b'\cos\alpha$, $b'\sin\alpha$ die Coordinaten der Punkte A', B'. Weil nun nach den Lehren der analytischen Geometrie $\frac{1}{2}(a+b)$, 0 und $\frac{1}{2}(a'+b')\cos\alpha$, $\frac{1}{2}(a'+b')\sin\alpha$ die Coordinaten der Mittelpunkte der beiden Kreise sind, so sind

$$105)\quad \begin{cases} \{x-\frac{1}{2}(a+b)\}^2+y^2=r^2, \\ \{x-\frac{1}{2}(a'+b')\cos\alpha\}^2+\{y-\frac{1}{2}(a'+b')\sin\alpha\}^2=r'^2 \end{cases}$$

die Gleichungen dieser beiden Kreise. Für $x=a$, $y=0$ und für $x=a'\cos\alpha$, $y=a'\sin\alpha$ erhält man aus der ersten und zweiten Gleichung respective:

$$r^2=\{a-\frac{1}{2}(a+b)\}^2,$$

$$r'^2=\{a'-\frac{1}{2}(a'+b')\}^2\cos\alpha^2+\{a'-\frac{1}{2}(a'+b')\}^2\sin\alpha^2;$$

d. i.

$$106)\quad r^2=\frac{1}{4}(a-b)^2,\ r'^2=\frac{1}{4}(a'-b')^2;$$

und die Gleichungen der beiden Kreise sind also:

$$107)\quad \begin{cases} \{x-\frac{1}{2}(a+b)\}^2+y^2=\frac{1}{4}(a-b)^2, \\ \{x-\frac{1}{2}(a'+b')\cos\alpha\}^2+\{y-\frac{1}{2}(a'+b')\sin\alpha\}^2=\frac{1}{4}(a'-b')^2. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen muss man mittelst algebraischer Elimination x, y bestimmen, um die Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Kreise zu erhalten.

Zu dem Ende bringe man die beiden Gleichungen zuerst auf die Form:

$$108)\quad \begin{cases} x^2+y^2-(a+b)x=-ab, \\ x^2+y^2-(a'+b')(x\cos\alpha+y\sin\alpha)=-a'b'; \end{cases}$$

dann erhält man durch Subtraction:

$$109)\quad \{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}x-(a'+b')y\sin\alpha=ab-a'b',$$

also

$$110)\quad y=-\frac{ab-a'b'-\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}x}{(a'+b')\sin\alpha}.$$

Führt man diesen Werth von y in die erste der beiden Gleichungen 108) ein, so erhält man nach einigen leichten Reductionen zur Bestimmung von x die folgende Gleichung des zweiten Grades:

$$111)$$

$$x^2-\frac{(a+b)(a'^2+b'^2+2ab)-2(a'+b')(ab-a'b')\cos\alpha-(a+b)(a'+b')^2\cos\alpha^2}{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2}x$$
$$=-\frac{a^2b^2+a'^2b'^2+ab(a'^2+b'^2)-ab(a'+b')^2\cos\alpha^2}{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2}.$$

Löst man nun diese quadratische Gleichung auf gewöhnliche Art auf, so erhält man nach einigen zwar etwas weitläufigen, sonst aber keineswegs schwierigen Transformationen, wenn der Kürze wegen

$$112)\quad \begin{aligned} F= &\ (a+b)(a'^2+b'^2+2ab) \\ &-2(a'+b')(ab-a'b')\cos\alpha \\ &-(a+b)(a'+b')^2\cos\alpha^2, \\ G= &\ (a-b)^2(a'-b')^2-4(ab+a'b')^2 \\ &+4(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha \\ &+2\{2(a^2b^2+a'^2b'^2)-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\}\cos\alpha^2 \\ &-4(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha^3 \\ &+(a+b)^2(a'+b')^2\cos\alpha^4, \\ H= &\ (a+b)^2+(a'+b')^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha \end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$113)\quad x=\frac{F\pm(a'+b')\sqrt{G}}{2H}.$$

Führt man aber in die Grössen F und G für $\cos\alpha^2$ und $\cos\alpha^4$ die gleich geltenden Ausdrücke $1-\sin\alpha^2$ und $1-2\sin\alpha^2+\sin\alpha^4$ ein, so erhält man nach einigen leichten Transformationen, wenn der Kürze wegen

$$114)\quad \begin{aligned} G' = & -4\{(ab+a'b')^2+ab(a'^2+b'^2)+a'b'(a^2+b^2)\} \\ & +4(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha \\ & +(a+b)^2(a'+b')^2\sin\alpha^2 \\ = & -4\{(ab-a'b')^2+ab(a'+b')^2+a'b'(a+b)^2\} \\ & +4(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha \\ & +(a+b)^2(a'+b')^2\sin\alpha^2 \\ = & -4\{(ab+a'b')^2+(aa'+bb')(ab'+a'b)\} \\ & +4(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha \\ & +(a+b)^2(a'+b')^2\sin\alpha^2 \end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$115)\quad \begin{cases} F=2(ab-a'b')\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}+(a+b)(a'+b')^2\sin\alpha^2, \\ G=G'\sin\alpha^2, \\ H=(a+b)^2+(a'+b')^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha; \end{cases}$$

also nach 113):

$$116)\quad x=\frac{F\pm(a'+b')\sin\alpha\sqrt{G'}}{2H}.$$

Weil aber, wie man leicht findet,

$$-4(aa'+bb')(ab'+a'b)+(a+b)^2(a'+b')^2=(a-b)^2(a'-b')^2$$

ist, so kann man die Grösse G' offenbar auch auf folgende Art ausdrücken:

$$117)\quad G'=(a-b)^2(a'-b')^2-\{2(ab+a'b')-(a+b)(a'+b')\cos\alpha\}^2,$$

und behalten wir diesen Ausdruck von G' in den folgenden Formeln bei, so wird, wie man leicht findet:

$$118)\quad x= \frac{2(ab-a'b')\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}+(a'+b')\sin\alpha\{(a+b)(a'+b')\sin\alpha\pm\sqrt{G'}\}}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}}.$$

Führt man endlich diesen Ausdruck von x in den aus dem Obigen bekannten Ausdruck

$$y=-\frac{ab-a'b'-\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}x}{(a'+b')\sin\alpha}$$

ein, so erhält man für die Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Kreise die folgenden Ausdrücke, in denen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen:

119) $x=$

$$\frac{2(ab-a'b')\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}+(a'+b')\sin\alpha\{(a+b)(a'+b')\sin\alpha\pm\sqrt{G'}\}}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}},$$

$y=$

$$-\frac{2(ab-a'b')(a'+b')\sin\alpha-\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}\{(a+b)(a'+b')\sin\alpha\pm\sqrt{G'}\}}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}};$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

120) $K=(a+b)(a'+b')\sin\alpha\pm\sqrt{G'}$

setzen:

121) $$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2(ab-a'b')\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}+K(a'+b')\sin\alpha}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}}, \\ y=-\dfrac{2(ab-a'b')(a'+b')\sin\alpha-K\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}}. \end{array}\right.$$

Bezeichnen wir die Entfernungen der Durchschnittspunkte der beiden Kreise von dem Punkte O überhaupt durch R, so ist

$$R=\sqrt{x^2+y^2},$$

also, wie man mittelst des Obigen leicht findet:

122) $$R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4(ab-a'b')^2+\{(a+b)(a'+b')\sin\alpha\pm\sqrt{G'}\}^2}{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2}}$$

oder

123) $$R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4(ab-a'b')^2+K^2}{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2}}.$$

Entwickelt man aber das Quadrat

$$\{(a+b)(a'+b')\sin\alpha\pm\sqrt{G'}\}^2$$

gehörig, so erhält man auch, wenn der Kürze wegen

$$124)\quad L=(aa'-bb')^2+(ab'-ba')^2$$
$$+2(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha$$
$$-(a+b)^2(a'+b')^2\cos\alpha^2$$
$$=(aa'-bb')^2+(ab'-ba')^2+(ab+a'b')^2$$
$$-\{ab+a'b'-(a+b)(a'+b')\cos\alpha\}^2$$
$$=(aa'-bb')^2+(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)$$
$$-\{ab+a'b'-(a+b)(a'+b')\cos\alpha\}^2$$
$$=(ab'-ba')^2+(a^2+b'^2)(a'^2+b^2)$$
$$-\{ab+a'b'-(a+b)(a'+b')\cos\alpha\}^2$$

gesetzt wird:

$$125)\quad R=\sqrt{\frac{L\pm(a+b)(a'+b')\sin\alpha\sqrt{G'}}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}}}.$$

Wenn wir die Linie OM', für O als Anfang der Coordinaten, als den positiven Theil der Axe der x' eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $x'y'$, und den positiven Theil der Axe der y' so annehmen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x' durch den rechten Winkel $(x'y')$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y' zu gelangen, nach derselben Seite hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen; so ist bekanntlich nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten in völliger Allgemeinheit:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,$$
$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha;$$

also

$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,$$
$$y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.$$

Lässt man nun, so wie vorher x, y, auch x', y' den Durchschnittspunkten der beiden Kreise entsprechen, so erhält man mittelst der beiden vorhergehenden Formeln und mittelst 121) leicht:

$$126)\quad \begin{cases} x'=-\dfrac{2(ab-a'b')\{a'+b'-(a+b)\cos\alpha\}-K(a+b)\sin\alpha}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}}, \\[2ex] y'=-\dfrac{2(ab-a'b')(a+b)\sin\alpha+K\{a'+b'-(a+b)\cos\alpha\}}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}}. \end{cases}$$

Setzen wir

$$127)\quad \begin{cases} F=2(ab-a'b')\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}+(a+b)(a'+b')^2\sin\alpha^2, \\ F'=2(a'b'-ab)\{a'+b'-(a+b)\cos\alpha\}+(a'+b')(a+b)^2\sin\alpha^2; \end{cases}$$

so ist

$$128)\quad \begin{cases} x=\dfrac{F\pm(a'+b')\sin\alpha\sqrt{G'}}{2H}, \\ x'=\dfrac{F'\pm(a+b)\sin\alpha\sqrt{G'}}{2H}; \end{cases}$$

und setzen wir:

$$129)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}=(a'+b')\{a^2+b^2+2a'b'-(a+b)(a'+b')\cos\alpha\}\sin\alpha, \\ \mathfrak{S}'=-(a+b)\{a'^2+b'^2+2ab-(a'+b')(a+b)\cos\alpha\}\sin\alpha; \end{cases}$$

so ist

$$130)\quad \begin{cases} y=\dfrac{\mathfrak{S}\pm\{a+b-(a'+b')\cos\alpha\}\sqrt{G'}}{2H}, \\ y'=\dfrac{\mathfrak{S}'\mp\{a'+b'-(a+b)\cos\alpha\}\sqrt{G'}}{2H}. \end{cases}$$

§. 12.

Mit Rücksicht auf §. 8. wollen wir nun im vorhergehenden Paragraphen, unter der Voraussetzung, dass Θ positiv sei, was anzunehmen offenbar immer verstattet sein wird,

$$\alpha=\Theta$$

und

$$a=\operatorname{tang}\frac{1}{2}\{(90^\circ-\delta)+(90^\circ-h)\}=\cot\frac{1}{2}(h+\delta),$$

$$b=\operatorname{tang}\frac{1}{2}\{(90^\circ-\delta)-(90^\circ-h)\}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(h-\delta);$$

so wie

$$a'=\operatorname{tang}\frac{1}{2}\{(90^\circ-\delta')+(90^\circ-h')\}=\cot\frac{1}{2}(h'+\delta'),$$

$$b' = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\{(90^0-\delta')-(90^0-h')\} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(h'-\delta')$$

setzen; so ist nach §. 8.

$$a = \cot u,\ b = \operatorname{tang} v;\ a' = \cot u',\ b = \operatorname{tang} v'.$$

Folglich ist

$$M = \frac{\sin u \cos v}{\cos u \cos v + \sin u \sin v} = \frac{1}{\cot u + \operatorname{tang} v} = \frac{1}{a+b},$$

$$N = \frac{\cos u \sin v}{\cos u \cos v + \sin u \sin v} = \frac{1}{\operatorname{tang} u + \cot v} = \frac{ab}{a+b};$$

und

$$M' = \frac{\sin u' \cos v'}{\cos u' \cos v' + \sin u' \sin v'} = \frac{1}{\cot u' + \operatorname{tang} v'} = \frac{1}{a'+b'},$$

$$N' = \frac{\cos u' \sin v'}{\cos u' \cos v' + \sin u' \sin v'} = \frac{1}{\operatorname{tang} u' + \cot v'} = \frac{a'b'}{a'+b'}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$M \pm M' = \frac{1}{a+b} \pm \frac{1}{a'+b'} = \frac{(a'+b') \pm (a+b)}{(a+b)(a'+b')},$$

$$N \pm N' = \frac{ab}{a+b} \pm \frac{a'b'}{a'+b'} = \frac{ab(a'+b') \pm a'b'(a+b)}{(a+b)(a'+b')};$$

folglich

$$M_1 = \frac{(a'+b')+(a+b)}{(a+b)(a'+b')\cos\frac{1}{2}\alpha},$$

$$N_1 = \frac{ab(a'+b')+a'b'(a+b)}{(a+b)(a'+b')\cos\frac{1}{2}\alpha};$$

$$M_1' = \frac{(a'+b')-(a+b)}{(a+b)(a'+b')\sin\frac{1}{2}\alpha},$$

$$N_1' = \frac{ab(a'+b')-a'b'(a+b)}{(a+b)(a'+b')\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Also ist

$$M_1^2+M_1'^2$$

$$=\frac{\{(a'+b')+(a+b)\}^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2+\{(a'+b')-(a+b)\}^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2}{(a+b)^2(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2},$$

d. i., wie man leicht findet:

$$M_1^2+M_1'^2=\frac{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2}{(a+b)^2(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2},$$

und folglich nach 115):

$$M_1^2+M_1'^2=\frac{H}{(a+b)^2(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Ferner ist

$$M_1N_1 + M_1'N_1' = \frac{\{(a'+b') + (a+b)\}\{ab(a'+b') + a'b'(a+b)\}\sin\frac{1}{2}\alpha^2 + \{(a'+b') - (a+b)\}\{ab(a'+b') - a'b'(a+b)\}\cos\frac{1}{2}\alpha^2}{(a+b)^2(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2},$$

also, wie man mittelst leichter Rechnung findet, wenn man

$$\cos\alpha = \cos\frac{1}{2}\alpha^2 - \sin\frac{1}{2}\alpha^2$$

setzt:

$$M_1N_1 + M_1'N_1' = \frac{ab(a'+b')^2 + a'b'(a+b)^2 - (ab+a'b')(a+b)(a'+b')\cos\alpha}{(a+b)^2(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2},$$

und hieraus ferner:

$$-(M_1N_1 + M_1'N_1' - 2) = \frac{(aa'-bb')^2 + (ab'-ba')^2 + 2(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha - (a+b)^2(a'+b')^2\cos\alpha^2}{2(a+b)^2(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2},$$

d. i. nach 124):

$$-(M_1N_1+M_1'N_1'-2)=\frac{L}{2(a+b)^2(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2}$$

Eben so leicht findet man

$$M_1N_1'-M_1'N_1=\frac{2(ab-a'b')}{(a+b)(a'+b')\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha},$$

und endlich

$$(M_1N_1'-M_1'N_1)^2+4(M_1N_1+M_1'N_1'-)$$

$$=\frac{4(ab+a'b')^2-(a-b)^2(a'-b')^2-4(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha+(a+b)^2(a'+b')^2\cos\alpha^2}{(a+b)(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2},$$

oder, wenn man $1-\sin\alpha^2$ für $\cos\alpha^2$ setzt:

$$(M_1N_1'-M_1'N_1)^2+4(M_1N_1+M_1'N_1'-)$$

$$=\frac{4(ab+a'b')^2+4ab(a'^2+b'^2)+4a'b'(a^2+b^2)-4(a+b)(a'+b')(ab+a'b')\cos\alpha-(a+b)^2(a'+b')^2\sin\alpha^2}{(a+b)^2(a'+b')^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2\cos\frac{1}{2}\alpha^2},$$

d. i. nach 114):

$$(M_1 N_1' - M_1' N_1)^2 + 4(M_1 N_1 + M_1' N_1' - 1)$$
$$= - \frac{G'}{(a+b)^2 (a'+b')^2 \sin\frac{1}{2}\alpha^2 \cos\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Führt man nun die vorhergehenden Ausdrücke von

$$M_1^2 + M_1'^2,\quad -(M_1 N_1 + M_1' N_1' - 2),$$
$$(M_1 N_1' - M_1' N_1)^2 + 4(M_1 N_1 + M_1' N_1' - 1)$$

in den Ausdruck 50) der in §. 8. durch x bezeichneten Grösse ein, so erhält man nach einer ganz leichten Transformation:

$$x = \frac{L \pm (a+b)(a'+b') \sin\alpha \sqrt{G'}}{2H}$$

oder

$$x = \frac{L \pm (a+b)(a'+b') \sin\alpha \sqrt{G'}}{2\{(a+b)^2 - 2(a+b)(a'+b') \cos\alpha + (a'+b')^2\}},$$

also nach 125)

$$x = R^2.$$

Weil aber nach 42)

$$x = \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} = \frac{1-\cos(90^0-\varphi)}{1+\cos(90^0-\varphi)} = \operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)^2 = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(90^0-\varphi)^2$$

ist, so ist

$$\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(90^0 - \varphi) = R$$

wo R bekanntlich zwei Werthe hat.

Vergleicht man nun dies mit dem vorhergehenden Paragraphen, so ergiebt sich unmittelbar die folgende nach meiner Meinung sehr merkwürdige Bestimmung der Polhöhe durch Construction.

Durch einen beliebigen Punkt O ziehe man zwei Linien MN und $M'N'$ so, dass mit dem Theile OM von MN, welchen man als den positiven Theil von MN annimmt, der Theil OM' von $M'N'$, welchen man als den positiven Theil von $M'N'$ annimmt, den im Vorhergehenden durch Θ bezeichneten Winkel einschliesst, wobei wir, was offenbar immer verstattet ist, annehmen wollen, dass Θ positiv sei. Hierauf trage man mit Hülfe einer Tafel der natürlichen Tangenten nach einem gewissen Maassstabe von O aus auf MN die Tangenten der Hälften von $(90^0-\delta)+(90^0-h)$ und $(90^0-\delta)-(90^0-h)$, auf $M'N'$ die Tangenten der Hälften von $(90^0-\delta')+(90^0-h')$ und $(90^0-\delta')-(90^0-h')$ auf, indem man diese Tangenten, jenachdem sie positiv oder negativ sind, von O aus auf den positiven oder negativen Theilen der Linien MN und $M'N'$ abschneidet. Sind dann A, B die Endpunkte der auf der Linie MN von O aus abgeschnittenen Stücke, und A', B' die Endpunkte der auf der Linie $M'N'$ von O aus abgeschnittenen Stücke, so beschreibe man über den Linien AB und $A'B'$ als Durchmessern zwei Kreise, und messe die Entfernungen der beiden Durchschnittspunkte dieser Kreise von dem Punkte O nach demselben Maassstabe, nach welchem man die Tangenten auf die Linien MN und $M'N'$ aufgetragen hat; diese Entfernungen sind die Tangenten der halben Complemente der beiden Werthe der Polhöhe, d. h. der halben Ergänzungen der beiden Werthe der Polhöhe zu 90^0, und wenn man also in der Tafel der natürlichen Tangenten zu diesen Tangenten die entsprechenden Winkel aufsucht, so erhält man die halben Complemente der Polhöhe, aus denen man dann auch die Polhöhe oder Breite leicht selbst berechnen kann.

In der in §. 9. angeführten Abhandlung von Pemberton wird die obige bemerkenswerthe Construction auf p. 921. ganz ohne Beweis mitgetheilt, aber eingeschränkt auf den Fall, wenn ein und derselbe Stern zwei Mal beobachtet worden ist. Die Erfindung derselben wird Collins zugeschrieben, und, indem auf dessen Mariner's Plain Scale new planed. Book III. p. 35. verwiesen wird, bemerkt, dass sie mittelst der Principien der stereographischen Projection gefunden worden sei. Die von mir im Obigen gegebene analytische Darstellung zeigt zugleich, dass diese nach meiner Meinung sehr bemerkenswerthe Construction durchaus nicht auf den Fall, wenn ein und derselbe Stern zwei Mal beobachtet worden ist, eingeschränkt ist, sondern ganz allgemein auch in dem Falle, wenn zwei beliebige Sterne beobachtet worden sind, welcher unserem Probleme jedenfalls einen sehr grossen Theil seines Werthes verleihet, gilt. Es scheint mir wünschenswerth zu sein, dass für diese so verallgemeinerte Construction auch ein geometrischer Beweis gegeben werde, etwa mit Hülfe der stereographischen Projection, die nach dem, was vorher bemerkt worden ist, Collins, dessen oben angeführte Schrift ich nicht habe zu sehen bekommen können, angewandt haben soll.

Nach 47) haben wir nun die beiden Gleichungen:

$$2\cos\frac{1}{2}\Omega.\sqrt{x}=M_1x+N_1,$$

$$-2\sin\frac{1}{2}\Omega.\sqrt{x}=M_1'x+N_1';$$

also

$$\tang\frac{1}{2}\Omega=-\frac{M_1'x+N_1'}{M_1x+N_1},$$

und folglich nach dem Obigen, wie man leicht findet:

$$\tang\frac{1}{2}\Omega=-\cot\frac{1}{2}\Theta\frac{\{(a'+b')-(a+b)\}x+ab(a'+b')-a'b'(a+b)}{\{(a'+b')+(a+b)\}x+ab(a'+b')+a'b'(a+b)},$$

oder

$$\tang\frac{1}{2}\Omega=-\cot\frac{1}{2}\Theta\frac{(a'+b')(ab+x)-(a+b)(a'b'+x)}{(a'+b')(ab+x)+(a+b)(a'b'+x)},$$

oder

$$\tang\frac{1}{2}\Omega=-\cot\frac{1}{2}\Theta\frac{\frac{ab+x}{a+b}-\frac{a'b'+x}{a'+b'}}{\frac{ab+x}{a+b}+\frac{a'b'+x}{a'+b'}},$$

oder

$$\tang\frac{1}{2}\Omega=-\cot\frac{1}{2}\Theta\frac{1-\frac{(a+b)(a'b'+x)}{(a'+b')(ab+x)}}{1+\frac{(a+b)(a'b'+x)}{(a'+b')(ab+x)}},$$

und setzte man also

$$\tang\Phi=\frac{(a+b)(a'b'+x)}{(a'+b')(ab+x)},$$

so wäre

$$\tang\frac{1}{2}\Omega=-\cot\frac{1}{2}\Theta\tang(45^0-\Phi).$$

Weil nun aber nach dem Obigen

$$x=\frac{L\pm(a+b)(a'+b')\sin\alpha\sqrt{G'}}{2\{(a+b)^2-2(a+b)(a'+b')\cos\alpha+(a'+b')^2\}}$$

ist, so findet man mittelst leichter Rechnung:

$$ab+x=(a+b)\frac{F\pm(a'+b')\sin\alpha\sqrt{G'}}{2H},$$

$$a'b'+x=(a'+b')\frac{F'\pm(a+b)\sin\alpha\sqrt{G'}}{2H};$$

also

$$\frac{ab+x}{a+b}=\frac{F\pm(a'+b')\sin\alpha\sqrt{G'}}{2H},$$

$$\frac{a'b'+x}{a'+b'}=\frac{F'\pm(a+b)\sin\alpha\sqrt{G'}}{2H}.$$

Bezeichnen wir jetzt also die Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Kreise in den beiden im vorhergehenden Paragraphen angenommenen Coordinatensystemen durch X, Y und X', Y'; so ist nach 128):

$$\frac{ab+x}{a+b}=X,\ \frac{a'b'+x}{a'+b'}=X';$$

folglich nach dem Obigen

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega=-\frac{X-X'}{X+X'}\cot\frac{1}{2}\Theta,$$

und hieraus, weil

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\Omega\pm\Theta)=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega\pm\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Theta}{1\mp\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Theta}$$

ist, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\Omega+\Theta)=\frac{X'-X\cos\Theta}{X\sin\Theta}=-\cot\Theta+\frac{X'}{X}\operatorname{cosec}\Theta,$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\Omega-\Theta)=-\frac{X-X'\cos\Theta}{X'\sin\Theta}=\cot\Theta-\frac{X}{X'}\operatorname{cosec}\Theta;$$

also, weil

$$\Omega+\Theta=(\omega+\omega')+(\omega-\omega')=2\omega,$$

$$\Omega-\Theta=(\omega+\omega')-(\omega-\omega')=2\omega'$$

ist:

$$\operatorname{tang}\omega=\frac{X'-X\cos\Theta}{X\sin\Theta}=-\cot\Theta+\frac{X'}{X}\operatorname{cosec}\Theta,$$

$$\operatorname{tang}\omega'=-\frac{X-X'\cos\Theta}{X'\sin\Theta}=\cot\Theta-\frac{X}{X'}\operatorname{cosec}\Theta;$$

oder

$$\operatorname{tang}(90^0-\omega)=\frac{X\sin\Theta}{X'-X\cos\Theta},$$

$$\operatorname{tang}(\omega'-90^0)=\frac{X'\sin\Theta}{X-X'\cos\Theta}.$$

Die Grössen X, X' sind die mit ihren gehörigen Zeichen genommenen Entfernungen der Fusspunkte der von den Durchschnittspunkten der beiden Kreise auf die Linien MN und $M'N'$

gefällten Perpendikel von dem Punkte Q, und können also immer leicht construirt und mit einem Maassstabe gemessen werden. Hat man aber diese Entfernungen auf die angegebene Weise aus der Zeichnung entnommen, so kann man Ω sehr leicht mittelst der Formel

$$\tang\frac{1}{2}\Omega=-\frac{X-X'}{X+X'}\cot\frac{1}{2}\Theta$$

berechnen. Uebrigens aber erhellet auch aus den Formeln

$$\tang(90^0-\omega)=\frac{X\sin\Theta}{X'-X\cos\Theta},$$

$$\tang(\omega'-90^0)=\frac{X'\sin\Theta}{X-X'\cos\Theta},$$

dass man die Winkel $90^0-\omega$ und $\omega'-90^0$ selbst sehr leicht durch Construction finden kann, wenn man die Fusspunkte der in Rede stehenden Perpendikel, für jeden der beiden Durchschnittspunkte der beiden Kreise einzeln genommen, durch gerade Linien mit einander verbindet, und die Winkel betrachtet, welche diese geraden Linien mit den beiden geraden Linien MN und $M'N'$ einschliessen. So elegant diese Construction auch ist, so scheint es doch nicht nöthig zu sein, hier rücksichtlich derselben noch weiter in's Einzelne einzugehen und sie noch weiter zu erläutern, weil auch selbst in der Praxis, wenn man überhaupt von dieser Construction praktischen Gebrauch machen will, die gar keine Schwierigkeit darbietende Rechnung nach der Formel

$$\tang\frac{1}{2}\Omega=-\frac{X-X'}{X+X'}\cot\frac{1}{2}\Theta,$$

wenn man nun erst X und X' durch Messung mit einem Maassstabe aus der Zeichnung entnommen hat, am meisten zu empfehlen sein dürfte.

§. 13.

Um die Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten Methoden zur Auflösung unserer Aufgabe zu erläutern, wollen wir jetzt das folgende Beispiel berechnen.

Zu Göttingen ward

1809. Mai 17.

beobachtet:

α Bootis: $t=16^h.\ 8^m.25^s,\ h=50^0.\ 3'.38'',70;$

α Aquilae: $t'=16.\ 37.\ 49,\ h'=33.\ 33.\ 0,00;$

die Höhe h ward auf der Westseite, die Höhe h' auf der Ostseite des Meridians genommen. Als Rectascensiones und Declinationen der beobachteten Sterne wollen wir annehmen:

$$\alpha = 211^\circ.44'.54'',88;\ \delta = 20^\circ.10'.56'',02$$
$$\alpha' = 295.\ 22.\ 17,\ 50;\ \delta' = 8.\ 22.\ 35,45$$

Es ist also in diesem Falle:

$$\begin{array}{rl rl}
t = & 16^h.\ 8^m.25^s & \alpha = & 211^\circ.44'.54'',88 \\
t' = & 16.\ 37.\ 49 & \alpha' = & 295.\ 22.\ 17,50 \\
\hline
t-t' = & -\ 29.\ 24 & \alpha-\alpha' = & -\ 83.\ 37.\ 22,62 \\
15(t-t') = & -\ 7.\ 21.\ \ 0 & 15(t-t') = & -\ 7.\ 21.\ \ 0,00 \\
& & \theta = & 76.\ 16.\ 22,62
\end{array}$$

Um dieses Beispiel nach der in §. 4. entwickelten Methode zu berechnen, haben wir die folgenden Formeln:

$$\cot\chi = \cot\delta\cos\theta,\ \cot\chi' = \cot\delta'\cos\theta;$$

$$\sin\xi = \frac{\sin\delta'\sin(\chi'-\delta)}{\sin\chi'},\ \sin\xi' = \frac{\sin\delta\sin(\chi-\delta')}{\sin\chi};$$

$$\sin i = \sin\xi\cot(\chi'-\delta) = \sin\xi'\cot(\chi-\delta');$$

$$\sin\varphi = \frac{\cos\delta\sin h'\sin\xi}{\cos i^2} + \frac{\cos\delta'\sin h\sin\xi'}{\cos i^2}$$

$$\pm\frac{2\cos\delta\cos\delta'\sin\theta}{\cos i^2}\sqrt{\sin s\sin(s-h-h')\sin(s-h-i)\sin(s-h'-i)},$$

für

$$2s = 90^\circ + h + h' + i.$$

Es ist nun:

$$\begin{array}{rl}
\log\cos\theta = & 9,3752918 \\
\log\cot\delta = & 10,4346525 \\
\hline
\log\cot\chi = & 9,8099443 \\
\chi = & 57^\circ.\ 9'.17'',52 \\
\delta' = & 8.\ 22.\ 35,45 \\
\hline
\chi-\delta' = & 48.\ 46.\ 42,07 \\
\log\sin\delta' = & 9,1633924 \\
\log\sin(\chi'-\delta) = & 9,3047784 \\
\hline
 & 18,4681708 \\
\log\sin\chi' = & 9,7220258 \\
\hline
\log\sin\xi = & 8,7461450 \\
\log\cot(\chi'-\delta) = & 10,6861996 \\
\hline
\log\sin i = & 9,4323446
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log\cos\theta = & 9,3752918 \\
\log\cot\delta' = & 10,8319497 \\
\hline
\log\cot\chi' = & 10,2072415 \\
\chi' = & 31^\circ.49'\ 14'',12 \\
\delta = & 20.\ 10.\ 56,02 \\
\hline
\chi'-\delta = & 11.\ 38.\ 18,10 \\
\log\sin\delta = & 9,5378280 \\
\log\sin(\chi-\delta') = & 9,8763137 \\
\hline
 & 19,4141417 \\
\log\sin\chi = & 9,9243515 \\
\hline
\log\sin\xi' = & 9,4897902 \\
\log\cot(\chi-\delta') = & 9,9425544 \\
\hline
\log\sin i = & 9,4323446
\end{array}$$

$$i = 15^\circ.42'.2'',15$$

$\log\cos\delta = 9{,}9724805$
$\log\sin h' = 9{,}7424616$
$\log\sin\xi = 8{,}7461450$
$\quad\overline{0{,}4610871 - 2}$
$\log.\cos i^2 = 0{,}9669718 - 1$
$\quad\overline{0{,}4941153 - 2}$
$\text{Num.} = 0{,}0311972$

$\log\cos\delta' = 9{,}9953421$
$\log\sin h = 9{,}8846399$
$\log\sin\xi' = 9{,}4897902$
$\quad\overline{0{,}3697722 - 1}$
$\log.\cos i^2 = 0{,}9669718 - 1$
$\quad\overline{0{,}4028004 - 1}$
$\text{Num.} = 0{,}2528136$

$h = 50^\circ.\ 3'.\ 38'',70$
$h' = 33.\ 33.\ 0{,}00$
$i = 15.\ 42.\ 2{,}15$
$\quad\overline{99.\ 18.\ 40{,}85}$
$\quad 90.\ 0.\ 0{,}00$
$2s = \overline{189.\ 18.\ 40{,}85}$
$s = 94.\ 39.\ 20{,}42$

$s = 94.\ 39.\ 20{,}42$
$h = 50.\ 3.\ 38{,}70$
$s - h = \overline{44.\ 35.\ 41{,}72}$
$h' = 33.\ 33.\ 0{,}00$
$s - h - h' = \overline{11.\ 2.\ 41{,}72}$

$s = 94.\ 39.\ 20{,}42$
$h = 50.\ 3.\ 38{,}70$
$s - h = \overline{44.\ 35.\ 41{,}72}$
$i = 15.\ 42.\ 2{,}15$
$s - h - i = \overline{28.\ 53.\ 39{,}57}$

$s = 94.\ 39.\ 20{,}42$
$h' = 33.\ 33.\ 0{,}00$
$s - h' = \overline{61.\ 6.\ 20{,}42}$
$i = 15.\ 42.\ 2{,}15$
$s - h' - i = \overline{45.\ 24.\ 18{,}27}$

$\log\sin s = 9{,}9985646$
$\log\sin(s - h - h') = 9{,}2823469$
$\log\sin(s - h - i) = 9{,}6841230$
$\log\sin(s - h' - i) = 9{,}8525338$
$\quad\overline{0{,}8175683 - 2}$
$2)\ \overline{0{,}4087842 - 1}$
$\log 2 = 0{,}3010300$
$\log\cos\delta = 9{,}9724805$
$\log\cos\delta' = 9{,}9953421$
$\log\sin\theta = 9{,}9874147$
$\quad\overline{0{,}6650515 - 1}$

$$\begin{array}{rl} & 0{,}6650515-1. \\ \log.\cos i^2 = & \underline{0{,}9669718-1} \\ & 0{,}6980797-1 \end{array}$$

$$\text{Num.} = 0{,}4989761$$

$$\begin{array}{rcr} 0{,}0311972 & & 0{,}0311972 \\ \underline{0{,}2528136} & & \underline{0{,}2528136} \\ 0{,}2840108 & & 0{,}2840108 \\ \underline{0{,}4989761} & & \underline{0{,}4989761} \\ 0{,}7829869 & & -\;0{,}2149653 \end{array}$$

Da $\sin\varphi$ nothwendig positiv sein muss, so gilt bloss der erste Werth, und es ist folglich

$$\sin\varphi = 0{,}7829869.$$

Also ist, wenn man die Tafeln der natürlichen Linien nicht gebrauchen will,

$$\log\sin\varphi = 9{,}8937545$$

folglich

$$\varphi = 51^{0}.\,32'.\,5'',56.$$

Die Berechnung der Stundenwinkel nach den Formeln in §. 6. unterlassen wir, weil dieselbe eigentlich nur auf eine gewöhnliche Auflösung eines sphärischen Dreiecks hinauskommt, und daher an diesem Orte eine besondere Erläuterung durch ein Beispiel nicht bedarf. Im folgenden Paragraphen werden wir aber auf diese Berechnung der Stundenwinkel zurückkommen.

§. 14.

Das vorhergehende Beispiel wollen wir nun auch nach der in §. 8. entwickelten Methode berechnen.

Zur Berechnung der Polhöhe φ haben wir die folgenden Formeln:

$$\Theta = \omega - \omega' = \theta + \lambda . 360^{0},$$

wo $\lambda = 0$, oder $\lambda = -1$, oder $\lambda = +1$ ist. Ferner

$$2u = h + \delta,\; 2v = h - \delta;$$

$$2u' = h' + \delta',\; 2v' = h' - \delta';$$

$$M = \frac{\sin u \cos v}{\cos(u-v)},\quad M' = \frac{\sin u' \cos v'}{\cos(u'-v')};$$

$$N = \frac{\cos u \sin v}{\cos(u-v)},\quad N' = \frac{\cos u' \sin v'}{\cos(u'-v')};$$

$$M_1 = \frac{M + M'}{\cos\frac{1}{2}\Theta}, \; M_1' = \frac{M - M'}{\sin\frac{1}{2}\Theta};$$

$$N_1 = \frac{N + N'}{\cos\frac{1}{2}\Theta}, \; N_1' = \frac{N - N'}{\sin\frac{1}{2}\Theta};$$

$$\operatorname{tang} P = \frac{M_1}{M_1'}, \quad \operatorname{tang} Q = \frac{N_1}{N_1'};$$

$$\cos U = -\cos(P-Q) - M_1 N_1 \frac{\sin(P-Q)^2}{2\sin P \sin Q},$$

$$= -\cos(P-Q) - M_1' N_1' \frac{\sin(P-Q)^2}{2\cos P \cos Q},$$

wo U den kleinsten positiven Bogen bezeichnet, welcher diesen Gleichungen genügt; endlich:

$$\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = \sqrt{-\frac{N_1 \sin P \cos\frac{1}{2}(Q-P \pm U)}{M_1 \sin Q \cos\frac{1}{2}(P-Q \pm U)}}$$

$$= \sqrt{-\frac{N_1' \cos P \cos\frac{1}{2}(Q-P \pm U)}{M_1' \cos Q \cos\frac{1}{2}(P-Q \pm U)}}.$$

Bequemer für die numerische Rechnung stellt man aber diese Formeln auf folgende Art dar:

$$\Theta = \omega - \omega' = \theta + \lambda . 360^0,$$

wo $\lambda = 0$, oder $\lambda = -1$, oder $\lambda = +1$ ist. Ferner:

$$M = \frac{\sin u \cos v}{\cos(u-v)}, \; M' = \frac{\sin u' \cos v'}{\cos(u'-v')};$$

$$N = \frac{\cos u \sin v}{\cos(u-v)}, \; N' = \frac{\cos u' \sin v'}{\cos(u'-v')};$$

$$\operatorname{tang} P = \frac{M + M'}{M - M'} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Theta,$$

$$\operatorname{tang} Q = \frac{N + N'}{N - N'} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Theta;$$

$$\cos U = -\cos(P-Q) - \frac{(M+M')(N+N')\sin(P-Q)^2}{2\cos\frac{1}{2}\Theta^2\sin P\sin Q}$$

$$= -\cos(P-Q) - \frac{(M-M')(N-N')\sin(P-Q)^2}{2\sin\frac{1}{2}\Theta^2\cos P\cos Q},$$

wo U den kleinsten positiven Bogen bezeichnet, welcher diesen Gleichungen genügt; endlich:

$$\tan g(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) = \sqrt{-\frac{(N+N')\sin P\cos\frac{1}{2}(Q-P\pm U)}{(M+M')\sin Q\cos\frac{1}{2}(P-Q\pm U)}}$$

$$= \sqrt{-\frac{(N-N')\cos P\cos\frac{1}{2}(Q-P\pm U)}{(M-M')\cos Q\cos\frac{1}{2}(P-Q\pm U)}}.$$

Weil die Höhe h auf der Westseite, die Höhe h' auf der Ostseite des Meridians genommen wurde, so ist

$$0 < \omega < 180^\circ,\ 180^\circ < \omega' < 360^\circ;$$

und folglich

$$\Theta = \omega - \omega' = \theta + \lambda . 360^\circ$$

negativ. Daher kann offenbar nur $\lambda = -1$ gesetzt werden, und es ist also

$$\Theta = 76^\circ.\ 16'.\ 22'',62 - 360^\circ$$
$$= -\ 283^\circ.\ 43'.\ 37'',83$$
$$\tfrac{1}{2}\Theta = -\ 141^\circ.\ 51'.\ 48'',69$$

$h =$	$50^\circ.$	$3'.$	$38'',70$	$h =$	$50^\circ.$	$3'.$	$38'',70$
$\delta =$	$20.$	$10.$	$56,02$	$\delta =$	$20.$	$10.$	$56,02$
$2u =$	$70.$	$14.$	$34,72$	$2v =$	$29.$	$52.$	$42,68$
$u =$	$35.$	$7.$	17.36	$v =$	$14.$	$56.$	$21,34$
$v =$	$14.$	$56.$	$21,34$				
$u - v =$	$20.$	$10.$	$56,02$				

$h' =$	$33^\circ.$	$33'.$	$0'',00$	$h' =$	$33^\circ.$	$33'.$	$0'',00$
$\delta' =$	$8.$	$22.$	$35,45$	$\delta' =$	$8.$	$22.$	35.45
$2u' =$	$41.$	$55.$	$35,45$	$2v' =$	$25.$	$10.$	$24,55$

$$\begin{aligned}
u' &= 20^\circ.\ 57'.\ 47'',72 \\
v' &= 12.\ 35.\ 12,27 \\
u'-v' &= 8.\ 22.\ 35,45
\end{aligned}
\qquad
v' = 12^\circ.\ 35'.\ 12'',27$$

$$\begin{aligned}
\log\sin u &= 9,7599035 \\
\log\cos v &= 9,9850669 \\
&\ 9,7449704 \\
\log\cos(u-v)' &= 9,9724806 \\
\log M &= 0,7724899-1 \\
M &= 0,5922293
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log\sin u' &= 9,5536029 \\
\log\cos v' &= 9,9894352 \\
&\ 9,5430381 \\
\log\cos(u'-v') &= 9,9953421 \\
\log M' &= 0,5476960-1 \\
M' &= 0,3529360
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\cos u &= 9,9127183 \\
\log\sin v &= 9,4112743 \\
&\ 9,3239926 \\
\log\cos(u-v) &= 9,9724806 \\
\log N &= 0,3515121-1 \\
N &= 0,2246529
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log\cos u' &= 9,9702585 \\
\log\sin v' &= 9,3382919 \\
&\ 9,3085504 \\
\log\cos(u'-v') &= 9,9953421 \\
\log N' &= 0,3132083-1 \\
N' &= 0,2056877
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= 0,5922293 \\
M' &= 0,3529360 \\
M+M' &= 0,9451653 \\
M-M' &= 0,2392933
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
N &= 0,2246529 \\
N' &= 0,2056877 \\
N+N' &= 0,4303406 \\
N-N' &= 0,0189652
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log(M+M') &= 0,9755077-1 \\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Theta &= 9,8949408 \\
&\ 9,8704485 \\
\log(M-M') &= 0,3789306-1 \\
\log\operatorname{tang} P &= 10,4915179 \\
P &= 72^\circ.\ 7'.\ 38'',36
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log(N+N') &= 0,6338123-1 \\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Theta &= 9,8949408 \\
&\ 9,5287531 \\
\log(N-N') &= 0,2779574-2 \\
\log\operatorname{tang} Q &= 11,2507957 \\
Q &= 86^\circ.\ 47'.\ 14'',25 \\
P &= 72.\ 7.\ 38,36 \\
Q-P &= 14.\ 39.\ 35,89 \\
P-Q &= -14.\ 39.\ 35,89
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log(M+M') &= 0,9755077-1 \\
\log(N+N') &= 0,6338123-1 \\
\log.\sin(P-Q)^2 &= 0,8065226-2 \\
&\ 0,4158426-2 \\
&\ 0,0703094 \\
&\ 0,3455332-2
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log 2 &= 0,3010300 \\
\log\sin P &= 0,9785187-1 \\
\log\sin Q &= 0,9993169-1 \\
\log.\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2 &= 0,7914438-1 \\
&\ 0,0703094
\end{aligned}$$

$\log(M-M')=0{,}3789306-1$ $\qquad$ $\log 2=0{,}3010300$

$\log(N-N')=0{,}2779574-2$ $\qquad$ $\log\cos P=0{,}4870008-1$

$\log.\sin(P-Q)^2=0{,}8065226-2$ $\qquad$ $\log\cos Q=0{,}7485210-2$

$\overline{0{,}4634106-4}$ $\qquad$ $\log.\sin\frac{1}{2}\Theta^2=0{,}5813256-1$

$0{,}1178774-2$

$\overline{0{,}3455332-2}$ ganz wie oben $\overline{0{,}1178774-2}$

$\text{Num.}=\quad 0{,}0221581$

$\cos(P-Q)=\quad \underline{0{,}9674448}$

$\cos U=-0{,}9896029$

$U=171^\circ.\ 43'.\ 50'',41$

$Q-P=\quad 14^\circ.\ 39'.\ 35'',89$

$U=\quad \underline{171.\ 43.\ 50{,}41}$

$Q-P+U=\quad 186.\ 23.\ 26{,}30$

$Q-P-U=-157.\ 4.\ 14{,}52$

$\frac{1}{2}(Q-P+U)=\quad 93.\ 11.\ 43{,}15$

$\frac{1}{2}(Q-P-U)=-\ 78.\ 32.\ 7{,}26$

$\frac{1}{2}(P-Q+U)=\quad 78.\ 32.\ 7{,}26$

$\frac{1}{2}(P-Q-U)=-\ 93.\ 11.\ 43{,}15$

$\log(N+N')=0{,}6338123-1$ $\qquad$ $\log(M+M')=0{,}9755077-1$

$\log\sin P=0{,}9785187-1$ $\qquad$ $\log\sin Q=0{,}9993169-1$

$\log\cos\frac{1}{2}(Q-P+U)=0{,}7461665-2_n$ $\quad$ $\log\cos\frac{1}{2}(P-Q+U)=0{,}2983362-1$

$\overline{0{,}3584975-2}$ $\qquad$ $\overline{0{,}2731608-1}$

$0{,}2731608-1$

$\overline{0{,}0853367-1}$

$\log\tang(45^\circ-\frac{1}{2}\varphi)=9{,}54266835$

$\log(N-N')=0{,}2779574-2$ $\qquad$ $\log(M-M')=0{,}3789306-1$

$\log\cos P=0{,}4870008-1$ $\qquad$ $\log\cos Q=0{,}7485210-2$

$\log\cos\frac{1}{2}(Q-P+U)=0{,}7461665-2_n$ $\quad$ $\log\cos\frac{1}{2}(P-Q+U)=0{,}2983362-1$

$\overline{0{,}5111247-4}$ $\qquad$ $\overline{0{,}4257878-3}$

$0{,}4257878-3$

$\overline{0{,}0853369-1}$

$\log\tang(45^\circ-\frac{1}{2}\varphi)=9{,}54266845$

Nehmen wir das Mittel zwischen den beiden vorher erhaltenen Werthen von $\log \tang (45^0 - \frac{1}{2}\varphi)$, so werden wir

$$\log \tang (45^0 - \frac{1}{2}\varphi) = 9{,}5426684$$

setzen, woraus sich ergiebt:

$$45^0 - \frac{1}{2}\varphi = 19^0.\ 13'.\ 57'',16$$
$$\frac{1}{2}\varphi = 25.\ \ 46.\ \ 2,84$$
$$\varphi = 51.\ \ 32.\ \ 5,68$$

Ferner ist, wenn wir jetzt bloss bis auf Minuten gehen:

$$\log(N+N') = 0{,}6338123 - 1 \qquad \log(M+M') = 0{,}9755077 - 1$$
$$\log\sin P = 0{,}9785187 - 1 \qquad \log\sin Q = 0{,}9993169 - 1$$
$$\log\cos\frac{1}{2}(Q-P-U) = 0{,}2983362 - 1 \qquad \log\cos\frac{1}{2}(P-Q-U) = 0{,}7461665 - 2$$
$$\overline{0{,}9106672 - 2} \qquad \overline{0{,}7209911 - 2}$$
$$\underline{0{,}7209911 - 2}$$
$$0{,}1896761$$

$$\log\tang(45^0 - \frac{1}{2}\varphi) = 10{,}0948380$$

$$45^0 - \frac{1}{2}\varphi = 51^0.\ 12'$$

so dass sich also hieraus ein negativer Werth von φ ergeben würde, der natürlich unzulässig ist, und daher bloss

$$\varphi = 51^0.\ 32'.\ 5'',68$$

gesetzt werden kann.

Die geringe Abweichung dieses Werthes der Polhöhe von dem im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Werthe dieses Elements rührt von den Fehlern her, welche bei dem Gebrauche der Tafeln übrig bleiben. Setzte man

$$\log\tang(45^0 - \frac{1}{2}\varphi) = 9{,}5426685,$$

wozu man eigentlich dieselbe Berechtigung hat, wie zu dem vorher angenommenen Werthe dieses Logarithmus, so würde man erhalten:

$$45^0 - \frac{1}{2}\varphi = 19^0.13'.57'',18$$

$$\frac{1}{2}\varphi = 25 \,.\, 46 \,.\, 2,82$$

$$\varphi = 51 \,.\, 32 \,.\, 5,64$$

Kürzt man diesen Werth und den im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Werth von φ bis auf die erste Decimalstelle ab, so erhält man beide Mal übereinstimmend

$$\varphi = 51^{\circ}.32'.5'',6.$$

Wir führen dies hier nur an, um zu zeigen, dass es bei etwas weitläufigeren Rechnungen immer schwer hält, sich vor den bei dem Gebrauche der Tafeln noch übrig bleibenden kleinen Fehlern völlig sicher zu stellen, und bemerken auch noch, dass wir aus diesem Grunde bei der in diesem Paragraphen geführten Rechnung ausser den gewöhnlichen Logarithmentafeln auch die Tafeln der natürlichen Linien von Sherwin (Correcteste Ausgabe von 1742) benutzt haben, welche vortreffliche Sammlung von Tafeln wir eigentlich allen übrigen Tafeln vorziehen, wenn auch freilich zu wünschen wäre, dass auch die Tafel der natürlichen Linien noch die Differenzen für eine Secunde enthielte, was leider nicht der Fall ist, aber allerdings auch ein grösseres, d. h. breiteres Format der Tafeln erfordert haben würde.

Was nun die beiden Stundenwinkel ω, ω' betrifft, so haben wir zuvörderst nach dem Obigen

$$\Theta = \omega - \omega' = -283^{\circ}.\ 43'.\ 37'',38.$$

Für $\Omega = \omega + \omega'$ haben wir nach §. 8. die folgenden Ausdrücke:

$$\Omega = P + Q - U - 2\lambda\pi$$

oder

$$\Omega = P + Q - U - 2(\lambda+1)\pi,$$

und

$$\Omega = P + Q + U - 2\mu\pi$$

oder

$$\Omega = P + Q + U - 2(\mu+1)\pi,$$

indem man diejenigen zwei dieser vier Werthe von Ω nimmt, welche für

$$\sqrt{x} = -\frac{N_1}{2\sin Q}\cdot\frac{\sin(P-Q)}{\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)}$$

$$=-\frac{N_1'}{2\cos Q}\cdot\frac{\sin(P-Q)}{\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)}$$

positive Werthe liefern. λ, $\lambda+1$ sind die beiden aus

$$\frac{P+Q-U}{2\pi}-2<k<\frac{P+Q-U}{2\pi}$$

sich ergebenden Werthe der ganzen Zahl k, und μ, $\mu+1$ sind die beiden aus

$$\frac{P+Q+U}{2\pi}-2<k<\frac{P+Q+U}{2\pi}$$

sich ergebenden Werthe der ganzen Zahl k. Es ist nun

$$\begin{aligned} P &= 72^\circ.\ 7'.\ 38''{,}36 \\ Q &= 86.\ 47.\ 14{,}25 \\ \hline P+Q &= 158.\ 54.\ 52{,}61 \\ U &= 171.\ 43.\ 50{,}41 \\ \hline P+Q+U &= 330.\ 38.\ 43{,}02 \\ P+Q-U &= -\ 12.\ 48.\ 57{,}80 \end{aligned}$$

Näherungsweise hat man zur Bestimmung von λ, $\lambda+1$:

$$-2\frac{1}{30}<k<-\frac{1}{30},$$

also

$$\lambda=-2,\ \lambda+1=-1;$$

und zur Bestimmung von μ, $\mu+1$ hat man näherungsweise:

$$-1\frac{1}{12}<k<\frac{11}{12},$$

also

$$\mu=-1,\ \mu+1=0.$$

Also erhält man für Ω die vier folgenden Werthe:

$$\Omega=\begin{cases} 707^\circ.\ 11'.\ 2''{,}20 \\ 347\ .\ 11\ .\ 2{,}20 \\ 690\ .\ 38\ .\ 43{,}02 \\ 330\ .\ 38\ .\ 43{,}02 \end{cases}$$

Weil nun aber $N+N'$ positiv, $\cos\frac{1}{2}\Theta$ negativ, also N_1 negativ ist, weil ferner $\sin(P-Q)$ negativ und $\sin Q$ positiv ist, so ist

$$-\frac{N_1}{2\sin Q}\sin(P-Q)$$

negativ, und weil nun, wie leicht erhellet, $\cos(P-\frac{1}{2}\Omega)$ respective

positiv,
negativ,
positiv,
negativ

ist, so ist $\sqrt{x}$ respective

negativ
positiv
negativ
positiv.

Also kann bloss

$$\Omega=\begin{cases}347^0.\ 11'.\ 2''.20\\ 330\ .\ 38.\ 43,02\end{cases}$$

gesetzt werden. Aus

$$\begin{aligned}\Omega&=\omega+\omega'=\ 347^0.\ 11'.\ 2'',20\\ \Theta&=\omega-\omega'=-283.\ 43.\ 37,38\end{aligned}$$

erhält man aber:

$$\begin{aligned}\omega&=31^0.43'.\ 42'',41\\ \omega'&=315.27.19,79\end{aligned}$$

und aus

$$\begin{aligned}\Omega&=\omega+\omega'=\ 330^0.\ 38'.\ 43'',02\\ \Theta&=\omega-\omega'=-283.\ 43.\ 37,38\end{aligned}$$

ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\omega&=23^0.\ 27'.\ 32'',82\\ \omega'&=307\ .\ 11.\ 10,20\end{aligned}$$

Berechnet man nun hieraus die Correctionen des Standes der Uhr, so erhält man für die ersten Werthe von ω, ω':

$$\begin{array}{rrrr}
\omega = & 31^{0}. & 43'. & 42'',41 \\
\alpha = & 211\,. & 44\,. & 54,88 \\
\omega + \alpha = & 243\,. & 28\,. & 37,29 \\
3) & 81\,. & 9\,. & 32,43 \\
5) & 16^{u}. & 13^{m}. & 54^{s},49 \\
 & 16\,. & 8\,. & 25,00 \\
 & & 5\,. & 29,49
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
\alpha' = & 295^{0}. & 22'. & 17'',50 \\
360^{0} - \omega' = & 44\,. & 32\,. & 40,21 \\
\alpha' - (360^{0} - \omega') = & 250\,. & 49\,. & 37,29 \\
3) & 83\,. & 36\,. & 32,43 \\
5) & 16^{u}. & 43^{m}. & 18^{s},49 \\
 & 16\,. & 37\,. & 49,00 \\
 & & 5\,. & 29,49
\end{array}$$

Die Uhr ging also hiernach $5^{m}.\ 29^{s},49$ zu langsam.

Für die zweiten Werthe von ω, ω' hat man:

$$\begin{array}{rrrr}
\omega = & 23^{0}. & 27'. & 32'',82 \\
\alpha = & 211\,. & 44\,. & 54,88 \\
\omega + \alpha = & 235\,. & 12\,. & 27,70 \\
5) & 47\,. & 2\,. & 29,54 \\
3) & 15^{u}. & 40^{m}. & 49^{s},85 \\
 & 16\,. & 8\,. & 25,00 \\
 & & 27\,. & 35,15
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
\alpha' = & 295^{0}. & 22'. & 17'',50 \\
360^{0} - \omega' = & 52\,. & 48\,. & 49,80 \\
\alpha' - (360^{0} - \omega') = & 242\,. & 33\,. & 27,70 \\
5) & 48\,. & 30\,. & 41,54 \\
3) & 16^{u}. & 10^{m}. & 13^{s},85 \\
 & 16\,. & 37\,. & 49,00 \\
 & & 27\,. & 35,15
\end{array}$$

Hiernach wäre also die Uhr $27^{m}.35^{s},15$ zu geschwind gegangen

Für die ersten Werthe von ω, ω' war folglich:

Verspätung der Uhr $= 5^{m}.29^{s},49$.

Für die zweiten Werthe von ω, ω' war dagegen:

Voreilung der Uhr $= 27^{m}.35^{s},15$.

Insofern man also zu der Annahme berechtigt ist, dass die Uhr so weit berichtigt war, dass sie einen so grossen Fehler wie den letzteren, d. h. eine so grosse Abweichung von der wahren Sternzeit wie die letztere nicht haben konnte, wird man für ω, ω' die beiden ersten Werthe nehmen, d. h. man wird

$$\omega = 31^{0}.\ 43'.\ 42'',41$$

$$\omega' = 315.\ 27.\ 19,79$$

setzen müssen. Dass rücksichtlich ihres täglichen oder vierundzwanzigstündigen Gangs die Uhr genau berichtigt sei, und in dieser Beziehung ein Uhrfehler nicht Statt finde, ist im Vorhergehenden der Kürze wegen angenommen worden.

Wir haben das obige Beispiel so vollständig gerechnet, um die Anwendung der im Obigen entwickelten analytischen Kriterien mit möglichster Deutlichkeit zu erläutern; in der Praxis wird man sich öfters kürzer zu helfen im Stande sein. Es kam uns hier darauf an, durch strenge theoretische Entwickelungen die eigentliche Natur des Problems in recht helles Licht zu setzen, wodurch nach unserer Meinung auch der Praxis wesentlich genützt wird.

§. 15.

Wir wollen nun auch die in §. 4. für den Fall, wenn ein und dasselbe Gestirn zwei Mal beobachtet worden ist, gegebene Auflösung durch ein Beispiel erläutern.

Unter der Voraussetzung, dass die Uhr rücksichtlich ihres täglichen Gangs genau berichtigt ist, sind die Formeln zur Bestimmung der Polhöhe, welches Element wir der Kürze wegen jetzt allein in's Auge fassen wollen, die folgenden:

$$\theta = 15(t - t'),$$

$$\sin(45^{0} - \tfrac{1}{2}i) = \cos\delta \sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

$$\sin u = \sin\delta \sin\tfrac{1}{2}\theta \sin\tfrac{1}{2}(h + h')\cos\tfrac{1}{2}(h - h'),$$

$$\sin v = \cos\tfrac{1}{2}\theta \sqrt{\sin s \sin(s - h - h') \sin(s - h - i) \sin(s - h' - i)},$$

$$\sin\varphi = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(u \pm v)\cos\tfrac{1}{2}(u \mp v)}{\sin\tfrac{1}{2}\theta \cos(45^{0} - \tfrac{1}{2}i)^{2}};$$

wo

$$2s = 90^\circ + h + h' + i$$

ist.

Das beobachtete Gestirn war die Sonne. Nach allen nöthigen, hier keiner Erläuterung bedürfenden Correctionen waren die beiden genommenen Sonnenhöhen:

$$h = 36^\circ.\ 41'.\ 11'',8$$
$$h' = 26\ .\ 33\ .\ 21\ ,0$$

und die entsprechenden Uhrzeiten:

$$t = 23^u.37^m.4^s,0$$
$$t' = 21\ .\ 1\ .\ 19,2$$

Also war der Zeitunterschied:

$$2^h.\ 35^m.\ 44^s,8.$$

Die Uhr blieb aber in 24 Stunden um $15^s,59$ zurück. Dies macht auf

1 Stunde, 1 Minute, 1 Secunde

respective

$$0^s,6946;\ 0^s,0108;\ 0^s,0002;$$

also auf $2^h.\ 35^m.\ 44^s,8$:

$$1^s,30 + 0^s,38 + 0^s,01 = 1^s,69 = 1^s,7.$$

Daher ist

$$t - t' = 2^h.35^m.44^s,8 + 1^s,7 = 2^h.35^m.46^s,5$$

und folglich

$$\theta = 15(t - t') = 38^\circ.\ 56'.\ 37'',5$$
$$\frac{1}{2}\theta = 19\ .\ 28\ .\ 18,7$$

zu setzen.

Die Declination der Sonne war

$$\delta = -2^\circ.\ 14'.\ 9'',0;$$

also ist

$$\log\cos\delta = 9{,}9996693$$
$$\log\sin\frac{1}{2}\theta = 9{,}5228925$$
$$\log\sin(45^0-\frac{1}{2}i) = 9{,}5225618$$
$$45^0-\frac{1}{2}i = 19^0.27'.23'',2$$
$$\frac{1}{2}i = 25.32.36,8$$
$$i = 51.\ 5.13,6$$

Es ist also

$$h = 36^0.41'.11'',8$$
$$h' = 26.33.21,0$$
$$i = 51.\ 5.13,6$$
$$h+h' = 63.14.32,8 \qquad \frac{1}{2}(h+h') = 31^0.\ 37'.\ 16'',4$$
$$h-h' = 10.\ 7.50,8 \qquad \frac{1}{2}(h-h') = 5.\ 3.\ 55,4$$
$$2s = 204.19.46,4$$
$$s = 102.\ 9.53,2$$
$$s-h-h' = 38.55.20,4$$
$$s-h-i = 14.23.27,8$$
$$s-h'-i = 24.31.18,6$$

Folglich ist:

$$\log\sin\delta = 8{,}5912065_n$$
$$\log\sin\frac{1}{2}\theta = 9{,}5228925$$
$$\log\sin\frac{1}{2}(h+h') = 9{,}7195810$$
$$\log\cos\frac{1}{2}(h-h') = 9{,}9983006$$
$$\log\sin u = 7{,}8319806_n$$
$$u = -0^0.23'.20'',9$$

und ferner:

$$
\begin{aligned}
\log\sin s &= 9{,}9001370\\
\log\sin(s-h-h') &= 9{,}7981438\\
\log\sin(s-h-i) &= 9{,}3953939\\
\log\sin(s-h'-i) &= 9{,}6180699\\
\hline
& \ 0{,}8017646-2\\
&= 2)\,\overline{0{,}4008823-1}\\
\log\cos\tfrac{1}{2}\,\theta &= 9{,}9744220\\
\hline
\log\sin v &= 9{,}3753043\\
v &= 13^0.\,43'.\,38'',8
\end{aligned}
$$

Es ist also

$$
\begin{aligned}
u &= -\ \ 0^0.\,23'.\,20'',9\\
v &= +13\,.\,43\,.\,38{,}8\\
\hline
u+v &= +13\,.\,20\,.\,17{,}9\\
u-v &= -14\,.\ \ 6\,.\,59{,}7
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(u+v) &= +\ 6^0.\,40'.\,8'',9\\
\tfrac{1}{2}(u-v) &= -7\,.\ \ 3\,.\,29{,}8
\end{aligned}
$$

und in der Formel

$$\sin\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}(u\pm v)\cos\frac{1}{2}(u\mp v)}{\sin\frac{1}{2}\theta\cos(45^0-\frac{1}{2}i)^2}$$

liefern folglich die unteren Zeichen offenbar einen negativen Werth von $\sin\varphi$, der hier unzulässig ist, weshalb man also die oberen Zeichen nehmen, d. h.

$$\sin\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}(u+v)\cos\frac{1}{2}(u-v)}{\sin\frac{1}{2}\theta\cos(45^0-\frac{1}{2}i)^2}$$

setzen muss. Demzufolge ist nun:

$$
\begin{aligned}
\log 2 &= 0{,}3010300\\
\log\sin\tfrac{1}{2}(u+v) &= 9{,}0649659\\
\log\cos\tfrac{1}{2}(u-v) &= 9{,}9966962\\
\hline
& \ 19{,}3626921\\
& \ \ \ 9{,}4718191\\
\hline
\log\sin\varphi &= 9{,}8908730
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log\sin\tfrac{1}{2}\theta &= 9{,}5228925\\
\log.\cos(45^0-\tfrac{1}{2}i)^2 &= 0{,}9489266-1\\
\hline
& \ 9{,}4718191\\
\\
\varphi &= 51^0.\,3'.\,37'',5
\end{aligned}
$$

Dieses Beispiel ist aus Bohnenberger's Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung. Göttingen 1795. S. 279. entlehnt, und dort nach der Methode von Douwes berechnet. Bohnenberger findet am Ende $\varphi = 51^\circ.\ 0'.\ 50'',3$, und dieselbe Angabe findet sich auch in Littrow's theoretischer und praktischer Astronomie. Theil I. Wien. 1821. S. 188., wo dieses Beispiel gleichfalls zur Erläuterung der Methode von Douwes benutzt wird, aber ohne es vollständig auszurechnen, indem das Resultat wohl nur aus Bohnenberger's obigem Buche entnommen ist. Dieses Resultat ist aber falsch, und der Fehler kommt daher, weil Bohnenberger am Ende der Rechnung (S. 282.) eine ganz andere Sonnen-Declination in Anwendung bringt wie am Anfange (S. 280. und S. 281.), nämlich $-2^\circ.16'.56'',0$ statt $-2^\circ.14'.9'',0$. Hätte er am Ende, wie es erforderlich war, dieselbe Sonnen-Declination wie am Anfange in Anwendung gebracht, so würde er in seinen Zeichen gefunden haben:

$H =$	$36^\circ.\ 42'.\ 13'',7$ *)
Abweichung der ⊙ =	$-2\ .\ 14\ .\ 9\ ,0$
Aeq. Höhe =	$38\ .\ 56\ .\ 22\ ,7$
Breite =	$51\ .\ 3\ .\ 37\ ,3$

sehr nahe mit dem vorher nach unserer Methode erhaltenen Resultate übereinstimmend. Die von Bohnenberger zum Grunde gelegte genäherte Breite war $51^\circ.\ 10'.\ 50''$. Streng genommen darf man, wenn man die Näherungsmethode von Douwes anwendet, nie unterlassen, diese Methode wenigstens zwei Mal hinter einander in Anwendung zu bringen, um sich von der nahen Uebereinstimmung der beiden erhaltenen Näherungswerthe zu versichern. Thut man aber dies, so wird die Anwendung dieser Näherungsmethode immer weitläufig ausfallen, insofern man sie nicht durch den Gebrauch besonderer Tafeln abkürzt. Ich habe immer die vorhergehende ganz genaue Methode in der Anwendung sehr bequem gefunden, und ziehe sie für meinen eigenen Gebrauch jeder, streng genommen, immer mindestens zwei Mal in Anwendung zu bringenden Näherungsmethode vor.

---

*) Uebrigens ist aber hier bei Bohnenberger a. a. O. noch ein anderer Rechnungsfehler, da zu

$$\sin H = 9,7764776$$

nicht, wie Bohnenberger angiebt,

$$H = 36^\circ.42'.13'',7$$

sondern

$$H = 36^\circ.42'.17'',2$$

gehört. Ich führe dies hier an, weil Bohnenberger's bekanntes Buch immer noch häufig von angehenden Beobachtern gebraucht wird, und auch meiner gleich nachher folgenden Berechnung des vorhergehenden Beispiels nach der Methode von Douwes wegen.

Will man das vorhergehende Beispiel nach der Näherungsmethode von **Douwes** rechnen, so muss man mittelst einer genäherten Polhöhe φ zuerst die genäherten Stundenwinkel ω, ω' mittelst der Formeln

$$\omega' - \omega = \Theta,$$

$$\sin\frac{1}{2}(\omega' + \omega) = \frac{\sin\frac{1}{2}(h-h')\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi},$$

wo h die in der Nähe des Meridians genommene Höhe bezeichnen soll, suchen. Dann findet man den zweiten genäherten Werth (φ) der Polhöhe mittelst der Formel

$$\cos\{\delta-(\varphi)\} = \sin h + 2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2,$$

wo man aber, wenn man sich bloss der gewöhnlichen trigonometrischen Logarithmentafeln bedient, am besten noch einen Hülfswinkel ψ mittelst der Formel

$$\sin\psi = 2\cos\delta\cos\varphi\sin\frac{1}{2}\omega^2$$

berechnet, und dann (φ) mittelst der Formel

$$\cos\{\delta-(\varphi)\} = 2\sin\frac{1}{2}(h+\psi)\cos\frac{1}{2}(h-\psi)$$

oder

$$\cos\{\delta-(\varphi)\} = 2\sin\frac{1}{2}(\psi+h)\cos\frac{1}{2}(\psi-h)$$

findet.

Im obigen Beispiele war nun

$$h = 36^\circ.\ 41'.\ 11'',8 \qquad t = 23^u.\ 37^m.\ 4^s,0$$
$$h' = 26\ .\ 33\ .\ 21,0 \qquad t' = 21\ .\ 1\ .\ 19,2$$
$$\delta = -2^\circ.\ 14'.\ 9'',0$$

Auch weiss man, was vorher zu bemerken nicht nöthig war, dass die beiden Sonnenhöhen auf einer und derselben Seite des Meridians genommen wurden. Mit Rücksicht hierauf findet man nun für die oben angegebene Verspätung der Uhr ganz wie vorher

$$\Theta = \omega' - \omega = 38^\circ.\ 56'.\ 37'',5$$
$$\frac{1}{2}\Theta = 19\ .\ 28\ .\ 18,7$$

Als genäherte Breite nehmen wir

$$\varphi = 51^{\circ}.\ 10'.\ 50''$$

an, und führen dann mit hier zweckmässiger Anwendung der decadischen Ergänzungen die Rechnung auf folgende Art:

$$\begin{aligned} h &= 36^{\circ}.41'.11'',8 \\ h' &= 26\ .\ 33\ .21\ ,0 \\ h+h' &= 63.\ 14\ .32\ ,8 \\ h-h' &= 10.\ \ 7\ .50,8 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(h+h') = 31^{\circ}.\ 37'.\ 16'',4$$

$$\frac{1}{2}(h-h') = 5\ .\ 3\ .\ 55\ ,4$$

$$\begin{aligned} \log\sin\frac{1}{2}(h-h') &= 8{,}9459242 \\ \log\cos\frac{1}{2}(h+h') &= 9{,}9302013 \\ cd\log\cos\delta &= 0{,}0003307 \\ cd\log\sin\frac{1}{2}\Theta &= 0{,}4771075 \\ cd\log\cos\varphi &= 0{,}2028237 \\ \log\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega) &= 9{,}5563874 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\omega'+\omega) &= 21^{\circ}.6'.16'',3 \\ \frac{1}{2}(\omega'-\omega) &= 19\ .28.18,7 \\ \omega &= \ 1.37.57,6 \\ \frac{1}{2}\omega &= \ 0.48.58,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \log\cos\delta &= 9{,}9996693 \\ \log\cos\varphi &= 9{,}7971763 \\ \log.\sin\frac{1}{2}\omega^2 &= 16{,}3074598 \\ \log\sin\psi &= 6{,}4053354 \end{aligned}$$

$$\psi = 0^0.\ 0'.\ 52'',6$$
$$h+\psi = 36.42.\ 4,4$$
$$h-\psi = 36.40.\ 19,2$$
$$\frac{1}{2}(h+\psi) = 18.21.\ 2,2$$
$$\frac{1}{2}(h-\psi) = 18.20.\ 9,6$$

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$\log\sin\frac{1}{2}(h+\psi) = 9,4980775$$
$$\log\cos\frac{1}{2}(h-\psi) = 9,9773705$$
$$\log\cos\{\delta-(\varphi)\} = 9,7764780$$

$$\delta-(\varphi) = -53^0.\ 17'.\ 42'',6$$

$$(\varphi) = \begin{cases} +53^0.\ 17'.\ 42'',6 \\ -\ 2.\ 14.\ 9,0 \end{cases}$$

$$= 51^0.\ 3'.\ 33'',6$$

Da diese Polhöhe von der angenommenen Polhöhe um mehrere Minuten abweicht, so würde es immerhin nöthig sein, die vorhergehende Rechnung nochmals für die genäherte Polhöhe $\varphi = 51^0.\ 3'.\ 33'',6$ zu wiederholen, und einen dritten Näherungswerth der Polhöhe zu suchen, denn nur auf diese Weise wird man den erreichten Grad der Näherung prüfen können. Auch weicht die jetzt gefundene genäherte Polhöhe von der durch die oben geführte genaue Rechnung gefundenen wahren Polhöhe immer noch nahe um $4''$ ab, so dass also eine solche nochmalige Wiederholung der Näherungsrechnung in der That auch keineswegs überflüssig sein würde, was wir jedoch hier füglich unterlassen können, da es uns hier lediglich um die Erläuterung der allgemeinen Methode durch Beispiele zu thun ist.*) Ist aber eine

*) Weil ich jedoch die betreffende Rechnung, bei welcher

$$\varphi = 51^0.\ 3'.\ 33'',6$$

gesetzt wird, ausgeführt habe, so will ich dieselbe zum Ueberfluss noch hersetzen.

Wiederholung der Näherungsrechnung nöthig, so scheint es immer vorzuziehen zu sein, die Rechnung gleich ganz genau nach der im Vorhergehenden entwickelten und durch ein Beispiel erläuterten Methode zu führen.

$$\log\sin\frac{1}{2}(h-h') = 8{,}9459242$$

$$\log\cos\frac{1}{2}(h+h') = 9{,}9902012$$

$$cd\log\cos\delta = 0{,}0003307$$

$$cd\log\sin\frac{1}{2}\theta = 0{,}4771075$$

$$cd\log\cos\varphi = 0{,}2016842$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(\omega'+\omega) = 9{,}5552478$$

$$\frac{1}{2}(\omega'+\omega) = 21^0.\ 2'.\ 47'',7$$

$$\frac{1}{2}(\omega'-\omega) = 19\ .28\ .\ 18\ ,7$$

$$\omega = 1\ ,34\ .\ 29\ ,0$$

$$\frac{1}{2}\omega = 0\ .47\ .\ 14\ ,5$$

$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$\log\cos\delta = 9{,}9996693$$

$$\log\cos\varphi = 9{,}7983158$$

$$\log.\sin\frac{1}{2}\omega^2 = 16{,}2760740$$

$$\log\sin\psi = 6{,}3750891$$

$$\psi = 0^0.\ 0'.49'',0$$

$$h+\psi = 36\ .\ 42\ .\ 0\ ,8$$

$$h-\psi = 36\ .\ 40\ .\ 22{,}8$$

$$\frac{1}{2}(h+\psi) = 18\ .\ 21\ .\ 0\ ,4$$

$$\frac{1}{2}(h-\psi) = 18\ .\ 20\ .\ 11\ ,8$$

$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(h+\psi) = 9{,}4980660$$

$$\log\cos\frac{1}{2}(h-\psi) = 9{,}9773692$$

$$\log\cos\{\delta-(\varphi)\} = 9{,}7764652$$

$$\delta-(\varphi) = -53^0.\ 17'.\ 47'',1$$

§. 16.

Auf das in §. 13. und §. 14. berechnete Beispiel wollen wir nun auch die in §. 12. gelehrte Construction anwenden, wobei ich bemerke, dass ich mich bei der Ausführung dieser Construction zu dem Auftragen der Winkel und Linien eines mit einem Nonius, der Minuten angiebt, versehenen Boussolen-Transporteurs und eines sogenannten tausendtheiligen Maassstabes, welcher letztere, nicht sehr sauber auf Messing aufgetragen, keine sehr grosse Genauigkeit gewährte, bedient habe.

Damit Θ positiv werde, setzen wir jetzt:

$$t = 16^{s}.\ 37^{m}.\ 49^{s}, \qquad h = 33^{0}.\ 33'.\ 0'',00;$$
$$t' = 16\ .\ \ 8\ .\ 25, \qquad h' = 50\ .\ \ 3\ .\ 38,70;$$

und

$$\alpha = 295^{0}.\ 22'.17'',50, \qquad \delta = 8^{0}.\ 22'.\ 35'',45;$$
$$\alpha' = 211\ .\ 44\ .54,88, \qquad \delta' = 20\ .\ 10\ .\ 56,02;$$

so ist

$$\theta = 15(t-t') - (\alpha - \alpha') = -76^{0}.\ 16'.\ 22'',62.$$

$$(\varphi) = \begin{cases} +53^{0}.\ 17'.\ 47'',1 \\ -\ 2\ .\ 14\ .\ \ 9,0 \end{cases}$$
$$= \ \ 51^{0}.\ 3'.\ 38'',1$$

Dieser Werth der Polhöhe weicht von der angenommenen genäherten Polhöhe

$$51^{0}.\ 3'.\ 33'',6$$

nur bloss noch um wenige Secunden ab. Der oben gefundene genaue Werth der Polhöhe ist

$$51^{0}.\ 3'.\ 37'',5$$

wogegen der vorher gefundene Näherungswerth nur noch um 0",6 zu gross ist. Streng genommen würde man die Näherung nun immer noch einmal wiederholen müssen, da man noch zu keiner vollständigen Ueberbereinstimmung mit dem zum Grunde gelegten Näherungswerthe gelangt ist, woraus sich, wenigstens nach meiner Meinung, ergiebt, dass die obige genaue Methode der Näherungsmethode in den meisten Fällen vorzuziehen ist, wenn man die Näherung bis zu einer völligen Uebereinstimmung zweier auf einander folgenden Näherungswerthe treiben will, was doch natürlich eigentlich die Strenge und Schärfe der Rechnung erfordert.

Weil die Höhe h auf der Ostseite, die Höhe h' auf der Westseite des Meridians genommen worden ist, so ist

$$180^0 < \omega < 360^0,\quad 0 < \omega' < 180^0$$

und in der Formel

$$\Theta = \omega - \omega' = \theta + \lambda . 360^0,$$

wo nur $\lambda = 0,\ -1,\ +1$ sein kann, ist also offenbar $\lambda = +1$ zu setzen, welches giebt:

$$\Theta = 360^0 - 76^0.16'.22'',62 = 283^0.43'.37'',38 .$$

Nun ist

$$\begin{array}{rl} \delta = & 8^0.\ 22'.\ 35'',45 \\ 90^0 - \delta = & 81\ .\ 37\ .\ 24,55 \\ 90^0 - h = & 56\ .\ 27\ .\ \ 0,00 \\ \hline & 138\ .\ \ 4\ .\ 24,55 = (90^0 - \delta) + (90^0 - h), \\ & 25\ .\ 10\ .\ 24,55 = (90^0 - \delta) - (90^0 - h); \\ & 69\ .\ \ 2\ .\ 12,27 = \frac{1}{2}\{(90^0 - \delta) + (90^0 - h)\}, \\ & 12\ .\ 35\ .\ 12,27 = \frac{1}{2}\{(90^0 - \delta) - (90^0 - h)\}. \end{array} \qquad \begin{array}{rl} h = & 33^0.\ 33'.\ 0'',00 \\ 90^0 - h = & 56\ .\ 27\ .\ 0,00 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \delta' = & 20\ .\ 10\ .\ 56,02 \\ 90^0 - \delta' = & 69\ .\ 49\ .\ \ 3,98 \\ 90^0 - h' = & 39\ .\ 56\ .\ 21,30 \\ \hline & 109\ .\ 45\ .\ 25,28 = (90^0 - \delta') + (90^0 - h'), \\ & 29\ .\ 52\ .\ 42,68 = (90^0 - \delta') - (90^0 - h'); \\ & 54\ .\ 52\ .\ 42,64 = \frac{1}{2}\{(90^0 - \delta') + (90^0 - h')\}, \\ & 14\ .\ 56\ .\ 21,34 = \frac{1}{2}\{(90^0 - \delta') - (90^0 - h')\}. \end{array} \qquad \begin{array}{rl} h' = & 50^0.\ \ 3'.\ 38,70 \\ 90^0 - h' = & 39\ .\ 56\ .\ 21,30 \end{array}$$

Bis auf Minuten abgekürzt ist:

$$\Theta = \omega - \omega' = 283^0.\ 44'$$

und

$$\frac{1}{2}\{(90^0 - \delta) + (90^0 - h)\} = 69^0.\ 2',$$

$$\frac{1}{2}\{(90^0 - \delta) - (90^0 - h)\} = 12\ .\ 35;$$

$$\frac{1}{2}\{(90^0-\delta')+(90^0-h')\}=54.53,$$

$$\frac{1}{2}\{(90^0-\delta')-(90^0-h')\}=14.56;$$

also

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\{(90^0-\delta)+(90^0-h)\}=2,610$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\{(90^0-\delta)-(90^0-h)\}=0,223$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\{(90^0-\delta')+(90^0-h')\}=1,422$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\{(90^0-\delta')-(90^0-h')\}=0,267$$

Die Construction auf Taf. I. ist mittelst der obigen numerischen Werthe ganz nach der in §. 12. gegebenen Anleitung ausgeführt worden, und die betreffende Figur bedarf, als völlig durch sich selbst verständlich, keiner weiteren Erläuterung. Der Radius, für welchen die Tangenten aufgetragen worden sind, ist ein preussischer Decimalzoll. Die Durchschnittspunkte der beiden Kreise sind C und D, und ihre Entfernungen von dem Punkte O, auf dem Maassstabe gemessen, finden sich:

$$OC=0,350 \text{ und } OD=1,240$$

welchen Linien als Tangenten die Winkel

$$19^0.17' \text{ und } 51^0.7'$$

entsprechen. Die erste Entfernung giebt also

$$\frac{1}{2}(90^0-\varphi)=45^0-\frac{1}{2}\varphi=19^0.17',$$

und die zweite Entfernung giebt

$$\frac{1}{2}(90^0-\varphi)=45^0-\frac{1}{2}\varphi=51^0.7'.$$

Da sich aus dieser letzteren Gleichung ein hier nicht zulässiger negativer Werth von φ ergiebt, so kann bloss

$$45^0-\frac{1}{2}\varphi=19^0.\ 17'$$

sein. In §. 13. ist gefunden

$$\varphi=51^0.\ 32'$$

also

$$90^0-\varphi=38^0.28',\ 45^0-\frac{1}{2}\varphi=19^0.14'.$$

Die Construction giebt

$$\varphi=51^0,26',$$

die genaue Rechnung

$$\varphi=51^0.\ 32'.$$

Ich glaube aber, dass man bei Anwendung noch grösserer Sorgfalt bei Ausführung der Construction eine noch bessere Uebereinstimmung zwischen Construction und Rechnung hätte erreichen können.

Für den Punkt C, welcher der wahren Polhöhe entspricht, ist

$$X=+OE=0,250;\quad X'=+OE'=0,300;$$

also

$$X-X'=-0,05;\quad X+X'=0,55;$$

folglich nach §. 12.

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega+\omega')=\frac{-0,05}{0,55}\cot\frac{1}{2}\Theta=\frac{1}{11}\cot\frac{1}{2}\Theta,$$

wo nach dem Obigen

$$\frac{1}{2}\Theta=141^0.51'.48'',69=141^0.52'.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\log\cot\frac{1}{2}\Theta&=10,1051082_n\\ \log 11&=\underline{\ 1,0413927}\\ \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Omega&=\ 9,0637155_n\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\Omega = 173^0.\ 23'.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{1}{2}(\omega - \omega') &= 141^0.\ 52' \\ \frac{1}{2}\Omega = \frac{1}{2}(\omega + \omega') &= 173\ .\ 23 \\ \omega &= 315\ .\ 15 \\ \omega' &= \ 31\ .\ 31 \end{aligned}$$

was nicht viel von dem, was wir in §. 14. gefunden haben, abweicht, wenn man nur nicht unbeachtet lässt, dass, was ω, ω' in §. 14. war, jetzt natürlich respective ω', ω ist.

Ich halte die vorhergehende Construction, namentlich in der Erweiterung, welche ich ihr für das Problem in seiner allgemeinsten Gestalt gegeben habe, und da sich auch aus ihr, wie ich gezeigt habe, leicht die Stundenwinkel herleiten lassen, für in theoretischer Rücksicht sehr bemerkenswerth, glaube aber auch, dass sich wegen ihrer leichten Ausführbarkeit wohl auch manche zweckmässige Anwendung in der Praxis von ihr machen lassen dürfte. Es würde sich selbst leicht ein besonderes Instrument angeben lassen, durch dessen Anwendung die Ausführung dieser Construction noch mehr erleichtert werden würde.

Vielleicht findet sich der eine oder andere Leser veranlasst, über ein solches Instrument weiter nachzudenken und das Ergebniss mitzutheilen.

II.

Ueber die Bedingung, unter welcher $a^x > x$ ist.

Von dem
Herrn Professor Dr. Hessel
an der Universität zu Marburg.

Lehrsatz.

Wenn e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems ist und es ist a positiv, so ist, wenn

$$a > \sqrt[e]{e}\ *)$$

ist, auch

$$a^x > x,$$

gleichviel welchen Werth man der Zahl x giebt.

Beweis. Es ist $a^x > x$, wenn $x.la > lx$ ist, d. h. wenn

$$la > \frac{lx}{x}$$

ist.

Da aber diese Ungleichung für jeden Werth von x gelten soll, so muss sie insbesondere auch für jene Werthe von x gelten, welche die grössten Werthe von $\frac{lx}{x}$ liefern.

---

*) $\sqrt[e]{e} = 1,444568 \ldots$ weil $e = 2,7182818 \ldots$

Um diese zu finden sei

$$la = y = \frac{lx}{x}.$$

Es ist dann

$$dy = \frac{1 - lx}{x^2}.dx \text{ und } d^2y = \frac{-3x + 2xlx}{x^4}(dx)^2.$$

Setzt man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - lx}{x^2} = 0,$$

so ersieht man sogleich, dass, wenn $1 - lx = 0$ ist, auch $lx = 1$, also $x = e$ ist, dass daher dann $la = \frac{1}{e}$, also $a = \sqrt[e]{e}$ ist, und dass, weil für $x = e$ auch

$$\frac{d^2y}{(dx)^2} = -\frac{1}{e^3}$$

eine negative Grösse ist, der gefundene Werth von $\frac{lx}{x} = \frac{le}{e}$ ein Maximum von $\frac{lx}{x}$ sein müsse.

Um aber zu untersuchen, ob für positive Werthe von x keine anderen (vielleicht grösseren) Maxima von $\frac{lx}{x}$ mehr vorkommen, so sei

$$1) \quad x = e + \xi, \text{ also } y = \frac{l(e + \xi)}{e + \xi}.$$

Es ist dann

$$dy = \frac{1 - l(e+\xi)}{(e + \xi)^2} d\xi,$$

und dieser Werth ist für jeden positiven Werth von ξ, der zwischen $\xi = e$ bis $\xi = \infty$ liegt, sicher stets negativ, weil $l(e+\xi) > le$, also > 1 ist.

Es hat also beim Wachsen von x zwischen $x = e$ bis $x = \infty$, d. h. beim Wachsen von ξ zwischen $\xi = 0$ bis $\xi = \infty$, die Grösse y stets ein negatives Differential, ein negatives Wachsthum, d. h. y nimmt hierbei stets ab, erreicht also keinen Werth mehr, der $\begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \frac{1}{e}$ ist.

2) Ist andererseits

$$x=e-\xi, \text{ also } y=\frac{l(e-\xi)}{e-\xi},$$

wobei $\xi \overline{\overline{>}} 0$ und $\overline{\overline{<}} e$, also $x \overline{\overline{<}} e$ und $\overline{\overline{>}} 0$ ist, so ist

$$dy=\frac{-1+l(e-\xi)}{(e-\xi)^2}.d\xi,$$

und da, für $\xi \overline{\overline{<}} e$ und $\overline{\overline{>}} 0$, auch $l(e-\xi) \overline{\overline{<}} le$, also <1 ist, so ist auch hier, beim Wachsen von ξ zwischen $\xi=0$ bis $\xi=e$, d. h. beim Abnehmen von x zwischen $x=e$ bis $x=0$, der Werth von dy stets negativ, also y stets abnehmend, so dass y zwischen $x=e$ und $x=0$ keinen Werth mehr erreicht, der $\overline{\overline{>}}\frac{1}{e}$ wäre. Es ist also zwischen $x=0$ bis $x=\infty$ der Werth von $y=\frac{lx}{x}$, welcher zu $x=e$ gehört, d. h. der Werth

$$\frac{lx}{x}=\frac{le}{e}=\frac{1}{e}$$

der grösste Werth von $\frac{lx}{x}$, und es existirt zwischen diesen Grenzen kein anderes Maximum von $\frac{lx}{x}$.

Es muss also, wenn für jeden positiven Werth von x stets $a^x>x$ sein soll, $la>\frac{1}{e}$, also $a>\sqrt[e]{e}$ sein.

Was nun negative Werthe von x betrifft, so ist, wenn a nur positiv ist, ohnehin, falls $x=-v$ gesetzt wird, stets

$$a^{-v}=\frac{1}{a^v}$$

eine positive Grösse, mithin stets

$$a^{-v}>-v.$$

Auch ist ohnehin $a^0=1$ also $a^0>0$.

Es ist also für $a>\sqrt[e]{e}$, für jeden Werth von x, stets $a^x>x$.

Anmerkung. Die wichtigsten zusammen gehörigen Werthe von x und von $y = \frac{lx}{x}$ sind folgende:

$x=0$	$x=1$	$x=e$	$x=e^{\frac{3}{2}}=3{,}9943\ldots.$	$x=\infty$
$y=-\infty$	$y=0$	$y=\frac{1}{e}$	$y=\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}=0{,}37553\ldots$	$y=0$
		Maximum von y.	$\frac{d^2y}{(dx)^2}$ geht, beim Wachsen vom x, aus $-$ in $+$ über.	

Sonstige interessante Werthe sind:

$$x=e^n \qquad x=e^{-n}=\frac{1}{e^n},$$

$$y=\frac{n}{e^n} \qquad y=-ne^n.$$

III.

Ueber drei Hauptarten von Logarithmensystemen.

Von dem

Herrn Professor Dr. Hessel

an der Universität zu Marburg.

Aus dem im vorhergehenden Aufsatze bewiesenen Satze (Siehe Seite 93.)

„Wenn $a > \sqrt[e]{e}$*), so ist für jeden Werth von x stets „$a^x > x$."

ergiebt sich als interessante Folgerung eine merkwürdige Eintheilung der Arten von Logarithmensystemen.

Man ersieht nämlich sofort:

1) dass es Logarithmensysteme giebt, in denen jede Zahl (Z) grösser als ihr Logarithme (log.art. Z) ist. Es sind diess alle jene Logarithmensysteme, deren Grundzahl $a > \sqrt[e]{e}$ ist; für diese ist also bei jeder beliebigen Zahl Z stets

$$Z > \text{log.art.}\, Z;$$

dass demgemäss insbesondere:

1, 1) im natürlichen Logarithmensysteme, wo $a = e = 2,71828...$

also $a > \sqrt[e]{e}$

$> 1,444568.....$

ist, auch $Z > lZ$ sein muss;

---

*) $e = 2,7182818...$ und $\sqrt[e]{e} = 1,444568...$

dass ebenso

1,2) im Briggischen Logarithmensysteme, wo

$$a=10>\sqrt[e]{e}$$

ist, auch $Z>\log Z$ sein muss;

2) dass es ein Logarithmensystem giebt, in welchem die Grundzahl $a=\sqrt[e]{e}$ ist, welches die merkwürdige Eigenschaft besitzt, dass in ihm ein Logarithme existirt, welcher der zugehörigen Zahl gleich ist, nämlich der Log e, dass aber jeder andere Logarithme darin kleiner ist als die dazu gehörige Zahl.

2,1) Ist nämlich

$$a=\sqrt[e]{e}=e^{\frac{1}{e}},$$

so ist

$$a^e=\left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e=e^{e\left(\frac{1}{e}\right)}=e^1=e,$$

also

$$\log\text{art}\, e=e.$$

2,2) Ist ferner $Z=a^{x.e}=e^{x.e.\left(\frac{1}{e}\right)}=e^x$, und es ist $x \gtrless 1$ und nicht $=1$, so ist $x.e<e^x$, also log.art.$Z<Z$; denn wäre $x.e \overline{\overline{>}} e^x$, so müsste $e \overline{\overline{>}} \frac{e^x}{x}$ sein. Da nun aber für

$$y=\frac{e^x}{x}$$

auch

$$dy=\frac{xd.e^x-e^xdx}{x^2}$$

$$=\frac{e^x}{x^2}(x-1).dx$$

ist, und demgemäss für $x-1=0$, also für $x=1$, auch y ein Minimum (nämlich $y=e$) wird (indem für jedes x, das >1 ist, beim Wachsen von x der Werth von y wächst, bis, bei $x=+\infty$, auch $y=\frac{e^\infty}{\infty}=\infty$ wird, und auch für jedes x, das positiv und <1 ist, beim Abnehmen von x, der Werth von y wächst, bis, bei $x=+\frac{1}{\infty}$, auch $y=\frac{e^{\frac{1}{\infty}}}{\left(\frac{1}{\infty}\right)}=\infty$ wird), so folgt, dass für jedes positive x, das $>$ oder <1 ist, bei $a=\sqrt[e]{e}$, auch stets

$$\left.\begin{array}{l} a^{x.e} > xe \\ \text{Zahl} > \text{log.art.} \end{array}\right\} \text{ oder } e^x > e.x \text{ sein muss.}$$

Da nun ohnehin, für einen negativen Werth von x, $a^{x.e} > x.e$ ist, so ist bei $a=\sqrt[e]{e}$ jeder von $+e$ verschiedene Logarithmus kleiner als die dazu gehörige Zahl:

$$\text{log.art.}\, e = e,$$

$$\text{log.art.}(e \pm Z) < (e \pm Z).$$

3) dass es Logarithmensysteme giebt, in welchen auch Logarithmen existiren, die grösser sind als die dazu gehörigen Zahlen (neben einem der = der betreffenden Zahl und neben anderen die $<$ als die betreffenden Zahlen sind). Es sind diess die Logarithmensysteme, deren Grundzahl $a < \sqrt[e]{e}$ ist.

Ist nämlich $a = e^{\frac{1}{ne}}$, also $< e^{\frac{1}{e}}$, so ist $a^{ne} = e$, also

$$\begin{aligned} \text{log.art.}\, e &= n.e \\ &> e. \end{aligned}$$

Es ist aber zugleich ferner, falls $Z = a^{nex} = e^x$ ist, auch

$$\left.\begin{array}{l} nex > e^x \\ \text{d. h. log.art.} Z > Z \end{array}\right\}, \text{ wenn } ne > \frac{e^x}{x},$$

$$> \left(\frac{e^{x-1}}{x}\right).e;$$

d. h. wenn

$$n > \frac{e^{x-1}}{x}$$

ist.

Ist nun z. B. für $x=4$ gefunden:

$$n = \frac{e^3}{4} = \frac{1}{4} e^3,$$

so ist, wenn

$$a = e^{\left(\frac{1}{\frac{1}{4}e^3.e}\right)} = e^{\frac{4}{e^4}} = \sqrt[e^4]{e^4}$$

ist,

a) für $x=4$, auch $\log.e^x = nex$,

$$\log.e^4 = \frac{1}{4}e^3.e.4 = e^4,$$

so dass $\log Z = Z$;

b) für $\left.\begin{matrix} x < 4 \\ \text{z. B. } x=3 \end{matrix}\right\}$, auch $\log.e^3 = \frac{1}{4}e^3.e.3$

$$= \frac{3}{4}e^4 = \frac{3}{4}e \cdot e^3 > e,$$

so dass $\log Z > Z$;

c) für $\left.\begin{matrix} x > 4 \\ \text{z. B. } x=5 \end{matrix}\right\}$, auch $\log e.^5 = \frac{1}{4}e^3.e.5$

$$= \frac{5}{4}e^4 = \left(\frac{5}{4e}\right)e^5 < e^5;$$

so dass $\log Z < Z$.

Anmerkung. Was das Logarithmensystem anbelangt, dessen Grundzahl $\left.\begin{matrix} a = \sqrt[e]{e} \\ = 1{,}444568 \end{matrix}\right\}$ ist, in welchem $Z = a^{x.e} = e^x$ ist, so ist bei ihm $\log.\text{art}.Z = e.lZ$, d. h. man erhält den log.art. Z, wenn man den natürlichen Logarithmen von Z mit der Grundzahl e des natürlichen Logarithmensystems multiplicirt.

Auch folgt aus

$$Z = 10^y = e^x = a^{ex},$$

dass

$$x = y.l10,$$

und dass

$$e.x = (e.l10).y,$$

dass also

$$\left.\begin{matrix} \log.\text{art}. \\ a = \sqrt[e]{e} \end{matrix}\right\} Z = (e.l10).\log.\text{brigg}.Z.$$

IV.

Zur elementaren Quadratur des Kreises.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Bezeichnen wir mit E_n die Fläche des dem Kreise eingeschriebenen regulären nEcks und entsprechend mit U_n die Fläche des umschriebenen regelmässigen Vielecks von n Seiten, so finden zwischen den vier Grössen E_n, U_n, E_{2n}, U_{2n} bekanntlich folgende Beziehungen statt:

1) $$E_{2n} = \sqrt{E_n . U_n},$$

2) $$U_{2n} = \frac{2.E_{2n} . U_n}{E_{2n} + U_n};$$

mittelst deren man aus E_n und U_n zunächst E_{2n} und darauf U_n zu berechnen pflegt. So einfach diese Formeln an sich sind, so ist doch die Benutzung derselben zur näherungsweisen Berechnung der Ludolph'schen Zahl etwas mühsam, da man, bei $n=4$ anfangend, bis zum 32768Eck gehen muss, um 7 Dezimalstellen von π zu erhalten; dieser Umstand hat bereits Herrn Prof. Kunze zur Reproduktion der Gregory'schen Näherungsformeln veranlasst, welche schon beim 256Eck dieselbe Genauigkeit darbieten wie auf jenem Wege das 32768Eck, und es können die Freunde einer synthetischen Betrachtungsweise die genannte Darstellung gewiss als Muster derartiger Ableitungen betrachten. Um aber auch den Verehrern heuristischer Methoden zu genügen, gebe ich hier ein Seitenstück zu jener Darstellung, dem man wenigstens die Kürze nicht absprechen wird.

Um zunächst bequemere Formeln zu haben, führe ich die reziproken Werthe von E_n und U_n ein und setze:

$$3)\qquad \frac{1}{E_n} = \overset{*}{E}_n, \quad \frac{1}{U_n} = \overset{*}{U}_n,$$

wodurch die Formeln 1) und 2) in die folgenden übergehen:

$$4)\qquad \overset{*}{E}_{2n} = \sqrt{(\overset{*}{E}_n . \overset{*}{U}_n)},$$

$$5)\qquad U_{2n} = \frac{1}{2}\left(\overset{*}{E}_{2n} + \overset{*}{U}_n\right).$$

Nach einem bekannten Satze der Arithmetik darf man für das geometrische Mittel zweier Zahlen a und $a+d$ das grössere arithmetische Mittel nehmen, wenn der dadurch entstehende Fehler, welcher weniger als $\frac{d^2}{8a}$ beträgt, den verlangten Grad von Genauigkeit nicht beeinträchtigt*). Benutzen wir diess von irgend einer Stelle $\overset{*}{U}_\nu = a$, $\overset{*}{E}_\nu = a+d$ an, so finden wir der Reihe nach:

---

*) Es ist nämlich identisch

$$\sqrt{a(a+d)} = \sqrt{(a+\frac{1}{2}d)^2 - \frac{1}{4}d^2},$$

und folglich, durch Weglassung von $\frac{1}{4}d^2$,

$$\sqrt{a(a+d)} < a + \frac{1}{2}d.$$

Sei ferner f der Fehler, welcher begangen wird, wenn man statt $\sqrt{a(a+d)}$ das zu grosse $a+\frac{1}{2}d$ setzt, so hat man

$$\sqrt{a(a+d)} = a + \frac{1}{2}d - f$$

oder

$$f + \sqrt{a(a+d)} = a + \frac{1}{2}d,$$

und daraus ergiebt sich durch beiderseitige Quadrirung

$$2f\sqrt{a(a+d)} + f^2 = \frac{1}{4}d^2,$$

oder, wenn man linker Hand a für $a+d$ setzt und f^2 weglässt, wodurch die linke Seite zu klein wird,

$$2fa < \frac{1}{4}d^2.$$

Hieraus folgt der im Texte benutzte Satz, dass f weniger als $\frac{d^2}{8a}$ beträgt.

$$\overset{*}{E}_n = a + d,$$

$$\overset{*}{U}_n = a,$$

$$\overset{*}{E}_{2n} = a + \frac{1}{2} d,$$

$$\overset{*}{U}_{2n} = a + \frac{1}{4} d,$$

$$\overset{*}{E}_{4n} = a + \frac{1}{4} d + \frac{1}{8} d,$$

$$\overset{*}{U}_{4n} = a + \frac{1}{4} d + \frac{1}{16} d,$$

$$\overset{*}{E}_{8n} = a + \frac{1}{4} d + \frac{1}{16} d + \frac{1}{32} d,$$

$$\overset{*}{U}_{8n} = a + \frac{1}{4} d + \frac{1}{16} d + \frac{1}{64} d$$

u. s. w.

Das Gesetz, nach welchem sich diese Ausdrücke bilden, ist leicht zu übersehen; die Werthe von $\overset{*}{U}$ enthalten immer eine geometrische Progression des Exponenten $\frac{1}{4}$ als Faktor von d, und die zugehörigen Werthe von $\overset{*}{E}$ differiren nur darin von jenen, dass ihr letztes Glied das Doppelte von dem letzten Gliede des $\overset{*}{U}$ beträgt. Die gemeinschaftliche Gränze, gegen welche die $\overset{*}{E}$ und $\overset{*}{U}$ convergiren, ist $\frac{1}{\pi}$, wenn wir den Radius des Kreises $=1$ setzen; so ergiebt sich denn die Formel

$$\frac{1}{\pi} = a + \frac{1}{4} d + \frac{1}{16} d + \frac{1}{64} d + \frac{1}{256} d + \ldots\ldots$$

$$= a + \frac{1}{3} d = \overset{*}{U}_n + \frac{1}{3}\left(\overset{*}{E}_n - \overset{*}{U}_n\right) = \frac{1}{3}\left(\overset{*}{E}_n + 2\overset{*}{U}_n\right),$$

und wenn man für $\overset{*}{E}_n$ und $\overset{*}{U}_n$ ihre Werthe setzt, so findet man für π die nicht übele Näherungsformel

$$6) \qquad \pi = \frac{3E_n U_n}{2E_n + U_n}.$$

Der dabei begangene Fehler beträgt weniger als $\frac{d^2}{8a}$, d. h weniger als

$$\frac{(\overset{*}{E}_s - \overset{*}{U}_s)^2}{8\overset{*}{U}_s} = \frac{(U_s - E_s)^2}{8E_s^2 . U_s}.$$

Um diese Fehlerbestimmung etwas bequemer zu machen, bemerken wir, dass für $s > 3$ auch $E_s > E_3$, d. h. $E_s > \frac{3}{4}\sqrt{3}$ und jedenfalls $U_s > 3$ ist; demnach haben wir

$$8E_s^2 . U_s > 8 . \frac{27}{16} . 3 > 40,$$

und folglich beträgt der beim Gebrauche der Formel 6) begangene Fehler weniger als $\frac{1}{40}(U_s - E_s)^2$. Hiernach ist es sehr leicht die Ludolph'sche Zahl schon aus Vielecken von geringer Seitenzahl mit vieler Genauigkeit zu berechnen; man hat z. B. für $s = 256$

$$U_{256} - E_{256} = 0{,}0004731 < \frac{5}{10^4},$$

mithin ist in diesem Falle der Fehler kleiner als

$$\frac{1}{40} . \frac{25}{10^8} = \frac{6{,}25}{10^9},$$

woraus zu ersehen ist, dass man aus E_{256} und U_{256}, wenn letztere auf eine hinreichende Stellenzahl berechnet sind, acht richtige Dezimalstellen für π erhalten kann. Diese flüchtigen Andeutungen mögen die Brauchbarkeit der Formel 6) zur Genüge beweisen.

V.

Bemerkung über die Convergenz der Reihen.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Zufolge eines Theoremes von Raabe convergirt oder divergirt die unendliche Reihe

$$1)\qquad u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots$$

jenachdem der Gränzwerth von

$$2)\qquad n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\qquad (n=\infty)$$

mehr oder weniger als die Einheit beträgt. Man kann diesem Satze noch eine etwas andere Form geben, welche in vielen Fällen bequem sein wird. Setzen wir nämlich

$$3)\qquad u_n=e^{t_n},$$

so convergirt oder divergirt die Reihe, jenachdem

$$\operatorname{Lim}\{n(e^{t_n-t_{n+1}}-1)\}$$

grösser oder kleiner als die Einheit ausfällt. Nun ist aber identisch

$$n(e^{t_n-t_{n+1}}-1)=\frac{e^{t_n-t_{n+1}}-1}{t_n-t_{n+1}}\cdot n(t_n-t_{n+1}),$$

und folglich der Gränzwerth hiervon gleich

$$\left[\operatorname{Lim}\frac{e^{t_n-t_{n+1}}-1}{t_n-t_{n+1}}\right]\cdot[\operatorname{Lim}\{n(t_n-t_{n+1})\}].$$

Nach dem bekannten Satze, dass für unendlich abnehmende δ

$$\operatorname{Lim}\frac{e^\delta-1}{\delta}=1$$

ist, lässt sich der Gränzwerth des ersten Faktors bestimmen, indem man $\delta=t_n-t_{n+1}$ nimmt und voraussetzt, dass die Differenz t_n-t_{n+1} unendlich abnehme. Die Entscheidung der Convergenz oder Divergenz hängt jetzt nur noch von dem zweiten Faktor $\operatorname{Lim}\{n(t_n-t_{n+1})\}$ ab, und diess giebt den Satz:

Die unendliche Reihe

$$e^{t_0}+e^{t_1}+e^{t_2}+e^{t_3}+\ldots..$$

convergirt oder divergirt, jenachdem der Gränzwerth von $n(t_n-t_{n+1})$ grösser oder kleiner als die Einheit wird, vorausgesetzt, dass die Differenz t_n-t_{n+1} sich der Gränze Null nähert.

Setzt man aus der Gleichung 3) rückwärts für t_n seinen Werth $l(u_n)$, so führt der vorige Satz auf den folgenden:

Die unendliche Reihe

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots.$$

convergirt oder divergirt, jenachdem der Gränzwerth von

$$nl\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$$

mehr oder weniger als die Einheit beträgt.

Vorausgesetzt wird hierbei allerdings, dass $t_n-t_{n+1}=l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ sich der Gränze Null, folglich $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ der Gränze 1 nähere, aber es liegt darin keine Beschränkung. Man weiss nämlich, dass die Reihe u_0+u_1+ etc. convergirt oder divergirt, jenachdem $\operatorname{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ kleiner oder grösser als die Einheit ist, und man wird das obige Criterium doch nur in dem Falle anwenden, wo $\operatorname{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ ist und man sich deswegen nach einem anderen Kennzeichen umsehen muss. Mit anderen Worten, die obige Regel tritt erst da in Kraft, wo die gewöhnliche Regel versagt.

Wenden wir diess z. B. auf die Reihe

$$\frac{1}{1^\mu}+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\ldots\ldots$$

an, wo $u_n=\frac{1}{n^\mu}$, so folgt auf der Stelle

$$\mathrm{Lim}\left\{n\,l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)\right\}=\mathrm{Lim}\left\{n\mu l\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}=\mu,$$

und folglich convergirt die Reihe für $\mu>1$, wie bekannt ist.

VI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

I.

Man soll die folgenden der Geometrie der Lage angehörigen Eigenschaften des Dreiecks und Vierecks beweisen und die vermöge des Princips der Reciprocität ihnen entsprechenden Correlate aufstellen.

1) Von einem Dreiecke abc sind die 3 Seiten ab, bc, ca verlängert, bis sie eine willkührlich ausserhalb gezogene Gerade uv in den Punkten p, q, r schneiden. In jedem der Punktesysteme (a, b, p), (b, c, q), (c, a, r) construirt man den jedesmaligen vierten harmonischen Punkt, welcher zwischen die zwei immer zuerst genannten Punkte fällt; heissen c', b', a' die so entstandenen drei neuen Punkte, so schneiden sich die Geraden aa', bb', cc' in einem Punkte.

2) Die vier Seiten ab, bc, cd, da eines Vierecks sind verlängert, bis sie eine willkührlich ausserhalb gezogene Gerade uv in p, q, r, s schneiden. Construirt man wie vorhin die zugehörigen vierten harmonischen Punkte a', b', c', d' zu den Punktesystemen (a, b, p), (b, c, q), etc. so bestimmen dieselben ein Viereck, dessen Gegenseiten $a'b'$, $c'd'$ und $b'c'$, $d'a'$ sich in zwei Punkten f und g der willkührlichen Geraden uv schneiden; zugleich liegt f mit a und c, g mit b und d in einer Geraden.

3) Sei wieder $abcd$ ein Viereck, h der Durchschnitt von ab und cd, k der von bc und da; verlängert man die drei Diagonalen ac, bd, hk des so entstandenen vollständigen Vierecks bis sie eine willkührlich ausserhalb gezogene Gerade uv in p, q, r schneiden, und construirt in den Punktesystemen (a, c, p), (b, d, q), (h, k, r) den jedesmaligen vierten harmonischen Punkt, welcher zwischen die zwei immer zuerst genannten Punkte fällt, so liegen die entstandenen drei neuen Punkte in einer Geraden.

Welche schon bekannten Sätze folgen hieraus, wenn man die willkührliche Gerade uv unendlich weit wegrücken lässt?

II.

1) Man soll einen gegebenen Kegel mittelst einer Ebene so durchschneiden, dass die ihrer Fläche nach grösste Parabel dabei zum Vorschein kommt.

2) Einen gegebenen Kegel mittelst einer Ebene so zu durchschneiden, dass der Rotationskörper, welcher entsteht, wenn man die als Parabel vorausgesetzte Schnittfigur sich um ihre Achse drehen lässt, den grössten cubischen Inhalt bekommt.

III.

Arithmetisches Theorem.

Sei N eine beliebige ganze Zahl und in ihre Primfaktoren zerfällt, so dass man setzen kann:

$$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots;$$

seien ferner P_1, P_2, ... P_n die relativen Primzahlen zu N, welche kleiner als N selbst sind ($P_1 = 1$, ... $P_n = N - 1$), so gilt für die Summe ihrer $m$ten Potenzen die Formel

$$P_1^m + P_2^m + P_3^m + \ldots + P_n^m$$

$$= \frac{1}{m+1} N^{m+1} \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots$$

$$+ \frac{1}{2} m_1 B_1 N^{m-1} (1-a)(1-b)(1-c)\ldots$$

$$- \frac{1}{4} m_3 B_3 N^{m-3} (1-a^3)(1-b^3)(1-c^3)\ldots$$

$$+ \frac{1}{6} m_5 B_5 N^{m-5} (1-a^5)(1-b^5)(1-c^5)\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hier bedeuten m_1, m_2, ... die Binomialkoeffizienten des ganzen Exponenten m, B_1, B_2..... die Bernoulli'schen Zahlen der Reihe nach.

IV.

Lehrsatz.

Wenn $y=f(x)$ die auf rechtwinklige Coordinaten bezogene Gleichung einer ebenen Curve bezeichnet, welche sich ins Unendliche hinaus erstreckt und immer mehr von der Abscissenachse entfernt $[f(\infty)=\infty]$, so ist

$$\eta = \sqrt{[f(h+\xi)]^2 - k^2}$$

die Gleichung einer asymptotischen Curve zur ersten; h und k bedeuten hier willkührliche Constanten. Für $y=\frac{b}{a}x$ z. B. wird

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(h+\xi)^2 - k^2}$$

und diess ist die Gleichung der Hyperbel als asymptotischer Curve. [Der Begriff der Asymptote ist hier verallgemeinert und als relativer genommen; zwei Curven $y=\phi(x)$ und $y'=\psi(x)$ heissen asymptotische, wenn $y-y'$ für unendlich wachsende x gegen die Gränze Null convergirt.]

V.

Man soll die nachstehenden Formeln ableiten, welche zur Berechnung der Ludolph'schen Zahl sehr bequem sind:

$$\pi = \frac{24}{10}\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{1}{10} + \frac{2.4}{3.5}\,\frac{1}{10^2} + \ldots\ldots\right\}$$
$$+ \frac{56}{100}\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{2}{100} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \ldots\ldots\right\}$$

ferner

$$\pi = \frac{28}{10}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \ldots\ldots\right\}$$
$$+ \frac{30336}{100000}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \ldots\right.$$

Aufgaben*)

von Herrn O. Bermann, Kandidaten des höheren Lehramts zu Coblenz.

1) Die Spitze eines eine Kugel vom Radius r umhüllenden Kegels hat die Entfernung d vom Mittelpunkte derselben. Wie gross ist der Kubikinhalt des ausserhalb der Kugel liegenden Theiles des Kegels?

Resultat: $\frac{1}{3}\pi\frac{r^2}{d}(d-r)^2$.

2) Ein Planet vom Radius r hat die Entfernung d von der Sonne, deren Radius wir mit R bezeichnen wollen. Wie gross ist der Inhalt des ausserhalb des Planeten liegenden Theiles des Kernschattenkegels?

Resultat: $\frac{1}{3}\,\frac{\pi r^3}{d}\,\frac{(d-R+r)^2}{R-r}$.

3) Eine Kugel vom Radius r passt in einen geraden abgestumpften Kegel. Der Radius des Berührungskreises ist ϱ. Kubikinhalt und Mantel des Kegels zu bestimmen.

Resultat: $\frac{1}{3}\pi\frac{r^3}{\varrho^2}(4r^2-\varrho^2)$,

$4\frac{\pi r^4}{\varrho^2}$.

---

*) Der Einsender glaubt in den drei folgenden Aufgaben Das, was sie sein wollen, aufgestellt zu haben.

VII.

Miscellen.

Ueber ein Integral in Euler's Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum.

Von Herrn Doctor J. P. Wolfers zu Berlin.

In §. 723., Pag. 292. von Eulers theoria motus corporum solidorum seu rigidorum wird als Integral des Differentials

$$d\lambda = \frac{-dl(C-D\cos l)}{\sin l\sqrt{1-C^2+2CD\cos l-(1+D^2)\cos l^2}}$$

folgender Werth angegeben:

$$\lambda = E + \text{arc.sin.}\left(\frac{-D+C\cos l}{\sin l}\right),$$

wo E eine Constante ist. Dieses Integral scheint nicht richtig zu sein, wie man auch durch Differentiation sehen kann, indem man daraus nach einiger Umformung

$$d\lambda = \frac{-dl(C-D\cos l)}{\sin l.\sqrt{1-(1+C^2)\cos l^2+2CD\cos l-D^2}}$$

erhält. Um nun das oben gegebene Differential, welches man auch so schreiben kann:

$$d\lambda = \frac{-dl(C-D\cos l)}{\sin l.\sqrt{\sin l^2-(C-D\cos l)^2}}$$

zu integriren, bin ich folgendermassen zu Werke gegangen. Setzt man

$$C-D\cos l = L(D-C\cos l),$$

wo L eine neue Veränderliche ist, so erhält man hieraus:

$$\cos l = \frac{C-DL}{D-CL},\ \sin l^2 = \frac{(D^2-C^2)(1-L^2)}{(D-CL)^2},\ \sin l\, dl = \frac{(D^2-C^2)dL}{(D-CL)^2}$$

und

$$C - D\cos l = \frac{(D^2 - C^2)L}{D - CL};$$

und wenn man diese Werthe in das gegebene Differential substituirt, nach einiger Umformung:

$$d\lambda = -\frac{LdL\sqrt{D^2 - C^2}}{(1 + L^2)\sqrt{1 - (1 + D^2 - C^2)L^2}}.$$

Um nun ferner die Integration zu vereinfachen, setze man

$$L^2 = x \text{ und } D^2 - C^2 = \alpha^2,$$

wodurch

$$d\lambda = -\frac{\frac{1}{2}\alpha dx}{(1 - x)\sqrt{1 - (1 + \alpha^2)x}}$$

wird. Endlich setze man

$\sqrt{1 - (1 + \alpha^2)x} = z$, woraus $x = \frac{1 - z^2}{1 + \alpha^2}$ und $dx = \frac{-2z dz}{1 + \alpha^2}$ folgt, und wir erhalten

$$d\lambda = \frac{\alpha dz}{\alpha^2 + z^2},$$

also

$$\lambda = E + \text{arc.tg.}\left(\frac{z}{\alpha}\right).$$

Nun muss man noch von z nach und nach zu den ursprünglichen Veränderlichen zurückgehen, und es wird demnach

$$\frac{z}{\alpha} = \frac{\sqrt{1 - (1 + D^2 - C^2)L^2}}{\sqrt{D^2 - C^2}} = \frac{\sqrt{1 - (1 + D^2 - C^2)\frac{(C - D\cos l)^2}{(D - C\cos l)^2}}}{\sqrt{D^2 - C^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin l^2 - (C - D\cos l)^2}}{D - C\cos l} = \frac{\sqrt{1 - C^2 + 2CD\cos l - (1 + D^2)\cos l^2}}{D - C\cos l},$$

also

$$\lambda = E + \text{arc.tg.}\left(\frac{\sqrt{1 - C^2 + 2CD\cos l - (1 + D^2)\cos l^2}}{D - C\cos l}\right),$$

wo E eine Constante ist. Durch Differentiation kann man sich a posteriori leicht überzeugen, dass dieses Integral dem gegebenen Differentiale entspricht.

VIII.

Untersuchung über die Form eines Wurzelausdruckes der Gleichung des $n$ten Grades.

Von

Herrn L. Mossburger,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

§. 1.

Es sei allgemein:

$$F(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0\ldots. \quad (1)$$

die Gleichung des $n$ten Grades, worin $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ bekannte Coefficienten sind. Im Allgemeinen soll zwischen diesen Coefficienten keinerlei Beziehung stattfinden.

Nehmen wir zuerst den speciellen Fall an, dass alle Wurzeln der Gleichung (1) einander gleich seien, so ist, wenn x' eine solche Wurzel bezeichnet:

$$x'=-\frac{a_1}{n}.$$

Auch lässt sich in diesem Falle die Gleichung (1) unter nachstehender Form darstellen:

$$F(x)=\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^n$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0\ldots..(2)$$

Differentiiren wir die Gleichung (2) $(n-1)$mal nach einander, so erhalten wir:

$$F'(x)=n\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^{n-1}$$

$$=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\ldots..+2a_{n-2}x+a_{n-1}=0,\ (3)$$

$$F''(x)=n(n-1)\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^{n-2}$$

$$=n(n-1)x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\ldots\ldots..+2.1\,a_{n-2}=0\ldots..\ (4)$$

$$F'''(x)=n(n-1)(n-2)\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^{n-3}$$

$$=n(n-1)(n-2)x^{n-3}+(n-1)(n-2)(n-3)a_1x^{n-4}\ldots..+3.2.1a_{n-3}=0\ (5)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\left.\begin{aligned}F^{(n-3)}(x)&=n(n-1)\ldots..5.4\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^3=n(n-1)\ldots..5.4x^3\\&+(n-1)(n-2)\ldots..4.3a_1x^2+(n-2)(n-3)\ldots\ldots.3.2a_2x\\&+(n-3)(n-4)\ldots..2.1a_3=0\end{aligned}\right\}\ldots(6)$$

$$\left.\begin{aligned}F^{(n-2)}(x)&=n(n-1)\ldots..4.3\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^2=n(n-1)\ldots.4.3x^2\\&+(n-1)(n-2)\ldots..3.2a_1x+\ldots+(n-2)(n-3)\ldots..2.1.a_2=0\end{aligned}\right\}\ldots.(7)$$

$$\left.\begin{aligned}F^{(n-1)}(x)&=n(n-1)\ldots.3.2\left(x+\frac{a_1}{n}\right)=n(n-1)\ldots..3.2\,x\\&+(n-1)(n-2)\ldots..2.1.\,a_1=0\end{aligned}\right\}\ldots.(8)$$

Da in den Gleichungen (1), (2), (3), ... (8) die Ausdrücke

$$\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^n,\ n\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^{n-1},\ n(n-1)\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^{n-2},\ \ldots.$$

$$\ldots..\ n(n-1)\ldots.3.2\left(x+\frac{a_1}{n}\right)$$

für $x=-\frac{a_1}{n}$ zu Null werden, so müssen auch die respective diesen Ausdrücken gleichgeltenden Ausdrücke:

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots..+a_nx+a_n,$$

$$nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots..+2a_{n-2}x+a_{n-1},$$

$$n(n-1)x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\ldots\ldots..+3.2.a_{n-3}x+2.1.a_{n-2},$$

$$\vdots$$

$$n(n-1)\ldots.3.2.x+(n-1)(n-2)\ldots..2.1\,a_1$$

für $x = -\frac{a_1}{n}$ zu Null werden. Durch die auf einander folgende Substitution von $-\frac{a_1}{n}$ statt x in Nr. (7), (6),.... (2), (1) erhält man, wenn der Kürze wegen die Resultate dieser Substitutionen durch $F\left(-\frac{a_1}{n}\right)$, $F'\left(-\frac{a_1}{n}\right)$, $F''\left(-\frac{a_1}{n}\right)$, u. s. w. bezeichnet werden:

$$F\left(-\frac{a_1}{n}\right)=0,\ F'\left(-\frac{a_1}{n}\right)=0,\ F''\left(-\frac{a_1}{n}\right)=0,\ldots F^{(n-2)}\left(-\frac{a_1}{n}\right)=0\ldots(9)$$

Nehmen wir nun wieder an, die Gleichung (1) habe lauter ungleiche Wurzeln, und es sei x' eine solche Wurzel, so wird:

$$x' = -\frac{a_1}{n} + \varphi_1\{a_1, a_2, a_3, \ldots.. a_n\} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

sein. Die in der Klammer eingeschlossenen Coefficienten werden in verschiedenen Potenzen und Verbindungen mit einander vorkommen, und diese Verbindungen und Coefficienten - Potenzen werden wiederum in verschiedenen Wurzelzeichen eingeschachtelt sein.

Es sind aber nachstehende Eigenschaften des im Funktionszeichen φ_1 enthaltenen Ausdrucks (10) auch ohne weitere Beweisführung als gültig vorauszusetzen:

1) Muss sich der unter dem Funktionszeichen φ_1 begriffene allgemeine Ausdruck in Nr. (10) auf alle möglichen speciellen Fälle anwenden und reduciren lassen, wenn er für den allgemeinsten Fall (nämlich für den, wo alle Wurzeln ungleich sind) gültig sein soll. Daraus folgt

2) dass sich auch der in Nr. (10) gegebene Ausdruck auf denjenigen Fall zurückführen lassen muss, in welchem alle Wurzeln als gleich angenommen werden; in diesem Falle reducirt sich aber die Wurzel der Gleichung (1) auf $x' = -\frac{a_1}{n}$; mithin muss bei der Voraussetzung gleicher Wurzeln die Funktion $\varphi_1\{a_1, a_2, a_3, \ldots. a_n\}$ verschwinden. Nun finden aber für diesen Fall nur die Bedingungsgleichungen (9) statt, und keine mehr, und keine weniger; würde nun der Ausdruck $\varphi_1\{a_1, a_2, a_3, \ldots. a_n\}$ dadurch zu Null, dass andere Coefficienten - Funktionen als die in Nr. (9) oder wenigstens solche, in welchen die in Nr (9) nicht als Faktoren enthalten wären, nebst jenen in Nr. (9) zu Null würden, oder einige von denen in (9) vorkommenden sich nicht auf Null reduciren liessen, so entstünden im ersten Falle zwischen den Coefficienten $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots a_n$ Gleichungen, die der Voraussetzung gleicher Wurzeln nicht genügen würden, weil nur die in (9) aufgestellten dieser Voraussetzung genügen; im andern Falle würden einige der Beziehungsgleichungen mangeln, die in (9) als nothwendige Bedingung gleicher Wurzeln dargestellt sind. Aus diesem allem geht hervor, dass die in (9) enthaltenen Funktionen alle in dem Ausdruck (10),

der unter dem Funktionszeichen begriffen ist, vorkommen müssen, widrigenfalls der allgemeine Ausdruck einer Wurzel von einer Gleichung des $n$ten Grades mit n verschiedenen Wurzeln, nicht auf den speciellen Fall von n gleichen Wurzeln reducirt werden könnte, dass also die Wurzel x' der Gleichung (1) unter der Form:

$$x' = -\frac{a_1}{n} + \varphi_1 \left\{ F\left(-\frac{a_1}{n}\right), F'\left(-\frac{a_1}{n}\right), F''\left(-\frac{a_1}{n}\right), \ldots F^{(n-2)}\left(-\frac{a_1}{n}\right) \right\} \quad (11)$$

begriffen sein muss.

Um einige Anwendungen von dem eben bewiesenen Satze als Erläuterung zu geben, so sei:

$$\text{I.} \quad F(x) = x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

die gegebene Gleichung. Hier ist

$$F'(x) = 2x + a_1 = 0.$$

Dies giebt $x = -\frac{a_1}{n}$; dieser Werth von x in der gegebenen Gleichung substituirt, giebt:

$$F\left(-\frac{a_1}{2}\right) = \frac{a_1^2}{4} - a_2.$$

Es ist aber in diesem Beispiele $n=2$, also $n-2=0$, also $F^{(n-2)}\left(-\frac{a_1}{n}\right) = F\left(-\frac{a_1}{2}\right)$; folglich hat nach Nr. (11) der Wurzelwerth x' die Form:

$$x' = -\frac{a_1}{2} + \varphi_1 \left\{ F\left(-\frac{a_1}{2}\right) \right\} \quad \text{oder} \; x' = -\frac{a_1}{2} + \varphi_1 \left\{ \frac{a_1^2}{4} - a_2 \right\},$$

welche mit der wahren Wurzel $x' = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$ übereinstimmt.

$$\text{II.} \quad F(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0. \quad \ldots\ldots (a)$$

$$\text{Hier ist } F'(x) = 3x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0, \quad \ldots\ldots (b)$$

$$F''(x) = 6x + 2a_1 = 0. \quad \ldots\ldots (c)$$

Aus der letzten Gleichung erhalten wir $x = -\frac{a_1}{3}$; dieser Werth von x in (a) und (b) substituirt, giebt:

$$F'\left(-\frac{a_1}{3}\right) = \frac{a_1^2}{3} - a_2 = 0, \; F\left(-\frac{a_1}{3}\right) = \frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3 = 0.$$

Nun ist, wenn man in Nr. (11) $n=3$ setzt, $n-2=1$, $n-3=0$; folglich ist:

$$x' = -\frac{a_1}{3} + \varphi_1 \left\{ F\left(-\frac{a_1}{3}\right), F'\left(-\frac{a_1}{3}\right) \right\} \text{ oder}$$

$$x' = -\frac{a_1}{3} + \varphi_1 \left\{ \left(\frac{a_1^2}{3} - a_2\right), \left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right) \right\};$$

aber die wahre Wurzel der Gleichung (a) ist

$$x' = -\frac{a_1}{3} + \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right) + \sqrt{\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right)^2 - \frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3} - a_2\right)^3}}{2}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right) - \sqrt{\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right)^2 - \frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3} - a_2\right)^3}}{2}}.$$

Aus der Vergleichung dieser Ausdrücke zieht man die Uebereinstimmung der darin enthaltenen Funktionen.

§. 2.

Sind in der Gleichung:

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0 \ldots (1)$$

$n-1$ gleiche Wurzeln, und ist α eine der gleichen Wurzeln, hingegen α_1 diejenige, welche mit den übrigen Wurzeln nicht gleich ist, so wird die Gleichung (1) unter dieser Voraussetzung zu:

$$F(x) = (x+\alpha)^{n-1}(x+\alpha_1) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0 \ldots (2$$

Differentiiren wir diese Gleichung $(n-2)$mal nach einander, so erhalten wir:

$$F'(x) = (n-1)(x+\alpha)^{n-2}.(x+\alpha_1) + (x+\alpha)^{n-1}$$
$$= n x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + (n-2) a_2 x^{n-3} + \ldots\ldots + 2a_{n-2} x + a_{n-1} = 0 \ldots\ldots (3)$$

$$F''(x) = (n-1)(n-2(x+\alpha)^{n-3}.(x+\alpha_1) + 2(n-1)(x+\alpha)^{n-2}$$
$$= n(n-1) x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 x^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + 2.1 a_{n-2} = 0 \ldots (4)$$

$$F'''(x) = (n-1)(n-2)(n-3)(x+\alpha)^{n-4}(x+\alpha_1) + 3(n-1)(n-2)(x+\alpha)^{n-3}$$
$$= n(n-1)(n-2) x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3) a_1 x^{n-4} + \ldots + 3.2.1 a_{n-3} = 0 \ldots (5)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$F^{(n-3)}(x) = (n-1)(n-2)\ldots.4.3(x+\alpha)^2(x+\alpha_1)$$
$$+ (n-3)(n-1)(n-2)(n-3)\ldots..4(x+\alpha)^3$$

$$
\left.\begin{array}{l}=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots.4.x^3+(n-1)(n-2)\ldots\ldots.3a_1.x^2\\+(n-2)(n-3)\ldots..2a_2x+(n-3)(n-4)\ldots\ldots.2.1a_3=0\end{array}\right\}\ldots\ldots.(6)
$$

$$
F^{(n-2)}(x)=(n-1)(n-2)..3.2(x+\alpha)(x+\alpha_1)+(n-2)(n-1)(n-2)..4.3(x+\alpha)^2
$$

$$
\left.\begin{array}{l}=n(n-1)\ldots..4.3.x^2+(n-1)(n-2)\ldots..3.2a_1.x\\+(n-2)(n-3)\ldots\ldots.2.1.a_2=0\end{array}\right\}\ldots\ldots(7)
$$

Da in den Gleichungen (2), (3).....(7) die auf der linken Seite der Gleichheitszeichen befindlichen Theile für $x=-\alpha$ zu Null werden, weil alle Glieder den Faktor $x+\alpha=0$ haben, so müssen auch die auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens befindlichen Theile zu Null werden. Der Werth von α bestimmt sich aber aus der Gleichung (7), welche sich auf

$$
F^{(n-2)}(x)=n(n-1)x^2+2(n-1)a_1x+2.1.a_2=0 \quad \ldots . (8)
$$

reducirt.

Bezeichnet man die Wurzeln dieser Gleichung mit α' und α'', so erhält man:

$$
\left.\begin{array}{l}x=\alpha'=-\frac{a_1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{a_1^2}{n}-\frac{2a_2}{n-1}},\\x=\alpha''=-\frac{a_1}{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{a_1^2}{n}-\frac{2a_2}{n-1}}.\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(9)
$$

Einer dieser Werthe von x muss die Gleichungen (2), (3)....(7) befriedigen, weil, wie wir so eben gesehen haben, jede derselben eine Wurzel $x=-\alpha$ hat, und einer dieser beiden Werthe gleich $-\alpha$ sein muss. Wir nehmen nun an, α' sei der Werth, der diese Eigenschaft besitzt, also gleich $-\alpha$ ist, so erhalten wir aus (2) (3).....(7) durch Substitution folgende Bedingungsgleichungen:

$$
F(\alpha')=0, F'(\alpha')=0, F''(\alpha')=0,\ldots\ldots F^{(n-3)}(\alpha')=0 \ldots\ldots.. (10)
$$

Wäre aber $\alpha''=-\alpha$, so hätten wir eben so:

$$
F(\alpha'')=0, F'(\alpha'')=0, F''(\alpha'')=0,\ldots . F^{(n-3)}(\alpha'')=0 \ldots.. (11)
$$

Die Gleichungen (10) und (11) können nicht gleichzeitig stattfinden, weil nur eine der beiden Grössen α' und α'' gleich $-\alpha$ sein kann; finden daher die in (10) statt, so sind die in (11) ungültig, und umgekehrt.

Nehmen wir nun wieder wie in §. 1. an, es seien lauter ungleiche Wurzeln in der Gleichung (1) vorhanden, und bezeichnen mit x' eine solche Wurzel, so werden wir beweisen, dass der Ausdruck für die Wurzel x' folgende Form hat:

$$x' = -\frac{a_1}{n} + \varphi_2 \left\{ \begin{array}{l} F\left(-\frac{a_1}{n}\right), F'\left(-\frac{a_1}{n}\right), F''\left(-\frac{a_1}{n}\right), \ldots F^{(n-3)}\left(-\frac{a_1}{n}\right) \\ \pm\left[f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}, f_2\{F'(\alpha').F'(\alpha'')\}, \ldots\right. \\ \qquad \left.\ldots f_{n-2}\{F^{(n-3)}(\alpha').\ F^{(n-3)}(\alpha'')\}\right] \end{array} \right\} \quad (12)$$

In diesem Ausdrucke bezeichnen $\varphi, f_1, f_2, f_3, \ldots f_{n-2}$ einstweilen zum Theil noch unbestimmte Funktionen.

Schliessen wir wieder wie in §. 1., so muss sich der Ausdruck (12) auf alle speciellen Fälle reduciren und anpassen lassen, wenn er für den allgemeinsten Fall tauglich sein soll, also sowohl auf denjenigen, in welchem $n-1$, als auch auf jenen, in welchem n gleiche Wurzeln vorkommen. Im letzten Falle muss er sich auf $x' = -\frac{a_1}{n}$ reduciren; dieses kann aber nach §. 1. nur statt finden, wenn

$$f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}, f_2\{F'(\alpha').F'(\alpha'')\}, \ldots f_{n-2}\{F^{(n-3)}(\alpha').F^{(n-3)}(\alpha'')\}$$

selbst Funktionen von $F\left(-\frac{a_1}{n}\right), F'\left(-\frac{a_1}{n}\right), \ldots F^{(n-3)}\left(-\frac{a_1}{n}\right)$ sind; im ersten Falle muss aber entweder den Gleichungen (10), oder aber jenen in (11) genügt werden; da aber specielle Fälle eintreten können, wo $\alpha' = -\alpha$ ist, so wie auch wieder andere, wo $\alpha'' = -\alpha$ ist, so muss der allgemeine Ausdruck in (12) so beschaffen sein, dass er sich sowohl auf den einen als auf den andern dieser Fälle anpassen lässt; dies kann aber nur dann geschehen, wenn $F(\alpha')$ und $F(\alpha'')$; $F'(\alpha')$ und $F'(\alpha'')$; $F''(\alpha')$ und $F''(\alpha'')$; u. s. w. in einer solchen Verbindung vorkommen, dass dadurch sowohl für $\alpha' = -\alpha$, als für $\alpha'' = -\alpha$, beziehlich den Gleichungen (10) oder (11) genügt wird. Diese Verbindungen können aber, wie leicht ersichtlich ist, keine anderen sein, als $F(\alpha').\ F(\alpha'')$, $F'(\alpha').F'(\alpha'')$, $F''(\alpha').\ F''(\alpha'')$, u.s.w. Würde nun eine einzige Funktion dieser Produkte in dem Ausdrucke (12) nicht vorkommen, oder andere Funktionen als solche dieser Produkte vorhanden sein, so würden bei der Voraussetzung von $n-1$ gleichen Wurzeln (und zwar sowohl für $\alpha' = -\alpha$, oder für $\alpha'' = -\alpha$) zwischen den constanten Coefficienten der Gleichung (1) Bedingungsgleichungen entstehen, die für $\alpha' = -\alpha$ den Gleichungen (10) und für $\alpha'' = -\alpha$ den Gleichungen (11) widersprechen würden. Weil endlich bei $n-1$ gleichen Wurzeln der Ausdruck im Funktionszeichen φ_2 der Gleichung (12) nicht Null werden darf, und dennoch die Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\} = 0, f_2\{F'(\alpha').F'(\alpha'')\} = 0, f_3\{F''(\alpha').F''(\alpha'')\} = 0, \\ \qquad \ldots\ldots f_{n-2}\{F^{(n-3)}(\alpha').\ F^{(n-3)}(\alpha'')\} = 0 \end{array} \right\} \ldots (13)$$

wie wir so eben gezeigt haben, für $n-1$ gleiche Wurzeln stattfinden müssen, so müssen diese Produktenfunktionen, die in dem

Ausdrucke (12) durch eine besondere Klammer eingefasst sind, durch das Zeichen (+) oder (—) (oder mit beiden nach einander, weil die Gründe für das Vorhandensein von jedem dieselben sind) mit den andern vorkommenden Funktionen verbunden sein; und nicht durch Multiplikation, oder durch Division; denn wäre diese eingeklammerte Summe von Produktenfunktionen durch Multiplikation mit den andern vorkommenden Funktionen verbunden, so würde im Fall von $n-1$ gleichen Wurzeln, wegen der Gleichungen in No. (13), der Ausdruck im Funktionszeichen φ_2 der Gleichung (12) verschwinden, was offenbar nicht sein darf; wäre aber jene Produktensumme in (12) mit den andern dort verkommenden Funktionen durch Division verbunden, so würde der Ausdruck im Funktionszeichen φ_2 im Fall $n-1$ gleicher Wurzeln, wegen No. (13), unendlich gross, was ebenfalls im Allgemeinen nicht sein kann; mithin kann diese Verbindung nur mittelst der Zeichen (+) und (—) stattfinden. Dass übrigens diese andern Funktionen, mit welchen jene Summe der Produktenfunktionen, wie so eben erwiesen wurde, durch (+) oder (—) verbunden sein müssen, keine anderen als $F\left(-\frac{a_1}{n}\right)$, $F'\left(-\frac{a_1}{n}\right)$, $F''\left(-\frac{a_1}{n}\right)$, ... $F^{(n-3)}\left(-\frac{a_1}{n}\right)$ sein dürfen, wurde schon zu Anfang dieses Paragraphen erwiesen; auch folgt dies unmittelbar aus dem Beweise in §. 1. Aus diesem allem geht hervor, dass die in der Gleichung (12) aufgestellte Wurzelform einer Gleichung des $n$ten Grades den Anforderungen und Bedingungen von n und $n-1$ gleichen Wurzeln durchaus Genüge leistet.

Wir wollen dieses in einem Beispiel zeigen.

Es sei wieder die Gleichung

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(a)$$

gegeben, so haben wir wie in §. 1.

$$F'(x)=3x^2+2a_1x+a_2=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(b)$$

Die Wurzeln α' und α'' dieser Gleichung sind:

$$\left.\begin{aligned} x=\alpha'&=-\frac{a_1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{a_1^2}{3}-a_2},\\ x=\alpha''&=-\frac{a_1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{a_1^2}{3}-a_2}\end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots \;(c)$$

Werden diese Werthe nach einander in (a) eingeführt, so erhält man:

$$F(\alpha')=-\left[\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)+\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^{\frac{3}{2}}\right],$$

$$F(\alpha'')=-\left[\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^{\frac{3}{2}}\right];$$

folglich ist

$$F(\alpha').F(\alpha'')=\left[\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3\right]$$

$$\text{und } F\left(-\frac{a_1}{3}\right)=\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3.$$

Setzt man aber in No. (12) $n=3$, und wendet beide Zeichen (+) und (—) an, so kommt:

$$x'=-\frac{a_1}{3}+\varphi_2\left\{F\left(-\frac{a_1}{3}\right)+f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}\right\}$$

$$+\varphi_2\left\{F\left(-\frac{a_1}{3}\right)-f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}\right\}$$

oder

$$x'=-\frac{a_1}{3}+\varphi_2\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)+f_1\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3\right\}\right.$$

$$\left.+\varphi_2\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)-f_1\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3\right\}\right.\right..$$

Diese Form, verglichen mit der wahren Wurzel der Gleichung (a), welche am Ende des §. 1. beigefügt ist, lässt leicht die Uebereinstimmung beider erkennen, wie übrigens die Funktionszeichen φ_2 und f_1, so wie die im Nenner vorkommende Zahl 2, bestimmt werden, werden wir gegen das Ende dieser Untersuchung noch sehen.

§. 3.

Wir haben in §. 2. die Beschaffenheit einer Funktion zu bestimmen angefangen, welche dieselbe haben muss, wenn sie dazu dienen soll, einen Wurzelausdruck einer Gleichung des $n$ten Grades mit lauter ungleichen Wurzeln darzustellen. Bis jetzt sind von dieser Funktion noch keine weiteren Postulate verlangt worden, als dass sie sowohl jedem der einzelnen Fälle von n, und von $n-1$ gleichen Wurzeln insbesodere, als auch beiden zugleich Genüge leiste. Das Gesetz der Bildung der Wurzelzeichen, die in diesen Funktionen vorkommen, wird einstweilen ganz unberücksichtigt gelassen. Wir gehen daher, abgesehen von diesem Bildungsgesetze, zur Bestimmung der Erfordernisse über, wo $n-2$ gleiche Wurzeln in einer Gleichung des $n$ten Grades vorkommen, und untersuchen den Einfluss der sich ergebenden Resultate auf die Beschaffenheit der Funktion, welche den Wurzelausdruck der Gleichung des $n$ten Grades mit n ungleichen Wurzeln darstellt. Zu diesem Zweck nehmen wir an, es seien $-\alpha_2$ und $-\alpha_3$ diejenigen zwei Wurzeln, welche weder unter sich, noch mit irgend einer der übrigen Wurzeln gleich sind, $-\alpha$ bezeichne eine der $n-2$ übrigen gleichen Wurzeln der Gleichung:

$$F(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (1)$$

Zufolge der obigen Annahme geht diese Gleichung über in:

$$F(x)=(x+\alpha)^{n-2}(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)$$
$$=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0\ldots\ldots(2)$$

Differentiren wir diese Gleichung $(n-3)$mal nach einander, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}F'(x)&=(n-2)(x+\alpha)^{n-3}\{x^2+(\alpha_2+\alpha_3)x+\alpha_2\alpha_3\}+(x+\alpha)^{n-2}\{2x+\alpha_2+\alpha_3\}\\&=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\ldots\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1}=0\end{aligned}\right\}(3)$$

$$\left.\begin{aligned}F''(x)&=(n-2)(n-3)(x+\alpha)^{n-4}\{x^2+(\alpha_2+\alpha_3)x+\alpha_2\alpha_3\}\\&\qquad+2(n-2)\{2x+\alpha_2+\alpha_3\}(x+\alpha)^{n-3}+2(x+\alpha)^{n-2}\\&=n(n-1)x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+(n-2)(n-3)a_2x^{n-4}+\ldots\\&\qquad\ldots+3.2a_{n-3}x+2.1a_{n-2}=0\end{aligned}\right\}(4)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\left.\begin{aligned}F^{(n-5)}(x)&=C_1(x+\alpha)^3+C_2(x+\alpha)^4+C_3(x+\alpha)^5\\&=n(n-1)\ldots.6.x^5+(n-1)(n-2)\ldots\ldots5.a_1x^4+(n-2)(n-3)\ldots\ldots.4.a_2x^3\\&+(n-3)(n-4)\ldots\ldots3.a_3x^2+(n-4)(n-5)\ldots\ldots2a_4x+(n-5)(n-6)\ldots.2.1a_5=0\end{aligned}\right\}(5)$$

$$\left.\begin{aligned}F^{(n-4)}(x)&=B_1(x+\alpha)^2+B_2(x+\alpha)^3+B_3(x+\alpha)^4\\&=n(n-1)\ldots\ldots5x^4+(n-1)(n-2)\ldots\ldots..4a_1x^3\\&+(n-2)(n-3)\ldots\ldots3a_2x^2+(n-3)(n-4)\ldots\ldots2a_3x\\&+(n-4)(n-5)\ldots\ldots..2.1.a_4=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(6)$$

$$\left.\begin{aligned}F^{(n-3)}(x)&=A_1(x+\alpha)+A_2(x+\alpha)^2+A_3(x+\alpha)^3\\&=n(n-1)\ldots..4x^3+(n-1)(n-2)\ldots\ldots.3a_1x^2\\&+(n-2)(n-3)\ldots..2a_2x+(n-3)(n-4)\ldots\ldots..2a_3=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(7)$$

In den drei letzten Gleichungen bezeichnen A_1, A_2, A_3, B_1, u. s. w. die Coefficienten der Potenzen von $x+\alpha$, deren nähere Werthbestimmung übrigens unnöthig ist.

Auch in diesen Gleichungen wird der auf der linken Seite des Gleichheitszeichens befindliche Theil für $x=-\alpha$ zu Null, weil alle Glieder desselben $x+\alpha=0$ zum Faktor haben, mithin müssen auch die auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens befindlichen Theile zu Null werden, wenn $x=-\alpha$ wird. Man kann daher für den Fall, dass $n-2$ gleiche Wurzeln in der Gleichung (1) vorhanden sind, und wenn $\beta', \beta'', \beta'''$ die Wurzeln der Gleichung No. (7), also von der Gleichung

$$n(n-1)(n-2)x^3+3(n-1)(n-2)a_1x^2+3.2.(n-2)a_2x+3.2.1.a_3=0\ldots\ldots(8)$$

sind, wie in §. 2. schliessen, dass einer der drei Werthe β', β'', β''', welche x aus dieser Gleichung erhält, wenn man ihn in die Gleichungen (2), (3),...(6) statt x einführt, diese befriedigen muss, weil, wie wir so eben gesehen haben, jede dieser Gleichungen eine Wurzel $x = -\alpha$ hat; nehmen wir nun an, es sei $\beta' = -\alpha$, so erhalten wir aus (2), (3),...(6) folgende Bedingungsgleichungen:

$$F(\beta')=0, F'(\beta')=0, F''(\beta')=0, \ldots\ldots F^{(n-4)}(\beta')=0 \;.\;.\;.\;. \quad (9)$$

Wäre aber $\beta'' = -\alpha$, oder $\beta''' = -\alpha$, so würden wir die Bedingungsgleichungen:

$$F(\beta'')=0, F'(\beta'')=0, F''(\beta'')=0, \ldots\ldots F^{(n-4)}(\beta'')=0 \;.\;.\;. \quad (10)$$

$$F(\beta''')=0, F'(\beta''')=0, F''(\beta''')=0, \ldots\ldots F^{(n-4)}(\beta''')=0 \;.\;. \quad (11)$$

erhalten; jedoch müssen wir wohl bemerken, dass die Gleichungssysteme (9), (10), (11) nicht gleichzeitig bestehen, sondern, wenn die Gleichungen von einem dieser Systeme stattfinden, so bestehen die in den beiden übrigen Systemen nicht.

Nehmen wir jetzt wieder an, es seien nur ungleiche Wurzeln in der Gleichung (1) vorhanden, und es bezeichne x' eine solche Wurzel, so wird der Werth von x', wie wir sogleich beweisen werden, folgende Form haben:

(12)

$$x' = -\frac{a_1}{n} + \varphi_{n-3} \left\{ \begin{array}{l} F\left(-\frac{a_1}{n}\right), F'\left(-\frac{a_1}{n}\right), F''\left(-\frac{a_1}{n}\right), \ldots F^{(n-4)}\left(-\frac{a_1}{n}\right) \\ \pm[f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}, f_2\{F'(\alpha').F'(\alpha'')\}, \ldots f_{n-3}\{F^{(n-4)}(\alpha').F^{(n-4)}(\alpha'')\}] \\ \pm[\mathfrak{f}_1\{F(\beta').F(\beta'').F(\beta''')\}, \mathfrak{f}_2\{F'(\beta').F'(\beta'').F'(\beta''')\}, \ldots \\ \qquad \ldots\ldots \mathfrak{f}_{n-3}\{F^{(n-4)}(\beta').F^{(n-4)}(\beta'')F^{(n-4)}(\beta''')\}] \end{array} \right\}$$

In diesem Ausdrucke bezeichnen $\varphi_3, f_1, f_2 \ldots\ldots \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots\ldots$ Funktionen, deren nähere Bestimmung sich aus dem weitern Verlauf der Untersuchung ergeben wird.

Dass in dem Ausdrucke, der in dem Funktionszeichen φ_3 enthalten ist, die Funktionenverbindung

$$F\left(-\frac{a_1}{n}\right), F'\left(-\frac{a_1}{n}\right) \ldots\ldots F^{(n-4)}\left(-\frac{a_1}{n}\right)$$

$$\pm[f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}, f_2\{F'(\alpha').F'(\alpha'')\}, \ldots\ldots f_{n-3}\{F^{(n-4)}(\alpha').\; F^{(n-4)}(\alpha'')\}]$$

vorkommen muss, ist in §. 1. und §. 2. ausführlich bewiesen worden; dass aber mit dieser noch die Funktionenverbindung

$$\left[\begin{array}{l} f_1\{F(\beta').F(\beta'').F(\beta''')\}, f_2\{F'(\beta').F'(\beta'').F'(\beta''')\}, \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f_{n-3}\{F^{(n-4)}(\beta').F^{(n-4)}(\beta'').F^{(n-4)}(\beta''')\} \end{array}\right]$$

mittelst des Zeichens (+) und (—) in Verbindung gebracht werden muss, geht daraus hervor, dass der allgemeine Ausdruck der Wurzel der Gleichung (1), wenn sie nur ungleiche Wurzeln hat, sich auf den Fall zurückführen lassen muss, wo $n-2$ gleiche Wurzeln in der Gleichung (1) vorhanden sind; dieser Fall hat aber eine der Gleichungsgruppen (9), (10) oder (11) zur Folge; da nun aber sowohl $\beta'=-\alpha$, oder auch $\beta''=-\alpha$, oder endlich $\beta'''=-\alpha$ sein kann, so können wir wie in §. 2. schliessen, dass in diesem Falle die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} f_1\{F(\beta').F(\beta'')F(\beta''')\}=0 \\ f_2\{F'(\beta').F'(\beta'').F'(\beta''')\}=0 \\ f_{n-3}\{F^{(n-4)}(\beta').F^{(n-4)}(\beta'').F^{(n-4)}(\beta''')\}=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (13)$$

nicht nur richtig sind, sondern eine nothwendige Folge der Annahme von $n-2$ gleichen Wurzeln in der Gleichung (1) sein müssen, und dass diese Produktenfunktionen in dem Ausdrucke (12) vorkommen müssen, wenn jener allgemeine Wurzelausdruck sich auf den speciellen Fall von $n-2$ gleichen Wurzeln anwenden lassen soll; dass diese Produktenfunktionen mit den vorhergehenden durch die Zeichen (+) und (—) verbunden sein müssen, wird ganz auf gleiche Art wie in §. 2. bewiesen, woraus die Richtigheit der Form des Ausdrucks in Nr. (12) hervorgeht.

Sind γ', γ'', γ''', γ^{iv} die Wurzeln der Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} F^{(n-4)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)x^4+4(n-1)(n-2)(n-3)a_1x^3 \\ \quad +4.3.(n-2)(n-3)a_2x^2+4.3.2(n-3)a_3x+4.3.2.1.a_4=0 \end{array}\right\} \ldots (14)$$

so können wir ganz auf gleiche Art, wie in §. 1., §. 2., §. 3. zeigen, dass die nachstehende Wurzelform einer Gleichung des $n$ten Grades die Bedingungen von $n, n-1, n-2$ und $n-3$ gleichen Wurzeln enthält, und sich daher auf jeden dieser speciellen Fälle anwenden lässt; α', α''; β', β'', β''' haben hierin ihre früheren Bedeutungen:

(15)

$$x'=-\frac{a_1}{n}+\varphi_4\left\{\begin{array}{l} F\left(-\frac{a_1}{n}\right), F'\left(-\frac{a_1}{n}\right), F''\left(-\frac{a_1}{n}\right), \ldots\ldots F^{(n-5)}\left(-\frac{a_1}{n}\right) \\ \pm[f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}, f_2\{F'(\alpha').F'(\alpha'').\}, \ldots f_{n-4}\{F^{(n-5)}(\alpha').F^{(n-5)}(\alpha'')\}] \\ \pm[f_1\{F(\beta').F(\beta'').F(\beta''')\}, f_2\{F'(\beta').F'(\beta'').F'(\beta''')\}, \ldots\ldots \\ \qquad\qquad \ldots f_{n-4}\{F^{(n-5)}(\beta').F^{(n-5)}(\beta'').F^{(n-5)}(\beta''')\}] \\ \pm\left[\begin{array}{l} \mathfrak{S}_1\{F(\gamma').F(\gamma'').F(\gamma''')F(\gamma^{\mathrm{iv}})\}, \mathfrak{S}_2(F'(\gamma').F'(\gamma'').F'(\gamma''').F'(\gamma^{\mathrm{iv}})\}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \mathfrak{S}_{n-4}\{F^{(n-5)}(\gamma').F^{(n-5)}(\gamma'').F^{(n-5)}(\gamma''').F^{(n-5)}(\gamma^{\mathrm{iv}})\} \end{array}\right] \end{array}\right\}$$

§. 4.

Gehen wir endlich zu demjenigen Falle über, wo in der Gleichung

$$F(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0\ldots\ldots(1)$$

nur zwei gleiche Wurzeln vorkommen, und nehmen $-\alpha$ wieder als eine der zwei gleichen Wurzeln an, die übrigen seien: $-\alpha_1$, $-\alpha_2, -\alpha_3, \ldots\ldots -\alpha_{n-2}$. Dadurch geht die Gleichung (1) in folgende über:

$$\begin{aligned}F(x)&=(x+\alpha)^2f(x)\\&=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0\quad(2)\end{aligned}$$

worin der Kürze wegen:

$$f(x)=(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)\ldots\ldots\ldots(x+\alpha_{n-2})\quad\ldots(3)$$

gesetzt wurde.

Durch Differentiiren finden wir:

$$(4)\quad\left.\begin{aligned}F'(x)&=2(x+\alpha)f(x)+(x+\alpha)^2f'(x)\\&=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\ldots\ldots\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1}=0\end{aligned}\right\}$$

In dieser Gleichung müssen beide Theile für $x=-\alpha$ verschwinden. Sind daher $\nu', \nu'', \nu''', \ldots\ldots \nu^{(n-1)}$ die Wurzeln der Gleichung

$$(5)\quad F'(x)=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\ldots\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1}=0$$

so muss eine dieser Wurzeln $=-\alpha$ sein; es sei daher $\nu'=-\alpha$, so muss, wenn man ν' statt x in die Gleichung (1) oder (2) einführt, sie auf Null reducirt werden, d. h. es muss

$$F(\nu')=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

sein; es können aber Fälle eintreten, wo entweder $\nu''=-\alpha$, oder $\nu'''=-\alpha$ u. s. w. sein kann; in diesen Fällen müsste dann, wie in §. 3., respective:

$$\begin{aligned}F(\nu'')&=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)\\F(\nu''')&=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)\\&\vdots\\F(\nu^{(n-1)})&=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)\end{aligned}$$

sein; der allgemeine Ausdruck muss sich aber nicht nur auch auf den von zwei gleichen Wurzeln der Gleichung (1) reduciren und anpassen lassen, sondern es müssen selbst diese speciellen Fälle alle in ihm enthalten sein, d. h. für jede der Wurzeln ν', ν'', ν''', ..., $\nu^{(n-1)}$, es mag eine beliebige von ihnen $= -\alpha$ sein, so muss aus ihm die entsprechende der Gleichungen (6) (7)...(9) deducirt werden können; da aber diese Gleichungen nicht gleichzeitig statt finden, sondern im Gegentheil, wenn eine, z. B. die Gleichung (7), statt findet, die übrigen alle nicht statt finden, so wird diesen Forderungen nur dann entsprochen werden können, wenn in dem allgemeinen Ausdrucke für die Wurzel x' der Gleichung (1) das Produkt

$$F(\nu').F(\nu'').F(\nu''')\ldots\ldots F(\nu^{(n-1)})$$

oder eine Funktion dieses Products vorkommt. Dieses Produkt oder eine Funktion desselben muss mit den vorhergehenden Funktionstheilen im Wurzelausdrucke durch die Zeichen (+) und (—) verbunden sein, was ganz eben so wie in §. 2. bewiesen wird.

§. 5

Theils aus den im vorigen Paragraphen angegebenen Gründen, theils aus dem sichtbaren Bildungsgesetze, das sich in den gefundenen Wurzelausdrücken des §. 1., §. 2., §. 3., §. 4. offenbar ausspricht, endlich theils auch aus dem allen diesen Entwicklungen zu Grunde liegenden Grundsatz, nämlich: **dass sich der Ausdruck eines Wurzelwerths einer Gleichung des $n$ten Grades mit n verschiedenen Wurzeln, auf alle speciellen Fälle von n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, ...3, 2 gleichen Wurzeln zurückführen lassen muss**, d. h. dass jener allgemeine Ausdruck so beschaffen sein muss, dass die einzelnen Relationen zwischen den Coefficienten der Gleichung (1), durch welche diese speciellen Fälle charakterisirt werden, so zu sagen implicite in jenem allgemeinen Ausdruck vorhanden sind, oder doch wenigstens aus ihm deducirt werden können, glauben wir berechtigt zu sein, dem Wurzelwerth, welcher allen diesen speciellen Fällen von n, $n-1$, $n-2$, ...3, 2 gleichen Wurzeln genügt, welches also der wahre Ausdruck für eine Wurzel der Gleichung Nr. (1) ist, wenn n verschiedene Wurzeln in derselben vorhanden sind, folgende Form geben zu können, wenn wir auf den Zeichenwechsel die gehörige Rücksicht nehmen:

$$x' = -\frac{a_1}{n} + \varphi_{n-1}\left\{\begin{array}{l} F\left(-\frac{a_1}{n}\right) + f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\} + \mathfrak{f}_1\{F(\beta').F(\beta'').F(\beta''')\} \\ + \mathfrak{F}_1\{F(\gamma').F(\gamma'').F(\gamma''').F(\gamma^{\mathrm{IV}})\} + \ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \chi\{F(\nu').F(\nu'').F(\nu''') \quad \ldots\ldots\ldots \; F(\nu^{(n-1)})\} \end{array}\right\}$$

$$+\varphi_{n-1}\left\{\begin{array}{l} F\left(-\frac{a_1}{n}\right)-f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}+\mathfrak{f}_1\{F(\beta').F(\beta'').F(\beta''')\} \\ +\mathfrak{G}_1\{F(\gamma').F(\gamma'').F(\gamma''').F(\gamma^{iv}\}+\ldots\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\chi\{F(\nu').F(\nu'').F(\nu''')\quad\ldots\ldots\quad F(\nu_{(n-1})\}\} \end{array}\right\}$$

$$+\varphi_{n-1}\left\{\begin{array}{l} F\left(-\frac{a_1}{n}\right)+f_1\{F(\alpha').F(\alpha'')\}-\mathfrak{f}_1\{F(\beta').F(\beta'').F(\beta''')\} \\ +\mathfrak{G}_1\{F(\gamma').F(\gamma'').F(\gamma''').F(\gamma^{iv})\}+\ldots\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\chi\{F(\nu')F.(\nu'')F.(\nu''')\quad\ldots\ldots\quad F(\nu^{(n-1)})\} \end{array}\right\}$$

+ u. s. w.

Die Reihenfolge der Glieder bricht ab, wenn der Zeichenwechsel erschöpft ist. Die Buchstaben α', α'', β', β'', β''', γ'...... in diesem Ausdrucke haben die frühere Bedeutung. Hingegen sind f_1, $\mathfrak{f}_1$, F_1,.......χ Funktionszeichen, die nur durch Wurzelzeichen dargestellt werden können. Man sieht aus der Betrachtung dieses Ausdrucks für eine Wurzel der Gleichung des $n$ten Grades, dass demselben noch eine Bestimmung der Wurzelzeichen, nebst ihrer gehörigen Verbindung fehlt. Die Bestimmung derselben, so wie die einiger Zahlen-Coefficienten wollen wir im folgenden Paragraphen an einigen Gleichungen versuchen.

§. 6.

1) Es sei die Gleichung

$$x^2+a_1x+a_2=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

gegeben. Für diesen Fall erhalten wir nach dem resultirenden Ausdrucke in §. 5., weil $n=2$ ist,

$$x'=-\frac{a_1}{2}+\varphi_1\left\{F\left(-\frac{a_1}{2}\right)\right\}=-\frac{a_1}{2}+\varphi_1\left\{\frac{a_1^2}{4}-a_2\right\}.$$

Setzen wir diesen Werth von x' in die Gleichung (a) statt x, so erhalten wir:

$$-\left(\frac{a_1^2}{4}-a_2\right)+\left[\varphi\left\{\frac{a_1^2}{4}-a_2\right\}\right]^2=0,$$

$$\text{woraus } \varphi_1 \left\{\frac{a_1^2}{4} - a_2\right\} = \pm\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} \text{ ist;}$$

mithin bezeichnet hier das Funktionszeichen φ_1 die Quadratwurzel, folglich ist

$$x' = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

2) Es sei die gegebene Gleichung:

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Es ist also nach dem Ausdrucke in §. 5., weil $n=3$,

$$x' = -\frac{a_1}{3} + \varphi_2 \left\{F\left(-\frac{a_1}{3}\right) + f_1 \{F(\alpha').F(\alpha'')\}\right\}$$
$$+ \varphi_2 \left\{F\left(-\frac{a_1}{3}\right) - f_1 \{F(\alpha').F(\alpha'')\}\right\},$$

oder wenn wir die bereits in §. 2. gefundenen Werthe von $F\left(-\frac{a_1}{3}\right)$ und von $F(\alpha').F(\alpha'')$ gebrauchen, so ist:

$$(b)$$
$$x' = -\frac{a_1}{3} + \varphi_2 \left\{\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right) + f_1 \left\{\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right)^2 - \frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3} - a_2\right)^3\right\}\right\}$$
$$+ \varphi_2 \left\{\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right) - f_1 \left\{\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right)^2 - \frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3} - a_2\right)^3\right\}\right\}$$

Da diese Wurzelform alle möglichen speciellen Fälle unter sich begreifen muss, also auch die mit zwei, und drei gleichen Wurzeln, so wie auch jene, wo einzelne Coefficienten, a_1, a_2 oder a_3, zu Null werden, so nehmen wir zuerst an, es sei $x = -u'$ eine der drei ungleichen Wurzeln der Gleichung (a), so werden die beiden andern $x = -u''$ und $x = -u'''$ durch eine Gleichung von der Form:

$$x^2 + Ax + B = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

bestimmt, wo der Kürze wegen

$$A = a_1 - u', \; B = a_2 - u'(a_1 - u') \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

gesetzt wurde; aus dieser Gleichung erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} x &= -u'' = -\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4B}, \\ x &= -u''' = -\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4B}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Nehmen wir jetzt an, es seien in der Gleichung (a) zwei Wurzeln gleich, so folgt aus (e), dass

$$\frac{1}{2}\sqrt{A^2-4B}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (f)$$

sein muss. Aus (b) folgt aber nach §. 2., dass für zwei gleiche Wurzeln

$$f_1\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3\right\}=0 \ldots\ldots (g)$$

sein muss; die Bedingungen (f) und (g) müssen nothwendig identisch sein, daher muss auch

$$\frac{1}{2}\sqrt{A^2-4B}=f_1\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3\right\}$$

sein. Es wurde aber in §. 2. bewiesen, dass im Funktionszeichen f_1 kein anderer Ausdruck der Coefficienten a_1, a_2 und a_3, als

$$\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3$$

enthalten sein kann, mithin muss auch A^2-4B mit diesem Ausdruck identisch sein, daher muss sich das Symbol f_1 durch $\frac{1}{2}\sqrt{}$ darstellen lassen, oder es muss

$$f_1\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3}$$

sein. Es wird daher der Ausdruck (b) zu:

$$(h)$$

$$r=-\frac{a_1}{3}+\varphi_2\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3}\right\}$$
$$+\varphi_2\left\{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a_1a_2}{3}-\frac{2a_1^3}{27}-a_3\right)^2-\frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3}-a_2\right)^3}\right\}$$

Wir erhalten endlich aus (a), wenn wir in jener Gleichung $a_1=a_2=0$ setzen:

$$x' = \sqrt[3]{-a_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

Aus (h) erhalten wir unter der gleichen Voraussetzung

$$x' = \varphi_2\left\{-a_3 + \frac{a_3}{2}\right\} + \varphi_2\left\{-a_3 - \frac{a_3}{2}\right\} \quad \ldots\ldots (k)$$

Die Summe dieser Ausdrücke in den Funktionszeichen φ_2 kann aber nur auf $\sqrt[3]{-a_3}$ zurückgeführt werden, wenn das erste in φ_2 enthaltene Glied $\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right)$ in (h) noch mit einem jetzt noch unbekannten Zahlen-Coefficienten n vervielfacht ist, indem weder dieses Glied, noch der übrige im Wurzelzeichen enthaltene Ausdruck eine andere Aenderung erleiden darf; setzen wir also in (h) $n\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right)$ statt des ersten Glieds $\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right)$, so wird jenes für $a_1 = a_2 = 0$ zu $-n a_3$; man erhält also aus (h) statt des Ausdrucks (k) folgenden:

$$x' = \varphi_2\left\{-n a_3 + \frac{a_3}{2}\right\} + \varphi_2\left\{-n a_3 - \frac{a_3}{2}\right\} \quad \ldots\ldots (l)$$

Aus der Vergleichung von (i) und (l) folgt, dass entweder:

$$-n a_3 + \frac{a_3}{2} = 0$$

oder

$$-n a_3 - \frac{a_3}{2} = 0$$

sein muss; lässt man die letztere dieser Gleichungen gelten, so folgt $n = -\frac{1}{2}$; dieser Werth in der ersten substituirt, gibt $+\frac{3a_3}{2}$, welcher Werth unbrauchbar ist; setzt man aber $-n\,a_3 + \frac{a_3}{2} = 0$, so kommt $n = +\frac{1}{2}$; dadurch wird aber $-n\,a_3 - \frac{a_3}{2}$ zu $-a_3$, mithin ist $x' = \varphi_2\{-a_3\}$. Hieraus, und aus (i) folgt:

$$\sqrt[3]{-a_3} = \varphi_2\{-a_3\},$$

woraus hervorgeht, dass das Symbol φ_2 die dritte Wurzel vorstellen muss. Es wird also der Ausdruck (b), wenn man das erste Glied in φ_2 mit $\frac{1}{2}$ multiplicirt:

$$x' = -\frac{a_1}{3} + \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right) + \sqrt{\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right)^2 - \frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3} - a_2\right)^3}}{2}}$$
$$+ \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right) - \sqrt{\left(\frac{a_1 a_2}{3} - \frac{2a_1^3}{27} - a_3\right)^2 - \frac{4}{27}\left(\frac{a_1^2}{3} - a_2\right)^3}}{2}}.$$

Es versteht sich von selbst, dass niemand einen so langen Weg zur Auflösung einer Gleichung des 3ten Grades einschlagen wird; allein es handelte sich auch hier gar nicht darum, eine neue Auflösung der Gleichung des 3ten Grades zu geben, sondern darum, theils eine Anwendung des in §. 5. gefundenen Ausdrucks zu machen, theils auch um einen allgemeinen Weg angeben zu können, das Unbestimmte in jenem Ausdruck angebbar zu machen. Es ist endlich nicht zu läugnen, dass sich mit dem höhern Grad einer Gleichung die Schwierigkeiten dieser Bestimmungen vermehren; allein es ist doch die Möglichkeit vorhanden, gerade auf diesem Wege zu einem allgemeinen Wurzelbildungsgesetz zu gelangen, (welches allein noch fehlt), was auf dem Wege der Combination, wie ich fest überzeugt bin, und was erst ein neulich erschienenes Werk, in welchem die Gleichungen des 5ten und 6sten Gtades gelöst sein sollten, aber es halt nicht sind, neuerdings erwiesen hat, niemals geschehen wird.

IX.

Ueber Paul Halcken's Darstellung der gewöhnlichen Auflösung der cubischen Gleichungen durch die cardanische Formel.

Von

dem Herausgeber.

Paul Halcken, Arithmeticus zu Buxtehude und Mitglied der Societät der Kunst-Rechner, oder vielmehr der im Jahre 1690 gestifteten, die Kunst-Rechnung lieb- und übenden Societät zu Hamburg, aus welcher späterhin die jetzt noch dort blühende Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften hervorging, in dieser die Kunst-Rechnung lieb- und übenden Societät der Haltende genannt, und nicht zu verwechseln mit seinem Bruder Johann Halcke, Ihro Königl. Maj. zu Dännemark und Norwegen bestelltem Mathematicus und Arithmeticus zu Utersen, in der die Kunst-Rechnung lieb- und übenden Societät der Harrende genannt, hat in seinem viele schöne Problemata und andere sinnreiche Dinge enthaltenden Buche: Deliciae Mathematicae, oder Mathematisches Sinnen-Confect, bestehend in Fünfhundert vier und siebentzig auserlesenen, zum Theil gar Kunstreichen Algebrai-, Geometri- und Astronomischen Auffgaben, mit vielen künstlichen Solutionen und Reguln gezieret, insonderheit einer curieusen Erfindung der Logarithmorum, von der Quadratura Circuli, nach der unendlichen Näherung, und andern Sinnreichen-Sachen mehr u. s. w. Allen Liebhabern der Mathematischen Wissenschafften, insonderheit der Edlen Rechen-Kunst, zur wohlgemeinten Gemüths-Ergetzung auffgetragen von Paul Halcken, Arithmet. in Buxtehude, in der Societaet der Kunstrechner dem Haltenden. Zu bekommen bei Johann Hinrich Wolgemuht, Schreib- und Rechenmeister an der Schulen zu St. Nicolai und bei jeden Zunfft-Verwandten der Kunstliebenden Societaet in Hamburg. Hamburg. 1719. 8. — die cardanische Formel nach einem von dem gegenwärtig in den Lehrbüchern der Algebra gewöhnlichen verschiedenen Verfahren durch eine blosse Substitution entwickelt, welches nach meiner Meinung noch jetzt gekannt und bei'm Unterrichte angewandt zu werden verdient, weshalb ich dasselbe in diesem Aufsatze mit verschiedenen von mir selbst hinzugethanen Bemerkungen den Lesern des Archivs mittheilen will, da es wohl noch wenig bekannt ist.

Wenn a und b positive Grössen bezeichnen, so kann eine von ihrem zweiten Gliede auf bekannte Weise befrei'te cubische Gleichung nur unter einer der vier folgenden Formen auftreten:

$$x^3+3ax-2b=0,$$

$$x^3-3ax-2b=0,$$

$$x^3+3ax+2b=0,$$

$$x^3-3ax+2b=0.$$

Weil aber die dritte und vierte Gleichung durch die Substitution $x=-y$ in

$$-y^3-3ay+2b=0,$$

$$-y^3+3ay+2b=0;$$

d. i. in

$$y^3+3ay-2b=0,$$

$$y^3-3ay-2b=0$$

übergehen; so ist klar, dass wir als specifisch verschiedene Formen bloss die beiden Gleichungen

$$x^3+3ax-2b=0,$$

$$x^3-3ax-2b=0$$

zu betrachten brauchen, wie auch Paul Halcken thut, wobei noch zu bemerken ist, dass die Coefficienten $3a$ und $2b$ statt der sonst gewöhnlichen a und b bloss der Vereinfachung der späterhin folgenden Formeln wegen gleich von vorn herein eingeführt worden sind.

Betrachten wir nun zuerst die Form

$$x^3+3ax-2b=0,$$

und führen, indem wir

$$x=\frac{u^2-a}{u}$$

setzen, eine neue unbekannte Grösse u ein, so erhalten wir:

$$\frac{u^6-3au^4+3a^2u^2-a^3}{u^3}+\frac{3au^2-3a^2}{u}-2b=0,$$

also, wenn wir auf beiden Seiten dieser Gleichung mit u^3 multipliciren und aufheben, was sich aufheben lässt:

$$u^6-2bu^3-a^3=0,$$

welche Gleichung wie eine quadratische Gleichung aufgelöst werden kann. Die Auflösung giebt

$$u^3=b\pm\sqrt{b^2+a^3},$$

also

$$u=\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{b^2+a^3})},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$x=u-\frac{a}{u}$$

ist:

$$x=\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{b^2+a^3})}-\frac{a}{\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{b^2+a^3})}},$$

also, wenn man Zähler und Nenner des letzten Bruchs mit

$$\sqrt[3]{(b\mp\sqrt{b^2+a^3})}$$

multiplicirt:

$$x=\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{b^2+a^3})}+\sqrt[3]{(b\mp\sqrt{b^2+a^3})},$$

wo es nun genügt, bloss

$$x=\sqrt[3]{(b+\sqrt{b^2+a^3})}+\sqrt[3]{(b-\sqrt{b^2+a^3})}$$

zu setzen. Mittelst dieser Formel lässt sich in diesem Falle immer eine reelle Wurzel der gegebenen cubischen Gleichung berechnen; und wie man dann ferner die beiden anderen Wurzeln findet, ist bekannt.

Wenn ferner die Gleichung

$$x^3-3ax-2b=0$$

gegeben ist, so setzen wir

$$x=\frac{u^2+a}{u},$$

und erhalten dadurch die Gleichung

$$\frac{u^6+3au^4+3a^2u^2+a^3}{u^3}-\frac{3au^2+3a^2}{u}-2b=0;$$

also, wenn wir auf beiden Seiten mit u^3 multipliciren und aufheben, was sich aufheben lässt:

$$u^6-2bu^3+a^3=0.$$

Lösen wir diese Gleichung wie eine quadratische Gleichung auf, so ergiebt sich

$$u^3=b\pm\sqrt{b^2-a^3},$$

also

$$u=\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{b^2-a^3})},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$x=u+\frac{a}{u}$$

ist:

$$x=\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{b^2-a^3})}+\frac{a}{\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{b^2-a^3})}},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner des letzten Bruchs mit

$$\sqrt[3]{(b\mp\sqrt{b^2-a^3})}$$

multiplicirt:

$$x=\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{b^2-a^3})}+\sqrt[3]{(b\mp\sqrt{b^2-a^3})},$$

wo es nun wieder genügt, bloss

$$x=\sqrt[3]{(b+\sqrt{b^2-a^3})}+\sqrt[3]{(b-\sqrt{b^2-a^3})}$$

zu setzen.

Wenn $b^2-a^3 \overset{=}{>} 0$ ist, so kann man auch in diesem Falle immer eine reelle Wurzel der gegebenen cubischen Gleichung berechnen, und wie man dann ferner die beiden andern Wurzeln findet, ist bekannt.

Wenn aber $b^2-a^3<0$ ist, so erscheint die Wurzel

$$x=\sqrt[3]{(b+\sqrt{b^2-a^3})}+\sqrt[3]{(b-\sqrt{b^2-a^3})}$$

unserer cubischen Gleichung unter einer imaginären Form, und doch lässt sich auf folgende Art leicht zeigen, dass gerade in diesem Falle alle drei Wurzeln der Gleichung nothwendig reell sein müssen. Da nämlich jede cubische Gleichung als eine Gleichung eines ungeraden Grades nothwendig mindestens eine reelle Wurzel haben muss, so wollen wir diese reelle Wurzel unserer cubischen Gleichung durch ω bezeichnen, so dass also

$$\omega^3-3a\omega-2b=0,$$

und folglich

$$x^3-3ax-2b=x^3-\omega^3-3a(x-\omega)$$

oder

$$x^3-3ax-2b=(x-\omega)(x^2+\omega x+\omega^2-3a)$$

ist. Daher sind die beiden andern Wurzeln unserer cubischen Gleichung mittelst der quadratischen Gleichung

$$x^2+\omega x+\omega^2-3a=0$$

zu bestimmen. Die Auflösung dieser Gleichung giebt

$$x=-\frac{1}{2}\omega\pm\sqrt{3(a-\frac{1}{4}\omega^2)}\,.$$

Weil nun wegen der Gleichung

$$\omega^3-3a\omega-2b=0$$

offenbar

$$\omega^2=3a+\frac{2b}{\omega},\quad \frac{1}{4}\omega^2=\frac{3}{4}a+\frac{b}{2\omega}$$

und folglich

$$a-\frac{1}{4}\omega^2=\frac{1}{4}a-\frac{b}{2\omega}$$

st, so ist, wenn ω negativ ist, offenbar $a-\frac{1}{4}\omega^2$ nicht negativ, und die drei Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung sind daher in diesem Falle augenscheinlich sämmtlich reell. Wäre aber, wenn ω positiv ist, $a-\frac{1}{4}\omega^2$ negativ oder $\frac{1}{4}\omega^2>a$, so wäre $\omega^2>4a$ oder $\omega>2\sqrt{a}$. Weil nun nach der Voraussetzung

$b^2 < a^3$, $b < a\sqrt{a}$ ist, so ist $2b < 2a\sqrt{a}$ oder $2b < a.2\sqrt{a}$, folglich nach dem Vorhergehenden um so mehr $2b < a\omega$. Nun ist aber nach dem Obigen bekanntlich

$$b - \frac{1}{4}\omega^2 = \frac{1}{4}a - \frac{b}{2\omega},$$

also, weil wir angenommen haben, dass $a - \frac{1}{4}\omega^2$ negativ sei, $\frac{b}{2\omega} > \frac{1}{4}a$, d. i. $2b > a\omega$, was dem vorhergehenden $2b < a\omega$ widerspricht. Daher kann auch in diesem Falle $a - \frac{1}{4}\omega^2$ nicht negativ sein, und es sind folglich auch jetzt alle drei Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung reell, wie behauptet wurde.

In diesem Falle, wo alle drei Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung nothwendig reell sein müssen, die durch die Formel

$$x = \sqrt[3]{(b + \sqrt{b^2 - a^3})} + \sqrt[3]{(b - \sqrt{b^2 - a^3})}$$

gegebene Wurzel derselben aber unter einer imaginären Form auftritt, sucht nun **Paul Halcken** die Wurzel

$$\left(\sqrt[3]{(b \pm \sqrt{b^2 - a^3}}\right)$$

oder

$$\sqrt[3]{(b \pm \sqrt{a^3 - b^2} \,.\, \sqrt{-1})}$$

wirklich auszuziehen; sein auf einem gewissen Probiren beruhendes und gewiss in allen Beziehungen höchst eingeschränktes und mangelhaftes Verfahren lässt sich aber aus den Beispielen, auf welche er es anwendet, nicht mit hinreichender Deutlichkeit und Bestimmtheit entnehmen, und kann daher hier nicht wiedergegeben werden, was auch bei der jedenfalls grossen Mangelhaftigkeit desselben nichts nützen würde, da man jetzt weiss, dass sich dergleichen Kubikwurzeln auf eine sehr leichte und elegante Weise mit Hülfe der goniometrischen Functionen und der in vollständiger Berechnung schon vorliegenden Tafeln derselben berechnen lassen, was auf die elementarste Weise vielleicht auf folgende Art gezeigt werden kann.

Setzen wir

$$\sqrt[3]{(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})} = v \pm w\sqrt{-1},$$

so ist

$$\begin{aligned} \alpha \pm \beta\sqrt{-1} &= v^3 \pm 3v^2w\sqrt{-1} - 3vw^2 \mp w^3\sqrt{-1} \\ &= v^3 - 3vw^2 \pm (3v^2w - w^3)\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

also:

$$v^3-3vw^2=\alpha,\ 3v^2w-w^3=\beta.$$

Quadrirt man nun auf beiden Seiten, so wird

$$\alpha^2=v^6-6v^4w^2+9v^2w^4$$

$$\beta^2= \qquad 9v^4w^2-6v^2w^4+w^6,$$

also, wenn man addirt:

$$\alpha^2+\beta^2=v^6+3v^4w^2+3v^2w^4+w^6,$$

d. i.

$$\alpha^2+\beta^2=(v^2+w^2)^3,$$

oder

$$v^2+w^2=\sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2},$$

und folglich

$$\left(\frac{v}{\sqrt[6]{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2+\left(\frac{w}{\sqrt[6]{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2=1.$$

Daher ist man berechtigt

$$\frac{v}{\sqrt[6]{\alpha^2+\beta^2}}=\sin\varphi,\ \frac{w}{\sqrt[6]{\alpha^2+\beta^2}}=\cos\varphi$$

oder

$$v=\sin\varphi\,.\sqrt[6]{\alpha^2+\beta^2},\ w=\cos\varphi\,.\sqrt[6]{\alpha^2+\beta^2}$$

zu setzen, was in die Gleichungen

$$v^3-3vw^2=\alpha,\ 3v^2w-w^3=\beta$$

gesetzt, giebt:

$$\sin\varphi^3\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-3\sin\varphi\cos\varphi^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\alpha,$$

$$3\sin\varphi^2\cos\varphi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\cos\varphi^3\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\beta$$

oder

$$\sin\varphi^3-3\sin\varphi\cos\varphi^2=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$\cos\varphi^3 - 3\cos\varphi\sin\varphi^2 = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Bekanntlich ist aber, was durch die elementarsten goniometrischen Formeln sogleich zu beweisen ist:

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi\cos\varphi^2 - \sin\varphi^3,$$

$$\cos 3\varphi = \cos\varphi^3 - 3\cos\varphi\sin\varphi^2;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\sin 3\varphi = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad \cos 3\varphi = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

und folglich auch

$$\operatorname{tang} 3\varphi = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Mittelst dieser Formeln kann 3φ, also auch φ berechnet werden; hat man aber φ, so hat man auch

$$v = \sin\varphi . \sqrt[6]{\alpha^2+\beta^2},\quad w = \cos\varphi . \sqrt[6]{\alpha^2+\beta^2}$$

und demnach auch

$$\sqrt[3]{(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})} = v \pm w\sqrt{-1}.$$

In Rücksicht auf unsere obige cubische Gleichung ist

$$\alpha = b,\quad \beta = \sqrt{a^3-b^2};$$

folglich

$$\alpha^2+\beta^2 = a^3,$$

und daher

$$\sin 3\varphi = -\frac{b}{a\sqrt{a}},\quad \cos 3\varphi = -\frac{\sqrt{a^3-b^2}}{a\sqrt{a}}$$

so wie

$$\operatorname{tang} 3\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^3-b^2}}.$$

Ferner ist

$$v = \sin\varphi . \sqrt{a},\quad w = \cos\varphi . \sqrt{a};$$

also

$$\sqrt[3]{(b\pm\sqrt{b^2-a^3})}=\sqrt{a}.(\sin\varphi\pm\cos\varphi\sqrt{-1}),$$

folglich nach dem Obigen

$$x=2\sqrt{a}.\sin\varphi.$$

Die weitere Discussion dieser Formeln unterlassen wir füglich hier, da dieselbe allgemein bekannt ist.

Hält man die Einführung der goniometrischen Functionen für der Algebra zu fremdartig, so kann man den vorhergehenden Fall der cubischen Gleichungen, den man bekanntlich den irreduciblen Fall zu nennen pflegt, auch auf folgende Art behandeln.

Aus der Form der Gleichung

$$x^3-3ax-2b=0$$

erhellet nach einem bekannten leicht ganz elementar zu beweisenden Satze von den Gleichungen (Supplemente zum mathematischen Wörterbuche. Thl. II. Art. Gleichung. S.396.), dass dieselbe jederzeit eine, aber auch nur eine reelle positive Wurzel hat, die wir von nun an durch x selbst bezeichnen wollen.

Weil

$$x^3-3ax-2b=0$$

ist, so ist

$$x^2=3a+\frac{2b}{x}$$

oder

$$x=\sqrt{3a+\frac{2b}{x}},$$

also

$$x=\sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a+\cdots}}}}}}}$$

$$\cdots+\frac{2b}{\sqrt{3a+\frac{2b}{x}}},$$

und bezeichnen wir nun die Brüche oder Grössen

$$\sqrt{3a},\sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a}}},\sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a}}}}},\sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a+\frac{2b}{\sqrt{3a}}}}}}},\ldots\ldots$$

der Reihe nach durch

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ldots;$$

so lässt sich zuerst durch ganz leichte Schlüsse, über die wir hier füglich hinweggehen können, zeigen, dass

$$x_1 < x < x_2,$$
$$x_2 > x > x_3,$$
$$x_3 < x < x_4,$$
$$x_4 > x > x_5,$$
$$x_5 < x < x_6,$$
u. s. w.

ist, so dass also jede zwei einander benachbarte Glieder der Reihe

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ldots$$

zwei, x zwischen sich fassende Gränzen sind, und es kommt jetzt nur darauf an, zu untersuchen, ob diese Gränzen einander bis zu jedem beliebigen Grade nahe kommen können, weil sie nur unter dieser Bedingung ein sicher zum Zweck führendes Mittel, x mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit annähernd zu berechnen, an die Hand geben können.

Es ist aber augenscheinlich in völliger Allgemeinheit

$$x_{n+1}=\sqrt{3a+\frac{2b}{x_n}},\quad x_n=\sqrt{3a+\frac{2b}{x_{n-1}}}$$

oder

$$x_{n+1}^2=3a+\frac{2b}{x_n},\quad x_n^2=3a+\frac{2b}{x_{n-1}};$$

also

$$x_{n+1}^2-x_n^2=2b\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}\right),$$

d. i.

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = (x_{n-1} - x_n) \cdot \frac{2b}{x_{n-1} x_n},$$

folglich nach einem bekannten arithmetischen Satze:

$$x_{n+1} - x_n = (x_{n-1} - x_n) \cdot \frac{2b}{x_{n-1} x_n (x_n + x_{n+1})}.$$

Das Product

$$x_{n-1} x_n (x_n + x_{n+1})$$

ist aber offenbar immer grösser als

$$\sqrt{3a} \,.\, \sqrt{3a} \,.\, 2\sqrt{3a},$$

d. i. grösser als $6\sqrt{3} . a\sqrt{a}$, folglich

$$\frac{2b}{x_{n-1} x_n (x_n + x_{n+1})} < \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{a\sqrt{a}};$$

und folglich, weil im irreduciblen Falle, den wir jetzt hier allein im Auge haben,

$$b^2 < a^3, \quad b < a\sqrt{a}, \quad \frac{b}{a\sqrt{a}} < 1$$

ist, jedenfalls

$$\frac{2b}{x_{n-1} x_n (x_n + x_{n+1})} < \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

also nach dem Obigen, immer bloss in Rücksicht auf die absoluten Werthe der Differenzen $x_{n+1} - x_n$ und $x_{n-1} - x_n$:

$$x_{n+1} - x_n < \frac{x_{n-1} - x_n}{3\sqrt{3}}.$$

Es ist also hiernach

$$x_2 - x_3 < \frac{x_2 - x_1}{3\sqrt{3}},$$

$$x_4 - x_3 < \frac{x_2 - x_3}{3\sqrt{3}},$$

$$x_4 - x_5 < \frac{x_4 - x_3}{3\sqrt{3}},$$

$$x_6 - x_5 < \frac{x_4 - x_5}{3\sqrt{3}},$$

$$x_6 - x_7 < \frac{x_6 - x_5}{3\sqrt{3}},$$

$$x_8 - x_7 < \frac{x_6 - x_7}{3\sqrt{3}},$$

$$x_8 - x_9 < \frac{x_8 - x_7}{3\sqrt{3}},$$

u. s. w.

also, wie hieraus sogleich erhellet:

$$x_2 - x_3 < \frac{x_2 - x_1}{3\sqrt{3}},$$

$$x_4 - x_3 < \frac{x_2 - x_1}{(3\sqrt{3})^2},$$

$$x_4 - x_5 < \frac{x_2 - x_1}{(3\sqrt{3})^3},$$

$$x_6 - x_5 < \frac{x_2 - x_1}{(3\sqrt{3})^4},$$

$$x_6 - x_7 < \frac{x_2 - x_1}{(3\sqrt{3})^5},$$

$$x_8 - x_7 < \frac{x_2 - x_1}{(3\sqrt{3})^6},$$

$$x_8 - x_9 < \frac{x_2 - x_1}{(3\sqrt{3})^7},$$

u. s. w.

und weil nun die Potenzen

$$3\sqrt{3},\ (3\sqrt{3})^2,\ (3\sqrt{3})^3,\ (3\sqrt{3})^4,\ (3\sqrt{3})^5, \ldots\ldots$$

ins Unendliche wachsen, so ist klar, dass die Differenzen

$$x_2 - x_1,\ x_2 - x_3,\ x_4 - x_3,\ x_4 - x_5,\ x_6 - x_5, \ldots\ldots$$

in's Unendliche abnehmen, wenn man nur die Reihe derselben weit genug fortsetzt.

Hieraus sieht man nun, dass mittelst des Ausdrucks

$$x=\sqrt{3a+\cfrac{2b}{\sqrt{3a+\cfrac{2b}{\sqrt{3a+\cfrac{2b}{\sqrt{3a+\cfrac{2b}{\sqrt{3a+}}}}}}}}}\quad \text{u. s. w.}$$

die eine reelle positive Wurzel, welche die cubische Gleichung

$$x^3-3ax-2b=0$$

jederzeit nothwendig hat, im irreducibeln Falle immer durch Annäherung mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit berechnet werden kann, und da die Potenzen

$$3\sqrt{3},\ (3\sqrt{3})^2,\ (3\sqrt{3})^3,\ (3\sqrt{3})^4,\ (3\sqrt{3})^5,\ \ldots\ldots$$

nämlich

$$3\sqrt{3}=3\sqrt{3},$$
$$(3\sqrt{3})^2=27,$$
$$(3\sqrt{3})^3=81\sqrt{3},$$
$$(3\sqrt{3})^4=729,$$
$$(3\sqrt{3})^5=2187\sqrt{3},$$
$$(3\sqrt{3})^6=19683,$$
$$(3\sqrt{3})^7=59049\sqrt{3},$$
$$(3\sqrt{3})^8=531441,$$

u. s. w.

schnell wachsen, so scheint auch die Annäherung ziemlich rasch fortzuschreiten; aber die successive Ausziehung der Quadratwurzeln wird immer Schwierigkeit machen, namentlich wenn man sich bei diesem Geschäft nicht der Logarithmen bedienen wollte, und die goniometrische äusserst leichte und elegante Auflösung wird daher immer in der Praxis bei Weitem vorzuziehen sein.

Wie man, wenn man die eine Wurzel der cubischen Gleichung kennt, die beiden anderen finden kann, ist bekannt.

Die Zurückführung der cubischen Gleichungen durch die Substitutionen

$$x=\frac{u^2-a}{u}\quad \text{oder}\quad x=\frac{u^2+a}{u}$$

auf eine quadratische oder wenigstens auf eine Gleichung, die sich wie eine Gleichung des zweiten Grades auflösen lässt, ist, soviel ich finden kann, ganz Paul Halcken's Eigenthum und im Obigem von demselben entlehnt worden; das Uebrige ist Zuthat von meiner Seite.

Zum Schluss will ich der Ergötzlichkeit wegen nun noch anführen, wie der genannte alte Arithmeticus in seinem Grimme über den fatalen Casus irreducibilis, aber doch auch mit einer gewissen Freude, dass er, wie er wenigstens zu meinen scheint, bei der Beseitigung desselben einen Schritt vorwärts gethan hat, sich über diesen Fall der Auflösung der cubischen Gleichungen ausspricht. S. 63. seines oben erwähnten Mathematischen Sinnen-Confects sagt er nämlich:

„Bißhieher ist gelehret worden, wie man die Cubischen Aequationes nach ihrer richtigen Demonstration aus wahrem Grunde solviren soll, dabey dieses das mühsamste und wichtigste ist, die Cubic-Wurtzeln aus den Binomiis zu extrahiren. Es ist aber eine deutliche Regul davon gegeben, daß man solche Extraction leicht und bald verrichten kann. Bei der zweyten und dritten Regul wird man angemercket haben: Wann daselbst der Cubus von dem dritten Theil der Zahl $3a$ grösser ist, als das Quadrat von der Helffte der ledigen Zahl, daß alßdann Binomia imperfecta kommen, daran der surdische Theil als $\sqrt{-a}$ gantz ungeschickt und absurd sich erzeiget, deßwegen auch die Zahl-Künstler mit selbigen nicht gerne wollen zu schaffen haben, gleich wie ein Zimmerman ein unartig knastrig stück Holtz vermeidet."

Der berühmte Cardanus hat, um solchen wiederspenstigen Kumpen aus dem Wege zu gehen, im 25 Cap. seines X-Buchs 16 particular-Reguln gesetzet, von welchen er auch handelt im 2 Cap. seines Buchs De Regula Aliza, allein es wird dadurch die Sache nicht gehoben; Dann wan man nach solchen Regeln algebraisch procediret, so kommt man wieder auff solche ungeschickte Binomia, bleibt also der Karren im Koht stecken, derwegen ist hier kein besser Mittel, als daß man das Werck, wie es die ordentliche Solution giebet, vollführe, wie den nach unser Extractions Regul solche ungeschickte Binomia sich gantz schicklich und wohl tractiren lassen, wie solches aus den angeführten Exempeln genugsam erscheinet."*)

---

*) Uns aber doch nicht recht klar geworden ist.

X.

Zur Theorie der Reihen.

Von dem

Herrn Dr. O. Schlömilch,

Professor der höheren Mathematik und Mechanik an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Mehr im Gefühle als im Besitze des wirklichen Nachweises haben die Verfechter einer strengeren Behandlung der unendlichen Reihen die Behauptung ausgesprochen, dass man bei dem sorglosen Rechnen mit jenen Formen, wie es z. B. Ohm förmlich sanktionirt hat, zu jedem beliebigen noch so absurden Resultate gelangen könne; im Gegensatze hierzu wollten Ohm und sein Anhang geltend machen, dass solche Absurditäten, wie man sie thatsächlich aufweisen konnte, nur von einer widerrechtlichen Spezialisirung der Buchstabengrössen herrührten, mit anderen Worten, es wurde uns verboten, in Gleichungen wie

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots..$$

das x für eine allgemein gedachte Zahl anzusehen; x sollte nur der „Träger der Operationen", ein allgemeines analytisches Symbol oder, Gott weiss welcher, grosse oder kleine Unbekannte sein. Ich will mich an dieser Stelle nicht auf die, allerdings nicht schwierige Erörterung einlassen, ob eine Gleichung, wie die vorhin genannte, nur einen Sinn hat, wenn x keine Zahl sein soll, ja ob es überhaupt möglich und denkbar ist, mit etwas Anderem als Zahlen, gleichgültig ob dieses Andere allgemeiner oder spezieller als eine Zahl ist, rechnen zu wollen; diese Untersuchung gedenke ich einer noch zu schreibenden Philosophie der Mathematik aufzubewahren, dagegen will ich nachweisen, dass man in der That durch die Ohm'sche Leichtfertigkeit Alles herausbringen kann, namentlich den Satz, dass $f(\mu+v)=f(\mu-u)$, wobei μ, u, v und die Funktion f willkührlich sind. Ich bemerke dabei ausdrücklich, dass ich die Rechnung allgemein halte und keine Spezialisirungen vornehme, die etwa den Träger der Operationen zur Zahl degradiren könnten, dass ich also eine Betrachtung anstelle, die jeder Ohmianer für richtig anerkennen muss.

Zufolge des Taylor'schen Satzes ist immer

$$\varphi(\alpha+h)=\varphi(\alpha)+\frac{h}{1}\varphi'(\alpha)+\frac{h^2}{2}\varphi''(\alpha)+\ldots,$$

oder für $h=x-\alpha$:

$$\varphi(x)=\varphi(\alpha)+\frac{\varphi'(\alpha)}{1}(x-\alpha)+\frac{\varphi''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2+\ldots,$$

wofür nach Ohms Bezeichnung geschrieben werden möge:

$$\varphi_x-\varphi_\alpha=\frac{\varphi'\alpha}{1}(x-\alpha)+\frac{\varphi''\alpha}{2}(x-\alpha)^2+\ldots$$

Die Coeffizienten von $x-\alpha$, $(x-\alpha)^2$ etc. wollen wir zur Abkürzung mit a_1, a_2 etc. bezeichnen, also

1) $$\varphi_x-\varphi_\alpha=a_1(x-\alpha)+a_2(x-\alpha)^2+a_3(x-\alpha)^3+\ldots\ldots$$

setzen. Dabei ist es übrigens für die nachfolgenden Operationen ganz gleichgültig, ob man sich die Reihe als convergent oder divergent denkt. — Erhebt man beide Seiten der Gleichung 1) aufs Quadrat, so erhält man eine neue Gleichung von der Form

2) $$(\varphi_x-\varphi_\alpha)^2=b_2(x-\alpha)^2+b_3(x-\alpha)^3+b_4(x-\alpha)^4+\ldots\ldots$$

wobei b_2, b_3, etc. wiederum gewisse constante Coeffizienten bezeichnen, auf deren Werthe es uns nicht weiter ankommt. Ebenso leicht würde man durch Erhebung auf die dritte, vierte Potenz etc. zu Gleichungen von nachstehenden Formen gelangen:

3) $$(\varphi_x-\varphi_\alpha)^3=c_3(x-\alpha)^3+c_4(x-\alpha)^4+c_5(x-\alpha)^5+\ldots\ldots$$

4) $$(\varphi_x-\varphi_\alpha)^4=d_4(x-\alpha)^4+d_5(x-\alpha)^5+d_6(x-\alpha)^6+\ldots\ldots$$

etc. etc.

Man multiplizire jetzt die Gleichungen 1), 2), 3), 4), etc. mit den vor der Hand noch unbestimmten Coeffizienten A_1, A_2, A_3 etc., so ist durch Addition

$$A_1(\varphi_x-\varphi_\alpha)+A_2(\varphi_x-\varphi_\alpha)^2+A_3(\varphi_x-\varphi_\alpha)^3+\ldots\ldots$$

$$= A_1 \{ a_1 (x-\alpha) + a_2 (x-\alpha)^2 + a_3 (x-\alpha)^3 + \ldots \}$$
$$+ A_2 \{ b_2 (x-\alpha)^2 + b_3 (x-\alpha)^3 + b_4 (x-\alpha)^4 + \ldots \}$$
$$+ A_3 \{ c_3 (x-\alpha)^3 + c_4 (x-\alpha)^4 + c_5 (x-\alpha)^5 + \ldots \}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder bei gehöriger Ordnung nach den Potenzen von $x - \alpha$:

5) $$A_1 (\varphi_x - \varphi_\alpha) + A_2 (\varphi_x - \varphi_\alpha)^2 + A_3 (\varphi_x - \varphi_\alpha)^3 + \ldots$$
$$= A_1 a_1 (x-\alpha)$$
$$+ \{ A_1 a_2 + A_2 b_2 \} (x-\alpha)^2$$
$$+ \{ A_1 a_3 + A_2 b_3 + A_3 c_3 \} (x-\alpha)^3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Andererseits hat man zufolge des Taylor'schen Satzes für jede Funktion f:

6) $$f_x - f_\alpha = \frac{f'_\alpha}{1} (x-\alpha) + \frac{f''_\alpha}{2} (x-\alpha)^2 + \frac{f'''_\alpha}{3} (x-\alpha)^3 + \ldots$$

Diese Gleichung halten wir mit der vorigen zusammen, indem wir

$$A_1 a_1 = \frac{f'_\alpha}{1},$$

$$A_1 a_2 + A_2 b_2 = \frac{f''_\alpha}{2},$$

$$A_1 a_3 + A_2 b_3 + A_3 c_3 = \frac{f'''_\alpha}{3}$$

etc.

setzen und aus diesen Gleichungen die vorher unbestimmten Coefficienten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ bestimmen. Diese Bestimmung ist jederzeit möglich, weil die obigen Gleichungen in Beziehung auf A_1, A_2, $A_3 \ldots$ nur vom ersten Grade sind; man findet aus der ersten Gleichung A_1, aus der zweiten A_2, aus der dritten A_3 u. s. f. Somit wird nun die rechte Seite der Gleichung 5) mit der rechten Seite von Nro. 6) identisch und wir haben daher

$$A_1 (\varphi_x - \varphi_\alpha) + A_2 (\varphi_x - \varphi_\alpha)^2 + A_3 (\varphi_x - \varphi_\alpha)^3 + \ldots$$
$$= f_x - f_\alpha,$$

oder endlich

7) $$f_x = f_\alpha + A_1 (\varphi_x - \varphi_\alpha) + A_2 (\varphi_x - \varphi_\alpha)^2 + A_3 (\varphi_x - \varphi_\alpha)^3 + \ldots,$$

d. h. also in Worten: jede Funktion f_x kann in eine Reihe verwandelt werden, welche nach Potenzen von $\varphi_x - \varphi_\alpha$ fortschreitet, wobei φ_x eine beliebige Funktion und α eine beliebige Grösse bezeichnet.

Man wird mir gewiss zugestehen, dass bei dieser Rechnung nicht die geringste Spezialisirung vorgenommen worden ist, und gleichwohl enthält der obige Satz, in dieser Allgemeinheit ausgesprochen, alle möglichen Absurditäten in sich. — Da nämlich die Funktion φ_x beliebig ist, so kann sie auch beliebige Maxima und Minima bekommen; gesetzt nun, ein solches Maximum oder Minimum trete ein für $x=\mu$*), so nimmt die Funktion φ_x über $x=\mu$ hinaus wieder einen Theil der Werthe an, die sie früher hatte, und es giebt eine unendliche Menge zusammengehöriger Grössen u und v der Art, dass $\varphi_{\mu-u}=\varphi_{\mu+v}$ ist. (Sehr leicht sieht man diess geometrisch, wenn man die Curve construirt, deren Gleichung $y=\varphi_x$ ist; man braucht nur parallel zur Abscissenachse eine Gerade zu ziehen, welche die Curve zweimal schneidet, dann sind $\mu-u$ und $\mu+v$ die Abscissen der Durchschnittspunkte). Setzen wir nun in der Gleichung 7) erst $x=\mu-u$, dann $x=\mu+v$, so ist zugleich

$$f_{\mu-u}=f_\alpha+A_1(\varphi_{\mu-u}-\varphi_\alpha)+A_2(\varphi_{\mu-u}-\varphi_\alpha)^2+\ldots\ldots,$$

$$f_{\mu+v}=f_\alpha+A_1(\varphi_{\mu+v}-\varphi_\alpha)+A_2(\varphi_{\mu+v}-\varphi_\alpha)^2+\ldots\ldots;$$

und da $\varphi_{\mu-u}=\varphi_{\mu+v}$, so folgt auf der Stelle

$$8) \qquad f_{\mu-u}=f_{\mu+v}.$$

Bedenkt man nun, dass erstens μ, u und v Grössen sind, welche nur in Beziehung auf φ_x Bedeutung haben, dass zweitens sehr leicht eine Funktion φ_x zu finden wäre, welche für willkührlich angenommene μ, u, v die Bedingung $\varphi_{\mu-u}=\varphi_{\mu+v}$ erfüllte**) und dass endlich drittens f_x in gar keinem Zusammenhange mit φ_x steht, also völlig willkührlich genommen werden darf, so erhellt auf der Stelle, dass die Gleichung 8) reiner Unsinn ist, womit sich die Gleichheit jeder zwei beliebigen Grössen beweisen liesse. Vielleicht sind ein paar Beispiele hierzu nicht überflüssig. Man setze erstlich

$$\varphi_x=\frac{x}{k^2+x^2},\ \alpha=0;$$

so ist nach Nro. 7) bei gehörig bestimmten Coeffizienten:

$$9) \qquad f_x=f_0+A_1\left(\frac{x}{k^2+x^2}\right)+A_2\left(\frac{x}{k^2+x^2}\right)^2+A_3\left(\frac{x}{k^2+x^2}\right)^3+\ldots\ldots$$

---

*) Dieses μ braucht keine Zahl im Ohm'schen Sinne zu sein; z. B. für $\varphi_x=\frac{x}{k^2+x^2}$ wird $\mu=\pm k$, und das ist eben so allgemein wie x und k selber.

**) Man braucht nur rechts und links von der Abscisse μ beliebige Strecken u und v, u' und v', u'' und v'' etc. abzuschneiden und den Abscissen $\mu-u$ und $\mu+v$, $\mu-u'$ und $\mu+v'$ etc. jedesmal gleich grosse, sonst aber beliebige Ordinaten zu geben, so erhält man soviel Punkte der Curve $y=\varphi_x$ als man will.

Die Bestimmung der Coefficienten wäre hier sehr leicht; denn entwickelt man die linke Seite nach dem Theoreme von Mac-Laurin und rechter Hand jedes einzelne Glied nach dem Binomischen Satze, indem man

$$\left(\frac{x}{k^2+x^2}\right)^n = \frac{x^n}{k^{2n}}\left(1+\frac{x^2}{k^2}\right)^{-n}$$

setzt, so findet man leicht durch beiderseitige Vergleichung:

$$A_1 = k^2 f'_0,$$

$$A_2 = \frac{k^4}{2} f''_0,$$

$$A_3 = k^4 f'_0 + \frac{k^6}{6} f'''_0,$$

$$A_4 = k^6 f''_0 + \frac{k^8}{24} f^{\text{IV}}_0,$$

u. s. w.

und es müsste nun die Gleichung 9) richtig sein, wofern x nicht zur Zahl spezialisirt wird. Nimmt man einmal $x=u$ und das andere Mal $x=\frac{k^2}{u}$, so bleibt die rechte Seite in beiden Fällen dieselbe und man hat folglich

$$f(u) = f\left(\frac{k^2}{u}\right),$$

was schwerlich jemand glauben wird.

Für ein zweites Beispiel nehmen wir

$$\varphi_x = \sin x, \quad \alpha = 0;$$

so muss nach Nro. 7) sein:

$$10) \qquad f_x = f_0 + A_1 \sin x + A_2 \sin^2 x + A_3 \sin^3 x + \ldots\ldots$$

und man findet durch beiderseitige Entwickelung und Vergleichung:

$$A_1 = f'_0,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} f''_0,$$

$$A_3 = \frac{1}{6} f'_0 + \frac{1}{6} f'''_0,$$

u. s. w.

Setzt man aber erst $x=\frac{\pi}{2}-u$ und dann $x=\frac{\pi}{2}+u$, so wird die rechte Seite der Gleichung 10) nicht geändert, und mithin folgt

$$f\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+u\right).$$

Doch genug von diesen Absurditäten, deren Zahl sich sehr leicht beliebig vermehren liesse. Vielleicht ist es den Lesern angenehmer, wenn ich den Fehler aufdecke, welcher den obigen Rechnungen zu Grunde liegt.

Stellen wir die Gleichungen 1), 2), 3) etc. so dar, dass die Reihen rechter Hand endliche sind, so müssen wir die Reste derselben berücksichtigen; nennen wir letztere $\overset{\text{I}}{R}_n$, $\overset{\text{II}}{R}_n$, $\overset{\text{III}}{R}_n$ etc. so ist richtig:

$$\varphi_x-\varphi_\alpha=a_1(x-\alpha)+a_2(x-\alpha)^2+a_3(x-\alpha)^3+\dots$$
$$\dots+a_n(x-\alpha)^n+\overset{\text{I}}{R}_n,$$
$$(\varphi_x-\varphi_\alpha)^2=b_2(x-\alpha)^2+b_3(x-\alpha)^3+b_4(x-\alpha)^4+\dots$$
$$\dots+b_n(x-\alpha)^n+\overset{\text{II}}{R}_n,$$
$$(\varphi_x-\varphi_\alpha)^3=c_3(x-\alpha)^3+c_4(x-\alpha)^4+c_5(x-\alpha)^5+\dots$$
$$\dots+c_n(x-\alpha)^n+\overset{\text{III}}{R}_n$$

u. s. f.

und die letzte dieser Gleichungen sei

$$(\varphi_x-\varphi_\alpha)^n=k_n^n(x-\alpha)^n+\overset{n}{R}_n.$$

Addiren wir diese Gleichungen nach Multiplikation mit den unbestimmten Coefficienten A_1, A_2, ... A_n, so ist, wenn zur Abkürzung

$$A_1\overset{\text{I}}{R}_n+A_2\overset{\text{II}}{R}_n+\dots+A_n\overset{n}{R}_n=S_n$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}A_1(\varphi_x-\varphi_\alpha)&+A_2(\varphi_x-\varphi_\alpha)^2+A_3(\varphi_x-\varphi_\alpha)^3+\dots\\&\dots+A_n(\varphi_x-\varphi_\alpha)^n\\=\ &A_1a_1(x-\alpha)\\&+\{A_1a_2+A_2b_2\}(x-\alpha)^2\\&+\{A_1a_3+A_2b_3+A_3c_3\}(x-\alpha)^3\\&+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\end{aligned}$$

$$+\{A_1a_n+A_2b_n+\ldots.+A_nk_n\}(x-\alpha)^n$$
$$+S_n\ .$$

und hier lassen sich allerdings die Coeffizienten $A_1,\ A_2,\ldots..A_n$ ebenso bestimmen wie früher; man erhält dann

$$A_1(\varphi_x-\varphi_\alpha)+A_2(\varphi_x-\varphi_\alpha)^2+A_3(\varphi_x-\varphi_\alpha)^3+\ldots..$$
$$\ldots.+A_n(\varphi_x-\varphi_\alpha)^n$$
$$=\frac{f'_\alpha}{1'}(x-\alpha)+\frac{f''_\alpha}{2'}(x-\alpha)^2+\frac{f'''_\alpha}{3'}(x-\alpha)^3+\ldots..$$
$$\ldots..+\frac{f^{(n)}{}_\alpha}{n'}(x-\alpha)^n+S_n.$$

Nennen wir ϱ_n den Rest der Taylor'schen Reihe, so dass also

$$f_x=f_\alpha+\frac{x-\alpha}{1'}f'_\alpha+\frac{(x-\alpha)^2}{2'}f''_\alpha+\ldots..$$
$$+\frac{(x-\alpha)^n}{n'}f^{(n)}{}_\alpha+\varrho_n$$

ist, so können wir statt der vorhergehenden Gleichung schreiben:

$$A_1(\varphi_x-\varphi_\alpha)+A_2(\varphi_x-\varphi_\alpha)^2+A_3(\varphi_x-\varphi_\alpha)^3+\ldots...$$
$$\ldots..+A_n(\varphi_x-\varphi_\alpha)^n$$
$$=f_x-f_\alpha-\varrho_n+S_n,$$

oder endlich

$$f_x-(\varrho_n-S_n)=f_0+A_1(\varphi_x-\varphi_\alpha)+A_2(\varphi_x-\varphi_\alpha)^2+\ldots...$$
$$\ldots...+A_n(\varphi_x-\varphi_\alpha)^n.$$

Soll nun diese unbezweifelt richtige Gleichung in die Formel 7) übergehen, so muss für unendlich wachsende n

$$\mathrm{Lim}(\varrho_n-S_n)=0$$

sein, und hierzu gehört, weil ϱ_n nur von f, S_n aber auch von φ abhängt, und sich folglich ϱ_n und S_n nicht aufheben können, dass gleichzeitig

$$\mathrm{Lim}\,\varrho_n=0,\quad \mathrm{Lim}\,S_n=0$$

sei. Diess ist aber nur möglich, wenn die Reihen

$$f_x=f_\alpha+\frac{x-\alpha}{1}f'_\alpha+\frac{(x-\alpha)^2}{1.2}f''_\alpha+\ldots...,$$

$$\varphi_x=\varphi_\alpha+\frac{x-\alpha}{1}\varphi'_\alpha+\frac{(x-\alpha)^2}{1.2}\varphi''_\alpha+\ldots..$$

convergiren, weil im Gegenfalle φ_n und $\overset{\mathrm{I}}{R}_n$ (mithin auch $\overset{\mathrm{II}}{R}_n$, $\overset{\mathrm{III}}{R}_n$ etc.) sich nicht der Gränze Null nähern würden. Obschon nun die Convergenz der ebengenannten Reihen nothwendig erfordert wird, so ist sie doch noch nicht hinreichend; denn wenn auch

$$\mathrm{Lim}\varphi_n = 0 \text{ und } \mathrm{Lim}\overset{\mathrm{I}}{R}_n = \mathrm{Lim}\overset{\mathrm{II}}{R}_n \ldots = 0$$

ist, so folgt daraus schlechterdings nicht, dass für unendlich wachsende n

$$\mathrm{Lim}\; S_n = \mathrm{Lim}[A_1\overset{\mathrm{I}}{R}_n + A_2\overset{\mathrm{II}}{R}_n + \ldots + A_n\overset{n}{R}_n] = 0$$

sein müsse; es wird zwar jeder einzelne Summand immer kleiner, je mehr n wächst, dagegen wird aber auch die Anzahl der Summanden immer grösser, und es kann folglich der Gränzwerth sehr wohl eine endliche und sogar sehr grosse Zahl sein. Wer das bestimmte Integral kennt, wird wissen, dass jene gesuchte Limes in der That nichts Anderes als ein derartiges Integral ist. Hieraus geht klar genug hervor, dass ausser der Convergenz der für f_x und φ_x benutzten Reihen, noch anderweite Bedingungen zu erfüllen sind, wenn die Gleichung 7) Bestand haben soll. Auch a posteriori erhellt diess leicht; so z. B. convergiren die Reihen für e^x und $\sin x$ immer; setzt man aber

$$e^x = 1 + A_1 \sin x + A_2 \sin^2 x + A_3 \sin^3 x + \ldots,$$

woraus folgt

$$A_1 = 1, \quad A_2 = \frac{1}{2}, \; A_3 = \frac{7}{6}, \; A_4 = \frac{5}{24}, \quad \text{etc.}$$

so gilt die obige Entwickelung doch nur von $x=0$ bis $x=\frac{\pi}{2}$, obschon die Reihe rechter Hand immer convergirt. — Welcher Art diese noch zu erfüllenden Bedingungen sind (damit Lim $S_n = 0$ werde), gedenke ich bei einer anderen Gelegenheit zu zeigen; hier kam es mir nur auf den Nachweis an, dass Ohm in einem gewaltigen Irrthume befangen ist, wenn er die Reihentheorie auf sichere Prinzipien gestützt zu haben glaubt und wenn er sich in der Meinung gefällt, es hätten Abel und ähnliche Meister aus seinem „Geist der Analysis“ die wahre Reihenbehandlung lernen können; allerdings findet sich Mancherlei in diesem Ohm'schen Werke, nur leider nichts weniger als Geist.

XI.

Ueber die elementare Cubatur der Flächen zweiten Grades.

Von dem

Herrn Dr. O. Schlömilch,

Professor der höhern Mathematik und Mechanik an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Die eben so einfachen als eleganten Betrachtungen, welche mein verehrter Vorgänger an dem hiesigen polytechnischen Institute, Herr Prof. Franke, im 12. Bande des Archivs mitgetheilt hat, veranlassten mich zu einer flüchtigen Untersuchung über die Cubatur der Flächen zweiten Grades überhaupt, namentlich um zu entscheiden, ob sich nicht von beliebigen in den Richtungen der Achsen genommenen Abschnitten oder Kappen derselben eine elementare Volumenbestimmung geben liesse. Der Erfolg dieser Betrachtung war ein so guter, dass er vielleicht allgemeiner Mittheilung nicht unwerth ist, wobei ich übrigens die Bemerkung nicht unterdrücken kann, dass es mich sehr wundern sollte, wenn nicht schon irgendwo das nachstehende sehr naheliegende Verfahren benutzt worden wäre; doch habe ich in allen mir zu Gebote stehenden Werken nichts darüber gefunden.

Bekanntlich sind zwei Volumina gleich, wenn beide, in gleichen Höhen mit Ebenen durchschnitten, überall Durchschnitte von gleichen Flächen geben, was man kurz so ausdrücken könnte: Volumina sind gleich, wenn die correspondirenden Querschnitte derselben gleiche Flächen besitzen. Wenn ich nicht irre, ist dieser Satz von Cavalleri als Axiom aufgestellt*) und später vielfach (z. B. zur Cubatur der Kugel) benutzt worden; es kostet aber wenig Mühe, denselben mittelst der Exhaustionsmethode zu beweisen, und zwar kommt der Beweis in der Hauptsache darauf

---

*) Dies ist ganz richtig; jedoch dürfte wohl bemerkt zu werden verdienen, dass zuerst Segner dieses Princip in allen seinen Elementar-Lehrbüchern der gesammten Stereometrie als Grundprincip zum Grunde gelegt und in den Elementar-Unterricht eingeführt hat. M. s. z. B. Elementa Geometriae. §. 194. §. 258. G.

hinaus, zu zeigen, dass, wenn f_1, f_2, ... f_n die parallelen Querschnittflächen des Volumens V sind, und x_1, x_2, ... x_n die Entfernungen dieser Flächen von einander bedeuten, die Gleichung statt findet

$$V = \mathrm{Lim}\{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n\},$$

worin sich das Zeichen Lim auf das unendliche Wachsthum von n und die unendliche Abnahme der x bezieht. — Eine Folge des obigen Satzes ist noch das Theorem: Stehen die correspondirenden Querschnittflächen zweier Volumina in einem constanten Verhältnisse, so findet zwischen den betreffenden Körperräumen dasselbe Verhältniss statt.

Das Ellipsoid. (Taf. II. Fig. 1.).

Geben wir der bekannten Gleichung des Ellipsoides

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

die Form

$$\left(\frac{x}{a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{b\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}}\right)^2 = 1,$$

so charakterisirt diese Gleichung denjenigen Schnitt des Ellipsoides, welcher durch den Endpunkt des z parallel zu AOB gelegt werden kann. Statt nämlich eine Gleichung zwischen den drei Coordinaten $OM = x$, $MN = y$, $NP = z$ aufzustellen, kann man auch eine Gleichung zwischen nur zweien derselben $O'M' = OM = x$ und $M'P = MN = y$ verlangen, indem man sich durch P einen Schnitt gelegt denkt. Diese Gleichung zwischen $O'M'$ und $M'P$ ist aber die Gleichung der Schnittcurve UPV. Letztere bildet in unserem Falle eine Ellipse mit den Halbachsen

$$O'U = a\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}, \quad O'V = b\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}$$

und daher ist die Fläche des Schnittes:

$$O'U . O'V . \pi = \frac{ab}{c^2}(\sqrt{c^2-z^2})^2 \pi.$$

Denken wir uns eine Kugel mit dem Halbmesser c beschrieben und führen in der Entfernung z einen Schnitt, so ist die Fläche dieses Schnittes

$$(\sqrt{c^2-z^2})^2 \pi$$

und es verhält sich demnach jener Schnitt des Ellipsoides zu diesem cirkularen Schnitte der Kugel wie $\frac{ab}{c^2}:1$; dasselbe Verhältniss findet also auch zwischen den entsprechenden Körpern statt. Lassen wir nun z das Intervall $z=0$ bis $z=h$ durchlaufen, so erhalten wir einerseits eine ellipsoidische, andererseits eine sphärische Zone, beide von der Höhe h. Das Volumen der Kugelzone ist bekanntlich $(c^2h-\frac{1}{3}h^3)\pi$, und folglich das der ellipsoidischen Zone

$$\frac{ab}{c^2}(c^2-\frac{1}{3}h^2)h\pi.$$

Für $h=c$ ergiebt sich hieraus der cubische Inhalt der oberen Hälfte des Ellipsoides $=\frac{2}{3}abc\pi$, und folglich $\frac{4}{3}abc\pi$ für das ganze Ellipsoid. Will man das Volumen einer Zone, deren Basis nicht durch den Mittelpunkt geht, so braucht man nur einmal $h=h_1$ dann $h=h_2$ zu setzen und zu subtrahiren, man erhält so das Volumen einer beliebigen Zone, deren Begränzungsebenen senkrecht auf $OC=c$ stehen. Ebenso leicht ist es ähnliche Formeln für solche Zonen zu entdecken, deren Begränzungsebenen auf $OB=b$ oder $OA=a$ senkrecht stehen; es würde hierzu eine blosse Buchstabenvertauschung hinreichen.

Das einfache Hyperboloid. (Taf. II. Fig. 2.).

Die Gleichung dieser Fläche ist bekanntlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

oder

$$\left(\frac{x}{a\sqrt{1+\left(\frac{z}{c}\right)^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{b\sqrt{1+\left(\frac{z}{c}\right)^2}}\right)^2=1,$$

und mithin der Schnitt durch den Endpunkt von z eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a\sqrt{1+\left(\frac{z}{c}\right)^2},\quad b\sqrt{1+\left(\frac{z}{c}\right)^2}.$$

Die Schnittfläche hat demnach die Grösse

$$ab\,(1+\frac{z^2}{c^2})\pi.$$

Denken wir uns ferner denjenigen Cylinder construirt, welcher das Hyperboloid in der Kehlellipse berührt, so besteht das gesuchte Volumen aus dem Cylindervolumen plus dem Raume eines ringförmigen Körpers. Der Querschnitt des letzteren wird erhalten, wenn man vom Querschnitt des Hyperboloides den Querschnitt des Cylinders, d. h. die Fläche $OA.OB.\pi = ab\pi$, subtrahirt; der Querschnitt des ringförmigen Körpers ist also

$$\frac{ab}{c^2} z^2 \pi.$$

Construiren wir einen Kegel, dessen Achse mit der Seite einen Winkel von 45° macht, so ist der Querschnitt desselben in der Entfernung z vom Scheitel ein Kreis mit dem Halbmesser z, und folglich die Schnittfläche $= z^2.\pi$. Die Schnittfläche des ringförmigen Körpers verhält sich also zur Schnittfläche dieses Kegels wie $\frac{ab}{c^2}:1$, und dasselbe muss von den Körpern gelten, welche entstehen, wenn man z das Intervall $z=0$ bis $z=h$ durchlaufen lässt, d. h. der ringförmige Körper ist das Produkt aus $\frac{ab}{c^2}$ und einem Kegelvolumen, welches h zur Höhe und h zum Basishalbmesser hat. Dieses Produkt wäre demnach

$$\frac{ab}{c^2}\cdot\frac{1}{3}h^3\pi,$$

und wenn man den Kehlcylinder von der Höhe h damit vereinigt, so ergiebt sich

$$abh\pi + \frac{ab}{c^2}\frac{1}{3}h^3\pi,$$

oder

$$ab\left(1+\frac{1}{3}\frac{h^2}{c^2}\right)h\pi$$

als Volumen der hyperboloidischen Zone, welche die Kehlellipse zur Basis und h zur Höhe hat. Giebt man h zwei verschiedene Werthe und subtrahirt, so kann man den Inhalt jeder Zone finden, deren Begränzungsebenen der Kehlellipse parallel laufen. Für $h=c$ wird das Volumen der obigen Zone $=\frac{4}{3}abc\pi$, alsogleich dem ganzen Ellipsoide, welches man aus den Halbachsen a, b, c construiren könnte und welches das Hyperboloid in der Kehlellipse berühren würde; diess ist der Satz des Herrn Professor Franke.

Das getheilte Hyperboloid. (Taf. II. Fig. 3.).

Geben wir der Gleichung dieser Fläche, nämlich

$$-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

die Form

$$\left(\frac{x}{a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-1}}\right)^2+\left(\frac{y}{b\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-1}}\right)^2=1,$$

so zeigt sich, dass der Schnitt, durch den Punkt xyz gelegt, eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-1}, \quad b\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-1}$$

darstellt, und dass mithin die Fläche des Schnittes gleich

$$ab\left\{\frac{z^2}{c^2}-1\right\}\pi$$

sein muss. Denken wir uns einen elliptischen Cylinder mit den Halbachsen a und b hinzu, so würde der Durchschnitt desselben in der Höhe z die Fläche $ab\pi$ besitzen; demnach bilden das Hyperboloid und dieser Cylinder zusammen einen Körper, welcher in der Höhe z die Schnittfläche

$$ab\left\{\frac{z^2}{c^2}-1\right\}\pi+ab\pi=\frac{ab}{c^2}z^2\pi$$

besitzt. Construiren wir wie vorhin einen Kegel, dessen Achse und Seite einen halben rechten Winkel einschliessen, so zeigt dieser, in der Höhe z geschnitten, die Schnittfläche $z^2\pi$, und folglich verhält sich jene Schnittfläche zu dieser wie $\frac{ab}{c^2}:1$. Lassen wir z das Intervall $z=c$ bis $z=h$ durchlaufen, so entstehen jetzt zwei Körper; der erste besteht aus einer hyperboloidischen Kappe und einem elliptischen Cylinder, deren gemeinschaftliche Höhe $h-c$ ist; der zweite ist ein abgestumpfter Kegel von derselben Höhe und sein Inhalt

$$\frac{1}{3}h^3\pi-\frac{1}{3}c^3\pi.$$

Multipliziren wir diess mit $\frac{ab}{c^2}$, so erhalten wir die Kappe plus dem elliptischen Cylinder; subtrahiren wir endlich den letzteren, welcher den Inhalt $ab(h-c)\pi$ besitzt, so kommt der Ausdruck

$$ab\left(\frac{1}{3}\frac{h^3}{c^2}-h+\frac{2}{3}c\right)\pi$$

zum Vorschein, welcher den Inhalt der hyperboloidischen Kappe von der Höhe $h-c$ angiebt. Nehmen wir $h=2c$, so findet sich $\frac{4}{3}abc\pi$, d. h. die hyperboloidische Kappe von der Höhe c hat gleiches Volumen mit dem ganzen Ellipsoide, welches aus den Halbachsen a, b, c construirt werden kann und das getheilte Hyperboloid in seinen beiden Scheiteln berühren würde. — Diess ist das Analogon zu dem für das einfache Hyperboloid geltenden Satze.

Das elliptische Paraboloid. (Taf. II. Fig. 4.).

Die Gleichung desselben ist bekanntlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\frac{z}{c},$$

oder

$$\left(\frac{x}{a\sqrt{\frac{z}{c}}}\right)^2+\left(\frac{y}{b\sqrt{\frac{z}{c}}}\right)^2=1,$$

und mithin der Schnitt durch den Endpunkt von z eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a\sqrt{\frac{z}{c}} \text{ und } b\sqrt{\frac{z}{c}}.$$

Die Schnittfläche wird demnach durch

$$\frac{ab}{c}z\pi$$

ausgedrückt. Construiren wir ein Prisma, welches die Höhe h, die Breite h und die Tiefe $\frac{ab}{c}\pi$ besitzt, so ist der Querschnitt desselben in der Entfernung z ebenfalls $=\frac{ab}{c}z\pi$, und wenn wir also z das Intervall $z=0$ bis $z=h$ durchlaufen lassen, so hat die entstehende Kappe des elliptischen Paraboloides denselben Inhalt wie dieses Prisma, nämlich

$$\frac{1}{2}\frac{ab}{c}h^2\pi.$$

Für $h=c$ giebt diese Formel drei Achttheil des aus den drei Halbachsen a, b, c construirten Ellipsoides. Giebt man h zwei Werthe und subtrahirt, so lässt sich die Cubatur jeder Zone ausführen, deren Begränzungsebenen der Ebene xy parallel laufen.

Das hyperbolische Paraboloid. (Taf. II. Fig. 5.).

Die Gleichung dieser Fläche ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=\frac{z}{c}.$$

Ein Schnitt parallel zur Ebene xy würde eine Hyperbel sein und diess hilft uns nichts, weil die Quadratur dieser Curve nicht elementar ausführbar ist. Legen wir aber parallel zur Ebene yz einen Schnitt in der Entfernung $OM=x$, so ist die Schnittfigur eine Parabel, deren Scheitel in V liegt. Nehmen wir $z=0$, so geht y in MU über und es ist daher

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{MU}{b}\right)=0,$$

oder

$$MU=\frac{bx}{a}.$$

Nehmen wir dagegen in der Gleichung unserer Fläche $y=0$, so geht z in MV über und es wird

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2=\frac{MV}{c} \text{ oder } MV=\frac{cx^2}{a^2}.$$

Nach dem Archimedischen Satze ist die parabolische Schnittfläche $MUV=\frac{2}{3}MU.MV=\frac{2}{3}\frac{bc}{a^3}x^3$. Diess lässt sich nicht gut mit einer anderweit bekannten Schnittfläche vergleichen und man muss desshalb einen anderen Weg einschlagen. Denken wir uns dem x den Spielraum $x=0$ bis $x=h$ angewiesen, theilen h in n gleiche Theile, deren einer $\delta=\frac{h}{n}$ heissen möge, und setzen der Reihe nach $x=\delta$, 2δ, 3δ,...$n\delta$, so bedeutet die Summe

$$\frac{2}{3}\frac{bc}{a^3}\delta^2.\delta+\frac{2}{3}\frac{bc}{a^3}(2\delta)^2.\delta+\frac{2}{3}\frac{bc}{a^3}(3\delta)^2.\delta+\ldots+\frac{2}{3}\frac{bc}{a^3}(n\delta)^2.\delta$$
$$=\frac{2}{3}\frac{bc}{a^3}\delta^4[1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3]$$

geometrisch eine Summe von Cylindern, welche die gleiche Höhe δ haben und deren Grundflächen die in den Entfernungen $x=\delta$, $2\delta,\ldots n\delta$ geführten Schnitte des hyperbolischen Paraboloides sind. Nach bekannten Prinzipien ist der Gränzwerth dieser Summe nichts Anderes als das Volumen desjenigen Abschnitts unseres vom hyperbolischen Paraboloide begränzten Körpers, welcher zwischen O und einem in der Entfernung $x=h$ parallel zu yz gelegten Schnitte enthalten ist. Wegen

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

findet man jetzt das Volumen des Abschnittes gleich

$$\text{Lim}\,\frac{1}{6}\frac{bc}{a^3}(n\delta)^2(n\delta+\delta)^2=\text{Lim}\,\frac{1}{6}\frac{bc}{a^3}h^2(h+\delta)^2,$$

d. i.

$$=\frac{1}{6}\frac{bc}{a^3}h^4.$$

Nimmt man speziell $h=a$, so wird der Abschnitt $=\frac{1}{6}$ von dem aus a, b, c construirten Parallelepipede. Giebt man h zwei Werthe und subtrahirt, so bekommt man den Inhalt einer halben Zone, welche von zwei zu yz parallelen Ebenen, von der Ebene xy, der Ebene xz und der Fläche begränzt wird. Die ganze oberhalb xy liegende Zone erhält man nachher durch Verdoppelung des vorhin Gefundenen.

XII.

Ueber die Bestimmung des Inhalts der dreiseitigen Pyramide.*)

Von dem

Herrn Professor Dr. Hessel

an der Universität zu Marburg.

---

§. 1. *Hülfssatz.* Für ganze Werthe der Zahlen a und x lässt sich auf sehr elementare Art beweisen, dass für jeden Werth von x, wenn $a \geqq 2$ ist, auch $a^x > x$ sein muss.

Beweis. 1) Weil $a \geqq 2$, so ist $a^1 > 1$ und $a^2 \geqq 2.2$, also $a^2 > 2$.

2) Ist aber für irgend einen bestimmten Werth von

*) Der Umstand, dass bei der Lehre von der Bestimmung des Inhalts der dreiseitigen Pyramide der Beweis des Satzes, der die Gleichheit zweier dreiseitiger Pyramiden bei Gleichheit der Grundflächen und Höhen ausspricht, eigentlich der höhern Mathematik angehört, hat mich, wie schon eine früher von mir in dieser Zeitschrift niedergelegte Arbeit beweist, öfters zu Versuchen veranlasst, diesen Uebelstand zu beseitigen. Einer dieser Versuche hat mich zu einer Reihe von Untersuchungen geführt, von denen ich hier einige mittheile.

Obgleich die hier vorgetragene Auflösung dieser stereometrischen Aufgabe die Exhaustionsmethode nicht vermeidet, so scheint sie mir doch, besonders in Verbindung mit den folgenden Arbeiten (über welche man unter andern Salomons Grundriss der höhern Analysis Seite 318 und 319, Beispiele 4, 5 und 6 vergleichen möge), der Veröffentlichung nicht unwerth zu sein.“

x, der $\overline{\geqq}2$ ist, in irgend einer Art nachgewiesen, dass $a^{x-1} > x-1$ ist, so ist auch $a^x > x$.

Denn ist $a^{x-1} > x-1$

und $a \overline{\geqq} 2$

so ist $a.a^{x-1} > 2(x-1)$

$> x+(x-2)$, mithin, da $x-2 \overline{\geqq} 0$ sein soll,

$a^x > x$.

Da nun $a^1 > 1$, also $a^{2-1} > 2-1$, so ist $a^2 > 2$;

ist aber $a^2 > 2$, so ist $a^{3-1} > 3-1$; also $a^3 > 3$; u. s. w.

Auch ist $a^0 = 1$, also $a^0 > 0$, und $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ positiv, also $> -x$.

§. 2. Anmerkung 1. Die Beschränkung, dass a und x ganze Zahlen sein sollen, kann man weglassen, wenn man den Beweis weiter ausdehnen will. Auch lässt sich in ähnlicher Art beweisen, dass, wenn $a \overline{\geqq} \frac{3}{2}$ ist, auch $a^x > x$ sein müsse.

§. 3. Anmerkung 2. Wie die Untersuchung in der Abhandl. Nr. II. zeigt, so gilt die Regel: weil $a^x > x$ ist, wenn $a > \sqrt[x]{x}$ ist, so muss, wenn a grösser ist als der grösste Werth, den $\sqrt[x]{x}$ haben kann (d. h. $> \sqrt[e]{e}$), auch $a^x > x$ sein.

Hier genügt obiger Satz für ganze a und x.

§. 4. *Lehrsatz.* Bezeichnet man ein dreiseitiges Prisma und eine dreiseitige Pyramide, welche eine Ecke c und das Verhältniss $cA : cB : cD$ der Längen der drei in dieser Ecke zusammenlaufenden Kantenlinien gemein haben,

das Prisma durch P,

die Pyramide durch p,

und falls cA in einer solchen Gestalt die Länge $cA = \alpha$ hat:

das Prisma durch $P(\alpha)$,

die Pyramide durch $p(\alpha)$;

so ist

$$p(\alpha) = 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2p\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Beweis. Ist $clmi$ (Taf. II. Fig. 6.) eine dreiseitige Pyramide, welche die Ecke c und die Seiten cl, cm, ci hat, deren Verhältniss $= cA : cB : cD$ sein möge, so wird, wenn man diese Seiten in a, b, d halbirt und durch die Halbirungspunkte b und d die Ebene $gbdk$ so legt, dass ihr die Kante cl parallel ist, sowohl bg als dk mit cl parallel sein, auch ist dann lm und li in

g und k halbirt. Legt man nun durch agk eine Ebene, so ist diese, weil $ag \# em$ und $ak \# ci$ ist, der Ebene emi parallel, also die Ecke $\left(k^{l}_{a}g\right) \cong \left(i^{l}_{c}m\right)$ und $\left.\begin{array}{r} al:ag:ak \\ = ca:cb:cd \end{array}\right\} \begin{array}{l} = \frac{1}{2}cA:\frac{1}{2}cB:\frac{1}{2}cD \\ = cA:cB:cD \end{array}$

Ist also $cl = \alpha$, so ist

$$\text{Pyramide } clmi = p(\alpha),$$

$$\text{Pyramide } algk = p\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\text{Prisma } cabdkg = P\left(\frac{\alpha}{2}\right);$$

auch ist gk und bd mit mi parallel.

Legt man nun durch bg die Ebene $bgh \# cli$, so ist

$$\text{Pyram.} bgmh \cong algk, \text{ also } = p\left(\frac{\alpha}{2}\right);$$

auch ist:

$$\text{Prisma } bghdki = cabdkg = P\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

indem jedes dieser beiden Prismen halb so gross ist als ein Parallelepiped, das die Ecke c und die in dieser Ecke zusammenlaufenden Kanten $\frac{1}{2}cA$ (in der Richtung cl), $\frac{1}{2}cB$ (in der Richtung cm) und $\frac{1}{2}cD$ (in der Richtung ci) hat.

Es ist also

$$\begin{pmatrix}\text{Pyramide}\\ clmi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Prisma}\\ cabdkg\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Prisma}\\ bghdki\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Pyramide}\\ algk\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Pyramide}\\ bgmh\end{pmatrix},$$

also

$$p(\alpha) = 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2p\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

§. 5. **Folgesatz I.** Da $p\left(\frac{\alpha}{2}\right) < P\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ist (indem, wenn man durch abd eine Ebene legen würde, die Pyramide $cabd = p\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ein Theil des Prismas $cabdkg$ ist, das $= P\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ist), so folgt, dass, wenn

$$p(\alpha) = 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2p\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

auch

$$p(\alpha) > 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

und

$$p(\alpha) < 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$> 4P\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

sein muss, dass also, da $P\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{8} P(\alpha)$ ist (indem $P(\alpha)$ sich in $8P\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ zerlegen lässt),

$$1)\ p(\alpha) > \frac{1}{4} P(\alpha)$$

und

$$2)\ p(\alpha) < \frac{1}{2} P(\alpha)$$

ist.

§. 6. Folgesatz II. Ist

$$p(\alpha) = 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2p\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

also

$$p\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2P\left(\frac{\alpha}{4}\right) + 2p\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$

u. s. w.

so folgt durch Substitution

$$p(\alpha) = 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2p\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2.2P\left(\frac{\alpha}{4}\right) + 2.2p\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$

$$= 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2^2P\left(\frac{\alpha}{4}\right) + 2^3P\left(\frac{\alpha}{8}\right) + 2^3p\left(\frac{\alpha}{8}\right)$$

u. s. w.

$$p(\alpha) = 2P\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2^2P\left(\frac{\alpha}{4}\right) + 2^3P\left(\frac{\alpha}{8}\right) + \ldots + 2^nP\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) + 2^np\left(\frac{\alpha}{2^n}\right).$$

Weil aber jedes der hier in diesem Ausdrucke vorkommenden Prismen $=\frac{1}{8}$ des nächst grösseren ist, so ist

$$p(\alpha)=2.\frac{1}{8}P(\alpha)+2^2.\frac{1}{8^2}\cdot P(\alpha)+2^3.\frac{1}{8^3}P(\alpha)\ldots.+2^n.\frac{1}{8^n}P(\alpha)+2^n.p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

$$=P(\alpha)\left[\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]+2^n.p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right).$$

Da aber ferner die Summe der geometrischen Reihe

$$\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-1}=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3}$$

ist, so ist

$$p(\alpha)=\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3}\right)P(\alpha)+2^n p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right),$$

also

$$p(\alpha)=\frac{1}{3}P(\alpha)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n P(\alpha)+2^n p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

$$=\frac{1}{3}P(\alpha)-\frac{1}{3}2^n\left(\frac{1}{8}\right)^n P(\alpha)+2^n p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

$$=\frac{1}{3}P(\alpha)-2^n\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8^n}P(\alpha)-p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right).$$

Da nun aber $\frac{1}{8^n}P(\alpha)=P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$ ist, so hat man den merkwürdigen Satz:

$$p(\alpha)=\frac{1}{3}P(\alpha)-2^n\left[\frac{1}{3}P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)-p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right].$$

§. 7. **Folgesatz III.** Da nun der Satz

$$p(\alpha)=\frac{1}{3}P(\alpha)-2^n\left[\frac{1}{3}P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)-p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right]$$

für jeden denkbaren Werth von n gilt, aber $p(\alpha)$ so wohl als $\frac{1}{3}P(\alpha)$ gegebene constante Grössen sind, so muss auch $2^n\left[\frac{1}{3}P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)-p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right]$ einen constanten, von dem Wachsen von n unabhängigen Werth haben, welcher w heissen möge.

1) Ist nun dieser constante Werth $w = 0$, so ist

$$p(\alpha) = \frac{1}{3} P(\alpha).$$

2) Wäre dagegen dieser constante Werth w nicht $= 0$, so müsste er entweder

bei jedem Werth von n positiv, also > 0, oder
bei jedem Werth von n negativ, also < 0 sein,

und man könnte also für jeden Werth von n

entweder $w = + \frac{1}{m} P(\alpha)$ und constant,

oder $w = - \frac{1}{m} P(\alpha)$ und constant

setzen, wo m irgend eine constante positive ganze, oder gebrochene, rationale oder irrationale Zahl bedeuten kann, zu welcher M die nächst grössere, positive ganze, also rationale Zahl sein möge.

2,1) Wäre nun für jeden Werth von n

$$w = + \frac{1}{m} P(\alpha),$$

also

$$2^n \left[\frac{1}{3} P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right] = \frac{1}{m} P(\alpha),$$

so müsste, da, wie oben bewiesen wurde,

$$p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) > \frac{1}{4} P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

ist, auch

$$2^n \left[\frac{1}{3} P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - \frac{1}{4} P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right] > \frac{1}{m} P(\alpha),$$

also

$$2^n \left[\frac{1}{12} P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right] > \frac{1}{m} P(\alpha),$$

mithin

$$2^n \left[\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{8^n} P(\alpha)\right] > \frac{1}{m} P(\alpha),$$

sonach

$$\frac{1}{12.4^n} > \frac{1}{m},$$

folglich

$$12.4^n < m$$

sein, und zwar für jeden Werth von n, also auch für $n = M$. Da nun aber $4 > 2$, also für jeden denkbaren Werth von M

$$4^M > M$$

ist, mithin um so mehr noch

$$12.4^M > M$$

ist, folglich, da $m < M$ ist, um so mehr noch

$$12.4^M > m$$

ist, so kann w nicht positiv sein.

2,2) Wäre umgekehrt für jeden Werth von n

$$w = -\frac{1}{m} P(\alpha),$$

also

$$2^n \left[\frac{1}{3} P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right] = -\frac{1}{m} P(\alpha),$$

so müsste, da

$$p\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) < \frac{1}{2} P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

ist, auch

$$2^n \left[\frac{1}{3} P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - \frac{1}{2} P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right] < -\frac{1}{m} P(\alpha),$$

also

$$-2^n \left[\frac{1}{6} P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right] < -\frac{1}{m} P(\alpha),$$

oder

$$2^n . \frac{1}{6} . P\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) > \frac{1}{m} P(\alpha),$$

d. h.

$$2^n . \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8^n} P(\alpha) > \frac{1}{m} P(\alpha),$$

also

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{2^n}{8^n} > \frac{1}{m},$$

mithin

$$\frac{1}{6.4^n} > \frac{1}{m},$$

folglich

$$6.4^n > m$$

sein, und zwar für jeden Werth von n, also auch für $n = M$; da aber $4^M > M$, also $6.4^M > M$, folglich $6.4^M > m$ ist, so ist diess nicht möglich. Es kann also w auch nicht negativ sein. Kann aber die constante Grösse w nicht positiv und auch nicht negativ sein, so ist sie $= 0$, folglich

$$p(\alpha) = \frac{1}{3} P(\alpha);$$

d. h. die dreiseitige Pyramide $= \frac{1}{3}$ des dreiseitigen Prismas, das mit ihr auf derselben Grundfläche steht und dieselbe Höhe hat*).

XIII.

Ueber das merkwürdige Beispiel einer zum Theil punctirt gebildeten Curve, das der Gleichung entspricht: $y = \sqrt[3]{x}$.

Von dem

Herrn Professor Dr. Hessel

an der Universität zu Marburg.

Beim Zeichnen von Polyedern pflegt man häufig die Linien des Hintergrundes (gleich als ob das Polyeder durchsichtig wäre)

*) Weil nämlich dreiseitige Prismen von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen gleich gross sind.

mit darzustellen, und man stellt sie dann gewöhnlich, um sie von denen des Vordergrundes augenfällig zu unterscheiden, als sogenannte punctirte Linien ...... dar, deren jede als blosse Reihe von Punkten eine unterbrochene Linie bildet, während die Linien des Vordergrundes als ununterbrochene d. h. gezogene Linien dargestellt werden.

Fälle, in denen durch Gleichungen Linien (Curven) bestimmt werden, die ihrer Wesenheit nach als punctirt gebildete Linien betrachtet werden können, scheinen mir bisher in den Compendien zu wenig hervorgehoben zu sein. Ich erlaube mir daher in Folgendem meine Arbeit über das, auch aus andern Gründen nicht uninteressante, Beispiel eines solchen Falles, welches die Gleichung $y=\sqrt[x]{x}$ darbietet, mitzutheilen.

§. 1. Um etwaige grösste oder kleinste Werthe von $y=\sqrt[x]{x}$ zu bestimmen, hat man nach den bekannten Regeln:

$$y=x^{\frac{1}{x}},$$

$$ly=\frac{1}{x}.lx,$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{1}{x^2}(1-lx).dx,$$

$$dy=y\left(\frac{1-lx}{x^2}\right).dx$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}.(1-lx).dx\text{....(I)};$$

also

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}.(1-lx)\text{....(I,1)}.$$

Setzt man $1-lx=0$, so ist $lx=1$, also $x=e=2{,}718....$ und

$$y=\sqrt[x]{x}=\sqrt[e]{e}$$

$$=(2{,}7182818...)^{\frac{1}{2{,}7182818....}}$$

$$=1{,}444568....\left\{ly=\frac{1}{e}=0{,}3678795\right\}.$$

Es ist ferner

$$d^2y=(dx)^2\left[x^{\frac{1}{x}}.d\left(\frac{1-lx}{x^2}\right)+\left(\frac{1-lx}{x^2}\right).d.x^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=(dx)[x^{\frac{1}{x}}lx^2\left(\frac{-dx}{x}\right)+(1-lx)2xdx)\frac{1}{x^4}+\left(\frac{1-lx}{x^2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1-lx)dx],$$

$$=(dx)^2\cdot\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^4}[-3x+2xlx+(1-lx)^2].$$

Es ist also

$$\frac{d^2y}{(dx)^2}=\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^4}[-3x+2xlx+(1-lx)^2];$$

diess giebt für $x=e$ den Werth

$$\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^4}[-3e+2e.le+(1-le)^2],$$

oder, da $le=1$ ist, den Werth

$$\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^4}[-e]=-\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^3},$$

und da dieser, wenn $y=e^{\frac{1}{e}}$ positiv ist, negativ ist, so ist der für $x=e$ gefundene Werth $y=\sqrt[e]{e}$ ein Maximum der Werthe von y.

§. 2. Da, wenn wir $\frac{dy}{dx}=+\infty$, oder $=-\infty$ setzen wollten, wir zu Werthen von x gelangen würden, wie $x=0$, $x=+\infty$, $x=-\infty$, zu welchen Werthe von y, wie $y=\sqrt[0]{0}$, $y=\sqrt[+\infty]{+\infty}$, $y=\sqrt[-\infty]{-\infty}$ die erst näher bestimmt werden müssen, gehören; so schlagen wir folgenden Weg ein.

§. 3. Nähert sich ein x, das $>e$, also $>2,7\ldots$ ist, durch allmähliges Wachsen dem Werthe $x=\infty$, so wird das dazugehörige y kleiner und nähert sich dem Werthe 1. Denn wenn $ly=\frac{lx}{x}$ kleiner wird, so wird auch y kleiner; nun wird aber $\frac{lx}{x}$, wenn $x=e+z$ ist, beim Wachsen von x um $dx=dz$, verändert um $d\left(\frac{l(e+z)}{e+z}\right)$, d. h. um

$$+\frac{1-l(e+z)}{(e+z)^2}.dz=-\frac{l(e+z)-1}{(e+z)^2}.dz,$$

also vermindert, da wirklich $l(e+z)>\frac{le}{1}$ ist, der positiv genommene Werth von z möge noch so sehr gross genommen werden, was also auch dann noch der Fall ist, wenn er sich dem Werthe ∞ nähert.

Es wird also auch y, für $x=e$ bis $x=\infty$, stets abnehmen, von $y=1,444568\ldots$ bis zu $y=\sqrt[\infty]{\infty}$. — Der Werth $y=\sqrt[\infty]{\infty}$ kann aber nicht kleiner als 1 sein, denn wäre $y<1$ und >0, also ein ächter Bruch, so könnte nicht

aus $y=\sqrt[\infty]{\infty}$ folgen, dass $y^\infty=\infty$ ist, was doch durch Erheben beider Seiten dieser Gleichung zur Potenz ∞ folgt,

sondern es würde $y^\infty<y$ *), also um so mehr noch $y^\infty<1$ sein.

Setzen wir aber $y=1+\delta$, wo δ ein unendlich kleiner Bruch $=\frac{1}{\infty}$ ist, so wird sicher $y^\infty=(1+\delta)^\infty=\infty$, also ist $y=\sqrt[\infty]{\infty}$ $=1+\delta=1+\frac{1}{\infty}$; da aber $\frac{1}{\infty}$ gegen 1 verschwindet, so ist $y=\sqrt[\infty]{\infty}=1$ zu setzen.

§. 4. Gehen wir umgekehrt von $x=e$ allmählig zu kleineren Werthen von x über, und zwar zuerst zu den Werthen $x<e\ldots>1$, so wird dabei auch $y=\sqrt[x]{x}$ stets kleiner. Denn ist $x=e-z$ und $z<e$, so ist $y=\sqrt[e-z]{e-z}$

$$dly=d\,\frac{l(e-z)}{e-z}=-\left(\frac{1-l(e-z)}{(e-z)^2}\right)dz$$

stets negativ, indem $e-z>1$, also $l(e-z)>l1$, d. h. >0, aber $<le$ d. h. <1, also $1-l(e-z)$ positiv ist, während auch $(e-z)^2$ positiv ist. Es wird also innerhalb der angegebenen Grenzen auch ly stets kleiner, daher auch y stets kleiner, bis endlich, bei $x=1$, auch $y=\sqrt[1]{1}=1$ wird.

§. 5. Die nächsten nun folgenden Werthe von x sind ächte Brüche, die immer kleiner werden, so dass dabei $x<1$ und >0 ist; und man sieht leicht, dass z. B.

$$\sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4};\ \sqrt[\frac{1}{3}]{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27};\ \sqrt[\frac{1}{10}]{\frac{1}{10}}=\left(\frac{1}{10}\right)^{10}=\frac{1}{10000000000}$$

und dass allgemein $\sqrt[\frac{1}{z}]{\frac{1}{z}}=\left(\frac{1}{z}\right)^z=\frac{1}{z^z}$ ist, und dass dieser Werth mit dem Wachsen von $z>1$ abnehmen muss, und dass endlich

$$\sqrt[\frac{1}{\infty}]{\frac{1}{\infty}}=\left(\frac{1}{\infty}\right)^\infty=\frac{1}{\infty^\infty},$$

also $\sqrt[0]{0}=0$ sein muss.

Es ist also für $x=0$ auch $y=\sqrt[x]{x}=\sqrt[0]{0}=0$.

---

*) Weil $\left(\frac{1}{N}\right)^p$, wenn $N>1$ und $p>1$ ist, stets $<\frac{1}{N}$ ist.

§. 6. Ehe wir zu den negativen Werthen von x übergehen, wollen wir hier noch bemerken, dass wir in der bisherigen Untersuchung bloss auf die positiven Werthe von y Rücksicht genommen haben, dass es aber auch negative Werthe von y giebt, die zu positiven Werthen von x gehören, von denen wir aber, so wie von der Berücksichtigung der negativen Werthe von x, vorerst noch ferner absehen wollen.

Denken wir, unter dieser Voraussetzung, die Curve, in welcher die freien Enden der $+y$ liegen, die zu $x=0$ bis $x=\infty$ gehören, für ein rechtwinkliges Coordinatensystem construirt und untersuchen wir dieselbe noch weiter, so ergiebt sich das in den folgenden Paragraphen Entwickelte.

§. 7. Fragen wir zuerst, ob für das Verhältniss $\frac{dy}{dx}$, welches die Tangente der Neigung des Elementes der Curve gegen die Abcissenaxe angiebt, etwaige Maxima vorkommen, so haben wir, da

$$\frac{d^2y}{(dx)^2}=\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^4}[-x-(1-lx)2x+(1-lx)^2]$$

ist, falls dieser Differentialquotient $=0$ gesetzt wird, die Gleichung:

$$-x-(1-lx)2x+(1-lx)^2=0,$$

oder, da $1=le$, so, dass $lx-1=lx-le=l\left(\frac{x}{e}\right)$, die bequemere Gleichung:

$$\left(l\left(\frac{x}{e}\right)\right)^2+2x.l\left(\frac{x}{e}\right)-x=0,$$

so, dass, wenn $l\left(\frac{x}{e}\right)=-x\pm\sqrt{x+x^2}$ ist, ein solches Maximum statt haben kann. Berücksichtigen wir aber, dass, wenn $x<e$ ist, der Bruch $\frac{x}{e}<1$, also $l\left(\frac{x}{e}\right)$ eine negative Zahl ist, folglich $=-p$ gesetzt werden kann, und dass, wenn $x>e$ ist, auch $\frac{x}{e}>1$, also $l\left(\frac{x}{e}\right)>0$, folglich positiv ist, und $=+P$ gesetzt werden kann; dass aber andererseits die Zahl $+\sqrt{x+x^2}>x$ ist, gleichviel welchen positiven Werth x hat, dass mithin

$$+\sqrt{x+x^2}-x$$

stets positiv ist, also $=+T$ gesetzt werden kann, während

$$-(\sqrt{x+x^2}+x)$$

stets negativ ist, also $=-t$ gesetzt werden kann; so ist ersichtlich, dass

$$\text{für } x<e, \text{ nur } l\left(\frac{x}{e}\right)=-(\sqrt{x+x^2}+x)=-t,$$

$$\text{für } x>e, \text{ nur } l\left(\frac{x}{e}\right)=+(\sqrt{x+x^2}-x)=+T$$

möglich ist.

I) Da nun für $x<e$, beim Wachsen der Zahl x, von $x=0$ bis $x=e$, auch $l\left(\frac{x}{e}\right)$ wächst von $-\infty$ bis 0, also p abnimmt von $p=\infty$ bis $p=0$, während beim Wachsen von $x=0$ bis $x=e$ die Zahl $t=\sqrt{x+x^2}+x$ wächst von $t=0$ bis

$$t=\sqrt{e+e^2}+e=0{,}4609232,$$

so folgt, dass zwischen $x=0$ bis $x=e$ sicher ein, aber auch nur ein einziger Fall vorkommt, wo $p=t$ ist, wo also

$$l\left(\frac{x}{e}\right)=-(x+\sqrt{x+x^2})$$

wird, d. h. wo $\frac{dy}{dx}$ ein Maximum werden kann.

Auch findet man leicht, dass zwischen

$$x=\frac{1}{2} \text{ und } x=1,$$

$$\text{genauer } x=\frac{1}{2} \text{ und } x=\frac{6}{10}$$

$$\text{„} \quad x=0{,}58 \text{ und } x=0{,}6$$

$$\text{„} \quad x=0{,}58 \text{ und } x=0{,}59$$

der Werth $\frac{d^2y}{(dx)^2}$ aus $+$, durch 0, in $-$ übergeht.

Es ist dabei, weil

$$ly=\frac{1}{x}lx,$$

und

$$l\left(\frac{x}{e}\right)=-(x+\sqrt{x+x^2}),$$

also $lx=1-(x+\sqrt{x+x^2})$ ist, auch

$$ly=\frac{1-(x+\sqrt{x+x^2})}{x}=\frac{1-(0{,}58\ldots+\sqrt{0{,}58\ldots+0{,}58\ldots^2})}{0{,}58\ldots}$$

$$=-0{,}93$$

folglich

$$\begin{aligned} y &= e^{ly} \\ &= e^{\frac{1-(x+\sqrt{x+x^2}}{x}} \\ &= e^{-0{,}93} \text{ ohngefähr} \\ &= 0{,}394\ldots \end{aligned}$$

II) Was nun das fernere Wachsen der Zahl x von $x=e$ bis $x=\infty$ anlangt, so ist zu bemerken, dass

1) Die Zahl $T=\sqrt{x+x^2}-x$ dabei gleichfalls stets wächst, von $T=\sqrt{e+e^2}-e=0{,}4600232$ bis $T=\sqrt{\infty+\infty^2}-\infty<\frac{1}{2}$.

1,1) Es ist nämlich T stets wachsend, weil dT stets positiv, d. h. >0 ist; denn wollte man annehmen, es gäbe einen Werth $dT \leqq 0$, so müsste für denselben

$$dT=\left(\frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}-1\right)dx \leqq 0,$$

mithin, da dx nicht 0 sein soll,

$$1+2x \leqq 2\sqrt{x+x^2},$$

also

$$1+4x+4x^2 \leqq 4x+4x^2,$$

d. h.

$$1 \leqq 0$$

sein, was nicht möglich ist.

1,2) Es ist aber ferner T stets $<\frac{1}{2}$; denn wäre

$$T=\sqrt{x+x^2}-x=A \left\{ \begin{array}{l} \text{wo } A \text{ stets positiv ist,} \\ \text{weil } T \text{ positiv sein muss,} \end{array} \right.$$

also

$$\sqrt{x+x^2}=A+x,$$

so wäre

$$x+x^2=A^2+2Ax+x^2,$$

oder

$$x(2A-1)=-A^2,$$

also

$$x=-\frac{A^2}{2A-1};$$

da nun aber x positiv sein soll, so muss $2A-1$ negativ, also

$$2A-1<0,$$

$$2A<1,$$

$$A<\frac{1}{2};$$

also T stets $<\frac{1}{2}$ sein.

Es ist aber ferner zu beachten, dass

2) bei dem Wachsen der Zahl x, von $x=e$ bis $x=\infty$, auch die Zahl $P=l\left(\frac{x}{e}\right)$ stets wächst, von $P=l\left(\frac{e}{e}\right)=0$ bis $P=\infty$, dass also nothwendig wenigstens einmal P so gross wird, um dem betreffenden Werth von T gleich zu sein.

Gesetzt diess sei der Fall bei dem Werthe $x=B$, und zwar, wenn mehrere solche Fälle vorkommen, so sei $x=B$ innerhalb der Grenzen $x=e$ bis $x=\infty$ der kleinste solche Werth von x, der die betreffende Gleichheit herbeiführt.

Um nun zu untersuchen, ob noch ein zweiter u. s. w. solcher Fall, z. B. für $x=B+x$, vorkommt, kann man in folgender Weise verfahren:

Es ist allgemein

$$dP=\frac{1}{x}\cdot dx,$$

$$dT=\left(\frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}-1\right)dx$$

$$=\frac{1+2x-2\sqrt{x+x^2}}{2\sqrt{x+x^2}}dx,$$

mithin da

$$2x<2\sqrt{x+x^2},$$

folglich

$$1+2x-2\sqrt{x+x^2}<1$$

ist, auch

$$dT < \frac{1}{2\sqrt{x+x^2}}dx.$$

Da aber ferner $\sqrt{x+x^2} > x$, also um so mehr noch $2\sqrt{x+x^2} > x$, also $\frac{1}{2\sqrt{x+x^2}} < \frac{1}{x}$, also um so mehr noch $dT < \frac{1}{x}dx$ ist, so folgt, dass allgemein (für jeden unserer Werthe von x) stets $dT < dP$ ist.

Es ist also auch für $x > B$ noch immer $dT < dP$. Daraus folgt aber, dass die Summe der zu $x = B$ bis $x = B + x_1$ gehörigen auf einander folgenden Werthe von dT kleiner ist als die Summe von eben so vielen dazu gehörigen Werthen von dP, dass also beim ferneren Wachsen von P und T die Zahl P kein zweites Mal gleich der Zahl T werden kann, dass also auch für $x > e$ nur ein bestimmter Werth von x der Gleichung

$$l\left(\frac{x}{e}\right) = +\sqrt{x+x^2} - x$$

Genüge leistet.

Auch findet man leicht, dass

	zwischen	$x=4$	und $x=5$
genauer	zwischen	$x=4$	und $x=4,5$
„	„	$x=4,3$	und $x=4,5$
„	„	$x=4,3$	und $x=4,4$
„	„	$x=4,35$	und $x=4,4$
„	„	$x=4,36$	und $x=4,4$

und endlich zwischen $x=4,36$ und $x=4,37$ die Zahl $\frac{d^2y}{(dx)^2}$ aus $+$ durch 0 in $-$ übergeht.

Ist aber $x = 4,36\ldots$ und

$$l\left(\frac{x}{e}\right) = -x + \sqrt{x+x^2},$$

also

$$lx = 1 - x + \sqrt{x+x^2}$$

und

$$ly = \frac{1}{x} \cdot lx = \frac{1-x+\sqrt{x+x^2}}{x},$$

so ist

$$y = e^{\frac{1-x+\sqrt{x+x^2}}{x}} = e^{\frac{1,47}{4,36}} = e^{(0,33\ldots)} = 1,39\ldots$$

§. 8. Es finden also für $x=0{,}85\ldots$ und für $x=4{,}36\ldots$ die Maxima der Steilheit des Curvenelementes statt, bei welchen die Curve eine Wendung macht, d. h., aus positiver Convexität in negative, oder umgekehrt, übergeht, indem (bei constantem dx) bekanntlich die allgemeine Formel für den Krümmungsradius

$$R=-\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{(dx)^2}\right)}$$

den zweiten Differentialquotienten $\left(\frac{d^2y}{(dx)^2}\right)$ als Nenner hat, also aus $+$ in $-$ übergeht, wenn dieser Nenner aus $-$ in $+$ übergeht.

§. 9. Es ist also die Curve gegen die Abscissenaxe x zu

zwischen $x=0$ und $x=0{,}58\ldots$ convex;
zwischen $x=0{,}58$ und $x=4{,}36\ldots$ concav,
zwischen $x=4{,}36\ldots$ und $x=\infty$ convex;

bei $x=0$ ist $y=0$,
bei $x>0$ bis $x<e$ wächst y beim Wachsen von x,
bei $x=e$ erreicht y das Maximum $\sqrt[e]{e}$ seiner Grösse,
bei $x>e$ und $<\infty$ nimmt y ab beim Wachsen von x,
bei $x=\infty$ wird $y=1$.

§. 10. Substituiren wir überhaupt in die bekannten allgemeinen Ausdrücke

für das Element der Curve $\quad ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$,

für die Tangente derselben $\quad \text{Tg.}s=\frac{y\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}{dy}$,

für die Subtangente $\quad \text{Subt.}s=\frac{y\,dx}{dy}$,

für die Normale $\quad \text{Norm.}s=\frac{y\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}{dx}$,

für die Subnormale $\quad \text{Subn.}s=\frac{y\,dy}{dx}$,

für den Krümmungsradius $\quad R=-\frac{(\sqrt{(dx)^2+(dy)^2})^3}{dx.d^2y}$

die betreffenden Werthe von y und dy und d^2y, so erhalten wir nach gehöriger Vereinfachung:

$$ds=\left(\frac{dx}{x^2}\right)\sqrt{x^4+[(1-lx)\sqrt[x]{x}]^2},$$

$$\mathrm{Tg.}\, s = \frac{\sqrt{x^4+[(1-lx)\sqrt[x]{x}]^2}}{1-lx},$$

$$\mathrm{Subt.}\, s = \frac{x^2}{1-lx},$$

$$\mathrm{Norm.}\, s = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}\sqrt{x^4+[(1-lx)\sqrt[x]{x}]^2},$$

$$\mathrm{Subn.}\, s = (\sqrt[x]{x})^2 . \frac{1-lx}{x^2},$$

$$R = -\frac{\left(\sqrt{x^4+[(1-lx)\sqrt[x]{x}]^2}\right)^3}{x^2.\sqrt[x]{x}[-x-(1-lx).2x+(1-lx)^2]};$$

und wir ersehen, dass in jedem dieser Ausdrücke die Grösse $1-lx$ eine wichtige Rolle spielt,

Da aber die Grösse $1-lx$ einfache Formen annimmt, wenn x eine Potenz von e mit einfachen ganzen oder gebrochenen Exponenten z. B. $x=e^0$, e^1, e^2 etc. $e^{\frac{1}{2}}$, $e^{\frac{1}{3}}$... e^{-1}, e^{-2}....$=e^n$ wird, weil dann $lx=l.e^n=nle=n$, also $1-lx=1-n$ wird, während dabei zugleich die in mehreren dieser Formeln vorkommende Grösse

$$y=\sqrt[x]{x}=(e^n)^{\frac{1}{e^n}}=e^{\left(\frac{n}{e^n}\right)}=\sqrt[e^n]{e^n}$$

$=e^{ne^{-n}}$ wird, so wird in diesem Falle jede der betreffenden Formeln einfacher.

§. 11. Der wichtigste Fall ist der, wobei $n=0$, also $lx=0$ und $x=1$ ist. Es ist dann

$$\mathrm{Tg.}\, s=\sqrt{2},\ \mathrm{Subt.}\, s=1,\ \mathrm{Subn.}\, s=1;$$
$$R=+\sqrt{2} \quad = \quad \mathrm{Norm.}\ s=\sqrt{2}.$$

§. 12. Gehen wir jetzt zur Berücksichtigung der negativen Werthe von y und auch der negativen Werthe von x über, so kommt es zunächst wesentlich darauf an, ob x als eine gerade oder als eine ungerade Zahl auftritt.

§. 13. Ist nämlich x eine gerade ganze Zahl, oder ein gerader Bruch (d. h. ein Bruch, der, wenn er durch Aufheben gleicher Factoren im Zähler und Nenner auf die einfachste Form gebracht ist, einen geraden Zähler und einen ungeraden Nenner hat), oder ist x eine gerade Irrationalzahl (d. h. eine Irrationalzahl, die das Doppelte ist von einer anderen Irrationalzahl) z. B. $=2\pi$, wo π also ganz oder gebrochen oder irrational sein kann, so ist

$$y=\sqrt[x]{x}=\sqrt[2\pi]{2\pi}=\pm\sqrt{\sqrt[\pi]{2\pi}},$$

so dass, wenn $\sqrt[\pi]{2\pi}$ möglich und positiv ist, sicher y zwei Werthe hat, einen positiven und einen negativen möglichen Werth.

Was insbesondere den Begriff Irrationalzahl betrifft, so ist eine Irrationalzahl nichts weiter, als „eine Zahlengrösse. „deren Verhältniss zur Einheit nur durch unendlich grosse Zahlen „genau ausgedrückt gedacht werden kann. Z. B.

$$\pi : 1 = 3{,}14159\ldots : 1{,}00000\ldots$$
$$= 314159\ldots : 100000\ldots$$

Auch ist z. B. von den beiden Irrationalzahlen 0,1311311131111 3.... und 0,2622622262222 6... die letztere sicher im Vergleich zur ersteren, in unserem Sinne, gerad. Die Irrationalzahl ist uns also ein Bruch mit unendlich grossem Zähler und unendlich grossem Nenner, und es kann bei ihr, sowohl beim Zähler als beim Nenner, gefragt werden, ob er gerad oder ungerad ist, gleich wie diess bei einem gewöhnlichen Bruche gefragt werden kann.

§. 14. Würde man hierbei, wie wir es oben stillschweigend gethan haben, annehmen, dass alle Zahlen x (also auch alle gebrochenen und alle Irrationalwerthe x), wenn sie in Bruchform als $\frac{\xi}{u}$ ausgedrückt werden, einen und denselben (constanten), unendlich grossen Nenner u haben*), so würde dieser ausdrücken, wie viele dx in der Einheit enthalten sind, und der Zähler ξ würde angeben, wie viele dx in dem betreffenden Werthe von x enthalten sind. Die Zahl u müsste aber dabei entweder nur eine ungerade, oder nur eine gerade Zahl sein, und es würde z. B. angemessen sein, (damit die Einheit und jede andere ganze ungerade Zahl ihre Bedeutung als ungerade Zahl nicht verliere) die Zahl u als ungerad zu denken. Es käme dann nur auf die Frage an, ob ξ gerad oder ungerad ist, um zu entscheiden, ob $y=\sqrt[\frac{\xi}{u}]{\frac{\xi}{u}}$ $=\sqrt[\xi]{\left(\frac{\xi}{u}\right)^u}$ zwei oder nur einen, oder, falls $\frac{\xi}{u}$ negativ und ξ gerade ist, gar keinen möglichen Werth hat.

Man hat nämlich bei constantem ungeraden Werthe u

1) wenn $x=+\frac{\xi}{u}$, also $y=\left(\frac{\xi}{u}\right)^{\frac{u}{\xi}}=\sqrt[\xi]{\left(\frac{\xi}{u}\right)^u}$ ist:

---

*) Dass also jeder mögliche Werth von x durch $\frac{\xi}{u}$ mit constantem unendlich grossen u erreichbar sei.

1,1) bei ungeraden Werthen von ξ, bloss positive Werthe von $y=\sqrt[\xi]{\left(\frac{\xi}{u}\right)^u}$;

1,2) bei geraden Werthen von ξ, sowohl positive als negative Werthe von $y=\pm\sqrt[\xi]{\left(\frac{\xi}{u}\right)^u}$;

2) wenn $x=-\frac{\xi}{u}$, wobei $y=\left(-\frac{\xi}{u}\right)^{-\frac{u}{\xi}}=\sqrt[\xi]{\left(-\frac{\xi}{u}\right)^{-u}}$, also $=\sqrt[\xi]{\left(-\frac{u}{\xi}\right)^u}$;

also, da u ungerade ist, so dass $y=\sqrt[\xi]{-\left(\frac{u}{\xi}\right)^u}$ ist,

2,1) bei ungeraden Werthen von ξ, bloss negative Werthe von y, indem $y=-\sqrt[\xi]{\left(\frac{u}{\xi}\right)^u}$ ist;

2,2) bei geraden Werthen von ξ keinen möglichen Werth von y, indem dann $y=\pm\sqrt[\xi]{-\left(\frac{u}{\xi}\right)^u}$ unmöglich ist.

§. 15. Berücksichtigt man aber, dass für eine Irrationalzahl x recht wohl ihr Verhältniss zur Einheit durch einen Bruch $\frac{\xi}{u}$ (mit unendlich grossem Zähler und unendlich grossem Nenner) dargestellt gedacht werden kann, (ohne dass darum auch für verschiedene irrationale Werthe von x die Nenner u der Brüche wie $\frac{\xi}{u}$ dieselben sein müssen, berücksichtigt man weiter, dass x bei seinem stetigen Wachsen sicher auch Werthe erreicht, die als Brüche mit geradem Nenner (bei ungeradem Zähler) auszudrücken sind, indem z. B. $x=\frac{3}{2}$, oder $x=\frac{5}{8}$ u. s. w., durch $x=\frac{\xi}{u}$ mit ungeradem Nenner u, sei u auch noch so gross, nie absolut genau ausgedrückt gedacht werden kann, so sieht man leicht ein, dass man hier nicht nur ξ, sondern auch u als veränderlich denken muss. Es versteht sich dabei von selbst, dass der Bruch $\frac{\xi}{u}$ (durch Aufheben der gemeinschaftlichen Factoren im Zähler und Nenner) auf die einfachste Form gebracht anzunehmen ist, (weil sonst ein und derselbe Werth von x in unendlich vielen verschiedenen geraden und ungeraden Formen in Betracht käme); dass also in dem Bruche $\frac{\xi}{u}$ Zähler und Nenner nie gleichzeitig (d. h. für einen und denselben Werth von x) gerad sein können.

Wird dies vorausgesetzt, so sind nur folgende Fälle möglich:

1) x ist positiv, also $x=+\frac{\xi}{u}$; dann ist

$$y=\left(+\frac{\xi}{u}\right)^{+\frac{u}{\xi}}, \text{ also } y=\sqrt[\xi]{\left(+\frac{\xi}{u}\right)^u}=\sqrt[\xi]{\left(\frac{\xi}{u}\right)^u};$$

1,1) ξ ist gerad, also u ungerad, dann ist

$$y=\pm\sqrt[\xi]{\left(\frac{\xi}{u}\right)^u},$$

d. h. es giebt für ein gerades ξ sowohl einen negativen als einen positiven Werth von y.

1,2) ξ ist ungerad; es mag dann u gerad oder ungerad sein, so hat doch y nur den einen möglichen Werth

$$y=+\sqrt[\xi]{\left(\frac{\xi}{u}\right)^u}.$$

2) x ist negativ, also $x=-\frac{\xi}{u}$, also

$$y=\left(-\frac{\xi}{u}\right)^{-\frac{u}{\xi}}=\sqrt[\xi]{\left(-\frac{\xi}{u}\right)^{-u}}$$

$$=\sqrt[\xi]{\left(-\frac{u}{\xi}\right)^u}=\left(-\frac{u}{\xi}\right)^{\frac{u}{\xi}}=\left(-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Ist nun dabei

2,1) ξ gerad, also u ungerad, so ist $\left(-\frac{u}{\xi}\right)^u=-\left(\frac{u}{\xi}\right)^u$, also negativ, mithin y unmöglich.

Ist dagegen

2,2) ξ ungerad und es ist

2,21) auch u ungerad, so ist

$$\left(-\frac{u}{\xi}\right)^u=-\left(\frac{u}{\xi}\right)^u,$$

also

$$y=-\sqrt[\xi]{\left(\frac{u}{\xi}\right)^u}=-\left(\frac{u}{\xi}\right)^{\frac{u}{\xi}},$$

also ein negativer (aber kein positiver) Werth von y vorhanden;

2,22) u gerad, so ist

$$\left(-\frac{u}{\xi}\right)^u = +\left(\frac{u}{\xi}\right)^u,$$

also

$$y = +\sqrt[\xi]{\left(\frac{u}{\xi}\right)^u} = +\left(\frac{u}{\xi}\right)^{\frac{u}{\xi}};$$

folglich ein positiver, aber kein negativer Werth von y vorhanden.

§. 16. Es giebt also, wenn x positiv, also $= + q$ ist,

I) in dem Quadranten $(+X+Y)$ zu jedem Werthe von $x = + q$ einen dazu gehörigen Werth $y = + \sqrt[q]{q}$, und die Gesammtheit der durch die Gleichung $y = + \sqrt[q]{q}$ bestimmten Punkte bildet, wenn man x stetig wachsend denkt, eine ununterbrochene Linie, einen gezogenen Curvenschenkel, den wir bereits oben beschrieben haben;

II) in dem Quadranten $(+X-Y)$ nur zu jedem geraden Werth $x = + q$ einen dazu gehörigen Werth $y = - \sqrt[q]{q}$, und die Gesammtheit der durch die Gleichung $y = - \sqrt[q]{q}$ bestimmten Punkte bildet, weil nur die geraden Werthe von q berücksichtigt werden, eine unterbrochene Linie, einen punktirt gebildet zu denkenden Curvenschenkel, der (als ununterbrochen gedacht) dem in dem Quadranten $(+X+Y)$ liegenden gegenbildlich gleich ist. Es fehlen aber in ihm diejenigen bildenden Punkte, welche zu ungeraden Werthen von q gehören.

§. 17. Setzen wir jetzt x negativ, also $x = - q = - \frac{\xi}{u}$, mithin $y = \sqrt[-q]{-q}$, so giebt es

III) in dem Quadranten $(-X-Y)$ nur zu jedem solchen Werthe von $q = \frac{\xi}{u}$, bei dem sowohl u als ξ ungerad ist, einen dazugehörigen, möglichen Werth von y, nämlich:

$$y = -\left(\frac{u}{\xi}\right)^{\frac{u}{\xi}} = -\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt[q]{q}} \text{ (siehe §. 15. Nr. 2,1)};$$

IV) in dem Quadranten $(-X+Y)$ aber nur zu jedem solchen Werthe von $q = \frac{\xi}{u}$, bei dem ξ ungerad, u aber gerad ist, einen dazu gehörigen möglichen Werth von y, nämlich:

$$y = +\left(\frac{u}{\xi}\right)^{\frac{u}{\xi}} = +\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= +\frac{1}{\sqrt[q]{q}} \text{ (siehe §. 15. Nr. 2,22).}$$

§. 18. Da wir oben gesehen haben, dass zu ungeraden Werthen von $+x$ nur positive Werthe von $\sqrt[x]{x}$ gehören, und dass, wenn x die Werthe hat:

$$x = \left\{\left(\frac{1}{\infty}\right); \left(>\frac{1}{\infty} \text{ und } <1\right); (=1); (>1 \text{ und } <e); \right.$$

$$[=e]; (>e \text{ und } <\infty); (=\infty)$$

auch $\sqrt[x]{x}$ die dazu gehörigen Werthe hat:

$$\sqrt[x]{x} = \left\{\left(+\frac{1}{\infty}\right); \left(>\frac{1}{\infty} \text{ und } <1\right); (=1); (>1 \text{ und } <\sqrt[e]{e}); \right.$$

$$= [\sqrt[e]{e}]; (<\sqrt[e]{e} \text{ und } >1); (=1)$$

und da das, was von einem ungeraden x und dem dazu gehörigen Werthe $\sqrt[x]{x}$ gilt, auch von dem ungeraden Werthe von q und dem dazu gehörigen Werthe von $\sqrt[q]{q}$ gelten muss, so folgt, dass, wenn q die Werthe hat:

$$q = \left\{\left(\frac{1}{\infty}\right); \left(>\frac{1}{\infty} \text{ und } <1\right); (=1); (>1 \text{ und } <e); \right.$$

$$[=e]; (>e \text{ und } <\infty); (=\infty)$$

auch die Grösse $\frac{1}{\sqrt[q]{q}}$ die Werthe haben muss:

$$\frac{1}{\sqrt[q]{q}} = (+\infty); (<\infty \text{ und } >1); (=1); \left(<1 \text{ und } >\frac{1}{\sqrt[e]{e}}\right);$$

$$\left[=\frac{1}{\sqrt[e]{e}}\right]; \left(>\frac{1}{\sqrt[e]{e}} \text{ und } <1\right); (=1).$$

§. 19. Wollten wir daher in dem Quadranten $(-X-Y)$ für Werthe der in $(-X)$ zu nehmenden Abscisse q, die zwischen $q=0$ und $q=\infty$ liegen, jene ununterbrochen gedachte Curve construiren, für welche bei jedem solchen Werthe von q ein $y = -\frac{1}{\sqrt[q]{q}}$ in Betracht kommt, das also die Grösse $\frac{1}{\sqrt[q]{q}}$ hat und in der Richtung $(-Y)$ liegt, so würden wir die eben angegebenen Hauptwerthe von q und von $\frac{1}{\sqrt[q]{q}}$ benutzen können.

Um aber die in dieser Curve vorkommenden Wendepunkte zu bestimmen, hätte man zu berücksichtigen, dass

$$dy = +\frac{1 - lq}{q^2 \sqrt[q]{q}}\, dq \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{(dq)^2} = \frac{-[q + 2q(1 - lq) + (1 - lq)^2]}{q^4 \sqrt[q]{q}}$$

ist, und dass aus der Gleichung

$$(lq - 1)^2 - 2q(lq - 1) + q = 0,$$

also aus der Gleichung

$$\left(l\left(\frac{q}{e}\right)\right)^2 - 2q.l\left(\frac{q}{e}\right) + q = 0,$$

der Werth von $l\left(\frac{q}{e}\right)$ gefunden wird als

$$l\left(\frac{q}{e}\right) = +q \pm \sqrt{-q + q^2},$$

oder was im Wesentlichen dasselbe ist, dass, wenn diese Gleichung gelten soll,

$$lq = +(q + 1) \pm \sqrt{-q + q^2}$$

sein muss.

Daraus würde sich sogleich ergeben, dass für Werthe von q, die > 0 und < 1 sind, diese Gleichung nicht möglich ist (zu unmöglichen Werthen von lq führt), dass also zwischen $q = 0$ und $q = 1$ für diese Curve kein Wendepunkt existirt.

Daraus würde ferner sogleich ersichtlich sein, dass, wenn $q \geqq 1$, also $\sqrt{-q + q^2}$ möglich ist, nur der Werth

$$lq = +(q + 1) - \sqrt{-q + q^2}$$

brauchbar sein kann, indem ohnehin $q > lq$ ist (weil $e^q > lq$, da $e > \sqrt[e]{e}$ ist), also um so mehr noch

$$(q + 1) + \sqrt{-q + q^2} > lq$$

ist. Daraus würde folgen, dass zwischen $q = 1$ und $q = \infty$ nur ein Wendepunkt vorkommt, und dass für ihn

$$lq = +(q + 1) - \sqrt{-q + q^2}$$

sein muss; und man würde leicht finden,

dass zwischen	$q=4$ und $q=5$	die Grösse
genauer zwischen	$q=4{,}5$ und $q=5$	$(q+1)-\sqrt{-q+q^2}$
„ „	$q=4{,}6$ und $q=5$	aus $+$ in $-$ übergeht,
„ „	$q=4{,}6$ und $q=4{,}7$	
	u. s. w.	

so dass der gesuchte Wendepunkt zu einem Werthe von q gehört, der zwischen $q=4{,}6$ und $q=4{,}7$ liegt, und dass dabei

$$y=-\frac{1}{\sqrt[q]{q}}=-\frac{1}{\sqrt[4{,}6..]{4{,}6..}}=-0{,}718$$

ist.

In dieser Curve liegen natürlich auch alle jene Punkte, die durch die Gleichung $y=\sqrt[x]{x}$ für den Fall bestimmt werden, in welchem $x=-q$ und $q=\frac{\xi}{u}$ so beschaffen ist, dass sowohl ξ als u ungerad ist.

§. 20. Das Bild der ununterbrochen gedachten Curve, welches in dem Quadranten $(-X+Y)$ so construirt werden könnte, dass in $(-X)$ die Abscisse $=q$ (abgesehen von der Richtung, also vom Vorzeichen) >0 und in der Richtung $(+Y)$ die Ordinate y genommen würde, wenn zu **jedem** Werthe von q ein $y=+\frac{1}{\sqrt[q]{q}}$ gehörte, bedarf, als ein blosses Gegenbild der im vorigen Paragraphen erwähnten Curve, wo $y=-\frac{1}{\sqrt[q]{q}}$ war, keiner weitern Erläuterung.

Da es alle Punkte umfasst, die durch die Gleichung $y=+\frac{1}{\sqrt[q]{q}}$ in der angedeuteten Weise bestimmt werden, so umfasst es auch alle jene Punkte, welche durch die Gleichung $y=\sqrt[x]{x}$ für den Fall bestimmt werden, in welchem $x=-q=-\frac{\xi}{u}$ so beschaffen ist, dass ξ ungerad, u dagegen gerad ist.

§. 21. Die Curve $y=\sqrt[x]{x}$ hat also

I) in dem Quadranten $(+X+Y)$ einen gezogenen Schenkel, in welchem kein bildender Punkt fehlt;

II) in dem Quadranten $(+X-Y)$ einen punktirt gebildeten Schenkel, in welchem die zu ungeraden Werthen von $x=\frac{\xi}{u}$, also zu ungeraden Werthen von ξ, gehörigen bildenden Punkte fehlen;

III) in dem Quadranten $(-X-Y)$ einen punktirt gebildeten Schenkel, in welchem diejenigen bildenden Punkte der Curve fehlen,

1) welche bei $x=-\frac{\xi}{u}$ zu geraden Werthen von ξ gehören, sowie

2) jene, welche zu geraden Werthen von u gehören;

IV) in dem Quadranten $(-X+Y)$ einen punktirt gebildeten Schenkel, in welchem diejenigen bildenden Punkte der (ununterbrochen gedachten) Curve fehlen, welche bei $x=-\frac{\xi}{u}$

1) zu geraden Werthen von ξ gehören, sowie

2) jene, welche zu ungeraden Werthen von u gehören.

§. 22. Die Zeichnung auf Taf. III. soll dienen, die Curve $y=\sqrt[x]{x}$ zu versinnlichen. Die Unterbrechungen einer Linie durch oooo soll eine unendliche Erstreckung andeuten.

§. 23. Merkwürdig sind die verschiedenen Ursachen des Fehlens bildender Punkte in den, den verschiedenen Quadranten angehörigen Schenkeln der Curve.

Im ersten Quadranten $(+X+Y)$ fehlt kein bildender Punkt.

Im zweiten Quadranten $(+X-Y)$ fehlen die zu ungeraden Werthen von x gehörigen bildenden Punkte, weil die ungerade $x$te Wurzel aus einer positiven Grösse x keinen Werth von der Form $-\sqrt[x]{x}$ hat.

Im dritten Quadranten $(-X-Y)$ fehlen

1) die zu geraden Werthen von x gehörigen bildenden Punkte der Curve, weil die gerade $-x$te Wurzel aus $-x$, d. h. $\sqrt[-x]{-x}$, unmöglich ist;

2) die zu geraden Werthen von $-\frac{1}{x}$ gehörigen bildenden Punkte der Curve, weil bei geradem Werthe von $-\frac{1}{x}$ ein Werth $-\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ für $\sqrt[-x]{-x}$ nicht existirt.

Im vierten Quadranten $(-X+Y)$ fehlen

1) die zu geraden Werthen von x gehörigen bildenden Punkte der Curve, weil für gerade Werthe von $-x$ die Grösse $\sqrt[-x]{-x}$ unmöglich ist;

2) die zu ungeraden Werthen von $-\frac{1}{x}$ gehörigen bildenden Punkte der Curve, weil, bei ungeraden Werthen von $-\frac{1}{x}$, ein Werth $+\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ für $\sqrt[-x]{-x}$ nicht existirt.

XIV.

Ueber eine gnomonische Aufgabe.*)

Von

Herrn Dr. Benjamin Witzschel,

Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften am Gymnasium zu Zwickau im K. Sachsen.

Auf einer Horizontalebene stehen in drei Punkten A, B, C, von deren gegenseitigen Entfernungen nur eine, z. B. AB, bekannt ist, drei vertikale Stäbe $A'A$, $B'B$, $C'C$ von gegebener Länge. An welchem Orte der Erde und an welchem Tage des Jahres wird es sich zutragen, dass das Schattenende des Stabes $A'A$ durch den Fusspunkt B und C des zweiten und dritten Stabes, das Schattenende des Stabes $B'B$ durch den Fusspunkt C und A des dritten und ersten Stabes, und das Schattenende des dritten Stabes $C'C$ durch den Fusspunkt A des ersten und somit auch durch den Fusspunkt B des zweiten Stabes geht?

1. Auflösung.

Der Einfachheit wegen stelle man sich vor, dass die Sonne innerhalb 24 Stunden sich um die Erde in einem Kreise der

---

*) Zu dieser schon ziemlich alten aber gewiss nicht uninteressanten Aufgabe hat Schooten in den Zusätzen zur Geometrie des Cartesius eine numerische, für den jetzigen Stand der Wissenschaft weitschweifige Lösung beigebracht. Die am genannten Orte gegebene Fassung der Aufgabe ist folgende: Tempore verno erectis alicubi terrarum ad perpendiculum tribus baculis in plano horizontali in punctis A, B, C, quorum is qui in A sit 6 pedum, qui in B 18 pedum et qui in C 8 pedum, existente linea AB 33 pedum: contigit quodam die extremitatem umbrae baculi A transire per puncta B et C, baculi autem B per puncta A et C et baculi C per punctum A, unde fit, ut etiam per punctum B sit transitura. Quaeritur jam, quo terrae loco atque anni die haec evenerint?

Himmelskugel bewege. Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt in der Himmelsaxe und entfernt sich von dem Mittelpunkte der Kugel um den Sinus der Deklination δ der Sonne. Der Radius desselben Kreises ist dem Cosinus der Deklination δ gleich zu setzen. Es werden demnach die Richtungen eines innerhalb 24 Stunden durch ein und denselben Punkt A' gehenden Sonnenstrahles eine Kegelfläche zweiter Ordnung beschreiben, als deren Leitlinie der von der Sonne scheinbar beschriebene Kreis angesehen werden kann, deren Scheitelwinkel dem doppelten Complement $(\pi - 2\delta)$ der Deklination gleich kommt, und deren Axe wegen des Parallelismus aller an verschiedenen Orten zu gleicher Zeit einfallenden Sonnenstrahlen der Erd- oder Himmelsaxe parallel sein muss. Ob der Punkt A' nach seiner materiellen Beschaffenheit die Sonnenstrahlen ungebrochen hindurchlässt, oder dieselben ganz unterbricht, bleibt sich hierbei ganz gleich, indem im letztern Falle die erwähnte Kegelfläche von ihrem Mittelpunkte aus zur einen Hälfte als von Sonnenstrahlen, zur andern als von Schattenstrahlen erzeugt gedacht werden kann. Der Kürze wegen wird in der Folge die eine Hälfte der Sonnenkegel, die andere der Schattenkegel genannt werden, wenn sich die Nothwendigkeit, beide Hälften von einander zu unterscheiden, herausstellen sollte. Das Schattenende einer von A' auf die Horizontalebene gefällten Vertikale $A'A$, die als einer der in der Aufgabe erwähnten Stäbe angesehen werden kann, muss nun in der Durchschnittslinie der gedachten Kegelfläche mit der Horizontalebene liegen. Es ist ferner leicht einzusehen, dass diese Vertikale $A'A$ oder der Stab mit der Axe der Kegelfläche einen Winkel bildet, der dem Complement zur Polhöhe φ desjenigen Orts, in welchem der Stab eingesteckt ist, gleich kommt. Die Gleichung der erwähnten Kegelfläche ist bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem

$$x'^2 + y^2 = z'^2 \cot \delta^2,$$

wobei δ wieder die Deklination der Sonne bedeutet, und die Axe der z' mit der des Kegels, sowie der Coordinatenanfang mit dem Mittelpunkt desselben zusammenfällt. Hinsichtlich der beiden andern Coordinatenaxen soll noch bestimmt werden, dass die Ebene der $x'z'$ in der Meridianebene des Ortes liegen soll. Verbände man mit dieser Gleichung die der Horizontalebene, so würde man die Gleichungen der Projectionen des Kegelschnitts, welchen das Schattenende des Stabes innerhalb 24 Stunden beschreibt, und um dessen Bestimmung es sich handelt, erhalten. Dieser Weg würde aber zu schon jetzt ersichtlichen Weitläufigkeiten und Verwicklungen führen, die auf folgende Weise vermieden werden können. Man drehe das Axensystem um die Axe der y, so dass die neue z Axe mit dem Stabe $A'A$ zusammenfällt, also der Drehungswinkel dem Complement der Polhöhe φ gleich ist. Vermittels der dazu gehörigen Tagesformationsformeln:

$$x' = x \sin\varphi - z \cos\varphi,$$
$$z' = z \sin\varphi + x \cos\varphi$$

geht obige Gleichung der Kegelfläche über in:

$$x^2(\sin\varphi^2-\cos\delta^2)+y^2\sin\delta^2-2xz\sin\varphi\cos\varphi+z^2(\sin\delta^2-\sin\varphi^2)=0.$$

Da nach diesem neuen Axensystem die Horizontalebene zur Axe der z normal, oder der xy-Ebene parallel ist, so hat man für dieselbe die einfache Gleichung

$$z=b,$$

wenn b die Entfernung der Ebene vom Coordinatenanfang, d. h. die Länge des Stabes bezeichnet. Durch einfache Substitution von b für z in der Gleichung der Kegelfläche erhält man die Gleichung des durch die Horizontalebene mit der Kegelfläche gebildeten Kegelschnitts:

$$x^2(\sin\varphi^2-\cos\delta^2)+y^2\sin\delta^2-2bx\sin\varphi\cos\varphi+b^2(\sin\delta^2-\sin\varphi^2)=0,$$

oder

$$Mx^2+Ny^2-2Pbx+Qb^2=0, \ldots\ldots\ldots \quad (\odot)$$

wobei

$$M=\sin\varphi^2-\cos\delta^2=-\frac{\cos 2\varphi+\cos 2\delta}{2},$$

$$N=\sin\delta^2,$$

$$P=\sin\varphi\cos\varphi=\frac{\sin 2\varphi}{2},$$

$$Q=\sin\delta^2-\sin\varphi^2=\frac{\cos 2\varphi-\cos 2\delta}{2}$$

gesetzt worden ist. Es ist also $(\odot)$ die Gleichung des vom Schattenende des Stabes $=b$ beschriebenen Kegelschnitts, wenn die Polhöhe des Ortes, wo dies geschieht, $=\varphi$ und die Deklination der Sonne zur Zeit, während der es vor sich geht, $=\delta$ angenommen, der Coordinatenanfang in den Fusspunkt des Stabes und die Axe der x in die Mittagslinie gelegt wird. Sind nun b_1, b_2, b_3 die Längen der Stäbe $A'A$, $B'B$, $C'C$; d_1, d_2, d_3 die Entfernungen AB, BC, CA der Fusspunkte A, B, C dieser Stäbe, von denen der Aufgabe gemäss nur eine, z. B. $AB=d_1$, als bekannt vorauszusetzen ist; liegt ferner der Coordinatenanfang im Fusspunkte A des ersten Stabes, und sind die Coordinaten der Fusspunkte B und C des zweiten und dritten Stabes resp. α_2, β_2 und α_3, β_3, wobei die α auf die Axe der x und die β auf die der y sich beziehen: so sind die Gleichungen der von den Schattenenden der Stäbe $A'A$, $B'B$, $C'C$ beschriebenen, und auf ein und dasselbe Coordinatensystem bezogenen Kegelschnitte:

$$Mx^2+Ny^2-2Pb_1x+Qb_1^2=0\ldots. \quad \text{(I)}$$

$$M(x-\alpha_2)^2+N(y-\beta_2)^2-2Pb_2(x-\alpha_2)+Qb_2^2=0\ldots. \quad \text{(II)}$$

$$M(x-\alpha_3)^2+N(y-\beta_3)^2-2Pb_3(x-\alpha_3)+Qb_3^2=0\ldots. \quad \text{(III)}$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe sollen

1) die Fusspunkte des zweiten und dritten Stabes in der vom Schatten des ersten beschriebenen Linie liegen, d. h.

$$M\alpha_2^2+N\beta_2^2-2Pb_1\alpha_2+Qb_1^2=0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$M\alpha_3^2+N\beta_3^2-2Pb_1\alpha_3+Qb_1^2=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

2) die Schattenlinie des zweiten und dritten Stabes durch den Fusspunkt des ersten gehen, d. h.

$$M\alpha_2^2+N\beta_2^2+2Pb_2\alpha_2+Qb_2^2=0 \quad \ldots\ldots (3)$$

$$M\alpha_3^2+N\beta_3^2+2Pb_3\alpha_3+Qb_3^2=0 \quad \ldots\ldots (4)$$

3) endlich die Schattenlinie des zweiten Stabes durch den Fusspunkt des dritten gehen, sowie die Entfernung des ersten und zweiten Srabes $=d_1$ sein, also

$$M(\alpha_3-\alpha_2)^2+N(\beta_3-\beta_2)^2-2Pb_2(\alpha_3-\alpha_2)+Qb_2^2=0 \ldots (5)$$

$$\alpha_2^2+\beta_2^2=d_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Die in diesen 6 Gleichungen enthaltenen 6 Unbekannten α_2, β_2, α_3, β_3, φ und δ können auf folgende Weise bestimmt werden.

Durch Subtraktion der Gl. (1) und (2) von resp. (3) und (4) erhält man

$$2P(b_1+b_2)\alpha_2=Q(b_1^2-b_2^2);\quad \alpha_2=\frac{Q}{2P}(b_1-b_2) \ldots (7)$$

$$2P(b_1+b_3)\alpha_3=Q(b_1^2-b_3^2);\quad \alpha_3=\frac{Q}{2P}(b_1-b_3) \ldots (8)$$

folglich

$$\alpha_3-\alpha_2=\frac{Q}{2P}(b_2-b_3).$$

Der Werth von $\alpha_3-\alpha_2$, im dritten Gliede von (5) eingesetzt, giebt

$$M(\alpha_3-\alpha_2)^2+N(\alpha_3-\alpha_2)^2-Qb_2(b_2-b_3)+Qb_2^2=0,$$

$$M(\alpha_3-\alpha_2)^2+N(\alpha_3-\alpha_2)^2+Qb_2b_3=0 \ldots\ldots (5)^b$$

Addirt man zur letztern Gleichung $-Qb_3^2+Qb_3^2=0$ und berücksichtigt, dass man $(\alpha_2-\alpha_3)^2$ für $(\alpha_3-\alpha_2)^2$ setzen kann, so erhält man

$$M(\alpha_2-\alpha_3)^2+N(\beta_2-\beta_3)^2-Qb_3(b_3-b_2)+Qb_3^2=0,$$

oder, da

$$b_3-b_2=\frac{2P}{Q}(\alpha_2-\alpha_3):$$

$$M(\alpha_2-\alpha_3)^2+N(\beta_2-\beta_3)^2-2Pb_1(\alpha_2-\alpha_3)+Qb_1^2=0\ldots\ldots(9)$$

woraus, mit Vergleichung von (III), hervorgeht „dass auch das Schattenende des dritten Stabes durch den Fusspunkt des zweiten gehen muss.“

Man führe ferner in den Gleichungen (3) und (4) die unter (7) und (8) enthaltenen Werthe von α_2 und α_3 ein, so ist

$$M\alpha_2^2+N\beta_2^2+Qb_1b_2=0\ldots\ldots\ldots\ldots(3)^b$$
$$M\alpha_3^2+N\beta_3^2+Qb_1b_3=0\ldots\ldots\ldots\ldots(4)^b$$

Die Summe beider Gleichungen von $(5)^b$ abgezogen, giebt

$$2M\alpha_2\alpha_3+2N\beta_2\beta_3+Q(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)=0$$

oder, wenn man $2N\beta_2\beta_3$ transponirt und hierauf die Gleichung quadrirt,

$$4N^2\beta_2^2\beta_3^2$$
$$=4M^2\alpha_2^2\alpha_3^2+4MQ\alpha_2\alpha_3(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)+Q^2(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)^2.$$

Versetzt man ebenfalls in den Gleichungen $(3)^b$ und $(4)^b$ resp. $N\beta_2^2$ und $N\beta_3^2$ auf die andere Seite, multiplicirt dann beide Gleichungen mit einander und vervierfacht das Produkt, so erhält man

$$4N^2\beta_2^2\beta_3^2=4M^2\alpha_2^2\alpha_3^2+4MQ(\alpha_2^2b_3b_1+\alpha_3^2b_1b_2)+4Q^2b_1^2b_2b_3.$$

Zieht man beide zuletzt gefundenen Gleichungen von einander ab, und dividirt den Rest durch Q, so hat man

$$4M\alpha_2\alpha_3(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)+Q(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)^2$$
$$=4M(\alpha_2^2b_3b_1+\alpha_3^2b_1b_2)+Qb_1^2b_2b_3.$$

Nun ist

$$\alpha_2\alpha_3(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)$$
$$=\frac{Q^2}{4P^2}\{b_1^2(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)-(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)^2\},$$
$$\alpha_2^2b_3b_1+\alpha_3^2b_1b_2$$
$$=\frac{Q^2}{4P^2}\{b_1^2(b_1b_2+b_3b_1)+b_1b_2^2b_3+b_1b_2b_3^2-4b_1^2b_2b_3\}.$$

Diese Werthe substituirt geben, nachdem man das Resultat durch Q abermals dividirt und mit P^2 multiplicirt hat,

$$MQb_1^2(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)-(MQ-P^2)(b_1b_2-b_2b_3+b_3b_1)^2$$
$$=MQ(b_1^2(b_1b_2+b_3b_1)+b_1b_2^2b_3+b_1b_2b_3^2)-4(MQ-P^2)b_1^2b_2b_3$$

oder

$$MQb_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)$$
$$+(MQ-P^2)\{b_1^2b_2^2+b_2^2b_3^2+b_3^2b_1^2-2b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)\}=0;$$
$$MQp+(MQ-P^2)(q-2p)=0;$$

wenn man der Kürze wegen

$$b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)=p,$$
$$b_1^2b_2^2+b_2^2b_3^2+b_3^2b_1^2=q$$

setzt. Führt man statt der abgekürzten Bezeichnungen M, P, Q die durch die doppelten Bogen von φ und δ ausgedrückten Kreisfunktionen wieder ein, setzt also

$$\frac{\sin 2\varphi^2-\sin 2\delta^2}{4} \text{ statt } MQ,$$
$$-\frac{\sin 2\delta^2}{4} \quad \text{,,} \quad MQ-P^2;$$

so erhält man

$$\sin 2\varphi^2=\frac{q-p}{p}\sin 2\delta^2.$$

Dem Ausdrucke des Faktors

$$\frac{q-p}{p}=\frac{b_1^2b_2^2+b_2^2b_3^2+b_3^2b_1^2-b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)}{b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)}$$

können noch einige andere Formen gegeben werden, als:

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{b_1b_2b_3}{b_1+b_2+b_3}\left(\dfrac{1}{b_1^2}+\dfrac{1}{b_2^2}+\dfrac{1}{b_3^2}\right)-1,\\[2ex]
\dfrac{\dfrac{1}{b_1^2}+\dfrac{1}{b_2^2}+\dfrac{1}{b_3^2}}{\dfrac{1}{b_1b_2}+\dfrac{1}{b_2b_3}+\dfrac{1}{b_3b_1}}-1,\\[2ex]
\dfrac{b_1^2(b_2-b_3)^2+b_2^2(b_3-b_1)^2+b_3^2(b_1-b_2)^2}{2b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)},\\[2ex]
\dfrac{\left(\dfrac{1}{b_1}-\dfrac{1}{b_2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b_2}-\dfrac{1}{b_3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b_3}-\dfrac{1}{b_1}\right)^2}{2\left(\dfrac{1}{b_1b_2}+\dfrac{1}{b_2b_3}+\dfrac{1}{b_3b_1}\right)};
\end{array}\right\}\text{(T)}$$

von denen die beiden ersten zur Vereinfachung der numerischen Berechnung dienen dürften, die beiden letzten insbesondere aber beweisen, dass der Werth von $\frac{q-p}{p}$ stets positiv sein muss. Es soll daher auch in der Folge dieser Faktor durch C^2 bezeichnet werden, um dadurch zugleich den stets positiven Werth desselben anzudeuten. Somit hat man als die erste einfache Beziehung zwischen φ und δ die Gleichung

$$\sin 2\varphi^2 = C^2 \sin 2\delta^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Werden in der Gleichung (6) die aus (7) und $(3)^b$ gezogenen Werthe von α_2 und β_2 eingesetzt, so hat man

$$d_1{}^2 = \alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 = \frac{Q^2(N-M)}{4P^2N}(b-b_2)^2 - \frac{Q}{N} b_1 b_2,$$

oder, nachdem man eingerichtet, für M, N, P, Q die durch die einfachen Winkel φ und δ ausgedrückten goniometrischen Funktionen gesetzt und die Gleichung durch den gemeinschaftlichen Faktor $\cos\varphi^2$ dividirt hat,

$$(b_1+b_2)^2 \sin\varphi^4 - 2(b_1{}^2 + b_2{}^2 + 2d_1{}^2)\sin\varphi^2 \sin\delta^2 + (b_1-b_2)^2 \sin\delta^4 = 0,$$

$$\sin\varphi^4 - 2\frac{(b_1{}^2+d_1{}^2+b_2{}^2+d_1{}^2)}{(b_1+b_2)}\sin\varphi^2\sin\delta^2 + \frac{(b_1-b_2)^2}{(b_1+b_2)^2}\sin\delta^4 = 0.$$

Setzt man

$$\frac{\sqrt{b_1{}^2+d_1{}^2}}{b_1+b_2} = A,\ \frac{\sqrt{b_2{}^2+d_1{}^2}}{b_1+b_2} = B$$

und bemerkt, dass

$$\frac{2(b_1{}^2+d_1{}^2+b_2{}^2+d_2{}^2)}{(b_1+b_2)^2} = (A+B)^2 + (A-B)^2,$$

$$\frac{(b_1-b_2)^2}{(b_1+b_2)^2} = (A+B)^2(A-B)^2;$$

so erhält man aus obiger Gleichung

$$(\sin\varphi^2 - (A+B)^2\sin\delta^2)(\sin\varphi^2 - (A-B)^2\sin\delta^2) = 0,$$

$$\text{oder } \sin\varphi^2 = (A \pm B)^2 \sin\delta^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

als die zweite einfache Relation zwischen φ und δ. Hierbei ist noch zu untersuchen, ob beide der unter (11) enthaltenen Werthe für $\sin\varphi^2$ zulässig sind, und welcher Ausdruck im entgegengesetzten Falle für die weitere Berechnung zu benutzen ist. Zu dem Ende möge erst die Entwickelung der aus $(3)^b$ und $(4)^b$ gezogenen Ausdrücke für β_2 und β_3 vorgenommen werden. Man hat nämlich

$$\beta_2^2 = -\frac{M\alpha_2^2 + Qb_1b_2}{N} = -\frac{1}{4}\frac{Q}{N}\left(\frac{MQ}{p^2}(b_1 - b_2)^2 + 4b_1b_2\right),$$

$$\beta_3^2 = -\frac{M\alpha_3 + Qb_1b_3}{N} = -\frac{1}{4}\frac{Q}{N}\left(\frac{MQ}{p^2}(b_1 - b_3)^2 + 4b_1b_3\right).$$

Nun ist

$$\frac{QM}{p^2} = 1 - \frac{\sin 2\delta^2}{\sin 2\varphi^2} = \frac{q-2p}{q-p},$$

daher

$$\frac{MQ}{p^2}(b_1 - b_2)^2 + 4b_1b_2 = \frac{(b_1 + b_2)^2 q - 2(b_1^2 + b_2^2)p}{q-p},$$

$$\frac{MQ}{p^2}(b_1 - b_3)^2 + 4b_1b_3 = \frac{(b_1 + b_3)q - 2(b_1^2 + b_3^2)p}{q-p}.$$

Führt man statt q und p die oben angegebenen Werthe ein, so findet sich nach einer leichten Rechnung, dass die Zähler vorstehender Ausdrücke vollständige Quadrate sind, so dass

$$\beta_2 = \pm\frac{b_1^2(b_2 - b_3) - b_2^2(b_3 - b_1)}{(q-p)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{-Q}{N}},$$

$$\beta_3 = \pm\frac{b_1^2(b_2 - b_3) - b_3^2(b_1 - b_2)}{(q-p)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{-Q}{N}}.$$

Da $(A+B)^2 > 1$ und $(A-B)^2 < 1$ ist, wovon man sich leicht überzeugen kann, so ist

$$\sqrt{\frac{-Q}{N}} = \sqrt{(A \pm B)^2 - 1}$$

reell oder imaginär, je nachdem man das obere oder untere Zeichen zur Geltung bringt, und daher die Gleichung

$$\sin\varphi^2 = (A-B)^2 \sin\delta^2,$$

insofern dieselbe imaginäre Werthe für die Ordinaten β_2, β_3 bedingt, nicht weiter in Betracht zu ziehen, so lange man alle mit dem Faktor $\sqrt{-1}$ behafteten Formen als unbrauchbar ansieht.*)

---

*) Bekanntlich schenkt man jetzt den imaginären und complexen Grössen mehr Aufmerksamkeit, und hat insbesondere die geometrische Bedeutung und Construktion derselben dadurch gewonnen, dass man $\sqrt{-1}$ als mittlere Proportionale von 1 und -1 anzusehen und bei den einzelnen Fällen auf eine Verallgemeinerung des Problems hinzudeuten pflegt. (vergl. u. a. eine Mittheilung Drobisch's in den Berichten d. K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig II. B. 5. Heft). Auch hier hat der Faktor $(A-B)^2$ seine Bedeutung, wenn man die Aufgabe erwei-

Durch Verbindung von (10) mit

$$\sin\varphi^2 = (A+B)^2 \sin\delta^2$$

erhält man endlich

$$\sin\delta^2 = \frac{(A+B)^2 - C^2}{(A+B)^4 - C^2},$$

$$\sin\varphi^2 = \frac{(A+B)^2 - C^2}{(A+B)^4 - C^2}(A+B)^2.$$

Hiermit kann man die Aufgabe als gelöst ansehen. Der Tag nämlich, nach welchem in derselben gefragt wird, lässt sich durch

$$\sin\lambda = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta}$$

bestimmen, wenn ε die Schiefe der Ekliptik und λ den Bogen bedeutet, welchen die Sonne vom $\left\{\begin{matrix}\text{Frühlings-}\\ \text{Herbst-}\end{matrix}\right\}$ Nachtgleichenpunkte an $\left\{\begin{matrix}\text{beschrieben hat}\\ \text{beschreiben wird}\end{matrix}\right\}$.

Ist z. B. $b_1 = 6'$, $b_2 = 18'$, $b_3 = 8'$ und $d_1 = 33'$, so ist

$$C^2 = \frac{\frac{b_1 b_2}{b_3} + \frac{b_2 b_3}{b_1} + \frac{b_3 b_1}{b_2}}{b_1 + b_2 + b_3} - 1 = \frac{\frac{27}{2} + 24 + \frac{8}{3}}{32} - 1 = \frac{49}{192}$$

$$\log. C^2 = 9.40690 = \log\frac{49}{192}$$

$$\log(A+B) = 0.47185 = \log\left(\frac{\sqrt{125}+\sqrt{157}}{8}\right)$$

$$\log\sin\delta = 9.52247 = \log\sin 19^0 27' \text{ circ.}$$

$$\log\sin\varphi = 9.99432 = \log\sin 80^0 45' \text{ circ.}$$

$$\log\sin\lambda = 9.92248 = \log\sin 56^0 46\tfrac{1}{2}'$$

$$\left.\begin{aligned}\log\lambda &= 9.99604\\ +\log 365{,}21 &= 2.56254\\ -\log 2\pi &= 0.79818\end{aligned}\right\} = 1.76040 = \log 57{,}6.$$

Es werden demnach am 57 und 58 Tage $\left\{\begin{matrix}\text{nach}\\ \text{vor}\end{matrix}\right\}$ Frühlings Anfang, oder $\left\{\begin{matrix}\text{vor}\\ \text{nach}\end{matrix}\right\}$ Herbst-Anfang auf der $\left\{\begin{matrix}\text{nördlichen}\\ \text{südlichen}\end{matrix}\right\}$ Halbkugel unter einer Polhöhe von $80^0\ 45'$ die Stäbe von angegebener Länge

---

tert, und als Construktionsebene nicht die Horizontalebene, sondern die auf derselben senkrecht stehende Meridianebene annimmt. Für diesen Fall erhält man $\cos\varphi^2 = (A-B)^2 \cos\delta^2$. Eine weitere Betrachtung dieser Verhältnisse würden zu weit führen.

eingesteckt werden müssen, wenn die erwartete Erscheinung beobachtet werden soll.

II.

Eine kurze Diskussion der in vorstehender Auflösung vorgekommenen Gleichungen u. s. w. dürfte geeignet sein, das Interesse an der Aufgabe noch etwas zu erhöhen.

Wenn man zuerst fragt, von welcher Art die von dem Schattenende eines Stabes beschriebene Curve ist, oder da dieselbe, wie schon erwähnt, ein Kegelschnitt ist, welche Linie zweiter Ordnung durch die Gleichung

$$Mx^2+Ny^2-2Pbx+Qb^2=0 \ldots\ldots\ldots (\odot)$$

bezeichnet wird, so hat man nach den allgemein bekannten analytischen Kennzeichen die Frage dahin zu beantworten, dass die Curve

$$\text{eine}\ \left.\begin{matrix}\text{Ellipse}\\ \text{Parabel}\\ \text{Hyperbel}\end{matrix}\right\}\ \text{ist, wenn}\ MN \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} 0\ \text{oder}\ \sin\varphi^2 \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} \cos\delta^2,$$

d. h. die Ellipse und Parabel kann nur innerhalb der Polarzirkel, ausserhalb derselben kann nur die Hyperbel beschrieben werden. (Unter den Polen und unter dem Aequator zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche geht die Ellipse in den Kreis und die Hyperbel in die gerade Linie über.). Nach (12) ist

$$\sin\varphi^2 = \frac{(A+B)^2-C^2}{(A+B)^4-C^2}(A+B)^2,$$

$$\cos\delta^2 = \frac{(A+B)^2-1}{(A+B)^4-C^2}(A+B)^2.$$

Da ferner $(A+B)^2>1$, so muss auch, wenn $\cos\delta$ reell sein soll, $(A+B)^4>C^2$, und für jedes reelle φ auch $(A+B)^2>C^2$ sein, demnach wird

$$\sin\varphi^2 \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} \cos\delta^2,\ \text{wenn}\ C^2 \begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix} 1\ \text{ist, oder der Kegelschnitt ist}$$

$$\text{eine}\ \left\{\begin{matrix}\text{Ellipse}\\ \text{Parabel}\\ \text{Hyperbel}\end{matrix}\right\}\ \text{wenn}\ C^2 \begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix} 1\ \text{ist.}$$

Es fällt aber je nach Verhältniss der Grösse der Stäbe der Werth von

$$C^2 = \frac{\frac{b_1 b_2}{b_3}+\frac{b_2 b_3}{b_1}+\frac{b_3 b_1}{b_2}}{b_1+b_2+b_3} - 1$$

zwischen die Grenzen 0 und ∞, woraus ohne Weiteres hervorzugehen scheint, dass je nach der Wahl der Stäbe die Schattenenden derselben unter den in der Aufgabe gestellten Bedingungen bald Ellipsen und Parabeln, bald Hyperbeln beschreiben können. Dennoch lassen sich, wie weiter unten gezeigt werden soll, hinsichtlich der Möglichkeit, dass auch ausserhalb der Polarkreise die in der Aufgabe geforderte Erscheinung eintreten könne, einige Zweifel erheben. Zuvor jedoch mögen die weiteren Bedingungen erörtert werden, unter denen die Schattenlinien als Kreise, Parabeln u. s. w. hervorgehen.

1) Ist $\varphi=\frac{\pi}{2}$, so ergiebt sich aus (10)

$$C^2=\frac{b_1{}^2(b_2-b_3)^2+b_2{}^2(b_3-b_1)^2+b_3{}^2(b_1-b_2)^2}{2b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)}=0,$$

folglich $b_1=b_2=b_3$, und nach (12) $\sin\delta=\frac{1}{A+B}=\frac{b}{\sqrt{b^2+d^2}}$, $\operatorname{tg}\delta=\frac{b}{d}$, wie im Voraus zu erwarten war. Ebenso ist leicht einzusehen, dass die von den Schattenenden beschriebenen Linien unter einander gleiche Kreise sind, deren Radius $=b\cot\delta=d$ ist.

2) Setzt man $\sin\varphi^2=\cos\delta^2$ oder $C^2=1$, so ist

$$b_1{}^2b_2{}^2+b_2{}^2b_3{}^2+b_3{}^2b_1{}^2=2b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3),$$

oder

$$\frac{1}{b_1}=\left[\frac{1}{\sqrt{b_2}}\pm\frac{1}{\sqrt{b_3}}\right]^2,\ \frac{1}{b_2}=\left[\frac{1}{\sqrt{b_3}}\pm\frac{1}{\sqrt{b_1}}\right]^2,$$
$$\frac{1}{b_3}=\left[\frac{1}{\sqrt{b_1}}\pm\frac{1}{\sqrt{b_2}}\right]^2.$$

Es ist demnach einer der drei Stäbe nicht bloss der Lage, sondern auch der Grösse nach durch die übrigen bestimmt. Für $C^2=1$ folgt ferner aus (12)

$$\sin\delta^2=\frac{1}{(A+B)^2+1},\ \cot\delta=A+B;$$
$$\sin\varphi^2=\frac{(A+B)^2}{(A+B)^2+1},\ \operatorname{tg}\varphi=A+B.$$

Die Gleichung (⊙), insofern dieselbe die einer Parabel sein soll, geht für $M=0$, $N=\cos\varphi^2$, $P=\cos\varphi\sin\varphi$, $Q=\cos\varphi^2-\sin\varphi^2$ über in

$$y^2\cos\varphi^2-2bx\sin\varphi\cos\varphi+b^2(\cos\varphi^2-\sin\varphi^2)=0$$

oder, wenn man den Coordinatenanfang in den Scheitel der Parabel setzt:

$$y^2 = 2bx \operatorname{tg}\varphi$$

Es ist demnach $b\operatorname{tg}\varphi = b(A+B)$ der Parameter der vom Schattenende des Stabes b beschriebenen Parabel.

Ist z. B. $b_1 = 6'$, $b_2 = 18'$, $d_1 = 33'$ und nach der Relation $\frac{1}{\sqrt{b_3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \pm \frac{1}{\sqrt{18}}$, $b_3 = \left\{\begin{matrix} 2{,}412 \ldots \\ 33{,}587 \ldots \end{matrix}\right\}$, so ist

$$\log(A+B) = 10{,}47185 = \log \operatorname{tg} 71^\circ 21' 20'' \; (\varphi).$$
$$= \log \cot 18^\circ 38' 40'' \; (\delta)$$

Oder sei $b_1 = 9'$, $b_2 = \frac{81'}{16}$, $b_3 = \frac{81'}{49}$, $d_1 = 20'$; so erhält man

$$\log(A+B) = 10{,}51300 = \log \operatorname{tg} 72^\circ 56' 20'' \; (\varphi)$$
$$= \log \cot 17^\circ \; 3' 40'' \; (\delta)$$

3) Für $C_2 \gtrless 1$ sind, wie erwähnt, die fraglichen Curven $\left\{\begin{matrix}\text{Hyperbeln} \\ \text{Ellipsen}\end{matrix}\right\}$, und aus dem Obigen geht auch hervor, dass die Bedingungen der Aufgabe für den Fall, dass die Curven Ellipsen sind, nichts Unmögliches enthalten. Ein Gleiches gilt bezüglich des Falles, dass Hyperbeln entstehen, in so fern, als aus der oben gegebenen Lösung hervorgeht, dass sich drei ähnliche Hyperbeln unter den durch Nr. (1) bis (6) ausgedrückten Bedingungen schneiden können. Allein hier kömmt noch die besondere Frage in Betracht, welche Zweige der Hyperbeln zum Durchschnitt kommen. Da nämlich die der ganzen Entwickelung zum Grunde gelegte Kegelfläche, wie schon Anfangs erwähnt worden ist, von ihrem Mittelpunkte aus einestheils von Sonnenstrahlen, anderntheils von Schattenstrahlen gebildet wird, so wird der im Lichtkegel liegende Theil der aus dem Durchschnitt mit der Horizontalebene hervorgehenden Hyperbel als eine imaginäre Schattencurve anzusehen sein. Wenn nun der Fall eintreten könnte, dass der reelle Theil einer der drei Hyperbeln mit dem einen oder beiden imaginären Theilen der übrigen Hyperbeln in zweien der Punkte A, B, C zum Durchschnitt käme, so würde für diesen Fall die Aufgabe, wenigstens als gnomonische betrachtet, unmöglich zu lösen sein. Es fragt sich nun, ob und unter welchen Bedingungen dieser Fall eintreten kann. Für diese Erörterung mögen durch $\pm H_1$, $\pm H_2$, $\pm H_3$ resp. die Zweige der drei durch die Stäbe b_1, b_2, b_3 erzeugten Hyperbeln, welche im $\left\{\begin{matrix}\text{Schatten-} \\ \text{Sonnen-}\end{matrix}\right\}$ Kegel liegen, bezeichnet werden. Unbeschadet der Allgemeinheit der Discussion kann man ferner annehmen, dass b_1 der kleinste der gegebenen Stäbe, oder $b_1 < b_2$ und $b_1 < b_3$ sei. Da $Q = \sin\delta^2 - \sin\varphi^2$ negativ sein muss, so folgt, dass

$$\alpha_2 = \frac{Q}{2p}(b_1 - b_2), \quad \alpha_3 = \frac{Q}{2p}(b_1 - b_3)$$

positive Grössen sind. Werden ferner durch x_1, x_2, x_3 die Abscissen der Scheitelpunkte der drei von den Schattenenden der

Stäbe b_1, b_2, b_3 beschriebenen Hyperbeln bezeichnet, so hat man nach den Gleichungen (I), (II), (III)

$$Mx_1^2 - 2Pb_1 x_1 + Qb_1^2 = 0,$$
$$M(x_2 - \alpha_2)^2 - 2Pb_2(x_2 - \alpha_2) + Qb_2^2 = 0,$$
$$M(x_3 - \alpha_3)^2 - 2Pb_3(x_3 - \alpha_3) + Qb_3^2 = 0;$$

und hieraus

$$x_1 = \frac{b_1 P \pm b_1 \sqrt{P^2 - MQ}}{M}$$
$$= \frac{b_1 MQ + b_1(P \pm \sqrt{P^2 - MQ})^2}{2PM}$$
$$= \frac{b_1(\sin 2\varphi^2 - \sin 2\delta^2) + b_1(\sin 2\varphi \pm \sin 2\delta)^2}{4\sin 2\varphi(\sin\varphi^2 - \cos\delta^2)},$$

$$x_2 = \frac{b_1 MQ + b_2(P^2 \pm \sqrt{P^2 - MQ})^2}{2PM}$$
$$= \frac{b_1(\sin 2\varphi^2 - \sin 2\delta^2) + b_2(\sin 2\varphi \pm \sin 2\delta)^2}{4\sin 2\varphi(\sin\varphi^2 - \cos\delta^2)},$$

$$x_3 = \frac{b_1 MQ + b_3(P^2 \pm \sqrt{P^2 - MQ})^2}{2PM}$$
$$= \frac{b_1(\sin 2\varphi^2 - \sin 2\delta^2) + b_3(\sin 2\varphi \pm \sin 2\delta)^2}{4\sin\varphi 2(\sin\varphi^2 - \cos\delta^2)}.$$

Da $\sin 2\varphi^2 > \sin 2\delta^2$, weil $C^2 > 1$, dagegen $\sin\varphi^2 < \cos\delta^2$, wie schon oben einmal bemerkt worden ist, mithin

$$x_1 < 0,$$
$$x_2 < 0 < \alpha_2,$$
$$x_3 < 0 < \alpha_3;$$

so ist hieraus abzunehmen, dass, mögen in den Gleichungen für x_1, x_2, x_3 von den Doppelzeichen ($\pm$) (die übrigens den Zweigen $\mp H_1$, $\mp H_2$, $\mp H_3$ entsprechen) die oberen oder unteren genommen werden, nur die nach ein und derselben Richtung der Abscissenaxe zu liegenden Zweige der drei gedachten Hyperbeln sich zu zweien resp. in den Punkten A, B, C schneiden können. Denn gesetzt, dass $-H_2$ oder $-H_3$ mit den Zweigen $+H_1$ oder $+H_2$ in den Punkten C oder A zum Durchschnitt kämen, so müsste

$$x_2 > \alpha_2 > 0,$$
$$x_3 > \alpha_3 > 0$$

sein, was dem Obigen widerspricht. Hiermit ist jedes Bedenken bezüglich des Falles, dass die beschriebenen Schattencurven Hyperbeln sind, gehoben. Ist z. B.

$b_1 = 2455{,}25'$, $b_2 = 1000'$, $b_3 = 21898$, $d_1 = 1000$;

so ist

$\log . C^2 = 0{,}25169$; $\log(A+B) = 0{,}29274$

$\log \sin \delta = 9{,}59983 = \log \sin 23^\circ 27'$ circ. (Zeit d. Solstit.)

$\log \sin \varphi = 9{,}89257 = \log \sin 51^\circ 20' 15''$ circ. (Polhöhe v. Leipzig).

Im Folgenden mögen noch einige bemerkenswerthe Verhältnisse, welche mit der Aufgabe in einigem Zusammenhange stehen, Platz finden.

Verlegt man den Coordinatenanfang für jeden der drei von den Schattenenden beschriebenen Kegelschnitte in den Mittelpunkt desselben, so erhält man aus (I), (II), (III) folgende Gleichungen:

$$\frac{M^2x^2}{(P^2-MQ)b_1{}^2} + \frac{MNy^2}{(P^2-MQ)b_1{}^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{I})^b$$

oder $\dfrac{(\sin\varphi^2-\cos\delta^2)^2}{\sin\delta^2\cos\delta^2}\dfrac{x^2}{b_1{}^2} + \dfrac{\sin\varphi^2-\cos\delta^2}{\cos\delta^2}\dfrac{y}{b_1{}^2} = 1$

$$\frac{M^2x^2}{(P^2-MQ)b_2{}^2} + \frac{MNy^2}{(P^2-MQ)b_2{}^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{II})^b$$

oder $\dfrac{(\sin\varphi^2-\cos\delta^2)^2}{\sin\delta^2\cos\delta^2}\dfrac{x^2}{b_2{}^2} + \dfrac{\sin\varphi^2-\cos\delta^2}{\cos\delta^2}\dfrac{y^2}{b_2{}^2} = 1$

$$\frac{M^2x^2}{(P^2-MQ)b_3{}^2} + \frac{MNy^2}{(P^2-MQ)b_3{}^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{III})^b$$

oder $\dfrac{(\sin\varphi^2-\cos\delta^2)^2}{\sin\delta^2\cos\delta^2}\dfrac{x^2}{b_3{}^2} + \dfrac{\sin\varphi^2-\cos\delta^2}{\cos\delta^2}\dfrac{y^2}{b_3{}^2} = 1.$

Es sind also

$$mb_1,\ mb_2,\ mb_3$$

die grossen Halbaxen,

$$nb_1,\ nb_2,\ nb_3$$

die kleinen Halbaxen der Ellipsen oder die halben Nebenaxen der Hyperbeln, wobei absolut und reell genommen

$$m = \frac{\sin\delta\cos\delta}{\sin\varphi^2-\cos\delta^2} = \frac{\sqrt{(A+B)^2-C^2}.\sqrt{(A+B)^2-1}}{(A+B)(1-C^2)},$$

$$n = \frac{\cos\delta}{\sqrt{\sin\varphi^2-\cos\delta^2}} = \frac{\sqrt{(A+B)^2-C^2}}{(A+B)\sqrt{1-C^2}}$$

und $\dfrac{n^2}{m}b_1 = b_1\cot\delta$, $\dfrac{n^2}{m}b_2 = b_2\cot\delta$, $\dfrac{n^2}{m}b_3 = b_3\cot\delta$ die Parameter der Kegelschnitte, gleichwie oben unter 2. für die Parabeln, und wie überhaupt zu erwarten war.

Bezeichnet man ferner mit γ_1, γ_2, γ_3 die Entfernungen der Punkte A, B, C von dem Mittelpunkte resp. des ersten, zweiten, dritten Kegelschnitts, so hat man

$$\gamma_1 = \frac{P}{M} b_1,\ \gamma_2 = \frac{P}{M} b_2,\ \gamma_3 = \frac{P}{M} b_3$$

und, wenn diese Ausdrücke durch die entsprechenden grossen Halbaxen dividirt werden:

$$\frac{\gamma_1}{mb_1} = \frac{\gamma_2}{mb_2} = \frac{\gamma_3}{mb_3} = \frac{P}{\sqrt{P^2 - MQ}} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\delta\cos\delta} = C.$$

Verbindet man also die grosse Halbaxe und die Länge γ unter einem rechten Winkel und zieht die Hypotenuse, so ist C die trigonometrische Tangente des der Seite γ gegenüberstehenden Winkels.

Hinsichtlich der Bestimmung der Lage des Punktes C, oder der Grösse von $BC = d_2$ und $CA = d_3$ hat man zwar

$$d_2^2 = (\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\beta_2 - \beta_3)^2,\ d_3 = \alpha_3^2 + \beta_3^2;$$

wodurch man mit Hülfe von $(3)^b$, $(4)^b$ und $(5)^b$ d_2 und d_3 als Funktionen von b_1, b_2, b_3 und d_1 bestimmen kann: doch dürfte folgender Weg kürzer zum Ziele führen. Es muss nämlich $\sin\delta^2$ und $\sin\varphi^2$ doch immer denselben Werth behalten, wenn man d_2 oder d_3 statt d_1 als gegeben annimmt. Setzt man daher

$$\frac{\sqrt{b_1^2 + d_1^2}}{b_1 + b_2} + \frac{\sqrt{b_2^2 + d_1^2}}{b_1 + b_2} \text{ wie oben } = A + B,$$

ebenso

$$\frac{\sqrt{b_2^2 + d_2^2}}{b_2 + b_3} + \frac{\sqrt{b_3^2 + d_2^2}}{b_2 + b_3} = A' + B'$$

und

$$\frac{\sqrt{b_3^2 + d_3^2}}{b_3 + b_1} + \frac{\sqrt{b_1^2 + d_3^2}}{b_3 + b_1} = A'' + B'';$$

so muss

$$\frac{(A+B)^2 - C^2}{(A+B)^4 - C^2} = \frac{(A'+B')^2 - C^2}{(A'+B')^4 - C^2} = \frac{(A''+B'')^2 - C^2}{(A''+B'')^4 - C^2} = \sin\delta^2,$$

oder

$$A + B = A' + B' = A'' + B'' = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}$$

sein. Nimmt man nun d_1 als gegebene Länge, also $A+B$ als bekannte Grösse an, so hat man zur Bestimmung von d_2 und d_3:

$$A+B=\frac{\sqrt{b_2^2+d_2^2}+\sqrt{b_3^2+d_2^2}}{b_2+b}=\frac{\sqrt{b_3^2+d_3^2}+\sqrt{b_1^2+d_3^2}}{b_3+b_1}$$

und hieraus

$$d_2^2=\frac{(A+B)^2-1}{4(A+B)^2}\{(b_2+b_3)^2(A+B)^2-(b_2-b_3)^2\},$$

$$d_3^2=\frac{(A+B)^2-1}{4(A+B)^2}\{(b_3+b_1)^2(A+B)^2-(b_3-b_1)^2\}.$$

Die auf ähnliche Weise gebildete identische Gleichung

$$d_1=\frac{(A+B)^2-1}{4(A+B)^2}\{(b_1+b_2)^2(A+B)-(b_1-b_2)^2\}$$

reducirt sich nach Einführung von $\frac{\sqrt{d_1^2+b_1^2}+\sqrt{d_1^2+b_2^2}}{b_1+b_2}$ statt $A+B$, wie natürlich, auf $d_1=d_1$.

Die betrachtete Aufgabe bietet noch mehrere interessante Verhältnisse, welche bei einer weiteren Untersuchung derselben zum Theil sich von selbst ergeben. Ich begnüge mich nur noch einige derselben kurz anzuführen. So ist für den Inhalt Δ des Dreiecks ABC

$$\Delta=\frac{(A+B)^2-1}{4(A+B)^2}\sqrt{(A+B)^2-C^2}\sqrt{b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(\sin\varphi^2-\sin\delta^2)^{\frac{3}{2}}}{\sin\delta\sin2\delta}\sqrt{b_1b_2b_3(b_1+b_2+b_3)}.$$

Ferner hat die durch die Spitzen der drei Stäbe $A'A$, $B'B$, $C'C$ gelegte Ebene $A'B'C'$ die Eigenschaft, dass sie stets normal auf der Meridianebene steht. Dieses merkwürdige Lagenverhältniss dient zugleich zur Bestimmung der Lage des Dreiecks ABC in der Horizontalebene.

XV.

Ueber die Wirkung linearer electrischer Ringe auf die magnetische Flüssigkeit.

Von dem
Herrn Doctor Haedenkamp,
Oberlehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Hamm.

Der electrische Strom übt auf ein magnetisches Element eine Wirkung aus, die dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, aber die Richtung der Kraft liegt nicht in der die wirkenden Kräfte verbindenden geraden Linie, sondern sie ist senkrecht auf der durch die Richtung des electrischen Stromes und den angezogenen oder abgestossenen magnetischen Punkt gelegten Ebene; überdies ist diese Kraft noch proportional dem Sinus des Winkels, den die Richtung des Stromes mit der von dem magnetischen Punkte nach dem Stromelemente gezogenen Linie bildet. Nennt man daher die Entfernung eines Stromelements ∂s von einem magnetischen Elemente r, die Intensitäten des Stromes und des magnetischen Elements i und μ, und den Winkel, den r mit der Richtung des Stromelements ∂s macht, ψ, so wird die Grösse der Kraft, mit welcher sich die Elemente anziehen oder abstossen, durch $\frac{i\mu \sin\psi}{r^2}$ ausgedrückt.

Ich werde im Folgenden die Wirkungen untersuchen, die Kreis- und elliptische Ringe, durch die electrische Ströme gehen, auf ein in der Ebene der Ringe gelegenes magnetisches Theilchen ausüben, wobei die Querdimensionen der Ringe vernachlässigt werden sollen.

Ich bemerke auch noch, dass man bei Beobachtungen selbst für das magnetische Element eine Magnetnadel von geringer Länge substituiren könne. Zuerst nehmen wir an, dass der wirkende Ring ein Kreis sei und das magnetische Theilchen ausserhalb dieses Kreises liege. Sei in Taf. IV. Fig. 1. C das magnetische Element von der Intensität μ, welches von dem Kreise $EGHE$, durch den der electrische Strom geht, angezogen oder abgestossen wird. Der Halbmesser dieses Kreises sei b, die Entfernung $AC=a$, die Entfernung eines Stromelements ∂s in B von dem Punkte C oder $AC=r$, der Winkel, den das Stromelement mit r macht, $=90-\psi$. Die Kraft, womit das Stromelement in B auf C wirkt, wird nun ausgedrückt durch

$$\frac{i\mu\partial s\cos\psi}{r^2}.$$

Die Richtung dieser Kraft ist auf der Ebene des Kreises senkrecht. Nennen wir die Kraft, womit irgend ein Bogen dieses Kreises den magnetischen Punkt C anzieht oder abstösst, R, so ist also

$$R=i\mu\int\frac{\partial s\cos\psi}{r^2}.$$

Wir wollen nun zuerst die Variabeln unter dem Integralzeichen durch den Winkel $AEB=\varphi$ ausdrücken. Es ist

$$r^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi',$$

und wenn

$$k^2=\frac{4ab}{(a+b)^2} \text{ und } 1-k^2\sin^2\varphi=\Delta^2(k,\varphi)$$

gesetzt wird, erhält man

$$r=(a+b)\Delta(k,\varphi);$$

ferner, da $r\cos\psi=a\cos\varphi'-b$, wird

$$\cos\psi=\frac{a+b}{2b}\cdot\frac{k'-\Delta^2(k,\varphi)}{\Delta(k,\varphi)};$$

worin

$$k'=\sqrt{1-k^2}=\frac{a-b}{a+b}.$$

Da nun $\partial s=-2\partial\varphi$ ist, so erhält man für die Kraft des Stromes auf das magnetische Element:

$$R=\frac{i\mu}{a+b}\int\frac{(\Delta^2(k,\varphi)-k')\partial\varphi}{\Delta^3(k,\varphi)}.$$

Dieses Integral ist ein elliptisches; wenn man die gewöhnliche Bezeichnung desselben beibehält, so wird, da

$$k^2\int\frac{\partial\varphi}{\Delta^3(k,\varphi)}=E(k,\varphi)-\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(k,\varphi)}:$$

$$R=\frac{i\mu}{a+b}\left(F(k,\varphi)-\frac{E(k,\varphi)}{k'}+\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{k'\Delta(k,\varphi)}\right).$$

Dieser Ausdruck stellt die Wirkung des Bogens *FGB* dar. Für die Wirkung des ganzen Ringes erhält man, da dann die Integrale von $\varphi=0$ bis $\varphi=\pi$ genommen werden müssen:

$$R=\frac{2\mu i}{a+b}\left(F(k,\frac{\pi}{2})-\frac{E(k,\frac{\pi}{2})}{k'}\right).$$

Man kann diese elliptischen Integrale auch noch leicht durch eine andere Variabele ausdrücken. Drückt man nämlich φ und φ' durch den Winkel ψ aus, so wird, wie man leicht aus der Figur entnehmen kann,

$$a\sin\varphi'=b\sin\psi,\quad r\cos\psi=a\cos\varphi'-b.$$

Hieraus ergibt sich leicht, wenn $\frac{b}{a}=\lambda$,

$$\Delta\varphi'=1-2\lambda\cos\varphi'+\lambda^2 \text{ und } \Delta^2(\lambda,\psi)=1-\lambda^2\sin^2\psi$$

gesetzt wird:

$$r=a\Delta\varphi'=a(1+\lambda)\Delta\varphi=\frac{a(1-\lambda)}{\Delta(\lambda,\psi)+\lambda\cos\psi},$$

$$\sin\psi=\frac{(1+k')\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(k,\varphi)},\quad \cos\psi=\frac{k'\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}{\Delta(k,\varphi)},$$

$$\Delta(k,\varphi)=\frac{1-\lambda}{\Delta(\lambda,\psi)+\lambda\cos\psi},\quad \frac{\partial\psi}{\Delta(\lambda,\psi)}=\frac{(1+k')\partial\varphi}{\Delta(k,\varphi)}.$$

Durch diese Transformation wird

$$R=i\mu\int\frac{\partial s\cos\psi}{r^2}=\frac{i\mu}{a\lambda'^2}(E(\lambda,\psi)-\lambda'^2F(\lambda,\psi)+\lambda\sin\psi).$$

Nimmt man dieses Integral von $\psi=0$ bis $\psi=\psi$, so erhält man in dem vorhergehenden Ausdrucke die Wirkung des Bogens *EB*. Für die Wirkung des ganzen Ringes ist

$$R=\frac{2i\mu}{a\lambda'^2}\left(E(\lambda,\frac{\pi}{2})-\lambda'^2F(\lambda,\frac{\pi}{2})\right).$$

Die hier gemachte Transformation des elliptischen Integrals mit dem Argumente φ und dem Modul k in ein anderes mit dem Argumente ψ und dem Modul λ ist die Landensche Substitution, die sich hier unmittelbar durch eine einfache geometrische Betrachtung darbietet. Legen wir jetzt durch C einen Kreis und suchen die Wirkung des hindurchgehenden electrischen Stromes auf ein innerhalb des Ringes befindliches magnetisches Theilchen, z. B. in B. Für die Kraft, womit in diesem Falle der electrische Strom auf das magnetische Theilchen wirkt, findet man, wie aus der Figur leicht ersichtlich ist, den Ausdruck:

$$a\int\frac{\partial\varphi'\cos BCA}{r^2}=a\int\frac{\partial\varphi'\cos(\psi-\varphi')}{r^2},$$

den wir durch $R_{,}$ bezeichnen wollen. Mit Hülfe des obigen Ausdrucks für ψ findet man leicht:

$$R_{,}=\frac{i\mu}{a\lambda'^2}(E(\lambda,\psi)+\lambda\sin\psi).$$

Dieser Ausdruck stellt die Anziehung des Bogens CK auf B dar. Man kann auch das vorhergehende elliptische Integral durch φ ausdrücken, und man erhält leicht:

$$R_{,}=i\mu\int\frac{k'+\Delta^2(k,\varphi)}{a(1+\lambda)\,\Delta^3(k,\varphi)}\partial\varphi=\frac{i\mu}{a(1+\lambda)}\left(F(k,\varphi)+\frac{E(k,\varphi)}{k'}-\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{k'\Delta\varphi}\right).$$

Dies ist der Ausdruck für die Anziehung des Bogens LK. Für den ganzen Ring erhält man

$$R_{,}=\frac{2i\mu\left(F(k,\frac{\pi}{2})+\dfrac{E(k,\frac{\pi}{2})}{k'}\right)}{a(1+\lambda)},$$

oder auch

$$R_{,}=\frac{4i\mu}{a\lambda'^2}\cdot E\left(\lambda,\frac{\pi}{2}\right).$$

Setzt man $b=0$, so wird

$$R_{,,}=\frac{2i\mu\pi}{a},$$

welcher Ausdruck bekanntlich die Wirkung des Ringes der Tangentenboussole auf die im Mittelpunkte des Ringes befindliche Magnetnadel darstellt.

Es ist leicht die gefundenen Resultate durch Beobachtungen zu prüfen. Es liege der Ring in der Ebene des magnetischen

Meridians, die Abweichungen der Magnetnadel in A und B unter der Einwirkung des Stroms seien u' und u; die Grösse des Erdmagnetismus in der horizontalen Richtung T. Es ist dann bekanntlich

$$R_{,} = \mu T \operatorname{tg} u, \quad R_{,,} = \mu T \operatorname{tg} u'$$

und daher:

$$\operatorname{tg} u = \frac{2E(\lambda, \frac{\pi}{2})}{\lambda'^2 \pi} \operatorname{tg} u'.$$

Wir wollen jetzt die Wirkung eines elliptischen Ringes auf ein magnetisches Element bestimmen. Zuerst liege dieses Element innerhalb des Ringes. Seien in Taf. IV. Fig. 2. x, y die Coordinaten eines Punktes P des Ringes, α, β die des magnetischen Elements S, die halben Axen des Ringes seien a und b. Es sei auch hier wie oben in dem Ausdrucke für die Grösse der Wirkung

$$R = i\mu \int \frac{\partial s \sin\psi}{r^2},$$

r die Entfernung PS, ψ der Winkel, den r mit dem Bogenelemente ∂s macht. Nennt man l das auf die Tangente in P vom Mittelpunkte der Ellipse aus gefällte Loth: dann sind die Cosinusse der Winkel, die dieses Loth mit den Axen der Ellipse macht: $\frac{x}{a^2} l$, $\frac{y}{b^2} l$; ferner sind die Cosinusse der Winkel, die die vom Mittelpunkte der Ellipse nach S gezogene Linie mit denselben Axen bildet: $\frac{\alpha - x}{r}$, $\frac{\beta - y}{r}$; daher ist

$$\begin{aligned}\sin\psi &= \left(\frac{x(\alpha - x)}{a^2} + \frac{y(\beta - y)}{b^2}\right)\frac{l}{r} \\ &= \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)\frac{l}{r},\end{aligned}$$

$$r^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2;$$

also ist

$$R = i\mu \int \frac{l\partial s \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)}{[(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man

$$x = a \cos\varphi', \quad y = b \sin\varphi';$$

so wird

$$l\partial s = \rho b \partial \varphi',$$

also

$$R = i\mu\, ab \int \frac{\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right) \partial\varphi'}{[(\alpha - a\cos\varphi')^2 + (\beta - b\sin\varphi')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Um diesen Ausdruck auf eine einfachere Form zu bringen, setze man

$$\frac{\alpha - x}{r} = \cos\psi, \quad \frac{\beta - y}{r} = \sin\psi$$

und setze die Werthe für x und y in die Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

so erhält man zur Bestimmung von r die in Beziehung zu r quadratische Gleichung

$$r^2 K - 2r M + L = 0;$$

worin

$$K = \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2},$$

$$M = \frac{\alpha\cos\psi}{a^2} + \frac{\beta\sin\psi}{b^2},$$

$$L = 1 - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}.$$

Aus dieser Gleichung wird:

$$r = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + LK}}{K} = \frac{-L}{M \mp \sqrt{M^2 + LK}},$$

oder auch, wenn

$$a^2b^2(M^2 + LK) = (b^2 - \beta^2)\cos^2\psi + (a^2 - \alpha^2)\sin^2\psi + 2\alpha\beta\sin\psi\cos\psi$$

durch $M_{,}^2$ bezeichnet wird:

$$r = \frac{-L}{M + \frac{M_{,}}{ab}}.$$

Um nun dies Integral durch ψ auszudrücken, bemerke ich, dass

$$\frac{\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1}{r^2}=\frac{M}{r^2}-\frac{L}{r^3}$$

und

$$\frac{\partial\varphi'}{r}=-\frac{\partial\psi}{M_{,}}.$$

Es wird daher

$$R=i\mu\int\left(\frac{L}{r^2}-\frac{M}{r}\right)\frac{\partial\psi}{M_{,}}$$

$$=\frac{i\mu}{L}\int\left[2M^2+\frac{M_{,}^2}{a^2b^2}\pm\frac{MM_{,}}{ab}\right]\frac{\partial\psi}{M_{,}}.$$

Für die Wirkung des ganzen Ringes muss dies Integral von $\psi=0$ bis $\psi=2\pi$ genommen werden, und in diesem Falle verschwindet der Term $\int\frac{MM_{,}\partial\psi}{M_{,}}$. Es wird daher

$$R=\frac{i\mu}{L}\int_0^{2\pi}\left(2M^2+\frac{M_{,}^2}{a^2b^2}\right)\frac{\partial\psi}{M_{,}}.$$

Man kann verschiedene Wege einschlagen, diesen Ausdruck auf eine einfachere Form zu bringen. Der folgende Weg scheint am einfachsten zum Ziele zu führen. Um aber die Constanten, die bei der Transformation vorkommen, leichter geometrisch deuten zu können, lege ich zuvörderst durch den Punkt S eine Ellipse und Hyperbel, die dem anziehenden oder abstossenden electrischen Ringe confokal sind. Die halben Axen desselben seien a_1, b_1 und a_2, b_2. Die Wurzeln λ und λ_1 der Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{a^2-\lambda}+\frac{\beta^2}{b^2-\lambda}=1$$

bestimmen diese Axen. Es ist nemlich:

$$a_1^2=a^2-\lambda,\quad b_1^2=b^2-\lambda;\quad a_2^2=a^2-\lambda_1,\quad b_2^2=b^2-\lambda_1.$$

Ich bemerke noch, dass $\lambda<b$ und $\lambda_1 \begin{smallmatrix}>b\\<a\end{smallmatrix}$.

Aus der vorhergehenden Gleichung folgt noch:

$$\lambda\lambda_1=a^2b^2L,\quad \lambda+\lambda_1=a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2.$$

Legt man in S an die beiden confokalen Curven Tangenten, so sind die vom Mittelpunkte aus gefällten Lothe, die wir durch p und p_1 bezeichnen:

$$p^2 = \frac{1}{\frac{\alpha^2}{a_1^4} + \frac{\beta^2}{b_1^4}} = \frac{a_1^2 b_1^2}{\lambda_1 - \lambda},$$

$$p_1^2 = \frac{1}{\frac{\alpha^2}{a_2^4} + \frac{\beta^2}{b_2^4}} = \frac{a_2^2 b_2^2}{\lambda - \lambda_1}.$$

Ferner ist noch:

$$\alpha = \frac{a_1 a_2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \qquad \beta = \frac{b_1 b_2}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Die Cosinusse der Winkel, die das Loth p mit den Axen a und b macht, wenn diese durch ξ und η bezeichnet werden, sind

$$\xi = \frac{\alpha p}{a_1^2}, \quad \eta = \frac{\beta p}{b_1^2}.$$

Um jetzt die Ausdrücke für M und $M_,$ auf einfachere Form zu bringen, setze man $\psi = \varphi + \nu$ und bestimme ν so, dass das Glied $\alpha\beta \sin\psi \cos\psi$ in $M_,$ verschwindet, wodurch man die Bedingung

$$\operatorname{tang} 2\nu = \left(\frac{2\alpha\beta}{b^2 - a^2 + \alpha^2 - \beta^2}\right) \text{ oder } \sin 2\nu = \frac{2\alpha\beta}{\lambda_1 - \lambda}$$

erhält. Dadurch wird

$$M_,^2 = \frac{a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2} + \frac{\alpha\beta \cos 2\varphi}{\sin 2\nu} = \frac{\lambda + \lambda_1}{2} + \frac{\alpha\beta \sin 2\varphi}{\sin 2\nu};$$

hieraus:

$$M_,^2 = \frac{\lambda + \lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda)\cos 2\varphi}{2} = \lambda_1 \cos^2\varphi + \lambda \sin^2\varphi,$$

oder

$$M_,^2 = \lambda_1 \left(1 - \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1} \sin^2\varphi\right) = \lambda_1 \Delta^2(k, \varphi);$$

wenn $\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1} = k^2$ gesetzt wird.

Ich bemerke noch, dass $\cos\nu = \xi$, $\sin\nu = \eta$ und φ der Winkel ist, den r mit dem Lothe p macht. Durch diese Substitution wird endlich für die Wirkung des Ringes, da

$$a^2 b^2 M = p\lambda_1 \cos\varphi - p_1 \lambda \sin\varphi:$$

$$R = \frac{i\mu}{\sqrt{\lambda_1}} \left[\frac{ab}{\lambda} \int_0^{2\pi} \Delta(k, \varphi)\partial\varphi + \frac{2p^2\lambda_1}{ab\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi \partial\varphi}{\Delta} + \frac{2p_1^2\lambda}{ab\lambda_1} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi \partial\varphi}{\Delta}\right].$$

Die Integrale

$$\int \frac{\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{\Delta} \text{ und } \int \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\Delta}$$

sind, wie bekannt, elliptische Integrale erster und zweiter Gattung.

Liegt das magnetische Element im Mittelpunkte der Ellipse, so ist

$$R = \frac{i\mu\, ab}{\lambda\sqrt{\lambda_1}} \int_0^{2\pi} \Delta\partial\varphi = \frac{4i\mu}{b} E(k, \frac{\pi}{2}).$$

Wir wollen jetzt die Anziehung auf ein magnetisches Theilchen suchen, welches ausserhalb des elliptischen Ringes gelegen ist. Es sei das magnetische Theilchen (Taf. IV. Fig. 2.) in S' mit S in derselben confokalen Hyperbel gelegen und der anziehende elliptische Ring derjenige, dessen Halbachsen wir oben durch a_1 und b_1 bezeichnet haben. Die Coordinaten des Stromelements in P' seien x', y'; die Coordinaten des magnetischen Theilchen in S': α', β'. Für die Wirkung R, irgend eines Bogens haben wir auch hier, wie oben:

$$R_, = i\mu \int \frac{l\partial s\left(\frac{\alpha' x'}{a_1^2} + \frac{\beta' y'}{b_1^2} - 1\right)}{r_,^3};$$

worin ∂s das Element des Ringes, l das Loth auf die Richtung von ∂s, und $r_,$ die Entfernung $S'P'$ bedeutet. Wenn man nun annimmt, dass P' mit P auf derselben confokalen Hyperbel liegt, so habe ich im 3. Bande S. 397. dieses Archivs gezeigt, dass

$$\frac{\alpha'}{a} = \frac{\alpha}{a_1}, \quad \frac{\beta'}{b} = \frac{\beta}{b_1};$$

$$\frac{x'}{a_1} = \frac{x}{a}, \quad \frac{y'}{b_1} = \frac{y}{b}$$

und $r = r_,$.

Hierdurch wird nun

$$l\partial s = a_1 b_1 \partial\varphi'$$

und

$$R_, = i\mu a_1 b_1 \int \frac{\left(\frac{\alpha x}{a_1^2} + \frac{\beta y}{b_1^2} - 1\right)\partial\varphi'}{r^3}.$$

Da nun

$$\frac{\partial\varphi'}{r} = -\frac{d\psi}{M},$$

und

$$\frac{\alpha x}{a_1^2}+\frac{\beta y}{b_1^2}-1=-\left(\frac{\alpha(\alpha-x)}{a_1^2}+\frac{\beta(\beta-y)}{b_1^2}\right)=-r\left(\frac{\alpha\cos\psi}{a_1^2}+\frac{\beta\sin\psi}{b_1^2}\right),$$

so wird, wenn weider $\psi=\varphi+\nu$ gesetzt wird,

$$\frac{\alpha x}{a_1^2}+\frac{\beta y}{b_1^2}-1=-\frac{r\cos\varphi}{p}$$

und

$$R_{,}=\frac{i\mu a_1 b_1}{p}\int\frac{\cos\varphi\partial\varphi}{rM_{,}}=\frac{i\mu a_1 b_1}{Lp}\int\frac{M\mp\frac{M_1}{ab}}{M_1}\cos\varphi\partial\varphi.$$

Für die Wirkung des ganzen Ringes fällt der algebraische Theil des Integrals weg, und daher wird endlich

$$R_{,}=\frac{4i\mu a_1 b_1}{\lambda\sqrt{\lambda_1}}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi\partial\varphi}{\Delta(k,\varphi)}$$
$$=\frac{4i\mu a_1 b_1}{\lambda k^2\sqrt{\lambda_1}}\left(E(k,\frac{\pi}{2})-k_{,}^2F(k,\frac{\pi}{2})\right).$$

Man kann die hier gefundenen Formeln leicht durch die gewöhnliche Tangentenboussole, deren Ring in Form einer Ellipse gebogen ist, prüfen.

XVI.

Theorie der losen Rolle.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

Sei $OM = CN$ (Taf. V. Fig. 1.) der Halbmesser (r) der losen Rolle; P das Gewicht der Rolle sammt dem daran hängenden Gewichte; A, B die Endpunkte des Seiles, dessen Länge $= s$ sei; M, N die Berührungspunkte des Seils mit der Rolle, so muss, wenn die gezeichnete Lage die des Gleichgewichts sein soll, Q, Q' die Spannungen der Seilstücke AM und BN sind, Gleichgewicht sein zwischen P, Q, Q' und zwar dauerndes. Die Kraft P wird in ihrer Richtung durch C gehen; verlegt man daher dorthin alle Kräfte, so erhält man drei Kräfte: P, Q, Q' in C, und zwei Kräftepaare, Q (Hebelarm r), Q' (Hebelarm r); also muss zunächst

$$Qr = Q'r,$$

d. h.

$$Q = Q' \qquad (1)$$

sein, d. h. die Seilstücke AM und BN sind gleich gespannt.

Sollen ferner die Kräfte P, Q, Q' in C im Gleichgewicht sein, so muss die Richtung von P den Winkel der Richtungen von Q und Q' halbiren, was offenbar darauf herauskommt, dass die Tangenten AM, BN an die Rolle sich in einem Punkte D schneiden müssen, der auf der Vertikalen CP liegt. Ist also BG horizontal und man verlängert PC, so ist CH senkrecht auf BG und, wie man leicht sieht, nun:

Winkel $MDC = CDN$, $MCD = NCD$, $MD = ND$, $BH = HG$. Eben so findet man leicht, wenn $BAD = \mu$, $ABD = \lambda$, $ABG = \varepsilon$:

$$DCN = \lambda + \varepsilon, \quad DCM = \mu - \varepsilon;$$

also

$$\lambda + \varepsilon = \mu - \varepsilon,$$

d. h.

$$\lambda = \mu - 2\varepsilon. \qquad (2)$$

Zugleich ist $DM = DN = r\,\mathrm{tg}(\mu - \varepsilon)$. In dem Dreieck ADB ist, wenn $AB = k$:

$$AD = \frac{k\sin\lambda}{\sin(\mu + \lambda)} = \frac{k\sin(\mu - 2\varepsilon)}{\sin 2(\mu - \varepsilon)},$$

$$BD = \frac{k\sin\mu}{\sin(\mu + \lambda)} = \frac{k\sin\mu}{\sin 2(\mu - \varepsilon)};$$

also

$$AM = \frac{k\sin(\mu - 2\varepsilon)}{\sin 2(\mu - \varepsilon)} - r\,\mathrm{tg}(\mu - \varepsilon), \quad BN = \frac{k\sin\mu}{\sin 2(\mu - \varepsilon)} - r\,\mathrm{tg}(\mu - \varepsilon).$$

Zur Bestimmung des Winkels μ, also auch λ, bemerke man, dass $AM + BN +$ Bogen $MN = a$ sein muss. Ist nun μ sowohl als ε analytisch, d. h. in Theilen des Halbmessers 1, ausgedrückt (gemessen durch die Länge des zugehörigen Bogens, dessen Halbmesser 1 ist), so giebt diese Bedingung, da $MCN = \lambda + \mu = 2\mu - 2\varepsilon$ ist:

$$\frac{k[\sin\mu + \sin(\mu - 2\varepsilon)]}{\sin 2(\mu - \varepsilon)} - 2r\,\mathrm{tg}(\mu - \varepsilon) + 2r(\mu - \varepsilon) = a,$$

oder auch:

$$\frac{k\cos\varepsilon - 2r\sin(\mu - \varepsilon)}{\cos(\mu - \varepsilon)} + 2r(\mu - \varepsilon) = a. \qquad (3)$$

Vermittelst dieser Entwicklungen ist es nun leicht, die Gleichgewichtslage der losen Rolle zu bestimmen. Man ziehe nämlich AB, sodann durch B eine Horizontale, bestimme den Winkel μ durch die Gleichung (3) und ziehe AD so, dass $BAD = \mu$; verlängere DA rückwärts, bis sie die Horizontale in G trifft, halbire BG und ziehe HC senkrecht auf BG in der Mitte H von BG, so liegt der Mittelpunkt der Rolle auf dieser Linie, vorausgesetzt, dass ausser der Schwere keine andern Kräfte auf die Rolle wirken. Wären noch andere Kräfte vorhanden, so würde übrigens die ganze Entwicklung gelten, wenn nur BG senkrecht auf der Richtung der Mittelkraft wäre.

Den Punkt C selbst findet man, wenn man in irgend einem Punkte S der Linie AD die SF senkrecht auf AD zieht, $SF=r$ macht und durch F eine Parallele mit AD zieht. Der Durchschnittspunkt dieser Linie mit HC giebt die Lage des Punktes C an.

Uebrigens ist auch

$$AC=\sqrt{r^2+AM^2}$$

$$=\sqrt{\frac{k^2\sin^2(\mu-2\varepsilon)}{\sin^2 2(\mu-\varepsilon)}-\frac{2rk\sin(\mu-2\varepsilon).\sin(\mu-\varepsilon)}{\sin 2(\mu-\varepsilon)}+\frac{r^2}{\cos^2(\mu-\varepsilon)}},$$

$$BC=\sqrt{r^2+BN^2} \qquad (4)$$

$$=\sqrt{\frac{k^2\sin^2\mu}{\sin^2 2(\mu-\varepsilon)}-\frac{2rk\sin\mu.\sin(\mu-\varepsilon)}{\sin 2(\mu-\varepsilon)}+\frac{r^2}{\cos^2(\mu-\varepsilon)}},$$

wodurch die Lage von C ebenfalls bestimmt ist.

Was die Grösse der Kräfte Q betrifft, so ist bekanntlich:

$$Q=\frac{Pr}{MN}=\frac{P}{2\sin(\mu-\varepsilon)}. \qquad (5)$$

In dem besondern Falle, da

$$k\cos\varepsilon=2r, \qquad (6)$$

sind die Seile AM und BN parallel; alsdann also ist der Punkt D nicht vorhanden und die vorstehenden Entwicklungnn gelten nicht. In diesem besondern Falle findet man aber leicht, dass

$$Q=\frac{P}{\varepsilon},\quad BN=AM+k\sin\varepsilon, \qquad (7)$$

$$AM+BN+r\pi=a;$$

also

$$AM=\frac{a-r\pi-k\sin\varepsilon}{2}=\frac{a-r\pi}{2}-r\operatorname{tg}\varepsilon$$

ist, während C in der Mitte der Linie MN ist.

$$\mu=90+\varepsilon,\quad \lambda=90-\varepsilon.$$

Da das Gleichgewicht dauernd sein soll, so nimmt in allen Fällen die Rolle die möglichst tiefste Stellung an.

Aus der Gleichung (3) folgt, dass so lange

$$k\cos\varepsilon>2r,$$

was wir im Obigen vorausgesetzt, auch

$$\mu-\varepsilon<\frac{\pi}{2}, \quad \mu<\frac{\pi}{2}+\varepsilon$$

ist; denn $BG>MN$, d. h.

$$k\cos\varepsilon>2r\sin(\mu-\varepsilon),$$

also

$$k\cos\varepsilon-2r\sin(\mu-\varepsilon)>0;$$

nun ist aber $2r(\mu-\varepsilon)<a$, also muss

$$\frac{k\cos\varepsilon-2r\sin(\mu-\varepsilon)}{\cos(\mu-\varepsilon)}>0,$$

d. h.

$$\cos(\mu-\varepsilon)>0 \text{ oder } \mu-\varepsilon<\frac{\pi}{2}$$

sein.

Für den Fall, dass

$$k\cos\varepsilon<2r,$$

gelten dieselben Formeln, wie oben; nur ist hier

$$\mu-\varepsilon>\frac{\pi}{2}.$$

Man sieht also aus den vorstehenden Entwicklungen, dass für eine bestimmte Last P und bestimmte Endpunkte des Seils, Q mit von a, d. h. von der Seillänge abhängt, und sich mit ihr verändert. Setzt man in der Gleichung (3) $\mu-\varepsilon=\omega$, so ergiebt sich

$$\frac{\partial\omega}{\partial a}=\frac{\cos^2\omega}{\sin\omega(k\cos\varepsilon-2r\sin\omega)}.$$

Da nun diese Grösse für $k\cos\varepsilon>2r$ positiv, für $k\cos\varepsilon<2r$ negativ ist, so folgt daraus, dass im ersten Falle μ mit a wächst und abnimmt, und im zweiten Falle das Gegentheil statt hat.

Die Entfernung HC des Mittelpunkts von der Horizontalen findet sich:

$$HC=\frac{k\sin\mu-2r}{\cos(\mu-\varepsilon)};$$

sie wächst also mit wachsendem a und nimmt ab mit abnehmendem a. Zugleich ist

$$BH = \frac{k \sin\mu}{2\sin(\mu-\varepsilon)}.$$

So lange $\mu < \frac{\pi}{2}$, ist immer

$$\sin\mu > \sin(\mu-\varepsilon), \text{ also } BH > \frac{k}{2};$$

für

$$\mu = \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ ist } BH = \frac{k}{2};$$

auch sieht man, dass BH zunimmt, wenn μ abnimmt und umgekehrt.

Legt man also ein Koordinatensystem so, dass B (der höhere der Endpunkte) der Anfangspunkt, BG die Richtung der positiven Axe der x, eine Senkrechte in B auf BG, nach unten gerichtet, die Axe der y, so sind die Koordinaten x, y von C:

$$x = \frac{k}{2}\,\frac{\sin\mu}{\sin(\mu-\varepsilon)}, \quad y = \frac{k\sin\mu}{\cos(\mu-\varepsilon)} - \frac{2r}{\cos(\mu-\varepsilon)}.$$

Eliminirt man μ zwischen diesen zwei Gleichungen, so erhält man die Gleichung der Kurve, welche der Punkt C beschreibt.

XVII.

Ueber die kürzeste Entfernung zweier Punkte auf der Oberfläche einer Kugel.

(Nach Thomas, aus den Nouv. Annales. Juillet 1849.)

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

Es ist bekanntlich der Bogen eines grössten Kreises die kürzeste Linie auf der Kugeloberfläche zwischen zwei Punkten. Der nachfolgende Beweis dieses Satzes scheint strenge zu sein, da z. B. der Legendre'sche Beweis schon voraussetzt, dass es eine einzige kürzeste Linie gebe, was nicht der Fall ist, wenn man die Endpunkte eines Durchmessers verbindet, da alsdann unendlich viele gleich kurze Linien möglich sind. Der eigentliche Beweis kommt darauf hinaus, zu zeigen, dass ein Bogen eines grössten Kreises zwischen zwei Punkten kleiner ist, als jede andere Linie zwischen denselben Punkten, die man auf der Kugeloberfläche ziehen kann.

Seien in Taf. V. Fig. 2. A, B die zwei Punkte, AMB der Bogen des grössten Kreises zwischen ihnen. Sei AJB eine andere Linie auf der Kugel, und man will beweisen, dass

$$AMB < AJB.$$

Seien C, D, E Punkte auf AJB; man ziehe die Bögen grösster Kreise AC, CD, DE, EB, AD, AE; so ist

$$\begin{aligned} AMB &< AE + BE \\ AE &< AD + DE \\ AD &< AC + CD \\ \hline \text{also}\quad AMB &< BE + DE + CD + AC. \end{aligned}$$

Dieser Satz gilt, wie viele Punkte C, D.. man auch auf AJB annehme; er gilt also auch noch, wenn man unendlich viele annimmt, so dass sie unendlich nahe bei einander liegen.

Thut man diess aber, so ist die Summe aller Bögen $BE + ED + \ldots\ldots$ gleich zu setzen der Linie AJB; denn die Summe der Bögen $BE + ED + \ldots\ldots$ wird gleich sein der Summe der Sehnen $BE + ED + \ldots\ldots$, und diese gleich der Linie AJB. Man kann diess auch so ausdrücken:

Sei S die Summe der Bögen $BE + ED + \ldots\ldots$, R die Summe der Sehnen $BE + ED + \ldots\ldots$, so wird der Unterschied $S - R$ immer kleiner, je grösser die Anzahl der Bögen wird. Ist also

$$S - R = \pm\alpha,$$

so wird α der Null sich unendlich nähern, wenn die Anzahl der Bögen ins Unendliche wächst. Ganz dasselbe wird mit β der Fall sein, wenn

$$AJB - R = \beta.$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt, dass

$$AJB - S = \beta - \alpha,$$

d. h. $AJB - S$ wird sich der Null mit wachsender Anzahl nähern. Da aber immer

$$AMB < S,$$

so ist auch

$$AMB < AJB.$$

XVIII.

Eine Aufgabe über ein Maximum.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

Die folgende Aufgabe über ein Maximum, die Herr Professor Decrue an der Académie in Genf im Schuljahre $18^{40}/_{41}$ seinen Schülern, zu denen ich damals auch gehörte, stellte, habe ich noch nirgends veröffentlicht gesehen, halte sie jedoch der Veröffentlichung werth, indem ich zugleich die Auflösung beifüge. Sie lautet:

Es stellen AH und BJ (Taf. V. Fig. 3.) zwei Häuser vor, welche durch eine Strasse von der Breite AB getrennt sind. Man will den Balken DE zur Thüre BC hineinbringen; da aber die Strasse enge ist, so sieht man sich genöthigt, ihn an AG aufzurichten und dann D (das Ende) an der Wand AG herabgleiten zu lassen. Wenn man nun die Breite AB, die Höhe BC und die Länge des Balkens DE kennt, so entsteht die Frage, ob man den letztern zur Thüre hineinbringen kann?

Es ist klar, dass der Balken nicht wird in das Haus gebracht werden können, wenn es sich ereignete, dass, indem er sich an die Wand AD lehnt und in das Haus BJ hineinreicht, er zugleich die Thüre am obern Ende C berührt. Damit er somit in das Haus hinein gebracht werden kann, muss keine Stellung möglich sein von der genannten Art. Man hat also als Bedingung der Möglichkeit des Hineinbringens die, dass das Maximum der Erhebung des Balkens unter der Thüre kleiner sei als die Höhe BC, oder allerhöchstens gleich BC.

Sei nun

$$AB=a,\ DE=l,\ BC=h,\ BE=x,\ BR=y;$$

so ist

$$BE:ER = EA:ED, \text{ d. h. } x:ER = x+a:l;$$

also

$$ER = \frac{lx}{x+a}, \quad BR = \sqrt{RE^2 - BE^2} = y = \frac{x}{x+a}\sqrt{l^2-(x+a)^2}.$$

Da nun das Maximum von $y \overset{=}{<} h$, so muss man zunächst dieses Maximum suchen. Es ist aber

$$\frac{\partial y}{\partial x} =$$

$$(x+a)^{-2}(l^2-(a+x)^2)^{-\frac{1}{2}}\{(x+a)(l^2-(x+a)^2)-x(l^2-(x+a)^2)-x(x+a)^2\}.$$

Setzt man dieses gleich Null, so ist

$$(x+a)\{l^2-(x+a)^2\}-x(l^2-(a+x)^2)-x(x+a)^2=0,$$

d. h.

$$a(l^2-(a+x)^2)-x(a+x)^2=0,$$

$$al^2=(a+x)^3, \quad x=-a+\sqrt[3]{al^2}.$$

Der entsprechende Werth von y ist:

$$l\left(1-\sqrt[3]{\frac{a^2}{l^2}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Damit also der Balken in das Haus hineingehe, muss immer

$$l\left(1-\sqrt[3]{\frac{a^2}{l^2}}\right)^{\frac{3}{2}} \overset{=}{<} h,$$

d. h.

$$1-\sqrt[3]{\frac{a^2}{l^2}} \overset{=}{<} \sqrt[3]{\frac{h^2}{l^2}}$$

oder

$$\sqrt[3]{\frac{h^2}{l^2}}+\sqrt[3]{\frac{a^2}{l^2}} \overset{=}{>} 1 \text{ oder } \sqrt[3]{h^2}+\sqrt[3]{a^2} \overset{=}{>} \sqrt[3]{l^2}$$

sein.

XIX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herrn Doctor J. Dienger, Vorstand der höhern Bürgerschule zu Ettenheim.

1) $$\int_0^\infty \frac{\sin at.\partial t}{e^{2\pi t}-1} = \frac{a-e^a+1}{2a(e^a-1)} + \frac{1}{4}.$$

2) Ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung einer Ellipse, (α, β) ein Punkt in der Ebene der Ellipse, und man bezeichnet die Grösse

$$\int_0^a \sqrt{(x-\alpha)^2 + \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-\beta\right)^2}.\partial x \text{ durch } \varphi(\alpha, \beta),$$

so ist die mittlere Entfernung des Punktes (α, β) von der Ellipse:

$$\frac{1}{4a}[\varphi(\alpha, \beta) + \varphi(\alpha, -\beta) + \varphi(-\alpha, \beta) + \varphi(-\alpha, -\beta)].$$

Für den Fall, dass $\beta = 0$, erhält man als mittlere Entfernung, wenn $a > \alpha$:

$$\frac{1}{2a}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a(a^2-b^2-a\alpha)(a-\alpha)+\alpha(a^2-b^2+a\alpha)(a+\alpha)}{2(a^2-b^2)} \\[2ex] +\dfrac{ab^2\sqrt{a^2-b^2}}{2(a^2-b^2)^2}(a^2-b^2-\alpha^2)\log\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a^2-b^2-2a\alpha+(a-\alpha)\sqrt{a^2-b^2}}{-a\alpha+\sqrt{b^2+\alpha^2}\sqrt{a^2-b^2}} \\[2ex] .\dfrac{a^2-b^2+2a\alpha+(a+\alpha)\sqrt{a^2-b^2}}{a\alpha+\sqrt{b^2+\alpha^2}\sqrt{a^2-b^2}} \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

3) Der Körper A habe zwei geradlinige Bewegungen nach AB und AE (Taf. V. Fig. 4.), beide so, dass, wenn D und C die Orte am Ende der ersten Sekunde, B, E am Ende der Zeit t wären,

$$AB = AD.\varphi(t), \quad AE = AC.\varphi(t),$$

worin $\varphi(t)$ irgend eine Funktion von t ist. Für diesen Fall bewegt er sich auf der Diagonale des Parallelogramms $ADGC$ über AD und AC und zwar so, dass, wenn G, F die Orte am Ende der ersten Sekunde und der Zeit t sind, auch

$$AF = AG.\varphi(t).$$

Von dem Herrn Doctor E. W. Grebe, Gymnasiallehrer zu Cassel.

Werden über den drei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks gleichseitige Dreiecke beschrieben, so sind bekanntlich die Dreiecke über den beiden Catheten zusammen genommen so gross als das Dreieck über der Hypotenuse. Geradlinige Figuren aber, welche an Flächenraum gleich sind, lassen sich auch immer in Stücke zerschneiden, welche beziehungsweise congruent sind. Solche Zerschneidungen, an den genannten Dreiecken vorgenommen, sind hier in den Figuren Taf. V. Fig. 5., Fig. 6., Fig. 7. bereits ausgeführt, und es wird neben Feststellung der Construction der Beweis für die Richtigkeit verlangt. Taf. V. Fig. 5. repräsentirt die Fälle, in welchen die Differenz der beiden spitzen Winkel des rechtwinkeligen Dreiecks $< 30^\circ$; Taf. V. Fig. 6. den Fall, in welchem sie $= 30^\circ$; und Taf. V. Fig. 7. die Fälle, wo dieselbe $> 30^\circ$ ist. In jeder Figur sind die entsprechenden Flächenstücke mit derselben Zahl bezeichnet.

Druckfehler.

Auf S. 113. und S. 129. unten links setze man „Theil XIV." statt „Theil XVI."

XX.

Ueber die näherungsweise Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Bei allen Anwendungen der Mathematik kommt man häufig in den Fall, die Werthe bestimmter Integrale näherungsweise ermitteln zu müssen, wofür ich als ein sehr in die Augen fallendes Beispiel nur die Schiffsbaukunst anführen will, indem man bei der Bestimmung der Schiffsräume, der Schwerpunkte, der Stabilität und der Trägheitsmomente (letzterer namentlich wegen des Schlingerns und Stampfens der Schiffe), der Bestimmung des Widerstandes, welchen die Schiffe bei der Bewegung im Wasser erleiden, u. s. w. immer auf die näherungsweise Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale hingewiesen ist. Ich halte es daher für zweckmässig, diejenigen Methoden, welche man nach meiner Meinung in der Praxis am vortheilhaftesten in Anwendung zu bringen hat, in der vorliegenden Abhandlung mit möglichster Deutlichkeit und in möglichst elementarer Weise zu entwickeln, ohne dabei eine völlig erschöpfende und ganz allgemeine Darstellung dieses höchst wichtigen Gegenstandes zu erstreben, indem ich, wie gesagt, mein Augenmerk für jetzt hauptsächlich auf die praktische Anwendung gerichtet habe, für welche es nach meiner Meinung weder nothwendig noch zweckmässig sein dürfte, die Darstellung bis zu vollständiger Allgemeinheit zu erheben. Wenn auch die vorliegende Abhandlung nothwendig manches Bekannte enthalten muss, so dürfte doch auch manches Neue in derselben vorkommen, indem z. B. das Princip der nach meiner Meinung namentlich auch praktisch sehr wichtigen Correctionsformeln von Stirling noch nicht so klar wie hier aufgedeckt worden sein möchte, indem ich mich bemüht habe, einen ganz allgemeinen Beweis dieser wichtigen Formeln zu geben. Auf einige specielle Anwendungen werde ich vielleicht späterhin zurückkommen.

§. 2.

Wir wollen also annehmen, dass y eine beliebige Function der unabhängigen veränderlichen Grösse x sei, und dass der Werth des bestimmten Integrals

$$\int_a^b y\partial x,$$

wo a und b bekanntlich die sogenannten Gränzen der Integration, a die untere und b die obere Gränze, sind, durch Annäherung bestimmt werden solle. Hierbei können nun zwei Fälle eintreten, jenachdem nämlich die Art der Abhängigkeit der Function y von der unabhängigen veränderlichen Grösse x vollständig bekannt oder unbekannt ist; und der letztere dieser beiden Fälle ist derjenige, welcher z.B. in der Schiffsbaukunst am Häufigsten, eigentlich nur allein, vorkommt. Mag nun aber der eine oder der andere dieser beiden Fälle vorliegen, so wollen wir doch immer annehmen, dass eine Reihe zusammenstimmender oder einander entsprechender Werthe von x und y bekannt oder gegeben sei. Dass wir zu dieser Annahme stets berechtigt sind, und nur die Art und Weise verschieden ist, wie man in den beiden in Rede stehenden Fällen zu den, gewissen bestimmten Werthen der unabhängigen veränderlichen Grösse x, welche natürlich stets im Allgemeinen der ganz willkührlichen Annahme anheim gestellt bleiben, entsprechenden Werthen der Function y dieser veränderlichen Grösse gelangt, wird sogleich erhellen, und kann auf folgende Art leicht deutlich gemacht werden. Wenn nämlich zuerst die Art der Abhängigkeit der Function y von der veränderlichen Grösse x vollständig bekannt, d. h. y eine gegebene Function von x ist, so ist dadurch natürlich sogleich von selbst die Möglichkeit geboten, die den willkührlich angenommenen Werthen von x, welche man der ganzen Rechnung zum Grunde zu legen beabsichtigt, entsprechenden Werthe der Function y vermittelst der durch die Form dieser, ihrer Abhängigkeit von x nach, vollständig bekannten Function unmittelbar und ganz von selbst vorgeschriebenen Rechnungsoperationen zu berechnen. Wenn dagegen die Form der von x abhängigen Function y nicht bekannt ist, so werden doch, um das schon vorher gebrauchte Beispiel der Schiffsbaukunst beizubehalten, x und y jedenfalls immer die allgemeinen analytischen Symbole zweier an dem Schiffskörper selbst sich vorfindenden, in einer gewissen Abhängigkeit von einander stehenden Grössen sein, die einer genauen Messung mit dazu geeigneten Instrumenten oder Apparaten unterzogen werden können; man wird also an dem Schiffskörper selbst einige Werthe der an demselben sich findenden und durch denselben unmittelbar dargelegten, im Allgemeinen durch das Symbol x bezeichneten Grösse genau messen, ferner die an dem Schiffskörper sich ebenfalls vorfindenden, und durch denselben unmittelbar dargelegten, den angenommenen Werthen von x entsprechenden oder davon abhängenden und durch dieselben bestimmten Werthe der im Allgemeinen durch y bezeichneten Grösse gehörig aufsuchen und gleichfalls einer genauen Messung unterwerfen, und wird sich also auf diese Weise auch in dem vorliegenden Falle, welcher in der That, wie schon bemerkt worden ist, derjenige ist, welcher z. B. in der Schiffsbaukunst vorzugsweise und eigentlich nur allein vorkommt, in den Besitz einer Reihe zusammenstimmender oder einander entsprechender Werthe von x und y zu setzen im Stande sein.

§. 3.

Nachdem hierdurch gezeigt worden ist, dass die beiden oben näher bezeichneten Fälle im Wesentlichen durchaus nicht von einander verschieden sind, dürfen wir uns also immer berechtigt halten, eine Reihe zusammenstimmender oder einander entsprechender Werthe der unabhängigen veränderlichen Grösse x und ihrer Function y als bekannt anzunehmen, und können unter dieser Voraussetzung nun das Princip, welches der approximativen Integrationsmethode, deren Entwickelung den Gegenstand dieser Abhandlung ausmachen wird, im Allgemeinen zum Grunde liegt, auf folgende Art aussprechen, wenn auch weitere Ergänzungen und Erläuterungen desselben im Laufe unserer Untersuchung selbst noch mehrere vorkommen werden.

Dem Obigen zufolge wollen wir annehmen, dass den n gegebenen Werthen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots. a_n$$

der unabhängigen veränderlichen Grösse x die gleichfalls gegebenen n Werthe

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots. A_n$$

der Function y dieser veränderlichen Grösse entsprechen. Ferner wollen wir grösserer Deutlichkeit oder vielmehr Anschaulichkeit wegen uns die n gegebenen Werthe der unabhängigen veränderlichen Grösse x als eben so viele Abscissen, und die n gegebenen Werthe der Function y als die diesen Abscissen entsprechenden Ordinaten der Punkte einer Curve denken, deren Natur, wenn wir den Buchstaben f wie gewöhnlich als ein allgemeines Functionszeichen gebrauchen, im Allgemeinen durch die Gleichung

$$y=f(x)$$

ausgedrückt oder charakterisirt wird. Nach dieser Vorstellungsweise sind uns also n Punkte der durch die vorstehende Gleichung charakterisirten Curve gegeben, und wenn wir nun durch diese n gegebenen Punkte eine im Allgemeinen durch die Gleichung

$$y=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\ldots+\alpha_{m-1}x^{m-1}$$

charakterisirte parabolische Curve des $(m-1)$sten Grades hindurch legen, so werden wir uns zu der Annahme berechtigt halten dürfen, dass diese parabolische Curve im Allgemeinen sich desto enger oder inniger an die durch die Gleichung $y=f(x)$ charakterisirte Curve anschliessen, oder, was augenscheinlich dasselbe ist, dass durch die Function

$$y=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\ldots+\alpha_{m-1}x^{m-1}$$

die Function $y=f(x)$ desto genauer dargestellt werden wird, je mehr Punkte die beiden Curven mit einander gemein haben, d. h. nach dem Obigen, je mehr einander entsprechende Werthe von x und y als gegeben angenommen oder zum Grunde gelegt worden sind. Da es nun aber hierbei natürlich darauf ankommt, die Gleichung

$$y=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\ldots+\alpha_{m-1}x^{m-1}$$

der durch die n gegebenen Punkte, deren Coordinaten nach dem Obigen

$$a_1,\ A_1;\ a_2,\ A_2;\ a_3,\ A_3;\ldots;\ a_n,\ A_n$$

sind, welche in der durch die Gleichung $y=f(x)$ charakterisirten Curve liegen, hindurch gehenden parabolischen Curve genau kennen zu lernen; so handelt es sich, eben weil diese parabolische Curve durch die n gegebenen Punkte gehen soll, offenbar darum, die Coefficienten

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ldots\alpha_{m-1}$$

in der allgemeinen Gleichung

$$y=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\ldots+\alpha_{m-1}x^{m-1}$$

der parabolischen Curve so zu bestimmen, dass den n Gleichungen

$$A_1=\alpha_0+\alpha_1a_1+\alpha_2a_1{}^2+\alpha_3a_1{}^3+\ldots+\alpha_{m-1}a_1{}^{m-1},$$

$$A_2=\alpha_0+\alpha_1a_2+\alpha_2a_2{}^2+\alpha_3a_2{}^3+\ldots+\alpha_{m-1}a_2{}^{m-1},$$

$$A_3=\alpha_0+\alpha_1a_3+\alpha_2a_3{}^2+\alpha_3a_3{}^3+\ldots+\alpha_{m-1}a_3{}^{m-1},$$

u. s. w.

$$A_n=\alpha_0+\alpha_1a_n+\alpha_2a_n{}^2+\alpha_3a_n{}^3+\ldots+\alpha_{m-1}a_n{}^{m-1};$$

welche in Bezug auf die unbekannten Grössen

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ldots\alpha_{m-1}$$

sämmtlich vom ersten Grade sind, genügt wird. Hieraus sieht man, dass es, wenn diese Bestimmung mit völliger Bestimmtheit möglich sein soll, keineswegs der freien Willkühr anheim gestellt bleibt, wie gross man die den Grad der gesuchten parabolischen Curve bestimmende Grösse m annehmen will, indem man offenbar, damit man immer gerade eben so viele Gleichungen wie zu bestimmende unbekannte Grössen α_0, α_1, α_2, α_3, ... erhalte, nur $m=n$ setzen kann, wodurch man die n Gleichungen des ersten Grades

$$A_1 = \alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_1^2 + \alpha_3 a_1^3 + \ldots + \alpha_{n-1} a_1^{n-1},$$

$$A_2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_2^2 + \alpha_3 a_2^3 + \ldots + \alpha_{n-1} a_2^{n-1},$$

$$A_3 = \alpha_0 + \alpha_1 a_3 + \alpha_2 a_3^2 + \alpha_3 a_3^3 + \ldots + \alpha_{n-1} a_3^{n-1},$$

u. s. w.

$$A_n = \alpha_0 + \alpha_1 a_n + \alpha_2 a_n^2 + \alpha_3 a_n^3 + \ldots + \alpha_{n-1} a_n^{n-1}$$

mit den n unbekannten Grössen

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots \alpha_{n-1}$$

erhält, welche letzteren sich also mittelst dieser n Gleichungen des ersten Grades im Allgemeinen immer ohne Zweideutigkeit bestimmen lassen.

Hat man nun aber die Coefficienten

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots \alpha_{n-1}$$

auf diese Weise bestimmt, so wird im Allgemeinen, wenigstens in dem Intervalle, welches die zum Grunde gelegten Werthe der unabhängigen veränderlichen Grösse x umfassen, mit desto grösserer Genauigkeit, je mehr Werthe von x in diesem Intervalle und denselben entsprechende Werthe von y zum Grunde gelegt worden sind, oder je mehr Punkte in diesem Intervalle die durch die Gleichung $y=f(x)$ charakterisirte Curve und die durch die Gleichung

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$$

charakterisirte parabolische Curve des $(n-1)$sten Grades mit einander gemein haben,

$$y = f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$$

gesetzt, oder die Function $y=f(x)$ durch die ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$$

dargestellt werden können.

Nimmt man nun die zum Grunde gelegten Werthe von x in dem Intervalle von $x=a$ bis $x=b$, so wird innerhalb dieses Intervalls mit desto grösserer Genauigkeit, je mehr Werthe von x und denselben entsprechende Werthe von y man zum Grunde gelegt hat,

$$y=f(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\ldots+\alpha_{n-1}x^{n-1},$$

also auch

$$y\partial x=f(x)\partial x=(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\ldots+\alpha_{n-1}x^{n-1})\partial x,$$

und folglich offenbar auch

$$\int_a^b y\partial x=\int_a^b f(x)\,\partial x$$

$$=\int_a^b(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\ldots+\alpha_{n-1}x^{n-1})\partial x,$$

d. i.

$$\int_a^b y\partial x=\int_a^b f(x)\,\partial x$$

$$=\alpha_0\int_a^b\partial x+\alpha_1\int_a^b x\partial x+\alpha_2\int_a^b x^2\partial x+\ldots+\alpha_{n-1}\int_a^b x^{n-1}\,\partial x,$$

also

$$\int_a^b y\partial x=\int_a^b f(x)\,\partial x$$

$$=\alpha_0(b-a)+\frac{1}{2}\alpha_1(b^2-a^2)+\frac{1}{3}\alpha_2(b^3-a^3)+\ldots+\frac{1}{n}\alpha_{n-1}(b^n-a^n)$$

gesetzt werden können, und hierdurch folglich der gesuchte Werth des bestimmten Integrals

$$\int_a^b y\partial x=\int_a^b f(x)\partial x$$

näherungsweise gefunden sein, im Allgemeinen immer mit desto grösserer Genauigkeit, je mehr Werthe von x in dem durch die Integrationsgränzen bestimmten Intervalle und denselben entsprechende Werthe von y bei der Bestimmung der Coefficienten α_0, α_1, α_2, α_3, ... α_{n-1} zum Grunde gelegt worden sind, oder von einem je höheren Grade die durch die Gleichung

$$y=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\ldots+\alpha_{n-1}x^{n-1}$$

charakterisirte parabolische Curve ist, welche man in dem in Rede stehenden Intervalle mit der durch die Gleichung $y=f(x)$ charakterisirten Curve in Uebereinstimmung gebracht hat.

Dies ist im Allgemeinen das Princip der Näherungsmethode zur Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale, welche wir nun weiter entwickeln wollen, indem wir jedoch vorläufig bemerken, dass wir bei dieser Entwickelung nicht ganz den im Vorhergehenden angegebenen Weg, welcher sich übrigens allerdings auch einschlagen liesse, verfolgen werden, weil eine etwas andere Entwickelungsweise, wie wir sogleich sehen werden, in mancher Rücksicht leichter und schneller zum Zwecke führt. Hier kam es uns für jetzt nur darauf an, den Geist der Methode den Lesern im Allgemeinen mit möglichster Deutlichkeit vor die Augen zu führen, und dazu schien uns der im Vorhergehenden eingeschlagene Weg der geeignetste zu sein.

§. 4.

Es mag jetzt wieder

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots. a_n$$

eine Reihe von n gegebenen Werthen der unabhängigen veränderlichen Grösse x, und

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots. A_n$$

die Reihe der diesen Werthen von x entsprechenden, gleichfalls gegebenen n Werthe der Function y der veränderlichen Grösse x sein. Unter dieser Voraussetzung wollen wir uns nun die Aufgabe stellen, die Function y so zu bestimmen, dass sie die Form einer ganzen rationalen algebraischen Function des $(n-1)$sten Grades von x habe und, wenn man für x die Werthe

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots. a_n$$

in sie einführt, respective die Werthe

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots. A_n$$

erhalte. Um diese Aufgabe aber mit Leichtigkeit aufzulösen, wollen wir die Function y nicht in der gewöhnlichen Form der ganzen rationalen algebraischen Functionen des $(n-1)$sten Grades annehmen, wie dies im vorhergehenden Paragraphen geschehen ist, sondern wir wollen, nach einem schon von dem scharfsinnigen englischen Mathematiker Jacob Stirling in seiner selbst jetzt immer noch wichtigen Methodus differentialis: sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. Londini. 1730. 4°. p. 139. Prop. XXIX. befolgten sinnreichen Verfahren, die ganze rationale algebraische

Function y des $(n-1)$sten Grades uns unter der Form

$$
\begin{aligned}
y = \;& \mathfrak{A}_1 \\
& + \mathfrak{A}_2(x-a_1) \\
& + \mathfrak{A}_3(x-a_1)(x-a_2) \\
& + \mathfrak{A}_4(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \\
& \qquad \text{u. s. w.} \\
& + \mathfrak{A}_n(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1}),
\end{aligned}
$$

wo die Symbole

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4,\ldots\mathfrak{A}_n$$

gewisse von x unabhängige Coefficienten bezeichnen, dargestellt denken, wobei zugleich auf der Stelle in die Augen fällt, dass, wenn man die Function y unter dieser Form den Bedingungen der Aufgabe gemäss darzustellen im Stande ist, daraus dann immer auch leicht die gewöhnliche Form der ganzen rationalen algebraischen Functionen des $(n-1)$sten Grades abgeleitet werden kann.

Zur Bestimmung der n von x unabhängigen Coefficienten

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4,\ldots\mathfrak{A}_n$$

liefern uns aber die Bedingungen der Aufgabe unmittelbar die folgenden Gleichungen:

$$A_1 = \mathfrak{A}_1$$
$$A_2 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2(a_2 - a_1),$$
$$A_3 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2(a_3 - a_1) + \mathfrak{A}_3(a_3 - a_1)(a_3 - a_2),$$
$$A_4 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2(a_4 - a_1) + \mathfrak{A}_3(a_4 - a_1)(a_4 - a_2) + \mathfrak{A}_4(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3),$$

u. s. w.

$$A_n = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2(a_n - a_1) + \mathfrak{A}_3(a_n - a_1)(a^n - a_2) + \mathfrak{A}_4(a_n - a_1)(a_n - a_2)(a_n - a_3) + \ldots + \mathfrak{A}_n(a_n - a_1)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1});$$

und es ist klar, dass mittelst dieser n Gleichungen, welche in Beziehung auf

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4, \ldots \mathfrak{A}_n$$

sämmtlich vom ersten Grade sind, diese Coefficienten nach und nach, oder, wie man zu sagen pflegt, recurrirend ohne Schwierigkeit bestimmt werden können.

Wir wollen nun aber einen independenten Ausdruck des allgemeinen Coefficienten $\mathfrak{A}_k$ suchen, zu dessen Bestimmung wir nach dem Vorhergehenden die Gleichungen

$$A_1 = \mathfrak{A}_1,$$
$$A_2 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2(a_2 - a_1),$$
$$A_3 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2(a_3 - a_1) + \mathfrak{A}_3(a_3 - a_1)(a_3 - a_2),$$
$$A_4 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2(a_4 - a_1) + \mathfrak{A}_3(a_4 - a_1)(a_4 - a_2) + \mathfrak{A}_4(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3),$$

u. s. w.

$$A_k = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2(a_k - a_1) + \mathfrak{A}_3(a_k - a_1)(a_k - a_2) + \mathfrak{A}_4(a_k - a_1)(a_k - a_2)(a_k - a_3) + \ldots + \mathfrak{A}_k(a_k - a_1)(a_k - a_2)\ldots(a_k - a_{k-1})$$

haben.

Multipliciren wir diese Gleichungen nach der Reihe mit den Brüchen

$$\frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)\ldots(a_1-a_k)},$$

$$\frac{1}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\ldots.(a_2-a_k)},$$

$$\frac{1}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\ldots.(a_3-a_k)},$$

$$\frac{1}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_k)},$$

u. s. w.

$$\frac{1}{(a_k-a_1)(a_k-a_2)(a_k-a_3)(a_k-a_4)\ldots(a_k-a_{k-1})}$$

und addiren die dadurch nach einigen ganz leichten Reductionen entstehenden Gleichungen zu einander, so erhalten wir zwischen den Coefficienten

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4,\ldots..\mathfrak{A}_k$$

die folgende Gleichung:

$$\frac{A_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)\ldots.(a_1-a_k)}$$

$$+\frac{A_2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\ldots.(a_2-a_k)}$$

$$+\frac{A_3}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\ldots.(a_3-a_k)}$$

$$+\frac{A_4}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\ldots.(a_4-a_k)}$$

u. s. w.

$$+\frac{A_k}{(a_k-a_1)(a_k-a_2)(a_k-a_3)(a_k-a_4)\ldots(a_k-a_{k-1})}$$

$$
= \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)\ldots(a_1-a_k)} \\
+\dfrac{1}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\ldots(a_2-a_k)} \\
+\dfrac{1}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\ldots(a_3-a_k)} \\
+\dfrac{1}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_k)} \\
\qquad\qquad\text{u. s. w.} \\
+\dfrac{1}{(a_k-a_1)(a_k-a_2)(a_k-a_3)(a_k-a_4)\ldots(a_k-a_{k-1})}
\end{array}
\right\} \mathfrak{A}_1
$$

$$
+ \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\ldots(a_2-a_k)} \\
+\dfrac{1}{(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\ldots(a_3-a_k)} \\
+\dfrac{1}{(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_k)} \\
\qquad\qquad\text{u. s. w.} \\
+\dfrac{1}{(a_k-a_2)(a_k-a_3)(a_k-a_4)\ldots(a_k-a_{k-1})}
\end{array}
\right\} \mathfrak{A}_2
$$

$$
+ \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{(a_3-a_4)(a_3-a_5)\ldots(a_3-a_k)} \\
+\dfrac{1}{(a_4-a_3)(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_k)} \\
\qquad\qquad\text{u. s. w.} \\
+\dfrac{1}{(a_k-a_3)(a_k-a_4)\ldots(a_k-a_{k-1})}
\end{array}
\right\} \mathfrak{A}_3
$$

$$
+ \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_k)} \\
\qquad\text{u. s. w.} \\
+\dfrac{1}{(a_k-a_4)\ldots(a_k-a_{k-1})}
\end{array}
\right\} \mathfrak{A}_4
$$

u. s. w. ; u. s. w.

$$
+ \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{a_{k-1}-a_k} \\
+\dfrac{1}{a_k-a_{k-1}}
\end{array}
\right\} \mathfrak{A}_{k-1}
$$

$$
+ \mathfrak{A}_k .
$$

Wenn man nun nach einer aus den Anfangsgründen der Integralrechnung allgemein bekannten Methode (m. s. z. B. meinen Leitfaden für den ersten Unterricht in der höhern Analysis. Leipzig. 1838. S. 150. §. 14.) die gebrochene rationale algebraische Function

$$\frac{1}{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_\mu)}$$

in sogenannte einfache oder Partialbrüche mit den Nennern

$$u-\alpha_1,\; u-\alpha_2,\; u-\alpha_3,\; u-\alpha_4,\; u-\alpha_5,\ldots u-\alpha_\mu$$

zerlegt, so erhält man nach der erwähnten Methode als Zähler dieser Brüche unmittelbar die folgenden Grössen:

$$\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_\mu)},$$

$$\frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_\mu)},$$

$$\frac{1}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_\mu)},$$

$$\frac{1}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_\mu)},$$

u. s. w.

$$\frac{1}{(\alpha_\mu-\alpha_1)(\alpha_\mu-\alpha_2)(\alpha_\mu-\alpha_3)(\alpha_\mu-\alpha_4)\ldots(\alpha_\mu-\alpha_{\mu-1})};$$

und es ist folglich

$$\frac{1}{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_\mu)}$$

$$=\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_\mu)(u-\alpha_1)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_\mu)(u-\alpha_2)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_\mu)(u-\alpha_3)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_\mu)(u-\alpha_4)}$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{(\alpha_\mu-\alpha_1)(\alpha_\mu-\alpha_2)(\alpha_\mu-\alpha_3)(\alpha_\mu-\alpha_4)\dots(\alpha_\mu-\alpha_{\mu-1})(u-\alpha_\mu)},$$

also, wie man hieraus sogleich schliesst:

$$0=\frac{1}{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\dots(u-\alpha_\mu)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_1-u)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\dots(\alpha_1-\alpha_\mu)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_2-u)(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\dots(\alpha_2-\alpha_\mu)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_3-u)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\dots(\alpha_3-\alpha_\mu)}$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{(\alpha_\mu-u)(\alpha_\mu-\alpha_1)(\alpha_\mu-\alpha_2)(\alpha_\mu-\alpha_3)(\alpha_\mu-\alpha_4)\dots(\alpha_\mu-\alpha_{\mu-1})},$$

oder, wenn man grösserer Symmetrie wegen statt des Symbols u das Symbol α in diese Gleichung einführt:

$$0=\frac{1}{(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)(\alpha-\alpha_3)(\alpha-\alpha_4)\dots(\alpha-\alpha_\mu)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_1-\alpha)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\dots(\alpha_1-\alpha_\mu)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_2-\alpha)(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\dots(\alpha_2-\alpha_\mu)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_3-\alpha)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)\dots(\alpha_3-\alpha_\mu)}$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{(\alpha_\mu-\alpha)(\alpha_\mu-\alpha_1)(\alpha_\mu-\alpha_2)(\alpha_\mu-\alpha_3)\dots(\alpha_\mu-\alpha_{\mu-1})}.$$

Wendet man den in dieser allgemeinen Gleichung ausgesprochenen Satz auf die zwischen den Coefficienten

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4,\dots\mathfrak{A}_k$$

gefundene Gleichung an, so fällt auf der Stelle in die Augen, dass die Grössen, in welche in dieser Gleichung die Coefficienten

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4, \ldots \mathfrak{A}_{k-1}$$

multiplicirt sind, sämmtlich verschwinden, so dass sich also aus dieser Gleichung für den allgemeinen Coefficienten $\mathfrak{A}_k$ der folgende ganz independente Ausdruck ergiebt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_k = & \frac{A_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)\ldots(a_1-a_k)} \\
& + \frac{A_2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\ldots(a_2-a_k)} \\
& + \frac{A_3}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\ldots(a_3-a_k)} \\
& + \frac{A_4}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_k)} \\
& \qquad \text{u. s. w.} \\
& + \frac{A_k}{(a_k-a_1)(a_k-a_2)(a_k-a_3)(a_k-a_4)\ldots(a_k-a_{k-1})}
\end{aligned}$$

Der Werth von $\mathfrak{A}_1$ kann aus dieser allgemeinen Formel nicht abgeleitet werden; aus dem Obigen ergiebt sich aber ganz von selbst, dass immer

$$\mathfrak{A}_1 = A_1$$

ist.

Führt man die hieraus sich ergebenden ganz independenten Ausdrücke von

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4, \ldots \mathfrak{A}_n$$

in die oben zum Grunde gelegte Gleichung

$$\begin{aligned}
y = & \ \mathfrak{A}_1 \\
& + \mathfrak{A}_2 (x-a_1) \\
& + \mathfrak{A}_3 (x-a_1)(x-a_2) \\
& + \mathfrak{A}_4 (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \\
& \qquad \text{u. s. w.} \\
& + \mathfrak{A}_n (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1})
\end{aligned}$$

ein, so erhält man auch einen vollständig entwickelten, ganz independenten Ausdruck für die gesuchte ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades y von x.

§. 5.

Man kann aber, wie wir jetzt zeigen wollen, die ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades y von x noch auf einen von dem aus dem Vorhergehenden sich ergebenden verschiedenen, viel einfacheren Ausdruck bringen. Um jedoch nicht zu weitläufig zu werden, wollen wir diesen Ausdruck nur für $n=5$ entwickeln, werden aber die Rechnung so führen, dass die Allgemeinheit der Methode aus derselben ganz von selbst erhellet.

Für $n=5$ ist nämlich

$$\begin{aligned} y = & \mathfrak{A}_1 \\ & + \mathfrak{A}_2 (x-a_1) \\ & + \mathfrak{A}_3 (x-a_1)(x-a_2) \\ & + \mathfrak{A}_4 (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \\ & + \mathfrak{A}_5 (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4), \end{aligned}$$

und folglich, wenn man für

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{A}_5$$

die aus dem vorhergehenden Paragraphen sich ergebenden Ausdrücke dieser Coefficienten einführt:

$$\begin{aligned} y = \; & A_1 \\ & + \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{A_1}{a_1-a_2} \\ + \dfrac{A_2}{a_2-a_1} \end{array} \right\} (x-a_1) \\ & + \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{A_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} \\ + \dfrac{A_2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)} \\ + \dfrac{A_3}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)} \end{array} \right\} (x-a_1)(x-a_2) \end{aligned}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}\\+\dfrac{A_2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}\\+\dfrac{A_3}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)}\\+\dfrac{A_4}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}\end{array}\right\}(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)}\\+\dfrac{A_2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)}\\+\dfrac{A_3}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)}\\+\dfrac{A_4}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)}\\+\dfrac{A_5}{(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)}\end{array}\right\}(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4).$$

Ordnet man nun diesen Ausdruck nach

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5;$$

so ist A_1 in die folgende Grösse multiplicirt:

$$1+\frac{x-a_1}{a_1-a_2}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}$$
$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)}$$

$$=\frac{x-a_2}{a_1-a_2}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}$$
$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)}$$

$$=\frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}$$
$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)}$$

$$=\frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)}$$

$$=\frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)}.$$

Ferner ist A_2 in die folgende Grösse multiplicirt:

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_1}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)}$$

$$=\frac{(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)}$$

$$=\frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)}$$

$$=\frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)}.$$

Auf ähnliche Art ist A_3 in die folgende Grösse multiplicirt:

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)}$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)}$$

$$=\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)}$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)}$$

$$=\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)(x-a_5)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)}.$$

Eben so ist A_4 in die folgende Grösse multiplicirt:

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)}$$

$$=\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_5)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)}.$$

Endlich ist A_5 in die Grösse

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)}$$

multiplicirt.

Also ist

$$y=\frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)}A_1$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)}A_2$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)(x-a_5)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)}A_3$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_5)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)}A_4$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)}A_5.$$

Dass diese Rechnung in jedem andern Falle auf ganz ähnliche Art ausgeführt werden kann, erhellet auf der Stelle, und es ist daher allgemein für jedes n:

$$y=\frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)\ldots.(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)\ldots.(a_1-a_n)}A_1$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)\ldots.(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\ldots.(a_2-a_n)}A_2$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)(x-a_5)\ldots.(x-a_n)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\ldots.(a_3-a_n)}A_3$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_5)\ldots(x-a_n)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_n)}A_4$$

u. s. w.

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\dots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)(a_n-a_3)(a_n-a_4)\dots(a_n-a_{n-1})}A_n.$$

Uebrigens fällt auch auf der Stelle in die Augen, dass diese ganze rationale algebraische Function des $(n-1)$sten Grades den Bedingungen unserer Aufgabe vollständig genügt, indem dieselbe offenbar, wenn man für x die Werthe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\dots a_n$$

setzt, respective die Werthe

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\dots A_n$$

erhält, wie gefordert wurde. Die obige Betrachtung aber zeigt, wie man zu dieser merkwürdigen Formel, welche man nach ihrem Erfinder, dem berühmten Lagrange, die Lagrange'sche Interpolationsformel zu nennen pflegt, nicht durch Zufall, sondern mittelst einer methodischen analytischen Entwickelung gelangen kann.

Dass es überhaupt nicht zwei verschiedene, die Bedingungen unserer Aufgabe erfüllende ganze rationale algebraische Functionen des $(n-1)$sten Grades geben kann, und daher die obigen nur der Form nach verschiedenen Functionen die einzigen sind, welche unsere Aufgabe auflösen, lässt sich leicht auf folgende Art zeigen. Gäbe es nämlich zwei die Bedingungen unserer Aufgabe vollständig erfüllende ganze rationale algebraische Functionen des $(n-1)$sten Grades y und Y, so würden diese Functionen, wenn man für x die n Werthe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\dots a_n,$$

welche natürlich unter einander sämmtlich ungleich angenommen werden, setzte, beide die gleichen Werthe

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\dots A_n$$

erhalten, und die Differenz $y-Y$ würde also verschwinden, wenn man für x nach und nach die n sämmtlich unter einander ungleichen Werthe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\dots a_n$$

setzte. Daher würde nach einem bekannten Satze der Theorie der ganzen rationalen algebraischen Functionen oder der Theorie der Gleichungen die Differenz $y-Y$, welche offenbar im Allgemeinen eine ganze rationale algebraische Function von einem den $(n-1)$sten nicht übersteigenden Grade ist, durch das Product

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

welches offenbar eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades ist, ohne Rest theilbar sein, was jedenfalls eine Ungereimtheit ist, die nur dadurch beseitigt werden kann, dass man sich zu der Annahme bequemt, dass die Differenz $y-Y$ der Null identisch gleich, oder dass für jedes x die Functionen y und Y einander gleich, d. h. dass diese beiden Functionen überhaupt gar nicht von einander verschieden, und daher in der That beide nur eine und dieselbe Function sind, was eben die oben von uns ausgesprochene Behauptung war, deren Richtigkeit also hierdurch vollständig bewiesen ist.

§. 6.

Um den Werth des bestimmten Integrals

$$\int_a^b y\partial x$$

näherungsweise zu ermitteln, wollen wir das Intervall oder die Differenz $b-a$, die der Kürze wegen durch ω bezeichnet werden mag, in $n-1$ gleiche Theile eintheilen, und wollen im Vorhergehenden, indem wir nicht ausser Acht lassen, dass die vorher durch

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots a_n$$

bezeichneten Grössen innerhalb des in Rede stehenden Intervalls liegen müssen,

$$a_1=a \qquad\qquad =a,$$

$$a_2=a+1\frac{b-a}{n-1}=a+1\frac{\omega}{n-1},$$

$$a_3=a+2\frac{b-a}{n-1}=a+2\frac{\omega}{n-1},$$

$$a_4=a+3\frac{b-a}{n-1}=a+3\frac{\omega}{n-1},$$

u. s. w.

$$a_n=a+(n-1)\frac{b-a}{n-1}=a+(n-1)\frac{\omega}{n-1};$$

oder, wenn der Kürze wegen noch $\overline{\omega}$ für $\frac{\omega}{n-1}$ geschrieben wird,

$$a_1 = a,$$

$$a_2 = a + 1\overline{\omega},$$

$$a_3 = a + 2\overline{\omega},$$

$$a_4 = a + 3\overline{\omega},$$

u. s. w.

$$a_n = a + (n-1)\overline{\omega}$$

setzen.

Ein allgemeines Glied von y ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{\mu-1})(x-a_{\mu+1})\ldots(x-a_n)}{(a_\mu-a_1)(a_\mu-a_2)\ldots(a_\mu-a_{\mu-1})(a_\mu-a_{\mu+1})\ldots(a_\mu-a_n)}A_\mu.$$

Der Nenner dieses allgemeinen Gliedes ist unter der so eben gemachten Voraussetzung rücksichtlich der Grössen a_1, a_2, a_3, a_4, ...a_n offenbar:

$$(\mu-1)\overline{\omega}.(\mu-2)\overline{\omega}\ldots1\overline{\omega}.-1\overline{\omega}.-2\overline{\omega}\ldots-(n-\mu)\overline{\omega}$$

$$=(-1)^{n-\mu}.1.2.3\ldots(\mu-1).1.2.3\ldots(n-\mu).\overline{\omega}^{n-1};$$

der Zähler aber ist, wenn

$$u = x - a$$

gesetzt wird:

$$u(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})\ldots(u-(\mu-2)\overline{\omega})(u-\mu\overline{\omega})\ldots(u-(n-1)\overline{\omega}).$$

Also ist das obige allgemeine Glied von y:

$$(-1)^{n-\mu}.\frac{u(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})\ldots(u-(\mu-2)\overline{\omega})(u-\mu\overline{\omega})\ldots(u-(n-1)\overline{\omega})}{1.2.3\ldots(\mu-1).1.2.3\ldots(n-\mu)\overline{\omega}^{n-1}}A_\mu.$$

Weil nun $\partial x = \partial u$ und für $x=a$, $x=b$ respective $u=0$, $u=b-a=\omega$ ist, so ist, wenn wir der Kürze wegen

$$K_\mu = \frac{(-1)^{n-\mu}}{1.2.3\ldots(\mu-1).1.2.3\ldots(n-\mu)}$$

und

$$U_\mu = \int_0^\omega u(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})..(u-(\mu-2)\overline{\omega})(u-\mu\overline{\omega})..(u-(n-1)\overline{\omega})\partial u$$

setzen, das allgemeine Glied von

$$\int_a^b y\partial x$$

offenbar

$$\frac{B_\mu U_\mu}{\overline{\omega}^{n-1}} A_\mu.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$u(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})..(u-(\mu-2)\overline{\omega})(u-\mu\overline{\omega})..(u-(n-1)\overline{\omega})$$
$$=\overline{\omega}^{n-1}\frac{\frac{u}{\overline{\omega}}\left(\frac{u}{\overline{\omega}}-1\right)\left(\frac{u}{\overline{\omega}}-2\right)\left(\frac{u}{\overline{\omega}}-3\right)..\left(\frac{u}{\overline{\omega}}-(n-1)\right)}{\frac{u}{\overline{\omega}}-(\mu-1)},$$

also, wenn man

$$\frac{u}{\overline{\omega}}=(n-1)v,\quad u=(n-1)\overline{\omega}v=\omega v$$

setzt:

$$u(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})..(u-(\mu-2)\overline{\omega})(u-\mu\overline{\omega})..(u-(n-1)\overline{\omega})$$
$$=\overline{\omega}^{n-1}\frac{(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)..((n-1)v-(n-1))}{(n-1)v-(\mu-1)};$$

und weil nun $\partial u=\omega\partial v$ und für $u=0$, $u=\omega$ respective $v=0$, $v=1$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$V_\mu=\int_0^1\frac{(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)..((n-1)v-(n-1))}{(n-1)v-(\mu-1)}\partial v$$

gesetzt wird, offenbar

$$U_\mu=\omega\overline{\omega}^{n-1}V_\mu.$$

Also ist nach dem Obigen von

$$\int_a^b y\partial x$$

das allgemeine Glied:

$$wK_\mu V_\mu A_\mu.$$

Setzen wir jetzt ferner

$$2v-1=w, \quad v=\frac{1}{2}(w+1);$$

so ist

$$(n-1)v \qquad =\frac{(n-1)w+(n-1)}{2},$$

$$(n-1)v-1=\frac{(n-1)w+(n-3)}{2},$$

$$(n-1)v-2=\frac{(n-1)w+(n-5)}{2},$$

u. s. w.

$$(n-1)v-(n-3)=\frac{(n-1)w-(n-5)}{2},$$

$$(n-1)v-(n-2)=\frac{(n-1)w-(n-3)}{2},$$

$$(n-1)v-(n-1)=\frac{(n-1)w-(n-1)}{2}$$

und

$$(n-1)v-(\mu-1)=\frac{(n-1)w+(n-2\mu+1)}{2}.$$

Wenn also n gerade ist, so ist

$$(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)..((n-1)v-(n-1))$$

$$=\frac{(n-1)w+(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-1)w+(n-3)}{2}\cdot\frac{(n-1)w+(n-5)}{2}\cdots\frac{(n-1)w+1}{2}$$

$$\times\frac{(n-1)w-(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-1)w-(n-3)}{2}\cdot\frac{(n-1)w-(n-5)}{2}\cdots\frac{(n-1)w-1}{2}$$

$$=\frac{1}{2^n}((n-1)^2w^2-(n-1)^2)((n-1)^2w^2-(n-3)^2)..((n-1)^2w^2-1^2);$$

und wenn n ungerade ist, so ist

$$(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)\ldots((n-1)v-(n-1))$$

$$=\frac{(n-1)w+(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-1)w+(n-3)}{2}\cdot\frac{(n-1)w+(n-5)}{2}\cdots\frac{(n-1)w+2}{2}\cdot\frac{(n-1)w}{2}$$

$$\times\frac{(n-1)w-(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-1)w-(n-3)}{2}\cdot\frac{(n-1)w-(n-5)}{2}\cdots\frac{(n-1)w-2}{2}$$

$$=\frac{1}{2^n}((n-1)^2w^2-(n-1)^2)((n-1)^2w^2-(n-3)^2)\ldots((n-1)^2w^2-2^2)(n-1)w.$$

Setzen wir folglich der Kürze wegen, jenachdem n gerade oder ungerade ist:

$$W_\mu=\begin{cases}\dfrac{((n-1)^2w^2-(n-1)^2)((n-1)^2w^2-(n-3)^2)\ldots)((n-1)^2w^2-1^2)}{(n-1)^2w^2-(n-2\mu+1)^2}\\[2ex]\dfrac{((n-1)^2w^2-(n-1)^2)((n-1)^2w^2-(n-3)^2)\ldots((n-1)^2w^2-2^2)(n-1)w}{(n-1)^2w^2-(n-2\mu+1)^2},\end{cases}$$

so ist offenbar

$$\frac{(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)\ldots((n-1)v-(n-1))}{(n-1)v-(\mu-1)}$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}}((n-1)w-(n-2\mu+1))\,W_\mu;$$

und weil nun $\partial v=\frac{1}{2}\partial w$ und für $v=0$, $v=1$ respective $w=-1$, $w=+1$ ist, so ist nach dem Obigen offenbar

$$V_\mu=\frac{1}{2^n}\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\,W_\mu\partial w.$$

Also ist das allgemeine Glied von

$$\int_a^b y\partial x$$

nach dem Obigen:

$$\frac{1}{2^n}\omega K_\mu A_\mu\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\,W_\mu\partial w.$$

Die beiden Fälle, wenn $\mu=1$ und $\mu=n$ ist, müssen, wovon leicht die Nothwendigkeit aus dem Vorhergehenden von selbst erhellen wird, nun noch besonders betrachtet werden.

Das erste Glied von y ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)\ldots(a_1-a_n)}A_1.$$

Der Nenner dieses Gliedes ist

$$-1\varpi.-2\varpi.-3\varpi.-4\varpi\ldots-(n-1)\varpi$$
$$=(-1)^{n-1}.1.2.3\ldots(n-1)\varpi^{n-1};$$

und der Zähler ist, wenn wieder

$$u=x-a$$

gesetzt wird:

$$(u-1\varpi)(u-2\varpi)(u-3\varpi)\ldots(u-(n-1)\varpi).$$

Also ist das obige erste Glied von y:

$$(-1)^{n-1}.\frac{(u-1\varpi)(u-2\varpi)(u-3\varpi)\ldots(u-(n-1)\varpi)}{1.2.3\ldots(n-1)\varpi^{n-1}}A_1.$$

Weil nun $\partial x=\partial u$ und für $x=a$, $x=b$ respective $u=0$, $u=b-a=\omega$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$K_1=\frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

und

$$U_1=\int_0^\omega(u-1\varpi)(u-2\varpi)(u-3\varpi)\ldots(u-(n-1)\varpi)\partial u$$

gesetzt wird, das erste Glied von

$$\int_a^b y\partial x$$

offenbar

$$\frac{K_1U_1}{\varpi^{n-1}}A_1$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$(u-1\bar{\omega})(u-2\bar{\omega})(u-3\bar{\omega})\ldots(u-(n-1)\bar{\omega})$$

$$=\bar{\omega}^{n-1}\frac{\frac{u}{\bar{\omega}}\left(\frac{u}{\bar{\omega}}-1\right)\left(\frac{u}{\bar{\omega}}-2\right)\left(\frac{u}{\bar{\omega}}-3\right)\ldots\left(\frac{u}{\bar{\omega}}-(n-1)\right)}{\frac{u}{\bar{\omega}}},$$

also, wenn man

$$\frac{u}{\bar{\omega}}=(n-1)v,\quad u=(n-1)\bar{\omega}v=\omega v$$

setzt:

$$(u-1\bar{\omega})(u-2\bar{\omega})(u-3\bar{\omega})\ldots(u-(n-1)\bar{\omega})$$

$$=\bar{\omega}^{n-1}\frac{(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)\ldots((n-1)v-(n-1))}{(n-1)v},$$

und weil nun $\partial u=\omega\partial v$ und für $u=0$, $u=\omega$ respective $v=0$, $v=1$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$V_1=\int_0^1\frac{(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)\ldots((n-1)v-(n-1))}{(n-1)v}\partial v$$

gesetzt wird, offenbar

$$U_1=\omega\bar{\omega}^{n-1}V_1.$$

Also ist nach dem Obigen von

$$\int_a^{b} y\partial x$$

das erste Glied:

$$\omega K_1 V_1 A_1,$$

wo K_1 seinen obigen Werth hat.

Diese Rechnung noch weiter fortzuführen, ist unnöthig, weil die fernere Rechnung ganz unter dem obigen allgemeinen Falle enthalten ist.

Das letzte Glied von y ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)(a_n-a_3)(a_n-a_4)\ldots(a_n-a_{n-1})}A_n.$$

Der Nenner dieses Gliedes ist

$$(n-1)\bar{\omega}.(n-2)\bar{\omega}.(n-3)\bar{\omega}\ldots1\bar{\omega}$$
$$=(-1)^0.1.2.3\ldots(n-1)\bar{\omega}^{n-1};$$

und der Zähler ist, wenn wieder

$$u=x-a$$

gesetzt wird:

$$u(u-1\varpi)(u-2\varpi)(u-3\varpi)..(u-(n-2)\varpi).$$

Also ist das obige letzte Glied von y:

$$(-1)^0.\frac{u(u-1\varpi)(u-2\varpi)(u-3\varpi)..(u-(n-2)\varpi)}{1.2.3...(n-1)\varpi^{n-1}}A_n.$$

Weil nun $\partial x=\partial u$ und für $x=a$, $x=b$ respective $u=0$, $u=b-a=\omega$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$K_n=\frac{(-1)^0}{1.2.3..(n-1)}$$

und

$$U_n=\int_0^\omega u(u-1\varpi)(u-2\varpi)(u-3\varpi)..(u-(n-2)\varpi)\partial u$$

gesetzt wird, das letzte Glied von

$$\int_a^b y\partial x$$

offenbar

$$\frac{K_n U_n}{\varpi^{n-1}}A_n.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$u(u-1\varpi)(u-2\varpi)(u-3\varpi)..(u-(n-2)\varpi)$$

$$=\varpi^{n-1}\frac{u}{\varpi}\left(\frac{u}{\varpi}-1\right)\left(\frac{u}{\varpi}-2\right)\left(\frac{u}{\varpi}-3\right)...\left(\frac{u}{\varpi}-(n-1)\right)\frac{\frac{u}{\varpi}}{\frac{u}{\varpi}-(n-1)},$$

also, wenn man

$$\frac{u}{\varpi}=(n-1)v,\quad u=(n-1)\varpi v=\omega v$$

setzt:

$$u(u-1\varpi)(u-2\varpi)(u-3\varpi)\ldots(u-(n-2)\varpi)$$
$$=\varpi^{n-1}\frac{(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)\ldots((n-1)v-(n-1))}{(n-1)v-(n-1)},$$

und weil nun $\partial u=\omega\partial v$ und für $u=0$, $u=\omega$ respective $v=0$, $v=1$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$V_n=\int_0^1\frac{(n-1)v((n-1)v-1((n-1)v-2)\ldots((n-1)v-(n-1))}{(n-1)v-(n-1)}\partial v$$

gesetzt wird, offenbar

$$U_n=\omega\,\varpi^{n-1}V_n.$$

Also ist nach dem Obigen von

$$\int_a^b y\partial x$$

das letzte Glied:

$$\omega K_n V_n A_n,$$

wo K_n seinen obigen Werth hat.

Von jetzt an ist die Rechnung wieder ganz unter dem oben betrachteten allgemeinen Falle enthalten, und dieselbe braucht daher nicht weiter fortgeführt zu werden.

Nehmen wir nun alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich zur Berechnung des μten Gliedes von

$$\int_a^b y\partial x$$

die folgende allgemeine Regel:

Man setze

$$K_\mu=\frac{(-1)^{n-\mu}}{1.2.3\ldots(\mu-1).1.2.3\ldots(n-\mu)},$$

und lege in den Fällen, wenn $\mu=1$ und $\mu=n$ ist, dem Nenner dieses Bruchs jederzeit den Werth $1.2.3\ldots(n-1)$ bei. Hierauf setze man, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist,

$$W_\mu=\begin{cases}\dfrac{((n-1)^2w^2-(n-1)^2)((n-1)^2w^2-(n-3)^2)\ldots((n-1)^2w^2-1^2)}{(n-1)^2w^2-(n-2\mu+1)^2}\\[2ex]\dfrac{((n-1)^2w^2-(n-1)^2)((n-1)^2w^2-(n-3)^2)\ldots((n-1)^2w^2-2^2)(n-1)w}{(n-1)^2w^2-(n-2\mu+1)^2},\end{cases}$$

und berechne das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\,W_\mu\partial w,$$

was nie die geringste Schwierigkeit hat, da, wie aus dem Obigen sich ganz von selbst ergiebt, W_μ immer eine ganze rationale algebraische Function von w ist. Dann ist

$$\frac{1}{2^n}\omega K_\mu A_\mu\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\,W_\mu\partial w$$

das gesuchte μte Glied des bestimmten Integrals

$$\int_a^b y\partial x,$$

und folglich

$$\int_a^b y\partial x = \frac{1}{2^n}\omega K_1 A_1\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-1))\,W_1\partial w$$

$$+\frac{1}{2^n}\omega K_2 A_2\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-3))\,W_2\partial w$$

$$+\frac{1}{2^n}\omega K_3 A_3\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-5))\,W_3\partial w$$

$$+\frac{1}{2^n}\omega K_4 A_4\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-7))\,W_4\partial w$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{2^n}\omega K_n A_n\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-(2n-1)))\,W_n\partial w,$$

wodurch also der Werth unsers bestimmten Integrals näherungsweise gefunden ist.

Wir wollen jetzt die beiden Glieder

$$\frac{1}{2^n}\omega K_\mu A_\mu\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\,W_\mu\partial w,$$

$$\frac{1}{2^n}\omega K_\nu A_\nu\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\nu+1))\,W_\nu\partial w$$

betrachten, indem wir annehmen, dass $\mu+\nu=n+1$ sei, so dass diese beiden Glieder gleich weit vom Anfange und vom Ende abstehen.

Weil $n=\mu+\nu-1$ ist, so ist

$$n-2\mu+1=\mu+\nu-1-2\mu+1=\nu-\mu,$$

$$n-2\nu+1=\mu+\nu-1-2\nu+1=\mu-\nu$$

und folglich nach dem Obigen offenbar

$$W_\mu=W_\nu.$$

Also ist

$$\begin{aligned}((n-1)w-(n-2\nu+1))\,W_\nu\partial w &= ((n-1)w-(\mu-\nu))\,W_\mu\partial w\\ &= ((n-1)w+(\nu-\mu))\,W_\mu\partial w,\end{aligned}$$

d. i.

$$((n-1)w-(n-2\nu+1))\,W_\nu\partial w=((n-1)w+(n-2\mu+1))\,W_\mu\partial w.$$

Setzen wir nun $w=-w'$, also $\partial w=-\partial w'$, so ist, wie leicht aus dem Obigen erhellen wird,

$$((n-1)w-(n-2\nu+1))\,W_\nu\partial w=\pm((n-1)w'-(n-2\mu+1))\,W_\mu\partial w',$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem n gerade oder ungerade ist, und folglich überhaupt

$$((n-1)w-(n-2\nu+1))\,W_\nu\partial w=(-1)^n((n-1)w'-(n-2\mu+1))\,W_\mu\partial w'.$$

Weil nun für $w=-1$, $w=+1$ respective $w'=+1$, $w'=-1$ ist, so ist

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\nu+1))\,W_\nu\,\partial w\\ &=(-1)^n\int_{+1}^{-1}((n-1)w'-(n-2\mu+1))\,W_\mu\partial w'\end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\nu+1))\,W_\nu\,\partial w\\ &=-(-1)^n\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\,W_\mu\,\partial w.\end{aligned}$$

Daher sind die Grössen, in welche in dem μten und νten Gliede A_μ und A_ν multiplicirt sind, nach dem Obigen

$$\frac{1}{2^n}\omega K_\mu \int_{-1}^{+1} ((n-1)w-(n-2\mu+1))\, W_\mu \partial w$$

und

$$-(-1)^n \frac{1}{2^n}\omega K_\nu \int_{-1}^{+1} ((n-1)w-(n-2\mu+1))\, W_\mu \partial w.$$

Für $\mu=1$ und $\nu=n$ ist nach dem Obigen bekanntlich

$$K_\mu = \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3..(n-1)},$$

$$K_\nu = \frac{(-1)^{n-n}}{1.2.3..(n-1)};$$

also

$$-(-1)^n K_\nu = (-1)^{n-1} K_\nu = \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3..(n-1)} = K_\mu,$$

so dass also im ersten und letzten Gliede von $\int_a^b y\partial x$ die Coefficienten von A_1 und A_n nach dem Vorhergehenden offenbar einander gleich sind.

Allgemein ist bekanntlich

$$K_\mu = \frac{(-1)^{n-\mu}}{1.2.3..(\mu-1).1.2.3..(n-\mu)},$$

$$K_\nu = \frac{(-1)^{n-\nu}}{1.2.3..(\nu-1).1.2.3..(n-\nu)}$$

und folglich, weil nach der Voraussetzung $\mu+\nu=n+1$, also

$$n-\mu=\nu-1,\quad n-\nu=\mu-1$$

ist

$$K_\mu = \frac{(-1)^{\nu-1}}{1.2.3..(\mu-1).1.2.3..(\nu-1)},$$

$$K_\nu = \frac{(-1)^{\mu-1}}{1.2.3..(\mu-1).1.2.3..(\nu-1)};$$

daher ist

$$-(-1)^n K_\nu = (-1)^{n-1} K_\nu = (-1)^{\mu+\nu-2} K_\nu = \frac{(-1)^{2\mu+\nu-3}}{1.2.3..(\mu-1).1.2.3..(\nu-1)}$$

$$= \frac{(-1)^{2(\mu-1)}.(-1)^{\nu-1}}{1.2.3..(\mu-1).1.2.3..(\nu-1)} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{1.2.3..(\mu-1).1.2.3..(\nu-1)},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden wieder

$$-(-1)^n K_\nu = K_\mu,$$

woraus man also sieht, dass unter den gemachten Voraussetzungen überhaupt in dem μten und νten Gliede von $\int_a^b y\partial x$ die Grössen A_μ und A_ν gleiche Coefficienten haben.

Man gelangt also hierdurch zu dem allgemeinen Resultate, dass in dem obigen Ausdrucke von $\int_a^b y\partial x$ die Grösse A_μ in den vom ersten und letzten Gliede gleich weit abstehenden Gliedern mit gleichen Coefficienten behaftet ist, wodurch natürlich die numerische Entwickelung der Coefficienten von

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots A_n$$

in dem obigen allgemeinen Ausdrucke von $\int_a^b y\partial x$ wesentlich abgekürzt wird, und daher das in Rede stehende Resultat als ein für die numerische Berechnung dieser Coefficienten sehr wichtiges bezeichnet werden muss.

§. 7.

Wir wollen jetzt noch eine sehr bemerkenswerthe ganz allgemeine Methode zur Entwickelung des bestimmten Integrals

$$\int_a^b y\partial x$$

angeben, indem wir natürlich wie früher auch jetzt immer

$$y = \frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)\ldots(a_1-a_n)} A_1$$

$$+ \frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\ldots(a_2-a_n)} A_2$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)(x-a_5)\ldots(x-a_n)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\ldots(a_3-a_n)}A_3$$

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_5)\ldots(x-a_n)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_n)}A_4$$

u. s. w.

$$+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)(a_n-a_3)(a_n-a_4)\ldots(a_n-a_{n-1})}A_n$$

setzen.

Wir wollen zuerst eine neue veränderliche Grösse u, welche durch die Gleichung

$$u=\frac{x-a}{b-a},$$

woraus sich $x=a+(b-a)u$ ergiebt, bestimmt wird, einführen. Setzen wir der Kürze wegen

$$\alpha_1=\frac{a_1-a}{b-a},\quad \alpha_2=\frac{a_2-a}{b-a},\quad \alpha_3=\frac{a_3-a}{b-a},\ \ldots \alpha_n=\frac{a_n-a}{b-a};$$

so erhalten wir nach leichter Substitution, wie sogleich erhellen wird:

$$y=\frac{(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_n)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)}A_1$$

$$+\frac{(u-\alpha_1)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_n)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)}A_2$$

$$+\frac{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_n)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}A_3$$

$$+\frac{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_n)}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n)}A_4$$

u. s. w.

$$+\frac{(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)\ldots(u-\alpha_{n-1})}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}A_n,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$N_1=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_n),$$

$$N_2=(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n),$$

$$N_3=(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n),$$

$$N_4=(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n),$$

u. s. w.

$$N_n=(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})$$

und

$$U_1=(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_n),$$

$$U_2=(u-\alpha_1)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_n),$$

$$U_3=(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_4)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_n),$$

$$U_4=(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_5)\ldots(u-\alpha_n),$$

u. s. w.

$$U_n=(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)\ldots(u-\alpha_{n-1})$$

setzen, wo

$$N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4,\ldots N_n$$

die Werthe sind, welche respective

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ldots U_n$$

erhalten, wenn man in diesen Grössen für u respective

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ldots \alpha_n$$

setzt:

$$y=\frac{A_1}{N_1}U_1+\frac{A_2}{N_2}U_2+\frac{A_3}{N_3}U_3+\frac{A_4}{N_4}U_4+\ldots+\frac{A_n}{N_n}U_n;$$

also, weil nach dem Obigen

$$\partial x=(b-a)\,\partial u$$

ist:

$$y\partial x$$

$$=(b-a)\left\{\frac{A_1}{N_1}U_1+\frac{A_2}{N_2}U_2+\frac{A_3}{N_3}U_3+\frac{A_4}{N_4}U_4+\ldots+\frac{A_n}{N_n}U_n\right\}\partial u.$$

Weil nun aber nach dem Obigen für $x=a$, $x=b$ respective $u=0$, $u=1$ ist, so ist

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b y\partial x = \frac{A_1}{N_1}\int_0^1 U_1\partial u$$

$$+\frac{A_2}{N}\int_0^1 U_2\partial u$$

$$+\frac{A_3}{N_3}\int_0^1 U_3\partial u$$

u. s. w.

$$+\frac{A_n}{N_n}\int_0^1 U_n\partial u.$$

Setzen wir aber

$$U=(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)\dots(u-\alpha_n),$$

so lässt sich die vorstehende Gleichung auch auf folgende Art ausdrücken:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b y\partial x = \frac{A_1}{N_1}\int_0^1 \frac{U\partial u}{u-\alpha_1}$$

$$+\frac{A_2}{N_2}\int_0^1 \frac{U\partial u}{u-\alpha_2}$$

$$+\frac{A_3}{N_3}\int_0^1 \frac{U\partial u}{u-\alpha_3}$$

u. s. w.

$$+\frac{A_n}{N_n}\int_0^1 \frac{U\partial u}{u-\alpha_n},$$

und der Coefficient von A_k in der Entwickelung von

$$\int_a^b y\partial x$$

ist daher im Allgemeinen

$$\frac{b-a}{N_k}\int_0^1 \frac{U\partial u}{u-\alpha_k}.$$

Denken wir uns nun das Product U absteigend nach Potenzen von u entwickelt, und setzen demzufolge

$$U=u^n+C_1u^{n-1}+C_2u^{n-2}+\dots+C_{n-1}u+C_n,$$

wo die Bedeutung der Coefficienten

$$C_1, C_2, C_3, \ldots C_{n-1}, C_n$$

nach einem bekannten arithmetischen Satze von selbst erhellet, so ist

$$0 = \alpha_k^n + C_1 \alpha_k^{n-1} + C_2 \alpha_k^{n-2} + \ldots + C_{n-1} \alpha_k + C_n,$$

und folglich, wenn man subtrahirt:

$$U = u^n - \alpha_k^n + C_1(u^{n-1} - \alpha_k^{n-1}) + C_2(u^{n-2} - \alpha_k^{n-2}) + \ldots + C_{n-1}(u - \alpha_k),$$

also nach einer bekannten Divisionsregel:

$$\frac{U}{u - \alpha_k}$$

$$\begin{aligned}
= u^{n-1} + \alpha_k u^{n-2} + \alpha_k^2 u^{n-3} + \alpha_k^3 u^{n-4} + \ldots + \alpha_k^{n-2} u + \alpha_k^{n-1} \\
+ C_1 u^{n-2} + C_1 \alpha_k u^{n-3} + C_1 \alpha_k^2 u^{n-4} + \ldots + C_1 \alpha_k^{n-3} u + C_1 \alpha_k^{n-2} \\
+ C_2 u^{n-3} + C_2 \alpha_k u^{n-4} + \ldots + C_2 \alpha_k^{n-4} u + C_2 \alpha_k^{n-3} \\
+ C_3 u^{n-4} + \ldots + C_3 \alpha_k^{n-5} u + C_3 \alpha_k^{n-4} \\
\text{u. s. w.} \\
+ C_{n-2} u + C_{n-2} \alpha_k \\
+ C_{n-1},
\end{aligned}$$

und folglich

$$\int_0^1 \frac{U \partial u}{u - \alpha_k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \\
&+ \frac{1}{n-1}(\alpha_k + C_1) \\
&+ \frac{1}{n-2}(\alpha_k^2 + C_1 \alpha_k + C_2) \\
&+ \frac{1}{n-3}(\alpha_k^3 + C_1 \alpha_k^2 + C_2 \alpha_k + C_3) \\
&\quad \text{u. s. w} \\
&+ \frac{1}{2}(\alpha_k^{n-2} + C_1 \alpha_k^{n-3} + C_2 \alpha_k^{n-4} + C_3 \alpha_k^{n-5} + \ldots + C_{n-3} \alpha_k + C_{n-2}) \\
&+ \frac{1}{1}(\alpha_k^{n-1} + C_1 \alpha_k^{n-2} + C_2 \alpha_k^{n-3} + C_3 \alpha_k^{n-4} + \ldots + C_{n-3} \alpha_k^2 + C_{n-2} \alpha_k + C_{n-1})
\end{aligned}$$

oder

$$\int_0^1 \frac{U \partial u}{u - \alpha_k}$$

$$=\frac{1}{1}(\alpha_k^{n-1}+C_1\alpha_k^{n-2}+C_2\alpha_k^{n-3}+C_3\alpha_k^{n-4}+\ldots+C_{n-3}\alpha_k^2+C_{n-2}\alpha_k+C_{n-1})$$

$$+\frac{1}{2}(\alpha_k^{n-2}+C_1\alpha_k^{n-3}+C_2\alpha_k^{n-4}+\ldots+C_{n-4}\alpha_k^2+C_{n-3}\alpha_k+C_{n-2})$$

$$+\frac{1}{3}(\alpha_k^{n-3}+C_1\alpha_k^{n-4}+\ldots+C_{n-5}\alpha_k^2+C_{n-4}\alpha_k+C_{n-3})$$

$$+\frac{1}{4}(\alpha_k^{n-4}+\ldots+C_{n-6}\alpha_k^2+C_{n-5}\alpha_k+C_{n-4})$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{n-2}(\alpha_k^2+C_1\alpha_k+C_2)$$

$$+\frac{1}{n-1}(\alpha_k+C_1)$$

$$+\frac{1}{n}.$$

Wenn wir nun die Function

$$U=(u-\alpha_1)(u-\alpha_2)(u-\alpha_3)(u-\alpha_4)\ldots(u-\alpha_n)$$
$$=u^n+C_1u^{n-1}+C_2u^{n-2}+\ldots+C_{n-1}u+C_n,$$

natürlich in ihrer zweiten entwickelten Form, mit der unendlichen Reihe

$$u^{-1}+\frac{1}{2}u^{-2}+\frac{1}{3}u^{-3}+\frac{1}{4}u^{-4}+\frac{1}{5}u^{-5}+\ldots.$$

nach bekannten Regeln multipliciren, das Product absteigend nach Potenzen von u ordnen, und den bloss Potenzen von u mit positiven Exponenten, Null eingeschlossen, enthaltenden Theil dieses Products durch U', den bloss Potenzen von u mit negativen Exponenten enthaltenden Theil desselben durch U'' bezeichnen, demzufolge also

$$U(u^{-1}+\frac{1}{2}u^{-2}+\frac{1}{3}u^{-3}+\frac{1}{4}u^{-4}+\frac{1}{5}u^{-5}+\ldots)=U'+U''$$

setzen, so finden wir auf der Stelle, dass der oben entwickelte Werth des bestimmten Integrals

$$\int_0^1\frac{U\partial u}{u-\alpha_k}$$

aus U' hervorgeht, wenn man darin α_k für u setzt; und bezeichnen wir also den Werth von U' für $u=\alpha_k$ durch $\overset{(k)}{U'}$, so ist

$$\int_0^1\frac{U\partial u}{u-\alpha_k}=\overset{(k)}{U'}.$$

Um folglich das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{U\partial u}{u-\alpha_k}$$

zu erhalten, entwickeln wir durch gemeine Multiplication den bloss Potenzen von u mit positiven Exponenten, Null eingeschlossen, enthaltenden Theil des Products

$$U(u^{-1}+\frac{1}{2}u^{-2}+\frac{1}{3}u^{-3}+\frac{1}{4}u^{-4}+\frac{1}{5}u^{-5}+\ldots.)$$

und setzen darin $u=\alpha_k$.

Noch kann man Folgendes bemerken. Wenn man in dem oben entwickelten Ausdrucke von

$$U_k=\frac{U}{u-\alpha_k}$$

für u den Werth α_k setzt, so erhält man als entsprechenden Werth von U_k die Grösse

$$n\alpha_k^{n-1}+(n-1)C_1\alpha_k^{n-2}+(n-2)C_2\alpha_k^{n-3}+\ldots+2C_{n-2}\alpha_k+C_{n-1},$$

und weil nun nach dem Obigen

$$\frac{\partial U}{\partial u}=nu^{n-1}+(n-1)C_1u^{n-2}+(n-2)C_2u^{n-3}+\ldots+2C_{n-2}u+C_{n-1}$$

ist, so erhält man offenbar den Werth, welchen U_k für $u=\alpha_k$ erhält, aus dem Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial u}$, wenn man darin $u=\alpha_k$ setzt. Bezeichnet man also diesen Werth des Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial u}$ der Kürze wegen durch $\frac{\partial \overset{(k)}{U}}{\partial u}$, so ist nach dem Obigen

$$N_k=\frac{\partial \overset{(k)}{U}}{\partial u},$$

und folglich

$$\frac{b-a}{N_k}\int_0^1 \frac{U\partial u}{u-\alpha_k}=(b-a)\frac{\overset{(k)}{U'}}{\frac{\partial \overset{(k)}{U}}{\partial u}}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)\left\{\frac{\overset{(1)}{U'}}{\frac{\partial \overset{(1)}{U}}{\partial u}}A_1 + \frac{\overset{(2)}{U'}}{\frac{\partial \overset{(2)}{U}}{\partial u}}A_2 + \frac{\overset{(3)}{U'}}{\frac{\partial \overset{(3)}{U}}{\partial u}}A_3 + \dots + \frac{\overset{(n)}{U'}}{\frac{\partial \overset{(n)}{U}}{\partial u}}A_n\right\},$$

wodurch jetzt der Werth unsers bestimmten Integrals vollständig entwickelt ist.

§. 8.

Wenn wir im Vorhergehenden

$$u=\frac{1}{2}(v+1),\quad v=2u-1$$

und

$$\beta_1=2\alpha_1-1=2\frac{a_1-a}{b-a}-1=\frac{2a_1}{b-a}-\frac{b+a}{b-a},$$

$$\beta_2=2\alpha_2-1=2\frac{a_2-a}{b-a}-1=\frac{2a_2}{b-a}-\frac{b+a}{b-a},$$

$$\beta_3=2\alpha_3-1=2\frac{a_3-a}{b-a}-1=\frac{2a_3}{b-a}-\frac{b+a}{b-a},$$

$$\beta_4=2\alpha_4-1=2\frac{a_4-a}{b-a}-1=\frac{2a_4}{b-a}-\frac{b+a}{b-a},$$

u. s. w.

$$\beta_n=2\alpha_n-1=2\frac{a_n-a}{b-a}-1=\frac{2a_n}{b-a}-\frac{b+a}{b-a};$$

also

$$\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta_1+1),\ \alpha_2=\frac{1}{2}(\beta_2+1),\ \alpha_3=\frac{1}{2}(\beta_3+1),\dots\ \alpha_n=\frac{1}{2}(\beta_n+1)$$

setzen; so ist, wie man leicht findet:

$$y=\frac{(v-\beta_2)(v-\beta_3)(v-\beta_4)(v-\beta_5)\dots(v-\beta_n)}{(\beta_1-\beta_2)(\beta_1-\beta_3)(\beta_1-\beta_4)(\beta_1-\beta_5)\dots(\beta_1-\beta_n)}A_1$$

$$+\frac{(v-\beta_1)(v-\beta_3)(v-\beta_4)(v-\beta_5)\dots(v-\beta_n)}{(\beta_2-\beta_1)(\beta_2-\beta_3)(\beta_2-\beta_4)(\beta_2-\beta_5)\dots(\beta_2-\beta_n)}A_2$$

$$+\frac{(v-\beta_1)(v-\beta_2)(v-\beta_4)(v-\beta_5)\dots(v-\beta_n)}{(\beta_3-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)(\beta_3-\beta_4)(\beta_3-\beta_5)\dots(\beta_3-\beta_n)}A_3$$

$$+\frac{(v-\beta_1)(v-\beta_2)(v-\beta_3)(v-\beta_5)\dots(v-\beta_n)}{(\beta_4-\beta_1)(\beta_4-\beta_2)(\beta_4-\beta_3)(\beta_4-\beta_5)\dots(\beta_4-\beta_n)}A_4$$

u. s. w.

$$+\frac{(v-\beta_1)(v-\beta_2)(v-\beta_3)(v-\beta_4)\ldots(v-\beta_{n-1})}{(\beta_n-\beta_1)(\beta_n-\beta_2)(\beta_n-\beta_3)(\beta_n-\beta_4)\ldots(\beta_n-\beta_{n-1})}A_n;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\mathfrak{A}_1=(\beta_1-\beta_2)(\beta_1-\beta_3)(\beta_1-\beta_4)(\beta_1-\beta_5)\ldots(\beta_1-\beta_n),$$
$$\mathfrak{A}_2=(\beta_2-\beta_1)(\beta_2-\beta_3)(\beta_2-\beta_4)(\beta_2-\beta_5)\ldots(\beta_2-\beta_n),$$
$$\mathfrak{A}_3=(\beta_3-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)(\beta_3-\beta_4)(\beta_3-\beta_5)\ldots(\beta_3-\beta_n),$$
$$\mathfrak{A}_4=(\beta_4-\beta_1)(\beta_4-\beta_2)(\beta_4-\beta_3)(\beta_4-\beta_5)\ldots(\beta_4-\beta_n),$$
u. s. w.
$$\mathfrak{A}_n=(\beta_n-\beta_1)(\beta_n-\beta_2)(\beta_n-\beta_3)(\beta_n-\beta_4)\ldots(\beta_n-\beta_{n-1})$$

und

$$V_1=(v-\beta_2)(v-\beta_3)(v-\beta_4)(v-\beta_5)\ldots(v-\beta_n),$$
$$V_2=(v-\beta_1)(v-\beta_3)(v-\beta_4)(v-\beta_5)\ldots(v-\beta_n),$$
$$V_3=(v-\beta_1)(v-\beta_2)(v-\beta_4)(v-\beta_5)\ldots(v-\beta_n),$$
$$V_4=(v-\beta_1)(v-\beta_2)(v-\beta_3)(v-\beta_5)\ldots(v-\beta_n),$$
u. s. w.
$$V_n=(v-\beta_1)(v-\beta_2)(v-\beta_3)(v-\beta_4)\ldots(v-\beta_{n-1})$$

setzen, wo

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4,\ldots\mathfrak{A}_n$$

die Werthe sind, welche respective

$$V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4,\ldots V_n$$

erhalten, wenn man in diesen Grössen für v respective

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ldots\beta_n$$

setzt:

$$y=\frac{A_1}{\mathfrak{A}_1}V_1+\frac{A_2}{\mathfrak{A}_2}V_2+\frac{A_3}{\mathfrak{A}_3}V_3+\frac{A_4}{\mathfrak{A}_4}V_4+\ldots+\frac{A_n}{\mathfrak{A}_n}V_n;$$

also, weil nach dem Obigen

$$\partial x=(b-a)\partial u=\frac{1}{2}(b-a)\partial v$$

ist:

$$y\partial x$$
$$=\frac{1}{2}(b-a)\left\{\frac{A_1}{\mathfrak{A}_1}V_1+\frac{A_2}{\mathfrak{A}_2}V_2+\frac{A_3}{\mathfrak{A}_3}V_3+\frac{A_4}{\mathfrak{A}_4}V_4+\ldots+\frac{A_n}{\mathfrak{A}_n}V_n\right\}\partial v.$$

Weil nun aber nach dem Obigen für $x=a$, $x=b$ respective $u=0$, $u=1$, also $v=-1$, $v=+1$ ist, so ist:

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b y\partial x = \frac{A_1}{\mathfrak{A}_1}\int_{-1}^{+1} V_1\partial v + \frac{A_2}{\mathfrak{A}_2}\int_{-1}^{+1} V_2\partial v + \frac{A_3}{\mathfrak{A}_3}\int_{-1}^{+1} V_3\partial v \text{ u. s. w. } + \frac{A_n}{\mathfrak{A}_n}\int_{-1}^{+1} V_n\partial v.$$

Setzen wir aber

$$V=(v-\beta_1)(v-\beta_2)(v-\beta_3)(v-\beta_4)\ldots(v-\beta_n),$$

so lässt sich die vorstehende Gleichung auch auf folgende Art ausdrücken:

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b y\partial x = \frac{A_1}{\mathfrak{A}_1}\int_{-1}^{+1}\frac{V\partial v}{v-\beta_1} + \frac{A_2}{\mathfrak{A}_2}\int_{-1}^{+1}\frac{V\partial v}{v-\beta_2} + \frac{A_3}{\mathfrak{A}_3}\int_{-1}^{+1}\frac{V\partial v}{v-\beta_3} \text{ u. s. w. } + \frac{A_n}{\mathfrak{A}_n}\int_{-1}^{+1}\frac{V\partial v}{v-\beta_n},$$

und der Coefficient von A_k in der Entwickelung von

$$\int_a^b y\partial x$$

ist daher im Allgemeinen

$$\frac{b-a}{2\mathfrak{A}_k}\int_{-1}^{+1}\frac{V\partial v}{v-\beta_k}.$$

Denken wir uns nun das Product V absteigend nach Potenzen von v entwickelt, und setzen demzufolge

$$V = v^n + \mathfrak{C}_1 v^{n-1} + \mathfrak{C}_2 v^{n-2} + \ldots + \mathfrak{C}_{n-1} v + \mathfrak{C}_n,$$

wo die Bedeutung der Coefficienten

$$\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2,\ \mathfrak{C}_3, \ldots \mathfrak{C}_{n-1},\ \mathfrak{C}_n$$

nach einem bekannten arithmetischen Satze von selbst erhellet, so ist

$$0 = \beta_k^n + \mathfrak{C}_1 \beta_k^{n-1} + \mathfrak{C}_2 \beta_k^{n-2} + \ldots + \mathfrak{C}_{n-1} \beta_k + \mathfrak{C}_n,$$

und folglich, wenn man subtrahirt:

$$V = v^n - \beta_k^n + \mathfrak{C}_1 (v^{n-1} - \beta_k^{n-1}) + \mathfrak{C}_2 (v^{n-2} - \beta_k^{n-2}) + \ldots + \mathfrak{C}_{n-1} (v - \beta_k),$$

also nach einer bekannten Divisionsregel:

$$\begin{aligned}
\frac{V}{v-\beta_k}
&= v^{n-1} + \beta_k v^{n-2} + \beta_k^2 v^{n-3} + \beta_k^3 v^{n-4} + \ldots + \beta_k^{n-2} v + \beta_k^{n-1} \\
&\quad + \mathfrak{C}_1 v^{n-2} + \mathfrak{C}_1 \beta_k v^{n-3} + \mathfrak{C}_1 \beta_k^2 v^{n-4} + \ldots + \mathfrak{C}_1 \beta_k^{n-3} v + \mathfrak{C}_1 \beta_k^{n-2} \\
&\quad + \mathfrak{C}_2 v^{n-3} + \mathfrak{C}_2 \beta_k v^{n-4} + \ldots + \mathfrak{C}_2 \beta_k^{n-4} v + \mathfrak{C}_2 \beta_k^{n-3} \\
&\quad + \mathfrak{C}_3 v^{n-4} + \ldots + \mathfrak{C}_3 \beta_k^{n-5} v + \mathfrak{C}_3 \beta_k^{n-4} \\
&\qquad \text{u. s. w.} \\
&\quad + \mathfrak{C}_{n-2} v + \mathfrak{C}_{n-2} \beta_k \\
&\quad + \mathfrak{C}_{n-1},
\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} \frac{V \partial v}{v - \beta_k}
&= \frac{1}{n} \{(+1)^n - (-1)^n\} \\
&\quad + \frac{1}{n-1} (\beta_k + \mathfrak{C}_1) \{(+1)^{n-1} - (-1)^{n-1}\} \\
&\quad + \frac{1}{n-2} (\beta_k^2 + \mathfrak{C}_1 \beta_k + \mathfrak{C}_2) \{(+1)^{n-2} - (-1)^{n-2}\} \\
&\quad + \frac{1}{n-3} (\beta_k^3 + \mathfrak{C}_1 \beta_k^2 + \mathfrak{C}_2 \beta_k + \mathfrak{C}_3) \{(+1)^{n-3} - (-1)^{n-3}\} \\
&\qquad \text{u. s. w.} \\
&\quad + \frac{2}{3} (\beta_k^{n-3} + \mathfrak{C}_1 \beta_k^{n-4} + \mathfrak{C}_2 \beta_k^{n-5} + \mathfrak{C}_3 \beta_k^{n-6} + \ldots + \mathfrak{C}_{n-4} \beta_k + \mathfrak{C}_{n-3}) \\
&\quad + \frac{2}{1} (\beta_k^{n-1} + \mathfrak{C}_1 \beta_k^{n-2} + \mathfrak{C}_2 \beta_k^{n-3} + \mathfrak{C}_3 \beta_k^{n-4} + \ldots + \mathfrak{C}_{n-4} \beta_k^3 + \mathfrak{C}_{n-3} \beta_k^2 \\
&\qquad + \mathfrak{C}_{n-2} \beta_k + \mathfrak{C}_{n-1}),
\end{aligned}$$

also, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{V\partial v}{v-\beta_k}$$

$$=\frac{2}{1}(\beta_k^{n-1}+\mathfrak{C}_1\beta_k^{n-2}+\mathfrak{C}_2\beta_k^{n-3}+\mathfrak{C}_3\beta_k^{n-4}+\ldots+\mathfrak{C}_{n-4}\beta_k^3+\mathfrak{C}_{n-3}\beta_k^2$$
$$+\mathfrak{C}_{n-2}\beta_k+\mathfrak{C}_{n-1})$$
$$+\frac{2}{3}(\beta_k^{n-3}+\mathfrak{C}_1\beta_k^{n-4}+\ldots+\mathfrak{C}_{n-6}\beta_k^3+\mathfrak{C}_{n-5}\beta_k^2+\mathfrak{C}_{n-4}\beta_k+\mathfrak{C}_{n-3})$$

u. s. w.

$$+\frac{2}{n-3}(\beta_k^3+\mathfrak{C}_1\beta_k^2+\mathfrak{C}_2\beta_k+\mathfrak{C}_3)$$
$$+\frac{2}{n-1}(\beta_k+\mathfrak{C}_1)$$

oder

$$\int_{-1}^{+1}\frac{V\partial v}{v-\beta_k}$$

$$=\frac{2}{1}(\beta_k^{n-1}+\mathfrak{C}_1\beta_k^{n-2}+\mathfrak{C}_2\beta_k^{n-3}+\mathfrak{C}_3\beta_k^{n-4}+\ldots+\mathfrak{C}_{n-3}\beta_k^2+\mathfrak{C}_{n-2}\beta_k$$
$$+\mathfrak{C}_{n-1})$$
$$+\frac{2}{3}(\beta_k^{n-3}+\mathfrak{C}_1\beta_k^{n-4}+\ldots+\mathfrak{C}_{n-5}\beta_k^2+\mathfrak{C}_{n-4}\beta_k+\mathfrak{C}_{n-3})$$

u. s. w.

$$+\frac{2}{n-2}(\beta_k+\mathfrak{C}_1\beta_k+\mathfrak{C}_2)$$
$$+\frac{2}{n}.$$

Wenn wir nun die Function

$$V=(v-\beta_1)(v-\beta_2)(v-\beta_3)(v-\beta_4)\ldots(v-\beta_n)$$
$$=v^n+\mathfrak{C}_1v^{n-1}+\mathfrak{C}_2v^{n-2}+\ldots+\mathfrak{C}_{n-1}v+\mathfrak{C}_n,$$

natürlich in ihrer zweiten entwickelten Form, mit der unendlichen Reihe

$$v^{-1}+\frac{1}{3}v^{-3}+\frac{1}{5}v^{-5}+\frac{1}{7}v^{-7}+\frac{1}{9}v^{-9}+\ldots$$

nach bekannten Regeln multipliciren, das Product absteigend nach Potenzen von v ordnen, und den bloss Potenzen von v mit positiven Exponenten, Null eingeschlossen, enthaltenden Theil dieses Products durch V', den bloss Potenzen von v mit negativen Exponenten enthaltenden Theil desselben durch V'' bezeichnen, demzufolge also

$$V(v^{-1}+\frac{1}{3}v^{-3}+\frac{1}{5}v^{-5}+\frac{1}{7}v^{-7}+\frac{1}{9}v^{-9}+\ldots)=V'+V''$$

setzen, so finden wir auf der Stelle, dass die Hälfte des oben entwickelten Werths des bestimmten Integrals

$$\int_{-1}^{+1}\frac{V\partial v}{v-\beta_k}$$

aus V' hervorgeht, wenn man darin β_k für v setzt; und bezeichnen wir also den Werth von V' für $v=\beta_k$ durch $\overset{(k)}{V'}$, so ist

$$\int_{-1}^{+1}\frac{V\partial v}{v-\beta_k}=2\overset{(k)}{V'}.$$

Um folglich das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{+1}\frac{V\partial v}{v-\beta_k}$$

zu erhalten, entwickeln wir durch gemeine Multiplication den bloss Potenzen von v mit positiven Exponenten, Null eingeschlossen, enthaltenden Theil des Products

$$V(v^{-1}+\frac{1}{3}v^{-3}+\frac{1}{5}v^{-5}+\frac{1}{7}v^{-7}+\frac{1}{9}v^{-9}+\ldots),$$

setzen darin $v=\beta_k$, und nehmen das Resultat doppelt.

Noch kann man Folgendes bemerken. Wenn man in dem oben entwickelten Ausdrucke von

$$V_k=\frac{V}{v-\beta_k},$$

für v den Werth β_k setzt, so erhält man als entsprechenden Werth von V_k die Grösse

$$n\beta_k^{n-1}+(n-1)\mathfrak{C}_1\beta_k^{n-2}+(n-2)\mathfrak{C}_2\beta_k^{n-3}+\ldots+2\mathfrak{C}_{n-2}\beta_k+\mathfrak{C}_{n-1},$$

und weil nun nach dem Obigen

$$\frac{\partial V}{\partial v}=nv^{n-1}+(n-1)\mathfrak{C}_1v^{n-2}+(n-2)\mathfrak{C}_2v^{n-3}+\ldots+2\mathfrak{C}_{n-2}v+\mathfrak{C}_{n-1}$$

ist, so erhält man offenbar den Werth, welchen V_k für $v=\beta_k$ erhält, aus dem Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial v}$, wenn man darin $v=\beta_k$

setzt. Bezeichnet man also diesen Werth des Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial v}$ der Kürze wegen durch $\frac{\partial \overset{(k)}{V}}{\partial v}$, so ist nach dem Obigen

$$\mathfrak{A}_k = \frac{\partial \overset{(k)}{V}}{\partial v},$$

und folglich

$$\frac{b-a}{2\mathfrak{A}_k}\int_{-1}^{+1}\frac{V\partial v}{v-\beta_k}=(\beta-\alpha)\frac{\overset{(k)}{V'}}{\frac{\partial \overset{(k)}{V}}{\partial v}}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\int_a^b y\partial x=(b-a)\left\{\frac{\overset{(1)}{V'}}{\frac{\partial \overset{(1)}{V}}{\partial v}}A_1+\frac{\overset{(2)}{V'}}{\frac{\partial \overset{(2)}{V}}{\partial v}}A_2+\frac{\overset{(3)}{V'}}{\frac{\partial \overset{(3)}{V}}{\partial v}}A_3+\ldots+\frac{\overset{(n)}{V'}}{\frac{\partial \overset{(n)}{V}}{\partial v}}A_n\right\}.$$

Dass die hier entwickelte Methode vor der im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Methode rücksichtlich der Kürze der Berechnung der Coefficienten von

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ldots A_n$$

in dem Ausdruck von $\int_a^b y\partial x$ Vorzüge hat, wird sich späterhin zeigen; für jetzt wollen wir uns darüber nicht weiter verbreiten.

§. 9.

Wir wollen jetzt annehmen, dass den Werthen

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots a_n,\ a_{n+1}$$

von x die Werthe

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ldots A_{n+1}$$

entsprechen, so dass wir uns also die beiden vorher betrachteten Reihen einander entsprechender Werthe von x und y um zwei Glieder, jede der beiden Reihen am Anfange und am Ende um ein Glied, vermehrt denken, und daher diese beiden Reihen zusammenstimmender Werthe von x und y etwas grössere Intervalle wie vorher umfassen, und setzen demzufolge jetzt

$$y=$$
$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_{n+1})}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)(a_0-a_4)\ldots(a_0-a_{n+1})}A_0$$
$$+\frac{(x-a_0)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_{n+1})}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)\ldots(a_1-a_{n+1})}A_1$$
$$+\frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_{n+1})}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)\ldots(a_2-a_{n+1})}A_2$$
$$+\frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_{n+1})}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)\ldots(a_3-a_{n+1})}A_3,$$
u. s. w.
$$+\frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_{n+1}-a_0)(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)(a_{n+1}-a_3)\ldots(a_{n+1}-a_n)}A_{n+1},$$

wodurch im Allgemeinen natürlich eine etwas grössere Genauigkeit wie vorher bei der Bestimmung von x erreicht werden wird. Indem wir nun aber unter dieser Voraussetzung uns wieder mit der Ermittelung des Werthes des Integrals

$$\int_a^b y\partial x$$

beschäftigen werden, nehmen wir ganz wie vorher bloss an, dass nur die Werthe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots a_n$$

von x innerhalb des durch die Gränzen a, b unsers Integrals bestimmten Intervalles liegen.

Auf ganz ähnliche Art wie in §. 6. setzen wir jetzt:

$$a_0=a-1\frac{b-a}{n-1}=a-1\frac{\omega}{n-1},$$

$$a_1=a \qquad\qquad =a,$$

$$a_2=a+1\frac{b-a}{n-1}=a+1\frac{\omega}{n-1},$$

$$a_3=a+2\frac{b-a}{n-1}=a+2\frac{\omega}{n-1},$$

$$a_4=a+3\frac{b-a}{n-1}=a+3\frac{\omega}{n-1},$$

u. s. w.

$$a_n=a+(n-1)\frac{b-a}{n-1}=a+(n-1)\frac{\omega}{n-1},$$

$$a_{n+1}=a+n\frac{b-a}{n-1}=a+n\frac{\omega}{n-1},$$

oder, wenn wir wieder $\overline{\omega}$ für $\frac{\omega}{n-1}$ schreiben:

$$a_0=a-1\,\overline{\omega},$$
$$a_1=a,$$
$$a_2=a+1\,\overline{\omega},$$
$$a_3=a+2\,\overline{\omega},$$
$$a_4=a+3\,\overline{\omega},$$
u. s. w.
$$a_n=a+(n-1)\,\overline{\omega},$$
$$a_{n+1}=a+n\,\overline{\omega}.$$

Ein allgemeines Glied von y ist nach dem Obigen:

$$\frac{(x-a_0)(x-a_1)\,..\,(x-a_{\mu-1})(x-a_{\mu+1})\,...\,(x-a_{n+1})}{(a_\mu-a_0)(a_\mu-a_1)\,..\,(a_\mu-a_{\mu-1})(a_\mu-a_{\mu+1})\,...\,(a_\mu-a_{n+1})}A_\mu.$$

Der Nenner dieses allgemeinen Gliedes ist unter der so eben gemachten Voraussetzung rücksichtlich der Grössen a_0, a_1, a_2, a_3, ... a_{n+1} offenbar:

$$\mu\overline{\omega}.(\mu-1)\overline{\omega}.(\mu-2)\overline{\omega}\,..\,1\overline{\omega}.-1\,\overline{\omega}.-2\,\overline{\omega}\,.-(n-\mu+1)\,\overline{\omega}$$
$$=(-1)^{n-\mu+1}.1.2.3\,..\,\mu.1.2.3\,..\,(n-\mu+1)\,\overline{\omega}^{n+1},$$

und der Zähler ist, wenn wir

$$u=x-a$$

setzen:

$$(u+1\overline{\omega})\,u\,(u-1\overline{\omega})\,..\,(u-(\mu-2)\,\overline{\omega})\,(u-\mu\overline{\omega})\,..\,(u-n\overline{\omega}).$$

Also ist das obige allgemeine Glied von y:

$$(-1)^{n-\mu+1}.\frac{(u+1\overline{\omega})\,u\,(u-1\overline{\omega})\,..\,(u-(\mu-2)\,\overline{\omega})\,(u-\mu\overline{\omega})\,..\,(u-n\overline{\omega})}{1.2.3\,..\,\mu.1.2.3\,..\,(n-\mu+1)\,\overline{\omega}^{n+1}}.$$

Weil nun $\partial x=\partial u$ und für $x=a$, $x=b$ respective $u=0$, $u=b-a=\omega$ ist, so ist, wenn wir jetzt

$$\mathfrak{B}_\mu=\frac{(-1)^{n-\mu+1}}{1.2.3\,..\,\mu.1.2.3\,..\,(n-\mu+1)}$$

und

$$\mathfrak{U}_\mu=\int_0^\omega(u+1\overline{\omega})\,u\,(u-1\overline{\omega})\,..\,(u-(\mu-2)\overline{\omega})\,(u-\mu\overline{\omega})\,..\,(u-n\overline{\omega})\,\partial u$$

setzen, das allgemeine Glied von

$$\int_a^b y\partial x$$

offenbar

$$\frac{\mathfrak{B}_\mu \mathfrak{U}_\mu}{\varpi^{n+1}} A_\mu.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$(u+1\varpi)u(u-1\varpi)\,..\,(u-(\mu-2)\varpi)(u-\mu\varpi)\,..\,(u-n\varpi)$$

$$=\varpi^{n+1}\frac{\left(\frac{u}{\varpi}+1\right)\frac{u}{\varpi}\left(\frac{u}{\varpi}-1\right)\left(\frac{u}{\varpi}-2\right)\,..\left(\frac{u}{\varpi}-n\right)}{\frac{u}{\varpi}-(\mu-1)},$$

also, wenn man

$$\frac{u}{\varpi}=(n-1)v,\; u=(n-1)\varpi v=\omega v$$

setzt:

$$(u+1\varpi)u(u-1\varpi)\,..\,(u-(\mu-2)\varpi)(u-\mu\varpi)\,..\,(u-n\varpi)$$

$$=\varpi^{n+1}\frac{((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)\,..\,((n-1)v-n)}{(n-1)v-(\mu-1)}$$

und weil nun $\partial u=\omega\partial v$ und für $u=0$, $u=\omega$ respective $v=0$, $=1$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$\mathfrak{V}_\mu=\int_0^1\frac{((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)\,..\,((n-1)v-n)}{(n-1)v-(\mu-1)}\partial v$$

gesetzt wird, offenbar

$$\mathfrak{U}_\mu=\omega\,\varpi^{n+1}\mathfrak{V}_\mu.$$

Also ist nach dem Obigen von

$$\int_a^b y\partial x$$

das allgemeine Glied:

$$\omega\,\mathfrak{B}_\mu\mathfrak{V}_\mu A_\mu.$$

Setzen wir jetzt ferner

$$2v-1=w,\quad v=\frac{1}{2}(w+1);$$

so ist

$$(n-1)v+1=\frac{(n-1)w+(n+1)}{2},$$

$$(n-1)v=\frac{(n-1)w+(n-1)}{2},$$

$$(n-1)v-1=\frac{(n-1)w+(n-3)}{2},$$

$$(n-1)v-2=\frac{(n-1)w+(n-5)}{2},$$

u. s. w.

$$(n-1)v-(n-3)=\frac{(n-1)w-(n-5)}{2},$$

$$(n-1)v-(n-2)=\frac{(n-1)w-(n-3)}{2},$$

$$(n-1)v-(n-1)=\frac{(n-1)w-(n-1)}{2},$$

$$(n-1)v-n=\frac{(n-1)w-(n+1)}{2}$$

und

$$(n-1)v-(\mu-1)=\frac{(n-1)w+(n-2\mu+1)}{2}$$

Wenn also n gerade ist, so ist

$$((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)\,..\,((n-1)v-n)$$

$$=\frac{(n-1)w+(n+1)}{2}\cdot\frac{(n-1)w+(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-1)w+(n-3)}{2}\,..\,\frac{(n-1)w+1}{2}$$

$$\times\frac{(n-1)w-(n+1)}{2}\cdot\frac{(n-1)w-(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-1)w-(n-3)}{2}\,..\,\frac{(n-1)w-1}{2}$$

$$=\frac{1}{2^{n+2}}((n-1)^2w^2-(n+1)^2)((n-1)^2w^2-(n-1)^2)\,..\,((n-1)^2w^2-1^2);$$

und wenn n ungerade ist, so ist

$$((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)(v-1)((n-1)v-2)\ldots((n-1)v-n)$$

$$=\frac{(n-1)w+(n+1)}{2}\cdot\frac{(n-1)w+(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-1)w+(n-3)}{2}\cdots\frac{(n-1)w+2}{2}\cdot\frac{(n-1)w}{2}$$

$$\times\frac{(n-1)w-(n+1)}{2}\cdot\frac{(n-1)w-(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-1)w-(n-3)}{2}\cdots\frac{(n-1)w-2}{2}$$

$$=\frac{1}{2^{n+2}}((n-1)^2w^2-(n+1)^2)((n-1)^2w^2-(n-1)^2)\ldots((n-1)^2w^2-2^2)(n-1)w.$$

Setzen wir folglich der Kürze wegen, jenachdem n gerade oder ungerade ist:

$$\mathfrak{W}_\mu=\begin{cases}\dfrac{((n-1)^2w^2-(n+1)^2)((n-1)^2w^2-(n-1)^2)\ldots((n-1)^2w^2-1^2)}{(n-1)^2w^2-(n-2\mu+1)^2}\\[2ex]\dfrac{((n-1)^2w^2-(n+1)^2)((n-1)^2w^2-(n-1)^2)\ldots((n-1)^2w^2-2^2)(n-1)w}{(n-1)^2w^2-(n-2\mu+1)^2}\end{cases},$$

so ist offenbar

$$\frac{((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)\ldots((n-1)v-n)}{(n-1)v-(\mu-1)}$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}((n-1)w-(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu;$$

und weil nun $\partial v=\frac{1}{2}\partial w$ und für $v=0$, $v=1$ respective $w=-1$, $w=+1$ ist, so ist nach dem Obigen offenbar

$$\mathfrak{V}_\mu=\frac{1}{2^{n+2}}\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu\partial w.$$

Also ist das allgemeine Glied von

$$\int_a y\partial x$$

nach dem Obigen:

$$\frac{1}{2^{n+2}}\,\omega\,\mathfrak{B}_\mu A_\mu\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu\partial w.$$

Die beiden Fälle, wenn $\mu=0$ und $\mu=n+1$ ist, müssen nun noch besonders betrachtet werden, wovon die Nothwendigkeit leicht aus dem Vorhergehenden von selbst erhellen wird.

Das erste Glied von y ist

$$\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\,..\,(x-a_{n+1})}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)(a_0-a_4)\,..\,(a_0-a_{n+1})}A_0.$$

Der Nenner dieses Gliedes ist

$$\begin{aligned}&-1\varpi.-2\varpi.-3\varpi.-4\varpi\,...-(n+1)\varpi\\&=(-1)^{n+1}.1.2.3\,..\,(n+1)\varpi^{n+1};\end{aligned}$$

und der Zähler ist, wenn wieder

$$u=x-a$$

gesetzt wird:

$$u(u-1\varpi)(u-2\varpi)(u-3\varpi)\,..\,(u-n\varpi).$$

Also ist das obige erste Glied von y:

$$(-1)^{n+1}.\frac{u(u-1\varpi)(u-2\varpi)(u-3\varpi)\,..\,(u-n\varpi)}{1.2.3\,..\,(n+1)\varpi^{n+1}}A_0.$$

Weil nun $\partial x=\partial u$ und für $x=a$, $x=b$ respective $u=0$, $u=b-a=\omega$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$\mathfrak{B}_0=\frac{(-1)^{n+1}}{1.2.3..(n+1)}$$

und

$$\mathfrak{U}_0=\int_0^\omega u(u-1\varpi)(u-2\varpi)(u-3\varpi)\,..\,(u-n\varpi)\partial u$$

gesetzt wird, das erste Glied von

$$\int_a^b y\partial x$$

offenbar:

$$\frac{\mathfrak{B}_0\mathfrak{U}_0}{\varpi^{n+1}}A_0.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}&u(u-1\varpi)(u-2\varpi)(u-3\varpi)\,..\,(u-n\varpi)\\&=\varpi^{n+1}\frac{\left(\frac{u}{\varpi}+1\right)\frac{u}{\varpi}\left(\frac{u}{\varpi}-1\right)\left(\frac{u}{\varpi}-2\right)\,..\,\left(\frac{u}{\varpi}-n\right)}{\frac{u}{\varpi}+1},\end{aligned}$$

also, wenn man:

$$\frac{u}{\overline{\omega}}=(n-1)v, u=(n-1)\overline{\omega}v=\omega v$$

setzt:

$$u(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})(u-3\overline{\omega})..(u-n\overline{\omega})$$

$$=\overline{\omega}^{n+1}\frac{((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)..((n-1)v-n)}{(n-1)v+1},$$

und weil nun $\partial u=\omega\partial v$ und für $u=0$, $u=\omega$ respective $v=0$, $v=1$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$\mathfrak{V}_0=\int_0^1\frac{((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)..((n-1)v-n)}{(n-1)v+1}\partial v$$

gesetzt wird, offenbar

$$\mathfrak{U}_0=\omega\overline{\omega}^{n+1}\mathfrak{V}_0.$$

Also ist nach dem Obigen von

$$\int_a^b y\partial x$$

das erste Glied

$$\omega\mathfrak{R}_0\,\mathfrak{V}_0\,A_0,$$

wo $\mathfrak{R}_0$ seinen obigen Werth hat.

Diese Rechnung noch weiter fortzuführen, ist unnöthig, weil die fernere Rechnung ganz unter dem obigen allgemeinen Falle enthalten ist.

Das letzte Glied von y ist nach dem Obigen

$$\frac{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)..(x-a_n)}{(a_{n+1}-a_0)(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)(a_{n+1}-a_3)..(a_{n+1}-a_n)}A_{n+1}.$$

Der Nenner dieses Gliedes ist

$$(n+1)\overline{\omega}.n\overline{\omega}.(n-1)\overline{\omega}...1\overline{\omega}$$

$$=(-1)^0.1.2.3..(n+1)\overline{\omega}^{n+1},$$

und der Zähler ist, wenn wieder

$$u=x-a$$

gesetzt wird:

$$(u+1\overline{\omega})u(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})...(u-(n-1)\overline{\omega}).$$

Also ist das obige letzte Glied von y:

$$(-1)^0.\frac{(u+1\overline{\omega})u(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})..(u-(n-1)\overline{\omega})}{1.2.3..(n+1)\overline{\omega}^{n+1}}A_{n+1}.$$

Weil nun $\partial x=\partial u$ und für $x=a$, $x=b$ respective $u=0$, $u=b-a=\omega$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$\mathfrak{K}_{n+1}=\frac{(-1)^0}{1.2.3.\,(n+1)}$$

und

$$\mathfrak{U}_{n+1}=\int_0^\omega(u+1\overline{\omega})u(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})..(u-(n-1)\overline{\omega})\partial u$$

gesetzt wird, das letzte Glied von

$$\int_a^b y\partial x$$

offenbar

$$\frac{\mathfrak{K}_{n+1}\mathfrak{U}_{n+1}}{\overline{\omega}^{n+1}}A_{n+1}.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$(u+1\overline{\omega})u(u-1\overline{\omega})(u-2\overline{\omega})..(u-(n-1)\overline{\omega})$$

$$=\overline{\omega}^{n+1}\frac{\left(\frac{u}{\overline{\omega}}+1\right)\frac{u}{\overline{\omega}}\left(\frac{u}{\overline{\omega}}-1\right)\left(\frac{u}{\overline{\omega}}-2\right)..\left(\frac{u}{\overline{\omega}}-n\right)}{\frac{u}{\overline{\omega}}-n},$$

also, wenn man

$$\frac{u}{\overline{\omega}}=(n-1)v,u=(n-1)\overline{\omega}v=\omega v$$

setzt:

$$(u+1\overline{\omega})u(u-1\overline{\omega})(n-2\overline{\omega})..(u-(n-1)\overline{\omega})$$

$$=\overline{\omega}^{n+1}\frac{((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)..((n-1)v-n)}{(n-1)v-n},$$

und weil nun $\partial u=\omega\partial v$ und für $u=0$, $u=\omega$ respective $v=0$, $v=1$ ist, so ist, wenn der Kürze wegen

$$\mathfrak{V}_{n+1}=\int_0^1\frac{((n-1)v+1)(n-1)v((n-1)v-1)((n-1)v-2)..((n-1)v-n)}{(n-1)v-n}\partial v$$

gesetzt wird, offenbar

$$\mathfrak{U}_{n+1} = \omega\,\overline{\omega}^{n+1}\,\mathfrak{V}_{n+1}.$$

Also ist nach dem Obigen von

$$\int_a^b y\partial x$$

das letzte Glied

$$\omega \mathfrak{B}_{n+1} \mathfrak{V}_{n+1} A_{n+1},$$

wo $\mathfrak{B}_{n+1}$ seinen obigen Werth hat.

Von jetzt an ist die Rechnung wieder ganz unter dem obigen allgemeinen Falle enthalten, und dieselbe braucht daher nicht weiter fortgeführt zu werden.

Nehmen wir nun alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich zur Berechnung des $(\mu+1)$sten Gliedes von

$$\int_a^b y\partial x$$

die folgende allgemeine Regel:

Man setze

$$\mathfrak{B}_\mu = \frac{(-1)^{n-\mu+1}}{1.2.3..\mu.1.2.3..(n-\mu+1)}$$

und lege in den Fällen, wenn $\mu=0$ und $\mu=n+1$ ist, dem Nenner dieses Bruchs jederzeit den Werth $1.2.3..(n+1)$ bei. Hierauf setze man, jenachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist,

$$\mathfrak{W}_\mu = \begin{cases} \dfrac{((n-1)^2w^2-(n+1)^2)((n-1)^2w^2-(n-1)^2)..((n-1)^2w^2-1^2)}{(n-1)^2w^2-(n-2\mu+1)^2} \\ \dfrac{((n-1)^2w^2-(n+1)^2)((n-1)^2w^2-(n-1)^2)..((n-1)^2w^2-2^2)(n-1)w}{(n-1)^2w^2-(n-2\mu+1)^2}, \end{cases}$$

und berechne das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{+1} ((n-1)w-(n-2\mu+1))\,\mathfrak{W}_\mu \partial w,$$

was nie die geringste Schwierigkeit hat, da, wie aus dem Obigen sich ganz von selbst ergiebt, $\mathfrak{W}_\mu$ immer eine ganze rationale algebraische Function von w ist. Dann ist

$$\frac{1}{2^{n+2}}\,\omega\,\mathfrak{B}_\mu A_\mu \int_{-1}^{+1} ((n-1)w-(n-2\mu+1))\,\mathfrak{W}_\mu \partial w$$

das gesuchte $(\mu+1)$ste Glied des bestimmten Integrals

$$\int_a^b y\partial x\,,$$

und folglich

$$\int_a^b y\partial x=\frac{1}{2^{n+2}}\,\omega\,\mathfrak{B}_0 A_0\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n+1))\,\mathfrak{W}_0\partial w$$

$$+\frac{1}{2^{n+2}}\,\omega\,\mathfrak{B}_1\,A_1\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-1))\,\mathfrak{W}_1\partial w$$

$$+\frac{1}{2^{n+2}}\,\omega\,\mathfrak{B}_2\,A_2\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-3))\,\mathfrak{W}_2\partial w$$

$$+\frac{1}{2^{n+2}}\,\omega\,\mathfrak{B}_3\,A_3\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-5))\,\mathfrak{W}_3\partial w$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{2^{n+2}}\,\omega\,\mathfrak{B}_{n+1}A_{n+1}\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-(2n+1))\,\mathfrak{W}_{n+1}\partial w,$$

wodurch also der Werth unsers bestimmten Integrals näherungsweise gefunden ist.

Wir wollen jetzt die beiden Glieder

$$\frac{1}{2^{n+2}}\,\omega\,\mathfrak{B}_\mu\,A_\mu\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\,\mathfrak{W}_\mu\partial w,$$

$$\frac{1}{2^{n+2}}\,\omega\,\mathfrak{B}_\nu\,A_\nu\int_{-1}^{+1}((n-1)\,w-(n-2\,\nu+1))\,\mathfrak{W}_\nu\,\partial w$$

betrachten, indem wir annehmen, dass $\mu+\nu=n+1$ sei, so dass diese beiden Glieder gleich weit vom Anfange und vom Ende abstehen.

Weil $n=\mu+\nu-1$ ist, so ist

$$n-2\mu+1=\mu+\nu-1-2\mu+1=\nu-\mu,$$
$$n-2\nu+1=\mu+\nu-1-2\nu+1=\mu-\nu$$

und folglich nach dem Obigen offenbar

$$\mathfrak{W}_\mu=\mathfrak{W}_\nu.$$

Also ist

$$((n-1)w-(n-2\nu+1))\mathfrak{W}_\nu\partial w=((n-1)w-(\mu-\nu))\mathfrak{W}_\mu\partial w$$
$$=((n-1)w+(\nu-\mu))\mathfrak{W}_\mu\partial w,$$

d. i.

$$((n-1)w-(n-2\nu+1))\mathfrak{W}_\nu\partial w=((n-1)w+(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu\partial w.$$

Setzen wir nun $w=-w'$, also $\partial w=-\partial w'$, so ist, wie leicht aus dem Obigen erhellen wird,

$$((n-1)w-(n-2\nu+1))\mathfrak{W}_\nu\partial w=\pm((n-1)w'-(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu\partial w',$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, und folglich überhaupt

$$((n-1)w-(n-2\nu+1))\mathfrak{W}_\nu\partial w=(-1)^n((n-1)w'-(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu\partial w'.$$

Weil nun für $w=-1$, $w=+1$ respective $w'=+1$, $w'=-1$ ist, so ist

$$\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\nu+1))\mathfrak{W}_\nu\partial w$$
$$=(-1)^n\int_{+1}^{-1}((n-1)w'-(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu\partial w'$$

oder, was Dasselbe ist,

$$\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\nu+1))\mathfrak{W}_\nu\partial w$$
$$=-(-1)^n\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu\partial w.$$

Daher sind die Grössen, in welche in dem $(\mu+1)$sten und $(\nu+1)$sten Gliede A_μ und A_ν multiplicirt sind, nach dem Obige

$$\frac{1}{2^{n+2}}\varpi\mathfrak{B}_\mu\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu\partial w$$

und

$$-(-1)^n\frac{1}{2^{n+2}}\varpi\mathfrak{B}_\nu\int_{-1}^{+1}((n-1)w-(n-2\mu+1))\mathfrak{W}_\mu\partial w.$$

Für $\mu=0$ und $\nu=n+1$ ist nach dem Obigen bekanntlich

$$\mathfrak{B}_\mu=\frac{(-1)^{n+1}}{1.2.3..(n+1)},$$

$$\mathfrak{B}_\nu = \frac{(-1)^{n-(n+1)+1}}{1.2.3..(n+1)};$$

also

$$-(-1)^n \mathfrak{B}_\nu = (-1)^{n+1} \mathfrak{B}_\nu = \frac{(-1)^{n+1}}{1.2.3..(n+1)} = \mathfrak{B}_\mu,$$

so dass also im ersten und letzten Gliede von $\int_a^b y\partial x$ die Coefficienten von A_0 und A_{n+1} nach dem Vorhergehenden offenbar einander gleich sind.

Allgemein ist bekanntlich

$$\mathfrak{B}_\mu = \frac{(-1)^{n-\mu+1}}{1.2.3..\mu.1.2.3..(n-\mu+1)},$$

$$\mathfrak{B}_\nu = \frac{(-1)^{n-\nu+1}}{1.2.3..\nu.1.2.3..(n-\nu+1)};$$

und folglich, weil nach der Voraussetzung $\mu+\nu=n+1$, also

$$n-\mu+1=\nu, n-\nu+1=\mu$$

ist:

$$\mathfrak{B}_\mu = \frac{(-1)^\nu}{1.2.3..\mu.1.2.3..\nu},$$

$$\mathfrak{B}_\nu = \frac{(-1)^\mu}{1.2.3..\mu.1.2.3..\nu};$$

daher ist

$$-(-1)^n \mathfrak{B}_\nu = (-1)^{n+1} \mathfrak{B}_\nu = (-1)^{\mu+\nu} \mathfrak{B}_\nu = \frac{(-1)^{2\mu+\nu}}{1.2.3..\mu.1.2.3..\nu}$$

$$= \frac{(-1)^{2\mu}.(-1)^\nu}{1.2.3..\mu.1.2.3..\nu} = \frac{(-1)^\nu}{1.2.3..\mu.1.2.3..\nu},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$-(-1)^n \mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{B}_\mu,$$

woraus man also sieht, dass unter den gemachten Voraussetzungen überhaupt in dem $(\mu+1)$sten und $(\nu+1)$sten Gliede von $\int_a^b y\partial x$ die Grössen A_μ und A_ν gleiche Coefficienten haben.

Man gelangt also hierdurch auch jetzt zu dem allgemeinen Resultate, dass in dem obigen Ausdrucke von $\int_a^b y\partial x$ die Grösse

A_μ in den vom ersten und letzten Gliede gleich weit abstehenden Gliedern mit gleichen Coefficienten behaftet ist, wodurch natürlich die numerische Entwickelung der Coefficienten von

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots A_{n+1}$$

in dem obigen allgemeinen Ausdrucke von $\int_a^b y\partial x$ wesentlich abgekürzt wird, und daher das in Rede stehende Resultat auch jetzt als ein für die numerische Berechnung dieser Coefficienten sehr wichtiges bezeichnet werden muss.

Die in §. 7. und §. 8. entwickelte Methode, welche ganz allgemein ist, findet eben deshalb auch im vorliegenden Falle Anwendung, wenn man nur für die dort gebrauchten allgemeinen Symbole die in diesem Paragraphen gebrauchten Zeichen setzt.

§. 10.

Wenn wir uns bei der näherungsweisen Ermittelung des Werths des bestimmten Integrals

$$\int_a^b y\partial x$$

der in §. 6. entwickelten Methode bedienen, so werden der Rechnung die folgenden einander entsprechenden Werthe von x und y zum Grunde gelegt:

$$\begin{array}{ll}
x = a_1 = a & y = A_1; \\
 = a_2 = a + \frac{1}{n-1}(b-a), & = A_2; \\
 = a_3 = a + \frac{2}{n-1}(b-a), & = A_3; \\
 = a_4 = a + \frac{3}{n-1}(b-a), & = A_4; \\
\text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \\
 = a_n = a + \frac{n-1}{n-1}(b-a), & = A_n;
\end{array}$$

und wenn nun

$$\overset{n}{T}_1,\ \overset{n}{T}_2,\ \overset{n}{T}_3,\ \overset{n}{T}_4, \ldots \overset{n}{T}_n$$

gewisse numerische, d. h. nur von n abhängende Coefficienten bezeichnen, so hat man nach §. 6. für

$$\int_a^b y\partial x$$

einen Ausdruck von der folgenden Form:

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)(\overset{n}{T}_1 A_1 + \overset{n}{T}_2 A_2 + \overset{n}{T}_3 A_3 + \ldots + \overset{n}{T}_n A_n).$$

Wenn nun aber n eine gerade Zahl ist, so ist, wie wir aus §. 6. wissen:

$$\overset{n}{T}_1 = \overset{n}{T}_n,$$

$$\overset{n}{T}_2 = \overset{n}{T}_{n-1},$$

$$\overset{n}{T}_3 = \overset{n}{T}_{n-2},$$

u. s. w.

$$\overset{n}{T}_{\frac{1}{2}n} = \overset{n}{T}_{\frac{1}{2}n+1}$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen überhaupt

$$A_\lambda + A_\mu = A_{\lambda,\mu}$$

setzen:

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)\{\overset{n}{T}_1 A_{1,n} + \overset{n}{T}_2 A_{2,n-1} + \overset{n}{T}_3 A_{3,n-2} + \ldots + \overset{n}{T}_{\frac{1}{2}n} A_{\frac{1}{2}n,\frac{1}{2}n+1}\}.$$

Wenn dagegen n eine ungerade Zahl ist, so ist nach §. 6.

$$\overset{n}{T}_1 = \overset{n}{T}_n,$$

$$\overset{n}{T}_2 = \overset{n}{T}_{n-1},$$

$$\overset{n}{T}_3 = \overset{n}{T}_{n-2},$$

u. s. w.

$$\overset{n}{T}_{\frac{1}{2}(n-1)} = \overset{n}{T}_{\frac{1}{2}(n-1)+2}$$

und folglich, wenn wir dieselbe abkürzende Bezeichnung wie vorher anwenden:

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)\{\overset{n}{T}_1 A_{1,n} + \overset{n}{T}_2 A_{2,n-1} + \overset{n}{T}_3 A_{3,n-2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \overset{n}{T}_{\frac{1}{2}(n-1)} A_{\frac{1}{2}(n-1),\frac{1}{2}(n+3)} + \overset{n}{T}_{\frac{1}{2}(n+1)} A_{\frac{1}{2}(n+1)}\}.$$

Wenn wir uns bei der näherungsweisen Ermittelung des Werths des bestimmten Integrals

$$\int_a^b y\partial x$$

der in §. 9. entwickelten Methode bedienen, so werden der Rechnung die folgenden einander entsprechenden Wdrthe von x und y zum Grunde gelegt:

$$\begin{array}{ll}
x = a_0 = a - \frac{1}{n-1}(b-a), & y = A_0; \\
 = a_1 = a, & = A_1; \\
 = a_2 = a + \frac{1}{n-1}(b-a), & = A_2; \\
 = a_3 = a + \frac{2}{n-1}(b-a), & = A_3; \\
 = a_4 = a + \frac{3}{n-1}(b-a), & = A_4; \\
\text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \\
 = a_n = a + \frac{n-1}{n-1}(b-a), & = A_n; \\
 = a_{n+1} = a + \frac{n}{n-1}(b-a), & = A_{n+1};
\end{array}$$

und wenn nun

$$\overset{n}{\mathfrak{T}}_0,\ \overset{n}{\mathfrak{T}}_1,\ \overset{n}{\mathfrak{T}}_2,\ \overset{n}{\mathfrak{T}}_3,\ \overset{n}{\mathfrak{T}}_4, \ldots \overset{n}{\mathfrak{T}}_n,\ \overset{n}{\mathfrak{T}}_{n+1}$$

gewisse numerische, d. h. nur von n abhängende Coefficienten bezeichnen, so hat man nach §. 9. für

$$\int_a^b y\partial x$$

einen Ausdruck von der folgenden Form.

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)(\overset{n}{\mathfrak{C}}_0 A_0 + \overset{n}{\mathfrak{C}}_1 A_1 + \overset{n}{\mathfrak{C}}_2 A_2 + \ldots + \overset{n}{\mathfrak{C}}_n A_n + \overset{n}{\mathfrak{C}}_{n+1} A_{n+1}).$$

Wenn nun aber n eine gerade Zahl, so ist, wie wir aus §. 9. wissen:

$$\overset{n}{\mathfrak{C}}_0 = \overset{n}{\mathfrak{C}}_{n+1},$$

$$\overset{n}{\mathfrak{C}}_1 = \overset{n}{\mathfrak{C}}_n,$$

$$\overset{n}{\mathfrak{C}}_2 = \overset{n}{\mathfrak{C}}_{n-1},$$

u. s. w.

$$\overset{n}{\mathfrak{C}}_{\frac{1}{2}n} = \overset{n}{\mathfrak{C}}_{\frac{1}{2}n+1}$$

und folglich

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)\{\overset{n}{\mathfrak{C}}_0 A_{0,n+1} + \overset{n}{\mathfrak{C}}_1 A_{1,n} + \overset{n}{\mathfrak{C}}_2 A_{2,n-1} + \ldots + \overset{n}{\mathfrak{C}}_{\frac{1}{2}n} A_{\frac{1}{2}n,\frac{1}{2}n+1}\}.$$

Wenn dagegen n eine ungerade Zahl ist, so ist nach §. 6.

$$\overset{n}{\mathfrak{C}}_0 = \overset{n}{\mathfrak{C}}_{n+1},$$

$$\overset{n}{\mathfrak{C}}_1 = \overset{n}{\mathfrak{C}}_n,$$

$$\overset{n}{\mathfrak{C}}_2 = \overset{n}{\mathfrak{C}}_{n-1},$$

u. s. w.

$$\overset{n}{\mathfrak{C}}_{\frac{1}{2}(n-1)} = \overset{n}{\mathfrak{C}}_{\frac{1}{2}(n-1)+2}$$

und folglich

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)\{\overset{n}{\mathfrak{C}}_0 A_{0,n+1} + \overset{n}{\mathfrak{C}}_1 A_{1,n} + \overset{n}{\mathfrak{C}}_2 A_{2,n-1} + \ldots$$

$$\ldots + \overset{n}{\mathfrak{C}}_{\frac{1}{2}(n-1)} A_{\frac{1}{2}(n-1),\frac{1}{2}(n+3)} + \overset{n}{\mathfrak{C}}_{\frac{1}{2}(n+1)} A_{\frac{1}{2}(n+1)}\}.$$

Hiernach benutzt man also zur Bestimmung von $\int_a^b y\partial x$ bei der zweiten Methode ganz dieselben einander entsprechenden Werthe von x und y wie bei der ersten Methode, nur dass man diesen Werthen noch die vor den ersten und nach den letzten Werthen sich findenden einander entsprechenden Werthe

$$x = a_0 = a - \frac{1}{n-1}(b-a), \quad y = A_0;$$

$$x = a_{n+1} = a + \frac{n}{n-1}(b-a), \quad y = A_{n+1}$$

hinzufügt. Weil also bei der zweiten Methode eine grössere Anzahl einander entsprechender Werthe von x und y benutzt worden sind wie bei der ersten, so wird jene im Allgemeinen den Werth von $\int_a^b y\partial x$ genauer als diese liefern. Bezeichnen wir den Werth des bestimmten Integrals $\int_a^b y\partial x$, welchen aus n Paaren einander entsprechender Werthe von x und y die erste Methode liefert, durch $\overset{n}{J}$, und den Werth dieses bestimmten Integrals, welchen in der aus dem Obigen von selbst ersichtlichen Weise aus $n+2$ Paaren einander entsprechender Werthe von x und y die zweite Methode liefert, durch $\overset{n}{J}{}'$, so pflegt man sich Formeln für die Differenzen $\overset{n}{J}{}' - \overset{n}{J}$ zu entwickeln, welche aus den obigen allgemeinen Ausdrücken unmittelbar durch Subtraction folgen, und diese Formeln Correctionsformeln zu nennen, indem man sich derselben in der Weise bei der Entwickelung des Werths von $\int_a^b y\partial x$ bedient, dass man unmittelbar die Werthe von $\overset{n}{J}$ mittelst der obigen Formeln und die Werthe von $\overset{n}{J}{}' - \overset{n}{J}$ mittelst der Correctionsformeln berechnet, wo denn die grössere oder geringere Kleinheit der Correction $\overset{n}{J}{}' - \overset{n}{J}$ zugleich ein Kriterium abgiebt, nach welchem man ein Urtheil über den Grad der Genauigkeit zu fällen im Stande ist, welche man erreicht, wenn man den berechneten Werth von $\overset{n}{J}$ als den gesuchten Werth von $\int_a^b y\partial x$ annimmt; den verbesserten Werth $\overset{n}{J}{}'$ dieses Integrals wird man aber erhalten, wenn man zu $\overset{n}{J}$ die Correction $\overset{n}{J}{}' - \overset{n}{J}$ hinzulegt, indem

$$\overset{n}{J}{}' = \overset{n}{J} + (\overset{n}{J}{}' - \overset{n}{J})$$

ist. Dass diese Methode der Berechnung des verbesserten Werths $\overset{n}{J}{}'$ bequemer ist, als wenn man denselben unmittelbar aus der Formel, durch welche er ausgedrückt wird, berechnet, hat darin seinen Grund, dass in der Formel für $\overset{n}{J}{}' - \overset{n}{J}$ die numerischen Coefficienten beträchtlich kleiner sind als in der Formel für $\overset{n}{J}$, wie sich aus dem Folgenden von selbst ergeben wird.

§. 11.

Die numerischen Coefficienten

$$\overset{n}{T}_1, \overset{n}{T}_2, \overset{n}{T}_3, \overset{n}{T}_4, \ldots \overset{n}{T}_n$$

hat, nachdem schon Newton ein Paar besondere Fälle betrachtet hatte, für $n=2$ bis $n=11$ zuerst mit besonderer Sorgfalt Cotes berechnet, und in der Schrift: „De methodo differentiali Newtoniana" am Ende mitgetheilt, ohne die Methode der Berechnung anzugeben. Diese Schrift findet man in einer Sammlung verschiedener Schriften von Cotes, welche unter dem Titel: „Opera miscellanea Rogeri Cotes" oder „Aestimatio errorum in mixta mathesi, per variationes partium trianguli plani et sphaerici, auctore Rogero Cotes. Lemgoviae. 1768.*) erschienen ist, wo sich p. 86. die Cotesischen Formeln finden.

Um die Anwendung unserer obigen Methoden zur Berechnung der in Rede stehenden Coefficienten an einem Beispiele zu erläutern, wollen wir dieselben jetzt für $n=5$ berechnen.

Wenn wir die in §. 6. angegebene Methode auf diesen Fall anwenden, so ist zuvörderst, weil $n=5$ ungerade ist:

$$W_1 = \frac{(4^2w^2-4^2)(4^2w^2-2^2)4w}{4^2w^2-4^2} = 4w(4^2w^2-2^2),$$

$$W_2 = \frac{(4^2w^2-4^2)(4^2w^2-2^2)4w}{4^2w^2-2^2} = 4w(4^2w^2-4^2),$$

$$W_3 = \frac{(4^2w^2-4^2)(4^2w^2-2^2)4w}{4^2w^2} = \frac{(4^2w^2-4^2)(4^2w^2-2^2)}{4w};$$

oder

$$W_1 = 16w(4w^2-1),$$

$$W_2 = 64w(w^2-1),$$

$$W_3 = \frac{16(w^2-1)(4w^2-1)}{w};$$

also

$$(4w-4)W_1 = 64w(w-1)(4w^2-1),$$

*) Dieser letztere Titel ist eigentlich der Haupttitel, wenngleich er nur eine einzelne Abhandlung bezeichnet.

$$(4w-2)\,W_2 = 128w\,(2w-1)\,(w^2-1),$$

$$4w\,W_3 = \;64(w^2-1)(4w^2-1);$$

und folglich nach gehöriger Entwickelung:

$$(4w-4)\,W_1 = \;64(4w^4-4w^3-w^2+w),$$

$$(4w-2)\,W_2 = 128(2w^4-w^3-2w^2+w),$$

$$4w\,W_3 = \;64(4w^4-5w^2+1).$$

Integrirt man nun zwischen den Gränzen -1 und $+1$, so erhält man:

$$\int_{-1}^{+1}(4w-4)\,W_1\,\partial w = \frac{896}{15},$$

$$\int_{-1}^{+1}(4w-2)\,W_2\partial w = -\frac{1024}{15},$$

$$\int_{-1}^{+1}4w\;W_3\;\partial w \quad = \frac{256}{15}.$$

Ferner ist

$$K_1 = \;\frac{1}{1.2.3.4} = \frac{1}{24},$$

$$K_2 = -\frac{1}{1.1.2.3} = -\frac{1}{6},$$

$$K_3 = \;\frac{1}{1.2.1.2} = \frac{1}{4};$$

und weil nun $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ ist, so ist

$$\overset{5}{T}_1 = \overset{5}{T}_5 = \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{24}\cdot\frac{896}{15} = \frac{7}{90},$$

$$\overset{5}{T}_2 = \overset{5}{T}_4 = \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1024}{15} = \frac{16}{45},$$

$$\overset{5}{T}_3 = \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{256}{15} = \frac{2}{15}.$$

Also ist

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)\left(\frac{7}{90}A_{1,5} + \frac{16}{45}A_{2,4} + \frac{2}{15}A_3\right),$$

oder

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)(\frac{7A_{1,5}+32A_{2,4}+12A_3}{90}.$$

Wenn wir die in §. 8. angegebene Methode auf den vorliegenden Fall anwenden, so ist

$$a_1 = a, \qquad \frac{a_1-a}{b-a} = 0;$$

$$a_2 = a + \frac{1}{4}(b-a), \frac{a_2-a}{b-a} = \frac{1}{4};$$

$$a_3 = a + \frac{2}{4}(b-a), \frac{a_3-a}{b-a} = \frac{2}{4};$$

$$a_4 = a + \frac{3}{4}(b-a), \frac{a_4-a}{b-a} = \frac{3}{4},$$

$$a_5 = a + \frac{4}{4}(b-a), \frac{a_5-a}{b-a} = \frac{4}{4};$$

also

$$\beta_1 = 2\frac{a_1-a}{b-a} - 1 = 0 - 1 = -1,$$

$$\beta_2 = 2\frac{a_2-a}{b-a} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2},$$

$$\beta_3 = 2\frac{a_3-a}{b-a} - 1 = 1 - 1 = 0,$$

$$\beta_4 = 2\frac{a_4-a}{b-a} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2},$$

$$\beta_5 = 2\frac{a_5-a}{b-a} - 1 = 2 - 1 = 1;$$

und folglich

$$V = (v+1)(v+\frac{1}{2})v(v-\frac{1}{2})(v-1)$$

$$= v(v^2-\frac{1}{4})(v^2-1),$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung

$$(4w-2)\,W_2 = 128w\,(2w-1)\,(w^2-1),$$

$$4w\,W_3 = \;64(w^2-1)(4w^2-1);$$

und folglich nach gehöriger Entwickelung:

$$(4w-4)\,W_1 = \;64(4w^4-4w^3-w^2+w),$$

$$(4w-2)\,W_2 = 128(2w^4-w^3-2w^2+w),$$

$$4w\,W_3 = \;64(4w^4-5w^2+1).$$

Integrirt man nun zwischen den Gränzen -1 und $+1$, so erhält man:

$$\int_{-1}^{+1}(4w-4)\,W_1\,\partial w = \frac{896}{15},$$

$$\int_{-1}^{+1}(4w-2)\,W_2\partial w = -\frac{1024}{15},$$

$$\int_{-1}^{+1}4w\;W_3\,\partial w \quad = \frac{256}{15}.$$

Ferner ist

$$K_1 = \quad\frac{1}{1.2.3.4} = \frac{1}{24},$$

$$K_2 = -\frac{1}{1.1.2.3} = -\frac{1}{6},$$

$$K_3 = \quad\frac{1}{1.2.1.2} = \frac{1}{4};$$

und weil nun $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ ist, so ist

$$\overset{5}{T}_1 = \overset{5}{T}_5 = \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{24}\cdot\frac{896}{15} = \frac{7}{90},$$

$$\overset{5}{T}_2 = \overset{5}{T}_4 = \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1024}{15} = \frac{16}{45},$$

$$\overset{5}{T}_3 = \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{256}{15} = \frac{2}{15}.$$

Also ist

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)\left(\frac{7}{90}A_{1,5} + \frac{16}{45}A_{2,4} + \frac{2}{15}A_3\right),$$

oder

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)\left(\frac{7A_{1,5}+32A_{2,4}+12A_3}{90}\right).$$

Wenn wir die in §. 8. angegebene Methode auf den vorliegenden Fall anwenden, so ist

$$a_1 = a, \qquad \frac{a_1-a}{b-a} = 0;$$

$$a_2 = a + \frac{1}{4}(b-a), \frac{a_2-a}{b-a} = \frac{1}{4};$$

$$a_3 = a + \frac{2}{4}(b-a), \frac{a_3-a}{b-a} = \frac{2}{4};$$

$$a_4 = a + \frac{3}{4}(b-a), \frac{a_4-a}{b-a} = \frac{3}{4},$$

$$a_5 = a + \frac{4}{4}(b-a), \frac{a_5-a}{b-a} = \frac{4}{4};$$

also

$$\beta_1 = 2\frac{a_1-a}{b-a} - 1 = 0 - 1 = -1,$$

$$\beta_2 = 2\frac{a_2-a}{b-a} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2},$$

$$\beta_3 = 2\frac{a_3-a}{b-a} - 1 = 1 - 1 = 0,$$

$$\beta_4 = 2\frac{a_4-a}{b-a} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2},$$

$$\beta_5 = 2\frac{a_5-a}{b-a} - 1 = 2 - 1 = 1;$$

und folglich

$$V = (v+1)(v+\frac{1}{2})v(v-\frac{1}{2})(v-1)$$

$$= v(v^2-\frac{1}{4})(v^2-1),$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung

$$V = v^5 - \frac{5}{4} v^3 + \frac{1}{4} v,$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial v} = 5v^4 - \frac{15}{4} v^2 + \frac{1}{4}$$

und

$$\left.\begin{array}{r} V' = v^4 - \frac{5}{4} v^2 + \frac{1}{4} \\ + \frac{1}{3} v^2 - \frac{5}{12} \\ + \frac{1}{5} \end{array}\right\} = v^4 - \frac{11}{12} v^2 + \frac{1}{30}.$$

Daher ist

$$\frac{V'}{\frac{\partial V}{\partial v}} = \frac{v^4 - \frac{11}{12} v^2 + \frac{1}{30}}{5v^4 - \frac{15}{4} v^2 + \frac{1}{4}}$$

oder

$$\frac{V'}{\frac{\partial V}{\partial v}} = \frac{60v^4 - 55v^2 + 2}{300v^4 - 225v^2 + 15},$$

und in diesem Bruche muss man nun für v nach und nach $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = -\frac{1}{2}$, $\beta_3 = 0$ setzen, um $\overset{5}{T}_1$, $\overset{5}{T}_2$, $\overset{5}{T}_3$ zu erhalten. Dies giebt

$$\overset{5}{T}_1 = T_5 = \frac{60 - 55 + 2}{300 - 225 + 15} = \frac{7}{90},$$

$$\overset{5}{T}_2 = \overset{5}{T}_4 = \frac{\frac{15}{4} - \frac{55}{4} + 2}{\frac{75}{4} - \frac{225}{4} + 15} = \frac{16}{45},$$

$$\overset{5}{T}_3 = \frac{2}{15};$$

ganz wie vorher.

Auf diese Weise kann man die sämmtlichen numerischen Coefficienten berechnen. Die von **Cotes** angegebenen Werthe derselben wollen wir nun im Folgenden zusammenstellen.

Für $n=2$ ist:

$$\overset{2}{T}_1=\overset{2}{T}_2=\frac{1}{2}.$$

Für $n=3$ ist:

$$\overset{3}{T}_1=\overset{3}{T}_3=\frac{1}{6},$$

$$\overset{3}{T}_2=\frac{2}{3}=\frac{4}{6}.\text{*)}$$

Für $n=4$ ist:

$$\overset{4}{T}_1=\overset{4}{T}_4=\frac{1}{8},$$

---

*) Denkt man sich, indem n eine gerade Zahl bezeichnet, das Intervall $b-a$ in n gleiche Theile getheilt, und bezeichnet die den Werthen

$$a,\ a+1\frac{b-a}{n},\ a+2\frac{b-a}{n},\ \ldots\ a+n\frac{b-a}{n}$$

von x entsprechenden Werthe von y respective durch

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n;$$

so ist nach dem Obigen und nach der Lehre von den bestimmten Integralen:

$$\begin{aligned}\int_a^b y\partial x = & \frac{2(b-a)}{n}\left\{\frac{1}{6}(y_0+y_2)+\frac{4}{6}y_1\right\}\\
&+\frac{2(b-a)}{n}\left\{\frac{1}{6}(y_2+y_4)+\frac{4}{6}y_3\right\}\\
&+\frac{2(b-a)}{n}\left\{\frac{1}{6}(y_4+y_6)+\frac{4}{6}y_5\right\}\\
&\text{u. s. w.}\\
&+\frac{2(b-a)}{n}\left\{\frac{1}{6}(y_{n-4}+y_{n-2})+\frac{4}{6}y_{n-3}\right\}\\
&+\frac{2(b-a)}{n}\left\{\frac{1}{6}(y_{n-2}+y_n)+\frac{4}{6}y_{n-1}\right\}.\end{aligned}$$

also, wie man leicht findet:

$$\int_a^b y\partial x=\frac{b-a}{3n}\left\{\begin{aligned}&y_0+2(y_2+y_4+y_6+\ldots+y_{n-2}+y_n)\\&+4(y_1+y_3+y_5+\ldots+y_{n-3}+y_{n-1})+y_n\end{aligned}\right\}.$$

Dies ist die gewöhnlich unter dem Namen der Simpson'schen Regel in den Lehrbüchern vorkommende Formel (m. s. auch Archiv. Thl. X. S. 281.). Dass man sich mittelst des Obigen leicht andere, eine noch grössere Genauigkeit gewährende Regeln oder Formeln dieser Art bilden könnte, erhellet leicht, und bedarf hier keiner weitern Erläuterung.

$$\overset{4}{T}_2=\overset{4}{T}_3=\frac{3}{8}.$$

Für $n=5$ ist:

$$\overset{5}{T}_1=\overset{5}{T}_5=\frac{7}{90},$$

$$\overset{5}{T}_2=\overset{5}{T}_4=\frac{16}{45}=\frac{32}{90},$$

$$\overset{5}{T}_3=\frac{2}{15}=\frac{12}{90}.$$

Für $n=6$ ist:

$$\overset{6}{T}_1=\overset{6}{T}_6=\frac{19}{288},$$

$$\overset{6}{T}_2=\overset{6}{T}_5=\frac{25}{96}=\frac{75}{288},$$

$$\overset{6}{T}_3=\overset{6}{T}_4=\frac{25}{144}=\frac{50}{288}.$$

Für $n=7$ ist:

$$\overset{7}{T}_1=\overset{7}{T}_7=\frac{41}{840},$$

$$\overset{7}{T}_2=\overset{7}{T}_6=\frac{9}{35}=\frac{216}{840},$$

$$\overset{7}{T}_3=\overset{7}{T}_5=\frac{9}{280}=\frac{27}{840},$$

$$\overset{7}{T}_4=\frac{34}{105}=\frac{272}{840}.$$

Für $n=8$ ist:

$$\overset{8}{T}_1=\overset{8}{T}_8=\frac{751}{17280},$$

$$\overset{8}{T}_2=\overset{8}{T}_7=\frac{3577}{17280},$$

$$\overset{8}{T}_3=\overset{8}{T}_6=\frac{49}{640}=\frac{1323}{17280},$$

$$\overset{8}{T}_4=\overset{8}{T}_5=\frac{2989}{17280}.$$

Für $n=9$ ist:

$$\overset{9}{T}_1=\overset{9}{T}_9=\frac{989}{28350},$$

$$\overset{9}{T}_2=\overset{9}{T}_8=\frac{2944}{14175}=\frac{5888}{28350},$$

$$\overset{9}{T}_3=\overset{9}{T}_7=-\frac{464}{14175}=-\frac{928}{28350},$$

$$\overset{9}{T}_4=\overset{9}{T}_6=\frac{5248}{14175}=\frac{10496}{28350},$$

$$\overset{9}{T}_5=-\frac{454}{2835}=-\frac{4540}{28350}.$$

Für $n=10$ ist:

$$\overset{10}{T}_1=\overset{10}{T}_{10}=\frac{2857}{89600},$$

$$\overset{10}{T}_2=\overset{10}{T}_9=\frac{15741}{89600},$$

$$\overset{10}{T}_3=\overset{10}{T}_8=\frac{27}{2240}=\frac{1080}{89600},$$

$$\overset{10}{T}_4=\overset{10}{T}_7=\frac{1209}{5600}=\frac{19344}{89600},$$

$$\overset{10}{T}_5=\overset{10}{T}_6=\frac{2889}{44800}=\frac{5778}{89600}.$$

Für $n=11$ ist:

$$\overset{11}{T}_1=\overset{11}{T}_{11}=\frac{16067}{598752},$$

$$\overset{11}{T}_2=\overset{11}{T}_{10}=\frac{26575}{149688}=\frac{106300}{598752},$$

$$\overset{11}{T}_3=\overset{11}{T}_9=-\frac{16175}{199584}=-\frac{48525}{598752},$$

$$\overset{11}{T}_4=\overset{11}{T}_8=\frac{5675}{12474}=\frac{272400}{598752},$$

$$\overset{11}{T}_5=\overset{11}{T}_7=-\frac{4825}{11088}=-\frac{260550}{598752},$$

$$\overset{11}{T}_6=\frac{17807}{24948}=\frac{427368}{598752}.$$

Mittelst dieser numerischen Coefficienten kann man nach dem Obigen leicht die erforderlichen Formeln zur näherungsweisen Berechnung des bestimmten Integrals $\int_a^b y\partial x$ herstellen, was keiner weiteren Erläuterung bedarf.

§. 12.

Bei der Berechnung der durch

$$\overset{n}{\mathfrak{C}}_0,\ \overset{n}{\mathfrak{C}}_1,\ \overset{n}{\mathfrak{C}}_2,\ \overset{n}{\mathfrak{C}}_3,\ \overset{n}{\mathfrak{C}}_4, \ldots \overset{n}{\mathfrak{C}}_n,\ \overset{n}{\mathfrak{C}}_{n+1}$$

bezeichneten Coefficienten wollen wir uns jetzt der in §. 8. angegebenen Methode bedienen.

Für $n=2$ ist

$$a_0=a-\frac{1}{1}(b-a), \qquad \frac{a_0-a}{b-a}=-\frac{1}{1};$$

$$a_1=a, \qquad \frac{a_1-a}{b-a}=0;$$

$$a_2=a+\frac{1}{1}(b-a), \qquad \frac{a_2-a}{b-a}=\frac{1}{1};$$

$$a_3=a+\frac{2}{1}(b-a), \qquad \frac{a_3-a}{b-a}=\frac{2}{1};$$

also

$$\beta_0=2\frac{a_0-a}{b-a}-1=-2-1=-3,$$

$$\beta_1=2\frac{a_1-a}{b-a}-1=0-1=-1,$$

$$\beta_2=2\frac{a_2-a}{b-a}-1=2-1=1,$$

$$\beta_3=2\frac{a_3-a}{b-a}-1=4-1=3.$$

Folglich ist

$$V=(v+3)(v+1)(v-1)(v-3)=(v^2-1)(v^2-9),$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung

$$V=v^4-10v^2+9,$$

und folglich

$$\frac{\partial V}{\partial v}=4v^3-20v.$$

Weil nun, wie man leicht findet,

$$\left.\begin{array}{r} V'=v^2-10v \\ +\frac{1}{3}v \end{array}\right\}=v^2-\frac{29}{3}v$$

ist, so ist

$$\frac{V'}{\frac{\partial V}{\partial v}}=\frac{v^2-\frac{29}{3}}{4v^2-20}=\frac{3v^2-29}{12v^2-60},$$

und folglich, wenn man für v nach und nach $\beta_0=-3$, $\beta_1=-1$ setzt:

$$\overset{2}{\mathfrak{C}}_0=\overset{2}{\mathfrak{C}}_3=\frac{3.9-29}{12.9-60}=-\frac{1}{24},$$

$$\overset{2}{\mathfrak{C}}_1=\overset{2}{\mathfrak{C}}_2=\frac{3.1-29}{12.1-60}=\frac{13}{24}.$$

Für $n=3$ ist

$$a_0=a-\frac{1}{2}(b-a),\quad \frac{a_0-a}{b-a}=-\frac{1}{2};$$

$$a_1=a,\quad \frac{a_1-a}{b-a}=0;$$

$$a_2=a+\frac{1}{2}(b-a),\quad \frac{a_2-a}{b-a}=\frac{1}{2};$$

$$a_3=a+\frac{2}{2}(b-a),\quad \frac{a_3-a}{b-a}=\frac{2}{2};$$

$$a_4=a+\frac{3}{2}(b-a),\quad \frac{a_4-a}{b-a}=\frac{3}{2};$$

also

$$\beta_0=2\,\frac{a_0-a}{b-a}-1=-1-1=-2,$$

$$\beta_1=2\,\frac{a_1-a}{b-a}-1=0-1=-1,$$

$$\beta_2=2\frac{a_2-a}{b-a}-1=1-1=0,$$

$$\beta_3=2\frac{a_3-a}{b-a}-1=2-1=1,$$

$$\beta_4=2\frac{a_4-a}{b-a}-1=3-1=2.$$

Folglich ist

$$V=(v+2)(v+1)v(v-1)(v-2)=v(v^2-1)(v^2-4),$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung

$$V=v^5-5v^3+4v,$$

und folglich

$$\frac{\partial V}{\partial v}=5v^4-15v^2+4.$$

Ferner ist, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{aligned}V'=v^4-5v^2+4\\ +\frac{1}{3}v^2-\frac{5}{3}\\ +\frac{1}{5}\end{aligned}\right\}=v^4-\frac{14}{3}v^2+\frac{38}{15},$$

und folglich

$$\frac{V'}{\frac{\partial V}{\partial v}}=\frac{v^4-\frac{14}{3}v^2+\frac{38}{15}}{5v^4-15v^2+4}=\frac{15v^4-70v^2+38}{75v^4-225v^2+60}.$$

Also ist

$$\overset{3}{\mathfrak{T}}_0=\overset{3}{\mathfrak{T}}_4=\frac{15.16-70.4+38}{75.16-225.4+60}=-\frac{1}{180},$$

$$\overset{3}{\mathfrak{T}}_1=\overset{3}{\mathfrak{T}}_3=\frac{15.1-70.1+38}{75.1-225.1+60}=\frac{17}{90},$$

$$\overset{3}{\mathfrak{T}}_2=\frac{19}{30}.$$

Für $n=4$ ist

$$a_0 = a - \frac{1}{3}(b-a), \qquad \frac{a_0-a}{b-a} = -\frac{1}{3};$$

$$a_1 = a, \qquad \frac{a_1-a}{b-a} = 0;$$

$$a_2 = a + \frac{1}{3}(b-a), \qquad \frac{a_2-a}{b-a} = \frac{1}{3};$$

$$a_3 = a + \frac{2}{3}(b-a), \qquad \frac{a_3-a}{b-a} = \frac{2}{3};$$

$$a_4 = a + \frac{3}{3}(b-a), \qquad \frac{a_4-a}{b-a} = \frac{3}{3};$$

$$a_5 = a + \frac{4}{3}(b-a), \qquad \frac{a_5-a}{b-a} = \frac{4}{3};$$

also

$$\beta_0 = 2\frac{a_0-a}{b-a} - 1 = -\frac{2}{3} - 1 = -\frac{5}{3},$$

$$\beta_1 = 2\frac{a_1-a}{b-a} - 1 = 0 - 1 = -1,$$

$$\beta_2 = 2\frac{a_2-a}{b-a} - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3},$$

$$\beta_3 = 2\frac{a_3-a}{b-a} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3};$$

$$\beta_4 = 2\frac{a_4-a}{b-a} - 1 = \frac{6}{3} - 1 = 1,$$

$$\beta_5 = 2\frac{a_5-a}{b-a} - 1 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}.$$

Folglich ist

$$V = (v+\frac{5}{3})(v+1)(v+\frac{1}{3})(v-\frac{1}{3})(v-1)(v-\frac{5}{3})$$
$$= (v^2-\frac{1}{9})(v^2-1)(v^2-\frac{25}{9}),$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung

$$V = v^6 - \frac{35}{9}v^4 + \frac{259}{81}v^2 - \frac{25}{81},$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial v} = 6v^5 - \frac{140}{9}v^3 + \frac{518}{81}v.$$

Ferner ist, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{aligned} V' = v^5 - \frac{35}{9}v^3 + \frac{259}{81}v \\ + \frac{1}{3}v^3 - \frac{35}{27}v \\ + \frac{1}{5}v \end{aligned}\right\} = v^5 - \frac{32}{9}v^3 + \frac{851}{405}v,$$

und folglich

$$\frac{V'}{\frac{\partial V}{\partial v}} = \frac{v^4 - \frac{32}{9}v^2 + \frac{851}{405}}{6v^4 - \frac{140}{9}v^2 + \frac{518}{81}} = \frac{405v^4 - 1440v^2 + 851}{2430v^4 - 6300v^2 + 2590}.$$

Also ist

$$\overset{4}{\mathfrak{C}}_0 = \overset{4}{\mathfrak{C}}_5 = \frac{405.\frac{625}{81} - 1440.\frac{25}{9} + 851}{2430.\frac{625}{81} - 6300.\frac{25}{9} + 2590} = -\frac{1}{160},$$

$$\overset{4}{\mathfrak{C}}_1 = \overset{4}{\mathfrak{C}}_4 = \frac{405 - 1440 + 851}{2430 - 6300 + 2590} = \frac{23}{160},$$

$$\overset{4}{\mathfrak{C}}_2 = \overset{4}{\mathfrak{C}}_3 = \frac{405.\frac{1}{81} - 1440.\frac{1}{9} + 851}{2430.\frac{1}{81} - 6300.\frac{1}{9} + 2590} = \frac{58}{160}.$$

Für $n=5$ ist

$$a_0 = a - \frac{1}{4}(b-a), \qquad \frac{a_0 - a}{b-a} = -\frac{1}{4};$$

$$a_1 = a, \qquad \frac{a_1 - a}{b-a} = 0;$$

$$a_2 = a + \frac{1}{4}(b-a), \qquad \frac{a_2 - a}{b-a} = \frac{1}{4};$$

$$a_3 = a + \frac{2}{4}(b-a), \qquad \frac{a_3 - a}{b-a} = \frac{2}{4};$$

$$a_4 = a + \frac{3}{4}(b-a), \qquad \frac{a_4-a}{b-a} = \frac{3}{4};$$

$$a_5 = a + \frac{4}{4}(b-a), \qquad \frac{a_5-a}{b-a} = \frac{4}{4};$$

$$a_6 = a + \frac{5}{4}(b-a), \qquad \frac{a_6-a}{b-a} = \frac{5}{4};$$

also

$$\beta_0 = 2\frac{a_0-a}{b-a} - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

$$\beta_1 = 2\frac{a_1-a}{b-a} - 1 = 0 - 1 = -1,$$

$$\beta_2 = 2\frac{a_2-a}{b-a} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2},$$

$$\beta_3 = 2\frac{a_3-a}{b-a} - 1 = \frac{2}{2} - 1 = 0,$$

$$\beta_4 = 2\frac{a_4-a}{b-a} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2},$$

$$\beta_5 = 2\frac{a_5-a}{b-a} - 1 = \frac{4}{2} - 1 = 1,$$

$$\beta_6 = 2\frac{a_6-a}{b-a} - 1 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}.$$

Folglich ist

$$V = (v+\frac{3}{2})(v+1)(v+\frac{1}{2})v(v-\frac{1}{2})(v-1)(v-\frac{3}{2})$$
$$= v(v^2-\frac{1}{4})(v^2-1)(v-\frac{9}{4}),$$

d. i. nach gehöriger Entwickelung

$$V = v^7 - \frac{7}{2}v^5 + \frac{49}{16}v^3 - \frac{9}{16}v,$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial v} = 7v^6 - \frac{35}{2}v^4 + \frac{147}{16}v^2 - \frac{9}{16}$$

Ferner ist, wie man leicht findet:

$$V' = v^6 - \frac{7}{2}v^4 + \frac{49}{16}v^2 - \frac{9}{16}$$
$$+ \frac{1}{3}v^4 - \frac{7}{6}v^2 + \frac{49}{48}$$
$$+ \frac{1}{5}v^2 - \frac{7}{10}$$
$$+ \frac{1}{7}$$
$$= v^6 - \frac{19}{6}v^4 + \frac{503}{240}v^2 - \frac{83}{840},$$

also

$$\frac{V'}{\frac{\partial V}{\partial v}} = \frac{v^6 - \frac{19}{6}v^4 + \frac{503}{240}v^2 - \frac{83}{840}}{7v^6 - \frac{35}{2}v^4 + \frac{147}{16}v^2 - \frac{9}{16}}$$

$$= \frac{1680v^6 - 5320v^4 + 3521v^2 - 166}{11760v^6 - 29400v^4 + 15435v^2 - 945}.$$

Folglich ist

$$\overset{5}{\mathfrak{C}}_0 = \overset{5}{\mathfrak{C}}_6 = \frac{1680.\frac{729}{64} - 5320.\frac{81}{16} + 3521.\frac{9}{4} - 166}{11760.\frac{729}{64} - 29400.\frac{81}{16} + 15435.\frac{9}{4} - 945}$$

$$= \frac{1680.729 - 5320.324 + 3521.144 - 166.64}{11760.729 - 29400.324 + 15435.144 - 945.64}$$

$$= -\frac{2}{945},$$

$$\overset{5}{\mathfrak{C}}_1 = \overset{5}{\mathfrak{C}}_5 = \frac{1680.1 - 5320.1 + 3521.1 - 166}{11760.1 - 29400.1 + 15435.1 - 945}$$

$$= \frac{19}{210},$$

$$\overset{5}{\mathfrak{C}}_2 = \overset{5}{\mathfrak{C}}_4 = \frac{1680.\frac{1}{64} - 5320.\frac{1}{16} + 3521.\frac{1}{4} - 166}{11760.\frac{1}{64} - 29400.\frac{1}{16} + 15435.\frac{1}{4} - 945}$$

$$= \frac{1680 - 5320.4 + 3521.16 - 166.64}{11760 - 29400.4 + 15435.16 - 945.64}$$

$$= \frac{34}{105},$$

$$\overset{5}{\mathfrak{C}}_3 = \frac{166}{945}.$$

Wir wollen jetzt diese etwas weitläufigen Rechnungen nicht noch weiter fortsetzen, weil die betreffenden Formeln für den praktischen Gebrauch zu weitläufig werden.

§. 13.

Nach den beiden vorhergehenden Paragraphen haben wir nun die folgenden Formeln.

Für $n=2$ ist nach §. 11. und §. 12. respective

$$\int_a^b y\partial x = \frac{b-a}{2} A_{1,2}$$

und

$$\int_a^b y\partial x = -\frac{b-a}{24}\{A_{0,3}-13A_{1,2}\}$$

Zieht man die erste Formel von der zweiten ab, so erhält man als Differenz

$$-\frac{b-a}{24}\{A_{0,3}-A_{1,2}\}.$$

Für $n=3$ ist nach §. 11. und §. 12. respective

$$\int_a^b y\partial x = \frac{b-a}{6}\{A_{1,3}+4A_2\}$$

und

$$\int_a^b y\partial x = -\frac{b-a}{180}\{A_{0,4}-34A_{1,3}-114A_2\}.$$

Zieht man die erste Formel von der zweiten ab, so erhält man als Differenz

$$-\frac{b-a}{180}\{A_{0,4}-4A_{1,3}+6A_2\}.$$

Für $n=4$ ist nach §. 11. und §. 12. respective

$$\int_a^b y\partial x = \frac{b-a}{8}\{A_{1,4}+3A_{2,3}\}$$

und

$$\int_a^b y\partial x = -\frac{b-a}{160}\{A_{0,5}-23A_{1,4}-58A_{2,3}\}.$$

Zieht man die erste Formel von der zweiten ab, so erhält man als Differenz

$$-\frac{b-a}{160}\{A_{0,5}-3A_{1,4}+2A_{2,3}\}.$$

Für $n=5$ ist nach §. 11. und §. 12. respective

$$\int_a^b y\partial x = \frac{b-a}{90}\{7A_{1,5}+32A_{2,4}+12A_3\}$$

und

$$\int_a^b y\partial x = -\frac{b-a}{1890}\{4A_{0,6}-171A_{1,5}-612A_{2,4}-332A_3\}.$$

Zieht man die erste Formel von der zweiten ab, so erhält man als Differenz

$$-\frac{b-a}{1890}\{4A_{0,6}-24A_{1,5}+60A_{2,4}-80A_3\},$$

oder

$$-\frac{2(b-a)}{945}\{A_{0,6}-6A_{1,5}+15A_{2,4}-20A_3\},$$

oder

$$-\frac{b-a}{472,5}\{A_{0,6}-6A_{1,5}+15A_{2,4}-20A_3\}.$$

Stirling (a. a. O. p. 146.), welcher diese Formel, jedoch ohne Beweis, zuerst gegeben hat, schreibt der leichteren Rechnung wegen näherungsweise 470 statt 472,5.

Wir haben daher zur Berechnung von $\int_a^b y\partial x$ jetzt die folgenden Näherungsformeln.

Für $n=2$ ist

$$\int_a^b y\partial x = \frac{b-a}{2}A_{1,2}$$

und die hierzu zu addirende Correction ist

$$-\frac{b-a}{24}\{A_{0,3}-A_{1,2}\}.$$

Für $n=3$ ist

$$\int_a^b y\partial x=\frac{b-a}{6}\{A_{1,3}+4A_2\}$$

und die hierzu zu addirende Correction ist

$$-\frac{b-a}{180}\{A_{0,4}-4A_{1,3}+6A_2\}.$$

Für $n=4$ ist

$$\int_a^b y\partial x=\frac{b-a}{8}\{A_{1,4}+3A_{2,3}\}$$

und die hierzu zu addirende Correction ist

$$-\frac{b-a}{160}\{A_{0,5}-3A_{1,4}+2A_{2,3}\}.$$

Für $n=5$ ist

$$\int_a^b y\partial x=\frac{b-a}{90}\{7A_{1,5}+32A_{2,4}+12A_3\}$$

und die hierzu zu addirende Correction ist

$$-\frac{2(b-a)}{945}\{A_{0,6}-6A_{1,5}+15A_{2,4}-20A_3\},$$

oder

$$-\frac{(b-a)}{472,5}\{A_{0,6}-6A_{1,5}+15A_{2,4}-20A_3\},$$

oder näherungsweise

$$-\frac{b-a}{470}\{A_{0,6}-6A_{1,5}+15A_{2,4}-20A_3\}.$$

Da Stirling a. a. O. noch zwei Correctionsformeln für $n=7$ und $n=9$, gleichfalls ohne Beweis, angegeben hat, so wollen wir dieselben hier noch mittheilen, indem wir dem Leser die Entwickelung derselben nach den oben angegebenen Methoden überlassen.

Für $n=7$ ist nach §. 11.

$$\int_a^b y\partial x = \frac{b-a}{840}\{41A_{1,7}+216A_{2,6}+27A_{3,5}+272A_4\}$$

und die hierzu zu addirende Correction ist nach Stirling

$$-\frac{b-a}{930}\{A_{0,8}-8A_{1,7}+28A_{2,6}-56A_{3,5}+70A_4\},$$

wo die Zahl 930 auch nur näherungsweise richtig sein wird.

Für $n=9$ ist nach §. 11.

$$\int_a^b y\partial x$$

$$=\frac{b-a}{28350}\{989A_{1,9}+5888A_{2,8}-928A_{3,7}+10496A_{4,6}-4540A_5\}$$

und die hierzu zu addirende Correction ist nach Stirling

$$-\frac{b-a}{1600}\{A_{0,10}-10A_{1,9}+45A_{2,8}-120A_{3,7}+210A_{4,6}-252A_5\},$$

wo wieder die Zahl 1600 nur annähernd richtig sein wird.

§. 14.

Eine sehr wichtige Erweiterung und Vervollkommnung haben die vorhergehenden Methoden zur näherungsweisen Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale durch Gauss in der Abhandlung: Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*) erhalten. Da jedoch diese verfeinerte Methode von Gauss, wie man sie mit Recht nennen kann, für unsere Zwecke in dieser Abhandlung mit hinreichender Leichtigkeit in der Praxis nicht wohl anwendbar ist, so wird es genügen, hier nur einen kurzen Begriff von derselben durch Betrachtung von ein Paar einfachen besondern Fällen zu geben. Im Allgemeinen wollen wir nur vorläufig bemerken, dass das Wesen dieser Methode von Gauss darin besteht, die Werthe von x, deren entsprechende Werthe von y der Rechnung zum Grunde gelegt werden, nicht wie bisher willkührlich anzunehmen, sondern so zu wählen, dass dadurch die möglichst grosse Genauigkeit in der Bestimmung von $\int_a^b y\partial x$ erreicht wird, und wenn diese Bemer-

*) Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. III. Gottingae. 1816. p. 39.

kung auch in der Allgemeinheit, in welcher wir dieselbe so eben ausgesprochen haben, nicht ganz verständlich sein kann, so werden die folgenden Beispiele doch gewiss hinreichend sein, das Wesen der merkwürdigen und wichtigen Gaussischen Methode völlig deutlich zu machen.

Wir wollen für y die Form

$$y=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3$$

oder, wenn wir

$$x-a=u$$

setzen, die Form

$$y=\beta_0+\beta_1u+\beta_2u^2+\beta_3u^3$$

annehmen. Dann ist, weil $\partial x=\partial u$ und für $x=a$, $x=b$ respective $u=0$, $u=b-a$ ist:

$$\int_a^b y\partial x=\int_0^{b-a}(\beta_0+\beta_1u+\beta_2u^2+\beta_3u^3)\partial u,$$

d. i.

$$\int_a^b y\partial x=\beta_0(b-a)+\frac{1}{2}\beta_1(b-a)^2+\frac{1}{3}\beta_2(b-a)^3+\frac{1}{4}\beta_3(b-a)^4$$

Wenn wir nun, indem A_1, A_2 wieder die Werthe von y für $x=a_1$, $x=a_2$ bezeichnen,

$$\int_a^b y\partial x=(b-a)(K_1A_1+K_2A_2)$$

setzen, wo K_1, K_2 gewisse noch zu bestimmende numerische Coefficienten bezeichnen, so ist, weil

$$\begin{aligned}A_1&=\alpha_0+\alpha_1a_1+\alpha_2a_1^2+\alpha_3a_1^3\\&=\beta_0+\beta_1(a_1-a)+\beta_2(a_1-a)^2+\beta_3(a_1-a)^3,\\A_2&=\alpha_0+\alpha_1a_2+\alpha_2a_2^2+\alpha_3a_2^3\\&=\beta_0+\beta_1(a_2-a)+\beta_2(a_2-a)^2+\beta_3(a_2-a)^3\end{aligned}$$

ist, nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned}\int_a^b y\partial x=\ &\beta_0\{K_1+K_2\}(b-a)\\&+\beta_1\{K_1(a_1-a)+K_2(a_2-a)\}(b-a)\\&+\beta_2\{K_1(a_1-a)^2+K_2(a_2-a)^2\}(b-a)\\&+\beta_3\{K_1(a_1-a)^3+K_2(a_2-a)^3\}(b-a)\end{aligned}$$

oder, wenn wir

$$u_1-a=\tau_1(b-a),\quad u_2-a=\tau_2(b-a)$$

setzen:

$$\begin{aligned}\int_a^b y\partial x = \;& \beta_0(K_1+K_2)(b-a)\\ &+\beta_1(K_1\tau_1+K_2\tau_2)(b-a)^2\\ &+\beta_2(K_1\tau_1^2+K_2\tau_2^2)(b-a)^3\\ &+\beta_3(K_1\tau_1^3+K_2\tau_2^3)(b-a)^4.\end{aligned}$$

Soll nun dieser Ausdruck von $\int_a^b y\partial x$ mit dem obigen Ausdrucke

$$\int_a^b y\partial x=\beta_0(b-a)+\frac{1}{2}\beta_1(b-a)^2+\frac{1}{3}\beta_2(b-a)^3+\frac{1}{4}\beta_3(b-a)^4$$

zur Uebereinstimmung gebracht werden, so müssen wir die vier Grössen K_1, K_2 und τ_1, τ_2 so bestimmen, dass den vier Gleichungen

$$K_1+K_2=1,$$

$$K_1\tau_1+K_2\tau_2=\frac{1}{2},$$

$$K_1\tau_1^2+K_2\tau_2^2=\frac{1}{3},$$

$$K_1\tau_1^3+K_2\tau_2^3=\frac{1}{4}$$

genügt wird, und es wird also jetzt darauf ankommen, diese vier Gleichungen aufzulösen.

Leicht erhält man aber aus diesen Gleichungen:

$$K_2(\tau_1-\tau_2)=\tau_1-\frac{1}{2},$$

$$K_2(\tau_1-\tau_2)\tau_2=\frac{1}{2}\tau_1-\frac{1}{3},$$

$$K_2(\tau_1-\tau_2)\tau_2^2=\frac{1}{3}\tau_1-\frac{1}{4};$$

und hieraus ferner

$$\tau_1\tau_2-\frac{1}{2}(\tau_1+\tau_2)+\frac{1}{3}=0,$$

$$\frac{1}{2}\tau_1\tau_2-\frac{1}{3}(\tau_1+\tau_2)+\frac{1}{4}=0;$$

oder, wenn wir

$$t_1=\tau_1+\tau_2,\quad t_2=\tau_1\tau_2$$

setzen:

$$t_2-\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{3}=0,$$

$$\frac{1}{2}t_2-\frac{1}{3}t_1+\frac{1}{4}=0;$$

woraus leicht

$$t_1=1,\quad t_2=\frac{1}{6}$$

erhalten wird.

Weil nun

$$(v-\tau_1)(v-\tau_2)=v^2-(\tau_1+\tau_2)v+\tau_1\tau_2$$
$$=v^2-t_1v+t_2=v^2-v+\frac{1}{6}$$

ist, so sind τ_1, τ_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$v^2-v+\frac{1}{6}=0,$$

durch deren Auflösung sich

$$v=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{\sqrt{12}}=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}\pm1}{2\sqrt{3}}$$

ergiebt.

Also kann man

$$\tau_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}},$$

$$\tau_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$$

setzen, und für K_1 und K_2 erhält man nun leicht mittelst des Obigen

$$K_1=K_2=\frac{1}{2}.$$

Nach der Berechnung von Gauss ist

$$\tau_1 = 0{,}2113248654051871$$
$$\tau_2 = 0{,}7886751345948129$$

wovon man eine beliebige Anzahl von Decimalstellen beibehalten kann, wie es gerade die Genauigkeit der anzustellenden Rechnung erfordert.

Wenn man also

$$a_1 = a + \tau_1(b-a) = a + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(b-a)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)a + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)b,$$
$$a_2 = a + \tau_2(b-a) = a + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(b-a)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)a + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)b$$

setzt, und A_1, A_2 wie immer die diesen Werthen a_1, a_2 von x entsprechenden Werthe von y bezeichnen, so ist

$$\int_a^b y\partial x = \frac{b-a}{2}(A_1 + A_2),$$

und bei dieser Bestimmung ist

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

gesetzt werden, d. h. man hat für y eine ganze rationale algebraische Function des dritten Grades angenommen, ungeachtet man nur die zwei den oben bestimmten Werthen a_1, a_2 von x entsprechenden Werthe A_1, A_2 von y der Rechnung zum Grunde gelegt hat.

Wir wollen nun für y die Form

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5$$

oder, wenn wir

$$x - a = u$$

setzen, die Form

$$y = \beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4 + \beta_5 u^5$$

annehmen. Dann ist, weil $\partial x = \partial u$ und für $x = a$, $x = b$ respective $u = 0$, $u = b - a$ ist:

$$\int_a^b y\partial x = \int_0^{b-a} (\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 u^4 + \beta_5 u^5)\,\partial u,$$

d. i.

$$\int_a^b y\partial x = \beta_0(b-a) + \frac{1}{2}\beta_1(b-a)^2 + \frac{1}{3}\beta_2(b-a)^3 + \frac{1}{4}\beta_3(b-a)^4$$
$$+ \frac{1}{5}\beta_4(b-a)^5 + \frac{1}{6}\beta_5(b-a)^6.$$

Wenn wir nun, indem A_1, A_2, A_3 die Werthe von y für $x=a_1$, $x=a_2$, $x=a_3$ bezeichnen,

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)(K_1A_1 + K_2A_2 + K_3A_3)$$

setzen, wo K_1, K_2, K_3 gewisse noch zu bestimmende numerische Coefficienten bezeichnen, so ist, weil

$$A_1 = \alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_1^2 + \alpha_3 a_1^3 + \alpha_4 a_1^4 + \alpha_5 a_1^5$$
$$= \beta_0 + \beta_1(a_1-a) + \beta_2(a_1-a)^2 + \beta_3(a_1-a)^3 + \beta_4(a_1-a)^4 + \beta_5(a_1-a)^5;$$

$$A_2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_2^2 + \alpha_3 a_2^3 + \alpha_4 a_2^4 + \alpha_5 a_2^5$$
$$= \beta_0 + \beta_1(a_2-a) + \beta_2(a_2-a)^2 + \beta_3(a_2-a)^3 + \beta_4(a_2-a)^4 + \beta_5(a_2-a)^5,$$

$$A_3 = \alpha_0 + \alpha_1 a_3 + \alpha_2 a_3^2 + \alpha_3 a_3^3 + \alpha_4 a_3^4 + \alpha_5 a_3^5$$
$$= \beta_0 + \beta_1(a_3-a) + \beta_2(a_3-a)^2 + \beta_3(a_3-a)^3 + \beta_4(a_3-a)^4 + \beta_5(a_3-a)^5$$

ist, nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned}\int_a^b y\partial x = \; & \beta_0\{K_1+K_2+K_3\}(b-a)\\ & +\beta_1\{K_1(a_1-a) + K_2(a_2-a) + K_3(a_3-a)\}(b-a)\\ & +\beta_2\{K_1(a_1-a)^2 + K_2(a_2-a)^2 + K_3(a_3-a)^2\}(b-a)\\ & +\beta_3\{K_1(a_1-a)^3 + K_2(a_2-a)^3 + K_3(a_3-a)^3\}(b-a)\\ & +\beta_4\{K_1(a_1-a)^4 + K_2(a_2-a)^4 + K_3(a_3-a)^4\}(b-a)\\ & +\beta_5\{K_1(a_1-a)^5 + K_2(a_2-a)^5 + K_3(a_3-a)^5\}(b-a)\end{aligned}$$

oder, wenn wir

$$a_1-a = \tau_1(b-a);\quad a_2-a = \tau_2(b-a),\quad a_3-a = \tau_3(b-a)$$

setzen:

$$\begin{aligned}\int_a^b y\partial x = \; & \beta_0(K_1+K_2+K_3)(b-a)\\ & +\beta_1(K_1\tau_1 + K_2\tau_2 + K_3\tau_3)(b-a)^2\\ & +\beta_2(K_1\tau_1^2 + K_2\tau_2^2 + K_3\tau_3^2)(b-a)^3\\ & +\beta_3(K_1\tau_1^3 + K_2\tau_2^3 + K_3\tau_3^3)(b-a)^4\end{aligned}$$

$$+\beta_4(K_1\tau_1^4+K_2\tau_2^4+K_3\tau_3^4)(b-a)^5$$
$$+\beta_5(K_1\tau_1^5+K_2\tau_2^5+K_3\tau_3^5)(b-a)^6.$$

Soll nun dieser Ausdruck von $\int_a^b y\partial x$ mit dem obigen Ausdrucke

$$\int_a^b y\partial x=\beta_0(b-a)+\frac{1}{2}\beta_1(b-a)^2+\frac{1}{3}\beta_2(b-a)^3+\frac{1}{4}\beta_3(b-a)^4$$
$$+\frac{1}{5}\beta_4(b-a)^5+\frac{1}{6}\beta_5(b-a)^6$$

zur Uebereinstimmung gebracht werden, so müssen wir die sechs Grössen K_1, K_2, K_3 und τ_1, τ_2, τ_3 so bestimmen, dass den sechs Gleichungen

$$K_1+K_2+K_3=1,$$

$$K_1\tau_1+K_2\tau_2+K_3\tau_3=\frac{1}{2},$$

$$K_1\tau_1^2+K_2\tau_2^2+K_3\tau_3^2=\frac{1}{3},$$

$$K_1\tau_1^3+K_2\tau_2^3+K_3\tau_3^3=\frac{1}{4},$$

$$K_1\tau_1^4+K_2\tau_2^4+K_3\tau_3^4=\frac{1}{5},$$

$$K_1\tau_1^5+K_2\tau_2^5+K_3\tau_3^5=\frac{1}{6}$$

genügt wird, und es wird sich also jetzt darum handeln, diese sechs Gleichungen aufzulösen.

Leicht erhält man aber aus diesen Gleichungen:

$$K_2(\tau_1-\tau_2)+K_3(\tau_1-\tau_3)=\tau_1-\frac{1}{2},$$

$$K_2(\tau_1-\tau_2)\tau_2+K_3(\tau_1-\tau_3)\tau_3=\frac{1}{2}\tau_1-\frac{1}{3},$$

$$K_2(\tau_1-\tau_2)\tau_2^2+K_3(\tau_1-\tau_3)\tau_3^2=\frac{1}{3}\tau_1-\frac{1}{4},$$

$$K_2(\tau_1-\tau_2)\tau_2^3+K_3(\tau_1-\tau_3)\tau_3^3=\frac{1}{4}\tau_1-\frac{1}{5},$$

$$K_2(\tau_1-\tau_2)\tau_2^4+K_3(\tau_1-\tau_3)\tau_3^4=\frac{1}{5}\tau_1-\frac{1}{6};$$

und hieraus ferner:

$$K_2(\tau_1-\tau_3)(\tau_2-\tau_3)=\tau_1\tau_2-\frac{1}{2}(\tau_1+\tau_2)+\frac{1}{3},$$

$$K_2(\tau_1-\tau_3)(\tau_2-\tau_3)\tau_3=\frac{1}{2}\tau_1\tau_2-\frac{1}{3}(\tau_1+\tau_2)+\frac{1}{4},$$

$$K_2(\tau_1-\tau_3)(\tau_2-\tau_3)\tau_3^2=\frac{1}{3}\tau_1\tau_2-\frac{1}{4}(\tau_1+\tau_2)+\frac{1}{5},$$

$$K_2(\tau_1-\tau_3)(\tau_2-\tau_3)\tau_3^3=\frac{1}{4}\tau_1\tau_2-\frac{1}{5}(\tau_1+\tau_2)+\frac{1}{6};$$

folglich

$$\tau_1\tau_2\tau_3-\frac{1}{2}(\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3)+\frac{1}{3}(\tau_1+\tau_2+\tau_3)-\frac{1}{4}=0,$$

$$\frac{1}{2}\tau_1\tau_2\tau_3-\frac{1}{3}(\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3)+\frac{1}{4}(\tau_1+\tau_2+\tau_3)-\frac{1}{5}=0,$$

$$\frac{1}{3}\tau_1\tau_2\tau_3-\frac{1}{4}(\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3)+\frac{1}{5}(\tau_1+\tau_2+\tau_3)-\frac{1}{6}=0;$$

oder, wenn wir

$$t_1=\tau_1+\tau_2+\tau_3,\quad t_2=\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3,\quad t_3=\tau_1\tau_2\tau_3$$

setzen:

$$t_3-\frac{1}{2}t_2+\frac{1}{3}t_1-\frac{1}{4}=0,$$

$$\frac{1}{2}t_3-\frac{1}{3}t_2+\frac{1}{4}t_1-\frac{1}{5}=0,$$

$$\frac{1}{3}t_3-\frac{1}{4}t_2+\frac{1}{5}t_1-\frac{1}{6}=0;$$

woraus leicht

$$t_1=\frac{3}{2},\quad t_2=\frac{3}{5},\quad t_3=\frac{1}{20}$$

erhalten wird.

Weil nun

$$\begin{aligned}&(v-\tau_1)(v-\tau_2)(v-\tau_3)\\&=v^3-(\tau_1+\tau_2+\tau_3)v^2+(\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3)v-\tau_1\tau_2\tau_3\\&=v^3-t_1v^2+t_2v-t_3=v^3-\frac{3}{2}v^2+\frac{3}{5}v-\frac{1}{20}\end{aligned}$$

ist, so sind τ_1, τ_2, τ_3 die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

$$v^3-\frac{3}{2}v^2+\frac{3}{5}v-\frac{1}{20}=0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $\frac{1}{2}$, wie man leicht findet, und die beiden andern Wurzeln derselben werden also durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$v^2-v+\frac{1}{10}=0$$

gefunden. Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind, wie man leicht findet

$$\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{\frac{3}{5}})=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=\frac{5\pm\sqrt{15}}{10},$$

und man kann also

$$\tau_1=\frac{1}{2}(1-\sqrt{\frac{3}{5}})=\frac{5-\sqrt{15}}{10},$$

$$\tau_2=\frac{1}{2},$$

$$\tau_3=\frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{3}{5}})=\frac{5+\sqrt{15}}{10}$$

setzen; für K_1, K_2, K_3 erhält man aber mittelst des Obigen leicht die folgenden Werthe:

$$K_1=\frac{5}{18},\ K_2=\frac{4}{9},\ K_3=\frac{5}{18}.$$

Nach der Berechnung von Gauss ist

$$\tau_1=0{,}1127016653792583$$

$$\tau_2=0{,}5$$

$$\tau_3=1{,}8872983346207417.$$

Wenn man also

$$a_1=a+\tau_1(b-a)=a+\frac{1}{2}(1-\sqrt{\frac{3}{5}})(b-a)$$

$$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{3}{5}})\,a+\frac{1}{2}(1-\sqrt{\frac{3}{5}})\,b,$$

$$a_2=a+\tau_2(b-a)=a+\frac{1}{2}(b-a),$$

$$a_3 = a + \tau_3(b-a) = a + \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)(b-a)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)a + \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)b$$

setzt, und A_1, A_2, A_3 wie immer die diesen Werthen a_1, a_2, a_3 von x entsprechenden Werthe von y bezeichnen, so ist

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)\left\{\frac{5}{18}(A_1 + A_3) + \frac{4}{9}A_2\right\},$$

oder

$$\int_a^b y\partial x = \frac{b-a}{18}\{5(A_1 + A_3) + 8A_2\},$$

und bei dieser Bestimmung ist

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5$$

gesetzt worden, d. h. man hat für y eine ganze rationale algebraische Function des fünften Grades angenommen, ungeachtet man nur die drei den oben bestimmten Werthen a_1, a_2, a_3 von x entsprechenden Werthe A_1, A_2, A_3 von y der Rechnung zum Grunde gelegt hat.

Wenn man

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \alpha_6 x^6 + \alpha_7 x^7$$

setzt, und sich übrigens ganz ähnlicher Bezeichnungen bedient wie vorher, die sogleich durch sich selbst verständlich sein werden, so sind τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 die vier Wurzeln der Gleichung

$$v^4 - 2v^3 + \frac{9}{7}v^2 - \frac{2}{7}v + \frac{1}{70} = 0.$$

Löst man diese Gleichung auf, so erhält man nach der Berechnung von Gauss

$$\tau_1 = 0{,}0694318442029754$$

$$\tau_2 = 0{,}3300094782075677$$

$$\tau_3 = 0{,}6699905217924323$$

$$\tau_4 = 0{,}9305681557970246$$

und für K_1, K_2, K_3, K_4 ergeben sich die folgenden Werthe:

$$K_1 = K_4 = 0{,}1739274225687284$$

$$K_2 = K_3 = 0{,}3260725774312716$$

Setzt man dann

$$a_1 = a + \tau_1 (b-a),$$
$$a_2 = a + \tau_2 (b-a),$$
$$a_3 = a + \tau_3 (b-a),$$
$$a_4 = a + \tau_4 (b-a)$$

und bezeichnet die diesen Werthen von x entsprechenden Werthe von y wie gewöhnlich durch A_1, A_2, A_3, A_4; so ist

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)\{K_1(A_1+A_4)+K_2(A_2+A_3)\}.$$

Wenn man

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \alpha_6 x^6 + \alpha_7 x^7 + \alpha_8 x^8 + \alpha_9 x^9$$

setzt, so sind τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_5 die Wurzeln der Gleichung

$$v^5 - \frac{5}{2}v^4 + \frac{20}{9}v^3 - \frac{5}{6}v^2 + \frac{5}{42}v - \frac{1}{252} = 0.$$

Nach der Berechnung von Gauss ist

$$\tau_1 = 0,0469100770306680$$
$$\tau_2 = 0,2307653449471585$$
$$\tau_3 = 0,5$$
$$\tau_4 = 0,7692346550528415$$
$$\tau_5 = 0,9530899229693320$$

und

$$K_1 = K_5 = 0,1184634425280945$$
$$K_2 = K_4 = 0,2393143352496832$$
$$K_3 = \frac{64}{225} = 0,2844444444444444$$

und wenn man dann

$$a_1 = a + \tau_1 (b-a),$$
$$a_2 = a + \tau_2 (b-a),$$
$$a_3 = a + \tau_3 (b-a),$$

$$a_4 = a + \tau_4 (b-a),$$

$$a_5 = a + \tau_5 (b-a)$$

setzt, die diesen Werthen von x entsprechenden Werthe von y aber durch A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 bezeichnet, so ist

$$\int_a^b y \partial x = (b-a) \{ K_1(A_1+A_5) + K_2(A_2+A_4) + K_3 A_3 \}.$$

Wenn man

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \alpha_6 x^6 + \alpha_7 x^7 + \alpha_8 x^8$$
$$+ \alpha_9 x^9 + \alpha_{10} x^{10} + \alpha_{11} x^{11}$$

setzt, so sind τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_5, τ_6 die Wurzeln der Gleichung

$$v^6 - 3v^5 + \frac{75}{22} v^4 - \frac{20}{11} v^3 + \frac{5}{11} v^2 - \frac{1}{22} v + \frac{1}{924} = 0.$$

Nach der Rechnung von Gauss ist

$$\tau_1 = 0,0337652428984240$$

$$\tau_2 = 0,1693953067668678$$

$$\tau_3 = 0,3806904069584015$$

$$\tau_4 = 0,6193095930415985$$

$$\tau_5 = 0,8306046932331322$$

$$\tau_6 = 0,9662347571015760$$

und

$$K_1 = K_6 = 0,0856622461895852$$

$$K_2 = K_5 = 0,1803807865240693$$

$$K_3 = K_4 = 0,2239569672863455$$

und wenn man dann

$$a_1 = a + \tau_1 (b-a),$$

$$a_2 = a + \tau_2 (b-a),$$

$$a_3 = a + \tau_3 (b-a),$$

$$a_4 = a + \tau_4 (b-a),$$

$$a_5 = a + \tau_5 (b-a),$$

$$a_6 = a + \tau_6 (b-a)$$

setzt, die diesen Werthen von x entsprechenden Werthe von y aber durch A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 bezeichnet, so ist

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)\{K_1(A_1+A_6)+K_2(A_2+A_5)+K_3(A_3+A_4)\}.$$

Wenn man

$$y=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\alpha_4x^4+\alpha_5x^5+\alpha_6x^6+\alpha_7x^7+\alpha_8x^8+\alpha_9x^9 \\ +\alpha_{10}x^{10}+\alpha_{11}x^{11}+\alpha_{12}x^{12}+\alpha_{13}x^{13}$$

setzt, so sind τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_5, τ_6, τ_7 die Wurzeln der Gleichung

$$v^7-\frac{7}{2}v^6+\frac{63}{13}v^5-\frac{175}{52}v^4+\frac{175}{143}v^3-\frac{63}{286}v^2+\frac{7}{429}v-\frac{1}{3432}=0.$$

Nach der Rechnung von Gauss ist

$$\tau_1=0{,}0254460438286202$$
$$\tau_2=0{,}1292344072003028$$
$$\tau_3=0{,}2970774243113015$$
$$\tau_4=0{,}5$$
$$\tau_5=0{,}7029225756886985$$
$$\tau_6=0{,}8707655927996972$$
$$\tau_7=0{,}9745539561713798$$

und

$$K_1=K_7=0{,}0647424830844348$$
$$K_2=K_6=0{,}1398526957446384$$
$$K_3=K_5=0{,}1909150252525595$$
$$K_4=0{,}2089795918367347$$

und wenn man dann

$$a_1=a+\tau_1(b-a),$$
$$a_2=a+\tau_2(b-a),$$

$$a_3 = a + \tau_3(b-a),$$

$$a_4 = a + \tau_4(b-a),$$

$$a_5 = a + \tau_5(b-a),$$

$$a_6 = a + \tau_6(b-a),$$

$$a_7 = a + \tau_7(b-a)$$

setzt, die diesen Werthen von x entsprechenden Werthe von y aber durch A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 bezeichnet, so ist

$$\int_a^b y\partial x = (b-a)\{K_1(A_1+A_7)+K_2(A_2+A_6)+K_3(A_3+A_5)+K_4A_4\}.$$

Eine noch weitere Ausführung dieses wichtigen und interessanten Gegenstandes liegt jetzt nicht in meiner Absicht, die, wie ich schon im Eingange erinnert habe, zunächst darauf gerichtet war, denselben in die Praxis einzuführen, und zum Gebrauch bei praktischen Arbeiten zu empfehlen. Jedoch hoffe ich späterhin auf diese Betrachtungen zurückzukommen, und dieselben dann, was die Gaussi'sche Methode betrifft, zu noch grösserer Allgemeinheit zu erheben.

XXI.

Ueber Singularitaeten an Curven der vierten Ordnung.

Von dem
Herrn Doctor Beer
zu Bonn.

1.

Die Gleichung des 4ten Grades zwischen zwei Veränderlichen x und y lässt sich im Allgemeinen auf folgende Form bringen:

$$pqrs+\{ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f\}=0;$$

wo p, q, r und s lineare ganze Functionen von x und y vorstellen, a, b, c u. s. w. aber constante Grössen bedeuten.

Denken wir uns unter x und y Punkt-Coordinaten, so gehört obige Gleichung einer Curve 4. Ordnung an, deren Asymptoten folgende Gleichungen haben:

$$p=0,\ q=0,\ r=0,\ s=0.$$

Die $2.4=8$ Durchschnitte dieser Geraden und der Curve liegen auf einem Kegelschnitte, dessen Gleichung erhalten wird, wenn man die in der ersten Gleichung zum Vorschein kommende Function des 2. Grades der Null gleich setzt. Wir wollen diese Function mit μR_2, wo μ eine constante Grösse bedeutet, sowie auch noch das Product $pqrs$ mit Π bezeichnen; alsdann schreibt sich die Gleichung des 4. Grades wie folgt:

$$F\equiv\Pi+\mu R_2=0.$$

Wenn wir Π annehmen und ungeändert lassen, während wir für μR_2 immer andere Functionen des 2, 1. und 0. Grades ein-setzen, so erhalten wir die Gleichungen aller möglichen Curven der 4. Ordnung mit denselben Asymptoten p, q, r und s. Wir können unter diesen Linien eine dadurch bestimmen, dass wir sie 6 linearen Bedingungen unterwerfen, denn so viele Constanten enthält die Function μR_2. Es ergeben sich aber zwischen den Coefficienten a, b, c u. s. w. 6 Gleichungen vom ersten Grade, wenn ausgedrückt wird, dass eine der erwähnten Curven durch einen willkührlich angenommenen Punkt der Ebene mit drei ihrer Zweige gehe, oder mit anderen Worten, dass jener Punkt ein dreifacher Punkt der Curve werde. Seine Coordinaten-Werthe nämlich müssen folgenden Gleichungen genügen:

$$1)\quad F \equiv \Pi + \mu R_2 = 0.$$

$$2)\quad \frac{dF}{dx} \equiv \frac{d\Pi}{dx} + \mu\frac{dR}{dx} \equiv \frac{d\Pi}{dx} + 2ax + cy + d = 0,$$

$$3)\quad \frac{dF}{dy} \equiv \frac{d\Pi}{dy} + \mu\frac{dR}{dy} \equiv \frac{d\Pi}{dy} + 2by + cx + e = 0,$$

$$4)\quad \frac{d^2F}{dx^2} \equiv \frac{d^2\Pi}{dx^2} + \mu\frac{d^2R}{dx^2} \equiv \frac{d^2\Pi}{dx^2} + 2a = 0,$$

$$5)\quad \frac{d^2F}{dy^2} \equiv \frac{d^2\Pi}{dy^2} + \mu\frac{d^2R}{dy^2} \equiv \frac{d^2\Pi}{dy^2} + 2b = 0,$$

$$6)\quad \frac{d^2F}{dxdy} \equiv \frac{d^2\Pi}{dxdy} + \mu\frac{d^2R}{dxdy} \equiv \frac{d^2\Pi}{dxdy} + c = 0.$$

Wir ersehen hieraus, dass sich immer eine Curve des 4. Grades finden lasse, die ein willkührlich angenommenes Asymptoten-System besitzt und einen willkührlich angenommenen Punkt als dreifachen Punkt aufnimmt. Sind x', y' die Coordinaten des letzteren, so ergiebt sich für die Gleichung der zugehörigen Curve die folgende:

$$F \equiv$$

$$pqrs - p'q'r's' - \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\Pi}{dx'^2}(x^2 - x'^2) - \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\Pi}{dy'^2}(y^2 - y'^2) - \frac{d^2\Pi}{dx'dy'}(xy - x'y')$$
$$+\left(\frac{d^2\Pi}{dx'^2}\cdot x' + \frac{d^2\Pi}{dx'dy'}\cdot y' - \frac{d\Pi}{dx'}\right)(x - x')$$
$$+\left(\frac{d^2\Pi}{dy'^2}\cdot y' + \frac{d^2\Pi}{dx'dy'}\cdot x' - \frac{d\Pi}{dy'}\right)(y - y') = 0.$$

Wenn der Punkt eine solche Lage hat, dass für ihn $c^2 - 4ab$ verschwindet, so ist der Kegelschnitt R_2 der zugehörigen Curve eine Parabel, ein Fall, der für alle Punkte der Curve 4. Ordnung eintritt, deren Gleichung diese ist:

$$V \equiv \left(\frac{d^2\Pi}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2\Pi}{dx^2}\cdot\frac{d^2\Pi}{dy^2} = 0.$$

Für die Punkte eines Theiles der Räume, in welche die Ebene von der Curve V getheilt wird, erlangt der Ausdruck V einen positiven Werth, daher wird der Kegelschnitt der einem solchen Punkte entsprechenden Curve F' eine Hyperbel, während allen Punkten der übrigen Räume solche Curven zugehören, deren Durchschnitte mit den Asymptoten auf Ellipsen liegen.

Nehmen wir die Abstände p und q von den Graden $p=0$ und $q=0$ zu unabhängigen Veränderlichen, so finden wir statt der Gleichung $V=0$ eine andere von der Form

$$(R'_2)^2-pqtu=0.$$

R'_2 ist eine Function des 2., und t und u sind Functionen des 1. Grades. Diese Gleichung stellt dieselbe Curve V dar und lässt uns aus ihrer Form ersehen, dass die Asymptoten p und q jene Linie, eine jede in 2 Punkten, berühren. Die Berührungspunkte liegen auf dem Kegelschnitte $R'_2=0$. Was von p und q gesagt worden, gilt ebenfalls für r und s. Hiernach sind die Asymptoten Doppeltangenten der Curve V.

Es sei beispielsweise

$$p\equiv x,\ q\equiv y,\ r\equiv x-2y-1,\ s\equiv y-2x-1.$$

Die Asymptoten bilden alsdann ein symmetrisches Viereck, und es besteht die Curve V aus zwei gesonderten Ovalen, von denen das eine die Asymptoten x und y in bezüglich den Punkten

$$y=\frac{1}{6}(1+\sqrt{7})\ \text{und}\ x=\frac{1}{6}(1-\sqrt{7}),$$

das andere in den Punkten

$$y=\frac{1}{6}(1-\sqrt{7})\ \text{und}\ x=\frac{1}{6}(1+\sqrt{7})$$

berührt. Die Tangentialpunkte der andern Asymptoten sind imaginär. Für das Asymptoten-System

$$\{p\equiv x,\ q\equiv y,\ r\equiv x-y-1,\ s\equiv y-x-1\}$$

ergeben sich wiederum zwei getrennte Ovale, die auch wie in dem vorhergehenden Falle ganz innerhalb der beiden von den Asymptoten p, q, r und p, q, s gebildeten Dreiecke liegen, von denen aber jetzt das eine ausser p und q die Gerade r, das andere die Gerade s in einem Punkte berührt. Die übrigen Durchschnitte von r und s und der Curve liegen unendlich weit. Diejenige Linie der 4. Ordnung also mit den Asymptoten p, q, r und s, welche einen Punkt jener Ovale als dreifachen aufnimmt, hat als zugehörigen Kegelschnitt R_2, als Grund-Curve wollen wir sagen, eine Parabel; den in der Höhlung der Eier gelegenen Punkten entsprechen Ellipsen, und einem jeden ausserhalb befindlichen Punkte gehört eine Hyperbel zu.

Von den Punkten, in welchen sich eine Curve 4. Ordnung und eine ihrer Asymptoten schneiden, können höchstens 2 in endlicher Entfernung liegen, so dass auch kein Punkt des Asymptoten-Vierecks dreifacher Punkt einer eigentlichen Curve 4. Ordnung werden kann. Und in der That, sucht man die Curve auf, welche einen solchen Punkt als dreifachen besitzt, so findet man für ihre Grund-Curve zwei Gerade, von denen die eine immer mit der Asymptote zusammenfällt, auf welcher der Punkt liegt, so dass alsdann die Curve aus eben dieser Asymptote und einer Curve 3. Ordnung besteht, welche den Punkt mit zwei ihrer Aeste durchsetzt, und deren Asymptoten die drei übrigen Seiten des Asymptoten-Vierecks sind. Für die Tangentialpunkte der Asymptoten und der Curve V werden die eben erwähnten Geraden einander parallel; zwei Parallelen gehören aber zur Gruppe der Parabeln.

2.

Plücker hat in seinem System der analytischen Geometrie gezeigt, dass der Ort der Rückkehrpunkte aller Curven dritten Grades mit denselben Asymptoten der dem Inhalte nach grösste Kegelschnitt ist, der dem Asymptoten-Dreieck eingeschrieben werden kann. Ein Punkt im Innern des Kegelschnittes kann nur ein Einsiedler werden, während sich in einem ausserhalb gelegenen Punkte, wenn er Doppelpunkt wird, zwei reelle Zweige schneiden. Analoges stellt sich bei Linien der 4. Ordnung heraus. Es liegen nämlich diejenigen Punkte, in welchen, wenn sie dreifache Punkte werden, ein Rückkehrpunkt der Curve auf einen reellen Zweig zu liegen kommt, auf einer Curve der 4. Ordnung, welche jede Seite des Asymptoten-Vierecks berührt. Auf ihr liegen ausserdem noch 3 Punkte, in denen der dritte Zweig der entsprechenden Curve die im Rückkehrpunkte zusammenfliessenden Züge tangirt. Und lässt man einen in den positiven Räumen der Curve gelegenen Punkt einen dreifachen werden, so fällt in ihm ein isolirter Punkt auf einen reellen Zweig, eine Singularität, die sich dem blossen Anblick verbirgt. Jeder Punkt der negativen Räume endlich kann nur ein solcher dreifacher Punkt werden, in dem sich drei reelle Aeste schneiden. Wir wollen diese Behauptungen jetzt erweisen.

Die Richtungen der drei Tangenten eines dreifachen Punktes, abhängig von den Werthen des Differential-Quotienten $\frac{dy}{dx}=k$, bestimmen sich bekanntlich aus folgender cubischen Gleichung:

$$\frac{d^3\Pi}{dy^3}\cdot k^3+3.\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\cdot k^2+3.\frac{d^3\Pi}{dydx^2}\cdot k+\frac{d^3\Pi}{dx^3}=0,$$

wofür wir zur Abkürzung setzen wollen:

$$1)\quad a.k^3+3b.k^2+3c.k+d=0.$$

Es fallen nun zwei Tangenten des singulären Punktes zusammen, oder, was dasselbe heisst, in dem singulären Punkte liegt eine Spitze der 1. Art auf einem reellen Zweige, wenn zwei

Wurzeln der Gleichung 1) einander gleich werden. Alsdann aber wird die erste derivirte der Gleichung 1), d. i.:

$$2)\quad 3a.k^2+2.3.b.k+3c=0$$

durch jenen Wurzelwerth befriedigt. Es tritt somit der erwähnte Fall ein, wenn die durch Elimination von k zwischen den Gleichungen 1) und 2), oder, was auf dasselbe hinaus kommt, wenn die durch Annullirung des Radicanden der Quadratwurzel in der cardanischen Formel erhaltene Gleichung besteht. Es ist dies die folgende:

$$W\equiv(bc-ad)^2-4(c^2-bd)(b^2-ac)=0.$$

Wenn W einen negativen Werth hat, so sind sämmtliche Wurzeln der cubischen Gleichung reell und ungleich, und letztere besitzt eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln, so oft der Ausdruck W positiv ist. Das erstere und letztere findet aber für die einen und andern Räume Statt, in welche die Ebene von der Linie $W=0$ getheilt wird. Wir nennen daher die ersteren positive, die übrigen negative Räume. Unmittelbar leuchtet hieraus die Richtigkeit eines Theiles der oben gemachten Behauptungen ein.

Nehmen wir zwei der Asymptoten, z. B. p und q, zu Coordinaten-Axen, so wird:

$$a\equiv\frac{d^3\Pi}{dq^3}=6p.\frac{dr}{dq}\cdot\frac{ds}{dq},\quad d\equiv\frac{d^3\Pi}{dp^3}=6q.\frac{dr}{dp}\cdot\frac{ds}{dp},$$

$$b\equiv\frac{d^3\Pi}{dq^2dp}=2\left\{r.\frac{ds}{dq}+s.\frac{dr}{dq}+q.\frac{dr}{dq}\cdot\frac{ds}{dq}\right\}+2p\left\{\frac{dr}{dp}\cdot\frac{ds}{dq}+\frac{dr}{dq}\cdot\frac{ds}{dp}\right\},$$

$$c\equiv\frac{d^3\Pi}{dp^2dq}=2\left\{r.\frac{ds}{dp}+s.\frac{dr}{dp}+p.\frac{dr}{dp}\cdot\frac{ds}{dp}\right\}+2q\left\{\frac{dr}{dp}\cdot\frac{ds}{dq}+\frac{dr}{dq}\cdot\frac{ds}{dp}\right\}.$$

Für einen Punkt der Asymptote p verschwindet hiernach a, und es tritt demzufolge in der Gleichung $W=0$ b^2 als Factor auf; der andere Factor ist $3c^2-4bd$. Sonach berührt die Asymptote p die Curve W in dem Durchschnitte jener und der Geraden $\frac{d^3\Pi}{dq^2dp}=0$; ausserdem schneidet sie dieselbe in zwei Punkten, die auf dem Kegelschnitte $3c^2-4bd=0$ gelegen sind. Entsprechendes gilt für die übrigen Asymptoten. Die Bedingungen $a=0$, $3c^2-4bd=0$ reduciren die Gleichung 1) auf eine quadratische mit zwei gleichen Wurzeln, und die Bedingungen $a=0$, $b=0$ auf eine Gleichung vom ersten Grade. Wird aber ein Punkt des Asymptoten-Vierecks ein dreifacher, so zerfällt, wie wir gesehen haben, die zugehörige Linie der 4. Ordnung in eine mit einer Seite des Vierecks zusammenfallende Gerade und eine Linie des 3. Grades, die in jenem Punkte einen Doppelpunkt hat. Folglich entsprechen den Berührungs-Punkten der Asymptoten und der Curve W die Asymptoten selbst mit Linien 3. Ordnung, die mit einem der durch jene Punkte gehenden beiden Zweige die Asymptoten berühren. Den acht übrigen Durchschnitten des Asympto- ten-Vierecks und der Curve V entsprechen aber die Asymptoten selbst mit Linien der 3. Ordnung, die in jenen Durchschnitten Spitzen der 1. Art zeigen.

Die linke Seite der Gleichung 1) geht in einen vollständigen Cubus über, so oft man hat:

$$1)\ bc-ad=0,\quad 1)\ c^2-bd=0.\quad 3)\ b^2-ac=0.$$

Von diesen Gleichungen kann irgend eine aus den beiden andern abgeleitet werden. Sie stellen drei Kegelschnitte dar, die sich in denselben drei Punkten schneiden; alle Punkte nämlich, deren Coordinaten-Werthe den beiden letzten Gleichungen Genüge thun, liegen auch auf dem Kegelschnitte 1), mit Ausnahme jedoch des Durchschnittes der beiden Geraden $b=0$ und $c=0$. Auf der Curve W gibt es mithin im Allgemeinen drei Punkte, in welchen, wenn sie dreifache Punkte werden, die Tangenten dreier reeller Aeste in eine einzige zusammenfallen. Für eben diese Punkte verschwinden, wie leicht einzusehen, gleichzeitig die Differentialquotienten $\frac{dW}{dx}$ und $\frac{dW}{dy}$; es sind folglich Doppelpunkte der Curve W, die also auch ausser jenen keine Singularitäten zeigt.

Zwischen der §. 1. aufgeführten Curve V und der Curve W findet die Beziehung statt, dass, wenn erstere Doppelpunkte besitzt, diese auf die Linie W fallen. Die Coordinatenwerthe der singulären Punkte von V nämlich befriedigen folgende Gleichungen:

$$\frac{dV}{dx}=2.\frac{d^2\Pi}{dxdy}\cdot\frac{d^3\Pi}{dx^2.dy}-\frac{d^2\Pi}{dx^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dy^2dx}-\frac{d^2\Pi}{dy^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dx^3}=0,$$

$$\frac{dV}{dy}=2.\frac{d^2\Pi}{dxdy}\cdot\frac{d^3\Pi}{dy^2dx}-\frac{d^2\Pi}{dy^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dx^2.dy}-\frac{d^2\Pi}{dx^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dy^3}=0.$$

Die Elimination der drei Ausdrücke $\frac{d^2\Pi}{dx^2}$, $\frac{d^2\Pi}{dy^2}$ und $\frac{d^2\Pi}{dxdy}$ zwischen diesen beiden Gleichungen und der Gleichung $V=0$ liefert:

$$\left\{\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}\cdot\frac{d^3\Pi}{dy^2dx}-\frac{d^3\Pi}{dx^3}\cdot\frac{d^3\Pi}{dy^3}\right\}^2$$
$$-4\left\{\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}-\frac{d^3\Pi}{dx^3}\cdot\frac{d^3\Pi}{dy^2dx}\right\}\left\{\frac{d^3\Pi}{dy^2dx}-\frac{d^3\Pi}{dy^3}\cdot\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}\right\}=0,$$

d. i.

$$W=0.$$

Lässt man also einen singulären Punkt der Curve V, falls ein solcher vorhanden ist, dreifachen Punkt einer Curve vierter Ordnung werden, deren Asymptoten-System Π ist, so fallen in jenem zwei Tangenten zusammen und die Grund-Curve wird eine Parabel.

3.

Aus der Abtheilung aller Curven n. Ordnung, deren Asymptoten zusammenfallen, heben sich als untergeordnete Gruppen diejenigen heraus, welchen dieselbe Grund-Curve zukommt, oder, was dasselbe besagt, die, welche sich auf den Asymptoten in denselben $n(n-2)$ Punkten schneiden. Sie haben ausser den eben erwähnten und den unendlich weit liegenden Tangential-Punkten der Asymptoten keinen Punkt gemein. Da in ihrer Gleichung, welche von der Form $\Pi_n + \mu R_{n-2} = 0$, ist, die Function Π_n (ein Product von n ganzen linearen Functionen) und R_{n-2} (eine Function des $(n-2)$. Grades) bestimmt sind, so enthält sie nur noch eine willkührliche Constante, den Coefficienten μ, woraus denn folgt, dass eine von ihnen vollständig bestimmt wird, wenn man sie durch einen willkührlich in der Ebene angenommenen Punkt gehen lässt. Im Allgemeinen wird es nun eine gewisse Anzahl Punkte geben, welche für die durch sie gehenden Curven Doppelpunkte werden; wir wollen ihnen der Kürze wegen den Namen Cardinal-Punkte beilegen, und wirklich lässt die Betrachtung des stufenweisen Ueberganges einer Curve der erwähnten Gruppen in die übrigen einen Vergleich jener Punkte mit Angel-Punkten zu. So können sich, um dies an einem Beispiele zu zeigen, zwei Aeste einer Curve, nachdem sie sich, während μ von 0 ausgehend wächst oder abnimmt, von dem Asymptoten-Polygon abgelöst und immer mehr entfernt haben, in einem Cardinalpunkte vereinigen. Von diesem treten hierauf wiederum zwei Aeste aus einander, von denen der eine, während μ in's Unbegrenzte zunimmt oder kleiner wird, immer weiter fortrückt, der andere aber sich der Grund-Curve immer mehr nähert. Bei diesem Ueber- oder Durchgänge verlieren, wie **Plücker** in seinem Syst. d. analyt. Geom. an Curven dritter Ordnung im Besonderen und in der Theorie der algebr. C. allgemein nachgewiesen hat, die Linien, wenn der Punkt ein Doppelpunkt ist, 6, und in einem $g$fachen überhaupt $3g(g-1)$ Wendungspunkte. Im Besonderen verschlingt ein eigentlicher Doppelpunkt (mit zwei reellen Tangenten) vier imaginäre und zwei reelle, ein Einsiedler sechs imaginäre, und eine Spitze der ersten Art sechs imaginäre und zwei reelle Inflexions-Punkte.

Die Coordinaten-Werthe der Cardinal-Punkte einer Curve n. Ordnung müssen gleichzeitig die folgenden drei Gleichungen befriedigen:

$$F=0,\ \frac{dF}{dx}=0,\ \frac{dF}{dy}=0.$$

Eliminiren wir aus der ersten und einer der beiden andern die von einer zur andern Curve derselben Gruppe sich ändernden Coefficienten μ, so kommt:

$$1)\ T_1 \equiv R.\frac{d\Pi}{dx} - \Pi.\frac{dR}{dx} = 0, \quad 2)\ T_2 \equiv R.\frac{d\Pi}{dy} - \Pi.\frac{dR}{dy} = 0.$$

Ausserdem ergibt sich noch:

$$3)\ U \equiv \frac{d\Pi}{dx} \cdot \frac{dR}{dy} - \frac{d\Pi}{dy} \cdot \frac{dR}{dx} = 0.$$

Dieser Gleichungen haben wir uns zum Aufsuchen der genannten Punkte zu bedienen. Die beiden ersten sind vom $(2n-3)$. Grade, die letzte vom $2(n-2)$. Eine von jenen und diese liefern folglich $2(n-2)(2n-3)$ Punkte. Von diesen ist jedoch eine gewisse Anzahl als den gestellten Bedingungen nicht entsprechend auszuschliessen. Wenden wir z. B. die Gleichungen 1) und 3) an, so liefern solche erstlich die Punkte, für welche gleichzeitig Π, $\frac{d\Pi}{dx}$ und $\frac{d\Pi}{dy}$ verschwinden, und die Coordinaten-Werthe dieser Punkte genügen auch der zweiten Gleichung. Für den Werth von μ, der diesen Punkten, welche keine andern als die $\frac{n(n-1)}{2}$ Durchschnitte der Asymptoten, entspricht, gibt die Gleichung $F=0$ die Null, da im Allgemeinen keiner von ihnen auf der Grund-Curve liegt. Es wird sonach $F \equiv \Pi$, d. h. die Curve F geht in das Asymptoten-Polygon über. Wir erhalten ferner diejenigen Punkte, für welche $\frac{d\Pi}{dx} = \frac{dR}{dx} = 0$ wird, deren Coordinaten-Werthe aber im Allgemeinen die zweite Gleichung nicht befriedigen; ihre Anzahl beträgt $(n-1)(n-3)$. Alle übrigen von 1) und 3) gelieferten Coordinaten-Paare thun auch der Gleichung 2) Genüge. Hiernach besitzen die Linien der n. Ordnung $2(n-2)(2n-3) - \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)(n-3) \equiv \frac{(n-2)(5n-9)}{2}$ Cardinal-Punkte. Die Kegelschnitte haben also keinen Cardinal-Punkt, bei den Curven dritter Ordnung beträgt ihre Anzahl drei (es sind die von Plücker wegen einer ihrer Eigenschaften sogenannten Mittelpunkte), die Linien des 4. Grades weisen 11 auf u. s. w.

Bei der oben allgemeinen Betrachtung haben wir zwei besondere Fälle ausgeschlossen, die wir wenigstens für Curven vierter Ordnung näher noch erörtern wollen. Wenn nämlich erstens die Grund-Curve durch eine Ecke des Asymptoten-Vierecks geht, z. B. durch den Durchschnitt von p und q, so findet man $\mu = \frac{0}{0}$, so dass zu untersuchen erübrigt, ob nicht alsdann doch jener Punkt ein Cardinal-Punkt sei. Setzen wir aber $x \equiv p$, $y \equiv q$, so bestimmt sich die Tangente der einem besondern Werthe von μ entsprechenden Curve in jenem Punkte durch die Gleichung:

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{\frac{d\Pi}{dp} + \mu \cdot \frac{dR}{dp}}{\frac{d\Pi}{dq} + \mu \cdot \frac{dR}{dq}} = -\frac{\mu \frac{dR}{dp}}{\mu \frac{dR}{dq}}.$$

Wird nun $\mu = 0$ gesetzt, so wird $\frac{dq}{dp}$ unbestimmt; es geht die Curve in das System der Asymptoten über. Für jeden andern.

bestimmten Werth von μ aber erlangt auch $\frac{dq}{dp}$ einen bestimmten Werth, so lange nicht $\frac{dR}{dp}$ und $\frac{dR}{dq}$ gleichzeitig verschwinden. Wenn also letzteres nicht stattfindet, so kann der fragliche Punkt kein Doppelpunkt werden; sämmtliche Curven berühren in ihm den Kegelschnitt R. Wenn aber $\frac{dR}{dp}$ und $\frac{dR}{dq}$ gleichzeitig verschwinden, so wird wirklich der Punkt ein Doppelpunkt und zwar für jede Curve der Gruppe; in Folge dessen wird jedoch die Anzahl der Cardinal Punkte nicht grösser, sie vermindert sich vielmehr. Dieser Fall ist demjenigen untergeordnet, welchen wir, den zweiten, in der allgemeinen Betrachtung abgesondert haben, wo nämlich für einen Punkt $\frac{d\Pi}{dx}$ und $\frac{dR}{dx}$ verschwinden und die Coordinaten-Werthe jenes der Gleichung 2) genügen. Das Verschwinden der beiden Differentialquotienten ist immer dann eine Folge der Wahl der Coordinaten und kann somit durch die Annahme von andern verhindert werden, wenn nicht der fragliche Punkt der in eine Ecke des Asymptoten-Vierecks fallende Durchschnitt zweier Geraden ist, in die der Kegelschnitt R ausgeartet ist. Wir sind so zur Betrachtung der Modificationen geführt, die im Obigen vor sich gehen, wenn anstatt einer eigentlichen Curve der zweiten Ordnung zwei Gerade als Grund-Curve auftreten. Wir wollen diese selbst zu Coordinaten-Axen nehmen; so erhalten wir an die Stelle der Gleichungen 1), 2) und 3) die folgenden:

$$1') \; y\left(x.\frac{d\Pi}{dx}-\Pi\right)=0, \qquad 2') \; x\left(y.\frac{d\Pi}{dy}-\Pi\right)=0,$$

$$3') \; x.\frac{d\Pi}{dx}-y.\frac{d\Pi}{dy}=0.$$

Aus ihnen ergeben sich wieder 11 Cardinalpunkte, unter ihnen der Durchschnitt der beiden Geraden. Der dem letzteren entsprechende Werth von μ ist unendlich, so dass es keine der Curven gibt, die ihn als wirklichen Doppelpunkt aufnimmt; es nähern sich ihm aber ähnlich wie einem Cardinalpunkte die immer grösseren Werthen von μ entsprechenden Curven.

Fällt der Durchschnitt der beiden Geraden auf eine Asymptote, so erhält Π einen Factor von der Form $y+mx$, und in Folge dessen erhalten wir jenen Punkt unter den Cardinalpunkten zweimal, so dass deren nur 10 verschiedene vorhanden sind. Der Durchschnitt der Geraden wird auch hier für kein endliches μ ein Doppelpunkt. Die Asymptote, auf welche er fällt, wird in ihm von sämmtlichen Curven berührt.

Wenn endlich beide Gerade durch eine Ecke des Asymptoten-Vierecks gehen, so wird diese, welches auch der Werth von μ sein mag, ein Doppelpunkt. Dadurch, dass alsdann Π den Factor $(y+mx)(y+m'x)$ erhält, zieht sich die Anzahl der übrigen möglichen Doppelpunkte auf vier zurück.

Es kann auch eine der beiden Geraden unendlich weit wegrücken, in welchem Falle der Grad der Function R vom zweiten auf den ersten sich reducirt. Man erhält dann statt der früheren Gleichungen die folgenden:

$$1'')\ L.\frac{d\Pi}{dx}-c.\Pi=0,\qquad 2'')\ L.\frac{d\Pi}{dy}-c'.\Pi=0,$$

$$3'')\ c'.\frac{d\Pi}{dx}-c.\frac{d\Pi}{dy}=0.$$

L bedeutet hier die lineare Function, welche an die Stelle von R_2 tritt, und c und c' sind die in ihr vorkommenden Coefficienten der Veränderlichen x und y. Da die beiden ersten Gleichungen vom vierten, die dritte vom dritten Grade sind, so resultiren nur 6 Cardinal-Punkte. Ihre Anzahl fällt auf die Hälfte, auf 3, zurück, wenn auch die Gerade L in's Unendliche rückt, d. i., wenn die Function L durch eine Constante ersetzt wird. Jene Punkte bestimmen sich alsdann durch diese beiden Gleichungen:

$$1''')\ \frac{d\Pi}{dx}=0,\quad 2''')\ \frac{d\Pi}{dy}=0.$$

Wie wir gesehen haben, liegen die Cardinal-Punkte auf den durch die Gleichungen 1), 2) und 3) dargestellten Curven T_1, T_2 und U. Letztere, die von der vierten Ordnung ist, geht durch die Ecken des Asymptoten-Vierecks und den Mittelpunkt des Kegelschnittes R. Falls dieser eine Asymptote berührt, geht U auch durch den Tangentialpunkt, und dieser wird ein Angelpunkt. Die Curve U bleibt dieselbe, welches auch die Dimensionen der Grund-Curve sein mögen, wofern nur ihre Axen dieselbe Lage und dasselbe Längenverhältniss beibehalten. Lässt man den Kegelschnitt R, wenn er eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, sich zu concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Linien ausdehnen oder bezüglich sich bis zu einem Punkte zusammenziehen oder in zwei Gerade übergehen, oder verschiebt man, falls R eine Parabel ist, diese in der Richtung ihrer Axe, so rücken die entsprechenden Cardinal-Punkte auf der Curve U fort. Ein jeder Punkt der letzteren kann ein Angelpunkt werden; nimmt man einen solchen an, so bestimmt eine der Gleichungen 1) und 2) die Ausdehnung des zugehörigen Kegelschnitts. Wir werden sehen, dass, wenn man einen Doppelpunkt der Curve U, wenn anders ein solcher vorhanden ist, zu einem Cardinal-Punkte designirt, dieser nur ein dreifacher Punkt werden kann.

Unter besondern Umständen können mehre Cardinal-Punkte zusammenfallen. Diese Coïncidenz wird dadurch begründet, dass zwei der Linien T_1, T_2 und U sich berühren und die dritte in dem Berührungs-Punkte entweder jene ebenfalls tangirt oder einen Doppelpunkt hat. Wir wollen die Werthe, eventuell die sogenannten wahren Werthe, welche $\frac{dy}{dx}$ in einem Cardinal-Punkte für jene drei Linien und die durch ihren Durchschnitt gehende Curve F annimmt, bezüglich mit k_1, k_2 und k bezeichnen. Wir finden alsdann:

$$k_1 = -\frac{\frac{d^2F}{dx^2}}{\frac{d^2F}{dxdy}}, \quad k_2 = -\frac{\frac{d^2F}{dxdy}}{\frac{d^2F}{dy^2}},$$

$$k_3 = \frac{\frac{dR}{dx}\cdot\frac{d^2F}{dxdy} - \frac{dR}{dy}\cdot\frac{d^2F}{dx^2}}{\frac{dR}{dx}\cdot\frac{d^2F}{dy^2} - \frac{dR}{dy}\cdot\frac{d^2F}{dxdy}} = k_2 \frac{\frac{dR}{dx} - \frac{dR}{dy}\cdot k_1}{\frac{dR}{dx} - \frac{dR}{dy}\cdot k_2}.$$

Wenn nun erstlich die beiden Linien T_1 und T_2 sich berühren, so wird $k_1 = k_2$, also auch $k_1 = k_2 = k_3$, d. h. es berühren sich dann alle drei Linien T_1, T_2 und U in dem fraglichen Punkte, und es genügen die Coordinaten-Werthe des letztern der folgenden Gleichung:

$$S \equiv \left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)^2 - \frac{d^2F}{dx^2}\cdot\frac{d^2F}{dy^2} = 0.$$

Diese besagt, dass die durch den Angelpunkt gelegte Curve F in diesem einen Rückkehrpunkt erlangt.

Wenn zweitens eine der Linien T, z. B. T_1, in einem Cardinal-Punkte einen Doppelpunkt erhält, so wird $k_1 = \frac{0}{0}$, und es berühren sich, da $k_2 = k_3 = 0$ wird, die Linien T_2 und U. Es besteht dann wieder die Gleichung $S = 0$, und F erhält abermals eine Spitze. Die Tangente in letzterer bestimmt sich durch die Gleichung:

$$\frac{d^2F}{dy^2}\cdot k^2 + 2.\frac{d^2F}{dxdy}\cdot k + \frac{d^2F}{dx^2} = 0.$$

Der oben gefundene Werth von k_2 befriedigt, an die Stelle von k substituirt, diese Gleichung, woraus wir ersehen, dass sich die Curven U und F in den Spitzen der letzteren berühren.

Für einen dreifachen Punkt von F werden k_1 k_2 und k_3 unbestimmt, so dass die drei Linien T_1, T_2 und U einen solchen mit je zwei Aesten durchsetzen, er nimmt also vier Cardinalpunkte auf. Die Richtungen der Tangenten von T_1 und U finden sich mit Hülfe folgender Gleichungen:

$$1)\ \frac{d^2T_1}{dy^2}\cdot k_1^2 + 2.\frac{d^2T_1}{dxdy}\cdot k_1 + \frac{d^2T_1}{dx^2} = 0,$$

$$2)\ \frac{d^2U}{dy^2}\cdot k_3^2 + 2.\frac{d^2U}{dxdy}\cdot k_1 + \frac{d^2U}{dx^2} = 0.$$

Wenn nun die Tangenten von T_1 und U in ihrem gemeinschaftlichen Doppelpunkte zusammenfallen, so besteht die durch Eliminatoin der k aus 1) und 2) resultirende Gleichung. Diese ist:

$$\left\{\frac{d^2T_1}{dy^2}\cdot\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{d^2T_1}{dx^2}\cdot\frac{d^2T_1}{dy^2}\right\}^2$$

$$-4\left\{\frac{d^2T_1}{dxdy}\cdot\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{d^2T_1}{dx^2}\cdot\frac{d^2U}{dxdy}\right\}\left\{\frac{d^2T_1}{dy^2}\cdot\frac{d^2U}{dxdy}-\frac{d^2T_1}{dxdy}\cdot\frac{d^2U}{dy^2}\right\}=0.$$

Für die hier vorkommenden Ausdrücke findet man:

$$\frac{d^2U}{dy^2}\equiv-\frac{d^3\Pi}{dy^3}\cdot\frac{dR}{dx}+\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\cdot\frac{dR}{dy},\ \frac{d^2U}{dx^2}\equiv\frac{d^3\Pi}{dx^3}\cdot\frac{dR}{dy}-\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}\cdot\frac{dR}{dx},$$

$$\frac{d^2U}{dxdy}\equiv\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}\cdot\frac{dR}{dy}-\frac{d^3\Pi}{dy^2dx}\cdot\frac{dR}{dx},$$

$$\frac{d^2T_1}{dx^2}\equiv\frac{d^3\Pi}{dxdy^2},\ \frac{d^2T_1}{dxdy}\equiv\frac{d^3\Pi}{dydx^2},\ \frac{d^2T_1}{dy^2}\equiv\frac{d^3\Pi}{dx^3}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die gefundene Gleichung geht diese über in:

$$\left\{\frac{d^3\Pi}{dydx^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}-\frac{d^3\Pi}{dx^3}\cdot\frac{d^3\Pi}{dy^3}\right\}^2$$

$$-4\left\{\left(\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\right)^2-\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}\cdot\frac{d^3\Pi}{dy^3}\right\}\left\{\left(\frac{d^3\Pi}{dydx^2}\right)^2-\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dx^3}\right\}=0.$$

Sie drückt, wie wir §. 2. gesehen haben, aus, dass zwei Tangenten der Curve F zusammenfallen. Fällt also ein Rückkehrpunkt auf einen andern Zweig der Curve, so liegen in dem so entstandenen dreifachen Punkte sechs Cardinal-Punkte.

Besteht endlich der dreifache Punkt aus einer Spitze und einem dritten Aste, der jene berührt, fallen also sämmtliche Tangenten in eine zusammen, so wird:

$$\alpha)\ \left(\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\right)^2-\frac{d^3\Pi}{dydx^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dy^3}=0,\qquad\left(\frac{d^3\Pi}{dydx^2}\right)^2-\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dx^3}=0,$$

$$\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dydx^2}-\frac{d^3\Pi}{dx^3}\cdot\frac{d^3\Pi}{dy^3}=0.$$

Eine Folge hiervon ist, dass die singulären Punkte der Curven T_1, T_2 und U Rückkehrpunkte werden. Es kommt nämlich:

$$\left(\frac{d^2U}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2U}{dx^2}\cdot\frac{d^2U}{dy^2}\equiv\left\{\left(\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}\right)^2-\frac{d^3\Pi}{dx^3}\cdot\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\right\}\left(\frac{dR}{dy}\right)^2$$

$$+\left\{\left(\frac{d^3\Pi}{dy^2dx}\right)^2-\frac{d^3\Pi}{dy^3}\cdot\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}\right\}\left(\frac{dR}{dx}\right)^2$$

$$-\left\{\frac{d^3\Pi}{dydx^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}-\frac{d^3\Pi}{dx^3}\cdot\frac{d^3\Pi}{dy^3}\right\}\frac{dR}{dx}\cdot\frac{dR}{dy},$$

$$\left(\frac{d^2T_1}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2T_1}{dx^2}\cdot\frac{d^2T_1}{dy^2}=\left(\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}\right)^2-\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\cdot\frac{d^3\Pi}{dx^3}.$$

Diese Ausdrücke verschwinden also für den fraglichen Punkt, d. h. er ist ein Rückkehrpunkt der Curven T und U. Was die Tangenten in demselben betrifft, so hat man:

$$k_1=-\frac{\frac{d^3\Pi}{dx^2dy}}{\frac{d^3\Pi}{dy^3}},\quad k_3=\frac{\left(\frac{d^3\Pi}{dx^3}\cdot\frac{dR}{dy}-\frac{d^3\Pi}{dydx^2}\cdot\frac{dR}{dx}\right)\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}}{\left(\frac{d^3\Pi}{dy^3}\cdot\frac{dR}{dx}-\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}\cdot\frac{dR}{dy}\right)\frac{d^3\Pi}{dydx^2}},$$

$$k=-\frac{\frac{d^3\Pi}{dxdy^2}}{\frac{d^3\Pi}{dy^3}};$$

Wegen der für den Punkt bestehenden Gleichungen α) ist hiernach $k_1=k_2=k_3$. Die Tangenten der beiden Spitzen und des dreifachen Punktes fallen mithin in eine einzige zusammen.

Legen wir den Ausdrücken $\mu.\frac{d^2R}{dx^2}=a$, $\mu\frac{d^2R}{dy^2}=b$ und $\mu\frac{d^2R}{dxdy}=c$ bestimmte Werthe bei, so begrenzen wir dadurch unter den Linien vierter Ordnung mit demselben Asymptoten-System Π eine Gruppe von solchen, deren Grund-Curven ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte sind, und welche sich, wie letztere auch, in Punkten schneiden, die auf geraden Linien liegen. Wir erhalten eine stetige Reihe von Curven, die einer der erwähnten Gruppen angehört, wenn wir dem Coefficienten μ einen bestimmten Werth beilegen und die Grund-Curve so verschieben, dass sich die Richtung ihrer Axen nicht ändert. Und die Gruppe lässt sich dadurch in lauter solche Reihen zerlegen, dass man μ immer andere Werthe gibt. Sämmtliche Rückkehr-Punkte nun der Curven einer der angegebenen Gruppen liegen auf der Linie $S=0$, ihre eigentlichen Doppelpunkte (Durchschnitte reeller Zweige) liegen in den positiven Räumen, ihre isolirten Punkte in den negativen Räumen derselben Curve. Die Linie S ist von der vierten Ordnung; ihre Asymptoten fallen mit denen der in §. 1. aufgeführten Linie V zusammen. Umgekehrt kann auch jeder Punkt der Linie S Rückkehrpunkt einer Curv werden, die schon, wie angegeben wurde, theilweise bestimmt ist; die Lage ihrer Grund-Curve ergibt sich aus den beiden Gleichungen

$$\frac{d\Pi}{dx}+\mu.\frac{dR}{dx}=0,\ \frac{d\Pi}{dy}+\mu.\frac{dR}{dy}=0,$$

und ihre Ausdehnung aus der Gleichung

$$\Pi+\mu R=0.$$

4.

Die Anzahl der Doppelpunkte einer Curve vierter Ordnung kann bis auf drei steigen. Weist eine Linie, deren Gleichung vom vierten Grade ist, vier singuläre Punkte auf, so besteht sie aus dem Complexe zweier Kegelschnitte. Es seien x', y' und x'', y'' die Coordinaten zweier Doppelpunkte einer Linie vierter Ordnung. Bezeichnen wir das, was aus Π, $\frac{d\Pi}{dx}$ u. s. w. wird, wenn man in diese Ausdrücke $x=x'$, $y=y'$ setzt, mit Π', $\frac{d\Pi}{dx'}$ u. s. w., so hat man:

$$1)\ \Pi'+\mu R'=0, \qquad 1')\ \Pi''+\mu R''=0;$$

$$2)\ \frac{d\Pi}{dx'}+2ax'+cy'+d=0, \qquad 2')\ \frac{d\Pi}{dx''}+2ax''+cy''+d=0;$$

$$3)\ \frac{d\Pi}{dy'}+2by'+cx'+e=0, \qquad 3')\ \frac{d\Pi}{dy''}+2by''+cx''+e=0.$$

Da die Anzahl dieser Gleichungen der Anzahl der in μR vorkommenden Constanten gleichkommt, so könnte man glauben, es sei gestattet, nach willkührlicher Annahme von Π irgend zwei Punkte von vornherein als Doppelpunkte zu designiren. Es widersprechen sich jedoch im Allgemeinen jene Gleichungen. Ziehen wir nämlich die beiden ersten Gleichungen von einander ab, so finden wir:

$$4)\ \Pi'-\Pi''+a(x'^2-x''^2)+b(y'^2-y''^2)+c(x'y'-x''y'')$$
$$+d(x'-x'')+e(y'-y'')=0.$$

Und an die Stelle der übrigen können wir folgende aus ihnen abgeleitete hinsetzen:

$$5)\ 2a(x'-x'')+c(y'-y'')+\frac{d\Pi}{dx'}-\frac{d\Pi}{dx''}=0,$$

$$6)\ 2b(y'-y'')+c(x'-x'')+\frac{d\Pi}{dy'}-\frac{d\Pi}{dy''}=0,$$

$$7)\ d(x'-x'')+c(x'y''-x''y')+\frac{d\Pi}{dx''}\cdot x'-\frac{d\Pi}{dx'}\cdot x''=0,$$

$$8)\ e(y'-y'')+c(x''y'-x'y'')+\frac{d\Pi}{dy''}\cdot y'-\frac{d\Pi}{dy'}\cdot y''=0.$$

Wenn nun die hieraus sich ergebenden Werthe von $a(x'-x'')$, $b(y'-y'')$, $d(x'-x'')$ und $e(y'-y'')$ in die Gleichung 4) substituirt werden, so kommt:

$$R \equiv \Pi' - \Pi'' - \frac{x'-x''}{2}\left(\frac{d\Pi}{dx'}+\frac{d\Pi}{dx''}\right) - \frac{y'-y''}{2}\left(\frac{d\Pi}{dy'}+\frac{d\Pi}{dy''}\right) = 0.$$

Also nur wenn man die zwei Punkte so wählt, dass die Werthe ihrer Coordinaten die letzte Gleichung befriedigen, gibt es Curven vierter Ordnung, die in beiden zugleich Singularitäten zeigen. Ihre Anzahl ist unbegrenzt, da man (und dies ist eine Folge der den Gleichungen 5) — 7) zukommenden Form) über eine Constante von μR beliebig verfügen kann. Nehmen wir einen Punkt, z. B. den, dessen Coordinaten x' und y' sind, von vornherein willkührlich an, so leuchtet ein, dass jeder Punkt der Curve, die durch die Gleichung $R=0$ dargestellt wird, wenn wir uns in dieser x'' und y'' als laufende Coordinaten denken, mit dem ersten zugleich Doppelpunkt ein und derselben Curve vierter Ordnung werden kann. Es ist auch gestattet einen der Punkte zum Rückkehrpunkte zu designiren. Soll z. B. in (x', y') die Curve eine Spitze erhalten, so muss sein:

$$\left(\frac{d^2\Pi}{dx'dy'}+c\right)^2 - \left(\frac{d^2\Pi}{dx'^2}+2a\right)\left(\frac{d^2\Pi}{dy'^2}+2b\right) = 0.$$

In Folge der Gleichungen 5) und 6) ist der Ausdruck c^2-4ab in Bezug auf c vom ersten Grade, so dass also die eben vorgeführte Gleichung einen einzigen Werth für c liefert. Die Gleichungen 5) — 8) und eine der Gleichungen 1) und 1') bestimmen hierauf die Curve vollständig.

Die Asymptoten der Curve R laufen den Seiten des angenommenen Asymptoten-Vierecks Π parallel.

XXII.

Auflösung einer praktischen Aufgabe durch die Zahlenlehre.

Von dem
Herrn Doctor E. W. Grebe,
Gymnasiallehrer zu Cassel.

Aufgabe. Man hat drei Gefässe, ein kleines von a, ein mittleres von b und ein grosses von $a+b$ Masseinheiten Inhalt. Hierbei sind die Zahlen a und b ohne gemeinschaftlichen Theiler zu denken; denn hätten sie einen solchen c, so könnte man immer c Masseinheiten zu einer einzigen höhern zusammenfassen. Das kleine und das mittlere Gefäss sind mit einer Flüssigkeit gefüllt, das grosse dagegen ist leer. Man soll nun durch alleinige Benutzung der drei genannten Gefässe die $a+b$ Masseinheiten Flüssigkeit entweder in zwei gleiche Theile theilen, wenn $a+b$ eine gerade Zahl ist, oder überhaupt eine beliebige ganze Zahl Masseinheiten von der Gesammtmasse absondern.

Auflösung. Gibt man für fortwährend vorzunehmende Umgiessungen die nachstehenden Vorschriften:

1. So oft das kleine Gefäss gefüllt und das mittlere nicht leer ist, giesse man den Inhalt des kleinen in das grosse;

2. So oft das kleine Gefäss leer ist, fülle man es, wenn dieses möglich ist, aus dem mittleren, oder giesse wenigstens, wenn der Inhalt des mittleren zur Füllung nicht hinreicht, diesen Inhalt des mittleren in das kleine;

3. Ist das mittlere Gefäss leer, so fülle man es aus dem grossen;

4. Ist das mittlere Gefäss ganz, das kleine aber nur zum

Theil gefüllt, so giesse man aus dem mittleren noch so viel in das kleine, dass das letztere vollständig gefüllt sei:

so ist leicht einzusehen, dass diese Vorschriften nicht allein immer ausführbar, sondern auch für alle denkbaren Fälle ausreichend sind. Durch jede einzelne Umgiessung wird ein neuer Zustand der Gefässe herbeigeführt. Wir betrachten diese Zustände jetzt genauer.

Das grosse Gefäss ist anfangs leer; sein Inhalt wird sodann a und würde in der Progression $2a$, $3a$, $4a$ u. s. w. fortwährend zunehmen, wenn nicht bisweilen das mittlere Gefäss aus dem grossen gefüllt werden müsste. Die Inhaltsänderungen des grossen Gefässes bestehen also entweder in einem Gewinn von a, oder in einem Verlust von b Masseinheiten. Den letztern Verlust können wir aber als einen Gewinn von $a-(a+b)$ Masseinheiten betrachten. Es folgt hieraus, dass man die successiven verschiedenen Zustände des grossen Gefässes von dem ursprünglichen an dadurch finden kann, dass man die Zahlenreihe 0, 1, 2, 3, 4 u. s. w. mit a multiplicirt und in diesen Producten so oft es angeht $a+b$ weglässt, oder mit andern Worten die Reste dieser Producte für den Modulus $a+b$ nimmt. Da nun die Zahlen a und $a+b$ als relative Primzahlen vorausgesetzt sind; so liefern die Producte $0.a$, $1.a$, $2.a$, $3.a$ bis zu $(a+b-1).a$ durch $a+b$ getheilt lauter verschiedene Reste, und es kommen somit alle Zahlen von 0 an bis zu $a+b-1$ einschliesslich als Reste vor. Hierdurch ist bewiesen, dass unsere Aufgabe unter allen Umständen lösbar ist. Zugleich folgt, dass wenn das grosse Gefäss zum $(a+b)$ten Male einen der verschiedenen Zustände erhalten hat, der anfängliche Zustand seiner Leerheit und damit des Gefülltseins der beiden andern Gefässe wiederhergestellt ist.

Obgleich nun das grosse Gefäss im Ganzen nur $a+b$ verschiedene Inhaltszustände hat; so ist doch die Zahl der Inhaltszustände aller drei Gefässe grösser; denn auf jeden Zustand, durch welchen das grosse Gefäss seinen Inhalt geändert hat, folgt ein anderer, welcher bloss den Inhalt des mittleren und kleinen Gefässes abändert, mit alleiniger Ausnahme des ersten Zustandes einer jeden Periode, wo nämlich das grosse Gefäss leer ist. Es gibt also im Ganzen $2(a+b)-1$ Inhaltszustände der drei Gefässe, die sich bei fortgesetzten Umgiessungen periodisch wiederholen.

Soll das grosse Gefäss gerade $\frac{1}{2}(a+b)$ Masseinheiten erhalten; so muss sowohl a als b eine ungerade Zahl sein. Setzt man daher $a=2n+1$; so ist

$$\frac{1}{2}(a+b).a=\frac{1}{2}(a+b)(2n+1)=(a+b).n+\frac{1}{2}(a+b);$$

und da dieser Ausdruck durch $a+b$ dividirt den Rest $\frac{1}{2}(a+b)$ lässt, so folgt mit Berücksichtigung des vorhin Gesagten, dass der Zustand der Halbirung der Flüssigkeit gerade der $(a+b)$te oder mittelste Zustand der Periode ist, und also jedesmal nach

$a+b-1$ Umgiessungen eintritt. Da überhaupt jeder neue Inhaltszustand des grossen Gefässes mit Ausnahme des ersten eine gerade Ordnungszahl in der Periode trägt, welche mit $2x$ bezeichnet werden kann; so findet man den Zustand, in welchem sich m Masseinheiten in dem grossen Gefäss befinden, nach Auflösung der Gleichung

$$ax-(a+b)y=m$$

in ganzen Zahlen durch den Werth von $2x$.

Die Zustände einer Periode kann man nun aber auch in ganz entgegengesetzter Folge sich aus einander entwickeln lassen, so nämlich, dass der letzte Zustand mit dem zweiten, der vorletzte mit dem dritten u. s. w. tauscht. Dann bekommt der Zustand, welcher eben noch die Ordnungszahl $2x$ trug, nun die Ordnungszahl $2(a+b)+1-2x$, und man gelangt zu den gesuchten m Masseinheiten im grossen Gefässe leichter auf diesem Wege, wenn $2(a+b)-2x<2x$, oder wenn $x>a+b$. Die Vorschriften für die einzelnen Umgiessungen lauten aber, wenn man diesen Weg zu verfolgen beabsichtigt, anders als früher, nämlich so:

1. So oft das kleine Gefäss ganz oder theilweise gefüllt ist, und das mittlere nicht auch ganz, giesse man den Inhalt des kleinen Gefässes in das mittlere; sollte aber in dem mittleren nicht mehr Raum genug vorhanden sein, um den Inhalt des kleinen ganz aufzunehmen, so fülle man wenigstens das mittlere vollständig.

2. So oft das mittlere Gefäss vollständig gefüllt ist, giesse man seinen Inhalt in das grosse.

3. Ist das kleine Gefass leer, so fülle man es aus dem grossen.

Aus dem hier Mitgetheilten wird nun auch erhellen, dass unsere Aufgabe immer auf zwei, aber auch nur auf zwei Weisen lösbar sei, indem nur die oben oder die eben gegebenen Vorschriften unvermischt angewandt geeignet sind, den Zustand der drei Gefässe auf eine Art abzuändern, durch welche nicht schon da gewesene Zustände sofort wieder zurückkehren.

XXIII.

Miscellen.

In der Sitzung vom 6. Juli 1848 der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der k. k. Akademie der Wissenschaften zu Wien überreichte Herr Professor von Ettingshausen der Klasse eine

Note über eine directe und strenge Ableitung der Taylor'schen Formel,

welche wir der weiteren Bekanntwerdung sehr werth halten, und daher den Lesern des Archivs, denen die Sitzungsberichte der k. k. Akademie der Wissenschaften zu Wien nicht zu Gebote stehen sollten, der Wichtigkeit des Gegenstandes für die strenge Theorie der Differentialrechnung wegen im Folgenden mittheilen wollen. Herr Professor von Ettingshausen sagt auf S. 106. des dritten Hefts der genannten Sitzungsberichte:

Schon vor längerer Zeit (um das Jahr 1830) als ich noch das Lehramt der höheren Mathematik an hiesiger Universität bekleidete, suchte ich den Vortrag der Differenzial-Rechnung mit der Aufstellung des Taylor'schen Lehrsatzes zu eröffnen, um sogleich aus ihm, als oberster Quelle, die weiterhin zur Sprache zu bringenden Entwicklungen der Functionen auf dem kürzesten Wege zu gewinnen. Der von Lagrange in seiner *Théorie des fonctions* eingeschlagene Gang konnte mir jedoch nicht genügen; ich wünschte vielmehr das ältere ebenso naturgemässe als klare Verfahren beizubehalten, wornach der in Rede stehende Lehrsatz aus der Formel gefolgert wird, welche jedes Glied einer Reihe durch deren Anfangsglied und die Anfangsglieder der aus ihr entspringenden Differenzreihen angibt, nur musste durch Nachweisung des Restes, den man vernachlässigt, wenn man die Taylor'sche Entwicklung bei irgend einem Gliede abbricht, dieser Deduction die vordem an ihr ausser Acht gelassene Schärfe verliehen werden.

Ich dürfte bei meinen Zuhörern eine durch höhere wissenschaftliche Studien erworbene Fertigkeit im strengeren Denken, aber kein reichhaltiges mathematisches Hilfsmaterial, nicht mehr als die gewöhnlichsten Elementar-Kenntnisse der Algebra, kaum bis zur Binomialformel reichend, voraussetzen; daher sah ich mich genöthigt, vorher das Bildungsgesetz der numerischen Coefficienten in der Grundformel, von welcher ich auszugehen hatte, ersichtlich zu machen. Da ich das von mir bei dieser Lehrweise gewählte Verfahren nirgends durch den Druck veröffentlicht habe, so dürfte es nicht unpassend erscheinen, wenn ich dasselbe jetzt noch der hochverehrten Klasse zur Aufnahme in unsere Sitzungsberichte vorlege.

Bezeichnet man die Glieder irgend einer Reihe, oder auch nur regellosen Grössenfolge mit

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots\ldots$$

und die Glieder der daraus hervorgehenden Differenzreihen mit

$$\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3, \ldots \Delta u_n, \ldots\ldots$$

$$\Delta^2 u_0, \Delta^2 u_1, \Delta^2 u_2, \Delta^2 u_3, \ldots \Delta^2 u_n, \ldots$$

u. s. w.,

wobei jede dieser Reihen aus der vorhergehenden entsteht, wenn man daselbst jedes Glied von dem nächstfolgenden abzieht, so lässt sich auf die allbekannte Weise zeigen, dass jedes Glied u_n der Grundreihe durch u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$, etc. bis $\Delta^n u_0$ mittelst einer Formel von der Gestalt

$$u_n = u_0 + A_1 \Delta u_0 + A_2 \Delta^2 u_0 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + A_r \Delta^r u_0 + \ldots\ldots + \Delta^n u_0$$

ausgedrückt wird, wobei die Coefficienten A_1, A_2, ... A_r, ... von der Beschaffenheit der Grundreihe unabhängige positive ganze Zahlen sind, deren stufenweise Berechnung mittelst des Pascal'schen Zahlendreiecks vollzogen werden kann.

Um die Zusammensetzung jedes dieser Coefficienten, wie A_r, aus den einzig und allein darauf Einfluss nehmenden Elementen n und r ausfindig zu machen, bedenke man, dass für eine Reihe, bezüglich welcher die Grössen

$$u_0, \Delta u_0, \Delta^2 u_0, \ldots\ldots \text{bis } \Delta^{r-1} u_0$$

sämmtlich $= 0$ wären, ferner

$$\Delta^r u_0$$

von Null verschieden bliebe, und endlich

$$\Delta^{r+1} u_0, \Delta^{r+2} u_0, \ldots\ldots \text{bis } \Delta^n u_0$$

wieder sämmtlich $=0$ ausfielen, obige Formel sich auf

$$u_n = A_r \Delta^r u_0$$

reduciren würde, woraus man sogleich

$$A_r = \frac{u_n}{\Delta^r u_0}$$

erhielte.

Sollen die Grössen u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$ etc. bis $\Delta^{r-1} u_0$ verschwinden, so müssen auch u_1, u_2, u_3, etc. bis u_{r-1} sämmtlich $=0$ sein. Es wird also für u_n eine Function von n zu wählen sein, welche sich auf Null reducirt, wenn man entweder

$$n=0, \text{ oder } n=1, \text{ oder } n=2 \text{ u. s. w. oder } n=r-1$$

setzt.

Die einfachste dieser Forderung entsprechende Form ist

$$u_n = n(n-1)(n-2) \ldots [n-(r-1)];$$

es lässt sich aber leicht zeigen, dass dieselbe auch den weiteren Bedingungen, nämlich dass $\Delta^r u_0$ von 0 verschieden bleibe, und $\Delta^{r+1} u_0$, $\Delta^{r+2} u_0$ etc. gleich Null werden, Genüge leistet. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta u_n &= u_{n+1} - u_n \\ &= (n+1)n(n-1) \ldots [n-(r-2)] \\ &\quad - n(n-1)(n-2) \ldots [n-(r-1)] \\ &= r.n(n-1)(n-2) \ldots [n-(r-2)];\end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned}\Delta^2 u_n &= \Delta u_{n+1} - \Delta u_n \\ &= r.(n+1)n(n-1) \ldots [n-(r-3)] \\ &\quad - r.n(n-1)(n-2) \ldots [n-(r-2)] \\ &= r(r-1).n(n-1) \ldots [n-(r-3)];\end{aligned}$$

auf dieselbe Weise findet man

$$\Delta^3 u_n = r(r-1)(r-2).n(n-1) \ldots [n-(r-4)],$$

und endlich

$$\Delta^{r-1} u_n = r(r-1)(r-2) \ldots 3.2.n,$$

mithin

$$\Delta^r u_n = r(r-1)(r-2) \ldots 3.2.1.$$

Da dieser Ausdruck von n unabhängig ist, so folgt daraus

$$\Delta^{r+1}u_n=0;\quad \Delta^{r+2}u_n=0, \text{ u. s. f.}$$

Man hat sonach auch

$$\Delta^r u_0 = r(r-1)(r-2)\ \ldots\ 3.2.1$$
$$= 1.2.3.\ \ldots\ (r-1)\,r$$

und

$$\Delta^{r+1}u_0=0,\quad \Delta^{r+2}u_0=0, \quad \text{u. s. w.}$$

Hiernach gelangt man zu dem Ergebnisse

$$A_r=\frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ [n-(r-1)]}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots\ r},$$

welches das Bildungsgesetz in obigem allgemeinen Ausdrucke für u_n ausspricht.

Bezeichnet man den Werth von A_r, um auch seine Abhängigkeit von n ersichtlich zu machen, durch das Symbol $\binom{n}{r}$, wobei $\binom{n}{0}$ sowie $\binom{n}{n}$ sich gleich 1 zeigt, so hat man

$$u_n = u_0 + \binom{n}{1}\Delta u_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_0 + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n}{r}\Delta^r u_0 + \ldots\ldots + \Delta^n u_0.$$

Man setze nun

$$\binom{n}{r}\Delta^r u_0 + \binom{n}{r+1}\Delta^{r+1}u_0 + \ldots + \Delta^n u_0 = R_n,$$

so dass R_n den Rest vorstellt, welchen man weglässt, wenn man den Ausdruck für u_n unmittelbar von dem Gliede $\binom{n}{r}\Delta^r u_0$ abbricht. Man kann in R_n statt der Anfangsglieder der auf die $r$te folgenden Differenzreihen, nämlich statt der Grössen

$$\Delta^{r+1}u_0,\ \Delta^{r+2}u_0,\ \ldots\ldots\ \Delta^n u_0,$$

die Glieder der $r$ten Differenzreihe selbst, wovon die eben genannten abhängen, nämlich

$$\Delta^r u_1,\ \Delta^r u_2,\ \Delta^r u_3,\ \ldots\ldots\ \Delta^r u_{n-r},$$

einführen. Ich habe diess bereits in meinen im Jahre 1827 erschienenen Vorlesungen über die höhere Mathematik (I. Band S. 251. u. ff.) gethan; nachstehender Vorgang führt jedoch einfacher zum Ziele.

Setzt man $n+1$ an die Stelle von n, so hat man

$$R_{n+1}=\binom{n+1}{r}\Delta^r u_0+\binom{n+1}{r+1}\Delta^{r+1}u_0+\ldots\ldots+\Delta^{n+1}u_0.$$

Es ist aber, wie schon aus dem Pascal'schen Dreiecke erhellet, und auch aus dem Bildungsgesetze von $\binom{n}{r}$ leicht nachgewiesen werden kann,

$$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r};$$

daher kann man auch setzen:

$$R_{n+1}=\left[\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}\right]\Delta^r u_0+\left[\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}\right]\Delta^{r+1}u_0$$
$$+\left[\binom{n}{r+1}+\binom{n}{r+2}\right]\Delta^{r+2}u_0+\ldots\ldots$$
$$\ldots+\left[\binom{n}{n-1}+1\right]\Delta^n u_0+\Delta^{n+1}u_0.$$

Bedenkt man nun, dass

$$\Delta^r u_0+\Delta^{r+1}u_0=\Delta^r u_1,\quad \Delta^{r+1}u_0+\Delta^{r+2}u_0=\Delta^{r+1}u_1,\ \text{u. s. w.}$$

ist, so erhält man

$$R_{n+1}=\binom{n}{r-1}\Delta^r u_0+\binom{n}{r}\Delta^r u_1+\binom{n}{r+1}\Delta^{r+1}u_1+\ldots$$
$$\ldots\ldots+\binom{n}{n-1}\Delta^{n-1}u_1+\Delta^n u_1.$$

Die Summe der Glieder dieses Ausdruckes, vom zweiten angefangen, ist der Ausdruck, in welchen R_n übergeht, wenn die Reihe

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots u_{n+1}$$

an die Stelle von

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots u_n$$

tritt; bezeichnen wir den solcherweise aus R_n entspringenden Ausdruck mit $R^1{}_n$, so haben wir

$$R_{n+1}=\binom{n}{r-1}\Delta^r u_0+R^1{}_n.$$

Es ist, wie aus der Form von R_n erhellet,

$$R_r=\Delta^r u_0,\quad \text{also}\quad R^1{}_r=\Delta^r u_1$$

und somit, nach der so eben aufgestellten Formel:

$$R_{r+1} = \binom{r}{r-1}\Delta^r u_0 + \Delta^r u_1 .$$

Hieraus folgt

$$R^1_{r+1} = \binom{r}{r-1}\Delta^r u_1 + \Delta^r u_2 ,$$

mithin weiter

$$R_{r+2} = \binom{r+1}{r-1}\Delta^r u_0 + \binom{r}{r-1}\Delta^r u_1 + \Delta^r u_2 .$$

Ebenso ergibt sich

$$R_{r+3} = \binom{r+2}{r-1}\Delta^r u_0 + \binom{r+1}{r-1}\Delta^r u_1 + \binom{r}{r-1}\Delta^r u_2 + \Delta^r u_3 ,$$

und allgemein

$$R_{r+p} = \binom{r+p-1}{r-1}\Delta^r u_0 + \binom{r+p-2}{r-1}\Delta^r u_1 + \ldots + \Delta^r u_p .$$

Setzt man $r+p=n$, so wird

$$R_n = \binom{n-1}{r-1}\Delta^r u_0 + \binom{n-2}{r-1}\Delta^r u_1 + \binom{n-3}{r-1}\Delta^r u_2 + \ldots + \Delta^r u_{n-r} .$$

Es lassen sich nun leicht zwei Gränzen angeben, zwischen welche R_n fällt: Es sei

$$\binom{n-k-1}{r-1}\Delta^r u_k$$

das kleinste, und

$$\binom{n-g-1}{r-1}\Delta^r u_g$$

dass grösste unter den Gliedern des Ausdruckes R_n, wobei die Vergleichung in algebraischem Sinne angestellt wird, also negative Grössen für kleiner gelten als positive, und zwar für um so kleiner, je grösser ihre numerischen Werthe sind, so liegt R_n offenbar zwischen den Gränzen

$$(n-r+1)\binom{n-k-1}{r-1}\Delta^r u_k$$

und

$$(n-r+1)\binom{n-g-1}{r-1}\Delta^r u_g$$

oder auch: Es sei $\Delta^r u_k$ die kleinste, $\Delta^r u_g$ die grösste unter den Grössen $\Delta^r u_0$, $\Delta^r u_1$, $\Delta^r u_2$, ... $\Delta^r u_{n-r}$, so fällt R_n zwischen die Gränzen

$$\left[\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-2}{r-1}+\binom{n-3}{r-1}+\ldots+1\right]\Delta^r u_k$$

und

$$\left[\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-2}{r-1}+\binom{n-3}{r-1}+\ldots+1\right]\Delta^r u_g,$$

d. h. wie man mittelst oben benützter Eigenschaft der Grössen von der Form $\binom{n}{r}$ leicht sieht, zwischen

$$\binom{n}{r}\Delta^r u_k \text{ und } \binom{n}{r}\Delta^r u_g.$$

Lässt sich dem in der Grössenfolge u_0, u_1, u_2, ... herrschenden Gesetze gemäss $\Delta^r u_n$ als eine Function von n darstellen, welche durch $F(n)$ angedeutet werde, so lassen sich obige Ausdrücke als besondere Werthe der Functionen

$$(n-r+1)\binom{n-z-1}{r-1}F(z)$$

und

$$\binom{n}{r}F(z)$$

für $z=k$ und $z=g$ betrachten.

Aendert sich $F(z)$, während z vom Werthe k zum Werthe g stetig übergeht, gleichfalls nach dem Gesetze der Stetigkeit, so gibt es sicher einen zwischen k und g, also um so mehr zwischen 0 und $n-r$ liegenden Werth für z, bezüglich dessen

$$R_n=(n-r+1)\binom{n-z-1}{r-1}F(z)$$

oder auch

$$R_n=\binom{n}{r}F(z)$$

gesetzt werden darf, wobei natürlich der Werth von z im zweiten Falle von jenem im ersten verschieden gedacht wird.

Die Anwendung dieser Resultate auf die Herstellung der Taylor'schen Formel sammt ihrer Ergänzung unterliegt keiner Schwierigkeit. Hierüber darf ich mich hier wohl ganz kurz fassen.

Setzt man

$$u_n = f(x + nw), \quad \text{also } u_0 = f(x)$$

wobei $f(x)$ irgend eine durchgehends angebbare Function der Veränderlichen x vorstellt, und lässt man $nw = h$ sein, denkt man sich ferner h als eine bestimmte Grösse und die ganze Zahl n ins Unendliche wachsend, folglich $w = \frac{h}{n}$ unendlich klein werdend, so ergibt sich auf die bekannte Weise unter der Voraussetzung der Stetigkeit der Function $f(x)$ und ihrer Differentialquotienten in der Gegend des für x gewählten Werthes:

$$f(x+h) = f(x) + h \lim . \frac{\Delta f(x)}{w} + \frac{h^2}{1.2} \lim . \frac{\Delta^2 f(x)}{w^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^{r-1}}{1.2.3\ldots(r-1)} \lim . \frac{\Delta^{r-1} f(x)}{w^{r-1}} + R_r$$

wobei

$$R = \lim . (n-r+1) \binom{n-z-1}{r-1} \Delta^r f(x+zw)$$

oder auch

$$R = \lim . \binom{n}{r} \Delta^r f(x+zw)$$

erscheint. Diese beiden Ausdrücke reduciren sich, wenn man die Symbole

$$\binom{n-z-1}{r-1} \text{ und } \binom{n}{r}$$

durch die Brüche, welche sie vorstellen, ersetzt und erwägt, dass zw zwischen 0 und nw oder h fällt, mithin unter der Gestalt des Productes θh gedacht werden kann, wobei θ einen zwischen 0 und 1 liegenden Factor bedeutet, auf

$$R = \frac{h^r(1-\theta)^{r-1}}{1.2.3\ldots(r-1)} \lim . \frac{\Delta^r f(x+\theta h)}{\omega^r}$$

und

$$R = \frac{h^r}{1.2.3\ldots r} \lim . \frac{\Delta^r f(x+\theta h)}{\omega^r},$$

wobei θ in der zweiten Form der Ergänzung R nicht denselben Werth hat, wie in der ersten. Wie mit dieser Deduction die Entwicklung der Grundbegriffe der Differentialrechnung, und zwar auf die lichtvollste Weise gegeben werden kann, bedarf keiner weiteren Erörterung.

Friedrich Leopold Stollberg erzählt in einem an den Domainenrath Scheffner in Königsberg gerichteten Briefe (datirt Berlin den 5. Decbr. 1789), der in den Blättern für literarische Unterhaltung (1834. Nr. 352.) abgedruckt ist, dass Lagrange zu einem seiner Freunde gesagt habe: „Je n'ai jamais connu d'autres jouissances que celles du coeur."

XXIV.

Bestimmte Lösung der Aufgabe über die Vertheilung eines Drucks auf mehr als drei Stützpunkte.

Von
Herrn Chr. Wiener,
Lehrer der Mathematik an der höheren Gewerbschule zu Darmstadt.

Wenn eine Last P von einer Unterlage mit drei Stützpunkten getragen wird, so ist der Druck auf jeden derselben leicht zu bestimmen aus den drei Gleichungen, welche ausdrücken, dass P die Resultante der drei Seitenkräfte ist. Sei der Angriffspunkt P der Last (Taf. VI. Fig. 1.) der Mittelpunkt eines Polarcoordinatensystems, sei XX' die Axe, und seien die Stützpunkte, auf welche der Druck P_1, P_2, P_3 geübt wird, durch ihre Abstände $PP_1=a_1$, $PP_2=a_2$, $PP_3=a_3$ und durch die Winkel $P_1PX=\alpha_1$ u. s. w., welche diese Abstandslinien mit der Axe bilden, gegeben, so sind die drei Gleichungen, welche ausdrücken, dass P die Resultante von P_1, P_2 und P_3 ist, folgende:

$$P=P_1+P_2+P_3,$$
$$0=P_1a_1\sin\alpha_1+P_2a_2\sin\alpha_2+P_3a_3\sin\alpha_3,$$
$$0=P_1a_1\cos\alpha_1+P_2a_2\cos\alpha_2+P_3a_3\cos\alpha_3;$$

woraus die drei unbekannten Grössen P_1, P_2 und P_3 bestimmt werden können.

Sind aber mehr als drei, im Allgemeinen n Stützpunkte gegeben, so reichen die drei ähnlichen Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} P=P_1+P_2+\ldots\ldots+P_n, \\ 0=P_1a_1\sin\alpha_1+P_2a_2\sin\alpha_2+\ldots\ldots+P_na_n\sin\alpha_n, \\ 0=P_1a_1\cos\alpha_1+P_2a_2\cos\alpha_2+\ldots\ldots+P_na_n\cos\alpha_n \end{array}\right\} A.$$

zur Bestimmung der n Unbekannten nicht hin, sondern es können $n-3$ derselben willkührlich angenommen werden; es ist dieses einleuchtend, indem man z. B. eine Anzahl Stützpunkte ganz unbelastet denken kann, da ja schon drei genügen. Die Aufgabe ist dann unbestimmt.

Denkt man sich aber die Bedingungen dieser Aufgabe physisch ausgeführt und zwar, wie wir es auch bei der Auflösung der Einfachheit halber annehmen wollen, von dem belasteten Punkte P Arme ausgehen, welche, in einer horizontalen Ebene liegend, mit ihren Enden auf Stützen ruhen; so scheint es paradox, dass der Druck auf jede Stütze nicht ein ganz bestimmter sein soll. Der Grund, warum eine Bestimmtheit der Aufgabe sich uns sogleich als gewiss aufdrängt, liegt aber darin, dass die Arme physische Körper sind, welche am einen Ende belastet, sich biegen; und dieses ist es auch, worauf die folgende Lösung gestützt ist. —. Die Belastung des Vereinigungspunktes P der Arme wird nun folgende Wirkung haben: Da die Arme den Druck der Last nicht auf die Stützen fortpflanzen können, ohne eine gleiche elastische Spannung anzunehmen, was aber nur durch Biegung möglich ist, so wird der belastete Punkt P sich senken, von seinem neuen Orte werden die Arme, alle von einer gemeinschaftlichen Berührungsebene tangirt, ausgehen und sich bis zum Horizonte ihrer Stützpunkte erheben, indem sie auf diese den Druck üben, welcher ihrer Ablenkung von der in P gemeinschaftlichen Berührungsebene und ihrem Biegungsmomente entspricht. Aber die Stützen selbst sind ebenfalls physische Körper, welche die Fähigkeit, den auf sie geübten Druck im Gleichgewicht zu halten, nur dadurch erlangen, dass sie etwas zusamengedrückt werden und so die rückwirkende Elasticität gewinnen.

Durch diese auf die wahre Natur der Sache gestützte Betrachtungsweise wird eine bestimmte Auflösung möglich. Wir wollen dabei nach einander die drei Fälle betrachten: 1) dass die Zusammendrückbarkeit der Stützen sehr klein sei gegen die Biegsamkeit der Arme, wie es z. B. stattfindet, wenn erstere aus Eisen, letztere aus Fischbein bestehen und die Last P klein ist; dann bleibt der Horizont der Stützen ungeändert; 2) dass die Biegsamkeit der Arme sehr klein sei gegen die Zusammendrückbarkeit der Stützen, wie es z. B. stattfindet, wenn erstere starke Eisenarme, letztere aber schraubenförmig gewunden aufrecht stehende Stahlfedern sind; dann bilden die Arme eine etwas gesenkte und im Allgemeinen geneigte Ebene; 3) dass endlich beide Momente zugleich berücksichtigt werden müssen, wobei dann die hohle Fläche der Arme auf Stützpunkten von verschiedener Höhe lagert.

Erster Fall. Die Stützpunkte liegen in Einem Horizonte, die Arme sind von diesen abwärts gehende nach oben hohle physische Linien, welche im gesenkten Punkte P eine gemeinschaftliche Berührungsebene haben. Wir wollen durch die drei Gleichungen *A.* unter Berücksichtigung der Gesetze der Elasticität die drei Elemente bestimmen, durch welche die genannte Berührungsebene festgelegt wird, und dann den Druck auf jeden Stützpunkt aus seiner Ablenkung von dieser Ebene ableiten.

Schneide jene Berührungsebene den Horizont der Stützpunkte in OO' (Taf. VI. Fig. 2.) unter dem Winkel φ, bilde die Linie OO' oder ihre Parallele oo' durch den Ursprung mit der Axe XX' den Winkel β, und sei der senkrechte Abstand dieser Schnittlinie OO' vom Ursprung oder $PM=r$, so hat sich der Punkt P gesenkt um $r\,\mathrm{tg}\,\varphi$. Ferner liegt der Stützpunkt P_1 über der Tangirungsebene um $b_1=(PM+P_1A_1)\,\mathrm{tg}\,\varphi$, oder da P_1A_1 senkrecht auf oo' und $=a_1\sin(\alpha_1-\beta)$ ist, um

$$b_1=[r+a_1\sin(\alpha_1-\beta)]\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Wir müssen nun die Arme als Balken betrachten, welche an ihrem einen Ende P eingemauert sind und deren anderes durch die senkrecht aufwärts wirkende Kraft P_1 um b_1 gehoben wird. Haben alle Arme gleiche prismatische Gestalt und gleiches Biegungsmoment, und vermöge die Krafteinheit bei einem solchen Arme von der Länge $=1$ das Ende, an welchem sie wirkt, um b von der Tangente am andern eingemauerten Ende abzulenken, so wird die Kraft P_1, welche bei dem Balken von der Länge a_1 das Ende um b_1 zu heben vermag, nach den Gesetzen der Elasticität sein:

$$P_1=\frac{b_1}{ba_1{}^3}=\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{ba_1{}^3}[r+a_1\sin(\alpha_1-\beta)],$$

oder

$$P_1=\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{b}\left[\frac{r}{a_1{}^3}+\frac{\sin\alpha_1\cos\beta}{a_1{}^2}-\frac{\cos\alpha_1\sin\beta}{a_1{}^2}\right],$$

und analog für die übrigen Druckkräfte:

$$P_2=\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{b}\left[\frac{r}{a_2{}^3}+\frac{\sin\alpha_2\cos\beta}{a_2{}^2}-\frac{\cos\alpha_2\sin\beta}{a_2{}^2}\right]$$

u. s. w.

Führt man diese Werthe in die obigen drei Gleichungen A. ein und bildet Klammern, so erhält man:

$$P=\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{b}\Big\{r\left(\frac{1}{a_1{}^3}+\frac{1}{a_2{}^3}+\ldots\right)+\cos\beta\left(\frac{\sin\alpha_1}{a_1{}^2}+\frac{\sin\alpha_2}{a^2{}_2}+\ldots\right)$$
$$-\sin\beta\left(\frac{\cos\alpha_1}{a_1{}^2}+\frac{\cos\alpha_2}{a_2{}^2}+\ldots\right)\Big\},$$

$$0=r\left(\frac{\sin\alpha_1}{a_1{}^2}+\frac{\sin\alpha_2}{a_2{}^2}+\ldots\right)+\cos\beta\left(\frac{\sin^2\alpha_1}{a_1}+\frac{\sin^2\alpha_2}{a_2}+\ldots\right)$$
$$-\sin\beta\left(\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{a_1}+\frac{\sin\alpha_2\cos\alpha_2}{a_2}+\ldots\right),$$

$$0=r\left(\frac{\cos\alpha_1}{a_1^2}+\frac{\cos\alpha_2}{a_2^2}+\ldots\right)+\cos\beta\left(\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{a_1}+\frac{\sin\alpha_2\cos\alpha_2}{a_2}+\ldots\right)$$
$$-\sin\beta\left(\frac{\cos^2\alpha_1}{a_1}+\frac{\cos^2\alpha_2}{a_2}+\ldots\right);$$

und wenn wir hierin der Uebersicht halber setzen:

$$s=\frac{1}{a_1^3}+\frac{1}{a_2^3}+\ldots+\frac{1}{a_n^3};$$

$$t=\frac{\sin\alpha_1}{a_1^2}+\frac{\sin\alpha_2}{a_2^2}+\ldots+\frac{\sin\alpha_n}{a_n^2},$$

$$t'=\frac{\cos\alpha_1}{a_1^2}+\frac{\cos\alpha_2}{a_2^2}+\ldots+\frac{\cos\alpha_n}{a_n^2};$$

$$u=\frac{\sin^2\alpha_1}{a_1}+\frac{\sin^2\alpha_2}{a_2}+\ldots+\frac{\sin^2\alpha_n}{a_n},$$

$$u'=\frac{\cos^2\alpha_1}{a_1}+\frac{\cos^2\alpha_2}{a_2}+\ldots+\frac{\cos^2\alpha_n}{a_n};$$

$$v=\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{a_1}+\frac{\sin\alpha_2\cos\alpha_2}{a_2}+\ldots+\frac{\sin\alpha_n\cos\alpha_n}{a_n};$$

so bekommen wir sie unter der Form:

$$P=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{b}\{rs+t\cos\beta-t'\sin\beta\},$$
$$0=rt+u\cos\beta-v\sin\beta,$$
$$0=rt'+v\cos\beta-u'\sin\beta;$$

woraus der Reihe nach die Werthe abgeleitet werden:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{vt-ut'}{u't-vt'},$$

$$r=\frac{v\sin\beta-u\cos\beta}{t},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{b}=\frac{P}{rs+t\cos\beta-t'\sin\beta}.$$

Führt man diese Werthe in die obigen Formeln für P_1, P_2 u. s. w. ein, so bekommt man die Grösse des Drucks auf jeden Stützpunkt.

Die gefundenen Ausdrücke zeigen, dass β, r, $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{b}$ und also auch die Grössen P_1, P_2 u. s. w. ganz unabhängig von der Grösse b der Biegsamkeit sind, dass also die Vertheilung des Drucks auf die Stützpunkte dieselbe bleibt, wenn auch die

Elasticität der Arme noch so klein wird; nur darf sie nicht gleich Null werden, indem sonst auch $\operatorname{tg}\varphi=0$ wird, und der Werth $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{b}=\frac{0}{0}$ den Werth von P_1, P_2 u. s. w. unbestimmt macht. Von dieser Einschränkung werden wir uns noch bei dem zweiten Falle näher überzeugen.

Wenden wir diese Formeln auf ein einfaches Beispiel an, sei nämlich $P=1$,

$$a_1=5,\quad a_2=2,\quad a_3=1,\quad a_4=4;$$
$$\alpha_1=0^\circ,\ \alpha_2=90^\circ,\ \alpha_3=180^\circ,\ \alpha_4=270^\circ;$$

so wird

$$s=1{,}149,\ t=0{,}187,\ t'=-0{,}96,$$
$$u=0{,}75,\ u'=1{,}2,\ v=0;$$

daher

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{0{,}75.0{,}96}{1{,}2\ .0{,}187}\ \text{und}\ \beta=72^\circ 39',$$

ferner

$$r=-1{,}193,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{b}=-2{,}511.$$

Der negative Werth von r und $\operatorname{tg}\varphi$ drückt aus, dass die Durchschnittslinie OO' (1) (Taf. VI. Fig. 3.) die Axe auf der negativen Seite vom Ursprung trifft. — Mit Hülfe dieser Werthe erhält man:

$$P_1=\frac{-2{,}511}{125}(-1{,}193-5\sin\beta)=0{,}120$$

$$P_2=\frac{-2{,}511}{8}(-1{,}193+2\cos\beta)=0{,}187$$

$$P_3=\frac{-2{,}511}{1}(-1{,}193+1\sin\beta)=0{,}599$$

$$P_4=\frac{-2{,}511}{64}(-1{,}193-4\cos\beta)=0{,}094$$

und

$$P_1+P_2+P_3+P_4=1{,}000=P,$$

zum Beweise der richtigen Rechnung.

Es kann vorkommen, dass der Druck auf einzelne Punkte negativ wird, wie in folgendem Beispiele. Sei (Taf. VI. Fig. 4.) $P=1$,

$$a_1 = 5, \qquad a_2 = 1, \qquad a_3 = 10, \qquad a_4 = 5;$$
$$\alpha_1 = 36^0 52' 11'',6, \ \alpha_2 = 180^0, \ \alpha_3 = 180^0 + \alpha_1, \ \alpha_4 = -\alpha_1;$$

so dass

$$\sin\alpha_1 = 0,6, \ \cos\alpha_1 = 0,8;$$

so erhält man

$$\beta = 77^0 44', \ r = -1,53, \ \frac{\operatorname{tg}\varphi}{b} = -1,61;$$

$$P_1 = 0,06, \ P_2 = 0,88, \ P_3 = -0,01, \ P_4 = 0,07;$$

zusammen

$$= 1,01 - 0,1 = 1,00.$$

In einem solchen Falle fällt die Tangirungsebene bei P oberhalb der Stützpunkte mit negativem Drucke, so dass die Arme, welche nach Annahme mit dem einen Ende den Stützpunkt berühren, hier nicht aufwärts gedrückt, sondern abwärts gezogen werden. Soll dagegen eine solche feste Verbindung mit den Stützpunkten nicht stattfinden, so würden die betreffenden Arme jene Tangirungsebene nicht verlassen und sich über ihre früheren Stützen erheben, so dass diese unbelastet blieben. Man muss dann mit Weglassung dieser Punkte eine neue Berechnung vornehmen, also in unserem Beispiele die Last P auf die drei Punkte P_1, P_2 und P_4 vertheilen, wobei das Resultat:

$$P_1 = 0,10, \ P_2 = 0,80, \ P_4 = 0,10$$

erhalten wird.

Zweiter Fall. Es bilden die Arme unveränderlich eine Ebene, welche auf den durch den Druck P etwas gesenkten Stützpunkten lagert. Diese Ebene schneide den ursprünglichen Horizont der Stützpunkte in der Linie OO' (Taf. VI. Fig. 2.) unter dem Winkel φ; und diese Linie, welche den Abstand r von dem Ursprung habe, bilde den Winkel β mit der Axe XX'. Die Grösse der Senkung jedes Punktes P_1, P_2 u. s. w. sei e_1, e_2 u. s. w., welche ausgedrückt wird, wie früher, durch die Gleichung

$$e_1 = [r + a_1 \sin(\alpha_1 - \beta)] \operatorname{tg}\varphi.$$

Sei nun e die Länge, um welche die Krafteinheit einen Stützpunkt niederdrücken kann, und bieten alle gleichen Widerstand dar, so ist die Kraft, welche einen solchen um e_1 senkt,

$$P_1 = \frac{e_1}{e} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{e} [r + a_1 \sin(\alpha_1 - \beta)],$$

oder

$$P_1 = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{e} [r + a_1 \sin\alpha_1 \cos\beta - a_1 \cos\alpha_1 \sin\beta].$$

Dieser Werth und die analogen für die übrigen Druckkräfte in die drei Gleichungen A. eingeführt, geben ähnlich wie vorhin:

$$P=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{e}\{rn+\cos\beta(a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+\ldots)-\sin\beta(a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+\ldots)\},$$

$$0=r(a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+\ldots)+\cos\beta(a_1^2\sin^2\alpha_1+a_2^2\sin^2\alpha_2+\ldots)$$
$$-\sin\beta(a_1^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1+a_2^2\sin\alpha_2\cos\alpha_2+\ldots),$$

$$0=r(a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+\ldots)+\cos\beta(a_1^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1+a_2^2\sin\alpha_2\cos\alpha_2+\ldots)$$
$$-\sin\beta(a_1^2\cos^2\alpha_1+a_2^2\cos^2\alpha_2+\ldots);$$

und setzen wir hierin:

$n=$ der Anzahl der Stützpunkte,

$t=a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+\ldots+a_n\sin\alpha_n,$

$t'=a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+\ldots+a_n\cos\alpha_n;$

$u=a_1^2\sin^2\alpha_1+a_2^2\sin^2\alpha_2+\ldots+a_n^2\sin^2\alpha_n,$

$u'=a_1^2\cos^2\alpha_1+a_2^2\cos^2\alpha_2+\ldots+a_n^2\cos^2\alpha_n;$

$v=a_1^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1+a_2^2\sin\alpha_2\cos\alpha_2+\ldots+a_n^2\sin\alpha_n\cos\alpha_n;$

so erhalten obige Gleichungen die Gestalt:

$$P=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{e}(rn+t\cos\beta-t'\sin\beta),$$
$$0=rt+u\cos\beta-v\sin\beta,$$
$$0=rt'+v\cos\beta-u'\sin\beta.$$

Hieraus erhalten wir:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{vt-ut'}{u't-vt'},$$
$$r=\frac{v\sin\beta-u\cos\beta}{t},$$
$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{e}=\frac{P}{rn+t\cos\beta-t'\sin\beta};$$

welche Resultate der Form nach mit denen bei 1) gefundenen übereinstimmen, der Grösse nach aber davon verschieden sind, da die einzelnen Buchstaben andere Werthe ausdrücken. — Mit diesen nun bekannten Grössen lassen sich die einzelnen Druckkräfte nach den obigen Formeln wie vorhin bestimmen.

Auch hier ist sichtbar, dass die Werthe von β, r, $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{e}$ und somit die von $P_1, P_2, \ldots P_n$ durchaus von der Grösse e der Elasticität unabhängig sind, dass sie also auch für jede noch so kleine Zusammendrückbarkeit dieselben bleiben, nur nicht für

$e=0$; weil wie vorhin dann $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{e}=\frac{0}{0}$, und hierdurch die Druckkräfte unbestimmt würden. — Wollte man in beiden Fällen die erhaltenen Grössen auch für die Grenzwerthe $b=0$ und $e=0$ gelten lassen, so müssten beide gleich sein. Denn im ersten Falle war von vornherein $e=0$ angenommen und $b=0$ ein Grenzwerth; im zweiten Falle aber war $b=0$ die ursprüngliche Annahme und $e=0$ der Grenzwerth; da also jedesmal $b=0$ und $e=0$ ist, so müssten auch die bestimmten Grössen der Druckkräfte übereinstimmen; dieses aber findet nicht statt, und es müssen daher, wenn die Tragarme und deren Stützen beide ganz unelastisch sind, die Druckkräfte wirklich unbestimmt sein.

Betrachten wir als Beispiel dieselbe Aufgabe wie vorhin, nehmen also $P=1$,

$$a_1=5, \quad a_2=2, \quad a_3=1, \quad a_4=4;$$
$$\alpha_1=0^0, \; \alpha_2=90^0, \; \alpha_3=180^0, \; \alpha_4=270^0;$$

so wird

$$t=-2, \; t'=4, \; u=20, \; u'=26, \; v=0;$$

und daraus

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{80}{52}, \text{ also } \beta=56^0 59',$$

ferner

$$r=5{,}450, \; \frac{\operatorname{tg}\varphi}{e}=0{,}0576,$$

und endlich

$$P_1=0{,}072, \; P_2=0{,}377, \; P_3=0{,}362, \; P_4=0{,}189,$$

deren Summe

$$=1{,}000=P$$

ist.

Es fällt also hier die Linie OO' (2) (Taf. VI. Fig. 3.) auf die positive Seite der Axe, und die der Last nahe Stütze P_3 wird weniger belastet, als im ersten Falle, weil der Einfluss der Nähe auf die Grösse des Drucks geringer geworden ist.

Auch hier ist der Fall möglich, dass einzelne Druckkräfte negativ werden. Sei z. B. (Taf. VI. Fig. 5.) $P=1$,

$$a_1=10, \; a_2=5, \qquad a_3=1, \quad a_4=5;$$
$$\alpha_1=0^0, \; \alpha_2=36^0 52' 11'',6, \; \alpha_3=180^0, \; \alpha_4=-\alpha_2;$$

so erhält man

$$t=10\sin 0^\circ+4-1\sin 0^\circ-4=0,\ t'=15,\ u=32,\ u'=119,$$
$$v=100\sin 0^\circ+12-1\sin 0^\circ-12=0;$$

und daraus

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{32.15}{0}=\infty\,,\ \text{also}\ \beta=90^\circ,$$

$$r=\frac{(100\sin 0^\circ-1\sin 0^\circ)-32\cos 90^\circ}{10\sin 0^\circ-1\sin 0^\circ}=\frac{99-32}{9}=7{,}444,\ \frac{\operatorname{tg}\varphi}{e}=0{,}0677.$$

Hierdurch wird

$$P_1=-0{,}173,\ P_2=0{,}301,\ P_3=0{,}571,\ P_4=0{,}301,$$

zusammen

$$=1{,}173-0{,}173=1{,}000=P.$$

In diesem Falle schneidet, wie in dem ersten Falle, die Ebene der Arme zwischen dem Angriffspunkte der Last und einem Stützpunkte P_1 in den ursprünglichen Horizont der Stützpunkte ein und geht bei P_1 über dem Stützpunkte weg. Bei einer festen Verbindung von beiden wird die Stütze mit einer Kraft $P_1=-0{,}173$ ausgedehnt, bei einem losen Auflagern dagegen muss eine neue Berechnung mit Ausscheidung des Stützpunktes P_1 vorgenommen werden, welche uns hier auf den einfachen Fall von drei Stützpunkten bringt, und die Resultate $P_2=\frac{1}{8}$, $P_3=\frac{3}{4}$, $P_4=\frac{1}{8}$ liefert.

Dritter Fall. Es sei die Elasticität der Arme und die der Stützen zugleich zu berücksichtigen; dann lagern die Enden der gekrümmten Arme auf den etwas niedergedrückten Stützpunkten. Sei auch hier wieder die Lage der in dem Punkte P an die Arme tangirenden Ebene durch die drei Grössen β, r und φ festgelegt, seien die Abstände der Armenden von jener Ebene b_1, b_2 u. s. w. und ihre Abstände von dem ursprünglichen Horizonte der Stützpunkte oder die Senkung der letzteren e_1, e_2 u. s. w., so ist

$$b_1+e_1=[r+a_1\sin(\alpha_1-\beta)]\operatorname{tg}\varphi;$$

ferner ist wie oben

$$b_1=P_1\cdot b.a_1^3\ \text{und}\ e_1=P_1 e,$$

daher

$$P_1(ba_1^3+e)=\operatorname{tg}\varphi[r+a_1\sin(\alpha_1-\beta)],$$

oder

$$P_1=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{ba_1^3+e}[r+a_1\sin(\alpha_1-\beta)].$$

Verfahren wir mit diesen und den analogen Ausdrücken für P_2 u. s. w. ebenso wie früher, so bekommen wir die drei Gleichungen A. unter der Form:

$$P = \operatorname{tg}\varphi \left\{ r\left(\frac{1}{ba_1{}^3+e}+\frac{1}{ba_2{}^3+e}+\dots\right)+\cos\beta\left(\frac{a_1\sin\alpha_1}{ba_1{}^3+e}+\frac{a_2\sin\alpha_2}{ba_2{}^3+e}+\dots\right)\right.$$
$$\left.-\sin\beta\left(\frac{a_1\cos\alpha_1}{ba_1{}^3+e}+\frac{a_2\cos\alpha_2}{ba_2{}^3+e}+\dots\right)\right\},$$

$$0=r\left(\frac{a_1\sin\alpha_1}{ba_1{}^3+e}+\frac{a_2\sin\alpha_2}{ba_2{}^3+e}+\dots\right)+\cos\beta\left(\frac{a_1{}^2\sin^2\alpha_1}{ba_1{}^3+e}+\frac{a_2{}^2\sin^2\alpha_2}{ba_2{}^3+e}+\dots\right)$$
$$-\sin\beta\left(\frac{a_1{}^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{ba_1{}^3+e}+\frac{a_2{}^2\sin\alpha_2\cos\alpha_2}{ba_2{}^3+e}+\dots\right),$$

$$0=r\left(\frac{a_1\cos\alpha_1}{ba_1{}^3+e}+\frac{a_2\cos\alpha_2}{ba_2{}^3+e}+\dots\right)+\cos\beta\left(\frac{a_1{}^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{ba_1{}^3+e}+\frac{a_2{}^2\sin\alpha_2\cos\alpha_2}{ba_2{}^3+e}+\dots\right)$$
$$-\sin\beta\left(\frac{a_1{}^2\cos^2\alpha_1}{ba_1{}^3+e}+\frac{a_2{}^2\cos^2\alpha_2}{ba_2{}^3+e}+\dots\right),$$

und wenn wir darin

$$s=\frac{1}{ba_1{}^3+e}+\frac{1}{ba_2{}^3+e}+\dots+\frac{1}{ba_n{}^3+e};$$

$$t=\frac{a_1\sin\alpha_1}{ba_1{}^3+e}+\frac{a_2\sin\alpha_2}{ba_2{}^3+e}+\dots+\frac{a_n\sin\alpha_n}{ba_n{}^3+e},$$

$$t'=\frac{a_1\cos\alpha_1}{ba_1{}^3+e}+\frac{a_2\cos\alpha_2}{ba_2{}^3+e}+\dots+\frac{a_n\cos\alpha_n}{ba_n{}^3+e};$$

$$u=\frac{a_1{}^2\sin^2\alpha_1}{ba_1{}^3+e}+\frac{a_2{}^2\sin^2\alpha_2}{ba_2{}^3+e}+\dots+\frac{a_n{}^2\sin^2\alpha_n}{ba_n{}^3+e},$$

$$u'=\frac{a_1{}^2\cos^2\alpha_1}{ba_1{}^3+e}+\frac{a_2{}^2\cos^2\alpha_2}{ba_2{}^3+e}+\dots+\frac{a_n{}^2\cos^2\alpha_n}{ba_n{}^3+e};$$

$$v=\frac{a_1{}^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{ba_1{}^3+e}+\frac{a_2{}^2\sin\alpha_2\cos\alpha_2}{ba_2{}^3+e}+\dots+\frac{a_n{}^2\sin\alpha_n\cos\alpha_n}{ba_n{}^3+e}$$

setzen, so bekommen wir sie fast unter der frühern Form:

$$P=\operatorname{tg}\varphi\{rs+t\cos\beta-t'\sin\beta\},$$
$$0=rt+u\cos\beta-v\sin\beta,$$
$$0=rt'+v\cos\beta-u'\sin\beta.$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{vt-ut'}{u't-vt'},$$

$$r=\frac{v\sin\beta-u\cos\beta}{t},$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{P}{rs+t\cos\beta-t'\sin\beta};$$

und mit Hülfe dieser bekannten Werthe können nun die Druckkräfte berechnet werden. — Man sieht aus den erhaltenen Formeln, dass in diesem dritten Falle die Werthe von β, r, φ und mithin auch von P_1, P_2 u. s. w. nicht unabhängig sind von der Grösse der Biegsamkeit der Arme b und der Zusammendrückbarkeit der Stützen e, weil hier b und e nicht als allgemeine Factoren verschwinden. Es genügt jedoch, wenn das Verhältniss zwischen b und e gegeben ist, weil beide unter gleichen Potenzen im Nenner vorkommen. — Ferner gehen die letzten Formeln in die von 1) oder 2) über, wenn man $e=0$ oder $b=0$ setzt, so dass die letzte Auflösung die allgemeine ist und jene als besondere Fälle in sich begreift.

Betrachten wir auch hier das obige Beispiel, setzen also $P=1$,

$$a_1=5,\ a_2=2,\ a_3=1,\quad a_4=4;$$
$$\alpha_1=0,\ \alpha_2=90^0,\ \alpha_3=180^0,\ \alpha_4=270^0;$$

und nehmen ferner

$$b=0{,}01,\ e=0{,}1;$$

so wird

$$s=16{,}739,\ t=5{,}707,\ t'=-5{,}386,\ u=43{,}839,\ u'=27{,}616,\ v=0;$$

daraus

$$\operatorname{tg}\beta=1{,}498 \text{ und } \beta=56^0 17',\ r=-4{,}264,\ \operatorname{tg}\varphi=-0{,}0157$$
$$\text{und } \varphi=-53'56'',$$

und endlich

$$P_1=0{,}098,\ P_2=0{,}275,\ P_3=0{,}490,\ P_4=0{,}137,$$

deren Summe $1{,}000=P$ ist.

Diese Werthe fallen zwischen die von 1) und 2), wie auch das Verhältniss $\frac{e}{b}=10$ zwischen das $\frac{e}{b}=0$ und $\frac{e}{b}=\infty$ fällt. Die folgende Tabelle, sowie auch theilweise Taf. VI. Fig. 3. gibt eine Uebersicht der in den drei Fällen erhaltenen Resultate, wenn man, um φ zu finden, auch in 1), $b=0{,}01$ und in 2), $e=0{,}1$ annimmt.

	1)	3)	2)	
r	$-1,193$	$-4,264$	$5,450$	
β	$72^{0}39'$	$56^{0}17'$	$56^{0}59'$	
φ	$-1^{0}26'$	$-54'$	$20'$	
P_1	0,12	0,10	0,07	
P_2	0,19	0,27	0,38	
P_3	0,60	0,49	0,36	
P_4	0,09	0,14	0,19	

Auf ganz ähnliche Weise kann man den Druck auf jeden Stützpunkt bestimmen, wenn die Last auf einer Ebene statt auf Armen liegt und diese Ebene selbst entweder wieder auf einzelnen Stützen oder auf einem Körper, dessen obere Fläche eben ist, auflagert; doch müsste für diesen Fall vorher die Biegungsgestalt einer elastischen Ebene, auf welche mehrere Kräfte wirken, untersucht werden.

Ich will noch kurz die Ansichten erwähnen, welche ich über diese Aufgabe auffinden konnte. Unger in seinen „Uebungen aus der Statik und Mechanik, Berlin 1831" sagt bei Gelegenheit der ganz ähnlichen Aufgabe über die Vertheilung des Drucks auf drei Punkte, welche in eine gerade Linie fallen, dass man, um die fehlende Gleichung der unbestimmten Aufgabe zu gewinnen, verschiedene Hypothesen angenommen habe, nämlich dass die Linie elastisch sei, oder dass die Vertheilung des Drucks eine möglichst gleichförmige sein müsse. Crelle in seinem „Journale für Mathematik, I. Band, Berlin 1826, Seite 130," bestimmt bei derselben Aufgabe die Grenzen für jede der drei Druckkräfte unter der Voraussetzung, dass sie an keinem Stützpunkte negativ sein dürfe. Jedoch spricht er in dieser Abhandlung die Ansicht aus, dass die Unbestimmtheit nur desswegen paradox erscheine, weil die unnatürliche Annahme einer unbiegsamen Linie gemacht worden, dass aber mit Berücksichtigung der Biegsamkeit die Druckkräfte vollkommen bestimmt wären (nach Eytelweins Statik fester Körper §. 341—349 und Anhang §. 123—129.). Endlich gibt er noch den Weg an, auf welchem bei unserer Aufgabe die Grenzen für jede Druckkraft bestimmt werden können.

Ueber unsere Aufgabe selbst konnte ich nur Eine Abhandlung finden, nämlich von Euler „de pressione ponderis in planum, cui incumbit" in den „Novi Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae pro anno 1773". Der Verfasser sagt darin, dass wenn die ebene Platte, auf welcher die Last liegt, auf mehr als drei Stützpunkten ruht, die Bestimmung der Druckkräfte auf die einzelnen Punkte ungewiss scheine, denn es würden doch nur die drei höchsten sein, weil kaum eine vollkommene Gleichheit der Füsse angenommen werden dürfe. Nehme man, um diese Schwierigkeit zu umgehen, an, dass die untere Fläche jener Platte nicht vollkommen hart, sondern gleichsam mit einem weichen Ueberzuge bedeckt sei, so würden die Füsse in diesen eindringen, und zwar, wie man mit Sicherheit voraussetzen könne, im Verhältniss zu dem Drucke auf diesen Stützpunkt. Damit jedoch Niemand einen Anstand an jenem Ueberzuge nehme, sei es ja erlaubt, die demselben zugeschriebene Nachgiebigkeit beliebig zu verkleinern, so dass er zuletzt die Beschaffenheit der harten Platte selbst annehme.

Euler also findet die Unbestimmtheit in der Unvollkommenheit der physischen Ausführung, und nachdem er die Annahme des weichen Ueberzugs gemacht, sucht er dadurch, dass er die Nachgiebigkeit immer kleiner werden und zuletzt verschwinden lässt, wieder auf die rein mathematische Anschauung zurückzukommen; während umgekehrt die Unbestimmtheit nur bei rein mathematischer Anschauung besteht, bei physikalischer aber verschwindet. — Dass bei rein mathematischer Anschauung wirklich unendlich viele Lösungen möglich sind, davon kann man sich leicht durch folgende Betrachtung überzeugen: Ist die belastete Platte an den Stützpunkten nicht auf Füsse gelegt, sondern an Schnüren aufgehängt, welche über Rollen gehen und auf der andern Seite gewichtslose Schalen tragen, in denen die Gewichte so vertheilt sind, dass sie der Last das Gleichgewicht halten, so kann man die Vertheilung in den Schalen auf unendlich viele Arten vornehmen, wenn nur jenen drei Gleichungen *A.* Genüge geleistet wird. Hier werden die Druckkräfte auf die einzelnen Punkte nicht durch die Elasticität der Stützen, sondern durch Gewichte aufgehoben, welche bei kleinen Verrückungen ihre Grösse nicht ändern; es sind also nur die Bedingungen der mathematischen Aufgabe erfüllt und es tritt die Unbestimmtheit der rein mathematischen Lösung ein. — Eulers Hülfsbetrachtung mit dem weichen Ueberzuge stimmt dem Wesen nach ganz mit unserer zweiten Annahme überein; aber Euler nimmt noch an, dass die durch sie erhaltenen Resultate auch für vollkommen harte Platten gelten, was jedoch, wie wir oben gezeigt haben, unzulässig ist, da, wenn man sich auf einem andern Wege dieser Grenze nähert und die nahe an der Grenze erhaltenen Werthe auch für die Grenze selbst gelten liesse, verschiedene bestimmte Resultate für denselben Fall richtig wären. —

Die Aufgabe ist daher vollkommen unbestimmt, wenn man sie nur aus dem mathematischen Gesichtspunkt betrachtet, und wird nur dadurch bestimmt, dass man die der Natur gemässe Biegsamkeit und Elasticität zu Hülfe nimmt.

Durch dieselbe Hülfe können noch andere, sonst unbestimmte Aufgaben gelöst werden, wovon wir zwei Beispiele anführen wollen:

Erste Aufgabe. Ein Balken ist an beiden Enden A_1 und A_2 (Taf. VI. Fig. 6.) befestigt, im Punkte B wirkt auf

denselben eine Kraft P in seiner Richtung; was ist der Zug P_1 und der Druck P_2 an jedem Endpunkte A_1 und A_2?

Werde durch die Kraft P der Punkt B nach C um $BC=e_1$ heruntergedrückt, so wird das Stück $A_1\,B=a_1$ des Balkens um e_1 ausgedehnt, und das Stück $A_2B=a_2$ um e_1 zusammengedrückt. Wenn nun die Krafteinheit einen Balken von der Länge 1 um e ausdehnt oder zusammendrückt, so muss

$$P_1=\frac{e_1}{ea_1} \text{ und } P_2=\frac{e_1}{ea_2} \text{ sein,}$$

und da

$$P_1+P_2=P \text{ oder } \frac{e_1(a_1+a_2)}{ea_1\,a_2}=P$$

ist, auch

$$e_1=\frac{Pe\,a_1\,a_2}{e_1(a_1+a_2)}.$$

Dieser Werth, in die obigen Ausdrücke eingesetzt, gibt

$$P_1=P\frac{a_2}{a_1+a_2} \text{ und } P_2=P\frac{a_1}{a_1+a_2},$$

oder die Kraft vertheilt sich ebenso auf die beiden Endpunkte, als wenn ihre Richtung nicht in die Richtung des Balkens fiele.

Zweite Aufgabe. **Eine Last P (Taf. VI. Fig. 7.) wird durch eine senkrechte Stütze und zwei schiefe Streben, welche auf Einer geraden Linie fussen, getragen; welches ist der Druck in der Richtung jedes Balkens?**

Sei $AB=a$ die Länge der senkrechten Stütze und $AD=AD'=d$ die der schiefen Streben, werde der Punkt A nach C um $AC=e_1$ herabgedrückt, so nehmen die Streben die Länge DC an, werden also, wenn CE senkrecht auf AD um $AE=e_2$ verkürzt. Da aber $AE:AC=AB:AD$, oder $e_2:e_1=a:d$, so finden wir

$$e_2=\frac{e_1\,a}{d}.$$

Sei nun der Druck in der Richtung der Stütze $=P_1$, in der jeder Strebe $=P_2$, so ist

$$P_1=\frac{e_1}{ea} \text{ und } P_2=\frac{e_2}{ed}=\frac{e_1a}{ed^2},$$

und da

$$P_1 + 2 P_2 \cdot \frac{a}{d} = P,$$

so ist auch

$$\frac{e_1}{ea} + 2 \frac{e_1 a^2}{ed^3} = \frac{e_1 (d^3 + 2a^3)}{ead^3} = P,$$

woraus

$$e_1 = e \frac{Pad^3}{d^3 + 2a^3}.$$

Dieses, in obige Ausdrücke eingesetzt, gibt endlich

$$P_1 = P \cdot \frac{d^3}{d^3 + 2a^3} \text{ und } P_2 = P \cdot \frac{a^2 d}{d^3 + 2a^3}.$$

Sei z. B.

$$a = 3, \; d = 5;$$

so wird

$$P_1 = 0{,}70 P, \; P_2 = 0{,}25 P.$$

XXV.

Ableitung der Sätze über Supplementarsehnen und conjugirte Durchmesser der Ellipse aus einer einfachen geometrischen Betrachtung.

Von
Herrn Chr. Wiener,
Lehrer der Mathematik an der höhern Gewerbschule zu Darmstadt.

Diese Sätze, deren Entwickelung auf analytischem Wege einige Weitläufigkeit verursacht, sind sehr leicht zu beweisen, wenn man die Ellipse als diejenige Kurve betrachtet, welche durch Projection eines Kreises auf eine Ebene entsteht. Alle Sätze nebst Beweis lassen sich dann mit einem einzigen Gedanken übersehen.

Der Mittelpunkt O des Kreises $AB'A'$ (Taf. VI. Fig. 8.) liege in der Projectionsebene ABA', und er selbst bilde mit dieser Ebene den Winkel $B'OB=\alpha$, die Durchschnittslinie AA' sei die Axe X, die im Mittelpunkte errichteten Senkrechten OB' und OB die Axen Y. Die Coordinaten des laufenden Punktes M' des Kreises in seiner Ebene seien $OP=X$ und $PM'=Y$, und die seiner Projection M: $OP=x$ und $PM=y$; so ist $x=X$ und $y=Y\cos\alpha$. Die Gleichung des Kreises ist

$$X^2+Y^2=a^2,$$

wenn $a=OA$ sein Halbmesser, und daraus folgt für die Projection

$$x^2+\frac{y^2}{\cos^2\alpha}=a^2,$$

oder, mit $a^2\cos^2\alpha$ multiplicirt,

$$y^2a^2+x^2.a^2\cos^2\alpha=a^2.a^2\cos^2\alpha,$$

oder endlich, wenn wir die Ordinate der Ellipse im Ursprung $a\cos\alpha=b$ setzen wollen:

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Die Projection ist also eine Ellipse, weil diese Gleichung mit derjenigen übereinstimmt, welche aus dem gewöhnlich als characteristische Eigenschaft angenommenen Verhalten zu ihren Brennpunkten hergeleitet wird.

Wir wollen nun aus dieser Betrachtung die folgenden Sätze herleiten:

1.) Der Werth der Subtangente ist $\frac{a^2-x'^2}{x'}$, also unabhängig von b.

Liegt der Kreis (Taf. VI. Fig. 9.) vorerst in der Projectionsebene, so ist, wenn X' und Y' die Coordinaten des Berührungspunktes M' der Tangente und PT die Subtangente,

$$X'.\mathrm{stg}=Y'^2=a^2-X'^2,$$

daher

$$PT=\mathrm{stg}=\frac{a^2-X'^2}{X'}.$$

Dreht sich dann der Kreis, so bleibt die Projection seiner Tangente die Tangente seiner Projection, und es bleibt für die Ellipse:

$$\mathrm{stg}=\frac{a^2-x'^2}{x'}$$

unabhängig von dem Neigungswinkel α oder von b.

2.) Bilden die Supplementarsehnen AL und $A'L$ (Taf. IV. Fig. 10.) über der grossen Axe mit derselben die Winkel $A'AL=\beta$ und $AA'L=\beta'$, so ist $\mathrm{tg}\beta.\mathrm{tg}\beta'=-\frac{b^2}{a^2}$.

Da sie sich in dem Kreise unter einem rechten Winkel $AL'A'$ schneiden, so ist für denselben:

$$\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}B'=-1.$$

Da sich aber die Producte der beiden Tangenten in der Ellipse und im Kreise verhalten wie $y'^2:Y'^2$, d. i. wie $b^2:a^2$, so ist

$$\mathrm{tg}\beta.\mathrm{tg}\beta'=-1.\frac{b^2}{a^2}.$$

3.) Zieht man in der Ellipse zwei mit einem Paare Supplementarsehnen parallele Gerade durch den Mittelpunkt, so sind diese conjugirte Durchmesser, d. h. jeder halbirt das System der mit dem andern parallel gezogenen Sehnen.

Denn zieht man (Taf. VI. Fig. 10.) im Kreise solche mit einem Paare von Supplementarsehnen $A'L'$ und AL' parallele Durchmesser OM' und ON', so sind sie, weil sie auf einander senkrecht stehen, conjugirte Durchmesser. Da nun auch die Projectionen aller dieser Sehnen parallel bleiben und sich ebenfalls halbiren müssen, so sind auch in der Ellipse die mit einem Paare Supplementarsehnen $A'L$ und AL parallel gezogenen Durchmesser OM und ON conjugirte. — Für einen schiefen Durchmesser der Ellipse findet diese Eigenschaft ebenfalls statt, weil sie in dem Kreise jedem Durchmesser zukommt.

5.) Die am Endpunkte eines Durchmessers der Ellipse gezogenen Tangenten sind parallel mit dem conjugirten Durchmesser.

Dieses folgt aus der gleichen Eigenschaft des Kreises (Taf. VI. Fig. 10.)

6.) Die Summe der Quadrate zweier conjugirten Durchmesser ist constant und gleich der Summe der Quadrate der beiden Hauptaxen.

Es ist nämlich, wenn (Taf. VI. Fig. 10.) $OP=QN'=m$, $OQ=PM'=n$, $m^2+n^2=a^2$; und wenn die beiden halben Durchmesser $OM=a'$ und $ON=b'$ seien,

$$OM^2=OP^2+PM^2 \text{ und } ON^2=OQ^2+QN^2,$$

oder

$$a'^2=m^2+n^2\cos^2\alpha \text{ und } b'^2=n^2+m^2\cos^2\alpha,$$

und hieraus

$$a'^2+b'^2=a^2+a^2\cos^2\alpha=a^2+b^2.$$

7.) Jedes um die Ellipse über zwei conjugirte Durchmesser beschriebene Parallelogramm ist gleich dem Rechtecke aus den beiden Hauptaxen.

Da jedes solches Parallelogramm durch Projection aus einem um den Kreis beschriebenen Quadrate von dem constanten Inhalte $4a^2$ entsteht, so muss es stets

$$=4a^2\cos\alpha=2a\times 2b$$

sein.

8.) Die Gleichung der Ellipse, bezogen auf ein Paar conjugirte Durchmesser, ist mit der auf die Hauptaxe bezogenen analog, nämlich

$$a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2.$$

Die Gleichung des Kreises, bezogen auf ein beliebiges Paar conjugirter Durchmesser, ist $X^2 + Y^2 = a^2$. In der Projection wird aus X und Y, x und y, aus den conjugirten Durchmessern a und a wird a' und b', und da

$$X : x = a : a' \quad \text{und} \quad Y : y = a : b',$$

so wird die Gleichung der Ellipse:

$$x^2 \frac{a^2}{a'^2} + y^2 \frac{a^2}{b'^2} = a^2,$$

oder

$$a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2.$$

9.) Sind OM und ON (Taf. VI. Fig. 9.) ein Paar conjugirte halbe Durchmesser, und trifft die in M gezogene Tangente die beiden Axen in T und t, so ist

$$MT \times Mt = ON^2.$$

Im Kreise ist $M'T \times M't' = OM'^2 = ON'^2$. Da nun Tt' und ON' im geneigten Kreise mit der Projectionsebene beide denselben Winkel δ bilden und desswegen $ON = ON' . \cos\delta$, $MT = M'T . \cos\delta$, $Mt = M't' . \cos\delta$, so folgt aus

$$M'T . \cos\delta \times M't' . \cos\delta = ON'^2 . \cos^2\delta$$

auch

$$MT \times Mt = ON^2,$$

Dieser Satz gilt noch, wenn statt der Hauptaxe irgend ein Paar conjugirter Durchmesser der Ellipse genommen wird, weil er auch im Kreise für jedes Paar conjugirter Durchmesser gilt.

XXVI.

Ueber die grösste und die kleinste Ellipse, welche durch zwei gegebene Punkte geht und zwei gegebene Gerade berührt.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Vergleicht man diese Aufgabe mit den beiden oft behandelten über die einem Viereck eingeschriebene grösste und umgeschriebene kleinste Ellipse, zwischen welchen sie, sozusagen, mitteninne steht, und erwägt, dass die Mittelpunktscurve hier weder, wie in der ersten, eine gerade Linie, noch auch, wie in der letzten, ein Kegelschnitt, sondern ein System von zwei Kegelschnitten ist, so kann es scheinen, dass die Auflösung derselben verwickelterer Natur als die beiden ersteren sei. In der That aber ist dieselbe wenigstens ebenso einfach als jene, und einfacher als diese, indem die Konstruktion ausser dem Lineale nur noch einen beliebigen festen Kreis, dessen Mittelpunkt gegeben ist, erfordert.

Es seien in Taf. VII. Fig. 1. a und b die beiden gegebenen Punkte; sa_1 und sb_1 die gegebenen Geraden, welche die Verbindungslinie der ersteren in den Punkten a_1 und b_1 schneiden; so gibt es, wofern die Aufgabe nicht überhaupt unmöglich werden soll, wie später gezeigt wird, allemal zwei Punkte p und q, welche, als zugeordnete, sowohl mit a und b, als auch mit a_1 und b_1 harmonisch sind. Wegen dieser Eigenschaft sind 1) die Punkte p und q zugeordnete harmonische Pole der Geraden ab, und 2) die Geraden sp und sq zugeordnete harmonische Polaren des Punktes s, in Bezug auf den fraglichen Kegelschnitt, d. h. die harmonischen Polaren von p, q gehen wechselsweise durch die Punkte q, p; und die harmonischen Pole von sp, sq liegen wechselsweise auf sq, sp.

Gesetzt nun: p sei nicht selbst der harmonische Pol von sq, so ist dieser Pol ein von p verschiedener Punkt der Geraden sp; nun geht aber die harmonische Polare des Punktes q durch den Punkt p und auch durch den harmonischen Pol von sq; also fällt diese Polare mit der Geraden sp zusammen, d. h. q ist der harmonische Pol von sp; und umgekehrt: ist q nicht der harmonische Pol von sp, so ist p der harmonische Pol von sq. Dass aber in einem zugleich p von sq und q von sp harmonische Pole sind, kann offenbar nur dann stattfinden, wenn s der harmonische Pol von ab, d. h. der Kegelschnitt entweder sich auf die Strecke $a_1 b_1$ oder auf das System der Geraden sa, sb reducirt.

Es zerfallen demnach sämmtliche Kegelschnitte, welche durch a und b gehen und sa_1, sb_1 berühren, in zwei völlig getrennte Gruppen: in Bezug auf alle, welche der einen angehören, ist q der harmonische Pol von sp, in Bezug auf die der anderen ist p der harmonische Pol von sq.

Wir fassen zunächst die erste Gruppe ins Auge, welcher auch die Figuren Taf. VII. Fig. 1., Taf. VII. Fig. 2., Taf. VII. Fig. 3. entsprechen.

Gleichung der Mittelpunktscurve.

Es sei (Taf. VII. Fig. 1.) M der Mittelpunkt irgend eines Kegelschnitts der ersten Gruppe, m und m_1 die Mittelpunkte der Strecken ab und $a_1 b_1$, sg parallel ab, und ausserdem seien die Geraden sm_1 und Mm gezogen, welche letztere die Geraden sp, sg, sm_1 bezüglich in den Punkten k, g, f schneide; ferner sei mh parallel sp und treffe sm_1 in h; die Gerade vw, welche ab in v, sm_1 in w trifft, sei ebenfalls parallel sp und gehe durch den Punkt M. Endlich seien noch parallel ab die Gerade wi, welche mh in d und sp in i trifft, und Mk gezogen, deren Durchschnittspunkte sp und kq x und z heissen. Man setze

$$sp = \varrho, \quad mh = x, \quad Mv = px = r, \quad Mw = p.$$

Diess vorausgesetzt, so kann man offenbar die Segmente p und r als die Coordinaten des Punktes M betrachten, indem durch diese, von den festen Geraden sm_1 und mm_1 begrenzten Strecken der Punkt M auf lineäre und einzige Weise bestimmt ist. Setzt man nämlich fest, dass für die Lage dieses Punktes im Winkel α sowohl p als r positiv sind, so wird derselbe in den Winkeln β, γ oder δ liegen müssen, jenachdem p und r mit den Zeichen (+) und (—), (—) und (+) oder (—) und (—) behaftet sind.

Da m der Mittelpunkt der Sehne ab ist, so ist die Gerade Mm, der Richtung nach, der der Richtung von ab zugeordnete Durchmesser des gedachten Kegelschnittes, oder die harmonische Polare des unendlich entfernten Punktes von ab, und weil nun die harmonischen Polaren zweier Punkte der Geraden ab im Punkte k sich schneiden, so ist letzterer der harmonische Pol von ab; also m und k zwei zugeordnete harmonische Pole der Geraden Mm, und daher, wenn A die halbe Durchmesserlänge von Mm bezeichnet:

$$Mk.\,Mn = A^2.$$

Da ferner m_1 der Mittelpunkt der Strecke $a_1 b_1$ ist, so sind die Geraden sg und sm_1 mit den Tangenten sa_1 und sb_1 harmonisch, also zwei zugeordnete harmonische Polaren des Punktes s. Folglich liegt der harmonische Pol der Geraden sg auf sm_1; zugleich aber auch auf der harmonischen Polare Mn des unendlich entfernten Punktes von sg, folglich im Durchschnitte f beider Linien; es sind also auch f und g zugeordnete harmonische Pole von Mn, und man hat wiederum

$$Mf.\,Mg = A^2.$$

Aus den Proportionen

$$mk : Mm = mp : mv$$

oder

$$Mk : Mm = gv : mv = sw : hw = sl : hd$$
$$= \varrho - p - r : \pi - p - r;$$
$$Mg : Mm = sx : px = \varrho - r : r$$

und

$$Mf : mf = Mw : mh = p : \pi$$

oder

$$Mf : Mm = p : \pi - p$$

ergeben sich die Ausdrücke

$$Mk.\,Mn = \frac{\varrho - p - r}{\pi - p - r}\,Mm^2 = A^2;$$

$$Mf.\,Mg = \frac{p(\varrho - r)}{r(\pi - p)}\,Mm^2 = A^2;$$

folglich ist

$$\frac{\varrho - p - r}{\pi - p - r} = \frac{p(\varrho - r)}{r(\pi - p)}$$

oder

$$p(\varrho - r)(\pi - p - r) = r(\pi - p)(\varrho - p - r),$$

oder

$$p^2\varrho - p\pi\varrho = r^2\pi - r\pi\varrho,$$

oder

$$\frac{p^2}{\pi} - p = \frac{r^2}{\varrho} - r,$$

oder endlich auch

$$\frac{\varrho-p-r}{\pi-p-r}=\frac{p^2\varrho}{r^2\pi}$$

die Gleichung derjenigen Curve, welche die Mittelpunkte M sämmtlicher Kegelschnitte der gedachten Gruppe enthält.

Wegen der letzten Form, in welche sich diese Gleichung bringen lässt, ist nun auch, einfacher ausgedrückt:

$$A^2=\frac{p^2\varrho}{r^2\pi}Mx^2.$$

Jene Gleichung wird durch die Coordinatenwerthe

$$(p=0,r=0),\ (p=\pi,r=0),\ (p=0,r=\varrho) \text{ und } (p=\pi,r=\varrho)$$

befriedigt. Ergänzt man also dass Dreieck smm_1 zu einem Parallelogramm sm_1mn, in welchem die Ecke n der Ecke m_1 gegenüberliegt, so geht jene Curve, welche offenbar ein Kegelschnitt ist, durch die vier Ecken dieses Parallelogramms, und der Mittelpunkt der ersteren fällt mit dem Mittelpunkte der Strecke [illegible] zusammen.

Fragen wir ferner nach dem zweiten Punkte, welchen einmal die Gerade sp, deren Gleichung

$$p+r=\varrho$$

ist, das anderemal die Gerade mk, deren Gleichung

$$p+r=\pi$$

ist, mit der Curve gemein hat; so erhalten wir im ersten Falle:

$$p=\pm 0 \text{ und } r=\varrho,$$

und im zweiten

$$r=\pm 0 \text{ und } p=\pi,$$

d. h. diese Geraden berühren die Curve in den Punkten s und m.

Man kennt also vier Punkte und die Tangenten in zweien derselben, d. h. mehr als zur Zeichnung der Curve nöthig ist.

Inhalt der Ellipse.

Es ist p der harmonische Pol der Geraden kq in Bezug auf jeden Kegelschnitt der ersten Gruppe; also geht die harmonische Polare des Punktes z durch den Punkt p; zugleich aber auch nach dem harmonischen Pole von Mx, welcher der unendlich entfernte Punkt von Mm ist; also sind die Punkte z und y, in welchem letzteren die Gerade Mx von der mit Mm parallelen Geraden py geschnitten wird, zugeordnete harmonische Pole von

Mx, und man hat, wenn B die halbe Durchmesserlänge von Mx bezeichnet, die Gleichung

$$Mz \,.\, My = mq\,\frac{Mk}{mk}\,.\,mp = mq\,\frac{sw}{sh}\,mp = mp\,.\,mq\,.\,\frac{\varrho-p-r}{\varrho-\pi} = B^2.$$

Ist nun φ der von den zugeordneten Durchmessern Mn und Mx, und ε der constante, von den Geraden sp und mp eingeschlossene Winkel, so ist

$$Mn = r\,.\,\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varphi},$$

und demnach

$$A^2B^2\sin^2\varphi = \frac{p^2\varrho}{r^2\pi}\,Mn^2\,.\,mp\,.\,mq\,\frac{\varrho-p-r}{\varrho-\pi}$$

$$= mp\,.\,mq\,.\,p^2\,\frac{\varrho(\varrho-p-r)}{\pi(\varrho-\pi)}\sin^2\varepsilon.$$

Die Punkte p und q sind mit a und b harmonisch, also

$$mp\,.\,mq = ma^2 = \left(\frac{ab}{2}\right)^2,$$

und, wenn Δ den Flächeninhalt des Dreiecks sab bezeichnet:

$$mp\,.\,mq\,.\,\varrho^2\sin^2\varepsilon = \Delta^2.$$

Hieraus folgt:

$$A^2.B^2.\sin^2\varphi = \frac{p^2(\varrho-p-r)}{\pi\varrho(\varrho-\pi)}\,.\,\Delta^2,$$

oder:

$$A.B.\sin\varphi = \pm p\,.\,\Delta\sqrt{\frac{\varrho-p-r}{\pi\varrho(\varrho-\pi)}}.$$

Der Ausdruck $A.B.\sin\varphi$ ist bekanntlich im Falle der Hyperbel der Inhalt der Dreiecksfläche, welche von den Asymptoten und einer Tangente begrenzt wird, und wenn man ihn im Falle der Ellipse mit der Ludolphischen Zahl multiplicirt, der Inhalt der Ellipse. Dieser Inhalt wird also ein Grösstes oder Kleinstes, jenachdem der variabele Theil dieses Ausdruckes, den wir mit f bezeichnen, d. i.

$$f = p\sqrt{\varrho-p-r},$$

ein Grösstes oder Kleinstes wird.

Fällt der Punkt M mit dem Punkte m zusammen, für welchen $p=\pi$, $r=0$ ist, so ist

$$A.B.\sin\varphi = \Delta\sqrt{\frac{\pi}{\varrho}};$$

und fällt derselbe mit π zusammen, für welchen $p=\pi$, $r=\varrho$ ist, so ist

$$A.B.\sin\varphi = \frac{\pi\Delta}{\sqrt{\varrho(\varrho-\pi)}}.$$

Bestimmung des Grössten und Kleinsten.

Aus den Gleichungen

$$p^2\varrho - p\pi\varrho = r^2\pi - r\pi\varrho \text{ und } f = p\sqrt{\varrho - p - r}$$

ergeben sich als Differenzialquotienten von f:

$$f'_{(p)} = \frac{(3r-\varrho)\sqrt{\varrho-p-r}}{2r-\varrho};$$

$$f'_{(r)} = \frac{\pi}{\varrho}\cdot\frac{(3r-\varrho)\sqrt{\varrho-p-r}}{2p-\pi}.$$

Die Bedingungen eines Grössten oder Kleinsten sind demnach

$$3r-\varrho=0 \text{ oder } \varrho-p-r=0,$$

d. h.

1) $r=\frac{1}{3}\varrho$ und $p=\frac{1}{2}\pi+\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2-\frac{2}{9}\pi\varrho}$;

2) $r=\frac{1}{3}\varrho$ und $p=\frac{1}{2}\pi-\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2-\frac{2}{9}\pi\varrho}$;

3) $r=\varrho$ und $p=0$.

Ausserdem wird f auch

4) durch $r=0$ und $p=0$ gleich Null.

Dagegen entspricht die Bedingung $2r-\varrho=0$ weder einem Grössten noch einem Kleinsten. Denn für

$$r=\frac{1}{2}\varrho \text{ ist } p=\frac{1}{2}\pi\pm\frac{1}{2}\sqrt{\pi(\pi-\varrho)},$$

also

$$2p-\pi=\pm\sqrt{\pi(\pi-\varrho)};\ \varrho-p-r=\frac{1}{2}(\mp\sqrt{\pi}-\sqrt{\pi-\varrho})\sqrt{\pi-\varrho}$$

und

$$\frac{\varrho - p - r}{(2p - \pi)^2} = \frac{1}{2} \frac{\mp \sqrt{\pi} - \sqrt{\pi - \varrho}}{\pi \sqrt{\pi - \varrho}}.$$

Entspräche nun die Bedingung $2r - \varrho = 0$ einem Grössten oder Kleinsten, so müsste auch die damit identische $2p - \pi = \pm \sqrt{\pi(\pi - \varrho)}$ einem solchen entsprechen, also, da in diesem Falle die Grösse f weder $= 0$, noch $= \infty$ ist, die Grösse $f'(r)$ für $2p - \pi = \pm \sqrt{\pi(\pi - \varrho)}$ entweder $= 0$ oder $= \infty$ werden, was unmöglich ist, es sei denn, dass $\pi = \varrho$.

Neben den Fällen 3) und 4), für welche $f = 0$ ist, sind noch diejenigen aufzuführen, wo $f = \infty$. Diese beziehen sich auf die unendlich entfernten Punkte der Mittelpunktscurve, welche offenbar nur Parabeln angehören können.

Das Hauptinteresse der gegenwärtigen Untersuchung aber nehmen die Fälle 1) und 2) in Anspruch, in welchen die Grösse f einen begrenzten Werth hat.

Konstruktion des Mittelpunktes der grössten und der kleinsten Ellipse.

1.

Sind p' und p'' die Werthe von p, welche demjenigen von $r = \frac{1}{3}\varrho$ entsprechen, so ist

$$p' + p'' = \pi \text{ und } p' \cdot p'' = \frac{2}{9} \pi \varrho;$$

die Konstruktion derselben läuft also auf die Elementar-Aufgabe hinaus: ein gegebenes Rechteck $= \frac{1}{3}\varrho \cdot \frac{2}{3}\pi$ in ein anderes von gegebenem Umfange $= 2\pi$ zu verwandeln.

2.

Man halbire die Strecken ab und $a_1 b_1$ in den Punkten m und m_1, lege durch die Punkte a, b einen Kreis und durch $a_1\ b_1$ einen zweiten, welcher jenen in zwei Punkten schneidet; ziehe die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise und um denjenigen Punkt, in welchem diese Sehne die Gerade $ab\,a_1 b_1$ trifft, mit einem Halbmesser von der Länge der Tangente, welche von demselben Punkte an einen der Kreise gelegt wird, einen dritten Kreis; so schneidet letzterer die Gerade $ab\,a_1 b_1$ in den Punkten p und q.

Man ziehe sodann sp (oder sq), theile dieselbe in x dergestalt, dass $sx = 2px$, und lege durch x mit $ab\,a_1 b_1$ eine Parallele ex. Hierauf ziehe man sm_1, halbire mm_1 und lege durch deren Mittelpunkt eine Parallele mit sm_1, welche die Gerade ex im Punkte μ schneidet. Endlich ziehe man $s\mu$, welche $ab\,a_1 b_1$ im

Punkte σ treffe, und durch x eine Parallele mit sm_1, welche abm_1b_1 in v treffe.

Jetzt beschreibe man über der Strecke τm_1, als Durchmesser, einen Kreis, lege an denselben durch σ eine Tangente und beschreibe mit dieser, als Halbmesser, um σ einen Kreis, welcher qba_1b_1 in η und ω schneidet; diese letzteren Punkte endlich verbinde man mit s durch zwei Gerade; so treffen dieselben die Gerade ex in den Mittelpunkten M, M der gesuchten Ellipsen.

Es ist nämlich nach dieser Konstruktion $m_1\sigma = \frac{3}{2}\varepsilon\mu = \frac{3}{4}mm_1$, und $m_1\tau = \frac{2}{3}m_1p$; hieraus folgt:

$$(\sigma\eta)^2 = (\sigma\omega)^2 = \tau m_1 . \sigma\tau = \frac{3}{4}mm_1\left(\frac{3}{4}mm_1 - \frac{2}{3}pm_1\right) = \frac{9}{4}mm_1\left(\frac{1}{4}mm_1 - \frac{2}{9}pm_1\right)$$

$$= \frac{9}{4}\frac{\pi}{\varrho} . pm_1\left(\frac{1}{4}\frac{\pi}{\varrho}pm_1 - \frac{2}{9}pm_1\right) = \frac{4}{9}\frac{pm_1^2}{\varrho^2}\left(\frac{1}{4}\pi^2 - \frac{2}{9}\pi\varrho\right)$$

$$= \frac{9}{4}\frac{pm_1^2}{\varrho^2}\left(\frac{p' - p''}{2}\right)^2 \text{ und } M\mu = \frac{1}{2}MM = \frac{2}{3}\sigma\eta = \frac{pm_1}{\varrho}\left(\frac{p' - p''}{2}\right),$$

wo p' und p'' diejenigen Werthe von p bedeuten, welche den beiden Durchschnittspunkten der Mittelpunktscurve mit der Geraden ex entsprechen. Bezeichnen wir diese Punkte mit M' und M'', so hat man:

$$pm_1 - M'x : pm_1 = p' + \frac{1}{3}\varrho : \varrho,$$

und

$$pm_1 - M''x : pm_1 = p'' + \frac{1}{3}\varrho : \varrho;$$

also

$$M''x - M'x : pm_1 = p' - p'' : \varrho,$$

oder

$$\frac{1}{3}M'M'' = \frac{pm_1}{\varrho} . \frac{p' - p''}{2} = M\mu.$$

Aber der Punkt μ halbirt nicht nur die Strecke MM, sondern auch die Sehne $M'M''$ der Mittelpunktscurve, weil die, die Strecke mm_1 und $\sigma\mu$ halbirende Gerade die harmonische Polare des unendlich entfernten Punktes von ex in Bezug auf diese Curve ist. Also fallen die Punkte M, M mit den Punkten M', M'' zusammen.

3.

Stehen für die Konstruktion nur das Lineal und ein beliebig gegebener fester Kreis mit gegebenem Mittelpunkte zu Gebote.

so verbinde man einen beliebigen Punkt B dieses Kreises mit den Punkten a, b, a_1, b_1 durch gerade Linien, welche denselben zum zweitenmale in den Punkten α, β, α_1, β_1 schneiden; ziehe die Geraden $\alpha\alpha_1$ und $\beta\beta_1$, deren Durchschnitt γ sei, und die Geraden $\alpha\beta_1$ und $\beta\alpha_1$, deren Durchschnitt γ' sei; ziehe die Gerade $\gamma\gamma'$ und verbinde den Punkt B mit den Punkten, in welchen $\gamma\gamma'$ den Kreis schneidet, durch zwei gerade Linien; so treffen diese die Linien aba_1b_1 in den Punkten p und q.

Jetzt lege man durch den Punkt s irgend eine Gerade, welche den gegebenen Kreis in zwei Punkten schneidet, verbinde die Durchschnittspunkte mit dem Mittelpunkte des Kreises durch zwei Gerade und die Punkte, wo diese den Kreis zum zweitenmale schneiden, miteinander durch eine gerade Linie; so ist letztere mit der durch s gezogenen parallel, und es ist nun kraft der Eigenschaft des Trapezes ein Leichtes, die durch s und aba_1b_1 begrenzte Strecke $s\delta$ diese letzteren im Punkte λ zu halbiren. Man halbire nun noch eine zweite solche Strecke $s\nu$, welche den Kreis schneidet, im Punkte $\varkappa$, ziehe $\nu\lambda$ und $\delta\pi$, die sich in ϱ schneiden, sodann $s\varrho$, welche $\delta\nu$ in ξ trifft, ferner $\xi\pi$, welche $\nu\lambda$ in ψ trifft, und $\delta\psi$, welche $s\nu$ in φ trifft. Endlich verbinde man die Punkte ϱ und φ mit einander durch eine Gerade, so hat man die Linie $e\varkappa$. Mittels dieser oder auch der Linie $\lambda\pi$ kann man nun die Strecken ab und a_1b_1 in m und m_1, und sofort die Strecke mm_1 halbiren, und verbindet man den Mittelpunkt der letzteren mit demjenigen Punkte, in welchem sm von $\lambda\pi$ geschnitten wird, durch eine Gerade, so schneidet diese die $e\varkappa$ im Punkte μ, welcher mit s verbunden, wie in 2), den Punkt σ bestimmt. Um nun auch noch den Punkt τ zu finden, ziehe man von p nach dem Mittelpunkte von sm_1, welcher auf $\lambda\pi$ liegt, eine Gerade, ziehe $m_1\varkappa_1$ und verbinde den Punkt, wo diese beiden letzten sich treffen, mit dem Punkte s durch eine Gerade, so schneidet diese die aba_1b_1 in τ.

Um nun endlich die Punkte η, ω und sofort M, M zu finden, wiederhole man dasselbe Verfahren, wodurch oben die Punkte p, q gefunden wurden, indem man die Punkte a und b (oder auch a_1 und b_1) mit m_1 und τ, und die Punkte a_1 und b_1 (a und b) mit σ und dem unendlich entfernten Punkte von aba_1b_1 vertauscht. Wählt man nämlich auf dem festen Kreise einen solchen Punkt B, welcher zugleich auf einer der schon vorhandenen, oder noch zu ziehenden mit aba_1b_1 parallelen Linien liegt, so schneidet diese Parallele den Kreis zum zweitenmale in β_1, die Geraden Bm_1, $B\tau$, $B\sigma$ in α, β, α_1 u. s. w.

Es sind nämlich auch hier die Punkte η, ω sowohl mit m_1 und τ als mit σ und dem unendlich entfernten Punkte harmonisch, was aus Folgendem erhellt: Betrachtet man das der Mittelpunktscurve eingeschriebene Dreieck smm_1 und das von den Tangenten in s, m, m_1 gebildete Dreieck, so folgt, dass die Tangente in m_1 nach dem Mittelpunkte k von sp geht; folglich ist k der harm. Pol von sm_1 in Bezug auf diese Curve. Daher geht die harm. Polare von e durch k, zugleich aber auch durch den vierten harmonischen Punkt zu s, e, m_1, welcher ebensoweit von m_1, als m_1

von s entfernt ist; folglich trifft diese Polare die ez in dem, dem e zugeordneten harmonischen Pole $\mathfrak{z}$ dergestalt, dass

$$e\mathfrak{z} : \frac{1}{2}pm_1 = \frac{4}{3} : \frac{3}{2}, \text{ oder } e\mathfrak{z} = \frac{4}{9}pm_1 \text{ ist.}$$

Da nun

$$\tau m_1 = \frac{2}{3}pm_1 = \frac{3}{2}e\mathfrak{z}$$

ist, so liegen s, $\mathfrak{z}$ und τ in einer Geraden u. s. w.

Determination.

Berücksichtigt man die gegenseitige Lage der gegebenen Punktenpaare a und b, a_1 und b_1; so lassen sich folgende drei wesentlich verschiedene Fälle unterscheiden; entweder

a) liegen die Punkte a und b zwischen den Punkten a_1 und b_1 (Taf. VII. Fig. 1); oder
b) die Punkte a_1 und b_1 liegen zwischen a und b (Taf. VII. Fig. 2) oder
c) beide Punktenpaare schliessen einander aus (Taf. VII. Fig. 3).

Ein vierter Fall: dass nur einer der Punkte a und b zwischen a_1 und b_1 liege, ist nicht denkbar, weil dann nothwendig eine der gegebenen Tangenten einen innerhalb des Kegelschnitts liegenden Punkt enthielte.

Jene Punktenpaare sind daher jedenfalls ungleichliegend, und daher gibt es allemal zwei Punkte p und q, welche mit beiden harmonisch sind. Diese Punkte liegen in den bezeichneten Fällen a) und b) ausserhalb der Mittelpunkte m, m_1 der Strecken ab, a_1b_1, im dritten dagegen zwischen diesen Punkten. Insbesondere besteht der charakteristische Unterschied der Fälle a) und b) darin, dass in jenem die Strecken pm und qm kleiner, in diesem dagegen grösser als pm_1 und qm_1 sind. Da nun in der oben gegebenen Entwickelung, welche sich auf den Fall a) stützte, die Lage der Strecken ϱ und π, d. i. sp und mk, gegen die Geraden pq und sm_1 als positiv angesehen wurden, so sind dieselben im Falle c) ebenfalls beide als positiv, im Falle b) dagegen ϱ als positiv, π als negativ zu behandeln. Daher erhält in diesem letzteren Falle die Gleichung der Mittelpunktscurve die besondere Form:

$$p^2\varrho + p\pi\varrho = -r^2\pi + r\pi\varrho,$$

welche offenbar die einer Ellipse ist, während dieselbe im Falle c) ebenso wie in a) eine Hyperbel darstellt. Doch besteht zwischen a) und c) der Unterschied, dass dort π kleiner als ϱ, hier aber π grösser als ϱ erscheint.

Auch durch blosse Anschauung kann man sich von der verschiedenen Gestalt der Mittelpunktscurve in den drei Fällen einen

Begriff machen. Da nämlich in allen drei Fällen sp und mk Tangenten dieser Curve sind, so muss dieselbe eine Hyperbel sein, wo wie in a) und c) irgend ein Punkt m_1 derselben nicht zwischen diesen parallelen Tangenten liegt, und sie muss eine Ellipse sein, wo wie in b) der Punkt m_1 zwischen diesen Tangenten liegt. Diess letztere liess sich auch von vornherein erwarten: denn da hier die gegebenen Tangenten zwischen den Punkten a, b hindurchgehen, so konnte der Kegelschnitt keine Parabel sein, also auch die Mittelpunktscurve keine unendlich entfernten Punkte enthalten.

Die beiden Zweige der Mittelpunktscurve sind in den Fällen a) und c) durch die Tangenten sp und mk völlig von einander getrennt. Ich behaupte nun, dass in diesen Fällen derjenige Zweig, welcher den Punkt m enthält, nur von Ellipsen, und der andere nur von Hyperbeln die Mittelpunkte enthalte. Denn aus den allgemeinen Eigenschaften der harmonischen Pole und Polaren ergiebt sich, dass die harmonische Polare eines ausserhalb des Kegelschnittes gelegenen Punktes, wenn derselbe eine Ellipse ist, jedesmal; dagegen, wenn er eine Hyperbel ist, niemals zwischen jenem Punkte und dem Mittelpunkte des Kegelschnitts hindurchgehe. Nun aber ist der Punkt k allemal der harmonische Pol der Geraden pq in Bezug auf den Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt M ist, und zwar ein ausserhalb dieses Kegelschnitts liegender Punkt, weil die Gerade pq denselben in zwei Punkten a, b schneidet; und welche Lage auch man einer durch m gehenden Geraden geben mag, immer wird der Punkt m, und mit ihm zugleich die Gerade pq, zwischen die Punkte k und M, in welchen sie die Gerade sp und den durch m gehenden Zweig der Mittelpunktscurve schneidet, niemals aber zwischen die Punkte, in welchen sie sp und den durch s gehenden Zweig schneidet, zu liegen kommen. Also gehört der Punkt M im ersten Falle niemals einer Hyperbel, und im zweiten niemals einer Ellipse an. Den Uebergang von der Schaar der Ellipsen zu der der Hyperbeln bilden zwei Parabeln, deren Mittelpunkte die unendlich entfernten Punkte der Mittelpunktscurve sind.

Der Ausdruck

$$p=\frac{1}{2}\pi\pm\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2-\frac{2}{9}\pi\varrho},$$

welcher in a) und c) dem Werthe $r=\frac{1}{3}\varrho$ entspricht, ist immer reell im Falle c), wo $\pi>\varrho$; kann aber imaginär werden im Falle a), wo $\pi<\varrho$, und ist nur dann auch hier reell, wenn $9\pi \geqq 8\varrho$ ist.

Dass im Falle b) der Werth für p, wenn $r=\frac{1}{3}\varrho$, immer reell ist, geht in Uebereinstimmung mit dem Ausdrucke

$$p=-\frac{1}{2}\pi\pm\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2+\frac{2}{9}\pi\varrho}$$

auch daraus hervor, dass die Ellipse, welche die Punkte m und s enthält, von jeder Geraden Mx, welche mit pq parallel ist und zwischen s und pq liegt, geschnitten werden muss.

Eine Hauptfrage ist noch, ob in den Punkten M der Konstruktion für die einzelnen Fälle a), b), c) ein Grösstes oder ein Kleinstes von f stattfinde? Suchen wir zu diesem Zwecke den zweiten Differenzialquotienten von f, so erhalten wir für die Fälle a) und c):

$$f''(p)=\frac{(2r-\varrho)(3r-\varrho)r\pi-p\varrho^2(2p-\pi)}{p\pi(2r-\varrho)^2}\sqrt{\varrho-p-r},$$

also, wenn hier $r=\frac{1}{3}\varrho$ gesetzt wird:

$$f''(p)=27\frac{2p-\pi}{\pi\varrho}\sqrt{\varrho-p-r}=\pm 54\,\frac{\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2-\frac{2}{9}\pi\varrho}}{\pi\varrho}\sqrt{\varrho-p-r},$$

wo sowohl $\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2-\frac{2}{9}\pi\varrho}$ als $\sqrt{\varrho-p-r}$ positive Grössen sind, und das obere Zeichen dem, dem Punkte m zunächst liegenden Punkte M, das untere dem entfernteren entspricht. Wir schliessen hieraus, das für den ersteren Punkt M die Grösse f ein Kleinstes, für den anderen ein Grösstes sein muss. Verfolgen wir also, vom ersteren Punkt M in der Richtung nach m ausgehend, den Lauf der ganzen Mittelpunktscurve, so ist

im Falle a): die Grösse f zuerst ein Kleinstes, wächst sodann und erreicht in m den Werth

$$\pi\sqrt{\varrho-\pi},$$

wächst sodann fortwährend, wird im unendlich entfernten Punkte unendlich gross, nimmt dann nach dem Uebergange zum anderen Zweige fortwährend ab, geht im Punkte s durch Null hindurch, wächst wieder, erreicht in n den absoluten Werth

$$\pi\sqrt{\pi},$$

fährt dann fort zuzunehmen, wird im zweiten unendlich entfernten Punkte der Curve unendlich gross, nimmt wieder fortwährend ab, geht in m_1 wieder durch Null hindurch, wächst, wird im anderen Punkte M ein Grösstes und kehrt abnehmend zum anfänglichen Kleinsten zurück;

im Falle c) dagegen ist f zuerst ein Kleinstes, wird in m gleich

$$\pi\sqrt{\pi-\varrho},$$

wächst bis ins Unendliche, nimmt ab bis zu Null (in s), wird im anderen Punkte M ein Grösstes, nimmt wieder ab bis Null (in m_1), wird wieder unendlich gross, nimmt ab zunächst bis zu

$$\pi\sqrt{\pi},$$

nimmt weiter ab und kehrt zum anfänglichen Kleinsten zurück.

Der Fall *b*) zeichnet sich auch hier vor den beiden anderen aus. Da jetzt der eine Werth von p für $r=\frac{1}{3}\varrho$ negativ ist, also auch $f=p\sqrt{\varrho-p-r}$ negativ würde, was unstatthaft ist, so muss man sich erinnern, dass von Haus aus

$$f=\pm p\sqrt{\varrho-p-r};$$

f ist also allemal positiv, wenn bei positivem p das obere, bei negativem p das untere Zeichen gewählt wird. Je nachdem aber $f=\pm p\sqrt{\varrho-p-r}$ ist, muss auch $f''_{(p)}$ das Vorzeichen $\pm$ erhalten, ohne dass sonst der Ausdruck dafür eine Aenderung erleidet. Schreibt man also vor den oben gegebenen Ausdruck von $f''_{(p)}$ das Zeichen $\pm$ und zugleich statt $\pi, -\pi$, so wird derselbe:

$$f''_{(p)}=\pm\frac{(2r-\varrho)(3r-\varrho)r\pi+p\varrho^2(2p+\pi)}{p\pi(2r-\varrho)^3}\sqrt{\varrho-p-r},$$

wo das obere Zeichen für

$$p'=-\frac{1}{2}\pi+\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2+\frac{2}{9}\pi\varrho},$$

das untere dagegen für

$$p''=-\frac{1}{2}\pi-\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2+\frac{2}{9}\pi\varrho}$$

zu nehmen ist. Da nun $(2r-\varrho)^3=-\left(\frac{\varrho}{3}\right)^3$ ist, so wird $f''_{(p)}$, sowohl für $p=p'$ als $p=p''$ negativ, und es ist somit f in beiden Fällen ein Grösstes.

Diese beiden Maxima sind aber einander keineswegs gleich; denn schreibt man der Kürze wegen statt $\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2+\frac{2}{9}\pi\varrho}$ das blosse Wurzelzeichen, so ist das erstere

$$=\left(-\frac{1}{2}\pi+\sqrt{}\right)\sqrt{\frac{2}{3}\varrho+\frac{1}{2}\pi-\sqrt{}},$$

das letztere

$$=\left(\frac{1}{2}\pi+\sqrt{}\right)\sqrt{\frac{2}{3}\varrho+\frac{1}{2}\pi+\sqrt{}},$$

woraus unmittelbar ersichtlich ist, das letzteres grösser als ersteres ist.

Ueberhaupt sind alle in den Fällen a), b) und c) gefundenen Grössten und Kleinsten es bloss in relativem Sinne, d. h. in Bezug auf ihre Nachbarwerthe, mit alleiniger Ausnahme desjenigen, welches im Falle b) dem, dem n zunächst liegenden Punkte M entspricht.

Vergleichen wir jetzt Taf. VII. Fig. 2., so finden wir, dass f in dem zuletzt gedachten Punkte M ein Maximum ist, nach m hin abnimmt, in $m=\pi\sqrt{\varrho+\pi}$ ist, fort und fort abnimmt, in m_1 durch Null hindurchgeht, wieder zunimmt, im andern Punkte M einen relativ grössten Werth erreicht, sodann wieder abnimmt, in s von Neuem durch Null hindurchgeht, dann zunächst in n die Grösse $\pi\sqrt{\pi}$ und endlich wieder den absolut grössten Werth erreicht.

Der blosse Anblick der drei Figuren reicht hin, um sich zu überzeugen, dass die in den Fällen a), b), c) gefundenen Verschiedenheiten, welche von vornherein durch die gegenseitige Lage der Punkte m, m_1 und p bedingt sind, sich nicht änderen, wenn man den Punkt p mit dem Punkte q vertauscht, und somit ist durch diese einzige Bemerkung auch die anfangs in Aussicht gestellte Theorie der zweiten Gruppe von Kegelschnitten gegeben.

Mit Rücksicht hierauf können wir daher jetzt das Gesammtresultat der vorhergehenden Betrachtungen in folgenden zwei Lehrsätzen aussprechen:

Lehrsatz 1.

a) **Die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte, welche zwei Punkte und zwei Tangenten gemein haben, sind auf die Umfänge zweier Kegelschnitte K vertheilt, welche unter sich folgende vier Punkte gemein haben: den Durchschnittspunkt s der gegebenen Tangenten, den Mittelpunkt m der gemeinschaftlichen Sehne, den Mittelpunkt m_1 der Strecke, welche auf der gemeinschaftlichen Sekante durch die gegebenen Tangenten bestimmt wird, und den Punkt n, welcher mit s, m und m_1, als Gegenecke des letzteren, ein Parallelogramm bildet.**

b) **Bestimmt man zwei Punkte p und q, welche sowohl mit den gegebenen zwei Punkten als mit den, den gegebenen Tangenten zugehörigen Punkten harmonisch sind, und verbindet beide mit dem Durchschnitte der Tangenten durch zwei Gerade sp, sq; so berührt ein jeder der beiden Kegelschnitte K, der eine die eine, der andere die andere von diesen Geraden im Durchschnitte der gegebenen Tangenten, und ausserdem im Punkte m eine mit dieser Geraden parallele Linie.**

c) Die Kegelschnitte K sind beide entweder zwei Hyperbeln, deren Sehnen mm_1 und m innerhalb derselben; oder zwei Hyperbeln, deren Sehnen mm_1 und m ausserhab derselben liegen, oder zwei Ellipsen, jenachdem die gegebenen Punkte zwischen den Durchschnitten der gegebenen Tangenten und ihrer Verbindungslinie, oder völlig ausserhalb derselben, oder letztere zwischen den ersteren liegen.

d) Im ersten und zweiten der so eben unterschiedenen Fälle gibt es unzählige Ellipsen und Hyperbeln, aber nur vier Parabeln, welche durch die gegebenen Punkte gehen und die gegebenen Geraden berühren; nämlich alle Punkte derjenigen beiden Zweige der Kegelschnitte K, welche die gemeinschaftliche Sehne in m halbiren, sind Mittelpunkte von Ellipsen, und alle Punkte der beiden anderen Zweige, welche den Durchschnitt der gemeinschaftlichen Tangenten enthalten, sind Mittelpunkte von Hyperbeln, während nur die vier unendlich entfernten Punkte derselben Parabeln angehören. Im dritten Falle dagegen sind alle Punkte der Kegelschnitte K ohne Ausnahme bloss Mittelpunkte von Hyperbeln.

Lehrsatz 2.

Unter sämmtlichen Kegelschnitten, welche zwei gegebene Punkte und zwei gegebene Tangenten gemein haben, gibt es:

a) wenn jene Punkte zwischen diesen Tangenten liegen, entweder zwei (relativ) grösste und zwei (relativ) kleinste Ellipsen, oder nur eine (relativ) grösste und eine (relativ) kleinste, oder keine von beiden;

b) wenn die gegebenen Tangenten die gegebenen Punkte ausschliessen, so gibt es allemal zwei (relativ) kleinste Ellipsen und zwei Hyperbeln, deren Asymptotendreiecke relative Grösste sind;

c) wenn die gegebenen Tangenten zwischen den gegebenen Punkten hindurchgehen, gibt es allemal vier Hyperbeln, deren Asymptotendreiecke, die einen relative, die anderen absolute Grösste sind.

d) Die Mitelpunkte aller dieser Ellipsen und Hyperbeln liegen in einer geraden Linie, welche mit der gemeinschaftlichen Sehne parallel und doppelt soweit von dem Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten als von jener Sehne entfernt ist.

Besondere Fälle.

Der behandelten allgemeinen Aufgabe lassen sich folgende Fälle subordiniren: 1) wenn die gegebenen Punkte sich vereinigen, wodurch ihre Verbindungslinie zur Tangente wird; 2) wenn die beiden gegebenen Tangenten einen gestreckten Winkel bilden, wodurch ihr Durchschnittspunkt zum gemeinschaftlichen Berührungspunkte wird, und 3) wenn der Berührungspunkt der einen Tangente in den einen der beiden gegebenen Punkte fällt. — Es soll hier der erste dieser Fälle noch behandelt werden. Er betrifft die Aufgabe:

Unter allen einem gegebenen Dreiecke eingeschriebenen Ellipsen, welche eine Seite desselben in einem gegebenen Punkte berühren, die grösste und die kleinste zu finden.

Da hier $\pi=\varrho$ ist, so geht die Gleichung der Mittelpunktscurve in den Fällen a) und c) in folgende:

$$(p+r)(p-r)=(p-r)\varrho,$$

d. h. in die beiden einfachen $p+r=\varrho$ und $p-r=0$, und folglich die Curve selbst in ein System zweier Geraden über. Die eine dieser Geraden ist sm oder sp, die andere verbindet den Punkt m_1 mit der Mitte von sm.

Im Falle b) behält jene Gleichung die Form der Ellipse; er ist aber unmöglich, weil keine Tangente durch den Berührungspunkt m einer anderen Tangente gehen kann.

Der Ausdruck

$$A^2B^2\sin^2\varphi\pm\frac{\varrho-p-r}{\varrho-\pi}\cdot\frac{p^2}{\pi\varrho}\cdot\Delta^2$$

wird jetzt illusorisch, da $\Delta=0$ und $\varrho-\pi=0$ wird; wir müssen ihn daher zum Behuf der Anwendung auf den jetzigen Fall erst umformen, indem wir auf den früheren:

$$A^2B^2\sin^2\varphi=mp.mq\frac{p^2\varrho(\varrho-p-r)}{\pi(\varrho-\pi)}\sin^2\alpha$$

zurückgehen

Es ist nämlich

$$\frac{pm}{\varrho-\pi}=\frac{pm_1}{\varrho}\text{ und }mq=qm_1-mm_1,$$

folglich

$$\frac{mp.mq}{\varrho-\pi}\sin^2\alpha=\frac{pm_1.qm_1-pm_1.mm_1}{\varrho}\sin^2\alpha;$$

aber

$$pm_1 . qm_1=\left(\frac{a_1 b_1}{2}\right)^2=(a_1 m_1)^2, \text{ und } pm_1.mm_1=(mm_1)^2,$$

weil mit a und b auch m und p zusammenfallen; also ist, wenn $\pi=\varrho$:

$$\frac{mp.mq}{\varrho-\pi}\sin^2\alpha=\frac{(\Delta sa_1 b_1)^2-4(\Delta smm_1)^2}{\varrho^2}$$

und

$$A^2B^2\sin^2\varphi=[(\Delta sa_1 b_1)^2-4(\Delta smm_1)^2]\frac{p^2(\varrho-p-r)}{\varrho^3}.$$

Dieser Ausdruck wird $=0$, wenn $p+r=\varrho$, d. h. jede Ellipse, deren Mittelpunkt der Linie sm angehört, ist $=0$. Setzt man dagegen $p-r=0$ und zugleich $r=\frac{1}{3}\varrho$, so ist

$$A^2B^2\sin^2\varphi=\frac{1}{27}[(\Delta sa_1 b_1)^2-4(\Delta smm_1)^2],$$

und dieser Ausdruck ist ein Grösstes, weil

$$f''(\varrho)=-\frac{9}{\varrho}\sqrt{\frac{1}{3}\varrho}.$$

Denkt man sich endlich den gegebenen Berührungspunkt veränderlich, so wird $A^2B^2\sin^2\varphi$ um so grösser, je kleiner das Dreieck smm_1 d. h. die Strecke mm_1 wird, und wird demnach ein Maximum maximorum, wenn m mit m_1 zusammenfällt. Dann ist, wenn π die Ludolphische Zahl bezeichnet, der Inhalt der Ellipse

$$E=A.B.\pi.\sin\varphi=\frac{1}{9}\pi\sqrt{3}.\Delta sa_1 b_1;$$

die Linie, deren Gleichung $p-r=0$, fällt mit der Linie sm_1, und daher der Mittelpunkt der Ellipse mit dem Schwerpunkte des Dreiecks $Sa_1 b_1$ zusammen.

Lehrsatz 3.

Der Mittelpunkt der grössten unter allen Ellipsen, welche einem gegebenen Dreieck eingeschrieben sind und eine Seite desselben in einem gegebenen Punkte berühren, ist der Schwerpunkt desjenigen Dreiecks, welches von dem gegebenen Berührungspunkte, von dem Mittelpunkte der gedachten Seite und von deren Gegenecke gebildet wird, und zwar ist der Inhalt dieser Ellipse, multiplicirt mit $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$, die mittlere Proportionale zwischen den beiden Dreiecken, in welche das gegebene Dreieck durch die nach dem gegebenen Berührungspunkte gehende Transversale zerlegt wird.

Lehrsatz 4.

Der Mittelpunkt der grössten unter allen Ellipsen, welche einem gegebenen Dreiecke eingeschrieben werden können, ist der Schwerpunkt dieses Dreiecks, und die Berührungspunkte sind die Mittelpunkte der drei Seiten; und zwar verhält sich der Inhalt dieser Ellipse zum Inhalte des Dreiecks wie $\pi:3\sqrt{3}$.

XXVII.

Ueber die von Polaren und Asymptotenchorden eingehüllten Curven.

Von
Herrn O. Berman,
Candidaten des höheren Schulamts zu Coblenz.

In einem früheren Aufsatze (Thl. XII. Nr. XXVII. S. 323.) wurde die Beziehung der Asymptotenchorden zu den Diagonalen des Vierecks nachgewiesen und hieran die Ableitung mehrerer geometrischer Relationen geknüpft. Hier soll Das etwas weiter ausgeführt werden, was am Schlusse jenes Aufsatzes nur in aller Kürze erwähnt worden war, die Bestimmung nämlich der von diesen Chorden eingehüllten Curven, wenn sich der Pol in gegebener Bahn fortbewegt.

Die Gleichung eines Kegelschnitts sei

$$\Omega \equiv y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0.$$

Entwickeln wir zuerst die Gleichung der Asymptotenchorden desselben für den Pol x', y':

Verlegen wir, ohne Aenderung der Axen-Richtung, den Anfangspunkt der Coordinaten in diesen Punkt, so wird die Gleichung $\Omega = 0$ übergehen in

$$(y+y')^2 + 2\alpha(x+x')(y+y') + \beta(x+x')^2 + 2\gamma(y+y') + 2\delta(x+x') + \varepsilon = 0$$

oder in

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2(y'+\alpha x'+\gamma)y+2(\alpha y'+\beta x'+\delta)x$$
$$+(y'^2+2\alpha x'y'+\beta x'^2+2\gamma y'+2\delta x'+\varepsilon)=0$$

und, da bekanntlich die Gleichung der Asymptotenchorden des Anfangspunktes für das ursprüngliche Ω

$$2\gamma y+2\delta x+\varepsilon=0$$

war, wird sie jetzt, für den neuen Anfangspunkt als Pol, sein:

$$2(y'+\alpha x'+\gamma)y+2(\alpha y'+\beta x'+\delta)x+y'^2+2\alpha x'y'$$
$$+\beta x'^2+2\gamma y'+2\delta x'+\varepsilon=0.$$

Um diese wieder in den früheren Coordinaten auszudrücken, hat man bloss $y-y'$ statt y, $x-x'$ statt x einzusetzen, d. h. zum ursprünglichen Anfangspunkte zurückzukehren. Diese Substitution gibt nach einigen Reductionen die Gleichung

$$(1)\quad (y'+\alpha x'+\gamma)y+(\alpha y'+\beta x'+\delta)x$$
$$-\frac{1}{2}(y'^2+2\alpha x'y'+\beta x'^2-\varepsilon)=0,$$

welcher auch die Form

$$(y-y')^2+2\alpha(x-x')(y-y')+\beta(x-x')^2=\Omega$$

gegeben werden kann, als die gesuchte der Asymptotenchorde für den Pol x', y' und die Directrix*) $\Omega=0$.

Die Differentialgleichung von (1) wird sein:

$$(1')\quad \left(\alpha+\frac{dy'}{dx'}\right)(y-y')+\left(\beta+\alpha\frac{dy'}{dx'}\right)(x-x')=0,$$

oder

$$y-y'=-\left(\frac{\beta+\alpha\dfrac{dy'}{dx'}}{\alpha+\dfrac{dy'}{dx'}}\right)(x-x').$$

Ganz analog würde sich die allgemeine Gleichung der Polaren oder Berührungschorde entwickeln lassen; doch führen wir diese Entwickelung um so weniger aus, als das Resultat ein bereits bekanntes ist. (S. Plücker Entw. S. 157.).

Sie heisst

---

*) So wollen wir, wie am Schlusse des früheren Aufsatzes bemerkt wurde, den gegebenen Kegelschnitt nennen.

$$(2)\quad (y'+\alpha x'+\gamma)y+(\alpha y'+\beta x'+\delta)x+\gamma y'+\delta x'+\varepsilon=0.$$

Ihre Differentialgleichung

$$(2')\quad \alpha y+\beta x+\delta+(y+\alpha x+\gamma)\frac{dy'}{dx'}=0.$$

Dass (1) und (2) parallel sind und dass erstere die Entfernung der letzteren vom Punkte x', y' halbirt, ist bekannt und lässt sich aus den Gleichungen ersehen.

Es lassen sich schon leicht folgende Resultate angeben:

Aus Gleichung (1) ist ersichtlich, dass sich alle Asymptotenchorden dann im Anfangspunkte schneiden, wenn die Bahn des Poles ein Kegelschnitt

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2-\varepsilon=0$$

ist. Nun ist aber dieser der gegebenen Directrix ähnlich und ähnlich liegend und schneidet sie überdies in denselben beiden Punkten, wie die Polare des Anfangspunktes, da

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2-\varepsilon=\Omega-2(\gamma y+\delta x+\varepsilon).$$

Hieraus ergibt sich also unmittelbar der Satz:

Schneiden sich ähnliche (und ähnlich liegende) Kegelschnitte, was immer in zwei Punkten stattfindet, so treffen sich die Asymptotenchorden für alle Punkte des einen Kegelschnittes als Bahn des Poles in Bezug auf die anderen als Directrix in zwei festen Punkten, die erhalten werden, wenn man an die Directrix da, wo sie von der Bahn geschnitten wird, Tangenten zieht, deren Durchschnittspunkt ein solcher fester Punkt ist. Liegen diese Punkte in unendlicher Entfernung, d. h. geht die Bahn des Poles durch die beiden Endpunkte eines Durchmessers der Directrix, so werden die Asymptotenchorden unter sich parallel sein.

Wendet man dieses auf den Kreis an, so resultirt der interessante Satz (Taf. VIII. Fig. 1.):

„Die Halbirungslinien der Tangentenpaare, die man von beliebigen auf der Peripherie eines Kreises liegenden Punkten an einen anderen Kreis zieht, schneiden sich in einem festen Punkte.“

Eine weitere Betrachtung der Gleichung (1) zeigt, dass, wenn sich der Pol auf der Geraden $\alpha y+\beta x+\delta=0$ bewegt, welche die der Axe der x parallelen Chorden der Directrix halbirt, die Asymptotenchorden parallel der Axe der x sind; bewegt er sich hingegen auf der Geraden $y+\alpha x+\gamma=0$, die alle der Axe der y parallelen Chorden halbirt, so sind sie der letzteren Axe parallel. Mit anderen Worten: Bewegt sich der Pol auf einer durch den Mittelpunkt der Directrix gehenden Geraden, so sind die Asymptotenchorden (und Polaren) dem zugeordneten Durchmesser parallel.

Es führt dieses, wenn man den Durchschnitt der Geraden mit der Directrix zum Pole wählt, zu dem bekannten Satze, dass die Tangente am Endpunkte eines Diameters parallel dem zugeordneten ist.

Ist die Bahn des Poles eine gerade Linie, so haben wir, da die Polaren in diesem Falle einen Punkt umhüllen, bloss Das zu berücksichtigen, was uns die Asymptotenchorden geben. Wählen wir die Bahn zur Axe der x, so haben wir aus der nun anzunehmenden Gleichung derselben $y'=0$, so wie aus den Gleichungen (1) und (1') x', y' und $\frac{dy'}{dx'}$ zu eliminiren. Mittelst $y'=0$ wird

Gleichung (1) $(\alpha x'+\gamma)y+(\beta x'+\delta)x-\frac{1}{2}(\beta x'^2-\varepsilon)=0$,

$$(1')\quad y=-\frac{\beta}{\alpha}(x-x')$$

oder

$$\beta x'=\alpha y+\beta x.$$

Den Werth von x' in (1) substituirt, gibt als Gleichung der gesuchten Umhüllungscurve

$$(3)\quad (\alpha y+\beta x)^2+\beta(2\gamma y+2\delta x+\varepsilon)=0,$$

also eine Parabel.

Setzen wir

$$\alpha y+\beta x\equiv\eta,\quad 2\gamma y+2\delta x+\varepsilon\equiv\xi;$$

so ist

$$\eta^2=-\beta\xi$$

die Gleichung derselben, welche demnach die Grade $\xi=0$ da berührt, wo $\eta=0$, die ein Durchmesser der Parabel ist, sie schneidet. Da über die Ordinaten-Axe keine Bestimmung getroffen war und $\eta=0$ eine dem zugeordneten Durchmesser des der Axe der x parallelen Durchmessers parallele und durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Gerade ist, so wollen wir als Axe der y eine in der eben angegebenen Richtung durch den Mittelpunkt der Directrix gehende Gerade ansehen.

Die Linie $\xi=0$ ist offenbar die Asymptotenchorde für den Durchschnittspunkt dieser Geraden mit der Bahn des Poles in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt als Directrix und diese muss, nach dem am Schlusse des vorhergehenden Abschnittes Gesagten, der Bahn des Poles parallel sein.

Bei der eben eingeführten Bestimmung der zweiten Axe in der Gleichung der Directrix α und $\delta=0$, indem letztere einerseits auf dieselbe Axe als Durchmesser, andererseits auf eine dem zugeordneten Diameter derselben parallele Linie bezogen ist.

Als Gleichung der resultirenden Parabel hat man also

$$(3') \quad \beta x^2+2\gamma y+\varepsilon=0$$

oder

$$x^2=-\frac{2\gamma}{\beta}\left(y+\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{\gamma}\right),$$

wie leicht a priori geschlossen werden konnte, da $-\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{\gamma}$ auch aus der Gleichung der Asymptotenchorde des Anfangspunktes als Durchschnitt derselben mit der Axe der y resultirt.

Ist die Directrix eine Parabel, so erhellet leicht, da die Asymptotenchorde in diesem Falle die Tangente in dem Punkte ist, wo der vom Pole aus gezogene Durchmesser die Parabel trifft, dass Directrix und Einhüllungscurve zusammenfallen. Dieses ergibt sich auch aus der Betrachtung ihrer Gleichungen, die dann identisch werden. Da nämlich dann $\beta=\alpha^2$ ist, so wird die Gleichung der Directrix

$$(y+\alpha x)^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon=0,$$

und ganz Dasselbe wird Gleichung (3) für $\beta=\alpha^2$.

Man hat demnach folgende einfache Construction der Umhüllungscurve (Taf. VIII. Fig. 2.):

Durch den Mittelpunkt O des gegebenen Kegelschnitts ziehe man eine der Bahn AB parallele Linie, construire den zugeordneten Durchmesser und verlängere denselben, bis er die Bahn im Punkte P schneidet. Für P als Pol ziehe man die Asymptotenchorde st zum Kegelschnitt, welche der Bahn parallel sein wird, und construire eine Parabel, welche letztere da berührt, wo jener Durchmesser sie schneidet, und die denselben ebenfalls zum Durchmesser hat.

Geht die Directrix in ein System zweier Geraden über (Taf. VIII. Fig. 3.), (MN, MN'), so hat man (Entw. S. 131.), da bereits die Axe der y so gelegt wurde, dass α und δ verschwanden, d. h. hier so, dass sie das Stück ab halbirt, noch $\varepsilon=\gamma^2$.

Also Gleichung des Systemes:

$$y^2+\beta x^2+2\gamma y+\gamma^2=0$$

oder

$$(y+x\sqrt{-\beta}+\gamma)\quad(y-x\sqrt{-\beta}+\gamma)=0.$$

Die Gleichung (3′) der resultirenden Parabel wird dann:

$$\beta x^2+2\gamma y+\gamma^2=0,$$

so dass, wie durch Subtraction beider Gleichungen erhellet, $y^2=0$, d. h. die Axe der x, gemeinschaftliche Chorde ist. Die Parabel berührt demnach*) das System in den beiden Punkten a und b, wo die Bahn des Poles es schneidet. Sie berührt ferner die Asymptotenchorde im dem Anfangspunkte O, die leicht zu construiren ist, so dass man drei Tangenten derselben und die Richtung des Durchmessers kennt.

Ist die Bahn des Poles ein Kegelschnitt, so wird die Entwickelung der von den Asymptotenchorden eingehüllten Curven sehr complicirt. Am einfachsten scheint folgendes Verfahren zu sein:

Man lege die Coordinatenaxen so, dass der Anfangspunkt in der Bahn liegt, die Axe der x durch den Mittelpunkt der Bahn geht und die Axen zugleich für Bahn und Directrix zugeordneten Durchmesser parallel sind, was auf folgende Weise geschieht:

Die Gleichung der Directrix ist $\Omega=0$, die der Bahn

$$y'^2+2\alpha'x'y'+\beta'x'^2+2\delta'x'=0;$$

dann hat man, wenn die Gleichungen $y=ax$, $y=a'x$ die neuen Axen bezeichnen, a und a' aus den beiden Gleichungen:

$$aa'+\alpha(a+a')+\beta=0,$$

$$aa'+\alpha'(a+a')+\beta'=0 \text{ (Entw. S. 138.)};$$

oder aus

$$a+a'=\frac{\beta'-\beta}{\alpha-\alpha'},$$

$$aa'=\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha-\alpha'}$$

zu bestimmen, woraus

*) S. Schluss des früheren Aufsatzes.

$$a=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha-\alpha'}\left[\beta'-\beta\pm\sqrt{(\beta-\beta')^2+4(\alpha\beta'-\alpha'\beta)}\right],$$

$$a'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha-\alpha'}\left[\beta'-\beta\mp\sqrt{(\beta-\beta')^2+4(\alpha\beta'-\alpha'\beta)}\right];$$

wodurch α und α' verschwinden.

Man hat demnach:

Gleichung der Bahn:

$$y'^2+\beta' x'^2+2\delta' x'=0\equiv\Omega';$$

Differentialgleichung der Bahn:

$$y'\frac{dy'}{dx'}+\beta' x'+\delta'=0;$$

Gleichung der Asymptotenchorde für $\alpha=0$:

$$(y-y')^2+\beta(x-x')^2=\Omega';$$

Differentialgleichung der Asymptotenchorde für $\alpha=0$:

$$\frac{dy'}{dx'}=\frac{\beta(x'-x)}{y-y'};$$

woraus $\frac{dy'}{dx'}$, x', y' zu eliminiren ist.

Die Combination der beiden Differentialgleichungen liefert:

$$y'=\frac{y(\beta' x'+\delta')}{(\beta'-\beta)x'+\beta x+\delta},$$

$$y-y'=\frac{\beta(x-x')y+(\delta-\delta')y}{(\beta'-\beta)x'+\beta x+\delta}.$$

Letzterer Werth, in die Gleichung der Asymptotenchorde substituirt, gibt für x' die kubische Gleichung:

$$\begin{aligned}&\beta^2y^2(x-x')^2+2\beta(\delta-\delta')y^2(x-x')\\&+\beta\{(\beta'-\beta)x'+\beta x+\delta\}(x-x')^2-\Omega'(\beta'-\beta)x'\\&=\Omega'(\beta x+\delta)-(\delta-\delta')^2y^2,\end{aligned}$$

oder, $x-x'=v$ gesetzt,

$$\begin{aligned}&v^3+\left(\frac{\beta y^2+\delta}{\beta-\beta'}-x\right)v^2+\left(\frac{2(\delta-\delta')y^2}{\beta-\beta'}-\frac{\Omega'}{\beta}\right)v\\&=\frac{\Omega'(\beta' x+\delta)-(\delta-\delta')^2y^2}{\beta(\beta-\beta')}.\end{aligned}$$

Hat man aus denselben x' und mithin auch y' gefunden, so sind die gefundenen Werthe in die Gleichung der Bahn zu substituiren, wodurch im Allgemeinen eine Curve 12ten Grades resultirt.

Es ist (aus dem früheren Aufsatze) bekannt, dass diese Curve durch die Punkte geht, welche Bahn und Directrix gemeinschaftlich haben. Liegen also beide Kegelschnitte ganz aus einander, so wird auch die Curve sie nicht schneiden, sonst aber in zwei oder vier oder, im Berührungsfalle, in einem oder in drei Punkten, deren Coordinaten sich durch Elimination von x oder y aus den beiden Gleichungen:

$$y^2+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon=0$$

und

$$y^2+\beta' x^2+2\delta' x=0$$

ergeben.

Sind Bahn und Directrix ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte, so ist $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$. Die vorstehenden Ausdrücke für a und a' werden in diesem Falle ungültig; man hat bloss die eine Gleichung

$$aa'+\alpha(a+a')+\beta=0,$$

mit welcher die zweite identisch ist, wie auch zu vermuthen war, weil in diesem Falle zwei zugeordnete Durchmesser der einen Curve stets zwei entsprechenden für die andere parallel sind. In diesem Falle reducirt sich die Gleichung für v auf den zweiten Grad. Sie wird

$$v^2+2.\frac{(\delta-\delta')y^2}{\beta y^2+\delta}v=\frac{\Omega'(\beta x+\delta)-(\delta-\delta')^2y^2}{\beta(\beta y^2+\delta)}.$$

Bezeichnet man

$$\sqrt{\Omega'(\beta x+\delta)(\beta y^2+\delta)-\delta(\delta-\delta')^2y^2} \text{ mit } \Pi,$$

so wird die Gleichung der Umhüllungscurve:

$$\beta y^2\{(\beta x+\delta)(\beta y^2+\delta)-\delta(\delta-\delta')y\pm y\Pi\sqrt{\beta}\}^2$$
$$+\beta(\beta x+\delta)^2\{x(\beta y^2+\delta)\sqrt{\beta}+(\delta-\delta')y^2\sqrt{\beta}\mp\Pi\}^2$$
$$+2\delta'\sqrt{\beta}(\beta x+\delta)^2(\beta y^2+\delta)\{x(\beta y^2+\delta)\sqrt{\beta}+(\delta-\delta')y^2\sqrt{\beta}\mp\Pi\}=0.$$

Sind Bahn und Directrix Kreise, so ist $\beta=1$

---

*) Im Allgemeinen muss die Gleichung der Curve sein:

$$f(\Omega')+\Phi(y^2+\beta' x^2+2\delta' x)=0.$$

$$\Pi=\sqrt{(x^2+y^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon)(x+\delta)(y^2+\delta)-\delta(\delta-\delta')^2y^2}$$

und die Gleichung der Curve

$$\begin{aligned} &y^2\{(x+\delta)(y^2+\delta)-\delta(\delta-\delta')y\pm y\Pi\}^2\\ &+(x+\delta)^2\{x(y^2+\delta)-(\delta-\delta')y^2\mp\Pi\}^2\\ &+2\delta'(x+\delta)^2(y^2+\delta)\{x(y^2+\delta)+(\delta-\delta')y^2\mp\Pi\}=0, \end{aligned}$$

welche beiden letzteren Gleichungen sich, aufgelöst, auf einen Punkt reduciren, wie im Anfange auch gezeigt wurde.

Betrachten wir diejenigen Curven, die durch Einhüllung von Polaren oder Berührungschorden erzeugt werden, wenn der Pol sich auf einem Kegelschnitte bewegt, so erleichtern wir uns die Untersuchung dadurch, dass wir die verschiedenen Arten der Bahn einzeln einführen.

a) Die Bahn ist eine Ellipse oder Hyperbel.

Beziehen wir sie auf zugeordnete Durchmesser, so dass wir die Gleichung

$$a^2y'^2\pm b^2x'^2=a^2b^2$$

haben, deren Differentialgleichung

$$\frac{dy'}{dx'}=\mp\frac{b^2x'}{a^2y'}$$

ist.

Substituiren wir letzteren Werth in Gleichung (2'), so resultirt

$$y'=\pm\frac{b^2}{a^2}x'\,\frac{y+\alpha x+\gamma}{\alpha y+\beta x+\delta}.$$

Dies, in Gleichung (2) substituirt, gibt

$$x'=\frac{-a^2(\alpha y+\beta x+\delta)(\gamma y+\delta x+\varepsilon)}{a^2(\alpha y+\beta x+\delta)^2\pm b^2(y+\alpha x+\gamma)^2},$$

woraus

$$y'=\frac{\mp b^2(y+\alpha x+\gamma)(\gamma y+\delta x+\varepsilon)}{a^2(\alpha y+\beta x+\delta)^2\pm b^2(y+\alpha x+\gamma)^2}.$$

Dies, in die Gleichung der Bahn eingesetzt, gibt nach einigen Reductionen:

$$(4)\quad a^2(\alpha y+\beta x+\delta)^2 \pm b^2(y+ax+\gamma)^2=(\gamma y+\delta x+\varepsilon)^2$$

als Gleichung der gesuchten Umhüllungscurve, welche also von derselben Art, wie die Bahn, d. h. eine Ellipse oder Hyperbel sein wird, je nachdem es jene ist.

Setzen wir

$$\alpha y+\beta x+\delta=\eta,\quad y+ax+\gamma=\xi;$$

so geht,

$$\frac{\delta-\alpha\gamma}{\alpha^2-\beta}=x_0,\quad \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\alpha^2-\beta}=y_0$$

gesetzt, wo x_0, y_0 die Mittelpunkts-Coordinaten der Directrix sind, Gleichung (4) über in

$$(4')\quad a^2\eta^2 \pm b^2\xi^2=(x_0\eta+y_0\xi-(\gamma y_0+\delta x_0+\varepsilon))^2,$$

welche Gleichung nicht den Fall umfassen kann, wo die Directrix eine Parabel ist, weil dann die Linien $\eta=0$ und $\xi=0$ parallel werden. $\gamma y_0+\delta x_0+\varepsilon$ muss immer positiv sein, weil der Mittelpunkt der Directrix in positiver Richtung jenseit der Geraden $\gamma y+\delta x+\varepsilon=0$, der Asymptotenchorde des Anfangs liegt. Bezeichnen wir den Ausdruck mit ε', so ist ersichtlich, dass die Curve durch den Durchschnitt des Systems $a^2\eta^2 \pm b^2\xi^2=0$ und der Geraden $x_0\eta+y_0\xi-\varepsilon'=0$ geht. Ihre Gleichung vereinfacht sich, wenn man eine der Coordinatenaxen durch den Mittelpunkt der Directrix legt, wodurch x_0 oder y_0 verschwindet. Wählt man z. B. die Centrale von Bahn und Directrix zur Axe der x, so verschwindet y_0 und die Gleichung der Curve wird

$$(4'')\quad (a^2-x_0^2)\eta^2 \pm b^2\xi^2+2x_0\varepsilon'.\eta-\varepsilon'^2=0,$$

so dass die Axe der ξ ein Durchmesser ist und die der η dem zugeordneten desselben in der Entfernung $\frac{x_0\varepsilon'}{x_0^2-a^2}$ parallel läuft. Sie schneidet die Axe der ξ in den Punkten $\pm\frac{\varepsilon'}{b}\sqrt{\pm 1}$, also nur für den Fall der Ellipse, die der η in den Punkten $\frac{\varepsilon'}{x_0 \pm a}$.

Die Polare des Mittelpunktes der Directrix, als Anfangspunktes der ξ und η, in Bezug auf die gefundene Curve, ist $\eta=\frac{\varepsilon'}{2x_0}$, also der Axe der ξ parallel. (Taf. VIII. Fig. 4.).

Für den Fall, dass die Bahn eine Hyperbel ist, lässt sich auch ihre Asymptotengleichung $x'y' = A^2$ nehmen, deren Differentialgleichung $\frac{dy'}{dx'} = -\frac{y'}{x'}$ ist. Dann resultirt auf die frühere Weise die Curve

$$(\gamma y + \delta x + \varepsilon)^2 = 4A^2(y + \alpha x + \gamma)(\alpha y + \beta x + \delta)$$

oder

$$(5)\quad 4A^2\xi\eta = (x_0\eta - y_0\xi - \varepsilon')^2,$$

wo sich x_0 oder y_0 nicht mehr willkührlich fortschaffen lässt. Die Curve, eine Hyperbel, geht durch den Durchschnitt der Geraden $\xi = 0$ und $\eta = 0$ mit der Geraden $x_0\eta - y_0\xi - \varepsilon' = 0$ oder $\gamma y + \delta x + \varepsilon = 0$.

Sind Directrix und Bahn concentrisch, so ist $x_0 = y_0 = 0$ und Gleichung (4') geht über in

$$a^2\eta^2 \pm b^2\xi^2 = \varepsilon^2,$$

Gleichung (5) in

$$\xi\eta = \frac{\varepsilon^2}{4A^2}.$$

Ist in diesem Falle, wenn die Bahn eine Ellipse ist, die Directrix ein Kreis und die Gleichung desselben $x^2 + y^2 = r^2$, so ist die resultirende Curve die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = r^4$, die also mit der Bahn $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ concentrisch ist. Ist die Bahn selbst ein Kreis, d. h. hat man zwei concentrische Kreise, so ist $a^2 = b^2 = R^2$. Die resultirende Curve ist dann ein dritter concentrischer Kreis $y^2 + x^2 = \frac{r^4}{R^2}$. Der Radius desselben ist also $\frac{r^2}{R} = \varrho$, so dass $\varrho : r = r : R$. Es ist auch in der That in Taf. VIII. Fig. 4. $a.$, da $On = On'$:

$$Om : On = On : Op.$$

Ganz analog verhält es sich, wenn die Bahn eine Hyperbel ist.

Für den Ausnahmefall, wo die Directrix eine Parabel ist, hat man $\beta = \alpha^2$. Dann geht Gleichung (4) über in

$$(6)\quad a^2[\alpha(y + \alpha x + \gamma) + \delta - \alpha\gamma]^2 + b^2(y + \alpha x + \gamma)^2 = (\gamma y + \delta x + \varepsilon)^2.$$

Nimmt man

$$y + \alpha x + \gamma = \xi,\quad \gamma y + \delta x + \varepsilon = \eta;$$

so hat man

$$(6') \quad \eta^2 = (a^2\alpha^2 \pm b^2)\xi^2 + 2a^2\alpha(\delta - \alpha\gamma)\xi + a^2(\delta - \alpha\gamma)^2,$$

einen Kegelschnitt, für den die Linie $\xi=0$ ein Diameter ist und die Linie $\eta=0$ dem zugeordneten in der Entfernung

$$\frac{a^2\alpha(\alpha\gamma - \delta)}{a^2\alpha^2 \pm b^2}$$

parallel. Er schneidet die Linie $\xi=0$ in den Punkten $\pm a(\delta-\alpha\gamma)$. Die Gleichung desselben vereinfacht sich, wenn man die Axe der x so legt, dass sie ein Durchmesser der Directrix wird. Dann muss in der Gleichung der letzteren $\alpha=0$ werden, und es ist $\xi=y+\gamma$. Also Gleichung der Curve:

$$\eta^2 \mp b^2\xi^2 = a^2\delta^2,$$

d. h. eine Hyperbel, wenn die Bahn eine Ellipse ist und umgekehrt. Auf der Linie $\eta=0$ schneidet sie die Stücke $\pm a\delta$, auf der Linie $\xi=0$ die Stücke $\pm \frac{a\delta}{b}\sqrt{\mp 1}$ ab. (Taf. VIII. Fig. 5.).

b) Die Bahn des Poles ist eine Parabel.

Ihre auf zugeordnete Durchmesser (Tangente und Durchmesser) bezogene Scheitelgleichung sei $y'^2=2px'$. Nach den bekannten Eliminationen ergibt sich als Gleichung der Curve

$$(7) \quad p(y+\alpha x+\gamma)^2 = 2(\gamma y+\delta x+\varepsilon)(\alpha y+\beta x+\delta).$$

$y+\alpha x+\gamma=\xi$; $\alpha y+\beta x+\delta=\eta$ gesetzt, gibt

$$(7') \quad p\xi^2 - 2y_0\xi\eta - 2x_0\eta^2 + 2\varepsilon'\eta = 0,$$

eine durch den Durchschnitt der ξ und η, d. h. durch den Mittelpunkt der Directrix gehende Hyperbel. Legt man die Abscissen-Axe durch den Mittelpunkt der Directrix, so geht, da $y_0=0$, (7') über in

$$p\xi^2 - 2x_0\eta^2 + 2(\delta x_0+\varepsilon)\eta = 0,$$

so dass die Curve auf Axen, die zugeordneten Durchmessern parallel sind, bezogen ist. (Taf. VIII. Fig. 6.).

Ist auch die Directrix eine Parabel, so hat man als Gleichung der Curve

$$p(y+\alpha x+\gamma)^2 = 2(\gamma y+\delta x+\varepsilon)[\alpha(y+\alpha x+\gamma)+\delta-\alpha\gamma].$$

Wählt man zur Axe der y einen Durchmesser der Directrix, d. h. bezieht man die Bahn auf diejenige Tangente, die zugleich ein Durchmesser der Directrix ist, so wird $\gamma=0$, also die vorstehende Gleichung

$$p(y+\alpha x)^2=2(\delta x+\varepsilon)[\alpha(y+\alpha x)+\delta].$$

$y+\alpha x=\eta$, $\delta x+\varepsilon=\xi$ gesetzt, gibt:

$$p\eta^2=2\xi(\alpha\eta+\delta),$$

$$p\eta^2-2\alpha\xi\eta-2\delta\xi=0.$$

Dieselbe ist also eine Hyperbel, welche durch den Durchschnittspunkt der Geraden

$$\xi=0 \text{ und } \eta=0$$

geht und erstere zum Durchmesser hat, letztere zur Tangente. Ihre Construction bietet, da $\eta=0$ und $\xi=0$ nach dem Früheren bekannte Linien sind, keine weitere Schwierigkeit.

XXVIII.

Ueber die Begründung der Theorie der elliptischen Functionen durch die Betrachtung unendlicher Doppelproducte.

Von
Herrn Ludwig Schläfli,
Docenten der Mathematik zu Bern.

Bekanntlich werden die elliptischen Functionen $\sin\mathrm{am}\,x$, $\cos\mathrm{am}\,x$, $\Delta\mathrm{am}\,x$ unendlich gross oder verschwinden der Reihe nach, wenn der Werth des Arguments x resp. die Formen

$$2mK+(2n+1)K'\sqrt{-1}, \qquad 2mK+2nK'\sqrt{-1},$$

$$(2m+1)K+2nK'\sqrt{-1}, \; (2m+1)K+(2n+1)K'\sqrt{-1}$$

annimmt, wo m, n beliebige ganze Zahlen und K, K' die den beiden complementären Moduln k, k' entsprechenden vollständigen elliptischen Integrale der ersten Art bezeichnen. Sie sind also gleichsam als Brüche anzusehen, deren Zähler sammt dem gemeinschaftlichen Nenner ganze Functionen von unendlich hohem Grad sind, deren lineare Factoren die Form

$$x+mK+nK'\sqrt{-1}$$

haben. Von dieser Beschaffenheit sind nun die von Jacobi in seinen Fundamentis Novis mit H und Θ bezeichneten Functionen. Während aber in diesem vortrefflichen Buche die gebrochenen oder eigentlichen elliptischen Functionen, wie $\sin\mathrm{am}\,x$, den Ausgangspunkt bilden, von dem aus durch eine wunderbare Verkettung von Transformationen zuletzt zur Theorie der ganzen elliptischen Functionen, wie Θx, gelangt wird, so treten andererseits die Eigenschaften der elliptischen Functionen überhaupt nicht minder in ein helles Licht, wenn man von den ganzen elliptischen Functionen Θx, oder, was dasselbe ist, von unendlichen Doppelproducten ausgeht. Diesen Weg hat Cayley*) eingeschlagen, und Eisenstein**) hat das Wesen der fraglichen Doppelproducte einer sehr genauen Untersuchung unterworfen. Wenn man in möglichster Kürze die bekannten Sätze über die elliptischen Functionen beweisen will, so scheint mir der genannte umgekehrte Weg diesen Zweck am besten zu erreichen, besonders wenn man die daraus entstehende Schwierigkeit, dass ein und dasselbe Doppelproduct je nach der Anordnung seiner Factoren verschiedene Werthe darbietet, durch geometrische Hülfsvorstellungen erleichtert. Einen Umstand, der ihnen freilich bekannt sein musste, scheinen mir beide, Cayley und Eisenstein, nicht erwähnt zu haben, dass nämlich von den unendlichen Doppelproducten aus eine in den Fundamentis novis noch unerledigte Frage ohne grosse Mühe entschieden wird. Die beiden Integrale

$$K=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$K'\sqrt{-1}=\int_0^{+\infty\sqrt{-1}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

in denen die Variable x resp. die zwischen 0 und 1 liegenden reellen und die zwischen 0 und $+\infty\sqrt{-1}$ liegenden rein imaginären Werthe nur einmal durchläuft, haben offenbar jedes einen einzigen, bestimmten Werth, mag der Modul k rein oder complex sein. Bezeichnet nun λ irgend einen der $n+1$ Moduln, welche sich aus dem reellen Modul k durch eine Transformation von der ungeraden Ordnung n ergeben, so sind bekanntlich nur zwei Werthe von λ reell, die $n-1$ übrigen sind complex, und wenn Λ, $\Lambda'\sqrt{-1}$ die Werthe der obigen bestimmten Integrale bezeichnen, falls darin k durch λ ersetzt wird, so liefert die in den Fundamentis entwickelte Theorie der Transformation dafür die Ausdrücke

$$\Lambda=\frac{\alpha K+\beta K'\sqrt{-1}}{nM},\quad \Lambda'\sqrt{-1}=\frac{\gamma K+\delta K'\sqrt{-1}}{nM};$$

wo M den Multiplicator und α, δ ungerade, β, γ gerade Zahlen bezeichnen, die der Bedingung

---

*) Cambridge Mathematical Journal IV. Maiheft 1845. On the inverse elliptic functions.

**) Crelle's Journal. XXXV. Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte. (Septbr. 1847.) Ebendas. XXVII. Bemerkungen zu den elliptischen und Abelschen Transcendenten. (Jan. 1844.)

$$\alpha\delta-\beta\gamma=\pm n$$

und ausserdem noch einer linearen Congruenz genügen, die von der besondern Art der Transformation $n$ter Ordnung abhängt; aber für die $n-1$ complexen Moduln λ werden dort Λ, $\Lambda'\sqrt{-1}$ nicht völlig bestimmt. Auf unserm Standpunkte wird sich zeigen, dass diese Bestimmung nicht in allgemeiner Weise geschehen kann, sondern von dem jeweiligen numerischen Werthe von $\frac{K'\sqrt{-1}}{K}$ abhängt.

§. 1.

Ueber die Anordnung der Factoren des unendlichen Doppelproducts und über die Convergenz desselben.

Man denke sich ein System rechtwinkliger Coordinaten in der Ebene; dessen Ursprung sei O und P irgend ein durch die Abscisse p und die Ordinate q bestimmter reeller Punkt. Die Anschauung dieses Punkts P gelte als Zeichen für die complexe Grösse $p+q\sqrt{-1}$, so wird jeder complexen oder reinen Grösse ein reeller Punkt in der Ebene entsprechen und umgekehrt. Dann stellt der Abstand OP des Punkts vom Ursprung den Modul, und der Winkel, um welchen sich OP von der Abscissenaxe gegen die Ordinatenaxe hin entfernt, die Amplitude der Grösse $p+q\sqrt{-1}$ dar. Es seien a, b zwei beliebige Grössen, deren bezeichnende Punkte A, B nicht mit dem Ursprung in eine und dieselbe Gerade fallen, so entspricht der Formel $ma+nb$, wo m, n ganze Zahlen bezeichnen, ein System von über die ganze Ebene zerstreuten Punkten, die sämmtlich durch ein Netz mit ΔOAB congruenter Dreiecke unter sich verbunden sind. Mit einem Halbmesser k, der die Dimensionen des Dreiecks OAB weit übertrifft, beschreibe man nun aus dem Mittelpunkt O einen Kreis und beschränke das Doppelproduct

$$z=\Pi\frac{x+ma+nb}{ma+nb}$$

auf alle diejenigen Factoren, welche innerhalb des Kreises befindlichen Punkten $ma+nb$ entsprechen, mit der einzigen Ausnahme, dass im Nenner der dem Ursprung O entsprechende Factor 0 wegfällt, während im Zähler der demselben Punkt entsprechende Factor x stehen bleibt. Es frägt sich nun, ob die Function z von x für einen unendlich gross werdenden Halbmesser k einen bestimmten Gränzwerth hat.

Da jedem innerhalb des Kreises k gelegenen Punkt $ma+nb$ ein ebenfalls innerhalb liegender diametral entgegengesetzter Punkt $-ma-nb$ entspricht, so darf man auch setzen:

$$z^2 = x^2 \Pi \left(1 - \frac{x^2}{(ma+nb)^2}\right),$$

wo das Doppelproduct Π alle vom Kreise k umschlossenen Punkte mit Ausnahme des Ursprungs O umfasst. Wird der begränzende Kreis bis auf den Halbmesser k' erweitert, so soll die Function z in z' übergehen; dann ist

$$\frac{z'^2}{z^2} = \overset{k'}{\underset{k}{\Pi}} \left(1 - \frac{x^2}{(ma+nb)^2}\right),$$

wo das Doppelproduct alle Factoren enthält, welche den zwischen beiden concentrischen Kreisen k, k' befindlichen Punkten $ma+nb$ entsprechen. Geht man zu den Logarithmen über, so verwandelt sich das Doppelproduct in eine Doppelsumme mit denselben Gränzen, und nimmt man den Modul von x als sehr klein in Vergleich mit k an, so kann man rechts die Logarithmen in convergente Reihen entwickeln; man bekömmt:

$$2\log\frac{z'}{z} = -x^2 \overset{k'}{\underset{k}{\Sigma}} \frac{1}{(ma+nb)^2} - \frac{1}{2} x^4 \overset{k'}{\underset{k}{\Sigma}} \frac{1}{(ma+nb)^4} - \text{etc.}$$

Lässt man in dem oben erwähnten Netz von Dreiecken alle mit AB parallelen Geraden weg, so bleibt ein Netz von congruenten Parallelogrammen zurück; der Inhalt eines desselben sei c und positiv, so ist, wenn der Factor von $\sqrt{-1}$ in der complexen Grösse $\frac{b}{a}$ positiv ist, d. h. wenn der Winkel AOB des Parallelogramms zwischen 0 und π liegt, und wenn a', b' die conjugirten Werthe von a, b bezeichnen,

$$a'b - ab' = 2c\sqrt{-1}.$$

Dann kann die Doppelsumme

$$\Sigma \frac{c}{(ma+nb)^2}$$

füglich mit einem Doppelintegral verglichen werden, worin c durch das Flächenelement und $ma+nb$ durch die seinem Orte entsprechende complexe Zahl ersetzt ist. Schreibt man in jedes von der Peripherie des Kreises k durchschnittene Parallelogramm den Betrag $\frac{1}{k^2}$ und addirt, so giebt die Summe eine ungefähre Vorstellung von der Grösse des Fehlers, den man begeht, wenn man wirklich das Doppelintegral an die Stelle der Doppelsumme setzt. Derselbe ist also nicht grösser als von der Ordnung $\frac{1}{k}$ und muss daher beim Unendlichwerden von k verschwinden. Aus demselben Grunde kommen die in der rechten Seite der obigen Gleichung auf das erste folgenden Glieder noch weniger in Betracht, da sie den Ordnungen $\frac{1}{k^3}$, $\frac{1}{k^5}$, ... angehören. Ist nun $re^{\varphi\sqrt{-1}}$ die für $ma+nb$ gesetzte continuirlich veränderliche Grösse, so ist $rdrd\varphi$ das Flächenelement; folglich

$$2\log\frac{z'}{z} = -c\int_k^{k'}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}e^{-2\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi dr = 0$$

mit einem Fehler von der Ordnung $\frac{1}{k}$. Also hat für ein beliebiges Argument x mit endlichem Modul die Function z beim unendlichen Wachsen von k einen einzigen bestimmten Werth.

Dieser Beweis gründet sich wesentlich darauf, dass die innerhalb des das Doppelproduct begränzenden Kreises liegenden Punkte $ma+nb$ paarweise einander diametral entgegengesetzt sind, wodurch das Doppelproduct zu einer ungeraden Function von x wird. Hält man den Ursprung O und den begränzenden Kreis k fest und versucht es, das System der Punkte parallel mit sich selbst zu verschieben, so dass die Eigenschaft der diametralen Entgegensetzung je zweier Punkte bleibt, so kann diess nur auf drei Arten geschehen, indem der Punkt, der früher in O war, sich resp. in die Mitte jeder der drei Seiten des Dreiecks OAB begiebt. Weil alsdann der Ursprung leer bleibt, so sind alle drei entstehenden Doppelproducte gerade Functionen. Ich bezeichne nach Cayley alle vier Doppelproducte resp. mit $\gamma x, gx, Gx, \mathfrak{G}x$*), je nachdem ein Punkt des Systems in den Ursprung O oder in die Mitte von OA, oder von OB, oder endlich von AB fällt. Um diese vier Functionen noch deutlicher zu definiren, will ich unter einem System von Punkten zugleich das Doppelproduct aller den einzelnen Punkten entsprechenden complexen Grössen, mit Ausschluss der Null, falls diese sich darunter befindet, verstanden wissen, und bezeichne die vier fundamentalen Systeme von Punkten nach einem einzigen zugehörigen Punkte resp. durch

$$(0),\ \left(\frac{a}{2}\right),\ \left(\frac{b}{2}\right),\ \left(\frac{a+b}{2}\right);$$

für jedes dieser Systeme hat der begränzende Kreis von unendlich wachsendem Halbmesser den Ursprung zum Mittelpunkt. Verschiebt man nun eines dieser vier Systeme parallel mit sich selbst sammt dem begränzenden Kreise, so dass nunmehr der Mittelpunkt des letztern die endliche complexe Grösse x darstellt, und dividirt das so veränderte System durch das entsprechende fundamentale System, so ist der Quotient resp. eine der Functionen γx, gx, Gx, $\mathfrak{G}x$. Sie mögen **ganze elliptische Functionen** heissen.

In Betreff der Convergenz der drei letzten Doppelproducte gx, Gx, $\mathfrak{G}x$ braucht bloss bemerkt zu werden, dass auf dieselben der oben für γx geführte Beweis unverändert übergetragen werden kann.

*) Das Zeichen $\mathfrak{G}x$ war im Mscpt. ganz undeutlich geschrieben. Ich habe überall den Buchstaben $\mathfrak{G}$ setzen lassen. G.

§. 2.

Ueber die verschiedenen Darstellungen einer und derselben ganzen elliptischen Function.

Der Werth eines der beschriebenen Doppelproducte hängt nur von der Lage der Punkte ab, auf welche es sich bezieht; das Netz von Parallelogrammen, durch welches diese Punkte verbunden sind, ist dabei völlig gleichgültig. Es seien daher m, n, m', n' ganze Zahlen, welche der Bedingung $mn'-m'n=1$ genügen, und man wird, wenn man a durch $ma+nb$, b durch $m'a+n'b$ ersetzt, dasselbe Punktensystem (0) erhalten wie vorher; nur ist an die Stelle des Parallelogramms, dessen Seiten den complexen Constanten a, b entsprachen, ein anderes von gleichem Inhalt mit den Seiten $ma+nb$, $m'a+n'b$ getreten. Man hat daher sofort, indem man die Constanten a, b mit in die Bezeichnung einer ganzen elliptischen Function aufnimmt,

$$\gamma(x, a, b) = \gamma(x, ma+nb, m'a+n'b).$$

Die Mitte der durch $ma+nb$ dargestellten Seite des secundären Parallelogramms fällt in eines der fundamentalen Systeme

$$\left(\frac{a}{2}\right), \left(\frac{b}{2}\right), \left(\frac{a+b}{2}\right),$$

je nachdem m ungerade, n gerade, oder m gerade, n ungerade, oder endlich m und n zugleich ungerade sind. Dann wird

$$g(x, ma+nb, m'a+n'b)$$

resp. gleich

$$g(x, a, b), \quad G(x, a, b), \quad \mathfrak{G}(x, a, b).$$

Wie sich die Sache in den anderen ähnlichen Fällen verhält, ist daher leicht zu beurtheilen. Nur mag bemerkt werden, dass, wenn alle drei geraden Functionen mittelst der neuen Darstellung $(ma+nb, m'a+n'b)$ in sich selbst zurückkehren sollen, die beiden Zahlen m, n' ungerade, die beiden anderen m', n gerade sein müssen.

Giebt es unter den unendlich vielen Darstellungen einer und derselben ganzen elliptischen Function eine, die sich vor allen übrigen auszeichnet? Diese Frage hängt, wie wir später sehen werden, mit der im Eingang erwähnten, einen complexen transformirten Modul λ betreffenden Schwierigkeit enge zusammen. Sie ist mittelst der geometrischen Hülfsvorstellung leicht zu entscheiden. Nämlich unter den zahllosen Dreiecken von gleichem Inhalt, welche anstatt des anfänglichen Dreiecks OAB gebraucht werden können, um ein und dasselbe System $(0, a, b)$ von Punkten zu erzeugen, giebt es nur ein einziges spitzwinkliges, und dieses ist immer vorhanden. Nur wenn ein rechtwinkliges Dreieck möglich ist, so giebt es zwei verschiedene gegen einander symmetrisch liegende Netze, welche aus zwei symmetrischen rechtwinkligen Dreiecken hervorgehen.

Um zu zeigen, dass es nur ein spitzwinkliges Dreieck geben kann, nehme ich an, $\triangle OAB$ sei ein solches, OA seine kleinste Seite, so wird das entsprechende Netz ein System mit OA paralleler Geraden enthalten, deren Abstand der auf OA senkrechten Höhe des $\triangle OAB$ gleich und daher grösser als $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot OA$ sein wird. OPQ sei ein anderes mit OAB gleich grosses Dreieck, welches dasselbe System von Punkten erzeugt, so steht es uns frei, das Eck P auf der nämlichen Seite von der verlängerten Geraden OA zu suchen, auf welcher auch B liegt. Suchen wir P in der durch B gehenden Parallellinie, so dürfen wir Q mit A zusammenfallen lassen, überzeugen uns aber leicht, dass das neue Dreieck an seiner Grundlinie einen stumpfen Winkel bekommen wird, sobald P nicht auch mit B zusammenfällt. Suchen wir daher P in irgend einer entfernteren Parallele, z. B. in der zweiten, dritten u. s. f. und ziehen dann durch Q eine Parallele mit OP, welche OA in M schneidet, so wird wegen des gleichen Inhalts der beiden Dreiecke OAB und OPQ das Stück OM gleich $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ u. s. f. von OA, also kleiner als $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{2/3}{\sqrt{3}}$ u. s. f. mal der Abstand der zuerst erwähnten Parallellinien (OA) sein. Also ist jedenfalls der Abstand der Parallelen OP und MQ oder die aus Q auf OP gefällte Höhe des Dreiecks OPQ kleiner als die auf OA senkrechte Höhe des ursprünglichen Dreiecks. Daher kann die Spitze Q nicht auf einer der Parallellinien mit OA, welche OP nicht schneiden, gesucht werden, wenn die Winkel O und P des Dreiecks OPQ spitz sein sollen. Die Spitze Q muss also auf einer zwischen O und P durchgehenden Parallellinie gesucht werden, und zugleich muss sie ausserhalb eines Kreises liegen, der OP zum Durchmesser hat. Nehmen wir den ungünstigsten Fall, wo OP nur bis an die zweite Parallellinie reicht, und bezeichnen durch L, N die beiden Punkte, in denen die durch B gehende Parallellinie von OP und MQ geschnitten wird, so ist LN jedenfalls kleiner als der Radius $LO=LP$; folglich $\angle ONP$ ein stumpfer.

Ich gestehe, dass dieser Beweis einer für die empirische Anschauung sehr einleuchtenden Sache ziemlich weitläufig erscheint. Der algebraische Beweis leidet an dem nämlichen Uebelstande.

Soll das $\triangle OAB$ spitzwinklig sein, so genügt es, wenn die reellen Theile der beiden complexen Grössen $\frac{b}{a}$ und $\frac{a}{b}$ positive ächte Brüche sind. Wenn also die Punkte P, Q den complexen Grössen $ma+nb$, $m'a+n'b$ entsprechen, wo die ganzen Zahlen m, n, m', n' der Bedingung $mn'-m'n=1$ genügen, so müssen auch die reellen Theile von

$$\frac{m'a+n'b}{ma+nb} \text{ und } \frac{ma+nb}{m'a+n'b}$$

positive ächte Brüche sein, wenn das Dreieck OPQ spitzwinklig sein soll. Nun ist aber

$$\frac{m'a+n'b}{ma+nb} = \frac{n'}{n} - \frac{1}{n}\frac{a}{ma+nb} = \frac{m'}{m} + \frac{1}{m}\frac{b}{ma+nb},$$

$$\frac{ma+nb}{m'a+n'b} = \frac{n}{n'} + \frac{1}{n'}\frac{a}{m'a+n'b} = \frac{m}{m'} - \frac{1}{m'}\frac{b}{m'a+n'b}.$$

Es sei

$$\frac{b}{a} = p + q\sqrt{-1},$$

so ist $0 < p < 1$, weil ΔOAB spitzwinklig ist; also der reelle Theil von

$$\frac{a}{ma+nb} \text{ gleich: } \frac{1}{(m+nv)\left(1+\left(\frac{q}{\frac{m}{n}+p}\right)^2\right)},$$

ein positiver ächter Bruch, wenn m positiv und grösser als $-n$ ist. Ebenso ist der reelle Theil von $\frac{b}{nb+ma}$ ein positiver ächter Bruch, wenn n positiv und grösser als $-m$ ist, folglich ein negativer ächter Bruch, wenn $-n$ positiv und grösser als m ist. Aehnliches gilt, wenn zu m, n Accente gesetzt werden. Wir dürfen nun jedenfalls m als positiv annehmen und schliessen vorerst diejenigen Fälle von der Betrachtung aus, wo eine der Zahlen m, n, m', n' verschwindet. Dann sind mn' und $m'n$ zugleich positiv oder zugleich negativ. Im ersten Falle sind m, n' positiv und entweder auch m', n positiv, folglich die reellen Theile von

$$\frac{a}{ma+nb} \text{ und } \frac{a}{m'a+n'b}$$

positive ächte Brüche. Bezeichnen wir einen solchen, abgesehen von seinem Werth, durch ε, so müsste zugleich

$$\frac{n'-\varepsilon}{n} < 1, \quad \frac{n+\varepsilon}{n'} < 1;$$

folglich $n' \leqq n$ und zugleich $n < n'$ sein, was nicht angeht. Oder aber m', n sind negativ. Dann wäre immerhin der reelle Theil von

$\frac{a}{ma+nb}$ gleich einem ächten positiven Bruche ε, und es müsste $\frac{\varepsilon-n'}{-n}>0$ sein, was unmöglich ist. — Wir kommen nun zum zweiten Fall, wo die Producte mn' und $m'n$ zugleich negativ sind. Es sei also m positiv, n' negativ und entweder m' negativ und n positiv, folglich der reelle Theil von $\frac{m'a+n'b}{ma+nb}$ offenbar negativ, was auszuschliessen ist. Oder aber es ist m' positiv und n negativ. Hier sind nun wieder zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder ist $-n$ kleiner als m, folglich auch $-n'<m'$; also sind die reellen Theile von

$$\frac{a}{ma+nb},\ \frac{a}{m'a+n'b}$$

positive ächte Brüche, und man bekömmt für die reellen Theile von

$$\frac{m'a+n'b}{ma+nb},\ \frac{ma+nb}{ma'+n'b}$$

die unvereinbaren Bedingungen

$$\frac{-n'+\varepsilon}{-n}<1,\ \frac{-n-\varepsilon}{-n'}<1.$$

Oder aber $-n$ ist grösser als m, folglich auch $-n'>m'$. Dann sind die reellen Theile von

$$\frac{b}{ma+nb},\ \frac{b}{m'a+n'b}$$

negative ächte Brüche, so dass man die ebenfalls unvereinbaren Bedingungen

$$\frac{m'-\varepsilon}{m}<1,\ \frac{m+\varepsilon}{m'}<1$$

erhält. Wir sind nunmehr anzunehmen genöthigt, dass eine der vier Zahlen m, n, m', n' Null sei. Setzen wir z. B. $m'=0$, so folgt $m=1$, $n'=1$ und n bleibt unbestimmt. Dann sollte der reelle Theil von $\frac{a+nb}{b}$ ein positiver ächter Bruch sein. Diess ist aber unmöglich wegen der rücksichtlich $\frac{b}{a}$ gemachten Voraussetzungen. Durchgeht man alle einzelnen Fälle, so findet man, dass unter allen möglichen Formen des Bruchs $\frac{m'a+n'b}{ma+nb}$ nur diese drei:

$$\frac{b}{a}, \quad \frac{a}{a-b}, \quad \frac{a-b}{-b}$$

den gemachten Anforderungen genügen. Diese beziehen sich aber auf ein und dasselbe Dreieck OAB. Dieses ist also das einzige spitzwinklige Dreieck, aus welchem dasselbe Punktensystem $(0, a, b)$ erzeugt werden kann.

Wenn ein System von Punkten durch irgend ein stumpfwinkliges Dreieck OPQ erzeugt worden ist, so giebt es im Allgemeinen immer ein spitzwinkliges Dreieck, welches dasselbe System von Punkten erzeugt, und welches durch folgendes Verfahren gefunden werden kann.

Wenn P der stumpfe Winkel des Dreiecks OPQ ist, so ziehe man durch Q eine Parallele mit der Grundlinie OP, so wird dieselbe eine Reihe von Punkten des gegebenen Systems enthalten, deren Abstände sämmtlich gleich der Grundlinie OP sind. Also ist unter den genannten Punkten gewiss einer und zwar im Allgemeinen nur einer — er möge Q' heissen, — welcher sich auf die Grundlinie OP selbst senkrecht projicirt. Wenn wir daher das Dreieck OPQ durch OPQ' ersetzen, so sind beide Winkel OPQ' und POQ' spitz, und die Projection der Seite OQ' auf die Grundlinie OP ist gewiss kleiner als die Hälfte der Projection der Seite OQ auf dieselbe Grundlinie. Auch sieht man leicht, dass die Projection der Grundlinie OP auf OQ' kleiner ist als diejenige auf OQ. Ist nun immer noch der Winkel $OQ'P$ ein stumpfer, so ziehe man durch P eine Parallele mit OQ'; auf dieser liegt ein einziger Punkt P' des gegebenen Systems, der sich auf OQ' selbst senkrecht projicirt. Man wird nunmehr das Dreieck $OP'Q'$ zur Erzeugung des gegebenen Systems von Punkten gebrauchen können. Hat dieses noch einen stumpfen Winkel, so kann es nur der bei P' sein. Ferner ist die Projection von OP' auf OQ' kleiner als die Hälfte der Projection von OP auf OQ', um so mehr also kleiner als die Hälfte der Projection von OP auf OQ; und die Projection von OQ' auf OP' ist kleiner als diejenige auf OP, um so mehr also kleiner als die Hälfte der Projection von OQ auf OP. Setzt man dieses Verfahren so lange fort, als noch stumpfe Winkel sich zeigen, so erhält man eine Reihenfolge von Dreiecken

$$OPQ, \; OPQ', \; OP'Q', \; OP'Q'', \; OP''Q'', \quad \text{u. s. f.},$$

worin jeweilen das neugefundene Eck ein stumpfwinkliges ist, und wo die Projectionen von OQ auf OP, von OQ' auf OP', von OQ'' auf OP'', u. s. f., wie auch diejenigen von OP auf OQ, von OP' auf OQ', u. s. f. zwei Reihen bilden, welche schneller fallen als die geometrische Reihe

$$1, \; \frac{1}{2}, \; \frac{1}{4}, \; \frac{1}{8}, \; \ldots\ldots,$$

So lange nun die Dreiecke noch stumpfwinklig sind, ist immer diejenige Seite, welche das feste Eck O mit dem Scheitel des stumpfen Winkels verbindet, kleiner als die Projection der andern von O ausgehenden Seite auf die erste. Folglich bilden auch die Seiten OP, OP', OP'',... und die Seiten OQ, OQ', OQ'',... zwei Reihen, welche schneller fallen als die geometrische Reihe 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$,.... Gäbe es nun kein spitzwinkliges Dreieck, so gingen beide Reihen ohne Ende fort; und man müsste in beiden auf Glieder kommen, die kleiner wären als die Quadratwurzel aus dem doppelten constanten Inhalt eines jeden dieser Dreiecke. Ein Dreieck, worin zwei Seiten zugleich von dieser Beschaffenheit wären, enthält aber einen Widerspruch. Folglich kann das oben beschriebene Verfahren nicht ohne Ende fortgesetzt werden, sondern es muss einmal zu einem spitzwinkligen Dreieck führen und dann aufhören.

Man gelangt noch schneller zum Ziele, wenn man, ohne gerade den Punkt O festzuhalten, immer die kleinste Seite des so eben gefundenen erzeugenden Dreiecks als Grundlinie betrachtet.

In Uebereinstimmung mit dem zuerst beschriebenen geometrischen Verfahren ist nun auch die numerische Rechnung anzustellen, sobald es sich darum handelt, die zu irgend einer gegebenen Darstellung (a, b) gehörende Hauptdarstellung auszumitteln. Da es nämlich freisteht, das Verhältniss $\frac{b}{a}$ durch seinen entgegengesetzten oder auch durch seinen umgekehrten Werth zu ersetzen, wofern über das Vorzeichen des reellen Factors von $\sqrt{-1}$ nichts verfügt wird, so dürfen wir immerhin den reellen Theil von $\frac{b}{a}$ als positiv und grösser als 1 voraussetzen. Denn ginge das Letzte nicht an, so wäre (a, b) schon die gesuchte Hauptdarstellung selbst. Es sei daher

$$\frac{b}{a} = p + q\sqrt{-1}$$

und r die Zahl der in p enthaltenen positiven Einheiten, folglich $0 < p - r < 1$; man setze

$$p - r + q\sqrt{-1} = \frac{1}{p' + q'\sqrt{-1}},$$

so wird p' positiv sein. Ist es auch noch grösser als 1, so sei r' die Zahl der darin enthaltenen positiven Einheiten; und wenn man diese wegnimmt, so sei $p'' + q''\sqrt{-1}$ der umgekehrte Werth des Rests u. s. f. Die Rechnung wird da aufhören, wo der umgekehrte Werth des Rests einen positiven ächten Bruch als reellen Theil hat. Sie steht demnach so:

$$\frac{b}{a}=p+q\sqrt{-1}=r+\frac{1}{p'+q'\sqrt{-1}},$$

$$p'+q'\sqrt{-1}=r'+\frac{1}{p''+q''\sqrt{-1}},$$

$$p''+q''\sqrt{-1}=r''+\frac{1}{p'''+q'''\sqrt{-1}},$$

$$\cdots\cdots$$

$$p^{(n-1)}+q^{(n-1)}\sqrt{-1}=r^{(n-1)}+\frac{1}{p^{(n)}+q^{(n)}\sqrt{-1}}.$$

Hier sind $r, r', \ldots r^{(n-1)}$ lauter positive ganze Zahlen, $p, p', p'', \ldots p^{(n)}$ sämmtlich positiv und überdiess die letzte $p^{(n)}$ kleiner als 1, und dazu noch $q^{(n)2} > p^{(n)}(1-p^{(n)})$. Die Factoren $q, q', q'', \ldots q^{(n)}$ sind abwechselnd positiv und negativ. Bezeichnet nun $\frac{h}{k}$ den reducirten Werth des aus den Quotienten $r, r', \ldots r^{(n-1)}$ gebildeten Kettenbruchs und $\frac{h'}{k'}$ dessen letzten Näherungswerth, so ist

$$\frac{b}{a}=\frac{h(p^{(n)}+q^{(n)}\sqrt{-1})+h'}{k(p^{(n)}+q^{(n)}\sqrt{-1})+k'},$$

folglich

$$p^{(n)}+q^{(n)}\sqrt{-1}=\frac{-h'a+k'b}{ha-kb}, \quad [hk'-h'k=(-1)^n]$$

und $(ha-kb, -h'a+k'b)$ oder $(-h'a+k'b,\ ha-kb)$ die gesuchte Hauptdarstellung, jenachdem $q^{(n)}$ positiv oder negativ ist. Es versteht sich übrigens, dass jede Darstellung auf drei verschiedene Arten geschrieben werden kann, weil je zwei Seiten eines Dreiecks auf drei Arten combinirt werden können, und dass jeder anderen Schreibweise ein Wechsel der Zeichen g, G, $\mathfrak{G}$ der geraden Functionen entspricht.

§. 3.

Ueber die Transformation und Multiplication der ganzen elliptischen Functionen.

Wir haben oben gesehen, dass ein einfaches Product $\Pi\left(1-\frac{x^2}{(ma+nb)^2}\right)$, dessen Factoren längs der Peripherie des unendlich gross werdenden Gränzkreises liegen, sich von 1 nur um eine Grösse von der Ordnung des verkehrten Halbmessers dieses Kreises unterscheidet, und daher aus einem Product endlicher Factoren nach Belieben weggelassen oder demselben zugesetzt werden darf. Ich schicke diese Bemerkung voraus, um sie nicht im Folgenden wiederholen zu müssen.

Es sei (a, b) irgend ein erzeugendes Parallelogramm; man theile die durch die complexen Grössen a, b dargestellten Seiten desselben resp. in p, q gleiche Theile, wo p, q ungerade sein sollen, und ziehe durch die Theilungspunkte Parallellinien mit den Seiten des Parallelogramms. Man wird so ein neues Punktensystem $\left(0, \frac{a}{p}, \frac{b}{q}\right)$ erhalten, welches aus der Ueberlagerung der Punktensysteme $\left(\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}, a, b\right)$, wo m, n alle den Gränzbedingungen

$$-\frac{p-1}{2}<m<\frac{p-1}{2}, -\frac{q-1}{2}<n<\frac{q-1}{2}$$

genügenden ganzen Zahlen bezeichnen, entstanden sich denken lässt. Es seien λ, μ ganze Zahlen und $\lambda a+\mu b$ ein bei der Peripherie des Gränzkreises befindlicher Punkt, und es mögen je zwei Factoren, wie

$$\frac{x+\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}+\lambda a+\mu b}{\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}+\lambda a+\mu b} \text{ und } \frac{x-\frac{ma}{p}-\frac{nb}{q}-\lambda a-\mu b}{-\frac{ma}{p}-\frac{nb}{q}-\lambda a-\mu b},$$

zugleich wegfallen oder neu hinzukommen, so wird dadurch die Richtigkeit einer endlichen Gleichung nicht getrübt werden*). Gerade dieses, und nicht mehr, geschieht aber, wenn wir setzen:

$$\gamma\left(x, \frac{a}{p}, \frac{b}{q}\right)=\prod_{m=-\frac{p-1}{2}}^{m=\frac{p-1}{2}}\prod_{n=-\frac{q-1}{2}}^{n=\frac{q-1}{2}}\frac{\gamma(x+\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}, a, b)}{\gamma\left(\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}, a, b\right)},$$

wo rechts im Nenner die dem Systeme $m=0$, $n=0$ entsprechende Function γ wegzulassen ist. Diese Gleichung ist also richtig, und wenn Π ein endliches Doppelproduct bezeichnet, worin von je zwei diametral entgegengesetzten Systemen (m, n) und $(-m, -n)$ nur das eine berücksichtigt und $(0, 0)$ weggelassen ist, so kann sie auch so geschrieben werden:

$$\gamma\left(x, \frac{a}{p}, \frac{b}{q}\right)=(-1)^{\frac{pq-1}{2}}\gamma x.\Pi\frac{\gamma\left(x+\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}\right)\gamma\left(x-\frac{ma}{p}-\frac{nb}{q}\right)}{\gamma^2\left(\frac{ma}{p}+\frac{nb}{q}\right)},$$

*) Der Fehler ist nämlich von der Ordnung $\frac{\text{Peripherie}}{k^2}$, also von der Ordnung $\frac{1}{k}$ und daher verschwindend.

wo rechts unter den Functionszeichen die specifischen Constanten a, b weggelassen sind, wie fortan immer geschehen soll, sobald kein Missverständniss zu besorgen ist.

Weil p, q ungerade sind, so überzeugt man sich auch durch die nämliche Grundanschauung von der Richtigkeit der drei folgenden Gleichungen:

$$g\left(x, \frac{a}{p}, \frac{b}{q}\right) = \prod_{m=-\frac{p-1}{2}}^{m=\frac{p-1}{2}} \prod_{n=-\frac{q-1}{2}}^{n=\frac{q-1}{2}} \frac{g\left(x + \frac{ma}{p} + \frac{nb}{q}\right)}{g\left(\frac{ma}{p} + \frac{nb}{q}\right)},$$

$$G\left(x, \frac{a}{p}, \frac{b}{q}\right) = \Pi\,\Pi \frac{G\left(x + \frac{ma}{p} + \frac{nb}{q}\right)}{G\left(\frac{ma}{p} + \frac{nb}{q}\right)},$$

$$\mathfrak{G}\left(x, \frac{a}{p}, \frac{b}{q}\right) = \Pi\,\Pi \frac{\mathfrak{G}\left(x + \frac{ma}{p} + \frac{nb}{q}\right)}{\mathfrak{G}\left(\frac{ma}{p} + \frac{nb}{q}\right)}.$$

Setzt man eine der ungeraden Zahlen p, q, z. B. $q=1$, so gehen die endlichen Doppelproducte in einfache Producte über, und die vier vorliegenden Formeln betreffen dann die Transformation $p$ter Ordnung.

Nennen wir $\left(\frac{a}{p}, \frac{b}{q}\right)$ eine transformirte Darstellung zu der ursprünglichen (a, b), und es sei $(\lambda a + \mu b,\ \lambda' a + \mu' b)$, wo $\lambda\mu' - \lambda'\mu = 1$, eine mit der letzteren äquivalente Darstellung, so folgt, dass auch $\left(\frac{\lambda a + \mu b}{p}, \frac{\lambda' a + \mu' b}{q}\right)$ eine transformirte zu der ursprünglichen Darstellung (a, b) sei.

Ist insbesondere $p=q$, so wird $\gamma\left(x, \frac{a}{p}, \frac{b}{p}\right) = \frac{1}{p}\gamma(px, a, b)$, $g\left(x, \frac{a}{p}, \frac{b}{p}\right) = g(px, a, b)$ und ebenso für G, $\mathfrak{G}$. Man kann also mit Beibehaltung der specifischen Constanten a, b eine ganze elliptische Function des Arguments px als endliches Product solcher des einfachen Arguments x ausdrücken. Hierin ist das Princip der Multiplication enthalten.

Eine getrennte Behandlung erfordert die Zahl 2. Aus der Grundanschauung gehen sogleich folgende Formeln hervor:

$$\gamma\left(x, \frac{a}{2}, b\right) = \gamma x \,.\, g x,$$

$$G\left(x, \frac{a}{2}, b\right) = G x \,.\, \mathfrak{G} x,$$

$$\gamma\left(x, a, \frac{b}{2}\right) = \gamma x \,.\, Gx,$$

$$g\left(x, a, \frac{b}{2}\right) = gx \,.\, \mathfrak{G}x,$$

$$\gamma\left(x, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \gamma x \,.\, gx \,.\, Gx \,.\, \mathfrak{G}x;$$

folglich auch

$$\gamma(2x) = 2\gamma x \,.\, gx \,.\, Gx \,.\, \mathfrak{G}x.$$

Weiter können wir hier noch nicht gehen, und die Ausdrücke für

$$g\left(x, \frac{a}{2}, b\right), \quad \mathfrak{G}\left(x, \frac{a}{2}, b\right), \quad G\left(x, a, \frac{b}{2}\right), \quad \mathfrak{G}\left(x, a, \frac{b}{2}\right)$$

bleiben einer späteren Betrachtung vorbehalten.

§. 4.

Bestimmung des Verhältnisses solcher unendlichen Doppelproducte, deren Factoren zusammenfallen und die sich daher nur durch ihre Begränzung unterscheiden.

Nehmen wir uns die Bestimmung des Quotienten $Q = \dfrac{\gamma\left(x + \frac{a}{2}\right)}{gx}$ vor, und abstrahiren von constanten Factoren, so kömmt wesentlich nur das Verhältniss der beiden Werthe in Betracht, welche ein und dasselbe Punktensystem nach einander annimmt, wenn der Mittelpunkt des begränzenden Kreises k das eine Mal in $x + \frac{a}{2}$, das andere Mal in x fällt. Also ist das Product aller innerhalb des ersten und ausserhalb des zweiten Kreises liegenden Punkte durch das Product aller derjenigen zu dividiren, für welche das Umgekehrte stattfindet; oder, wenn man zu den Logarithmen übergeht, die mit dem Inhalte c des erzeugenden Parallelogramms multiplicirte Einheit des Punkts durch das Flächenelement $d\omega$, und die Doppelsumme durch ein Doppelintegral ersetzt, und endlich die ortsanzeigende complexe Zahl durch z bezeichnet, so ist

$$\log Q = \text{const} + \frac{x}{c}\int \frac{d\omega}{z},$$

wo die Flächenelemente $d\omega$ im einen Monde positiv, im andern negativ zu nehmen sind. Es sei nun $a = \mathfrak{a} e^{\alpha\sqrt{-1}}$, $z = r e^{(\varphi+\alpha)\sqrt{-1}}$, wo $r = k$ angenommen werden darf. Zieht man aus dem Centrum einen Strahl nach dem Punkte $\mathfrak{a}$, so ist die Länge eines innerhalb des Mondes befindlichen Stückes $\frac{1}{2}\mathfrak{a}\cos\varphi$, also positiv im ersten, negativ im zweiten Monde. Man darf also $d\omega$ durch $\frac{1}{2}\mathfrak{a}\cos\varphi.\,kd\varphi$ ersetzen. Es ergiebt sich demnach

$$\log Q = \text{const.} + \frac{x}{2c}\mathfrak{a}\,e^{-\alpha\sqrt{-1}}\int_0^{2\pi} e^{-\varphi\sqrt{-1}}\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \text{const} + \frac{\mathfrak{a}e^{-\alpha\sqrt{-1}}\pi x}{2c}.$$

Wird der Kürze wegen die zu a conjugirte Grösse $\mathfrak{a}e^{-\alpha\sqrt{-1}} = a'$ gesetzt, so hat man

$$Q = \text{const} \times e^{\frac{a'\pi}{2c}x}.$$

Bestimmt man die Constante durch die Annahme von $x = 0$, so ergiebt sich

$$\frac{\gamma\left(x+\frac{a}{2}\right)}{gx} = \gamma\frac{a}{2}\cdot e^{\frac{a'\pi}{2c}x}.$$

Setzt man hier $-\frac{a}{2} - x$ an die Stelle von x, so ergiebt sich

$$-\frac{\gamma x}{g\left(\frac{a}{2}+x\right)} = \gamma\frac{a}{2}\cdot e^{-\frac{aa'}{4c}\pi}\, e^{-\frac{a'\pi}{2c}x};$$

oder

$$\frac{g\left(\frac{a}{2}+x\right)}{\gamma x} = -\frac{e^{\frac{aa'}{4c}\pi}}{\gamma\frac{a}{2}}\, e^{\frac{a'\pi}{2c}x};$$

folglich, für ein verschwindendes x,

$$g\frac{a}{2} = 0, \quad g'\frac{a}{2}\cdot\gamma\frac{a}{2} = -e^{\frac{aa'}{4c}\pi}.$$

Durch dieses Verfahren ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{matrix}\gamma\\ g\\ G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}\left(x+\frac{a}{2}\right) = \left.\begin{matrix}\gamma\\ g'\\ G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}\left(\frac{a}{2}\right)\cdot e^{\frac{a'\pi}{2c}x}\cdot \left.\begin{matrix}g\\ \gamma\\ \mathfrak{G}\\ G\end{matrix}\right\}(x),$$

$$\left.\begin{matrix}\gamma\\ g\\ G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}\left(x+\frac{b}{2}\right)=\left.\begin{matrix}\gamma\\ g\\ G'\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}\left(\frac{b}{2}\right)\cdot e^{\frac{b'\pi}{2c}x}\cdot\left.\begin{matrix}G\\ \mathfrak{G}\\ \gamma\\ g\end{matrix}\right\}(x),$$

$$\left.\begin{matrix}\gamma\\ g\\ G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}\left(x+\frac{a+b}{2}\right)=\left.\begin{matrix}\gamma\\ g\\ G\\ \mathfrak{G}'\end{matrix}\right\}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot e^{\frac{a'+b'}{2c}\pi x}\cdot\left.\begin{matrix}\mathfrak{G}\\ G\\ g\\ \gamma\end{matrix}\right\}(x).$$

Die Constanten dieser Gleichungen sind durch folgende Relationen verbunden:

$$\gamma\frac{a}{2}\cdot g'\frac{a}{2}=-e^{\frac{aa'}{4c}\pi},\qquad G\frac{a}{2}\cdot\mathfrak{G}\frac{a}{2}=e^{\frac{aa'}{4c}\pi},$$

$$\gamma\frac{b}{2}\cdot G'\frac{b}{2}=-e^{\frac{bb'}{4c}\pi},\qquad g\frac{b}{2}\cdot\mathfrak{G}\frac{b}{2}=e^{\frac{bb'}{4c}\pi},$$

$$\gamma\frac{a+b}{2}=\gamma\frac{a}{2}\cdot g\frac{b}{2}\cdot e^{\frac{a'b\pi}{4c}}=\gamma\frac{b}{2}\cdot G\frac{a}{2}\cdot e^{\frac{ab'\pi}{4c}},$$

$$g\frac{a+b}{2}=g'\frac{a}{2}\cdot\gamma\frac{b}{2}\cdot e^{\frac{a'b\pi}{4c}}=g\frac{b}{2}\cdot\mathfrak{G}\frac{a}{2}\cdot e^{\frac{ab'\pi}{4c}},$$

$$G\frac{a+b}{2}=G\frac{a}{2}\cdot\mathfrak{G}\frac{b}{2}\cdot e^{\frac{a'b\pi}{4c}}=G'\frac{b}{2}\cdot\gamma\frac{a}{2}\cdot e^{\frac{ab'\pi}{4c}},$$

$$\mathfrak{G}'\frac{a+b}{2}=\mathfrak{G}\frac{a}{2}\cdot G'\frac{b}{2}\cdot e^{\frac{a'b\pi}{4c}}=\mathfrak{G}\frac{b}{2}\cdot g'\frac{a}{2}\cdot e^{\frac{ab'\pi}{4c}}.$$

Aus den vier letzten Gleichungen folgt unter anderm:

$$\frac{\gamma\frac{a}{2}}{G\frac{a}{2}}\sqrt{-1}=\frac{\gamma\frac{b}{2}}{g\frac{b}{2}},\quad\frac{\gamma\frac{a}{2}}{\mathfrak{G}\frac{a}{2}}\sqrt{-1}=\frac{\gamma\frac{a+b}{2}}{g\frac{a+b}{2}},\quad\frac{\gamma\frac{b}{2}}{\mathfrak{G}\frac{b}{2}}=\frac{\gamma\frac{a+b}{2}}{G\frac{a+b}{2}}\sqrt{-1}.$$

Von derselben geometrischen Betrachtung ausgehend wie oben, findet man, wenn m, n beliebige ganze Zahlen bezeichnen,

$$\frac{\gamma(x+ma+nb)}{\gamma x}=\text{const.}\times e^{\frac{ma'+nb'}{c}\pi x},$$

wo das Functionszeichen γ durch die drei übrigen ersetzt werden darf. Um den Werth der Constanten auszumitteln, muss man aber die vier Functionen unterscheiden. Setzt man nämlich

$x = -\frac{ma+nb}{2} + \omega$, wo ω eine verschwindende Grösse bezeichnet, so ist zuerst für γ der Fall, wo m, n zugleich gerade sind, von den übrigen abzutrennen, weil alsdann $\gamma\frac{ma+nb}{2}$ verschwindet. Man findet hier

$$\frac{\gamma\left(\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)}{\gamma\left(-\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)} = \frac{\omega\gamma'\frac{ma+nb}{2}}{\omega\gamma'\left(-\frac{ma+nb}{2}\right)} = +1,$$

in allen andern Fällen dagegen

$$= \frac{\gamma\frac{ma+nb}{2}}{\gamma\left(-\frac{ma+nb}{2}\right)} = -1;$$

folglich überhaupt

$$\frac{\gamma\left(\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)}{\gamma\left(-\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)} = -(-1)^{(m+1)(n+1)} = (-1)^{m+n}.(-1)^{mn}.$$

Für g, G, $\mathfrak{G}$ sind resp. die Fälle, wo m ungerade, n gerade; wo m gerade, n ungerade, und endlich wo m, n zugleich ungerade sind, von allen übrigen Fällen abzutrennen. Man findet dann überhaupt:

$$\frac{g\left(\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)}{g\left(-\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)} = (-1)^{m}(-1)^{mn},$$

$$\frac{G\left(\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)}{G\left(-\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)} = (-1)^{n}(-1)^{mn},$$

$$\frac{\mathfrak{G}\left(\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)}{\mathfrak{G}\left(-\frac{ma+nb}{2}+\omega\right)} = (-1)^{mn}.$$

Es ergeben sich demnach folgende vier Gleichungen:

$$\left.\begin{matrix}\gamma\\ g\\ G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x+ma+nb)=\left.\begin{matrix}(-1)^{m+n}\\ (-1)^{m}\\ (-1)^{n}\\ +1\end{matrix}\right\}\times(-1)^{mn}\,e^{\frac{ma'+nb'}{e}\pi\left(x+\frac{ma+nb}{2}\right)}\times\left.\begin{matrix}\gamma\\ g\\ G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x).$$

§. 5.

Quotienten unendlicher Doppelproducte in Doppelsummen von Partialbrüchen verwandelt.

Denkt man sich im Ausdruck $\frac{\gamma x}{Gx}$ Zähler und Nenner als endliche Producte, von denen jener eine kleinere Zahl von Factoren hat als dieser, so ist nach den algebraischen Regeln

$$\frac{\gamma x}{Gx}=\Sigma\frac{\gamma\left(-ma-\left(n+\frac{1}{2}\right)b\right)}{G'\left(-ma-\left(n+\frac{1}{2}\right)b\right)}\;\frac{1}{x+ma+\left(n+\frac{1}{2}\right)b},$$

wo die Summe rechts sich über alle Punkte $ma+\left(n+\frac{1}{2}\right)b$ erstreckt, welche im Producte Gx, begränzt durch den Kreis k, vorkommen. Setzt man im Ausdruck des constanten Zählers eines Partialbruchs die auf einen unendlich grossen begränzenden Kreis bezüglichen Werthe von γ und G', so begeht man einen Fehler von der Ordnung $\frac{1}{k}$, und dann ist der hieraus entstehende Gesammtfehler, wenn man je zwei Partialbrüche, welche diametral entgegengesetzten Punkten entsprechen, zusammenfasst, von der Ordnung

$$\frac{1}{k}\int^{k}\frac{2\pi r dr}{r^2}=\frac{2\pi}{k}\int^{k}\frac{dr}{r}$$

d. h. von der Ordnung $\frac{\log k}{k}$, also verschwindend, wenn k unendlich gross wird. Da ferner der erwähnte constante Zähler des Partialbruchs immerfort einen endlichen Werth behält, so ist auch der aus der unendlichen kreisförmigen Ausdehnung der Doppelsumme entstehende Fehler nur von der Ordnung $\frac{1}{k}$. Nun ist der fragliche constante Zähler nach dem vorigen Paragraphen gleich $\frac{\gamma\frac{b}{2}}{G'\frac{b}{2}}.(-1)^m$; folglich in transscendentem Sinne:

$$\frac{\gamma x}{Gx} = \frac{\gamma\frac{b}{2}}{G'\frac{b}{2}} \Sigma \frac{(-1)^m}{x+ma+\left(n+\frac{1}{2}\right)b}$$

$$= \frac{\gamma\frac{b}{2}}{G'\frac{b}{2}} \left\{ \frac{d}{dx} \log G(x, 2a, b) - \frac{d}{dx} \log \mathfrak{G}(x, 2a, b) \right\}.$$

Setzt man hier a in $\frac{a}{2}$ um und wendet die Transformationsformeln am Ende von §. 3. an, so erhält man

$$\frac{\gamma x . gx}{Gx . \mathfrak{G}x} = \frac{\gamma\frac{b}{2} . g\frac{b}{2}}{G'\frac{b}{2} . \mathfrak{G}\frac{b}{2}} \frac{d}{dx} \log \frac{Gx}{\mathfrak{G}x};$$

oder, da

$$\gamma\frac{b}{2} . G'\frac{b}{2} = -g\frac{b}{2} . \mathfrak{G}\frac{b}{2}$$

ist, wenn man rechts die Differentiation vollzieht:

$$\frac{\gamma x . gx}{Gx . \mathfrak{G}x} = -\left(\frac{\gamma\frac{b}{2}}{\mathfrak{G}\frac{b}{2}}\right)^2 \left(\frac{G'x}{Gx} - \frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x}\right).$$

Theils, indem man hier $x+\frac{b}{2}$ für x setzt, theils, indem man die specifischen Constanten a, b vertauscht, oder auch $a+b$, b an die Stelle von a, b setzt, gelangt man zu folgenden sechs Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l|l}
\frac{\gamma' x}{\gamma x} - \frac{g' x}{gx} = \frac{Gx . \mathfrak{G}x}{\gamma x . gx} & \frac{G'x}{Gx} - \frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x} = p \frac{\gamma x . gx}{Gx . \mathfrak{G}x} \\
\frac{\gamma' x}{\gamma x} - \frac{G' x}{Gx} = \frac{\mathfrak{G}x . gx}{\gamma x . Gx} & \frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x} - \frac{g'x}{gx} = q \frac{\gamma x . Gx}{\mathfrak{G}x . gx} \\
\frac{\gamma' x}{\gamma x} - \frac{\mathfrak{G}' x}{\mathfrak{G}x} = \frac{gx . Gx}{\gamma x . \mathfrak{G}x} & \frac{g'x}{gx} - \frac{G'x}{Gx} = r \frac{\gamma x . \mathfrak{G}x}{gx . Gx}
\end{array}\right\} \quad (1)$$

wo

$$p=-\left(\frac{\mathfrak{G}\frac{b}{2}}{\gamma\frac{b}{2}}\right)^2=\left(\frac{G\frac{a+b}{2}}{\gamma\frac{a+b}{2}}\right)^2,\quad q=\left(\frac{\mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}\right)^2=-\left(\frac{g\frac{a+b}{2}}{\gamma\frac{a+b}{2}}\right)^2,$$

$$r=-\left(\frac{G\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}\right)^2=\left(\frac{g\frac{b}{2}}{\gamma\frac{b}{2}}\right)^2.$$

Verbindet man nun je drei dieser sechs Gleichungen, so dass die logarithmischen Differentiale verschwinden, und reducirt, so erhält man folgende vier Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} G^2x-\mathfrak{G}^2x=p\cdot\gamma^2x, \\ \mathfrak{G}^2x-g^2x=q\cdot\gamma^2x, \\ g^2x-G^2x=r\cdot\gamma^2x, \\ pg^2x+qG^2x+r\mathfrak{G}^2x=0. \end{array}\right\}\quad(2)$$

Sollen die drei ersten zugleich bestehen, so wird

$$p+q+r=0$$

erfordert. Die vierte ist eine nothwendige Folge der drei ersten.

§. 6.

Das Argument x als einfaches Integral mittelst der gebrochenen Function $\frac{\gamma x}{Gx}$ dargestellt.

Setzt man $y=\frac{\gamma x}{Gx}$, so geben die vorigen Gleichungen

$$\frac{gx}{Gx}=\sqrt{1+ry^2},\quad \frac{\mathfrak{G}x}{Gx}=\sqrt{1-py^2}$$

und

$$dy=\sqrt{1+ry^2}\sqrt{1-py^2}\,dx,$$

folglich

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{(1+ry^2)(1-py^2)}},$$

wo x und y zugleich verschwinden sollen. Wenn daher $-\frac{p}{r}=k^2$, also der Modul $k=\frac{\mathfrak{G}\frac{b}{2}}{g\frac{b}{2}}$ gesetzt wird, so ist

$$\sqrt{-r}\cdot\frac{\gamma x}{Gx}=\sin\mathrm{am}(x\sqrt{-r}),\ \frac{gx}{Gx}=\cos\mathrm{am}(x\sqrt{-r}),$$

und

$$\frac{\mathfrak{G}x}{Gx}=\Delta\,\mathrm{am}\,(x\sqrt{-r}),\ \text{wo}\ \sqrt{-r}=\frac{G\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}\ \text{ist.}$$

Zugleich ist der complementäre Modul

$$k'=\sqrt{-\frac{q}{r}}=\frac{\mathfrak{G}\frac{a}{2}}{G\frac{a}{2}}.$$

§. 7.

Addition der Argumente der elliptischen Functionen.

Macht man die erste der Gleichungen (1) ganz, so erhält man für zwei beliebige Argumente x, y:

$$Gx\,\mathfrak{G}x=gx\gamma'x-\gamma x g'x,$$
$$Gy\,\mathfrak{G}y=gy\gamma'y-\gamma y g'y;$$

also, wenn man resp. mit $Gy\,\mathfrak{G}y$, $Gx\,\mathfrak{G}x$ multiplicirt und substrahirt:

$$Gy\,\mathfrak{G}y\,(gx\gamma'x-\gamma xg'x)-Gx\,\mathfrak{G}x(gy\gamma'y-\gamma y g'y)=0.$$

Andere fünf Gleichungen dieser Art unterscheiden sich nur durch gegenseitige Vertauschung der Functionszeichen γ, g, G, $\mathfrak{G}$. Addirt man zur vorigen Gleichung diejenige, welche sich ergiebt, wenn man resp. G, $\mathfrak{G}$, g, γ gegen g, γ, G, $\mathfrak{G}$ vertauscht, und setzt $x+y=$const, so ergiebt sich

$$gxGyd(\gamma x\mathfrak{G}y)+gy\,Gxd(\gamma y\mathfrak{G}x)=\gamma x\,\mathfrak{G}yd(gxGy)+\gamma y\,\mathfrak{G}xd(gyGx),$$

und wenn man hier g, G vertauscht und die so entstandene Gleichung addirt oder substrahirt, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$(gxGy\pm gyGx)d(\gamma x\mathfrak{G}y\pm\gamma y\mathfrak{G}x)=(\gamma x\mathfrak{G}y\pm\gamma y\mathfrak{G}x)d(gxGy\pm gyGx),$$

aus denen sich durch Integration die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{Gx\,gy+gx\,Gy}{\gamma x\,\mathfrak{G}y+\mathfrak{G}x\,\gamma y}&=\frac{G(x+y)+g(x+y)}{\gamma(x+y)}\\ \frac{Gxgy-gxGy}{\gamma x\mathfrak{G}y-\mathfrak{G}x\gamma y}&=\frac{G(x+y)-g(x+y)}{\gamma(x+y)}\end{aligned}\right\}\ (3)$$

ergeben. Multiplicirt man sie mit einander und berücksichtigt die Formeln (2), so sieht man, dass je eine der Gleichungen (3) eine nothwendige Folge der anderen ist. Noch zwei andere Paare solcher Gleichungen ergeben sich, wenn man die Function $\mathfrak{G}$ mit g oder G vertauscht. Setzt man in (3) $-y$ anstatt y, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}\frac{Gx\,gy+gx\,Gy}{\gamma x\mathfrak{G}y-\mathfrak{G}x\gamma y}&=\frac{G(x-y)+g(x-y)}{\gamma(x-y)},\\ \frac{Gxgy-gxGy}{\gamma x\mathfrak{G}y+\mathfrak{G}x\gamma y}&=\frac{G(x-y)-g(x-y)}{\gamma(x-y)},\end{aligned}\right\}\ (3\text{ bis}).$$

Die Vertäuschung von $\mathfrak{G}$ mit g oder G liefert noch zwei andere Paare.

Die Gleichungen (3) können ihrer Natur nach nur dazu dienen, die gebrochenen Functionen der Summe $x+y$ durch solche der getrennten Argumente x, y auszudrücken. Es entsteht daher die Aufgabe, von den erwähnten gebrochenen Gleichungen zu ganzen zurückzugehen, aus deren Division jene als hervorgegangen angesehen werden können.

Für welche Argumente bekömmt die gebrochene Function $\frac{\gamma x}{gx}$ dieselben Werthe? Die Formeln am Ende von §. 4. geben uns

$$\frac{\gamma(x+ma+nb)}{g(x+ma+nb)}=(-1)^n\frac{\gamma x}{gx}.$$

Unterscheidet man daher, ob n gerade oder ungerade ist, so hat man

$$\frac{\gamma(x+ma+2nb)}{g(x+ma+2nb)}=\frac{\gamma x}{gx},\quad \frac{\gamma(ma+(2n+1)b-x)}{g(ma+(2n+1)b-x)}=\frac{\gamma x}{gx}.$$

Also wird der ganze Ausdruck

$$\gamma x\,gy-\gamma y\,gx.$$

so oft verschwinden, als entweder $x-y=ma+2nb$, oder aber $x+y=ma+(2n+1)b$ ist. Schliesst man hieraus auf die linearen Factoren des erwähnten Ausdrucks, so folgt, dass derselbe durch die ganze Function

$$\gamma(x-y,\ a,\ 2b)\,G(x+y,\ a,\ 2b)$$

theilbar ist. Dürfte man annehmen, dass jener Ausdruck die linearen Factoren nur einmal und keine anderen ausser denselben enthalte, so fände Gleichheit statt, ohne dass man einen constanten Factor beizufügen brauchte, weil für $y=0$ sich die am Ende von §. 3. bewiesene Gleichung

$$\gamma(x, a, b)=\gamma(x, a, 2b)\, G(x, a, 2b)$$

ergäbe. Nähme man die durch Umsetzung von y in $-y$ entstehende Gleichung hinzu, so hätte man die zwei Gleichungen

$$\gamma x g y-\gamma y g x=\gamma(x-y, a, 2b)\, G(x+y, a, 2b),$$
$$\gamma x g y+\gamma y g x=\gamma(x+y, a, 2b)\, G(x-y, a, 2b);$$

aus deren Multiplication sich vermöge der angeführten Transformation zweiter Ordnung die Gleichung

$$\gamma^2 x\, g^2 y-\gamma^2 y\, g^2 x=\gamma(x+y)\gamma(x-y)$$

ergäbe. Diese Formel soll nun streng bewiesen werden. Da ihre linke Seite verschiedentlich dargestellt werden kann, so wollen wir sie kurz durch $N(x, y, a, b)$ oder nur durch $N(x, y)$, wenn sich die specifischen Constanten a, b von selbst verstehen, bezeichnen. Man erhält dann aus den Formeln (2)

$$\left.\begin{array}{l|l}
\gamma^2 x\, g^2 y-\gamma^2 y\, g^2 x=N(x,y) & G^2 x\, \mathfrak{G}^2 y-G^2 y\, \mathfrak{G}^2 x=pN(x,y) \\
\gamma^2 x\, G^2 y-\gamma^2 y\, G^2 x=N(x,y) & \mathfrak{G}^2 x\, g^2 y-\mathfrak{G}^2 y\, g^2 x=q\, N(x,y) \\
\gamma^2 x\, \mathfrak{G}^2 y-\gamma^2 y\, \mathfrak{G}^2 x=N(x,y) & g^2 x\, G^2 y-g^2 y\, G^2 x=rN(x,y)
\end{array}\right\}\ (4)$$

Vermöge der Transformationsformeln zweiter Ordnung hat man

$$\gamma\left(x, a, \tfrac{b}{2}\right) g\left(y, a, \tfrac{b}{2}\right)-\gamma\left(y, a, \tfrac{b}{2}\right) g\left(x, a, \tfrac{b}{2}\right)=\gamma x\, G x\, g y\, \mathfrak{G} y-\gamma y\, G y\, g x\, \mathfrak{G} x.$$

Wenn man aber die Formeln (3) addirt, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{G(x+y)}{\gamma(x+y)}=\dfrac{\gamma x\, G x\, g y\, \mathfrak{G} y-\gamma y\, G y\, g x\, \mathfrak{G} x}{N(x,y)}, \\
\dfrac{G(x-y)}{\gamma(x-y)}=\dfrac{\gamma x\, G x\, g y\, \mathfrak{G} y+\gamma y\, G y\, \gamma x\, \mathfrak{G} x}{N(x,y)}.
\end{array}\right\}\ (5)$$

Folglich ist

$$\gamma\left(x, a, \tfrac{b}{2}\right) g\left(y, a, \tfrac{b}{2}\right)-\gamma\left(y, a, \tfrac{b}{2}\right) g\left(x, a, \tfrac{b}{2}\right)=N(x,y)\frac{G(x+y)}{\gamma(x+y)},$$

$$\gamma\left(x, a, \tfrac{b}{2}\right) g\left(y, a, \tfrac{b}{2}\right)+\gamma\left(y, a, \tfrac{b}{2}\right) g\left(x, a, \tfrac{b}{2}\right)=N(x,y)\frac{G(x-y)}{\gamma(x-y)};$$

und wenn man beide Gleichungen mit einander multiplicirt:

$$N\left(x, y, a, \tfrac{b}{2}\right)=\overline{N(x,y)}^2\, \frac{G(x+y)\, G(x-y)}{\gamma(x+y)\, \gamma(x-y)}.$$

Diese Gleichung werde nun durch

$$\gamma\left(x+y,a,\frac{b}{2}\right)\gamma\left(x-y,a,\frac{b}{2}\right)=\gamma(x+y)\,G(x+y)\,\gamma(x-y)\,G(x-y)$$

dividirt, so ergiebt sich

$$\frac{N\left(x,y,a,\frac{b}{2}\right)}{\gamma\left(x+y,a,\frac{b}{2}\right)\gamma\left(x-y,a,\frac{b}{2}\right)}=\left\{\frac{N(x,y,a,b)}{\gamma(x+y,a,b)\gamma(x-y,a,b)}\right\}^2.$$

Eine ähnliche Gleichung entsteht durch Vertauschung von a und b. Wendet man beide hinter einander an und bedenkt, dass

$$\gamma(x,2a,2b)=2\gamma\left(\frac{x}{2},a,b\right)$$

ist, so erhält man

$$\frac{N(x,y)}{\gamma(x+y)\gamma(x-y)}=\left\{\frac{N\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)}{\gamma\frac{x+y}{2}\,\gamma\frac{x-y}{2}}\right\}^4;$$

folglich, wenn n irgend eine ganze positive Zahl bezeichnet:

$$\frac{N(x,y)}{\gamma(x+y)\gamma(x-y)}=\left\{\frac{N\left(\frac{x}{2^n},\frac{y}{2^n}\right)}{\gamma\frac{x+y}{2^n}\,\gamma\frac{x-y}{2^n}}\right\}^{4^n}.$$

Es ist aber, wenn man nach steigenden Potenzen von x, y entwickelt:

$$\frac{N(x,y)}{\gamma(x+y)\gamma(x-y)}=1+Lx^2y^2+\text{u. s. w.},$$

wo

$$L=\frac{1}{9}(\gamma'''0)^2+\frac{1}{3}\gamma'''0.g''0-\frac{1}{12}\gamma^{V}0-\frac{1}{4}(g''0)^2-\frac{1}{12}g^{IV}0;$$

folglich für ein unendlich gross werdendes n:

$$\frac{N(x,y)}{\gamma(x+y)\gamma(x-y)}=\left(1+L\frac{x^2y^2}{4^{2n}}+\text{u. s. w.}\right)^{4^n}=1+L\frac{x^2y^2}{4^n}+\text{u. s. w.}$$

Also endlich

$$\gamma(x+y)\gamma(x-y)=N(x,y). \qquad (6)$$

Werden die Gleichungen (5) mit einander multiplicirt, und rechts die Functionen g, $\mathfrak{G}$ mittelst der Relationen (2) in γ, G ausgedrückt, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} &G(x+y)\,G(x-y)=G^2x\,G^2y+rp\gamma^2x\gamma^2y. \\ &\text{Ebenso ist} \\ &g(x+y)\,g(x-y)=g^2x\,g^2y+q r\gamma^2x\,\gamma^2y, \\ &\mathfrak{G}(x+y)\mathfrak{G}(x-y)=\mathfrak{G}^2x\mathfrak{G}^2y+pq\gamma^2x\gamma^2y. \end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Vermöge der Gleichung (6) werden die Gleichungen (5)

$$\gamma(x+y)\,G\,(x-y)=\gamma x\,Gx\,gy\,\mathfrak{G}y+\gamma y\,Gy\,gx\,\mathfrak{G}x,$$
$$\gamma\,(x-y)\,G(x+y)=\gamma x\,Gx\,gy\,\mathfrak{G}y-\gamma y\,Gy\,gx\,\mathfrak{G}x.$$

Durch Addition und Substraction ergeben sich hieraus zwei andere Gleichungen. Vertauscht man darin G mit g oder mit $\mathfrak{G}$, und setzt der Kürze wegen

$$s=x+y,\ t=x-y;$$

so bekömmt man folgende sechs Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l|l} \gamma s\,gt+\gamma t\,gs=2\gamma x\,gx\,Gy\,\mathfrak{G}y & \gamma s\,gt-\gamma t\,gs=2\gamma y\,gy\,Gx\,\mathfrak{G}x \\ \gamma s\,Gt+\gamma t\,Gs=2\gamma x\,Gx\,gy\,\mathfrak{G}y & \gamma s\,Gt-\gamma t\,Gs=2\gamma y\,Gy\,\mathfrak{G}x\,gx \\ \gamma s\,\mathfrak{G}t+\gamma t\,\mathfrak{G}s=2\gamma x\,\mathfrak{G}x\,gy\,Gy & \gamma s\,\mathfrak{G}t-\gamma t\,\mathfrak{G}s=2\gamma y\,\mathfrak{G}y\,gx\,Gx \end{array}\right\}\ (8)$$

Sechs andere Gleichungen dieser Art ergeben sich entweder, indem man hier x um eine halbe specifische Constante vermehrt, oder auch auf folgendem Wege. Wenn man in den Formeln (3) das eine Mal x,y durch s,t ersetzt, das andere Mal hingegen y gleich x werden lässt, so kommen in beiden Fällen die rechten Seiten jener zwei Formeln gleich heraus. Man hat also

$$\frac{Gs\,gt+gs\,Gt}{\gamma s\mathfrak{G}t+\mathfrak{G}s\,\gamma t}=\frac{gx\,Gx}{\gamma x\,\mathfrak{G}x},$$
$$\frac{Gs\,gt-gs\,Gt}{\gamma s\,\mathfrak{G}t-\mathfrak{G}s\,\gamma t}=\frac{Gx\,g'x-gx\,G'x}{\gamma x\mathfrak{G}'x-\mathfrak{G}x\,\gamma'x}=\frac{r\gamma x\,\mathfrak{G}x}{-gx\,Gx}$$

in Folge der Formeln (1). Da nun die Nenner links durch die Formeln (8) bekannt sind, so erhalten die zwei vorliegenden Gleichungen sammt denen, welche daraus durch Vertauschung der Functionszeichen sich ergeben, folgende Gestalt:

$$\left.\begin{array}{l|l} Gs\mathfrak{G}t+\mathfrak{G}s\,Gt=2Gx\,Gy\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y & Gs\mathfrak{G}t-\mathfrak{G}s\,Gt=2p\gamma x\gamma y\,gx\,gy \\ \mathfrak{G}s\,gt+gs\,\mathfrak{G}t=2\mathfrak{G}x\,\mathfrak{G}y\,gx\,gy & \mathfrak{G}s\,gt-gs\,\mathfrak{G}t=2q\gamma x\gamma y\,Gx\,Gy \\ gs\,Gt+Gs\,gt=2gx\,gy\,Gx\,Gy & gs\,Gt-Gs\,gt=2r\gamma x\gamma y\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y \end{array}\right\}\ (9)$$

Die drei letzten Gleichungen führen zu merkwürdigen Folgerungen. Multiplicirt man sie nämlich der Reihe nach mit gz, Gz, $\mathfrak{G}z$ und addirt, so erhält man links eine Determinante:

$$\begin{vmatrix} gs, & gt, & gz \\ Gs, & Gt, & Gz \\ \mathfrak{G}s, & \mathfrak{G}t, & \mathfrak{G}z \end{vmatrix} = 2\gamma x\gamma y\,(pgxgygz + q\,GxGyGz + r\,\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}z).$$

Da die Determinate durch $\gamma x\gamma y = \gamma\frac{s+t}{2}\gamma\frac{s-t}{2}$ theilbar ist, so muss sie der Symmetrie wegen auch durch $\gamma\frac{t+z}{2}\gamma\frac{t-z}{2}.\ \gamma\frac{z-s}{2}\gamma\frac{z+s}{2}$ theilbar sein. Man setze daher in dem eingeklammerten Ausdrucke rechts $x=\frac{s+t}{2}$, $y=\frac{s-t}{2}$, drücke mittelst der Formeln (7) alles in den Argumenten $\frac{s}{2}$, $\frac{t}{2}$, $\frac{z}{2}$ aus und reducire es mittelst (2) auf zwei einzige Functionszeichen z. B. γ und g. Zerlegt man den erhaltenen Ausdruck in Factoren und beachtet die Formel (6), so ergiebt sich

$$\begin{aligned} & pgxgygz + q\,GxGyGz + r\,\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}z \\ & = -2pqr\gamma\frac{x+y+z}{2}\gamma\frac{y+z-x}{2}\gamma\frac{z+x-y}{2}\gamma\frac{x+y-z}{2}, \end{aligned} \qquad (10)$$

und wenn man in der Determinante s, t durch x, y ersetzt, so wird sie

$$\begin{vmatrix} gx, & gy, & gz \\ Gx, & Gy, & Gz \\ \mathfrak{G}x, & \mathfrak{G}y, & \mathfrak{G}z \end{vmatrix} = -4pqr\gamma\frac{y+z}{2}\gamma\frac{y-z}{2}\gamma\frac{z+x}{2}\gamma\frac{z-x}{2}\gamma\frac{x+y}{2}\gamma\frac{x-y}{2}; \qquad (11)$$

Setzt man in (10) $z=x+y$ oder $z=x-y$, so verschwindet die rechte Seite, und man bekömmt

$$\left.\begin{aligned} pgxgyg(x+y) + q\,GxGyG(x+y) + r\,\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\,\mathfrak{G}(x+y) = 0, \\ pgxgyg(x-y) + q\,GxGy\,G(x-y) + r\,\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\,\mathfrak{G}(x-y) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (12).$$

Setzt man $z=0$, so wird

$$pgxgy + qGxGy + r\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y = 2pqr\gamma^2\frac{x+y}{2}\gamma^2\frac{x-y}{2} \qquad (13)$$

oder auch

$$pg(x+y)g(x-y) + qG(x+y)G(x-y) + r\mathfrak{G}(x+y)\mathfrak{G}(x-y) = 2pqr\gamma^2x\gamma^2y.$$

Setzt man $x=y=z$, so ergiebt sich

$$pg^3x + q\,G^3x + r\,\mathfrak{G}^3x = -2pqr\gamma^3\frac{x}{2}\,\gamma\frac{3x}{2}. \qquad (14)$$

Vermehrt man in (10) das Argument x nach einander um a, b, $a+b$, so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$-pgxgygz+q\,Gx\,Gy\,Gz+r\,\mathfrak{G}x\,\mathfrak{G}y\,\mathfrak{G}z$$
$$=-2pg\frac{x+y+z}{2}g\frac{y+z-x}{2}g\frac{z+x-y}{2}g\frac{x+y-z}{2},$$

$$pgxgygz-q\,Gx\,Gy\,Gz+r\,\mathfrak{G}x\,\mathfrak{G}y\,\mathfrak{G}z$$
$$=-2q\,G\frac{x+y+z}{2}G\frac{y+z-x}{2}G\frac{z+x-y}{2}G\frac{x+y-z}{2},$$

$$pgxgygz+q\,Gx\,Gy\,Gz-r\,\mathfrak{G}x\,\mathfrak{G}y\,\mathfrak{G}z$$
$$=-2r\,\mathfrak{G}\frac{x+y+z}{2}\mathfrak{G}\frac{y+z-x}{2}\mathfrak{G}\frac{z+x-y}{2}\mathfrak{G}\frac{x+y-z}{2}.$$

Vermehrt man in (10) und (15) beide Argumente y und z um $\frac{a}{2}$, so erhält man:

$$pgx\gamma y\gamma z+Gx\,\mathfrak{G}y\,\mathfrak{G}z+\mathfrak{G}x\,Gy\,Gz$$
$$=2\mathfrak{G}\frac{x+y+z}{2}\mathfrak{G}\frac{y+z-x}{2}G\frac{z+x-y}{2}G\frac{x+y-z}{2},$$

$$-pgx\gamma y\gamma z+Gx\,\mathfrak{G}y\,\mathfrak{G}z+\mathfrak{G}x\,Gy\,Gz$$
$$=2\,G\frac{x+y+z}{2}G\frac{y+z-x}{2}\mathfrak{G}\frac{z+x-y}{2}\mathfrak{G}\frac{x+y-z}{2},$$

$$pgx\gamma y\gamma z-Gx\,\mathfrak{G}y\,\mathfrak{G}z+\mathfrak{G}x\,Gy\,Gz$$
$$=-2pg\frac{x+y+z}{2}g\frac{y+z-x}{2}\gamma\frac{z+x-y}{2}\gamma\frac{x+y-z}{2},$$

$$pgx\gamma y\gamma z+Gx\,\mathfrak{G}y\,\mathfrak{G}z-\mathfrak{G}x\,Gy\,Gz$$
$$=-2p\gamma\frac{x+y+z}{2}\gamma\frac{y+z-x}{2}g\frac{z+x-y}{2}g\frac{x+y-z}{2}.$$

Acht andere Gleichungen dieser Art ergeben sich, wenn man p, g, G, $\mathfrak{G}$ das eine Mal resp. durch q, G, $\mathfrak{G}$, g, das andere Mal durch r, $\mathfrak{G}$, g, G ersetzt.

Vermehrt man in (11) jedes der Argumente x, y, z um $\frac{a}{2}$, so ergiebt sich

$$\begin{vmatrix}\gamma x, & \gamma y, & \gamma z\\ Gx, & Gy, & Gz\\ \mathfrak{G}x, & \mathfrak{G}y, & \mathfrak{G}z\end{vmatrix}=4pg\frac{y+z}{2}g\frac{z+x}{2}g\frac{x+y}{2}\gamma\frac{y-z}{2}\gamma\frac{z-x}{2}\gamma\frac{x-y}{2}$$

und noch zwei ähnliche Gleichungen. Von hier aus kann man zu folgender merkwürdigen Formel gelangen:

$$\begin{vmatrix} \gamma w, & \gamma x, & \gamma y, & \gamma z \\ g w, & g x, & g y, & g z \\ G w, & G x, & G y, & G z \\ \mathfrak{G} w, & \mathfrak{G} x, & \mathfrak{G} y, & \mathfrak{G} z \end{vmatrix}$$

$$=8pqr\gamma\frac{w-x}{2}\gamma\frac{w-y}{2}\gamma\frac{w-z}{2}\gamma\frac{x-y}{2}\gamma\frac{x-z}{2}\gamma\frac{y-z}{2}\gamma\frac{w+x+y+z}{2}.$$

Ich bemerke hier noch zwei Formeln, deren ich mich zum Beweise der vorliegenden bediente:

$$pqr\,\gamma w\,\gamma x\,\gamma y\,\gamma z+p\,gw\,gx\,gy\,gz+q\,Gw\,Gx\,Gy\,Gz+r\,\mathfrak{G}w\,\mathfrak{G}x\,\mathfrak{G}y\,\mathfrak{G}z$$
$$=2pqr\gamma\frac{w+x-y-z}{2}\gamma\frac{w+y-x-z}{2}\gamma\frac{w+z-x-y}{2}\gamma\frac{w+x+y+z}{2};\quad(a)$$

worin (10) als specieller der Annahme $w=0$ entsprechender Fall enthalten ist. Setzt man $w+a$ anstatt w und reducirt, so kömmt:

$$pqr\,\gamma w\gamma x\gamma y\gamma z+p\,gwgxgygz-q\,GwGxGyGz-r\mathfrak{G}w\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}z$$
$$=2pg\frac{w+x-y-z}{2}g\frac{w+y-x-z}{2}g\frac{w+z-x-y}{2}g\frac{w+x+y+z}{2},\quad(b)$$

und noch zwei andere Gleichungen dieser Art. — Die andere Formel war:

$$G\frac{x+y}{2}G\frac{x-z}{2}\mathfrak{G}\frac{x-y}{2}\mathfrak{G}\frac{x+z}{2}-G\frac{x-y}{2}G\frac{x+z}{2}\mathfrak{G}\frac{x+y}{2}\mathfrak{G}\frac{x-z}{2}$$
$$=p\gamma x\gamma\frac{y-z}{2}g\frac{y+z}{2},$$

und ähnliche.

§. 8.

Anwendung des Vorigen auf die Verwandlung zweiter Ordnung.

Am Schlusse des §. 3., wo die Transformation zweiter Ordnung vorkam, konnten die Ausdrücke für $g\left(x,\frac{a}{2},b\right)$, u. s. w. noch nicht gegeben werden, weil sie nicht unmittelbar aus der dortigen Grundanschauung hervorgehen. Erst die Formel (9) des vorigen Paragraphen machen es uns möglich, die Transformation zweiter Ordnung in dieser Beziehung zu vervollständigen. Setzt man nämlich in (9) $x=y$, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l|l} G2x+\mathfrak{G}2x=2G^2x\mathfrak{G}^2x, & G2x-\mathfrak{G}2x=2p\gamma^2xg^2x, \\ \mathfrak{G}2x+g2x=2\mathfrak{G}^2xg^2x, & \mathfrak{G}2x-g2x=2q\gamma^2xG^2x, \\ g2x+G2x=2g^2xG^2x, & g2x-G2x=2r\gamma^2x\mathfrak{G}^2x. \end{array}\right\}(A).$$

Setzt man in (13) $y=0$ und verdoppelt x, so ergiebt sich

$$pg2x + qG2x + r\mathfrak{G}2x = 2pqr\gamma^4 x.$$

Diese Gleichungen geben die Functionen des einfachen Arguments x ausgedrückt durch solche des doppelten Arguments $2x$; sie dienen also zur Halbirung des Arguments, erfordern aber hiezu die Ausziehung vierter Wurzeln. Für den Zweck dieses Paragraphen geben die zwei Gleichungen der ersten Horizontalreihe:

$$G2x = G^2(x, \tfrac{a}{2}, b) + p\gamma^2(x, \tfrac{a}{2}, b),$$

$$\mathfrak{G}2x = G^2(x, \tfrac{a}{2}, b) - p\gamma^2(x, \tfrac{a}{2}, b).$$

Man setze hier $2a$ statt a, und dann möge p in P übergehen, so wird

$$G\left(x,\ a, \frac{b}{2}\right) = G^2 x + P.\gamma^2 x,$$

$$\mathfrak{G}\left(x,\ a, \frac{b}{2}\right) = G^2 x - P.\gamma^2 x.$$

Um die Constante P zu bestimmen, setze man $x = \frac{b}{2}$, so wird nach §. 4:

$$\left.\begin{matrix}G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}\left(\frac{b}{2}, a, \frac{b}{2}\right) = \mp e^{\frac{bb'\pi}{4c}} = \mp g\frac{b}{2}\mathfrak{G}\frac{b}{2};$$

folglich

$$P = -\frac{g\frac{b}{2}\mathfrak{G}\frac{b}{2}}{\gamma^2\frac{b}{2}} = -\frac{e^{\frac{bb'\pi}{4c}}}{\gamma^2\frac{b}{2}};$$

also endlich die gesuchten Transformationsformeln:

$$G\left(x,\ a, \frac{b}{2}\right) = G^2 x - \frac{g\frac{b}{2}.\mathfrak{G}\frac{b}{2}}{\gamma^2\frac{b}{2}}\gamma^2 x,$$

$$\mathfrak{G}\left(x,\ a, \frac{b}{2}\right) = G^2 x + \frac{g\frac{b}{2}.\mathfrak{G}\frac{b}{2}}{\gamma^2\frac{b}{2}}\gamma^2 x;$$

und ebenso

$$g\left(x, \frac{a}{2}, b\right) = g^2 x - \frac{G\frac{a}{2} \cdot \mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma^2 \frac{a}{2}} \gamma^2 x,$$

$$\mathfrak{G}\left(x, \frac{a}{2}, b\right) = g^2 x + \frac{G\frac{a}{2} \cdot \mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma^2 \frac{a}{2}} \gamma^2 x.$$

Betrachtet man die in §. 5. definirten Constanten p, q, r als Functionen der specifischen Constanten a, b und bezeichnet sie daher durch $p(a, b)$, u. s. f., so hat man

$$\left.\begin{aligned}
p\left(\frac{a}{2}, b\right) &= \left(\frac{G\frac{a}{2} - \mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}\right)^2 = (\sqrt{-r(a,b)} - \sqrt{q(a,b)})^2,\\
q\left(\frac{a}{2}, b\right) &= \frac{4G\frac{a}{2} \cdot \mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma^2\frac{a}{2}} = 4\sqrt{-r(a,b) \cdot q(a,b)},\\
r\left(\frac{a}{2}, b\right) &= -\left(\frac{G\frac{a}{2} + \mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}\right)^2 = -(\sqrt{-r(a,b)} + \sqrt{q(a,b)})^2,
\end{aligned}\right\} \quad (B)$$

$$p\left(a, \frac{b}{2}\right) = -\frac{4g\frac{b}{2} \cdot \mathfrak{G}\frac{b}{2}}{\gamma^2\frac{b}{2}} = 4\sqrt{-r(a,b) \cdot p(a,b)},$$

$$q\left(a, \frac{b}{2}\right) = -\frac{\left(g\frac{b}{2} - \mathfrak{G}\frac{b}{2}\right)^2}{\gamma^2\frac{b}{2}} = (\sqrt{-r(a,b)} - \sqrt{p(a,b)})^2,$$

$$r\left(a, \frac{b}{2}\right) = \frac{\left(g\frac{b}{2} + \mathfrak{G}\frac{b}{2}\right)^2}{\gamma^2\frac{b}{2}} = -(\sqrt{-r(a,b)} + \sqrt{p(a,b)})^2.$$

§. 9.

Zur Verwandlung von ungerader Ordnung.

In §. 3. wurde gezeigt, wie sich ganze elliptische Functionen, die zur Darstellung $\left(\frac{a}{h}, \frac{b}{k}\right)$ (wo h, k zwei ungerade Zahlen sind) gehören, als endliche Producte solcher darstellen lassen, die zur Darstellung (a,b) gehören. Hier sollen nun die bestimmten Functionen, wie $\gamma\left(\frac{a}{2h}, \frac{a}{h}, \frac{b}{k}\right)$, einer besonderen Betrachtung unterworfen werden.

Der Kürze wegen wird hier durch P ein endliches Doppelproduct bezeichnet werden, welches sich über alle den Gränzbedingungen

$$-\frac{h-1}{2} \overline{\underline{<}}\, m \,\overline{\underline{<}} \frac{h-1}{2},\ -\frac{k-1}{2} \overline{\underline{<}}\, n \,\overline{\underline{<}} \frac{k-1}{2}$$

genügenden ganzen Werthe von m,n erstreckt. Wird in diesem Producte der dem Systeme $m=0$, $n=0$ entsprechende Factor weggelassen, und wird von je zweien diametral entgegengesetzten Systemen (m, n), $(-m, -n)$ nur das eine berücksichtigt, so soll das alsdann nur $\frac{pq-1}{2}$ Factoren zählende Product durch Π angedeutet werden.

Nach §. 3. ist nun

$$\gamma\left(\frac{a}{2h}, \frac{a}{h}, \frac{b}{k}\right) = (-1)^{\frac{hk-1}{2}} \frac{P.\gamma\left(\frac{a}{2h} + \frac{ma}{h} + \frac{nb}{k}\right)}{\Pi\gamma^2\left(\frac{ma}{h} + \frac{nb}{k}\right)}.$$

Für ein constantes n bekömmt hier das Argument $\frac{a}{2h} + \frac{ma}{h} + \frac{nb}{k}$ die h Werthe

$$-\frac{a}{2} + \frac{ma}{h} + \frac{nb}{k},\ \frac{a}{2} - \frac{ma}{h} - \frac{nb}{k},\ \frac{a}{2}\left[1 \overline{\underline{<}}\, m \,\overline{\underline{<}} \frac{h-1}{2}\right].$$

Wendet man dann die Formeln an, welche zur Verwandlung des Arguments $x \pm \frac{a}{2}$ in x dienen, so bekömmt man:

$$\gamma\left(\frac{a}{2h}, \frac{a}{h}, \frac{b}{k}\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \gamma^{hk}\frac{a}{2} \cdot e^{-\frac{(h^2-1)kaa'\pi}{8hc}}\ \Pi \frac{g^2\left(\frac{ma}{h} + \frac{nb}{k}\right)}{\gamma^2\left(\frac{ma}{h} + \frac{nb}{k}\right)},$$

$$G\left(\frac{a}{2h}, \frac{a}{h}, \frac{b}{k}\right) = G^{hk}\frac{a}{2} \cdot e^{-\frac{(h^2-1)kaa'\pi}{8hc}}\ \Pi \frac{\mathfrak{G}^2\left(\frac{ma}{h} + \frac{nb}{k}\right)}{G^2\left(\frac{ma}{h} + \frac{nb}{k}\right)},$$

$$\gamma\left(\frac{b}{2k},\frac{a}{h},\frac{b}{k}\right)=(-1)^{\frac{h-1}{2}}\gamma^{hk}\frac{b}{2}\cdot e^{-\frac{(k^2-1)hbb'\pi}{8kc}}\;\Pi\frac{G^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)}{\gamma^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)},$$

$$g\left(\frac{b}{2k},\frac{a}{h},\frac{b}{k}\right)=g^{hk}\frac{b}{2}\cdot e^{-\frac{(k^2-1)hbb'\pi}{8kc}}\;\Pi\frac{\mathfrak{G}^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)}{g^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)};$$

und hieraus

$$p\left(\frac{a}{h},\frac{b}{k}\right)=(-1)^{\frac{h-1}{2}}p^{hk}\,\Pi\frac{\gamma^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)g^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)}{G^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)\mathfrak{G}^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)},$$

$$q\left(\frac{a}{h},\frac{b}{k}\right)=(-1)^{\frac{h-1}{2}}q^{hk}\,\Pi\frac{\gamma^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)G^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)}{\mathfrak{G}^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)g^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)},$$

$$r\left(\frac{a}{h},\frac{b}{k}\right)=(-1)^{\frac{h-1}{2}}r^{hk}\,\Pi\frac{\gamma^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)\mathfrak{G}^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)}{g^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)G^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)}.$$

Wendet man die Formeln (6) und (7) des §. 7. auf die Transformationsformeln des §. 3. an, so erhält man

$$\gamma\left(x,\frac{a}{h},\frac{b}{k}\right)=(-1)^{\frac{hk-1}{2}}\gamma x.\,\Pi\frac{g^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)\gamma^2x-\gamma^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)g^2x}{\gamma^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)},$$

$$g\left(x,\frac{a}{h},\frac{b}{k}\right)=gx\,\Pi\frac{g^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)g^2x+qr\gamma^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)\gamma^2x}{g^2\left(\frac{ma}{h}+\frac{nb}{k}\right)},$$

u. s. f.

Ist die reelle Componente von $\frac{b}{a}$ ein positiver rationaler Bruch $\frac{h}{k}$, dessen Zähler und Nenner ungerade sind, so kann man die Functionen $\gamma(x,a,b)$, u. s. w. mittelst der vorigen Transformationsformeln als endliche Producte von Functionen wie $\gamma(y,\ 1,\ 1+\theta\sqrt{-1})$

darstellen, wo $\frac{kb}{ha} = 1 + \theta \sqrt{-1}$ ist, und somit durch solche elliptische Functionen ausdrücken, wo das specifische Verhältniss rein imaginär, d. h. wo der Modul reell ist.

§. 10.

Herleitung der ganzen elliptischen Functionen aus den gebrochenen.

In §. 7. ist eigentlich die Addition der Argumente für ganze elliptische Functionen nicht gelungen; denn es wurde nur ein Product zweier ganzen Functionen von $x+y$ und $x-y$ in ganzen Functionen der getrennten Argumente x, y ausgedrückt. Dagegen sind die dortigen Formeln so beschaffen, dass durch dieselben die Aufgabe der Addition der Argumente für eine gebrochene elliptische Function wirklich gelöst ist. Es ergiebt sich z. B. aus (8)

$$\gamma(x+y)\,G(x-y) = \gamma x\,Gx\,gy\,\mathfrak{G}y + \gamma y\,Gy\,gx\,\mathfrak{G}x,$$

und nach (7) ist

$$G(x+y)\,G(x-y) = G^2x\,G^2y + rp\gamma^2x\gamma^2y.$$

Dividirt man diese beiden Gleichungen durch einander, so fällt das Argument $x-y$ weg, und man bekömmt dann eine wirkliche Additionsformel für die gebrochene Function $\frac{\gamma}{G}$, nämlich

$$\frac{\gamma(x+y)}{G(x+y)} = \frac{\gamma x\,Gx\,gy\,\mathfrak{G}y + \gamma y\,Gy\,gx\,\mathfrak{G}x}{G^2x\,G^2y + rp\gamma^2x\gamma^2y},$$

oder, was dasselbe ist,

$$\sin\mathrm{am}(x+y) = \frac{\sin\mathrm{am}x\cos\mathrm{am}y\,\Delta\,\mathrm{am}y + \sin\mathrm{am}y\cos\mathrm{am}x\,\Delta\,\mathrm{am}x}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}x\sin^2\mathrm{am}y},$$

wenn $r=-1$, $p=k^2$ angenommen wird.

Was so in §. 7. für gebrochene Functionen geleistet ist, soll nun auch für ganze geschehen, freilich nicht in endlicher Weise, sondern nur mittelst Differentialgleichungen. Im Zusammenhange hiemit wird sich dann eine ganze Function, wie gx, mittelst Integrationen aus irgend einer gebrochenen Function, wie z. B. $\frac{\gamma x}{gx}$, herleiten lassen.

Aus der Formel (7) in §. 7. folgt

$$\frac{g(x+y)\,g(x-y)}{g^2x\,g^2y} = 1 + qr\frac{\gamma^2x\,\gamma^2y}{g^2x\,g^2y}.$$

Differentiirt man diese Gleichung logarithmisch nach x und berücksichtigt, dass nach (1)

$$\frac{d\log}{dx}\left(\frac{\gamma x}{gx}\right)=\frac{Gx\mathfrak{G}x}{\gamma xgx}$$

ist, so erhält man

$$\frac{g'(x+y)}{g(x+y)}+\frac{g'(x-y)}{g(x-y)}-2\frac{g'x}{gx}=2qr\frac{\gamma^2x\gamma^2y}{g(x+y)g(x-y)}\frac{Gx\mathfrak{G}x}{\gamma xgx}.$$

Durch Vertauschung von x und y ergiebt sich

$$\frac{g'(x+y)}{g(x+y)}-\frac{g'(x-y)}{g(x-y)}-2\frac{g'y}{gy}=2qr\frac{\gamma^2x\gamma^2y}{g(x+y)g(x-y)}\frac{Gy\mathfrak{G}y}{\gamma ygy}.$$

Addirt man beide Gleichungen, beachtet, dass nach (8)

$$\gamma xgxGy\mathfrak{G}y+\gamma ygyGx\mathfrak{G}x=\gamma(x+y)g(x-y),$$

und halbirt, so ergiebt sich

$$\frac{g'(x+y)}{g(x+y)}-\frac{g'x}{gx}-\frac{g'y}{gy}=qr\frac{\gamma x\gamma y\gamma(x+y)}{gxgyg(x+y)}, \tag{16}$$

und zwei andere Formeln dieser Art entstehen, wenn man von g zu G und zu $\mathfrak{G}$ fortgeht. Da die gebrochene Function $\frac{\gamma(x+y)}{g(x+y)}$ sich durch gebrochene Functionen der getrennten Argumente x, y darstellen lässt, so enthält die vorliegende Gleichung die Lösung der Aufgabe, die ganze Function $g(x+y)$ ohne Beihülfe des Arguments $x-y$ einzig durch Functionen der getrennten Argumente x, y darzustellen.

Differentiirt man die Gleichung (16) nach y und setzt dann $y=0$, so erhält man

$$\frac{d\frac{g'x}{gx}}{dx}-g''0=qr\frac{\gamma^2x}{g^2x};$$

folglich

$$\frac{g'x}{gx}=xg''0+qr\int\left(\frac{\gamma x}{gx}\right)^2dx.$$

Es bestehen demnach folgende Formeln, durch welche die ganzen Functionen γ, g, G, $\mathfrak{G}$ mittelst der gebrochenen $\frac{\gamma x}{Gx}$, u. s. w. ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{g'x}{gx} &= xg''0 + qr\int\frac{\gamma^2 x}{g^2 x}dx \\
&= xG''0 + r\int\frac{\mathfrak{G}^2 x}{g^2 x}dx = x\mathfrak{G}''0 - q\int\frac{G^2 x}{g^2 x}dx, \\
\frac{G'x}{Gx} &= xG''0 + rp\int\frac{\gamma^2 x}{G^2 x}dx \\
&= x\mathfrak{G}''0 + p\int\frac{g^2 x}{G^2 x}dx = xg''0 - r\int\frac{\mathfrak{G}^2 x}{G^2 x}dx, \\
\frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x} &= x\mathfrak{G}''0 + pq\int\frac{\gamma^2 x}{\mathfrak{G}^2 x}dx \\
&= xg''0 + q\int\frac{G^2 x}{\mathfrak{G}^2 x}dx = xG''0 - p\int\frac{g^2 x}{\mathfrak{G}^2 x}dx, \\
\frac{\gamma'x}{\gamma x} &= xg''0 - \int\frac{g^2 x}{\gamma^2 x}dx \\
&= xG''0 - \int\frac{G^2 x}{\gamma^2 x}dx = x\mathfrak{G}''0 - \int\frac{\mathfrak{G}^2 x}{\gamma^2 x}dx.
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Uebrigens ist

$$G''0 - \mathfrak{G}''0 = p,\quad \mathfrak{G}''0 - g''0 = q,\quad g''0 - G''0 = r.$$

Um noch eine der Gleichung (16) ähnliche Gleichung für die Function γ zu bekommen, setze man in jener $x + \frac{a}{2}$ anstatt x, so wird man

$$\frac{\gamma'(x+y)}{\gamma(x+y)} - \frac{\gamma'x}{\gamma x} - \frac{g'y}{gy} = \frac{gxg(x+y)\gamma y}{\gamma x\gamma(x+y)gy}$$

erhalten. Zieht man hiervon die Gleichung

$$\frac{\gamma'y}{\gamma y} - \frac{g'y}{gy} = \frac{Gy\,\mathfrak{G}y}{\gamma y g y}$$

ab, so erhält man:

$$\frac{\gamma'(x+y)}{\gamma(x+y)} - \frac{\gamma'x}{\gamma x} - \frac{\gamma'y}{\gamma y} = \frac{gxg(x+y)\gamma^2 y - \gamma x\gamma(x+y)Gy\mathfrak{G}y}{\gamma x\gamma(x+y)\gamma y g y}.$$

Man multiplicire rechts Zähler und Nenner mit q, setze

$$q\gamma^2 y = \mathfrak{G}^2 y - g^2 y$$

und beachte die Gleichung

$$gy\mathfrak{G}x\mathfrak{G}(x+y) + qGy\gamma x\gamma(x+y) - \mathfrak{G}ygxg(x+y) = 0,$$

welche sich aus (12) ergiebt, wenn man dort $x+\frac{b}{2}$ anstatt x setzt. Dann erhält man

$$\frac{\gamma'(x+y)}{\gamma(x+y)}-\frac{\gamma' x}{\gamma x}-\frac{\gamma' y}{\gamma y}=\frac{\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}(x+y)-gxgyg(x+y)}{q\gamma x\gamma y\gamma(x+y)}$$

$$=\frac{gxgyg(x+y)-GxGyG(x+y)}{r\gamma x\gamma y\gamma(x+y)}=\frac{GxGyG(x+y)-\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}(x+y)}{p\gamma x\gamma y\gamma(x+y)}.$$

§. 11.

Ueber die elliptischen Integrale der dritten Art.

Die Theorie der elliptischen Integrale dritter Art ist in folgenden einfachen Betrachtungen enthalten. Es ist

$$\frac{d}{dx}\log\frac{\gamma(x+y)}{\gamma(x-y)}=\frac{\gamma'(x+y)}{\gamma(x+y)}-\frac{\gamma'(x-y)}{\gamma(x-y)}=\frac{d}{dy}\log[\gamma(x+y)\gamma(x-y)];$$

also, wenn man (6) berücksichtigt und nach x integrirt:

$$\log\frac{\gamma(x+y)}{\gamma(x-y)}=2\int\frac{gyg'y\gamma^2x-\gamma y\gamma' yg^2x}{\gamma^2xg^2y-\gamma^2yg^2x}dx=\text{u. s. w.}$$

Ebenso

$$\log\frac{g(x+y)}{g(x-y)}=2\int\frac{g^2xgyg'y+qr\gamma^2x\gamma y\gamma' y}{g^2xg^2y+qr\gamma^2x\gamma^2y}dx,\ \text{u. s. w.}$$

Lässt man hier unter dem Integrationszeichen das Argument x nur mit den Functionszeichen γ, G erscheinen, so erhalten diese vier Gleichungen folgende Gestalt:

$$\log\frac{\gamma(x+y)}{\gamma(x-y)}=2\int\frac{\gamma^2xGyG'y-G^2x\gamma y\gamma' y}{\gamma^2xG^2y-G^2x\gamma^2y}dx,$$

$$\log\frac{g(x+y)}{g(x-y)}=2\int\frac{G^2xgyg'y+r\gamma^2x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}'y}{G^2xg^2y+r\gamma^2x\mathfrak{G}^2y}dx,$$

$$\log\frac{G(x+y)}{G(x-y)}=2\int\frac{G^2xGyG'y+qr\gamma^2x\gamma y\gamma' y}{G^2xG^2y+qr\gamma^2x\gamma^2y}dx,$$

$$\log\frac{\mathfrak{G}(x+y)}{\mathfrak{G}(x-y)}=2\int\frac{G^2x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}'y-p\gamma^2xgyg'y}{G^2x\mathfrak{G}^2y-p\gamma^2xg^2y}dx.$$

Setzt man endlich

$$a=2K,\ b=2K'\sqrt{-1},\ \text{also}\ c=4KK';$$

so werden

$$p=k^2,\ q=k'^2,\ r=-1,$$

und man erhält folgende Formeln:

$$\log\frac{\gamma(x+\alpha)}{\gamma(x-\alpha)}=2\int\frac{\frac{G'\alpha}{G\alpha}\sin^2\mathrm{am}x-\frac{\gamma'\alpha}{\gamma\alpha}\sin^2\mathrm{am}\alpha}{\sin^2\mathrm{am}x-\sin^2\mathrm{am}\alpha}dx,$$

$$\log\frac{g(x+\alpha)}{g(x-\alpha)}=2\int\frac{\cos^2\mathrm{am}\alpha\frac{g'\alpha}{g\alpha}-\Delta^2\mathrm{am}\alpha\frac{\mathfrak{G}'\alpha}{\mathfrak{G}\alpha}\sin^2\mathrm{am}x}{\cos^2\mathrm{am}\alpha-\Delta^2\mathrm{am}\alpha\sin^2\mathrm{am}x}dx,$$

$$\log\frac{G(x+\alpha)}{G(x-\alpha)}=2\int\frac{\frac{G'\alpha}{G\alpha}-k^2\sin^2\mathrm{am}\alpha\frac{\gamma'\alpha}{\gamma\alpha}\sin^2\mathrm{am}x}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\alpha\sin^2\mathrm{am}x}dx,$$

$$\log\frac{\mathfrak{G}(x+\alpha)}{\mathfrak{G}(x-\alpha)}=2\int\frac{\Delta^2\mathrm{am}\alpha\frac{\mathfrak{G}'\alpha}{\mathfrak{G}\alpha}-k^2\cos^2\mathrm{am}\alpha\frac{g'\alpha}{g\alpha}\sin^2\mathrm{am}x}{\Delta^2\mathrm{am}\alpha-k^2\cos^2\mathrm{am}\alpha\sin^2\mathrm{am}x}dx.$$

Wird das elliptische Integral dritter Art durch $\int\frac{dx}{1+n\sin^2\mathrm{am}x}$ dargestellt, so erstrecken sich für ein reelles α die vorigen Formeln nur auf diejenigen Werthe von n, welche innerhalb der Gränzen

$$-\infty<n<-1,\ -k^2<n<0$$

enthalten sind. Giebt man aber dem Argument α einen rein imaginären Werth, so gelten die angeführten Formeln für diejenigen Werthe von n, welche innerhalb der Gränzen

$$0<n<+\infty,\ -1<n<-k^2$$

enthalten sind. In dieser Aufzählung sind also alle reellen Werthe von n begriffen.

§. 12.

Ueber die Addition der Argumente bei den elliptischen Integralen der dritten Art.

Der Zweck dieses Paragraphen erfordert ein Zurückgehen auf die Formeln (a) und (b) des §. 7. Setzt man in (a)

$$w=s+t,\; x=s-t,\; y=u+v,\; z=u-v$$

und bezeichnet der Kürze wegen das Product

$$\gamma(s+t)\gamma(s-t)\gamma(u+v)\gamma(u-v)$$

durch $\gamma(st, uv)$, u. s. f., so verwandelt sich die angeführte Formel in

$$pqr\gamma(st,uv)+pg(st,uv)+qG(st,uv)+r\mathfrak{G}(st,uv)=-2pqr\gamma(su,vt)$$

und hieraus durch Vertauschung von u und v:

$$-pqr\gamma(st,uv)+pg(st,uv)+qG(st,uv)+r\mathfrak{G}(st,uv)=2pqr\gamma(sv,tu).$$

Addirt und subtrahirt man diese zwei Gleichungen, so ergiebt sich

$$pg(st,uv)+qG(st,uv)+r\mathfrak{G}(st,uv)=pqr\{\gamma(sv,tu)-\gamma(su,vt)\}, \quad (c)$$

$$\gamma(st,uv)+\gamma(su,vt)+\gamma(sv,tu)=0. \quad (d)$$

Auf gleiche Art gewinnt man aus (b) die beiden Gleichungen

$$pqr\gamma(st,uv)+pg(st,uv)-qG(st,uv)-r\mathfrak{G}(st,uv)=2pg(su,vt), \quad (e)$$
$$-pqr\gamma(st,uv)+pg(st,uv)-qG(st,uv)-r\mathfrak{G}(st,uv)=2pg(sv,tu); \quad (f)$$

und aus diesen durch Addition und Subtraction

$$pg(st,uv)-qG(st,uv)-r\mathfrak{G}(st,uv)=p\{g(su,vt)+g(sv,tu)\}, \quad (g)$$
$$qr\gamma(st,uv)=g(su,tv)-g(sv,tu). \quad (h)$$

Ich erlaube mir eine kleine Zwischenbemerkung. Wenn man in (f) von der Function g zu G fortgeht, und die so entstandene Gleichung zu der unveränderten (e) hinzuaddirt, so ergiebt sich

$$pg(su,vt)+pG(sv,tu)+r\mathfrak{G}(st,uv)=0.$$

Die Gleichungen (c), (d), (g), (h) können nun bei der Addition der Argumente der elliptischen Functionen dritter Art auf folgende Weise benutzt werden. Setzt man darin

$$s=\frac{x+y}{2}+\alpha,\quad t=\frac{x+y}{2}-\alpha,\quad u=\frac{x+y}{2},\quad v=\frac{x-y}{2};$$

so wird

$$pqr\{\gamma\alpha\gamma(x+y+\alpha)\gamma(x-\alpha)\gamma(y-\alpha)-\gamma\alpha\gamma(x+y-\alpha)\gamma(x+\alpha)\gamma(y+\alpha)\}$$
$$=pg2\alpha g(x+y)gxgy+qG2\alpha G(x+y)GxGy+r\mathfrak{G}2\alpha\mathfrak{G}(x+y)\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y,$$

$$\gamma\alpha\gamma(x+y+\alpha)\gamma(x-\alpha)\gamma(y-\alpha)+\gamma\alpha\gamma(x+y-\alpha)\gamma(x+\alpha)\gamma(y+\alpha)$$
$$=\gamma2\alpha\gamma(x+y)\gamma x\gamma y,$$

$$p\{g\alpha g(x+y+\alpha)g(x-\alpha)g(y-\alpha)+g\alpha g(x+y-\alpha)g(x+\alpha)g(y+\alpha)\}$$
$$=pg2\alpha g(x+y)gxgy-qG2\alpha G(x+y)GxGy-r\mathfrak{G}2\alpha\mathfrak{G}(x+y)\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y,$$

$$g\alpha g(x+y+\alpha)g(x-\alpha)g(y-\alpha)-g\alpha g(x+y-\alpha)g(x+\alpha)g(y+\alpha)$$
$$=qr\gamma 2\alpha\gamma(x+y)\gamma x\gamma y.$$

Mittelst der Formeln (12) in §. 7. und (A) in §. 8. kann man die vorliegenden Gleichungen auf folgende Art umgestalten. Es sei der Kürze wegen

$$M=g\alpha G\alpha\mathfrak{G}\alpha\gamma x\gamma y\gamma(x+y),$$

$$N=\frac{\gamma\alpha}{p}\{G^2\alpha\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}(x+y)-\mathfrak{G}^2\alpha GxGyG(x+y)\}$$

$$=\frac{\gamma\alpha}{q}\{\mathfrak{G}^2\alpha gxgyg(x+y)-g^2\alpha\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}(x+y)\}$$

$$=\frac{\gamma\alpha}{r}\{g^2\alpha GxGyG(x+y)-G^2\alpha gxgyg(x+y)\},$$

so ist

$$\frac{\gamma(x+y+\alpha)\gamma(x-\alpha)\gamma(y-\alpha)}{\gamma(x+y-\alpha)\gamma(x+\alpha)\gamma(y+\alpha)}=\frac{M+N}{M-N},$$

$$M^2-N^2=(g^2\alpha\gamma^2x-\gamma^2\alpha g^2x)(g^2\alpha\gamma^2y-\gamma^2\alpha g^2y)(g^2\alpha\gamma^2(x+y)-\gamma^2\alpha g^2(x+y)),$$

und, wenn man, um zu der von **Jacobi** eingeführten Bezeichnungsart der gebrochenen elliptischen Functionen überzugehen, $p=k^2$, $q=k'^2$, $r=-1$ annimmt, und dann der Kürze wegen

$$\varrho\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}=\cos\operatorname{am}\alpha\,\Delta\operatorname{am}\alpha\sin\operatorname{am}x\sin\operatorname{am}y\sin\operatorname{am}(x+y),$$

$$\varrho\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}=\sin\operatorname{am}\alpha(\cos\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}y\cos\operatorname{am}(x+y)-\cos^2\operatorname{am}\alpha);$$

folglich

$$\varrho^2=(\sin^2\operatorname{am}x-\sin^2\operatorname{am}\alpha)(\sin^2\operatorname{am}y-\sin^2\operatorname{am}\alpha)(\sin^2\operatorname{am}(x+y)-\sin^2\operatorname{am}\alpha)$$

setzt, so ist

$$\log\frac{\gamma(x+y+\alpha)\gamma(x-\alpha)\gamma(y-\alpha)}{\gamma(x+y-\alpha)\gamma(x+\alpha)\gamma(y+\alpha)}=2\theta.$$

Setzt man ferner

$$P=g\alpha\{G^2\alpha gxgyg(x+y)+r\gamma^2\alpha\mathfrak{G}x\mathfrak{G}y\mathfrak{G}(x+y)\}$$
$$=g\alpha\{\mathfrak{G}^2\alpha gxgyg(x+y)-q\gamma^2\alpha GxGyG(x+y)\},$$
$$Q=qr\gamma\alpha G\alpha\mathfrak{G}\alpha\gamma x\gamma y\gamma(x+y);$$

so ist

$$\frac{g(x+y+\alpha)g(x-\alpha)g(y-\alpha)}{g(x+y-\alpha)g(x+\alpha)g(y+\alpha)}=\frac{P+Q}{P-Q},$$

$$P^2 - Q^2 =$$
$$(g^2 \alpha g^2 x + q r \gamma^2 \alpha \gamma^2 x)(g^2 \alpha g^2 y + q r \gamma^2 \alpha \gamma^2 y)(g^2 \alpha g^2 (x+y) + q r \gamma^2 \alpha \gamma^2 (x+y)).$$

Geht man von g zu G über und gebraucht dann gebrochene Functionen, so hat man dieses System von Gleichungen:

$$\varrho \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} = \Delta^2 \mathrm{am}\,\alpha + k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha \cos\mathrm{am}\, x \cos\mathrm{am}\, y \cos\mathrm{am}\,(x+y),$$

$$\varrho \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} = k^2 \sin\mathrm{am}\,\alpha \cos\mathrm{am}\,\alpha\, \Delta\,\mathrm{am}\,\alpha \sin\mathrm{am}\, x \sin\mathrm{am}\, y \sin\mathrm{am}\,(x+y),$$

$$\log \frac{G(x+y-\alpha)\, G(x+\alpha)\, G(y+\alpha)}{G(x+y+\alpha)\, G(x-\alpha)\, G(y-\alpha)} = 2\theta.$$

Die **Legendre**'sche Formel für die Addition der Argumente der Amplituden bei den elliptischen Integralen dritter Art kann auf folgendem Wege erhalten werden. Es ist

$$\frac{G(x+\alpha)\, G(y+\alpha)}{G(x-\alpha)\, G(y-\alpha)} = \frac{G(s+v)\, G(s-v)}{G(t+v)\, G(t-v)} = \frac{G(sv,\, uu)}{G(tv,\, uu)}$$

Trägt man aber die obige Formel (h) von g auf G über und setzt dann $t=u$ hinein, so giebt sie

$$G(sv,\, uu) = G(su, vu) - pr\gamma\,(su, uv);$$

folglich ist

$$\frac{G(x+\alpha)\, G(y+\alpha)}{G(x-\alpha)\, G(y-\alpha)} = \frac{G(x+y+\alpha)\, G\alpha\, Gx\, Gy - pr\gamma(x+y+\alpha)\gamma\alpha\gamma x\gamma y}{G(x+y-\alpha)\, G\alpha\, Gx\, Gy + pr\gamma(x+y-\alpha)\,\gamma\alpha\gamma x\gamma y},$$

und hieraus

$$\frac{G(x+y-\alpha)\, G(x+\alpha)\, G(y+\alpha)}{G(x+y+\alpha)\, G(x-\alpha)\, G(y-\alpha)}$$
$$= \frac{1 + k^2 \sin\mathrm{am}\,\alpha \sin\mathrm{am}\, x \sin\mathrm{am}\, y \sin\mathrm{am}\,(x+y+\alpha)}{1 - k^2 \sin\mathrm{am}\,\alpha \sin\mathrm{am}\, x \sin\mathrm{am}\, y \sin\mathrm{am}\,(x+y-\alpha)}.$$

Wie dieser Ausdruck mit der Addition der Argumente der Amplituden der elliptischen Integrale dritter Art zusammhängt, ist aus dem vorhergehenden Paragraphen klar.

§. 13.

Wenn das Argument x als Function von $z = \dfrac{g(x,a,b)}{G(x,a,b)}$ und der specifischen Constanten a, b gedacht wird, die in Beziehung auf die beiden letztern genommene Variation δx des Arguments (z als constant vorausgesetzt) zu bestimmen.

Setzt man

$$\frac{\gamma x}{Gx}=u,\ \frac{\mathfrak{G}x}{Gx}=v;$$

so hat man vermöge der Gleichungen (2) und (1) des §. 5.:

$$ru^2=z^2-1,\ -rv^2=pz^2+q,\ 1=ruv\frac{dx}{dz}.$$

Die letzte Gleichung wird daher

$$(z^2-1)(pz^2+q)\left(\frac{dx}{dz}\right)^2=-1,$$

und, wenn man sie nach a, b logarithmisch differentiirt, so erhält man

$$2ruv\,\delta\frac{dx}{dz}+\frac{\delta p}{p}-\frac{p\delta q-q\delta p}{prv^2}=0.$$

Nun ist $\delta\frac{dx}{dz}=\frac{d\delta x}{dz}$, und wenn man die vorliegende Gleichung mit dx multiplicirt, so wird

$$ruv\,dx\frac{d\delta x}{dz}=\frac{d\delta x}{dz}dz=d\delta x,$$

wo das Zeichen d eine Differentiation nach z anzeigt, während a, b als constant gedacht werden. Integrirt man nun in Beziehung auf z oder x allein, so erhält man

$$\delta x=-x\frac{\delta p}{2p}+\frac{p\delta q-q\delta p}{2pr}\int\left(\frac{Gx}{\mathfrak{G}x}\right)^2dx.$$

Da die Werthe $x=0$ und $z=1$ immer zusammengehören, was auch a, b sein mögen, so verschwinden x und δx gleichzeitig; also muss auch das Integral rechts für $x=0$ verschwinden. Vermöge der Formeln (17) in §. 10. kann aber dasselbe durch den ebenfalls für $x=0$ verschwindenden Ausdruck

$$\frac{1}{q}\left(\frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x}-x\,g''0\right)$$

ersetzt werden, wodurch man

$$\delta x=-x\left(\frac{\delta p}{2p}+g''0\frac{p\delta q-q\delta p}{2pqr}\right)+\frac{p\delta q-q\delta p}{2pqr}\frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x}$$

erhält. Setzt man jetzt $x=a+\omega$, so wird $z=-\frac{g\omega}{G\omega}$, und, wenn ω eine verschwindend kleine Grösse bezeichnet,

$$z = -\frac{1+z\omega^2 g''0}{1+z\omega^2 G''0} = -1 - \frac{1}{2}\omega^2(g''0 - G''0) = -(1+\frac{1}{2}r\omega^2);$$

folglich

$$\frac{\delta r}{r} + 2\frac{\delta\omega}{\omega} = 0;$$

also ist $\delta\omega$ selbst von der Ordnung ω, so dass man $\delta x = \delta\dot{a}$ setzen darf. Aus den Formeln am Schluss von §. 4. ergiebt sich aber

$$\frac{\mathfrak{G}'(x+a)}{\mathfrak{G}(x+a)} = \frac{a'\pi}{c} + \frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x}; \text{ also } \frac{\mathfrak{G}'a}{\mathfrak{G}x} = \frac{a'\pi}{c}.$$

Setzt man jetzt der Kürze wegen

$$\frac{p\delta q - q\delta p}{2pqr} = -\varepsilon, \quad \frac{\delta p}{2p} + g''0\frac{p\delta q - q\delta p}{2pqr} = \frac{g''0.p\delta q - G''0.q\delta p}{2pqr} = -\eta,$$

so dass

$$\delta x = x\eta - \frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x}\varepsilon$$

wird, so bekömmt man für $x = a$ und $x = b$ folgende zur Bestimmung von ε und η dienende Gleichungen:

$$\delta a = a\eta - \frac{a'\pi}{c}\varepsilon,$$

$$\delta b = b\eta - \frac{b'\pi}{c}\varepsilon;$$

woraus sich

$$\varepsilon = \frac{a\delta b - b\delta a}{2\pi\sqrt{-1}}, \quad \eta = \frac{a'\delta b - b'\delta a}{2c\sqrt{-1}}$$

ergeben. Also ist für einen constanten Werth von $\frac{g(x,a,b)}{G(x,a,b)}$

$$\delta x = x\frac{a'\delta b - b'\delta a}{2c\sqrt{-1}} - \frac{\mathfrak{G}'x}{\mathfrak{G}x}\cdot\frac{a\delta b - b\delta a}{2\pi\sqrt{-1}}.$$

Aus dieser Gleichung ersieht man, dass sich die Continuität von δx nur allemal dann verliert, wenn $\mathfrak{G}x$ verschwindet, d. h. nur dann, wenn $x = \left(m+\frac{1}{2}\right)a + \left(n+\frac{1}{2}\right)b$ wird, wo m, n beliebige ganze Zahlen bedeuten.

§. 14.

Wie muss das specifische Dreieck, welches zur Darstellung einer ganzen elliptischen Function dient, beschaffen sein, damit eines der Verhältnisse der drei in §. 5. bestimmten Constanten p, q, r reell sein könne?

Ist eines der genannten Verhältnisse reell, so sind es wegen der Relation $p+q+r=0$ nothwendig auch die beiden übrigen. Dann wird man irgend drei reelle Grössen angeben können, welche mit p, q, r proportional sind; und da ihre Summe gleich Null ist, so muss eine derselben entgegengesetztes Vorzeichen haben mit den beiden übrigen. Unter den drei möglichen Fällen wollen wir denjenigen voraussetzen, wo die mit r proportionale Grösse den beiden übrigen entgegensetzt ist. Dann sind $-\frac{p}{r}$, $-\frac{q}{r}$ zugleich positive ächte Brüche, weil $-\frac{p}{r}-\frac{q}{r}=1$ ist. Setzt man dann $\sqrt{-r}\frac{\gamma x}{Gx}=y$, $-\frac{p}{r}=k^2<1$, so ist der Modul k reell, und man hat nach §. 6.

$$\sqrt{-r}.\,x=\int_0 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

Bezeichnet man nun den Werth dieses Integrals durch K oder $K'\sqrt{-1}$, jenachdem in demselben y continuirlich die zwischen 0 und $+1$ liegenden reellen oder die zwischen 0 und $+\infty\sqrt{-1}$ liegenden rein imaginären Werthe einmal durchläuft, so sind K, K' endliche reelle und positive Grössen, und nimmt man $\left(\frac{K}{\sqrt{-r}}, \frac{K'}{\sqrt{-r}}\sqrt{-1}\right)$ als Darstellung an, so ist y dieselbe Function von x, wie bei der ursprünglichen Darstellung (a, b).*) Beide Darstellungen geben also ein und dasselbe Netz von Punkten, und jene erstere ist die Hauptdarstellung desselben, weil ihr ein rechtwinkliges Dreieck zu Grunde liegt, d. h. weil das zugehörige specifische Verhältniss rein imaginär ist. Das Gesagte führt zu folgendem Schluss:

„Wenn die Verhältnisse der Grössen p, q, r reell sind, so kann das zugehörige Netz von Punkten durch ein rechtwinkliges Dreieck erzeugt werden, dessen Katheten denjenigen zwei von den Grössen p, q, r entsprechen, deren Verhältniss einen positiven Werth hat.“

---

*) Hier ist die schwache Stelle des Beweises; denn die Reduction eines Ausdrucks, wie $\sin am(mK+nK'\sqrt{-1}+x)$, scheint hierbei schon vorausgesetzt werden zu müssen.

§. 15.

Ueber die analytische Bedeutung der Hauptdarstellung einer elliptischen Function.

Denken wir uns auf die in §. 1. beschriebene Weise jedes complexe Argument x durch einen Punkt in der Ebene dargestellt, so bildet die Reihenfolge aller derjenigen Punkte x, welche zu reellen Werthen der gebrochenen Function $\frac{g(x,a,b)}{G(x,a,b)}$ gehören, eine Curve. Die genannte Function bekömmt aber resp. die reellen Werthe $(-1)^{m+n}, 0, \infty$, so oft als das Argument x eine der Formen

$$ma+nb,\ \left(m+\frac{1}{2}\right)a+nb,\ ma+\left(n+\frac{1}{2}\right)b$$

annimmt. Folglich geht die betrachtete Curve 1°. durch alle Ecken des specifischen Dreiecksnetzes, 2°. durch die Mitten aller der Constanten a und 3°. durch die Mitten aller der Constanten b entsprechenden Seiten. In den ersten Punkten erhält die gebrochene Function $\frac{gx}{Gx}$ abwechselnd die reellen Werthe $+1$ und -1, in den zweiten die Werthe 0 und in den dritten die Werthe ∞. Vielfache Punkte der Curve können nur da liegen, wo der nach x genommene erste Differentialcoefficient von $\frac{gx}{Gx}$ verschwindet, also nach (1) in §. 5. da, wo $\gamma x \mathfrak{G} x$ verschwindet. Da

$$\frac{g(ma+nb+x)}{G(ma+nb+x)}=(-1)^{m+n}\frac{gx}{Gx}$$

ist, und die Curve demnach nach zweien Richtungen hin periodisch verläuft, so brauchen wir in der zuletzt erwähnten Beziehung nur die beiden Punkte $x=0$, $x=\frac{a+b}{2}$ zu betrachten. Nehmen wir vorerst x verschwindend klein an, so wird $\frac{gx}{Gx}=1+\frac{1}{2}rx^2$. Unter allen complexen Werthen von x, die zu demselben verschwindend kleinen Modul gehören, kann es aber nur zwei x und $x\sqrt{-1}$ (je zwei entgegengesetzte werden, als einer und derselben Tangente entsprechend, hier nur für einen gezählt) geben, für welche rx^2 reell wird. Folglich sind die Ecken des Dreiecksnetzes stets Doppelpunkte der betrachteten Curve, in denen diese sich rechtwinklich schneidet. Setzen wir zweitens $x=\frac{a+b}{2}+\omega$, wo ω verschwindend klein sein soll, so wird nach §. 4.

$$\frac{g\left(\frac{a+b}{2}+\omega\right)}{G\left(\frac{a+b}{2}+\omega\right)}=\frac{g\frac{a+b}{2}}{G\frac{a+b}{2}}\cdot\frac{G\omega}{g\omega}=\sqrt{-\frac{q}{p}}\cdot\left(1-\frac{1}{2}r\,\omega^2\right).$$

Die Curve kann also nur dann durch diesen Punkt $\frac{a+b}{2}$ gehen, wenn das Verhältniss $\frac{q}{p}$ reell und negativ ist, also nach §. 14. nur dann, wenn im specifischen Dreieck der Hauptdarstellung einer der beiden mit p und q homologen Seiten ein rechter Winkel gegenüberliegt. Dann sind auch die Mitten aller mit r homologen Seiten des Dreiecksnetzes Doppelpunkte der Curve, in denen sie sich rechtwinklig schneidet.*)

Um eine Anschauung von der Continuität der Realitätscurve für $\frac{gx}{Gx}$ zu bekommen, nehmen wir zuerst $\frac{b}{a}$ als rein imaginär (mit positivem Factor von $\sqrt{-1}$) an. Dann ist aus der Form der unendlichen Doppelproducte auf der Stelle klar, dass die gesuchte Curve mit den beiden sich rechtwinklich schneidenden Systemen paralleler und äquidistanter Geraden des specifischen Dreiecksnetzes zusammenfällt und demnach ein Netz von congruenten Rechtecken bildet. Geht nun das specifische Dreieck aus der rechtwinkligen Form allmählig in die spitzwinklige über, so verwandelt sich das Netz congruenter Rechtecke in ein aus zwei Systemen sich rechtwinklig schneidender geschlängelter Curven bestehendes Netz, in welchem die einen mit p correspondirenden Curven den zwischen $+1$ und -1 oscillirenden reellen Werthen von $\frac{gx}{Gx}$ zugehören, während die anderen mit q correspondirenden Curven zu denjenigen reellen Werthen von $\frac{gx}{Gx}$ gehören, welche von $+1$ bis $+\infty$ und von $-\infty$ bis -1 und wieder zurück verlaufen. Isolirte geschlossene Zweige der Realitätscurve können niemals auftreten, und zwar aus folgendem Grunde. Es sei $\frac{gx}{Gx}=\frac{gy}{Gy}$, so folgt nach (9):

$$gx\,Gy-Gx\,gy=2r\gamma\frac{x+y}{2}\mathfrak{G}\frac{x+y}{2}\gamma\frac{x-y}{2}\mathfrak{G}\frac{x-y}{2}=0,$$

folglich entweder

$$x\pm y=2ma+2nb,$$

oder

$$x\pm y=(2m+1)a+(2n+1)b.$$

Da nun die beschriebenen offenen Curvenzweige schon alle reellen Werthe von $\frac{gx}{Gx}$ enthalten und der durch die letzten Gleichungen ange-

*) Hierdurch wird §. 13. entbehrlich gemacht.

deuteten doppelten Periodicität vollkommen entsprechen, so ist durch dieselben die ganze Curve auch vollkommen erschöpft. — Bei fortschreitender Formänderung des specifischen Dreiecks kann erst dann eine Discontinuität in der gleichzeitigen Formänderung der Realitätscurve eintreten, wenn dieselbe die Mitten der mit r correspondirenden Dreieckseiten erreicht, d. h., wie wir oben gesehen haben, wenn das specifische Dreieck an dieser Seite einen rechten Winkel bekömmt. Gesetzt die Hypotenuse correspondire mit q, so ist nunmehr $\frac{a}{a-b}$ rein imaginär, und da

$$\frac{g(x,a,b)}{G(x,a,b)}=\frac{G(x,a-b,a)}{\mathfrak{G}(x,a-b,a)},$$

so ist die Realitätscurve durch die Gleichungen

$$x=(a-b)u,\ x=au,\ x=\frac{a-b}{2}+au,$$

wo u einen beliebigen reellen Factor bezeichnet, dargestellt. Die mit p correspondirenden Zweige fallen wieder mit den entsprechenden Dreiecksseiten zusammen, während die mit q correspondirenden Zweige sich in rechtwinklig gebrochene Zickzacklinien verwandeln, von denen die einen Stücke in die Seiten $a-b$ fallen, während die anderen parallel mit den Seiten a durch die Mitten der Seiten b gehen. Je zwei aufeinanderfolgende Zickzacklinien erreichen einander mit ihren Ecken in den Mitten der Seiten $a-b$. Diese Beschreibung gilt, wenn der mit q correspondirende rechte Winkel noch wie der ihm unmittelbar vorhergehende spitze Winkel aufgefasst wird. Sobald man ihn aber wie den nachfolgenden stumpfen Winkel behandelt, so müssen die geradlinigen Elemente der vorigen Zickzacklinien in den Mitten der Seiten $a-b$ anders verbunden werden, die Zickzacke müssen die Richtung der Seite b plötzlich verlassen, um in die Richtung $2a-b$ überzugehen. D. h. weil jetzt $(2a-b,\ a)$ im Begriff ist, Hauptdarstellung zu werden, so richtet sich von nun an auch die Realitätscurve nach dieser Hauptdarstellung.

Während $\frac{gx}{Gx}$ die reellen Werthe von 1 bis 0 einmal durchläuft, durchläuft $\sqrt{-r}.\frac{\gamma x}{Gx}$ ebenfalls einmal die reellen Werthe von 0 bis 1; und während $\frac{gx}{Gx}$ die reellen Werthe von 1 bis $+\infty$ einmal durchläuft, durchläuft $\sqrt{-r}.\frac{\gamma x}{Gx}$ ebenfalls einmal die rein imaginären Werthe von $+0\sqrt{-1}$ bis $+\infty\sqrt{-1}$. Setzt man nun $y=\sqrt{-r}.\frac{\gamma x}{Gx}$, so folgen aus der vorigen Betrachtung über die Realitätscurve für $\frac{gx}{Gx}$ die Gleichungen

$$\sqrt{-r}.\frac{a}{2}=\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1+\frac{p}{r}y^2\right)}}$$

$$\sqrt{-r.\frac{b}{2}}=\int_{+0\sqrt{-1}}^{+\infty\sqrt{-1}}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1+\frac{p}{r}y^2\right)}},$$

wofern die specifischen Constanten a, b der Hauptdarstellung angehören, welchen complexen Werth auch der Modul $\sqrt{-\frac{p}{r}}$ dieser vollständigen elliptischen Integrale erster Art haben mag.

§. 16.

Verwandlung der elliptischen unendlichen Doppelproducte in unendliche einfache Producte trigonometrischer Factoren.

Vollzieht man in den vier Doppelproducten, wie $\Pi\frac{x+ma+nb}{ma+nb}$, welche oben in §. 1. unter dem Namen der ganzen elliptischen Functionen beschrieben worden sind, die Multiplication zuerst von $m=-\infty$ bis $m=+\infty$, so ergeben sich resp. die einfachen Producte:

$$\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}\,\Pi_{(n\gtrless 0)}\frac{\sin\frac{\pi(x+nb)}{a}}{\sin\frac{\pi nb}{a}},\qquad \Pi\frac{\cos\frac{\pi(x+nb)}{a}}{\cos\frac{\pi nb}{a}},$$

$$\Pi\frac{\sin\frac{\pi\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)b\right)}{a}}{\sin\frac{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)b}{a}},\qquad \Pi\frac{\cos\frac{\pi\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)b\right)}{a}}{\cos\frac{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)b}{a}}.$$

Dieselben sind convergent, sobald $\frac{b}{a}$ nur nicht reell ist. Man denke sie sich zwischen gleichen und entgegengesetzten sehr grossen Werthen von n oder $n+\frac{1}{2}$ genommen. Es handelt sich nun darum, ihre Verhältnisse zu den entsprechenden Functionen γ, g, G, $\mathfrak{G}$ zu bestimmen.

In der Ebene, in welcher die Werthe von $ma+nb$ durch Punkte dargestellt sind, sei um den Ursprung als Mittelpunkt ein Kreis mit dem sehr grossen Halbmesser k beschrieben, welcher als Gränze fur die Doppelproducte γ, u. s. w. gelten soll. Ausserhalb desselben liegen zwei Parallellinien von der durch a bezeichneten Richtung und den beiden entgegengesetzten Gränzwerthen von n oder $n+\frac{1}{2}$ entsprechend. Bezeichnet nun Q den gemeinsamen Quotienten, der aus der Division der obigen einfachen Producte durch die entsprechenden Functionen γ, g, G, $\mathfrak{G}$ hervorergeht, so ist Q gleich dem Doppelproducte $\Pi\left(1+\frac{x}{ma+nb}\right)$, welches sich über den ganzen ausserhalb des Kreises k und innerhalb der Parallellinien $(\pm n)$ liegenden Flächenraum erstreckt. Nun ist mit einem Fehler von der Ordnung $\frac{1}{k}$:

$$\log Q = -\frac{1}{2}\Sigma\Sigma\frac{x^2}{(ma+nb)^2} = -\frac{x^2}{2}\int\!\!\int\frac{dm\,dn}{(ma+nb)^2},$$

und wenn man zuerst in Beziehung auf m integrirt:

$$\log Q = -\frac{x^2}{2a}\left(\int\frac{dn}{m''a+nb} - \int\frac{dn}{m'a+nb}\right),$$

wo m' sich auf den Anfangs-, m'' auf den Endpunkt einer mit der Richtung a parallelen, durch den Werth von n bestimmten Sehne des Kreises k bezieht. Um nun das einfache Integral längs der ganzen Peripherie k verfolgen zu können, setze man

$$a = \mathfrak{a}e^{\alpha\sqrt{-1}},\ ma+nb = ke^{(\alpha+\varphi)\sqrt{-1}};$$

so ist der Inhalt des durch die Seiten a, $ma+nb$ bestimmten Parallelogramms $nc = \mathfrak{a}k\sin\varphi$, folglich $dn = \frac{\mathfrak{a}k}{c}\cos\varphi\,d\varphi$,

$$\log Q = -e^{-2\alpha\sqrt{-1}}\frac{x^2}{2c}\int_0^{2\pi}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= -e^{-2\alpha\sqrt{-1}}\frac{\pi x^2}{2c} = -\frac{a'\pi}{2ac}x^2,$$

wo $a' = \mathfrak{a}e^{-\alpha\sqrt{-1}}$ den conjugirten Werth von a bezeichnet. Hieraus folgt nun:

$$\gamma(x,a,b) = e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{a}}{\sin^2\frac{n\pi b}{a}}\right),$$

$$g(x,a,b) = e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\cos\frac{\pi x}{a}\,\Pi\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{a}}{\cos^2\frac{n\pi b}{a}}\right),$$

$$G(x,a,b)=e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\,\Pi\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{a}}{\sin^2\frac{(2n-1)\pi b}{2a}}\right),$$

$$\mathfrak{G}(x,a,b)=e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\,\Pi\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi x}{a}}{\cos^2\frac{(2n-1)\pi b}{2a}}\right).$$

Oder auch, wenn $e^{\frac{b\pi}{a}\sqrt{-1}}=h$ gesetzt wird:

$$\gamma(x,a,b)=e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\,\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}\,\Pi\,\frac{1-2h^{2n}\cos\frac{2\pi x}{a}+h^{4n}}{(1-h^{2n})^2},$$

$$g(x,a,b)=e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\cos\frac{\pi x}{a}\,\Pi\,\frac{1+2h^{2n}\cos\frac{2\pi x}{a}+h^{4n}}{(1+h^{2n})^2},$$

$$G(x,a,b)=e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\,\Pi\,\frac{1-2h^{2n-1}\cos\frac{2\pi x}{a}+h^{4n-2}}{(1-h^{2n-1})^2},$$

$$\mathfrak{G}(x,a,b)=e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\,\Pi\,\frac{1+2h^{2n-1}\cos\frac{2\pi x}{a}+h^{4n-2}}{(1+h^{2n-1})^2}.$$

Da $a'b-ab'=2c\sqrt{-1}$ ist und da c als positiv vorausgesetzt wurde, so ist $\frac{b}{a}-\frac{b'}{a'}=\frac{2c}{aa'}\sqrt{-1}$ und daher die imaginäre Componente von $\frac{b}{a}$ positiv; folglich ist der Modul von

$$h=e^{-\frac{c\pi}{aa'}}\left(\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{b'}{a'}\right)+\sqrt{-1}.\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{b'}{a'}\right)\right)$$

ein ächter Bruch, weshalb die steigenden Potenzen von h sich der Null ohne Ende nähern.

Setzt man in den obigen Formeln $x=\frac{a}{2}$, $x=\frac{b}{2}$, und bedenkt im letztern Fall, dass

$$\frac{a'\pi}{2ac}\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{bb'\pi}{8c}+\frac{b\pi}{4a}\sqrt{-1},$$

$$\sin\frac{\pi b}{2a}=\frac{\sqrt{-1}}{2\sqrt{h}}(1-h),\quad \cos\frac{\pi b}{2a}=\frac{1+h}{2\sqrt{h}},$$

$$1\pm 2h^m\cos\frac{\pi b}{a}+h^{2m}=(1\pm h^{m-1})(1\pm h_{m+1})$$

ist, so erhält man:

$$\gamma\frac{a}{2}=e^{\frac{aa'\pi}{8c}}\cdot\frac{a}{\pi}\Pi\left(\frac{1+h^{2n}}{1-h^{2n}}\right)^2,\quad \gamma\frac{b}{2}=e^{\frac{bb'\pi}{8c}}\frac{a\sqrt{-1}}{2\pi h^{\frac{1}{4}}}\Pi\left(\frac{1-h^{2n-1}}{1-h^{2n}}\right)_2,$$

$$G\frac{a}{2}=e^{\frac{aa'\pi}{8c}}\Pi\left(\frac{1+h^{2n-1}}{1-h^{2n-1}}\right)^2,\quad g\frac{b}{2}=e^{\frac{bb'\pi}{8c}}\frac{1}{2h^{\frac{1}{4}}}\Pi\left(\frac{1+h^{2n-1}}{1+h^{2n}}\right)^2;$$

und hieraus

$$p=16\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 h\,\Pi\left(\frac{1-h^{4n}}{1-h^{4n-2}}\right)^4,\quad q=\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\Pi\left(\frac{1-h^n}{1+h^n}\right)^4,$$

$$r=-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\Pi\left(\frac{1+h^{2n-1}}{1-h^{2n-1}}\,\frac{1-h^{2n}}{1+h^{2n}}\right)^4.$$

§. 17.

Verwandlung der elliptischen unendlichen Doppelproducte in einfache Summen der Cosinus oder Sinus der Vielfachen des Arguments.

Da die hier angekündigte Entwickelung aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen in derselben Weise hergeleitet werden kann, wie es in den „Fundamenta" von Jacobi geschieht, so könnte ich mich geradezu auf diese Schrift berufen. Es möchte indess manchem Leser nicht unangenehm sein, wenn auch hier diese interessante Entwickelung an das Frühere angeschlossen wird, und überdiess kann hier die Bestimmung einer gewissen Constanten vielleicht etwas einfacher gegeben werden, als in der erwähnten Schrift des berühmten Verfassers geschieht.

Denkt man sich in den Formeln des vorignn Paragraphen die Multiplicationen ausgeführt, und die Producte der Sinus und Cosinus durch Cosinus und Sinus der vielfachen Winkel ersetzt, so sieht man, dass die Functionen

$$e^{-\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\left\{\begin{matrix}G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x),\ e^{-\frac{a'\pi}{2ac}x^2}gx,\ e^{-\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\gamma x$$

sich respective nach

$$\cos\frac{2n\pi x}{a},\quad \cos\frac{(2n-1)\pi x}{a},\quad \sin\frac{(2n-1)\pi x}{a}$$

entwickeln lassen. Wir können daher, indem wir die Betrachtung zunächst auf die beiden ersten Functionen beschränken,

$$e^{-\frac{a'\pi}{2ac}x^2}\left\{\begin{matrix}G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n\, e^{\frac{2n\pi x}{a}\sqrt{-1}}$$

setzen, wo $C_n=C_{-n}$ vorausgesetzt ist. Aus den Formeln am Ende des §. 4. ergeben sich leicht die folgenden

$$e^{-\frac{a'}{a}\cdot\frac{\pi}{2c}(x+a)^2}\left\{\begin{matrix}\gamma\\ g\end{matrix}\right\}(x+a)=-e^{-\frac{a'}{a}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2}\left\{\begin{matrix}\gamma\\ g\end{matrix}\right\}(x),$$

$$e^{-\frac{a'}{a}\cdot\frac{\pi}{2c}(x+a)^2}\left\{\begin{matrix}G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x+a)=e^{-\frac{a'}{a}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2}\left\{\begin{matrix}G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x),$$

$$e^{-\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}(x+b)^2}\left\{\begin{matrix}\gamma\\ G\end{matrix}\right\}(x+b)=-e^{-\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2}\left\{\begin{matrix}\gamma\\ G\end{matrix}\right\}(x),$$

$$e^{-\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}(x+b)^2}\left\{\begin{matrix}g\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x+b)=-e^{-\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2}\left\{\begin{matrix}g\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x);$$

welche uns nun zu der Bestimmung der Coefficienten C_n dienen sollen. Der Exponent $\frac{2n\pi x}{a}\sqrt{-1}$ in der oben angenommenen Entwickelung kann durch

$$\frac{\pi(x+nb)^2}{ab}\sqrt{-1}-\frac{\pi x^2}{ab}\sqrt{-1}$$

ersetzt werden, so dass $\left(\text{wegen}\ \frac{a'}{a}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2-\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2=\frac{\pi x^2\sqrt{-1}}{ab}\right)$

$$\left\{\begin{matrix}G\\ \mathfrak{G}\end{matrix}\right\}(x)=e^{\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} L_n\, e^{\frac{\pi(x+nb)^2}{ab}\sqrt{-1}}$$

wird, wo $L_n=L_{-n}$ den zu bestimmenden constanten Coefficienten bezeichnet. Ersetzt man jetzt x durch $x+b$ und berücksichtigt die aus §. 4. angeführten Relationen, so ergiebt sich

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} L_n e^{\frac{\pi(x+(n+1)b)^2}{ab}\sqrt{-1}}=\Sigma\mp L_n e^{\frac{\pi(x+nb)^2}{ab}\sqrt{-1}}.$$

Die Coefficienten L sind also entweder abwechselnd entgegengesetzt oder sämmtlich gleich, jenachdem man es mit der Function G oder $\mathfrak{G}$ zu thun hat. Folglich ist

$$G(x) = e^{\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2} \cdot \frac{\Sigma(-1)^n e^{\frac{\pi(x+nb)^2}{ab}\sqrt{-1}}}{\Sigma(-1)^n e^{\frac{nnb\pi}{a}\sqrt{-1}}},$$

$$\mathfrak{G}x = e^{\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2} \cdot \frac{\Sigma e^{\frac{\pi(x+nb)^2}{ab}\sqrt{-1}}}{\Sigma e^{\frac{nnb\pi}{a}\sqrt{-1}}};$$

und hieraus, indem man x in $x+\frac{b}{2}$ übergehen lässt:

$$\gamma x = e^{\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2} \frac{\Sigma(-1)^n e^{(x+(n+\frac{1}{2})b)^2\cdot\frac{\pi\sqrt{-1}}{ab}}}{\frac{\pi}{a}\sqrt{-1}\,\Sigma(-1)^n(2n+1)e^{(n+\frac{1}{2})^2\frac{b\pi}{a}\sqrt{-1}}},$$

$$gx = e^{\frac{b'}{b}\cdot\frac{\pi}{2c}x^2} \cdot \frac{\Sigma e^{(x+(n+\frac{1}{2})b)^2\cdot\frac{\pi\sqrt{-1}}{ab}}}{\Sigma e^{(n+\frac{1}{2})^2\cdot\frac{b\pi\sqrt{-1}}{a}}}.$$

Setzt man wiederum $e^{\frac{\pi b\sqrt{-1}}{a}} = h$, wie früher, so ethalten diese vier Formeln folgende Gestalt:

$$Gx = e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2} \frac{1-2h\cos\frac{2\pi x}{a}+2h^4\cos\frac{4\pi x}{a}-h^9\cos\frac{6\pi x}{a}+\dots}{1-2h+2h^4-2h^9+\dots\dots},$$

$$\mathfrak{G}x = e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2} \frac{1+2h\cos\frac{2\pi x}{a}+2h^4\cos\frac{4\pi x}{a}+2h^9\cos\frac{6\pi x}{a}+\dots\dots}{1+2h+2h^4+2h^9+\dots\dots},$$

$$\gamma x = e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2} \frac{a}{\pi} \frac{\sin\frac{\pi x}{a}-h^{1\cdot2}\sin\frac{3\pi x}{a}+h^{2\cdot3}\sin\frac{5\pi x}{a}-h^{3\cdot4}\sin\frac{7\pi x}{a}\dots\dots}{1-3h^{1\cdot2}+5h^{2\cdot3}-7h^{3\cdot4}\dots\dots},$$

$$gx = e^{\frac{a'\pi}{2ac}x^2} \frac{\cos\frac{\pi x}{a}+h^{1\cdot2}\cos\frac{3\pi x}{a}+h^{2\cdot3}\cos\frac{5\pi x}{a}+h^{3\cdot4}\cos\frac{7\pi x}{a}\dots\dots}{1+h^{1\cdot2}+h^{2\cdot3}+h^{3\cdot4}\dots\dots}.$$

Es bleiben noch die constanten Werthe der Reihen in den Nennern dieser Ausdrücke zu bestimmen übrig. Die zwei ersten Gleichungen geben

$$\frac{\mathfrak{G}\frac{a}{2}}{G\frac{a}{2}}=\left(\frac{1-2h+2h^4-2h^9\ldots}{1+2h+2h^4+2h^9\ldots}\right)^2;$$

folglich, wenn man die Quadratwurzeln $\sqrt{G\frac{a}{2}}$, $\sqrt{\mathfrak{G}\frac{a}{2}}$ so versteht, dass sie für ein verschwindendes a sich auf die positive Einheit reduciren,

$$\frac{\sqrt{G\frac{a}{2}}+\sqrt{\mathfrak{G}\frac{a}{2}}}{2\sqrt{G\frac{a}{2}}}=\frac{1+2h^4+2h^{16}+2h^{36}\ldots}{1+2h+2h^4+2h^9\ldots}=\frac{\varphi(h^4)}{\varphi(h)},$$

wo

$$\varphi(h)=1+2h+2h^4+2h^9+\ldots$$

sein soll. Nun geben die zwei letzten der Formeln (B) des §. 8:

$$\frac{G\frac{a}{2}+\mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}=\frac{G\left(\frac{a}{4},\frac{a}{2},b\right)}{\gamma\left(\frac{a}{4},\frac{a}{2},b\right)},\quad \frac{2\sqrt{G\frac{a}{2}\cdot\mathfrak{G}\frac{a}{2}}}{\gamma\frac{a}{2}}=\frac{\mathfrak{G}\left(\frac{a}{4},\frac{a}{2},b\right)}{\gamma\left(\frac{a}{4},\frac{a}{2},b\right)};$$

woraus sich durch Addition und nochmalige Anwendung der ersten Gleichung

$$\frac{\left(\sqrt{G\frac{a}{2}}+\sqrt{\mathfrak{G}\frac{a}{2}}\right)^2}{\gamma\frac{a}{2}}=\frac{G\left(\frac{a}{4},\frac{a}{2},b\right)+\mathfrak{G}\left(\frac{a}{4},\frac{a}{2},b\right)}{\gamma\left(\frac{a}{4},\frac{a}{2},b\right)}=\frac{G\left(\frac{a}{8},\frac{a}{4},b\right)}{\gamma\left(\frac{a}{8},\frac{a}{4},b\right)}$$

ergiebt. Wir bekommen demnach

$$\left(\frac{\varphi(h^4)}{\varphi(h)}\right)^2=\frac{1}{4}\frac{\gamma\frac{a}{2}}{G\frac{a}{2}}\cdot\frac{G\left(\frac{a}{8},\frac{a}{4},b\right)}{\gamma\left(\frac{a}{8},\frac{a}{4},b\right)},$$

oder auch

$$\frac{[\varphi(h)]^2}{a\dfrac{G\left(\frac{a}{2},a,b\right)}{\gamma\left(\frac{a}{2},a,b\right)}}=\frac{[\varphi(h^4)]^2}{\dfrac{a}{4}\cdot\dfrac{G\left(\frac{a}{8},\frac{a}{4},b\right)}{\gamma\left(\frac{a}{8},\frac{a}{4},b\right)}}=\text{u. s. w.}=C.$$

Wenn a in $\frac{a}{4}$ übergeht, so geht auch h in h^4 über; der vorliegende Ausdruck C ändert also seinen Werth nicht, wenn darin für a nach und nach $\frac{a}{4}, \frac{a}{16}, \frac{a}{64}, \ldots$ substituirt werden; folglich ist sein Werth derselbe wie für ein verschwindendes a. Für ein solches haben aber

$$\gamma\left(\frac{a}{2}, a, b\right), \quad G\left(\frac{a}{2}, a, b\right), \; \varphi(h)$$

resp. die Gränzwerthe $\frac{a}{\pi}$, 1, 1. Demnach ist $C = \frac{1}{\pi}$; folglich

$$\varphi(h) = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 \ldots = \sqrt{\frac{\frac{a}{\pi} G\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}} = \Pi \frac{1+h^{2n-1}}{1-h^{2n-1}} \cdot \frac{1-h^{2n}}{1+h^{2n}},$$

und wenn man die Darstellung (a, b) mit $(a, a+b)$ vertauscht, wodurch h in $-h$ und G in $\mathfrak{G}$ übergeht:

$$1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \ldots = \sqrt{\frac{\frac{a}{\pi} \mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}} = \Pi \frac{1-h^n}{1+h^n}.$$

Setzt man in den vorletzten Ausdrücken für γx, gx, welche noch die Exponentialfunctionen enthalten, $x = \frac{b}{2}$, so bekömmt man

$$\gamma\frac{b}{2} = e^{\frac{bb'\pi}{8c}} \frac{a}{\pi} \sqrt{-1} \cdot \frac{1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 \ldots}{2h^{\frac{1}{4}} - 6h^{\frac{9}{4}} + 10h^{\frac{25}{4}} \ldots},$$

$$g\frac{b}{2} = e^{\frac{bb'\pi}{8c}} \frac{1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 \ldots}{2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + 2h^{\frac{25}{4}} \ldots}.$$

Durch Vergleichung dieser Werthe mit den am Ende von §. 16. gefundenen ergiebt sich:

$$\frac{2h^{\frac{1}{4}} - 6h^{\frac{9}{4}} + 16h^{\frac{25}{4}} \ldots}{1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 \ldots} = 2h^{\frac{1}{4}} \, \Pi \left(\frac{1-h^{2n}}{1-h^{2n-1}}\right)^2,$$

$$\frac{2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + 2h^{\frac{25}{4}} \ldots}{1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 \ldots} = 2h^{\frac{1}{4}} \, \Pi \left(\frac{1+h^{2n}}{1+h^{2n-1}}\right)^2;$$

und hieraus durch Substitution der bereits gefundenen Werthe von

$$1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 \ldots \text{ und } 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 \ldots$$

und unter Berücksichtigung der Relation $\Pi(1+h^n)(1-h^{2n-1})=1$:

$$2h^{\frac{1}{4}}-6h^{\frac{9}{4}}+10h^{\frac{25}{4}}-\ldots=2h^{\frac{1}{4}}\,\Pi(1-h^{2n})^3,$$

$$2h^{\frac{1}{4}}+2h^{\frac{9}{4}}+2h^{\frac{25}{4}}\ldots=2h^{\frac{1}{4}}\,\Pi\frac{1-h^{4n}}{1-h^{4n-2}}.$$

Dieselben Reihen in h, durch die vollständigen Functionen ausgedrückt, werden:

$$2h^{\frac{1}{4}}-6h^{\frac{9}{4}}+10h^{\frac{25}{4}}-\ldots=\sqrt{\left(\frac{a}{\pi}\right)^3\frac{g\frac{b}{2}}{\gamma\frac{b}{2}}\sqrt{-1}\cdot\frac{\mathfrak{G}\frac{b}{2}}{\gamma\frac{b}{2}}\sqrt{-1}\cdot\frac{\mathfrak{G}\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}},$$

$$2h^{\frac{1}{4}}+2h^{\frac{9}{4}}+2h^{\frac{25}{4}}+\ldots=\sqrt{\frac{a}{\pi}\frac{\mathfrak{G}\frac{b}{2}}{\gamma\frac{b}{2}}\sqrt{-1}}.$$

Denn es ist

$$e^{\frac{bb'\pi}{8c}}=\sqrt{g\frac{b}{2}\cdot\mathfrak{G}\frac{b}{2}}\ \text{und}\ \frac{G\frac{a}{2}}{\gamma\frac{a}{2}}=\frac{g\frac{b}{2}}{\gamma\frac{b}{2}}\sqrt{-1}.$$

Fasst man Alles zusammen und benutzt die in §. 5. gegebenen Constanten p, q, r, so gewinnt man folgende Uebersicht:

$$2h^{\frac{1}{4}}-6h^{\frac{9}{4}}+10h^{\frac{25}{4}}-\ldots=\sqrt{\left(\frac{a}{\pi}\right)^3\sqrt{-pqr}}=2h^{\frac{1}{4}}\,\Pi(1-h^{2n})^3,$$

$$2h^{\frac{1}{4}}+2h^{\frac{9}{4}}+2h^{\frac{25}{4}}+\ldots=\sqrt{\frac{a}{\pi}\sqrt{p}}=2h^{\frac{1}{4}}\,\Pi(1-h^{2n})(1+h^{2n})^2,$$

$$1-2h+2h^4-2h^9+\ldots=\sqrt{\frac{a}{\pi}\sqrt{q}}=\Pi(1-h^{2n})(1-h^{2n-1})^2,$$

$$1+2h+2h^4+2h^9+\ldots=\sqrt{\frac{a}{\pi}\sqrt{-r}}=\Pi(1-h^{2n})(1+h^{2n-1})^2.$$

Da nun in den „Fundamenta“ von Jacobi die Reihe

$$1-2h\cos\frac{2\pi x}{a}+2h^4\cos\frac{4\pi x}{a}-2h^9\cos\frac{6\pi x}{a}+\ldots$$

als die Function Θ des Arguments $x\sqrt{-r}$ bezeichnet wird, so ist

$$\Theta(x\sqrt{-r})=\sqrt{\frac{a}{\pi}\sqrt{q}\cdot e^{-\frac{a'\pi}{2ao}x^2}}\,G(x),$$

und $\sqrt{-\frac{p}{r}}$ ist der Modul dieser Function Θ. Der Werth derselben ändert sich also, wenn man die Darstellung (a, b) mit irgend einer andern äquivalenten Darstellung vertauscht, während dagegen der Werth der Function $G(x)$ von der Wahl der Darstellung unabhängig ist.

§. 18.

Ueber die Entwickelung der gebrochenen elliptischen Functionen in trigonometrische Partialbrüche.

Es soll hier nur an einem einzigen Beispiele gezeigt werden, wie dieselbe aus den Sätzen des §. 5. hervorgeht. Dort wurde gefunden:

$$\frac{\gamma x}{Gx}=-\frac{\gamma^2\frac{b}{2}}{g\frac{b}{2}\,\mathfrak{G}\frac{b}{2}}\,\frac{d}{dx}\log\frac{G(x,2a,b)}{\mathfrak{G}(x,2a,b)}.$$

Nach §. 16. ist aber

$$\frac{G(x,2a,b)}{\mathfrak{G}(x,2a,b)}=\Pi\left(\frac{1+h^{\frac{2n-1}{2}}}{1-h^{\frac{2n-1}{2}}}\right)^2\frac{1-2h^{\frac{2n-1}{2}}\cos\frac{\pi x}{a}+h^{2n-1}}{1+2h^{\frac{2n-1}{2}}\cos\frac{\pi x}{a}+h^{2n-1}};$$

folglich ist

$$\frac{\gamma x}{Gx}=\frac{\frac{4\pi}{a}}{\sqrt{-pr}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{h^{\frac{2n-1}{2}}(1+h^{2n-1})\sin\frac{\pi x}{a}}{1-h^{2n-1}\cos\frac{2\pi x}{a}+h^{4n-2}}.$$

XXIX.

Ueber die Bestimmung eines häufig vorkommenden Gränzwerthes.

Von dem

Herrn Dr. O. Schlömilch,

Professor der höheren Mathematik und Mechanik an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Die elementaren Quadraturen und Cubaturen, sowie zahlreiche Untersuchungen der niederen Mechanik, erfordern bekanntlich die Anwendung des Satzes, dass für unendlich wachsende s die Gleichung

$$\mathrm{Lim}\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+s^m}{s^{m+1}}=\frac{1}{m+1}$$

statt findet. Gewöhnlich beweist man denselben mittelst des Binomialtheoremes, was aber, wenn man hinreichend streng sein will, nicht einmal sehr rasch geht; viel kürzer dagegen kommt man auf folgendem Wege zum Ziele, der nichts als die Kenntniss der Summenformel für die geometrische Progression voraussetzt.

Nehmen wir in der identischen Gleichung

$$\frac{(1+u)^n-1}{(1+u)\;-1}=1+(1+u)+(1+u)^2+\ldots(1+u)^{n-1}$$

u als positive Grösse, so ist die Progression eine steigende und wenn man an die Stelle aller n Glieder einmal das kleinste und nachher das grösste Glied setzt, so folgt augenblicklich

$$\frac{(1+u)^n-1}{u}>n \text{ und } \frac{(1+u)^n-1}{u}<n(1+u)^{n-1}$$

und durch eine kleine Umstellung

1) $$u < \frac{(1+u)^n - 1}{n},$$

2) $$(1+u)^{n-1} > \frac{(1+u)^n - 1}{nu}.$$

Aus No. 1) ergiebt sich für $u = \frac{1}{z}$ und durch Multiplikation mit z^n

3) $$z^{n-1} < \frac{(z+1)^n - z^n}{n}.$$

Lassen wir ferner in der zweiten Ungleichung $\frac{1}{z-1}$ an die Stelle von u treten, so giebt eine nachherige Multiplikation mit $(z-1)^{n-1}$

4) $$z^{n-1} > \frac{z^n - (z-1)^{n-1}}{n}.$$

Die beiden Ungleichungen 3) und 4) fassen wir in die folgende zusammen, wobei $m+1$ für n gesetzt ist:

5) $$\frac{(z+1)^{m+1} - z^{m+1}}{m+1} > z^m > \frac{z^{m+1} - (z-1)^{m+1}}{m+1}.$$

Hieraus ergeben sich für $z = 1, 2, 3, \ldots s$ die Ungleichungen:

$$\frac{2^{m+1} - 1^{m+1}}{m+1} > 1^m > \frac{1^{m+1}}{m+1},$$

$$\frac{3^{m+1} - 2^{m+1}}{m+1} > 2^m > \frac{2^{m+1} - 1^{m+1}}{m+1},$$

$$\frac{4^{m+1} - 3^{m+1}}{m+1} > 3^m > \frac{3^{m+1} - 2^{m+1}}{m+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{(s+1)^{m+1} - s^{m+1}}{m+1} > s^m > \frac{s^m - (s-1)^{m+1}}{m+1}.$$

Die Summe dieser Ungleichungen liefert die Beziehung

$$\frac{(s+1)^{m+1} - 1^{m+1}}{m+1} > 1^m + 2^m + \ldots + s^m > \frac{s^{m+1}}{m+1},$$

und wenn man linker Hand 1^{m+1} weglässt, so ist um so mehr

6) $$\frac{(s+1)^{m+1}}{m+1} > 1^m + 2^m + \ldots + s^m > \frac{s^{m+1}}{m+1}.$$

Durch Division mit s^{m+1} folgt hieraus

$$\frac{1}{m+1}\left(1+\frac{1}{s}\right)^{m+1} > \frac{1^m+2^m+\ldots+s^m}{s^{m+1}} > \frac{1}{m+1}$$

und durch Uebergang zur Gränze für unendlich wachsende s

$$\mathrm{Lim}\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+s^m}{s^{m+1}} = \frac{1}{m+1},$$

womit der in Rede stehende Satz bewiesen ist.

Dividirt man die Ungleichung 6) allgemeiner mit $(s+k)^{m+1}$, wo k eine unveränderliche Grösse ist, so kann man dem Resultate die Form geben:

$$\frac{1}{m+1}\left(1-\frac{k-1}{s+k}\right)^{m+1}$$

$$> \frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+s^m}{(s+k)^{m+1}} >$$

$$\frac{1}{m+1}\left(1-\frac{k}{s+k}\right)^{m+1},$$

und hieraus folgt die allgemeinere Formel

$$\mathrm{Lim}\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+s^m}{(s+k)^{m+1}} = \frac{1}{m+1},$$

für welche der individuelle Werth der Constanten k gleichgültig bleibt.

XXX.

Ueber die Bestimmung des Gränzwerthes von $\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{s}}{s\sqrt{s}}$ für unendlich wachsende Werthe der Zahl s.

Von dem

Herrn Dr. O. Schlömilch,

Professor der höheren Mathematik und Mechanik an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Wir bemerken zunächst, dass vermöge der identischen Gleichung

$$\sqrt{u+1}-\sqrt{u}=\frac{1}{\sqrt{u+1}+\sqrt{u}}$$

die beiden Beziehungen

1) $$\sqrt{u+1}-\sqrt{u}>\frac{1}{2\sqrt{u+1}},$$

2) $$\sqrt{u+1}-\sqrt{u}<\frac{1}{2\sqrt{u}}$$

statt finden, deren Ableitung aus jener Gleichung unmittelbar erhellen wird. — Betrachten wir weiter die Differenz

3) $$(u+1)\sqrt{u+1}-u\sqrt{u},$$

so können wir dieselbe unter einer doppelten Form so darstellen, dass die obigen Ungleichungen anwendbar sind. Erstens schreiben wir nämlich statt jener Differenz den Ausdruck

$$(u+1)[\sqrt{u+1}-\sqrt{u}]+\sqrt{u}$$

$$>(u+1).\frac{1}{2\sqrt{u+1}}+\sqrt{u}$$

$$>\frac{1}{2}\sqrt{u+1}+\sqrt{u},$$

und da $\sqrt{u+1}>\sqrt{u}$, so haben wir, $\sqrt{u}$ für $\sqrt{u+1}$ setzend,

4) $$(u+1)\sqrt{u+1}-u\sqrt{u}>\frac{3}{2}\sqrt{u}.$$

Die in No. 3) verzeichnete Differenz ist ferner gleich

$$u[\sqrt{u+1}-\sqrt{u}]+\sqrt{u+1}$$

$$<u.\frac{1}{2\sqrt{u}}+\sqrt{u+1}$$

$$<\frac{1}{2}\sqrt{u}+\sqrt{u+1},$$

und wenn $\sqrt{u+1}$ für $\sqrt{u}$ gesetzt wird:

5) $$(u+1)\sqrt{u+1}-u\sqrt{u}<\frac{3}{2}\sqrt{u+1}.$$

Nehmen wir in No. 4) $u=z$, in No. 5) $u=z-1$, so lassen sich beide Ungleichungen in die folgende zusammenfassen:

$$\sqrt{(z+1)^3}-\sqrt{z^3}>\frac{3}{2}\sqrt{z}>\sqrt{z^3}-\sqrt{(z-1)^3}.$$

Für $z=1, 2, 3, \ldots s$ folgen hieraus die Beziehungen:

$$\sqrt{2^3}-\sqrt{1^3}>\frac{3}{2}\sqrt{1}\ >\sqrt{1^3},$$

$$\sqrt{3^3}-\sqrt{2^3}>\frac{3}{2}\sqrt{2}\ >\sqrt{2^3}-\sqrt{1^3},$$

$$\sqrt{4^3}-\sqrt{3^3}>\frac{3}{2}\sqrt{3}\ >\sqrt{3^3}-\sqrt{2^3},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\sqrt{(s+1)^3}-\sqrt{s^3}>\frac{3}{2}\sqrt{s}\ >\sqrt{s^3}-\sqrt{(s-1)^3};$$

deren Addition sogleich giebt:

$$\sqrt{(s+1)^3}-\sqrt{1^3}>\frac{3}{2}[\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{s}]>\sqrt{s^3}.$$

Lässt man linker Hand $\sqrt{1^3}$ weg, wodurch die Ungleichung stärker wird, und multiplizirt durchgängig mit

$$\frac{2}{3}\frac{1}{s\sqrt{s}}=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{s^3}},$$

so ergiebt sich die Beziehung

$$\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+\frac{1}{s}\right)^3}>\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{s}}{s\sqrt{s}}>\frac{2}{3},$$

und aus dieser folgt durch Uebergang zur Gränze für unendlich wachsende s:

$$\operatorname{Lim}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{s}}{s\sqrt{s}}=\frac{2}{3}.$$

Die Quadratur der Parabel bildet u. A. ein nettes Beispiel für den Gebrauch dieser Formel, deren Ableitung nach der obigen Weise ebenso streng als einfach ist; es wiederholt sich überhaupt bei diesem und dem vorigen Aufsatze die Bemerkung Moigno's: „la rigueur n'est pas ennemie de la simplicité, elle en est au contraire la compagne inséparable „(Leçons de calcul différentiel. XIX).

LIII.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Die vollständige Lösung numerischer Gleichungen, bei welcher durch ein und dasselbe Verfahren sowohl die imaginären, als auch die reellen Wurzeln leicht bestimmt werden. Von Dr. William Rutherford. Aus dem Englischen übersetzt von Dr. August Wiegand. Halle. 1849. 4. 15 Sgr.

Durch die Verpflanzung dieser Schrift auf deutschen Boden hat sich der Herr Uebersetzer um so mehr ein Verdienst erworben, weil er derselben auch noch ein neues einfaches Verfahren des Herrn Rutherford zur Bestimmung aller drei Wurzeln einer cubischen Gleichung aus dem Märzhefte 1849. der Zeitschrift „The Mathematician" und noch einiges Andere beigefügt hat. Rücksichtlich der Methoden des Herrn Rutherford selbst müssen wir die Leser hier natürlich auf die instructive Schrift verweisen, und bemerken nur noch, dass dieselben auf Gleichungen des dritten, vierten, fünften und sechsten Grades in vollständig ausgerechneten Beispielen angewandt worden sind.

Grundriss der höhern Analysis von Dr. H. Burhenne. Cassel. 1849. 8.

Dieser Grundriss der höhern Analysis ist zunächst für die Schüler der höhern Gewerbschule zu Cassel, an welcher der Herr Verfasser, wie wir wissen, schon seit deren Gründung sehr segensreich wirkt, verfasst worden. Derselbe ist bei grosser Kürze der Darstellung, indem sich der Herr Verfasser oft nur mit der Angabe allgemeiner Gesichtspunkte begnügt und die weitere Ausführung dem mündlichen Vortrage überlässt, doch sehr vollständig und verbreitet sich fast über alle wesentlichen Punkte der Wissenschaft, selbst mit Einschluss der Grundlehren der Variationsrechnung, in ihrem rein analytischen Theile; denn eigentliche Anwendungen auf die Geometrie, und noch weniger auf die Mechanik, enthält dieses Lehrbuch, mit Ausnahme einiger kurzen allgemeinen Andeutungen in §. 116. und §. 117., nicht. Auch Beispiele zur Erläuterung der allgemeinen Lehren sind nur wenige gegeben, indem der Herr Verfasser jedenfalls auch diese dem mündlichen Vortrage des Lehrers zu überlassen beabsichtigte, da ihm immer der Zweck eines eigentlichen Compendiums bei der Abfassung vorschwebte. Dagegen sind in Anmerkungen öfters sinnreiche und interessante Beziehungen hervorgehoben, und besonders verdient bemerkt zu werden, dass der Herr Verfasser, auch die praktische Anwendung der vorgetragenen Lehren stets vor Augen habend, vielfache Rücksicht auf den so wichtigen Gebrauch der Differentialrechnung zur Entwickelung brauchbarer Näherungsformeln, auf die näherungsweise Entwickelung der Werthe bestimmter Integrale u. s. w. genommen hat, und auch in §. 59. das Grundprincip der Methode der kleinsten Quadrate, in §. 60. das Princip des kleinsten Zwangs (oder der grösstmöglichen Freiheit) als Grundgesetz der Natur entwickelt. Auch die bei Anwendungen der höheren Analysis auf die Naturwissenschaft, bekanntlich so wichtigen Fourier'schen Reihen, und manches Andere, worüber man in vielen anderen Lehrbüchern keine Belehrung findet, sind nicht unberücksichtigt geblieben, und man sieht daher, dass dieser bei grosser Kürze doch sehr vollständige Grundriss namentlich allen denen, welche in möglichst kurzer Zeit hauptsächlich Behufs der Anwendungen der höheren Analysis theils im praktischen Leben, theils in der Naturwissenschaft, sich eine hinreichende Kenntniss der ganzen Wissenschaft verschaffen und insbesondere zunächst die allgemeinen Gesichtspunkte kennen lernen wollen, welche sie bei ihren Untersuchungen zu verfolgen und festzuhalten haben, so wie auch Lehrern, welchen in der angegebenen Beziehung die Ertheilung des Unterrichts in der höhern Analysis obliegt, recht sehr zur Beachtung empfohlen zu werden verdient. Auch selbst für solche Leser, die schon mit den dem Falle Hauptlehren der höhern Analysis bekannt, aber weniger in sind dieselben fortwährend anzuwenden, und die wieder einmal einen raschen Ueberblick über die wichtigsten Partieen der Wissenschaft sich zu verschaffen für nöthig halten, kann dieses Buch nützlich sein; und wir haben uns sehr gefreu't, aus demselben einen jüngern Mathematiker kennen zu lernen, welcher, wie aus dem ganzen Buche hervorgeht, sich jedenfalls eine Anschauung von der Wissenschaft verschafft hat, die wir vorzugsweise mit dem Namen einer philosophischen bezeichnen möchten, und dabei zugleich mit sicherm pädagogischen Takte dem Ziele zusteuert, dessen Erreichung ihm bei dem von ihm zu ertheilenden Unterrichte obliegt. Auch muss das vorliegende Lehrbuch von der Lehranstalt, auf welcher es dem Unterrichte als Grundlage dienen soll, jedenfalls ein sehr günstiges Vorurtheil erwecken, und, da Jeder, wer es in jetziger Zeit mit dem Menschengeschlechte wahrhaft gut meint, das wärmste Interesse an dem immer kräftigeren Aufblühen der mehr eine praktische oder technische Richtung verfolgenden Lehranstalten nehmen muss, zu dem lebhaftesten Danke gegen eine

Regierung verpflichtet, welche den Gewerbtreibenden ihres Volkes eine so treffliche Gelegenheit zu ihrer Ausbildung darbietet, wie die kurhessische Regierung in der höheren Gewerbschule zu Cassel. Möchten alle anderen Regierungen in der jetzigen bewegten unaufhaltsam vorwärts strebenden Zeit sich ein solches Beispiel zum Muster nehmen, und, ohne sich in irgend einer Beziehung wieder zu retrograden Bewegungen verleiten zu lassen, immer mehr die Ueberzeugung gewinnen, dass in einem tüchtig gebildeten und nach allen Seiten hin sich möglichst frei entfalten könnenden Gewerbstande ein grosser Theil der Kraft des Volkes, der wahren Wohlfahrt des Landes ruhet. Möge man uns diese Expectoration, zu welcher uns das vorliegende Lehrbuch mit Hinblick auf die durch dasselbe deutlich bekundete, jedenfalls grosse Vortrefflichkeit der höhern Gewerbschule zu Cassel, veranlasst hat, bei dem lebhaften Interesse, welches wir namentlich auch an dem immer kräftigeren Aufblühen der genannten Lehranstalten nehmen, an diesem Ort verzeihen!

Noch ein Wort müssen wir schliesslich über die ganze in diesem Grundrisse inne gehaltene Darstellung sagen. Das Punctum saliens, worauf es bei der Darstellung der höhern Analysis gegenwärtig eigentlich ankommt, und worin sich die ältere und neuere Darstellungsweise hauptsächlich von einander unterscheiden, ist bekannt, und, von unserm Standpunkte aus, schon oft genug in dieser Zeitschrift besprochen worden, so dass wir darüber unsere Ansicht nicht von Neuem auszusprechen brauchen. In der Vorrede des vorliegenden Grundrisses sagt der Herr Verfasser: „Was die Methode betrifft, so bin ich der Ueberzeugung gefolgt, dass man „Solche, die zum ersten Male einen Ueberblick über das reiche „Gebiet der Analysis gewinnen, und auch bald zu Anwendungen „gelangen wollen, nicht durch allzu grossen Rigorismus in der „Darstellung ermüden und aufhalten darf. Mögen dann später „diejenigen, welche die Theorie weiter verfolgen wollen, durch „Privatstudium sich mit den Werken eines Cauchy vertraut „machen." — Auch hierin stimmen wir dem Herrn Verfasser vom pädagogischen Standpunkte aus, namentlich mit Bezug auf solche Lehranstalten, für welche das Buch vorzugsweise bestimmt ist, vollkommen bei, ohne dadurch unsere hinreichend bekannte Ansicht von dem eigentlichen Wesen der Wissenschaft aufzugeben, und bemerken, dass der Herr Verfasser in der angegebenen Beziehung den Mittelweg eingeschlagen hat, dass er zuerst bei'm Eintritt in das Gebiet der Differentialrechnung sich der in älterer Zeit gewöhnlichen Darstellungsweise durch die Methode der unbestimmten Coefficienten u. s. w. bedient, und dann späterhin in der Integralrechnung in §. 77. (Die Taylor'sche Reihe mit dem Restglied), in §. 78. (Andere Form für den Rest der Taylor'schen Reihe), §. 79. (Convergenz der Reihen für die einfachen Functionen), §. 80. (Anwendung der bestimmten Integrale bei Beurtheilung der Convergenz einer Reihe) auf die früher entwickelten Reihen zurückkommt, und dieselben in Bezug auf Convergenz und Divergenz näher bestimmt. Um die von dem Herrn Verfasser bei diesen Dingen mit Hülfe der Integralrechnung befolgte Darstellung in der Kürze etwas näher zu characterisiren, mag es uns, um nur ein jedenfalls in den Händen vieler Leser befindliches Buch anzuführen, erlaubt sein, auf den Artikel Differentialrechnung in dem ersten Supplementbande zum Klügel'schen Wörterbuche. S. 660. ff. zu verweisen.

Möge dem Herrn Verfasser jede Aufmunterung bei seinem verdienstlichen Wirken auf dem Felde des mathematischen Unterrichts zu Theil werden, und das Buch die wohlverdiente Beachtung überall finden!

Geometrie.

Lehrbuch der Geometrie und Trigonometrie nebst ihren ausgedehnten Anwendungen auf die Lösung geometrischer Probleme. Vorzüglich für Militair- und technische Lehranstalten von R. Unruh. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage, herausgegeben in drei Theilen von C. Kuhn, k. Professor der Mathematik und Physik am k. b. Cadetten-Corps. Landshut. 1850. 8. 1 Thlr. 27 Sgr.

Ein ziemlich vollständiges recht deutliches Lehrbuch mit vielen Aufgaben, welches in der Hand eines geschickten Lehrers, besonders auf den auf dem Titel genannten Schulen, gewiss Nutzen stiften wird.

Der allgemeine goldene Schnitt und sein Zusammenhang mit der harmonischen Theilung. Ein neuer Beitrag zum Ausbau der Geometrie. Zugleich eine Ergänzung zu des Verfassers Schrift: Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks mit Rücksicht auf harmonische Theilung. Von Dr. August Wiegand. Halle, 1849. 8. $2^1/_2$ Sgr.

Eine recht lesenswerthe neue kleine Abhandlung des schon vielfach um die Geometrie verdienten Herrn Verfassers über eine Verallgemeinerung der Aufgabe vom goldenen Schnitt (Theilung einer Linie nach dem äusseren und mittleren Verhältnisse), die auch Schülern zur Uebung in der Geometrie empfohlen zu werden verdient. Inhalt: I. Gruppen harmonischer Punkte. II. Der allgemeine goldene Schnitt. III. Zusammenhang des allgemeinen goldenen Schnitts mit den früheren Gruppen harmonischer Punkte.

Dissertatio mathematica inauguralis de superficierum curvatura, quam pro Gradu Magisterii et Doctoratus, summisque in Mathesi et Philosophia naturali honoribus ac privilegiis, in Academia Groningana rite et legitime consequendis, publico ac solemni examini submittit Arnoldus Gulielmus Alings, Groninganus. Groningae. 1849. 4.

Wir haben schon einige Mal in diesen literarischen Berichten Gelegenheit gehabt, uns über die Gründlichkeit und den oft ziemlich grossen Umfang der auf den holländischen Universitäten erscheinenden mathematischen Dissertationen mit Beifall auszusprechen. Dies zu thun, giebt uns auch die vorliegende Schrift wieder Veranlassung, in welcher die bekanntlich nicht leichte Theorie der Krümmung der Flächen mit grosser Gründlichkeit und in ziemlichem Umfange, zugleich aber auch in einer solchen Weise behandelt worden ist, dass die Darstellung eine dem Verfasser eigenthümliche mit Recht genannt werden kann. Indem wir daher auch diese Schrift als einen neuen Beleg für den sehr guten Zustand des mathematischen Studiums auf den holländischen Universitäten gern anerkennen, soll durchaus kein Tadel ausgesprochen werden, wenn wir bemerken, dass wir gewünscht hätten, dass der Herr Verfasser auch auf die Untersuchungen von Gauss über die Krümmung der Flächen, auf das z. B., was Gauss die ganze Curvatur und das Maass der Curvatur einer Fläche genannt hat, bestimmtere Rücksicht genommen hätte. — Der Inhalt ist folgender: *Pars* I. De proprietatibus cuiusque systematis linearum rectarum, quarum directiones determinantur functionibus coordinatarum, quae linearum origines definiunt; atque de iis, quae tantum ad superficierum normales pertinent. — *Pars* II. De superficierum curvatura, e normalium proprietatibus deducta. Cap. I. Theoremata, in quibus superficiei planum tangens habetur pro plano coordinatarum. — In einem dritten Theile will der Herr Verfasser (Introitus pag. 2.) später die Geschichte der Theorie der Krümmung der Flächen kurz behandeln, und wird dann vielleicht auch den oben von uns ausgesprochenen Wunsch berücksichtigen.

Trigonometrie.

Elemente der ebenen und sphärischen Trigonometrie, zusammengestellt von Dr. Meister, Prof. der Physik und Mathematik am K. Lyceum u. s. w. zu Freising. Freising. 1850. 10 Sgr.

Mechanik.

Lehrbuch der Statik fester Körper, in elementarer Darstellung, mit besonderer Rücksicht auf technische

Gewerbe. Von Adolph Ferd. Wencesl. Brix, Fabriken-Commissions-Rathe u. s. w. Zweite gänzlich umgearbeitete Auflage. Erste Abtheilung: Die Lehren der reinen Statik enthaltend; mit 12 Figurentafeln und einem Anhange. Berlin. 1849. 8. 3 Thlr. 15 Sgr.

Dieses ausgezeichnete Lehrbuch der Statik fester Körper ist aus seiner im Jahre 1831 erschienenen ersten Auflage allgemein bekannt, und eine besondere Empfehlung desselben daher überflüssig. Die elementare Darstellung ist auch in dieser zweiten Auflage durchgängig beibehalten worden, und es leidet gar keinen Zweifel, dass nur dieser Weg, wenn er namentlich meistens mit so viel Einfachheit und Eleganz wie von dem Herrn Verfasser des vorliegenden Werks, betreten wird, für die Ausbildung von Technikern wirklich zweckmässig ist, besonders bei dem jetzigen Zustande der Wissenschaft, wo an die höhere Analysis und ihre Anwendung in der Geometrie und Mechanik in Rücksicht auf wahre Strenge der Darstellung weit grössere Ansprüche gemacht werden, als vordem. Je mehr wir selbst auf der einen Seite dieser durch höchste Strenge sich auszeichnenden Darstellungsweise huldigen, desto mehr sind wir auf der andern Seite überzeugt, dass dieselbe wegen ihrer Schwierigkeit sich für den Unterricht von Technikern nicht wohl eignet, sondern nur für solche Schüler, welche sich ausschliesslich dem Studium der Mathematik überhaupt hinzugeben, und dasselbe zu ihrer Lebensaufgabe zu machen beabsichtigen. Will man also bei dem für Techniker bestimmten Vortrage der Mechanik und der Theorie der dazu nothwendigen Curven die höhere Analysis in Anwendung bringen, so muss man sich — wie auch schon mehrmals in diesen Literarischen Berichten von uns ausgesprochen worden ist — mehr der älteren Darstellungsweise der höheren Analysis anschliessen oder einen Mittelweg einschlagen, was aber freilich immer mit vielen wesentlichen Nachtheilen verbunden sein muss, da bei dem mathematischen Unterrichte natürlich überall höchste Strenge eine Hauptsache ist. Ohne übrigens der Meinung zu sein, dass die Techniker der von der höheren Analysis dargebotenen so grossen ond wichtigen Vortheile ganz verlustig gehen sollen, theilen wir daher doch auf der andern Seite mit dem Herrn Verfasser des vorliegenden Lehrbuchs vollkommen die Ueberzeugung, dass man sich bei dem für Techniker bestimmten mathematischen Unterrichte hauptsächlich der elementaren Darstellungsweise zu bedienen habe, und halten alle Bemühungen, dieselbe immer mehr zu vervollkommnen, namentlich zu vereinfachen, und immer mehr und mehr zu der Eleganz, welcher sie nach unserer festesten Ueberzeugung in hohem Grade fähig ist, zu erheben, in jeder Beziehung für sehr verdienstlich, wünschen auch sehr, dass das Archiv noch mehr als bisher zur Mittheilung solcher elementaren Darstellungen und anderer bei'm Unterrichte gemachter Erfahrungen benutzt werden möge.

Dass die vorliegende zweite Auflage mit vollem Rechte den Namen einer vielfach verbesserten und vermehrten verdient, geht aus einer nur oberflächlichen Vergleichung beider Auflagen sogleich hervor. Denn so ist z. B. in die neue Auflage die Theorie der Kräftepaare, die Bestimmung des Schwerpunkts des sphärischen

Dreiecks, die Lehre von der Stabilität, die Theorie der Waagen und Kraftmesser, die dem Praktiker so wichtige elastische Curve, und vieles Andere, was sich in der älteren Auflage nicht findet, aufgenommen worden, ohne die Bogenzahl bedeutend zu vergrössern. Auch ist die Zugabe zweckmässiger Beispiele zu allen allgemeinen Lehren und Theorieen namentlich bei einem Buche von der Tendenz des vorliegenden höchst dankenswerth. Indem wir nun schliesslich noch bemerken, dass auch der, eine Zusammenstellung der wichtigsten Theorien aus der niedern Analysis, Curvenlehre und Stereometrie enthaltende Anhang zu diesem statischen Lehrbuche schon weit früher (1843) in einer verbesserten und erweiterten Auflage erschienen ist, wünschen wir diesem empfehlenswerthen Lehrbuche eine möglichst weite Verbreitung und die allgemeinste Beachtung, die es jedenfalls sehr verdient.

Astronomie.

Der nördliche gestirnte Himmel, dargestellt von Dr. Ferdinand Reuter, ordentlichem Lehrer an der I. Bürgerschule, Secretair der astronomischen und Mitgliede der naturforschenden Gesellschaft in Leipzig. (Mit einem Vorworte von Dr. G. A. Jahn.). Gotha. Preis roh $1\frac{1}{2}$ Thlr. — Aufgezogen in Mappe 2 Thlr.

Der Grund dieser Sternkarte ist schwarz, die Umrisse der Sternbilder sind roth und die Sterne der verschiedenen Grössen sind in verschiedenen Farben aufgetragen. Wir sind der Meinung, dass diese neue Sternkarte durch naturgetreue Darstellung des gestirnten Himmels, durch wenig complicirte Zeichnung der Sternbilder und durch die Anzahl der aufgenommenen Sterne, in welcher Beziehung der Herr Herausgeber uns für Liebhaber der Astronomie ganz das richtige Maass getroffen zu haben scheint, sich vor früheren Arbeiten dieser Art sehr vortheilhaft auszeichnet, und empfehlen daher diese sehr verdienstliche Arbeit, die namentlich auch durch schöne Ausführung sehr anspricht, aus voller Ueberzeugung allen denen, welche in möglichst kurzer Zeit sich eine genügende Kenntniss des gestirnten Himmels verschaffen wollen, angelegentlichst, und wünschen derselben eine recht weite und allgemeine Verbreitung. Eine Anweisung zum Gebrauch ist beigegeben.

Cometen-Beobachtungen an der k. k. Wiener Sternwarte, redigirt von Dr. C. Jelinek und C. Hornstein. Enthaltend die Beobachtungen des Halley'schen Cometen im Jahre 1835 und 1836, und der Cometen in den Jahren 1843—1846. (Aus den Annalen der k. k. Wiener Sternwarte. Band XXXIII.).

Es sind in dieser Schrift die folgenden Cometen behandelt: Comet Halley. — Comet Mauvais I. — Comet Faye. — Comet

Mauvais II. — Comet de Vico I. — Comet d'Arrest. — Comet de Vico II. — Grosser Comet vom Juni 1845. — Comet Biela. — Comet de Vico III. — Comet de Vico IV. — Comet Brorsen I. — Comet Brorsen II. — Bei jedem Cometen sind ausser der Zusammenstellung der Beobachtungen die mittlern Oerter der Vergleichsterne gegeben, und man sieht daher aus dem Obigen, ein wie reiches Material diese höchst fleissige und wichtige Arbeit für die Berechnung der Bahnen der beobachteten Cometen enthält.

URANUS. ΟΥΡΑΝΟΣ. Synchronistisch geordnete Ephemeride aller Himmelserscheinungen des Jahres 1850, erstes Quartal, zunächst berechnet für den Horizont der Sternwarte zu Breslau, aber auch für jeden Ort unseres Erdtheils eine täglich treue Darstellung der wechselnden Erscheinungen am Himmel. Fünfter Jahrgang (19te Bearbeitung seit 1832) in Vierteljahrsheften herausgegeben von der Königl. Universitäts-Sternwarte zu Breslau. 1850. 8. Jedes Quartal bei Abnahme des completen Jahrgangs 10 Sgr., einzeln 12 Sgr.

Bei'm Beginn eines neuen Jahrgangs dieser jetzt auch äusserlich sehr gut ausgestatteten Zeitschrift, durch deren Herausgabe sich Herr Professor von Boguslawski jedenfalls ein wahres Verdienst um alle Freunde der Astronomie erwirbt, glauben wir die Leser des Archivs von Neuem auf dieselbe aufmerksam machen zu müssen, wenn wir auch schon im Literarischen Bericht Nr. XXIX. S. 441. einige Worte zur Empfehlung derselben gesagt haben. Wir weisen daher jetzt insbesondere nur nochmals darauf hin, dass diese Ephemeride in ihrer jetzt vielfach verbesserten Gestalt hauptsächlich für jeden einzelnen Tag des Jahrs nach den einzelnen Stunden und Minuten desselben eine genaue und vollständige Angabe aller an diesem Tage vorfallenden merkwürdigen Himmelserscheinungen, die sich im Voraus bestimmen lassen, enthält, so dass also jeder Freund der Astronomie an jedem einzelnen Tage weiss, auf welche Beobachtungen er sich an diesem Tage vorzubereiten hat. Die Nützlichkeit einer solchen Ephemeride, namentlich in der sehr zweckmässigen und genügenden Ausführung wie bei der vorliegenden, leuchtet von selbst ein, und der Herr Herausgeber verdient daher gewiss den Dank aller Freunde der Astronomie für diese mühevolle Arbeit. Ausser der eigentlichen Ephemeride sind unter dem Texte auch noch Aufsätze von vielfach belehrendem Inhalte beigegeben, die zur Erhöhung des Interesses ganz geeignet sind, und stets Nachrichten von den neuesten astronomischen Entdeckungen und Erfindungen geben. Wir wünschen daher diesem Unternehmen immer grössere Verbreitung und allgemeinere Anerkennung aus voller Ueberzeugung recht sehr, und zwar um so mehr, weil, was bei einem solchen Unternehmen natürlich eine Hauptsache ist, aber leider nur zu oft nicht gehörig berücksichtigt wird, der Herr Herausgeber das bestimmte Versprechen gegeben hat, dass jedes einzelne Quartal immer eine hinreichende Zeit vor dessen Beginn erscheinen soll.

Nautik.

Erster Bericht über die zur Dampfschifffahrt geeigneten Steinkohlen Englands. Von Sir Henry de la Beche und Dr. Lyon Plaifair. Auf Veranlassung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien aus den „Memoirs of the geological survey of Great Britain. Vol. II, Part. II." übersetzt und von ihr herausgegeben. Wien, 1849. 8.

Die Wichtigkeit des Gegenstandes und das grosse Interesse, welches diese Schrift, die auch zugleich Untersuchungen über die Heizkraft des Holzes enthält, nicht bloss in technischer, sondern auch in physikalischer und physiko-mathematischer Rücksicht darbietet, veranlasst uns, dieselbe hier kurz anzuzeigen, wenn sie auch, streng genommen, nicht mehr ganz in den Kreis unserer Zeitschrift gehört. Die Herren Franz Ritter von Hauer und Dr. Moser haben die, allen Anforderungen, welche man an eine solche Arbeit zu machen berechtigt ist, vollkommen entsprechende Uebersetzung übernommen, und sich auch dadurch ein besonderes Verdienst erworben, dass sie alle englischen Maasse und Gewichte in österreichische umwandelten, um dadurch die Resultate der englischen Versuche mit den aus der angebahnten Untersuchung der östereichischen Kohlen hervorgehenden Daten leichter vergleichbar, und die Schrift überhaupt zugänglicher zu machen. Wir halten, wie gesagt, die möglichst weite Verbreitung und allgemeine Beachtung dieser $8\frac{1}{2}$ Bogen starken Schrift, mit 5 schönen Kupfertafeln, für sehr wünschenswerth, und sind der Meinung, dass sich die k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien und die Herren Uebersetzer durch die Verpflanzung derselben auf deutschen Boden um die Dampfschifffahrt und die Technik überhaupt jedenfalls ein wesentliches Verdienst erworben haben. Auch bemerken wir schliesslich noch, dass die mathematisch-physikalische Klasse der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien in ihrer Sitzung vom 1. Februar 1849 beschlossen hat, eine Untersuchung der mannigfaltigen Stein- und Braunkohlen-Lager der österreichischen Monarchie zu veranlassen, deren Resultate von der Art sein sollen, dass sie eine unmittelbare Anwendung im praktischen Leben gestatten, was einen neuen höchst erfreulichen Beweis liefert, wie sehr die kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien ihren wahren Beruf als höchste wissenschaftliche Behörde des Landes erkennt, den ungeheuren Kreis der Wissenschaften nämlich nicht bloss nach allen Seiten und Richtungen hin immer mehr und mehr zu erweitern, sondern auch wissenschaftliche Untersuchungen, die zur Förderung des Wohles des Landes dienen, anzuordnen, wodurch sie mehr als andere wissenschaftliche Anstalten dieser Art den Anforderungen der Zeit in Wahrheit Rechnung trägt.

Physik.

Physikalische Technik oder Anleitung zur Anstellung von physikalischen Versuchen und zur Herstellung von physikalischen Apparaten mit möglichst einfachen Mitteln. Von Professor Dr. J. Frick, Vorstand der höhern Bürgerschule zu Freiburg i. B. Mit 568 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Braunschweig. 1850. 8. 2 Thlr.

Schon Nollet hat eine Art des experiences. Paris. 1770. III. T. geschrieben, von der auch eine deutsche Uebersetzung (Leipzig. 1771.) in drei Theilen erschienen ist. Einen ähnlichen Zweck hat das vorliegende Buch, wenn es auch vorzugsweise nur das für den physikalischen Unterricht, hauptsächlich auf Schulen, Nothwendige berücksichtigt. Aber eben deshalb, weil es sich nicht zu sehr ausbreitet, und besonders diejenigen Versuche, welche zur Erläuterung und theilweisen Begründung der theoretischen Lehren unbedingt nothwendig und erforderlich sind, berücksichtigt, halten wir diese Anleitung zu physikalischen Versuchen für ein für Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten recht nützliches Buch, namentlich für solche, denen ein grösserer Instrumentenvorrath nicht zu Gebote steht, und die wegen Beschränktheit der Geldmittel sich Manches selbst anfertigen oder durch gewöhnliche Handwerker anfertigen lassen müssen. Die Ausstattung sowohl des Textes, als auch der Figuren, ist vortrefflich, wie bei der Verlagshandlung von Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig, die schon so vieles Ausgezeichnete auf diesem Felde geleistet hat, von vorn herein zu erwarten war. Auf den Inhalt näher einzugehen, verbietet hier der Raum und ist auch unnöthig, indem die Versicherung genügt, dass, ohne sich auf zu grosse Einzelnheiten und auf zu künstliche und kostspielige Apparate erfordernde Versuche einzulassen, alle Lehren der Physik ziemlich gleichmässige Berücksichtigung gefunden haben. Wir halten daher, wie schon erinnert, dieses Buch für Lehrer der Physik in mehrfacher Beziehung recht nützlich, und empfehlen es denselben zur Beachtung, ohne ihm, ausser seinem pädagogischen Nutzen, eine höhere wissenschaftliche Bedeutung, die der Herr Verfasser aber auch nicht beanspruchen wird, beilegen zu können. Jedenfalls ist das Erscheinen dieses nützlichen und in der angegebenen Weise empfehlenswerthen Buchs ein neues sehr erfreuliches Zeichen von der grossen Bedeutung, welche jetzt dem physikalischen und mathematischen Unterrichte auf niedern und höhern Schulen immer mehr und mehr beigelegt wird.

Beiträge zur meteorologischen Optik und zu verwandten Wissenschaften. In zwanglosen Heften her-

ausgegeben von Johann August Grunert. Erster Theil. Drittes Heft. Mit einer lithographirten Tafel. Leipzig. 1849. 8. 21 Sgr.

Die beiden ersten Hefte dieser der Förderung der meteorologischen Optik gewidmeten Zeitschrift sind im Literar. Bericht Nr. XLV. S. 632. und Nr. XLVI. S. 650. angezeigt worden. Das vorliegende dritte Heft enthält die mathematische Theorie der Luftspiegelung von dem Herausgeber. Es ist versucht worden, diese Theorie in möglichster Allgemeinheit mit geometrischer Strenge zu entwickeln, und insbesondere ist auch auf eine strenge Unterscheidung und gehörige Begränzung der verschiedenen möglichen Fälle, die hier eintreten können, sorgfältig Rücksicht genommen worden, so dass der Herausgeber sich der Hoffnung hingiebt, dass sowohl in dieser Rücksicht, als auch überhaupt, nicht bloss in optischer, sondern auch in geometrischer Rücksicht die Abhandlung der Belehrung Mancherlei darbieten, und, auch für die Theorie der Curven im Allgemeinen von Interesse sein werde. Auf die Erklärung einzelner Erscheinungen der Luftspiegelung ist in dieser vorzugsweise eine mathematische Tendenz habenden Abhandlung bis jetzt noch nicht Rücksicht genommen worden, weil der Herausgeber glaubt, dass, wer sich mit der allgemeinen Theorie gehörig vertraut gemacht hat, auch zu der Erklärung einzelner Erscheinungen von selbst befähigt sein wird, indem diese Abhandlung ihrer ganzen Anlage und Tendenz nach weniger für Anfänger, als vielmehr für solche bestimmt ist, die mit den Grundlehren der Wissenschaft und mit den einzelnen in unserer Atmosphäre vorkommenden Erscheinungen schon im Allgemeinen bekannt sind. Da aber diese Beiträge zur meteorologischen Optik, wie schon in der Ankündigung derselben gesagt worden ist, neben streng wissenschaftlichen Abhandlungen keineswegs mehr populär gehaltene Aufsätze ausschliessen sollen, um der so wichtigen und im höchsten Grade allgemein interessanten meteorologischen Optik immer mehr Liebhaber und eifrige Beobachter der in ihr Gebiet fallenden Erscheinungen zu gewinnen, so werden in späteren Aufsätzen noch verschiedene einzelne Erscheinungen der Luftspiegelung aus der in der vorliegenden Abhandlung entwickelten allgemeinen Theorie derselben erklärt werden. Das vierte Heft dieser Zeitschrift wird in den nächsten Tagen im Druck vollendet werden, und enthält eine ganz allgemein verständliche Abhandlung von dem schon durch mehrere in dieses Fach schlagende schöne Arbeiten sehr vortheilhaft bekannten Herrn Dr. R. Clausius in Berlin, worin derselbe eine sehr interessante Uebersichtliche Darstellung aller in das Gebiet der meteorologischen Optik gehörenden Erscheinungen geliefert hat, durch welche der eine Zweck der Zeitschrift, neben streng wissenschaftlichen Arbeiten nämlich auch mehr populär gehaltene Aufsätze zu liefern, gewiss auf eine die Liebhaber der meteorologischen Optik vollkommen befriedigende Weise ausgesprochen werden wird, was bisher noch nicht so vollständig möglich war, wie der Herausgeber wohl gewünscht hätte. Diese ein ganzes Heft füllende Abhandlung des Herrn Doctor Clausius, welche zugleich als ein Elementarlehrbuch der ganzen meteorologischen Optik betrachtet werden kann, hätte eigentlich an die

Spitze der Zeitschrift gestellt werden sollen, da sie zugleich den Kreis von Erscheinungen scharf bestimmt und abgränzt, in welchem sich die Zeitschrift zu bewegen haben wird; früher als jetzt dieselbe zu liefern, war aber leider nicht möglich, da dieselbe, ohne von der Schwierigkeit der Abfassung zu reden, auch die Herbeischaffung eines grossen literarischen Apparats erforderte.

Je mehr der Herausgeber im Interesse der Wissenschaft wünscht, diese Zeitschrift ihrem Zwecke immer näher zu führen, desto dringender richtet er hier nochmals an alle Liebhaber der meteorologischen Optik die Bitte, ihn durch Beiträge bei der Herausgabe der Zeitschrift zu unterstützen; insbesondere aber wünscht er auch, dass ihm aus allen Gegenden genaue Beschreibungen merkwürdiger in der Atmosphäre vorgekommener optischer Erscheinungen, und Bemerkungen über das Verhältniss, in welchem dieselben vielleicht zu anderen meteorologischen Erscheinungen gestanden haben, zur Veröffentlichung in der Zeitschrift mitgetheilt werden möchten; und sind auch freilich genaue Messungen immer sehr wünschenswerth, so dürfen sich doch Liebhaber, die mit genauen Messwerkzeugen nicht versehen sind, dadurch nicht von der Mittheilung ihrer Beobachtungen und Wahrnehmungen abhalten lassen, weil auch diese weniger vollkommenen Beobachtungen sehr dankenswerthe Bausteine zur immer solideren Aufführung des Gebäudes der meteorologischen Optik und der Meteorologie überhaupt liefern werden. Möglichst genaue Zeitangaben, zu denen ein Jeder für den hier zu erreichenden Zweck immer hinreichend ausgerüstet sein wird, dürfen natürlich nie unterlassen werden. G.

Von Herrn Quetelet in Brüssel sind neuerlich die folgenden interessanten Schriften erschienen, die leider eines Auszugs hier nicht fähig sind, aber die Beachtung der Leser des Archivs recht sehr verdienen:

Sur le Climat de la Belgique par A. Quetelet. Troisième Partie. De l'Electricité de l'air. Bruxelles. 1849. 4.

Observations des Phénomènes périodiques en 1848.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Literar. Bericht Nr. LII. S. 727.)

Jahrgang 1849. Juni- und Juli-Heft. S. 1. Doppler: Ueber eine Reihe markscheiderischer Declinationsbeobachtungen aus der Zeit 1735—1736. — S. 9. Stampfer: Commissionsbericht über die Art und Weise der Veröffentlichung der Resultate der Vermessungen des Catasters. — S. 19. Jelinek: Beitrag zur Theorie der krummen Linien. (Ein interessanter Aufsatz über gewisse krumme Linien, auf welche Herr Jelinek durch das nach Angabe des Herrn Directors Kreil construirte und bereits in Thätigkeit befindliche Anemometer geführt worden ist.). — S. 28. Baumgartner: Versuche über den elektrischen Leitungswiderstand der Erde. — S. 30. Pierre: Ueber Versuche, die Maximalspannung der Dämpfe in der Luft zu bestimmen. — S. 38. Baumgartner: Vorschlag zu Kreil's Uebersetzung: „Ueber den Nutzen der Meteorologie." — S. 40. Zmurko: Zur Integration irrationaler und goniometrischer Differentialformeln. — S. 58. Commissionsbericht über Dr. Pollak's mathematische Noten. — S. 62. Ryll: Abhandlung über die Elemente der Lagerechnung (Fortsetzung.). — S. 130. Schrötter: Ueber Brooke's meteorologische Instrumente. (Es sind dies registrirende meteorologische Instrumente, welche sehr ausgezeichnet sein sollen.). —

NECROLOG.

Der nachstehende Necrolog ist uns von der Steiner'schen Buchhandlung in Winterthur ohne Angabe seines Verfassers zugesandt und der Wunsch ausgesprochen worden, dass er in das Archiv der Mathematik und Physik aufgenommen werden möge. Wir entsprechen, die ganze uns gemachte Mittheilung wörtlich aufnehmend, diesem Wunsche um so lieber, je aufrichtiger wir selbst den so zeitigen Hintritt eines Mathematikers beklagen, dessen ausgezeichnete Verdienste, namentlich um die Geometrie, von uns im Archiv stets freudigst anerkannt worden sind, wie den Lesern desselben gewiss noch erinnerlich sein wird. Jedenfalls würde Adams, wenn er länger gelebt hätte, der weiteren Ausbildung der Geometrie, und der so sehr zu wünschenden immer grössern Benutzung der neuen Eroberungen auf diesem Felde bei dem Unterrichte auf Schulen, noch sehr genützt haben, und sein früher Verlust in der Blüthe der Jahre ist daher aufrichtigst zu beklagen.

Carl Adams.

Die mathematische Wissenschaft hat jüngster Tage einen ihrer eifrigsten Vertreter verloren, indem Carl Adams, aus Rheinpreussen gebürtig, Lehrer an der Gewerbsschule in Winterthur, am 14. November 1849 einem hitzigen Nervenfieber im kaum vollendeten 39. Lebensjahre unterlag.

Wenn uns im Allgemeinen Schmerz befällt beim Hinscheiden eines noch so jungen Mannes, so wird unsere Trauer zur wehmuthsvollen Klage, wenn wir mit dem Hingeschiedenen einen Schatz von schönen Hoffnungen, eine geistige Kraft in die Grube senken sehen, deren längere Wirksamkeit für die Nachwelt von segensreichen Folgen gewesen wäre. Dies gilt von dem Heimgegangenen im vollsten Maasse, und zwar nicht nur von seiner Amtsthätigkeit als trefflicher Lehrer, sondern vielmehr von der treuen Pflege, mit welcher er seine Wissenschaft umfing. Von der Natur mit ausgezeichneten Geistesgaben versehen, ausgerüstet mit tiefer Kenntniss seines Faches, hatte er sich zur schönen Aufgabe gemacht, seine Kraft einem Zweige der Wissenschaft zuzuwenden, welcher leider durch eine einseitige Cultur der grossen Entdeckungen des 17. und 18. Jahrhunderts allzulange vernachlässigt worden ist, nemlich der Euklidischen Geometrie. Weit entfernt aber — wie dies seither so oft geschah — in einer sklavischen Nachahmung des grossen griechischen Meisters oder in einer Reform seiner Methode das Heil für die Schule und die Wissenschaft zu finden, richtete er mit seltenem Erfolge sein Streben dahin, zu zeigen, dass die euklidische Geometrie innere Lebenskraft genug habe, um sich selbstständig auf den Höhepunkt zu heben, auf welchen man dieselbe nur durch das Element der Algebra heben zu können vermeinte. Dieser leitende Gedanke, welcher den Verstorbenen mit der vollsten Klarheit durchdrang, musste ihn nothwendig zu der in ihm fest gegründeten Ansicht bringen, dass eine Reform im Systeme der Geometrie sowohl durch die Entwickelung der Wissenschaft selbst, als durch die Anforderungen der Zeit nothwendig geworden sei. Beseelt von dem Bewusstsein, dass diese Reform, wenn sie zum segensreichen Resultate führen sollte, mit der grössten Sorgfalt vorgenommen werden müsse, und mit dem festen Entschlusse, das Seinige zu Erreichung dieses schönen Zieles beizutragen, unternahm er, einzelne Partieen der Geometrie nach der oben ausgesprochenen Grundansicht zu bearbeiten.

Den Anfang machte er mit seiner „Lehre von den Transversalen“ (Winterthur bei Steiner 1843) und sicherte sich mit diesem ersten Auftreten den Ruf eines selbstständigen und scharfsinnigen mathematischen Schriftstellers, der es trefflich verstand, der auf dem Uebergang von den Elementen ins weitere Gebiet der geometrischen Forschung begriffenen Jugend jene schönen und neuen Theorieen zugänglich zu machen. Selbst in Paris machte diese Arbeit Aufsehen, und fand besonders bei einigen Professoren der école centrale einen solchen Beifall, dass ein ehemaliger Schüler von Adams, welcher dort studirte, mit einer Uebersetzung derselben beauftragt wurde, deren Erscheinen wir von der nächsten Zukunft erwarten dürfen.

Das Jahr 1845 brachte uns den ersten Theil seiner „harmonischen Verhältnisse“, ein Werk, welches den deutlichsten Beweis giebt, wie tief der Verfasser die Bedürfnisse erkannt und wie sehr er der geeignete Mann war, denselben abzuhelfen. In Verbindung mit der zuerst erwähnten Schrift lag nun die ganze Bedeutung der Richtung vor, welche Adams im Gebiete der Geometrie eingeschlagen wissen wollte; es lagen zwei klar ausgearbeitete Partieen der Geometrie vor, die besonders im Gebiete der angewandten Mathematik (z. B. Optik) zum Theile schon eine Rolle spielen, und noch eine wichtigere Rolle spielen werden. Schade, dass der zweite Theil dieses Werkes, welcher die harmonischen Verhältnisse des körperlichen Raumes und eine ausführliche Theorie der Kegelschnitte enthalten sollte, bis jetzt nicht erscheinen konnte, indem der Verfasser von anderer Beschäftigung abgezogen wurde, denn schon im Jahre 1846 erschienen seine „merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks“ eine Schrift, welche sich selbst nicht als ein blosses curiosum ankündigt, etwa als Uebungsstoff des geometrischen Scharfsinnes zu ihrem Dasein berechtigt; sondern die vielmehr mithelfen soll und kann, ein vollständiges und abgerundetes System der Geometrie zu ermöglichen. Nicht ohne grossen Beifall zu ernten, erschien im gleichen Jahr eine neue Auflösung des Malfattischen Problems, welche vor allen andern bisher bekannten Auflösungen das zum Voraus hatte, dass sie die Ausdrücke leicht und fasslich darstellte, welche Malfatti selbst hinterlassen hatte, und welche selbst von den scharfsinnigsten mathematischen Forschern vergebens darzustellen versucht worden waren. Eine noch fasslichere Auflösung dieses Problems findet sich im Programm der Winterthurer Gewerbsschule von 1848.

Wenn diese genannten Werke des Verstorbenen schon die Aufmerksamkeit der mathematischen Welt auf sich gezogen hatten, so geschah dies jedoch noch in weit höherem Maasse durch sein neuestes Werk „Geometrische Aufgaben mit besonderer Rücksicht auf geometrische Construction“; worin die ausgesprochene Tendenz in ihrer vollen Bedeutung an den Tag tritt, und worin die geistige Kraft des Verfassers in ihrem hellsten Lichte strahlt. Diese Aufgabensammlung birgt unter ihrem bescheidenen Titel einen wahrhaft goldenen Kern für die Wissenschaft, und sichert dem Heimgegangenen unsterblichen Nachruhm in den Annalen der Mathematik. Nicht nur wird jede andere ähnliche Sammlung durch sie überflüssig, sondern es öffnet sich durch sie dem studirenden Jünglinge ein Gesichtspunkt der Wissenschaft, der nur von den vortheilhaftesten Folgen für die andern Zweige seines Studiums sein kann.

Es konnte unsere Absicht nicht sein, eine ausführliche Kritik der Werke unseres hingeschiedenen Freundes zu liefern; aber an seinem frischen Grabhügel konnten wir es uns nicht versagen, uns und den Freunden des Heimgegangenen in Deutschland vor die Seele zu rufen, was und wen wir in Adams verloren.

Friede, Friede seiner Asche! —

Druckfehler.

Im Literar. Ber. Nr. LII. S. 721. Z. 17. v. u. (im Text) s. m. „befinden“ für „beschäftigt.“

LIV.

Literarischer Bericht.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Taschenbuch der Mathematik oder kürzester Weg zur Erlernung des Wesentlichen derselben, zum Gebrauche für höhere Schulanstalten, Beamte, Techniker etc. von Dr. C. Enzmann, mit einem Vorworte von Dr. G. A. Jahn. Dresden. 1849. 8. 1 Thlr. 15 Sgr.

Die ganze sogenannte reine Mathematik bis incl. zur Differential- und Integralrechnung in Taschenbuchformat! Diese Schrift hat daher eine ganz ähnliche Tendenz wie J. J. v. Littrow's schon im Jahre 1838 herausgegebene Kurze Anleitung zur gesammten Mathematik, die den Lesern des Archivs wohl bekannt sein wird. Vergleichen wir aber beide Bücher mit einander, so müssen wir doch der Schrift von J. J. v. Littrow, die in ihrer Sphäre wirklich mit Geist verfasst, und in einer überaus einfachen und deutlichen Sprache geschrieben ist, ja selbst auch in streng wissenschaftlicher Beziehung, z. B. in der Integralrechnung, manche nicht uninteressante Bemerkungen enthält, bei Weitem den Vorzug geben. Wir glauben daher, dass das vorliegende Buch, da schon eine in ihrer Art gewiss sehr ansprechende Schrift von ganz gleicher Tendenz existirt, ohne sich, so viel uns wenigstens bekannt geworden ist, besonders Bahn haben brechen zu können, immerhin hätte ungeschrieben bleiben können, wenn auch der Wille des Herrn Verfassers gewiss gut gewesen ist. Ueber die gewählte Art der Darstellung wollen wir mit ihm bei einer solchen Schrift nicht rechten; gewiss ist aber bei einer Schrift wie dieser der Gebrauch so vieler ganz ungewöhnlicher

Zeichen, z. B. Sx, $\mathfrak{S}x$; Tx, $\mathfrak{T}x$, $Sc.x$, $\mathfrak{S}c.x$ respective statt $\sin x$, $\cos x$, $\tan g x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, ferner δ statt des gewöhnlichen Differentialzeichens ∂, wobei der Herr Verfasser doch auch hätte bedenken sollen, dass δ in der Mathematik, nämlich in der Variationsrechnung, schon eine ganz andere allgemein recipirte Bedeutung erhalten hat, sehr am unrechten Orte angebracht.

Arithmetik.

Die Arithmetik und Algebra für den Schul- und Selbstunterricht bearbeitet von Karl Koppe, Professor und Oberlehrer am Gymnasium zu Soest. Zweite umgearbeitete und durch zahlreiche Aufgaben vermehrte Auflage. Essen. 1849. 8. 27 Sgr.

Dieses empfehlenswerthe Lehrbuch, so wie die mathematischen und physikalischen Lehrbücher des Herrn Verfassers überhaupt, ist aus seiner ersten Auflage bekannt genug, und bedarf deshalb keiner neuen Empfehlung. Es umfasst alle diejenigen Lehren der Arithmetik und Algebra, mit Einschluss des Binomischen Lehrsatzes, der Combinationslehre, der unbestimmten Analytik u. s. w., welche auf höheren Unterrichtsanstalten vorgetragen zu werden pflegen, in ziemlicher Ausführlichkeit, und wird wegen seiner deutlichen Darstellung und zweckmässigen Anordnung bei'm höhern mathematischen Schulunterrichte gewiss mit Nutzen als Lehrbuch zum Grunde gelegt werden.

Exercices et problèmes de calcul différentiel et intégral; ouvrage traduit de l'anglais par M. Léonce Clarke et dédié à M. Augustin Cauchy. Premier cahier. In 8°. 1849. Prix 1 fr. 50 c.

Wir hoffen nächstens dieses Werk, welches wir jetzt nur dem Titel nach anzuzeigen uns begnügen müssen, um es bald zur Kenntniss des deutschen mathematischen Publikums zu bringen, besonders zu besprechen.

Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. Von L. A. Sohncke, ord. Professor an der Universität zu Halle. Halle. 1850. 2 Thlr. 8.

Wir beeilen uns das Erscheinen einer Schrift anzuzeigen, welche einem wirklichem Bedürfnisse in sehr genügender Weise abhilft. Denn wenn wir auch schon mehrere Beispiel-Sammlungen zur Differential- und Integral-Rechnung besitzen, so genügt doch keine dieser Sammlungen insofern hinreichend, dass sie neben vorzüglicher Anregung zum Nachdenken auch vollständig genug sei, um dem Anfänger in der Differential- und Integral-Rechnung eine hinreichende Uebung im Calcul und dessen Anwendung in der Theorie der krummen Linien und krummen Flächen zu gewähren. Beiden Anforderungen genügt aber die vorliegende Schrift nach unserer Ueberzeugung in ausgezeichneter Weise, wie schon die folgende Angabe ihres Hauptinhalts beweisen wird: I. Differentialquotienten der ersten Ordnung expliciter Functionen einer Variablen. II. Independente Darstellung der Differentialquotienten höherer Ordnung. III. Differentiation impliciter Functionen mehrerer Variabeln. IV. Anwendung der Differentialrechnung auf die Auswerthung unbestimmt erscheinender Ausdrücke. V. Anwendung der Differentialrechnung auf die Bestimmung der Maxima und Minima. VI. Anwendung der Differentialrechnung auf Geometrie. VII. Integration algebraischer irrationaler Functionen. VIII. Integration algebraischer rationaler Functionen. IX. Integration transcendenter Functionen. X. Integration zwischen bestimmten Gränzen. XI. Anwendung der Integralrechnung auf Geometrie.— Wir haben uns beeilen zu müssen geglaubt, alle Lehrer der höheren Analysis, und alle Anfänger in dieser Wissenschaft, welche beabsichtigen, sich in derselben fester zu setzen und sich eine tüchtige Uebung im Differentiiren und Integriren zu verschaffen, auf dieses gewiss sehr nützliche und dem Unterrichte in der Analysis gewiss sehr förderliche Buch aufmerksam zu machen, und empfehlen dasselbe nochmals zur sorgfältigsten Beachtung.

Die Vortheile der Lebens-Versicherungs-Banken. Durch mathematisch genaue Berechnung nachgewiesen an der Lebens- und Pensions-Versicherungs-Gesellschaft Janus in Hamburg. Zugleich eine Aufgabensammlung über Zinseszins-, Sparkassen- und Rentenrechnung. Von Dr. August Wiegand. Halle. 1849. 8. 3 Sg.

Eine zwar nur kleine, aber manche Belehrung darbietende Schrift. Unter mehreren Banken giebt der Herr Verfasser dem Janus, nach angestellter Vergleichung desselben mit jenen, den Vorzug.

Geometrie.

Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maasses. Ein Lehrbuch von Dr. Oskar Schlömilch, Professor der höheren Mathematik und Mechanik an der technischen Bildungsanstalt zu

Dresden. Erster Theil. Geometrie der Ebene. Mit fünf Figurentafeln. Eisenach. 1849. 8. 1 Thlr.

Der Herr Verfasser hat in diesem ersten Theile des vorliegenden Werks ein sehr ansprechendes Lehrbuch der sogenannten ebenen Geometrie und der ebenen Trigonometrie in „organischer Gliederung“ und nach „heuristischem Gedankengange“ geliefert, in welchen beiden Beziehungen er in der Vorrede sein Buch den nach euklidischer Methode verfassten Lehrbüchern gegenüber stellt. Wenn denkende Mathematiker der nach euklidischer Methode verfassten Lehrbücher zuweilen besonders rühmend gedenken, so haben dieselben dabei wohl weniger diese Methode an sich, als vielmehr die durch dieselbe unzweifelhaft erreichbare und wirklich erreichte grosse mathematische Strenge und Evidenz im Sinne, ohne damit geradezu in Abrede stellen zu wollen, dass eine solche Strenge auch auf anderem Wege erreichbar sei. Wenn nun der Herr Verfasser in der Vorrede eine etwa zu ziehende Parallele zwischen seinem vorliegenden Buche und dem, wie er meint, eine gleiche Tendenz verfolgenden Lehrbuche der Geometrie von K. Snell. Leipzig. 1841. (M. s. Literar. Ber. Nr. II. S. 29.) entschieden zurückweist, so geben wir ihm darin vollkommen recht, sind jedoch der Meinung, dass eine solche Zurückweisung für urtheilsfähige Mathematiker ganz unnöthig war; denn wer beide Bücher kennt, kann unmöglich versucht werden, eine solche Parallele zu ziehen. Herrn Schlömilch's Buch ist, mag es immerhin nicht der sogenannten euklidischen Methode in ihrer Form huldigen, doch ein völlig strenges und dabei, wie schon erwähnt worden, in sehr ansprechender Darstellung verfasstes Lehrbuch, das man aber nicht nach Tisch, auf dem Sopha liegend, lesen kann, sondern das Nachdenken erfordert und zum Nachdenken anregt, was bei einem Lehrbuche immer mit eine Hauptsache ist; was Herrn Snell's Buch ist, wollen wir hier nicht weiter aus einander setzen, aber, ohne dessen Herrn Verfasser im Geringsten persönlich zu nahe treten zu wollen, müssen wir doch wenigstens so viel bemerken, dass durch dasselbe gewiss Niemand ein Geometer, d. h. zur selbstständigen Führung einer geometrischen Untersuchung befähigt werden wird. Wir wiederholen, dass das vorliegende neue Lehrbuch der ebenen Geometrie und ebenen Trigonometrie eine sehr gute, aus einer selbstständigen Anschauung der Wissenschaft hervorgegangene Darstellung der beiden betreffenden Disciplinen liefert, das wir mit grossem Vergnügen gelesen haben, und das sich gewiss viele Freunde erwerben wird, selbst auch bei seiner grossen Deutlichkeit und einfachen Darstellungsweise zum Selbststudium empfohlen zu werden verdient, wobei noch besonders hervorgehoben werden muss, dass es auch eine ziemliche Vollständigkeit erstrebt, und in manchen Partieen weiter geht als andere derartige Bücher, indem es z. B. auch die ebene Polygonometrie in seinen Kreis gezogen hat, und auch die Construction des regulären Siebzehnecks lehrt, auch manche Aufgaben und Betrachtungen heranzieht, die sich in andern geometrischen Lehrbüchern nicht finden. Wir empfehlen daher dieses neue Lehrbuch der Beachtung der Leser unserer Zeitschrift recht sehr aus vollkommenster Ueberzeugung, und wünschen, dass der Herr Verfasser uns recht bald mit der Fortsetzung erfreuen möge.

Lehrbuch der descriptiven Geometrie von T. Franke, Dr. phil., Professor an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.*) Erstes Heft. Die Darstellung des Punktes, der Linie und der Ebene nach der Parallel-Projection. Mit acht Taf. in Qrt. Leipzig. 1849. 8. 22½ Sgr.

Die deutsche Literatur, wenn auch in neuerer Zeit mehrere Werke über descriptive Geometrie erschienen sind, was bei der grossen Wichtigkeit dieses Gegenstandes für die Technik, welche mit Recht auch bei uns immer mehr anerkannt wird, nicht anders sein kann, ist nicht gerade sehr reich an solchen Werken, wenigstens jedenfalls nicht so reich wie die französische Literatur, und jede neue Erscheinung auf diesem Gebiete verdient daher Dank. So auch die vorliegende verdienstliche Schrift. Mit Recht bemerkt der Herr Verfasser in der Vorrede, dass die descriptive Geometrie zwar in ihrem dermaligen Gewande allerdings die Regeln umfasse, nach welchen Linien und Flächen mit Hülfe der Projection sich darstellen lassen, damit aus der Projection die wahre Beschaffenheit oder äussere Erscheinung dem Gesichtssinne zugeführt werde, dass aber allerdings die Methode der Projection einer höheren Auffassung fähig sei, zufolge welcher ihr Zweck darin bestehe, aus den Wahrheiten der elementaren Geometrie der Ebene und des Raumes heraus die Eigenschaften der gesetzmässigen Raumgebilde organisch zu entwickeln, sonach die elementare Geometrie in nothwendiger Schlussfolge fortzubilden. Sie leite im Allgemeinen zu demselben Ziele, wie die analytische Geometrie; denn der Veränderung, welche diese mit ihren Gleichungen vornehme, entspreche die Zeichnung der graphischen Methode, nur mit dem Unterschiede, dass die Bedeutung jener Veränderung, wenn sie eine geometrische Wahrheit enthalte, in die Sprache der Geometrie zu übersetzen sei, während die graphische Methode das Liniengebilde oder dessen Veränderung nach Lage und Gestalt dem äussern und innern Sinne zur unmittelbaren Anschauung bringt, und daher auf einem geraden und leichten Wege zum Ziele führe. In diesem Sinne beabsichtigt der Herr Verfasser die ganze descriptive Geometrie in dem Werke, dessen erstes Heft uns jetzt vorliegt, zu behandeln, und je mehr wir selbst von der Richtigkeit dieser Auffassungsweise überzeugt sind, durch welche allein die descriptive Geometrie zur wissenschaftlichen Methode erhoben wird und nicht bloss eine Dienerin der Technik bleibt: desto mehr empfehlen wir dieses neue Werk über descriptive Geometrie den Lesern des Archivs zu sorgfältiger Beachtung. Das vorliegende erste Heft enthält nach einer Einleitung den Punkt, die gerade Linie, zwei Gerade, die Ebene, die Ebene und Gerade, zwei Ebenen, das körperliche Dreieck, neue Lage der Projections-Ebenen, neue Lage des Punktes, der Geraden und der Ebene. Man wird aus dieser Inhaltsangabe die systematische Anordnung des Ganzen und die auf die analytische Geometrie genommene Beziehung — indem z. B. die beiden letzten Abschnitte der Lehre von der Transformation der Coordinaten in der analytischen Geometrie entsprechen —, leicht

---

*) Jetzt an der polytechnischen Schule zu Hannover.

erkennen, und dem Herrn Verfasser das Zeugniss nicht versagen, dass er das sich vorgesteckte Ziel streng im Auge behalten hat. Ausser der allgemeinen Auffassungsweise enthält auch im Einzelnen dieses Heft manches Neue, in welcher Beziehung die Leser besonders auf die ganz vollständige und systematische graphische Behandlung des sphärischen Dreiecks, für welches gewöhnlich nur ein Paar isolirt stehende Aufgaben graphisch aufgelöst werden, aufmerksam gemacht werden müssen, sowie auf andere, damit in Verbindung stehende neue Auflösungen einiger Aufgaben, so dass wir auch in dieser Beziehung dem baldigen Erscheinen der folgenden Hefte dieses sehr verdienstlichen Buchs, welche vorzüglich der Geometrie der Flächen gewidmet sein werden, mit Verlangen entgegen sehen. Die Ausstattung des Textes und der Figurentafeln ist vorzüglich.

Die schwierigeren geometrischen Aufgaben aus des Herrn Prof. C. F. A. Jacobi Anhängen zu van Swinden's Elementen der Geometrie. Mit Ergänzungen englischer Mathematiker und Auflösungen herausgegeben von Dr. August Wiegand, Oberlehrer an der Realschule in den Francke'schen Stiftungen zu Halle. Halle. 1849. 8. 1 Thlr. $7\frac{1}{2}$ Sgr.

Ausser den aus den erwähnten Anhängen entlehnten und aufgelösten Aufgaben enthält diese empfehlenswerthe Schrift noch geometrische Aufgaben und Sätze von 28 englischen Mathematikern, welche der Zeitschrift „The Mathematician“ entnommen worden sind. Im Ganzen enthält die Schrift 159 geometrische Aufgaben, ausserdem in einem Anhange und Nachtrage noch 14 trigonometrische Aufgaben und Sätze von englischen Mathematikern, und die Leser des Archivs sehen also, welches reiche Material ihnen hier geboten wird. Da die Aufgaben in den Anhängen zu van Swinden's Elementen der Geometrie meistens grössere Schwierigkeiten darbieten als Aufgaben in anderen ähnlichen Sammlungen, und die genannte englische Zeitschrift, die vorzüglich für den mathematischen Unterricht wichtig ist, sich wohl in den Händen nur weniger Lehrer der Mathematik befindet, so ist die vorliegende Schrift des Herrn Dr. Wiegand, dessen so eifrigen Bestrebungen für die Förderung des mathematischen, insbesondere des geometrischen Unterrichts wir den erfreulichsten Erfolg von Herzen wünschen, jedenfalls eine sehr verdienstliche zu nennen, und keineswegs etwa in eine Kategorie mit den Auflösungen der algebraischen Aufgaben des Meyer Hirsch von Sachs u. s. w. oder ähnlichen dem mathematischen Unterrichte wenig Nutzen bringenden, fast nur schadenden Büchern, zu setzen, da ihr auch neben ihrem pädagogischen Nutzen wissenschaftlicher Werth nicht abgesprochen werden kann. Sie schliesst sich übrigens an die früher, von demselben Herrn Verfasser, erschienenen „Lehrsätze und Aufgaben aus des Herrn Prof. Jacobi Anhängen u. s. w. Halle. 1847. I. Band und II. Band. I. Abtheil.“ an und bildet mit denselben ein Werk, von welchem sie der Schluss ist.

Optik.

Das orthoskopische Ocular, eine neu erfundene achromatische Linsencombination, welche dem astronomischen Fernrohr, mit Einschluss des dialytischen Rohrs, und dem Mikroscop, bei einem sehr grossen Gesichtsfeld, ein vollkommen ungekrümmtes, perspektivisch richtiges, seiner ganzen Ausdehnung nach scharfes Bild ertheilt, so wie auch den blauen Rand des Gesichtsraumes aufhebt. Mit einer Anleitung zur Kenntniss aller Umstände, welche zu einer massgebenden Beurtheilung und richtigen Behandlungsart der optischen Instrumente, insbesondere des Fernrohrs durchaus nöthig sind, von Carl Kellner, Optiker zu Wetzlar. Nebst einem Anhange: Zur Kenntniss und genauen Prüfung der Libellen oder Niveau's von M. Hensoldt, Mechaniker. Braunschweig. 1849. 8. 15 Ngr.

Wahrlich viel Worte auf diesem Titel! Was es mit dem neuen „orthoskopischen Ocular" für eine Bewandtniss hat, erfährt man aus dieser Schrift keineswegs, denn der Herr Verf. sagt S. 18. ausdrücklich: „Es wird gewiss keiner meiner geehrten Leser die Erwartung hegen, dass ich hier, meine Erfindung rücksichtslos preisgebend, mich auf eine Zergliederung der Einrichtung dieses Oculars und Entwicklung der Grundprincipien, auf welche der gute Erfolg sich gründet, einlassen werde, sondern es vielmehr gern verzeihen, wenn ich nur berichte, was das neue Ocular leistet." Demzufolge hätte er, weil auch alles Uebrige in der Schrift meistens wenig wirkliche Belehrung gewährendes blosses Gerede ist, dieselbe besser ungeschrieben gelassen, sich auf eine blosse öffentliche Ankündigung beschränkt, und die Beurtheilung seines Oculars dem praktischen Gebrauch lediglich anheim gestellt. Aus der Schrift selbst erfährt man nichts weiter, als dass das Ocular vor dem Campani'schen und Ramsden'schen zweifachen Oculare wesentliche Vortheile, die der Titel angiebt, haben soll, „und dass dasselbe, obwohl es ein dreifaches Ocular ist, also aus drei Linsen besteht, doch nur vier spiegelnde Flächen hat." Es kann also durchaus nur der praktische Gebrauch über die Leistungen dieses sogenannten orthoskopischen Oculars entscheiden, die Schrift selbst wäre jedenfalls besser ungeschrieben geblieben; wenigstens warnen wir vor der Anschaffung, wenn sie auch nur 15 Sgr. kostet. Die Vorrede und der Anhang: „An die Männer der Wissenschaft" klingen etwas marktschreierisch. In dem Anhange über die Prüfung der Libellen beschreibt Herr Hensoldt ein zu diesem Zweck bestimmtes besonderes Instrument, über dessen Brauchbarkeit man auch nur nach wirklicher Anwendung wird urtheilen können. Wir sollten meinen, dass wenigstens derjenige, wer einen hinlänglich genau getheilten Vertikalkreis besitzt, an welchen er die Libelle anbinden kann, ein-solches besonderes Instrument zur Prüfung der Libellen sollte entbehren können; jedoch wollen wir nicht absprechen, da bei solchen Dingen eigne praktische Anwendung nöthig ist, wenn man sich zu einem vollgültigen Urtheile will für berechtigt halten.

Astronomie.

Mittlere Oerter von 12000 Fix-Sternen für den Anfang von 1836, abgeleitet aus den Beobachtungen auf der Hamburger Sternwarte von Carl Rümker. Vierte Abtheilung. Erste Hälfte, die 18te bis 21ste Stunde enthaltend. Hamburg. 1849. 4. 1 Thlr. 15 Sgr.

Wir freuen uns sehr, wieder eine Fortsetzung dieses trefflichen, aus directen auf der Hamburger Sternwarte angestellten Beobachtungen abgeleiteten Fixstern-Catalogs anzeigen zu können. Wer die Wichtigkeit genauer Sternpositionen für die heutige Astronomie zu würdigen versteht, wird das grosse Verdienst, welches der Herr Director Rümker durch Bearbeitung dieses Sternkatalogs um die Wissenschaft sich erwirbt, gewiss dankbar erkennen. In dieser Zeitschrift müssen wir uns mit der blossen Anzeige dieser neu erschienenen Fortsetzung begnügen, wünschen aber sehr, dass dieser ausgezeichnete Catalog neben anderen ähnlichen verdienstlichen Arbeiten von allen Astronomen recht vielfach bei ihren Rechnungen und Beobachtungen benutzt werden möge.

Nautik.

Längen-Bestimmung durch den Mond. Eine nautisch-astronomische Abhandlung von Carl Rümker Hamburg. 1849. 2 Thlr.

Diese sehr zu empfehlende, mit grosser Deutlichkeit verfasste Schrift enthält mehr als ihr Titel angiebt. Sie enthält nämlich vier Abhandlungen: Längenbestimmung durch Mond-Distanzen. — Längenbestimmung durch Fixstern-Bedeckungen. — Vorausberechnung der Stern-Bedeckungen. — Längenbestimmung durch Culmination des Mondes und der Mondes-Sterne, welche sämmtlich sehr instructiv, ganz elementar mit fortwährender Rücksicht auf anschauliche Erläuterung durch Figuren verfasst, und durch vollständig ausgerechnete numerische Beispiele sehr zweckmässig erläutert sind, wobei auch mehrere dem Herrn Verfasser eigenthümliche Methoden vorkommen. Den Hauptinhalt bildet aber, eine Sammlung sehr sorgfältig berechneter sehr nützlicher nautischer Tafeln, nämlich: *Tafel* I. Zur Berechnung der wahren Mond-Distanz. S. 2 — 175. II. Mittlere Refraction und Kimmtiefe. III. Halbmesser und Höhen-Parallaxe der Sonne. IV. Contraction des verticalen Halbmessers durch Refraction. V. Vergrösserung des Mondshalbmessers. VI. Höhen-Parallaxe eines Planeten. VII. Correction der mittleren Refraction für Thermometer- und Barometer-Stand. VIII. Zur Verwandlung der Barometer- und Thermometer-Scala. IX. Radienvectoren und Abstände des geocentrischen Zeniths vom geographischen. X. Zur Berechnung der Correction wegen zweiter Differenzen. XI. Correction der mittleren Greenwich-Zeit für zweite Differenzen bei Mond-Distanzen. XII. Verbesserung der Halbmesser in der Ebene der Mond-Distanz. XIII. Correction der Aequatorial-Horizontal-Parallaxe des Mondes wegen Abplattung. XIV. An die durch Approximation gefundene wahre Distanz anzubringende Correction. XV. Hülfstafel für eine neue Methode zur Berechnung der wahren Distanz. — Man sieht hieraus, wie vieles Nützliche diese nautischen Tafeln enthalten, und muss sich dem Herrn Verfasser für die auf die Berechnung derselben verwandte grosse Mühe und Sorgfalt zu dem lebhaftesten Danke verpflichtet fühlen. Möge das Werk bei allen wissenschaftlich gebildeten Seefahrern und auf allen nautischen Lehranstalten die wohlverdiente Beachtung im vollsten Maasse finden, und vielfach gebraucht werden!

Physik.

Der Charakter des Flüssigen. Versuch, den Zwiespalt zu beseitigen, welchen die Erklärung der Erscheinungen des Drucks und der Hebung der Flüssigkeiten veranlasst hat. Von B. T. Berlin. 1850. 8. 5 Sgr.

Gehört zur Drieberg-Literatur, und wird daher hier nicht weiter besprochen, sondern das Urtheil den Lesern selbst anheim gestellt.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1847. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. III. Jahrgang. Redigirt von Professor Dr. G. Karsten.

Erste Abtheilung. Enthaltend: Allgemeine Physik, Akustik, Optik und Wärmelehre. Berlin. 1849. 8. 1 Thlr. 10 Sgr.

Was im Literar. Ber. Nr. XXXVII. S. 538. zur Empfehlung dieses Unternehmens gesagt worden ist, gilt auch von diesem Jahrgange. Der Inhalt der ersten Abtheilung ist auf dem Titel angegeben.

Vermischte Schriften.

Verhandlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft bei ihrer Versammlung zu Solothurn den 24., 25. und 26. Heumonat 1848. 33. Versammlung. Solothurn. 8.

Ausser den Relationen über die einzelnen Versammlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft und den Berichten über die Verhandlungen der Kantonalgesellschaften zu Basel, Bern, La Chaux-de-Fonds, Genf, Waadt, Solothurn, Zürich in den Jahren 1847 und 1848, enthalten diese Verhandlungen auch einige grössere Aufsätze, welche die Beachtung der Leser des Archivs verdienen, und deren Titel daher hier vollständig angegeben werden sollen: Relation über das von Chorherr Berchtold in Sitten entdeckte Maass-System der Natur von Professor O. Möllinger (S. 74. — S. 86.). Jedenfalls ein viele merkwürdige Ideen und Auffassungsweisen enthaltender Aufsatz, der — ohne hier für jetzt irgend Rücksicht auf die praktische Ausführbarkeit der gemachten Vorschläge nehmen und die Richtigkeit der ausgesprochenen Ansichten prüfen zu wollen — den Lesern des Archivs zur Beachtung empfohlen zu werden verdient. Die Schrift selbst, in welcher diese Ideen ausgesprochen sind, führt nach Herrn Professor Möllinger's Angabe den Titel: La Métrologie de la nature, découverte par M. Jos. Ant. Berchthold, Chanoine de Sion etc. ouvrage approuvé par plusieurs comités scientifiques; traduit de l'Allemand par M. Jos. Nic. Hubert. Am Ende seines Berichts macht Herr Professor Möllinger der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft die folgenden Vorschläge:

1) Die naturforschende Gesellschaft der Schweiz möge dem Herrn Verfasser der Métrologie de la nature ihren Dank und ihre Anerkennung seiner Verdienste aussprechen;

2) es möchte der ehemaligen Kommission für die Feststellung der schweizerischen Maasse und Gewichte die Entdeckung des Herrn Verfassers zur Prüfung und zur Berichterstattung an das Centralkomité unseres Vereins vorgelegt werden;

3) im Falle die Kommission die Wünschbarkeit einer allgemeinen Einführung des neuen Maasssystems ausspricht, soll das Centralkomité der naturforschenden Gesellschaft beauftragt werden, sich mit den Akademien oder statistischen Vereinen der angränzenden Staaten in Verbindung zu setzen und behufs einer allgemeinen Einführung zur Prüfung des neuen Maasssystems einzuladen.

Wir führen dies hier an, um zu zeigen, welchen Werth Herr Professor Möllinger auf die Ideen des Herrn Chorherrn Berchthold in Sitten legt. Welche Aufnahme die obigen Anträge bei der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft gefunden haben, geht aus den Verhandlungen (S. 15.) nicht hervor.

Ueber die langsame Oxydation der Körper in atmosphärischer Luft von Prof. Schönbein. S. 87. — S. 113.

Ueber die Erzeugung des Ozons durch Phosphor in reinem Sauerstoffgas von Demselben. S. 114 — 142.

Auszug aus der Abhandlung über die Erfahrungen im Gebiete der Alpenwirthschaft von Kasthofer. S. 143 — S. 145.

Methode den Einfluss zu compensiren, welchen die Eisenmassen eines Schiffes in Folge der Vertheilung der magnetischen Flüssigkeiten durch den Erdmagnetismus auf die Compassnadel ausüben. Von Jacob Amsler. In nautischer Rücksicht machen wir auf diese Abhandlung, welche mit einer andern in den Denkschriften der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft abgedruckten Abhandlung in Verbindung steht, aufmerksam. Die Untersuchungen von Barlow, und die auf verschiedenen Seereisen mit dem von demselben vorgeschlagenen einfachen Compensationsapparate vorgenommenen Prüfungen sind den Lesern des Archivs, welche sich für diesen Gegenstand interessiren, bekannt, und können in dem eine sehr lehrreiche Darstellung von Horner enthaltenden Artikel „Ablenkung der Magnetnadel“ in dem ersten Theile des Gehler'schen Wörterbuchs nachgelesen werden. Die grosse Wichtigkeit dieses Gegenstandes für die Schifffahrt leuchtet auf den ersten Blick ein, und wird, wie Horner am Ende des angeführten Artikels bemerkt, z. B. durch das Unglück des Ostindienfahrers Thames bewiesen, welcher ausser den gewöhnlichen eisernen Schiffsgeräthschaften noch eine Ladung von mehr als 400 Tonnen Eisen und Stahl an Bord hatte, und, nachdem er Abends um 6 Uhr noch das Vorgebirge Beachy-rheadj in Sicht hatte, um 1 bis 2 Uhr Morgens auf der nämlichen Stelle strandete, während dem man sich noch weit vom Lande entfernt glaubte. Sollte es wohl einer anderen Erklärung dieses merkwürdigen Unglücksfalls bedürfen, als der durch die vielen an Bord befindlichen Eisenmassen herbeigeführten grossen Missweisung der Magnetnadel?

Ausserdem enthalten die vorliegenden Verhandlungen noch interessante ausführliche Nekrologe von Heinrich Zschokke (geb. den 22. März 1771 zu Magdeburg, gest. den 27. Juni 1848 zu Aarau), der sich immer eifrig mit Naturwissenschaften in weitester Beziehung beschäftigte, so weit dies ohne höhere mathematische Kenntnisse möglich war; und von Daniel Alexander Chavannes (geb. den 21. Julius 1765 zu Vevey, gest. den 29. Octbr. 1846 zu Lausanne); so wie viele einzelne interessante mathematische und naturwissenschaftliche Notizen, welche die vorliegenden Verhandlungen der Beachtung der Leser des Archivs sehr werth machen.

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, M. A., F. R. S. E. Vergl. Literar. Bericht. Nr. LII. S. 726.

No. XXII. On the Mathematical Theory of Electricity in Equilibrium. VI. — Geometrical Investigations regarding Sperical Conductors. By William Thomson. — On certain Theorems in the Calculus of Operations. By W. F. Donkin. — On Curves of Double Curvature and Developable Surfaces. By Arthur Cayley. — On the Classification of Curves of Double Curvature. By Rev. George Salmon. — On the Developable Surfaces which arise from Two Surfaces of the Second Order. By Arthur Cayley. — On the Theorems in Space anologous to those of Pascal and Brianchon in a Plane. Part II. By Thomas Weddle. — On the Bifocal Chords of Surfaces of the Second Order. By John Y. Rutledge. — Analytical Demonstration of a Theorem in Carnot's „Theorie des Transversales." By William Walton.

(The next Number will be published on the 1st of May.)

Druckfehler.

In dem Titel der Abhandlung Nr. VIII. in diesem Hefte S. 113. ist leider der Name des Herrn Vfs. der Abhandlung falsch „Mossburger" gesetzt worden. Der richtige Name ist „Mossbrugger."

LV.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Mathematische Abhandlungen von Dr. O. Schlömilch, Professor der höheren Mathematik an der Königlich Sächsischen technischen Bildungsanstalt zu Dresden. Dessau. 1850. 8.

Der Herr Vf. beschenkt uns hier wieder mit einer Reihe interessanter und wichtiger mathematischer Abhandlungen, deren Titel folgende sind: I. Ueber das Theorem von Maclaurin. — II. Die Bürmann'sche Reihe. — III. Ueber approximative Quadraturen. — IV. Ueber ein Doppelintegral mit zwei willkührlichen Functionen. — V. Ueber die Bestimmung der Masse bei ungleichförmiger Dichtigkeit.

Besonders interessant ist uns Nr. II. gewesen, in welcher Abhandlung die Gültigkeitsbedingungen der Bürmann'schen Reihe zum ersten Male vollständig erörtert sind. Aber auch alle übrigen Abhandlungen enthalten des Bemerkenswerthen so vieles, dass wir die Leser des Archivs dringend auffordern, sich auch mit diesen ganz im Geiste der neueren Analysis gehaltenen Arbeiten des Herrn Vfs. baldigst bekannt zu machen. Uebrigens bilden die Abhandlungen I., II., III., und ebenso IV., V., in gewisser Rücksicht ein Ganzes, und das in der Abhandlung V. gewonnene allgemeine elegante Theorem (S. 146.) verdient jedenfalls alle Beachtung.

Geometrie.

Die geometrischen Oerter einiger merkwürdigen Punkte im Dreieck und damit in Verbindung stehende Dreieckssätze. Vom Inspector Gent. Liegnitz. 1850. 4. (Programm der Ritter-Akademie zu Liegnitz von Ostern 1850.)

Diese Abhandlung schliesst sich an die im Archiv Thl. IV. S. 445. gemachte Bemerkung: „dass, wenn man von einem Punkte der Peripherie eines Kreises auf die Schenkel eines Centriwinkels Lothe fällt, die Entfernung der Fusspunkte derselben unabhängig von der Lage des Punktes auf dem Umkreise ist, indem sie lediglich von der Grösse des Winkels abhängt" an, und führt durch sehr einfache Betrachtungen zu einer ziemlich grossen Anzahl geometrischer Sätze, die auch als Uebungen für Schüler sich sehr zweckmässig werden benutzen lassen, weshalb wir dieses lesenswerthe Programm der Aufmerksamkeit der Leser des Archivs recht angelegentlich empfehlen.

Trigonaltriaden in arithmetischer und harmonischer Progression. Von Dr. A. Wiegand. Halle. 1850. 4. 4 Sgl.

Die Anregung zu dieser, sehr zweckmässigen Stoff zu geometrischen und trigonometrischen Uebungen für Schüler darbietenden und deshalb Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten zur Beachtung zu empfehlenden kleinen Schrift gab der in der Zeitschrift: „The Mathematician" zum Beweise hingestellte Lehrsatz:

If the radii of the escribed circles of any plane triangle be in harmonical progression, then will the sides of the triangle be in arithmetical progression;

welchen der Herr Vf. in sehr geschickter Weise ziemlich allgemein auszubeuten, und aus demselben viele zweckmässige Uebungs-Sätze und-Aufgaben für Schüler zu ziehen gewusst hat.

De novo systemate coordinatarum. Dissertatio mathematica auctore G. Stammer. Bonnae. 1849. 8.

Das neue Coordinatensystem, von welchem der Herr Vf. in dieser Schrift handelt, wollen wir mit seinen eignen Worten charakterisiren, indem wir bemerken, dass sich die Figur der Leser selbst leicht wird ergänzen können.

„A puncto fixo F in circuli circumferentia AFB jacente, quae e centro C radio $CF=R$ descripta est, arcus FA, FB in directione opposita abscindamus et in arcuum extremitatibus A, B tangentes circuli AM, BM ducamus, quae sese in puncto M secabunt. Quum in quovis circumferentiae puncto una tantum tangens duci possit, patet punctum M unicum semper exstare, igitur arcubus FA, FB perfecte determinatum esse. Vice versa, quum e puncto M extra circulum iacente duae solum tangentes strui possint, dato puncto M perfecte determinantur arcus AF, *BF*, qui a punctis contactus tangentium cum puncto fixo *F* includuntur. Itaque datis centro et radio circuli atque puncto fixo in circumferentia posito, quodcunque punctum extra circulum situm, duobus arcubus definiri potest, quibus igitur tanquam coordinatis uti licet. Quas novas coordinatas circulares vocemus et litteris ξ, η designemus ita ut ξ arcum *FA* sinistrorsum a puncto *F* numeratum, η contra arcum *FB* dextrorsum descriptum denotet. Punctum fixum *F* origo coordinatarum est."

Es ist diese Schrift, welche wir mit vielem Vergnügen gelesen haben, ein neuer Beweis für die Richtigkeit der schon in diesen literarischen Berichten bei verschiedenen anderen Gelegenheiten gemachten Bemerkung, die aber ursprünglich hauptsächlich von Plücker hervorgehoben und auf die deutlichste Weise in's Licht gesetzt worden ist, dass neue Coordinatensysteme fast immer auch zu neuen merkwürdigen Sätzen und Relationen führen. Es verdient daher diese Dissertation der Beachtung der Leser des Archivs empfohlen zu werden.

Praktische Geometrie.

Verhandeling over de Meetkundige Inhoudsvinding der Nederlandsche Maten door F. J. Stamkart, Math. Mag. Phil. Nat. Doct., Arrondissements - Ijker te Amsterdam. 'S Gravenhage. 1844. 8.

Diese freilich schon früher erschienene Schrift ist erst jetzt zu unserer Kenntniss gelangt. Wir halten dieselbe jedoch für in mehrfacher Rücksicht bemerkenswerth, und machen daher noch jetzt auf dieselbe aufmerksam. Sie betrifft eine Verbesserung der ganz geometrischen Methode, wodurch die Niederländischen Inhalts-Maasse, seit ihrer Einführung, gesetzlich verificirt werden, und zeigt, wie viel diese Methode vor einem directen Messen, mit anderen Inhalts-Maassen, den sogenannten Standart-Maassen, voraus hat. Bei der Anwendung dieser Methode bedürfen die Aicher zur Verificirung eines Inhalts-Maasses nichts weiter als einige nach dem Längenmaasse (dem Meter) getheilte Stäbchen, um die Durchmesser und Höhe zu messen. Auch in allgemeiner mathematischer Beziehung ist diese Schrift interessant, wegen verschiedener in derselben entwickelter Näherungsformeln zur Flächen- und Körperberechnung, die wohl anderweitig wenigstens nicht in dieser Weise gegeben sein dürften. Wir bemerken daher nochmals, dass wir namentlich in jetziger Zeit, wo man wohl in verschiedenen Ländern bald zu neuen Maassregulirungen schreiten wird oder schon geschritten ist, eine besondere Hinweisung auf diese freilich schon vor einigen Jahren erschienene Schrift für angemessen und zweckmässig halten.

Zugleich verbinden wir hiermit noch zwei andere früher erschienene Abhandlungen desselben Herrn Verfassers:

Eenvoudig middel ter naauwkeurige vergelijking van Lengtematen (Overgenomen uit den Algemeenen Konst-en Letterbode. No. 36. van het Jaar 1839.)

Das Princip der in dieser Schrift entwickelten Methode stimmt mit der des Fühlspiegels von Herrn von Steinheil, neuerdings bekannt gemacht in den astronomischen Nachrichten. Nr. 684., ganz überein, und ist auch zur Vergleichung von Maassstäben à bout angewandt. Obschon der Herr Vf. die Theile des Apparats nur selbst, ohne Hülfe eines Künstlers, verfertigt hat, war doch die Richtigkeit des Verfahrens so gross, dass die mittleren Fehler einiger Vergleichungen $\frac{1}{1000}$*mm.* nicht überstiegen. Die Hinweisung auf diese in Deutschland wohl gar nicht bekannte Abhandlung dürfte daher hier gleichfalls angemessen erscheinen.

Aanwijzing eener eenvoudige manier van Wegen-waardoor de fouten der Balansen grootendels onschadelijk gemaakt worden, nevens beschrijving eener Nieuwe Balans. (Overgenomen uit den Algemeenen Konst-en Letterbode. Nr. 51., 52. en 53., van het Jaar 1844.)

Diese Schrift giebt eine Beschreibung einer neuen Weise des Wiegens, welche hauptsächlich darin bestehet, die beiden Schalen vor der Umwechselung der Gewichte fest zu setzen, oder, bei der Methode *Borda's* nur die eine Schale, wovon das Gewicht gewechselt werden soll. Dieses Princip ist angewendet worden bei einer Wage, welche Herr *E. Wenckebach* zu Amsterdam nach des Herrn Vfs. Angabe trefflich verfertiget hat, und das Resultat war, bei einer wiederholten Wiegung von 1 Kilogr., ein mittlerer Fehler für jede Wiegung $= \pm$ 0,5 Milligr.; bei einer Wiegung von einem Gewichte von 5 Kilogr. ein mittlerer Fehler für jede Wieg. $= \pm$ 0,7 Milligr., und bei einer Wiegung von 10 Kilogr. ein mittlerer Fehler einer Wieg. $= \pm$ 1,8 Milligr.

Die vieles Treffliche enthaltende holländische mathematische und physikalische Literatur ist leider für uns Deutsche grösstentheils verschlossen, was wohl zum Theil Schuld des Buchhandels ist. Das Archiv hat daher schon früher öfters auf Erscheinungen in holländischer Sprache gebührend hingewiesen, und wird dies auch fernerhin thun, so oft sich Gelegenheit dazu darbietet.

Astronomie.

Der Bischof Synesius von Cyrene als Physiker und Astronom beurtheilt nebst der ersten deutschen Uebersetzung der Rede des Synesius de dono Astrolabii, oder über das Lob der Astronomie mit verbessertem griechischen Texte herausgegeben von Dr. Bernhard Kolbe. Berlin. 1850. 8. 6 Sgt.

Uranus. *ΟΥΡΑΝΟΣ*. 1850. Zweites Quartal (April. Mai. Juni.)

Das erste Quartal 1850 ist im Literar. Ber. Nr. LIII S. 740. angezeigt, und gilt Alles, was dort gesagt worden ist, auch von diesem Quartal. Die Zeitschrift ist für einen Jeden, welcher sich an irgend einem Tage zu einer an demselben vorfallenden Himmelserscheinung vorbereiten will, im höchsten Grade nützlich. Mancher Liebhaber der Astronomie wird erst in den gewöhnlichen Zeitungen auf eine vorhandene besonders merkwürdige Himmelserscheinung aufmerksam gemacht. Hier findet er Alles, was sich vorausberechnen lässt, beisammen und weiss schon ein Vierteljahr voraus, was merkwürdiges am Himmel vorkommen wird. Keiner, wer sich für die am gestirnten Himmel vorfallenden Begebenheiten interessirt, sollte daher die Anschaffung dieser sehr nützlichen Zeitschrift unterlassen.

Wir machen die Leser des Archivs auf eine Abhandlung von Encke: Ueber die Auflösung der Kepler'schen Gleichung in dem neuesten Stücke der Astromischen Nachrichten. Nr: 714. aufmerksam, welche ihre Betrachtungen an eine geometrische Construction anschliesst, und zu bemerkenswerthen Resultaten und leichten Rechnungsmethoden führt. Uebrigens bemerkt Encke am Schluss seines Aufsatzes selbst, dass schon Cassini zu ähnlichen Resultaten gelangt sei, wie er nachträglich aus Lalande's Astronomie. Ed. III. §. 1248. gesehen habe, einem Buche, von welchem er mit Recht sagt, „dass es in neuerer Zeit zu wenig benutzt werde, da es ein bis jetzt noch nicht erreichtes Muster von Vollständigkeit für seine Zeit bleibe.“

Ferner findet sich in Nr. 709 — Nr. 712. desselben ausgezeichneten Journals eine sehr bemerkenswerthe Abhandlung: Untersuchungen über die Convergenz der Reihe, durch welche das Kepler'sche Problem gelöst wird, von Franz Carlini“, welche eine durch Herrn Professor C. G. J. Jacobi veranstaltete Uebersetzung oder vielmehr Bearbeitung und Vervollständigung einer früher unter dem Titel: Ricerche sulla convergenza della serie che serve alla soluzione del problema di Keplero. Memoria di Francesco Carlini. Milano. 1817. erschienenen merkwürdigen Abhandlung von Carlini ist.

Nautik.

Nautisches Jahrbuch oder vollständige Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1852 zur Bestimmung der Länge, Breite und Zeit zur See nach astronomischen Beobachtungen, nebst einer Anleitung, wie die erforderlichen Rechnungen anzustellen sind. Unter amtlicher Aufsicht herausgegeben von Dr. C. Bremiker Plankammer: Inspector im Königl. Preuss. Ministerium für Handel etc. Berlin. 1850. 8. 15 Sgr.

Diese nautischen Ephemeriden dürften wohl Alles enthalten, was auf der See zur Anwendung kommen möchte, und die Frage möchte nur sein, ob zu diesem Zwecke nicht eine noch etwas grössere Verkürzung zweckmässig und hinreichend gewesen sein möchte, etwa nach Anleitung des nach unserer Meinung sehr ausgezeichneten, auch, was hier nicht unwesentlich ist, auf sehr schönes und starkes Papier gedruckten Nautischen Almanachs von G. F. Ursin (Literar. Ber. LI. S. 708.). Die Zugrundlegung des Meridians von Greenwich kann natürlich nur gebilligt werden, und jede andere würde hier unzweckmässig gewesen sein.

Physik.

Beiträge zur meteorologischen Optik und zu verwandten Wissenschaften. In zwanglosen Heften herausgegeben von Johann August Grunert. Erster Theil. Viertes Heft. Mit sechs lithographirten Tafeln. Leipzig. 1850. 8.

Dieses den ersten Theil beschliessende vierte Heft der Beiträge zur meteorologischen Optik führt auch den besonderen Titel:

Die Lichterscheinungen der Atmosphäre dargestellt und erläutert von R. Clausius. Mit sechs lithographirten Tafeln. Leipzig. 1850. 8. und hat, wie der Titel auch schon besagt, den Zweck, eine übersichtliche, ganz populäre, wenigstens auf alles mathematische Formelwesen verzichtende Darstellung aller in das Gebiet der meteorologischen Optik gehörenden Erscheinungen zu liefern. Eigentlich hätte die Zeitschrift mit dieser Abhandlung beginnen sollen; es war aber nicht leicht, einen ganz geeigneten Schriftsteller für die Verfassung derselben zu finden und zu gewinnen, und so erscheint dieselbe, statt am Anfange, jetzt am Schlusse des ersten Theils der Zeitschrift. Wenn auch dem Herausgeber dieser Zeitschrift nicht zusteht, hier ein Urtheil über die vorliegende Abhandlung auszusprechen, so hält er sich doch für berechtigt, darauf hinzuweisen, dass man an keinem anderen Orte alle in das Gebiet der meteorologischen Optik gehörenden Erscheinungen in so vollständiger Weise wie hier dargestellt finden wird, und weil die Darstellung, wie schon erinnert, auf alles mathematische Formelwesen verzichtet hat, so giebt sich der Herausgeber der Hoffnung hin, dass diese Abhandlung des um die meteorologische Optik schon vielfach verdienten Herrn Dr. Clausius in Berlin für alle, welche sich für die zum Theil so prachtvollen Lichterscheinungen in der Atmosphäre interessiren, — und wer sollte dies nicht! — und dieselben nach ihren Gründen kennen lernen wollen, die reichste Belehrung darbieten, und dieselben gewiss auch zur Anstellung eigener sorgfältiger Beobachtungen aufmuntern wird. Wir müssen uns hier begnügen, den reichen Inhalt dieser Abhandlung nur in übersichtlicher Kürze anzugeben: Einleitung. — Gestalt des Himmels. — Erscheinungen, welche durch die Absorption und Reflexion des Lichts in der Atmosphäre bedingt werden. Schwächung des Lichts in der Atmosphäre. Allgemeine Tageshelle. Die Dämmerung. Die blaue Farbe des Himmels und die Morgen- und Abendröthe. Polarisation des Himmelslichtes. — Strahlenbrechung in der Atmosphäre. Astronomische und terrestrische Strahlenbrechung bei'm gewöhnlichen Zustande der Atmosphäre. Ungewöhnliche Senkung und Hebung des Horizonts. Luftspiegelungen. Fata Morgana. Das Funkeln der Fixsterne. — Erscheinungen, welche durch fremde, nur unter besonderen Umständen in der Atmosphäre vorhandene Körper hervorgebracht werden. Der Regenbogen. Der Hof mit seinen Nebenerscheinungen (Nebensonnen etc.). Die Lichtkränze und das Nebelbild. Das Wasserziehen der Sonne. — Das Nordlicht.

Eine grössere Anzahl sehr schön ausgeführter Figurentafeln tragen sehr zum leichteren und besseren Verständniss dieser Abhandlung bei, welche wegen ihrer systematischen Abfassung und ihrer Vollständigkeit gewiss auch sehr zweckmässig als Lehrbuch bei mehr populär gehaltenen Vorlesungen über meteorologische Optik wird gebraucht werden können.

Für die Fortsetzung dieser „Beiträge zur meteorologischen Optik" und auch für die schon früher gelieferten streng mathematisch gehaltenen Abhandlungen ist die vorliegende Abhandlung namentlich insofern von grosser Wichtigkeit, dass sie die genaue Beschreibung der betreffenden Erscheinungen, mit sorgfältiger Hervorhebung aller bei der Theorie hauptsächlich zu beachtender Umstände derselben enthält, so dass also in dieser Beziehung bei den die strenge mathematische Theorie der Erscheinungen liefernden Abhandlungen stets auf die vorliegende Abhandlung Bezug genommen werden kann, was natürlich der Kürze sehr förderlich ist.

Die Miscellen (Nr. IX.) in diesem Hefte enthalten noch eine von dem Schulamts-Kandidaten Herrn W. Schlesicke in Berlin mitgetheilte interessante literarische Notiz, durch welche die in der Abhandlung Nr. V.*) S. 263. ausgesprochene Vermuthung, dass auch bei Lacaille's Dämmerungsbeobachtungen, nicht weniger

*) S. 463. steht durch einen Druckfehler Nr. VII statt Nr. V.

als bei den Lambertschen Beobachtungen, das Zodiakallicht eine grosse Rolle gespielt haben mag, auf die vollständigste Weise bestätigt wird.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Literar. Ber. Nr. LIII. S. 727.)

(Die Hefte 1849. August und September, sind uns leider, wahrscheinlich durch ein Versehen, bis jetzt noch nicht zugegangen; daher wir deren Anzeige späterhin nachliefern werden.)

Jahrgang 1849. October-Heft. S. 156. Doppler: Ueber ein Mittel, die Spannkraft des Wasserdampfes der comprimirten oder der erwärmten Luft durch das Gehör zu bestimmen. — S. 165. Petrina: Einfluss der Entfernung des Polardrahtes von der Magnetnadel auf das Maximum ihrer Ablenkung. — S. 185. Santini: Mittheilung über den von Gasparis zu Neapel neu entdeckten Planeten. — S. 187. Kapeller's Verbesserung der Barometer. — S. 188. Kunzek: Ueber Beobachtungen der Vegetationsdauer der Kulturpflanzen. — S. 189. Reissenberger: Uebersicht aller bis nun theils trigonometrisch, theils barometrisch bestimmten Höhenpunkte von Siebenbürgen.

Jahrgang 1849. November- und December-Heft. S. 203. Russegger: Beiträge zur Ausmittelung der Abweichung der Magnetnadel. — S. 216 Hartner: Allgemeiner Beweis für Lehmann's Satz über die Lösung des Pothenot'schen Problems. — S. 230. Unger: Mikroskopische Untersuchung des atmosphärischen Staubes von Gratz. — S. 238. Boué: Mittheilung über einen anomalen Regenbogen. — S. 239. Doppler: Ueber eine merkwürdige in Oesterreich aufgefundene gelatinöse Substanz. — S. 266. Boué: Ueber die äusseren Formen der Erdoberfläche und ihre Ursachen. — S. 295. Schrötter: Bericht über die chemische Beschaffenheit einer unter einem Torflager bei Aussee gefundenen gelatinösen Substanz. — S. 285. Haidinger: Bericht über denselben Gegenstand (Dopplerit). — S. 298. Hessler: Commissionsbericht über die Verhandlungen zur Feststellung guter und bequemer Branntweinwagen. — S. 303. Gutachten der Commission. — S. 304. Stampfer: Zur Begründung des Commissionsvorschlages. — S. 316. Brücke: Mittheilung über Reinigung von Aräometern aus Glas. — S. 329. Kunzek: Commissionsbericht bezüglich der Brückenwagen von Rollé und Schwilgué. — S. 331. Arenstein: Eisverhältnisse der Donau, beobachtet in Pesth in den Jahren $18^{47}/_{48}$ und $18^{48}/_{49}$ (Mit einer grösseren Anzahl interessanter Figurentafeln.). — S. 336. Baumgartner: Ueber Ofenheim's Photometer.

LVI.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra, oder einer Grundlehre von der Ablenkung algebraischer Grössenbeziehungen, unternommen von Wilhelm Matzka, Dr. der Phil., k. k. ordentl. Professor der Mathematik und praktischen Geometrie an dem k. böhm. ständischen polytechnischen Institute zu Prag. Mit drei Figurentafeln. Prag. 1850. 4.

Dass man die Lehre von dem Imaginären in der Mathematik in neuerer Zeit aus neuen Gesichtspunkten darzustellen versucht hat, ist den Lesern des Archivs schon aus dieser Zeitschrift selbst, welche mehrere den betreffenden Gegenstand in's Auge fassende Abhandlungen enthält, hinreichend bekannt. Keineswegs dürften aber nach unserer Ansicht die Acten über diesen Gegenstand schon als geschlossen zu betrachten sein, und jede Schrift, welche neue Aussichten auf diesem im Ganzen noch wenig angebauten Felde eröffnet, hat schon deshalb Anspruch auf besondere Beachtung. Die vorliegende Schrift des schon durch viele scharfsinnige Arbeiten bekannten Herrn Verfassers ist wohl das ausführlichste bis jetzt über diesen Gegenstand erschienene Werk, und liefert eine ausführliche systematische Behandlung desselben nach den eigenthümlichen Ansichten des Herrn Verfassers, an welcher wir namentlich auch den dabei aufgewandten philosophischen Scharfsinn besonders rühmend hervorheben müssen. Eine ausführliche Kritik dieses verdienstlichen Werkes würde den Raum, welchen diese literarischen Berichte uns darbieten, bei Weitem überschreiten, und wir müssen uns daher, ausser einer nochmaligen, aus vollkommenster Ueberzeugung geflossenen Empfehlung desselben zu sorgfältigster Beachtung, mit der folgenden allgemeinen Angabe seines Inhalts begnügen:

Einleitung. Erstes Hauptstück Grundzüge der Lehre vom Gegensatze algebraischer Beziehungen der Grössen. Zweites Hauptstück. Grundlinien der Lehre von den imaginären Grössen, oder vielmehr von der Abweichung algebraischer Beziehungen der Grössen. Drittes Hauptstück. Weitere Auseinandersetzung der Lehre von den abweichenden Beziehungen der Wurzeln. A. Vieldeutigkeit der Beziehungen der Wurzeln. B. Besondere Betrachtung der elusiven und transversiven Beziehungen, als jener der zweiten Wurzeln aus negativ beziehlichen Zahlen. Viertes Hauptstück. Das Potenziren nach transversiv beziehlichen Exponenten. Fünftes Hauptstück. Zeichnende Darstellung abweichender Beziehungen von Raumgrössen und graphische Erläuterung des Rechnens mit abweichend, insbesondere mit gekreuzt beziehlichen oder complexen bestimmten Grössen und Zahlen. Einleitung. A. Ablenkende Beziehung der Strecken. B. Ablenkende Beziehung der Winkel und der sie bestimmenden Kreisbogen. C. Ablenkende Beziehungen der ebenen Flächen (Figuren). D. Gedrängte Zusammenstellung der bisherigen Leistungen der Mathematiker in der geometrischen Construction der s. g. imaginären Grössen (Heinrich Kühn. 1736 und 1750. — Buée. 1805. — C. V. Mourey. 1828. — John Warren. 1828. — Karl Friedrich Gauss. 1831. — Anhänger und Nachahmer der Gaussischen Lehre: W. M. Drobisch, Prof. zu Leipzig. G. W. Müller, Major zu Hannover. C. A. Bretschneider, Professor zu Gotha. Dr. Theodor Wittstein zu Hannover. L. Ballauf, Lehrer der Mathem. zu Varel. H. B. Lübsen. J. C. Ullher, Prof. zu Nürnberg. Heinr. Scheffler zu Helmstädt. Franz Moth, Prof. zu Linz. J. Arnstein, Prof. zu Pesth. — W. R. Hamilton. 1844—47. — Man sieht aus diesem Abschnitte, wie genau der Herr Verfasser auch mit den Leistungen seiner Vorgänger bekannt ist, und nirgends wird man eine so vollständige und schöne Uebersicht derselben wie hier finden. — Sechstes Hauptstück. Zeichnende Darstellung der Gleichungen des Zusammenhanges gleichzeitig veränderlicher, complexer oder in ablenkenden Beziehungen vorkommender Zahlen. — Siebentes Hauptstück. Auslegung der Gleichungen des Zusammenhanges allgemeiner Zahlen, wenn einige oder alle solche Zahlen complex — ablenkend beziehlich — werden.

Möge dieses scharfsinnige und gelehrte Werk die allseitigste Beachtung, welche es gewiss recht sehr verdient, in reichstem Maasse finden!

Die Grabekassen. Ihre Einrichtung und Verwaltung, so wie die Reorganisation der bestehenden fehlerhaften Institute. Im Auftrage der königl. sächs. Regierung verfasst von Dr. Carl Heym, Lehrer der Ma-

thematik und der Naturwissenschaften an der Thomasschule zu Leipzig. Leipzig. 1850. 8.

Diese sehr deutlich verfasste Schrift, welche auf die Anwendung alles analytischen Calculs verzichtet, und sich bloss der gemeinen Arithmetik, ohne natürlich die Decimalbrüche auszuschliessen, bedient, verdient allen denen, welche sich über die genannten Institute deutliche Begriffe verschaffen wollen, recht sehr empfohlen zu werden, und wir haben dieselbe mit Vergnügen gelesen. Auch ist in derselben Alles durch Beispiele belegt und erläutert, und die königl. sächs. Regierung, sowie der Herr Verfasser, verdienen jedenfalls Dank, dass sie durch dieselbe über die genannten Institute, welche hauptsächlich von dem gewöhnlicheren Handwerkerstande in's Leben gerufen zu werden pflegen und leider nur zu oft schlecht genug eingerichtet sind, richtige Begriffe zu verbreiten sich haben angelegen sein lassen. Da Lebensversicherungsanstalten principiell von den Grabekassen nicht wesentlich verschieden sind, so dürfte das Schriftchen auch denen, die über erstere sich einen klaren Begriff verschaffen wollen, zur Beachtung zu empfehlen sein.

Geometrie.

Geometrische Aufgaben von Miles Bland. Nach der vierten englischen Originalausgabe für das Bedürfniss deutscher Lehranstalten bearbeitet von Dr. August Wiegand, Oberlehrer an der Realschule zu Halle. Mit 434 Figuren. Halle. 1850. 8.

Der Herr Uebersetzer hat sich durch die Verpflanzung dieser in England sehr beliebten Sammlung geometrischer Aufgaben (Geometrical Problems, by Miles Bland) auf deutschen Boden ein Verdienst erworben, und das Buch verdient jedenfalls allgemeiner bekannt zu werden. Die Aufgaben selbst sind mit kleinerer Schrift vorangedruckt, und dann folgen die Auflösungen. Der Inhalt ist folgender: Erster Abschnitt. Gerade Linien und Winkel. 34 Aufgaben. Zweiter Abschnitt. Gerade Linien und Kreise. 100 Aufgaben. Dritter Abschnitt. Gerade Linien und Dreiecke. 43 Aufgaben. Vierter Abschnitt. Parallelogramme und Polygone überhaupt. 50 Aufgaben. Fünfter Abschnitt. Aufgaben über Transversalen. 47 Aufgaben. Sechster Abschnitt. Construction von Figuren für sich sowohl, als in und um andere. 72 Aufgaben. Siebenter Abschnitt. Eigenschaften der in und um Kreise beschriebenen Dreiecke. 43 Aufgaben. Achter Abschnitt. Quadrate und Rechtecke von Linien in Verbindung mit Kreisen. 39 Aufgaben. Neunter Abschnitt. Construction von Dreiecken. 46 Aufgaben.

Die Lösung der gestellten Aufgaben setzt nur die Elemente Euklid's voraus, und es wird, wie dies in England allgemein gebräuchlich ist, auch nur auf diese verwiesen. Die Resultate der neueren Geometrie sind nur mässig benutzt, wofür in Deutschland mehrere andere neuerlich erschienene Schriften reichlichen Ersatz darbieten. Dass der Herr Uebersetzer die bei dem Original befindlichen „Elemente der Trigonometrie" weggelassen hat, ist ganz recht. Die „Algebraical Problems by Miles Bland" sind früher schon von Herrn Rector Dr. Nagel übersetzt und in diesen literarischen Berichten angezeigt worden.

Geodäsie.

G. Fuss, A. Sawitsch und G. Sabler: Beschreibung der zur Ermittelung des Höhenunterschiedes zwischen dem Schwarzen und Caspischen Meere mit allerhöchster Genehmigung auf Veranstaltung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in den Jahren 1836 und 1837 ausgeführten Messungen, nach den Tagebüchern und den Beschreibungen der drei Beobachter zusammengestellt von Sabler. Im Auftrage der Akademie herausgegeben von W. Struve. (Vorangestellt ist der an die Akademie abgestattete kritische Bericht des Herausgebers.). St. Petersburg. 1849. 4. 7 Thlr. 23 Sgr.

(Wir hoffen später auf dieses wichtige Werk zurückzukommen.).

Praktische Mechanik.

Der Bau der Kettenbrücken, begründet auf die Gesetze des Gleichgewichts der dabei in Wechselwirkung tretenden Kräfte, und bearbeitet für das praktische Bedürfniss ohne Hilfe der Differential- und Integral-Rechnung von Ferdinand Hoffmann, Eisenbahn-Bau-Inspector der k. k. General-Bau-Direction im h. östr. Ministerium für Handel, Gewerbe und öffentliche Bauten. Mit 7 Kupfertafeln. Wien. 1850. 8. 1 Thlr. 15 Sgr.

Dieses nach Navier's Rapport et Mémoires sur les ponts suspendus, Paris. 1823., worin aber die höhere Analysis angewandt wird, bearbeitete Werk scheint ein recht gutes, namentlich auch Praktikern zu empfehlendes Buch zu sein, welches das leistet, was sein Titel verspricht. Wer indess die höhere Analysis und Mechanik kennt, wird freilich gerade bei diesem Gegenstande lieber nach einer deren Hülfe in Anspruch nehmenden Schrift greifen, was aber den Werth der vorliegenden Schrift für Praktiker natürlich keineswegs beeinträchtigt.

Optik.

Zwei weitere Abhandlungen aus dem Gebiete der Optik. 1. Ueber die Anzahl der möglichen Gesichtswahrnehmungen. 2. Versuch einer systematischen Classification der Farben. Von Christian Doppler. Prag. 1848. 4. 12 Sgr.

Leider gestatten diese beiden interessanten Abhandlungen einen Auszug hier nicht. Der Herr Verfasser hat sich aber schon durch so viele scharfsinnige Untersuchungen auf demselben Gebiete bekannt gemacht, dass die Leser des Archivs gewiss nicht unterlassen werden, auch von diesen beiden mehrfaches Interesse darbietenden Abhandlungen nähere Kenntniss zu nehmen.

Physik.

Magnetische und geographische Ortsbestimmungen im österreichischen Kaiserstaate, ausgeführt von Carl Kreil, Director der k. k. Sternwarte zu Prag u. s. w. und Karl Fritsch, k. k. Conceptspraktikanten u. s. w. Zweiter Jahrgang 1847. Prag. 1849. 4. 2 Thlr. 20 Sgr.

Der erste Jahrgang ist im Literar. Ber. Nr. LI. S. 712. angezeigt worden. Der vorliegende zweite Jahrgang enthält Oesterreich unter der Enns, Steiermark, Illyrien, Küstenland, das venetianische Königreich, Dalmatien.

Die Ausdauer und der Fleiss der Herrn Verfasser nehmen unsere vollste Bewunderung in Anspruch.

Geographische Naturkunde oder Grundzüge einer Allgemeinen Naturgeschichte der drei Reiche mit physiognomischer Schilderung der Erdoberfläche von Dr. Wilhelm Ebel. Erste Abtheilung: Plan der geographischen Naturkunde. Zweite Abtheilung: Geographische Naturkunde von Island. Mit 14 zum Theil colorirten Karten und Tafeln. Königsberg. 1850. 8. 2 Thlr. 7½ Sgr.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Liter. Ber. Nr. LV. S. 768.).

Jahrgang 1850. Erste Abth. (Jänner.). S. 3. Santini: Ueber den neu entdeckten Planeten Hygea. — S. 11. Martin: Ueber Photographie. — S. 18. Fritsch: Resultate aus den Beobachtungen über jene Pflanzen, deren Blumenkronen sich täglich periodisch öffnen und schliessen. — S. 34. Stampfer: Abhandlung über die Farbenzersetzung der Atmosphäre. — Koller: Vortrag über Fellöcker's Sternkarte. — S. 137. Pierre: Einige Bemerkungen über magnetische und diamagnetische Erscheinungen. — S. 59. Boué: Ueber die Geologie der Erdoberfläche in Rücksicht auf die Vertheilung der Temperatur, der Aërolithen und der Oceane. — S. 131. Weisse: Uebersicht der meteorologischen Beobachtungen an der Krakauer Sternwarte während des Jahres 1849. —

(Aus den „Sitzungs-Protokollen der zur Leitung des meteorologischen Unternehmens bestellten Commission" hebe ich für Lehranstalten und solche, die sich mit magnetischen Beobachtungen beschäftigen wollen, hervor, dass in Prag Apparate zu Variationsbeobachtungen für Declination und horizontale Intensität nach Angabe des Directors der dortigen Sternwarte, Herrn Kreil's, zu dem äusserst geringen Preise von 100 Fl. C. M. (etwa 69, 9 Thlr.) verfertigt werden, welche vollkommen scharfe Resultate zu liefern geeignet sind. Ferner werden von einem jungen geschickten Künstler, Herrn Nicolas, der sich in London mehrere Jahre mit der höheren Uhrmacherkunst befasst und sich jetzt in Senftenberg, weil er sich dort in der Nähe einer Sternwarte, die ihm für seine Zwecke grosse Vortheile gewährt, befindet, ansässig gemacht hat, nach Herrn Director Kreil's Urtheile hinlänglich gut gehende Chronometer zu dem äusserst geringen Preise von 140 Fl. C. M. (etwa 97, 9 Thlr.) angefertigt. Je mehr die Verbreitung hinreichend gut gehender Chronometer unter allen, die sich mit genaue Zeitbestimmungen erfordernden Beobachtungen beschäftigen, zu wünschen ist, desto mehr verdienen solche Gelegenheiten, durch welche man in den Besitz einer guten Uhr gelangen kann, bekannt gemacht und empfohlen zu werden, namentlich auch Lehranstalten, selbst schon des physikalischen Unterrichts wegen. Und der Preis von 97, 9 Thlr. ist ja so niedrig, dass man fast so viel schon für eine gute Taschenuhr ausgeben muss. Auf den leeren Tand eines goldenen Gehäuses werden Mathematiker und Physiker gewiss gern verzichten, wenn sie nur in dem Besitze eines guten, den an einen Chronometer zu machenden Ansprüchen genügenden Werks sich befinden, wobei wir voraussetzen, dass die von Herrn Nicolas verfertigten Chronometer Taschenchronometer (keine Dosenchronometer) sind, was a. a. O. nicht besonders bemerkt ist. Herr Director Kreil an der Sternwarte in Prag wird gewiss die Bestellung und Prüfung vor der Absendung gern übernehmen, wenn man sich deshalb an ihn wendet. Wir haben uns verpflichtet gehalten, das Archiv zu benutzen, das Obige zur Kenntniss seiner Leser zu bringen, und denselben diese schöne Gelegenheit, sich auf sehr wohlfeile Weise in den Besitz guter Instrumente zu setzen, zu empfehlen. G.)

Jahrgang 1850. Erste Abth. (Februar.). S. 134. Stampfer: Ueber das neue Planimeter des Ingenieurs Caspar Wetli zu Zürich. (Wir müssen alle Geodäten auf diesen in jeder Beziehung höchst lehrreichen Aufsatz des Herrn Prof. Stampfer dringend aufmerksam machen, weil in demselben das von Herrn Caspar Wetli in Zürich neuerlich erfundene, sehr sinnreich ausgedachte Planimeter, ein Instrument zur leichten Ermittelung des Flächeninhalts gegebener Figuren, sehr gründlich untersucht, und in Folge dieser Untersuchung für den praktischen Gebrauch dringend empfohlen wird. Für alle Mathematiker ist dieses Instrument noch besonders in sofern höchst interessant, weil dasselbe eigentlich ein allgemeines mechanisches Hülfsmittel zur leichten Ermittelung des Werths des bestimmten Integrals

$$\int_a^b y\partial x = \int_a^b f(x)\partial x$$

darbietet. Der Werkmeister Herr C. Starke am polytechnischen Institute zu Wien hat in Gesellschaft mit Herrn Wetli ein Privilegium auf die Verfertigung solcher Planimeter im Bereiche des österreichischen Kaiserstaates erworben; der Preis ist aber in dem Aufsatze des Herrn Professor Stampfer, den wir nach von Seiten des Herrn Verfassers erhaltener Erlaubniss den Lesern des Archivs künftig vollständig mitzutheilen hoffen, nicht angegeben. Jedenfalls verdient die schöne und sinnreiche Idee, aus welcher diese neue Erfindung hervorgegangen ist: nämlich das Integral

$$\int_a^b y\partial x = \int_a^b f(x)\partial x$$

in aller Strenge mechanisch darzustellen, alle Aufmerksamkeit, und das Instrument selbst die dringendste Empfehlung und weiteste Verbreitung; denn Jeder, wer sich irgend mit praktischen geometrischen Arbeiten zu beschäftigen Gelegenheit oder Veranlassung hatte, weiss, wie zeitraubend und mühselig die Flächenberechnung ist, wenn der Plan, auf welchem dieselbe vorgenommen werden muss, nur einigermassen gross und complicirt ist.) —

Als besonderes Werk ist den Sitzungsberichten der Kaiserlichen Akademie die folgende ziemlich umfangreiche Schrift (209 Seiten mit einer grossen Anzahl von hauptsächlich Abbildungen von Instrumenten enthaltenden Figurentafeln) beigegeben:

Entwurf eines meteorologischen Beobachtungs-Systems für die österreichische Monarchie. Mit 15 Tafeln. Nebst einem Anhange, enthaltend die Beschreibung der an der k. k. Sternwarte zu Prag aufgestellten Autographen-Instrumente: Windfahne, Winddruckmesser, Regen- und Schneemesser. Mit 2 Tafeln. Von Carl Kreil, Director der k. k. Universitäts-Sternwarte zu Prag. Wien. 1850. 8.

In Verbindung mit dem in dem 3ten Hefte der Sitzungsberichte (S. 58.—S. 95.) abgedruckten Aufsatze desselben Herrn Vfs. finden die Leser des Archivs in dieser Schrift eine höchst lehrreiche Anleitung zu allen Arten meteorologischer und magnetischer Beobachtungen, so wie auch zu den damit zu verbindenden astronomischen Beobachtungen in Betreff der Bestimmung der Zeit, der Breite und des Azimuths, so dass wir allen denen, welche sich mit derartigen Beobachtungen zu beschäftigen die Absicht haben, jetzt in der That keinen bessceren Wegweiser empfehlen können als die vorliegende Schrift, welcher die weiteste Verbreitung in jeder Beziehung sehr zu wünschen ist. Die Leser finden in derselben die Beobachtungen, welche sie in den Kreis ihrer Thätigkeit zu ziehen haben, namhaft gemacht, die erforderlichen Instrumente (unter denen viele neue sinnreich ausgedachte sich befinden, was namentlich auch von den Autographen-Instrumenten gilt) sämmtlich sehr genau beschrieben und abgebildet, die besten Beobachtungsmethoden, die am meisten zu empfehlenden Berechnungsmethoden deutlich auseinandergesetzt und, wo es nöthig ist, vollständig analytisch entwickelt, so wie endlich auch eine Sammlung sehr zweckmässiger, die Rechnung abkürzender Tafeln. Man hat sich daher nicht etwa der falschen Meinung, die vielleicht durch den Titel veranlasst werden könnte, hinzugeben, als wenn diese Schrift bloss für den österreichischen Kaiserstaat wichtig und interessant wäre; keineswegs ist dies der Fall, sie ist vielmehr, wie schon bemerkt worden ist, eine ganz allgemeine sehr vollständige und deutliche Anweisung zur Anstellung aller Arten meteorologischer und magnetischer Beobachtungen, so wie auch zu den damit nothwendig zu verbindenden astronomischen Beobachtungen, der eben deshalb die weiteste Verbreitung unter Allen, die mit Erfolg sich mit dergleichen Beobachtungen beschäftigen wollen, sehr zu wünschen ist.

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, M. A., F. R. S. E. Vergl. Liter. Bericht. Nr. LIV. S. 760.

No. XXIII. On the meaning of the Equation $U^2 = V^2$ when U and V are Products of n Linear Functions of two Variables. By Rev. Thomas P. Kirkman. — On certain Properties of Surfaces of the Second Order. By John Y. Rutledge. — Problem respecting Polygons in a Plane. By Robert Moon. — Notes on the Preceding Paper. By William Thomson. — Extension of the word Area. By Professor De Morgan. — On the Potential of a closed Galvanic Circuit of any Form. By William Thomson. — Note on a Family of Curves of the Fourth Order. By Arthur Cailey. — On the Developable derived from an Equation of the Fifth Order. By Arthur Cailey. — On the Conditions that an Equation should have Equal Roots. Note by Mr. Salmon. — On the General Equations of Geodesic Lines and Lines of Curvature on Surfaces. By Benjamin Dickson. — Notes on Molecular Mechanics: I. On the General Equations of Motion. By Rev. Samuel Haughton. — Theorem on the Quadrature of Surfaces. By Rev. John H. Jellett. — On a Theorem in Confocal Surfaces of the Second Order. By Richard Townsend. — Mathematical Notes: I. On a Theorem in Mr. Hearn's Paper (vol. IV. p. 265.). II. Théorèmes sur l'intégration de l'equation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{r}{x} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = (bx^m + \frac{s}{x^2})y.$$

Par C. J. Malmsten. III. Analytical Thorem concerning Polygons. By. W. Walton.

(The next Number will be published in the 1st of November.)

$\angle MOM' = 76^\circ 16'$

$OA = 0,223$

$OB = 2,610$

$OA' = 0,267$

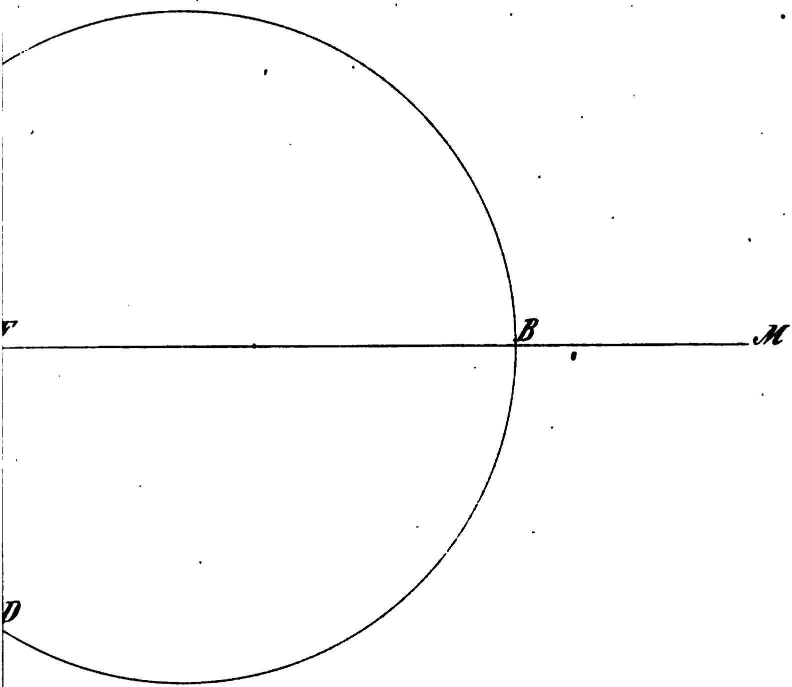
$OB' = 1,422$

$OC = 0,350$

$OD = 1,240$

$OE = 0,250$

$OE' = 0,300$



g. 2.

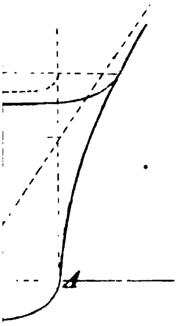
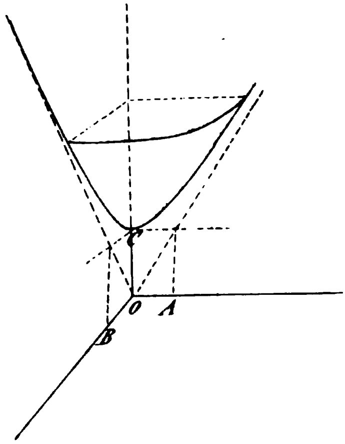


Fig. 3.



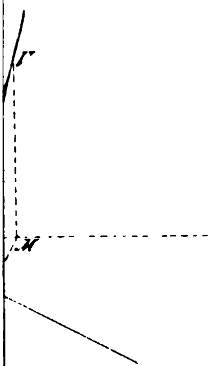
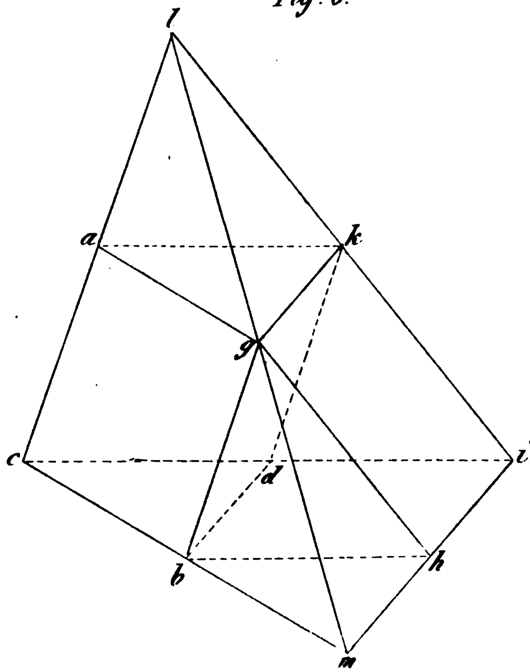


Fig. 6.



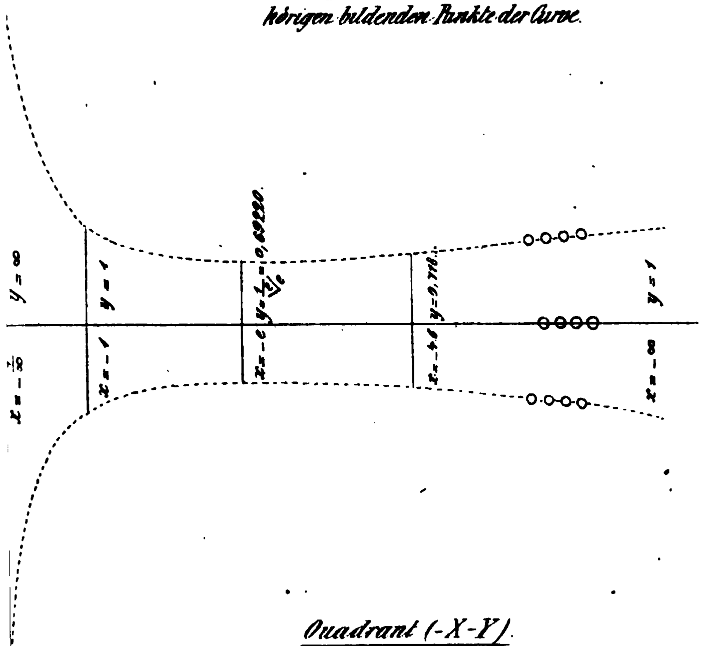
$= \sqrt[x]{x}$.

Quadrant (−X+Y).

Es fehlen

1) die zu geraden Werthen von x gehörigen bildenden Punkte der Curve,

2) die zu ungeraden Werthen von $\frac{1}{x}$ gehörigen bildenden Punkte der Curve.



Quadrant (−X−Y).

Es fehlen

1) die zu geraden Werthen von x gehörigen bildenden Punkte der Curve.

2) die zu geraden Werthen von $\frac{1}{x}$ gehörigen bildenden Punkte der Curve.

Taf. IV

Fig. 2.

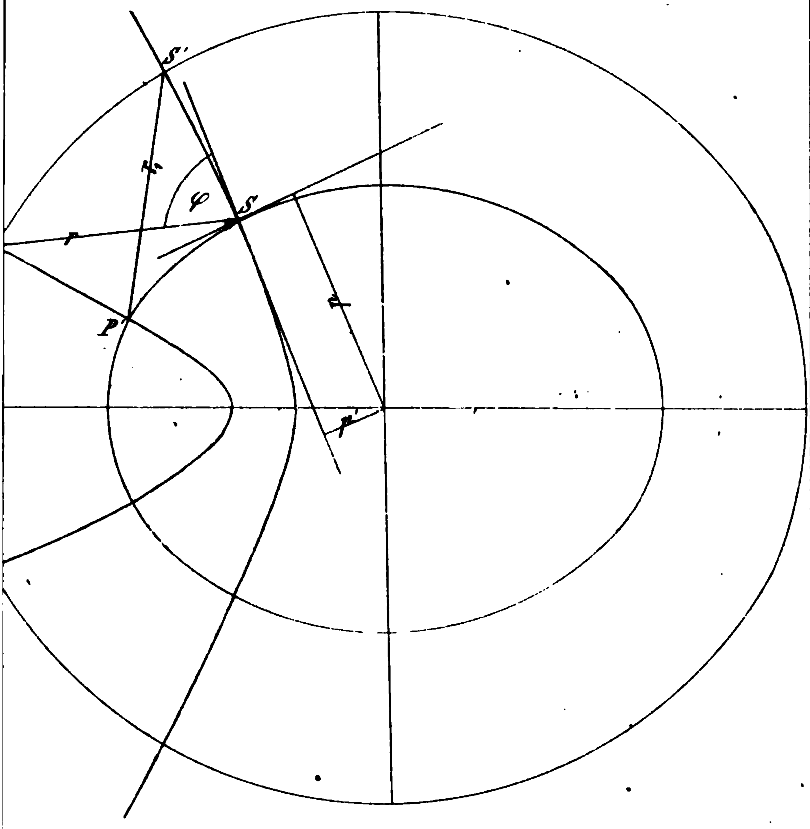


Fig: 3.

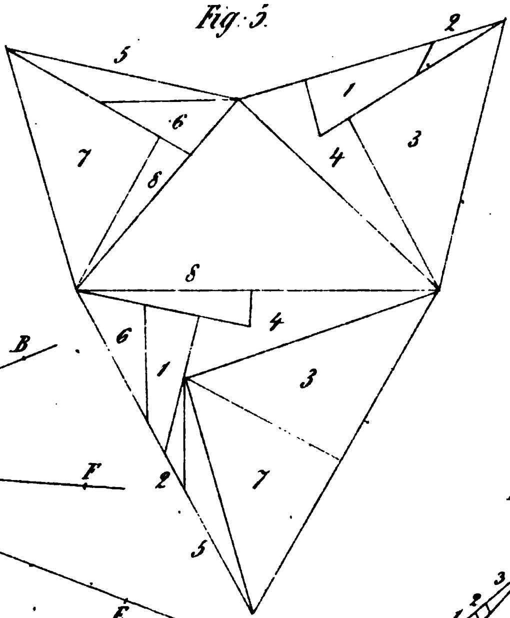
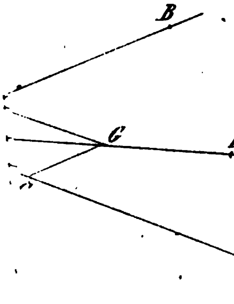


Fig: 4.



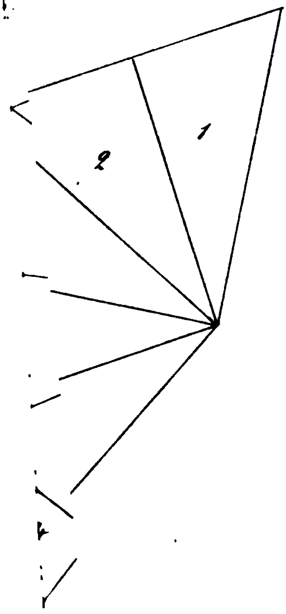
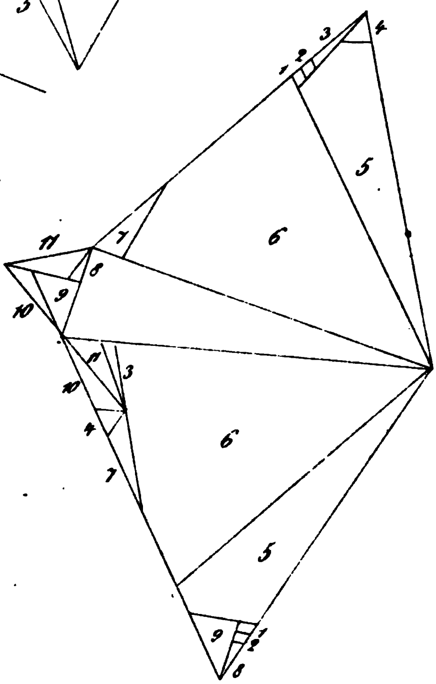
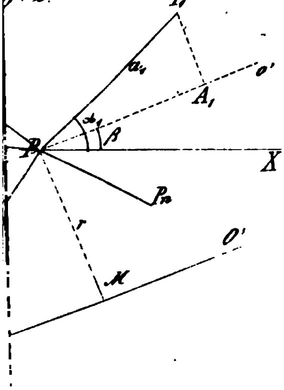


Fig: 7.



g. 2.



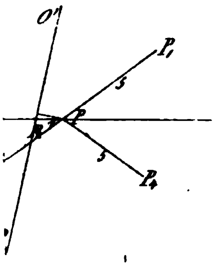


Fig. 7.

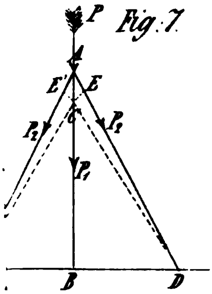


Fig. 8.

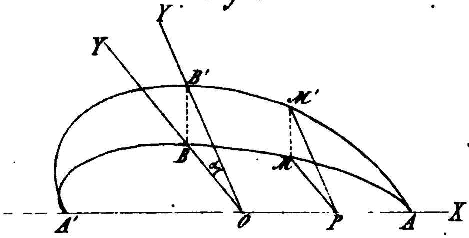


Fig. 9.

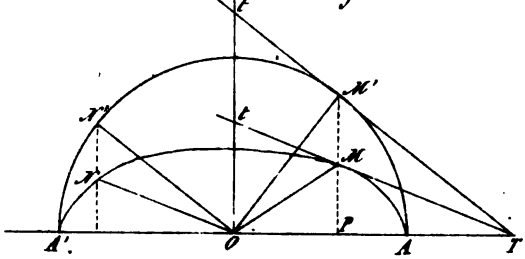
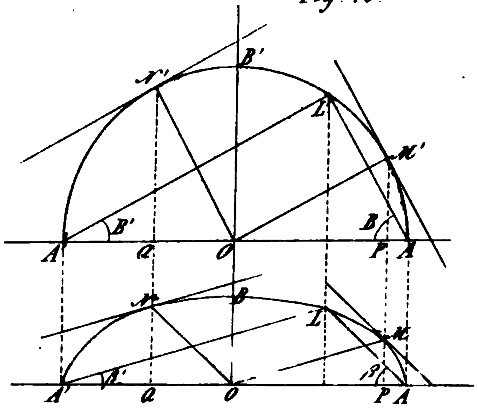


Fig. 10.



Taf. VII.

Fig. 2.

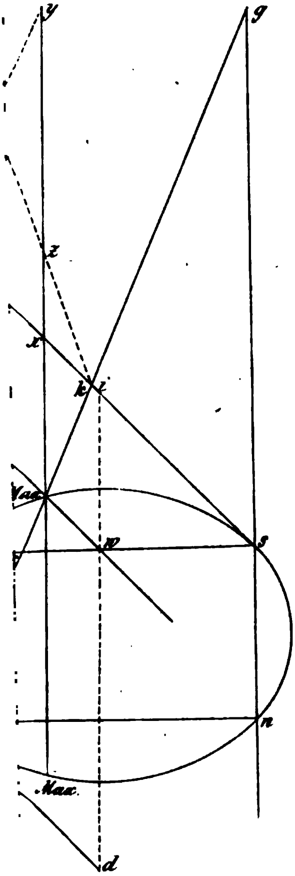
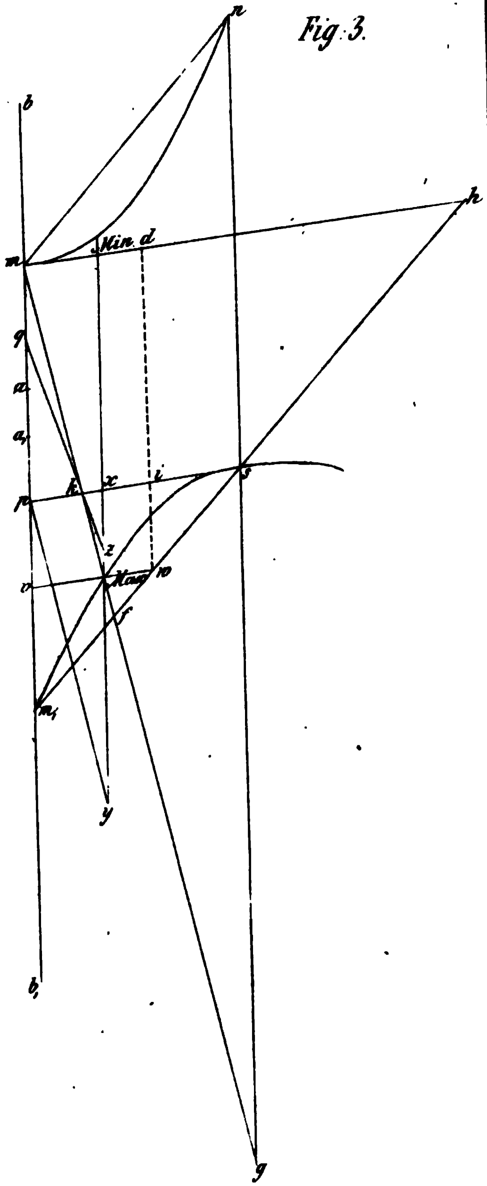


Fig. 3.



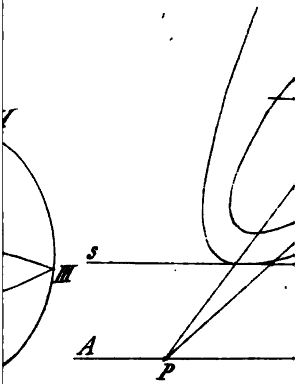


Fig. 5.

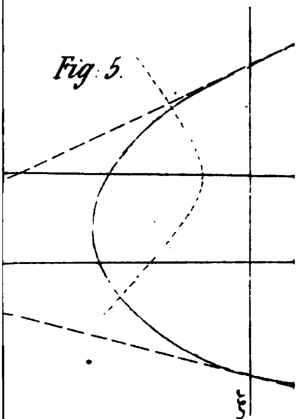


Fig. 4.